



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO – ESCOLA DE MINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**



# **Análise Numérica de Pilares Mistos Aço-Concreto**

**RODRIGO BARRETO CALDAS**

**ORIENTADOR: Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Jr.**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de concentração: Estruturas Metálicas.

**Ouro Preto, Março de 2004**

*“O Senhor é o meu pastor; nada me faltará.*

*Deitar-me faz em verdes pastos, guia-me  
mansamente a águas tranqüilas.*

*Refrigera a minha alma; guia-me pelas  
veredas da justiça, por amor do seu nome.*

*Ainda que eu andasse pelo vale da sombra  
da morte, não temeria mal algum, porque  
tu estás comigo; a tua vara e o teu  
cajado me consolam.*

*Preparas uma mesa perante mim na presença  
dos meus inimigos, unges a minha  
cabeça com óleo, o meu cálice transborda.*

*Certamente que a bondade e a misericórdia  
me seguirão todos os dias da minha vida, e  
habitarei na casa do Senhor por longos dias.”*

*Salmo 23*

*À minha amada esposa, Lucimar,  
e aos meus queridos pais, Wellington e Lucia,  
dedico esta vitória alcançada.*

# | AGRADECIMENTOS

*“Que darei eu ao Senhor, por todos os benefícios que me tem feito?”*

*Salmo 116:12*

À Universidade Federal de Ouro Preto, pelo valioso suporte institucional proporcionado, e a USIMINAS, pelo apoio financeiro.

Ao professor João Batista Marques de Sousa Jr., pela orientação segura e lucidez com que conduziu as etapas deste estudo e, principalmente, pela amizade, confiança e apoio constantes.

Aos professores do PROPEC, Francisco de Assis, Marcílio Freitas, Ricardo Azoubel, Arlene Freitas, e a todos os demais professores e funcionários que contribuíram para a minha formação e o desenvolvimento deste trabalho.

A todos os colegas e amigos de mestrado pelas horas incansáveis de estudo e diversão.

Às minhas irmãs, Sielen e Juliana, pelo apoio e amizade.

Aos meus queridos pais, Wellington e Lucia, que sempre me conduziram nos caminhos do amor e da justiça, pela minha vida, minha eterna gratidão.

À minha esposa, Lucimar, pela compreensão, amor, carinho, incentivo e paciência nos momentos difíceis.

E, acima de tudo, a Deus, que tem guiado os nossos passos e tem sido a nossa vitória.

# | RESUMO

Recentemente, aplicações práticas e pesquisas numéricas e experimentais em estruturas mistas têm crescido grandemente em todo o mundo. Atualmente a norma brasileira voltada para o dimensionamento de estruturas de aço encontra-se em processo de revisão apresentando em seu escopo uma preocupação relevante em relação aos elementos mistos. Em geral, os procedimentos de norma são baseados em hipóteses simplificadoras, o que justifica a necessidade de mais pesquisas sobre a análise desses elementos.

O propósito deste trabalho é o desenvolvimento e implementação de procedimentos numéricos voltados para análise de pilares mistos. Primeiramente, um modelo para análise do comportamento de seções arbitrárias é desenvolvido. O modelo permite a consideração de seções genéricas incluindo os pilares mistos mais usuais, como, pilares de seção I envolvidos com concreto e tubulares preenchidos com concreto. Relações momento-curvatura são obtidas, assim como superfícies de interação. Os resultados são validados a partir de dados encontrados na literatura.

Em uma segunda etapa, um modelo numérico voltado para a simulação do comportamento de pilares esbeltos com seções genéricas, sujeitos a carregamentos estáticos, é desenvolvido e implementado. O esquema numérico baseia-se em uma formulação de deslocamentos do Método dos Elementos Finitos, sendo capaz de avaliar as não-linearidades física e geométrica. Elementos de barra unidimensionais são utilizados. Vários resultados numéricos e experimentais são utilizados em comparações para a verificação da eficácia do procedimento proposto. Ao final, outros procedimentos numéricos são utilizados para simulação de pórticos e estruturas mistas com o objetivo de comprovar a generalidade da formulação.

# | ABSTRACT

In recent years, practical application and numerical and experimental research on composite steel-concrete structures have increased strongly around the world. The Brazilian Code for Steel Structures, which is under revision, will bring together the provisions for composite steel-concrete construction, which will certainly improve the understanding about its advantages and applicability. However, several code provisions are based on simplified hypotheses, which justifies the need for more research on the analysis of these elements.

The purpose of this work is to develop and implement numerical procedures concerning steel-concrete composite columns. In the first part, a model to predict the behaviour of arbitrary composite sections is developed. The model permits the consideration of generic cross-sections including the most usual composite columns, that is, the concrete encased steel profiles and the concrete filled steel tubes. Some numerical procedures related to cross-sectional analysis are then developed. Moment-axial force-curvature relationships are obtained, as well as biaxial bending interaction surfaces. The results are then verified against the available literature.

In the second part, a numerical model to predict the behaviour of slender composite columns of arbitrary cross-section, subjected to static loads, is developed and implemented. The numerical scheme, based on the displacement formulation of the Finite Element Method, is able to account for the physical and geometrical nonlinearities which are typical of these elements. One-dimensional beam-column elements are used. The results are compared to a large set of experimental and numerical data, in order to verify the accuracy and robustness of the proposed numerical scheme. At the end, other numerical experiences with composite frames are presented in order to prove the generality of the formulation.

# |SUMÁRIO

<b>RESUMO.....</b>	<b>V</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>VI</b>
<b>LISTA DE FIGURAS.....</b>	<b>XII</b>
<b>LISTA DE TABELAS.....</b>	<b>XVIII</b>
<b>CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	1
1.2 OBJETIVOS.....	4
1.3 APRESENTAÇÃO.....	5
<b>CAPÍTULO 2 PILARES MISTOS.....</b>	<b>7</b>
2.1 INTRODUÇÃO.....	7
2.2 PILAR CURTO – ANÁLISE DA SEÇÃO.....	10
2.2.1 Métodos de Análise.....	10
2.2.1.1 <u>Análise Elasto-Plástica</u> .....	10
2.2.1.2 <u>Análise Rígido-Plástica</u> .....	13
2.3 PILAR ESBELTO.....	15
2.4 RECOMENDAÇÕES DE NORMA.....	16
2.4.1 Procedimentos Conforme NBR 14323 (1999) e Projeto de Revisão NBR 8800 (2003).....	17
2.4.2 Procedimentos Conforme Eurocode 4 (1994).....	21
2.4.3 Procedimentos Conforme AISC (1999).....	21
2.4.4 Procedimentos Conforme ACI-318 (1999).....	25
2.4.5 Procedimentos Conforme AIJ (1987).....	27

2.5 COMPARAÇÕES ENTRE EC4, BS5400 E AISC.....	28
2.6 ESTADO DA ARTE EM PILARES MISTOS AÇO - CONCRETO.....	34
<b>CAPÍTULO 3 OBTENÇÃO DE ESFORÇOS EM SEÇÕES MISTAS</b>	
<b>AÇO – CONCRETO.....</b>	<b>45</b>
3.1 INTRODUÇÃO.....	45
3.2 GEOMETRIA DA SEÇÃO TRANSVERSAL.....	46
3.3 ESFORÇOS RESISTENTES.....	47
3.4 DEFORMADA DA SEÇÃO.....	48
3.5 MATERIAIS.....	49
3.5.1 Relação Tensão-Deformação do Concreto.....	49
3.5.2 Relação Tensão-Deformação do Aço das Armaduras.....	51
3.5.3 Relação Tensão-Deformação do Aço do Perfil.....	53
3.6 OBTENÇÃO DOS ESFORÇOS RESISTENTES.....	54
3.7 INTEGRAÇÃO.....	55
3.8 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....	62
3.9 EXEMPLOS.....	64
3.9.1 Primeiro Exemplo: Pilares Retangulares Preenchidos.....	64
3.9.2 Segundo Exemplo: Viga Mista.....	66
3.9.3 Terceiro Exemplo: Pilar Parcialmente Envolvido.....	66
<b>CAPÍTULO 4 RELAÇÕES MOMENTO – CURVATURA.....</b>	<b>68</b>
4.1 INTRODUÇÃO.....	68
4.2 RELAÇÕES MOMENTO – CURVATURA.....	69
4.2.1 Controle do Momento.....	70
4.2.2 Controle da Curvatura.....	73
4.3 DERIVADAS DOS ESFORÇOS RESISTENTES.....	74
4.4 ESTADO LIMITE ÚLTIMO.....	77
4.5 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....	78
4.6 EXEMPLOS.....	78
4.6.1 Primeiro Exemplo: Pilar Parcialmente Envolvido.....	78

4.6.2 Segundo Exemplo: Pilar Preenchido.....	80
<b>CAPÍTULO 5 SUPERFÍCIES DE INTERAÇÃO.....</b>	<b>82</b>
5.1 INTRODUÇÃO.....	82
5.2 DEFINIÇÃO DAS SUPERFÍCIES DE INTERAÇÃO.....	83
5.3 OBTENÇÃO DAS SUPERFÍCIES DE INTERAÇÃO.....	83
5.3.1 Método de Newton Raphson.....	83
5.3.2 Parâmetro de Deformação.....	84
5.4 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....	89
5.5 EXEMPLOS.....	90
5.5.1 Primeiro Exemplo: Seção Mista Assimétrica (Chen <i>et al.</i> , 2001).....	90
5.5.2 Segundo Exemplo: Seções Mistas Assimétricas (Roik e Bergamann, 1990).....	92
5.5.3 Terceiro Exemplo: Pilar Retangular Preenchido com Materiais de Alta Resistência.....	93
5.5.4 Quarto Exemplo: Comparações entre CSTM, NBR 14323 (1999) e NBR 8800 (2003).....	97
5.5.4.1 <u>Pilar Envolvido</u> .....	98
5.5.4.2 <u>Pilar Parcialmente Envolvido</u> .....	99
5.5.4.3 <u>Pilar Circular Preenchido</u> .....	100
5.5.4.4 <u>Pilar Retangular Preenchido</u> .....	100
<b>CAPÍTULO 6 ANÁLISE NUMÉRICA DE PILARES MISTOS.....</b>	<b>102</b>
6.1 INTRODUÇÃO.....	102
6.2 FLEXÃO DE BARRAS PRISMÁTICAS – ROTAÇÕES MODERADAS..	104
6.2.1 Hipóteses e Sistema de Referência.....	104
6.2.2 Relação Deformação-Deslocamento.....	105
6.2.3 Formulação do Problema de Equilíbrio.....	108
6.3 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS.....	111
6.3.1 Equação de Equilíbrio Incremental.....	111
6.4 SOLUÇÃO DO SISTEMA NÃO – LINEAR.....	114

6.4.1 Matriz de Rigidez Tangente.....	116
6.5 MODELO IMPLEMENTADO.....	117
6.5.1 Derivadas dos Esforços Internos.....	122
6.5.2 Rigidezes Generalizadas.....	125
6.6 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....	133
6.7 EXEMPLOS.....	134
6.7.1 Primeiro Exemplo: Viga de Concreto Engastada e Simplesmente Apoiada.....	135
6.7.2 Segundo Exemplo: Pilares Mistos Envolvidos.....	136
6.7.3 Terceiro Exemplo: Pilares Mistos Preenchidos e Envolvidos.....	143
6.7.4 Quarto Exemplo: Vigas Parcialmente Envolvidas.....	150
6.7.5 Quinto Exemplo: Pilares Retangulares Preenchidos.....	154
6.7.6 Sexto Exemplo: Pilares Circulares Preenchidos com Concreto de Alta Resistência.....	156
6.7.7 Sétimo Exemplo: Pilares Retangulares Preenchidos Formados com Materiais de Alta Resistência.....	157
6.7.8 Oitavo Exemplo: Vigas Retangulares Preenchidas.....	159
6.7.9 Nono Exemplo: Pilares Retangulares Preenchidos com Carga de Longa Duração.....	162
6.8 COMENTÁRIOS FINAIS.....	164
<b>CAPÍTULO 7 IMPLEMENTAÇÕES ADICIONAIS.....</b>	<b>166</b>
7.1 CONSIDERAÇÕES.....	166
7.2 EXEMPLOS.....	168
7.2.1 Primeiro Exemplo: Pórtico de Concreto Armado.....	168
7.2.2 Segundo Exemplo: Viga Mista Semi-Contínua.....	169
7.2.3 Terceiro Exemplo: Pórtico Semi-Rígido.....	172
7.2.4 Quarto Exemplo: Pórticos de Dois Andares.....	175
<b>CAPÍTULO 8 CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....</b>	<b>179</b>
8.1 COMENTÁRIOS GERAIS E CONCLUSÕES.....	179

8.2 SUGESTÕES..... 181

**BIBLIOGRAFIA..... 183**

# | LISTA DE FIGURAS

## CAPÍTULO 1

- Figura 1.1 Edifício sendo construído com estruturas mistas; seção transversal típica das vigas mistas parcialmente envolvidas com concreto; concretagem das vigas (Stark, 2001)..... 2
- Figura 1.2 *Empire State Building*, 102 andares, 1860 degraus, 373 metros de altura; a direita fotos da construção (www.nypl.org)..... 3

## CAPÍTULO 2

- Figura 2.1 Seções transversais de pilares mistos completa e parcialmente envolvidos com concreto..... 8
- Figura 2.2 Seções transversais de pilares mistos tubulares preenchidos com concreto..... 8
- Figura 2.3 Análise elasto-plástica da seção transversal..... 11
- Figura 2.4 Curvas de interação  $N-M$  típicas: (a) flexão em torno do eixo de maior inércia; (b) flexão em torno do eixo de menor inércia..... 11
- Figura 2.5 Relações tensão-deformação do concreto: (a) relação utilizada pela NBR 6118 (2003); (b) relação apresentada pelo CEB (1990)..... 12
- Figura 2.6 Domínios de deformação do concreto (CEB, 1990)..... 13
- Figura 2.7 Superfície de interação  $N-M$ ..... 13
- Figura 2.8 Pontos da superfície de interação para uma seção genérica segundo Roik e Bergmann (1989), adaptado de Oehlers e Bradford (1999)..... 14
- Figura 2.9 Outras seções apresentadas pelo Eurocode 4 (1994)..... 16
- Figura 2.10 Superfície de interação  $N-M$  obtida segundo a AIJ (1987)..... 28

Figura 2.11 Curvas de flambagem, fator de redução em função da esbeltez, utilizadas no EC4 e AISC.....	32
--	----

### **CAPÍTULO 3**

Figura 3.1 Definição da seção transversal, sistemas global e locais, seccionais.....	47
Figura 3.2 Relação tensão-deformação do concreto.....	50
Figura 3.3 Relações tensão-deformação dos aços das armaduras (a) Classe A; (b) Classe B.....	53
Figura 3.4 Parametrização do segmento.....	55
Figura 3.5 Protótipo 1 analisado no CSTM.....	65
Figura 3.6 Viga mista analisada no CSTM, dimensões da seção em <i>mm</i> .....	66
Figura 3.7 Pilar misto parcialmente envolvido fletido em torno do eixo de menor inércia: seção transversal, dimensões em <i>mm</i> ; superfícies de interação obtidas através do CSTM e da NBR 14323.....	67

### **CAPÍTULO 4**

Figura 4.1 Fluxograma do processo iterativo utilizado em um incremento do Método de Newton Raphson para controle do momento.....	72
Figura 4.2 Representação dos domínios de deformação correspondentes ao estado limite último de uma seção.....	77
Figura 4.3 Relações momento-curvatura para o eixo de maior inércia, pilar parcialmente envolvido (dimensões da seção em <i>mm</i> ).....	79
Figura 4.4 Relações momento-curvatura para o eixo de menor inércia, pilar parcialmente envolvido.....	79
Figura 4.5 Obtenção da relação momento-curvatura, no programa CSTM, de uma seção tubular circular preenchida.....	80

