



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
Universidade Federal de Ouro Preto
Escola de Minas – Departamento de Engenharia Civil

CÁLCULO DOS ESFORÇOS INTERNOS E DEFLEXÕES DE VIGAS SOBRE BASE ELÁSTICA NÃO LINEAR USANDO O MÉTODO DA FLEXIBILIDADE

AUTOR: LUCAS FURTADO DA SILVA

ORIENTADOR: Prof. Dr. Jaime Florencio Martins

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil. Área de concentração: Estruturas Metálicas.

Ouro Preto, março de 2004.

Silva, Lucas Furtado da.
S586c Cálculo dos esforços internos e deflexões de vigas sobre a base elástica não linear usando o método da flexibilidade./ Lucas Furtado da Silva. - Ouro Preto : UFOP, 2004.

xv, 96p. : il. color. graf., tabs.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de pós-graduação em Engenharia Civil.

1.Construção Metálica - Teses. 2. Mecânica computacional - Teses. 3. Engenharia de métodos - Teses 4. Vigas - Método da flexibilidade. I. Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Engenharia Civil. Programa de pós-graduação em Engenharia Civil. II. Título.

CDU: 624:519.688

Catálogo: sisbin@sisbin.ufop.br

Ao grande Deus.

Meus agradecimentos

A meus pais Silvio e Thelma pelo amor. A eles minha eterna gratidão.

A meus irmãos “Silvinho” e Adriane e a minha cunhada Luzcássia por estarem sempre do meu lado e por sempre acreditarem em mim.

A meus sobrinhos Victor e Gabriella pelo carinho.

Ao Douglas, a Rosana e a Ana Maria pela amizade.

A meus amigos Antunes, Janice, Keisy e Célia.

A minha avó Mônica e as minhas Tias Helena e “Zica” pelo incentivo.

A meus padrinhos Wilson e Tereza e ao Marlon.

Ao Aristeu e a Aparecida por torcerem por mim.

A todos os colegas do Mestrado, em especial a Fabiana, Fabíola, “Cidinha”, Edésio, Gisele, Tatianna, Wellington, William e aos amigos da Ox.

A Róvia e ao professor Walter Dornelas pela boa vontade.

A todos os professores do PROPEC e funcionários da Escola de Minas, em especial a Iraci Neide, e a Marília.

Ao Prof. Jaime Florencio Martins pela orientação.

À Fundação Gorceix pela ajuda financeira.

O entendimento do comportamento das diversas peças que compõem um sistema estrutural é imprescindível para o estudo e o dimensionamento das estruturas em geral. Embora muito já se conheça a respeito deste comportamento, há ainda, vários problemas a serem estudados. Um de grande interesse da engenharia devido à sua larga aplicabilidade, principalmente nas engenharias de fundações e geotécnica, é o problema de contato entre vigas e as bases elásticas nas quais elas se apoiam. A análise desse tipo de problema vem sendo feita pela “mecânica dos sólidos” há várias décadas. No entanto, ainda se constitui de um dos mais complexos tópicos desta área.

Os textos clássicos consideram que a base pode resistir tanto aos esforços de tração quanto aos esforços de compressão, caracterizando um problema de contato conhecido na literatura como bilateral. Na presente abordagem, será feita essa consideração, como também se assumirá que ela resiste à compressão e tem resistência nula à tração, o que caracteriza um outro tipo de problema de contato conhecido como unilateral.

Diante disso, tem-se como principal objetivo, o desenvolvimento de uma ferramenta capaz de auxiliar no estudo e no dimensionamento de vigas suportadas por fundações elásticas solicitadas por diversas formas de carregamento e sujeitas a diversas condições de extremidade através da implementação de um programa computacional para cálculo de seus esforços internos e deflexões.

As diretrizes desse estudo serão fundamentadas por meio de um processo evolutivo, que se dará no decorrer de cada capítulo, através de uma abordagem teórica dos conteúdos, seguida de exemplos de validação variados, com os quais se pretende um tratamento amplo e competente das principais questões dos problemas de contato.

The understanding of the behaviour of the several pieces that complete a structural system is essential to the research and the measurement of the structures in general. Although it's known very much about this behaviour, there's many problems still in order to be resolved. One of those problems which the engineering has very interested in due to its comprehensive use mainly into the area of foundations and geotechnique is that one of contact between the beams and elastic bases in which they have been hold on. The analyse of this kind of problem has been made through the mechanics of solids along several decades; however, it is still considered one of the most complex topics of this area.

The classical texts have considered that the base might endure to the traction stresses, as those of the compression, characterising a problem of contact known into the literature like bilateral one. At the present research this consideration will be made as well as will be admitted that it endure to the compression and has had null traction what shows another kind of issue of contact called unilateral one.

Due to it, this study has had like main purpose the development of one tool able of helping in the study and in the measurement of beams hold by elastic foundations solicited by several kinds of loadings and submitted to several conditions of extremities, through the implementation of one computational program to the calculation of their internal stresses and deflections.

The directions of this research will have been based through of evolutive process, that will be completed during each chapter, by one theoretical study of its contents, followed by varied examples of validation, with which it has be intended one comprehensive and efficient treatment of the main issues from the contact problems.

Resumo	ii
Abstract	iii
Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	ix
Lista de Símbolos	xii
<i>Capítulo 1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS</i>	1
1.1 – INTRODUÇÃO	1
1.2 – OBJETIVO E DESCRIÇÃO DO TRABALHO	2
<i>Capítulo 2 - TEORIA DE VIGAS SOBRE BASE ELÁSTICA</i>	5
2.1 – INTRODUÇÃO	5
2.2 – MODELOS DE BASES ELÁSTICAS	6
2.2.1 – MODELO DE WINKLER	8
2.2.2 – MODELO DE MOLAS DISCRETAS	8
2.2.3 – MODELO DE PASTERNAK	9
2.3 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	10
2.4 – MODELAGEM DO PROBLEMA	13
2.5 – EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA LINHA ELÁSTICA	14

<i>Capítulo 3</i> - EQUAÇÃO DOS TRÊS MOMENTOS E EQUAÇÃO DOS CINCO MOMENTOS	18
3.1 – INTRODUÇÃO	18
3.2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	19
3.3 – EQUAÇÃO DOS TRÊS MOMENTOS	20
3.4 – EQUAÇÃO DOS CINCO MOMENTOS	25
 <i>Capítulo 4</i> - PROGRAMA COMPUTACIONAL	 29
4.1 – INTRODUÇÃO	29
4.2 – CONSIDERAÇÕES GERAIS	30
4.3 – ESQUEMA ESTRUTURAL DO PROGRAMA	30
4.3.1 – SUB-ROTINA PARA O CÁLCULO DE C_1 E C_2	34
4.3.2 – SUB-ROTINAS PARA MONTAGEM DA ETM E ECM	34
4.3.3 – SUB-ROTINA PARA CÁLCULO DAS REAÇÕES DE APOIO	35
4.3.4 – SUB-ROTINA PARA CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS	35
 <i>Capítulo 5</i> - EXEMPLOS NUMÉRICOS	 36
5.1 – INTRODUÇÃO	36
5.2 – CONSIDERAÇÕES GERAIS	37
5.3 – PROBLEMA DE CONTATO BILATERAL	37
5.3.1 – EXEMPLO 1	39
5.3.2 – EXEMPLO 2	43

5.3.3 – EXEMPLO 3	47
5.3.4 – EXEMPLO 4	51
5.4 – PROBLEMA DE CONTATO UNILATERAL	55
5.4.1 – EXEMPLO 5	56
5.4.2 – EXEMPLO 6	61
5.4.3 – EXEMPLO 7	66
5.4.4 – EXEMPLO 8	71
5.4.5 – EXEMPLO 9	76
5.4.6 – EXEMPLO 10	81

Capítulo 6 – VIGAS SOBRE BASE ELÁSTICA SUJEITAS

A VARIAÇÃO DE TEMPERATURA	85
6.1 – INTRODUÇÃO	85
6.2 – ASPECTOS GERAIS	86
6.3 – EXEMPLO 1	86
6.4 – EXEMPLO 2	89

Capítulo 7 – CONCLUSÕES E

SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS	91
7.1 – CONCLUSÕES	91
7.2 – SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS	92

Referências Bibliográficas	93
---	-----------

Capítulo 2

Figura 2.1 – Base Elástica	6
Figura 2.2 – Curva de Deformação da Base	7
Figura 2.3 – Modelo de Winkler (Silva, 1998)	8
Figura 2.4 – Modelo de Molas Discretas (Silva, 1998)	9
Figura 2.5 – Modelo de Pasternak (Silva, 1998)	10
Figura 2.6 – Modelo Adotado	13
Figura 2.7 – Problema de Contato Bilateral	13
Figura 2.8 – Problema de Contato Unilateral	14
Figura 2.9 - Viga Genérica	15
Figura 2.10 – Viga Deformada	15
Figura 2.11 – Elemento Infinitesimal de Viga	16

Capítulo 3

Figura 3.1 – Viga Contínua Sujeita a um Carregamento Genérico (Martins, 1991)	21
Figura 3.2 – Viga Genérica Sobre Apoios Deformáveis (Martins, 1991)	26

Capítulo 4

Figura 4.1 – Análise Computacional	30
Figura 4.2 – Estrutura do Programa	31

Capítulo 5

Figura 5.1 – Exemplo 1 – Esquema Estrutural	39
Figura 5.2 – Exemplo 1 - Configuração Deformada	40
Figura 5.3 – Exemplo 1 – Momentos Fletores	41
Figura 5.4 – Exemplo 1 – Deflexões	42

Figura 5.5 – Exemplo 2 – Esquema Estrutural	43
Figura 5.6 – Exemplo 2 - Configuração Deformada	44
Figura 5.7 – Exemplo 2 – Momentos Fletores	45
Figura 5.8 – Exemplo 2 – Deflexões	46
Figura 5.9 – Exemplo 3 – Esquema Estrutural	47
Figura 5.10 – Exemplo 3 - Configuração Deformada	48
Figura 5.11 – Exemplo 3 – Momentos Fletores	49
Figura 5.12 – Exemplo 3 – Deflexões	50
Figura 5.13 – Exemplo 4 – Esquema Estrutural	51
Figura 5.14 – Exemplo 4 - Configuração Deformada	52
Figura 5.15 – Exemplo 4 – Momentos Fletores	53
Figura 5.16 – Exemplo 4 – Deflexões	54
Figura 5.17 – Exemplo 5 – Esquema Estrutural	56
Figura 5.18 – Exemplo 5 - Configuração Deformada	57
Figura 5.19 – Exemplo 5 – Momentos Fletores	58
Figura 5.20 – Exemplo 5 – Comparação dos Problemas de Contato – Momento Fletor	59
Figura 5.21 – Exemplo 5 – Deflexões	59
Figura 5.22 – Exemplo 5 – Comparação dos Problemas de Contato para as Deflexões	60
Figura 5.23 – Exemplo 6 – Esquema Estrutural	61
Figura 5.24 – Exemplo 6 - Configuração Deformada	62
Figura 5.25 – Exemplo 6 – Momentos Fletores	63
Figura 5.26 – Exemplo 6 – Comparação dos Problemas de Contato – Momento Fletor	64
Figura 5.27 – Exemplo 6 – Deflexões	64
Figura 5.28 – Exemplo 6 – Comparação dos Problemas de Contato para as Deflexões	65
Figura 5.29 – Exemplo 6 – Reação R_b da Base Elástica	65
Figura 5.30 – Exemplo 7 – Esquema Estrutural	66
Figura 5.31 – Exemplo 7 - Configuração Deformada	67
Figura 5.32 – Exemplo 7 – Momentos Fletores	68
Figura 5.33 – Exemplo 7 – Comparação dos Problemas de Contato – Momento Fletor	69

Figura 5.34 – Exemplo 7 – Deflexões	69
Figura 5.35 – Exemplo 7 – Comparação dos Problemas de Contato para as Deflexões	70
Figura 5.36 – Exemplo 8 – Esquema Estrutural	71
Figura 5.37 – Exemplo 8 – Configuração Deformada	72
Figura 5.38 – Exemplo 8 – Momentos Fletores	73
Figura 5.39 – Exemplo 8 – Comparação dos Problemas de Contato – Momento Fletor	74
Figura 5.40 – Exemplo 8 – Deflexões	74
Figura 5.41 – Exemplo 8 – Comparação dos Problemas de Contato para as Deflexões	75
Figura 5.42 – Exemplo 8 – Reação R_b da Base Elástica.....	75
Figura 5.43 – Exemplo 9 – Esquema Estrutural	76
Figura 5.44 – Exemplo 9 - Configuração Deformada	77
Figura 5.45 – Exemplo 9 – Momentos Fletores	78
Figura 5.46 – Exemplo 9 – Comparação dos Problemas de Contato – Momento Fletor	79
Figura 5.47 – Exemplo 9 – Deflexões	79
Figura 5.48 – Exemplo 9 – Comparação dos Problemas de Contato para as Deflexões	80
Figura 5.49 – Exemplo 9 – Reação R_b da Base Elástica.....	80
Figura 5.50 – Exemplo 10 – Esquema Estrutural	81
Figura 5.51 – Exemplo 10 - Configuração Deformada	81
Figura 5.52 – Exemplo 10 – Momentos Fletores	82
Figura 5.53 – Exemplo 10 – Comparação dos Problemas de Contato – Momento Fletor ..	83
Figura 5.54 – Exemplo 10 – Deflexões	83
Figura 5.55 – Exemplo 10 – Comparação dos Problemas de Contato para as Deflexões ..	84

Capítulo 6

Figura 6.1 – Exemplo 1 - Esquema Estrutural	87
Figura 6.2 – Exemplo 1 - Deformada – PCB	87
Figura 6.3 – Exemplo 1 - Deformada – PCU	87
Figura 6.4 – Exemplo 1 – Momentos Fletores - PCB X PCU	88
Figura 6.5 – Exemplo 1 – Deflexões - PCB X PCU	88

Figura 6.6 – Exemplo 2 - Esquema Estrutural	89
Figura 6.7 – Exemplo 2 - Deformada – PCB	89
Figura 6.8 – Exemplo 2 - Deformada – PCU	89
Figura 6.9 – Exemplo 2 – Momentos Fletores - PCB X PCU	90
Figura 6.10 – Exemplo 2 – Deflexões - PCB X PCU	90

Capítulo 3

Tabela 3.1 – Valores de C_1 e C_2 (Martins, 1991)	23
---	-----------

Capítulo 5

Tabela 5.1 – Exemplo 1 – Análise Comparativa dos Momentos Fletores e Deflexões	41
Tabela 5.2 – Exemplo 2 – Análise Comparativa dos Momentos Fletores e Deflexões	45
Tabela 5.3 – Exemplo 3 – Análise Comparativa dos Momentos Fletores e Deflexões	49
Tabela 5.4 – Exemplo 4 – Análise Comparativa dos Momentos Fletores e Deflexões	53
Tabela 5.5 – Exemplo 5 – Análise Comparativa dos Deslocamentos	58
Tabela 5.6 – Exemplo 6 – Análise Comparativa dos Deslocamentos	63
Tabela 5.7 – Exemplo 7 – Análise Comparativa dos Deslocamentos	68
Tabela 5.8 – Exemplo 8 – Análise Comparativa dos Deslocamentos	73
Tabela 5.9 – Exemplo 9 – Análise Comparativa dos Deslocamentos	78
Tabela 5.10 – Exemplo 10 – Análise Comparativa dos Deslocamentos	82

Capítulo 2

$\frac{dV}{dx}$	Derivada da força cortante em relação a x
$\frac{d^4w}{dx^4}$	Derivada quarta da deflexão em relação a x
$\frac{d^2M}{dx^2}$	Derivada segunda do momento fletor em relação a x
b	Largura da viga
dM	Varição infinitesimal do momento fletor
dV	Varição infinitesimal da força cortante
dx	Comprimento infinitesimal da viga
EI	Rigidez à flexão da viga
K	Parâmetro de rigidez da base elástica ou fundação
K_0	Módulo da fundação (em N/m ³)
L	Comprimento longitudinal da viga
M	Momento Fletor
P	Carga concentrada
p	Forças reativas da base elástica ou fundação
q	Carga uniformemente distribuída
r_b	Reação exercida pela base elástica
V	Força cortante
w	Deflexão lateral da viga
w_b	Deslocamento da base elástica
x, y	Coordenadas cartesianas

Capítulo 3

α	Coefficiente de dilatação térmica da viga
ϕ^{\leftarrow}	Rotação à esquerda do apoio i
ϕ^{\rightarrow}	Rotação à direita do apoio i
Δt_1	Varição da temperatura na face superior da viga
Δt_2	Varição da temperatura na face inferior da viga
a, b	Comprimento longitudinal parcial da viga ou comprimento da carga distribuída
C^*_1	Valor de C_1 calculado em função dos recalque nos apoios
C^*_2	Valor de C_2 calculado em função dos recalque nos apoios
C_1	Contribuição do carregamento para a rotação à esquerda do apoio i
C_2	Contribuição do carregamento para a rotação à direita do apoio i
EI	Rigidez à flexão da viga
h	Altura da viga
i	Apoio considerado
I	Momento de inércia
K	Parâmetro de rigidez da base elástica ou fundação
L	Comprimento longitudinal da viga
M	Momento Fletor
P	Carga concentrada
q	Carga uniformemente distribuída
RA	Reações de apoio à esquerda do vão devido somente ao carregamento
RB	Reações de apoio à direita do vão devido somente ao carregamento
δ	Recalques nos apoios
VA	Reações de apoio à esquerda do vão
VB	Reações de apoio à direita do vão

Capítulo 4

C	Matriz dos coeficientes das incógnitas da ETM
---	---

C_1	Contribuição do carregamento para a rotação à esquerda do apoio i
C_1, C_2	Vetores das carga externas
C_2	Contribuição do carregamento para a rotação à direita do apoio i
D	Vetor da soma dos valores dos vetores C_1 e C_2 multiplicada por 6 e dividida por EI
DESLOC	Vetor dos valores dos deslocamentos
EI	Rigidez à flexão da viga
K	Parâmetro de rigidez da base elástica ou fundação
VA, VB	Vetores com os valores das reações de apoio

Capítulo 5

A_p	Apoio
CM	Constante de mola
EI	Rigidez à flexão da viga
Erro	Erro calculado em percentagem (%) dado pela diferença existente entre a solução analítica e a numérica
K	Parâmetro de rigidez da base elástica ou fundação
L	Comprimento longitudinal da viga
M, M_1, M_2	Momentos Fletores
P	Carga concentrada
λ	Parâmetro da fundação $\left(\lambda^4 = \frac{K}{4EI} \right)$
q	Carga uniformemente distribuída
s	Seção qualquer da viga
Sol. Num.1	Resultados dos deslocamentos de Pereira (2003)
Sol. Num.2	Resultados dos deslocamentos do presente trabalho
w	Deflexão lateral da viga
x, y	Coordenadas cartesianas ou distâncias
x^{\prime}	Distância

Capítulo 6

α	Coeficiente de dilatação térmica da viga
Δt_1	Varição da temperatura na face superior da viga
Δt_2	Varição da temperatura na face inferior da viga
EI	Rigidez à flexão da viga
K	Parâmetro de rigidez da base elástica ou fundação
L	Comprimento longitudinal da viga
s	Seção qualquer da viga
w	Deflexão lateral da viga
x, y	Coordenadas cartesianas ou distâncias
x'	Distância

1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS

1.1 – INTRODUÇÃO

Alguns elementos estruturais de prédios, pontes, trilhos e outras estruturas são, geralmente, suportados apenas nas extremidades e/ou em alguns pontos intermediários por outros membros. Há, porém, aqueles que são apoiados em todo o comprimento.

Ao se estudarem essas estruturas, o principal problema encontrado está na região de contato entre esses membros e seus apoios, devido, principalmente, à diferença de comportamento dos materiais que os compõem.

Os textos clássicos consideram que o meio em que essas peças se encontram apoiadas oferecem resistência às solicitações em todas as direções, no entanto, muitas vezes, esses meios não possuem um comportamento linear, ou seja, não reagem às citadas solicitações.

No caso em que a fundação reage tanto às solicitações de tração quanto às de compressão, o problema de contato é denominado bilateral. Já na condição em que a base elástica se caracteriza por reagir apenas aos esforços de compressão, o problema é conhecido na literatura como unilateral.

Diversos modelos foram desenvolvidos no passado para se descreverem esses problemas. Há algumas aproximações consideradas nesses modelos que são devidas às dificuldades existentes na formulação e solução do problema. Minimizar essas dificuldades significa viabilizar, em situações práticas, a aplicação de estruturas sujeitas à restrições de contato.

1.2 – OBJETIVO E DESCRIÇÃO DO TRABALHO

Esse trabalho tem como objetivo principal o desenvolvimento de uma ferramenta capaz de auxiliar no estudo e no dimensionamento de vigas suportadas por bases elásticas, através da implementação computacional de uma metodologia de solução numérica, capaz de resolver problemas de equilíbrio de vigas com restrições de contato. Na formulação proposta, essas restrições são impostas por bases elásticas do tipo Winkler. Considera-se aqui a teoria dos pequenos deslocamentos e deformações e material elástico linear.

É relevante colocar, que o presente trabalho é parte integrante da linha de pesquisa *Análise Numérica e Computacional em Engenharia*, do Mestrado em Construção Metálica (Deciv/EM/UFOP), que tem como objetivo a aplicação de métodos numéricos na determinação das respostas de sistemas de Engenharia.

Serão tratados dois tipos de problemas anteriormente citados: um caracterizado pela condição de que a base pode resistir tanto aos esforços de tração quanto aos esforços de compressão, designado *problema de contato bilateral (PCB)*; o outro, caracterizado pela condição de que a base resiste apenas aos esforços de compressão, intitulado *problema de contato unilateral (PCU)*. Vale citar, que as forças de atrito, devidas ao contato entre as vigas e seus suportes, são desconsideradas, uma vez que sua magnitude é irrisória quando se trata destes tipos de problema.

A teoria adotada para a implementação do programa computacional será a de flexão de vigas sobre base elástica desenvolvida por Winkler em 1867. A hipótese fundamental é a de que as forças reativas da base, em um ponto da viga, são proporcionais à deflexão daquele ponto, isto é, o modelo da base elástica segue a “Lei de Hooke”. Em 1946, Hetényi, usando a hipótese de Winkler, chega à equação diferencial da linha elástica de vigas sobre base elástica que desencadeou o desenvolvimento de equações analíticas para solução de vários problemas, considerando apenas o contato bilateral entre viga e fundação. Na teoria acima descrita, a fundação é um meio de suporte contínuo, caracterizado pelo módulo da fundação K_0 em N/m^3 . Tomando como base esta teoria, o método de solução

numérica, aqui proposto, além de considerar o contato bilateral, também levará em consideração o contato unilateral entre os elementos componentes da estrutura.

Também fundamentado na Teoria de Winkler, o modelo de base elástica é equivalente a uma camada de molas estreitamente espaçadas e independentes entre si, de acordo com Silva (1998). Essas molas serão tratadas como apoios elásticos independentes; conseqüentemente, o estudo final do problema, resultará da análise de vigas que são estudadas como se estivessem sobre apoios elásticos.

As técnicas de solução para o modelo numérico adotado são: o “Método da Equação dos Três Momentos” para solução de vigas contínuas sobre apoios indeformáveis e o “Método da Equação dos Cinco Momentos”, usado para a obtenção dos momentos fletores nos apoios deformáveis. Assim, a solução do problema de contato bilateral dar-se-á de forma direta bastando considerar que os apoios elásticos resistem tanto aos esforços de tração quanto aos esforços de compressão. Partindo-se desta solução, para o problema de contato unilateral, a resolução dar-se-á de forma que os apoios elásticos sujeitos a esforços de tração sejam desconsiderados. Isso é possível uma vez que a constante de mola K dos apoios elásticos que modelam a base poderá assumir valores diferentes para cada apoio, e, desta forma, a solução do problema dar-se-á de forma iterativa.

O capítulo 2 apresentará a demonstração da equação diferencial da linha elástica de vigas sobre base elástica desenvolvida por Hetényi (1946), considerando a “Teoria de Winkler”.

O capítulo 3 demonstrará a “Equação dos Três Momentos”, usada para a determinação dos momentos fletores nos apoios de vigas hiperestáticas. Também será demonstrada a “Equação dos Cinco Momentos”, ferramenta importante no estudo de vigas sobre apoios deformáveis.

O capítulo 4 trará, de forma sucinta, os procedimentos adotados na implementação computacional do modelo numérico proposto.

O capítulo 5 mostrará alguns exemplos numéricos, usados para validar a formulação proposta. Para o problema de contato bilateral serão mostrados quatro exemplos dos quais três tratam de vigas finitas e um caso particular de viga infinita. Em ambos, as vigas se

encontram apoiadas sobre base elástica. Para o problema de contato unilateral, serão apresentados seis exemplos; dentre eles, dois tratam de vigas que têm apenas as extremidades apoiadas sobre apoios rígidos e dois de vigas contínuas. Nesses dois casos, as vigas também se apoiam em todo o comprimento sobre base elástica. Os dois últimos tratam de vigas apoiadas somente sobre base elástica.

No capítulo 6, serão apresentados mais dois exemplos numéricos a serem analisados levando-se em consideração o efeito da variação de temperatura entre as faces da viga.

Finalmente, no capítulo 7, mostrar-se-ão as conclusões e algumas sugestões para futuras pesquisas que possam vir a ser desenvolvidas nessa área.

2 - TEORIA DE VIGAS SOBRE BASE ELÁSTICA

2.1 – INTRODUÇÃO

No dimensionamento de algumas estruturas há uma grande preocupação, por parte dos engenheiros estruturais e geotécnicos, relacionada aos problemas que envolvem o contato de vigas com bases deformáveis, uma categoria importante de problemas de Engenharia.

Considerar a contribuição da base no dimensionamento dessas peças e quantificar os esforços atuantes devido às condições diversas de carregamento e extremidade, são os objetivos deste trabalho. Devido à complexidade do problema, esse estudo requer uma metodologia sofisticada; no entanto, é preciso que seja suficientemente exata e simples o bastante para finalidades práticas.

Neste capítulo, apresenta-se o modelo de base elástica aqui considerado, acompanhado da teoria de flexão de vigas apoiadas sobre bases elásticas, demonstrada através da equação diferencial da linha elástica, desenvolvida por Hetényi (1946), considerando o modelo de base elástica de Winkler, de onde se desenvolveram equações que serão utilizadas para a obtenção de valores analíticos, através dos quais se comprovará a validade dos valores numéricos aqui encontrados para o problema de contato bilateral.

2.2 – MODELOS DE BASES ELÁSTICAS

Destina-se, este trabalho, à investigação de problemas de contato nos quais um dos corpos é considerado como uma base elástica deformável, conforme ilustrado na Figura 2.1. Como o comportamento real do sistema estrutura-fundação é de difícil descrição, diferentes modelos matemáticos foram desenvolvidos para descrevê-lo simplificadaamente. Antes da existência de modelos matemáticos, a dificuldade de se determinarem as pressões de contato era superada adotando-se algumas simplificações arbitrárias como, por exemplo, assumindo-se a pressão de contato uniforme (Silva, 1998).

Em muitas situações práticas, o interesse da resposta na base elástica limita-se à obtenção das forças na região de contato dessa com a estrutura, não importando o campo de deslocamentos ou estado de tensões que se desenvolvem no seu interior. Surge, então, a necessidade de se buscarem modelos matemáticos relativamente simples para descrever, com razoável precisão, o comportamento da base elástica na região de contato.

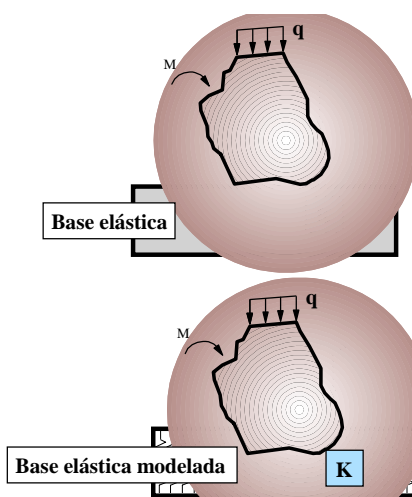


Figura 2.1 – Base Elástica.

Há modelos matemáticos que apresentam apenas um parâmetro definindo as propriedades do material que compõe a fundação elástica. Destacam-se, entre eles, o sistema de molas discretas, dispostas ao longo da região de contato e o modelo proposto

por Winkler (Hetényi, 1946; Kerr, 1964; Silva, 1998). Esses modelos não consideram as interações entre as molas e, em conseqüência disso, não representam precisamente as características de muitas fundações. Por isso, são considerados métodos bastante simples se comparados a outros métodos de modelagem que apresentam dois parâmetros na definição do comportamento da base elástica. Exemplos desses modelos são os de Pasternak, Filonenko-Borodich e Vlasov (Kerr, 1964; Harr et al., 1969; Yang, 1972; Zhaohua e Cook, 1982; Horvath, 1993; Silva, 1998), que, de alguma forma, assumem as interações entre as molas.

Considerando que há uma grande dificuldade em se determinarem os parâmetros adotados nesses modelos, como por exemplo, a rigidez do solo, questionam-se algumas das metodologias utilizadas na determinação desses parâmetros, adotados nos modelos das bases (Kerr, 1964).

Em se tratando do modelo matemático proposto, um fator relevante é a suposição de que a fundação se deforma apenas ao longo da porção que se localiza diretamente sob o carregamento, como mostra a Figura 2.2a. Esta suposição é verdadeira para uma grande variedade de solos, conforme mostram os experimentos feitos por A. Föppl's em 1922 (Hetényi, 1946). É importante destacar que a maioria das fundações se deformam de forma contínua; nestes casos, a curva de deformação deveria ser também contínua como mostra a Figura 2.2b (Silva, 1998).

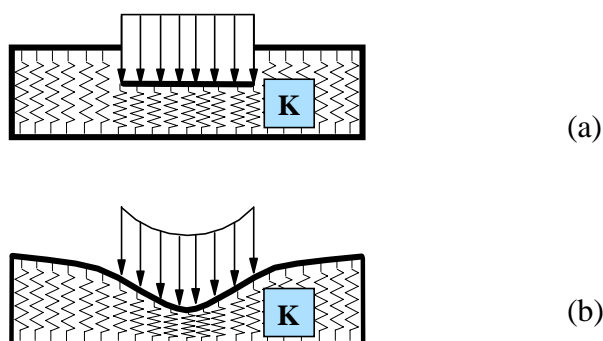


Figura 2.2 – Curva de Deformação da Base.

Enfim, as aplicações do modelo de Winkler devem ser consideradas apenas como aproximações práticas uma vez que as propriedades físicas dos materiais que compõem as fundações são, obviamente, de natureza muito mais complexas do que a simples relação matemática assumida por ele (Hetényi, 1946).

2.2.1 – MODELO DE WINKLER

Esse modelo assume que a intensidade da reação normal r_b exercida em um dado ponto da viga é diretamente proporcional à deflexão que ocorre nesse ponto, ou seja:

$$r_b = Kw_b \quad (2.1)$$

onde K é o parâmetro de rigidez elástica da fundação.

