

**DANIEL GOLDANI**

**MODELO GEOIDAL DE ALTA RESOLUÇÃO PARA O ESTADO DO PARANÁ:  
APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER – STOKES E DO  
VALOR DO POTENCIAL DO GEÓIDE NA DEFINIÇÃO DA SUPERFÍCIE DE  
REFERÊNCIA VERTICAL**

**Dissertação apresentada como requisito parcial  
à obtenção do grau de Mestre em Ciências  
Geodésicas pelo Curso de Pós-Graduação em  
Ciências Geodésicas, do Setor de Ciências da  
Terra, da Universidade Federal do Paraná.**

**Orientador:  
Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Márcia Cristina Lopes Quintas**

**CURITIBA**

**2006**

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Dedico este trabalho aos meus pais  
Arlindo (*in memoriam*) e Iris Ivone,  
à minha esposa Antônia Silmara  
e à Prof. Márcia Cristina (*in memoriam*).

## AGRADECIMENTOS

À minha orientadora Prof. Márcia Cristina Lopes Quintas (*in memoriam*), por ter sempre acreditado no nosso trabalho.

Aos professores do CPGCG, em especial, Dr. Carlos Aurélio Nadal, Dr. Luis Augusto Koenig Veiga, Dr. Pedro Luis Faggion e Dr. Sílvio Rogério Correia de Freitas, pelo apoio e um ensino de alta qualidade.

Aos colegas Alex Pinto Babinsck, Anderson Kawabata, Andreia Lopes Iescheck, Ângela Cristina Cararo, Carlos Alberto (Magal) Zocolotti Filho, Daniel Carvalho Granemann, Everton V. P. Brum, Fabiani A. Miranda, Fernando C. S. de Abreu, Franciely A. Miranda, Glauber Acunha Gonçalves, Jorge Pinto Gomes, Juliana Dias Wutke, Juliana Moulin Fosse, Karoline P. Jamur, Luiz F. M. Morescki Junior, Luisnei Martini, Maurício I. Sejas, Raul M. P. Friedmann, Roberto Teixeira Luz, pelo companheirismo e apoio.

À colega Maria C. B. Lobianco pelo apoio desde o início desta jornada, fornecendo os subsídios que propiciaram a realização deste trabalho, um agradecimento muito especial.

Ao Prof. Dr. Denizar Blitzkow pelo fornecimento dos dados de gravidade.

Ao Prof. Dr. Nelsi Cogo de Sá pelo fornecimento dos dados GPS.

À colega Dr. Ana C. O. Matos pelo fornecimento do mdt SAM.

Ao Prof. Riccardo Barzaghi pelo fornecimento do material da Escola do Geóide em nossa visita ao *Politecnico di Milano*.

Aos colegas Claudia C. C. Santos, Nívia R. Di Maio, Renato R. Pinheiro pelo apoio e força constante.

Ao Prof. Dr. Sérgio F. de Souza, um dos grandes responsáveis pelo sucesso deste trabalho, colaborador incondicional.

Ao colega Walter H. Subiza Piña, um colaborador experiente e incansável.

Ao colega Rafael Santos Genro pelo companheirismo, apoio e presença constante nas “batalhas”.

À CAPES pelo financiamento no primeiro ano de curso.

## SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	vi
<b>LISTA DE QUADROS</b> .....	ix
<b>LISTA DE SIGLAS</b> .....	x
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> .....	xi
<b>RESUMO</b> .....	xiii
<b>ABSTRACT</b> .....	xiv
<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	1
1.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS .....	1
1.2 ESTADO DA ARTE .....	3
1.3 OBJETIVOS .....	5
1.3.1 Objetivo Geral.....	5
1.3.2 Objetivos Específicos .....	5
1.4 JUSTIFICATIVA .....	6
1.5 ESTRUTURAÇÃO DA PESQUISA .....	7
<b>2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> .....	8
2.1 GEODÉSIA FÍSICA E A INTEGRAL DE STOKES: SÍNTESE CONCEITUAL ...	8
2.1.1 Desenvolvimento do Potencial Perturbador em Harmônicos Esféricos .....	13
2.1.2 Anomalias de Gravidade Fora da Terra .....	17
2.1.3 Generalização da Fórmula de Stokes para um Elipsóide de Referência Arbitrário .....	23
2.1.4 Generalização da Fórmula de Stokes para N .....	25
2.2 A TÉCNICA DA DECOMPOSIÇÃO DA ALTURA GEOIDAL .....	28
2.3 APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER NO CÁLCULO DO GEÓIDE .....	30
2.3.1 Aproximações Plana da Integral de Stokes .....	31
2.3.2 Pontos de Anomalias Gravimétricas como Dado de Entrada .....	32
2.3.3 Anomalias Gravimétricas Médias como Dado de Entrada .....	34
2.3.4 Aproximação Esférica da Integral de Stokes .....	35
2.3.4.1 Núcleo esférico rigoroso da função de Stokes .....	36
<b>3 DESCRIÇÃO E PREPARO DOS DADOS</b> .....	37
3.1 MODELO DIGITAL DO TERRENO .....	38

3.1.1 Correção do Terreno .....	39
3.1.2 Efeito Indireto .....	46
3.1.3 Avaliação Empírica da Propagação de Erro Altimétrico .....	48
3.2 DADOS TERRESTRES DE GRAVIDADE .....	49
3.2.1 Reduções Aplicadas às Observações Gravimétricas .....	50
3.2.1.1 Reduções atmosféricas .....	50
3.2.1.2 Redução gravimétrica ar-livre .....	50
3.2.1.3 Redução gravimétrica de Bouguer .....	51
3.2.2 Interpolação e Extrapolação dos Dados de Gravidade .....	52
3.3 MODELO GEOPOTENCIAL GLOBAL .....	60
3.3.1 Aplicação do Máximo Grau 360 .....	62
3.3.2 O Programa GEOPOT .....	64
3.3.3 Aplicação do $W_0$ na Definição da Superfície de Referência Vertical .....	66
<b>4 DETALHAMENTO DO CÁLCULO DO MODELO GEOIDAL .....</b>	<b>70</b>
4.1 REMOÇÃO .....	70
4.2 CÁLCULO .....	72
4.2.1 Avaliação Empírica da Propagação de Erros na Ondulação Geoidal Residual .....	78
4.3 RESTAURAÇÃO .....	80
<b>5 AVALIAÇÃO DO MODELO GEOIDEPR2006-FFT .....</b>	<b>83</b>
<b>6 INTERPOLADOR DE ALTURAS GEOIDAIIS .....</b>	<b>95</b>
<b>7 CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES .....</b>	<b>97</b>
7.1 CONCLUSÃO .....	97
7.2 RECOMENDAÇÕES .....	98
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>99</b>
<b>DOCUMENTOS CONSULTADOS .....</b>	<b>106</b>
<b>APÊNDICES .....</b>	<b>108</b>
<b>ANEXO .....</b>	<b>127</b>

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - LOCALIZAÇÃO DA ÁREA DE ESTUDO .....	2
FIGURA 2 – TIPOS DE DADOS UTILIZADOS NA DETERMINAÇÃO DO GEÓIDE .....	30
FIGURA 3 - ÁREA DE COBERTURA DOS DADOS UTILIZADOS NA GERAÇÃO DO MODELO GEOIDAL .....	37
FIGURA 4 - MODELO DIGITAL DE TERRENO DA ÁREA DE ESTUDO .....	29
FIGURA 5 - MODELO DIGITAL DO TERRENO DA ÁREA DE ESTUDO, EM PERSPECTIVA .....	39
FIGURA 6 - VARIAÇÃO EM CORREÇÃO DO TERRENO POR CONSIDERAR OU NÃO A BATIMETRIA OCEÂNICA .....	41
FIGURA 7 - DIFERENÇA EM CORREÇÃO DO TERRENO CALCULADA COM O MDT DE 5' EM RELAÇÃO À CALCULADA COM O MDT DE 1' DE ARCO .....	42
FIGURA 8 - DIFERENÇA EM CORREÇÃO DO TERRENO CALCULADA COM O MDT DE 5' EM RELAÇÃO À CALCULADA COM O MDT DE 1' DE ARCO, EM PERSPECTIVA .....	43
FIGURA 9 - CORREÇÃO DO TERRENO NA REGIÃO DE ESTUDO .....	42
FIGURA 10 - CORREÇÃO DO TERRENO NA REGIÃO DE ESTUDO EM PERSPECTIVA .....	45
FIGURA 11 - EFEITO INDIRETO NA REGIÃO DO PARANÁ .....	48
FIGURA 12 - DADOS GRAVIMÉTRICOS OBSERVADOS E INTERPOLADOS ...	52
FIGURA 13 - DESVIOS PADRÃO DA GRAVIDADE INTERPOLADA PARA TODA A ÁREA 2 .....	54
FIGURA 14 - ANOMALIAS DE BOUGUER COBRINDO A ÁREA DE ESTUDO ...	55
FIGURA 15 - ANOMALIAS DE BOUGUER COBRINDO A ÁREA DE ESTUDO, EM PESPECTIVA .....	56
FIGURA 16 - ANOMALIAS AR-LIVRE COBRINDO A ÁREA DE ESTUDO, EM PERSPECTIVA .....	56
FIGURA 17 - ANOMALIAS AR-LIVRE COBRINDO A ÁREA DE ESTUDO .....	54

FIGURA 18 - DIFERENÇAS EM INTERPOLAÇÃO DAS ANOMALIAS AR-LIVRE (VIA BOUGUER VS. VIA <i>KRIGAGEM</i> ), EM PERSPECTIVA .....	58
FIGURA 19 - DIFERENÇAS EM INTERPOLAÇÃO DAS ANOMALIAS AR-LIVRE (VIA BOUGUER VS. VIA <i>KRIGAGEM</i> ) .....	59
FIGURA 20 - DIFERENÇA EM ONDULAÇÃO GEOIDAL ENTRE PGM2000A E EGM96 .....	62
FIGURA 21 - DIFERENÇA EM ONDULAÇÃO GEOIDAL OBTIDA DO MODELO GEOPOTENCIAL PGM2000A UTILIZANDO OS COEFICIENTES ATÉ OS GRAUS 360 E 180 .....	63
FIGURA 22 - DIFERENÇA EM ONDULAÇÃO GEOIDAL OBTIDA COM GEOPOT E APLICANDO $W_0$ , MENOS GEOCOL COM CORREÇÃO $N_0$ .....	65
FIGURA 23 - ONDULAÇÕES GEOIDAIS DO PGM2000A .....	67
FIGURA 24 - ANOMALIAS AR-LIVRE DO PGM2000A .....	67
FIGURA 25 - ANOMALIAS AR-LIVRE DO PGM2000A, EM PERSPECTIVA .....	68
FIGURA 26 - ANOMALIAS RESIDUAIS .....	71
FIGURA 27 - ANOMALIAS RESIDUAIS, EM PERSPECTIVA .....	71
FIGURA 28 - ONDULAÇÃO RESIDUAL SOB EFEITO DE ERRO NA DISSOCIAÇÃO DAS ANOMALIAS GRAVIMÉTRICAS DA ÁREA OCEÂNICA .....	73
FIGURA 29 - ONDULAÇÃO RESIDUAL SOB EFEITO DE ERRO NA DISSOCIAÇÃO DAS ANOMALIAS GRAVIMÉTRICAS DA ÁREA OCEÂNICA, EM PERSPECTIVA .....	74
FIGURA 30 - PROPAGAÇÃO DO ERRO EM ONDULAÇÃO GEOIDAL DEVIDO À DISSOCIAÇÃO EQUIVOCADA DAS ANOMALIAS GRAVIMÉTRICAS NA ÁREA OCEÂNICA .....	75
FIGURA 31 - ONDULAÇÃO GEOIDAL RESIDUAL .....	76
FIGURA 32 - ONDULAÇÃO GEOIDAL RESIDUAL, EM PERSPECTIVA .....	77
FIGURA 33 - PROPAGAÇÃO DO ERRO PONTUAL DE 9,452 mGal NAS ONDULAÇÕES GEOIDAIS RESIDUAIS .....	79
FIGURA 34 - MODELO GEOIDAL GEOIDEP2006-FFT .....	81



FIGURA 35 - MODELO GEOIDAL GEOIDEPR2006-FFT, EM PERSPECTIVA ....	82
FIGURA 36 - MODELO GEOIDAL MAPGEO2004 NA ÁREA DO PARANÁ .....	83
FIGURA 37 - DIFERENÇA EM ONDULAÇÃO GEOIDAL ENTRE OS MODELOS GEOIDEPR2006-FFT E MAPGEO2004 .....	85
FIGURA 38 - DIFERENÇA EM ONDULAÇÃO GEOIDAL ENTRE OS MODELOS GEOIDEPR2006-FFT E MAPGEO2004, EM PERSPECTIVA .....	85
FIGURA 39 - ONDULAÇÃO GPS/RAAP E DISTRIBUIÇÃO DAS REFERÊNCIAS DE NÍVEL .....	86
FIGURA 40 - DIFERENÇA ENTRE A SUPERFÍCIE DO MODELO GEOIDEPR2006-FFT E A SUPERFÍCIE GPS/RAAP .....	87
FIGURA 41 - DIFERENÇA ENTRE A SUPERFÍCIE DO MODELO GEOIDEPR2006-FFT E A SUPERFÍCIE GPS/RAAP, EM PERSPECTIVA .....	87
FIGURA 42 - TELA PRINCIPAL DO INTERPOLADOR DE ALTURAS GEOIDAIS .....	95

## LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 - DIFERENÇAS EM CT CALCULADAS COM MDT DE 5' E 1' DE ARCO .....	43
QUADRO 2 - ESTATÍSTICAS DA COMPARAÇÃO ENTRE ANOMALIAS AR-LIVRE GERADAS VIA BOUGUER E VIA INTERPOLAÇÃO DIRETA POR <i>KRIGAGEM</i> .....	59
QUADRO 3 - COEFICIENTES DO MODELO GEOPOTENCIAL EGM96 .....	60
QUADRO 4 - COEFICIENTES DO MODELO GEOPOTENCIAL PGM2000A .....	61
QUADRO 5 - ESTATÍSTICAS DA ONDULAÇÃO CALCULADA COM ERRO DE DISSOCIAÇÃO DAS ANOMALIAS GRAVIMÉTRICAS OCEÂNICAS .....	74
QUADRO 6 – ESTATÍSTICAS DAS ANOMALIAS GRAVIMÉTRICAS RESIDUAIS COM ERRO DE DISSOCIAÇÃO NA ÁREA OCEÂNICA .....	75
QUADRO 7 – ESTATÍSTICAS DO CÁLCULO DA ONDULAÇÃO GEOIDAL RESIDUAL .....	77
QUADRO 8 – ESTATÍSTICAS DAS ANOMALIAS GRAVIMÉTRICAS RESIDUAIS .....	78
QUADRO 9 - LISTAGEM DOS 24 PONTOS-NÓS QUE CIRCUNDAM O PONTO EM FOCO .....	80
QUADRO 10 - ESTATÍSTICAS DA COMBINAÇÃO DAS MALHAS DE ONDULAÇÕES GEOIDAIS, GEOIDPR2006-FFT MENOS MAPGEO2004 .....	84
QUADRO 11 – DIFERENÇAS PONTUAIS ENTRE GEOIDPR2006-FFT MENOS GPS/RAAP .....	88
QUADRO 12 – DIFERENÇAS PONTUAIS ENTRE O MODELO COMPATIBILIZADO MENOS GPS/RAAP .....	92

## LISTA DE SIGLAS

CAPES	- Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CHAMP	- <i>Challenging Mini-Satellite Payload</i>
DTM2002	- <i>Digital Terrain Model 2002</i>
EGM96	- <i>Earth Gravitational Model 1996</i>
FFT	- Transformada Rápida Fourier
FFT 1D	- Transformada Rápida Fourier unidimensional
GPS	- <i>Global Positioning System</i>
GOCE	- <i>Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer</i>
GRACE	- <i>Gravity Recovery And Climate Experiment</i>
GRS80	- <i>Geodetic Reference System 1980</i>
IAG	- <i>International Association of Geodesy</i>
IBGE	- Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
IGeS	- <i>International Geoid Service</i>
MDT	- Modelo Digital do Terreno
NASA	- <i>National Aeronautic and Space Administration</i>
NIMA	- <i>National Imagery and Mapping Agency</i>
RAAP	- Rede Altimétrica de Alta Precisão
RRNN	- Referências de Nível
PGM2000A	- <i>Preliminary Geopotential Model 2000A</i>
SAM_1mv1	- <i>South American Model</i>
SGB	- Sistema Geodésico Brasileiro
SIRGAS2000	- Sistema de Referência Geocêntrico para as Américas 2000
SRTM	- <i>Shuttle Radar Topography Mission</i>
WGS84	- <i>World Geodetic System 1984</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

$N$	- Ondulação geoidal
$R$	- Raio terrestre médio
$\gamma$	- Gravidade normal no elipsóide
$\Delta g$	- Anomalias de gravidade
$S(\psi)$	- Função de Stokes
$\psi$	- Distância esférica
$d\sigma$	- elemento infinitesimal de ângulo na superfície da Terra
$T$	- Potencial perturbador
$W$	- Potencial de gravidade da Terra real (geopotencial)
$W_0$	- Potencial de gravidade no geóide
$U$	- Potencial da Terra normal (esferopotencial)
$U_0$	- Potencial normal no elipsóide
$\delta g$	- Distúrbio da gravidade
$g$	- Gravidade real
$\Delta T$	- Laplaciano de $T$
$\rho$	- Densidade de massa (neste trabalho: constante de 2,67 g/cm <sup>3</sup> )
$G$	- Constante gravitacional newtoniana
$M$	- Massa da Terra
$GM$	- Constante gravitacional geocêntrica
$H$	- Altitude ortométrica ou função harmônica esférica
$\zeta, \xi, \eta$	- Coordenadas do centro de gravidade da Terra
$\Delta g_{res}$	- Anomalias residuais
$\Delta g^{AL}$	- Anomalias ar-livre dos dados terrestres de gravidade
$\Delta g^{MG}$	- Anomalias ar-livre do modelo geopotencial
$\Delta g^{MDT}, C$	- Correção do terreno
$N^{MG}$	- Ondulação geoidal do modelo geopotencial

$N^{\Delta g_{res}}$	- Ondulação geoidal residual
$N^{MDT}$	- Efeito indireto
$l_N$	- Função kernel de Stokes no plano
$F$	- Operador da transformada rápida de Fourier direta
$F^{-1}$	- Operador da transformada rápida de Fourier inversa
$\Delta G$	- Espectro das anomalias gravimétricas
$\Delta L$	- Espectro do núcleo kernel da função de Stokes
$M \times N$	- Dimensão da matriz de dados
$q$	- Freqüência radial
$\varphi$	- Latitude geodésica
$\lambda$	- Longitude geodésica
$F_1$	- Operador da transformada de Fourier unidimensional direta
$F_1^{-1}$	- Operador da transformada de Fourier unidimensional inversa
$H$	- Altitude ortométrica
$h$	- Altitude elipsoidal (geométrica)
$x, y$	- Coordenadas planas dos pontos de uma malha
$l$	- Distância plana entre dois pontos
$C_{ATM}$	- Reduções atmosféricas
$\gamma_E$	- Gravidade normal no equador do elipsóide
$\gamma_P$	- Gravidade normal no polo
$\gamma_0$	- Gravidade normal no elipsóide
$\Delta g_{BO}$	- Anomalias de Bouguer
$C_{nm}, S_{nm}$	- Coeficientes plenamente normalizados do potencial anômalo
$n, m$	- Grau e ordem do modelo geopotencial
$n_{max}$	- Grau máximo do modelo geopotencial
$J_2$	- Fator da dinâmica de forma da Terra
$a$	- Semi-eixo maior do elipsóide
$b$	- Semi-eixo menor do elipsóide
$N_z$	- Ondulação geoidal no sistema de maré zero "geóide zero"
$N_n$	- Ondulação geoidal no sistema livre de maré "non-tide"

## RESUMO

O presente trabalho descreve a criação de um modelo geoidal de alta resolução para o Estado do Paraná aplicando a transformada rápida de Fourier. Para a definição da superfície física de referência para as altitudes, foi definido um valor  $62\,636\,853,4\text{m}^2\text{s}^{-2}$  para o potencial de gravidade no Geóide. O modelo geoidal, denominado GEOIDEPR2006-FFT, foi gerado cobrindo a área entre os paralelos  $-27^\circ$  e  $-22^\circ$  e os meridianos  $-55^\circ$  e  $-48^\circ$ . A técnica empregada nos cálculos foi a remoção-cálculo-reposição (*remove-restore*) da altura geoidal, combinando as informações do modelo geopotencial global PGM2000A, dos dados terrestres de gravidade e do modelo digital de terreno SAM\_mv1. O modelo PGM2000A foi utilizado no seu máximo grau 360 para as contribuições de anomalias gravimétricas e de ondulação geoidal. O desempenho do modelo geopotencial foi comparado com o EGM96, do qual é derivado. A superfície de referência do modelo PGM2000A foi definida pela aplicação do valor ao potencial no geóide  $W_0$ . Os dados terrestres de gravidade utilizados neste trabalho são provenientes de várias instituições e foram uniformizadas no sistema de referência SIRGAS2000. No total, foram 40635 observações de gravidade após o processo de filtragem e depuração de erros. As anomalias gravimétricas foram trabalhadas na resolução de 5 minutos de arco, que é a resolução na qual foi gerado o modelo geoidal. As áreas do Estado do Paraná onde a distribuição dos dados de gravidade eram inferiores a esta resolução foram preenchidas por meio de interpolação. Para isso, utilizou-se a redução de Bouguer, cujas propriedades são mais indicadas para esta finalidade. A forma esférica de Stokes e de núcleo rigoroso 1DFFT foi utilizada para o cálculo das ondulações geoidais. A integração da fórmula de Stokes foi efetuada sob a forma de convolução através da transformada rápida de Fourier. O modelo geoidal GEOIDEPR2006-FFT calculado foi comparado com o modelo geoidal MAPGEO2004 e com dados de GPS sobre a rede altimétrica RAAP do Sistema Geodésico Brasileiro visando a sua utilização prática. Um programa interpolador foi criado com a finalidade de se obter a altitude ortométrica para qualquer ponto dentro do Estado do Paraná, a partir das coordenadas geodésicas latitude, longitude e altitude geométrica, tal como obtidas pelo GPS.

Palavras-chave: Geóide, Interpolação de gravidade, Potencial no Geóide  $W_0$

## ABSTRACT

This work describes the creation of a high-resolution geoidal model to Paraná State applying the Fast Fourier Transform. To the definition of the physical surface of reference to the heights, a value of  $62\,636\,853,4\text{ m}^2\text{s}^{-2}$  was defined to the Gravity's Potential on the geoid. The Geoidal Model, called GEOIDEPR2006-FFT, was generated covering the area between the latitudes  $-27^\circ$  and  $-22^\circ$  and the longitudes  $-55^\circ$  and  $-48^\circ$ . The technique applied in the computation was the Remove-Restore of the geoidal height, combining the information of the global geopotential model PGM2000A, terrestrial observations of gravity, and the digital terrain model SAM\_mv1. The global geopotential model PGM2000A was used in its maximum degree of 360 to the contributions of gravity anomalies and geoidal ondulation. The performance of the geopotential model was compared with the EGM96, of which it is originated. The surface of reference of the PGM2000A model was defined by application of the value to potential on Geoid  $W_0$ . The gravity terrestrial data used at this work were supplied by a lot of institutions and all these data were converted to the reference system SIRGAS2000. 40635 gravity observations were used after the process of filter and errors purifying. The gravity anomalies were used with a resolution of 5 arc-minutes, which is the resolution that was created the geoidal model. The area of Paraná State presenting gap areas was accomplished by interpolation. To this purpose, the Bouguer anomaly was implemented, whose properties are more indicated to this objective. The spherical form of Stokes and rigorous kernel 1DFFT was used to compute of geoidal heights. The integration of Stokes formula was used by the convolution of Fast Fourier Transform. The geoidal model GEOIDEPR2006-FFT computed was compared with not only the geoidal model MAPGEO2004, but also GPS data on the benchmarks of the Vertical Network RAAP of the Brazilian Geodetic System, aiming its practical utilisation. An interpolation program was developed and its purpose is to obtain the orthometric height to any point inside of Paraná State, having as input data geodetic coordinates latitude, longitude and geometric height, that were supplied by GPS.

Keywords: Geoid, Interpolation of Gravity, Potential on the Geoid  $W_0$

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

A modelagem do geóide tem desempenhado papel importante na busca da determinação da altitude ortométrica através dos sistemas globais de posicionamento por satélite como o *Global Positioning System* (GPS). A grande maioria das atividades de mapeamento de pequena, média e principalmente de grande escala, encontram dificuldade de obtenção da altitude ortométrica. A situação se agrava num país de grandes dimensões como o Brasil, cuja rede altimétrica é insuficiente, na sua distribuição, para a demanda existente em termos de altitude e conduzir o nivelamento geométrico por longos trechos não é viável em grande parte dos casos.

Os trabalhos de modernização da redes verticais conduzidas pelo Grupo de Trabalho III do Sistema de Referência Geocêntrico para as Américas (SIRGAS) visam dotar as redes altimétricas sul-americanas de altitudes físicas, corrigindo distorções sistemáticas que atualmente tais redes apresentam por não considerarem correções gravimétricas em seu ajustamento (SÁNCHEZ, 2005). Nesse sentido, dotar a rede altimétrica brasileira de altitudes físicas vêm corroborar com a importância da criação de modelos geoidais para a determinação de altitudes ortométricas.

Os principais dados utilizados na determinação de um modelo geoidal de alta resolução são basicamente: modelos globais do geopotencial; os modelos digitais de terreno, disponibilizados gratuitamente e de qualidade gradativamente melhor; e os dados de gravidade, de difícil aquisição, normalmente não disponibilizados gratuitamente.

A disponibilidade dos dados de gravidade no território brasileiro caracteriza a principal barreira imposta na busca da determinação de modelos geoidais, visto que ainda existem regiões onde estes dados são inexistentes ou mesmo de uso restrito. A realização de campanhas para cobrir essas lacunas é necessária, principalmente para suprir a carência de dados gravimétricos, que normalmente é executada para fins Geofísicos e nem sempre está adequado à aplicação na Geodésia. A conciliação destas necessidades é possível e se configura importante



economicamente pela redução de custos, evitando-se coletar a mesma informação no mesmo local, como é comum acontecer.

A área de melhor cobertura gravimétrica dentro do território brasileiro está centralizada dentro do Estado do Paraná. Uma boa densidade de estações gravimétricas e bem distribuídos como é o caso, são condições essenciais para a geração de um modelo geoidal de alta resolução.

O presente trabalho descreve as etapas envolvidas no processo de geração de um modelo geoidal de alta resolução para o Estado do Paraná compreendido entre os paralelos  $-27^{\circ}$  e  $-22^{\circ}$  e os meridianos  $-55^{\circ}$  e  $-48^{\circ}$ , em destaque no retângulo preto da figura 1.

FIGURA 1 – LOCALIZAÇÃO DA ÁREA DE ESTUDO



FONTE: IBGE (2006b)

Para tal, empregou-se a técnica de Remoção-Cálculo-Reposição (*Remove-Restore*) que se caracteriza na decomposição das diferentes contribuições espectrais da altura geoidal, utilizando para os cálculos a Transformada Rápida Fourier (FFT). O sucesso na geração deste modelo depende, além da disponibilidade de dados de boa qualidade, da correta aplicação da técnica, avaliando as fontes de erro no processo de cálculo.

## 1.2 ESTADO DA ARTE

A determinação do geóide é de longa data alvo de estudo em muitos institutos de pesquisa e universidades que atuam na a área das Geociências. A aplicação dos sistemas globais de navegação por satélite como o GPS fica extremamente limitada quando não se tem a disposição um bom modelo geoidal. Essa praticidade, vem sendo utilizada pelos países desenvolvidos, antes mesmo de o sistema GPS estar completamente disponível para o uso civil.

TSCHERNING (1992) referia-se ao problema, prevendo a criação da *Geoid School*:

O GPS vem sendo usado exitosamente na determinação de diferenças de altitudes elipsoidais. Em áreas onde os dados gravimétricos estão disponíveis, podem converter-se facilmente em altitudes ortométricas. Isto requer a existência de um geóide preciso. A tarefa de calcular um geóide não é difícil, porém requer um bom conhecimento da Geodésia Física, que habitualmente não se encontra na comunidade da agrimensura. A tarefa também requer a cooperação internacional, visto que são necessários os dados das áreas circundantes. Deveria ser uma obrigação das agências nacionais (eventualmente sobre uma base comercial) a informação precisa do geóide, que já está disponível em muitos países e regiões. Felizmente, o Serviço Internacional do Geóide em breve estará em funcionamento no Politécnico de Milão, supervisionado pela Comissão Internacional do Geóide da Associação Internacional de Geodésia. Um lugar onde será possível especializar-se no cálculo do geóide e onde serão encontrados os especialistas que auxiliarão no cálculo.

Abaixo estão relacionados os principais geóides determinados recentemente com a utilização da Transformada Rápida de Fourier (FFT), junto são descritas também algumas características básicas relacionadas ao respectivo modelo geoidal:

MAPGEO2004 – Modelo Geoidal Brasileiro 2004 – (IBGE, 2005b):

- anomalias médias de Helmert em quadrículas de 10'x10' em áreas continentais;
- anomalias ar-livre derivadas da altimetria por radar a bordo de satélite em áreas oceânicas;
- Modelo Digital de Terreno (MDT) de 1'x1';
- Modelo geopotencial *Earth Gravitational Model* 1996 (EGM96) até grau e ordem 180;

- O Modelo de Ondulação Geoidal foi corrigido do termo de ordem zero,  $N_0 = -0,5$  metro;
- Precisão de 0,5 m a 1 m para a área do Paraná quando comparadas com dados de rastreamento GPS sobre referência de nível (RN).

NKG-2004 – Geóide Nórdico e áreas do Báltico - *Nordic Geodetic Commission* (NKG) (FORSBERG e STRYKOWSKI, 2004):

- Calculado com a FFT na forma esférica de Stokes;
- Espaçamento da malha gravimétrica  $0,02^\circ \times 0,04^\circ$ ;
- Erro Médio Quadrático (RMS) de  $\pm 2$  a 4 cm com GPS/RN.

EGGP – Geóide Europeu (em projeto) (DENKER et al., 2004):

- FFT 1D (primeiros cálculos);
- MDT : 3" x 3".

EST-Geoid2003 – Geóide Estoniano 2003 (JÜRGENSON, 2004):

- Calculado com FFT ;
- Precisão absoluta: 2,1 cm com GPS/RN.

USGG2003 – Geóide Norte-Americano (ROMAN et al., 2004):

- GEOID03: Geóide híbrido gerado com USGG2003 e *North American Vertical Datum 1988* (NAVD 88);
- MDT de 30" e 1";
- RMS de  $\pm 13,8$  cm GPS/RN do NAVD 88;
- Modelo Geopotencial: EGM96.

OSGM02 – Geóide das Ilhas Britânicas 2002 (FORSBERG et al., 200?):

- Resolução final:  $0,01333^\circ \times 0,02^\circ$ ;
- RMS de  $\pm 2$  cm para Grã-Bretanha e  $\pm 3-4$  cm para as demais áreas com GPS/RN.

UruGeoide2000 – Geóide Uruguaio 2000 (SUBIZA, 2000):

- FFT 1D;
- Precisão absoluta: 25 cm e relativa: 2 mm/km.

CGG2000 – Modelo Geoidal Gravimétrico Canadense 2000 (VÉRONNEAU, 2001):

- FFT 1D;
- Comparado com a Rede Altimétrica:
  - Desvio padrão 26 cm ou 17,9 cm dependendo da região.

AUSGeoid98 – Geóide Australiano 1998 (FEATHERSTONE et al., 2001):

- FFT 1D ;
- Resolução: 2' x 2' e RMS de  $\pm 36,4$  cm.

## 1.3 OBJETIVOS

### 1.3.1 Objetivo Geral

A criação de modelo geoidal de alta resolução capaz de fornecer para qualquer ponto dentro do Estado do Paraná através de um interpolador, a altura geoidal a ser utilizada juntamente com a altitude geométrica fornecida pelos sistemas globais de posicionamento, na obtenção da altitude ortométrica.

### 1.3.2 Objetivos Específicos

- a) estruturar uma base de dados necessária à determinação de um modelo geoidal de alta precisão;
- b) testar diferentes métodos de interpolação para cobrir as áreas desprovidas de dados observados de gravidade com dados interpolados;
- c) verificar as diferentes formas de aplicação da Transformada Rápida de Fourier na determinação de um modelo geoidal;

- d) avaliar empiricamente a propagação de erros através das anomalias gravimétricas, e em que proporção tais erros afetam a ondulação geoidal;
- e) testar a aplicação de valor ao potencial no geóide  $W_0$  na geração da superfície de referência vertical definida pelo modelo geoidal, vislumbrando a modernização das altitudes advindas do SIRGAS;
- f) avaliar a discrepância existente entre as altitudes da Rede Altimétrica de Alta Precisão (RAAP) brasileira e as altitudes ortométricas físicas obtidas com o modelo geoidal.

#### 1.4 JUSTIFICATIVA

A possibilidade de se utilizar por completo a tecnologia GPS, não apenas para obtenção de coordenadas geodésicas latitude e longitude, mas também, a obtenção indireta da altitude ortométrica, é indiscutivelmente a grande validade da determinação de modelos geoidais. Qualquer que seja o tipo de emprego da altitude ortométrica, mapeamento ou outras aplicações de engenharia, onde o nível de incerteza para a determinação desta altitude tolera a aplicação do modelo geoidal, se estará evitando qualquer espécie de levantamento posterior ao levantamento GPS com o emprego do modelo.

Não menos importante, porém menos explorada, é a utilização de modelos geoidais para a compreensão da estrutura geológica interna da Terra, através da análise do comportamento da ondulação geoidal.

Intensiona-se também com o presente trabalho, disseminar a utilização de modelos geoidais para a determinação de altitudes ortométricas através de sistemas de posicionamento por satélite como o GPS, bem como outras áreas de pesquisa dentro das Geociências.

## 1.5 ESTRUTURAÇÃO DA PESQUISA

No capítulo dois, são lançadas as bases conceituais da teoria que envolve a determinação do geóide. No capítulo três, demonstram-se quais os tipos de dados são necessários para o cálculo do geóide e como são tratados estes dados. No capítulo quatro, é feito um detalhamento prático de como se combinam os dados de fontes diferentes para a determinação do geóide. No capítulo cinco, é feita uma avaliação do modelo geoidal obtido. No capítulo seis, são descritas a criação do interpolador de alturas geoidais e a orientação para a correta utilização do modelo. Por fim, no capítulo sete são apresentadas as conclusões e as recomendações para a continuidade dos trabalhos nos tópicos abordados.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 GEODÉSIA FÍSICA E A INTEGRAL DE STOKES: SÍNTESE CONCEITUAL

A possibilidade de modelagem da superfície do geóide através da equação de Stokes se fundamenta no problema do valor de contorno (PVC), pressupondo a inexistência de massa (terrestre e atmosférica) externa ao geóide. A fórmula de Stokes, que calcula a ondulação geoidal com base nas anomalias de gravidade é escrita da seguinte forma (HEISKANEN e MORITZ, 1967):

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma \quad (2.1)$$

onde

$N$  = ondulação geoidal

$R$  = raio terrestre médio

$\gamma$  = gravidade normal no elipsóide

$\Delta g$  = anomalias de gravidade

$d\sigma$  = elemento infinitesimal de ângulo na superfície da Terra

$\psi$  = distância esférica entre o ponto dado de anomalia de gravidade e o ponto a ser calculado

$S(\psi)$  = é a função de Stokes

$$S(\psi) = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\psi}{2}} - 6 \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \ln \left( \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\psi}{2} \right) \quad (2.2)$$

Contudo, conhecer o valor da ondulação geoidal  $N$  implica em conhecer o valor do potencial anômalo  $T$  na superfície do geóide, o qual pode ser estimado pela diferença (HEISKANEN e MORITZ, 1985):

$$T = W - U \quad (2.3)$$

onde  $W$  é o potencial de gravidade devido a Terra real, resultante da associação do potencial gravitacional de atração  $V$  com o potencial centrífugo, e da mesma forma,  $U$  é o esferopotencial devido a Terra normal, resultante da associação do esferopotencial de atração  $Q$  com o esferopotencial centrífugo. Nas duas parcelas da equação (3), os potenciais centrífugos são considerados iguais e se anulam na equação que fica da forma (HEISKANEN e MORITZ, 1985):

$$T = V - Q \quad (2.4)$$

Com a atribuição ao elipsóide de referência (Terra normal), o mesmo potencial do geóide (Terra real), o potencial num ponto  $P$  na superfície do geóide  $W_P$  é igual ao esferopotencial num ponto  $Q$  na superfície do elipsóide  $U_Q$ , e tem-se (HEISKANEN e MORITZ, 1985):

$$W_P = U_P + T_P \quad (2.5)$$

Tratando-se de esferopotencial, o gradiente de  $U$  como se vê mais abaixo, fornece a gravidade normal, e  $N$  caracteriza a separação das duas superfícies equipotenciais (HEISKANEN e MORITZ, 1967):

$$U_P = U_Q + \left( \frac{\delta U}{\delta n} \right) N = U_Q - \gamma N, \text{ logo,} \quad (2.6)$$

$$W_P = U_P + T_P = U_Q - \gamma N + T, \quad (2.7)$$

como

$$W_P = U_Q = W_o, \quad (2.8)$$

Logo:



$$-\gamma N + T = 0 \quad (2.9)$$

dessa forma, pode-se relacionar o potencial anômalo  $T$  com a ondulação geoidal  $N$  através da gravidade normal  $\gamma$ , o que resulta na denominada Equação de Bruns:

$$N = \frac{T}{\gamma}. \quad (2.10)$$

Pode-se associar os potenciais da Terra normal e da Terra real para representar o potencial anômalo (e a ondulação geoidal) através das anomalias gravimétricas, como se vê a seguir (HEISKANEN e MORITZ, 1985):

$$g = \text{grad}W. \quad (2.11)$$

e

$$\gamma = \text{grad}U. \quad (2.12)$$

O vetor distúrbio de gravidade é obtido por

$$\delta = \text{grad}(W - U) = \text{grad}T \equiv \left( \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right). \quad (2.13)$$

Logo

$$g = -\frac{\partial W}{\partial n}, \quad \gamma = -\frac{\partial U}{\partial n'} \mathbf{B} - \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (2.14)$$

Considerando as direções da vertical  $n$  e da normal  $n'$  aproximadamente coincidentes, o distúrbio de gravidade pode ser dado por (HEISKANEN e MORITZ, 1985):

$$\delta g = g_p - \gamma_p = -\left(\frac{\partial W}{\partial n} - \frac{\partial U}{\partial n'}\right) \mathbf{B} - \left(\frac{\partial W}{\partial n} - \frac{\partial U}{\partial n}\right), \quad (2.15)$$

$$\delta g = -\frac{\partial T}{\partial n}, \quad (2.16)$$

e

com  $h$  ao longo da normal fica,

$$\delta g = -\frac{\partial T}{\partial h}. \quad (2.17)$$

Comparando as equações (2.15) e (2.17), percebe-se que o distúrbio de gravidade  $\delta g$ , embora sendo a diferença de magnitude entre os vetores da gravidade real e da gravidade normal, também é a componente normal do vetor distúrbio de gravidade  $\delta$ .