### **CAPÍTULO 5**

Figura 5.1 Consideração da fluência no diagrama tensão-deformação do concreto.....	85
--	----

Figura 5.2 Seção assimétrica analisada por Chen <i>et al.</i> (2001) e Sfakianakis (2002).....	90
Figura 5.3 Superfície de interação espacial obtida no CSTM através da utilização do parâmetro $D$ .....	91
Figura 5.4 Comparação das superfícies de interação de momentos para esforço normal de $-4120$ kN (Sfakianakis, 2002; Chen <i>et al.</i> , 2001).....	91
Figura 5.5 Seções assimétricas analisadas experimentalmente por Roik e Bergmann (1990).....	92
Figura 5.6 Comparação do CSTM com curvas de interação $N-M$ de normas e ensaios obtidos a partir: (a) BC-32-46 com $b/t = 32$ e aço com $f_y = 317$ MPa; (b) BC-48-46 com $b/t = 48$ e aço com $f_y = 317$ MPa (adaptado de Varma <i>et al.</i> , 2002).....	95
Figura 5.7 Comparação do CSTM com curvas de interação $N-M$ de normas e ensaios obtidos a partir: (a) BC-32-80 com $b/t = 32$ e aço com $f_y = 552$ MPa; (b) BC-48-80 com $b/t = 48$ e aço com $f_y = 552$ MPa; (adaptado de Varma <i>et al.</i> , 2002).....	96
Figura 5.8 Comparação entre as superfícies de interação $N-M$ , pilar envolvido: (a) flexão em torno do eixo $x$ ; (b) flexão em torno do eixo $y$ .....	98
Figura 5.9 Comparação entre as superfícies de interação $N-M$ , pilar parcialmente envolvido: (a) flexão em torno do eixo $x$ ; (b) flexão em torno do eixo $y$ .....	99
Figura 5.10 Comparação entre as superfícies de interação $N-M$ , pilar circular preenchido.....	100
Figura 5.11 Comparação entre as superfícies de interação $N-M$ , pilar retangular preenchido.....	100
 <b>CAPÍTULO 6</b>	
Figura 6.1 Sistema de coordenadas de referência.....	105
Figura 6.2 Deformação de um segmento do eixo da barra: (a) plano $XY$ ; (b) plano $XZ$ .....	107
Figura 6.3 Convenção de sinal para os esforços $N_x$ , $M_y$ , $M_z$ .....	111
Figura 6.4 Curva carga-deslocamento (Parente Jr, 2000).....	116

Figura 6.5 Eixos de referência e graus de liberdade locais.....	118
Figura 6.6 Viga de concreto analisada (Melo, 2000).....	135
Figura 6.7 Comparação dos resultados para análise da viga de concreto, FEMOOP e Melo (2000).....	135
Figura 6.8 Forma de aplicação do carregamento utilizada em Mirza <i>et al.</i> (1996): (a) diagrama do carregamento; (b) diagrama de momentos; (c) modelo analisado no FEMOOP (dimensões em <i>mm</i> ).....	136
Figura 6.9 Detalhes da seção dos protótipos, dimensões em <i>mm</i> (Mirza <i>et al.</i> , 1996).....	137
Figura 6.10 Comparação das curvas carga-deslocamento para os protótipos RHB (Mirza <i>et al.</i> , 1996).....	140
Figura 6.11 Comparação das curvas carga-deslocamento para os protótipos RNHB (Mirza <i>et al.</i> , 1996).....	141
Figura 6.12 Comparação das curvas carga-deslocamento para os protótipos RHNB (Mirza <i>et al.</i> , 1996).....	142
Figura 6.13 Seções transversais dos protótipos ensaiados por Wang (1999) e seção analisada no FEMOOP, dimensões em <i>mm</i> .....	144
Figura 6.14 Deslocamentos no meio do pilar RHS-2 na direção do eixo de maior inércia (Wang, 1999).....	145
Figura 6.15 Deslocamentos no meio do pilar RHS-3 nas direções dos eixos de maior e menor inércia (Wang, 1999).....	145
Figura 6.16 Deslocamentos no meio do pilar RHS-4 na direção do eixo de menor inércia (Wang, 1999).....	146
Figura 6.17 Deslocamentos no meio do pilar RHS-6 nas direções dos eixos de maior e menor inércia (Wang, 1999).....	146
Figura 6.18 Deslocamentos no meio do pilar RHS-8 na direção do eixo de menor inércia (Wang, 1999).....	147
Figura 6.19 Deslocamentos no meio do pilar RSJ-1 na direção do eixo de menor inércia (Wang, 1999).....	147
Figura 6.20 Deslocamentos no meio do pilar RSJ-3 na direção do eixo de maior inércia (Wang, 1999).....	148

Figura 6.21 Deslocamentos no meio do pilar RSJ-4 nas direções dos eixos de maior e menor inércia (Wang, 1999).....	148
Figura 6.22 Deslocamentos no meio do pilar RSJ-5 na direção do eixo de menor inércia (Wang, 1999).....	149
Figura 6.23 Deslocamentos no meio do pilar RSJ-7 nas direções dos eixos de maior e menor inércia (Wang, 1999).....	149
Figura 6.24 Seções e aplicação do carregamento conforme Kindmann <i>et al.</i> (1993): (a) seções analisadas, dimensões em <i>mm</i> ; (b) diagrama do ensaio realizado; (c) modelo analisado no FEMOOP.....	151
Figura 6.25 Curva carga-deslocamento no centro da viga V1 (Kindmann <i>et al.</i> , 1993).....	152
Figura 6.26 Curva carga-deslocamento no centro da viga V8 (Kindmann <i>et al.</i> , 1993).....	152
Figura 6.27 Curva carga-deslocamento no centro da viga V11 (Kindmann <i>et al.</i> , 1993).....	153
Figura 6.28 Seção dos protótipos analisados por Matsui <i>et al.</i> (1995), dimensões em <i>mm</i> .....	154
Figura 6.29 Seção transversal dos protótipos analisados por Rangan e Joyce (1992), dimensões em <i>mm</i> .....	156
Figura 6.30 Pilar retangular preenchido, seção transversal, Liu <i>et al.</i> (2003), dimensões em <i>mm</i> .....	158
Figura 6.31 Vigas analisadas por Han (2004): (a) seção transversal; (b) esquema do ensaio; (c) diagrama de momentos; (d) modelo analisado no FEMOOP, dimensões em <i>mm</i> .....	160
Figura 6.32 Comparação das curvas momento-deslocamento obtidas no presente trabalho e experimentalmente por Han (2004).....	161

## CAPÍTULO 7

Figura 7.1 Eixos de referência e graus de liberdade locais: (a) elementos de viga e mola; (b) elemento híbrido.....	167
Figura 7.2 Pórtico de concreto armado (Melo, 2000).....	168

Figura 7.3 Curva carga $P$ versus deslocamento $a$ .....	169
Figura 7.4 Modelos para análise: (a) seções transversais que compõem a viga mista, dimensões em $mm$ ; (b) viga mista analisada em Queiroz <i>et al.</i> (2001b) (c) viga mista analisada no FEMOOP.....	170
Figura 7.5 Curvas carga-deslocamento: (a) pórtico com ligações semi-rígidas; (b) pórtico com ligações rígidas.....	174
Figura 7.6 Pórticos analisados por Chan e Chui (2000): (a) pórtico sem contraventamento; (b) pórtico contraventado.....	175
Figura 7.7 Curva carga-deslocamento, apoios rotulados sem contraventamento....	176
Figura 7.8 Curva carga-deslocamento, apoios engastados sem contraventamento..	176
Figura 7.9 Curva carga-deslocamento, apoios rotulados com contraventamento....	177
Figura 7.10 Curva carga-deslocamento, apoios engastados com contraventamento.....	178

# | LISTA DE TABELAS

## CAPÍTULO 2

Tabela 2.1 Termos e especificações utilizados nas normas EC4, BS 5400 e AISC (adaptado de Saw e Richard Liew, 2000).....	29-31
Tabela 2.2 Índices de esbeltez segundo o EC4, BS 5400 e AISC (adaptado de Saw e Richard Liew, 2000).....	31
Tabela 2.3 Experimentos realizados em pilares mistos envolvidos (adaptado de Shanmugam e Lakshmi, 2001).....	36-38
Tabela 2.4 Experimentos em pilares mistos tubulares preenchidos (adaptado de Shanmugam e Lakshmi, 2001).....	39-41

## CAPÍTULO 3

Tabela 3.1 Comparação do programa com ensaios e normas (Shakir e Mouli, 1990).....	65
Tabela 3.2 Comparação do programa CSTM com a NBR 14323 (1999).....	67

## CAPÍTULO 5

Tabela 5.1 Propriedades dos materiais (Roik e Bergmann, 1990).....	92
Tabela 5.2 Carregamentos e comparação com ensaios realizados por Roik e Bergmann (1990).....	93
Tabela 5.3 Dimensões dos protótipos ensaiados (Varma <i>et al.</i> , 2002).....	94
Tabela 5.4 Comparação dos resultados experimentais com normas e o Programa CSTM (Varma <i>et al.</i> , 2002).....	97

## CAPÍTULO 6

Tabela 6.1 Propriedades mecânicas do concreto e do aço (Mirza <i>et al.</i> , 1996).....	138
Tabela 6.2 Comparação dos resultados com Mirza <i>et al.</i> (1996).....	139
Tabela 6.3 Resumo das informações dos ensaios (Wang, 1999).....	143
Tabela 6.4 Resultados das análises (Wang, 1999).....	144
Tabela 6.5 Parâmetros envolvidos nos ensaios (Kindmann <i>et al.</i> , 1993).....	150
Tabela 6.6 Comparação entre os resultados (Kindmann <i>et al.</i> , 1993).....	153
Tabela 6.7 Comparação com os protótipos ensaiados por Matsui <i>et al.</i> (1995)....	155
Tabela 6.8 Comparação com os ensaios realizados por Rangan e Joyce (1992)...	157
Tabela 6.9 Propriedades dos protótipos analisados por Liu <i>et al.</i> (2003).....	158
Tabela 6.10 Resultados e comparações das análises realizadas por Liu <i>et al.</i> (2003) com o presente trabalho.....	159
Tabela 6.11 Propriedades das vigas ensaiadas por Han (2004).....	160
Tabela 6.12 Coeficientes de fluência finais e deformações finais devido à retração em pilares tubulares preenchidos (Uy, 1998b).....	163
Tabela 6.13 Análises realizadas no presente trabalho para um pilar com $\lambda = 40$ .....	164
Tabela 6.14 Análises realizadas no presente trabalho para um pilar com $\lambda = 80$ .....	164

## CAPÍTULO 7

Tabela 7.1 Resultados das análises da viga mista semi-contínua: deslocamentos no meio do primeiro vão.....	171
Tabela 7.2 Resultados das análise da viga mista contínua: deslocamentos no meio do primeiro vão.....	171

---

# INTRODUÇÃO

## 1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Elementos mistos aço-concreto são formados a partir da associação de um componente em aço, geralmente, um perfil I ou tubular, com um componente em concreto, simples ou armado. Denomina-se, então, elemento misto aço-concreto aquele no qual um perfil de aço, laminado, dobrado ou soldado, trabalha em conjunto com o concreto, formando um pilar misto, uma viga mista, uma laje mista ou uma ligação mista.

A interação entre o concreto e o perfil de aço pode se dar por meios mecânicos (conectores, mossas e ressaltos), por atrito, ou por simples aderência e repartição de cargas.

A opção por estruturas mistas está ligada, além de outras razões, ao fato de que a estrutura de aço pode ser construída primeiro, suportando as cargas permanentes e de construção. Com o processo de concretagem dos pilares mistos e vigas mistas, por exemplo, tem-se um aumento expressivo da capacidade resistente da estrutura, suficiente para resistir às sobrecargas de utilização, enquanto que as dimensões de pilares e vigas são menores do que as de elementos de concreto armado.

Além da variedade de opções disponíveis, possibilitando a obtenção de benefícios arquitetônicos e econômicos, os sistemas mistos apresentam outras vantagens, listadas a seguir.

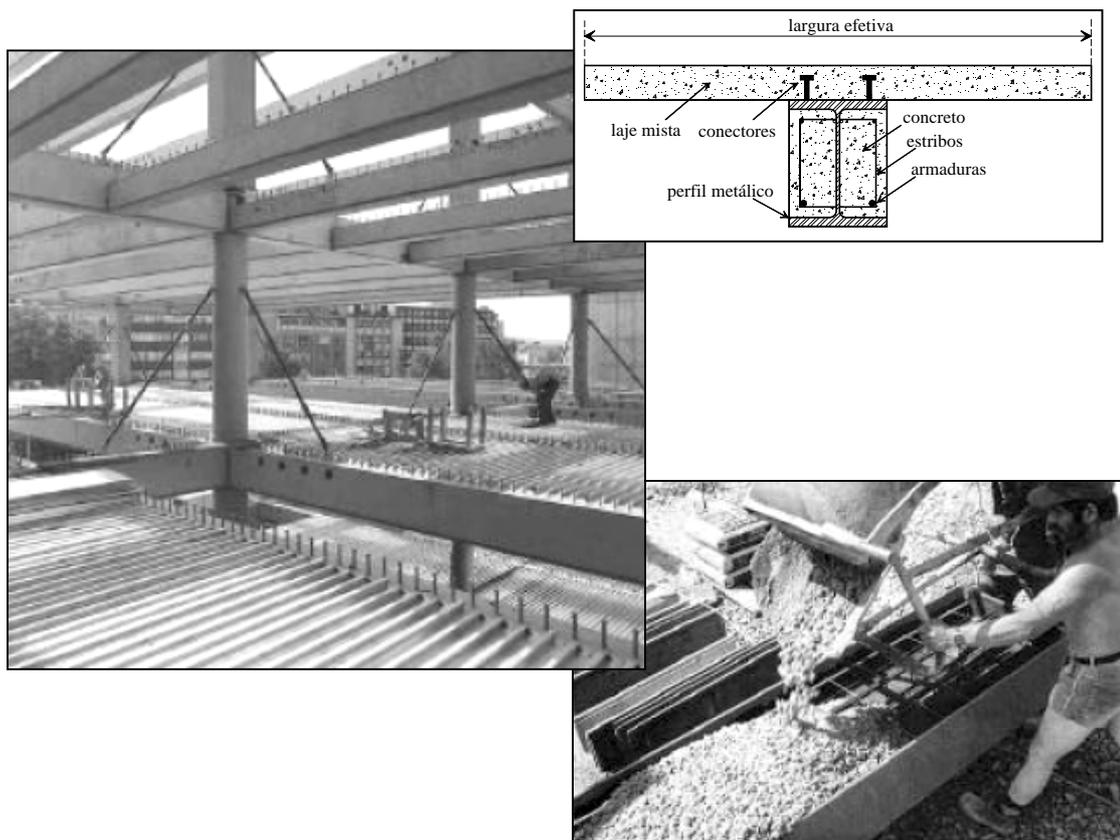


Figura 1.1 Edifício sendo construído com estruturas mistas; seção transversal típica das vigas mistas parcialmente envolvidas por concreto; concretagem das vigas (Stark, 2001).

Com relação às contrapartidas em concreto armado:

- a) possibilidade de dispensa de fôrmas e escoramentos;
- b) redução do peso próprio e do volume da estrutura aumentando as áreas livres;
- c) aumento da precisão dimensional da construção;
- d) menor tempo de execução da obra.

Com relação às contrapartidas em aço:

- a) redução considerável do consumo de aço estrutural;
- b) redução das proteções contra incêndio e corrosão.

A união de elementos de aço, elementos mistos e elementos de concreto, resulta em uma estrutura denominada estrutura híbrida.



Figura 1.2 *Empire State Building*, 102 andares, 1860 degraus, 373 metros de altura; a direita fotos da construção (www.nypl.org).