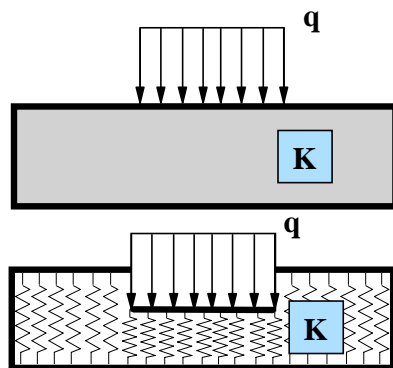


Figura 2.3 – Modelo de Winkler (Silva, 1998).

2.2.2 – MODELO DE MOLAS DISCRETAS

É um modelo de base elástica, no qual, apenas um parâmetro descreve as características dos materiais da fundação. Um sistema de apoios discretos constituído por

molares é usado para representá-la, conforme mostra a Figura 2.4. A reação da base elástica é descrita pela seguinte expressão:

$$r_b = Kw_b \Big|_{x=x_i} \quad (2.2)$$

onde r_b e w_b são, respectivamente a reação e o deslocamento da base elástica, K representa o parâmetro de rigidez da mola na posição $x = x_i$, que caracteriza o ponto da estrutura e da base elástica que estão em contato.

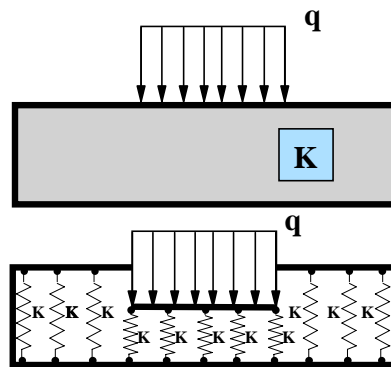


Figura 2.4 – Modelo de Molas Discretas (Silva, 1998).

2.2.3 – MODELO DE PASTERNAK

No modelo ilustrado na Figura 2.5, é assumido que as molas são interligadas por uma camada incompressível que resiste apenas às deformações cisalhantes. Tem-se:

$$r_b = Kw_b - G\nabla^2 w_b \quad (2.3)$$

com G representando o parâmetro de rigidez cisalhante da camada.

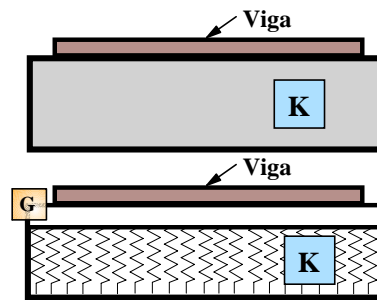


Figura 2.5 – Modelo de Pasternak (Silva, 1998).

2.3 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Esse estudo teve início em 1867, quando Winkler modelou os trilhos de uma estrada de ferro como viga elástica continuamente apoiada e sujeita à aplicação de um par de forças concentradas. A hipótese fundamental da teoria é a de que as forças reativas da base em um ponto da viga, são proporcionais à deflexão naquele ponto. Inicialmente, os campos de aplicação dessa teoria ainda eram restritos.

Após os primeiros investigadores colocarem que o solo era o único meio de suporte, descobriram que havia outros campos onde as condições de Winkler, para a análise de flexão de vigas sobre base elástica, eram mais rigorosamente satisfeitas. Dois exemplos de campos de aplicação são de particular importância: um é a aplicação em malhas de vigas, as quais são características na construção de assoalhos de embarcações, edifícios e pontes; o outro, na aplicação de cascas de revolução, que incluem objetos como recipientes, caldeiras, containers, etc (Hetényi, 1946). Mais tarde, vários estudiosos discutiram sobre o assunto.

Até então, estudos desenvolvidos nessa área possuíam em comum a admissão da hipótese de que os modos de tensão se transferiam através da interface entre viga e fundação e que as propriedades dessa interface eram as mesmas, tanto para tração quanto para compressão, indicando, assim, que a fundação podia suportar esforços de tração (Tsai e Westmann, 1967), o que alguns estudos, feitos até então, já começavam a questionar. Um

dos fatores que determinou esse questionamento foi a percepção de que, quando algumas estruturas eram submetidas a determinadas condições de carregamento, estavam sujeitas à formação de regiões sem contato sob sua base. Surge, a partir daí, a suposição de que, para muitos materiais da fundação, a admissão de esforços de tração, que se dava através da relação comum entre placas e vigas e seus suportes, não era realística. O principal problema, então, passou a ser determinar as circunstâncias sob as quais se davam a formação de regiões sem contato e determinar suas localizações e extensões. Com isso, incógnitas adicionais eram introduzidas ao problema, tornando esta análise cada vez mais complexa (Weitsman, 1970). A partir daí, uma vasta literatura considerando o contato unilateral entre vigas e bases elásticas começou a se desenvolver, mostrando que esse estudo se tornava cada vez mais diversificado. Vários pesquisadores trataram o problema sob diversas condições, como por exemplo Johnson e Kouskoulas (1973) que estudaram o problema de uma viga apoiada sobre fundação elástica bilinear. Nesse estudo, foi desenvolvida uma metodologia para solução de problemas de vigas sobre fundações bilineares. Equações diferenciais ordinárias não-lineares foram linearizadas, dividindo a viga em pontos de deflexão nula. Também Choros e Adams (1979) estudaram o problema de uma viga infinita de Euler-Bernoulli apoiada em uma fundação de Winkler. A solução foi obtida para uma força concentrada móvel de velocidade constante. Primeiramente, a carga crítica necessária para iniciar a separação entre a viga e a fundação foi determinada para uma certa escala de velocidade. Para cargas maiores que as críticas, uma ou mais regiões sem contato podiam surgir. As soluções das equações diferenciais foram obtidas em termos de sistemas de coordenadas locais. A dimensão e posição das regiões sem contato, bem como as deflexões da viga, puderam ser determinadas para escalas de força e velocidade, usando o critério da energia.

Manoach e Karagiozova (1992) estudaram a interação dinâmica do contato entre uma viga elasto-plástica de seção transversal variável e uma fundação elástica com dois parâmetros. O “Método das Diferenças Finitas” foi aplicado para o domínio espacial e o “Método Rung Kutta de Quarta Ordem” foi usado para resolver o problema não-linear.

Com o avanço das técnicas computacionais, devido a viabilidade de implementação, métodos como o dos “Elementos de Contorno”, de “Rayleigh-Ritz”, das “Diferenças Finitas” e dos “Elementos Finitos” têm recebido atenção especial no tratamento de problemas estruturais complexos.

Silveira (1995) desenvolveu uma solução numérica para resolver problemas de equilíbrio e estabilidade de elementos estruturais esbeltos com restrições de contato, impostas por bases elásticas. Na metodologia de solução proposta, foram utilizados, o “Método dos Elementos Finitos” e as técnicas de programação matemática.

Hosur e Bhavikatti (1996) estudaram uma variação parabólica, presumida através do “Método das Diferenças Finitas”, para uma distribuição de pressão de contato, com a finalidade de se obterem linhas de influência para curvas de momento fletor de vigas sobre fundação elástica.

Silva (1998) propôs uma metodologia numérica para análise de placas com restrições bilaterais e unilaterais de contato impostas por bases elásticas. O efeito decorrente da força de atrito entre a placa e a base elástica foi desprezado. O “Método dos Elementos Finitos” foi usado para discretizar a placa e a base elástica, e o problema de contato unilateral foi tratado diretamente como um problema de minimização.

Pereira (2003) Desenvolveu um trabalho para se resolver problemas de equilíbrio de vigas com restrições de contato, impostas por bases elásticas.

Na primeira parte do trabalho, uma metodologia geral de solução baseada no emprego do “Método de Rayleigh-Ritz” foi proposta e usada para se resolver três problemas particulares de vigas com restrições unilaterais de contato. Uma estratégia de solução iterativa, baseada no “Método de Newton-Raphson”, foi usada para a solução do sistema de equações não-lineares resultante da formulação do problema.

Na Segunda parte da pesquisa, o “Método dos Elementos Finitos” foi usado para discretizar a viga e a fundação elástica, e o problema de contato é tratado diretamente como um problema de minimização, envolvendo somente as variáveis originais do problema, sujeitas às restrições de desigualdade e à condição de complementaridade. Duas formulações foram então desenvolvidas (primal e dual) onde as equações relevantes para a

solução do problema de contato são escritas na forma de um problema de complementaridade linear e resolvidas através do algoritmo de Lemke.

2.4 - MODELAGEM DO PROBLEMA

Na seção 2.2.1, foi apresentado o modelo de base elástica considerado neste trabalho. Ele consiste na representação da base através de molas que são consideradas como apoios elásticos independentes, conseqüentemente, o estudo final do problema resultará da análise de vigas que são tratadas como se estivessem sobre apoios elásticos, conforme mostra a Figura 2.6.

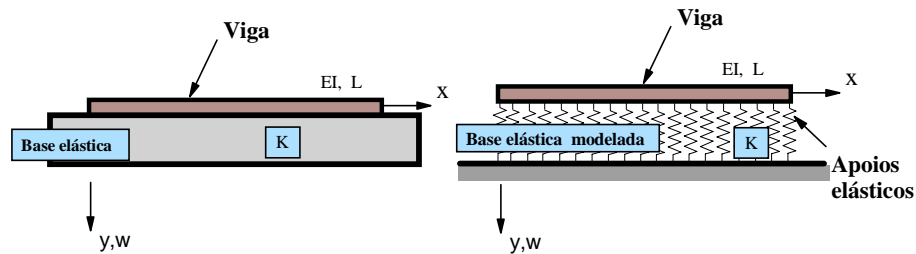


Figura 2.6 – Modelo Adotado.

Para a solução do problema de contato bilateral tanto os apoios sujeitos a esforços de compressão como os sujeitos a esforços de tração são considerados, como mostra a Figura 2.7.

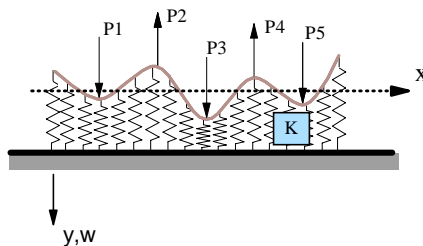


Figura 2.7 – Problema de Contato Bilateral.

Já no caso do problema de contato unilateral, os apoios sujeitos a esforços de tração são desconsiderados. Através de um processo iterativo, partindo dos valores encontrados para o problema de contato bilateral, chega-se à solução do problema. Nota-se, nesse caso, a formação de regiões sem contato, formadas onde os apoios elásticos são desconsiderados, conforme ilustrado na Figura 2.8.

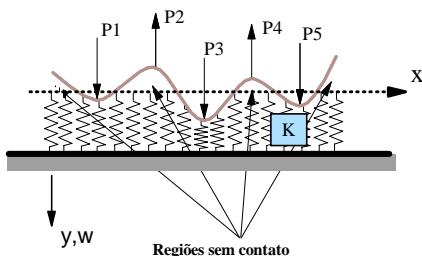


Figura 2.8 – Problema de Contato Unilateral.

2.5 - EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA LINHA ELÁSTICA

A seguir, será demonstrada a equação diferencial da linha elástica de vigas sobre base elástica, considerando o modelo de Winkler. Dessa equação, vários autores descrevem as equações para se resolverem vários tipos de problemas, envolvendo o contato bilateral entre viga e fundação, das quais algumas serão utilizadas nesse trabalho.

Considere uma viga reta, AB, suportada ao longo de seu comprimento por uma base elástica e sujeita a forças atuantes em um plano de simetria vertical (Figura 2.9).

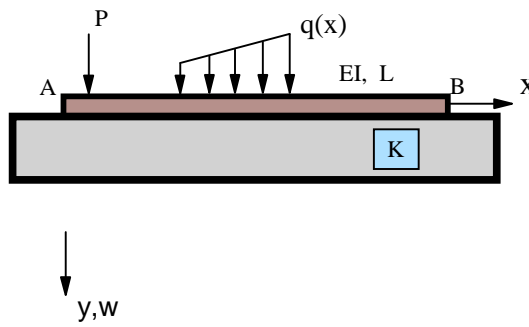


Figura 2.9 - Viga Genérica.

A deflexão da viga produz forças reativas p conforme mostra a Figura 2.10. Consideram-se apenas as forças reativas verticais.

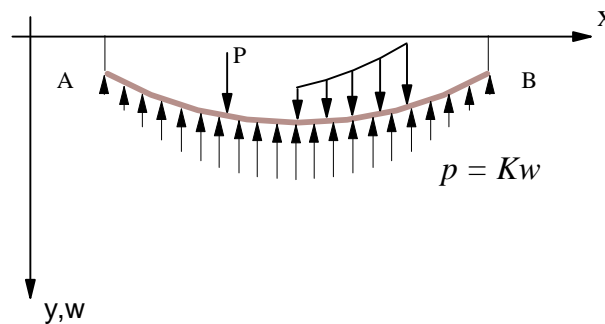


Figura 2.10 – Viga Deformada.

A hipótese fundamental é a de que a força reativa p em um ponto é proporcional à deflexão w da viga naquele ponto:

$$p = Kw \quad (2.4).$$

Isto implica que o meio de suporte é linear, em outras palavras, que o material da base segue a “Lei de Hooke”. Essa elasticidade, no entanto, pode ser caracterizada pelo módulo da fundação K_0 (em N/m^3). Assumindo que a viga tem seção transversal constante e sendo b a largura da viga em contato com o solo, a constante K é calculada da seguinte forma:

$$K = b K_0 \quad (2.5)$$

portanto:

$$p = b K_0 w \quad (2.6).$$

A Figura 2.11 mostra um elemento de comprimento dx retirado da viga por dois cortes verticais imaginários.

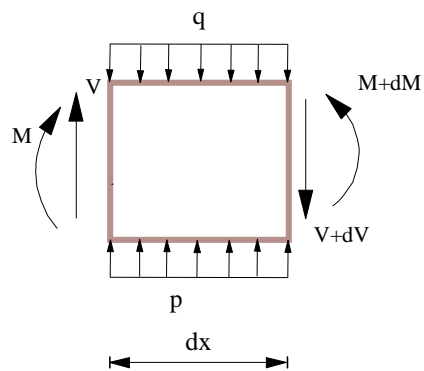


Figura 2.11 – Elemento Infinitesimal de Viga.

O equilíbrio de forças verticais fornece a expressão:

$$V - (V+dV) + Kw dx - q dx = 0 \quad (2.7)$$

portanto:

$$\frac{dV}{dx} = Kw - q \quad (2.8).$$

Usando a relação $V = dM/dx$ (Timoshenko, 1983), pode-se escrever:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = Kw - q \quad (2.9)$$

Derivando duas vezes a equação diferencial da linha elástica de flexão de vigas, $EId^2w/dx^2 = -M$ (Timoshenko, 1983) em relação a x , tem-se:

$$EI \frac{d^4w}{dx^4} = -\frac{d^2M}{dx^2} \quad (2.10).$$

Com as equações (2.9) e (2.10), pode-se escrever:

$$EI \frac{d^4w}{dx^4} + Kw = q \quad (2.11),$$

que é a equação diferencial da linha elástica de vigas sobre base elástica.

3 - EQUAÇÃO DOS TRÊS MOMENTOS E EQUAÇÃO DOS CINCO MOMENTOS

3.1 – INTRODUÇÃO

No capítulo anterior, foram mostrados o modelo de base elástica adotado neste trabalho e a demonstração da equação diferencial de vigas sobre base elástica, desenvolvida por Hetényi (1946), considerando o modelo de Winkler.

Neste capítulo, será apresentada a metodologia de solução, para o modelo matemático proposto no capítulo 2, que retrata problemas decorrentes do contato entre vigas e fundações elásticas, considerando a teoria de pequenos deslocamentos e deformações e desprezando os efeitos decorrentes do atrito existente entre esses corpos.

O método de solução do modelo numérico proposto se baseia na “Equação dos Três Momentos”, para o cálculo de vigas sobre apoios rígidos. A seção 3.3 traz as equações necessárias para demonstrá-la. Para as vigas sobre apoios deformáveis, o método a ser usado é o da “Equação dos Cinco Momentos”. As equações necessárias à sua demonstração estão apresentadas na seção 3.4.

3.2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo objetiva apresentar uma solução para o modelo numérico proposto no capítulo anterior, considerando os problemas de contato bilateral e unilateral entre vigas e bases elásticas, uma vez que as soluções analíticas, desenvolvidas para vários problemas até então, consideravam apenas o contato bilateral entre estrutura e fundação. Outro objetivo desta seção é trazer forma detalhada, a demonstração do “Método da Equação dos Três Momentos” e do “Método da Equação dos Cinco Momentos”.

É importante salientar que a “Equação dos Três Momentos” surgiu através da idéia de se resolverem problemas envolvendo vigas hiperestáticas. O primeiro a discorrer sobre o assunto foi Navier, em 1825 (Timoshenko, 1953). Ele considerou uma viga sobre três apoios e tomou a reação uma das quantidades estaticamente indeterminadas, mas quando havia mais que três apoios, tornava-se inconveniente selecionar as reações desconhecidas.

O estudo de um caso particular de uma viga com vãos iguais e carga uniformemente distribuída atuando sobre todo seu comprimento, ou de cargas concentradas iguais, aplicadas no centro de cada vão, mostrou que o problema podia ser simplificado e a relação linear entre as três reações consecutivas encontrada. Usando essa relação, as reações podiam ser calculadas sem muita dificuldade para alguns números de vãos.

Posteriormente, a análise de vigas contínuas foi feita por Clapeyron (Timoshenko, 1953). Ele usou expressões de ângulos que a tangente à linha elástica forma nos apoios com o eixo inicialmente reto da viga, dando o primeiro passo para se chegar à “Equação dos Três Momentos”.

A equação em questão, foi publicada pela primeira vez em sua forma atual, pelo engenheiro Bertot em 1855 (Timoshenko, 1953). É fácil ver, entretanto, que a transformação feita por Bertot para a conversão da equação de Clapeyron na “Equação dos Três Momentos” é comparativamente simples, daí a justificativa do nome “*Equação de Clapeyron*” ser muitas vezes dado como “*Equação dos Três Momentos*”, que é o nome dado nesta publicação. Nesse estudo, Bertot fez referência à idéia de Clapeyron, mas ele não demonstra sua teoria, dando apenas o método de solução ao sistema de equações.

Mais tarde, Clapeyron publicou a “Equação dos Três Momentos” de forma semelhante à de Bertot, fornecendo então, seu próprio método de resolução (Timoshenko, 1953).

3.3 – EQUAÇÃO DOS TRÊS MOMENTOS

Uma vez que a solução do modelo numérico apresentado no capítulo 2 consiste na determinação dos momentos fletores nos apoios de vigas hiperestáticas, fica fácil compreender a aplicabilidade da “Equação dos Três Momentos”, pois consiste num método de cálculo simples e totalmente ajustável às particularidades desse estudo.

O procedimento consiste em considerar os momentos fletores nos apoios as incógnitas a serem determinadas, devendo ser escrita uma equação para cada apoio intermediário, resultando, desta forma, em tantas equações quantos forem os momentos fletores desconhecidos, formando, assim, um sistema de equações lineares.

Um caso particular de aplicação da equação em questão acontece quando, na extremidade, em vez de apoios simples, tem-se engastes. Se uma (ou ambas) extremidade for um engastamento, o número de momentos redundantes será maior. O modo mais simples de se resolver esse caso é substituir o engastamento por um vão extra, de rigidez infinita. O efeito desse vão extra, de rigidez infinitamente grande, é evitar o deslocamento angular do apoio que substituiu o engaste, condição esta igual à imposta pelo engastamento. O comprimento dado ao vão extra não tem significado (apenas deve ser maior que zero) porque se simplifica na equação.

A “Equação dos Três Momentos” se fundamenta na continuidade da linha elástica, assim sendo, a condição de deslocamento a ser imposta é a de que a tangente à linha elástica tem a mesma inclinação à direita e à esquerda de um mesmo ponto.

A demonstração feita a seguir não considera a contribuição da força cortante no cálculo das rotações e é particularizada para vigas onde o módulo de elasticidade e o momento de inércia são constantes em cada vão.

Seja a viga hiperestática da Figura 3.1. Fazendo um corte imaginário nos apoios $i-1$, i e $i+1$, os esforços que eram internos tornam-se externos. O sentido dos momentos

fletores M_{i-1} , M_i e M_{i+1} dependem do carregamento aplicado à viga. Nesta demonstração, supõe-se que são todos positivos, conforme indicado na figura abaixo.

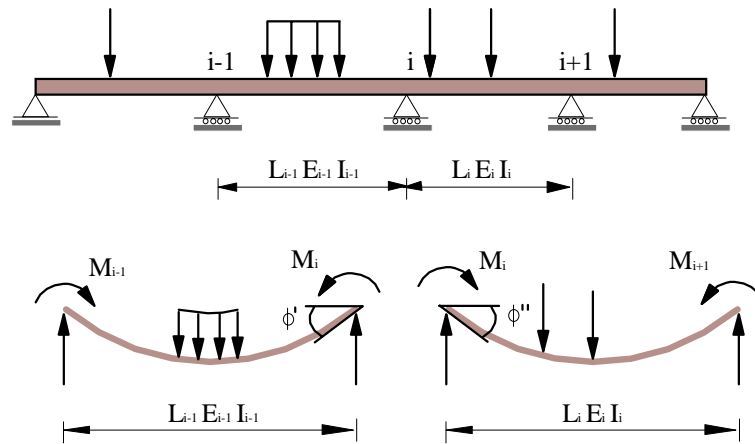


Figura 3.1 – Viga Contínua Sujeita a um Carregamento Genérico (Martins, 1991).

A rotação ϕ'_i é produzida pelos momentos fletores M_{i-1} , M_i e pelo carregamento que atua ao longo do comprimento do vão $i-1$. Esses valores podem ser calculados através do “Método da Integração Direta” (Martins, 1991). O momento fletor M_{i-1} contribui com a parcela:

$$\frac{M_{i-1}L_{i-1}}{6E_{i-1}I_{i-1}} \quad (3.1).$$

O momento fletor M_i contribui com:

$$\frac{M_iL_{i-1}}{3E_{i-1}I_{i-1}} \quad (3.2).$$

Chamando de

$$\frac{C_1}{E_{i-1}I_{i-1}}$$

(3.3)

a contribuição do carregamento, a rotação ϕ'_i é obtida superpondo-se os efeitos de M_{i-1} , M_i e do carregamento:

$$\phi'_i = \frac{M_{i-1}L_{i-1}}{6E_{i-1}I_{i-1}} + \frac{M_iL_{i-1}}{3E_{i-1}I_{i-1}} + \frac{C_1}{E_{i-1}I_{i-1}}$$

(3.4).

Da mesma forma, chamando de

$$\frac{C_2}{E_iI_i}$$

(3.5)

a contribuição do carregamento que atua no vão i para a rotação à direita do apoio i (ϕ''_i), tem-se:

$$\phi''_i = \frac{M_iL_i}{3E_iI_i} + \frac{M_{i+1}L_i}{6E_iI_i} + \frac{C_2}{E_iI_i}$$

(3.6).

As constantes C_1 e C_2 , que aparecem nas equações acima, representam a contribuição dos carregamentos para as rotações nos apoios. Podem ser obtidas usando-se o “Método da Integração Direta” ou o “Segundo Teorema de Castigliano”. Estão apresentados na Tabela 3.1 os valores de C_1 e C_2 para alguns casos de carregamento. É oportuno informar que é válido o princípio da superposição dos efeitos para o cálculo destas constantes (Martins, 1991).

Uma vez que a viga é contínua, as rotações ϕ_i' e ϕ_i'' são iguais. Arbitrando-se que a rotação ocorre no sentido anti-horário, a condição de deslocamento fornece a expressão:

$$\phi_i' = -\phi_i'' \quad (3.7)$$

então:

$$\frac{M_{i-1}L_{i-1}}{6E_{i-1}I_{i-1}} + \frac{M_iL_{i-1}}{3E_{i-1}I_{i-1}} + \frac{C_1}{E_{i-1}I_{i-1}} = -\frac{M_iL_i}{3E_iI_i} - \frac{M_{i+1}L_i}{6E_iI_i} - \frac{C_2}{E_iI_i} \quad (3.8).$$

Multiplicando a expressão acima por 6 e agrupando, tem-se:

$$\frac{M_{i-1}L_{i-1}}{E_{i-1}I_{i-1}} + \frac{2M_iL_{i-1}}{E_{i-1}I_{i-1}} + \frac{2M_iL_i}{E_iI_i} + \frac{M_{i+1}L_i}{E_iI_i} = -6\left(\frac{C_1}{E_{i-1}I_{i-1}} + \frac{C_2}{E_iI_i}\right) \quad (3.9).$$

A equação (3.9) é chamada de “Equação dos Três Momentos” e deve ser aplicada nos apoios onde os momentos fletores não são conhecidos, obtendo-se um número de equações igual ao número de indeterminações estáticas. Particularizando a equação (3.9) para dois vãos em que $E_{i-1}I_{i-1} = E_iI_i$, tem-se:

$$M_{i-1}L_{i-1} + 2M_i(L_i + L_{i+1}) + M_{i+1}L_i = -6(C_1 + C_2) \quad (3.10).$$

A tabela 3.1, mostrada a seguir, traz os valores das constantes C_1 e C_2 , acima mencionadas, para alguns casos de carregamento.

Tabela 3.1 – Valores de C_1 e C_2 (Martins, 1991).

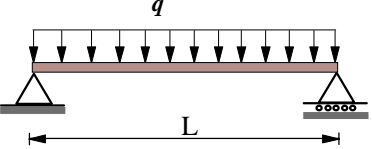
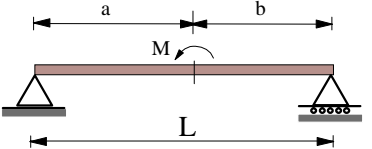
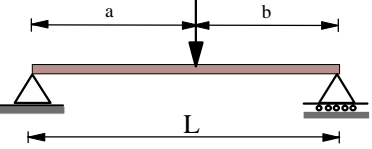
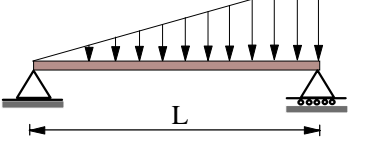
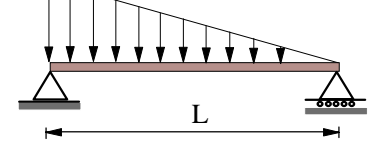
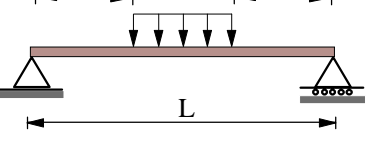
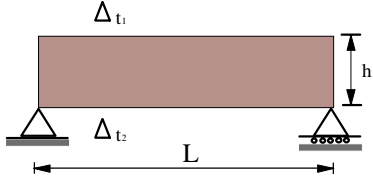
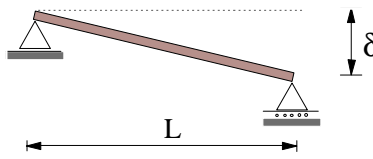
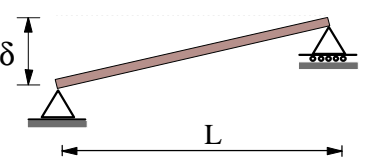
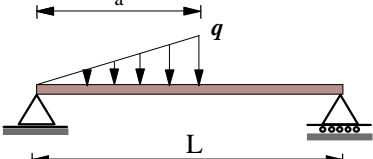
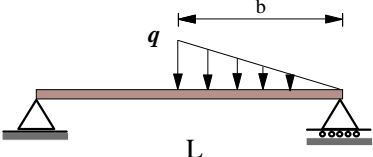
Carregamento	C_1	C_2
	$\frac{qL^3}{24}$	$\frac{qL^3}{24}$
	$\frac{M(L^2 - 3a^2)}{6L}$	$-\frac{M(L^2 - 3b^2)}{6L}$
	$\frac{Pa(L^2 - a^2)}{6L}$	$\frac{Pb(L^2 - b^2)}{6L}$
	$\frac{qL^3}{45}$	$\frac{7qL^3}{360}$
	$\frac{7qL^3}{360}$	$\frac{qL^3}{45}$
	$C_1 = \frac{q[L^4 - a^2(2L^2 - a^2) - b^2(2L - b)^2]}{24L}$ $C_2 = \frac{q[L^4 - a^2(2L - a)^2 - b^2(2L^2 - b^2)]}{24L}$	

Tabela 3.1 – Valores de C_1 e C_2 – Continuação.

Carregamento	C_1	C_2
	$\frac{EI\alpha L(\Delta t_2 - \Delta t_1)}{2h}$	$\frac{EI\alpha L(\Delta t_2 - \Delta t_1)}{2h}$
	$-\frac{EI\delta}{L}$	$-\frac{EI\delta}{L}$
	$\frac{EI\delta}{L}$	$-\frac{EI\delta}{L}$
	$\frac{qa^2(5L^2 - 3a^2)}{90L}$	$\frac{qa^2(40L^2 - 45aL + 12a^2)}{360L}$
	$\frac{qb^2(40L^2 - 45bL + 12b^2)}{360L}$	$\frac{qb^2(5L^2 - 3b^2)}{90L}$

3.4 – EQUAÇÃO DOS CINCO MOMENTOS

Quando uma viga contínua está sobre apoios deformáveis, a “Equação dos Três Momentos” pode ser usada conduzindo a uma equação com cinco momentos.

Seja a viga contínua da Figura 3.2a sobre apoios deformáveis. Depois de aplicado o carregamento, os apoios da viga não ficam no mesmo nível. Para simplificar, supõe-se que os apoios se deformam como mostra a Figura 3.2b. A equação (3.9) pode ser aplicada no apoio i da viga da Figura 3.1a.

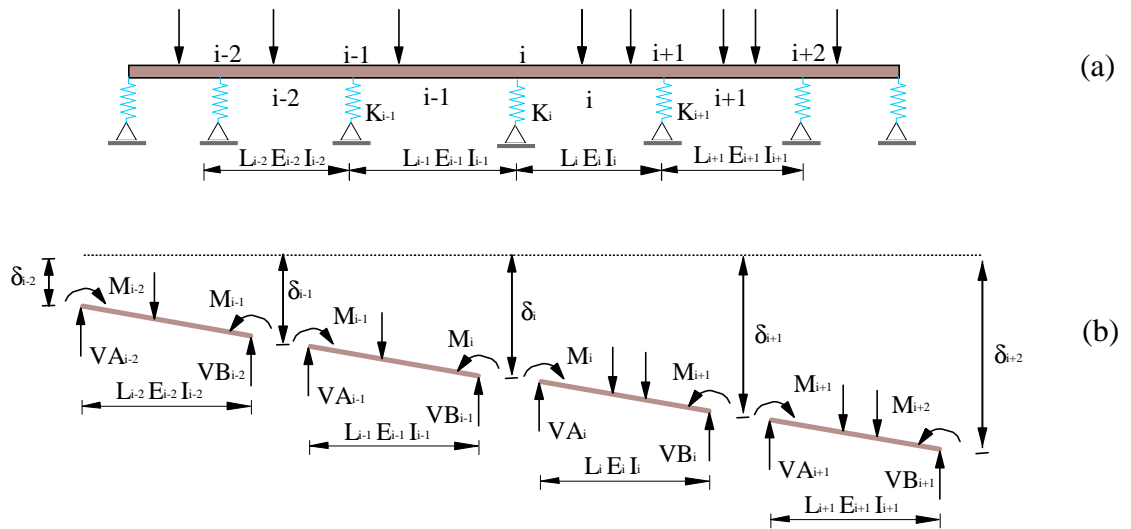


Figura 3.2 – Viga Genérica Sobre Apoios Deformáveis (Martins, 1991).