Tomando-se a seguinte relação (HEISKANEN e MORITZ, 1985):

$$\gamma_p = \gamma_q + \frac{\partial \gamma}{\partial h} N, \quad (2.18)$$

tem-se que

$$-\frac{\partial T}{\partial h} = \delta g = g_p - \gamma_p = g_p - \gamma_q - \frac{\partial \gamma}{\partial h} N. \quad (2.19)$$

Tomando-se a definição de anomalia de gravidade

$$\Delta g = g_p - \gamma_q, \quad (2.20)$$

e relacionando-a com a Equação de Bruns, obtemos as seguintes equações equivalentes:

$$-\frac{\partial T}{\partial h} = \Delta g - \frac{\partial \gamma}{\partial h} N, \quad (2.21)$$

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{\partial \gamma}{\partial h} N, \quad (2.22)$$

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} N, \quad (2.23)$$

$$\delta g = \Delta g - \frac{\partial \gamma}{\partial h} N, \quad (2.24)$$

$$\delta g = \Delta g - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T \quad (2.25)$$

e

$$\frac{\partial T}{\partial h} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T + \Delta g = 0. \quad (2.26)$$

A equação (2.26) é a Equação Fundamental da Geodésia Física, que relaciona o potencial anômalo com as anomalias de gravidade.

Tem a forma de uma equação de derivadas parciais, se  $\Delta g$  fosse conhecida em todo o espaço, então (2.26) poderia ser resolvida como tal. Porém, como  $\Delta g$  é conhecida somente em uma superfície (o geóide), a equação fundamental (2.26) só pode ser usada como “condição de contorno”, que por si só não é suficiente para calcular  $T$ .

Normalmente se supõe que não existem massas externas ao geóide. Está claro que este pressuposto não é correto. As observações são efetuadas na superfície física da Terra e não diretamente sobre o geóide. O efeito das massas fora do geóide é eliminado ao se reduzir as medidas de gravidade ao geóide através

de cálculo, de maneira que podemos supor logicamente que todas as massas estejam condensadas no geóide (HEISKANEN e MORITZ, 1985).

Neste caso, considerando a densidade  $\rho$  igual zero em qualquer lugar fora do geóide, o potencial anômalo  $T$  nessas regiões é harmônico e satisfaz a equação de Laplace (HEISKANEN e MORITZ, 1985).

$$\Delta T_{ext} \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (2.27)$$

Se as componentes da segunda derivada do potencial anômalo  $T$  são iguais a zero, já as componentes da primeira derivada são contínuas e fornecem o distúrbio de gravidade  $\delta$ , dadas pela equação (2.13).

No interior das massas, o laplaciano do potencial obedece à equação de Poisson (HEISKANEN e MORITZ, 1985):

$$\Delta T_{int} = -4\pi G\rho, \quad (2.28)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional newtoniana, e  $\rho$  é a densidade de massa que varia no interior da crosta terrestre, tornando o potencial não harmônico nessa região. Daí a necessidade da condensação das massas no geóide para a aplicação da integral de Stokes.

### 2.1.1 Desenvolvimento do Potencial Perturbador em Harmônicos Esféricos

O elipsóide de referência se afasta de uma esfera na ordem de apenas  $f \approx 3 \cdot 10^{-3}$  em função do achatamento (HEISKANEN e MORITZ, 1967; 1985). Substituindo o elipsóide referência por uma esfera nas equações que relacionam quantidades do campo anômalo, o erro cometido fica nesta ordem de grandeza.

Da mesma forma, o erro na ondulação geoidal fica em torno de  $3 \cdot 10^{-3}$  N, o que representa um erro de 1,8 cm numa ondulação geoidal de 6 m, esta, a máxima ondulação encontrada para o Estado do Paraná, área de estudo deste trabalho.

Com aproximação esférica tem-se (HEISKANEN e MORITZ, 1985):

$$\gamma = \frac{GM}{r^2}, \quad (2.29)$$

onde  $M$  é a massa da Terra,

$$\frac{\partial \gamma}{\partial h} = \frac{\partial \gamma}{\partial r} = -2 \frac{GM}{r^3}, \quad (2.30)$$

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} = -\frac{2}{r}. \quad (2.31)$$

Introduzindo o raio médio  $R$  da Terra como o raio de uma esfera que tem o mesmo volume do elipsóide terrestre, como segue (HEISKANEN e MORITZ, 1985):

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi a^2 b, \quad (2.32)$$

obtém-se:

$$R = \sqrt[3]{a^2 b}. \quad (2.33)$$

De forma análoga, pode-se definir um valor médio  $G_m$  para a gravidade sobre a Terra. Normalmente se usam os valores aproximados  $R = 6371$  km e  $G_m = 979,8$  Gal.

Logo:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} = -\frac{2}{R} \quad (2.34)$$

e

$$\frac{\partial \gamma}{\partial h} = -\frac{2G_m}{R}. \quad (2.35)$$

Considerando que a normal à esfera está na direção do raio vetor  $r$ , com a mesma aproximação tem-se (HEISKANEN e MORITZ, 1985):

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial r}. \quad (2.36)$$

No teorema de Bruns (2.10) substitui-se  $\gamma$  por  $G_m$ , e as equações (2.22) a (2.26) se convertem em (HEISKANEN e MORITZ, 1985):

$$-\frac{\partial T}{\partial h} = \Delta g + \frac{2G_m}{R} N, \quad (2.35)$$

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2G_m}{R} N, \quad (2.36)$$

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{R} T, \quad (2.37)$$

$$\delta g = \Delta g + \frac{2G_m}{R} N, \quad (2.38)$$

$$\delta g = \Delta g + \frac{2}{R} T \quad (2.39)$$

e

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2}{R} T + \Delta g = 0. \quad (2.40)$$

Esta última, equação (2.40), é a aproximação esférica da condição de contorno fundamental. Usada somente quando aplicada nas equações que relacionam pequenas quantidades como  $T$ ,  $N$ ,  $\Delta g$ .

Como o achatamento  $f$  é muito pequeno, as fórmulas elipsóidicas podem ser desenvolvidas em série de potências em função de  $f$ , e então todos os termos que contém  $f$ ,  $f^2$ , ...,  $f^n$  são desprezados. Desta forma se obtém fórmulas que são rigorosamente válidas para a esfera, e também validas com aproximação para o elipsóide de referência real. Embora a gravidade normal  $\gamma$  deva ser calculada no elipsóide com alto grau de exatidão para as anomalias de gravidade  $\Delta g = g - \gamma$  (HEISKANEN e MORITZ, 1985).

Dado que o potencial anômalo  $T = W - U$  é uma função harmônica, portanto pode ser desenvolvido em série de harmônicos esféricos (HEISKANEN e MORITZ, 1985):

$$T(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\theta, \lambda), \quad (2.41)$$

onde  $(r, \theta, \lambda)$  são as coordenadas esféricas.

$T_n(\theta, \lambda)$  é o harmônico de superfície de Laplace de grau  $n$ . Sobre o geóide, que em aproximação esférica corresponde a esfera  $r = R$ , tem-se

$$T = T(R, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(\theta, \lambda). \quad (2.42)$$

Derivando a série (2.41) em relação a  $r$ , obtém-se:

$$\delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\theta, \lambda), \quad (2.43)$$

que sobre o geóide ( $r = R$ ), converte-se em

$$\delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) T_n(\theta, \lambda). \quad (2.44)$$

Esta série expressa o distúrbio de gravidade em termos de harmônicos esféricos. Fora da Terra, a equação equivalente é

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r}T. \quad (2.45)$$

Substituindo (2.42) e (2.43) na equação (2.45), obtém-se (HEISKANEN e MORITZ, 1985):

$$\Delta g = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) \left( \frac{r}{R} \right)^{n+1} T_n(\theta, \lambda). \quad (2.46)$$

Sobre o geóide a equação (2.46) se converte em

$$\Delta g = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) T_n(\theta, \lambda). \quad (2.47)$$

Este é desenvolvimento em harmônicos esféricos da anomalia de gravidade. Nota-se que embora o potencial anômalo  $T$  contenha um termo esférico de grau 1  $T_1(\theta, \lambda)$ , no desenvolvimento de  $\Delta g$  se multiplicará pelo fator  $1 - 1 = 0$ , de maneira que a anomalia de gravidade  $\Delta g$  nunca poderá ter harmônico esférico de grau 1 (HEISKANEN e MORITZ, 1985).

### 2.1.2 Anomalias de Gravidade Fora da Terra

Uma função harmônica  $H$  pode ser calculada, com aproximação esférica sobre a superfície da Terra, através da integral de Poisson sob a seguinte forma (HEISKANEN e MORITZ, 1985):

$$Hp = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{r^2 + R^2}{l^3} H d\sigma. \quad (2.48)$$



O símbolo  $\iint_{\sigma}$  é a abreviatura usual de uma integral estendida sobre toda a esfera de raio unitário, ou sobre o ângulo sólido completo, que é o mesmo;  $d_{\sigma}$  é o elemento de ângulo sólido definido como o elemento de superfície da esfera de raio unitário.

Por isso o elemento de superfície da esfera terrestre ( $r = R$ ) é  $R^2 d_{\sigma}$ .  $H$  é valor da função harmônica no elemento variável de superfície  $R^2 d_{\sigma}$  e  $H_p$  se refere ao ponto fixo  $P$  (HEISKANEN e MORITZ, 1985).

Logo,

$$l = \sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \cos \psi}. \quad (2.49)$$

A função harmônica  $H$  pode ser desenvolvida em série de harmônicos esféricos (HEISKANEN e MORITZ, 1985):

$$H = \left(\frac{R}{r}\right) H_0 + \left(\frac{R}{r}\right)^2 H_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} H_n. \quad (2.50)$$

Omitindo os termos de grau zero e um, obtém-se:

$$H' = H - \left(\frac{R}{r}\right) H_0 - \left(\frac{R}{r}\right)^2 H_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} H_n. \quad (2.51)$$

Tomando  $H_0$  e  $H_1$  em termos de harmônicos esféricos de Laplace na superfície, tem-se (HEISKANEN e MORITZ, 1985):

$$H_0 = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} H d\sigma \quad \text{e} \quad H_1 = \frac{3}{4\pi} \iint_{\sigma} H \cos \psi d\sigma. \quad (2.52a, 2.52b)$$

Logo, expressando na equação (2.51),  $H$  tal como na integral de Poisson e substituindo  $H_0$  e  $H_1$  pelas integrais (2.52a e 2.52b) obtém-se a fórmula básica (HEISKANEN e MORITZ, 1985):

$$H' = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \left( \frac{r^2 + R^2}{l^3} - \frac{1}{r} - \frac{3R}{r^2} \cos \psi \right) H d\sigma. \quad (2.53)$$

A razão desta modificação na integral de Poisson é que as fórmulas da Geodésia Física são mais simples se as funções envolvidas não contêm harmônicos de grau zero e um.

Aplicando estas fórmulas nas anomalias da gravidade fora da Terra, a equação (2.46) toma a seguinte forma (HEISKANEN e MORITZ, 1985):

$$r\Delta g = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} (n-1) T_n(\theta, \lambda). \quad (2.54)$$

Assim como  $T_n(\theta, \lambda)$ ,  $(n-1)T_n$  também é um harmônico de superfície de Laplace. Em conseqüência,  $r\Delta g$ , considerada como uma função no espaço, pode desenvolver-se em série de harmônicos esféricos, sendo portanto uma função harmônica.

Logo podemos aplicar a fórmula de Poisson em  $r\Delta g$ , obtendo, segundo HEISKANEN e MORITZ (1985),

$$r\Delta g_p = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \left( \frac{r^2 + R^2}{l^3} - \frac{1}{r} - \frac{3R}{r^2} \cos \psi \right) (R\Delta g) d\sigma \quad (2.55)$$

ou

$$\Delta g_p = \frac{R^2}{4\pi} \iint_{\sigma} \left( \frac{r^2 + R^2}{l^3} - \frac{1}{r} - \frac{3R}{r^2} \cos \psi \right) \Delta g d\sigma. \quad (2.56)$$

Esta é a fórmula para o cálculo das anomalias de gravidade fora da Terra, a partir das anomalias de gravidade na superfície, usando-as como prolongamento ascendente (*upward continuation*), ou seja, em sentido contrário à redução.

Desta forma, a equação básica (2.45) troca seu significado, convertendo-se numa equação diferencial que pode ser integrada em relação a  $r$  (HEISKANEN e MORITZ, 1985).

Multiplicando por  $-r^2$ ,

$$-r^2\Delta g = r^2 \frac{\partial T}{\partial r} + 2rT = \frac{\partial}{\partial r}(r^2T). \quad (2.57)$$

Integrando a fórmula

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2T) = -r^2\Delta g(r) \quad (2.58)$$

entre os limites  $\infty$  e  $r$ , resulta

$$r^2T \Big|_{\infty}^r = -\int_{\infty}^r r^2\Delta g(r)dr. \quad (2.59)$$

$\Delta g(r)$  indica que  $\Delta g$  é agora uma função de  $r$ , calculada a partir das anomalias de gravidade de superfície pela fórmula (2.56). Como esta fórmula elimina automaticamente os harmônicos esféricos de grau zero e grau um das  $\Delta g(r)$ , o potencial anômalo  $T$ , calculado com  $\Delta g(r)$ , não contém tais termos. Tem-se então (HEISKANEN e MORITZ, 1985):

$$T = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n = \frac{R^3}{r^3}T_2 + \frac{R^4}{r^4}T_3 + L. \quad (2.60)$$

Logo

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (r^2T) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{R^3}{r}T_2 + \frac{R^4}{r^2}T_3 + L \right) = 0, \quad (2.61)$$

de modo que

$$r^2 T \Big|_{\infty}^r = r^2 T - \lim_{r \rightarrow \infty} (r^2 T) = r^2 T. \quad (2.62)$$

ou seja,

$$r^2 T = - \int_{\infty}^r r^2 \Delta g(r) dr. \quad (2.63)$$

Substituindo a integral de prolongamento ascendente (2.56) obtém-se:

$$r^2 T = \frac{R^2}{4\pi} \int_{\infty}^r \left[ \iint_{\sigma} \left( -\frac{r^3 - R^2 r}{l^3} + 1 + \frac{3R}{r} \cos \psi \right) \Delta g \, d\sigma \right] dr. \quad (2.64)$$

Trocando a ordem de integração resulta

$$r^2 T = \frac{R^2}{4\pi} \iint_{\sigma} \left[ \int_{\infty}^r \left( -\frac{r^3 - R^2 r}{l^3} + 1 + \frac{3R}{r} \cos \psi \right) dr \right] \Delta g \, d\sigma. \quad (2.65)$$

A integral entre colchetes pode ser calculada por métodos ordinários (HEISKANEN e MORITZ, 1985). A integral indefinida é

$$\begin{aligned} \int \left( -\frac{r^3 - R^2 r}{l^3} + 1 + \frac{3R}{r} \cos \psi \right) dr &= \\ &= \frac{2r^2}{l} - 3l - 3R \cos \psi \ln(r - R \cos \psi + 1) + r + 3R \cos \psi \ln r. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Para grandes valores de  $r$  tem-se:

$$l = r \left( 1 - \frac{R}{r} \cos \psi \right) = r - R \cos \psi, \quad (2.67)$$

e portanto, quando  $r \rightarrow \infty$ , o segundo membro da integral indefinida se aproxima de

$$5R \cos \psi - 3R \cos \psi \ln 2. \quad (2.68)$$

O que transforma a integral indefinida numa integral definida, pois o infinito é o limite inferior de integração (HEISKANEN e MORITZ, 1985). Portanto:

$$\int_{\infty}^r \left( -\frac{r^3 - R^2 r}{l^3} + 1 + \frac{3R}{r} \cos \psi \right) = \quad (2.69)$$

$$= \frac{2r^2}{l} + r - 3l - R \cos \psi \left( 5 + 3 \ln \frac{r - R \cos \psi + l}{2r} \right).$$

Logo, obtém-se

$$T(r, \theta, \lambda) = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} S(r, \psi) \Delta g \, d\sigma, \quad (2.70)$$

deduzida por Pizzetti em 1911, onde

$$S(r, \psi) = \frac{2R}{l} + \frac{R}{r} - 3 \frac{Rl}{r^2} - \frac{R^2}{r^2} \cos \psi \left( 5 + 3 \ln \frac{r - R \cos \psi + l}{2r} \right). \quad (2.71)$$

Sobre o geóide tem-se  $r = R$ , logo

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) \, d\sigma, \quad (2.72)$$

segundo HEISKANEN e MORITZ (1985), considerando  $r = R$  e  $l = 2R \operatorname{sen} \frac{\psi}{2}$  na equação (2.71), obtém-se a função de Stokes como foi apresentada em (2.2).

Pelo teorema de Bruns,  $N = T / G_m$ , tem-se finalmente

$$N = \frac{R}{4\pi G_m} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) \, d\sigma. \quad (2.73)$$

Esta é a fórmula de Stokes ou integral de Stokes tal como foi apresentada na equação (2.1), porém com a aproximação esférica, onde a gravidade média na esfera terrestre arbitrária  $G_m$ , aparece substituindo a gravidade normal no elipsóide  $\gamma$ .

Com a equação (2.70), dividindo-se  $T$  pela gravidade normal no ponto dado  $P$ , obtém-se a separação  $N_P$  entre a superfície geopotencial  $W=W_P$  e a correspondente superfície esferopotencial  $U=W_P$ , que fora da Terra toma o lugar da ondulação do geóide  $N$ .

A dedução da fórmula de Stokes por meio da integral de prolongamento ascendente (2.56) suprime automaticamente os termos de grau zero e grau um em  $T$  e  $N$ . De modo que em sua forma original (2.72 ou 2.73) só é válida para um elipsóide de referência que (HEISKANEN e MORITZ, 1985):

- a) tenha o mesmo potencial  $U_0 = W_0$  que o geóide;
- b) possua uma massa numericamente igual a massa da Terra;
- c) tenha seu centro coincidente com o centro de gravidade da Terra.

As duas primeiras condições não são exatamente satisfeitas pelo elipsóide de referência de uso prático, e dificilmente poderão ser cumpridas. Por isso, a fórmula de Stokes deve ser modificada para o uso de um elipsóide de referência arbitrário.

### 2.1.3 Generalização da Fórmula de Stokes para um Elipsóide de Referência Arbitrário

Generalizando a fórmula de Stokes para ser aplicada a um elipsóide arbitrário, este deve ser tão próximo quanto possível do geóide, tal que as ondulações desviando o geóide do elipsóide possam ser tratadas como lineares .

Considerando o potencial anômalo  $T$  na superfície da Terra. Sua expressão em harmônicos esféricos vem dada por (HEISKANEN e MORITZ, 1985):

$$T(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(\theta, \lambda). \quad (2.74)$$

Separando os termos de grau zero e grau um, tem-se

$$T(\theta, \lambda) = T_0 + T_1(\theta, \lambda) + T'(\theta, \lambda), \quad (2.75)$$

onde

$$T'(\theta, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} T_n(\theta, \lambda). \quad (2.76)$$

No caso geral esta função  $T'$  é a quantidade dada pela fórmula de Stokes. Para se obter a função completa  $T$  deve-se adicionar os termos  $T_0$  e  $T_1$ .

O termo de grau zero no desenvolvimento em harmônicos esféricos do potencial é igual a  $G*M/r$ , onde  $M$  é a massa (HEISKANEN e MORITZ, 1985).

Portanto, o termo de grau zero do potencial anômalo  $T = W - U$  na superfície da Terra ( $r = R$ ) vem dado por

$$T_0 = \frac{G\Delta M}{R}, \quad (2.77)$$

onde

$$\Delta M = M - M' \quad (2.78)$$

é a diferença entre a massa  $M$  da Terra e a massa  $M'$  do elipsóide. Como não conhecemos o valor exato da massa  $M$  da Terra,  $T_0$  permanece indeterminado.

Quanto aos termos de grau um, considerando que os coeficientes do harmônico de primeiro grau do potencial  $W$  são dados por (HEISKANEN e MORITZ, 1985):

$$GM\zeta, \quad GM\xi, \quad GM\eta, \quad (2.79)$$

onde  $\zeta, \xi, \eta$  são as coordenadas retangulares do centro de gravidade da Terra.

Para o potencial  $U$  tem-se as quantidades análogas (HEISKANEN e MORITZ, 1985):

$$GM'\zeta', GM'\xi', GM'\eta', \quad (2.80)$$

como  $\zeta', \xi', \eta'$  são muito pequenas, podem ser consideradas iguais a

$$GM\zeta', GM\xi', GM\eta'. \quad (2.81)$$

Logo, os coeficientes do harmônico de grau um do potencial anômalo  $T = W - U$  são iguais a

$$GM(\zeta - \zeta'), GM(\xi - \xi'), GM(\eta - \eta'). \quad (2.82)$$

Considerando o centro do elipsóide de referência coincidente com centro de gravidade da Terra, as diferenças de coordenadas dadas entre parênteses em (2.82) serão iguais a zero. Tal condição, elimina a existência do harmônico de primeiro grau  $T_1(\theta, \lambda)$ , e é adotada para o elipsóide de referência de modo que o potencial passa a ser representado da seguinte forma (HEISKANEN e MORITZ, 1985):

$$T = \frac{G\Delta M}{R} + \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma. \quad (2.83)$$

#### 2.1.4 Generalização da Fórmula de Stokes para N

Estendendo a fórmula de Bruns (2.10) a um elipsóide de referência arbitrário. Supondo que (HEISKANEN e MORITZ, 1985):

$$W(x, y, z) = W^0 \quad (2.84)$$

e



$$U(x, y, z) = U^0 \quad (2.85)$$

são as equações do geóide e elipsóide, onde em geral as constantes  $W^0$  (geopotencial no geóide) e  $U^0$  (esferopotencial no elipsóide) são diferentes.

Como descrito na equação (2.7), tem-se (HEISKANEN e MORITZ, 1985):

$$W_p = U_q - \gamma N + T, \quad (2.86)$$

onde

$$U_q = U^0 \neq W^0 = W_p, \quad (2.87)$$

de modo que

$$\gamma N = T - (W^0 - U^0). \quad (2.88)$$

Designado por

$$\delta W = W^0 - U^0, \quad (2.89)$$

a diferença entre os potenciais, obtém-se a generalização da fórmula de Bruns como segue:

$$N = \frac{T - \delta W}{\gamma}. \quad (2.90)$$

Segundo HEISKANEN e MORITZ (1985), as fórmulas que contém  $N$  ao invés de  $T$  nas equações de (2.21) a (2.24) também se aplicam para um elipsóide de referência arbitrário, porém, com a passagem de  $N$  para  $T$  através da equação (2.90). Assim, a equação (2.22) permanece invariável, convertendo-se em

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} \delta W. \quad (2.91)$$

Logo, a condição de contorno fundamental é agora

$$-\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T = \Delta g + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} \delta W. \quad (2.92)$$

As aproximações esféricas destas equações são

$$N = \frac{T - \delta W}{G_m} \quad (2.93)$$

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{R} T + \frac{2}{R} \delta W, \quad (2.94)$$

$$-\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{R} T = \Delta g - \frac{2}{R} \delta W. \quad (2.95)$$

Diversas formas da fórmula de Stokes generalizada. Pela equação (2.90) tem-se:

$$T = G_m N + \delta W. \quad (2.96)$$

Aplicando na equação (2.83) e dividindo por  $G_m$  tem-se (HEISKANEN e MORITZ, 1985):

$$N = \frac{G_m \Delta M}{R G_m} - \frac{\delta W}{G_m} + \frac{R}{4\pi G_m} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma. \quad (2.97)$$

Esta é a generalização da fórmula de Stokes para  $N$ , aplicada a um elipsóide de referência arbitrário cujo centro coincide com o centro da Terra.

Enquanto que a fórmula (2.83) para  $T$  contém somente o efeito de uma diferença de massas  $\Delta M$ , a fórmula (2.97) contém, além disso, a diferença de

potencial  $\delta W$ . Estas fórmulas mostram que as integrais de Stokes (2.72) e (2.73) são válidas somente se  $\Delta M = \delta W = 0$ , isto é, se o elipsóide de referência tem o mesmo potencial do geóide e a mesma massa da Terra. De outra forma, dariam  $N$  e  $T$  quando adicionadas as constantes:

$$T_0 = \frac{G_m \Delta M}{R} \quad \text{e} \quad N_0 = \frac{G_m \Delta M}{R G_m} - \frac{\delta W}{G_m} \quad (2.98a, 2.98b)$$

sendo apresentadas da forma seguinte:

$$T = T_0 + \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma \quad (2.99)$$

e

$$N = N_0 + \frac{R}{4\pi G_m} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma. \quad (2.100)$$

Os termos de ordem zero  $T_0$  e  $N_0$ , embora indeterminados, são constantes. Com a integral de Stokes, equação (2.100), o cálculo de  $N$ , na prática desconsidera o termo  $N_0$ , determinando uma superfície paralela, denominada de “co-geóide” e distante do geóide por este valor de  $N_0$ , assim considerado como um fator de escala.

## 2.2 A TÉCNICA DA DECOMPOSIÇÃO DA ALTURA GEOIDAL

A técnica já consagrada de decomposição da altura geoidal aparece descrita na literatura de língua inglesa com a denominação de *Remove-Restore* ou *Remove-Compute-Restore*. Com a criação da *Geoid School* no ano de 1994, esta técnica vem sendo amplamente difundida através de cursos periódicos por diversos países. No Brasil, a “Escola do Geóide” ocorreu no ano de 1997.

A técnica de decomposição da altura geoidal, “Remoção-Cálculo-Reposição”, foi aplicada com sucesso por SUBIZA (2000), SOUZA (2002), LOBIANCO (2005), e também será utilizada neste trabalho.

O processo de decomposição da altura geoidal separa a ondulação geoidal em diferentes contribuições espectrais. Na prática, primeiramente se extrai das

anomalias ar-livre a influência dos longos comprimentos de onda, provenientes do modelo geopotencial global, e os curtos comprimentos de onda, característicos da topografia, ambos sob a forma de anomalias gravimétricas. Essa primeira etapa, denominada de “remoção”, permite a geração das anomalias chamadas comumente de residuais (influência dos médios comprimentos de onda), que serão utilizadas no “cálculo” das alturas geoidais residuais, numa segunda etapa. O processo de “restauração”, numa terceira etapa, adiciona estas alturas geoidais residuais calculadas, às alturas geoidais do modelo geopotencial. O processo se completa com a adição do efeito indireto do terreno a estas alturas geoidais, transformando o então co-geóide, originado com base na segunda condensação de Helmert, no geóide. Este processo de remoção-cálculo-reposição pode ser resumido da seguinte forma (SIDERIS, 1997):

- Remoção:

$$\Delta g_{res} = \Delta g^{AL} - \Delta g^{MG} - \Delta g^{MDT} \quad (2.101)$$

- Cálculo:

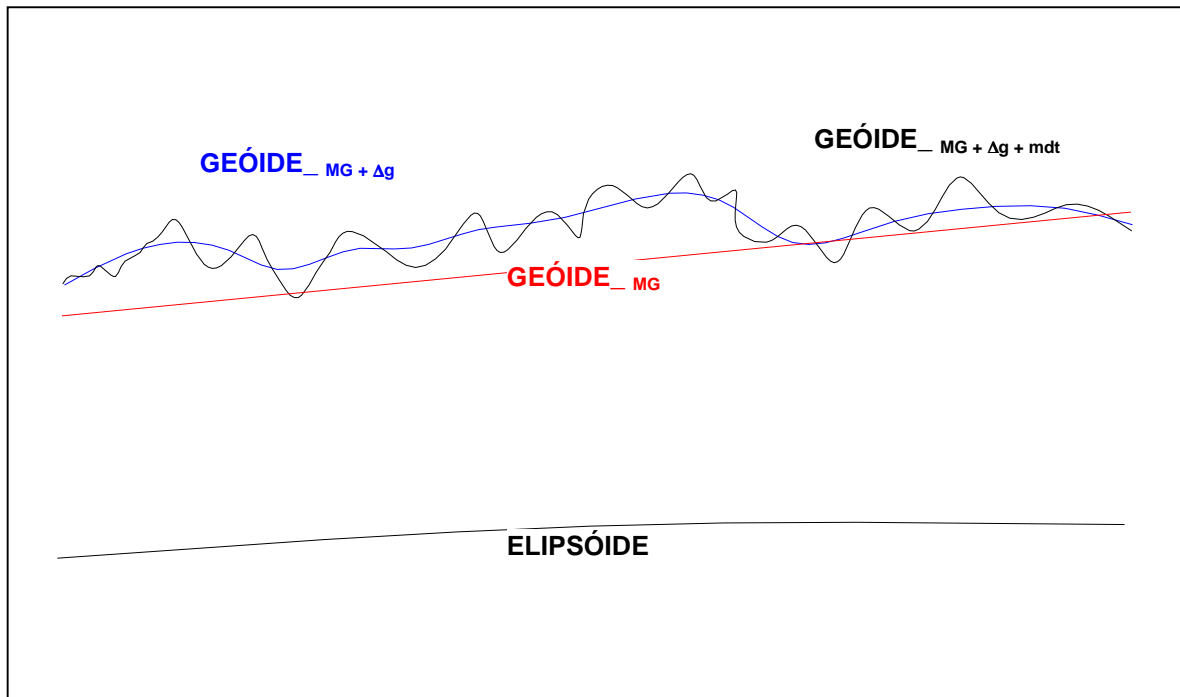
$$\Delta g_{res} \rightarrow STOKES(FFT) \rightarrow N^{\Delta g_{res}}$$

- Restauração:

$$N = N^{MG} + N^{\Delta g_{res}} + N^{MDT} \quad (2.102)$$

Na figura 2, é demonstrado o processo de decomposição da altura geoidal, com os diferentes tipos de dados utilizados no cálculo do geóide interagindo sob a forma de resolução.

FIGURA 2 – TIPOS DE DADOS UTILIZADOS NA DETERMINAÇÃO DO GEÓIDE



FONTE: adaptada de SIDERIS (1997).

Em vermelho, está representado o modelo geoidal apenas sob o efeito dados do modelo geopotencial global. Em azul, está representado o modelo geoidal sob o efeito dos dados do modelo geopotencial quando adicionado os dados gravimétricos terrestres. Em preto, o modelo geoidal refinado, resultado da incorporação dos dados do modelo digital de terreno aos dados anteriores.

### 2.3 APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER NO CÁLCULO DO GEÓIDE

A Transformada Rápida Fourier (FFT) fornece uma rápida avaliação da convolução com dados na forma de malha, que é como normalmente se apresentam as informações de topografia (MDT) e de anomalias gravimétricas ( $\Delta g$ ). Na aproximação plana, a integral de Stokes e as integrais da correção do terreno são convoluções. Quando utilizamos a aproximação esférica, estas integrais são convoluções ao longo dos paralelos.

Na aproximação plana, o primeiro termo da função de Stokes, equação (2.2), é dominante sobre os demais termos, permitindo a seguinte associação (HEISKANEN e MORITZ, 1985):

$$\frac{1}{\sin(\Psi/2)} \approx \frac{2}{\Psi} \approx \frac{2R}{l}, \quad (2.103)$$

$$R^2 d\sigma = dx dy, \quad (2.104)$$

e a equação (2.73) se reduz a,

$$N_P^{\Delta g} = \frac{1}{2\pi\gamma} \iint_E \frac{\Delta g}{l} dx dy, \quad (2.105)$$

$$l = [(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2]^{1/2}, \quad (2.106)$$

onde  $x$ ,  $y$  são as coordenadas dos pontos dados e  $x_p$ ,  $y_p$  são as coordenadas dos pontos de cálculo.

Integrais da forma como se encontra em (2.105), onde se tem o produto de uma variável ( $\Delta g$ ), que é função de uma posição espacial, multiplicada por outra que envolve uma diferença de posições ( $1/l$ ), são denominadas integrais de convolução (SUBIZA, 2000).

### 2.3.1 Aproximações Plana da Integral de Stokes

Com a equação (2.105), a altura geoidal é calculada com anomalias gravimétricas para uma área  $E$ . Essa mesma equação pode ser expressa por aproximação plana pela seguinte convolução da integral em duas direções (SIDERIS, 1997):

$$N(x_p, y_p) = \frac{1}{2\pi\gamma} \iint_E \frac{\Delta g(x, y)}{\sqrt{(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2}} dx dy = \frac{1}{2\pi\gamma} \Delta g(x_p, y_p) * I_N(x_p, y_p) \quad (2.107)$$

onde o sobrescrito  $\Delta g$  foi omitido de  $N$  por simplicidade e  $l_N$  é a forma plana da função kernel-Stokes:

$$l_N(x, y) = (2\pi)^{-1}(x^2 + y^2)^{-1/2} \quad (2.108)$$

A equação (2.107) é avaliada por duas transformadas diretas de Fourier, representadas por  $F$ , e uma inversa, representada por  $F^{-1}$ , tal como segue:

$$N(x, y) = \frac{1}{2\pi\gamma} F^{-1}\{F\{\Delta g(x, y)\}F\{l_N(x, y)\}\} = \frac{1}{2\pi\gamma} F^{-1}\{\Delta G(u, v)L_N(u, v)\} \quad (2.109)$$

onde,  $\Delta G$  e  $\Delta L$ , representam respectivamente, o espectro das anomalias gravimétricas e o espectro do núcleo kernel da função de Stokes (SIDERIS, 1997).

### 2.3.2 Pontos de Anomalias Gravimétricas como Dado de Entrada

Usando uma malha de dimensões (M linhas x N colunas) de pontos de anomalias gravimétricas com espaçamento  $\Delta x$  e  $\Delta y$ , a ondulação do geóide num ponto  $(x_k, y_l)$  pode ser avaliada pela seguinte convolução discreta (SIDERIS, 1997):

$$N(x_k, y_l) = \frac{1}{2\pi\gamma} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \Delta g(x_i, y_j) l_N(x_k - x_i, y_l - y_j) \Delta x \Delta y, \quad (2.110)$$

$$l_N(x_k - x_i, y_l - y_j) = \begin{cases} [(x_k - x_i)^2 + (y_l - y_j)^2]^{-1/2}, & x_k \neq x_i \text{ ou } y_l \neq y_j \\ 0, & x_k = x_i \text{ e } y_l = y_j \end{cases} \quad (2.111)$$

Em razão da singularidade de  $l_N$ , a função kernel está fixada como zero na origem e a contribuição de  $N$  das anomalias de gravidade neste ponto de cálculo será avaliada separadamente. Por aproximação, esta contribuição vale (HEISKANEN e MORITZ, 1967):

$$\delta N(x_k, x_l) \approx \frac{\sqrt{\Delta x \Delta y}}{\gamma \sqrt{\pi}} \Delta g(x_k, x_l) \quad (2.112)$$

A ondulação geoidal pode ser então avaliada por FFT como segue (SIDERIS, 1997):

$$N(x_k, y_l) = \frac{1}{2\pi\gamma} F^{-1} \{ \Delta G(u_m, v_n) L_N(u_m, v_n) \} \quad (2.113)$$

$\Delta G$  foi calculada por Transformada Discreta de Fourier (DFT):

$$\Delta G(u_m, v_n) = F \{ \Delta g(x_k, y_l) \} = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} \Delta g(x_k, y_l) e^{i2\pi(mk/M + nl/N)} \Delta x \Delta y \quad (2.114)$$

$L_N$  pode ser avaliada ou por DFT:

$$L_N(u_m, v_n) = F \{ l_N(x_k, y_l) \} = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} l_N(x_k, y_l) e^{i2\pi(mk/M + nl/N)} \Delta x \Delta y \quad (2.115)$$

ou por Transformada Contínua de Fourier (CFT):

$$L_N(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} l_N(x, y) e^{i2\pi(ux+vy)} dx dy = \frac{1}{(u^2 + v^2)^{1/2}} = \frac{1}{q}, \quad (2.116)$$

onde  $q$  é a frequência radial, discriminada para o uso na equação (2.113).  $L_N$ , definida pela equação (2.116), é chamada de espectro analiticamente definido de kernel-Stokes.

As equações (2.113) e (2.116) demonstram o efeito de filtragem da convolução. O espectro de anomalias  $\Delta g$  é dividido por  $q$  resultando na atenuação das altas frequências presentes nas anomalias gravimétricas. Em outras palavras, kernel-Stokes pode ser considerada um tipo de filtro passa-baixa, o qual indica que



as ondulações do geóide são afetadas principalmente pelas baixas e médias frequências do campo de gravidade (SIDERIS, 1997).

### 2.3.3 Anomalias Gravimétricas Médias como Dado de Entrada

Se os dados de entrada são anomalias gravimétricas médias  $\overline{\Delta g}$  em forma de malha de dimensões (M x N), a fórmula de Stokes no plano pode ser descrita na forma como segue (SIDERIS, 1997):

$$N(x_k, y_l) = \frac{1}{2\pi\gamma} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \overline{\Delta g}(x_i, y_j) \overline{l}_N(x_k - x_i, y_l - y_j), \quad (2.117)$$

$$\begin{aligned} \overline{l}_N(x_k, y_l) &= \int_{x_k - \Delta x/2}^{x_k + \Delta x/2} \int_{y_l - \Delta y/2}^{y_l + \Delta y/2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \\ &= x \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2}) + y \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \Big|_{x_k + \Delta x/2}^{x_k - \Delta x/2} \Big|_{y_l - \Delta y/2}^{y_l + \Delta y/2}. \end{aligned} \quad (2.118)$$

A equação (2.117) pode também ser avaliada via FFT (SIDERIS, 1997):

$$N(x_k, y_l) = \frac{1}{2\pi\gamma} F^{-1} \left\{ F \left\{ \overline{\Delta g}(x_k, y_l) \right\} F \left\{ \overline{l}_N(x_k, y_l) \right\} \right\} = \frac{1}{2\pi\gamma} F^{-1} \left\{ \overline{\Delta g}(u_m, v_n) \overline{l}_N(u_m, v_n) \right\}. \quad (2.119)$$

Para distinguir entre os espectros definidos pelas equações (2.111) e (2.118),  $\overline{l}_N$  é chamado de espectro kernel-Stokes médio.

Segundo SIDERIS (1997), uma função *sinc* 2D pode também ser usada para relacionar o espectro dos dados considerados ao invés da representação dos valores pontuais de uma malha ou a média dos valores na área de uma parcela da malha. Pelo uso desta técnica, se os dados de entrada são os valores de anomalias de gravidade médias, a ondulação do geóide pode ser expressa por:

$$N(x_k, y_l) = \frac{1}{2\pi\gamma} F^{-1} \left\{ \text{sinc}\left(\frac{m}{M}\right) \text{sinc}\left(\frac{n}{N}\right) \overline{\Delta G}(u_m, v_n) \overline{l}_N(u_m, v_n) \right\}, \quad (2.120)$$

onde  $\overline{\Delta G}$  é o espectro anomalias de gravidade médias como na equação (2.119), e  $L_N$  é o espectro da função kernel como foi expressa na equação (2.111). Pela comparação entre as equações (2.119) e (2.120), tem-se:

$$\overline{L_N}(u_m, v_n) = \text{sinc}\left(\frac{m}{M}\right)\text{sinc}\left(\frac{n}{N}\right)L_N(u_m, v_n). \quad (2.121)$$

A equação (2.121) indica que a transformada de Fourier da função kernel média pode teoricamente ser obtida pela multiplicação da transformada de Fourier da função kernel, no ponto, obtida analiticamente, ou por transformada discreta, pela função sinc 2D (SIDERIS, 1997).