Em 1894 surgiram as primeiras estruturas utilizando vigas metálicas revestidas com concreto nos Estados Unidos (Griffis, 1994) e entre 1920 e 1930 foram construídos os primeiros edifícios altos como o *Empire State Building* e o *Chrysler Building*. Estas construções evidenciaram vantagens das estruturas mistas como a proteção contra a ação do fogo e da corrosão.

Segundo De Nardim (1999), o início dos estudos dos elementos estruturais mistos data de 1914 na Inglaterra. Em meados de 1930 já se havia estabelecido métodos de dimensionamento para vigas mistas que foram, em 1944, introduzidos na norma da *American Association of State Highway*, AASHTO, e em 1952 no *American Institute of Steel Construction*, AISC.

No Brasil os sistemas estruturais formados por elementos mistos foram introduzidos na década de 50. É relevante citar a construção dos edifícios: Garagem América (1957), Palácio do Comércio (1959), Avenida Central (1961), Santa Cruz

(1963) e Sede do IPERJ (1965) os quais têm projeto estrutural do engenheiro Paulo R. Fragoso (Figueiredo, 1998).

## 1.2 OBJETIVOS

Desde a década de 60 os pilares mistos têm sido estudados e sua utilização tem sido cada vez mais acentuada. Revisões nos modelos de cálculo indicam a necessidade de se oferecer aos projetistas informações que reflitam melhor o comportamento desse tipo de elemento.

Em comparações com países como os Estados Unidos, Japão e europeus, a utilização de elementos mistos no Brasil, especialmente dos pilares mistos, em relação ao seu desenvolvimento e utilização, encontram obstáculos como o conservadorismo da construção civil, identificado pela escolha preferencial por estruturas em concreto armado, e o desconhecimento quanto à existência e comportamento dos pilares mistos (De Nardin, 1999).

O projeto de revisão (NBR 8800, 2003) da norma brasileira NBR 8800 (1986), trata do dimensionamento de pilares mistos, antes previsto na NBR 14323 (1999), também em processo de revisão.

O projeto de revisão, NBR 8800 (2003), intitulado “Projeto e Execução de Estruturas de Aço e de Estruturas Mistas Aço-Concreto de Edifícios” evidencia em seu escopo uma preocupação relevante quanto aos elementos mistos, reflexo do aumento do uso do aço no Brasil.

Entre os elementos tratados na NBR 8800 (2003), tem-se: vigas mistas; pilares mistos; lajes mistas; e ligações mistas aço-concreto.

A análise de elementos mistos se torna complexa uma vez que, tem-se em questão, características associadas ao comportamento do aço e concreto além da interação entre ambos. Pode-se citar, por exemplo, a não linearidade física, retração e fluência do concreto, e questões como a flambagem local e tensões residuais nos perfis.

Os procedimentos de análise e dimensionamento de elementos mistos apresentados em normas (Eurocode 4, 1994; NBR 14323, 1999) são simplificados, permitindo-se a utilização de métodos sofisticados que em geral não são utilizados por

falta de ferramentas computacionais eficientes, tempo necessário às análises e até mesmo por falta de conhecimento da maioria dos engenheiros.

O tratamento mais adequado dos pilares mistos, quanto à análise e dimensionamento é o principal objetivo desta pesquisa. Para isso utiliza-se o Método dos Elementos Finitos que, associado à técnica de programação orientada a objetos pode fornecer resultados satisfatórios.

Objetiva-se analisar pilares de seções transversais genéricas considerando-se as não-linearidades física e geométrica. Ao final pretende-se obter programas computacionais eficientes e rápidos, capazes de simular de forma precisa o comportamento dos pilares mistos.

A preocupação inicial de tratamento dos pilares mistos se mostrou uma opção interessante, pois o caráter genérico do trabalho possibilita o tratamento de outros elementos.

### **1.3 APRESENTAÇÃO**

Este trabalho encontra-se dividido em oito capítulos. No segundo capítulo tem-se uma revisão bibliográfica acerca dos pilares mistos. São apresentados os principais tipos de análises e procedimentos adotados pelas principais normas internacionais. Ao final do capítulo é apresentada uma síntese das principais pesquisas relacionadas ao assunto.

Um estudo voltado para análise de seções transversais mistas genéricas é feito nos Capítulos 3, 4 e 5. A obtenção dos esforços resistentes em seções mistas, características dos materiais aço e concreto e exemplos de aplicação da formulação são feitas no Capítulo 3.

No Capítulo 4 apresenta-se uma formulação voltada para obtenção de relações momento-curvatura em seções mistas genéricas. As relações momento-curvatura são obtidas através de dois algoritmos distintos que utilizam o Método de Newton Raphson. Exemplos de utilização da formulação são apresentados ao final do capítulo.

Duas formulações, uma utilizando o Método de Newton Raphson e outra utilizando um parâmetro de deformação que caracteriza os estados limites últimos da seção, são apresentadas no Capítulo 5 para a obtenção de superfícies de interação em

seções genéricas submetidas à flexão composta oblíqua. Exemplos de utilização da formulação também são apresentados.

Os Capítulos 3, 4 e 5 são uma etapa importante, principalmente a obtenção de esforços na seção, para a implementação do modelo de elementos finitos apresentado no Capítulo 6. Nesse capítulo apresentam-se, além do modelo de elementos finitos implementado, exemplos de utilização da formulação e comparações com resultados de outras pesquisas.

Implementações adicionais complementando o modelo de elementos finitos desenvolvido são apresentadas no Capítulo 7. Através da implementação de elementos de mola torna-se possível a simulação de pórticos com a consideração das ligações semi-rígidas ou mistas e das não-linearidades física e geométrica. Exemplos são apresentados no final do capítulo. Esse capítulo demonstra possíveis aplicações e potencialidades do modelo implementado, tendo como principal característica apresentar tendências para trabalhos que poderão ser desenvolvidos futuramente.

No Capítulo 8 apresentam-se as conclusões obtidas neste trabalho e sugestões para trabalhos futuros. Finalizando, são listadas as referências bibliográficas utilizadas no desenvolvimento deste trabalho.

# PILARES MISTOS

## 2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, faz-se uma revisão bibliográfica em relação aos pilares mistos. Primeiramente, é feito um estudo sobre os pilares curtos concentrado na análise da seção transversal. Posteriormente, trata-se dos pilares esbeltos de forma geral. Na seqüência, apresenta-se uma visão geral sobre as principais normas internacionais. Por último faz-se uma revisão bibliográfica sobre os trabalhos mais recentes na área.

Em geral, o termo pilar misto refere-se a qualquer membro comprimido no qual um elemento de aço atua juntamente com o concreto, sem escorregamento relativo significativo na superfície de contato, estando sujeito a momentos fletores, devidos às imperfeições e/ou excentricidades iniciais, devido às translações dos nós ou cargas transversais. Os pilares mistos podem ser formados por um perfil envolvido ou preenchido com concreto. As Figuras 2.1 e 2.2 apresentam as seções transversais mais usuais.

Elementos metálicos de seção transversal I foram inicialmente envolvidos com concreto no propósito de protegê-los contra incêndio. Entretanto não se quantificava o aumento da resistência até a década de 50. Desde então, pesquisas e aplicações têm avançado, e hoje os pilares mistos encontram grande aceitação. Estudos têm mostrado que a associação com o concreto pode aumentar a resistência dos pilares metálicos, além de proporcionar uma substancial economia (Oehlers e Bradford, 1995).

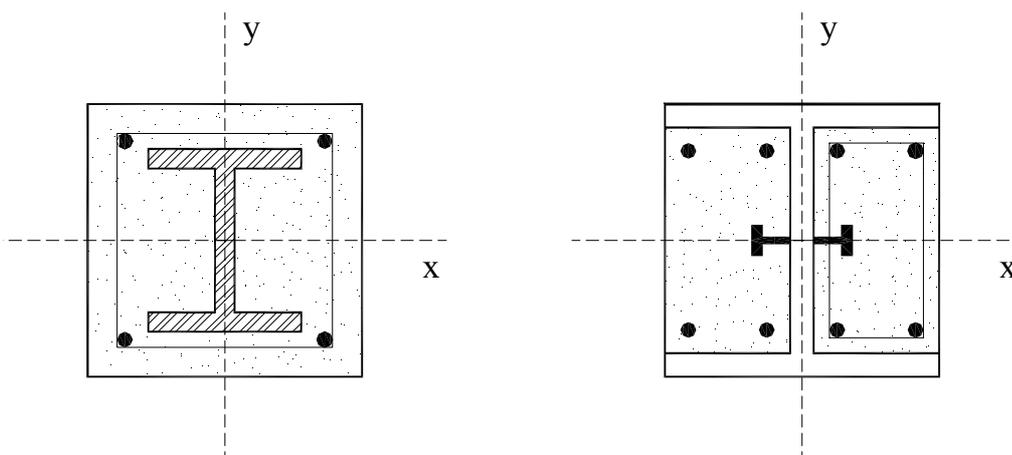


Figura 2.1 Seções transversais de pilares mistos completa e parcialmente envolvidos com concreto.

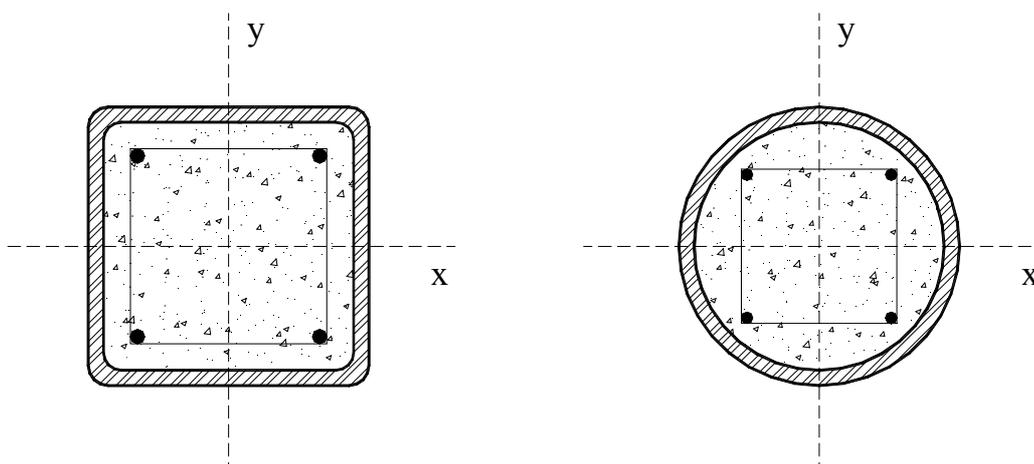


Figura 2.2 Seções transversais de pilares mistos tubulares preenchidos com concreto.

Podem-se citar algumas vantagens dos pilares mistos como:

- a) Aumento da resistência para dimensão externa constante;
- b) Aumento na rigidez e resistência à flambagem;
- c) Aumento na ductilidade em situações de carregamento repetido e reverso;
- d) Boa resistência em situações de incêndio;
- e) Proteção à corrosão em seções envolvidas;
- f) Possibilidade das ligações entre vigas e pilares serem realizadas através dos perfis.

Pilares mistos frequentemente oferecem vantagens econômicas em relação aos de aço e de concreto armado. Seções com diferentes resistências, porém com dimensões externas constantes, podem ser obtidas a partir da variação da espessura das chapas que compõem o perfil, resistência do concreto ou armaduras. Mantendo-se constantes as dimensões externas dos pilares, ao longo de um número maior de andares, torna-se mais simples o detalhamento arquitetônico.

Com referência ao comportamento dos pilares, tem-se que, em geral, os pilares curtos não são influenciados pelos efeitos de segunda ordem, tendo, portanto, a resistência controlada pela resistência da seção. Já os pilares esbeltos estão sujeitos à não-linearidade geométrica, amplificando os momentos que atuam na seção transversal do elemento.

Geralmente, a seção mista é projetada com base em análise rígido-plástica, tomando-se as curvas de flambagem de acordo com o projeto de estruturas de aço para análise do pilar. Este procedimento é adotado em normas como a NBR 14323 (1999) e o Eurocode 4 (1994) e tem se mostrado coerente com os ensaios realizados, como apresentado por Saw e Richard Liew (2000).

A resistência da seção transversal é governada puramente pela capacidade resistente dos materiais. A resistência do elemento reflete o fato da instabilidade ser dependente não somente da rigidez e resistência, mas também das propriedades geométricas da peça. Sob carregamento de longa duração a retração e fluência do concreto aumentam a deformação do elemento e influenciam no valor da carga crítica.

Pode-se classificar as formas de dimensionamento dos pilares mistos em duas classes distintas baseadas nos procedimentos de análise da seção:

a) Procedimentos de cálculo baseados em uma análise rígido-plástica da seção transversal do elemento, semelhante às análises feitas em elementos de aço;

b) Procedimentos de cálculo que fazem uma análise elasto-plástica da seção, semelhante às análises feitas para elementos de concreto armado.

## 2.2 PILAR CURTO - ANÁLISE DA SEÇÃO

Pilares mistos curtos falham essencialmente por esmagamento do concreto, e têm a resistência global dada principalmente pela resistência da seção transversal e dos materiais componentes.

Neste item os efeitos devido à retração, fluência e variação de temperatura serão desconsiderados.

Em seguida, apresentam-se os métodos mais empregados para análise de pilares curtos. Os métodos têm como base uma seção de aço envolvida por concreto. Pode-se estendê-los facilmente para seções de aço preenchidas com concreto, tubular circular ou retangular, com poucas adaptações, desde que seja garantida a não ocorrência de flambagem local no perfil de aço.

### 2.2.1 Métodos de Análise

#### 2.2.1.1 Análise Elasto-Plástica

Mostra-se na Figura 2.3 uma seção I envolvida, comprimida e fletida em relação ao eixo de maior inércia. As hipóteses de deformação e tensão configuram uma análise elasto-plástica. O diagrama de tensões no concreto é simplificado por um retângulo de base  $0.85f_{ck}$  e altura  $\gamma n_a$ , sendo  $n_a$  a distância da linha neutra à fibra de topo comprimida a 0.003 de deformação segundo Oehlers e Bradford (1999), e

$$\gamma = 0.85 - 0.007(f_{ck} - 28) \leq 0.85. \quad (2.1)$$

A distribuição de tensões no aço é elasto-plástica.

Adaptando o procedimento conforme a norma brasileira (NBR 6118, 2003) tem-se

$$\gamma = 0.80 \quad (2.2)$$

e, para deformação máxima de compressão no concreto, a NBR 6118 (2003) adota o valor de 0.0035.

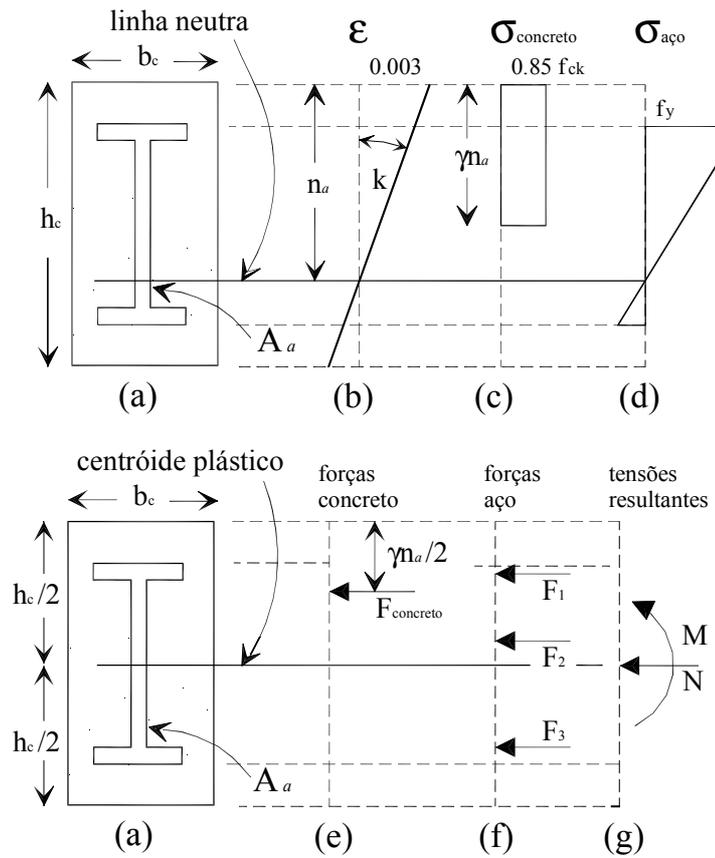


Figura 2.3 Análise elasto-plástica da seção transversal.