Quando a viga está sobre apoios deformáveis, no cálculo das constantes C_1 e C_2 , deve-se levar em consideração os recalques dos apoios, portanto, somam-se aos valores de C_1 e C_2 , calculados em função do carregamento atuante nos vãos $i-1$ e i , as seguintes expressões (Martins, 1991):

$$C_1^* = -\frac{EI\delta}{L}$$

(3.11)

$$C_2^* = \frac{EI\delta}{L}$$

(3.12)

ou:

$$C_1^* = -\frac{E_{i-1}I_{i-1}}{L_{i-1}}(\delta_i - \delta_{i-1})$$

(3.13)

$$C^*_2 = \frac{E_i I_i}{L_i} (\delta_{i+1} - \delta_i)$$

(3.14).

Considerando que os apoios seguem a “Lei de Hooke” ($F = kx$), têm-se:

$$\delta_{i-1} = \frac{VB_{i-2} + VA_{i-1}}{K_{i-1}}$$

(3.15)

$$\delta_i = \frac{VB_{i-1} + VA_i}{K_i}$$

(3.16)

$$\delta_{i+1} = \frac{VB_i + VA_{i+1}}{K_{i+1}}$$

(3.17).

As reações VA e VB dependem do carregamento que atua no vão e dos momentos fletores nos apoios. Chamando-se de RA e RB as reações referentes ao carregamento, têm-se:

$$VB_{i-2} = RB_{i-2} + \frac{M_{i-2} - M_{i-1}}{L_{i-2}}$$

(3.18)

$$VA_{i-1} = RA_{i-1} + \frac{M_i - M_{i-1}}{L_{i-1}}$$

(3.19)

$$VB_{i-1} = RB_{i-1} + \frac{M_{i-1} - M_i}{L_{i-1}}$$

(3.20)

$$VA_i = RA_i + \frac{M_{i+1} - M_i}{L_i}$$

(3.21)

$$VB_i = RB_i + \frac{M_i - M_{i+1}}{L_i}$$

(3.22)

$$VA_{i+1} = RA_{i+1} + \frac{M_{i+2} - M_{i+1}}{L_{i+1}}$$

(3.23).

Com as expressões acima, as equações (3.13) e (3.14) ficam da seguinte forma:

$$C_1^* = -\frac{E_{i-1}I_{i-1}}{L_{i-1}} \left[\frac{1}{K_i} \left(RB_{i-1} + \frac{M_{i-1} - M_i}{L_{i-1}} + RA_i + \frac{M_{i+1} - M_i}{L_i} \right) - \frac{1}{K_{i-1}} \left(RB_{i-2} + \frac{M_{i-2} - M_{i-1}}{L_{i-2}} + RA_{i-1} + \frac{M_i - M_{i-1}}{L_{i-1}} \right) \right]$$

(3.24)

$$C_2^* = \frac{E_i I_i}{L_i} \left[\frac{1}{K_{i+1}} \left(RB_i + \frac{M_i - M_{i+1}}{L_i} + RA_{i+1} + \frac{M_{i+2} - M_{i+1}}{L_{i+1}} \right) - \frac{1}{K_i} \left(RB_{i-1} + \frac{M_{i-1} - M_i}{L_{i-1}} + RA_i + \frac{M_{i+1} - M_i}{L_i} \right) \right]$$

(3.25).

Substituindo as expressões acima na equação (3.9) e passando os momentos fletores para o primeiro membro, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{6}{L_{i-1}L_{i-2}K_{i-1}}M_{i-2} - \frac{6}{L_{i-1}} \left(\frac{1}{L_{i-1}K_i} + \frac{1}{L_{i-2}K_{i-1}} + \frac{1}{L_{i-1}K_{i-1}} + \frac{1}{L_iK_i} - \frac{L_{i-1}^2}{6E_{i-1}I_{i-1}} \right) M_{i-1} + \\
& 6 \left(\frac{1}{L_{i-1}^2K_i} + \frac{1}{L_iL_{i-1}K_i} + \frac{1}{L_{i-1}^2K_{i-1}} + \frac{1}{L_i^2K_{i+1}} + \frac{1}{L_iL_{i-1}K_i} + \frac{1}{L_i^2K_i} + \frac{L_{i-1}}{3E_{i-1}I_{i-1}} + \frac{L_i}{3E_iI_i} \right) M_i \\
& - \frac{6}{L_i} \left(\frac{1}{L_{i-1}K_i} + \frac{1}{L_iK_{i+1}} + \frac{1}{L_{i+1}K_{i+1}} + \frac{1}{L_iK_i} - \frac{L_i^2}{6E_iI_i} \right) M_{i+1} + \frac{6}{L_iL_{i+1}K_{i+1}} M_{i+2} = \\
& - 6 \left(\frac{C_1}{E_{i-1}I_{i-1}} + \frac{C_2}{E_iI_i} - \frac{RB_{i-1} + RA_i}{L_{i-1}K_i} + \frac{RB_{i-2} + RA_{i-1}}{L_{i-1}K_{i-1}} + \frac{RB_i + RA_{i+1}}{L_iK_{i+1}} - \frac{RB_{i-1} + RA_i}{L_iK_i} \right) \\
& (3.26).
\end{aligned}$$

A equação (3.26) deve ser usada nas vigas sobre apoios elásticos. Nessa equação as constantes C_1 e C_2 são calculadas apenas em função do carregamento que atua no vão, uma vez que os recalques dos apoios já foram levados em consideração.

4 - PROGRAMA COMPUTACIONAL

4.1 INTRODUÇÃO

Na engenharia moderna, diversos problemas estruturais formulados não possuem uma solução analítica que possa representá-los adequadamente. Também há os que possuem geometria muito complexa para seu equacionamento. Portanto, é preciso que sejam avaliados de maneira aproximada, porém satisfatória, através de métodos numéricos.

Com o desenvolvimento das técnicas computacionais, várias metodologias, como o “Método dos Elementos Finitos” e o dos “Elementos de Contorno”, tornam-se cada vez mais aplicáveis. Com isso, busca-se cada vez mais resolver problemas nunca antes considerados em aplicações práticas, devido, principalmente, à dificuldade de se desenvolverem, analiticamente, métodos que possam solucioná-los e viabilizá-los nestas aplicações.

Neste capítulo, serão mostrados os procedimentos adotados na implementação computacional das metodologias de solução propostas nos capítulos 2 e 3.

4.2 – CONSIDERAÇÕES GERAIS

Em resumo, o programa desenvolvido neste trabalho soluciona problemas de vigas hiperestáticas sem contato com fundações elásticas e problemas de vigas onde se considera o contato destas com bases deformáveis. Para se obter a solução de estruturas isostáticas, podem-se adicionar ao sistema estrutural apoios elásticos com valores de constante de mola, desprezíveis, que transformam a estrutura isostática em hiperestática, mas não afetam o resultado do problema.

O programa computacional desenvolvido foi escrito em linguagem de programação FORTRAN versão 4.0 (1994 - 1995). A Figura 4.1 mostra um esquema geral do programa.

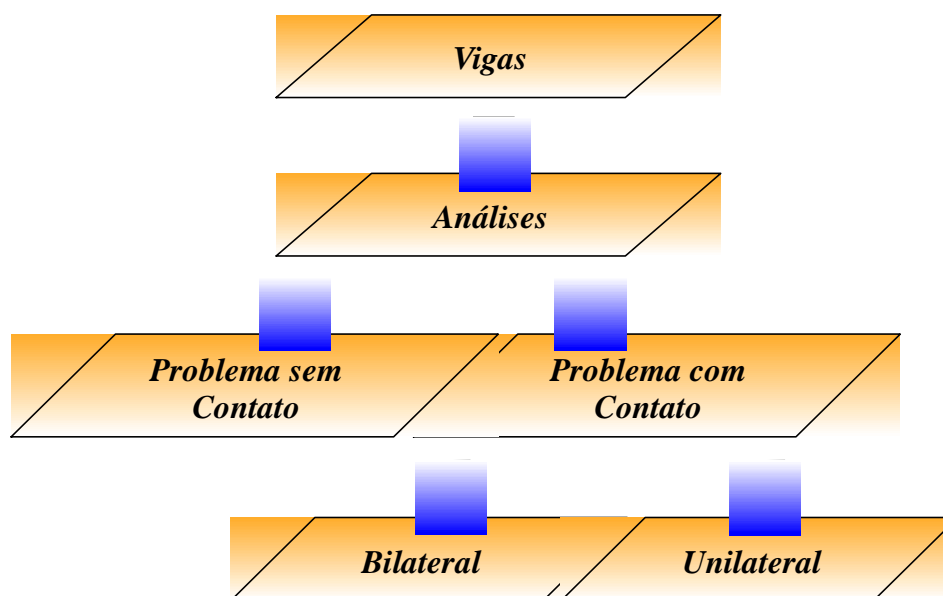


Figura 4.1 – Análise Computacional.

4.3 ESQUEMA ESTRUTURAL DO PROGRAMA

A seguir, na Figura 4.2, mostrar-se-á um esquema da estrutura do programa que coordena a execução das tarefas desenvolvidas durante processo de solução. As rotinas responsáveis pela execução das tarefas citadas serão apresentadas nas seções subsequentes com os respectivos procedimentos envolvidos em suas implementações.

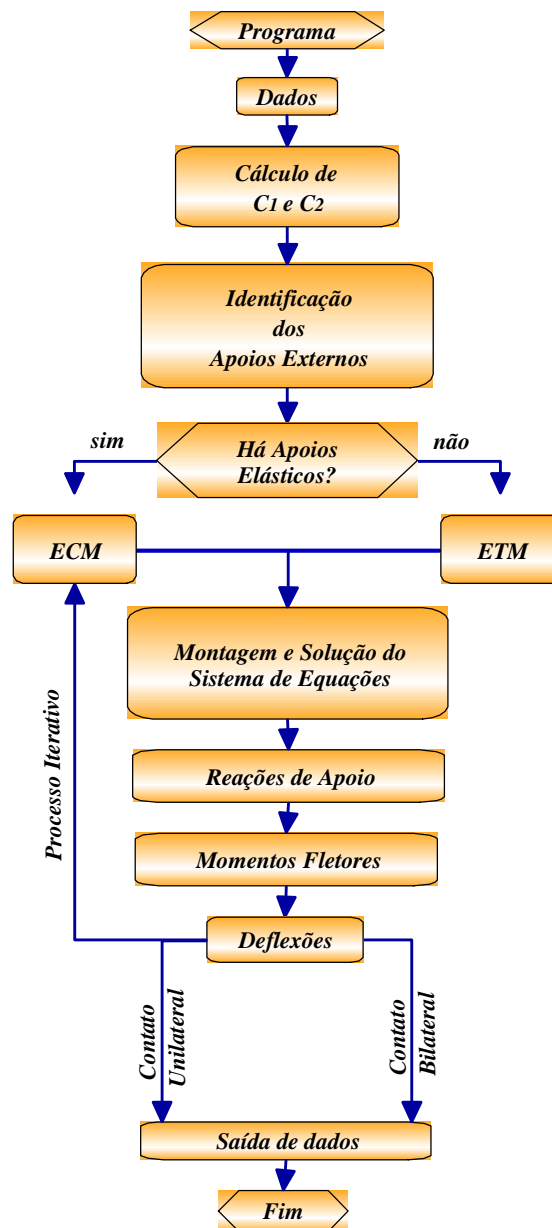


Figura 4.2 – Estrutura do Programa.

O primeiro procedimento realizado pelo programa refere-se ao reconhecimento do sistema estrutural a ser analisado. Isso se dá através da leitura dos dados necessários a esta análise. O primeiro dado contém o título do exemplo analisado, os outros dados são indicadores da geometria da viga, de suas propriedades físicas, das forças externas atuantes e das condições de extremidade impostas. Os diferentes tipos de carregamento

externo estão indicados na Tabela 3.1. São fornecidas também, para solução dos problemas de contato, as propriedades físicas e geométricas do modelo da base elástica.

Todos os dados são repassados ao programa através da leitura de um único arquivo de entrada de dados, contendo:

1 – Principais dados geométricos da viga

- Número de vãos com variação de temperatura;
- Número de apoios com recalque;
- Comprimento do vão;
- Altura.

2 – Principais dados das forças externas aplicadas à viga

- Número de cargas concentradas;
- Número de cargas parcialmente distribuídas;
- Número de cargas distribuídas;
- Número de cargas momento;
- Número de cargas distribuídas triangulares;
- Valores das cargas concentradas;
- Distância das cargas concentradas até os apoios esquerdos para cada vão;
- Valores das cargas parcialmente distribuídas;
- Distâncias das cargas parcialmente distribuídas até o apoio esquerdo;
- Distâncias das cargas parcialmente distribuídas até o apoio direito;
- Valores das cargas distribuídas;
- Valores das cargas momento;
- Distância das cargas momento até os apoios esquerdos para cada vão;
- Código das cargas triangulares;
- Valores das cargas triangulares.

3 – Principais dados das propriedades físicas da viga

- Rigidez à flexão EI ;
- Temperatura na face superior;
- Temperatura na face inferior;
- Coeficiente de dilatação térmica.

4 – Principais dados das condições de extremidade impostas à viga

- Número total de apoios;

- Valores dos recalques nos apoios;
- Número de apoios com recalque;
- Tipo dos apoios externos.

5 – Principais dados das propriedades físicas e geométricas da base elástica

- Número de apoios elásticos;
- Coeficiente de mola dos apoios elásticos.

Os próximos passos, como mostra o fluxograma ilustrado na Figura 4.2, consistem na análise e resolução do problema em questão. Após a leitura dos dados, segue-se, então, com a execução da rotina responsável pelo cálculo das constantes C_1 e C_2 indicadas nas tabelas dos carregamentos, daí segue à identificação dos apoios externos. A próxima rotina a ser executada é indicada pelo tipo de análise que se pretende fazer. Para a análise de problemas de viga sem contato, indicado pela ausência de apoios elásticos, o programa executa a rotina responsável pela montagem da “Equação dos Três Momentos”. Para a análise de problemas de viga com contato, caracterizados pela presença de apoios elásticos, o programa executa a rotina responsável pela montagem da “Equação dos Cinco Momentos”; assim, é executada a rotina responsável pela solução do sistema de equações. A partir de então, são executadas as rotinas para o cálculo das reações de apoio e deslocamentos verticais dos apoios elásticos, respectivamente. Dessa forma, tornam-se conhecidos, para todos os problemas, os valores dos esforços solicitantes e deslocamentos considerando o problema de contato bilateral. No caso, esse tipo de análise, torna possível o reconhecimento dos apoios elásticos solicitados por esforços de tração. Assim, esses são desconsiderados com a atribuição de valores muito pequenos para as respectivas constantes de mola K . Na sequência, os valores dos deslocamentos dos apoios elásticos, são transformados em valores absolutos e armazenados no vetor CMP . Esse vetor é subtraído do vetor $CMP2$ que inicialmente possui dados nulos e o resultado desta diferença é comparado com o valor aceitável para a convergência, que no caso do presente trabalho, admitiu-se valores menores ou iguais a 10^{-6} . Posteriormente, os dados de CMP são armazenados em $CMP2$. O programa, então, retorna à montagem do sistema de equações e um novo esquema estrutural é analisado da mesma forma que o anterior, dando início a um processo iterativo. Imposta a diferença aceitável entre os valores absolutos dos deslocamentos entre uma iteração e outra posterior, tem-se a

convergência quando este valor é alcançado e o problema de contato unilateral é resolvido. Os vetores CMP e $CMP2$ são usados para armazenar provisoriamente os dados dos deslocamentos a serem comparados entre uma iteração e outra.

4.3.1 – SUB-ROTINA PARA O CÁLCULO DE C_1 E C_2

Essa rotina, como dito anteriormente, é responsável pelo cálculo das constantes C_1 e C_2 dos carregamentos. Aí é feito o reconhecimento dos tipos de carregamento que estão atuando na viga, com isso, através da solução das equações indicadas na Tabela 3.1, torna-se possível a montagem dos vetores das cargas externas C_1 e C_2 .

4.3.2 – SUB-ROTINAS PARA MONTAGEM DA ETM E ECM

A função dessa rotina é montar a “Equação dos Três Momentos”, demonstrada na seção 3.3, utilizada para a solução dos problemas de vigas sem contato. Aqui são montados o vetor D e a matriz C . O vetor D nada mais é que a soma dos vetores C_1 e C_2 multiplicada por -6 e dividida pela rigidez a flexão da viga EI . A matriz C armazena os coeficientes das incógnitas da Equação 3.10 indicada na seção 3.3. De forma semelhante, a rotina para a montagem da “Equação dos Cinco Momentos”, que utiliza a equação demonstrada na seção 3.4, foi desenvolvida. Desta forma, através de uma rotina responsável pela montagem e execução do sistema de equações, tornam-se conhecidos os valores das incógnitas das equações anteriormente citadas.

4.3.3 – SUB-ROTINA PARA CÁLCULO DAS REAÇÕES DE APOIO

Essa rotina é responsável pelo cálculo das reações de apoio partindo dos valores dos momentos fletores. Ela faz a montagem dos vetores VA e VB que armazenam os valores dessas reações através da identificação do tipo de carregamento existente em cada vão para que através de algumas estratégias de cálculo se possa calcular a

contribuição de cada carregamento para a solicitação da viga aos respectivos apoios. São então somadas as reações de cada apoio devidas a cada carregamento resultando nos valores finais dessas reações.

4.3.4 – SUB-ROTINA PARA CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS

Esta é a última rotina de cálculo a ser executada, ela é responsável pelo cálculo dos deslocamentos verticais dos apoios elásticos a partir das reações de apoio. Ela faz a montagem do vetor DESLOC que armazena os valores desses deslocamentos calculados através da divisão das reações de apoio pelos respectivos coeficientes de mola K.

Enfim, em um arquivo de saída de dados gerado pelo programa, são escritos todos os valores calculados.

Após a execução de todas as tarefas acima descritas o programa é finalizado.

5 - EXEMPLOS NUMÉRICOS

5.1 - INTRODUÇÃO

Para que se possa validar as formulações tratadas nos capítulos 2 e 3 e comprovar a eficiência das implementações computacionais do modelo numérico proposto, este capítulo mostra alguns exemplos numéricos com particularidades que retratam os dois principais problemas de vigas apoiadas sobre bases elásticas estudados aqui, a saber: problemas de vigas em contato bilateral com base elástica do tipo Winkler e problemas de vigas em contato unilateral com base elástica do mesmo tipo.

Para o primeiro caso são ilustrados quatro exemplos, apresentados nas seções de 5.3.1 a 5.3.4. Acompanham esses exemplos tabelas e gráficos contendo os resultados analíticos e numéricos de cada um. Tomando como base os valores analíticos, pretendeu-se uma comparação entre esses dois resultados. Para o segundo caso, foram ilustrados seis exemplos mostrados nas seções de 5.4.1 a 5.4.6. Também acompanham esses exemplos tabelas e gráficos, que, com o objetivo de se comprovar a validade dos resultados encontrados através do método desenvolvido através do presente trabalho, serviram para compará-los com outros resultados. Nesse caso, devido ao fato de que não foram encontradas na literatura soluções analíticas para esse tipo de problema, tomaram-se como base, resultados numéricos obtidos através de implementações computacionais antes desenvolvidas e com validade já comprovada.

5.2 - CONSIDERAÇÕES GERAIS

Com a finalidade de se analisar a influência do parâmetro de rigidez da base elástica K no comportamento estrutural, tomaram-se valores distintos que representassem casos de bases elásticas com rigidez bastante variada.

Na modelagem da base, as molas foram colocadas de forma mais adequada a satisfazer as condições reais de seu comportamento. O principal fator que influencia nessa modelagem é a distância entre essas molas. Como a base age continuamente ao longo da estrutura, a melhor forma de representá-la seria através de molas dispostas em espaços infinitamente pequenos. No entanto, isso pode acarretar erros numéricos na solução do problema. Dessa forma, através da análise de vários casos, cada um modelado com um número diferente de molas, chegou-se a um espaçamento de 0.25m, considerado um valor satisfatório às condições de todos os problemas. Valores maiores também acarretam erros, pois não representam o comportamento real da fundação.

O erro encontrado através da comparação entre os dois valores contidos nas tabelas foi calculado pela seguinte expressão:

$$\text{Erro}(\%) = 100 \frac{\text{resultado da literatura} - \text{resultado do presente trabalho}}{\text{resultado da literatura}}$$

(5.1).

5.3 - PROBLEMA DE CONTATO BILATERAL

Como a solução do problema de contato bilateral serve como base para o processo iterativo que resulta na solução do problema de contato unilateral, é necessário que se tenha um desempenho do programa bastante satisfatório nesta análise. Propondo-se mostrar a resposta das implementações computacionais nesse tipo de análise, esta seção fornece o estudo de alguns exemplos, apresentados a seguir, através de uma descrição detalhada.

Os três primeiros exemplos, mostrados nas seções de 5.3.1 a 5.3.3, tratam de vigas finitas sujeitas a situações diversas de carregamento e extremidade. O último exemplo, apresentado na seção 5.3.4, trata de um problema de viga infinita, totalmente

apoiada sobre fundação elástica e sujeita a uma carga concentrada aplicada no meio do vão. É importante colocar que essa análise é linear e que os efeitos das forças de atrito entre a viga e a base elástica foram desprezados. As equações usadas para obtenção dos valores analíticos são dadas para cada exemplo. As equações analíticas também foram desenvolvidas considerando o modelo de base elástica de Winkler.

5.3.1 – EXEMPLO 1

Inicialmente, será tratado um caso de viga finita, suportada apenas por uma fundação elástica, ou seja, não há nenhum tipo de apoio rígido impedindo qualquer movimento da viga. O carregamento atuante é composto de duas cargas concentradas

aplicadas nas extremidades A e B, conforme indicado na Figura 5.1. São dados do problema os valores de $P = 150 \text{ kN}$, $L = 5 \text{ m}$ e $EI = 10^4 \text{ kN.m}^2$.

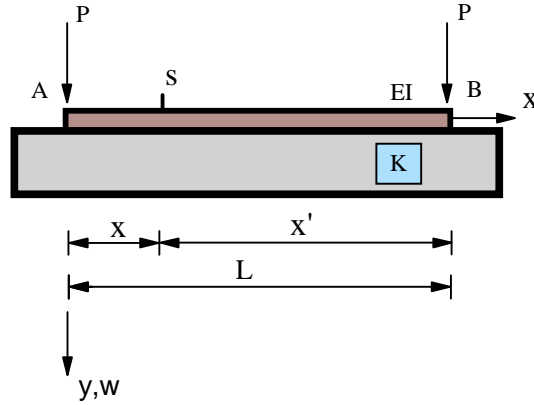


Figura 5.1 – Exemplo 1 – Esquema Estrutural.

Para o caso do problema de contato bilateral, as soluções analíticas para a momento fletor M e deflexão lateral da viga w , desse exemplo, podem ser encontradas na literatura (Hetényi, 1946), e estão mostradas a seguir:

$$M(x) = -\frac{P}{\lambda} \frac{\sinh \lambda x \sin \lambda x' + \sinh \lambda x' \sin \lambda x}{\sinh \lambda L + \sin \lambda L} \quad (5.2),$$

$$w(x) = \frac{2P\lambda}{K} \frac{\cosh \lambda x \cos \lambda x' + \cosh \lambda x' \cos \lambda x}{\sinh \lambda L + \sin \lambda L} \quad (5.3),$$

onde:

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI}} \quad (5.4).$$

A Figura 5.2 mostra a viga do exemplo 1 com a base representada através de molas dispostas em intervalos de 0,25 m conforme indicado e apresenta a configuração

deformada da barra para o caso de contato bilateral. Pode-se perceber, através da tabela e/ou dos gráficos, que, para determinados valores do carregamento, pode ocorrer uma região central onde alguns apoios elásticos ficam sujeitos a esforços de tração.

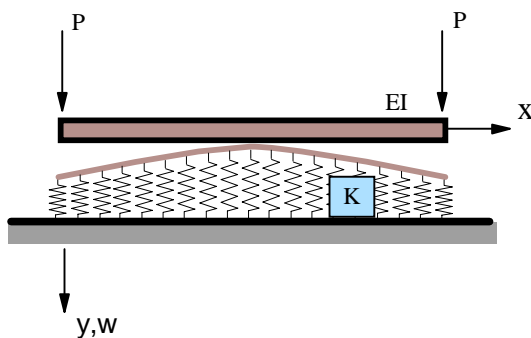


Figura 5.2 – Exemplo 1 - Configuração Deformada.

A tabela 5.1 apresenta as comparações feitas entre os valores obtidos através das soluções analíticas (Hetényi, 1946) e numéricas (presente trabalho) para os momentos fletores e para os deslocamentos em alguns pontos da viga. Nota-se que os erros são bastante pequenos, comprovando, assim, o bom desempenho do programa nesse tipo de análise. Há pontos onde os erros são maiores. Isso se dá devido ao fato de que, nesses pontos, os valores dos momentos e/ou dos deslocamentos são muito pequenos; dessa forma, quando comparados, resultam em erros consideráveis, o que não compromete a confiabilidade dos resultados. As Figuras 5.3 e 5.4 mostram os gráficos com as variações dos valores representativos dos momentos fletores e dos deslocamentos, respectivamente. Para esse exemplo, é apresentado o gráfico dos deslocamentos apenas para três valores de K . Devido à simetria do problema, constam nas tabelas valores apenas para metade da viga.

Tabela 5.1 – Exemplo 1 – Análise Comparativa dos Momentos Fletores e Deflexões.

$K(kN/m^2)$	$X(m)$	Momentos fletores($kN.m$)			Deflexões(m)		
		Sol. Analit.	Sol. Num.	Erro(%)	Sol. Analit.	Sol. Num.	Erro(%)
10	0.00	0.00	0.00	0.00	6.03121	6.03123	0.00
	1.25	-140.48	-140.48	0.00	5.99646	5.99542	0.02
	2.50	-187.24	-187.23	0.00	5.98244	5.98183	0.01
100	0.00	0.00	0.00	0.00	0.63088	0.63075	0.02
	1.25	-139.18	-139.15	0.02	0.59650	0.59647	0.00
	2.50	-184.89	-184.85	0.02	0.58265	0.58257	0.01
1000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.08792	0.08775	0.19
	1.25	-127.64	-127.39	0.20	0.05679	0.05675	0.07
	2.50	-164.00	-163.68	0.20	0.04444	0.04444	0.00
10000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02057	0.02035	1.08
	1.25	-75.01	-74.21	1.07	0.00414	0.00413	0.14
	2.50	-70.60	-69.84	1.07	-0.00149	-0.00144	3.50
100000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00379	0.00367	3.17
	2.50	0.02045	0.01940	5.11	-0.00033	-0.00032	3.16

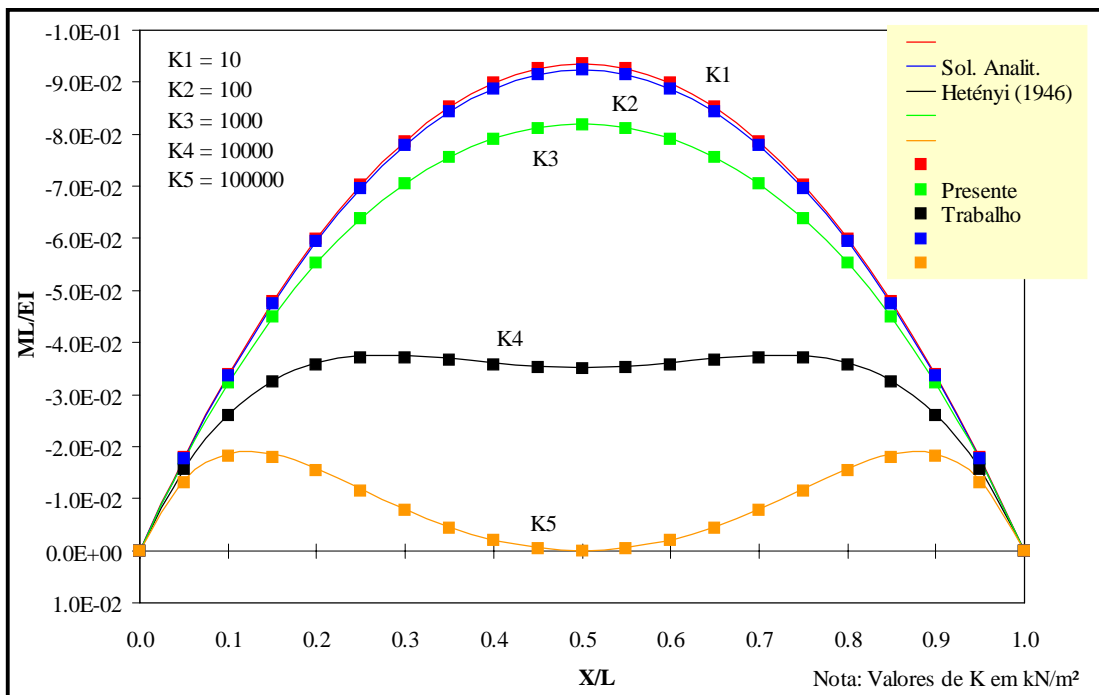


Figura 5.3 – Exemplo 1 – Momentos Fletores.

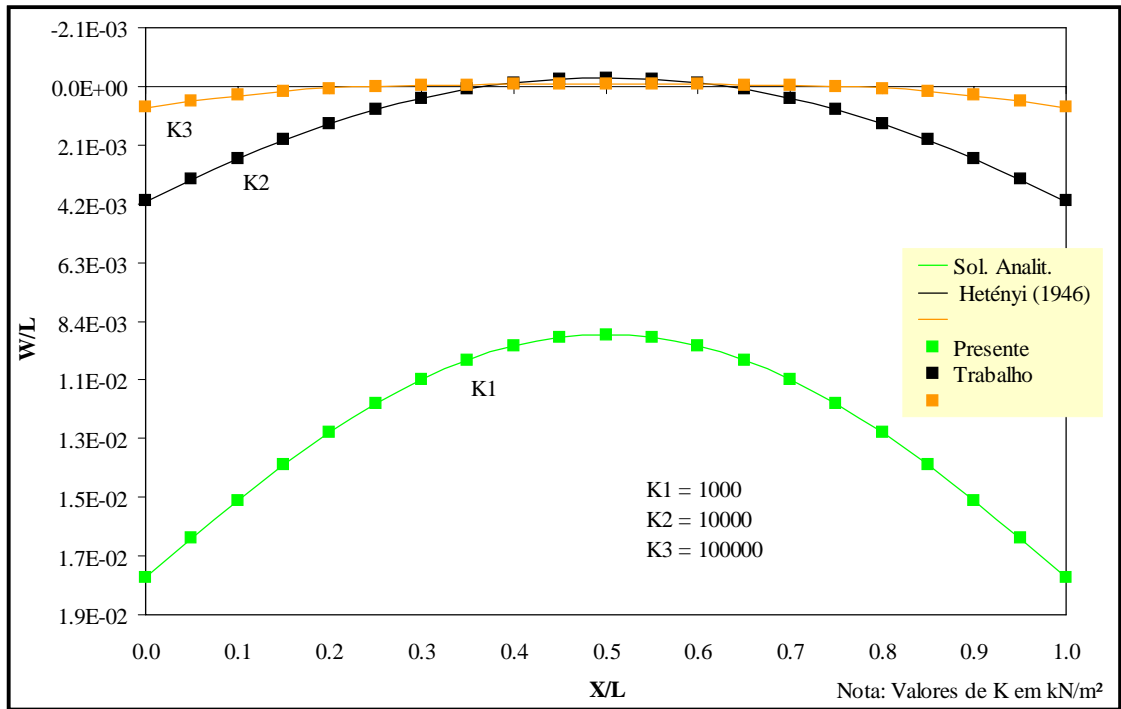


Figura 5.4 – Exemplo 1 - Deflexões.