### 2.3.4 Aproximação Esférica da Integral de Stokes

O erro introduzido pela aproximação plana da integral de Stokes, tende a aumentar quanto maior for a área considerada no cálculo. Tal erro pode ser evitado usando-se a integral de Stokes na forma esférica, conforme sugere SIDERIS (1997).

A integral de Stokes como foi demonstrada em (2.73) pode ser apresentada na seguinte forma (SIDERIS, 1997):

$$N(\varphi_p, \lambda_p) = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_E \Delta g(\varphi, \lambda) S(\varphi_p, \lambda_p, \varphi, \lambda) \cos \varphi d\varphi d\lambda. \quad (2.122)$$

Com as anomalias gravimétricas fornecidas na forma de malha, e equação (2.222) pode ser expressa como a seguir:

$$N(\varphi_l, \lambda_k) = \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{M-1} \Delta g(\varphi_j, \lambda_i) \cos \varphi_j S(\varphi_l, \lambda_k, \varphi_j, \lambda_i) \Delta\varphi \Delta\lambda. \quad (2.123)$$

Nas equações (2.122) e (2.123),  $\varphi$  e  $\lambda$ , com seus índices, indicam respectivamente a latitude e a longitude dos pontos na malha (M x N).

### 2.3.4.1 Núcleo esférico rigoroso da função de Stokes

Aproveitando o fato de que o núcleo esférico da função de Stokes fornece o valor exato da ondulação geoidal para todos os pontos localizados ao longo do mesmo paralelo de latitude média, HAAGMANS et al. (1993), fazem uso da transformada rápida de Fourier unidimensional 1D FFT para uma avaliação rigorosa da integral de Stokes.

Considerando que para calcular as ondulações geoidais de um certo paralelo  $\varphi_l$ , usando dados de um outro paralelo  $\varphi_j$ ,  $\psi$  muda apenas  $\lambda_k - \lambda_l$ , e  $\Delta g$  muda com  $\lambda_l$ , a integral bidimensional pode ser expressa pela seguinte integral de convolução:

$$N(\varphi_l, \lambda_k) = \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{j=0}^{N-1} \left[ \sum_{i=0}^{M-1} \Delta g(\varphi_j, \lambda_i) \cos \varphi_j S(\varphi_l, \varphi_j, \Delta \lambda_i) \Delta \lambda \right] \Delta \varphi, \quad (2.124)$$

com  $\varphi_l = \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ .

O termo entre colchetes contém uma convolução discreta unidimensional. A expressão pode ser avaliada, segundo HAAGMANS et al. (1993) e SIDERIS (1997), utilizando-se o teorema da adição das FFT através da seguinte equação:

$$N(\varphi_l, \lambda_k) = \frac{R}{4\pi\gamma} F_1^{-1} \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} F_1 \{ \Delta g(\varphi_j, \lambda_k) \cos \varphi_j \} F_1 \{ S(\varphi_l, \varphi_j, \lambda_k) \} \right\}, \quad (2.125)$$

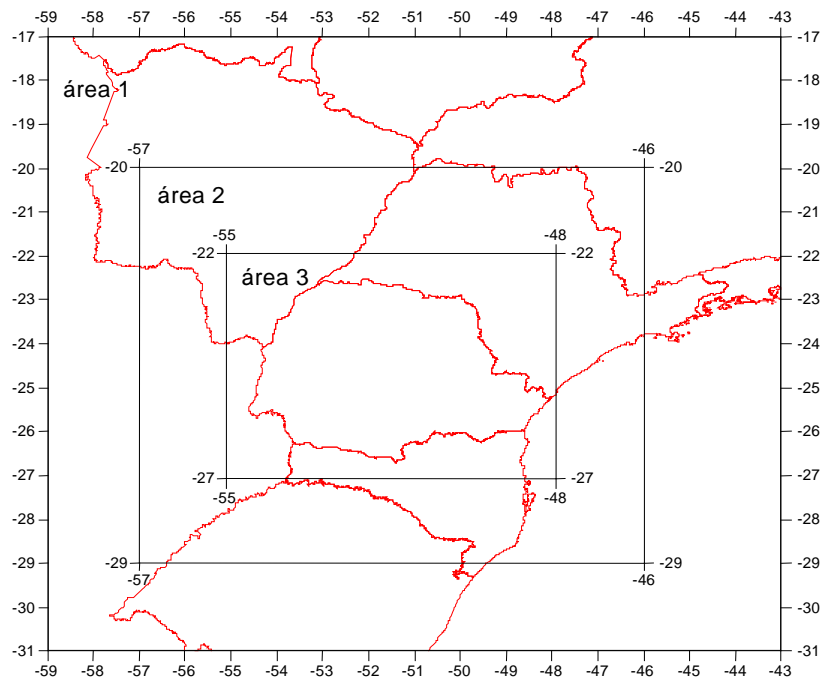
onde  $F_1$  e  $F_1^{-1}$ , denotam respectivamente o operador da transformada unidimensional 1D, e sua inversa.

Para o cálculo da ondulações geoidais do presente trabalho (seção 4.2), optou-se pela utilização da forma esférica e de núcleo rigoroso da função kernel-Stokes, avaliando a integral de Stokes através da FFT unidimensional 1D.

### 3 DESCRIÇÃO E PREPARO DOS DADOS

A organização dos dados está orientada basicamente de acordo com o tipo de fonte para as contribuições dadas pelas equações (2.101) e (2.102), que caracterizam por completo as etapas de cálculo do modelo geoidal (subseção 2.3). São três os tipos de dados utilizados na determinação do modelo geoidal deste trabalho: o modelo digital de terreno, dados terrestres de gravidade e o modelo geopotencial global. A área de cobertura de cada tipo de dado, bem como a área efetiva do modelo geoidal calculado, é apresentada na figura 3.

FIGURA 3 - ÁREA DE COBERTURA DOS DADOS UTILIZADOS NA GERAÇÃO DO MODELO GEOIDAL



Onde:

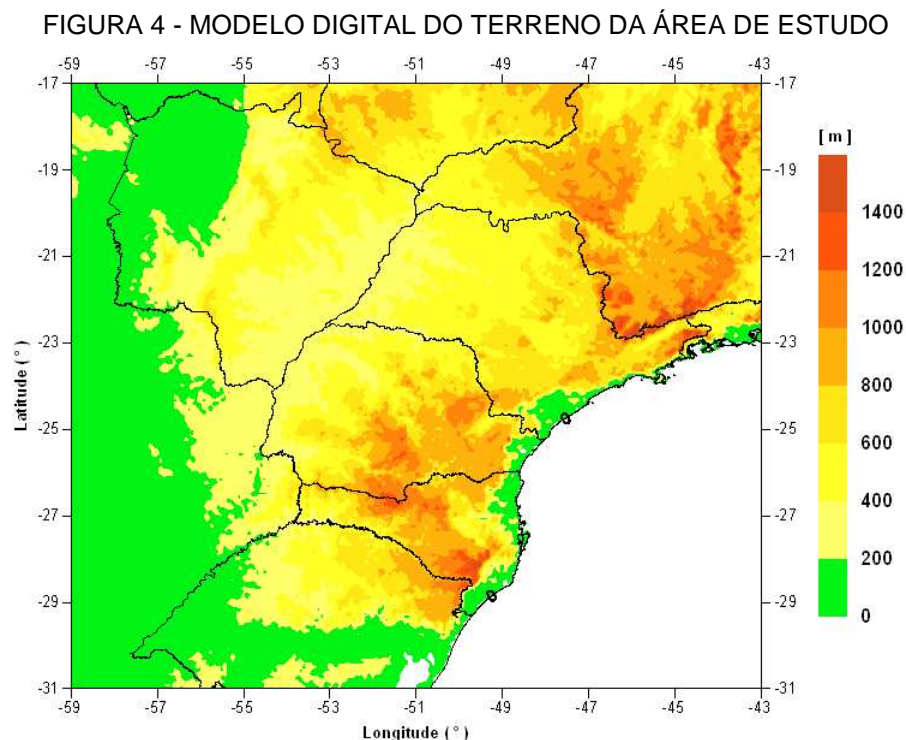
Área 1: área de cobertura do modelo digital de terreno;

Área 2: área de cobertura dos dados gravimétricos terrestres;

Área 3: área efetiva de cobertura do modelo geoidal determinado.

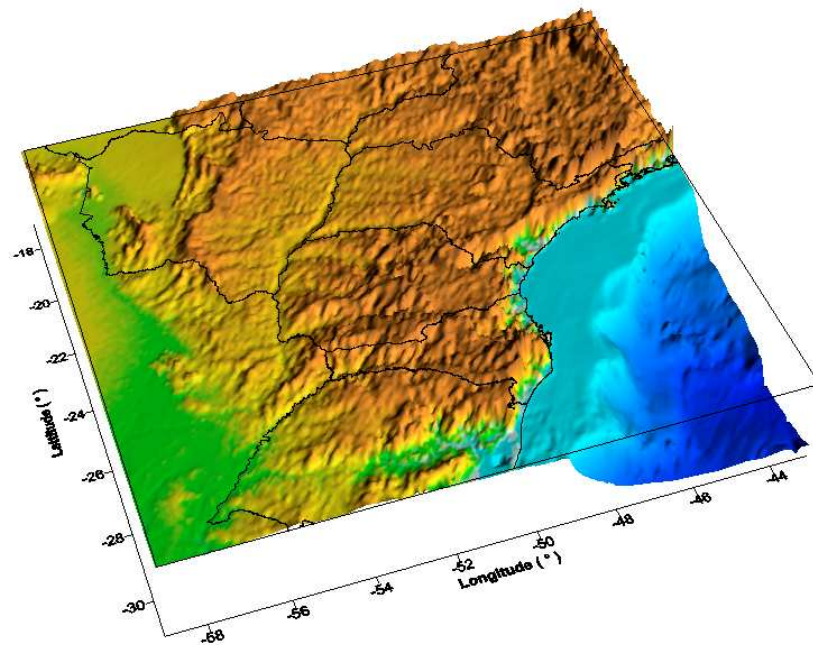
### 3.1 MODELO DIGITAL DO TERRENO

O modelo digital do terreno utilizado neste trabalho foi o *South American Model* (SAM\_1mv1) produzido por MATOS (2005). Está baseado fundamentalmente nos dados do *Shuttle Radar Topography Mission* (SRTM) para o continente, e na área oceânica, no *Digital Terrain Model 2002* (DTM2002), que considera a batimetria oceânica. Os dados fornecidos pelo SRTM foram avaliados por MATOS (2005) para a região sul-americana, e por GONÇALVES et al. (2005), para a região sul-brasileira. O SAM\_1mv1 foi fornecido no formato de lista, ponto a ponto, com latitude, longitude e altitude (em inteiros), com coordenadas referidas ao *World Geodetic System 1984 - WGS84* (NIMA, 2000), e a altitude referida ao nível médio dos mares (NMM). A área de cobertura disponibilizada está compreendida entre os meridianos de  $-59^{\circ}$  a  $-43^{\circ}$  e entre os paralelos de  $-31^{\circ}$  a  $-17^{\circ}$  (área 1) e pode ser acompanhada nas figuras 4 e 5. Este MDT reúne dados de altitude a cada 1' de espaçamento regular, num total de 808201 pontos.



FONTE: adaptado do modelo SAM\_1MV1 (MATOS, 2005)

FIGURA 5 - MODELO DIGITAL DO TERRENO DA ÁREA DE ESTUDO, EM PERSPECTIVA



A partir do SAM\_1mv1 gerou-se um outro MDT com a mesma área de cobertura e com 5' de espaçamento na malha. Este espaçamento é compatível com o escolhido para as demais tarefas envolvidas no cálculo. Como os programas que manipulam os dados através da transformada rápida de Fourier sempre o fazem na forma de malha, a necessidade de combinação destas diferentes contribuições no processo de “remoção, cálculo e reposição”, condiciona o trabalho sempre em malha de mesmo espaçamento. Do contrário, usa-se o artifício da interpolação para espaçamentos diferentes, tomando-se o devido cuidado com o tipo de grandeza que está sendo tratada, a amplitude de variação e onde será empregada.

Nesse sentido, as correções do efeito direto do terreno (a tradicional correção do terreno) e as correções do efeito indireto, por exemplo, respondem diferentemente em relação a um mesmo modelo digital de terreno. As primeiras são mais sensíveis e de amplitude numericamente maior.

### 3.1.1 Correção do Terreno

A correção do terreno (C ou CT) é o processo de refinamento aplicado ao platô de Bouguer, corrigindo as irregularidades das massas topográficas no nível de

altitude de um ponto  $P$  situado na superfície da Terra (HEISKANEN e MORITZ, 1967; 1985).

O platô de Bouguer é uma lâmina cilíndrica plana de espessura  $H_P$  e raio infinito, situado abaixo da estação  $P$ . Embora ao redor e deste ponto  $P$  podem ocorrer massas num nível mais elevado ou mesmo em ausência, a correção terreno será sempre positiva. Quando aplicada na redução gravimétrica de Bouguer, esta passa a ser chamada de redução refinada de Bouguer.

Em coordenadas planas, a correção do terreno pode ser avaliada pela integral:

$$\begin{aligned} \delta A_p = C_p = -\Delta g_p^{MDT} &= \frac{1}{2} G \rho \iint_E \frac{(H - H_p)^2}{l^3} dx dy \\ &= \frac{1}{2} G \rho \iint_E \frac{H^2 - H_p^2}{l^3} dx dy - H_p G \rho \iint_E \frac{H - H_p}{l^3} dx dy, \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde:

$G$  = constante de gravitação de Newton;

$\rho$  = 2,67g/cm<sup>3</sup> (normalmente);

$H$  = altitude de cada ponto considerado;

$l$  = distância plana entre a estação  $P$  com cada um dos pontos de cálculo.

Para o cálculo da correção do terreno  $C$  utilizou-se o programa TCFour (FORSBERG, 1985). Este efetua o cálculo por meio da transformada rápida Fourier, e pode trabalhar apenas com o arquivo-malha do modelo digital de terreno. Os resultados são calculados em toda a extensão da malha de pontos, sendo apresentados na mesma resolução dos dados de entrada. Detalhes de suas funções podem ser vistas em SUBIZA (2000) e GOLDANI (2005).

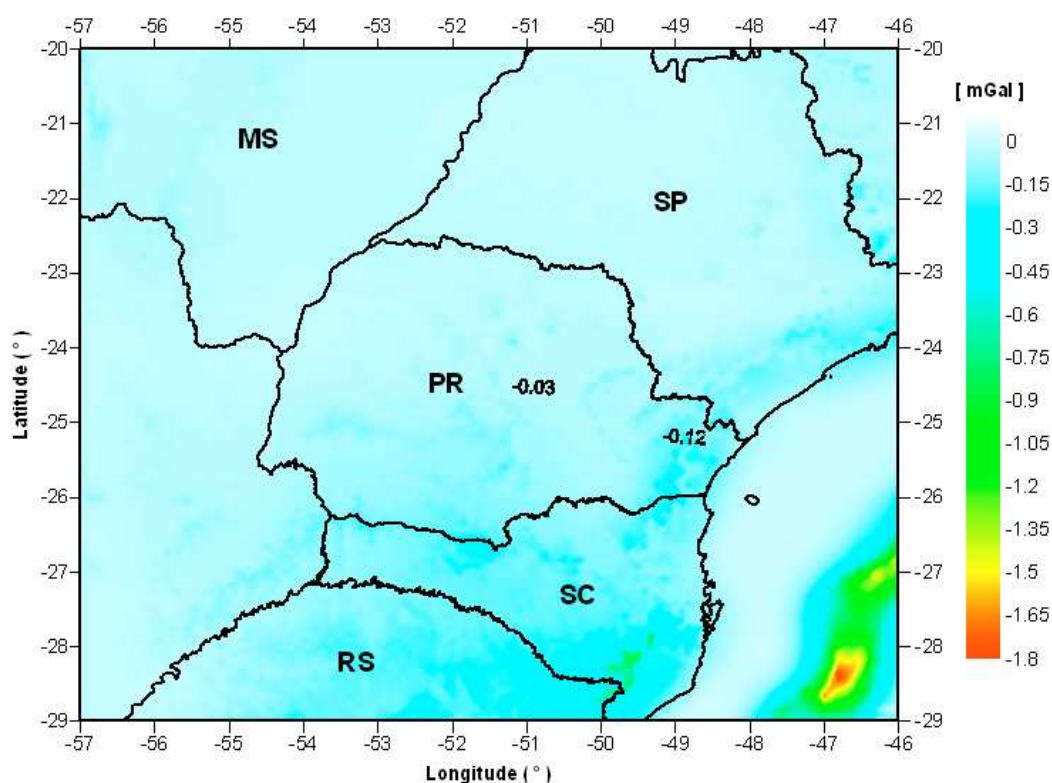
A correção do terreno foi calculada utilizando os pontos de altitude num raio de 50 km e de 100 km em torno do ponto de interesse, a título de avaliação. Na criação do Modelo Geoidal Australiano - AUSGeoid98, por exemplo, FEATHERSTONE et al. (2001) empregaram um raio de 50 km por este omitir, segundo os autores, os longos comprimentos de onda das correções do terreno. O Modelo Geoidal Gravimétrico Canadense - CGG2000 teve também a correção do terreno calculada com este mesmo raio de 50 km (VÉRONNEAU, 2001).

Contudo, a maior diferença encontrada dentro da área de interesse (Área 2 – Anomalias Gravimétricas:  $-29^{\circ}$  a  $-20^{\circ}$  e  $-57^{\circ}$  a  $-46^{\circ}$ ), utilizando o raio de 50 km e 100 km, foi de 0,872 mGal.

Tendo em vista que o programa TCFOUR avalia dados batimétricos, analisou-se também a influência deles no cálculo da correção do terreno.

Na figura 6 apresenta-se a diferença entre os valores da correção do terreno considerando a batimetria (ou seja, pontos da malha com altitudes negativas) em relação à correção de terreno considerando estas altitudes como nulas.

FIGURA 6 - VARIAÇÃO EM CORREÇÃO DO TERRENO POR CONSIDERAR OU NÃO A BATIMETRIA OCEÂNICA



É possível perceber pela figura 6, que a maior diferença em CT na área continental ocorre na região da Serra Geral, divisa entre os estados de Santa Catarina e Rio Grande do Sul, cujas altitudes ultrapassam com freqüência os 1000 m. Os valores desta diferença observada gira em torno de 1 mGal.



Repetiu-se o experimento para uma malha com a densidade original de 1' de arco em espaçamento e comparadas com as CTs calculadas com o MDT de 5' de arco.

Para analisar as diferenças ponto a ponto da malha, foi necessário interpolar posteriormente a CT calculada em 1' de espaçamento da malha, para o espaçamento de 5' de arco. Tal procedimento foi efetuado para se obter valores para as mesmas posições geográficas. A figura 7, ilustra o resultado.

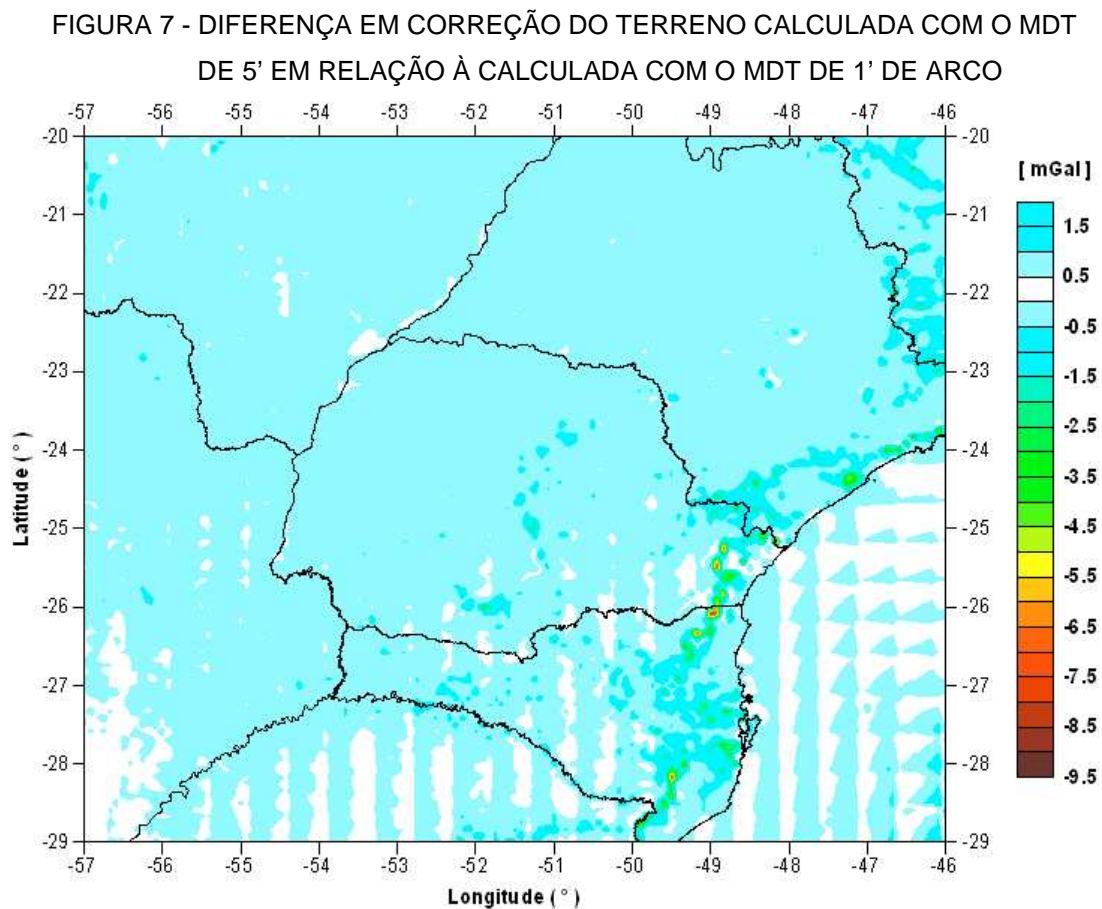
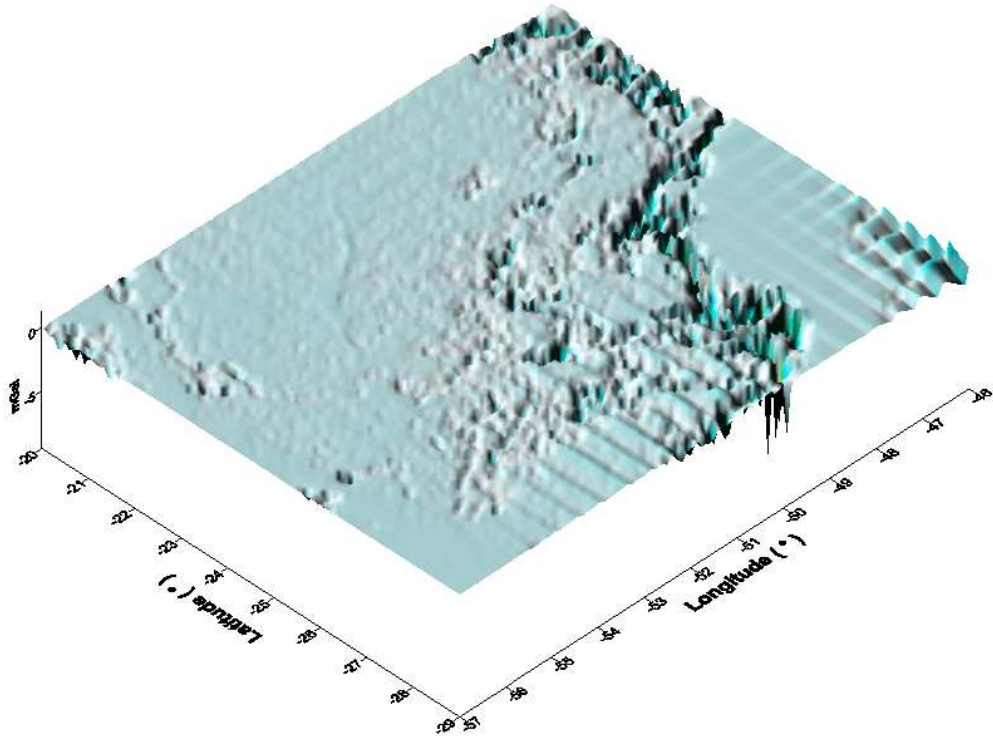


FIGURA 8 - DIFERENÇA EM CORREÇÃO DO TERRENO CALCULADA COM O MDT DE 5' EM RELAÇÃO À CALCULADA COM O MDT DE 1' DE ARCO, EM PERSPECTIVA



Segue alguns resultados desta análise:

- a) Máxima diferença em módulo: 9,45 mGal;
- b) Média: 0,15 mGal;
- c) Desvio Padrão: 0,41 mGal.

Para focar o ponto mais crítico, de maior diferença em CT, apresenta-se a seguir um fragmento da malha, cujo o ponto-nó de valor  $-9,452$  mGal, localizado na latitude de  $-25,1667^\circ$  e longitude de  $-48,1667^\circ$ , apa rece junto com os demais pontos vizinhos distantes deste em 5' de arco.

QUADRO 1 - DIFERENÇAS EM CT CALCULADAS COM MDT DE 5' E DE 1' DE ARCO

FRAGMENTO DA MALHA ( mGal )		
-0,765	0,060	0,067
0,384	<b>-9,452</b>	-0,082
-0,711	0,126	0,152

Ressalta-se que os valores mencionados representam a diferença entre malhas de dois cálculos de correção do terreno. Uma malha originada a partir do MDT de 5', e a outra originada a partir do MDT de 1', porém interpolada para ocupar a mesma posição geográfica e resolução da malha anterior.

Observando-se os pontos que circundam o ponto em destaque no quadro 1, é possível perceber o caráter isolado deste valor discrepante. Tal resultado pode ser originado possivelmente pela diferença de resolução em que foram calculadas as CTs.

Mais adiante, na subseção 4.2.1, será analisado o efeito que este eventual erro isolado de  $-9,452$  mGal pode causar na ondulação geoidal, quando este é propagado através das anomalias de gravidade, uma vez que a correção do terreno utilizada nas demais etapas foi calculada com o MDT de 5' de arco e não com o MDT de 1' de arco.

A seguir, apresenta-se a figura com a correção do terreno utilizada para a geração das anomalias de Helmert no processo de "remoção", descrito na subseção 4.1.

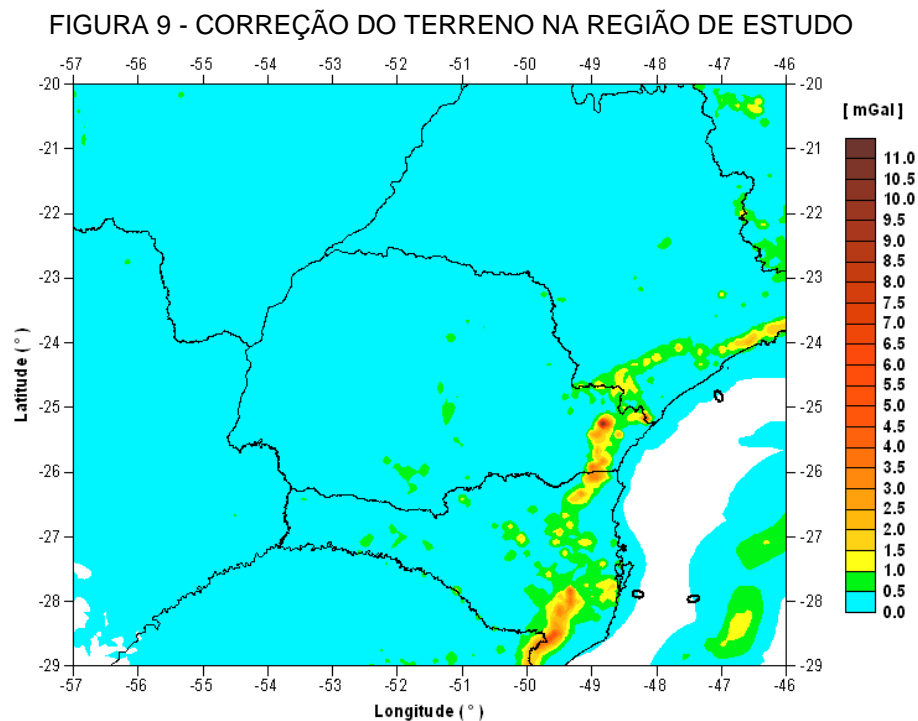
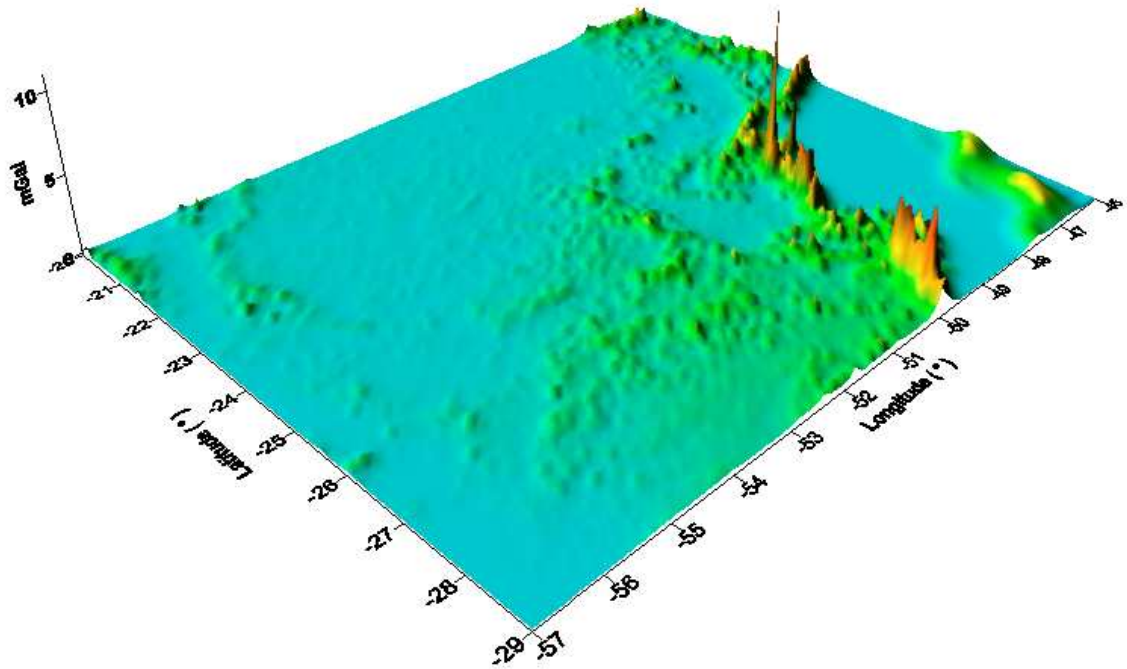


FIGURA 10 - CORREÇÃO DO TERRENO NA REGIÃO DE ESTUDO, EM PERSPECTIVA



Observando a figura 10 é possível identificar que o maior valor de CT não se encontra na região de maiores altitudes do relevo (fig. 4). Tal ocorrência é compreensível visto que os resultados não dependem apenas da altitude de cada estação de cálculo, mas também da diferença de altitude entre elas, como pode ser verificado na equação (3.1).

O cálculo da correção do terreno foi efetuado sobre toda área do modelo digital de terreno (área 1), que se estende por 2° ou 3° além da área 2, permitindo que se mantenham ausentes os efeitos de borda na região onde existe cobertura das anomalias gravimétricas consideradas no cálculo do modelo geoidal deste trabalho. Pelo exposto, a CT apresentada nas figuras 9 e 10 cobrem apenas a área 2, de interesse. Estudos sobre o efeito de borda e como evitá-los tem sido reportado em diversos trabalhos, SIDERIS e LI (1993), KIRBY e FEATHERSTONE (1999).

### 3.1.2 Efeito Indireto

Eliminando-se ou deslocando-se as massas nos processos de reduções da gravidade observada na superfície da Terra para o nível do geóide, ocasiona mudanças no potencial de gravidade, e portanto no geóide. Esta mudança é denominada de efeito indireto das reduções da gravidade (HEISKANEN e MORITZ, 1967; 1985).

Portanto, a superfície calculada com a fórmula de Stokes (2.1) é na realidade o “co-geóide”, cuja separação do geóide, medida em metros, é o próprio efeito indireto. Para cada tipo de redução de gravidade corresponde um co-geóide diferente.

O efeito indireto é calculado por

$$\delta N = \frac{\delta W}{\gamma}, \quad (3.2)$$

onde  $\delta W$  é a variação do potencial no geóide. A equação (3.2) é uma aplicação do teorema de Bruns (2.10).

A ondulação geoidal  $N$  fica calculada da seguinte forma:

$$N = N^c + \delta N, \quad (3.3)$$

onde:

- a)  $N^c$  = ondulação para o co-geóide;
- b)  $\delta N$  = efeito indireto.

Para o cálculo do efeito indireto foi utilizado o programa IND, escrito em linguagem Fortran e originário da Universidade de Calgary. O programa utiliza a transformada rápida de Fourier para avaliar o efeito indireto pelo segundo método de condensação de Helmert com a fórmula de WICHENCHAROEN (1982):

$$\delta N = \delta N_0 + \delta N_1 + \delta N_2 \quad (3.4)$$

As três parcelas são avaliadas isoladamente pelo programa tal como segue:

$$\delta N_0 = -\frac{\pi G \rho}{\gamma} H_p^2, \quad (3.5)$$

$$\delta N_1 = -\frac{G \rho}{\gamma} \left[ \iint_E \frac{H - H_p}{l_0} dx dy - \iint_E \frac{H - H_p}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \right], \quad (3.6)$$

$$\delta N_2 = -\frac{G \rho}{6\gamma} \left[ \iint_E \frac{H^3 - H_p^3}{l_0^3} dx dy \right] + -\frac{\pi G \rho}{2\gamma} H_m^2 - \left[ \iint_E \frac{H - H_p}{l_0^3} dx dy \right], \quad (3.7)$$

onde, a parcela  $\delta N_0$  é dominante e representa a parte regular da fórmula,  $\delta N_1$  e  $\delta N_2$ , representam a parte irregular. E  $l_0$ , caracterizando uma diferença de posição, determinado por

$$l_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + H_m^2}, \quad (3.8)$$

sendo:

$x, y$  = coordenadas planas do ponto

$H_p$  = altitude do ponto de cálculo

$H$  = altitude de cada ponto dentro do raio determinado

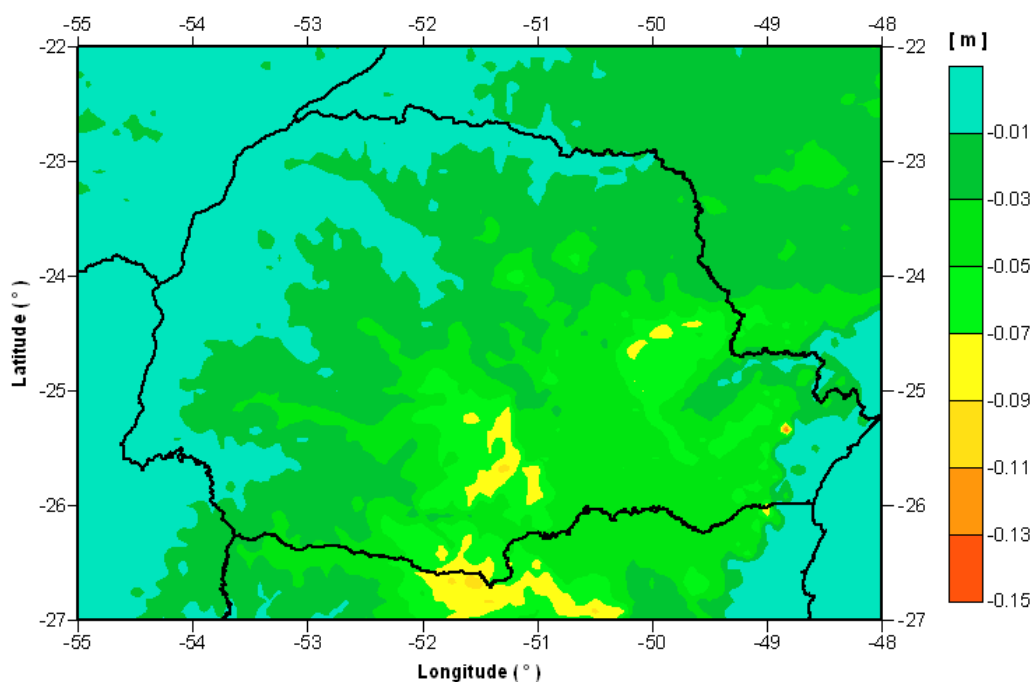
$H_m$  = altitude média da área de cálculo

$l_0$  = distância entre o ponto de cálculo e os demais pontos

O efeito indireto foi avaliado em toda a área de cobertura do MDT, área 1, de resolução 5' (espaçamento). Os raios de 50 km e 100 km foram empregados no cálculo, não sendo verificada variação entre um e outro resultado.

A figura 11 representa o efeito indireto cobrindo apenas a “área 3”, que é a área efetiva de aproveitamento utilizada no cálculo, processo de “restauração”. Seus valores são determinados em metros e são sempre negativos.

FIGURA 11 - EFEITO INDIRETO NA REGIÃO DO PARANÁ



Analisando a figura 11, identifica-se a ocorrência do valor máximo do efeito indireto incidindo na mesma região do valor de máxima correção do terreno, pelas mesmas razões apontadas na seção 3.1.1.

### 3.1.3 Avaliação Empírica da Propagação de Erro Altimétrico

A precisão altimétrica absoluta do SRTM, modelo do qual é derivado o mdt SAM\_1mv1 utilizado neste trabalho, gira em torno de 16 m, segundo MATOS (2005). Com o intuito de avaliar o efeito desta imprecisão propagada através da correção do terreno e do efeito indireto, foram efetuados testes variando a altitude e acompanhando o resultado em correção de terreno, obtidas com o programa TCFOUR, e em efeito indireto, obtidas com o programa IND. Em CT, aumentando em 20 m na altitude de dois pontos vizinhos da malha do mdt, a variação verificada em relação a CT calculada com o mdt inalterado, foi de 0,054 mGal. Alterando 5 pontos vizinhos da malha de mdt nesta mesma proporção, a variação foi de 0,168 mGal. Usando estas duas alterações para o cálculo do efeito indireto, nenhuma alteração significativa foi constada. A área escolhida para estas alterações está localizada nas regiões de maiores altitudes do relevo.