Com essas hipóteses, e variando a posição da linha neutra, na Figura 2.3 determinam-se os pontos  $(M, N)$  para os quais ocorre a falha da seção. Na Figura 2.4, tem-se a forma das curvas obtidas para os eixos de maior e menor inércia da seção mista.

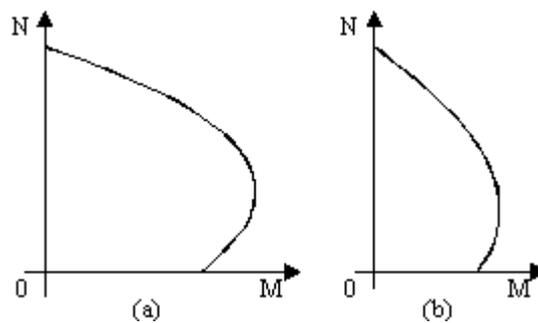


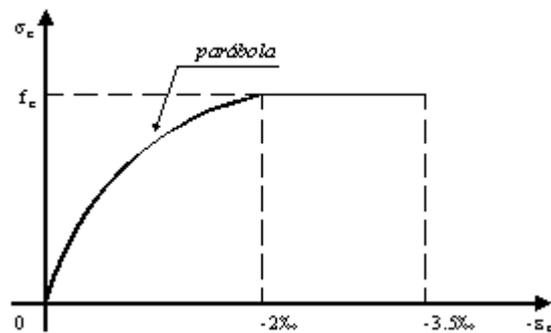
Figura 2.4 Curvas de interação  $N$ - $M$  típicas: (a) flexão em torno do eixo de maior inércia; (b) flexão em torno do eixo de menor inércia.

Pode-se notar que estas curvas são similares às aquelas obtidas para seções de concreto armado. Ao fixar a deformação na fibra mais comprimida do concreto está-se admitindo que o estado limite último atingido é o de esmagamento do concreto.

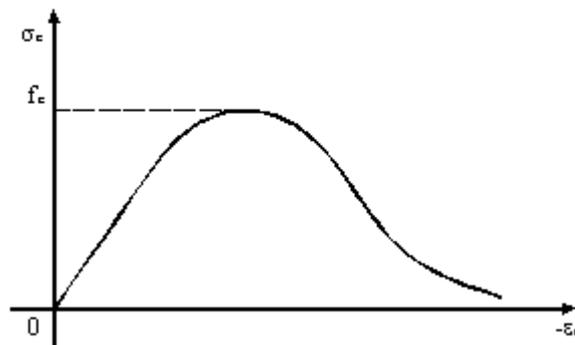
Para se obter o esforço normal resistente máximo é necessário que  $n_a \rightarrow \infty$ , porém o que se faz é obter esse ponto através da expressão

$$N = 0.85 f_{ck} (b_c h_c - A_a) + A_a f_y . \quad (2.3)$$

Uma análise elasto-plástica mais apurada pode ser feita considerando-se uma relação tensão-deformação mais apropriada para o concreto, Figura 2.5, e considerando-se os limites admissíveis de deformação do concreto armado, Figura 2.6.



(a)



(b)

Figura 2.5 Relações tensão-deformação do concreto: (a) relação utilizada pela NBR 6118 (2003); (b) relação apresentada pelo CEB (1990).



brasileira não considera a obtenção deste ponto, o que pode levar a erros de avaliação (Queiroz e Prestes, 2002). Também é desprezado o ponto *D*, a favor da segurança, uma vez que este somente existe quando o momento fletor é função do esforço normal.

O procedimento assume que a seção transversal é duplamente simétrica em relação aos eixos principais de flexão. O procedimento para obtenção dos pontos é mostrado na Figura 2.8. A seção é formada pelo componente aço, que é assumido completamente escoado na compressão e na tração com o valor  $f_y$ , e o componente concreto, que é assumido comprimido com tensão no valor de  $0.85f_{ck}$ , sem resistência à tração.

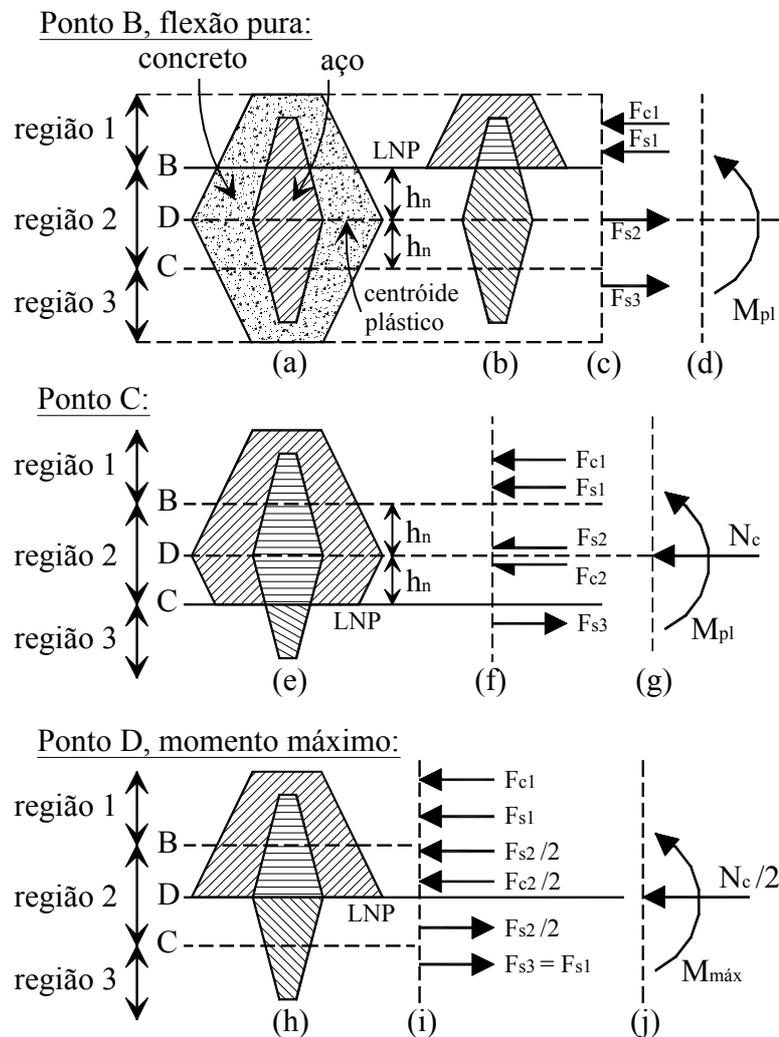


Figura 2.8 Pontos da curva de interação para uma seção genérica segundo Roik e Bergmann (1989), adaptado de Oehlers e Bradford (1999).

Obtém-se o ponto *A* mostrado na Figura 2.7 através da expressão (2.3).

O ponto *B* corresponde à resistência à flexão pura. Considerando-se a distribuição de tensões mostrada na Figura 2.8(b) tem-se compressão acima do eixo *LNP* (linha neutra plástica), que posiciona-se a uma distância  $h_n$  acima do centróide plástico, definido no item 3.3. Abaixo da linha neutra plástica, somente o componente aço é tracionado. Convenientemente, divide-se a seção em 3 regiões para facilitar a quantificação das forças. Fazendo-se o somatório das forças nulo, e dos momentos em relação ao centróide plástico, obtém-se o momento de plastificação da seção. Observa-se que a distância  $h_n$  é determinada com o intuito de se obter um somatório nulo das forças resistentes.

No ponto *C*, Figura 2.8(e), o momento fletor resistente em relação ao centróide plástico é igual ao do ponto *B*, porém o somatório das forças não é nulo. A linha neutra plástica localiza-se a uma distância  $h_n$  abaixo do centróide plástico. Verifica-se que a resultante das forças é igual à resistência a compressão do componente concreto.

Ao ponto *D* corresponde o máximo valor de momento, e a linha neutra plástica coincide com o centróide plástico, Figura 2.8(h). Somando-se as forças obtém-se uma resultante igual à metade da resistência à compressão do componente concreto.

## 2.3 PILAR ESBELTO

Freqüentemente os pilares mistos são esbeltos, tendo sua capacidade de carga dependente não somente da resistência da seção transversal. Com o aumento do comprimento da peça torna-se necessária a consideração dos efeitos de segunda ordem ao longo do pilar. Em geral, o procedimento adotado (Eurocode 4, 1994; NBR 14323, 1999) é a consideração da esbeltez de forma análoga à das estruturas de aço. Utilizam-se, então, as mesmas curvas de flambagem de pilares metálicos. Os efeitos de segunda ordem, dentro do pilar, são considerados a partir da multiplicação de fatores de amplificação aos momentos obtidos na análise da estrutura.

## 2.4 RECOMENDAÇÕES DE NORMA

A NBR 14323 (1999) e o Eurocode 4 (1994) baseiam-se no método de Roik e Bergmann (1989), item 2.2.1.2, para obtenção do diagrama de interação normal-momento.

Além das seções da Figura 2.1 e 2.2 que são apresentadas pela norma brasileira, no Eurocode 4 são apresentadas outras seções, Figura 2.9.

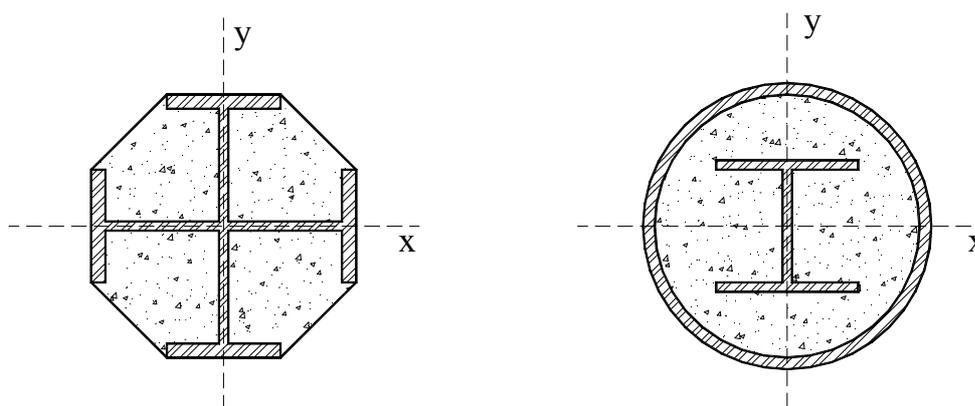


Figura 2.9 Outras seções apresentadas pelo Eurocode 4 (1994).

Normalmente não é necessário obter o diagrama de interação normal-momento. Alternativamente, usam-se equações que fazem as verificações, montando-se implicitamente o diagrama dado pelos pontos *ACB* da Figura 2.7.

De acordo com as normas NBR 14323 e Eurocode 4, deve-se ter seções duplamente simétricas e constantes ao longo do comprimento do pilar. Pode-se ter o perfil I laminado ou soldado e o tubo pode ser extrudado ou soldado (calandrado no caso de seção circular, composto de chapas no caso de seção retangular ou perfilado a frio).

Deve-se obedecer no projeto de armaduras longitudinais e transversais às prescrições das normas de concreto armado (NBR 6118, 2003; Eurocode 2, 1992). Para os pilares completa e parcialmente envolvidos, devem-se ter armaduras longitudinais e transversais. Para perfis preenchidos, somente em situação de incêndio podem ser necessárias armaduras longitudinais.

A resistência de todos os materiais deverá ser alcançada sem que ocorra flambagem local dos elementos componentes do perfil. Para garantir a não ocorrência da flambagem local, deve-se utilizar cobrimento de concreto adequado ou garantir que os componentes do perfil satisfaçam os requerimentos relacionados a esbeltez.

#### **2.4.1 Procedimentos Conforme NBR 14323 (1999) e Projeto de Revisão NBR 8800 (2003)**

Independente do tipo de análise utilizada para a estrutura, deve-se considerar comportamento elástico para o pilar misto (sem formação de rótulas plásticas). Os efeitos de segunda ordem deverão ser levados em consideração na análise da estrutura e ao longo do pilar. A rigidez efetiva do pilar é dada por

$$(EI)_e = E_a I_a + 0.8E_c I_c + E_s I_s \quad (2.4)$$

onde,  $E_a$ ,  $E_s$  e  $E_c$  são os módulos de elasticidade do aço do perfil, do aço da armadura e do concreto, respectivamente.  $I_a$ ,  $I_s$  e  $I_c$  são os momentos de inércia em relação ao eixo de flexão considerado do perfil, da armadura e do concreto não fissurado respectivamente. No projeto de revisão, NBR 8800 (2003), o termo  $0.8E_c I_c$  relativo ao componente concreto, aparece dividido pelo coeficiente 1.35, resultando na mesma expressão apresentada pelo Eurocode 4 (1994) para cálculo da esbeltez e carga crítica de flambagem .

De acordo com a esbeltez do pilar e com a parcela de carga permanente e quase permanente em relação à sollicitação normal total, os efeitos da longa duração das cargas deverão ser considerados através da modificação do módulo de elasticidade do concreto.

Imperfeições geométricas e estruturais também devem ser consideradas na análise estrutural.

A resistência à compressão axial de cálculo é obtida através da multiplicação de um fator de redução  $\rho$ , devido à esbeltez do pilar, pela resistência de cálculo da seção à plastificação total, considerando-se materiais rígido-plásticos. Os valores de  $\rho$  são

obtidos a partir das curvas de flambagem da NBR 8800 (1986). Logo, a resistência à compressão axial é dada por

$$N_{Rd} = \rho N_{pl,Rd}, \quad (2.5)$$

onde

$$N_{pl,Rd} = \phi_a f_y A_a + \alpha \phi_c f_{ck} A_c + \phi_s f_{ys} A_s, \quad (2.6)$$

é a resistência de cálculo da seção mista à plastificação total pela força normal. Na expressão (2.6)  $\phi_a$ ,  $\phi_c$  e  $\phi_s$  são, respectivamente, os coeficientes de resistência do aço do perfil, do concreto e aço das armaduras;  $f_y$ ,  $f_{ys}$  e  $f_{ck}$  representam, nesta ordem, o limite de escoamento do aço do perfil, do aço das armaduras e a resistência característica à compressão do concreto;  $A_a$ ,  $A_s$  e  $A_c$  correspondem, nesta seqüência, à área da seção transversal do componente aço, à área das armaduras e à área do concreto. Em relação a  $\alpha$ , considera-se igual a 1.00 para seções tubulares preenchidas ou 0.85 para seções revestidas com concreto.

Os efeitos de segunda ordem dentro do comprimento do pilar, são aproximados pela multiplicação do fator de amplificação

$$k = \frac{C_m}{\left[ 1 - \left( \frac{N_{Sd}}{N_e} \right) \right]} \geq 1.0 \quad (2.7)$$

pelo máximo momento fletor de cálculo atuante no pilar, obtido na análise da estrutura. Na expressão (2.7),  $C_m$  é um coeficiente que se baseia em análise elástica de primeira ordem com os nós contidos horizontalmente relativo ao eixo de flexão considerado;  $N_{Sd}$  é a força normal solicitante de cálculo e  $N_e$  a carga de flambagem elástica por flexão, relativos ao eixo de flexão considerado.