5.3.2 - EXEMPLO 2

A seguir, é mostrado o esquema estrutural do segundo exemplo a ser analisado considerando o problema de contato bilateral. Trata-se de um caso de viga finita que se apoia em todo comprimento apenas sobre base elástica. A viga está sujeita a duas cargas momento $M = 10^2 \text{ kN.m}$ aplicadas nas extremidades A e B, conforme indicado na Figura 5.5. A rigidez da viga é dada por $EI = 10^4 \text{ kN.m}^2$ e o comprimento considerado é de $L = 5 \text{ m}$.

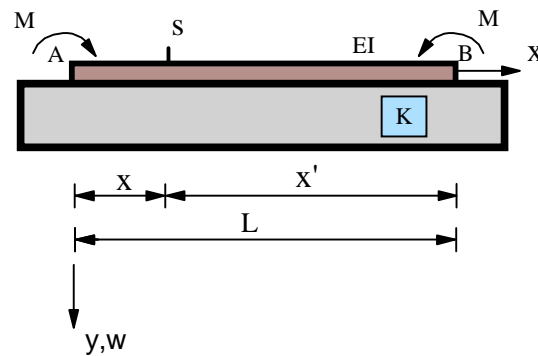


Figura 5.5 – Exemplo 2 – Esquema Estrutural.

Também, para este caso, as equações analíticas para momento fletor M e deflexão lateral da viga w , considerando o problema de contato bilateral, podem facilmente ser encontradas na literatura (Hetényi, 1946) e são dadas pelas seguintes equações:

$$M(x) = M \frac{1}{\sinh \lambda L + \sin \lambda L} \begin{pmatrix} \sinh \lambda x \cos \lambda x' + \cosh \lambda x \sin \lambda x' + \\ \sinh \lambda x' \cos \lambda x + \cosh \lambda x' \sin \lambda x \end{pmatrix} \quad (5.5),$$

$$w(x) = \frac{2M\lambda^2}{K(\sinh \lambda L + \sin \lambda L)} \begin{pmatrix} \sinh \lambda x \cos \lambda x' - \cosh \lambda x \sin \lambda x' \\ + \sinh \lambda x' \cos \lambda x - \cosh \lambda x' \sin \lambda x \end{pmatrix} \quad (5.6),$$

onde λ é dado pela equação 5.4.

A Figura 5.6 mostra a estrutura do exemplo 2, modelada conforme a teoria proposta. Nessa mesma figura pode ser observada a deformada da viga após a aplicação da carga. Nota-se o aparecimento de regiões em que os apoios elásticos são solicitados por esforços de tração e outras em que estão comprimidos, caracterizando o caso de contato bilateral.

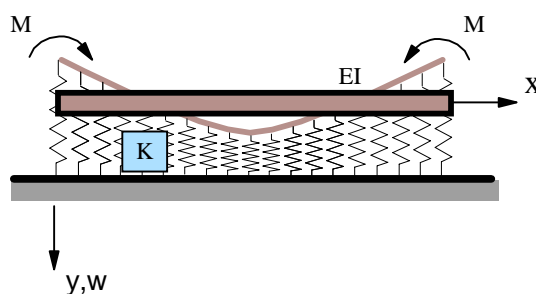


Figura 5.6 – Exemplo 2 - Configuração Deformada.

O estudo comparativo feito entre as soluções analíticas (Hetényi, 1946) e numéricas (presente trabalho) para os valores dos momentos fletores e deslocamentos é demonstrado para alguns pontos da viga na tabela 5.2, que confirma a boa precisão das respostas obtidas através do presente trabalho. Devido à simetria do problema, estão contidos na tabela os valores de apenas metade da viga. As Figuras 5.7 e 5.8 mostram o comportamento da viga através de gráficos contendo a variação dos valores representativos dos momentos fletores e dos deslocamentos, respectivamente.

Pode-se notar, através dos gráficos, que à medida que o valor do parâmetro de rigidez K da fundação aumenta, o comportamento da viga sofre influências mais consideráveis da base, tomando os mesmos valores para o carregamento e para a rigidez EI da viga. Por fim, observa-se que para fundações muito rígidas, as regiões onde ocorre tração dos apoios elásticos, diminuem.

Tabela 5.2 – Exemplo 2 – Análise Comparativa dos Momentos Fletores e Deflexões.

$K(kN/m^2)$	$X(m)$	<i>Momento fletor(kN.m)</i>			<i>Deflexão(m)</i>		
		<i>Sol. Analít.</i>	<i>Sol. Num.</i>	<i>Erro(%)</i>	<i>Sol. Analít.</i>	<i>Sol. Num.</i>	<i>Erro(%)</i>
100	0.00	100.00	100.00	0.00	-0.02060	-0.02054	0.30
	1.25	99.10	99.07	0.02	0.00258	0.00267	3.31
	2.50	98.39	98.36	0.03	0.01028	0.01036	0.76
1000	0.00	100.00	100.00	0.00	-0.01877	-0.01868	0.46
	1.25	91.84	91.63	0.22	0.00240	0.00243	1.60
	2.50	85.55	85.29	0.31	0.00917	0.00919	0.25
10000	0.00	100.00	100.00	0.00	-0.01046	-0.01029	1.57
	1.25	58.25	57.47	1.35	0.00154	0.00156	0.87
	2.50	28.64	27.90	2.59	0.00419	0.00416	0.72
100000	0.00	100.00	100.00	0.00	-0.00316	-0.00301	4.75
	1.25	19.82	18.55	6.38	0.00063	0.00062	1.56
	2.50	-8.62664	-8.62562	0.01	0.00027	0.00026	4.74

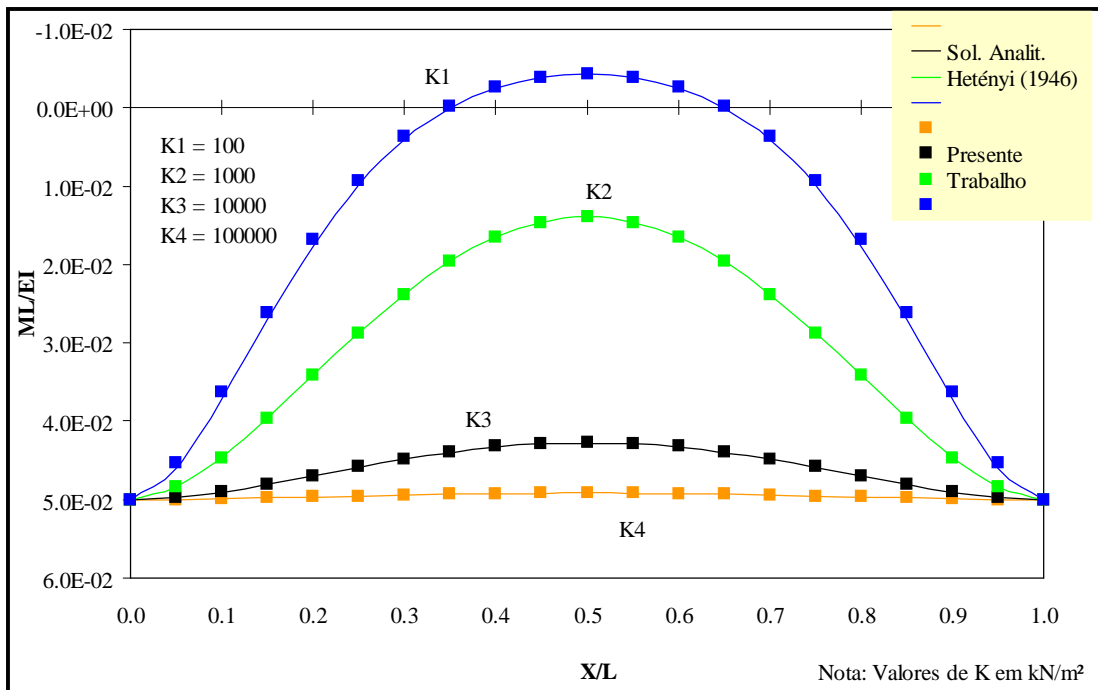


Figura 5.7 – Exemplo 2 – Momentos Fletores.

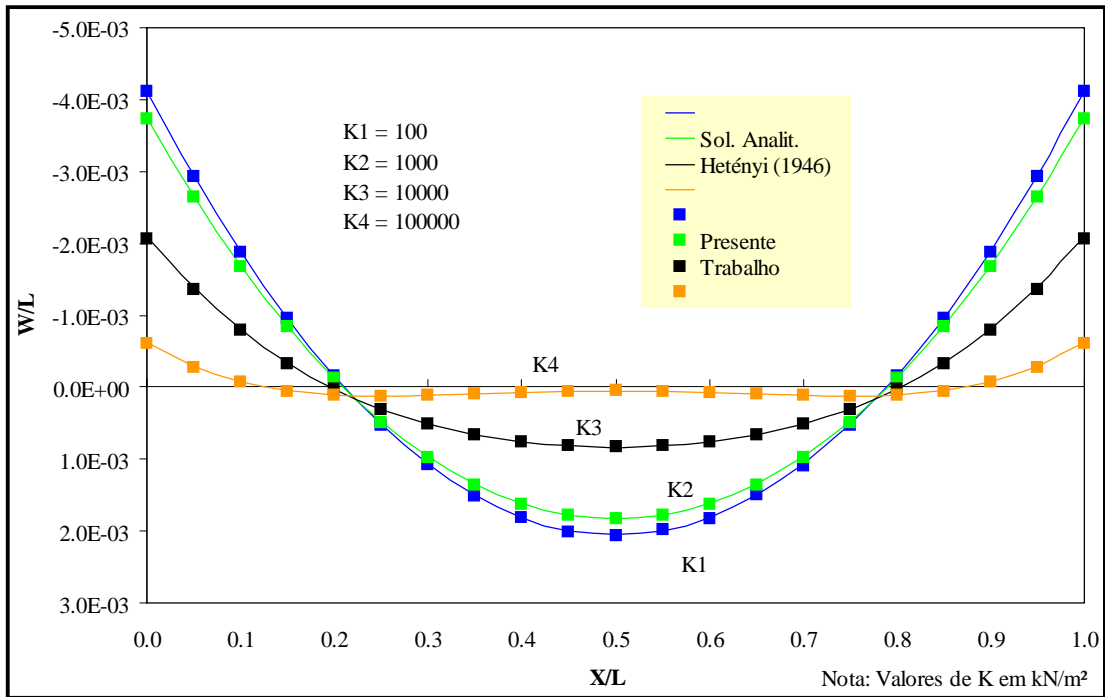


Figura 5.8 – Exemplo 2 - Deflexões.

5.3.3 - EXEMPLO 3

Na Figura 5.9 encontra-se o sistema estrutural a ser analisado nesta seção. Trata-se do último problema de viga finita considerando apenas o contato bilateral. Também neste exemplo, a viga representada se apoia totalmente sobre base elástica, e para mostrar a análise feita pelo programa considerando diferentes situações de extremidade considera-se que a viga tem uma extremidade livre e outra engastada. A viga tem comprimento $L = 5\text{ m}$, rigidez $EI = 10^4\text{ kN.m}^2$ e uma carga P aplicada na extremidade livre de 10^2 kN .

As equações 5.9 e 5.10, para momento fletor M e deslocamento vertical w , respectivamente, que definem a solução analítica do citado exemplo, podem ser encontradas em livros clássicos como Hetényi (1946) e Sussekind (1974), e estão listadas na seqüência.

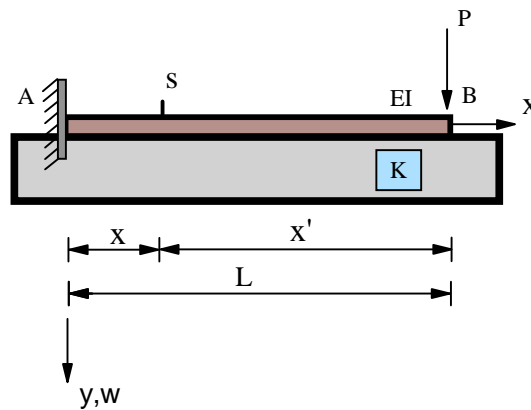


Figura 5.9 – Exemplo 3 – Esquema Estrutural.

$$M(x) = -\frac{P}{\lambda} \frac{\cosh \lambda x \operatorname{sen} \lambda x' \cosh \lambda L + \cos \lambda x \operatorname{senh} \lambda x' \cos \lambda L}{\cosh^2 \lambda L + \cos^2 \lambda L} \quad (5.9),$$

$$w(x) = \frac{2P\lambda}{K} \left(\frac{\operatorname{senh} \lambda x \cos \lambda x' \cosh \lambda L - \operatorname{sen} \lambda x \cosh \lambda x' \cos \lambda L}{\cosh^2 \lambda L + \cos^2 \lambda L} \right) \quad (5.10),$$

onde λ é dado pela equação 5.4.

A Figura 5.10 mostra o esquema estrutural do exemplo 3 com a base modelada conforme a disposição dos apoios elásticos indicada e apresenta também a condição deformada da viga após a aplicação da carga acima esquematizada, para o caso de contato bilateral. Para alguns valores de K , surgem regiões onde a base é tracionada, o que pode ser constatado através da tabela e dos gráficos. Nota-se que a viga não é simétrica, possibilitando um tipo de análise diferente dos exemplos anteriores.

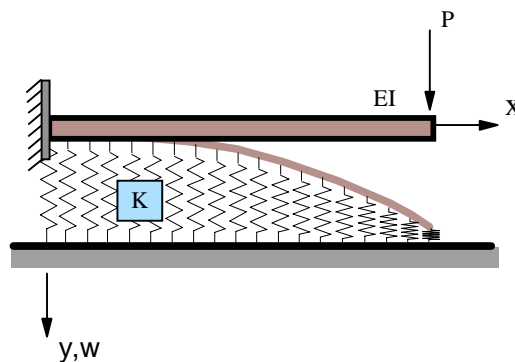


Figura 5.10 – Exemplo 3 - Configuração Deformada.

A tabela 5.3 mostra o estudo comparativo dos valores dos momentos fletores e dos deslocamentos obtidos através das soluções analíticas (Hetényi, 1964) e numéricas (presente trabalho) para alguns pontos da viga da estrutura acima mencionada. Assim como nos exemplos anteriores, também nesse caso, há um aumento dos erros nos pontos onde os valores calculados são muito pequenos. Isso normalmente acontece próximo das regiões onde os momentos fletores e/ou os deslocamentos se anulam, nas regiões de engastes ou mesmo nos casos em que a rigidez da base elástica é muito alta. O comportamento da viga, retratado através de gráficos contendo a variação dos valores representativos dos momentos fletores e dos deslocamentos, é demonstrado nas Figuras 5.11 e 5.12.

Tabela 5.3 – Exemplo 3 – Análise Comparativa dos Momentos Fletores e Deflexões.

$K(kN/m^2)$	$X(m)$	Momento fletor(kN.m)			Deflexão(m)		
		Sol. Analit.	Sol. Num.	Erro(%)	Sol. Analit.	Sol. Num.	Erro(%)
10	0.00	-472.74	-472.53	0.04	0.00000	0.00000	0.00
	2.50	-240.62	-240.54	0.03	0.12361	0.12311	0.41
	5.00	0.00	0.00	0.00	0.39719	0.39928	0.53
100	0.00	-310.10	-309.91	0.06	0.00000	0.00000	0.00
	2.50	-184.33	-184.18	0.08	0.08419	0.08410	0.10
	5.00	0.00	0.00	0.00	0.28072	0.28044	0.10
1000	0.00	-34.99	-35.02	0.08	0.00000	0.00000	0.00
	2.50	-81.41	-81.17	0.30	0.01640	0.01637	0.17
	5.00	0.00	0.00	0.00	0.07781	0.07756	0.32
10000	0.00	10.72	10.58	1.31	0.00000	0.00000	0.00
	2.50	-24.52	-24.28	0.99	-0.00033	-0.00031	4.70
	5.00	0.00	0.00	0.00	0.01406	0.01392	1.02
100000	0.00	-0.30	-0.28	5.29	0.00000	0.00000	0.00
	2.50	0.02	0.02	4.76	-0.00011	-0.00010	3.16
	5.00	0.00	0.00	0.00	0.00251	0.00244	3.17

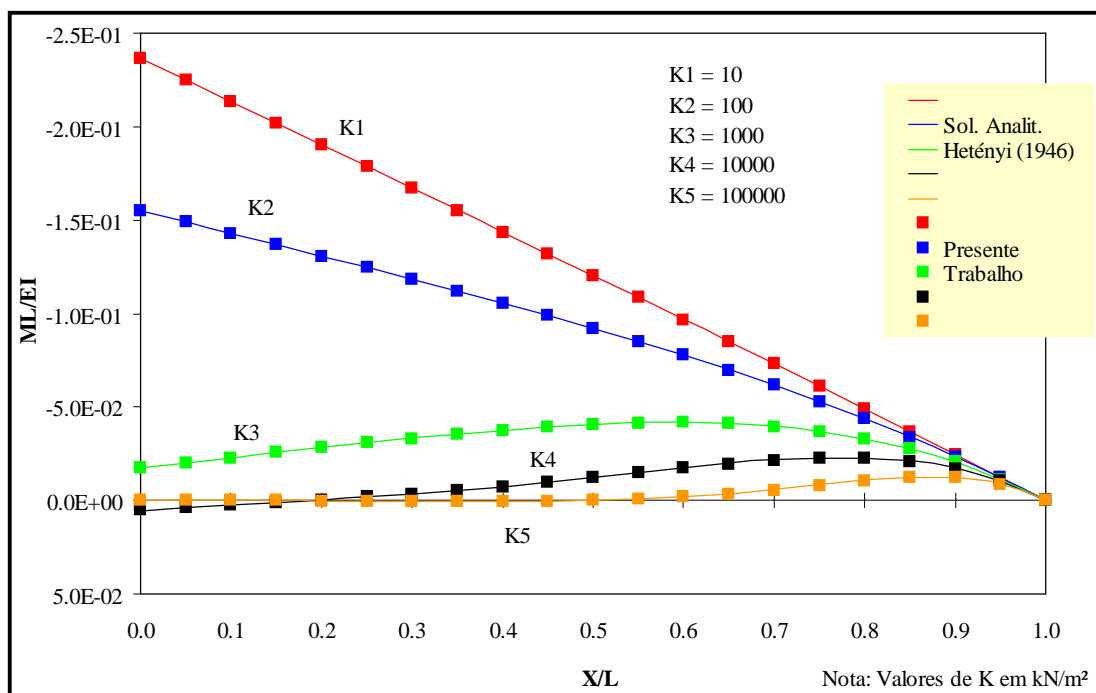


Figura 5.11 – Exemplo 3 – Momentos Fletores.

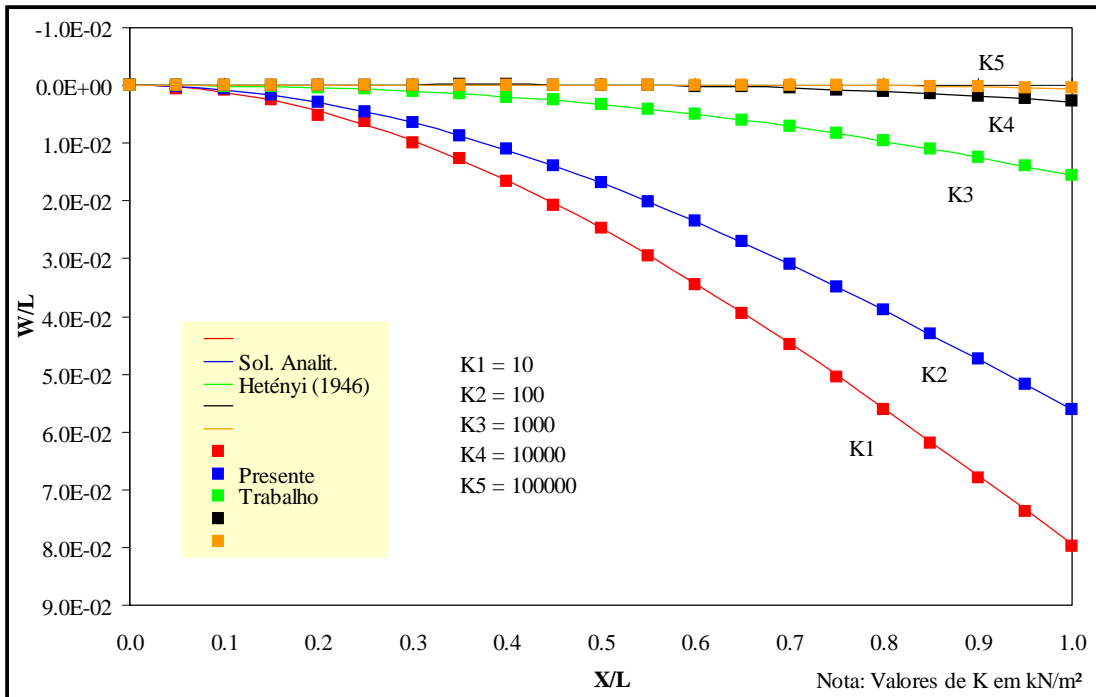


Figura 5.12 – Exemplo 3 - Deflexões.

5.3.4 - EXEMPLO 4

Para que se possa analisar a influência do comprimento L da viga na análise do problema de contato bilateral, este exemplo apresenta a análise de uma viga de

comprimento infinito. O comprimento da viga foi determinado de forma que os momentos e os deslocamentos tomados nas extremidades fossem iguais ou bem próximos de zero. Para representar esse tipo de problema, considerou-se uma viga apoiada apenas sobre uma base elástica e sujeita a uma carga concentrada aplicada no meio, conforme indicado na Figura 5.13. Os principais dados são: $P = 10^3 \text{ kN}$, $L = 50 \text{ m}$ e $EI = 10^4 \text{ kN.m}^2$.

A demonstração das equações analíticas para momento fletor M e deflexão lateral w , que descrevem o comportamento da estrutura dada, pode ser encontrada em Hetényi (1946). Vale colocar que as equações dadas para a solução analítica considerando caso de vigas infinitas são diferentes das equações dadas para o caso de vigas finitas. Convém, entretanto, ressaltar, que a análise feita pelo presente trabalho é a mesma para ambos os casos e o que difere uma análise da outra é a variação do comprimento L da viga. As equações 5.11 e 5.12 listadas na seqüência, correspondem às acima mencionadas.

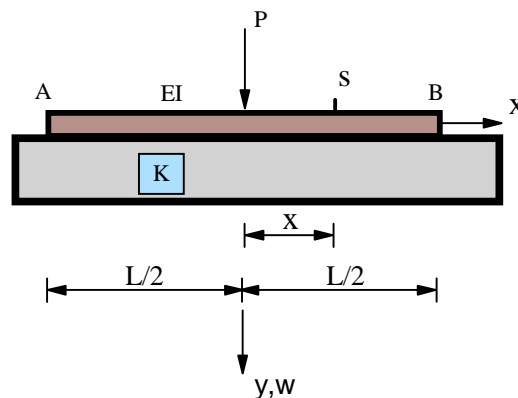


Figura 5.13 – Exemplo 4 – Esquema Estrutural.

$$M(x) = \frac{P}{4\lambda} e^{-\lambda x} (\cos \lambda x - \text{sen } \lambda x)$$

(5.11),

$$w(x) = \frac{P\lambda}{2K} e^{-\lambda x} (\cos \lambda x + \text{sen } \lambda x)$$

(5.12)

onde λ é dado pela equação 5.4.

Para uma melhor compreensão do comportamento estrutural, a Figura 5.14 mostra a base modelada de acordo a teoria adotada e apresenta a configuração deformada da barra para o caso de contato bilateral, conforme a aplicação da carga acima esquematizada.

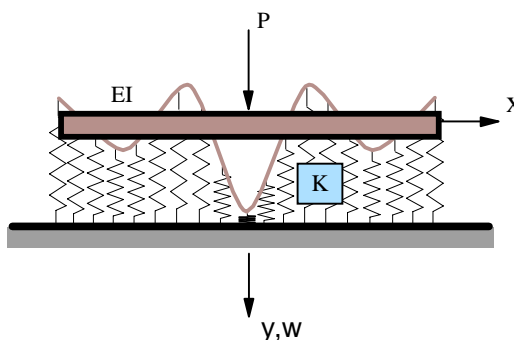


Figura 5.14 – Exemplo 4 - Configuração Deformada.

Mostram-se, a seguir, as análises feitas para esse caso. O esquema estrutural proposto foi analisado para apenas um valor de K igual a 10^3 kN/m^2 . Considerando que o comprimento da viga é muito grande, o que resulta em um número muito grande de apoios elásticos, a tabela 5.4 apresenta as comparações dos resultados de apenas alguns apoios. Devido à simetria da problema, estão contidos na tabela os resultados apenas para metade da viga. As Figuras 5.15 e 5.16 mostram os gráficos traçados através dos resultados do problema.

Uma vez considerado o problema de contato bilateral, fica fácil perceber, que, quando a viga sofre a ação do carregamento, as regiões de tração e compressão da base se formam de maneira alternada, ou seja, a viga se deforma sobre o aspecto de onda e os valores dos resultados decrescem ao longo do comprimento da viga.

Tabela 5.4 – Exemplo 4 – Análise Comparativa dos Momentos Fletores e Deflexões.

$K(kN/m^2)$	$X(m)$	<i>Momentos fletores(kN.m)</i>			<i>Deflexões(m)</i>		
		<i>Sol. Analit.</i>	<i>Sol. Num.</i>	<i>Erro(%)</i>	<i>Sol. Analit.</i>	<i>Sol. Num.</i>	<i>Erro(%)</i>
1000	25.00	-0.01	0.00	100.00	-0.00001	-0.00003	154.58
	23.00	-0.08	-0.06	29.20	-0.00001	-0.00002	36.40
	21.00	-0.20	-0.19	6.37	0.00002	0.00002	5.64
	19.00	-0.22	-0.21	1.19	0.00013	0.00013	1.26
	17.00	0.31	0.31	0.67	0.00031	0.00031	0.20
	15.00	2.04	2.04	0.12	0.00032	0.00033	1.00
	13.00	4.79	4.79	0.05	-0.00052	-0.00052	0.38
	11.00	4.84	4.86	0.35	-0.00319	-0.00318	0.35
	9.00	-8.47	-8.43	0.45	-0.00738	-0.00735	0.30
	7.00	-50.03	-49.99	0.08	-0.00720	-0.00719	0.22
	5.00	-113.61	-113.68	0.06	0.01385	0.01387	0.12
	3.00	-106.89	-107.30	0.38	0.07831	0.07833	0.03
0.00	628.72	627.68	0.16	0.19882	0.19880	0.01	

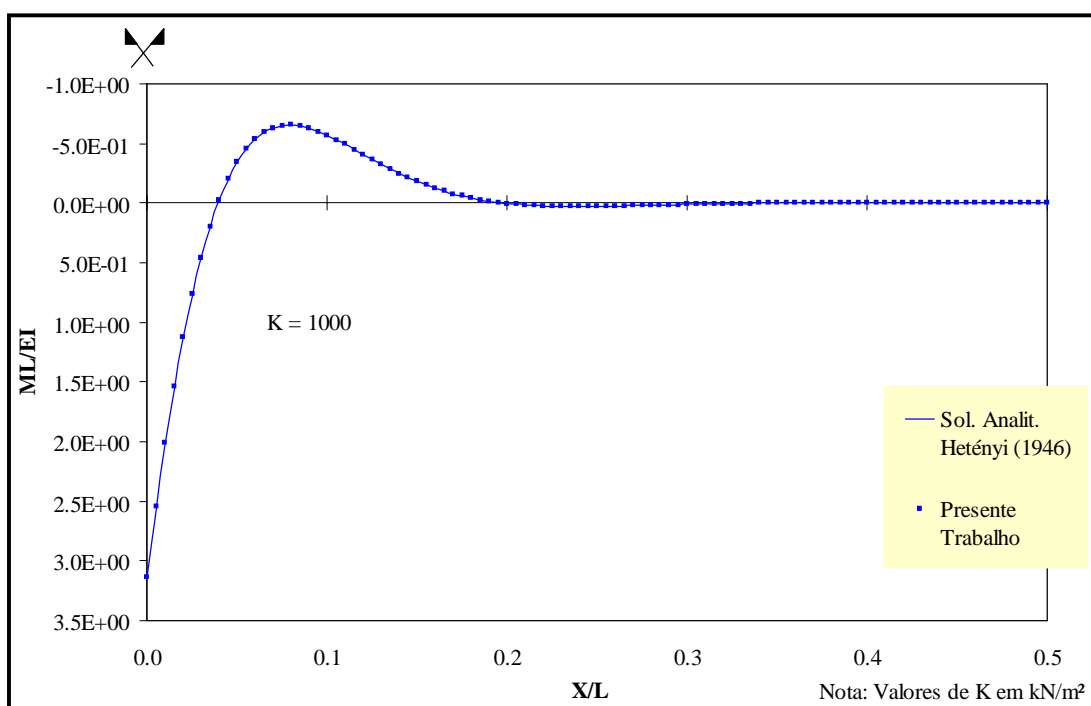


Figura 5.15 – Exemplo 4 – Momentos Fletores.

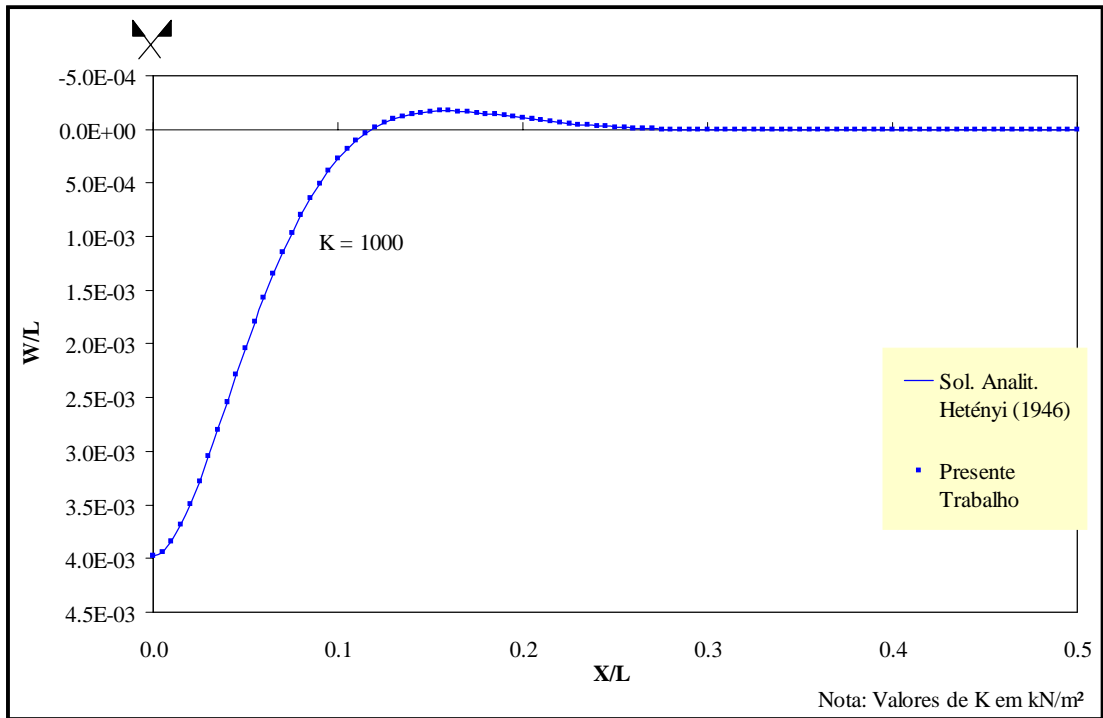


Figura 5.16 – Exemplo 4 - Deflexões.