### 3.2 DADOS TERRESTRES DE GRAVIDADE

O Laboratório de Geodésia Física da Universidade Federal do Paraná possui um banco de dados gravimétrico com observações coletadas nos últimos 20 anos na área do estado. Para este projeto de cálculo do Modelo Geoidal de Alta Precisão do Estado do Paraná foram agregados dados provenientes da Universidade de São Paulo e também do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. O banco de dados gravimétrico, com informações de latitude e longitude em graus decimais, gravidade observada em mGal e altitude em metros, após passarem por uma filtragem, totalizou 40635 observações gravimétricas terrestres, distribuídas entre os paralelos  $-30^\circ$  e  $-20^\circ$  e os meridianos  $-58^\circ$  e  $-45^\circ$ . Este processo consistiu na eliminação das observações duplicadas e aparentemente eivadas de erros grosseiros, tanto em altitude, quanto no próprio valor de gravidade observada. Embora desconhecido o sistema de coordenadas ao qual estão referidas as observações, todos os dados foram processados utilizando o elipsóide de referência do *Geodetic Reference System* 1980 (MORITZ, 1979), utilizado pelo SIRGAS2000 (IBGE, 2005a).

A incerteza nas coordenadas devido ao sistema de referência pode girar em torno de 2" pela equivalência nos parâmetros de transformação (IBGE, 2005a), o que em latitude representa um erro de apenas 0,01 mGal na gravidade normal calculada para latitude média da área de trabalho, que é de  $-24,5^\circ$ . Da mesma forma, o efeito dessa incerteza na posição da estação é desprezível em termos de altura geoidal, cuja a variação no espaço é suave. Considerando o erro na coleta das coordenadas da estação, seja através de cartas topográficas (1:50.000, 1:100.000), posicionamento absoluto GPS ou barômetro (exclusivamente na determinação de altitude), a amplitude desta incerteza tende a aumentar, dificultando a análise quando esta informação não vem documentada.



### 3.2.1 Reduções Aplicadas às Observações Gravimétricas

#### 3.2.1.1 Reduções atmosféricas

Para as reduções atmosféricas na observação de gravidade foram testadas duas fórmulas, que são funções da altitude ortométrica  $H$ , em metros:

$$C_{ATM} = 0,874 - 0,99 * 10^{-4} H + 0,356 * 10^{-8} H^2 mGal , \quad (3.9)$$

sugerida por TORGE (1989).

$$C_{ATM} = 0,8658 - 9,27 * 10^{-5} H + 3,482 * 10^{-9} H^2 mGal \quad (3.10)$$

sugerida pela *International Association of Geodesy* (IAG), deve ser adicionada ao valor observado de gravidade (MORITZ, 1992). Desenvolvida por Pavlis, esta equação (3.10), é fornecida por SEVILLA (1997) e foi adotada neste trabalho, embora as duas fórmulas tenham apresentado valores muito próximos, na ordem de 8  $\mu$ Gal de discrepância.

#### 3.2.1.2 Redução gravimétrica ar-livre

Para a geração das anomalias de gravidade ar-livre foi adotado o sistema de referência do GRS80, calculando-se os valores de gravidade normal  $\gamma$  através da fórmula Somigliana, recomendada pela IAG

$$\gamma = \gamma_E \frac{1 + k \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (3.11)$$

onde  $\gamma_E$  é a gravidade normal no equador do elipsóide,  $k = \frac{b\gamma_P}{a\gamma_E} - 1$ ,  $a$  e  $b$ , são os semi-eixos do elipsóide adotado e  $\gamma_P$  é a gravidade polar no elipsóide.

O cálculo das anomalias ar-livre são obtidos através da equação:

$$\Delta g_{AL} = g + 0,3086H - \gamma_0, \quad (3.12)$$

onde  $g$  é gravidade observada na superfície,  $0,3086$  é o gradiente ar-livre,  $H$  é a altitude ortométrica e  $\gamma_0$  é a gravidade normal no elipsóide, correspondente a latitude de cada estação.

### 3.2.1.3 Redução gravimétrica de Bouguer

No banco de dados gravimétricos foram geradas também as anomalias de Bouguer completas.

$$\Delta g_{BO} = g - 0,1119H + 0,3086H - \gamma_0, \quad (3.13)$$

sendo,

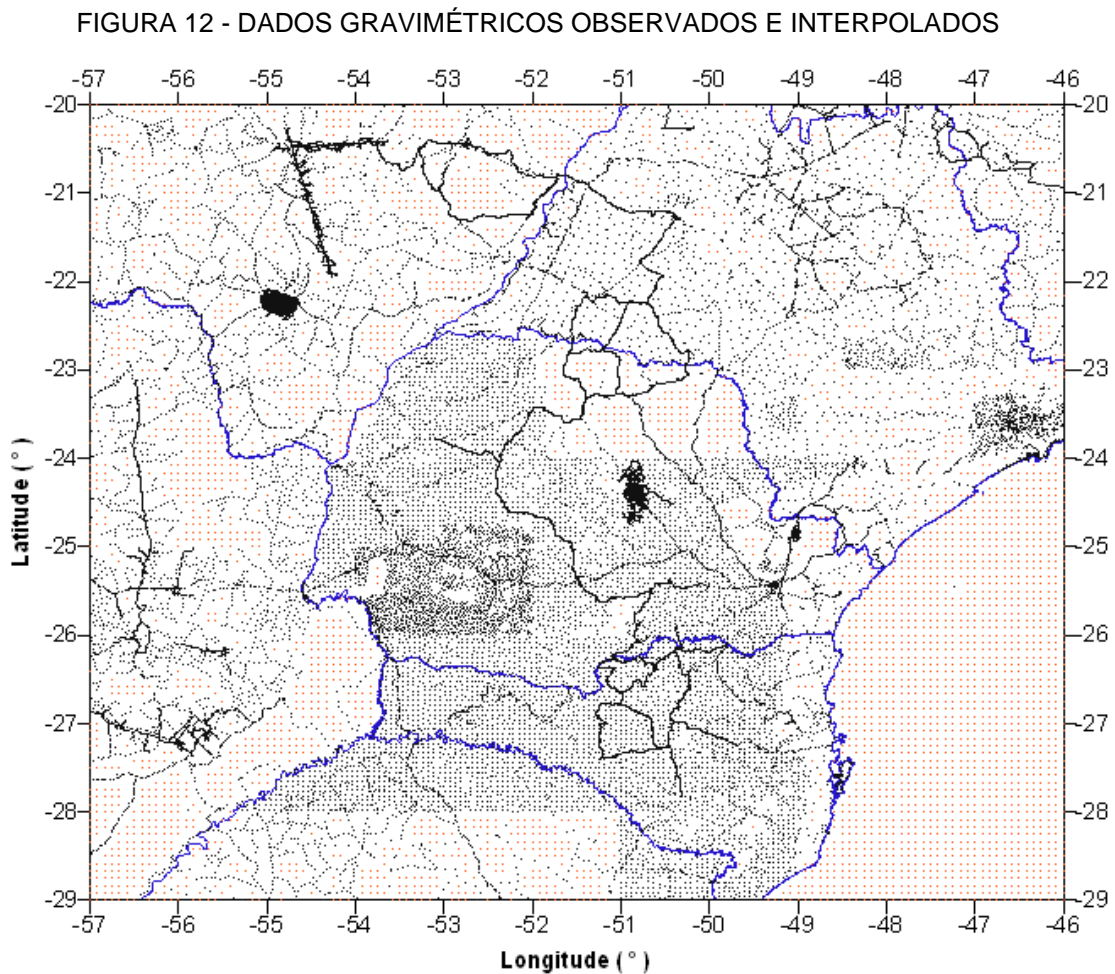
$$\Delta g_{BO} = \Delta g_{AL} - 0,1119H, \quad (3.14)$$

onde  $0,1119H$  é a correção relativa à lâmina (platô) de Bouguer infinita, em  $A_B = 2\pi G\rho H$ , aplicada à anomalia ar-livre  $\Delta g_{AL}$ , considerando uma densidade de massa terrestre média  $\rho$  de  $2,67 \text{ g/cm}^3$ , e  $H$  a altitude da estação.

Embora a anomalia de Bouguer não tem aplicação direta no cálculo do geóide, por ocasionar neste um efeito indireto muito grande (HEISKANEN e MORITZ, 1967; 1985), sua determinação é necessária em função da sua associação com a anomalia ar-livre, como descrito acima. Sua importância se deve ao fato de que normalmente se apresenta de uma forma mais suave do que a anomalia ar-livre, e portanto mais indicada para interpolação e posterior obtenção da própria anomalia ar-livre, como será demonstrado na próxima subseção.

### 3.2.2 Interpolação e Extrapolação dos Dados de Gravidade

A aplicação da transformada rápida de Fourier no cálculo do geóide requer anomalias gravimétricas na forma de malha regular. Para satisfazer a este pressuposto, as observações gravimétricas foram interpoladas cobrindo toda a área de interesse. É possível perceber na figura abaixo a distribuição espacial dos dados observados, bem como as áreas desprovidas de observações.



Na figura 12, em preto estão identificados os dados observados de gravidade, e em vermelho, os dados interpolados que cobrem as áreas vazias.

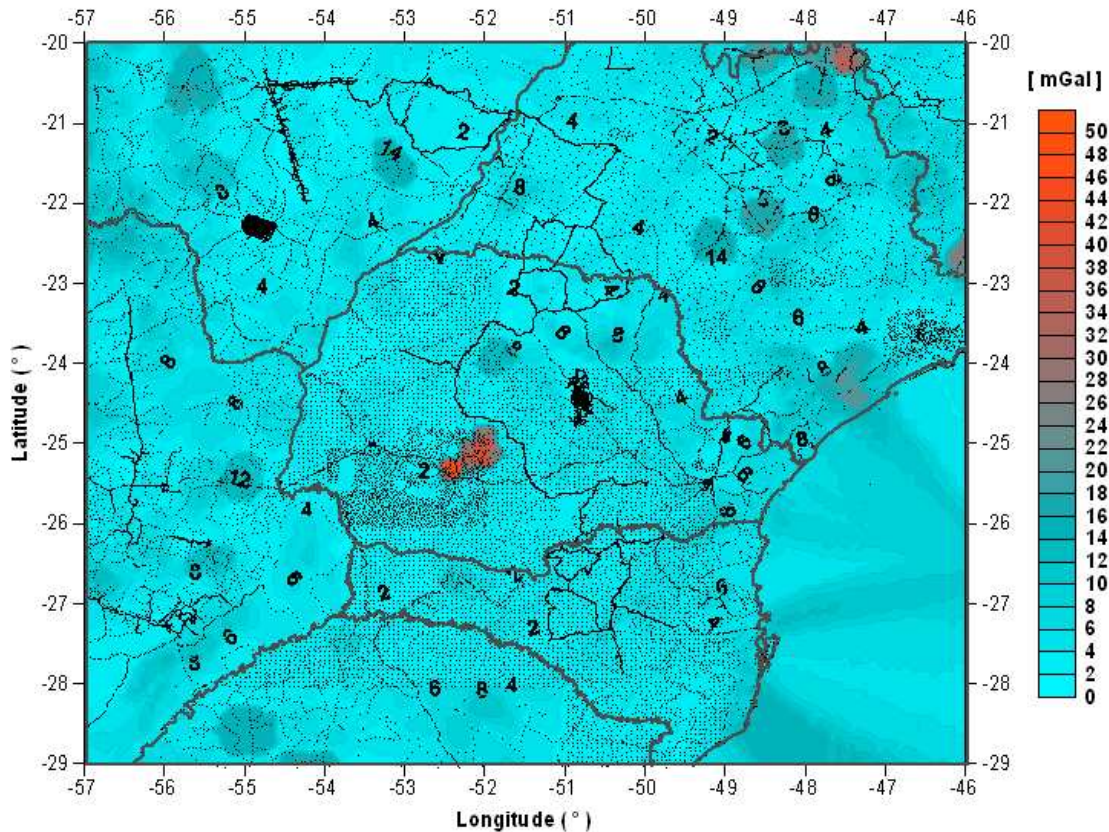
Optou-se pela geração da malha com espaçamento regular de 5' tanto na direção norte-sul, quanto na direção oeste-leste. Esta é a resolução na qual foram efetuados os cálculos das etapas de remoção, cálculo e reposição das diferentes contribuições espectrais da altura geoidal.

Para a interpolação dos dados foi utilizado o programa PredGrav (DREWES, 1978), que utiliza o método dos mínimos quadrados na estimação do valor de gravidade, obedecendo a equação (3.14). O programa requer como informação base um arquivo de observações com latitude, longitude, altitude e gravidade observada (ou anomalia de Bouguer). Um segundo arquivo, contendo latitude, longitude e altitude para os pontos onde se deseja interpolar o valor de gravidade.

Para a interpolação foram tomados os pontos-nós do modelo digital de terreno (descrito na subseção 3.1) cobrindo a área demonstrada na figura 12, com espaçamento regular de 5', porém sob a forma de lista, contendo latitude, longitude e altitude, num total de 14497 pontos para os quais se determinou um valor de gravidade. O modelo digital de terreno utilizado neste trabalho considera a batimetria oceânica, mas para esta tarefa, os pontos extrapolados para a área oceânica tiveram suas altitudes anuladas para não influenciar na interpolação dos pontos na região terrestre litorânea. Mais adiante, na subseção 4.2, é demonstrado que o cálculo do presente modelo geoidal considera apenas a influência do modelo geopotencial global na área oceânica, não conjugando qualquer outra contribuição de médio e curto comprimento de onda, advindas das anomalias gravimétricas reduzidas ou provenientes das correções do terreno.

Na figura 13, apresenta-se os desvios padrão da gravidade interpolada para todos os pontos que foram interpolados dentro da área 2. Percebe-se que os valores mais críticos encontram-se localizados numa região de transição entre dados que foram observados possivelmente em levantamentos distintos (latitude  $-25^\circ$  e longitude  $-52^\circ$ ). Como se trata de uma região com uma densidade considerável de dados observados em relação às demais, esperava-se melhores resultados. Por outro lado, este fato é um indicativo de uma possível incompatibilidade de referenciais aos quais foram submetidos os dados de gravidade.

FIGURA 13 - DESVIOS PADRÃO DA GRAVIDADE INTERPOLADA PARA TODA A ÁREA 2



Para a seleção dos pontos interpolados apenas para as áreas desprovidas de dados observados de gravidade, foi gerado o programa SEPE (Seleção de Pontos Estimados), em linguagem Fortran (HEHL, 1986 e MARSHAL, 1997), cujo algoritmo compara as distâncias entre cada um dos 14497 pontos estimados, com todos os 40635 pontos observados de gravidade. O critério de seleção obedece a uma distância de 5' (0,0833333 graus decimais), sendo superior a este valor de distância, o ponto estimado é selecionado, evitando assim a sobreposição de um valor interpolado de gravidade sobre um observado. Deste contudo, selecionou-se 3706 pontos interpolados de gravidade que posteriormente foram introduzidos no banco de dados (devidamente identificados) para o cálculo das anomalias de Bouguer.

As anomalias ar-livre utilizadas no cálculo do geóide (etapa de remoção) foram geradas através das anomalias de Bouguer interpoladas para toda a área 2, ou seja, entre os meridianos  $-57^\circ$  e  $-46^\circ$  e os paralelos  $-29^\circ$  e  $-20^\circ$  e com o espaçamento da malha em 5' de arco, em ambas as direções. Nesta interpolação, por meio da *krigagem*, foram utilizadas todas as anomalias de Bouguer calculadas,

oriundas tanto dos pontos observados de gravidade, quanto dos pontos interpolados de gravidade via PredGrav. Os pontos de anomalia de Bouguer interpolados para aquelas regiões que não possuíam dados observados de gravidade, ocupam a mesma posição dos pontos-nós de gravidade gerados na interpolação via PredGrav. Tal coincidência de posição da malha se faz necessário no processo de recomposição das anomalias ar-livre, já que estes pontos-nós possuem a altitude determinada do MDT.

A opção pela interpolação de anomalias de Bouguer para a posterior obtenção das anomalias ar-livre, ao invés da interpolação direta das anomalias ar-livre pode ser percebida visualmente pelas figuras a seguir:

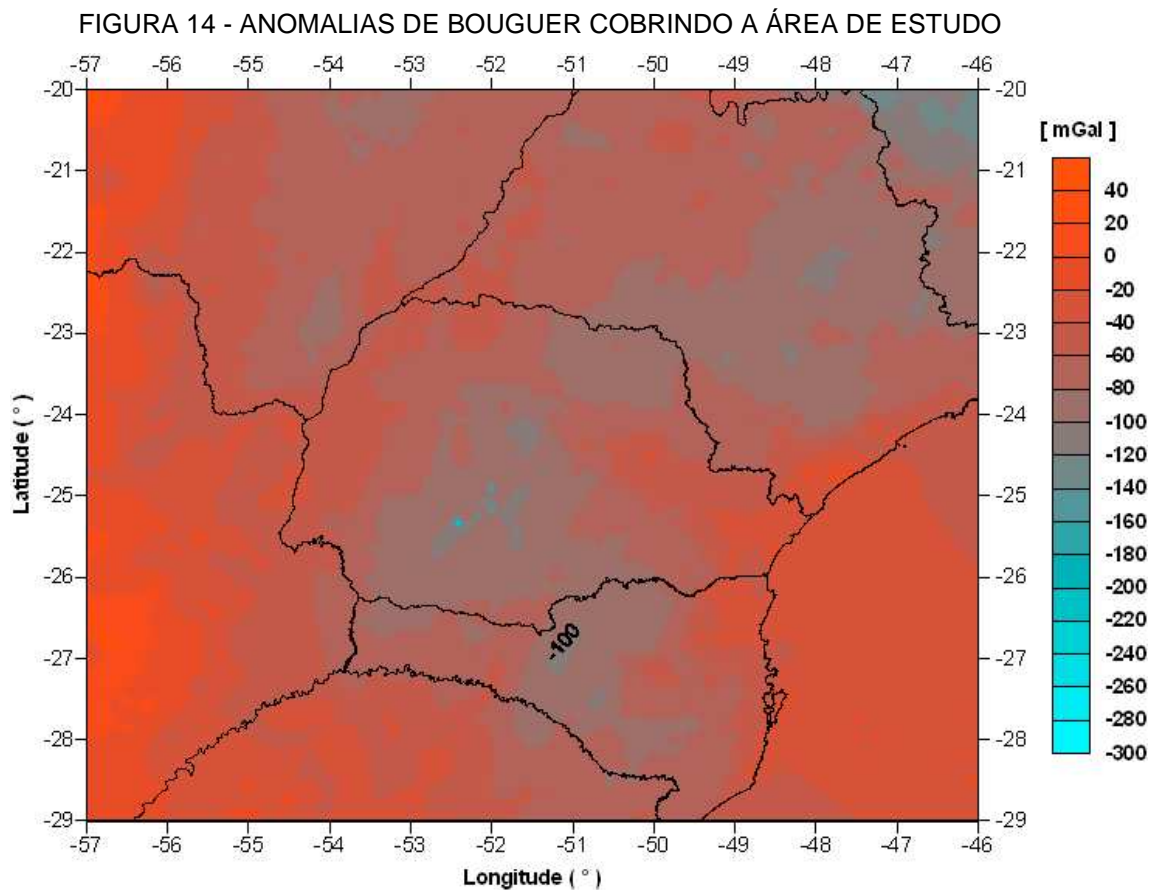




FIGURA 15 - ANOMALIAS DE BOUGUER COBRINDO A ÁREA DE ESTUDO,  
EM PERSPECTIVA

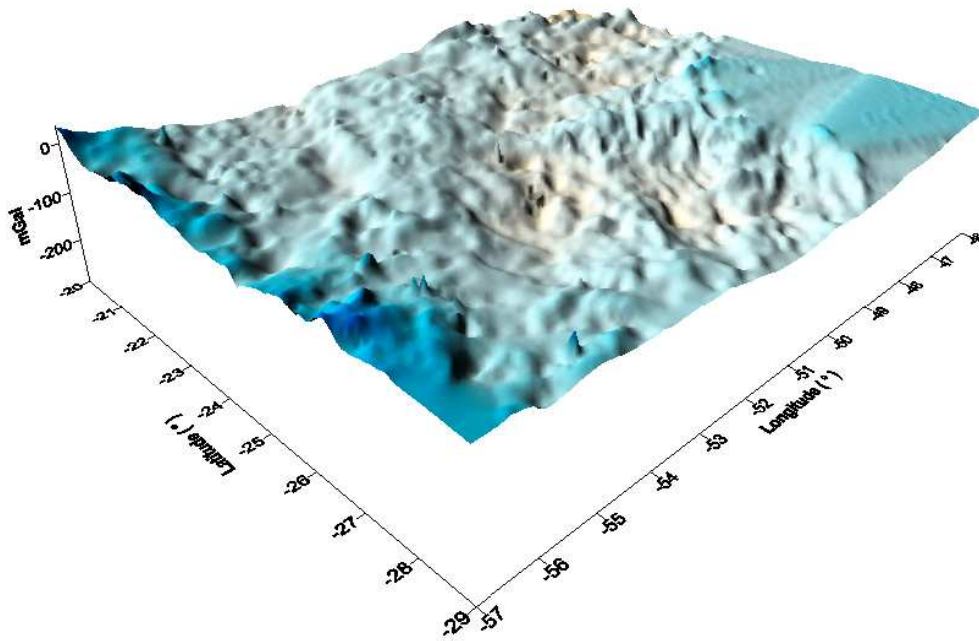
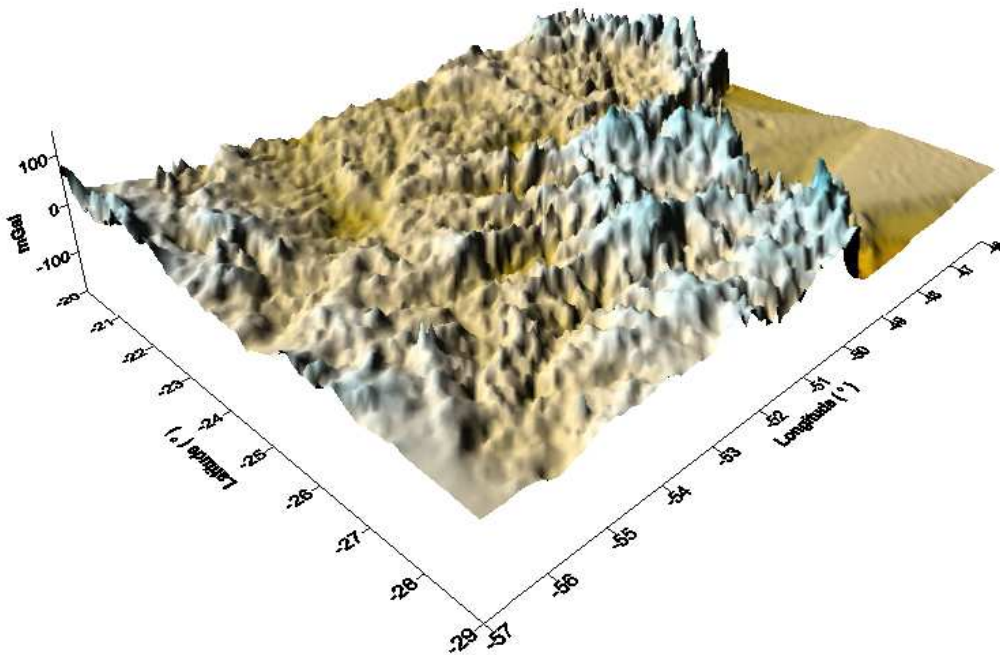
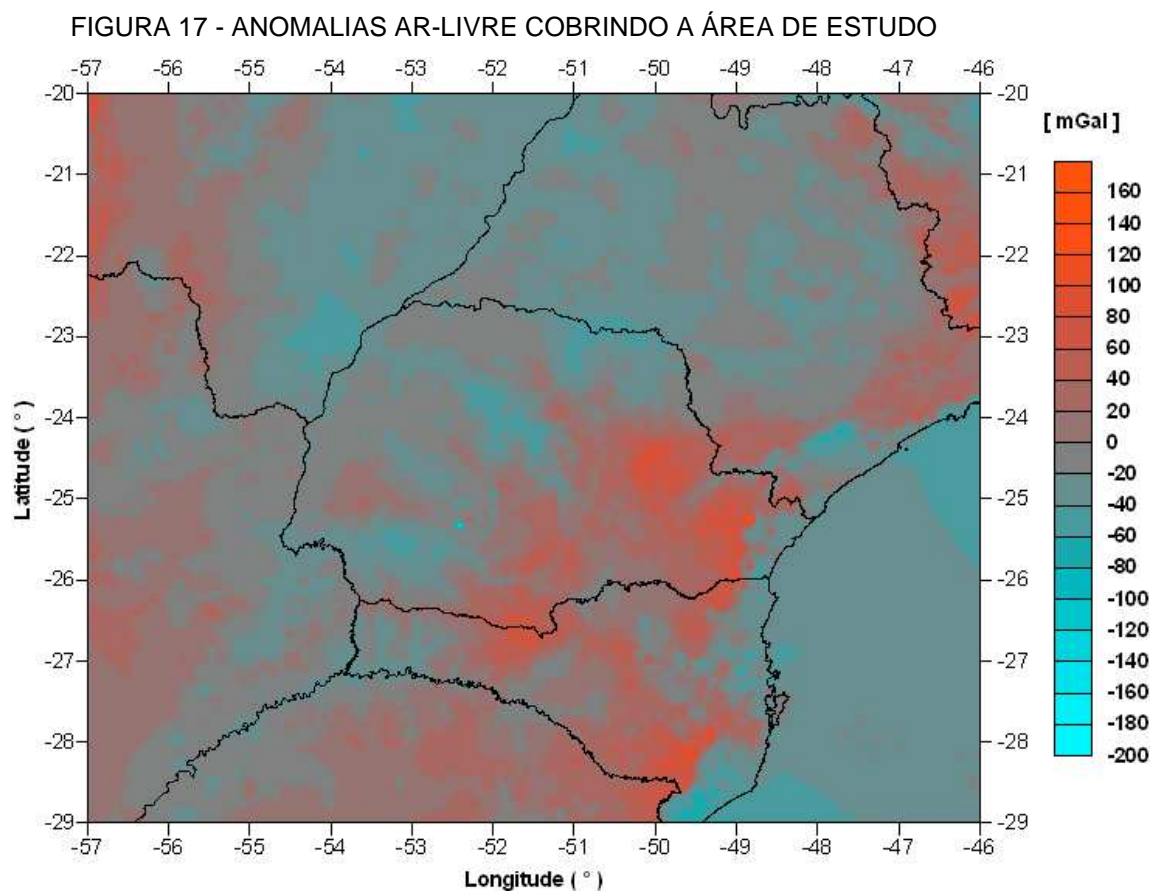


FIGURA 16 - ANOMALIAS AR-LIVRE COBRINDO A ÁREA DE ESTUDO,  
EM PERSPECTIVA





A simples inspeção visual das figuras anteriores, permite a percepção de como as anomalias de Bouguer são mais suaves e mais propícias a interpolação do que as anomalias ar-livre, na nossa região de trabalho.

A recomposição das anomalias ar-livre oriundas das anomalias Bouguer foi feita através do fator  $0,1119H$ . Onde  $H$  é a altitude de cada ponto-nó da malha.

Outras formas de interpolação tem sido testadas para obtenção de anomalias ar-livre para as áreas desprovidas de observações gravimétricas. A utilização da interpolação das anomalias ar-livre por meio de redes neurais artificiais apresentaram resultados mais confiáveis quando comparadas a interpolação via krigagem das anomalias ar-livre, conforme demonstra CRIOLLO (2003) para a região dos Andes Equatorianos.

Na região da Australia, ZHANG e FEATHERSTONE (2000a), testaram três tipos de interpolação para obtenção de anomalias ar-livre: via Bouguer, via Isostasia e via interpolação da própria anomalia ar-livre. Cada um dos três métodos



apresentou resultado melhor para uma dada área. Conforme apontam os autores, tal condição é influência do tipo de estrutura geológica australiana atuando sobre as anomalias gravimétricas, que não servem evidentemente como regra geral, devendo cada método ser testado para a escolha do mais favorável para cada região de interesse.

Testes com a interpolação da anomalia refinada de Bouguer (simples + correção de terreno) foram conduzidos por JANÁK e VANÍCEK (200?) nas Montanhas Rochosas do Canadá, onde segundo os autores, este tipo de anomalia seria a mais correta para se obter anomalias médias ar-livre utilizadas no cálculo do geóide. Neste trabalho, os autores reportam consideráveis diferenças na ondulação geoidal para pontos situados em altitudes mais elevadas, quando comparados os efeitos da interpolação das anomalias ar-livre, via anomalias simples de Bouguer e via anomalias refinadas de Bouguer. Tal condição porém, não havia sido verificada na Austrália por FEATHERSTONE et al. (2002), onde os resultados também foram avaliados em termos de ondulação geoidal, para a qual não foi identificada variação significativa.

Nas figuras 18 e 19 a seguir são apresentadas as diferenças entre os valores das anomalias ar-livre obtidas através da interpolação via anomalias de Bouguer, comparadas com as anomalias ar-livre obtidas diretamente via *krigagem*.

FIGURA 18 - DIFERENÇAS EM INTERPOLAÇÃO DAS ANOMALIAS AR-LIVRE (VIA BOUGUER VS. VIA KRIGAGEM), EM PERSPECTIVA

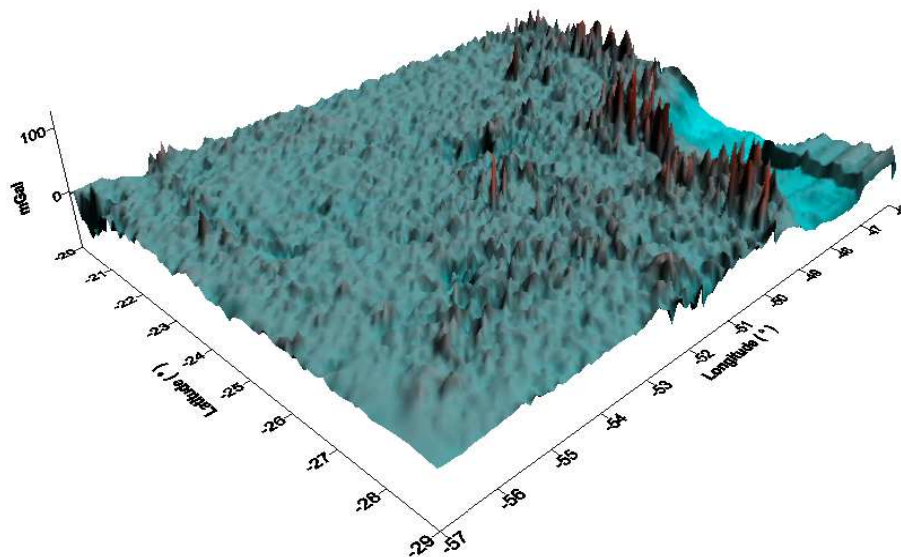
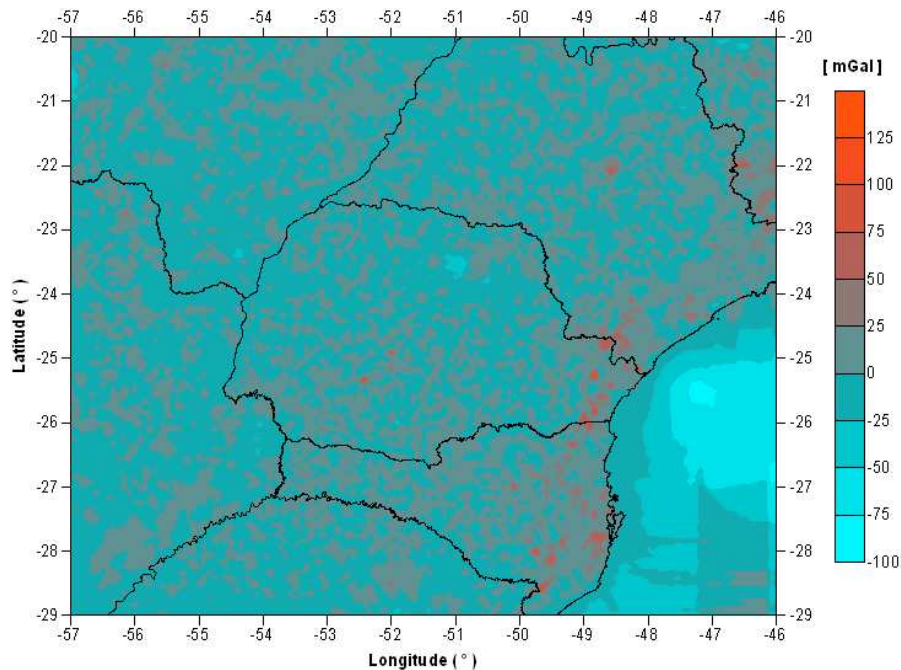


FIGURA 19 - DIFERENÇAS EM INTERPOLAÇÃO DAS ANOMALIAS  
AR-LIVRE ( VIA BOUGUER VS. VIA KRIGAGEM)



QUADRO 2 - ESTATÍSTICAS DA COMPARAÇÃO ENTRE ANOMALIAS  
AR-LIVRE GERADAS VIA BOUGUER E VIA INTERPOLAÇÃO  
DIRETA POR KRIGAGEM

	MÉDIA	DESVIO PADRÃO	MÍN	MÁX
	( mGal )			
<b>ARQ1</b>	-8,56	24,63	-187,58	147,70
<b>ARQ2</b>	-4,08	23,81	-282,70	99,88
<b>DIF</b>	-4,48	15,27	-93,35	125,72

No quadro 2, são apresentadas as estatísticas geradas na combinação das malhas, com a média, desvio padrão, mínimo e máximo valores, respectivamente, de cada arquivo. Sendo ARQ1 o arquivo com a malha de anomalias ar-livre interpoladas via anomalias de Bouguer, ARQ2 o arquivo com a malha de anomalias ar-livre interpoladas diretamente via *krigagem* e DIF, o arquivo das diferenças geradas pela subtração (ARQ1 – ARQ2).

Ressaltando que a comparação é feita ponto a ponto na malha, observa-se que para um determinado ponto de igual posição em latitude e longitude, a diferença

máxima encontrada foi de até 125,72 mGal entre os dois métodos de interpolação. Este resultado é devido muito provavelmente à grande variabilidade dos valores da anomalia ar-livre, o que torna instável o resultado da interpolação direta de seus valores como é caso via *krigagem*.

### 3.3 MODELO GEOPOTENCIAL GLOBAL

O modelo geopotencial global (MGG) utilizado nos cálculos foi o *Preliminary Geopotential Model 2000A - PGM2000A* desenvolvido até o grau 360 (NASA, 2005). Preparado por (Pavlis *et al.*, 2000), esse modelo geopotencial é uma atualização do EGM96 (NIMA, 2005), que incorpora equações normais para a topografia dinâmica do oceano (DOT), com base no modelo de circulação oceânica POCM\_4B, combinadas com as equações normais provenientes de dados orbitais de satélites, de dados superficiais de gravidade e de dados dos satélites altímetros TOPEX/Poseidon e ERS-1. Segundo os autores, o PGM2000A mantém a qualidade nas modelagens orbital e geoidal alcançadas com o EGM96, melhorando a modelagem do geóide na área oceânica. Além disso, consideram-no um modelo com erros mais realísticos que seu antecessor.

Abaixo são apresentados os coeficientes dos modelos do geopotencial tal como são disponibilizados, sendo apresentados aqui apenas até o grau e ordem 4. Pela seqüência, ( $n$ ,  $m$ ,  $C_{nm}$ ,  $S_{nm}$ ,  $\sigma C_{nm}$ ,  $\sigma S_{nm}$ ) são o grau  $n$ , desconsiderando os termos de grau 0 e 1, e a ordem  $m$ ;  $C_{nm}$ ,  $S_{nm}$  são os coeficientes geopotenciais plenamente normalizados do potencial anômalo e  $\sigma C_{nm}$ ,  $\sigma S_{nm}$  são os erros associados a cada coeficiente.

QUADRO 3 - COEFICIENTES DO MODELO GEOPOTENCIAL EGM96

2	0	-0.484165371736E-03	0.000000000000E+00	0.35610635E-10	0.00000000E+00
2	1	-0.186987635955E-09	0.119528012031E-08	0.10000000E-29	0.10000000E-29
2	2	0.243914352398E-05	-0.140016683654E-05	0.53739154E-10	0.54353269E-10
3	0	0.957254173792E-06	0.000000000000E+00	0.18094237E-10	0.00000000E+00
3	1	0.202998882184E-05	0.248513158716E-06	0.13965165E-09	0.13645882E-09
3	2	0.904627768605E-06	-0.619025944205E-06	0.10962329E-09	0.11182866E-09
3	3	0.721072657057E-06	0.141435626958E-05	0.95156281E-10	0.93285090E-10
4	0	0.539873863789E-06	0.000000000000E+00	0.10423678E-09	0.00000000E+00
4	1	-0.536321616971E-06	-0.473440265853E-06	0.85674404E-10	0.82408489E-10
4	2	0.350694105785E-06	0.662671572540E-06	0.16000186E-09	0.16390576E-09
4	3	0.990771803829E-06	-0.200928369177E-06	0.84657802E-10	0.82662506E-10
4	4	-0.188560802735E-06	0.308853169333E-06	0.87315359E-10	0.87852819E-10
.....					

QUADRO 4 - COEFICIENTES DO MODELO GEOPOTENCIAL PGM2000A

2	0	-.4841653681961D-03	.0000000000000D+00	.3353447D-10	.0000000D+00
2	1	-.1869876359549D-09	.1195280120307D-08	.1000000D-29	.1000000D-29
2	2	.2439116337179D-05	-.1400188809403D-05	.5048090D-10	.5086808D-10
3	0	.9572812805313D-06	.0000000000000D+00	.1880733D-10	.0000000D+00
3	1	.2029987681843D-05	.2484668372895D-06	.1300162D-09	.1282327D-09
3	2	.9047529259823D-06	-.6190579545540D-06	.1029313D-09	.1028894D-09
3	3	.7211469416448D-06	.1414406525439D-05	.8777311D-10	.8731938D-10
4	0	.5398651962170D-06	.0000000000000D+00	.9616698D-10	.0000000D+00
4	1	-.5363238145279D-06	-.4734590257917D-06	.7962458D-10	.7723035D-10
4	2	.3507152446219D-06	.6627987573188D-06	.1493222D-09	.1533935D-09
4	3	.9907774029300D-06	-.2009938408755D-06	.7928756D-10	.7684718D-10
4	4	-.1884781507945D-06	.3088086302847D-06	.8175089D-10	.8237563D-10
.....					

Novos modelos têm surgido como os derivados do GRACE, CHAMP, GOCE, porém ainda sob a fase de teste e não disponibilizados integralmente. Estudos recentes indicam que trarão uma considerável melhoria na modelagem global do campo de gravidade (PAVLIS et al., 2004).