A flexão composta reta é verificada pelo diagrama formado pelos pontos *BCA* da Figura 2.7 que é implicitamente checado através da expressão

$$\frac{\mu_k(N_{Sd} - N_n)}{(N_{Rd} - N_n)} + \frac{kM_{Sd}}{(0.9M_{pl,Rd})} \leq \mu_d \leq 1.0, \quad (2.8)$$

e, para a verificação da flexão composta oblíqua utiliza-se a expressão

$$\frac{\mu_k(N_{Sd} - N_n)}{(N_{Rd} - N_n)} + \frac{k_x M_{x,Sd}}{(0.9M_{x,pl,Rd})} + \frac{k_y M_{y,Sd}}{(0.9M_{y,pl,Rd})} \leq \mu_d \leq 1.0 \quad (2.9)$$

onde

$$\mu_k = \frac{(N_{pl,Rd} - N_{Rd})}{(N_{pl,Rd} - N_c)} \leq 1.0 \quad (2.10)$$

$$\mu_d = \frac{(N_{pl,Rd} - N_{Sd})}{(N_{pl,Rd} - N_c)} \leq 1.0 \quad (2.11)$$

$$N_n = N_{Rd} \left( \frac{1 + \frac{M_1}{M_2}}{4} \right) \leq N_{Sd} \quad (2.12)$$

sendo  $M_{x,Sd}$  e  $M_{y,Sd}$  os momentos solicitantes de cálculo segundo as direções  $x$  e  $y$  respectivamente;  $M_{x,pl,Rd}$  e  $M_{y,pl,Rd}$  são as resistências de cálculo da seção mista à plastificação total pelos momentos fletores em  $x$  e  $y$  respectivamente;  $k_x$  e  $k_y$  são obtidos através da expressão (2.7) para cada direção;  $N_c$  é a resistência de cálculo do componente concreto à plastificação total pela força normal;  $M_1 / M_2$  é a relação entre o menor e o maior momento nas extremidades do pilar, sendo positiva para curvatura reversa e negativa para curvatura simples, devendo-se tomar  $M_1 / M_2 = -1$  quando o momento em alguma seção intermediária for superior em valor absoluto a  $M_1$  ou  $M_2$ ; e também em balanços. A primeira parcela da expressão (2.9) deverá ser determinada em cada um dos dois planos de flexão, tomando-se o maior dos dois resultados. Em

qualquer situação deve-se ter  $N_{Sd}$  igual ou inferior a  $N_{Rd}$  em ambos os planos de flexão, mesmo quando em um deles  $M_{Sd}$  for nulo.

As expressões (2.8) e (2.9) fazem a verificação da resistência à flexão do pilar misto para uma determinada carga axial de compressão atuante  $N_{Sd}$ . Nessas, considera-se através do primeiro termo a atuação da força normal nas imperfeições geométricas do pilar, o que leva a um acréscimo do momento atuante.

No projeto de revisão, NBR 8800 (2003), pretende-se substituir as expressões (2.8) e (2.9) pelas seguintes expressões:

Para  $\frac{N_{Sd}}{N_{Rd}} \geq 0.2$ , tem-se

$$\frac{N_{Sd}}{N_{Rd}} + \frac{8}{9} \left( \frac{M_{Sd,x}}{M_{Rd,x}} + \frac{M_{Sd,y}}{M_{Rd,y}} \right) \leq 1.0 \quad (2.13)$$

e, para  $\frac{N_{Sd}}{N_{Rd}} < 0.2$ , tem-se

$$\frac{N_{Sd}}{2N_{Rd}} + \left( \frac{M_{Sd,x}}{M_{Rd,x}} + \frac{M_{Sd,y}}{M_{Rd,y}} \right) \leq 1.0 \quad (2.14)$$

onde  $N_{Sd}$  é a força normal atuante de cálculo. Em (2.13) e (2.14)  $M_{Sd,x}$  é o momento fletor atuante de cálculo em torno do eixo  $x$  da seção considerada;  $M_{Sd,y}$  é o momento fletor atuante de cálculo em torno do eixo  $y$  da seção considerada;  $N_{Rd}$  é a força normal de compressão resistente de cálculo, de acordo com (2.5);  $M_{Rd,x}$  é o momento fletor resistente de cálculo em torno do eixo  $x$  da seção mista, determinado considerando-se distribuição plástica das tensões, igual a  $M_{x,pl,Rd}$ ; e  $M_{Rd,y}$  é o momento fletor resistente de cálculo em torno do eixo  $y$  da seção mista, determinado considerando-se distribuição plástica das tensões, igual a  $M_{y,pl,Rd}$ .

#### **2.4.2 Procedimentos Conforme Eurocode 4 (1994)**

Os procedimentos adotados pela NBR 14323 (1999) são baseados em normas européias. As diferenças entre os procedimentos da norma brasileira e do Eurocode 4 (1994) são pequenas, como por exemplo: é dispensada, no Eurocode 4, a aplicação do coeficiente de segurança adicional, 0.9, na segunda e terceira parcelas da expressão (2.9) desde que se verifique a expressão (2.8) com esse coeficiente em cada um dos dois planos de flexão.

Um método mais geral para análise de seções não simétricas e não uniformes ao longo do elemento pode ser utilizado, segundo o Eurocode 4, desde que as seguintes condições sejam satisfeitas:

a) A análise da estrutura deverá avaliar os efeitos de segunda ordem incluindo os efeitos das tensões residuais, imperfeições geométricas, instabilidade local, fissuração, fluência e retração do concreto, além do escoamento do aço do perfil e armaduras. A análise deve assegurar que não ocorra instabilidade para as combinações de carregamento mais desfavoráveis para os estados limites últimos e que a resistência de qualquer seção sujeita a momento, força longitudinal e cortante não seja excedida;

b) As forças internas devem ser determinadas por análise elasto-plástica de segunda ordem;

c) Seções planas permanecem planas e há completa interação entre os componentes aço e concreto até a falha;

d) A região tracionada do concreto deve ser desprezada;

e) Relações tensão-deformação apropriadas, de acordo com as normas de concreto e aço, devem ser utilizadas nas análises não-lineares.

Mais informações sobre o projeto de pilares mistos segundo o Eurocode 4 também podem ser obtidas na publicação do *Steel Construction Institute*, SCI (1994).

#### **2.4.3 Procedimentos Conforme AISC (1999)**

Desde 1952, a AISC já inclui procedimentos para o projeto de vigas mistas, porém somente a partir de 1986 começou a considerar os pilares mistos em seu escopo. O conceito utilizado por esta norma, introduzido por Furlong (1976), estende a

metodologia de projeto de pilares metálicos para o projeto de pilares mistos. Esta extensão da metodologia é feita através de uma modificação das propriedades físicas e geométricas.

Através da modificação da tensão de escoamento  $F_{my}$ , módulo de elasticidade  $E_m$ , e raio de giração  $r_m$ , pode-se incorporar procedimentos de projeto de pilares metálicos às equações para o projeto de pilares mistos. Este procedimento foi apresentado pelo *Task Group 20 of the Structural Stability Research Council (SSRC, 1979)*.

Determina-se a resistência de cálculo à força normal de compressão  $\phi_c N_R$  a partir das mesmas equações utilizadas para pilares metálicos, a não ser pelas modificações nas propriedades  $F_{my}$ ,  $E_m$  e  $r_m$ . Sendo o coeficiente de segurança  $\phi_c = 0.85$ , obtém-se a resistência nominal à compressão

$$N_R = A_a F_{cr}, \quad (2.15)$$

tendo-se para  $\lambda_c \leq 1.5$

$$F_{cr} = (0.658^{\lambda_c^2}) F_{my} \quad (2.16)$$

e, para  $\lambda_c > 1.5$

$$F_{cr} = \left( \frac{0.877}{\lambda_c^2} \right) F_{my} \quad (2.17)$$

onde

$$\lambda_c = \left( \frac{KL}{\pi r_m} \right) \sqrt{\frac{F_{my}}{E_m}}. \quad (2.18)$$

As propriedades modificadas são:

$$F_{my} = f_y + c_1 f_{ys} \left( \frac{A_s}{A_a} \right) + c_2 f_{ck} \left( \frac{A_c}{A_a} \right) \quad (2.19)$$

e

$$E_m = E_a + c_3 E_c \left( \frac{A_c}{A_a} \right). \quad (2.20)$$

Nas expressões (2.18), (2.19) e (2.20),  $KL$  é o comprimento de flambagem do pilar;  $r_m$  o raio de giração relevante do perfil de aço, porém, no caso de perfil I totalmente envolvido por concreto, não menos do que 0.3 vezes a dimensão da seção mista no plano de flambagem;  $A_a$ ,  $A_c$  e  $A_s$ , são, respectivamente, as áreas transversais do perfil de aço, do concreto e das armaduras;  $f_y$ ,  $f_{ys}$  e  $f_{ck}$  são os limites de escoamento dos aços do perfil e armaduras e resistência característica do concreto à compressão respectivamente;  $E_a$  e  $E_c$  são, respectivamente, o módulo de elasticidade do aço do perfil e o módulo de elasticidade do concreto;  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  são coeficientes tomados, respectivamente, iguais a 1.0, 0.85 e 0.4 para tubos preenchidos com concreto e 0.7, 0.6 e 0.2 para perfis I totalmente envolvidos por concreto.

A resistência à flexão composta oblíqua deve ser verificada através das expressões:

Para  $\frac{N_{Sd}}{\phi_c N_R} \geq 0.2$ , tem-se

$$\frac{N_{Sd}}{N_R} + \frac{8}{9} \left( \frac{M_{x,Sd}}{\phi_b M_{x,n}} + \frac{M_{y,Sd}}{\phi_b M_{y,n}} \right) \leq 1.0, \quad (2.21)$$

e, para  $\frac{N_{Sd}}{N_R} < 0.2$ , tem-se

$$\frac{N_{Sd}}{2\phi_c N_R} + \left( \frac{M_{x,Sd}}{\phi_b M_{x,n}} + \frac{M_{y,Sd}}{\phi_b M_{y,n}} \right) \leq 1.0 \quad (2.22)$$

onde  $N_{Sd}$  é a força normal atuante de cálculo;  $\phi_c N_R$  é a resistência de cálculo à força normal de compressão dada anteriormente;  $\phi_b$  é o coeficiente de segurança da resistência ao momento fletor igual a 0.90;  $M_{x,n}$  e  $M_{y,n}$  são, respectivamente, o momento fletor resistente nominal em torno dos eixos  $x$  e  $y$  da seção mista. Os momentos fletores resistentes nominais são determinados a partir da distribuição plástica das tensões, considerando-se apenas a região comprimida do concreto, com tensão de  $0.85f_{ck}$ . O perfil e barras de armaduras são considerados sujeitos às tensões de escoamento tanto na região comprimida quanto na tracionada. Segundo a AISC, é necessário usar conectores de cisalhamento para  $N_{Sd}/(\phi_c N_R) < 0.3$ , calculados da mesma forma que para  $N_{Sd}/(\phi_c N_R) = 0$ , com o objetivo de garantir o comportamento misto do elemento. Caso não haja conectores de cisalhamento, os valores de  $M_{x,n}$  e  $M_{y,n}$  devem ser tomados a partir de uma transição, onde  $M_n$  varia linearmente a partir do valor do momento de plastificação da seção mista para o valor do momento resistente elástico (alternativamente pode-se adotar, somente, o momento resistente de plastificação do perfil), a partir de  $N_{Sd}/(\phi_c N_R) = 0.3$  para  $N_{Sd}/(\phi_c N_R) = 0$ , respectivamente.  $M_{x,Sd}$  e  $M_{y,Sd}$  são, respectivamente, o momento fletor atuante de cálculo em torno do eixo  $x$  da seção considerada, e o momento fletor atuante de cálculo em torno do eixo  $y$  da seção considerada, incluindo as imperfeições e efeitos de segunda ordem ao longo do pilar. Os efeitos de segunda ordem ao longo do pilar podem ser considerados a partir da amplificação dos momentos, utilizando-se a expressão

$$k = \frac{0.6 + 0.4 \frac{M_1}{M_2}}{\left[ 1 - \left( \frac{N_{Sd}}{N_{cr}} \right) \right]} \geq 1.0 \quad (2.23)$$

onde  $N_{cr} = (A_a F_{my}) / \lambda_c^2$  é a carga crítica de flambagem elástica. O termo  $M_1 / M_2$  tem o mesmo tratamento utilizado na expressão (2.12), porém com sinal contrário.

Observa-se nas expressões (2.21) e (2.22) a semelhança destas com as expressões (2.13) e (2.14) apresentadas no projeto de revisão da norma brasileira NBR 8800 (1986).

Para determinação da capacidade nominal à flexão da seção, alternativamente, a norma do AISC apresentava, na versão de 1993, para seções duplamente simétricas, a expressão aproximada

$$M_n = M_{pl} = Zf_y + \frac{1}{3}(h_2 - 2c_r)A_s f_{ys} + \left( \frac{h_2}{2} - \frac{A_w f_y}{1.7 f_{ck} h_1} \right) A_w f_y \quad (2.24)$$

onde  $Z$  é o módulo plástico da seção de aço;  $h_1$  é a altura da seção mista perpendicular ao plano de flexão;  $h_2$  é a altura da seção mista paralela ao plano de flexão;  $c_r$  é a largura do cobrimento de concreto a partir do centro da armadura para o lado da seção no plano de flexão;  $A_w$  é a área da seção transversal da alma do perfil, devendo ser tomada igual a zero quando se tratar de pilares preenchidos. Não são previstos na AISC os pilares mistos parcialmente envolvidos.

#### 2.4.4 Procedimentos Conforme ACI-318 (1999)

Nos Estados Unidos, a norma ACI era referência para o projeto de pilares mistos até 1986 quando a AISC incorporou procedimentos para verificação desses elementos. Em seguida, apresenta-se uma breve descrição da metodologia adotada pela ACI-318 (1999).

Sob compressão axial, a resistência nominal a compressão, é dada por

$$N_R = 0.8N_o \quad (2.25)$$

onde  $N_o = 0.85f_{ck}A_c + f_{ys}A_s + f_yA_a$ .

Os pilares devem ser verificados sob carregamento proveniente de análise de segunda ordem. O coeficiente de amplificação dos momentos

$$k = \frac{0.6 + 0.4 \frac{M_1}{M_2}}{\left[ 1 - \left( \frac{N_{sd}}{0.75 N_{cr}} \right) \right]} \geq 1.0 \quad (2.26)$$

pode ser utilizado para avaliar os efeitos de segunda ordem ao longo do pilar. Na expressão (2.26)  $N_{cr} = (\pi^2 EI)/(KL)^2$  onde, para avaliar as variações na rigidez devido à fissuração, fluência e não linearidade do concreto, toma-se para a rigidez à flexão  $EI=0.25E_cI_g$ , sendo  $I_g$  o momento de inércia da seção mista. O termo  $M_1 / M_2$  tem o mesmo tratamento utilizado na expressão (2.12), porém com sinal contrário. O mesmo vale para a expressão (2.27) apresentada a seguir.

Os efeitos de segunda ordem são desprezados desde que

$$\frac{KL}{r} \leq 34 - 12 \left( \frac{M_1}{M_2} \right). \quad (2.27)$$

A resistência a esforços combinados de flexão e normais seguem essencialmente os mesmos critérios de verificação de pilares de concreto armado. Estes baseiam-se na compatibilidade de deformação para o estado limite último, com os quais obtém-se as superfícies de interação  $N$ - $M$ . As seguintes hipóteses são assumidas na análise:

- a) A planicidade da seção é mantida;
- b) A máxima deformação de compressão no concreto é fixada em 0.003;
- c) Um bloco de altura constante tendo a magnitude de  $0.85f_{ck}$  é utilizado para avaliar as tensões de compressão no concreto;
- d) A região tracionada no concreto é desprezada;
- e) Encruamento no aço do perfil e armaduras são desprezados.