5.4 - PROBLEMA DE CONTATO UNILATERAL

Essa seção traz a análise do problema de contato unilateral entre vigas e bases elásticas, que é mostrada através dos exemplos numéricos a seguir. É importante colocar que esta análise é não-linear, uma vez que considera a formação de regiões sem contato entre viga e fundação, ou seja a base resiste apenas aos esforços de compressão. Assim como na análise bilateral, os efeitos das forças de atrito entre a viga e a base são desprezados.

Para cada problema, são utilizadas tabelas comparativas que mostram os erros encontrados através da comparação feita entre os resultados numéricos obtidos através do presente trabalho e os resultados numéricos de Pereira (2003), que usou o “Método dos Elementos Finitos” e a técnicas de programação matemática como metodologias de solução para os problemas de contato.

Para se chegar à resposta dos problemas de contato unilateral, o programa toma como base os valores obtidos através da análise bilateral e, desprezando os apoios sujeitos aos esforços de tração, através de um processo iterativo, chega-se ao resultado final que é a solução do problema de contato unilateral. Para se desprezarem os apoios sujeitos aos esforços de tração, foi preciso substituir os valores das constantes de mola por valores pequenos mas que fossem suficientemente altos para não se ocasionarem erros numéricos ao programa. Este procedimento está descrito a seguir: nos casos em que os valores do coeficiente de rigidez da fundação K são da ordem de 10 kN/m^2 e 10^2 kN/m^2 , são tomados valores de 1 kN/m para a constante de mola, o que não ultrapassa a dez por cento do valor inicialmente atribuído. Desta forma não afetam o resultado nem provocam erros numéricos ao programa. Para valores onde o coeficiente de rigidez da fundação varia entre 10^3 kN/m^2 e 10^5 kN/m^2 , são tomados valores de 5 kN/m para a constante de mola. Houve, neste caso, também, a preocupação de não se usar valores de K , altos, que pudessem influenciar nos resultados. Considerando a magnitude dos demais dados, fez-se necessário que este valor fosse o menor possível, desde que não ocasionasse erros numéricos ao programa.

5.4.1 – EXEMPLO 5

Este exemplo trata o caso de uma viga apoiada nas extremidades por dois apoios rígidos e sujeita a duas cargas momento também aplicadas nessas extremidades, conforme indicado na Figura 5.17. Há, em todo o comprimento da viga, o contato dessa com uma base elástica. Foram adotados os seguintes valores para o momento fletor e para a rigidez a flexão: $M_1 = 10^2 \text{ kN.m}$, $M_2 = -10^2 \text{ kN.m}$, $EI = 10^3 \text{ kN.m}^2$. E para o comprimento da viga, tem-se $L = 5 \text{ m}$.

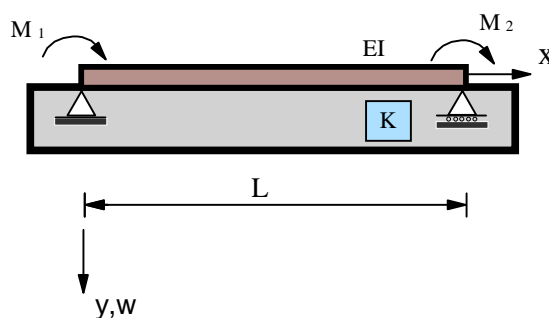


Figura 5.17 – Exemplo 5 – Esquema Estrutural.

A Figura 5.18 mostra a estrutura deste exemplo com a base representada por apoios deformáveis. Inicialmente, atenção especial será dada à análise do problema de contato unilateral (PCU), onde se considera que a fundação reage apenas às solicitações de compressão. Posteriormente, será tratado o problema clássico de contato entre a viga e a base elástica do tipo Winkler, onde se considera que a base tem o mesmo comportamento à tração e à compressão; trata-se então do problema de contato bilateral (PCB). Nota-se, que, para determinados valores do carregamento, a viga apresenta em sua configuração deformada o surgimento de uma região sem contato e outra onde permanece o contato entre a viga e a fundação, caracterizando assim, o problema de contato unilateral.

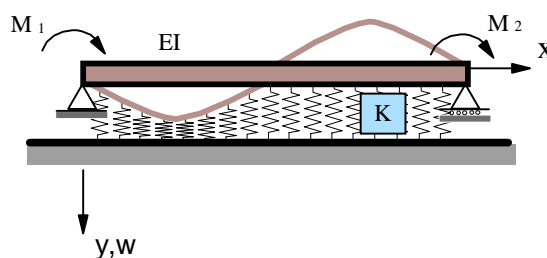


Figura 5.18 – Exemplo 5 - Configuração Deformada.

A tabela 5.5 traz os resultados dessa análise. Nela pode-se notar uma boa concordância dos resultados quando é feita a comparação entre os valores dos deslocamentos obtidos através das soluções numéricas do presente trabalho (*Sol. Num.2*) e de Pereira (2003) (*Sol. Num.1*).

As Figuras 5.19 e 5.20 fornecem, para diversos valores de K , a variação do momento fletor ao longo da barra. Os problemas de contato bilateral (PCB) e unilateral (PCU) são comparados na figura 5.20.

A Figura 5.21 compara as soluções dos deslocamentos de Pereira (2003) e do presente trabalho. Nela fica evidenciada a influência do parâmetro de rigidez K no comportamento do sistema estrutural em análise, para o caso do problema de contato unilateral. Através do gráfico, nota-se claramente, que a região de contato entre os corpos diminui à medida o valor da rigidez da base elástica aumenta. Finalmente, a Figura 5.22 tem o propósito de verificar, para uma base elástica de parâmetros K indicados, a diferença entre a consideração do contato bilateral (PCB) e contato unilateral (PCU) entre os corpos. Considerou-se apenas os resultados do presente trabalho para a deflexão lateral da viga. Conclui-se que a consideração das restrições unilaterais de contato na análise, introduz significativas mudanças no comportamento da estrutura em estudo. Os valores de K variam conforme indicado na tabela.

Tabela 5.5 – Exemplo 5 – Análise Comparativa dos Deslocamentos.

$K(kN/m^2)$	$X(m)$	<i>Deflexões(m)</i>		
		<i>Sol. Num.1</i>	<i>Sol. Num.2</i>	<i>Desvio(%)</i>
10	1.25	0.03824	0.03876	1.38
	3.75	-0.03972	-0.03940	0.80
100	1.25	0.03255	0.03294	1.19
	3.75	-0.04416	-0.04379	0.84
1000	3.50	-0.05642	-0.05621	0.36
	3.75	-0.05748	-0.05686	1.07
10000	3.25	-0.06869	-0.06752	1.69
	3.75	-0.06977	-0.06863	1.63
100000	3.50	-0.07865	-0.07858	0.08
	3.75	-0.07702	-0.07632	0.90

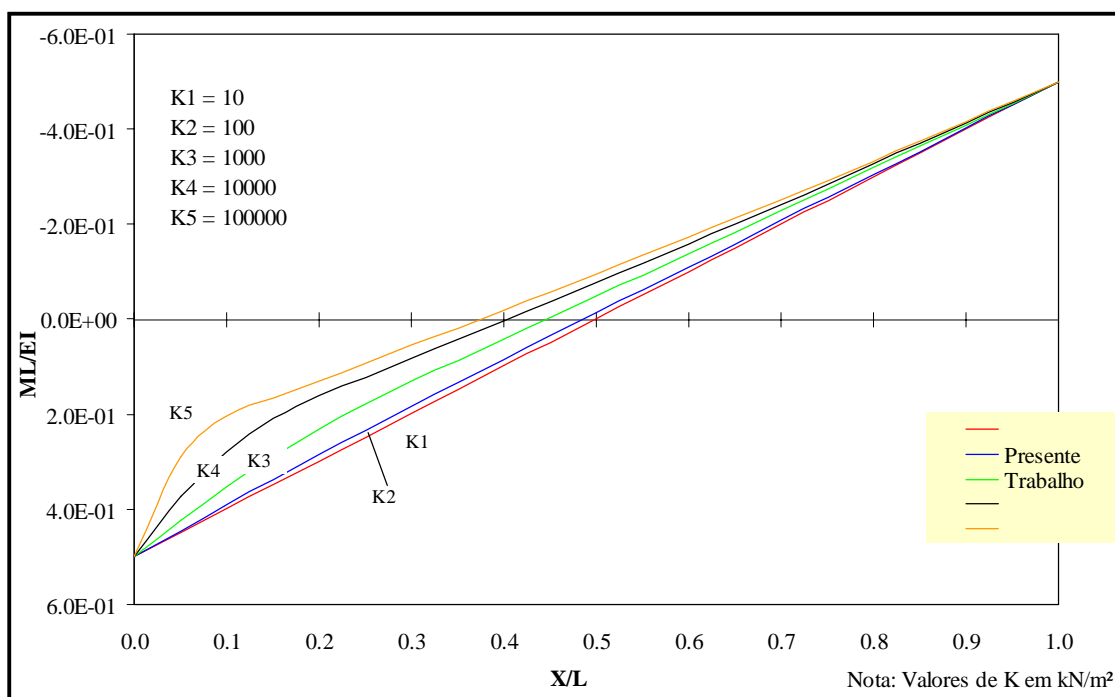


Figura 5.19 – Exemplo 5 – Momentos Fletores.

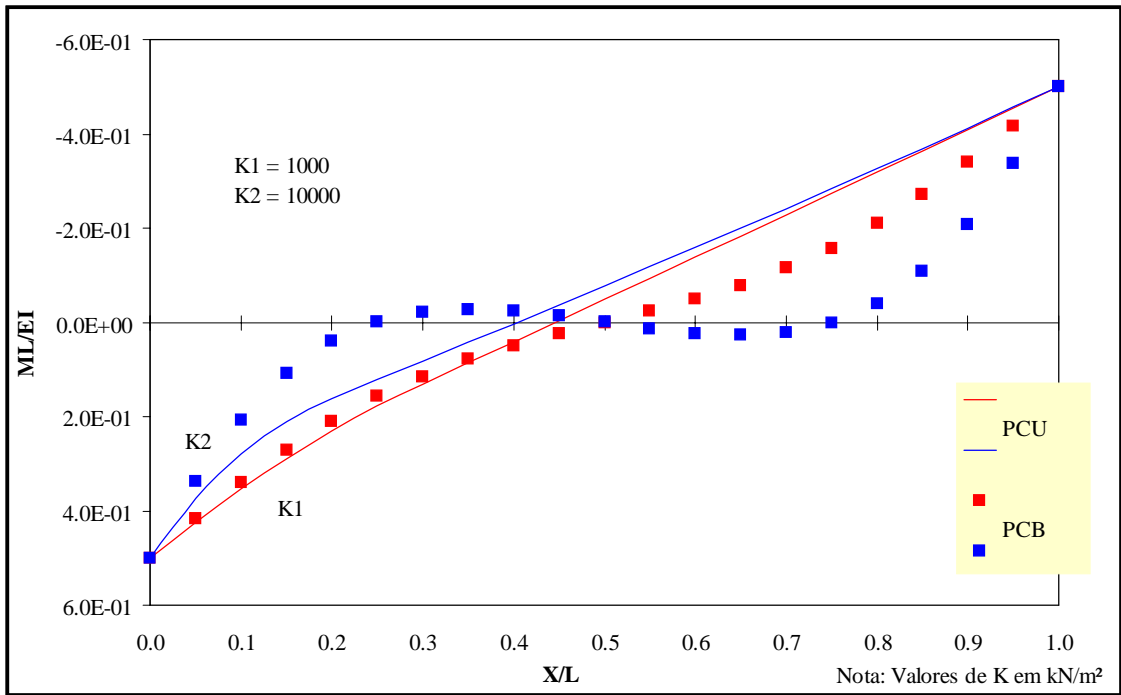


Figura 5.20 – Exemplo 5 – Comparação dos Problemas de Contato – Momento Fletor.

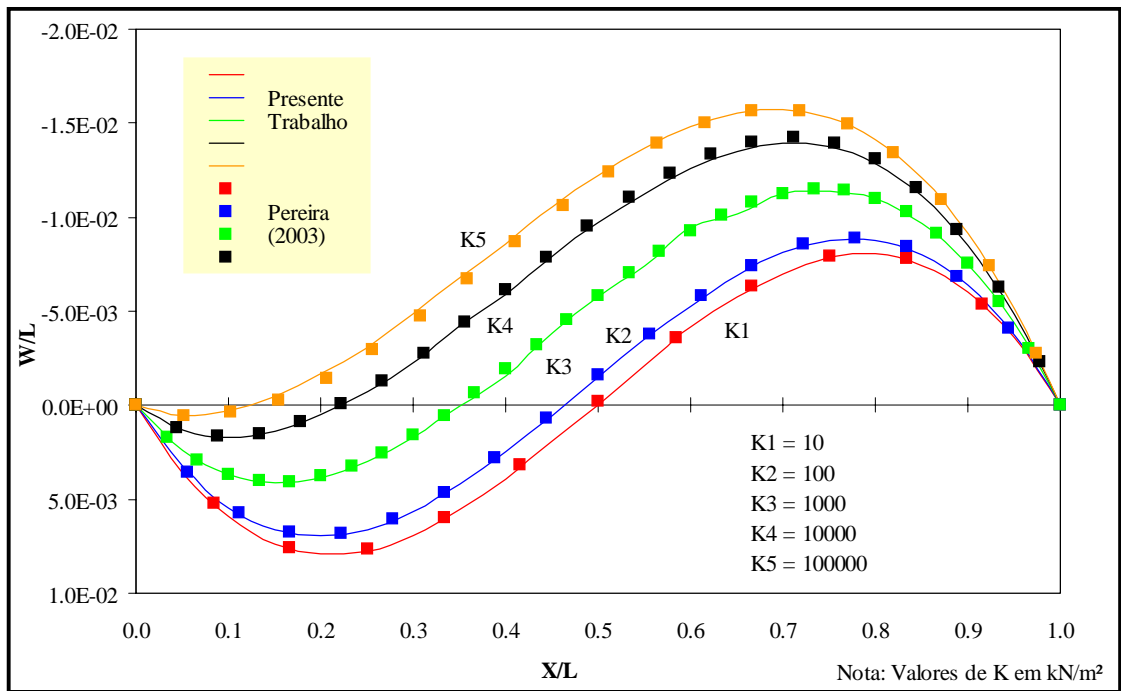


Figura 5.21 – Exemplo 5 - Deflexões.

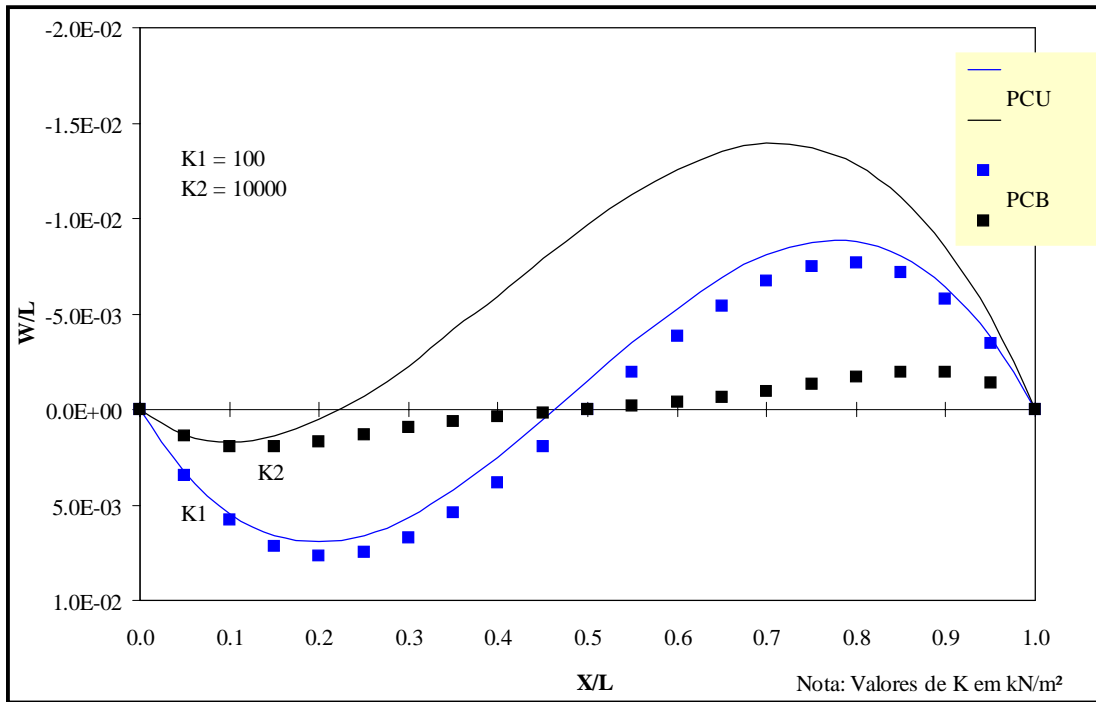


Figura 5.22 – Exemplo 5 – Comparação dos Problemas de Contato para as Deflexões.

5.4.2 – EXEMPLO 6

A Figura 5.23 fornece o segundo problema a ser analisada a situação de contato unilateral. Trata-se de uma viga com dois apoios rígidos nas extremidades e apoiada em todo o seu comprimento sobre uma fundação elástica. O carregamento aplicado consiste de momentos fletores concentrados, de mesma intensidade, aplicados nas extremidades e uma carga vertical aplicada no cento, no sentido positivo do eixo y . O comprimento da barra é dado por $L = 10\text{ m}$. Foram considerados para os momentos fletores e para a carga concentrada os seguintes valores: $M_1 = -10^2\text{ kN.m}$, $M_2 = 10^2\text{ kN.m}$ e $P = 150\text{ kN}$ e para a rigidez a flexão o valor de $EI = 10^3\text{ kN.m}^2$.

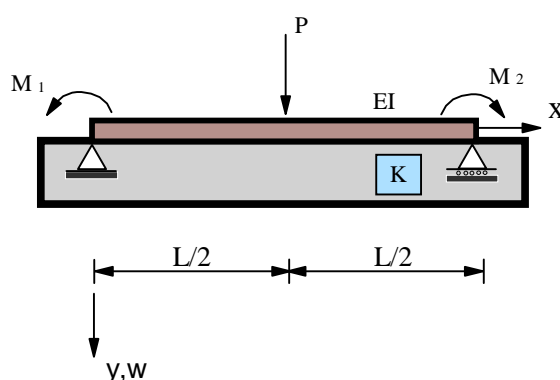


Figura 5.23 – Exemplo 6 – Esquema Estrutural.

Conforme a análise feita na seção anterior, será analisado inicialmente o problema de contato unilateral (PCU) e, conseqüentemente, o problema de contato bilateral (PCB) entre os corpos. Atenção especial será dada aos resultados do primeiro problema. A Figura 5.24 mostra o modelo adotado para a estrutura acima, com a base representada através de molas, onde é considerando o modelo de fundação de Winkler na solução. É também apresentada a configuração deformada da barra. Vê-se através dos gráficos a seguir, que, dependendo da magnitude do coeficiente K , do carregamento aplicado e considerando a hipótese de contato unilateral, podem surgir duas regiões onde há a perda de contato nas extremidades da viga com a fundação, caracterizando o contato unilateral.

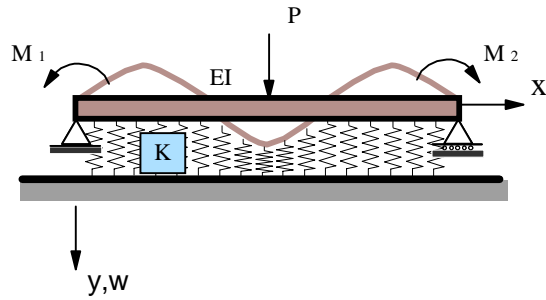


Figura 5.24 – Exemplo 6 - Configuração Deformada.

A tabela 5.6, mostrada a seguir, fornece a variação da deflexão lateral da viga para diversos valores do parâmetro de rigidez da base elástica K . Mais uma vez pode-se notar, através da comparação feita entre os soluções numéricas de Pereira (*Sol. Num.1*) e do presente trabalho (*Sol. Num.2*), uma boa concordância dos resultados.

As Figuras 5.25 e 5.27 fornecem os gráficos com os resultados dos momentos fletores e das deflexões, respectivamente, calculados para diversos valores do parâmetro K da base elástica. Fica evidenciada mais uma vez a influência desse parâmetro no comportamento estrutural quando se considera o problema de contato unilateral. Através da Figura 5.27, percebe-se que a região de contato entre os corpos diminui à medida que o valor da rigidez da base aumenta. No caso da base flexível (valor de K baixo), tem-se o contato completo entre os corpos. A reação da base, considerando o problema de contato unilateral entre os corpos, está mostrada na Figura 5.29. Como pretendido, pode-se notar aí, a reação da base apenas na região onde o contato entre os corpos permanece.

As Figuras 5.26 e 5.28 têm o propósito de mostrar a diferença entre a consideração do contato bilateral (PCB) e do contato unilateral (PCU) entre os corpos. Conclui-se que a consideração das restrições unilaterais de contato na análise introduz significativas mudanças no comportamento do sistema estrutural em estudo.

Vale afirmar, que, para a base elástica mais rígida, isto é, com valores de K mais elevados, as soluções apresentadas começam a se divergir.

Tabela 5.6 – Exemplo 6 – Análise Comparativa dos Deslocamentos.

$K(kN/m^2)$	$X(m)$	Deflexões(m)		
		Sol. Num.1	Sol. Num.2	Desvio(%)
10	2.75	0.64205	0.63395	1.26
	7.25	0.64205	0.63312	1.39
100	3.00	0.10601	0.10664	0.59
	7.00	0.10601	0.10641	0.37
1000	1.25	-0.07477	-0.07368	1.46
	8.75	-0.07477	-0.07367	1.47
10000	1.00	-0.07777	-0.07471	3.94
	9.00	-0.07777	-0.07484	3.78
100000	1.25	-0.08813	-0.08376	4.95
	8.75	-0.08813	-0.08378	4.93

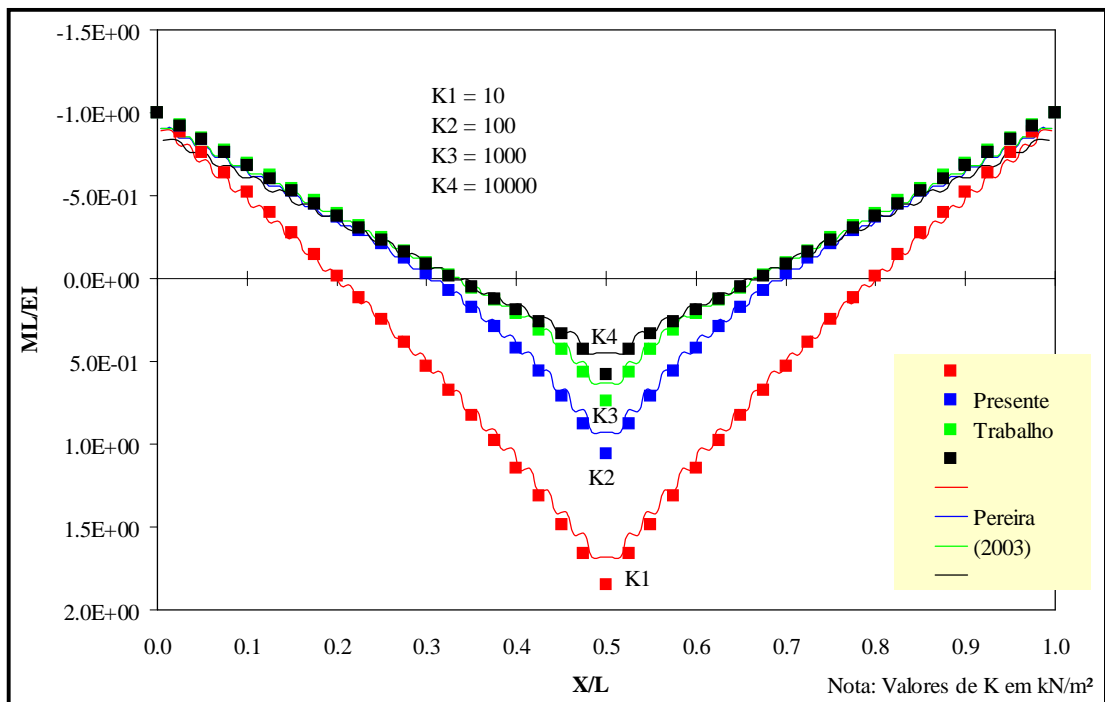


Figura 5.25 – Exemplo 6 – Momentos Fletores.

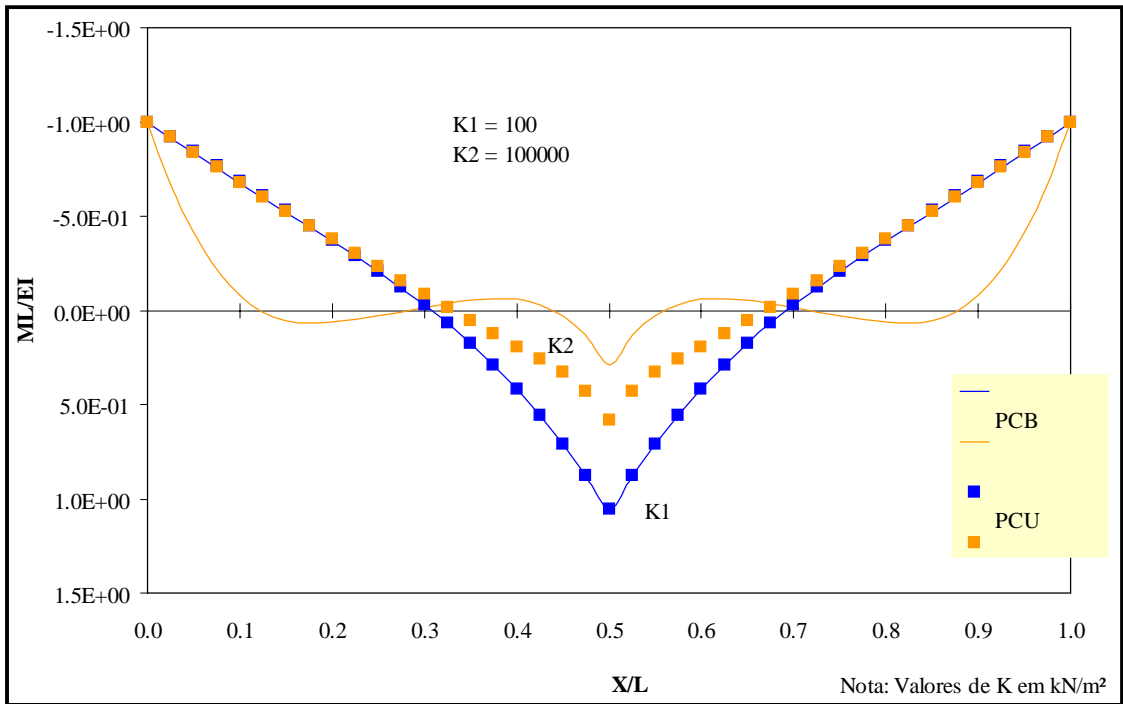


Figura 5.26 – Exemplo 6 – Comparação dos Problemas de Contato – Momento Fletor.

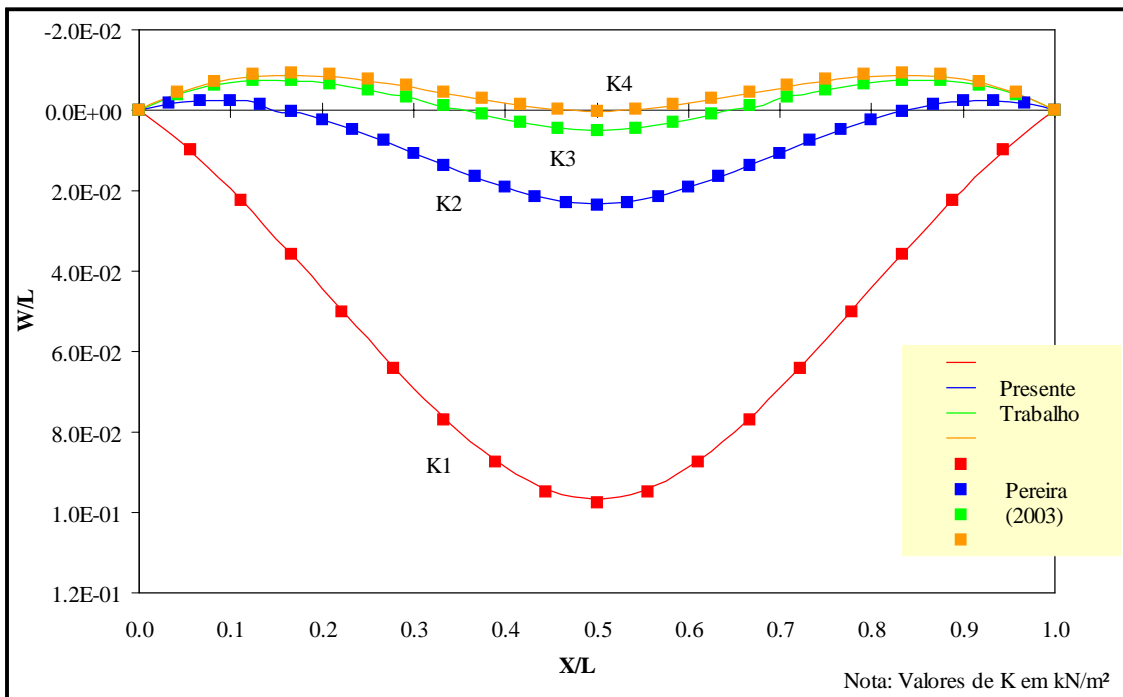


Figura 5.27 – Exemplo 6 - Deflexões.