As parcelas de anomalias gravimétricas  $\Delta g$  ar-livre e de altura geoidal  $N$  do modelo geopotencial no processo de “remoção” e “restauração” são dadas pelas seguintes fórmulas (HEISKANEN e MORITZ, 1967):

$$\Delta g^{MG} = G_m \sum_{n=2}^{n_{max}} (n-1) \sum_{m=0}^n [C_{nm} \cos m\lambda_p + S_{nm} \sin m\lambda_p] P_{nm}(\sin \varphi_p) \quad (3.15)$$

e

$$N^{MG} = R \sum_{n=2}^{n_{max}} \sum_{m=0}^n [C_{nm} \cos m\lambda_p + S_{nm} \sin m\lambda_p] P_{nm}(\sin \varphi_p), \quad (3.16)$$

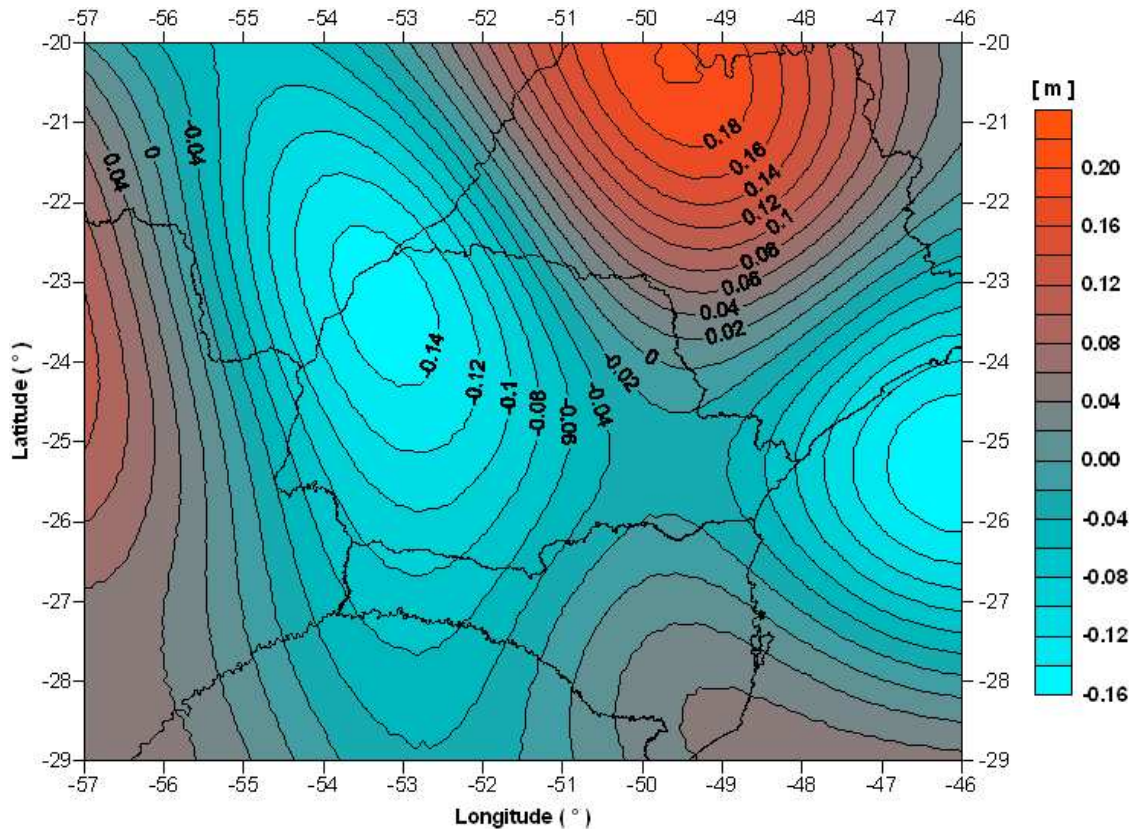
onde  $C_{nm}, S_{nm}$  são os coeficientes já descritos;  $P_{nm}$  são as funções de Legendre plenamente normalizadas;  $n_{max}$  é o grau máximo do modelo geopotencial;  $G_m$  e  $R$  são a gravidade e raio terrestre médios.

As duas fórmulas anteriores são implementadas nos programas que manipulam os coeficientes dos modelos do geopotencial, alguns deles disponíveis pelo Serviço Internacional do Geóide (IGeS).

A figura 20 apresenta a diferença em ondulação geoidal  $N$  para a área de estudo (área 2), entre os modelos geopotenciais PGM2000A e EGM96. Os parâmetros utilizados na determinação de cada uma das duas superfícies

combinadas são os mesmos, e foram utilizados no programa GEOPOT (Geopot97\_v.04d), que será descrito na próxima subseção.

FIGURA 20 - DIFERENÇA EM ONDULAÇÃO GEOIDAL ENTRE PGM2000A E EGM96



Os valores de diferença resultantes da combinação dos modelos (N\_PGM2000A menos N\_EGM96) para a “área 2” acima, avaliados em termos de ondulação geoidal para cada ponto-nó da malha, são os seguintes:

- Mínimo: -0,16 m
- Máximo: 0,20 m

### 3.3.1 Aplicação do Máximo Grau 360

Abordagens relativas ao grau e ordem dos harmônicos esféricos a serem empregados na expansão do modelo geopotencial são retratadas por FEATHERSTONE et al. (2001), neste trabalho, os autores tecem um panorama da

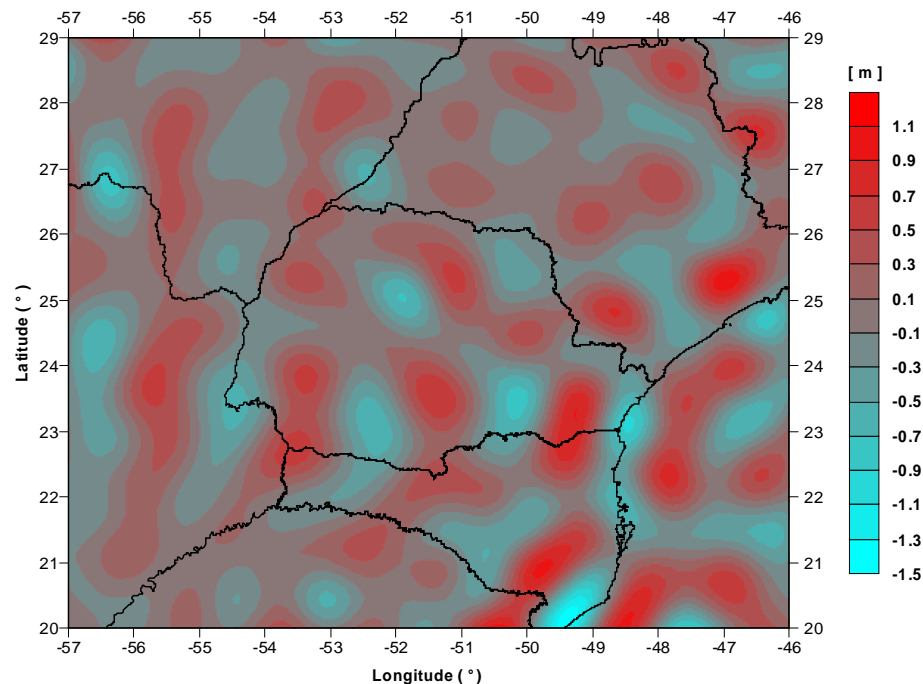
utilização dos modelos geopotenciais na determinação de modelos geoidais regionais.

Segundo os autores, quando utilizamos a função esférica kernel de Stokes na sua forma original para o cálculo das ondulações residuais, como é o caso da presente determinação de um modelo geoidal para o estado do Paraná, devemos optar pelo máximo grau disponível do modelo geopotencial. Aplicações de baixo grau, como 20 ou 30, devem ser consideradas quando são aplicadas funções de Stokes com núcleo modificado no cálculo das ondulações residuais. Descrições detalhadas de diferentes modificações da função de Sokes podem ser vistas em LOBIANCO (2005).

Na criação do Modelo Geoidal Brasileiro MAPGEO2004 foi empregado o grau 180 da expansão do modelo geopotencial EGM96 (*ibid.*). O modelo empregado no presente trabalho, PGM2000A, foi testado quanto à diferença em ondulação geoidal  $N$  apresentada pela utilização do grau 360 e do grau 180 dos coeficientes.

Na figura 21 demonstra-se a variação na ondulação geoidal utilizando o modelo geopotencial até o grau 360 ao invés de 180.

FIGURA 21 - DIFERENÇA EM ONDULAÇÃO GEOIDAL OBTIDA DO MODELO GEOPOTENCIAL PGM2000A UTILIZANDO OS COEFICIENTES ATÉ OS GRAUS 360 E 180





Nota-se pela figura 21 que a variação na ondulação pode alcançar um valor superior a 1 m dentro da área de estudo. Tal condição, dentro do processo de “remoção” e posterior “reposição”, pode influenciar na ondulação geoidal do modelo geoidal a ser gerado.

Do modelo geopotencial global PGM2000A foram extraídas as anomalias ar-livre e também as alturas geoidais utilizadas no processo de “remoção” e “restauração”, aplicadas no cálculo do modelo geoidal deste trabalho. O modelo geopotencial foi utilizado até o grau 360 de expansão dos coeficientes, tanto na geração das anomalias gravimétricas ar-livre, quanto na geração das alturas geoidais.

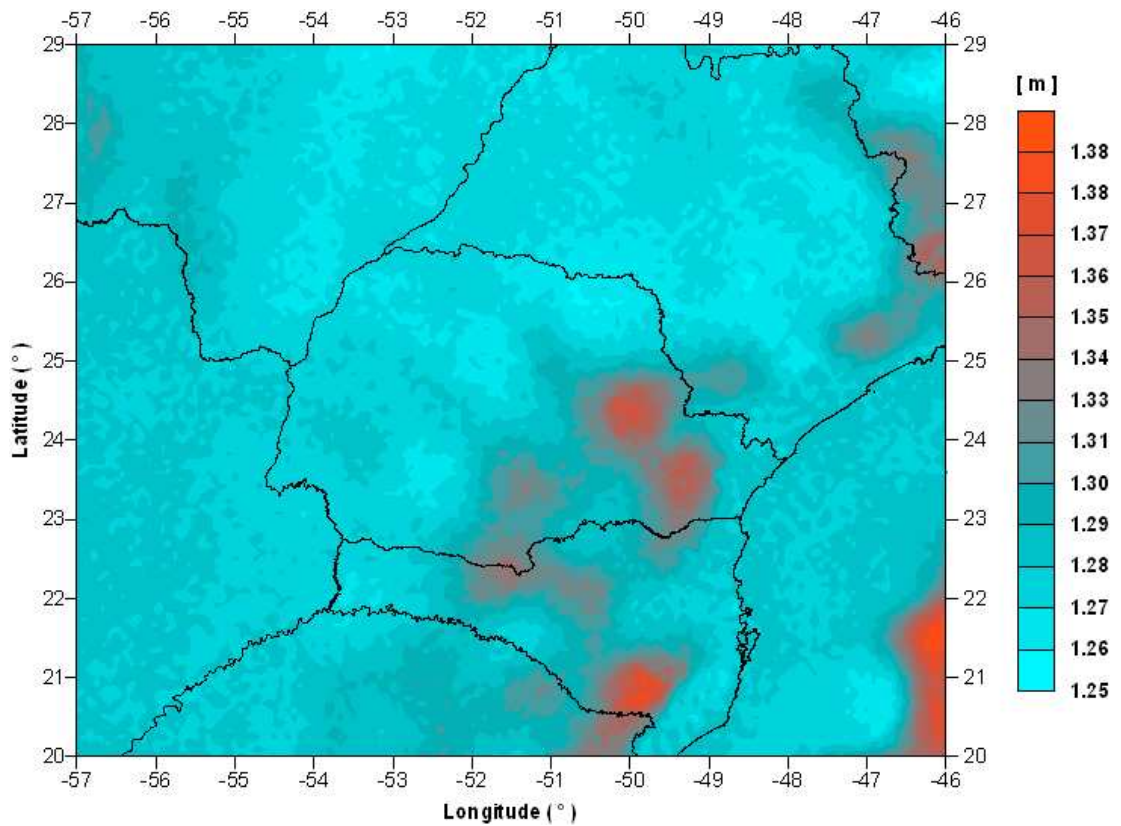
### 3.3.2 O Programa GEOPOT

A manipulação dos coeficientes dos modelos do geopotencial foram efetuadas com a utilização do programa Geopot97\_v.04d, uma versão atualizada em 14 de abril de 2004, da versão original submetida ao IGeS no ano de 1998 (SMITH, 1998). O código fonte em linguagem Fortran é baseado no algoritmo GPTDR, programado por Goad e Tscherning, e está disponível *on-line* na página do *National Geodetic Survey*, norte-americano. Descrições detalhadas das funções do programa são encontradas no código fonte e em (*ibid.*). O GEOPOT difere dos tradicionais programas que trabalham com os coeficientes dos modelos geopotenciais por levar em consideração a possibilidade de aplicação de um valor para  $W_0$  na definição da superfície equipotencial gravitacional de referência.

As quantidades obtidas dos modelos geopotenciais, em virtude da desconsideração dos termos de ordem zero no desenvolvimento dos coeficientes, como foi visto na subseção 2.2.4, não estão referidas ao geóide. Tal situação é contornada para o EGM96, por exemplo, pela aplicação de um fator de correção  $N_0 = -0,53$  m para a obtenção da ondulação geoidal  $N$  (NIMA, 2000). Porém, esta ondulação geoidal está referida a um geóide global médio que pode não ser o mais adequado para a nossa região de trabalho, conforme aponta SMITH (1998).

A figura 22 ilustra a situação comentada acima, onde se verifica uma considerável diferença entre as duas superfícies de referência. Para esta análise, foi utilizado o EGM96, de onde foram extraídas as ondulações cobrindo a “área 2”.

FIGURA 22 - DIFERENÇA EM ONDULAÇÃO GEOIDAL OBTIDA COM GEOPOT E  
APLICANDO  $W_0$ , MENOS GEOCOL COM CORREÇÃO DE  $N_0$



Os parâmetros aplicados na determinação da ondulação geoidal para cada programa foram os seguintes:

▪ GEOPOT:

$$GM = 398\,600,4415E9 \text{ [ m}^3\text{s}^{-2}\text{ ]};$$

$$a = 6\,378\,137,0 \text{ [ m ]};$$

$$J_2 = 108\,263E-8;$$

$$W_0 = 62\,636\,853,4 \text{ [ m}^2\text{s}^{-2}\text{ ] (SÁNCHEZ, 2005);}$$

$$\text{Grau } n = 360^\circ;$$

*Non-tide system* (livre de marés).

▪ GEOCOL:

$$GM = 398\,600,4418E9 \text{ [ m}^3\text{s}^{-2}\text{ ]};$$

$$a = 6\,378\,137,0 \text{ [ m ]};$$



$C(2,0) = -484,166774985;$

*Grau*  $n = 360^\circ;$

*Non-tide system* (livre de marés).

A variação média encontrada para a ondulação geoidal  $N$  entre as duas superfícies de referência, obtidas através do programa GEOPOT, e do programa GEOCOL, é de 1,28 m. Neste caso, para a área deste trabalho, a aplicação pura do modelo geopotencial acompanhada da correção  $N_0$  de  $-0,53$  m como tradicionalmente ocorre, pode não ser adequada.

### 3.3.3 Aplicação do $W_0$ na Definição da Superfície de Referência Vertical

A incorporação do valor do potencial de gravidade do geóide  $W_0$  na determinação de modelos de ondulações geoidais tem sido aplicada pelo *Geodetic Survey Division* do Canadá nos projetos de modernização do sistema de altitudes daquele país (VÉRONNEAU, 2004). Na criação do modelo geoidal canadense CGG2000, foi empregado um valor de  $W_0 = 62636855,8 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$  (VÉRONNEAU, 2001, 2004).

BURSA et al. (2001) indicam o valor de  $W_0 = 62636856,0 \pm 0,5 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$  como adequado para estabelecimento de um sistema global de altitudes, visto que diferentes valores para  $W_0$  são adotados ao redor do globo, e que arbitrários ou não, eles podem ser convertidos para um único sistema (*ibid.*).

Estudos recentes do Grupo de Trabalho III (GTIII) do SIRGAS, que trata do *Datum* Vertical, apontam preliminarmente para um valor de  $W_0 = 62636853,4 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$  como referência (SÁNCHEZ, 2005). Este também foi o valor para o potencial de gravidade no geóide  $W_0$  adotado como referência neste trabalho.

As figuras 23, 24 e 25 ilustram as ondulações geoidais e as anomalias gravimétricas ar-livre extraídas do modelo geopotencial PGM2000A utilizadas na determinação do modelo geoidal deste trabalho. Foram geradas utilizando como referências o  $W_0 = 62636853,4 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$  e o elipsóide GRS80 do SIRGAS2000.

FIGURA 23 - ONDULAÇÕES GEOIDAIS DO PGM2000A

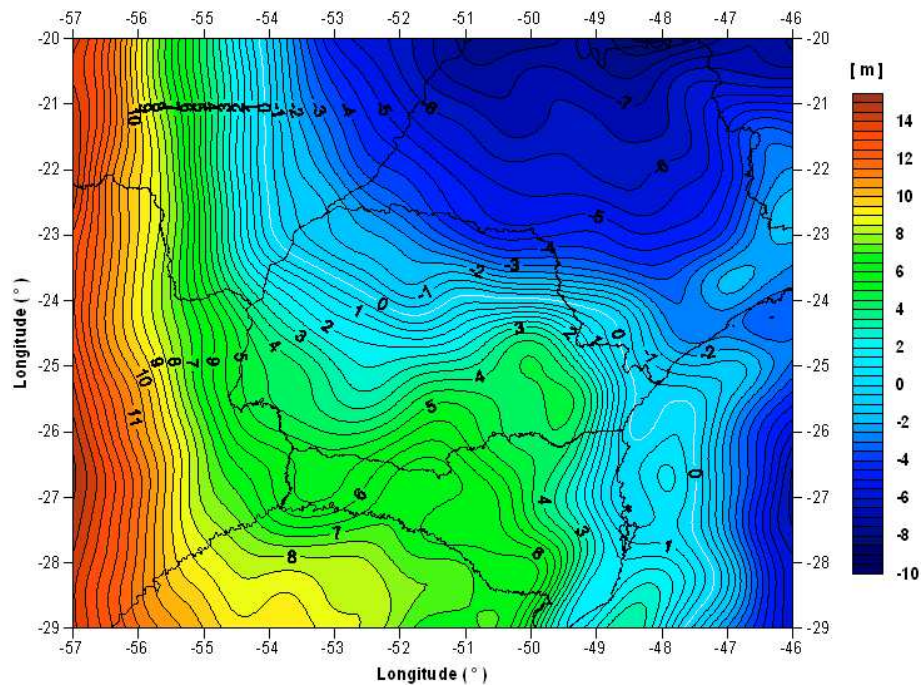


FIGURA 24 – ANOMALIAS AR-LIVRE DO PGM2000A

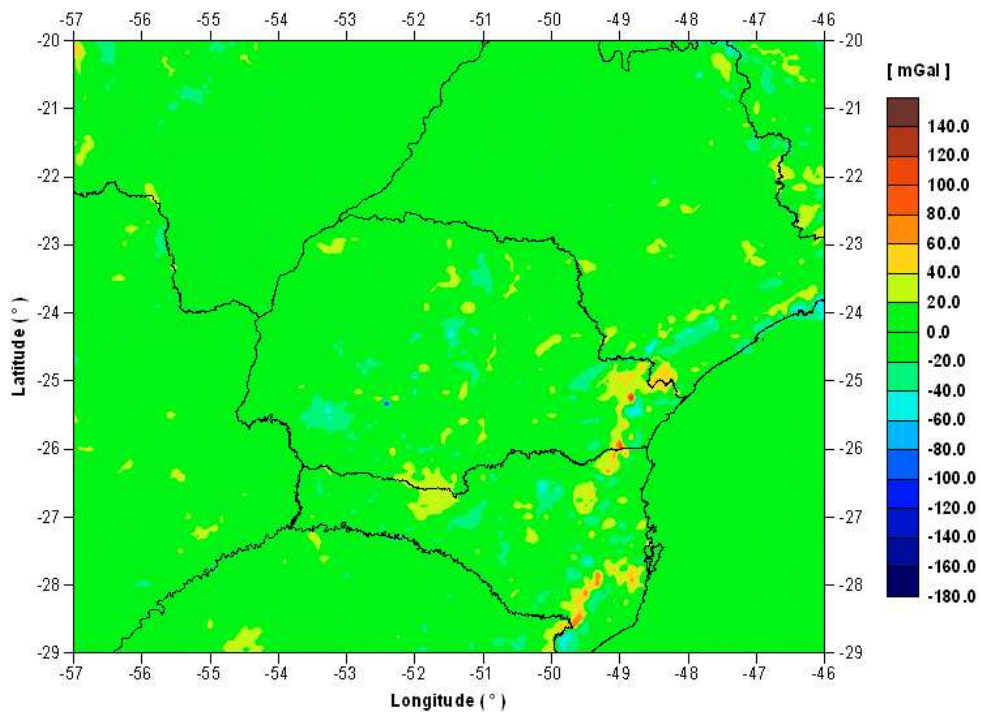
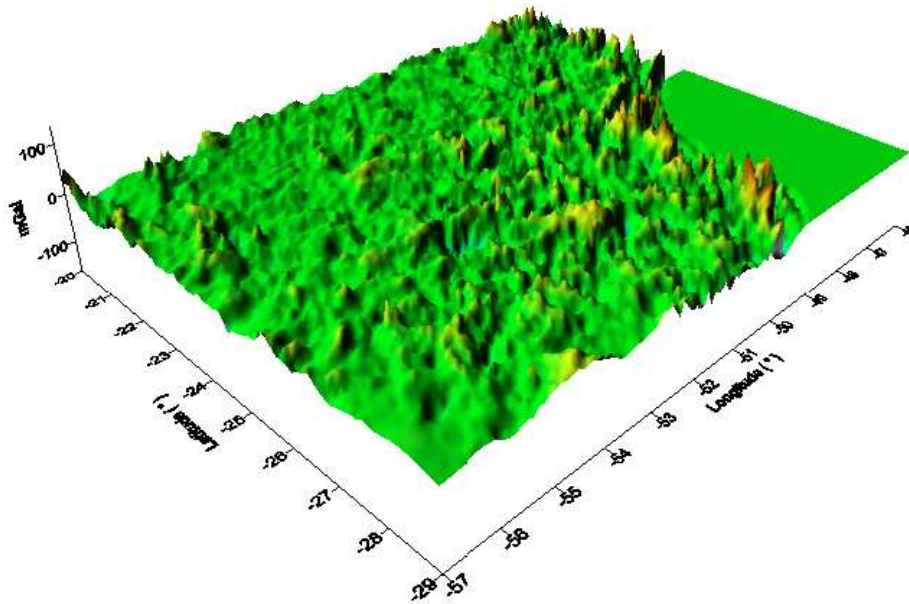


FIGURA 25 – ANOMALIAS AR-LIVRE DO PGM2000A, EM PERSPECTIVA



A diferença de potencial de  $2,6 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$  entre as superfícies de referência  $W_0$  indicadas por BURSA et al. (2001) e por SÁNCHEZ (2005) mencionadas anteriormente, representam uma separação de 26 cm em termos de ondulação geoidal. Valor este, verificado pela subtração das duas malhas de ondulações geoidais obtidas com o GEOPOT, aplicando um e outro valor de  $W_0$ , obviamente, mantendo todos os demais parâmetros idênticos:

- a)  $GM = 398\,600,4415\text{E}9 \text{ [ m}^3\text{s}^{-2} \text{ ]};$
- b)  $a = 6\,378\,137,0 \text{ [ m ]};$
- c)  $J_2 = 108\,263\text{E}-8;$
- d) *Grau*  $n = 360;$
- e) *Non-tide system* (livre de marés).

Estes são os parâmetros que junto com o  $W_0$  de  $62\,636\,853,4 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$  foram utilizados na definição da superfície geopotencial de referência, aplicando o programa GEOPOT (Geopot97\_v.04d) e o modelo PGM2000A.

O valor de “ $GM$ ” foi obtido do documento descritivo do modelo geopotencial PGM2000A (ver Anexo), elaborado por Nikolaos K. Pavlis. O valor de “ $a$ ” corresponde ao fator de escala equatorial, assim descrito por SMITH (1998), utilizado para compatibilizar os resultados com o sistema SIRGAS2000, uma vez que os coeficientes do modelo geopotencial foram gerados com  $a = 6378136,3$  m. O fator da dinâmica de forma da Terra “ $J_2$ ”, foi obtido em (MORITZ, 1979), oriundo da própria definição do Sistema Geodésico de Referência 1980 (GRS80). O valor de 360 para o grau de expansão dos coeficientes do modelo geopotencial foi abordado anteriormente. Todos os cálculos foram efetuados num sistema livre de marés (*non-tide* ou *tide-free*).

## 4 DETALHAMENTO DO CÁLCULO DO MODELO GEOIDAL

Nas seções anteriores foi descrito como foram obtidas as contribuições envolvidas na determinação do geóide, separadas espectralmente sob a forma de anomalias gravimétricas e sob a forma de ondulação geoidal.

Seguindo a ordem da técnica de decomposição da altura geoidal tal como foi desenvolvida na prática, a Remoção-Cálculo-Restauração é apresentada nas próximas seções.

### 4.1 REMOÇÃO

A equação (2.101) descrita na subseção 2.3 caracteriza o processo de remoção para a formação das anomalias residuais. Cada parcela de contribuição contida nesta equação foi calculada na forma de malha de igual resolução, cujo espaçamento é de 5' de arco em ambas as direções N-S e O-L.

As anomalias gravimétricas ar-livre calculadas na subseção 3.2.2 foram acrescidas da correção de terreno, subseção 3.1.1, dando origem às anomalias de Helmert, ou de Faye por aproximação, como descrevem FEATHERSTONE et al. (2001), FOTOPOULOS et al. (1999). Das anomalias de Helmert, foram extraídas as anomalias ar-livre obtidas do modelo geopotencial PGM2000A, resultando nas denominadas anomalias gravimétricas residuais.

A equação (2.101) como é apresentada, indica a separação dos efeitos provenientes de cada fonte de dado. Em prática tem-se:

$$\Delta g_{res} = \Delta g^{AL} + C - \Delta g^{MG}, \quad (4.1)$$

onde,

$\Delta g^{AL}$  = anomalias ar-livre dos dados terrestres de gravidade;

$C$  = correção do terreno;

$\Delta g^{MG}$  = anomalias ar-livre do modelo geopotencial PGM2000A.

Nas figura 26 e 27 apresenta-se as anomalias residuais geradas no processo de remoção, equação 4.1.

FIGURA 26 - ANOMALIAS RESIDUAIS

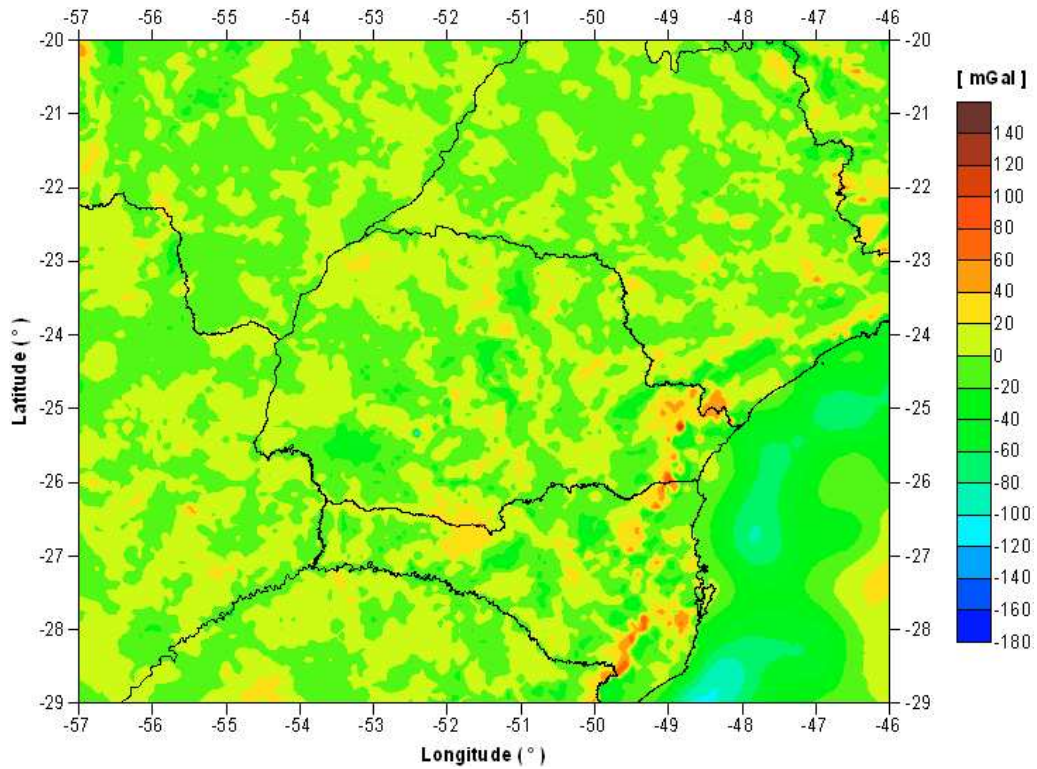
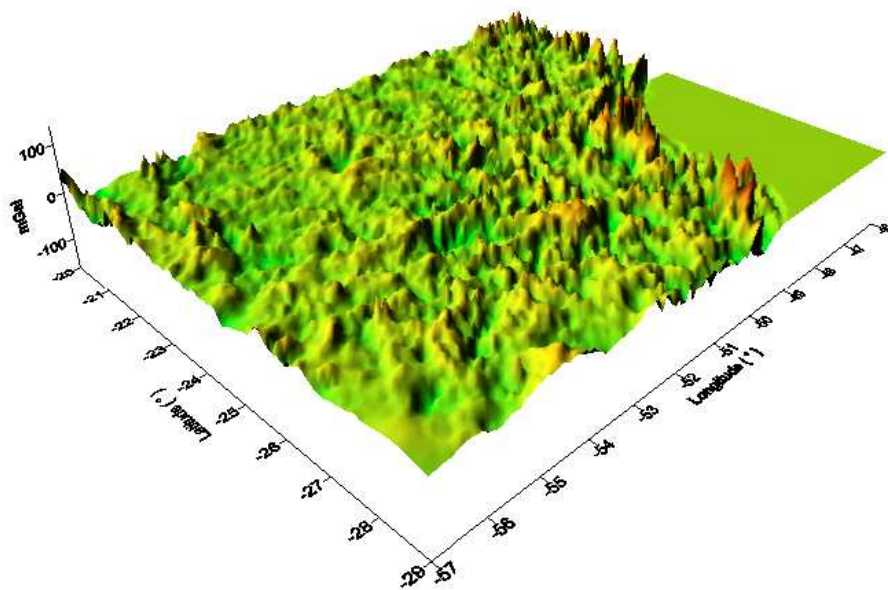


FIGURA 27 - ANOMALIAS RESIDUAIS, EM PERSPECTIVA





As anomalias residuais geradas na etapa de “remoção” podem ser compreendidas como um refinamento do modelo geopotencial através dos dados terrestres de gravidade e da correção do terreno. A própria equação 4.1 sugere esta interpretação.

Analisando a figura 26, observa-se que embora aparentemente toda área esteja coberta por variações graduais de anomalias residuais, nas proximidades da latitude  $-25^\circ$  e longitude  $-52^\circ$ , existe um ponto que destoa do comportamento dos demais, forçando individualmente ao pico de  $-180$  mGal. É bem provável que se trata de um erro grosseiro.

Na subseção 4.2 são apresentadas avaliações de como a FFT filtra erro grosseiro no dado de anomalia residual, já que diferentemente do acima comentado, em alguns casos poderá ser de difícil detecção.

## 4.2 CÁLCULO

Para a etapa de cálculo das ondulações residuais foi empregado o programa FFTGEOID, construído na Universidade de Calgary por Yecai Li, e disponibilizado pelo Serviço Internacional do Geóide. O programa calcula as ondulações geoidais (residuais), entre outras funções, através da transformada rápida Fourier, trabalhando com a função Kernel de Stokes na forma esférica original (1D FFT) HAAGMANS et al. (1993). Orientações detalhadas do funcionamento do programa podem ser acompanhadas no código fonte do programa e também foram descritas por SUBIZA (2000) e GOLDANI (2005).

SIDERIS (1997) comenta que a ondulação geoidal avaliada pela forma esférica 1D da função de Stokes apresenta os mesmos resultados da integração numérica com a vantagem da convolução se desenvolver em apenas uma direção, na direção dos paralelos. Detalhe da técnica pode, por exemplo, ser visto em HAAGMANS et al. (1993), FORSBERG e SIDERIS (1993).

Com a aplicação da função kernel de Stokes 1D, a matriz de anomalias gravimétricas residuais foram “amortecidas”, na técnica denominada 100 % *zero-padding* (LI, 1993), SIDERIS (1997). Este procedimento é necessário para evitar o efeito de borda e a convolução circular que afetam o resultado final das ondulações

geoidais calculadas, conforme alertam os autores. Mais detalhes, são encontrados em ZHANG et al. (2000b).

A aplicação da técnica pode ser acompanhada passo-a-passo no próprio código fonte do programa FFTGEOID, tal como foi feito no desenvolvimento do presente trabalho.

As anomalias gravimétricas residuais obtidas na etapa de “remoção”, equação (4.1), cobrem a (área 2). Para serem usados no cálculo das ondulações residuais, todos os pontos-nós das anomalias residuais na área oceânica foram identificados e tiveram seus valores anulados. Essa medida foi tomada tendo em vista a disponibilidade apenas das anomalias gravimétricas ar-livre do modelo geopotencial para a área oceânica.

Com o intuito de verificar-se o efeito em ondulação residual de um possível erro com estas características provenientes do processo de remoção, calculou-se ondulações residuais com as anomalias residuais desconsiderando a condição acima disposta. Tal equívoco pode ser acompanhado nas figuras 28 e 29.

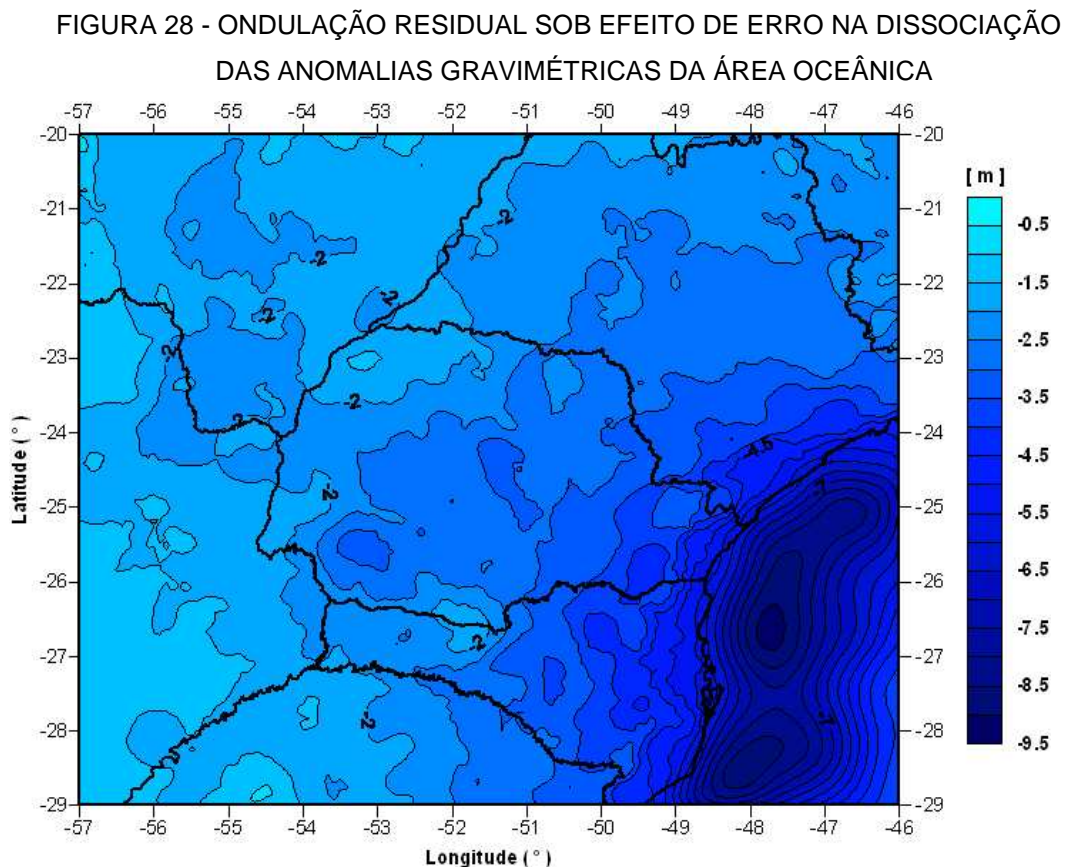
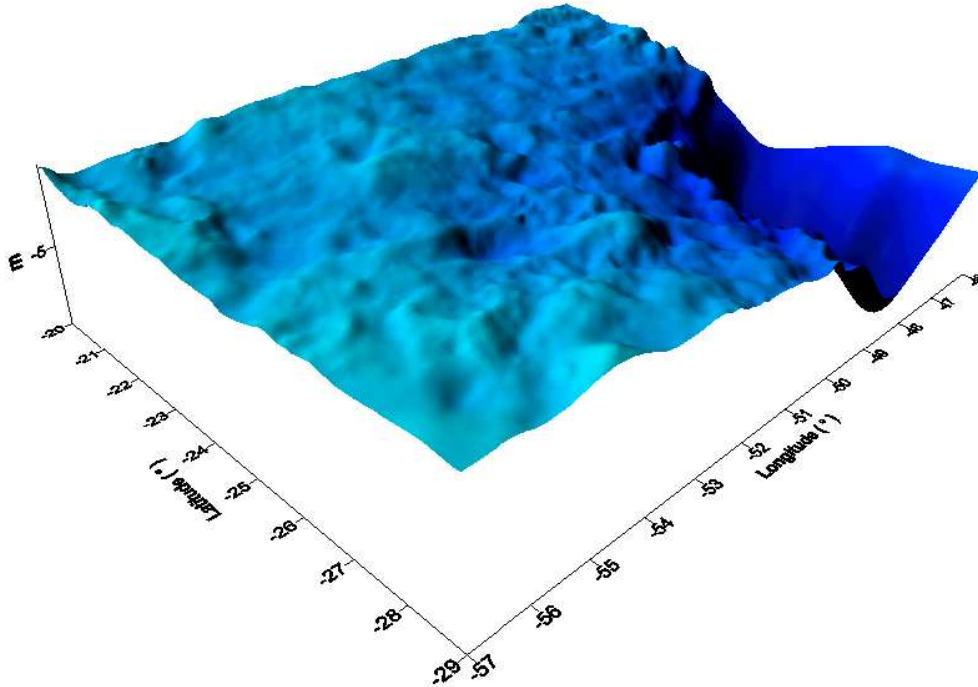




FIGURA 29 - ONDULAÇÃO RESIDUAL SOB EFEITO DE ERRO NA DISSOCIAÇÃO DAS ANOMALIAS GRAVIMÉTRICAS DA ÁREA OCEÂNICA, EM PERSPECTIVA



No quadro 5 são apresentadas estatísticas obtidas do programa FFTGEOID para a ondulação residual sob efeito do erro:

QUADRO 5 – ESTATÍSTICAS DA ONDULAÇÃO CALCULADA COM ERRO DE DISSOCIAÇÃO DAS ANOMALIAS GRAVIMÉTRICAS OCEÂNICAS

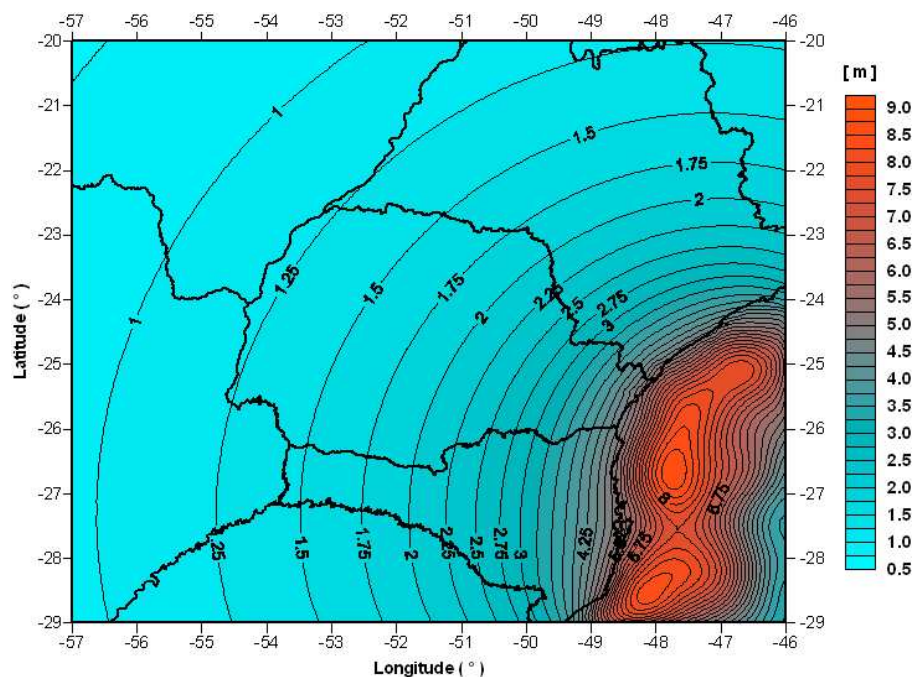
ESTATÍSTICAS DA ONDULAÇÃO CALCULADA	( m )
MÁXIMO N	-0,295
MÍNIMO N	-9,227
VALOR MÉDIO	-1,220
RAIZ MÉDIA QUADRÁTICA	1,567
DESVIO PADRÃO	0,983

QUADRO 6 – ESTATÍSTICAS DAS ANOMALIAS GRAVIMÉTRICAS RESIDUAIS  
COM ERRO DE DISSOCIAÇÃO NA ÁREA OCEÂNICA

ESTATÍSTICAS DAS ANOMALIAS GRAVIMÉTRICAS	( m Gal )
VALOR DE ANOMALIA MÁXIMA	136,797
VALOR DE ANOMALIA MÍNIMA	-165,122
VALOR MÉDIO	-0,589
RAIZ MÉDIA QUADRÁTICA	6,473
DESVIO PADRÃO	6,446

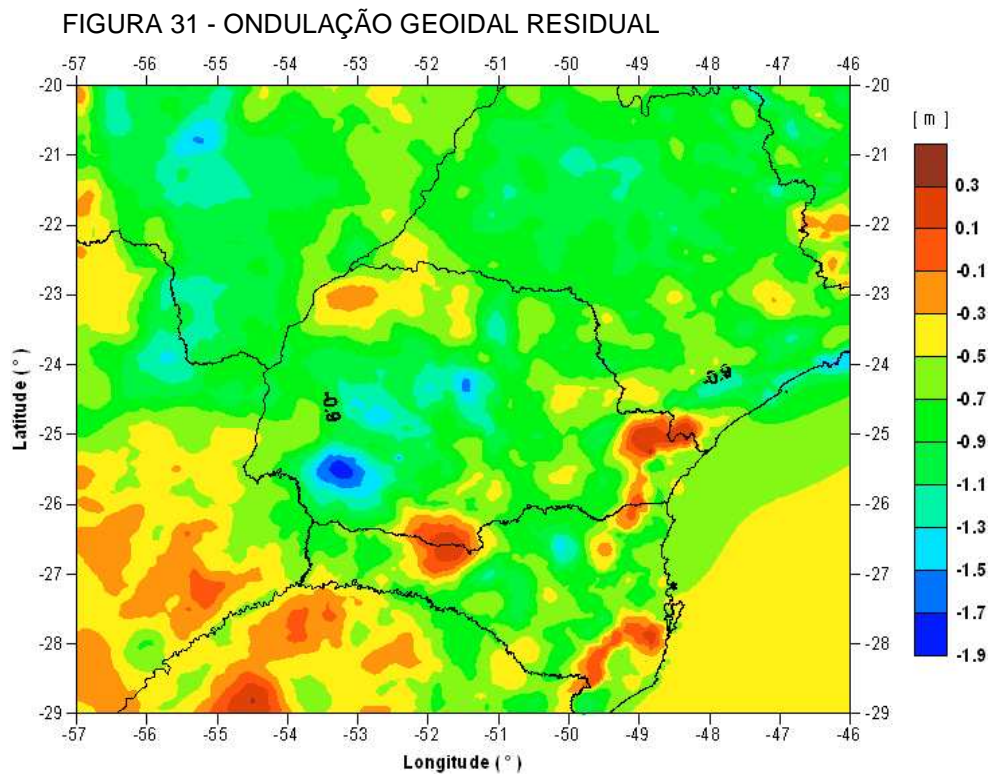
As ondulações residuais eivadas de erro de dissociação na área oceânica foram comparadas com as ondulações residuais calculadas com as anomalias residuais corrigidas nesta área. A figura 30 ilustra a propagação do erro comentado na ondulação geoidal residual através da área de estudo.