Observa-se que a filosofia adotada pela ACI baseia-se em uma análise elasto-plástica, como mostrado em 2.2.1.1, partindo dos procedimentos adotados para o projeto de pilares de concreto armado. Neste aspecto se diferencia das outras normas apresentadas que se baseiam na filosofia de projeto de pilares metálicos.

#### 2.4.5 Procedimentos Conforme AIJ (1987)

A norma japonesa do *Architectural Institute of Japan* (AIJ, 1987) adota uma filosofia diferente das normas até então apresentadas. Tomando-se coeficientes de segurança unitários, a capacidade de carga axial é dada por

$$N_R = A_a f_y + 0.85 f_{ck} A_c. \quad (2.28)$$

Para verificação da capacidade de resistência ao momento fletor, a AIJ assume que o perfil e o concreto desenvolvem suas capacidades plásticas independentemente, sendo a resistência da seção mista determinada através da superposição das resistências individuais. A norma AIJ não especifica condições de compatibilidade entre o aço do perfil e o concreto. Pode-se então ter, no cálculo da resistência, posições diferentes da linha neutra no perfil e no concreto. A superfície de interação  $N$ - $M$  é obtida da seguinte forma: quando  $0 \leq N_s \leq N_c$ ,

$$\begin{aligned} N &= N_{R,Ac} \\ M &= M_{pl,Aa} + M_{R,Ac} \end{aligned} \quad (2.29)$$

e, quando  $N_s > N_c$ ,

$$\begin{aligned} N &= N_c + N_{R,Aa} \\ M &= M_{R,Aa} \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde,  $N$  e  $M$  são, respectivamente, a capacidade axial e momento resistente que definem a superfície de interação normal-momento;  $N_c = 0.85 f_{ck} A_c$  é a capacidade axial do componente concreto;  $M_{pl,Aa}$  é o momento resistente plástico do perfil para carregamento axial nulo.  $N_{R,Ac}$  e  $M_{R,Ac}$ , são respectivamente, as resistências axiais e ao momento fletor do componente concreto.  $N_{R,Aa}$  e  $M_{R,Aa}$  são, respectivamente, carregamento axial e momento resistidos pelo perfil.  $M_{R,Ac}$ , correspondente a  $N_{R,Ac}$ , é

calculado usando os procedimentos da AIJ referentes às seções de concreto armado, utilizando a substituição do diagrama de tensões no concreto por um bloco de altura constante. Obtém-se as relações  $N_{R,Aa} - M_{R,Aa}$  por união dos pontos correspondentes a  $M_{pl,Aa}$  para normal nula, e o ponto de normal igual à capacidade do perfil,  $A_a f_y$ , e momento nulo com uma linha. Esta tem então o ponto  $(M_{pl,Aa} ; 0)$  transladado para o ponto  $(M_{pl,Aa} ; N_c)$ , mostrados na Figura 2.10. A Figura 2.10 exemplifica uma superfície de interação  $N-M$  obtida segundo a AIJ.

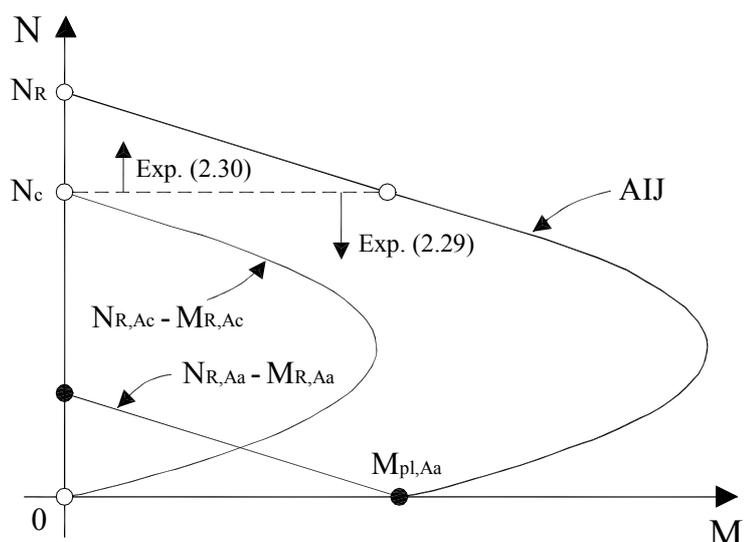


Figura 2.10 Superfície de interação  $N-M$  obtida segundo a AIJ (1987).

## 2.5 COMPARAÇÕES ENTRE EC4, BS 5400 E AISC

Saw e Richard Liew (2000) apresentaram um trabalho comparativo a fim de demonstrar diferenças entre três das principais normas de dimensionamento de pilares mistos. Nesse trabalho, foram considerados os procedimentos adotados pelo Eurocode 4, BS 5400: Parte 5 e AISC. Foram estudados parâmetros de projeto, comparação entre as resistências nominais e ensaios experimentais realizados por outros pesquisadores.

A norma BS 5400 baseia-se na metodologia dos estados limites com coeficientes para os carregamentos e materiais. Considera-se distribuição plástica das tensões na seção para o cálculo do momento último, e uma aproximação para a curva de interação  $N-M$  é utilizada. A seções devem ser duplamente simétricas.

Diferenças nos coeficientes aplicados aos carregamentos e resistência, parâmetros de projeto e outras considerações como fluência e excentricidade levam a diferenças entre os resultados obtidos segundo o EC4, BS 5400 e AISC.

Encontram-se nas tabelas seguintes, adaptadas do trabalho original de Saw e Richard Liew (2000), alguns termos e especificações utilizados nas três normas em questão para o projeto de pilares mistos. Apresentam-se comparações entre a resistência do aço e concreto, contribuição do aço, limite de esbeltez, razão das armaduras, flambagem local, módulo de elasticidade do concreto, limites da resistência ao cisalhamento longitudinal na interface aço concreto e coeficientes de segurança para material e carregamentos no estado limite último.

Tabela 2.1 Termos e especificações utilizados nas normas EC4, BS 5400 e AISC  
(adaptado de Saw e Richard Liew, 2000).

<i>Item</i>	<i>Norma</i>	<i>Especificação</i>
Aço	EC4	S235 (255 N/mm <sup>2</sup> ), S355 (355 N/mm <sup>2</sup> ), S460 (460 N/mm <sup>2</sup> ), t ≤ 40 mm
	BS 5400	Grade 43 (275 N/mm <sup>2</sup> ) ou 50 (355 N/mm <sup>2</sup> ), t ≤ 16 mm
	AISC	A36 (250 N/mm <sup>2</sup> ), A50 (345 N/mm <sup>2</sup> ), A55 (380 N/mm <sup>2</sup> ), A60 (415 N/mm <sup>2</sup> )
Concreto	EC4	20 ≤ f <sub>ck</sub> ≤ 50 N/mm <sup>2</sup>
	BS 5400	f <sub>cu</sub> ≥ 20 N/mm <sup>2</sup> para pilares preenchidos f <sub>cu</sub> ≥ 25 N/mm <sup>2</sup> para pilares envolvidos <sup>a</sup> onde f <sub>cu</sub> é a resistência cúbica do concreto
	AISC	21 ≤ f <sub>ck</sub> ≤ 55 MPa para concreto de densidade normal f <sub>ck</sub> ≥ 28 MPa para concreto de baixa densidade
Contribuição do aço	EC4	0.2 ≤ δ ≤ 0.9 sendo δ a razão de contribuição do perfil para a resistência axial total
	BS 5400	Pilares envolvidos 0.15 ≤ α <sub>c</sub> ≤ 0.8 Pilares preenchidos 0.10 ≤ α <sub>c</sub> ≤ 0.8 sendo α <sub>c</sub> a razão entre a contribuição do concreto e a resistência axial total
	AISC	Deve-se ter a área da seção transversal do perfil ≥ 4 % da seção transversal total

<sup>a</sup> f<sub>cu</sub> de 20 e 25 N/mm<sup>2</sup> é equivalente a 16 e 20 N/mm<sup>2</sup> de resistência cilíndrica, respectivamente, assumindo que f<sub>ck</sub> = 0.8 f<sub>cu</sub>.

Tabela 2.1 Continuação.

<i>Item</i>	<i>Norma</i>	<i>Especificação</i>
Limite de esbeltez	EC4	$\lambda \leq 2.0$ para qualquer eixo de flexão
	BS 5400	Razão entre o comprimento efetivo e a menor dimensão da seção mista não deve ultrapassar: 30 para pilar misto envolvido 55 para pilar circular preenchido 65 para pilar retangular preenchido
	AISC	$KL/r \leq 200$ , onde $KL$ é o comprimento efetivo e $r$ é o raio de giração da seção
Armadura longitudinal	EC4	$0.3\% \leq A_s/A_c \leq 6\%$ para pilares envolvidos Para pilares preenchidos, armadura longitudinal somente é exigida em situações de incêndio
	BS 5400	Para pilares envolvidos, estribos devem ser colocados ao longo do comprimento do pilar, com espaçamento menor ou igual a 200 mm. No mínimo 4 barras de armadura longitudinal devem ser previstas
	AISC	No mínimo 180 mm <sup>2</sup> de barras de armadura transversais e longitudinais por m de espaçamento entre barras deve ser previsto
Flambagem local	EC4	$D/t \leq 90(235/f_y)$ para pilares circulares preenchidos $h/t \leq 52(235/f_y)^{1/2}$ para pilares retangulares preenchidos $b/t \leq 44(235/f_y)^{1/2}$ para pilares parcialmente envolvidos de seção I e largura $b$
	BS 5400	$t \geq b(f_y/E_s)^{1/2}$ para pilares retangulares preenchidos $t \geq D(f_y/8E_s)^{1/2}$ para pilares circulares preenchidos
	AISC	$t \geq b(f_y/3E_s)^{1/2}$ para pilares retangulares preenchidos $t \geq D(f_y/8E_s)^{1/2}$ para pilares circulares preenchidos
Módulo elasticidade concreto	EC4	A partir do Eurocode 2, $E_{cm} = 9.5(f_{ck}+8)^{0.33}$ , sendo $E_c$ dado em kN/mm <sup>2</sup> e $f_{ck}$ é a resistência cilíndrica aos 28 dias em N/mm <sup>2</sup> , tem-se então $E_c = 0.6 E_{cm}$ que deverá ser modificado de acordo se as condições de carregamento de longa duração forem satisfeitas
	BS 5400	$450 f_{cu}$
	AISC	$E_c = w^{1.5}(f_{ck})^{0.5}$ onde $w$ dado em lb/ft <sup>3</sup> é o peso específico do concreto e $f_{ck}$ e $E_c$ são em ksi
Limites de resistência ao cisalhamento na interface aço concreto	EC4	0.30 N/mm <sup>2</sup> para pilares totalmente envolvidos 0.55 N/mm <sup>2</sup> para pilares circulares preenchidos 0.40 N/mm <sup>2</sup> para pilares retangulares preenchidos 0.20 N/mm <sup>2</sup> para os flanges de pilares I parcialmente envolvidos 0 N/mm <sup>2</sup> para alma de pilares I parcialmente envolvidos
	BS 5400	0.60 N/mm <sup>2</sup> para pilares envolvidos 0.40 N/mm <sup>2</sup> para pilares preenchidos
	AISC	Avaliado de acordo com detalhamento apropriado
Coeficiente de segurança para os materiais, Estado Limite Último (ELU)	EC4	Seção de aço: 1.1 Concreto: 1.5 Barras de aço: 1.15 Conector de cisalhamento: 1.25
	BS 5400	Aço: 1.1 Concreto: 1.5 Barras de aço: 1.15 Conector de cisalhamento: 1.10
	AISC	Compressão: $1/0.85 = 1.18$ Flexão: $1/0.9 = 1.11$

Tabela 2.1 Continuação.

<i>Item</i>	<i>Norma</i>	<i>Especificação</i>
Coeficiente de segurança para o carregamento, ELU	EC4	1.35 Carga Permanente + 1.5 Sobrecarga
	BS 5400	(1.05~1.20) Carga Permanente + (1.3~1.5) Sobrecarga
	AISC	1.20 Carga Permanente + 1.6 Sobrecarga

Observa-se que o módulo de elasticidade do concreto,  $E_c$ , é a propriedade que apresenta maiores diferenças entre as três normas.

A definição do índice de esbeltez nas três normas encontra-se na Tabela 2.2.

Tabela 2.2 Índices de esbeltez segundo o EC4, BS 5400 e AISC  
(adaptado de Saw e Richard Liew, 2000).

<i>Norma</i>	<i>Índice de esbeltez adimensional, <math>\lambda</math> Pilares envolvidos</i>	<i>Índice de esbeltez adimensional, <math>\lambda</math> Pilares preenchidos</i>
EC4	$\frac{l_e}{\pi} \left( \frac{A_a f_y + 0.85 A_c f_{ck} + A_s f_{ys}}{E_a I_a + 0.6 E_c I_c + E_s I_s} \right)^{1/2}$	$\frac{l_e}{\pi} \left( \frac{A_a f_y + A_c f_{ck} + A_s f_{ys}}{E_a I_a + 0.6 E_c I_c + E_s I_s} \right)^{1/2}$
BS 5400	$\frac{l_e}{\pi} \left( \frac{A_a f_y / \gamma_a + A_c f_{cu} / \gamma_c + A_s f_{ys} / \gamma_s}{E_a I_a + E_c I_c + E_s I_s} \right)^{1/2}$	$\frac{l_e}{\pi} \left( \frac{A_a f_y / \gamma_a + A_c f_{cu} / \gamma_c}{E_a I_a + E_c I_c + E_s I_s} \right)^{1/2}$ <sup>a</sup>
AISC	$\frac{l_e}{r_m \pi} \left( \frac{f_y + 0.6 f_{ck} \left( \frac{A_c}{A_a} \right) + 0.7 f_{ys} \left( \frac{A_s}{A_a} \right)}{E_a + 0.2 E_c (A_c / A_a)} \right)^{1/2}$	$\frac{l_e}{r_m \pi} \left( \frac{f_y + 0.85 f_{ck} \left( \frac{A_c}{A_a} \right) + f_{ys} \left( \frac{A_s}{A_a} \right)}{E_a + 0.4 E_c (A_c / A_a)} \right)^{1/2}$

<sup>a</sup> Esta expressão aplica-se somente à seções circulares preenchidas. Para seções retangulares preenchidas, a expressão é a mesma utilizada para seções envolvidas.

Observa-se que o valor de  $E_c$  utilizado na avaliação da esbeltez do pilar pelo EC4 e AISC não incluem os fatores de segurança. Todavia, na BS 5400, o fator de segurança

é incluído no cálculo do índice de esbeltez do pilar levando a um acréscimo na capacidade resistente.

Após a determinação do índice de esbeltez do pilar, obtém-se o coeficiente de flambagem e pode-se avaliar a resistência à compressão do pilar misto. As curvas de flambagem utilizadas pelo EC4 são as mesmas utilizadas pelo Eurocode 3 (1995), obtidas principalmente através de ensaios experimentais. Os estudos para obtenção destas curvas consideram a forma da seção transversal do perfil, o método de fabricação, magnitude e distribuição de tensões residuais e imperfeições iniciais. As curvas utilizadas pelo EC4 e BS 5400 são praticamente as mesmas, sendo identificadas como *a*, *b* e *c*. A AISC somente utiliza uma curva para todos os tipos de pilares mistos. A Figura 2.11 mostra as curvas utilizadas pelas normas EC4 e AISC.