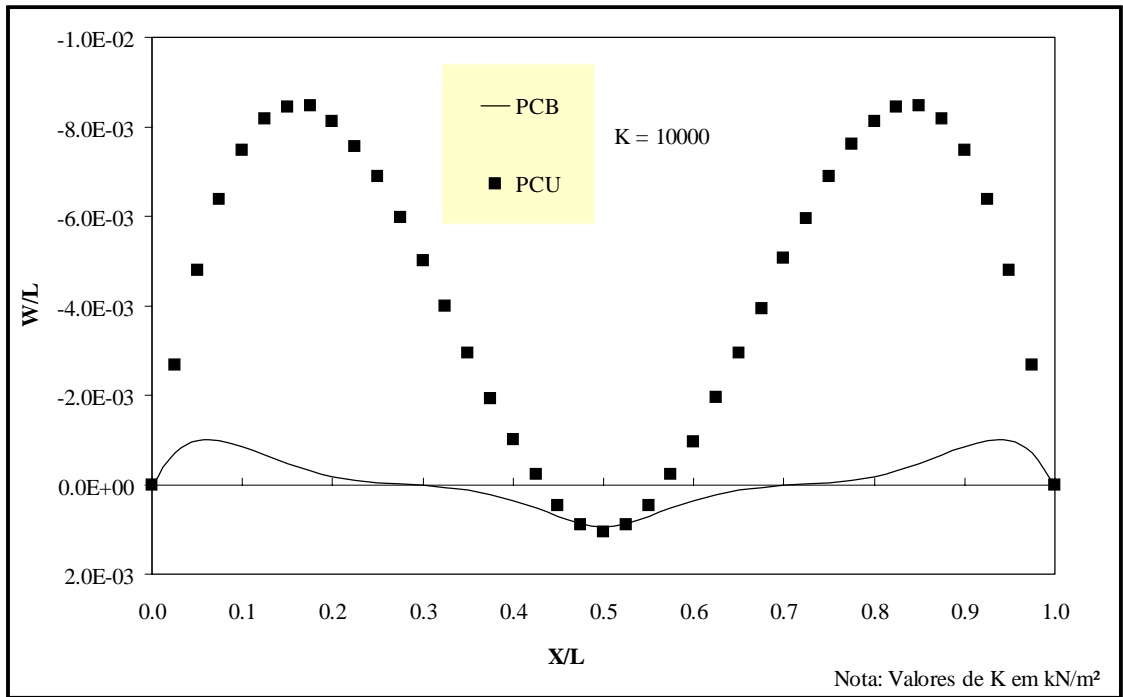


Figura 5.28 – Exemplo 6 – Comparação dos Problemas de Contato para as Deflexões.

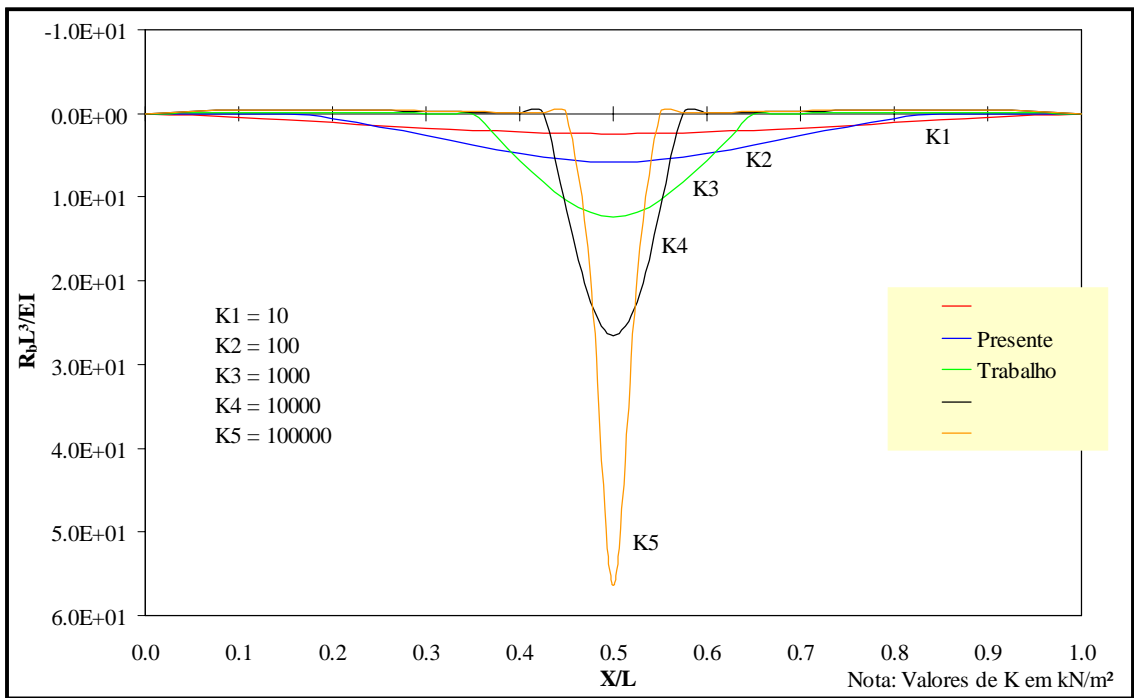


Figura 5.29 – Exemplo 6 – Reação R_b da Base Elástica.

5.4.3 – EXEMPLO 7

Para este exemplo, considere uma viga contínua, com dois vãos iguais a $L/2$, em contato com uma base elástica do tipo Winkler e submetida a uma carga uniformemente distribuída ao longo do primeiro vão, conforme mostra a Figura 5.30. Tem-se, para a análise do sistema estrutural proposto, a rigidez a flexão da viga $EI = 10^3 \text{ kN.m}^2$, o valor do carregamento $q = 1 \text{ kN/m}$ e para o comprimento de cada vão da barra tem-se $L/2 = 5 \text{ m}$.

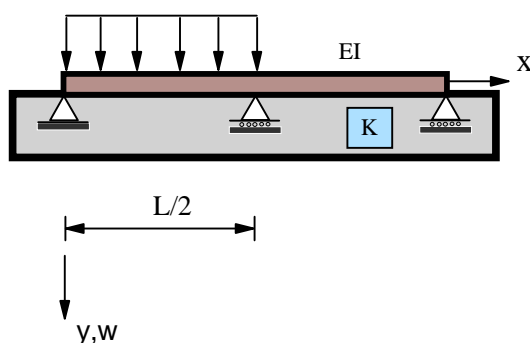


Figura 5.30 – Exemplo 7 – Esquema Estrutural.

O modelo adotado, incluindo a representação da base através de molas, e a configuração deformada da barra, do esquema estrutural acima, estão representados na Figura 5.31, de onde pode-se destacar a formação de uma região sem contato no vão direito e uma região de contato no vão esquerdo, caracterizando a situação de contato unilateral entre os corpos. Considerando várias magnitudes do parâmetro de rigidez da base K , para o problema de contato bilateral (PCB) e principalmente para o problema de contato unilateral (PCU) entre a viga e a base elástica, pôde-se analisar esses dois casos através dos gráficos mostrados posteriormente. Neste caso, como um dos vãos da viga perde totalmente o contato com a fundação, fica fácil perceber a grande influência da base, com valor de K elevado, no comportamento da viga. Isto pode ser visto com mais clareza nos gráficos que descrevem o comportamento da barra, considerando principalmente o valor de $K = 10^4 \text{ Kn/m}^2$.

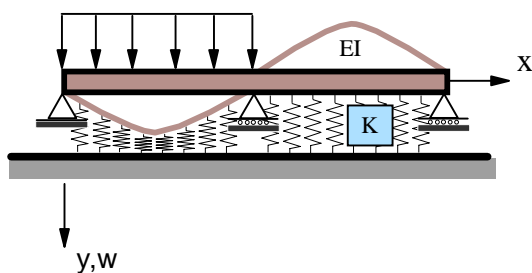


Figura 5.31 – Exemplo 7 - Configuração Deformada.

A tabela 5.7, com os resultados do estudo comparativo dos valores dos deslocamentos obtidos através da solução numérica do presente trabalho (*Sol. Num.2*) e de Pereira (2003) (*Sol. Num.1*), para alguns pontos da viga do exemplo 7, é registrada a seguir. Nota-se o bom desempenho do programa quando se analisam os erros, o que também pode ser evidenciado através dos gráficos.

A variação do momento fletor M ao longo da viga pode se vista na Figura 5.32. São comparados os resultados do presente trabalho e os de Pereira (2003) para vários valores do coeficiente de rigidez K da base.

A Figura 5.34 apresenta a variação da deflexão lateral w da viga, mostrando a boa concordância dos resultados obtidos através do presente trabalho com os de Pereira (2003).

Por fim, destaca-se a influência do tipo das restrições de contato entre a viga e a base elástica do tipo Winkler, através das Figuras 5.33 e 5.35, onde é mostrada a comparação do comportamento da viga, através dos momentos fletores e das deflexões laterais, respectivamente, considerando os problemas de contato bilateral (PCB) e unilateral (PCU).

No sistema estrutural em estudo, fica evidenciado, mais uma vez, a diferença de comportamento da viga e da base elástica, caso a hipótese de contato unilateral seja introduzida na análise.

Tabela 5.7 – Exemplo 7 – Análise Comparativa dos Deslocamentos.

$K(kN/m^2)$	$X(m)$	<i>Deflexões(m)</i>		
		<i>Sol. Num.1</i>	<i>Sol. Num.2</i>	<i>Desvio(%)</i>
10	2.50	0.005607	0.005437	3.03
	7.50	-0.002323	-0.002314	0.40
100	2.50	0.004003	0.003917	2.16
	7.50	-0.001683	-0.001691	0.45
1000	2.50	0.001019	0.001016	0.34
	7.50	-0.000486	-0.000495	1.93
10000	2.50	0.000108	0.000109	0.56
	7.50	-0.000089	-0.000087	2.17
100000	2.50	0.000010	0.000010	0.43

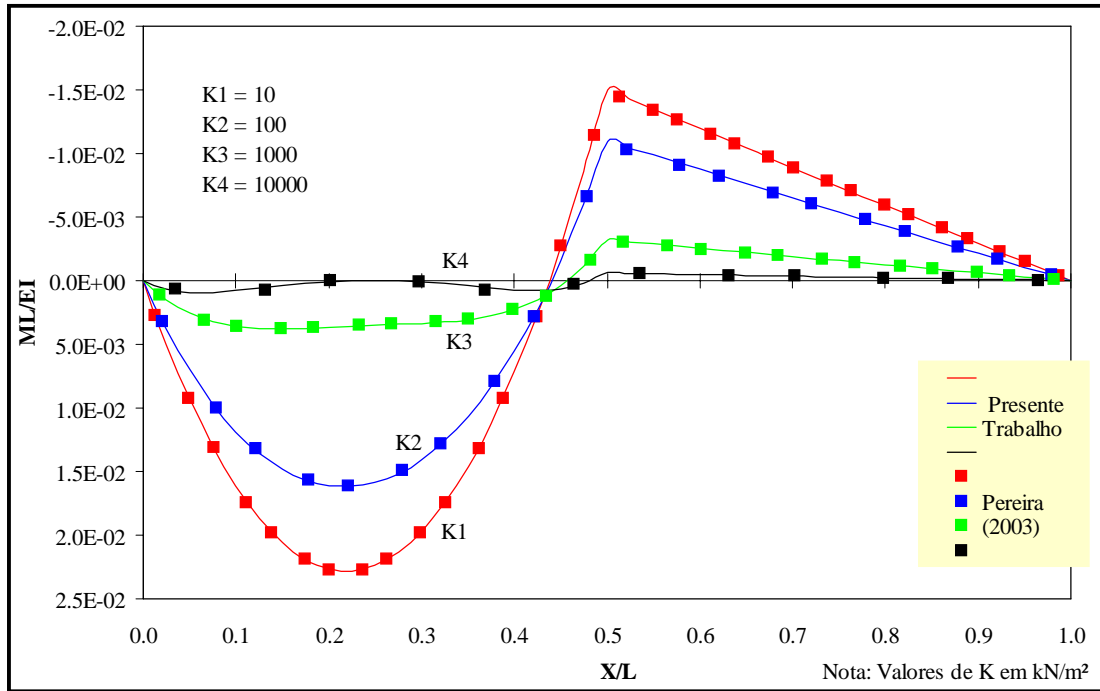


Figura 5.32 – Exemplo 7 – Momentos Fletores.

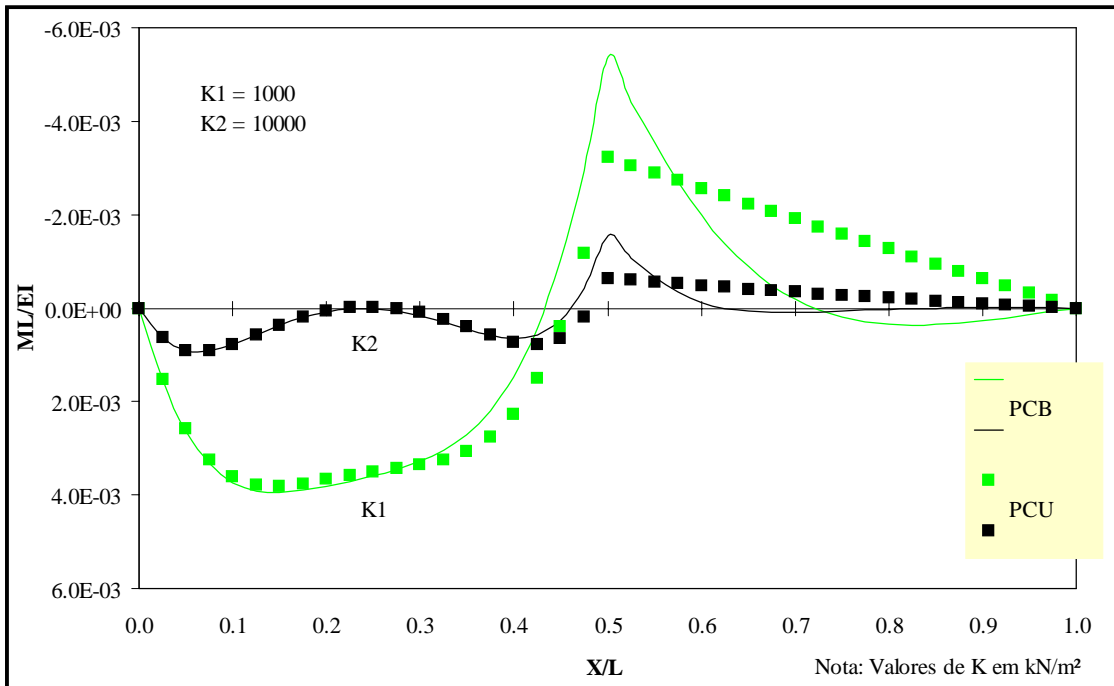


Figura 5.33 – Exemplo 7 – Comparação dos Problemas de Contato – Momento Fletor.

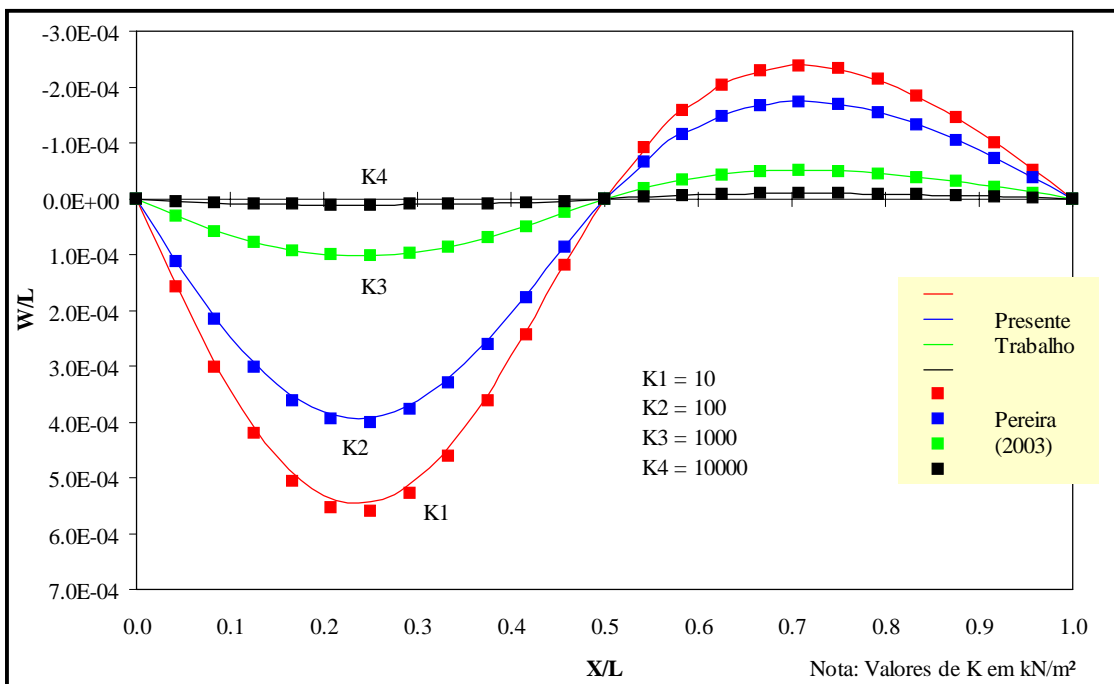


Figura 5.34 – Exemplo 7 – Deflexões.

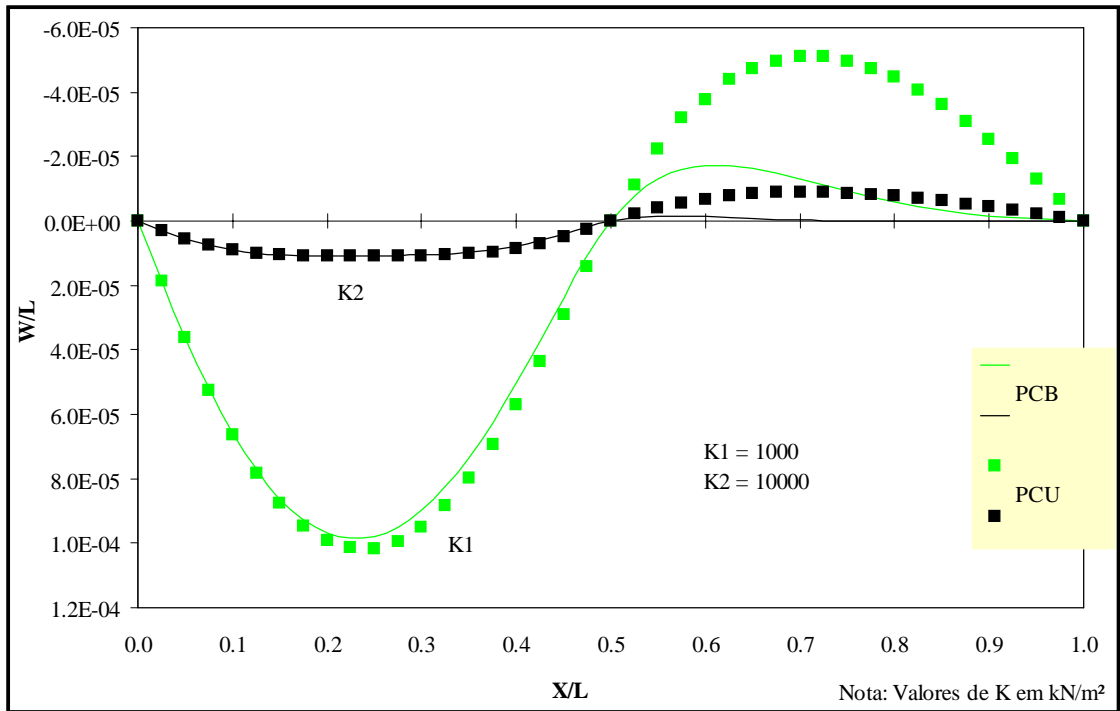


Figura 5.35 – Exemplo 7 – Comparação dos Problemas de Contato para as Deflexões.

5.4.4 – EXEMPLO 8

Conforme o exemplo anterior, esta seção tem o propósito de destacar, através da análise do sistema estrutural mostrado na Figura 5.36, como o comportamento de uma viga contínua pode ser alterado caso sejam consideradas restrições unilaterais de contato. Trata-se um caso de viga contínua de três vãos iguais de comprimento $L/3$, apoiada sobre quatro apoios rígidos e em contato com uma fundação elástica do tipo Winkler em todo o comprimento. A viga está sujeita a uma carga uniformemente distribuída, aplicada ao longo do vão central. Neste caso, o valor da rigidez a flexão da barra, EI , é de 10^3 kN.m^2 , o da carga q é de 1 kN/m e tem-se para o comprimento L o valor de 5 m .

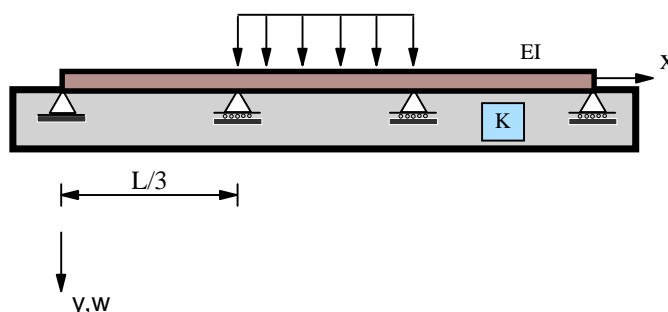


Figura 5.36 – Exemplo 8 – Esquema Estrutural.

Observe que ocorre a perda de contato entre a fundação e a viga, nos vãos externos, e permanece o contato no vão central, o que caracteriza o problema de contato unilateral. A Figura 5.37 fornece a configuração deformada da barra da estrutura do exemplo 8 com a base modelada através de molas. Nesta análise, também se considera o contato bilateral entre a base elástica e a viga, e os dois resultados estão mostrados e comparados nos gráficos mostrados na seqüência.

Assim como no exemplo anterior, também nesse, pode-se constatar a influência direta de bases muito rígidas, no comportamento da viga, que apresenta curvas que perdem a semelhança com as demais, traçadas com valores de K baixos.

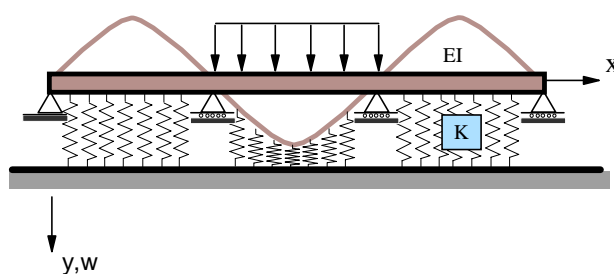


Figura 5.37 – Exemplo 8 – Configuração Deformada.

Como esperado, à medida que a base elástica torna-se mais rígida os deslocamentos da viga vão diminuindo. Considerando que a base reaja somente às solicitações de compressão, verifica-se, como também esperado, através da tabela 5.23, que a deflexão da barra na região de perda de contato torna-se mais elevada com a reação da base se anulando nessa região.

A tabela, acima mencionada, apresenta a comparação entre os valores dos deslocamentos obtidos através das soluções numéricas do presente trabalho (*Sol. Num.2*) e as de Pereira (2003) (*Sol. Num.1*) de alguns pontos da viga do exemplo 8. De um modo geral, os desvios encontrados foram pequenos, mostrando, mais uma vez, o bom desempenho do programa desenvolvido para a análise do problema de contato unilateral.

Os resultados dessa análise também podem ser vistos nas Figuras 5.38 a 5.42, onde são traçados os gráficos com as variações dos momentos fletores M , das deflexões laterais w e das reações da base R_b , para diversos valores do coeficiente de rigidez K da fundação. É mostrado, também, o comportamento da estrutura comparando, em alguns casos, os problemas de contato bilateral (PCB) e unilateral (PCU).

Tabela 5.8 – Exemplo 8 – Análise Comparativa dos Deslocamentos.

$K(kN/m^2)$	$X(m)$	<i>Deflexões(m)</i>		
		<i>Sol. Num.1</i>	<i>Sol. Num.2</i>	<i>Desvio(%)</i>
10	2.50	-0.001886	-0.001911	1.31
	7.50	0.004250	0.004073	4.16
	12.50	-0.001886	-0.001859	1.44
100	2.50	-0.001465	-0.001432	2.26
	7.50	0.003265	0.003158	3.26
	12.50	-0.001465	-0.001458	0.48
1000	2.75	-0.000493	-0.000497	0.76
	7.75	0.000954	0.000949	0.47
	12.75	-0.000458	-0.000468	2.09
10000	2.75	-0.000091	-0.000090	1.44
	7.75	0.000107	0.000108	1.32
	12.75	-0.000085	-0.000083	2.16
100000	7.5	0.000010	0.000010	0.36

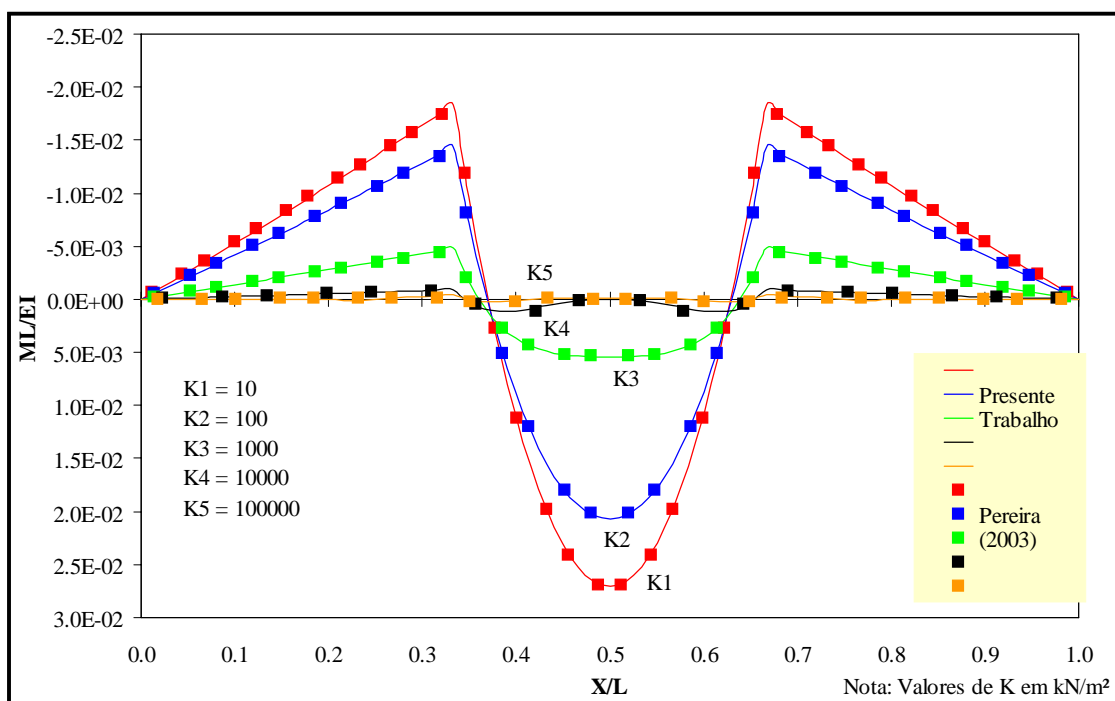


Figura 5.38 – Exemplo 8 – Momentos Fletores.

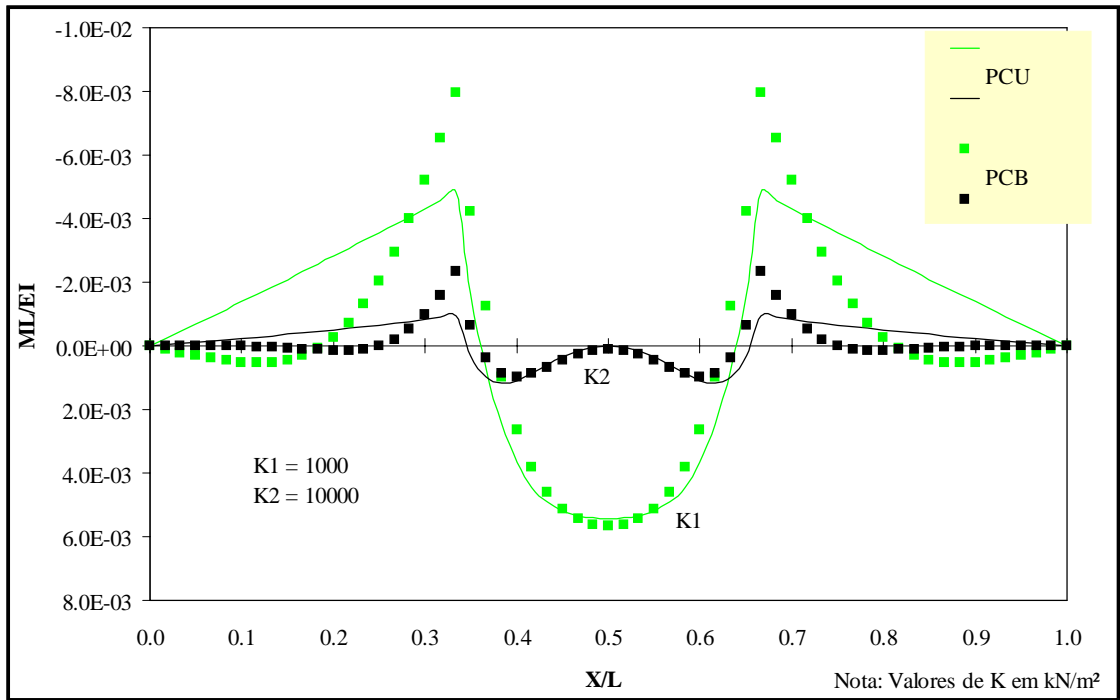


Figura 5.39 – Exemplo 8 – Comparação dos Problemas de Contato – Momento Fletor.

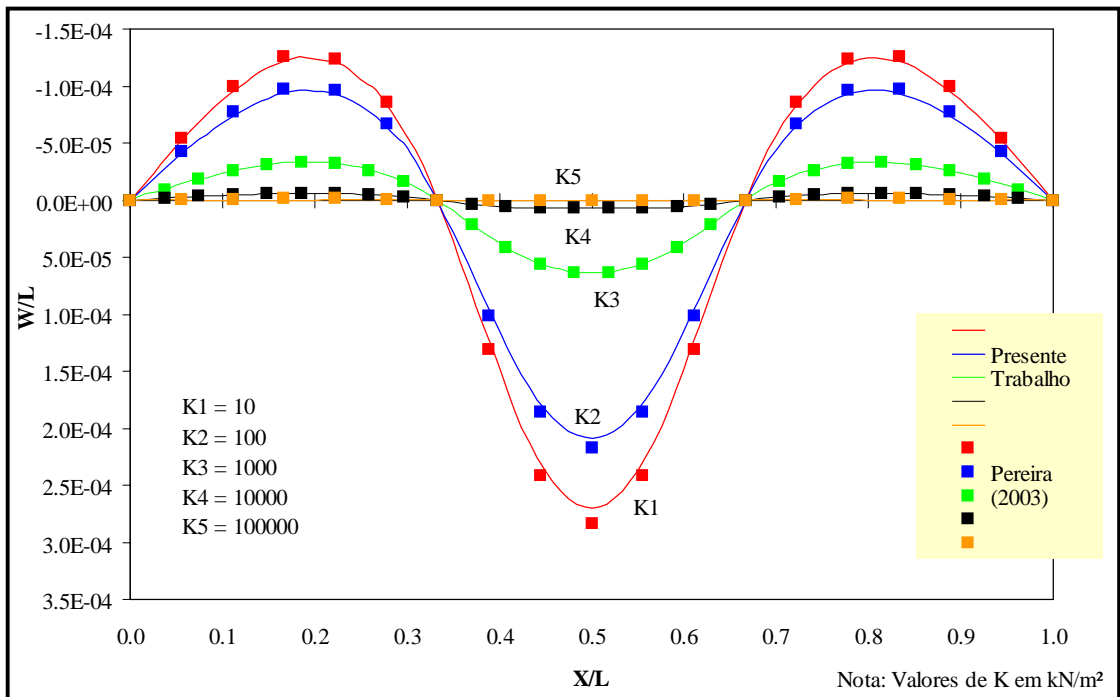


Figura 5.40 – Exemplo 8 – Deflexões.