FIGURA 30 - PROPAGAÇÃO DO ERRO EM ONDULAÇÃO GEOIDAL DEVIDO À DISSOCIAÇÃO EQUIVOCADA DAS ANOMALIAS GRAVIMÉTRICAS NA ÁREA OCEÂNICA



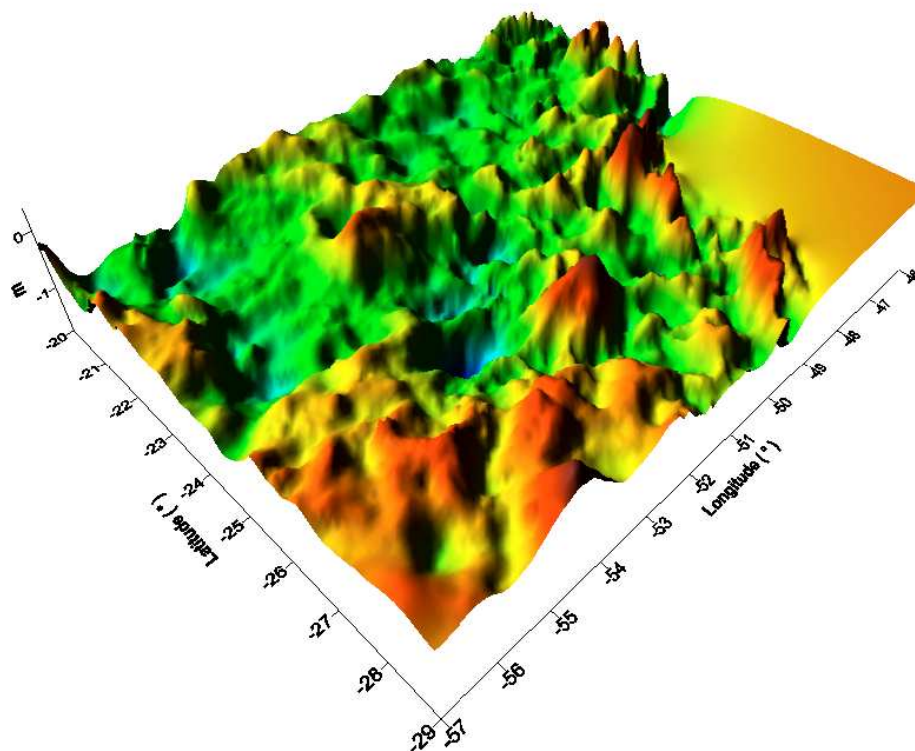
Verifica-se pela figura 30, que embora o erro de dissociação se encontra na área marinha, ele se propaga através da região continental. Para a área do estado do Paraná, por exemplo, as ondulações estariam afetadas em 5 m na área mais próxima da costa, chegando a 1,25 m de erro na região da fronteira Oeste.

As ondulações geoidais residuais utilizadas na etapa de “restauração” são apresentadas nas figuras 31 e 32.



Analisando as figuras 31 e 32, destaca-se que a localização das ondulações residuais mais discrepantes coincidem com as regiões onde se distingue distintos levantamentos gravimétricos (fig. 12). Desconsiderando a ocorrência de um possível problema de ordem geológica estrutural, tal verificação corrobora com o exposto na subseção 3.2.2 sobre a incompatibilidade de referenciais dos dados gravimétricos.

FIGURA 32 - ONDULAÇÃO GEOIDAL RESIDUAL, EM PERSPECTIVA



No quadro 7 são apresentados resultados de estatísticas geradas pelo programa FFTGEOID no cálculo da ondulação geoidal residual utilizada na etapa seguinte, de “restauração” da ondulação geoidal.

QUADRO 7 – ESTATÍSTICAS DO CÁLCULO DA ONDULAÇÃO GEOIDAL RESIDUAL

ESTATÍSTICAS DA ONDULAÇÃO CALCULADA	( m )
MÁXIMO N	0,368
MÍNIMO N	-1,825
VALOR MÉDIO	-0,274
RAIZ MÉDIA QUADRÁTICA	0,338
DESVIO PADRÃO	0,198

QUADRO 8 – ESTATÍSTICAS DAS ANOMALIAS GRAVIMÉTRICAS RESIDUAIS

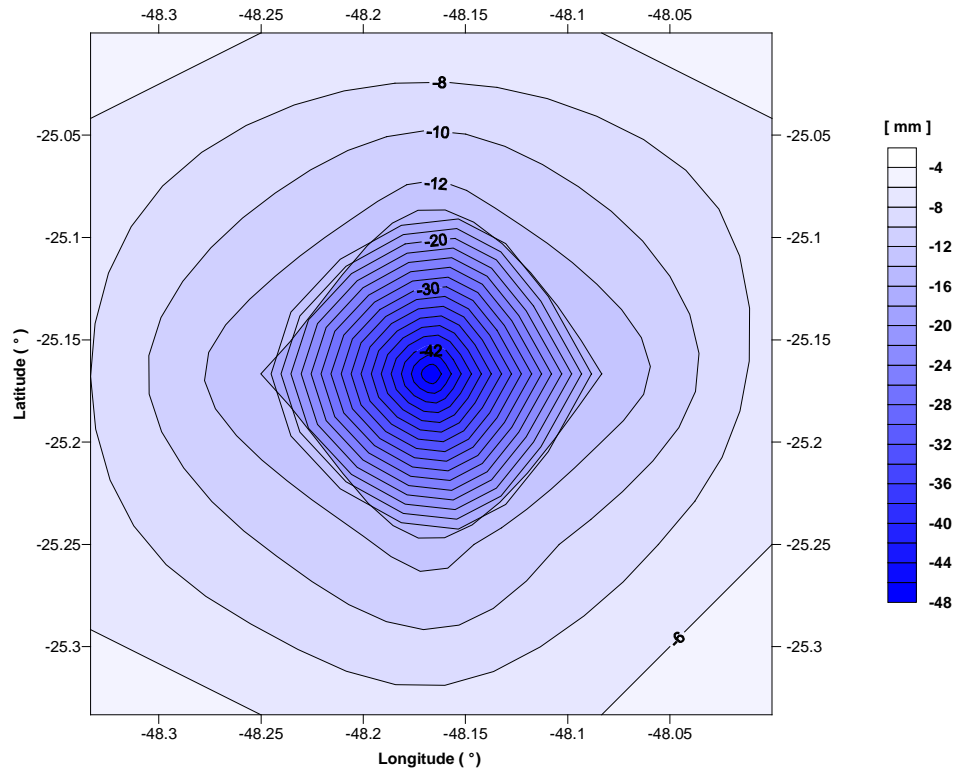
ESTATÍSTICAS DAS ANOMALIAS GRAVIMÉTRICAS	( mGal )
VALOR DE ANOMALIA MÁXIMA	136,853
VALOR DE ANOMALIA MÍNIMA	-165,061
VALOR MÉDIO	-0,130
RAIZ MÉDIA QUADRÁTICA	4,113
DESVIO PADRÃO	4,111

#### 4.2.1 Avaliação Empírica da Propagação de Erros na Ondulação Geoidal Residual

Na subsecção 3.1.1, quando foram comparadas as correções de terreno C obtidas do MDT de 1' de arco de resolução com aquelas obtidas com o MDT de 5', foi detectado no ponto-nó de latitude  $-25,1667^\circ$  e longitude  $-48,1667^\circ$ , uma diferença de  $-9,452$  mGal. Esta diferença foi a maior encontrada na área de estudo entre as duas correções de terreno mencionadas acima.

Na presente subsecção, a propagação de um eventual erro desta magnitude foi avaliada. O ponto-nó acima, foi localizado no arquivo de anomalias residuais, onde possuía o valor original de  $68,523$  mGal. Esse valor foi acrescido de  $9,452$ , passando a valer  $77,975$  no novo arquivo, permanecendo os demais valores inalterados. Novas ondulações residuais foram geradas com este novo arquivo no FFTGEOID, e comparadas pela combinação das malhas com o arquivo original (utilizado na determinação do modelo geoidal) de ondulações geoidais residuais. A figura 33, ilustra a propagação deste erro nas ondulações geoidais.

FIGURA 33 - PROPAGAÇÃO DO ERRO PONTUAL DE 9,452 mGal  
NAS ONDULAÇÕES GEOIDAIS RESIDUAIS



Com o acréscimo de 9,452 mGal ao ponto-nó, este apresentou a maior variação de valor que foi de -48 mm. Este valor de redução na ondulação geoidal residual diminui gradativamente para os outros pontos da malha, a medida que a distância destes ao ponto-nó, aumenta.

O teste também foi realizado nas mesmas condições, porém diminuindo o valor de 9,452 mGal no referido ponto-nó, e o resultado verificado é simétrico ao anterior.

No quadro 9 são apresentados os 24 pontos mais próximos que circundam o ponto em análise. Com o quadro, identifica-se também, além do rápido decaimento da variação na ondulação geoidal, o espaçamento regular de 5' de arco da malha.

QUADRO 9 - LISTAGEM DOS 24 PONTOS-NÓS QUE CIRCUNDAM O PONTO EM FOCO

	Latitude	Longitude	$\Delta N$ (m)
1	-25,0000	-48,3334	-0,005
2	-25,0000	-48,2500	-0,006
3	-25,0000	-48,1667	-0,006
4	-25,0000	-48,0834	-0,006
5	-25,0000	-48,0000	-0,005
6	-25,0833	-48,3334	-0,007
7	-25,0833	-48,2500	-0,010
8	-25,0833	-48,1667	-0,013
9	-25,0833	-48,0834	-0,010
10	-25,0833	-48,0000	-0,007
11	-25,1667	-48,3334	-0,008
12	-25,1667	-48,2500	-0,014
<b>13</b>	<b>-25,1667</b>	<b>-48,1667</b>	<b>-0,048</b>
14	-25,1667	-48,0834	-0,014
15	-25,1667	-48,0000	-0,007
16	-25,2500	-48,3334	-0,007
17	-25,2500	-48,2500	-0,010
18	-25,2500	-48,1667	-0,013
19	-25,2500	-48,0834	-0,009
20	-25,2500	-48,0000	-0,006
21	-25,3333	-48,3334	-0,005
22	-25,3333	-48,2500	-0,006
23	-25,3333	-48,1667	-0,007
24	-25,3333	-48,0834	-0,006
25	-25,3333	-48,0000	-0,005

### 4.3 RESTAURAÇÃO

A restauração, equação (2.102), remonta a ondulação geoidal final e foi efetuada pela combinação da ondulação geoidal residual obtida na etapa anterior, de “cálculo”, adicionando o efeito indireto calculado na subseção 3.1.2 e também a ondulação geoidal proveniente do modelo geopotencial PGM2000A calculado na subseção 3.3.3. Na prática tem-se:



$$N = N^{MG} + N^{\Delta g_{res}} + N^{MDT} \quad (4.2)$$

onde,

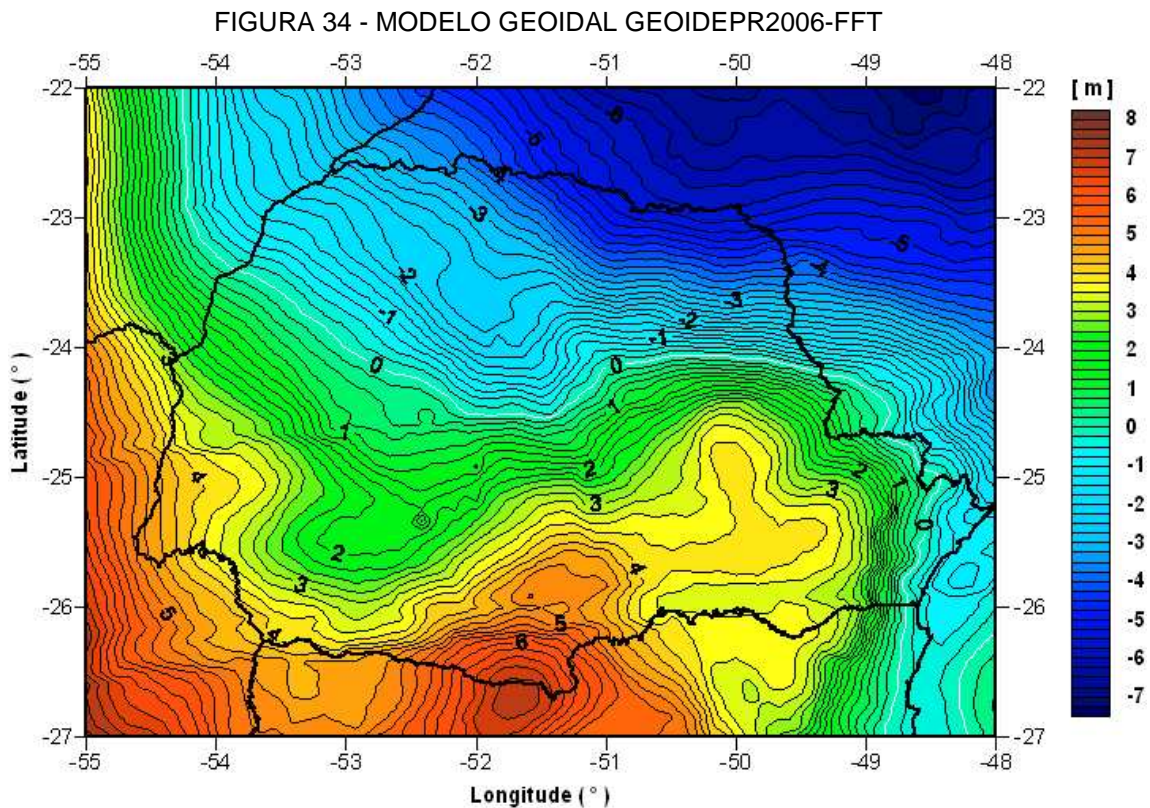
$N^{MG}$  = ondulação geoidal do modelo geopotencial PGM2000A;

$N^{\Delta g_{res}}$  = ondulação geoidal residual;

$N^{MDT}$  = efeito indireto.

Embora os valores do efeito indireto sejam negativos, ele deve sempre ser adicionado às outras duas contribuições na equação (4.2). Conceitualmente, conforme já exposto na subseção 3.1.2, isto representa um “reposicionamento” do geóide que havia sido alterado pela condensação das massas na etapa de “remoção”.

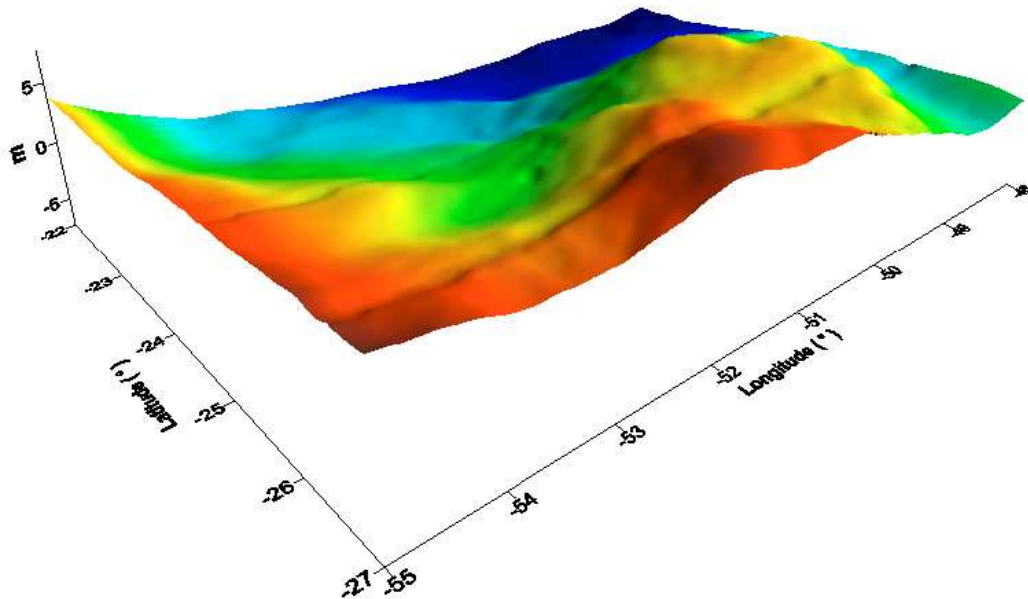
Com o processo de “restauração”, foi obtida a ondulação geoidal final do modelo geoidal, denominado **GEOIDEP2006-FFT**, apresentado nas figuras 34 e 35.





Na figura 34, as isocurvas de ondulação geoidal são apresentadas em intervalos de 25 cm. É possível identificar nesta figura, e na figura 35, como o “erro grosseiro” comentado na subseção 4.1 está afetando a ondulação geoidal nas proximidades da latitude  $-25,2^\circ$  e longitude  $-52,2^\circ$ .

FIGURA 35 - MODELO GEOIDAL GEOIDEPR2006-FFT, EM PERSPECTIVA



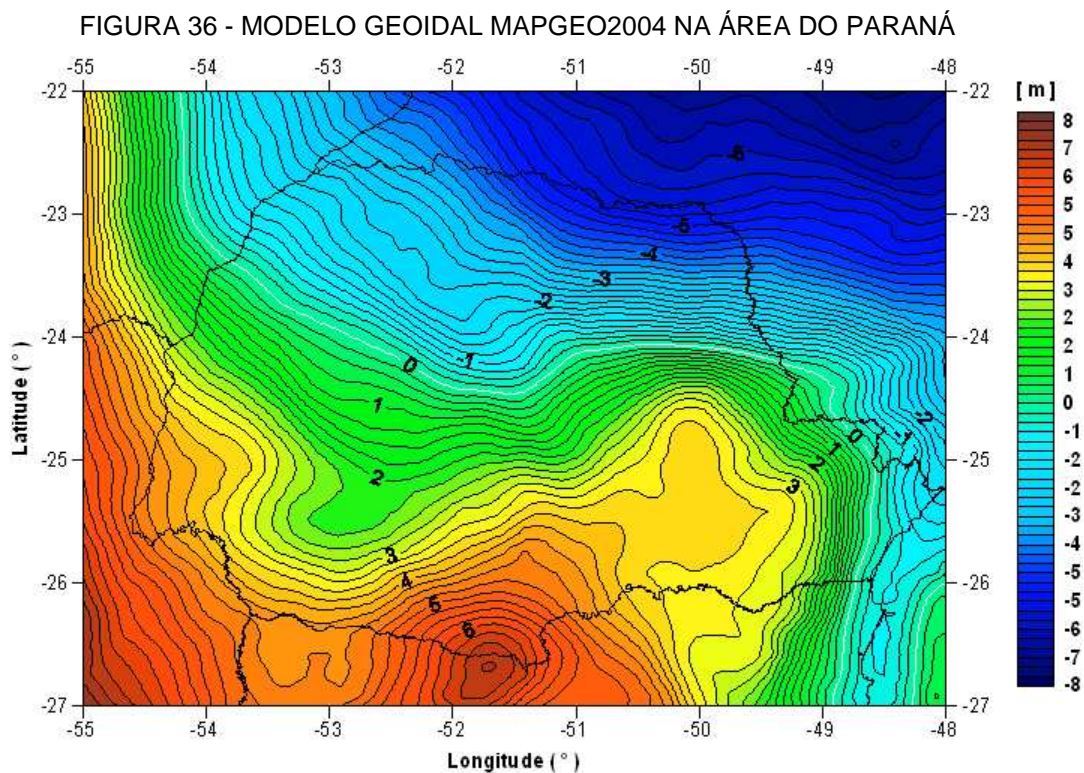
É possível perceber no modelo GEOIDEPR2006-FFT duas faixas lineares na direção dos paralelos não discriminada na decomposição da altura geoidal. Verifica-se que esta ocorrência não é identificada nas ondulações geoidais residuais determinadas na subseção 4.2, descartando a possibilidade de erro na execução do programa FFTGEOID. Embora as duas faixas estejam dispostas longitudinalmente, não se encontram sobre latitudes constantes, o que praticamente exclui a possibilidade de erro na manipulação dos arquivos de dados.

O modelo geoidal GEOIDEPR2006-FFT foi gerado para uma superfície de referência vertical com potencial de gravidade  $W_0$  valendo  $62636853,4 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$ .

## 5 AVALIAÇÃO DO MODELO GEOIDEP2006-FFT

O modelo geoidal GEOIDEP2006-FFT foi comparado com o modelo geoidal brasileiro MAPGEO2004 (IBGE, 2005b) e também com dados de GPS sobre a Rede Altimétrica de Alta Precisão (RAAP) do Sistema Geodésico Brasileiro (IBGE, 2006a).

Para a extração das alturas geoidais do MAPGEO2004 foram utilizados os mesmos pontos-nós empregados nas outras etapas já descritas. Em cada um destes pontos foi determinado um valor de altura geoidal  $N$ . O resultado é demonstrado na figura 36 cobrindo a “área 3”, coincidente com a cobertura do GEOIDEP2006-FFT.



FONTE: IBGE (2005b)

Analisando as figuras 34 e 36, identifica-se em algumas regiões o efeito, embora não muito pronunciado, da diferença de resolução em que foram trabalhados os dois modelos. O GEOIDEP2006-FFT, em 5' de arco e o MAPGEO2004, em 10' de arco.

A malha de pontos de ondulação geoidal do GEOIDEP2006-FFT foi combinada com a malha de pontos de ondulação geoidal do MAPGEO2004,

subtraindo-se a segunda da primeira para a geração de um arquivo de diferenças. Resultado de estatísticas de cada arquivo de pontos são apresentadas no quadro 10.

QUADRO 10 - ESTATÍSTICAS DA COMBINAÇÃO DAS MALHAS DE ONDULAÇÕES GEOIDAIIS, GEOIDEPR2006-FFT MENOS MAPGEO2004

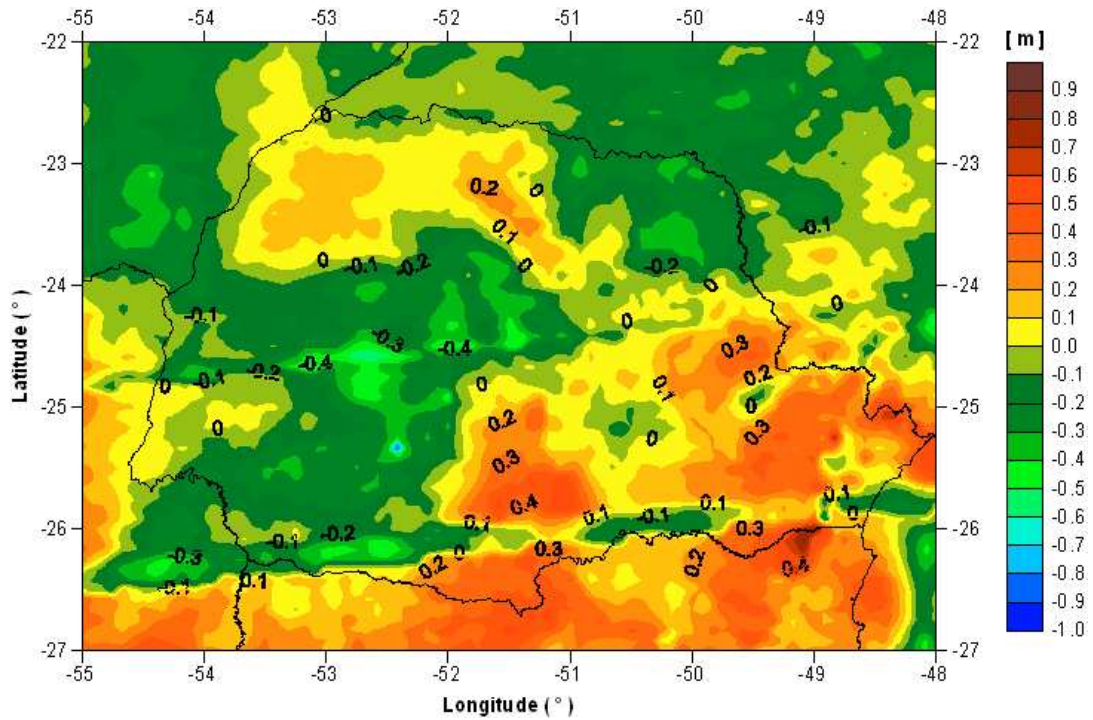
	<b>MÉDIA</b>	<b>DESVIO PADRÃO</b>	<b>MÍN</b>	<b>MÁX</b>
	( m )			
<b>ARQ1</b>	0,52	3,73	-7,39	7,60
<b>ARQ2</b>	0,54	3,65	-7,05	7,26
<b>DIF</b>	-0,02	0,21	-0,98	0,83

Pelo quadro 10 verifica-se a diferença de ondulação geoidal entre os modelos GEOIDEPR2006-FFT e MAPGEO2004 variando entre -98cm e 83cm.

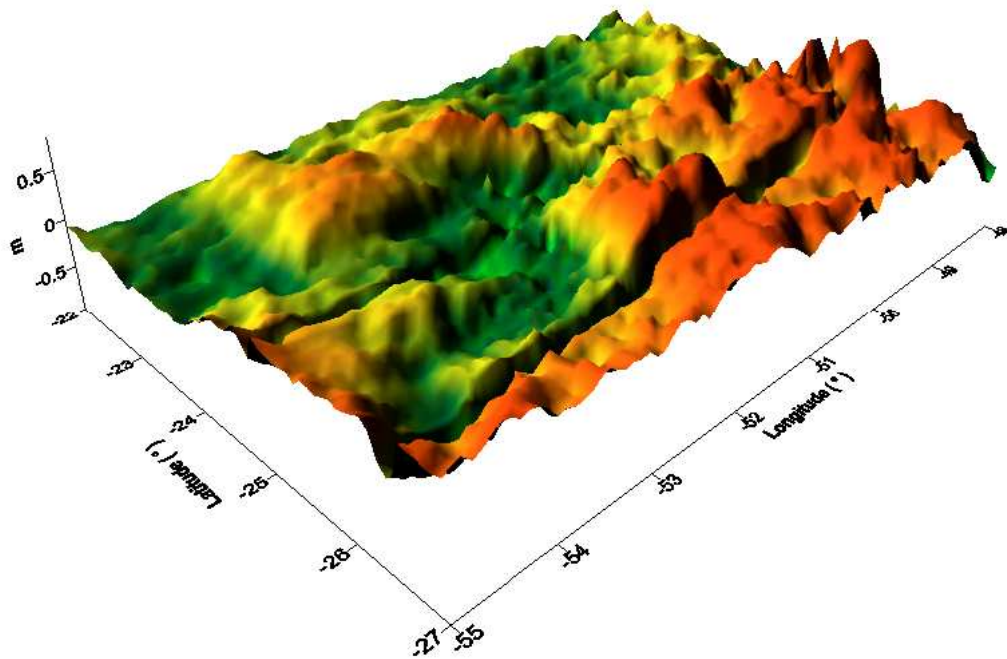
Observando as figuras 34 e 35, figura 36, e as figuras 37 e 38 mostradas a seguir, relativas aos modelos geoidais GEOIDEPR2006-FFT e MAPGEO2004, e confrontando-as com a figura 12, relativa à distribuição dos dados de gravidade, percebe-se que as diferenças de tendência na ondulação geoidal entre os dois modelos coincidem com a localização dos dados de origens diferentes.

As figuras 37 e 38 caracterizam a diferença em termos de ondulação geoidal que existe entre os modelos GEOIDEPR2006-FFT e MAPGEO2004. Evidenciam também que as duas faixas “anômalas” presentes no GEOIDEPR2006-FFT estão ausentes no MAPGEO2004.

FIGURA 37 - DIFERENÇA EM ONDULAÇÃO GEOIDAL ENTRE OS MODELOS  
GEOIDPR2006-FFT E MAPGEO2004

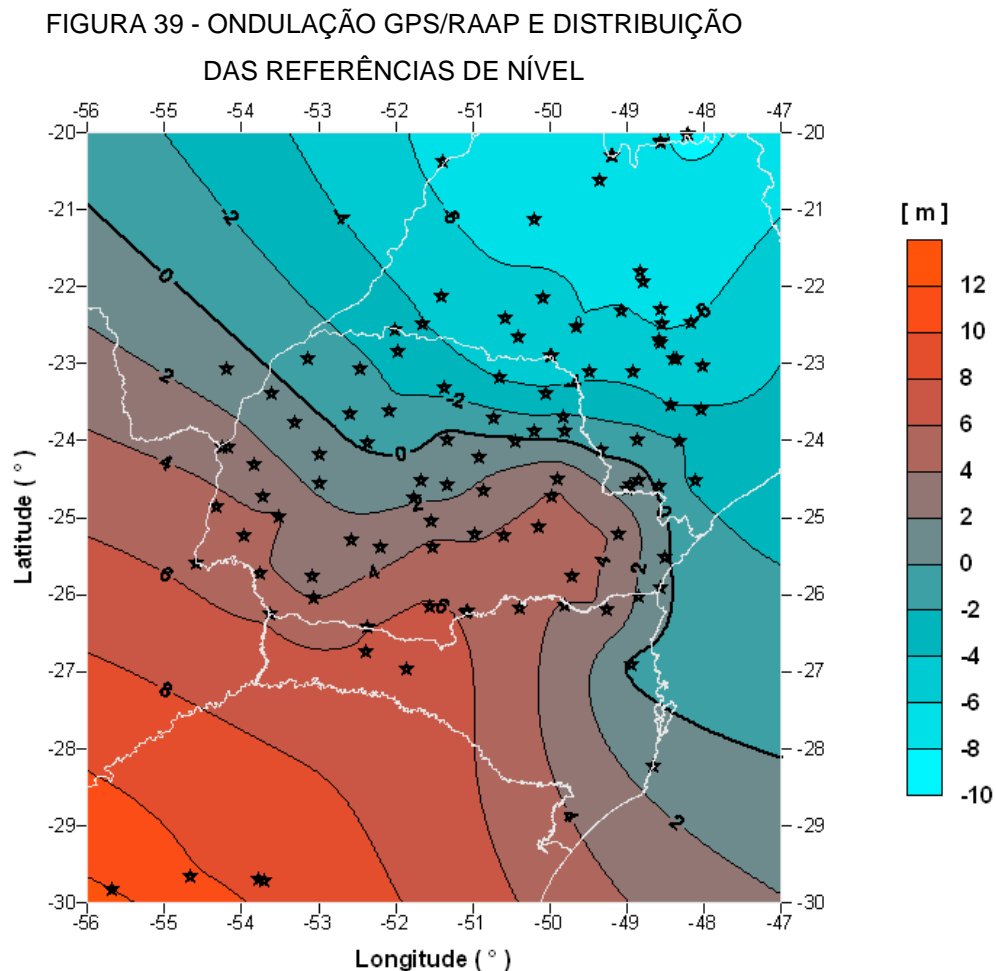


FIGURAS 38 - DIFERENÇA EM ONDULAÇÃO GEOIDAL ENTRE OS MODELOS  
GEOIDPR2006-FFT E MAPGEO2004, EM PERSPECTIVA



Com o intuito de se avaliar a compatibilidade do modelo geoidal GEOIDEPR2006-FFT com a rede altimétrica RAAP, gerou-se uma superfície a partir dos dados de rastreamento GPS sobre 113 referências de nível da RAAP. Para a geração da malha de ondulações GPS/RAAP, os 113 pontos foram interpolados via *krigagem* no espaçamento regular de 5' de arco dentro da "área 3", equivalente à malha de ondulações geoidais GEOIDEPR2006-FFT. Este procedimento facilitou a combinação das duas malhas.

A distribuição das RRNN e a tendência da ondulação GPS/RAAP podem ser acompanhadas na figura 39.



Analisando a figura 39, verifica-se a tendência da superfície na área de estudo. A distribuição das RRNN, cujas as localizações estão simbolizadas pelas estrelas em preto, além dos limites do Estado do Paraná possibilita uma avaliação do comportamento global da rede RAAP.



As figuras 40 e 41 ilustram a diferença existente entre a ondulação do modelo geoidal GEOIDEPR2006-FFT e a ondulação GPS/RAAP.