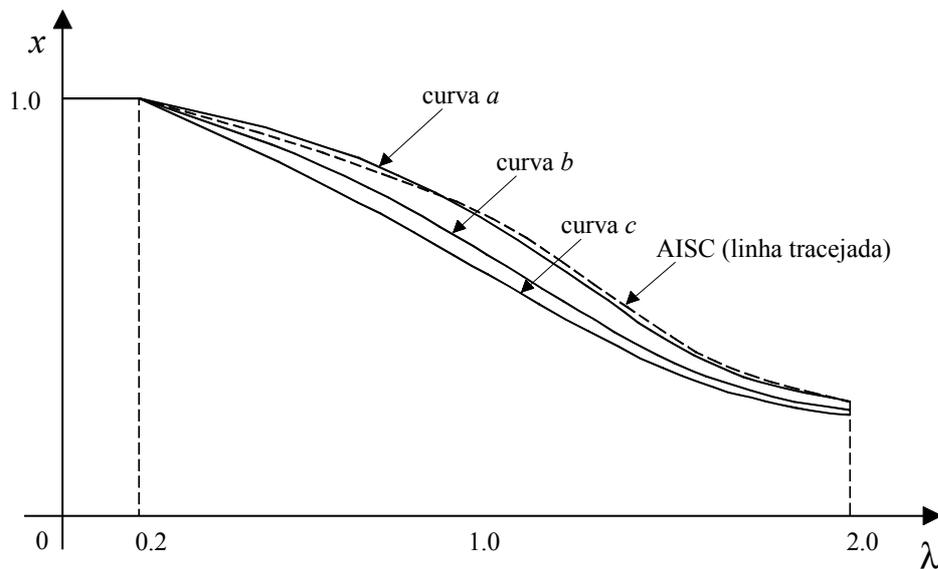


Figura 2.11 Curvas de flambagem, fator de redução em função da esbeltez, utilizadas no EC4 e AISC.

Sob carregamento de longa duração, o fenômeno da fluência causa acréscimos nos deslocamentos laterais do pilar misto e uma redução na resistência e rigidez.

Segundo o EC4, de acordo com a excentricidade do carregamento e com o índice de esbeltez, tem-se uma modificação no módulo de elasticidade do concreto em função da carga permanente e quase permanente.

Na BS 5400, a resistência de cálculo é obtida através da divisão da resistência característica por  $\gamma_c$ . No estado limite último,  $\gamma_c = 1.5$  é usado para o concreto levando a uma resistência à compressão e flexão de  $0.55 f_{cu}$  e  $0.45 f_{cu}$ , respectivamente. Estes valores podem ser reduzidos para  $0.45 f_{cu}$  e  $0.40 f_{cu}$  para considerar o efeito da fluência.

Segundo a AISC, considera-se a fluência através das expressões da rigidez efetiva quando o pilar é submetido a carregamento de longa duração. O uso de 40 % da rigidez nominal inicial para o concreto confinado em tubos de aço, e 20 % para a rigidez de concretos não confinados, expressos através do coeficiente  $c_3$ , na expressão (2.20), leva em consideração a fluência e fissuração do concreto. Observa-se que o efeito da fluência é geralmente pequeno se uma maior área de aço é utilizada, o que justifica a exigência de se ter não menos do que 4 % para área do perfil em relação à seção total do pilar misto.

Para pilares preenchidos, ocorre o efeito do confinamento do concreto aumentando a sua resistência e conseqüentemente reduzindo a resistência axial do perfil devido à pressão exercida pelo concreto confinado.

No EC4, o coeficiente de 0.85 que reduz a resistência do concreto pode ser omitido para pilares preenchidos. Além da omissão do coeficiente de 0.85, para pilares circulares preenchidos, uma resistência adicional ao concreto pode ser avaliada considerando-se o efeito do confinamento quando o índice de esbeltez,  $\lambda$ , é menor do que 0.5 e a excentricidade da força normal não excede o valor de  $d/10$ , sendo  $d$  o diâmetro do perfil circular. Na BS 5400, a limitação do confinamento é menos restritiva em relação ao EC4. Esta não depende da excentricidade do carregamento, sendo o confinamento desprezado quando  $\lambda$  é maior do que 1.0. Na prática,  $\lambda$  igual a 1.0 corresponde à razão comprimento diâmetro entre 24 e 29, porém, por simplicidade, a BS 5400 adota o limite da razão comprimento diâmetro em 25. Na AISC, o efeito do confinamento não é avaliado para o projeto de pilares mistos.

No trabalho apresentado por Saw e Richard Liew (2000) as resistências nominais segundo o EC4, BS 5400 e AISC foram comparados com resultados experimentais obtidos por vários pesquisadores. Considerando os resultados experimentais analisados e as investigações realizadas pelos autores, algumas conclusões foram obtidas, por exemplo:

- a) Os procedimentos utilizados pela BS 5400 implicam em um maior acréscimo na resistência do concreto devido ao efeito do confinamento, quando se trata de pilares com menores índices de esbeltez, em relação ao EC4;
- b) Há uma diferença marcante entre o EC4 e BS 5400 em relação ao índice de esbeltez acima do qual se deve desprezar o efeito do confinamento;
- c) Para pilares envolvidos, a resistência axial obtida pela AISC é maior do que a obtida segundo o EC4 e BS 5400. Isto ocorre principalmente devido à curva de flambagem utilizada na AISC, Figura 2.11;
- d) Para pilares circulares preenchidos, a resistência obtida pela AISC é sempre menor devido à não consideração do efeito do confinamento;
- e) As resistências calculadas pelas três normas são conservadoras e apresentam boa concordância com os experimentos analisados.

## **2.6 ESTADO DA ARTE EM PILARES MISTOS AÇO - CONCRETO**

Nesta seção, apresenta-se um levantamento geral sobre pesquisas realizadas em relação aos pilares mistos. Tratou-se primeiramente das pesquisas mais recentes voltadas para a análise de pilares mistos. Em seguida apresenta-se uma síntese das pesquisas realizadas nas últimas décadas, adaptado de Shanmugam e Lakshmi (2001).

Chen *et al.* (2001) desenvolveram uma formulação utilizando o processo iterativo quasi-Newton baseado no esquema numérico Regula-Falsi para análise de seções transversais genéricas sujeitas à flexão oblíqua. Apresentaram equações para a integração analítica das tensões no concreto e utilizaram o método das fibras para obter as tensões no perfil e armaduras. Utilizaram o centróide plástico da seção como referência para obtenção dos esforços, diminuindo-se assim problemas de convergência.

Sfakianakis (2002) propôs um novo método para o estudo do mecanismo de falha de seções transversais genéricas sob flexão oblíqua. O procedimento é baseado em um modelo de fibras que emprega computação gráfica para obtenção da integração das tensões.

Johansson e Gylltoft (2002) apresentaram um estudo experimental e analítico sobre o comportamento mecânico de pilares curtos circulares preenchidos. Para examinar diferentes comportamentos dos pilares, três tipos de carregamento foram

experimentados. Modelos analíticos foram utilizados para o estudo da interface concreto e aço e o confinamento proporcionado pelo perfil.

Lakshmi e Shanmugam (2002) desenvolveram um método semianalítico para modelar o comportamento de pilares mistos retangulares e circulares preenchidos com concreto. Relações momento-curvatura são obtidas por um processo iterativo. As equações não-lineares de equilíbrio são resolvidas por esquema incremental iterativo baseado no método do controle generalizado de deslocamento. Os pilares analisados são biapoiados e submetidos a carregamentos uniaxial ou biaxial.

As tabelas 2.3 e 2.4 foram obtidas de Shanmugam e Lakshmi (2001). Nestas encontra-se um levantamento de pesquisas realizadas nas últimas décadas. Encontram-se nesse trabalho bancos de dados envolvendo pesquisas sobre diversos parâmetros em relação aos pilares mistos, estudos sobre flambagem local, resistência, carregamento sísmico, confinamento e tensões secundárias. Os trabalhos descritos datam no máximo até o ano de 1999. A seguir, são citados trabalhos mais recentes, de caráter experimental.

Uy (2001) apresentou um extenso banco de dados de experimentos em pilares mistos retangulares preenchidos de alta resistência. Um método numérico onde se divide a seção em faixas para obtenção dos esforços também foi apresentado e calibrado com os ensaios. Comparações com o Eurocode 4 foram feitas e se mostraram não conservadoras. Ao final, apresenta-se um método onde o concreto é considerado rígido plástico e o aço elasto-plástico.

Varma *et al.* (2002) apresentaram uma investigação experimental sobre o comportamento à flexão de pilares mistos retangulares formados por materiais de alta resistência. Foi estudada a influência da esbeltez das placas que formam o perfil, o limite de escoamento do aço e o nível de carregamento axial.

Weng e Yen (2002) apresentaram comparações entre as normas ACI e AISC acerca do projeto de pilares mistos envolvidos. O objetivo do trabalho foi investigar as diferenças entre as normas e compará-las com ensaios realizados por outros pesquisadores. Alguns pontos abordados foram o modo de falha dos protótipos ensaiados, diagramas de interação dos pilares e o efeito das relações entre largura e espessura das placas que formam o perfil.

Tabela 2.3 Experimentos realizados em pilares mistos envolvidos (adaptado de Shanmugam e Lakshmi, 2001).

<i>Nº</i>	<i>Referência</i>	<i>País</i>	<i>Seção</i>	<i>Tipo carreg.</i>	<i>A-Análise E-Exper. P-Projeto</i>	<i>Nº testes</i>	<i>Variáveis analisadas</i>	<i>Observações</i>
1	Steven, 1965	Reino Unido	Quadrada Retangular	Excêntrico	E	11	Excentricidade do carregamento, resistência do concreto e aço, dimensão da seção.	Os protótipos ensaiados tinham 4.57 m de comprimento, carregados excentricamente ao longo do eixo de menor inércia.
2	Virdi e Dowling, 1973	Reino Unido	Retangular	Excêntrico	A, E	9	Comprimento, excentricidade ao longo do maior e menor eixo, resistência do concreto.	Propôs um método analítico numérico.
3	Anslijn e Janss, 1974	Bélgica	Retangular	Excêntrico	E	30	Comprimento efetivo, esbeltez relativa, resistência do concreto e aço, dimensões da seção.	Os protótipos foram testados sem armadura longitudinal.
4	Roderick e Loke, 1975	Austrália	Retangular	Excêntrico	A, E, P	15	Excentricidade do carregamento aplicado, esbeltez.	Propôs uma metodologia de cálculo da resistência e procedimentos de projeto.
5	Johnston, 1976	Estados Unidos	Quadrada	Excêntrico	E	13	Contribuição do aço estrutural, excentricidade.	Seções foram sujeitas a uniaxial momentos sobre ambos eixos e carregamento axial.
6	Morino <i>et al.</i> , 1984	Japão	Quadrada Retangular	Excêntrico	E	40	Excentricidade do carregamento, resistência do concreto e aço, dimensão da seção.	Comparação com modelo teórico analítico.
7	Matsui, 1979	Japão	Quadrada	Excêntrico	E	4	Comprimento efetivo, esbeltez relativa, resistência do concreto e aço.	Protótipos foram testados com armaduras longitudinais.
8	Roik e Schwalbenhofer, 1989	Alemanha	Quadrada	Excêntrico	E	27	Excentricidade do carregamento, resistência do concreto e aço, dimensão da seção.	Pilares bi-rotulados com 3 m de comprimento foram testados sob uniaxial ou biaxial momentos com carregamento axial.

Tabela 2.3 Continuação.

<i>Nº</i>	<i>Referência</i>	<i>País</i>	<i>Seção</i>	<i>Tipo carreg.</i>	<i>A-Análise E-Exper. P-Projeto</i>	<i>Nº testes</i>	<i>Variáveis analisadas</i>	<i>Observações</i>
9	Roik e Bergmann, 1984	Alemanha	Quadrada	Excêntrico	E, P	12	Comprimento efetivo, resistência do concreto e aço.	Propôs uma metodologia de projeto e equação de interação.
10	Mirza e Skrabek, 1991	Canadá	Quadrada	Excêntrico	A, E, P	16	Resistência do concreto, razão do aço estrutural, excentricidade, esbeltez.	Comparou com metodologia de projeto proposta e com a norma ACI.
11	Elnashai <i>et al.</i> , 1991	Reino Unido	Quadrada	Cíclico, Pseudo dinâmico	A, E	6	Tipo de carregamento e porcentagem de carregamento axial.	Resultados comparados com programa computacional.
12	Mirza e Skrabek, 1992	Canadá	Quadrada	Excêntrico	E	16	Encruamento, resistência do concreto e aço, esbeltez.	Comparação com a norma ACI.
13	Matsui, 1993	Japão	Quadrada	Excêntrico	A, E, P	6	Comprimento efetivo, esbeltez relativa, resistência do concreto.	Propôs uma metodologia para cálculo de resistência.
14	Nakamura, 1994	Japão	Quadrada	Excêntrico	E	7	Comprimento efetivo, esbeltez relativa, resistência do concreto.	Variou a esbeltez.
15	Hunaiti e Fattah, 1994	Jordânia	Retangular	Excêntrico	A, E, P	19	Excentricidade do carregamento, resistência do concreto.	Comparação com carregamento teórico de análise via computador e metodologia de projeto baseada na BS 5400.
16	Wium e Lebet, 1994	África do Sul, Suíça	Quadrada	Tração, Compressão	A, E, P	27	Espessura do cobrimento do concreto, tamanho da seção de aço, retração do concreto.	Propôs uma metodologia simplificada de projeto.
17	Ricles e Paboojian, 1994	Estados Unidos	Quadrada	Sísmico	A, E	8	Confinamento do concreto, resistência ao cortante, resistência do concreto e aço.	Comparou com as normas ACI e AISC.

Tabela 2.3 Continuação.

<i>Nº</i>	<i>Referência</i>	<i>País</i>	<i>Seção</i>	<i>Tipo carreg.</i>	<i>A-Análise E-Exper. P-Projeto</i>	<i>Nº testes</i>	<i>Variáveis analisadas</i>	<i>Observações</i>
18	Boyd <i>et al.</i> , 1995	Estados Unidos	Circular	Axial, Cíclico reverso	A, E	5	Razão $D/t$ , conectores de cisalhamento, resistência do concreto e aço.	Propôs um método numérico.
19	Mirza <i>et al.</i> , 1996	Canadá	Quadrada	Excêntrico	A, E	16	Resistência do concreto, armaduras, aço estrutural, excentricidade.	Comparou com o ACI, Eurocode e propôs um modelo de elementos finitos.
20	Munoz e Hsu, 1997	Estados Unidos	Quadrada	Axial e excêntrico	A, E	4	Excentricidade do carregamento, esbeltez, resistência do concreto e aço.	Propôs um método computacional numérico.
21	Wang, 1999	Reino Unido	Quadrada	Excêntrico	E, P	7	Excentricidade, resistência do concreto e aço.	Propôs uma metodologia de projeto baseada na BS 5950.

Tabela 2.4 Experimentos em pilares mistos tubulares preenchidos (adaptado de Shanmugam e Lakshmi, 2001).