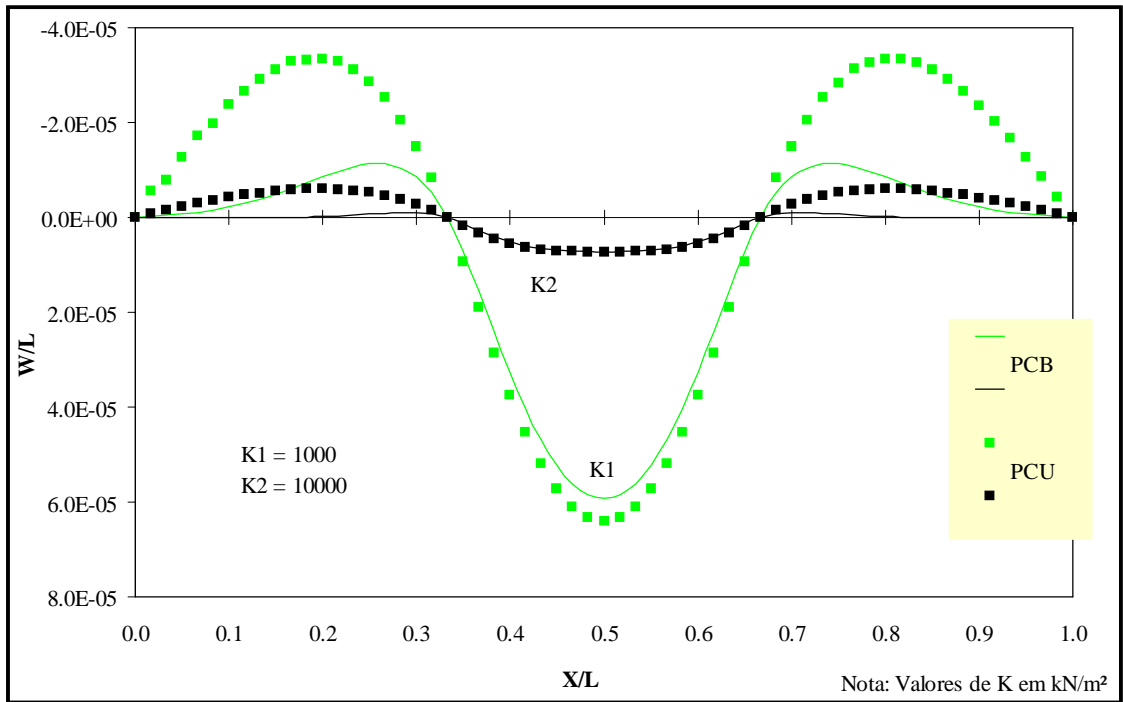


Figura 5.41 – Exemplo 8 – Comparação dos Problemas de Contato para as Deflexões.

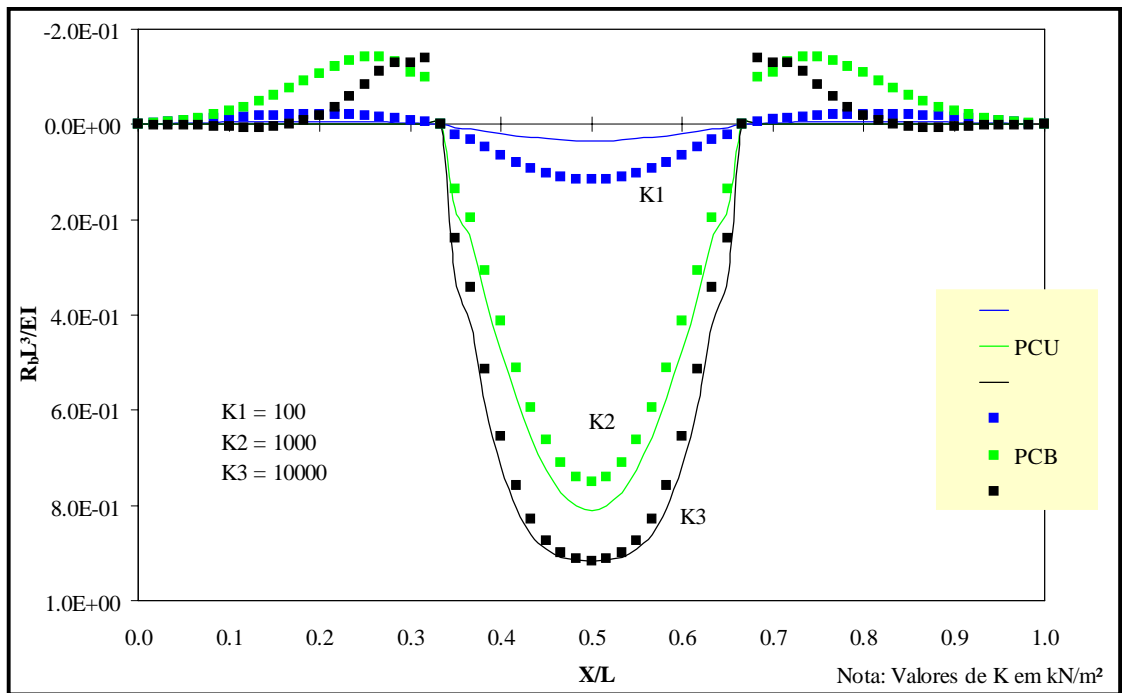


Figura 5.42 – Exemplo 8 – Reação R_b da Base Elástica.

5.4.5 – EXEMPLO 9

A Figura 5.43 ilustra o esquema estrutural a ser abordado nesta seção. Refere-se a uma viga totalmente apoiada sobre uma fundação elástica do tipo Winkler. O carregamento atuante é representado por uma carga concentrada aplicada no meio, no sentido positivo do eixo y . Os dados para a análise desta estrutura, são representados pelos valores da rigidez da barra de $EI = 10^3 \text{ kN.m}^2$, pelo valor do carregamento de $P = 10^2 \text{ kN}$ e pelo comprimento da viga de $L = 6 \text{ m}$. O problema é analisado considerando a hipótese de contato unilateral entre a viga e a fundação elástica. Uma Segunda hipótese é considerada, que é a de contato bilateral, e os resultados são comparados.

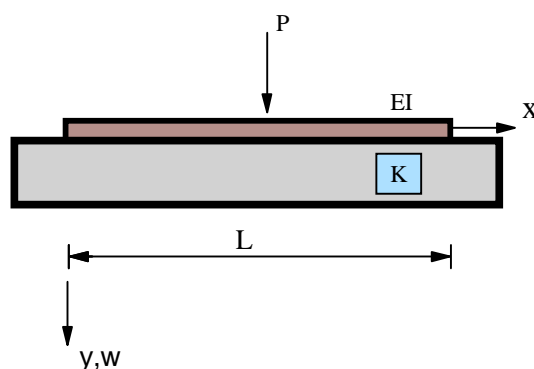


Figura 5.43 – Exemplo 9 – Esquema Estrutural.

Para esse exemplo, é importante salientar que, para determinados valores dos dados do problema, há casos em que há o aparecimento de regiões sem contato nas extremidades da barra. A Figura 5.44 apresenta o modelo da base elástica adotado, juntamente com a configuração deformada da viga, ressaltando esta perda de contato, o que caracteriza o problema de contato unilateral.

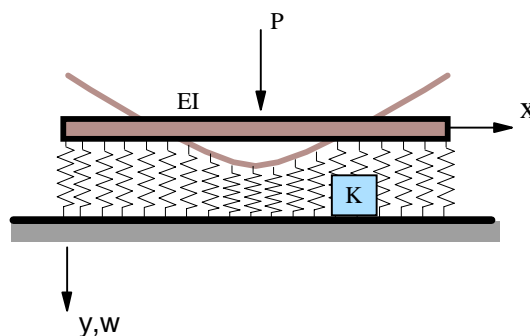


Figura 5.44 – Exemplo 9 - Configuração Deformada.

Os resultados apresentados a seguir, na tabela 5.9, comparam os valores dos deslocamentos obtidos através das soluções numéricas do presente trabalho (*Sol. Num.2*) e os de Pereira (2003) (*Sol. Num.1*) em diversos pontos da viga, para apenas um valor de K . No entanto, são apresentadas análises para vários valores desse. Observa-se, mais uma vez, uma boa aproximação entre os dois resultados comparados, o que comprova o bom desempenho do programa na análise dos problemas de contato unilateral.

A Figura 5.47 traz o gráfico com o comportamento da viga mostrado através dos valores da deflexões laterais. Neste caso, fez-se a comparação entre os valores calculados através do presente trabalho e de Pereira (2003) para apenas um valor de K .

As Figuras 5.45 e 5.49 mostram os gráficos representativos dos valores dos momentos fletores e da reação da base, respectivamente, para os coeficientes de rigidez da base indicados.

A comparação do comportamento da viga, considerando os problemas de contato bilateral (PCB) e unilateral (PCU), está mostrada nas Figuras 5.46 e 5.48.

Por fim, constata-se, como esperado, que os momentos se anularam onde houve a perda de contato da viga com a fundação. O que não ocorreu, também como esperado, quando se considerou o contato bilateral.

Tabela 5.9 – Exemplo 9 – Análise Comparativa dos Deslocamentos.

$K(kN/m^2)$	$X(m)$	<i>Deflexões(m)</i>		
		<i>Sol. Num.1</i>	<i>Sol. Num.2</i>	<i>Desvio(%)</i>
4000	0.00	0.01456	0.01363	6.42
	0.25	0.01332	0.01289	3.17
	0.50	0.01120	0.01112	0.75
	0.75	0.00870	0.00878	0.92
	1.00	0.00604	0.00617	2.30
	1.25	0.00337	0.00348	3.30
	1.75	-0.00192	-0.00195	1.56
	2.00	-0.00455	-0.00466	2.33
	2.50	-0.00983	-0.01008	2.60
	3.00	-0.01510	-0.01550	2.68

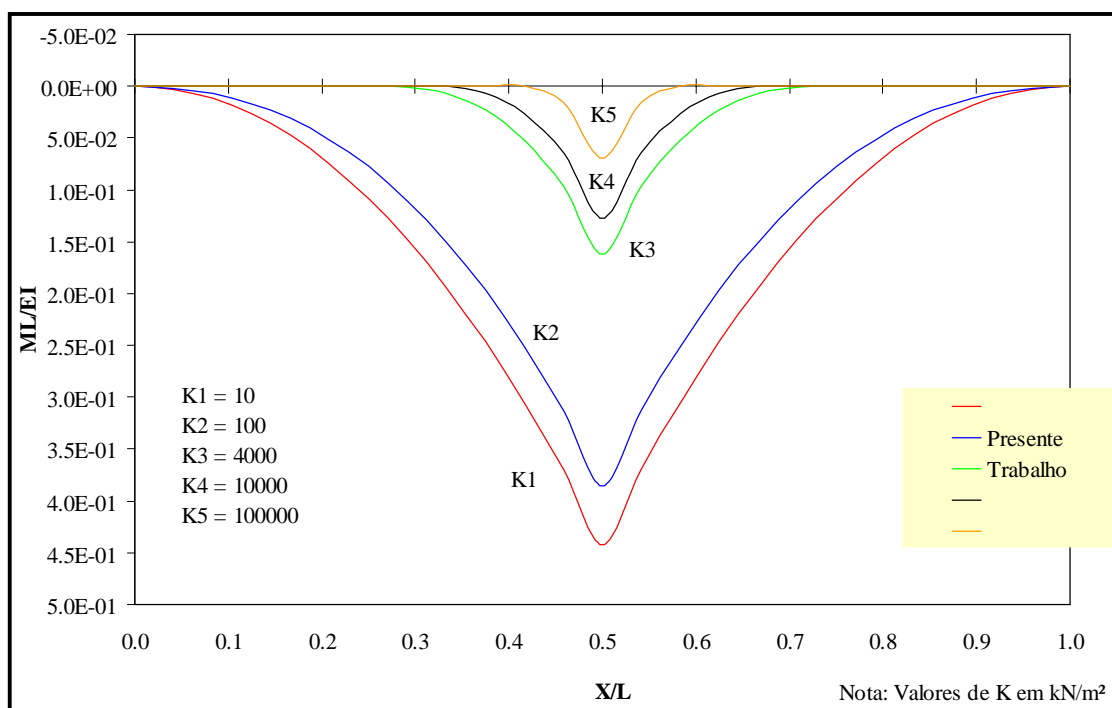


Figura 5.45 – Exemplo 9 – Momentos Fletores.

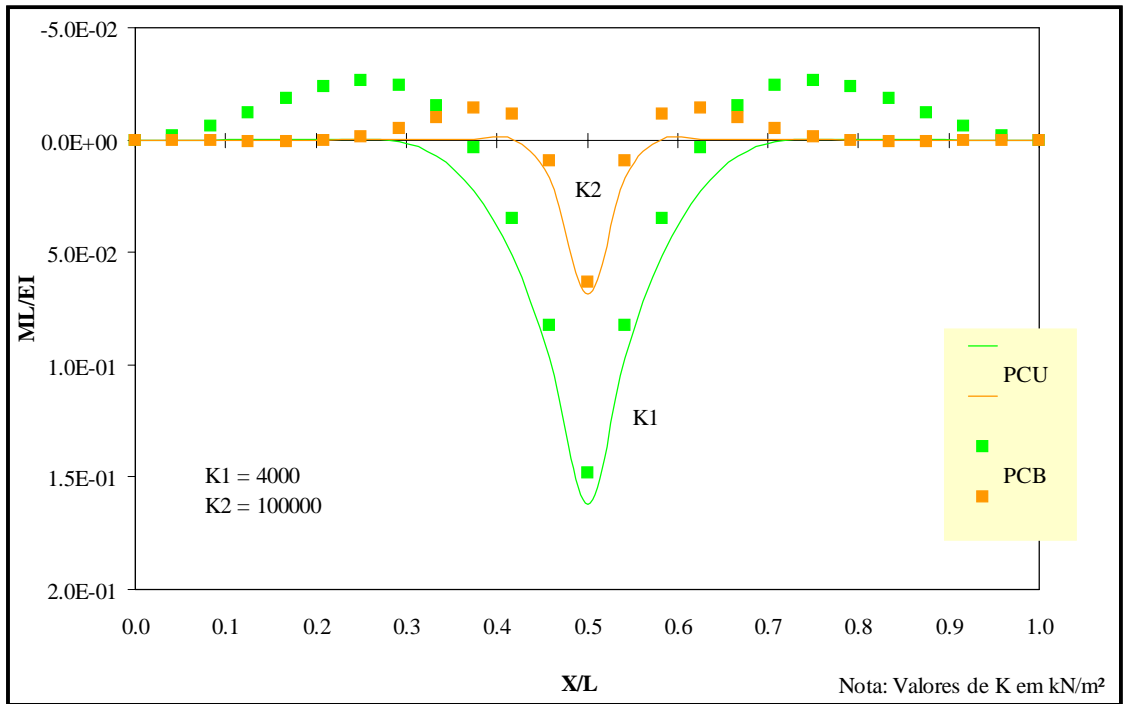


Figura 5.46 – Exemplo 9 – Comparação dos Problemas de Contato – Momento Fletor.

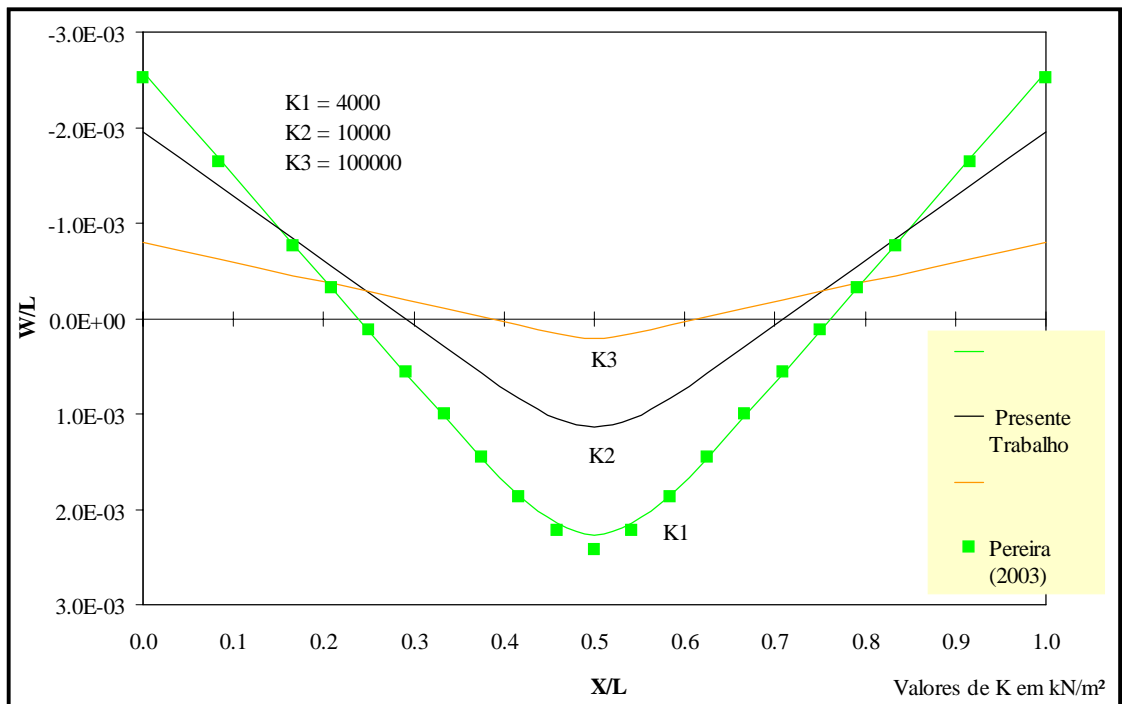


Figura 5.47 – Exemplo 9 – Deflexões.

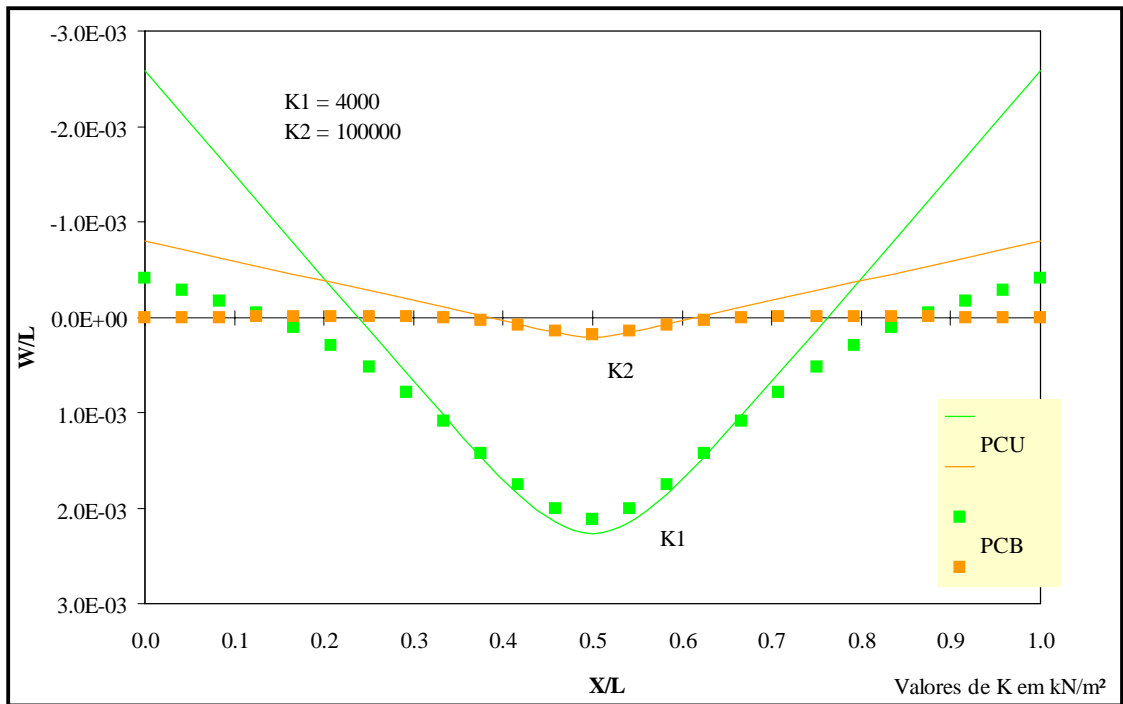


Figura 5.48 – Exemplo 9 – Comparação dos Problemas de Contato para as Deflexões.

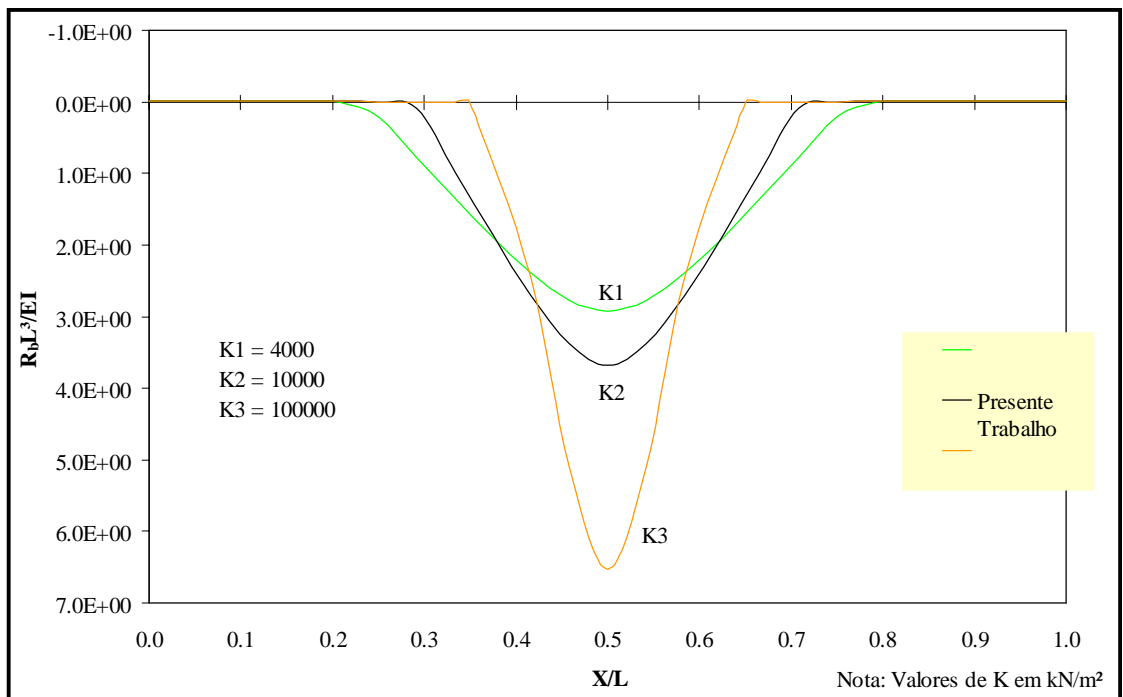


Figura 5.49 – Exemplo 9 – Reação R_b da Base Elástica.

5.4.6 – EXEMPLO 10

O último problema de contato unilateral é ilustrado na Figura 5.50. Consiste em uma viga totalmente apoiada apenas sobre fundação elástica do tipo Winkler e sujeita a uma carga parcialmente distribuída de comprimento $x = 1,5 m$ aplicada no meio do vão. Assim como no exemplo anterior, a análise será feita assumindo o contato unilateral entre os corpos, e a título de comparação, também se assumirá o contato bilateral. A análise foi feita considerando os seguintes dados: $EI = 10^3 kN.m^2$, $q = 10^2 kN/m$ e $L = 12 m$.

O problema de contato unilateral é caracterizado pela formação de regiões sem contato, que aparecem nas extremidades da viga, para certos valores dos dados. Esta consideração está mostrada na Figura 5.51, que contém também a situação deformada da barra e a representação da base elástica através de molas.

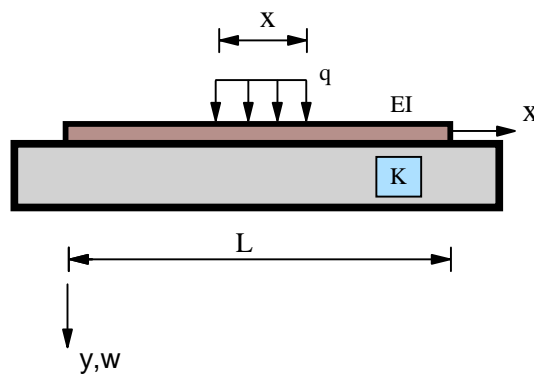


Figura 5.50 – Exemplo 10 – Esquema Estrutural.

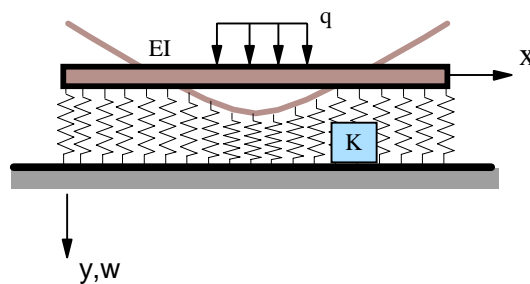


Figura 5.51 – Exemplo 10 - Configuração Deformada.

Assim como no exemplo anterior, fez-se aqui a comparação entre os valores dos deslocamentos, obtidos através das soluções numéricas do presente trabalho (**Sol.**

Num.2) e os de Pereira (2003) (*Sol. Num.1*) em alguns pontos da viga, para apenas um valor de K . Esta análise está mostrada na tabela 5.10.

As Figuras de 5.52 a 5.55 trazem o comportamento da viga representado através da variação dos momentos fletores M , das deflexões laterais w e da reação da base elástica R_b , bem como a comparação dos problemas de contato.

Tabela 5.10 – Exemplo 10 – Análise Comparativa dos Deslocamentos.

$K(kN/m^2)$	$X(m)$	<i>Deflexões(m)</i>		
		<i>Sol. Num.1</i>	<i>Sol. Num.2</i>	<i>Desvio(%)</i>
4000	0.00	0.01792	0.01758	1.86
	0.75	0.01311	0.01301	0.79
	6.00	-0.05007	-0.05020	0.27

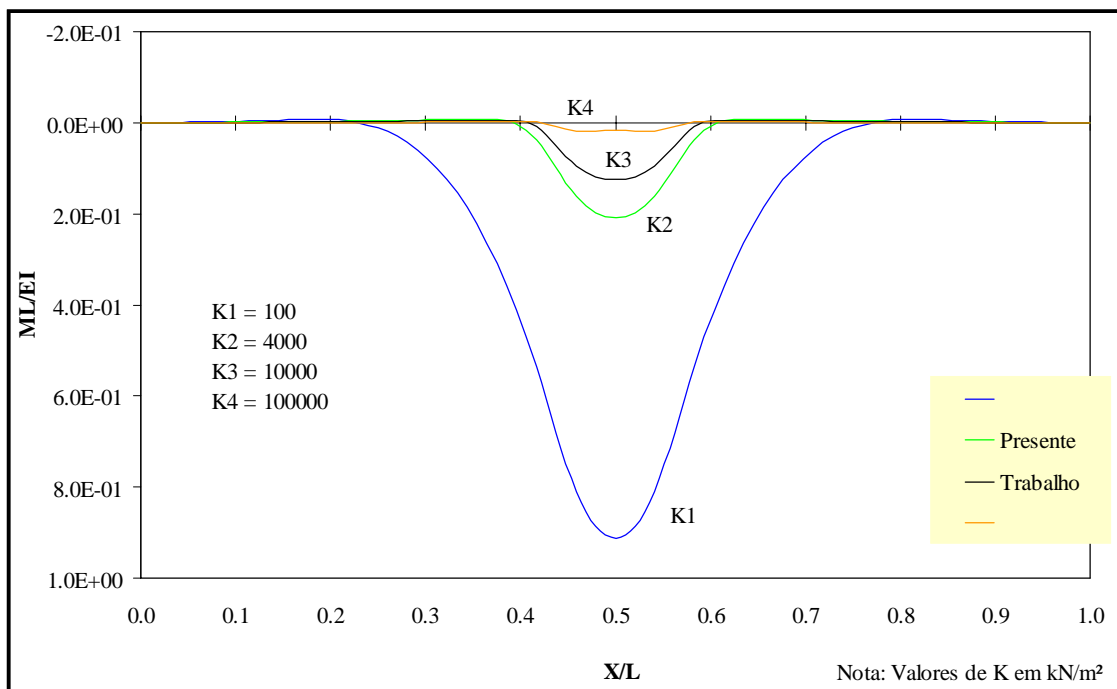


Figura 5.52 – Exemplo 10 – Momentos Fletores.

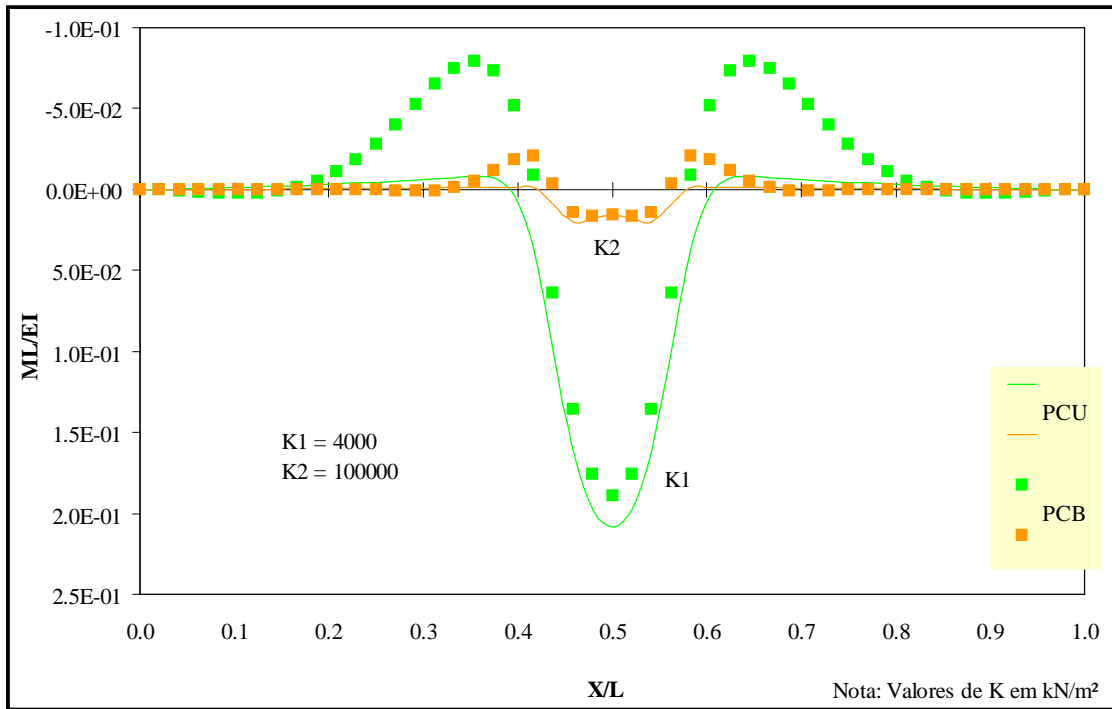


Figura 5.53 – Exemplo 10 – Comparação dos Problemas de Contato – Momento Fletor.