FIGURA 40 – DIFERENÇA ENTRE A SUPERFÍCIE DO MODELO GEOIDEPR2006-FFT E A SUPERFÍCIE GPS/RAAP

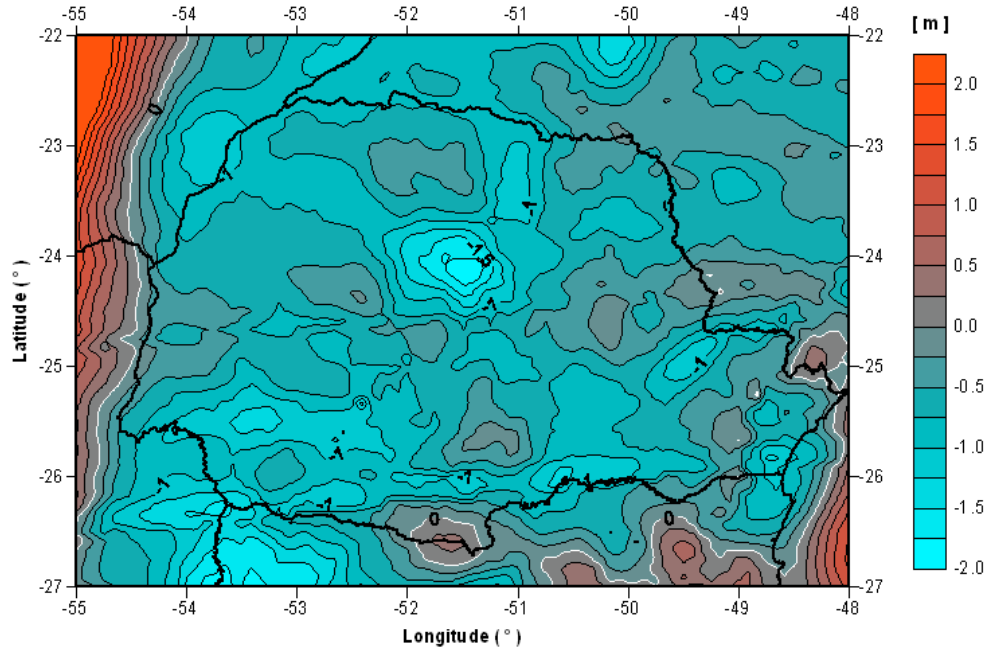
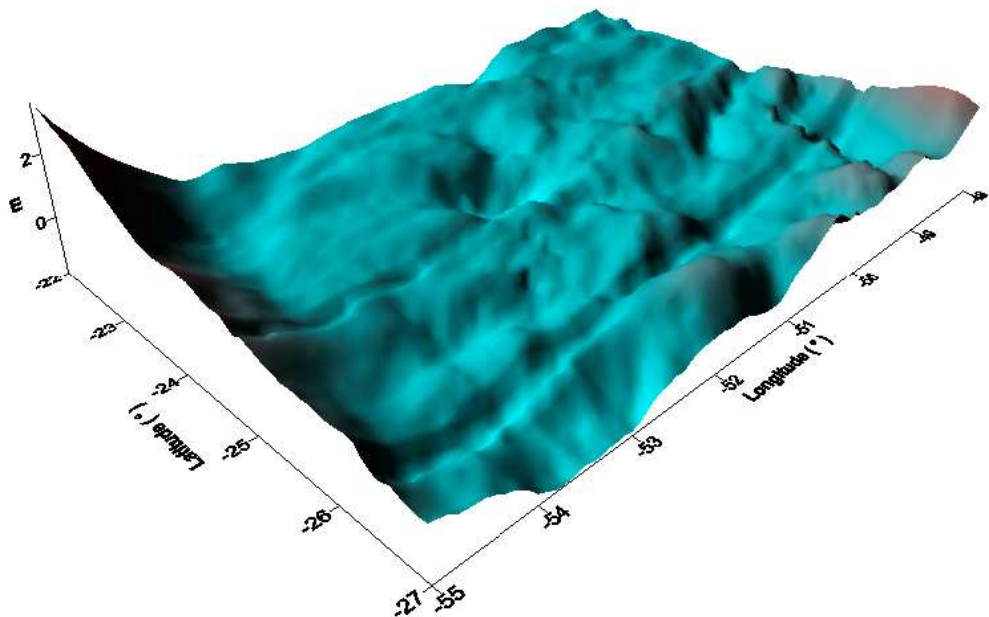


FIGURA 41 – DIFERENÇA ENTRE A SUPERFÍCIE DO MODELO GEOIDEPR2006-FFT E A SUPERFÍCIE GPS/RAAP, EM PERSPECTIVA



As figuras 40 e 41 ilustram a diferença em ondulação geoidal resultante da subtração da malha de ondulação GPS/RAAP, da malha de ondulações geoidais do modelo GEOIDPR2006-FFT. Percebe-se também que as duas linhas longitudinais anômalas captadas pelo modelo GEOIDPR2006-FFT não são captadas pelo modelo de ondulações GPS/RAAP.

No quadro 11, apresenta-se as diferenças pontuais para 92 dos 113 pontos utilizados na análise anterior.

QUADRO 11 (CONTINUA) – DIFERENÇAS PONTUAIS ENTRE  
GEOIDPR2006-FFT MENOS GPS/RAAP

LAT (°DEC)	LON (°DEC)	h (m)	H (m)	N (m) GPS/RAAP	N (m) GEOIDPR2006-FFT	DIFERENÇA (m)
-22,1175	-51,4059	404,202	399,381	-4,821	-5,524	-0,703
-22,1529	-50,0919	604,337	599,197	-5,140	-6,626	-1,486
-22,2912	-48,5613	515,631	509,296	-6,335	-6,953	-0,618
-22,3238	-49,0784	506,984	501,173	-5,811	-6,618	-0,807
-22,4145	-50,5733	497,888	492,169	-5,719	-6,133	-0,414
-22,4606	-48,1796	826,029	820,031	-5,998	-6,525	-0,527
-22,4843	-48,5476	532,426	526,289	-6,137	-6,653	-0,516
-22,4855	-51,6614	411,891	407,936	-3,955	-4,577	-0,622
-22,5243	-49,6639	482,587	476,528	-6,059	-6,383	-0,324
-22,6621	-50,4208	569,725	563,875	-5,850	-6,036	-0,186
-22,6997	-48,5884	663,944	658,388	-5,556	-6,173	-0,617
-22,7316	-48,5710	705,298	699,777	-5,521	-5,943	-0,422
-22,8384	-51,9751	443,589	440,949	-2,640	-3,209	-0,569
-22,8930	-49,9861	396,857	391,565	-5,292	-5,735	-0,443
-22,9324	-53,1354	489,623	488,628	-0,995	-1,637	-0,642
-23,0232	-48,0218	491,834	486,770	-5,064	-5,579	-0,515
-23,0620	-54,2026	339,858	340,706	0,848	0,042	-0,806
-23,0672	-52,4701	410,549	408,931	-1,618	-2,216	-0,598
-23,0982	-48,9250	762,229	757,693	-4,536	-5,049	-0,513
-23,0998	-49,4939	638,334	633,902	-4,432	-5,022	-0,590
-23,1825	-50,6511	681,031	676,950	-4,081	-4,591	-0,510
-23,3104	-51,3692	733,412	730,954	-2,458	-3,076	-0,618
-23,3849	-50,0596	499,348	495,814	-3,534	-4,028	-0,494
-23,3961	-53,6222	362,593	363,169	0,576	-0,228	-0,804
-23,5336	-48,4332	703,902	699,834	-4,068	-4,183	-0,115
-23,5872	-48,0478	658,754	654,856	-3,898	-4,322	-0,424
-23,6168	-52,0829	379,502	377,724	-1,778	-2,405	-0,627
-23,6552	-52,6056	542,983	542,474	-0,509	-1,344	-0,835
-23,6882	-49,8335	624,410	622,631	-1,779	-2,718	-0,939
-23,7035	-50,7387	918,810	917,411	-1,399	-1,707	-0,308
-23,7621	-53,3119	442,541	443,229	0,688	0,024	-0,664
-23,8735	-50,2029	880,957	880,022	-0,935	-1,013	-0,078
-23,8773	-49,8118	810,589	809,735	-0,854	-1,185	-0,331
-23,9825	-48,8759	681,710	680,558	-1,152	-1,581	-0,429
-23,9916	-51,3276	788,218	788,811	0,593	-1,048	-1,641
-24,0024	-48,3146	674,904	672,971	-1,933	-2,666	-0,733
-24,0036	-50,4465	867,763	868,042	0,279	-0,351	-0,630
-24,0349	-52,3676	598,709	598,456	-0,253	-0,729	-0,476
-24,0845	-54,2446	256,235	259,362	3,127	2,588	-0,539
-24,1158	-49,3409	736,375	735,917	-0,458	-0,598	-0,140
-24,1865	-53,0007	488,366	489,234	0,868	0,378	-0,490
-24,2097	-50,9249	783,959	785,153	1,194	0,538	-0,656
-24,3043	-53,8332	345,593	348,312	2,719	2,309	-0,410
-24,5008	-49,8982	1018,484	1022,256	3,772	3,007	-0,765
-24,5122	-48,8452	897,416	898,098	0,682	0,048	-0,634
-24,5201	-51,6717	915,337	916,151	0,814	-0,064	-0,878
-24,5215	-48,1097	40,114	37,562	-2,552	-2,822	-0,270
-24,5571	-52,9985	485,507	487,051	1,544	0,788	-0,756
-24,5666	-51,3375	536,356	537,393	1,037	0,445	-0,592
-24,5812	-48,9555	697,724	698,626	0,902	0,225	-0,677
-24,5854	-48,5940	93,883	93,609	-0,274	-1,113	-0,839
-24,6361	-48,9981	173,983	175,120	1,137	0,474	-0,663
-24,6534	-50,8555	941,391	943,814	2,423	2,029	-0,394
-24,7200	-53,7218	560,884	564,349	3,465	3,223	-0,242

QUADRO 11 (CONCLUSÃO) – DIFERENÇAS PONTUAIS ENTRE  
GEOIDEPR2006-FFT MENOS GPS/RAAP

LAT (°DEC)	LON (°DEC)	h (m)	H (m)	N (m) GPS/RAAP	N (m) GEOIDEPR2006-FFT	DIFERENÇA (m)
-24,8593	-54,3322	250,343	254,732	4,389	4,158	-0,231
-24,9933	-53,5120	749,331	753,455	4,124	3,211	-0,913
-25,0423	-51,5398	1027,202	1030,563	3,361	2,842	-0,519
-25,1143	-50,1556	882,952	887,361	4,409	3,696	-0,713
-25,2080	-49,1132	973,788	977,565	3,777	3,009	-0,768
-25,2128	-50,9793	758,785	762,520	3,735	3,202	-0,533
-25,2266	-50,5993	875,275	879,518	4,243	3,422	-0,821
-25,2426	-53,9791	549,239	553,765	4,526	3,741	-0,785
-25,2916	-52,5779	696,351	699,029	2,678	1,898	-0,780
-25,3816	-52,2014	739,962	743,051	3,089	2,413	-0,676
-25,3880	-51,5189	1065,056	1069,291	4,235	3,783	-0,452
-25,5171	-48,5066	3,539	3,776	0,237	-0,324	-0,561
-25,5902	-54,5902	152,971	158,454	5,483	4,903	-0,580
-25,7189	-53,7594	374,794	378,992	4,198	3,411	-0,787
-25,7694	-53,0951	533,748	536,894	3,146	2,444	-0,702
-25,7701	-49,7205	916,799	921,244	4,445	3,655	-0,790
-25,9036	-48,5701	5,016	5,537	0,521	-0,344	-0,865
-26,0285	-48,8557	29,666	31,424	1,758	0,772	-0,986
-26,0369	-53,0590	547,811	551,740	3,929	3,343	-0,586
-26,1390	-49,8127	788,691	792,590	3,899	3,596	-0,303
-26,1592	-51,5549	858,053	864,314	6,261	5,369	-0,892
-26,1800	-50,3966	778,396	782,845	4,449	3,766	-0,683
-26,1899	-49,2671	876,978	880,853	3,875	3,289	-0,586
-26,2093	-51,0768	946,143	951,774	5,631	5,054	-0,577
-26,2255	-51,0897	750,986	756,703	5,717	5,067	-0,650
-26,2535	-53,6403	830,115	835,872	5,757	4,173	-1,584
-26,4131	-52,3709	981,196	987,126	5,930	5,486	-0,444
-26,7356	-52,3944	676,897	683,089	6,192	5,519	-0,673
-26,9694	-51,8540	1107,632	1115,161	7,529	6,755	-0,774
-22,9356	-48,3593	683,116	677,700	-5,416	-5,811	-0,395
-22,9382	-48,3928	877,537	872,240	-5,297	-5,635	-0,338
-26,9133	-48,9360	10,687	10,300	-0,387	0,174	0,561
-24,7249	-49,9864	1037,521	1041,600	4,079	3,769	-0,310
-22,9045	-50,0019	392,769	387,050	-5,719	-5,741	-0,022
-22,1199	-51,4085	435,960	431,390	-4,570	-5,522	-0,952
-24,7530	-51,7762	893,054	894,760	1,706	1,345	-0,361
-22,5513	-52,0040	291,784	288,780	-3,004	-3,852	-0,848
-24,0808	-54,1871	270,180	273,240	3,060	2,354	-0,706
<b>MÉDIA =</b>						-0,599
<b>DESVIO PADRÃO =</b>						0,299
<b>MÁXIMO =</b>						0,561
<b>MÍNIMO =</b>						-1,641

Para a análise pontual foram empregados 92 pontos que se encontram dentro dos limites de cálculo do modelo geoidal GEOIDEPR2006-FFT. No quadro 11 indentifica-se na ordem, para cada ponto: a latitude, a longitude, a altitude elipsoidal h, a altitude ortométrica H (RAAP), a ondulação N GPS/RAAP, a ondulação N GEOIDEPR2006-FFT e a diferença (N GEOIDEPR2006-FFT menos N GPS/RAAP).

A média para esta diferença verificada para os 92 pontos GPS foi de  $-0,599$  m, e o desvio padrão foi de  $0,299$  m. Os valores máximo e mínimo são respectivamente,  $0,561$  m e  $-1,641$  m.



Para o cálculo das ondulações geoidais para cada ponto, foi empregado o interpolador homônimo ao modelo geoidal, GEOIDPR2006-FFT. As ondulações N GEOIDPR2006-FFT para cada um dos 92 pontos foram interpoladas através dos 4 vizinhos mais próximos e com o inverso ao cubo distância como fator de ponderação. Detalhes das funções do interpolador serão descritas na próxima seção.

Discrepâncias consideráveis como estas também foram verificadas na Austrália e estão reportadas em FEATHERSTONE (1998, 200?). Tal condição, segundo o autor, deve-se principalmente à não aplicação das correções ortométricas baseadas nas observações de gravidade sobre a rede altimétrica, e da não consideração no marégrafo-datum das informações da topografia do nível médio do mar (TNMM). A rede altimétrica brasileira (RAAP) também não conta com estas correções apontadas, conforme alertam LUZ e GUIMARÃES (2001).

No caso australiano, para contornar o problema, FEATHERSTONE et al. (1998, 2001, 200?) propõem o modelamento das superfícies tendo em vista a sua aplicação. Como não existe similaridade de tendências pelos motivos acima indicados, ter-se-iam duas superfícies: uma de referência para altitudes “ortométricas” físicas, determinada pelo modelo geoidal, para uso em Geodésia, Oceanografia e Geociências em geral, e outra compatibilizada, originada da combinação do modelo geoidal com os dados de rastreamento GPS sobre referências de nível, modelada para a transformação da altitude geométrica, na altitude “ortométrica” compatível com a rede altimétrica. Esta seria, segundo os autores citados, uma solução até a combinação das informações na redefinição do *datum* vertical.

SUBIZA (2000) comenta a discrepância tratada na presente seção como sendo oriunda de um somatório de diversos erros introduzidos no processo de cálculo do modelo geoidal e cita algumas das causas principais:

- Erros na determinação dos coeficientes de baixo grau dos modelos geopotenciais, causando desvios sistemáticos de longo comprimento de onda;

- Diferenças entre os sistemas altimétricos e gravimétricos usados no cálculo do modelo geoidal ;
- Erros introduzidos no processo de geração das quadrículas, já que todos os métodos de interpolação produzem algum tipo de filtragem no resultado;
- Erros na determinação das redes GPS e altimétrica de cada país;
- Uso restrito dos dados gravimétricos em relação à correção atmosférica da gravidade.

Tal discrepância entre o modelo geoidal determinado GEOIDEPR2006-FFT e o modelo GPS/RAAP deve ser removida por uma compatibilização entre as duas superfícies, gerando-se um modelo híbrido. Este novo modelo tem a premissa de fornecer ondulações geoidais melhor adaptadas à realidade da rede altimétrica RAAP, possibilitando a transformação da altitude elipsoidal  $h$  para a altitude ortométrica  $H$  como aquela fornecida pelo nivelamento geométrico.

Para a geração deste modelo híbrido, restaurou-se o resíduo gerado pela subtração das malhas dos modelos GEOIDEPR2006-FFT e GPS/RAAP (fig. 40 e 41), na malha de ondulações geoidais do modelo GEOIDEPR2006-FFT.

A malha de ondulações do modelo híbrido compatibilizado foi então submetida ao interpolador, extraindo-se novas ondulações para os mesmos 92 pontos de teste.

No quadro 12 apresenta-se os dados da compatibilização do modelo geoidal GEOIDEPR2006-FFT com o modelo GPS/RAAP.

QUADRO 12 (CONTINUA) – DIFERENÇAS PONTUAIS ENTRE O MODELO  
COMPATIBILIZADO MENOS GPS/RAAP

LAT (°DEC)	LON (°DEC)	h (m)	H (m)	N (m) GPS/RAAP	N (m) COMPATIBILIZADO	DIFERENÇA (m)
-22,1175	-51,4059	404,202	399,381	-4,821	-4,593	0,228
-22,1529	-50,0919	604,337	599,197	-5,140	-5,179	-0,039
-22,2912	-48,5613	515,631	509,296	-6,335	-6,278	0,057
-22,3238	-49,0784	506,984	501,173	-5,811	-5,806	0,005
-22,4145	-50,5733	497,888	492,169	-5,719	-5,708	0,011
-22,4606	-48,1796	826,029	820,031	-5,998	-5,925	0,073
-22,4843	-48,5476	532,426	526,289	-6,137	-6,068	0,069
-22,4855	-51,6614	411,891	407,936	-3,955	-3,914	0,041
-22,5243	-49,6639	482,587	476,528	-6,059	-6,034	0,025
-22,6621	-50,4208	569,725	563,875	-5,850	-5,842	0,008
-22,6997	-48,5884	663,944	658,388	-5,556	-5,611	-0,055
-22,7316	-48,5710	705,298	699,777	-5,521	-5,482	0,039
-22,8384	-51,9751	443,589	440,949	-2,640	-2,621	0,019
-22,8930	-49,9861	396,857	391,565	-5,292	-5,595	-0,303
-22,9324	-53,1354	489,623	488,628	-0,995	-0,980	0,015
-23,0232	-48,0218	491,834	486,770	-5,064	-5,072	-0,008
-23,0620	-54,2026	339,858	340,706	0,848	0,843	-0,005
-23,0672	-52,4701	410,549	408,931	-1,618	-1,583	0,035
-23,0982	-48,9250	762,229	757,693	-4,536	-4,582	-0,046
-23,0998	-49,4939	638,334	633,902	-4,432	-4,491	-0,059
-23,1825	-50,6511	681,031	676,950	-4,081	-4,097	-0,016
-23,3104	-51,3692	733,412	730,954	-2,458	-2,389	0,069
-23,3849	-50,0596	499,348	495,814	-3,534	-3,337	0,197
-23,3961	-53,6222	362,593	363,169	0,576	0,552	-0,024
-23,5336	-48,4332	703,902	699,834	-4,068	-3,797	0,271
-23,5872	-48,0478	658,754	654,856	-3,898	-3,883	0,015
-23,6168	-52,0829	379,502	377,724	-1,778	-1,573	0,205
-23,6552	-52,6056	542,983	542,474	-0,509	-0,544	-0,035
-23,6882	-49,8335	624,410	622,631	-1,779	-1,907	-0,128
-23,7035	-50,7387	918,810	917,411	-1,399	-1,098	0,301
-23,7621	-53,3119	442,541	443,229	0,688	0,704	0,016
-23,8735	-50,2029	880,957	880,022	-0,935	-0,543	0,392
-23,8773	-49,8118	810,589	809,735	-0,854	-0,576	0,278
-23,9825	-48,8759	681,710	680,558	-1,152	-1,157	-0,005
-23,9916	-51,3276	788,218	788,811	0,593	0,591	-0,002
-24,0024	-48,3146	674,904	672,971	-1,933	-1,933	0,000
-24,0036	-50,4465	867,763	868,042	0,279	0,241	-0,038
-24,0349	-52,3676	598,709	598,456	-0,253	-0,152	0,101
-24,0845	-54,2446	256,235	259,362	3,127	3,129	0,002
-24,1158	-49,3409	736,375	735,917	-0,458	-0,487	-0,029
-24,1865	-53,0007	488,366	489,234	0,868	0,835	-0,033
-24,2097	-50,9249	783,959	785,153	1,194	1,316	0,122
-24,3043	-53,8332	345,593	348,312	2,719	2,781	0,062
-24,5008	-49,8982	1018,484	1022,256	3,772	3,723	-0,049
-24,5122	-48,8452	897,416	898,098	0,682	0,593	-0,089
-24,5201	-51,6717	915,337	916,151	0,814	0,775	-0,039
-24,5215	-48,1097	40,114	37,562	-2,552	-2,559	-0,007
-24,5571	-52,9985	485,507	487,051	1,544	1,624	0,080
-24,5666	-51,3375	536,356	537,393	1,037	1,125	0,088
-24,5812	-48,9555	697,724	698,626	0,902	0,874	-0,028
-24,5854	-48,5940	93,883	93,609	-0,274	-0,323	-0,049
-24,6361	-48,9981	173,983	175,120	1,137	1,268	0,131
-24,6534	-50,8555	941,391	943,814	2,423	2,513	0,090
-24,7200	-53,7218	560,884	564,349	3,465	3,578	0,113

QUADRO 12 (CONCLUSÃO) – DIFERENÇAS PONTUAIS ENTRE O MODELO  
COMPATIBILIZADO MENOS GPS/RAAP

LAT ( °DEC )	LON ( °DEC )	h ( m )	H ( m )	N ( m ) GPS/RAAP	N ( m ) COMPATIBILIZADO	DIFERENÇA ( m )
-24,8593	-54,3322	250,343	254,732	4,389	4,360	-0,029
-24,9933	-53,5120	749,331	753,455	4,124	4,082	-0,042
-25,0423	-51,5398	1027,202	1030,563	3,361	3,479	0,118
-25,1143	-50,1556	882,952	887,361	4,409	4,393	-0,016
-25,2080	-49,1132	973,788	977,565	3,777	3,533	-0,244
-25,2128	-50,9793	758,785	762,520	3,735	3,863	0,128
-25,2266	-50,5993	875,275	879,518	4,243	4,289	0,046
-25,2426	-53,9791	549,239	553,765	4,526	4,542	0,016
-25,2916	-52,5779	696,351	699,029	2,678	2,776	0,098
-25,3816	-52,2014	739,962	743,051	3,089	3,290	0,201
-25,3880	-51,5189	1065,056	1069,291	4,235	4,316	0,081
-25,5171	-48,5066	3,539	3,776	0,237	0,226	-0,011
-25,5902	-54,5902	152,971	158,454	5,483	5,467	-0,016
-25,7189	-53,7594	374,794	378,992	4,198	4,268	0,070
-25,7694	-53,0951	533,748	536,894	3,146	3,154	0,008
-25,7701	-49,7205	916,799	921,244	4,445	4,443	-0,002
-25,9036	-48,5701	5,016	5,537	0,521	0,578	0,057
-26,0285	-48,8557	29,666	31,424	1,758	1,646	-0,112
-26,0369	-53,0590	547,811	551,740	3,929	4,152	0,223
-26,1390	-49,8127	788,691	792,590	3,899	3,899	0,000
-26,1592	-51,5549	858,053	864,314	6,261	6,247	-0,014
-26,1800	-50,3966	778,396	782,845	4,449	4,485	0,036
-26,1899	-49,2671	876,978	880,853	3,875	3,745	-0,130
-26,2093	-51,0768	946,143	951,774	5,631	5,714	0,083
-26,2255	-51,0897	750,986	756,703	5,717	5,725	0,008
-26,2535	-53,6403	830,115	835,872	5,757	5,742	-0,015
-26,4131	-52,3709	981,196	987,126	5,930	5,977	0,047
-26,7356	-52,3944	676,897	683,089	6,192	6,229	0,037
-26,9694	-51,8540	1107,632	1115,161	7,529	7,495	-0,034
-22,9356	-48,3593	683,116	677,700	-5,416	-5,414	0,002
-22,9382	-48,3928	877,537	872,240	-5,297	-5,320	-0,023
-26,9133	-48,9360	10,687	10,300	-0,387	-0,385	0,002
-24,7249	-49,9864	1037,521	1041,600	4,079	4,106	0,027
-22,9045	-50,0019	392,769	387,050	-5,719	-5,623	0,096
-22,1199	-51,4085	435,960	431,390	-4,570	-4,587	-0,017
-24,7530	-51,7762	893,054	894,760	1,706	1,724	0,018
-22,5513	-52,0040	291,784	288,780	-3,004	-2,979	0,025
-24,0808	-54,1871	270,180	273,240	3,060	3,022	-0,038
<b>MÉDIA =</b>						0,030
<b>DESVIO PADRÃO =</b>						0,102
<b>MÁXIMO =</b>						0,392
<b>MÍNIMO =</b>						-0,303

Observa-se no quadro 12 primeiramente a média tendendo a zero dos novos resíduos entre a ondulação pontual GPS/RAAP e a ondulação do modelo compatibilizado, para os 92 pontos GPS de teste. O desvio padrão para os novos resíduos é de aproximadamente 10 cm. O valor máximo é de 0,392 m e o mínimo de -0,303 m.

Tomando-se como referência a rede altimétrica RAAP do Sistema Geodésico Brasileiro, verifica-se com base nos dados dos quadros 11 e 12 uma melhoria no

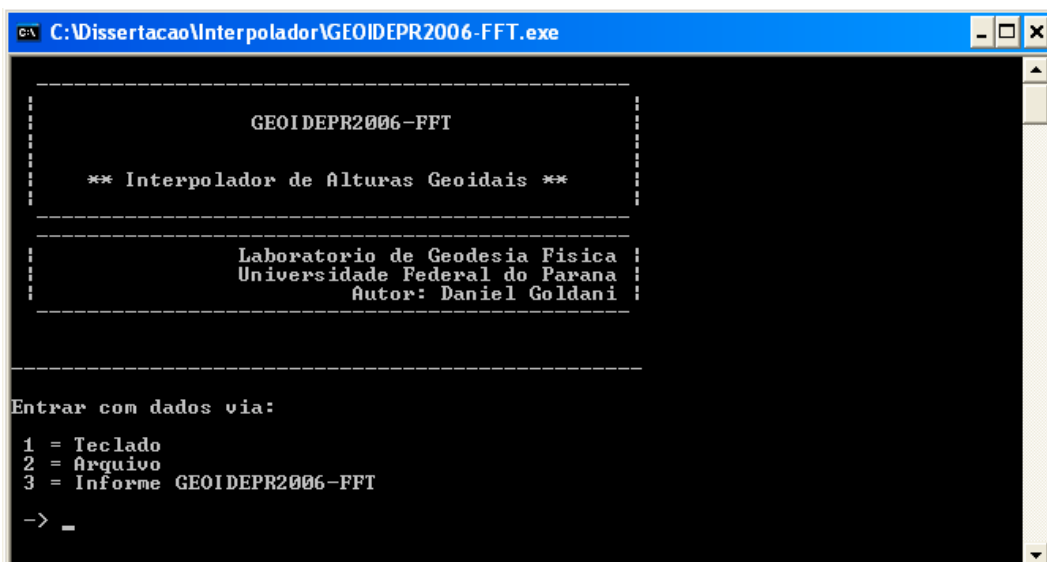
erro absoluto que passou de 0,299 m com o modelo geoidal GEOIDEPR2006-FFT para 0,102 m com o modelo compatibilizado, denominado GEOIDERAAP. Os dois modelos estão disponibilizados no interpolador como será visto na seção 6.

A convergência das duas superfícies para um referencial único de altitudes tem sido tratada por FOTOPOULOS (2003), entre outros, no meio acadêmico, por ROMAN et al. (2004), no *National Geodetic Survey* dos Estados Unidos e por VÉRONNEAU (2004), no *Geodetic Survey Division* do Canadá.

## 6 INTERPOLADOR DE ALTURAS GEOIDAIS

Objetivando a utilização prática do modelo geoidal, foi criado um programa interpolador de alturas geoidais denominado GEOIDEPR2006-FFT. O programa foi escrito em linguagem Fortran, utilizando rotinas de interpolação desenvolvidas por Yecai Li na Universidade de Calgary (SIDERIS, 1997). Concebido para trabalhar com os pontos em arquivo ou inseridos via teclado, um a um, onde cada ponto deve conter latitude e longitude. O programa possibilita o cálculo da altura geoidal proveniente tanto do modelo geoidal GEOIDEPR2006-FFT quanto do modelo GEOIDERAAP, compatível com a rede altimétrica do SGB.

FIGURA 42 - TELA PRINCIPAL DO INTERPOLADOR DE ALTURAS GEOIDAIS



```
C:\Dissertacao\Interpolador\GEOIDEPR2006-FFT.exe
-----
GEOIDEPR2006-FFT
** Interpolador de Alturas Geoidais **
-----
Laboratorio de Geodesia Fisica
Universidade Federal do Parana
Autor: Daniel Goldani
-----
Entrar com dados via:
1 = Teclado
2 = Arquivo
3 = Informe GEOIDEPR2006-FFT
-> _
```

Foi incorporado no interpolador um item de informações técnicas sobre a criação do modelo geoidal GEOIDEPR2006-FFT e uma explicação do tipo de altitude a ser empregada pelo usuário conforme a sua necessidade.

O programa pode interpolar ponderando a altura geoidal pelo inverso da distância ou inverso ao cubo da distância entre o ponto de interesse e cada ponto-nó da malha considerado no cálculo. O usuário pode selecionar 1, 4, 9, 16 ou 25 pontos-nós mais próximos ao ponto de interesse para a interpolação. Com a opção de interpolação pelo inverso ao cubo da distância, os pontos-nós recebem um peso

menor em relação a outra opção, quanto mais afastados estiverem do ponto de interesse.

Os pontos de interesse a serem interpolados, cuja entrada pode ser via arquivo ou via teclado, deverão conter:

[ latitude longitude ]

onde a latitude e a longitude estarão em graus decimais.

O modelo geoidal GEOIDEPR2006-FFT foi gerado num sistema livre de marés. A Associação Internacional de Geodésia (IAG), entretanto, recomenda a adoção do sistema “zero” de maré (*zero-tide*). Desta forma, foi implementada no algoritmo do interpolador a equação (NIMA, 2000):

$$N_z = N_n + 2,97 - 8,88 \sin^2 \phi \quad [cm] \quad (6.1)$$

onde  $N_n$  é ondulação geoidal (altura geoidal) no sistema livre de marés;  $\phi$  é a latitude do ponto e  $N_z$  é a ondulação geoidal no sistema “zero” (geóide zero).

O resultado obtido pelo processo de interpolação é depositado em arquivo, ou na própria tela, sem armazenamento em arquivo. Quando a opção for via arquivo, o programa solicita ao usuário o nome do arquivo. O resultado aparece disposto na seguinte forma:

[ latitude longitude N ],

seja ele através de arquivo ou na tela, onde  $N$  é altura geoidal.

## 7 CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES

### 7.1 CONCLUSÃO

O modelo geopotencial global PGM2000A foi utilizado com êxito na criação do GEOIDEPR2006-FFT. A atualização deste modelo geopotencial nas áreas oceânicas acarretaram uma melhoria de até 20 cm na área continental, em termos de ondulação geoidal, quando este foi comparado com seu antecessor, o EGM96.

A utilização do modelo PGM2000A até o grau 360 do desenvolvimento de seus coeficientes, ao invés de 180, representou uma diferença superior a 1 m na área de estudo deste trabalho.

No presente trabalho, foi empregado um valor para  $W_0$  indicado preliminarmente pelo Grupo de Trabalho III do projeto SIRGAS. Nesse sentido, envolver a aplicação do valor de  $W_0$  na determinação do modelo geoidal se revela importante, uma vez que tal procedimento permite uma definição física para a superfície de referência vertical.

Desconsiderando as áreas onde houve extrapolação dos dados por não se dispor de rastreamento GPS na rede altimétrica, a ondulação geoidal GEOIDEPR2006-FFT encontra-se por mais de 1,5 m abaixo da superfície de referência da rede altimétrica RAAP, em algumas regiões do estado do Paraná.

Em relação aos dados do relevo, o erro absoluto das altitudes do modelo digital de terreno empregado neste estudo é da ordem de 16 m. O efeito de um erro desta magnitude foi testado de maneira aleatória e verificado que não apresenta mudança significativa na correção do terreno, esta variou 0,168 mGal nas proximidades dos 5 pontos vizinhos com altitudes alteradas em 20 m.

No efeito indireto do terreno, nenhuma variação foi verificada com estas mesmas alterações.

Neste trabalho testou-se a influência de um erro aleatório na anomalia gravimétrica. O resultado demonstra que um erro superior a 9 mGal ocasiona um erro inferior a 5 cm na ondulação geoidal deste mesmo ponto, decaindo rapidamente na direção radial com o afastamento do ponto.

A máxima correção de terreno para a área de estudo foi equivalente a magnitude deste erro, ou seja, em torno de 10 mGals. Isso permite afirmar que erros



isolados nas anomalias gravimétricas são perfeitamente filtrados pela aplicação da transformada rápida de Fourier no cálculo do geóide.

O propósito da determinação de um modelo geoidal de alta resolução para o Estado do Paraná foi alcançado. Em função da significativa diferença encontrada entre as duas superfícies, uma originária do modelo geoidal GEOIDEPR2006-FFT e outra originária da rede altimétrica brasileira RAAP, foi efetuada a compatibilização das duas superfícies na geração de um modelo híbrido GEOIDERAAP.

Considerando como referência a rede altimétrica RAAP, o modelo geoidal GEOIDEPR2006-FFT apresentou um erro absoluto de 0,299 m, enquanto que no modelo GEOIDERAAP este erro foi de 0,102 m.

## 7.2 RECOMENDAÇÕES

Nos próximos estudos recomenda-se um aprofundamento nas questões que envolvem a definição da adequada superfície de referência, com atenção especial ao desempenho dos modelos globais do geopotencial que estão surgindo;

Testar a aplicação de modelos digitais de terreno com resolução superior a que foi aplicada neste trabalho;

Testar o efeito de erros sistemáticos nas anomalias gravimétricas oriundos, por exemplo, de uma eventual atribuição equivocada da altitude às estações de observação da gravidade;

Empregar modelos de densidade nos cálculos do efeito do relevo topográfico e acompanhar suas influências na ondulação geoidal;

Verificar outras metodologias de cálculo, a aplicação de outros programas e principalmente, disseminar o levantamento dos dados de campo, e de maneira adequada, determinar o grau de confiabilidade de cada observação.

## REFERÊNCIAS

BURŠA, M.; KENYON, S.; KOUBA, J.; RADĚJ, K.; VATRT, V.; VOJTÍŠKOVÁ, M.; ŠIMEK, J. **World Height System Specified by Geopotential at Tide Gauge Stations**. Vertical Reference Systems – International Association of Geodesy - IAG Symposium. Cartagena, Colombia, February 20-23, 2001.

DENKER, H.; BARRIOT, J. P.; BARZAGHI, R.; FORSBERG, R.; IHDE, J.; KENYERES, A.; MARTI, U.; TZIAVOS, I. N. **Status of the European Gravity and Geoid Project EGGP**. Anais CDROM: Gravity, Geoid and Space Missions GGSM2004 – IAG International Symposium. Portugal, 2004.

CRIOLLO, A. R. T. **Metodologia para a Geração da Malha de Anomalias Gravimétricas para Obtenção de Geóide Gravimétrico Local a partir de Dados Esparsos**. Curitiba, 2003. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) – Setor de Ciências da Terra, Universidade Federal do Paraná.

DREWES, H. **Experiences with least squares collocation as applied to interpolation of geodetic and geophysical quantities**. XII Symposium on Mathematical Geophysics. Caracas. 1978

FEATHERSTONE, W. E. **Do We Need a Gravimetric Geoid or a Model of the Australian Height Datum to Transform GPS heights in Australia ?** The Australian Surveyor. Vol.43, n.4, 1998. <http://www.cage.curtin.edu.au/~geogrp/>

FEATHERSTONE, W. E.; KIRBY, J. F.; HOLMES, S. A.; FOTOPOULOS, G.; GOOS, J. M. **Recent Research Towards an Improved Geoid Model for Australia**. Apresentado no: Joint AURISA and Institution of Surveyors Conference. Adelaide, Australia, 25-30 November, 2002. <http://www.cage.curtin.edu.au/~geogrp/>

FEATHERSTONE, W. E.; KIRBY, J. F.; KEARSLEY, A. H. W.; GILLILAND, J. R.; JOHNSTON, G. M.; STEED, J.; FORSBERG, R.; SIDERIS, M. G. **The AUSGeoid98**

**geoid model of Australia: data treatment, computations and comparisons with GPS-levelling data.** Journal of Geodesy, Springer-Verlag, nº 75, p. 313-330, 2001.

FEATHERSTONE, W. E. **Prospects for the Australian Height Datum and Geoid Model.** 200?. <http://www.cage.curtin.edu.au/~geogrp/>

FORSBERG, R. **Gravity Field Terrain Effect Computations by FFT.** Bulletin Geodesique. Vol.59, pp. 342-360, 1985 .

FORSBERG, R.; SIDERIS, M. G. **Geoid Computations by the Multi-banding Spherical FFT Approach.** Manuscripta Geodaetica, vol 18, p. 82-90, 1993.

FORSBERG, R.; STRYKOWSKI, G. **NKG-2004 geoid of the Nordic and Baltic Area.** Anais CDROM: Gravity, Geoid and Space Missions GGSM2004 – IAG International Symposium. Portugal, 2004.

FORSBERG, R.; STRYKOWSKI, G.; Iliffe, J. C; ZIEBART, M.; CROSS, P. A.; TSCHERNING, C. C.; CRUDDACE, P.; STEWART, K.; BRAY, C.; FINCH, O. **OSGM02: A new geoid model of the British Isles.** Ordnance Survey Ireland - Home Page [http://www.osi.ie/pdf/OSGM02\\_final.pdf](http://www.osi.ie/pdf/OSGM02_final.pdf). Acessado em fevereiro 2003.

FOTOPOULOS, G.; KOTSAKIS, C.; SIDERIS, M.G. **Evaluation of Geoid Models and Their Use in Combined GPS/Levelling/Geoid Height Network Adjustments.** The University of Calgary. Calgary, Canada, 1999.

FOTOPOULOS, G. **An Analysis on the Optimal Combination of Geoid, Orthometric and Ellipsoidal Height Data.** Doctor of Philosophy Thesis, pp.238, University of Calgary. Department of Geomatics Engineering. Alberta, Canada, 2003. <http://www.geomatics.ucalgary.ca/research/publications/GradTheses.html>

GOLDANI, D. **Criação de Um Modelo Geoidal de Alta Precisão para O Estado do Paraná: As Potencialidades da Transformada Rápida De Fourier na Escolha da Solução.** Seminário I de Qualificação. Apresentado no CPGCG da Universidade Federal do Paraná, 106 f, Curitiba, 2005.

GONÇALVES, G. A.; DA SILVA, C. R.; MITISHITA E. A. **Comparação dos Dados do SRTM com as RN's da Rede Geodésica Altimétrica do IBGE para a Região Sul do Brasil.** Curitiba: IV Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas, Maio, 2005.

HAAGMANS, R.; MIN, E.; GELDEREN, M. **Fast evaluation of convolution integrals on the sphere using 1D FFT, and a comparison with existing methods for Stokes's Integral.** Manuscripta Geodaetica, vol. 18, p. 227-241, 1993.

HEISKANEN, W. A.; MORITZ, H. **Physical Geodesy.** San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1967.

HEISKANEN, W. A.; MORITZ, H. **Geodesia Física.** Instituto Geográfico Nacional, 369 p., Madri, Espanha, 1985.

HEHL, M. E. **Linguagem de Programação Estruturada – FORTRAN 77.** McGraw-Hill. p. 511. São Paulo, 1986.

IBGE, **Resolução do Presidente – R.PR – 1/2005.** Disponível em: <[http://www.ibge.gov.brftp://geofp.ibge.gov.br/documentos/geodesia/pmrg/legislacao/RPR\\_01\\_25fev2005.pdf](http://www.ibge.gov.brftp://geofp.ibge.gov.br/documentos/geodesia/pmrg/legislacao/RPR_01_25fev2005.pdf) .> Acesso em: novembro de 2005a.

IBGE. **Modelo Geoidal Brasileiro - MAPGEO2004.** Disponível em: <<http://www.ibge.gov.br>.> Acesso em: 2005b.

IBGE. **Geociências - Geodésia – SGB – Rede Altimétrica.** Disponível em: <<http://www.ibge.gov.br>.> Acesso em: 2006a.

IBGE. **Canal - Banco de Dados – Mapas Interativos – Mapa de Divisões Territoriais**. Disponível em: <<http://www.ibge.gov.br>. > Acesso em: 2006b.

JANÁK, J.; VANÍČEK, P. **Mean Free-air Gravity Anomaly in the Mountains**. University of New Brunswick. Canadá. 2003? <http://gge.unb.ca/Pubs/Pubs.html>

JÜRGENSON, H. **Estonian High Precision Fitted Geoid Est-Geoid2003**. Anais CDROM: Gravity, Geoid and Space Missions GGSM2004 – IAG International Symposium. Portugal, 2004.

KIRBY, J. F.; FEATHERSTONE, W. E. **Terrain Correcting Australian Gravity Observations Using The National Digital Elevation Model and The Fast Fourier Transform**. Australian Journal of Earth Sciences, N°46, pp. 555 -562. 1999.

LI, Y. C. **Optimized Spectral Geoid Determination**. UCGE Report n. 20050. Department of Geomatics Engineering. The University of Calgary. Calgary. 1993.

LOBIANCO, M. C. B. **Determinação das Alturas do Geóide no Brasil**. São Paulo, 2005. 165 f. Tese (Doutorado em Informações Espaciais) – Setor de Engenharia de Transportes, Universidade de São Paulo.

LUZ, R. T.; GUIMARÃES, V. M. **Realidade e Perspectivas da Rede Altimétrica de Alta Precisão do Sistema Geodésico Brasileiro**. Curitiba: II Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas, Maio, 2001.

MARSHALL, A. C. **Fortran 90 Course Notes**. The University of Liverpool. Liverpool, p. 278, September, 1997. Obtido em <http://www.cpgec.ufrgs.br/morsch/fortran90/>

MATOS, A. C. O. **Implementação de Modelos Digitais de Terreno para Aplicações na Área de Geodésia e Geofísica na América do Sul**. São Paulo, 2005. 355 f. Tese (Doutorado em Informações Espaciais) – Setor de Engenharia de Transportes, Universidade de São Paulo.

MORITZ, H.; **Geodetic Reference System 1980**. Report of Special Study Group N° 539 of IAG. XVII General Assembly of the IUGG. Canberra. December, 1979.

MORITZ, H.; **Geodetic Reference System 1980**. Bulletin Geodésique 66, pp. 187-192, 1992.

NASA, National Aeronautics and Space Administration - Goddard Space Flight Center (GSFC). **PGM2000A**. <http://bowie.gsfc.nasa.gov/926/PGM2000A/index.html>. 2005.

NIMA, National Imagery and Mapping Agency. Department of Defense. **World Geodetic System 1984: Its Definition and Relationships with Local Geodetic System**. Technical Report TR8350.2. 3<sup>o</sup> Edition. USA, 2000.

NIMA, National Imagery and Mapping Agency. **WGS 84 EGM96 HOME PAGE**. In: <http://earth-info.nima.mil/GandG/wgsegm/egm96.html>. Acessado em Janeiro de 2005.

PAVLIS, N. K.; CHINN, D. S.; COX, C. M.; LEMOINE, F. G. **Geopotential Model Improvement Using POCM\_4B Dynamic Ocean Topography Information: PGM2000A**. Joint TOPEX/Poseidon and Jason-1 SWT Meeting. Miami, USA, Nov 15-17, 2000.

PAVLIS, N. K.; HOLMES; S. A.; KENYON, S. C.; SCHMIDT, D.; TRIMMER, R. **A Preliminary Gravitational Model to Degree 2160**. Gravity, Geoid and Space Missions GGSM2004 – IAG International Symposium. Portugal, 2004.

ROMAN, D. R.; WANG, Y. M.; HENNING, W.; HAMILTON, J. **Assessment of the New National Geoid Height Model, GEOID03**. ACSM/TAPS Conference and Technology Exhibition. Neshville, Tennessee, April 16-21, 2004. Acessado em 2005 no NGS-NOAA webpage: <http://www.ngs.noaa.gov/GEOID/GEOID03/index.html>.

SÁNCHEZ, L. **Sistema de Referencia Geocéntrico para Las Américas - Grupo de Trabajo III: Datum Vertical – SIRGAS-GTIII**. Reporte 2005. Caracas, Noviembre 17 y 18 de 2005.

SEVILLA, M.J. **A New Gravimetric Geoid in The Iberian Peninsula**. New Geoids in the World – IgeS Bulletin N.º 4, Bulletin d'Information Nº 77, Special Issue, pp163-178, Milan, Italy, 1997.

SIDERIS, M. G.; LI, Y. C. **Gravity Field Convolutions Without Windowing and Edge Effects**. Bulletin Geodesique, Vol. 67, pp.107-118. 1993

SIDERIS, M. G. **Geoid Determination by FFT Techniques**. In: Lectures Notes of the 2º International School for the Determination and Use of the Geoid, International Geoid Service, p. 213-277, Rio de Janeiro, Brasil, 1997.

SMITH, D. A., **There is no such thing as “The” EGM96 geoid: Subtle points on the use of a global geopotential model**. International Geoid Service – IGeS, Bulletin nº 8, Milan, Italy, p. 17-28, 1998.

SOUZA, S.F. de. **Contribuição do GPS para o aprimoramento do geóide no Estado de São Paulo**. São Paulo, 2002. 204 f. Tese (Doutorado em Geofísica) – Departamento de Geofísica- IAG, Universidade de São Paulo.

SUBIZA P., W. H. **A Determinação de um Modelo Geoidal de Precisão para o Uruguai**. Curitiba, 2000. 165 f. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) – Setor de Ciências da Terra, Universidade Federal do Paraná.

TORGE, W. **Gravimetry**. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1989.

TSCHERNING, C. C. **Determinación de Alturas Usando GPS: La necesidad de un Geoide Preciso**. Jornada Técnica: Desarrollos y Aplicaciones del Sistema de Posicionamiento Global, Sociedad Española de Cartografía, Fotogrametría e Teledetección, Barcelona, 5 junho de 1992. Traducción del Ing. Rubén C. Rodríguez.

VÉRONNEAU, M. **The Canadian Gravimetric Geoid Model of 2000 (CGG2000)**. Natural Resources Canada. Geodetic Survey Division. Artigo escrito em 22 de agosto de 2001. [http://www.geod.nrcan.gc.ca/publications/papers/index\\_e.php](http://www.geod.nrcan.gc.ca/publications/papers/index_e.php).

VÉRONNEAU, M.; HUANG, J. **Modernization of the Height System in Canada: Progress and Challenges**. Gravity, Geoid and Space Missions GGSM2004 – IAG International Symposium. Portugal, 2004.

WICHIENTHAROEN, C. **The Indirect Effects on the Computation of Geoid Undulation**, NOAA, NASA Grant No. NGS 36-008-161, OSURF Proj. No. 783210, 96 pp., Sep 1982.

ZHANG, K.F.; FEATHERSTONE, W.E. **Exploring The Detailed Structure Of The Local Earth's Gravity Field Using Fractal And Fourier Power Spectrum Techniques**. International Geoid Service Bulletin, vol. 10, p. 46-58. Curtin University of Technology, Australia, 2000a. <http://www.cage.curtin.edu.au/~geogrp>

ZHANG, K. F; DODSON, A. H.; CHEN, W. **Factors Affecting FFT Gravimetric Geoid Determination Precision**. Pergamon, Phys. Chem. Earth (A), vol. 25, n. 1, p. 31-37, Elsevier Science Ltd, 2000b.



## DOCUMENTOS CONSULTADOS

BURŠA, M.; PĚČ, K. **Gravity Field and Dynamics of the Earth**. Translated: Jaroslav Tauer. Berlin: Springer-Verlag, 1993. Title of the original czech edition: Tíhové pole a dynamika Země, 1988.

FREITAS, S. R. C. De; BLITZKOW, D. **Altitudes e Geopotencial**. Milan: IgeS Bulletin n. 9 – International Geoid Service, pp. 47-62, June, 1999.

GOLDANI, D.; GENRO, R. S.; SALOMONI, R.; MAGRO, F. H. S. **Determinação de Um Modelo Geoidal Local para o município de Porto Alegre**. Porto Alegre, 2002. 58 f. Trabalho de Graduação (Disciplina Projeto Cartográfico) – Curso de Engenharia Cartográfica, Departamento de Geodésia, Instituto de Geociências, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

GROTEN, E. **Geodesy and the Earth's Gravity Field**. Bonn: Dümmler Verlag-Bonn, 724 p.1980

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física**. 4. ed. Tradução de: Denise Helena da Silva Sotero e Gerson Bazo Costamilan. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

HIGGINS, M. B.; PEARSE, M. B.; KEARSLEY, A. H. W. **Using Digital Elevation Models in the Computation of Geoid Heights**. Australia: Geomatics Research Australasia n. 65, pp 59-74, December, 1996.

JEKELI, C. **Heights, the Geopotential, and Vertical Datums**. Report N° 459. Ohio State University. Columbus, USA, 2000

PAVLIS, N. K. **PGM2000A file description**. Documento atualizado em 20 de outubro de 2000.

SEEBER, G. **Satellite Geodesy: Foundations, Methods and Applications**. Berlin: Walter de Gruyter, 1993.

SHARNI, D.; PAPO, H. **The Carmel Mountains Precise Geoid**. Israel: Technion – Israel Institute of Technology.

SHENK, AL. **Cálculo e Geometria Analítica**. 2. ed. Tradução de: Anna Amália Feijó Barroso. Rio de Janeiro: Campus, 1984.

SOLER, T.; CARLSON JR., A. E.; EVANS, A. G. **Determination of Vertical Deflections using The Global Positioning System and Geodetic Leveling**. Geophysical Research Letters, v. 16, n. 7, pages 695-698, July, 1989.

SOUZA, S. F. **Estudos de modelos geopotenciais, algoritmos de cálculo e programas de computador, com aplicações na representação do campo da gravidade da terra a partir de coeficientes do potencial gravitacional**. São Paulo, 1999. 12 f. Trabalho Prático -TP2 (Disciplina de Geodésia Física) - Curso de Pós Graduação em Geofísica, Instituto Astronômico e Geofísico, Universidade de São Paulo.

TORGE, W. **Geodesia**. Traductor: Gualterio Luthe García. México: Diana, 1983. Versão em espanhol do original alemão: Geodäsie.

**APÊNDICES**

APÊNDICE 1 – PROGRAMA GEOPOT97, EXECUÇÃO PASSO A PASSO .....	109
APÊNDICE 2 – PROGRAMA TCFOUR, EXECUÇÃO PASSO A PASSO .....	114
APÊNDICE 3 – PROGRAMA IND, EXECUÇÃO PASSO A PASSO .....	116
APÊNDICE 4 – PROGRAMA FFTGEOID, EXECUÇÃO PASSO A PASSO .....	118

## APÊNDICE 1 – PROGRAMA GEOPOT97, EXECUÇÃO PASSO A PASSO

As figuras de 1 a 6, apresentam as telas retiradas na execução passo a passo do programa GEOPOT97. A partir delas é possível identificar a seqüência completa da entrada dos parâmetros utilizados na execução deste trabalho.

FIGURA 1 – TELA 1

```

C:\DISSERTAÇÃO\apresentação\Programas Apendice\Geopot\geopot97.exe
Program geopot97, version 0.4d, 4/14/2004

***** WARNING *****
Before proceeding, a word of warning is needed
regarding the mean tide system. Changing between
tide systems is often performed by modifying
the C(2,0) harmonic coefficient and re-inserting
it into the spherical harmonic expansion.
The *MEAN* tide system, however, is incompatible
with Laplace's equation, and therefore can not
be represented by the simple spherical harmonic
expansion of the potential. No current fix of
this problem exists. Take heed when using any
data given in the mean tide system. Thank you.
***** WARNING *****

Name of the coefficient set?      :PGM00
Is the coefficient file formatted? :y
Name of the coefficient file?     :PGM00.TXT

Your geopotential model is assumed to be in the system of: non-tide
Change this (y/n)? N

*****

Your coefficients will be read in with the following defining parameters:
GM          = 0.39860044150000+15
a           = 6378136.30000000
maximum degree = 360
tidal system = non-tidal
normalization = fully-normalized

*****

Establish spin rate of Earth (which must
also be the same rate as any reference
ellipsoid you use, for this program) :
Omega = 7292115d-11 rad/sec. Ok (y/n)? Y

*****

```

FIGURA 2 – TELA 2

```

also be the same rate as any reference
ellipsoid you use, for this program) :
Omega = 7292115d-11 rad/sec. Ok (y/n)? Y

*****

Perform which of the following functions?

1 = Given a spherical lat/lon and a value of GRAVITY
    POTENTIAL, find the radial distance to the surface
    of that potential.

2 = Given a geometric ellipsoid, an ellipsoidal
    latitude and longitude and a value of GRAVITY
    POTENTIAL, find the ellipsoidal height to the
    surface of that potential.

3 = Same as function #1, but done on a lat/lon grid

4 = Same as function #2, but done on a lat/lon grid

5 = Given a spherical lat/lon/distance, compute the
    GRAVITY POTENTIAL, and GRAVITATIONAL POTENTIAL at
    that location.

6 = Given a geometric ellipsoid, and an ellipsoidal
    latitude, longitude and height, find the GRAVITY,
    GRAVITY POTENTIAL and GRAVITATIONAL POTENTIAL at
    that location.

7 = Given an ellipsoidal normal gravity field, and an
    ellipsoidal latitude, longitude, and height, compute
    the gravity potential, gravitational potential, and
    gravity *AND ALSO* the gravity anomaly, height anomaly,
    gravity disturbance, deflections of the vertical, and
    3-D gradients of gravity at that location.

8 = Given an ellipsoidal normal gravity field, and an
    ellipsoidal latitude, longitude, and a defined
    geoid (either through a best fit ellipsoid or a gravity
    potential value), give the geoid undulation and
    gravity anomaly.

9 = Given an ellipsoidal normal gravity field, and
    boundaries of ellipsoidal latitude and longitude,
    compute the geoid undulations and/or gravity anomalies
    on a grid, in the masses.

```

FIGURA 3 – TELA 3

```

9 = Given an ellipsoidal normal gravity field, and
    boundaries of ellipsoidal latitude and longitude,
    compute the geoid undulations and/or gravity anomalies
    on a grid, in the masses.

10 = Given an ellipsoidal normal gravity field, and
    boundaries of ellipsoidal latitude and longitude,
    compute the height anomaly, as well as the 1st and
    2nd order upward derivatives of the height anomaly,
    all on the ellipsoid.

11 = Given a DTED (H or h), compute a grid of gravity values
    at the Surface of the Earth
9

The maximum degree in the coefficient set is: 360
What is the maximum degree you want used? 360

The tide system for any output quantities can
differ from that of the coefficients and/or the
normal field (if used). Therefore, what tide
system shall all values be computed in?
1: mean
2: zero
3: non-
(The coefficients are in the non- tide system)3

To properly use the coefficients in combination
with a reference field, you *must* define the
geoid in one of 4 ways:
1) Define a best-fitting ellipsoid to the geoid
    using a and f, and knowing the tide system.
2) Define a best-fitting ellipsoid to the geoid
    using a and J2, and knowing the tide system.
3) Define a best-fitting ellipsoid to the geoid
    using a and b, and knowing the tide system.
4) Define the gravity potential on the geoid, Wo

Which way do you wish to define the geoid? 4
Input the Wo value for the geoid: 62636853.4

You are now about to input the parameters of the ellipsoidal normal gravity

```

FIGURA 4 - TELA 4

```

3) Define a best-fitting ellipsoid to the geoid
   using a and b, and knowing the tide system.
4) Define the gravity potential on the geoid, Wo

Which way do you wish to define the geoid? 4
Input the Wo value for the geoid: 62636853.4

You are now about to input the parameters of the ellipsoidal normal gravity
field. This is NOT the so-called best-fitting ellipsoid, but is rather the
actual ellipsoid to which the undulations will refer. The method to be used is
method #3 (Notebook DRU-3, p. 58), which has NO geometric transformations.
So, let us proceed.....

How shall the normal field be described?
1 - a,J2,GM,omega
2 - a,f,GM,omega
3 - a,b,GM,omega1

Input the equatorial radius (a) = 6378137
Input the GM value = 398600.4415E9
To remind you, Omega is defined as:0.7292115E-04
Input the J2 value = 108263E-8

What tide system is this normal field in?
1: mean
2: zero
3: non-3

      4  -0.237091210779888D-005
      6   0.608346939159450D-008
      8  -0.142681300594965D-010
     10   0.121440291257347D-013
     12   0.205394600201672D-015
     14  -0.240812171797339D-017
     16   0.198970067532659D-019
     18  -0.146683124710213D-021
     20   0.102605776657071D-023
     22  -0.697813719846735D-026
     24   0.466843006957120D-028
     26  -0.309181889327349D-030
     28   0.203457168607453D-032
     30  -0.133332768565419D-034

The following are ways in which I can

```

FIGURA 5 - TELA 5

```

     24   0.466843006957120D-028
     26  -0.309181889327349D-030
     28   0.203457168607453D-032
     30  -0.133332768565419D-034

The following are ways in which I can
calculate the gravity anomaly. You need
to pick which way:
# 1:
anomaly = - dT/dr - 2*I/r + 2*delta_W / r
Advantages: Is 100% compatible with the
spherical harmonic representation of
geoid undulations if you pump this formula
through the Stokes integral.
Disadvantages: This is the spherical approximation
to gravity anomalies, and is less compatible with
real data than other formulas for computing the
gravity anomaly.
# 2:
anomaly = -dT/dh + I*(dgamma/dh)/gamma
          - delta_W*(dgamma/dh)/gamma
Advantages: Is a more accurate anomaly than the
spherical approximation
Disadvantages: Is not compatible with the
spherical harmonic representation of geoid
undulations if you pump this formula through
Stokes integral.

Which gravity anomaly computation method? 1
Input south geodetic latitude boundary (degrees): -29
Input north geodetic latitude boundary (degrees): -20
Input latitude grid spacing (minutes): 5
Input west geodetic longitude boundary (degrees): -57
Input east geodetic longitude boundary (degrees): -46
Input longitude grid spacing (minutes): 5
Write undulations to a file? :y
Geoid Undulation file name? :Npgm00.txt
Write anomalies to a file? :y
Gravity Anomaly file name? :ANpgm00.txt
irow,glat = 1 -29.0000000000000
irow,glat = 2 -28.9166666666667
irow,glat = 3 -28.8333333333333
irow,glat = 4 -28.7500000000000
irow,glat = 5 -28.6666666666667
irow,glat = 6 -28.5833333333333

```

FIGURA 6 - TELA 6

```
irrow,glat = 68 -23.4166666666667
irrow,glat = 69 -23.3333333333333
irrow,glat = 70 -23.2500000000000
irrow,glat = 71 -23.1666666666667
irrow,glat = 72 -23.0833333333333
irrow,glat = 73 -23.0000000000000
irrow,glat = 74 -22.9166666666667
irrow,glat = 75 -22.8333333333333
irrow,glat = 76 -22.7500000000000
irrow,glat = 77 -22.6666666666667
irrow,glat = 78 -22.5833333333333
irrow,glat = 79 -22.5000000000000
irrow,glat = 80 -22.4166666666667
irrow,glat = 81 -22.3333333333333
irrow,glat = 82 -22.2500000000000
irrow,glat = 83 -22.1666666666667
irrow,glat = 84 -22.0833333333333
irrow,glat = 85 -22.0000000000000
irrow,glat = 86 -21.9166666666667
irrow,glat = 87 -21.8333333333333
irrow,glat = 88 -21.7500000000000
irrow,glat = 89 -21.6666666666667
irrow,glat = 90 -21.5833333333333
irrow,glat = 91 -21.5000000000000
irrow,glat = 92 -21.4166666666667
irrow,glat = 93 -21.3333333333333
irrow,glat = 94 -21.2500000000000
irrow,glat = 95 -21.1666666666667
irrow,glat = 96 -21.0833333333333
irrow,glat = 97 -21.0000000000000
irrow,glat = 98 -20.9166666666667
irrow,glat = 99 -20.8333333333333
irrow,glat = 100 -20.7500000000000
irrow,glat = 101 -20.6666666666667
irrow,glat = 102 -20.5833333333333
irrow,glat = 103 -20.5000000000000
irrow,glat = 104 -20.4166666666667
irrow,glat = 105 -20.3333333333333
irrow,glat = 106 -20.2500000000000
irrow,glat = 107 -20.1666666666667
irrow,glat = 108 -20.0833333333333
irrow,glat = 109 -20.0000000000000

Program completed
Press Enter to Continue.
```



## APÊNDICE 2 – PROGRAMA TCFOUR, EXECUÇÃO PASSO A PASSO

Na figura 1 demonstra-se a execução do programa TCFOUR, os parâmetros que foram empregados no trabalho estão identificados.

FIGURA 1 – TELA ÚNICA

```

C:\DISSERTAÇÃO\apresentação\Programas Apêndice\TCFOUR\TCFOUR.exe
Formato de entrada para a CT (mode=3):
- sem mdt grosseiro: dummy -

mdt PR 1min: lin=841 col=961
mdt PR 5min: lin=169 col=193

arquivo1.txt
dummy
out.txt
3 f 0 r(km)
0 0 lin col

mdt5mto.txt
dummy
CT.txt
3 f 0 50
0 0 169 193

--- tcfour ---
dtmfile: mdt5mto.txt
mode = 3, distance(s) = 0.00 50.00
sw corner: 0.0000 0.0000, points: 169 193
0--- grid -31.0000 -17.0000 -59.0000 -43.0000 0.083333 0.083333
selected: sw corner -31.0000 -59.0000, points 169 193 32617
corner values: 123. 875. 71. -3504.
statistics: min max mean std.dev. -4172. 2389. 70.29 1044.57
gridspacings north, east: 9.267 8.466 km

```

Abaixo são apresentados os dados como entraram em seqüência:

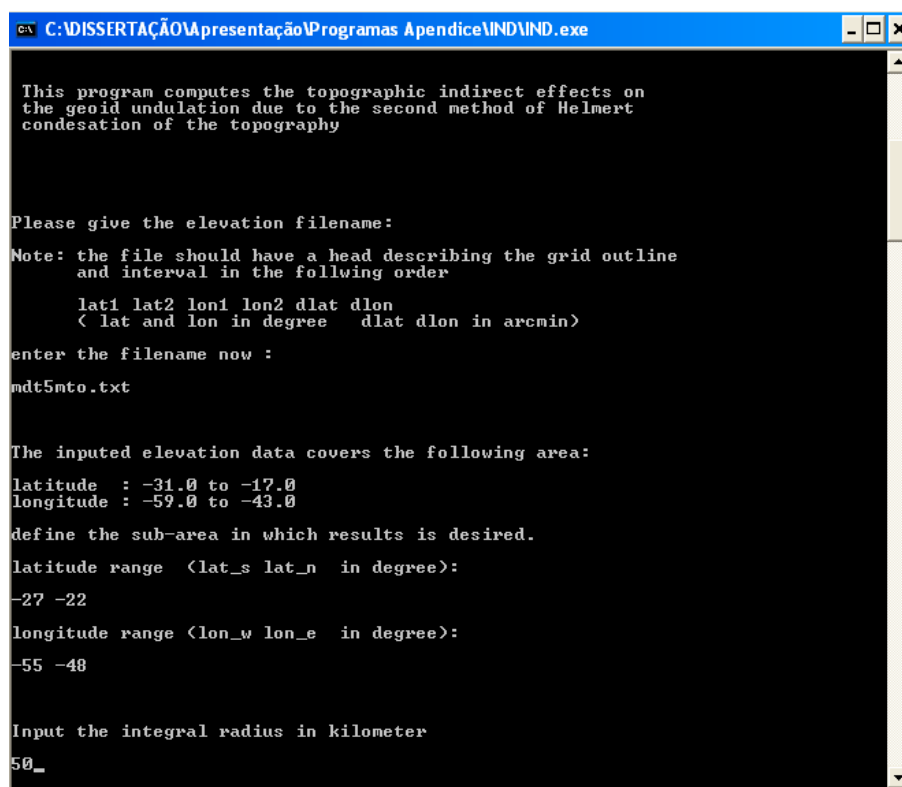
1. mdt5mto.txt → nome do mdt;
2. dummy → quando não existe outro mdt para correlação;
3. CT.txt → nome do arquivo de saída;
4. 3 f 0 50 → 3: correção do terreno, f, zero, 50: raio de integração;
5. 0 0 169 193 → 0, 0 calcula sobre todo o mdt, 169: linhas, 193: colunas.

Após a entrada do último dado “193” , aplica-se o comando de execução “enter”, os resultados serão gravados no arquivo “CT.txt”.

APÊNDICE 3 – PROGRAMA IND, EXECUÇÃO PASSO A PASSO

Na figura 1 apresenta-se a tela única do programa IND em execução com os dados utilizados neste trabalho. A seqüência de entrada dos dados pode ser identificada na própria tela. A execução é feita após a entrada do raio da integral.

FIGURA 1 – TELA ÚNICA



```
C:\DISSERTAÇÃO\Apresentação\Programas Apendice\IND\IND.exe
This program computes the topographic indirect effects on
the geoid undulation due to the second method of Helmert
condensation of the topography

Please give the elevation filename:
Note: the file should have a head describing the grid outline
and interval in the following order
    lati lat2 lon1 lon2 dlat dlon
    < lat and lon in degree  dlat dlon in arcmin>
enter the filename now :
mdt5nto.txt

The inputted elevation data covers the following area:
latitude  : -31.0 to -17.0
longitude : -59.0 to -43.0

define the sub-area in which results is desired.
latitude range <lat_s lat_n in degree>:
-27 -22
longitude range <lon_w lon_e in degree>:
-55 -48

Input the integral radius in kilometer
50_
```

## APÊNDICE 4 – PROGRAMA FFTGEOID, EXECUÇÃO PASSO A PASSO

O programa FFTGEOID é interativo com o usuário assim como o GEOPOT97. Todas as funções são identificadas pela requisição feita pelo programa. As figuras de 1 a 15 demonstram todas as requisições e entradas de dados.

FIGURA 1 – TELA 1

```

C:\DISSERTAÇÃO\Apresentação\Programas Apendice\FFTGEOID\fftgeoid.exe
© Welcome to use FFTGEOID ©
*****
FFTGEOID
can compute gravimetric geoid undulations
from gridded gravity anomalies,
and estimate geoid undulation errors
from gravity anomaly variances.

Fast Fourier Transform is used for the
evaluation of Stokes integral with either
planar kernel or spherical kernel function.

The values on random points within the computation area
can also be estimated by the included subroutines.

On-line HELP provides you the necessary information.

Author:      Yecai Li
Supervisor:  Michael G. Sideris
             Department of Geomatics Engineering
             The University of Calgary, AB, Canada

             Autumn 1992/Spring 1993

Press Enter to continue .....

```

FIGURA 2 – TELA 2

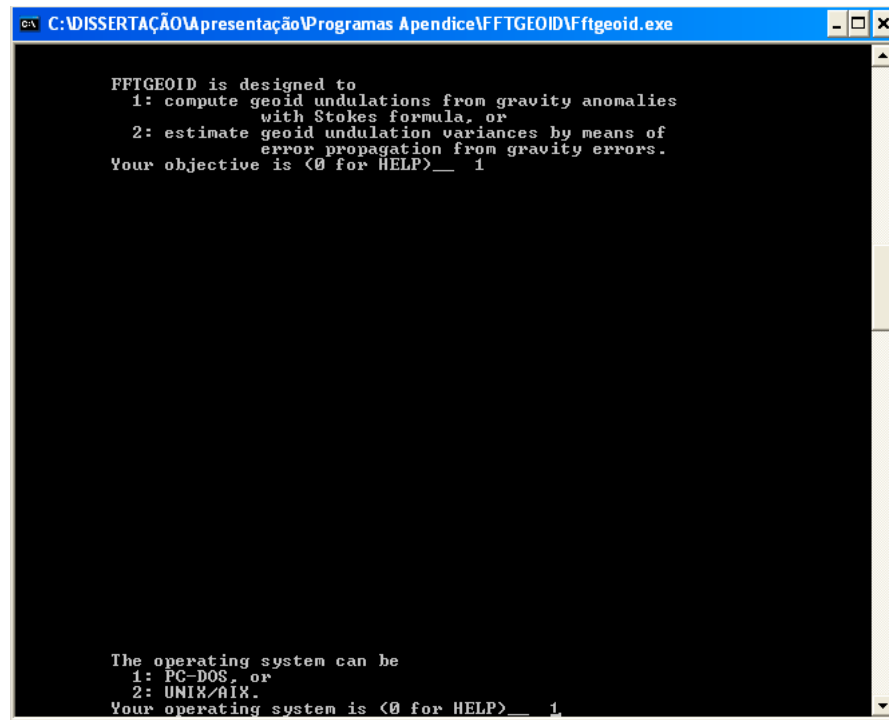
```

C:\DISSERTAÇÃO\Apresentação\Programas Apendice\FFTGEOID\fftgeoid.exe
The University of Calgary, AB, Canada
Autumn 1992/Spring 1993
Press Enter to continue .....

FFTGEOID is designed to
1: compute geoid undulations from gravity anomalies
with Stokes formula, or
2: estimate geoid undulation variances by means of
error propagation from gravity errors.
Your objective is <0 for HELP>__ 1

```

FIGURA 3 – TELA 3

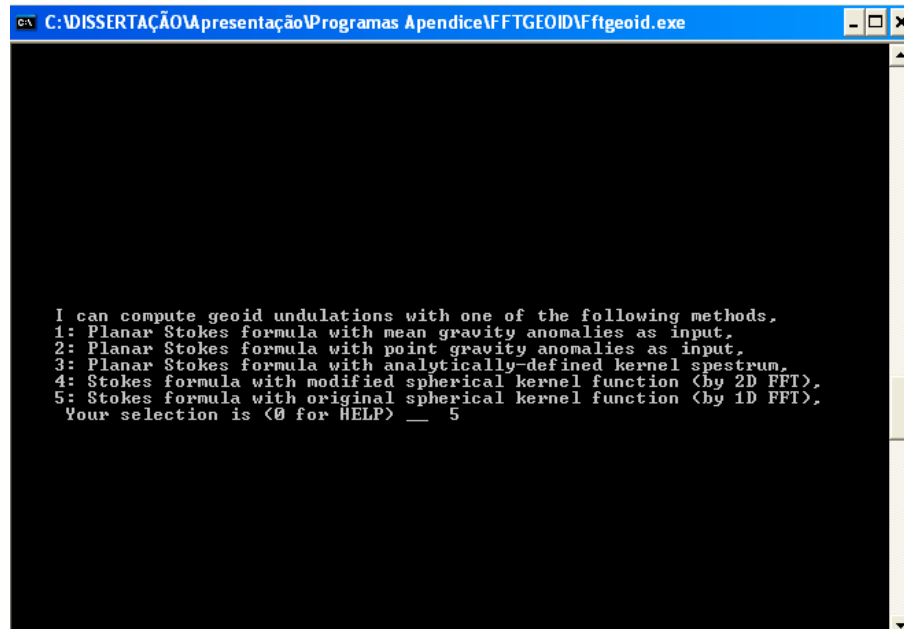


```
C:\DISSERTAÇÃO\Apresentação\Programas Apendice\FFTGEOID\Fftgeoid.exe

FFTGEOID is designed to
  1: compute geoid undulations from gravity anomalies
      with Stokes formula, or
  2: estimate geoid undulation variances by means of
      error propagation from gravity errors.
Your objective is <0 for HELP>__ 1

The operating system can be
  1: PC-DOS, or
  2: UNIX/AIX.
Your operating system is <0 for HELP>__ 1
```

FIGURA 4 – TELA 4



```
C:\DISSERTAÇÃO\Apresentação\Programas Apendice\FFTGEOID\Fftgeoid.exe

I can compute geoid undulations with one of the following methods.
  1: Planar Stokes formula with mean gravity anomalies as input,
  2: Planar Stokes formula with point gravity anomalies as input,
  3: Planar Stokes formula with analytically-defined kernel spectrum,
  4: Stokes formula with modified spherical kernel function (by 2D FFT),
  5: Stokes formula with original spherical kernel function (by 1D FFT),
Your selection is <0 for HELP> __ 5
```

FIGURA 5 – TELA 5

```

C:\DISSERTAÇÃO\apresentação\Programas Apendice\FFTGEOID\Fftgeoid.exe
2: Planar Stokes formula with point gravity anomalies as input,
3: Planar Stokes formula with analytically-defined kernel spectrum,
4: Stokes formula with modified spherical kernel function (by 2D FFT),
5: Stokes formula with original spherical kernel function (by 1D FFT),
Your selection is <0 for HELP> __ 5

The input filename of gravity anomalies is __ AnRes00.txt

```

FIGURA 6 – TELA 6

```

C:\DISSERTAÇÃO\apresentação\Programas Apendice\FFTGEOID\Fftgeoid.exe

The input filename of gravity anomalies is __ AnRes00.txt
Specify the output filename: __ Nres.txt

The first row in the input file may be
1: a header contains
    NUMrow,NUMcolumn,Lati_deg,Lon1_deg,dlat_min,dlon_min
2: a header but different from 1.
3: gravity anomalies (without header).
In AnRes00.txt , the first row is <0 for HELP> __ 3

```



FIGURA 7 – TELA 7

```

C:\DISSERTAÇÃO\apresentação\Programas Apendice\FFTGEOD\Ftgeoid.exe
1: a header contains
   NUMrow,NUMcolumn,Lat1_deg,Lon1_deg,dlat_min,dlon_min
2: a header but different from 1.
3: gravity anomalies (without header).
In AnRes00.txt , the first row is <0 for HELP> __ 3

In data file, gravity anomalies may be written
1: rows from North to South & columns from West to East,
2: rows from South to North & columns from West to East,
AnRes00.txt was written in the case of <0 for HELP> __ 1

```

FIGURA 8 – TELA 8

```

C:\DISSERTAÇÃO\apresentação\Programas Apendice\FFTGEOD\Ftgeoid.exe

In data file, gravity anomalies may be written
1: rows from North to South & columns from West to East,
2: rows from South to North & columns from West to East,
AnRes00.txt was written in the case of <0 for HELP> __ 1

In AnRes00.txt
the number of rows is __ 109
the number of columns is __ 133

```

FIGURA 9 – TELA 9

```
the number of columns is __ 133
the latitude <degree> of the first point is __ -20
the longitude <degree> of the first point is __ -57
grid spacing <minute> in N-S direction is __ 5
grid spacing <minute> in W-E direction is __ 5

Your file of gravity anomalies  AnRes00.txt  has
109 rows and 133 columns.
latitude of the first point is -20.000 degree,
longitude of the first point is -57.000 degree,
grid spacing in N-S direction is 5.000 minutes,
in W-E direction is 5.000 minutes.

Are the above parameters correct ? <Yes/No> __ Y
```

FIGURA 10 – TELA 10

```
C:\DISSERTAÇÃO\Apresentação\Programas\Apendice\FFTGEOID\fftgeoid.exe
Your file of gravity anomalies  AnRes00.txt  has
109 rows and 133 columns.
latitude of the first point is -20.000 degree,
longitude of the first point is -57.000 degree,
grid spacing in N-S direction is 5.000 minutes,
in W-E direction is 5.000 minutes.

Are the above parameters correct ? <Yes/No> __ y

1: without limit in the integration radius,
2: specify the integration radius,
Your selection is <0 for HELP> __ 1
```

FIGURA 11 – TELA 11

```

C:\DISSERTAÇÃO\Apresentação\Programas Apendice\FFTGEOID\fftgeoid.exe
1: without limit in the integration radius,
2: specify the integration radius,
Your selection is <0 for HELP> _ 1

I
:
:                               FFTGEOID                               :
: DDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDD :

```

FIGURA 12 – TELA 12

```

C:\DISSERTAÇÃO\Apresentação\Programas Apendice\FFTGEOID\fftgeoid.exe

I
:
:                               FFTGEOID                               :
: DDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDD :
: computes geoid undulations from gravity anomalies                   :
: via Stokes integral                                                 :
: by means of the fast Fourier transform                             :
:
: Programmer: Yecai Li                                               :
:              Department of Geomatics Engineering                 :
:              The University of Calgary, Calgary                   :
:              Alberta, Canada, T2N 1N4                             :
:
: COMPUTATION IS IN PROGRESS                                         :
: PLEASE WAIT!                                                       :
: HMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMM<
:
: Compute InverseF(Undulation).

```





ANEXO - PGM2000A File description (PAVLIS, 2000)

**PGM2000A File description:**

The file contains fully-normalized, unitless spherical harmonic coefficients and their standard deviations, for a gravitational model complete from degree 2 order 0, to degree and order 360. These coefficients (and their standard deviations) are consistent with scaling values of GM and "a" appearing in the following equation:

$$V(r, \theta, \lambda) = GM/r * (1 + \sum(\text{degree}) (a/r)^{2n} \sum(\text{order}) C_{nm} * Y_{nm}(\theta, \lambda))$$

equal to:

$$GM = 3986004.415E+8 \text{ m}^3/\text{s}^2$$

$$a = 6378136.3 \text{ m}$$

The C(2,0) coefficient of this model is in the "tide-free" system, as far as the permanent tide is concerned. The file contains 65338 records, each record containing:

$$(n, m, C_{nm}, S_{nm}, \sigma C_{nm}, \sigma S_{nm}) \rightarrow \text{FORMAT}(2I4, 2D21.13, 2D15.7)$$

(The file can also be read with free FORMAT).

Note that the values concerning the transformation of C(2,0) from the "tide-free" to the "zero-tide" system, the rates of C(2,0), C(2,1), S(2,1), and the reference C(2,1) and S(2,1) at epoch Jan. 1 1986 are as specified below:

$$C_{20}(\text{zero tide}) = C_{20}(\text{tide free}) - 3.11080e-8 * 0.3 / \sqrt{5}$$

This transformation is documented in NASA's Technical Memorandum 100775 'Consideration of Permanent Tidal Deformation in the Orbit Determination and Data Analysis for the Topex/Poseidon Mission' by Rapp et al., (1991).

Coefficient Rates:

$$C20(\text{dot}) = 1.16275534\text{e-}11 \text{ (per year)}$$

$$C21(\text{dot}) = -0.32\text{e-}11 \text{ (per year)}$$

$$S21(\text{dot}) = 1.62\text{e-}11 \text{ (per year)}$$

The above rates are held fixed in the solution. No other rates are modeled.

The values of C21 and S21 at epoch 1986 Jan. 1 are held fixed at:

$$C21 = -.1869876359548955\text{E-}09$$

$$S21 = .1195280120306540\text{E-}08$$

All values and rates above refer to unitless fully-normalized coefficients.

=====

This file was last updated on October 20, 2000.

=====

For questions send email to: [npavlis@terra.stx.com](mailto:npavlis@terra.stx.com)

=====



# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)