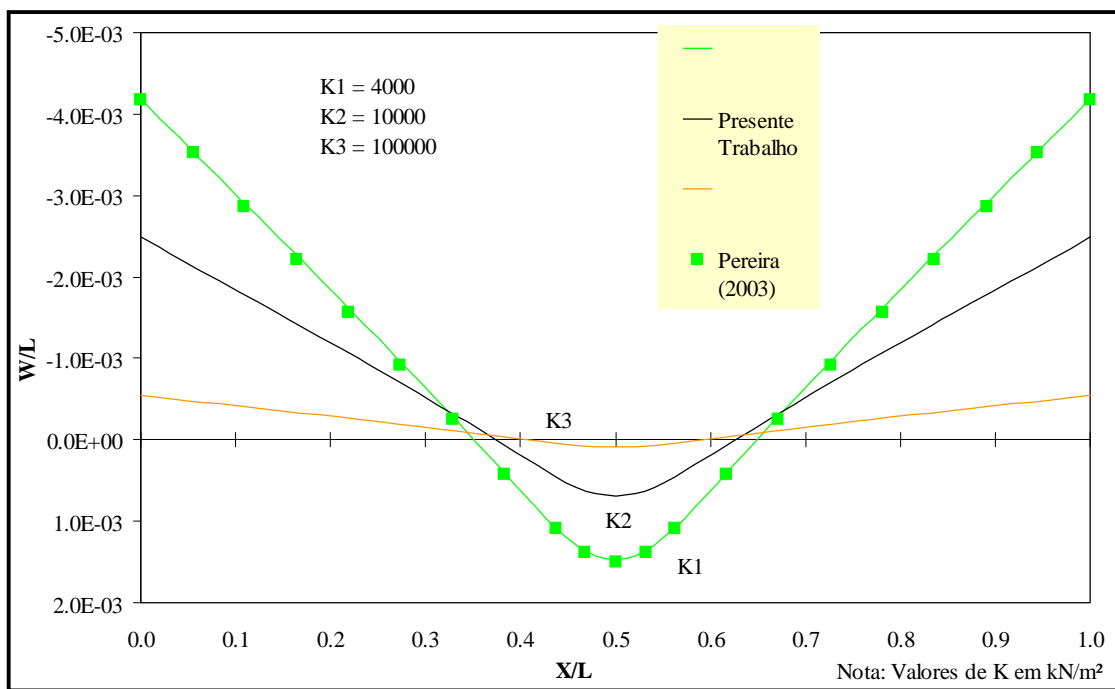


Figura 5.54 – Exemplo 10 – Deflexões.

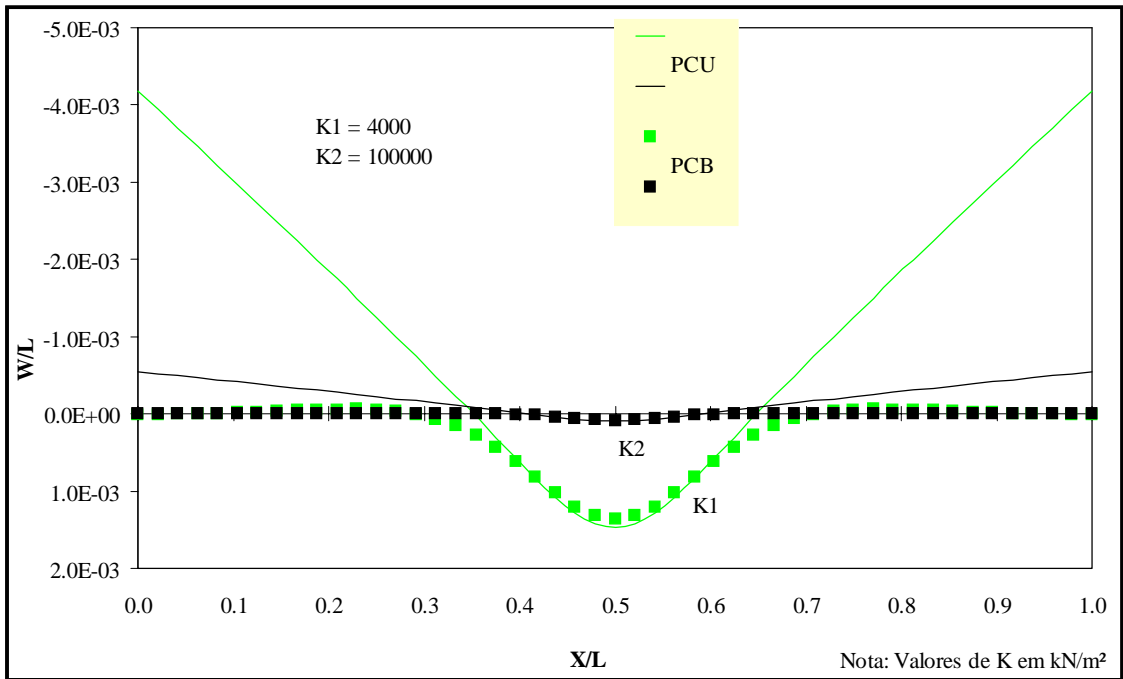


Figura 5.55 – Exemplo 10 – Comparação dos Problemas de Contato para as Deflexões.

6 - VIGAS SOBRE BASE ELÁSTICA SUJEITAS À VARIAÇÃO DE TEMPERATURA

6.1 – INTRODUÇÃO

Há casos de vigas, que, devido às condições do meio em que se encontram, não possuem temperatura constante ao longo de toda altura. Dessa forma, nas vigas em que há variação de temperatura diferentes em suas faces superior e inferior ocorre o surgimento de esforços internos, resultando em uma tendência da viga de fletir. A análise desse tipo de problema, considerando estas vigas apoiadas sobre bases elásticas, e admitindo-se a hipótese de contato bilateral e unilateral, não foi encontrada, porém, na literatura.

Esse tipo de análise pode ser considerado pela formulação proposta nesse trabalho. Assim, as seções 6.3 e 6.4 desse capítulo trazem a análise de dois exemplos, que, de certa forma, são apresentados como um novo tópico da literatura referente à análise de estruturas sujeitas à variação de temperatura, uma vez que considera os problemas de contato bilateral e unilateral entre estrutura e fundação.

6.2 – ASPECTOS GERAIS

Os exemplos tratados aqui seguirão os mesmos padrões dos exemplos mostrados no capítulo anterior, com a diferença de que não serão mostradas as tabelas contendo os resultados dos problemas. Esses resultados serão mostrados através de gráficos que trazem os dois tipos de análises feitas pelo presente trabalho.

Foram apresentados apenas os resultados obtidos pelo presente trabalho, porque não foram encontrados na literatura resultados que pudessem ser tomados como base para validar as implementações computacionais aqui desenvolvidas; assim, os valores apresentados poderão ser tomados como valores comparativos para futuras pesquisas que possam vir a serem desenvolvidas nessa área.

Admite-se, aqui, que a variação de temperatura entre as superfícies da vigas seja linear.

6.3 – EXEMPLO 1

O exemplo representado a seguir trata de uma viga de dois vãos de comprimento $L/2$ em contato com uma fundação elástica do tipo Winkler em todo o comprimento. A viga também se apoia sobre três apoios rígidos. O primeiro vão está sujeito a variações de temperaturas em suas faces superior e inferior, conforme indicado na Figura 6.1. Dois tipos de análise são feitos; uma onde é considerado o problema de contato bilateral entre os corpos e a outra o problema de contato unilateral. Para a rigidez a flexão da viga tem-se $EI = 10^3 \text{ kN.m}^2$, para o vão tem-se $L/2 = 3 \text{ m}$, para a altura da viga $h = 0,4 \text{ m}$ para as variações de temperatura nas faces superior e inferior $\Delta t_1 = 140 \text{ }^\circ\text{C}$, e $\Delta t_2 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ respectivamente, para o coeficiente da fundação $K = 10^3 \text{ kN/m}^2$ e para o coeficiente de dilatação térmica da viga tem-se $\alpha = 1,2 * 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

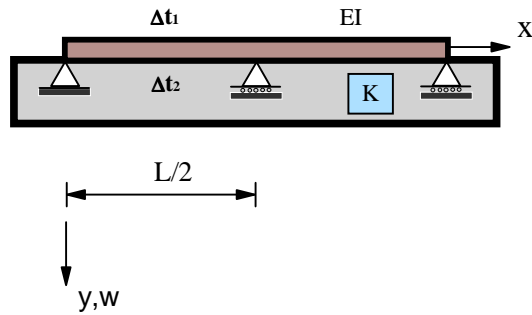


Figura 6.1 – Exemplo 1 - Esquema Estrutural.

As Figuras 6.2 e 6.3 mostram a configuração deformada da viga e a representação da base através de molas, para os casos de contato bilateral (PCB) e unilateral (PCU), respectivamente. Pode-se notar, que, para o primeiro caso não há formação de regiões sem contato entre os corpos, e, no segundo, para determinados valores de Δt permanece o contato apenas no segundo vão.

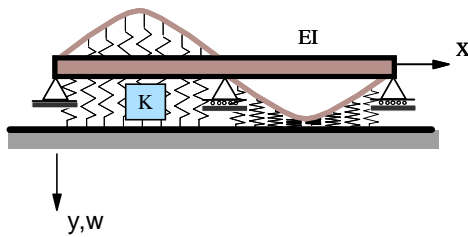


Figura 6.2 – Exemplo 1
Deformada – PCB.

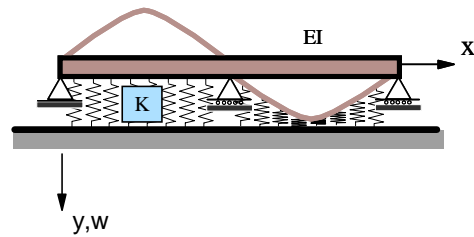


Figura 6.3 – Exemplo 1
Deformada – PCU.

A seguir, nas Figuras 6.4 e 6.5, são mostrados os gráficos representativos dos valores dos momentos e dos deslocamentos calculados através do presente trabalho.

Conclui-se que a consideração das restrições unilaterais de contato na análise, introduz significativas mudanças no comportamento da estrutura em estudo. Os valores de K estão indicados nas figuras.

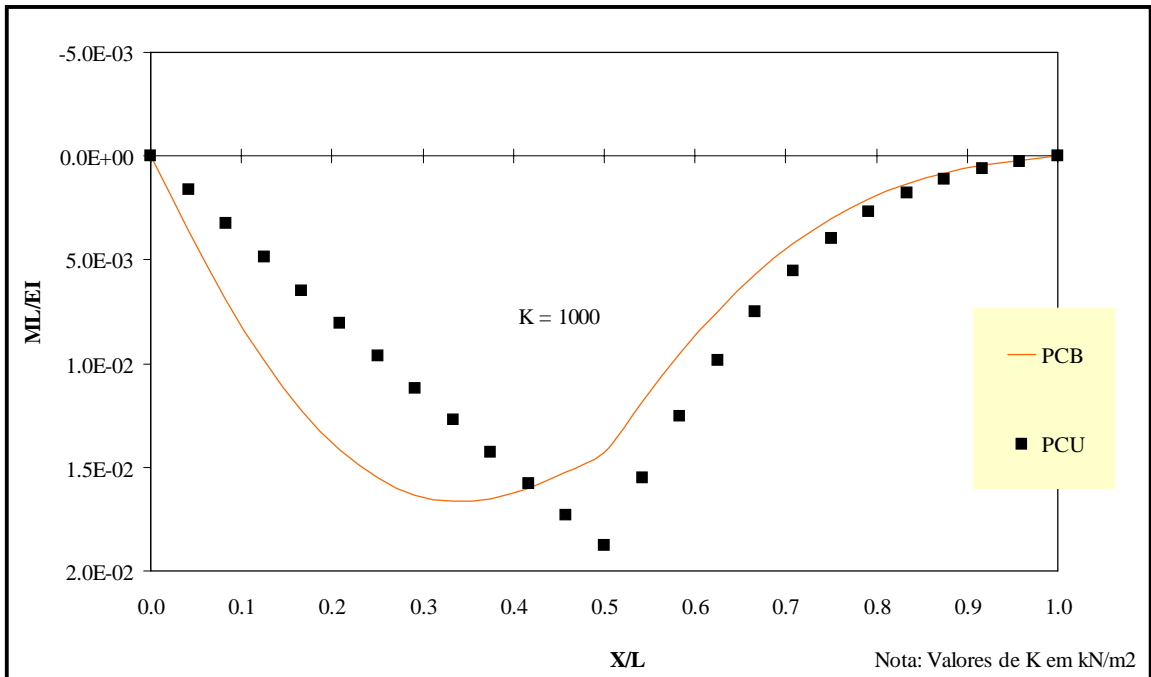


Figura 6.4 – Exemplo 1 – Momentos Fletores - PCB X PCU.

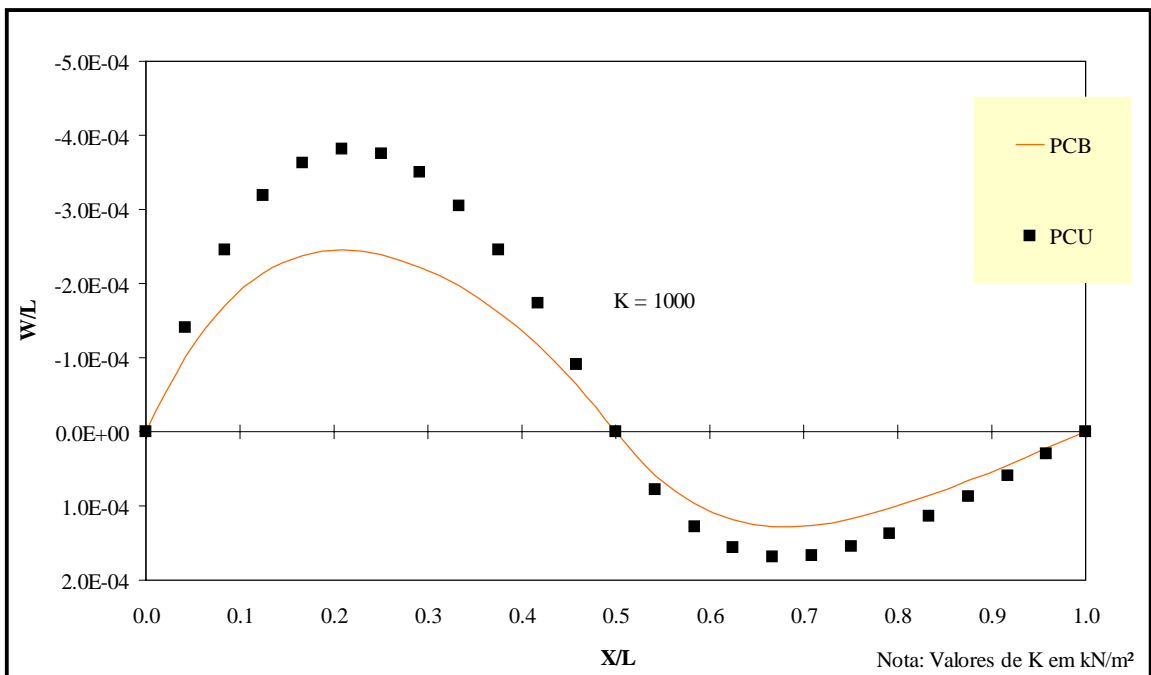


Figura 6.5 – Exemplo 1 – Deflexões - PCB X PCU.

6.4 – EXEMPLO 2

A Figura 6.6 mostra uma viga contínua de três vãos iguais de comprimento $L/3$. A viga está totalmente em contato com uma fundação elástica do tipo Winkler e apenas o vão central está sujeito a variação de temperatura em suas faces superior e inferior.

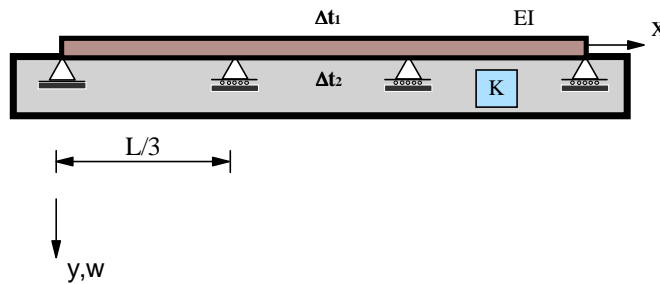


Figura 6.6 – Exemplo 2 - Esquema Estrutural.

As configurações deformadas e a representação da base através de molas, para os problemas de contato bilateral (PCB), caracterizado pela não formação de regiões sem contato entre os corpos e unilateral (PCU), caracterizado pela formação de regiões sem contato, para determinados valores de Δt , estão mostradas nas Figuras 6.7 e 6.8.

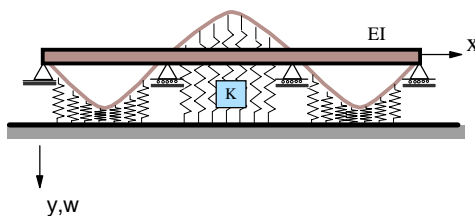


Figura 6.7 – Exemplo 2
Deformada – PCB.

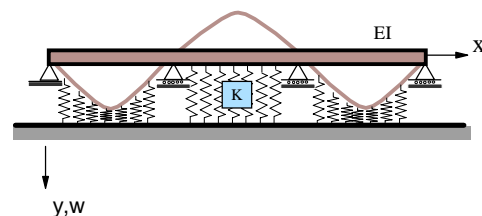


Figura 6.8 – Exemplo 2
Deformada – PCU.

Os gráficos das Figuras 6.9 e 6.10 representam os valores dos deslocamentos e dos momentos calculados através do presente trabalho. Os dados do problema são: $L/3 = 3\text{ m}$, $h = 0,4\text{ m}$, $\Delta t_1 = 140\text{ }^\circ\text{C}$, $\Delta t_2 = 20\text{ }^\circ\text{C}$, $EI = 10^3\text{ kN.m}^2$, $K = 10^3\text{ kN/m}^2$ e $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

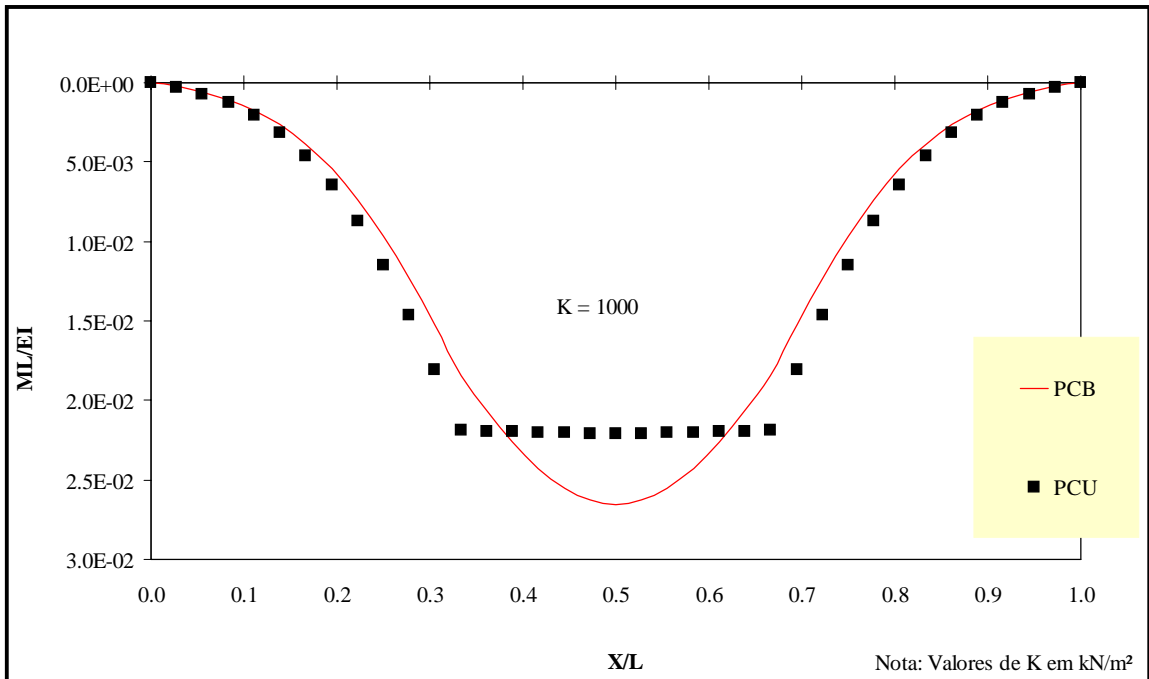


Figura 6.9 – Exemplo 2 – Momentos Fletores - PCB X PCU.

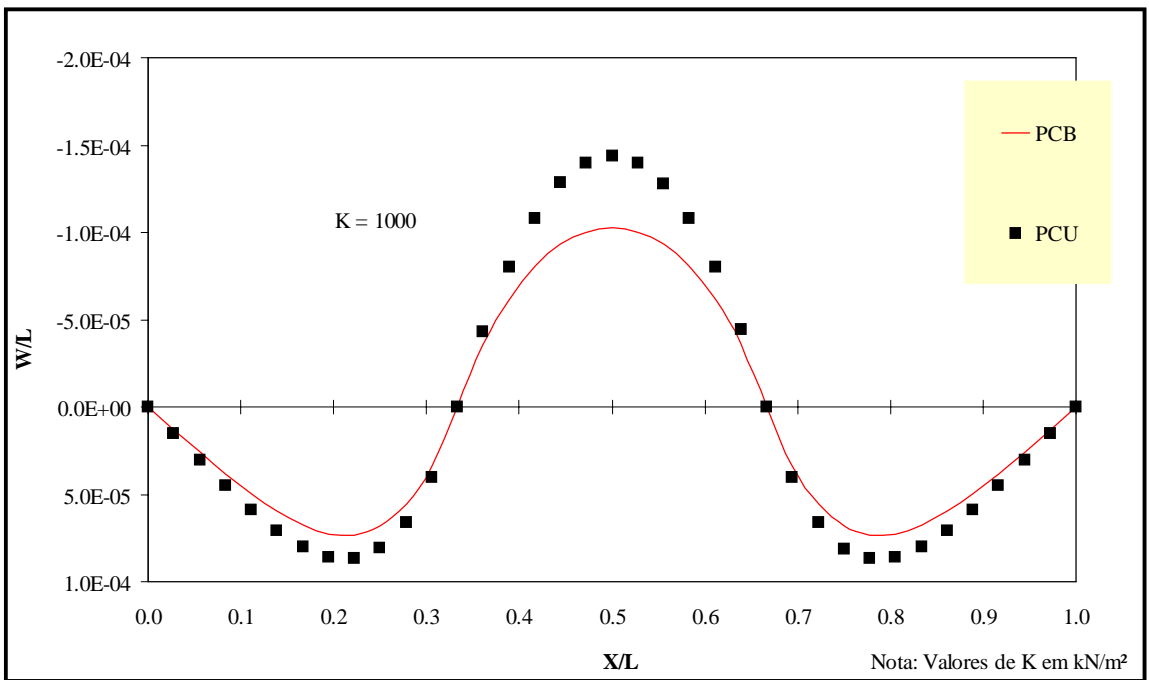


Figura 6.10 – Exemplo 2 – Deflexões - PCB X PCU.

7 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

7.1 – CONCLUSÕES

Esse trabalho teve como principal objetivo, a análise de vigas em contato com fundações elásticas. Foram tratados dois problemas de contato: bilateral e unilateral. A base foi modelada de acordo com a teoria de Winkler e após definido o modelo numérico a ser analisado, utilizou-se da “Equação dos Cinco Momentos” e da “Equação dos Três Momentos” para se fazer as implementações computacionais necessárias à solução do problema.

Analisando os exemplos numéricos estudados no Capítulo 5 e considerando a boa aproximação dos resultados apresentados pelo programa, pode-se concluir que estes validam as implementações computacionais da metodologia apresentada. O objetivo dessa seção é, então, apresentar algumas conclusões que puderam ser obtidas a respeito dos resultados e fazer algumas considerações que possam proporcionar um maior esclarecimento das principais questões tratadas nesse trabalho. São elas:

- Consiste em uma estratégia de solução bastante simples e de fácil implementação computacional;
- Apresentou um ótimo desempenho quanto ao tratamento dos problemas de contato bilateral e unilateral;
- É considerado uma estratégia de solução adequada para se resolver problemas sujeitos a diferentes condições de contorno e carregamento, inclusive para vigas sujeitas a variações de temperatura diferentes nas faces superior e inferior;
- Os resultados foram obtidos com um tempo de processamento muito pequeno;

- Foram necessárias poucas iterações para se chegar à solução do problema de contato unilateral, considerando o critério de convergência adotado onde a diferença entre os deslocamentos de uma iteração e outra posterior deve ser menor ou igual a 10^{-6} ;
- Na discretização da base, obteve-se uma boa resposta, tanto para a análise dos problemas de contato bilateral (PCB) quanto para os problemas de contato unilateral (PCU), usando-se um espaçamento de $0,25\ m$ entre os apoios elásticos;
- Os métodos de solução propostos para o modelo numérico, ou seja, a “Equação do Três Momentos” e a “Equação dos Cinco Momentos”, se mostraram eficazes para se resolver problemas de vigas contínuas, sujeitas a diferentes condições de contorno e geometria.

7.2 – SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

Para o desenvolvimento de futuras pesquisas pode-se sugerir:

- Dar continuidade ao estudo de vigas apoiadas sobre bases elásticas através de análises experimentais;
- Utilizar outros modelos de base elástica;
- Dar continuidade a esta dissertação, estendendo a formulação proposta no presente trabalho, para a análise de cascas cilíndricas circulares com restrições unilaterais de contato;
- Usando o método aqui desenvolvido, determinar a linhas de influência de vigas sobre base elástica.

Referências Bibliográficas

1. AKÖZ, A.Y. E KADIOĞLU, F. (1996). The Mixed Finite Element Solution of Circular Beam on Elastic Foundation. *Computers & Estruturas*, v. 50, p. 643-665.
2. BANAN, M. R.; KARAMI, G. E FARSHAD, M. (1989). Finite Element analysis of curved beams on elastic Foundations. *Computers & Estruturas*, v. 32, p. 45-53.
3. CHOROS, J. E ADAMS, G. G. (1979). A Steadly Moving Load On na Elastic Beam Resting on a Tensionless Winkler Foundation. *Journal of Applied Mechanics*, p.175-180.
4. HARR, M. E.; DAVIDSON, J.L.; HO, D-M; POMBO, L. E.; RAMASWAMY, S. V. E ROSNER, J. C. (1969). Euler Beams on Two Parameter Foundation Model. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, v. 95, p. 933-948.
5. HETÉNYI, M. (1946). *Beams on Elastic Foundation*. The University of Michigan Press, 255p.
6. HORVATH, J. S. (1993). Beam-Column-Analogy Model for Soil-Structures Interaction Analysis. *Journal of Geotechnical Engineering*, v. 119, p. 358-364.
7. HOSUR, V. E BHAVIKATTI, S. S. (1996). Influence Lines for Bending Moments in Beams on Elastic Foundations. *Computers & Structures*, v. 58, p. 1225-1231.
8. JOHNSON, W.H. E KOUSKOULAS, V. (1973). Beam on Bilinear Foundation. *Journal of Applied Mechanics*, p.239-243.
9. KASCHIEV, M. S. E MIKHAILOV, K. (1995). A Beam Resting on a Tensionless Winkler Foundation. *Computers & Estruturas*, v. 55, p. 261-264.
10. KERR D. A. (1976). On the derivation of well posed boundary value problems in structural mechanics. *International Journal of Solids and Structures*, v. 12, p. 1-11.
11. KERR, A. D. (1964). Elastic and Viscoelastic Foundation Models. *J. Appl. Mech.*, v. 31, p.491-498.

12. LANDENBERGER, A. E EL-ZAFRANY. (1999). Boundary Element Analysis of Elastic Contact Problems Using Gap Finite Elements. *Computers & Structures*, v. 71, p. 651-661.
13. MANOACH, E. E KARAGIOZOVA, D. (1992). Inpulse Loading of an Elastic-Plastic Beam on an Elastic Foundation. *Computers & Structures*, v. 45, p. 605-612.
14. MARTINS, J. F. (1991). *Notas de Aula de Resistência dos Materiais II*. Editora Universitária da UFOP, 160p.
15. PEREIRA, W. L. A. (2003). *Formulações Numéricas para Análise de Vigas em Contato com Bases Elásticas*. Ouro Preto, Dissertação de Mestrado, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, MG.
16. SILVA, A. R. (1998). *Análise de Placas com Restrição de Contato*. Ouro Preto, Dissertação de Mestrado, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, MG.
17. SILVEIRA, R. A. M. (1995). *Análise de Elementos Estruturais Esbeltos com Restrições Unilaterais de Contato*. Rio de Janeiro, Tese de Doutorado, Pontificia Universidade Católica – RJ.
18. SHEINMAN, I.; ADAN, M. E ALTUS, E. (1993). On the Role of the Displacement Function in Nonlinear Analysis of Beams on a Elastic Foundation. *Thin-Walled Structures*, v. 15, p. 109-125.
19. SUSSEKIND, J. C. (1974). *Curso de Análise Estrutural*. Editora Globo, v. 2, 311p.
20. THAMBIRATNAM, D. P. (1993). A Simple element Analysis of Hiperboloid Shell Structures. *Computers & Structures*, v. 48, number 2, p.249-254.
21. TIMOSHENKO, S. P. (1983). *History of Strength of Materials*. Mc GRAW-HILL, 452p.
22. TIMOSHENKO, S. P. E GERE, J. E. (1983). *Resistência dos Materiais*. Livros Técnicos e Científicos Editora, vol. 1, 256 p.

23. TIMOSHENKO, S. P. E GERE, J. E. (1983). Resistência dos Materiais. Livros Técnicos e Científicos Editora, vol. 2, 518 p.
24. TIMOSHENKO, S. E WOINOWSKY-KRIEGER, S. (1959). Theory of Plates and Shells. Mc GRAW-HILL, 573p.
25. TIN-LOI, F., PALMANO, V. A. E THAMBIRATNAM, D. (1990). BEF Analogy for Axisymmetrically Loaded Cylindrical Shells, Computers & Structures, v. 34, número 2, p.281-285.
26. TIN-LOI, F.; PULMANO, V. A. E THAMBIRATNAM, D. (1989). BEF Analogy for Axisymmetrically Loaded Cylindrical shells. Computers & Structures, v. 34, p. 281-285.
27. TOSONE, C. E MACERI, A. (1999). Continuous Beams with Unilateral Elastic Supports. Journal of Mathematical Analysis and Applications, v. 259, p.302-318.
28. TSAI, N. WESTAMANN, R. A. (1967). Beam on Tensionless Foundation. Journal of the Engineering Mechanics Division, p.1-13.
29. VLASOV, V. Z. E LEONT'EV, U. N. (1966). Beams, Plates and Shells on Elastic Foundations, 357p.
30. WEITSMAN, Y. (1970). On Foundations That React in Compression Only. Journal of Applied Mechanics, p.1019-1030.
31. WEITSMAN, Y. (1971). Onset of Separation Between a Beam and a Tensionless Elastic Foundation Under a Moving Load. International Journal of Mechanical Sciences, v. 13, p. 707-711.
32. YANG, T. Y. (1972). A Finite Element Analysis of Plates on two Parameter Foundation Model. Computers & Structures, v. 2, p. 593-614.
33. ZHAOHUA, F. E COOK, R. D. (1982). Beam Elements on Two-Parameter Elastic Foundation. Journal of Eng. Mechanics, v. 109, p. 1390-1402.