<i>Nº</i>	<i>Referência</i>	<i>País</i>	<i>Seção</i>	<i>Tipo carreg.</i>	<i>A-Análise E-Exper. P-Projeto</i>	<i>Nº Testes</i>	<i>Variáveis analisadas</i>	<i>Observações</i>
1	Neogi <i>et al.</i> , 1969	Reino Unido	Circular	Excêntrico	A, E	18	Razão <i>D/t</i> , esbeltez, resistência do concreto e aço, excentricidade.	Propôs um método computacional numérico.
2	Knowles e Park, 1969	Nova Zelândia	Circular e Quadrada	Axial e excêntrico	A, E	28	Resistência do concreto e aço, esbeltez.	Propôs um método analítico.
3	Drysdale e Huggins, 1971	Canadá	Quadrada	Excêntrico	A, E	58	Resistência do concreto e aço, seqüência de carregamento, duração do carregamento, excentricidade.	Propôs um método numérico.
4	Bridge, 1976	Austrália	Quadrada	Excêntrico	A, E, P	8	Razão <i>D/t</i> , razão da esbeltez, resistência do concreto e aço, excentricidade.	Propôs um método analítico e comparou com resultados experimentais.
5	Task Group 20 (SSRC, 1979)	Estados Unidos	Circular	Excêntrico	E, P	51	Comprimento efetivo, esbeltez relativa, resistência do concreto e aço, dimensões do tubo.	Seções sujeitas a momentos uniaxiais e carregamento axial.
6	Sasaki, 1984	Japão	Circular	Excêntrico	E, P	21	Comprimento efetivo, esbeltez relativa, resistência do concreto e aço.	Concretos de alta resistência (53 a 63 MPa ) foram utilizados.
7	Prion e Boehme, 1989	Canadá	Circular	Excêntrico	A, E	20	Forma de carregamento, comprimento, resistências do concreto e aço.	Desenvolveu um método analítico.
8	Shakir Khalil e Zeghiche, 1989	Reino Unido	Retangular	Excêntrico	A, E	7	Resistência do concreto e aço, excentricidade.	Comparou análises via elementos finitos com a BS 5400.
9	Shakir Khalil e Mouli, 1990	Reino Unido	Retangular	Axial e excêntrico	E	9	Seção do pilar, excentricidade, comprimento efetivo, resistência do concreto e aço.	Comparou com as normas BS 5950 e BS 5400.
10	Konno <i>et al.</i> , 1990	Japão	Quadrada	Excêntrico	E, P	19	Espessura do tubo, resistência do concreto e aço e força axial.	Efeito do confinamento foi avaliado em um método proposto.
11	Cai, 1991	Japão	Circular	Excêntrico	A, E	27	Comprimento efetivo, resistência do concreto e aço, excentricidade do carregamento.	Pilares são submetidos a momentos provocando curvatura simples e reversa.

Tabela 2.4 Continuação.

<i>Nº</i>	<i>Referência</i>	<i>País</i>	<i>Seção</i>	<i>Tipo carreg.</i>	<i>A-Análise E-Exper. P-Projeto</i>	<i>Nº testes</i>	<i>Variáveis analisadas</i>	<i>Observações</i>
12	Rangan e Joyce, 1992	Austrália	Circular	Excêntrico	E, P	9	Esbeltez, excentricidade do carregamento.	Propôs um método para cálculo da resistência.
13	Ge e Usami, 1992	Japão	Quadrada	Excêntrico	A, E	6	Esbeltez.	Propôs uma equação para cálculo da resistência.
14	CFT working group (CFT, 1993)	Japão	Circular	Excêntrico	E, P	6	Comprimento efetivo, esbeltez relativa, resistência do concreto e aço.	Concreto com resistência de 41 MPa.
15	O'Brien e Rangan, 1993	Austrália	Circular	Excêntrico	E, P	9	Comprimento efetivo, espessura, e resistência do aço.	Propôs um método de cálculo da resistência.
16	Fuji, 1994	Japão	Circular	Excêntrico	A, E	33	Razão $D/t$ , resistência do concreto e aço, comprimento efetivo.	Comparou com um método proposto e com o EC4.
17	Kilpatrick, 1994	Austrália	Circular	Excêntrico	A, E	16	Razão $D/t$ , resistência do concreto e aço, comprimento efetivo.	Comparou com um método proposto e com o EC4.
18	Shakir Khalil e Rawdan, 1994	Reino Unido	Retangular	Axial e excêntrico	A, E	15	Comprimento efetivo, excentricidade do carregamento e resistência do concreto e aço.	Utilizou o programa ABAQUS para verificar os resultados.
19	Hayashi <i>et al.</i> , 1995	Japão	Quadrada	Desloc. Controlado	E, P	10	Razão largura-espessura, força axial, resistência do concreto e aço.	Propôs uma metodologia de cálculo da resistência.
20	Kim <i>et al.</i> , 1995	Coréia	Circular	Axial	E, P	14	Razão $D/t$ , condição de carregamento, resistência do concreto e aço.	Propôs uma expressão empírica para cálculo da capacidade última.
21	Matsui <i>et al.</i> , 1995	Japão	Circular e quadrada	Axial e excêntrico	A, E, P	24	Comprimento de flambagem, altura da seção, excentricidade do carregamento, esbeltez.	Propôs uma metodologia de projeto.
22	O'Shea e Bridge, 1995	Austrália	Circular	Axial e excêntrico	E	10	Razão $D/t$ , comprimento efetivo, resistência do concreto e aço.	Comparou com os procedimentos do EC4.

Tabela 2.4 Continuação.

<i>Nº</i>	<i>Referência</i>	<i>País</i>	<i>Seção</i>	<i>Tipo carreg.</i>	<i>A-Análise E-Exper. P-Projeto</i>	<i>Nº testes</i>	<i>Variáveis analisadas</i>	<i>Observações</i>
23	Bridge <i>et al.</i> , 1995	Austrália	Circular	Axial	E	12	Razão $D/t$ , comprimento efetivo, resistência do concreto e aço.	Comparou com os procedimentos do EC4.
24	Kilpatrick, 1996	Austrália	Circular	Excêntrico	A, E	57	Comprimento efetivo, idade do concreto, esbeltez, excentricidade.	Propôs uma metodologia de cálculo da resistência.
25	Wang e Moore, 1997	Reino Unido	Retangular	Excêntrico	E, P	10	Excentricidade ao longo dos eixos de maior e menor inércia.	Comparou com a BS 5950, EC4 e metodologia proposta.
26	Uy e Das, 1997	Austrália	Quadrada	Excêntrico	E	10	Excentricidade do carregamento, comprimento efetivo.	Comparou com modelos numéricos.
27	Thirugnana-sundralingam <i>et al.</i> , 1997	Austrália	Circular	Estático e variável	E	8	Excentricidade do carregamento, resistência do concreto.	Propôs uma metodologia de cálculo da resistência.
28	Kawano e Matsui, 1997	Japão	Circular	Cíclico	A, E	44	Esbeltez, razão $D/t$ , resistência do concreto e aço.	Propôs um expressão empírica para projeto.
29	Uy, 1998a	Austrália	Quadrada	Desloc. Controlado	A, E	10	Dimensões da seção, forma de carregamento, tensões residuais.	Comparou com metodologia de análise proposta e AS 4100 e BS 5950.
30	Wang, 1999	Reino Unido	Retangular	Excêntrico	E, P	8	Excentricidade e razão dos momentos nas duas direções, resistência do concreto e aço.	Propôs uma metodologia de projeto baseado na BS 5950.
31	Nakanishi <i>et al.</i> , 1999	Japão	Quadrada	Sísmico	E	8	Seção transversal, resistência do aço e concreto, período natural de vibração.	Propôs uma expressão empírica para projeto.

No trabalho de Spacone e El-Tawil (2004) tem-se um levantamento do atual estado da arte em análise não-linear de estruturas mistas. O trabalho versa principalmente sobre elementos de barra, que proporcionam análises computacionais mais rápidas do que elementos tridimensionais. Primeiramente apresentam-se modelos para análise da seção transversal que resultam em relações momento-curvatura e modelos de fibras e possíveis aplicações práticas destes. A apresentação dos elementos de barras segue: modelos com inelasticidade distribuída e concentrada, assim como modelos com ligações rígidas e semi-rígidas são discutidos; interação completa e parcial também são discutidas.

É importante citar alguns trabalhos que foram utilizados para efeito de comparação com a formulação desenvolvida nesta dissertação. Entre eles, tem-se o trabalho de Mirza *et al.* (1996) onde os autores apresentaram um trabalho experimental no qual ensaiaram 16 protótipos carregados até a falha. Os protótipos eram formados por pilares de seção transversal I envolvida por concreto. A interação entre os componentes concreto e aço foi estudada a partir da aplicação de placas soldadas ao perfil. As condições de ligação entre chapa e o concreto era variável, com o objetivo de estudar a influência da interação entre concreto e aço com a carga última do protótipo. O carregamento era formado pela combinação de cargas axiais e transversais resultando em diferentes excentricidades. Os ensaios mostraram que os tipos de ligação entre o componente concreto e aço conforme os protótipos, têm pouca influência na carga última. Análises baseadas na ACI-318, Eurocode 4 e simulações utilizando elementos finitos são comparadas aos resultados experimentais.

O trabalho de Wang (1999), já citado nas tabelas 2.3 e 2.4, também foi utilizado em comparações no Capítulo 6. Nesse trabalho, o autor realizou duas séries de ensaios: oito ensaios em pilares retangulares preenchidos e sete ensaios em pilares de seção transversal I envolvidos. O objetivo do trabalho era produzir informações para calibração de procedimentos de normas como o Eurocode 4 e BS 5400 acerca de pilares esbeltos e verificar a validade da proposição de um novo método baseado nos procedimentos da BS 5950.

O trabalho de Kindmann *et al.* (1993) também apresenta resultados de ensaios que serviram de dados na verificação da formulação desenvolvida nesta dissertação. Nesse trabalho, 13 ensaios foram realizados em vigas mistas parcialmente envolvidas. Os

resultados evidenciaram a importância do componente concreto entre os flanges do perfil para o cálculo da capacidade última e deslocamentos. A partir dos ensaios, foram deduzidos métodos de avaliação da capacidade e rigidez do elemento misto. Esta pesquisa provocou mudanças no Eurocode 4 quanto ao dimensionamento destes elementos, bastante utilizados em países europeus.

A capacidade última de pilares curtos retangulares preenchidos, formados por materiais de alta resistência foi estudada no trabalho de Liu *et al.* (2003). Vinte e dois protótipos com razões de aspecto de 1.0, 1.5 e 2.0 foram ensaiados até a falha sob compressão centrada. Os resultados foram comparados com normas.

Vigas tubulares retangulares preenchidas, formadas por materiais de alta resistência, foram ensaiadas por Han (2004). Desenvolveu-se também um modelo para simulação do comportamento de vigas tubulares preenchidas com concreto. Um fator de confinamento foi introduzido para descrever o comportamento misto. Foram ensaiados vários protótipos de vigas retangulares. Os principais parâmetros envolvidos são a relação altura-largura das seções transversais e esbeltez das paredes do tubo. Curvas momento-deslocamento, para os protótipos ensaiados, são obtidas experimental e numericamente. Equações são desenvolvidas para o cálculo da rigidez e do momento resistente, e comparações com normas são feitas.

No Brasil, pode-se destacar alguns trabalhos voltados para a pesquisa de pilares mistos. Em Queiroz e Prestes (2001), tem-se a apresentação de três métodos de dimensionamento de pilares mistos que são comparados entre si. Apresenta-se também um estudo comparativo entre as soluções pilar misto parcialmente revestido de concreto, pilar de aço e pilar de concreto, solicitados à compressão e à flexão composta. Queiroz *et al.* (2001a) apresentaram uma análise teórico-experimental da repartição de cargas entre aço e concreto em pilares parcialmente envolvidos. No trabalho de Queiroz e Prestes (2002) os pesquisadores mostram que o diagrama de interação adotado pela NBR 14323 (1999) pode estar contra a segurança em relação ao Eurocode 4, quando se considera flexão composta em relação ao eixo de menor inércia de pilares mistos parcialmente revestidos de concreto. Ao final, os autores propõem fórmulas para verificação da resistência à flexão composta levando-se em consideração um ponto adicional no diagrama de interação.

No XXIV CILAMCE, *Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, realizado em 2003, alguns trabalhos sobre pilares mistos foram apresentados, entre eles os trabalhos de Queiroz e Queiroz (2003a, 2003b) nos quais são apresentados modelos de elementos finitos para análise de pilares mistos parcialmente revestidos utilizando o software ANSYS. Nesse congresso também foram apresentados alguns artigos referentes às pesquisas desenvolvidas neste trabalho, sendo estes referentes aos Capítulos 3, 4 e 5, com as seguintes referências: Sousa Jr. e Caldas (2003a), Sousa Jr. e Caldas (2003b) e Caldas e Sousa Jr. (2003).

Nos trabalhos de De Nardin (1999), De Nardin *et al.* (2001) e De Nardin e El Debs (2002) encontram-se estudos teórico-experimentais acerca do comportamento de pilares preenchidos. Nesses trabalhos também encontram-se referências a outros trabalhos sobre pilares preenchidos como o de Gomes (1994), Malite *et al.* (1995), Figueiredo (1998) e Alva (2000). Segundo De Nardin (2002) o trabalho de Gomes (1994), desenvolvido na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, foi o primeiro trabalho brasileiro abordando os pilares preenchidos, e traz resultados teóricos e experimentais de seções preenchidas quanto a aderência, retração e deformação lenta e também, o primeiro levantamento bibliográfico realizado no Brasil sobre o assunto.

# **OBTENÇÃO DE ESFORÇOS EM SEÇÕES MISTAS AÇO - CONCRETO**

## **3.1 INTRODUÇÃO**

O aumento na utilização de pilares e vigas mistas tem demonstrado a versatilidade e competitividade destas soluções. As seções mistas podem variar adquirindo formas que melhor se adequarão à função do membro estrutural em análise. Apesar da grande possibilidade de formas, as normas geralmente se prendem às mais empregadas. Porém, quando se tem a construção do esqueleto de um edifício somente em estruturas metálicas, que suportam as cargas de construção, e posterior concretagem de lajes e pilares, pode-se obter as mais variadas seções, principalmente ao se considerar os pilares mistos. Isto justifica a necessidade de análise das mais diversas formas de seções.

Na análise de seções transversais de concreto armado, a obtenção de esforços resistentes geralmente é feita a partir de uma análise elasto-plástica, conforme o item 2.2.1.1 do Capítulo 2 (NBR 6118, 2003; ACI-318, 1999). Já para seções de aço, usualmente os esforços resistentes são obtidos através de uma análise rígido-plástica da seção (NBR 8800, 1986). Para seções mistas, em geral, as normas fazem uma análise

rígido-plástica da seção (NBR 14323, 1999; Eurocode 4, 1994). Outras normas como a ACI-318 (1999) utilizam análise elasto-plástica na obtenção dos esforços resistentes.

Em trabalhos como o de Uy (2001) e Lakshmi e Shnmugam (2002), foi empregado um modelo baseado em uma série de faixas discretas ao longo da altura da seção. Obtém-se a deformação na faixa em função da deformada da seção, e as relações tensão-deformação dos respectivos materiais são adotadas na obtenção da força axial na faixa em questão. Estas forças são utilizadas na determinação do equilíbrio da seção e conseqüente determinação dos esforços resistentes.

Em Chen *et al.* (2001), são apresentadas expressões para a integração das tensões no concreto, utilizando para as tensões resultantes no aço um modelo de fibras (Mirza e Skrabek, 1991). Rodriguez e Aristizabal-Ochoa (1999) apresentaram expressões para obtenção dos esforços no concreto, utilizando o método de integração de Gauss, no qual a seção deve ser aproximada por trechos retilíneos. Um modelo de fibras que emprega computação gráfica para a integração das tensões sobre a seção foi desenvolvido por Sfakianakis (2002).

Neste capítulo, faz-se a obtenção de esforços resistentes em seções mistas genéricas a partir de uma aplicação do Teorema de Green. Werner (1974) sugeriu o uso deste teorema para obtenção de esforços em seções de concreto armado e diversos trabalhos, como Ferreira (1986) e Melo (2000) utilizaram o esquema proposto para análise de seções de concreto armado. As expressões para a obtenção dos esforços são deduzidas e alguns exemplos de utilização da formulação são apresentados neste capítulo.

### **3.2 GEOMETRIA DA SEÇÃO TRANSVERSAL**

Define-se a seção transversal através de poligonais, uma para o componente concreto que sempre envolve toda a seção, outra para o perfil metálico e outras para as aberturas contidas na poligonal do componente concreto. Barras de armadura são definidas pontualmente e localizadas no interior da poligonal do concreto.

Descrevem-se os vértices das poligonais segundo um sistema de coordenadas *XYZ* declarados no sentido anti-horário. Ao se declarar os vértices da poligonal em sentido horário, tem-se uma integração com sinal oposto. Define-se assim integração no sentido

positivo quando os vértices são declarados em sentido anti-horário; caso contrário, tem-se uma integração no sentido negativo, caso das aberturas na seção.

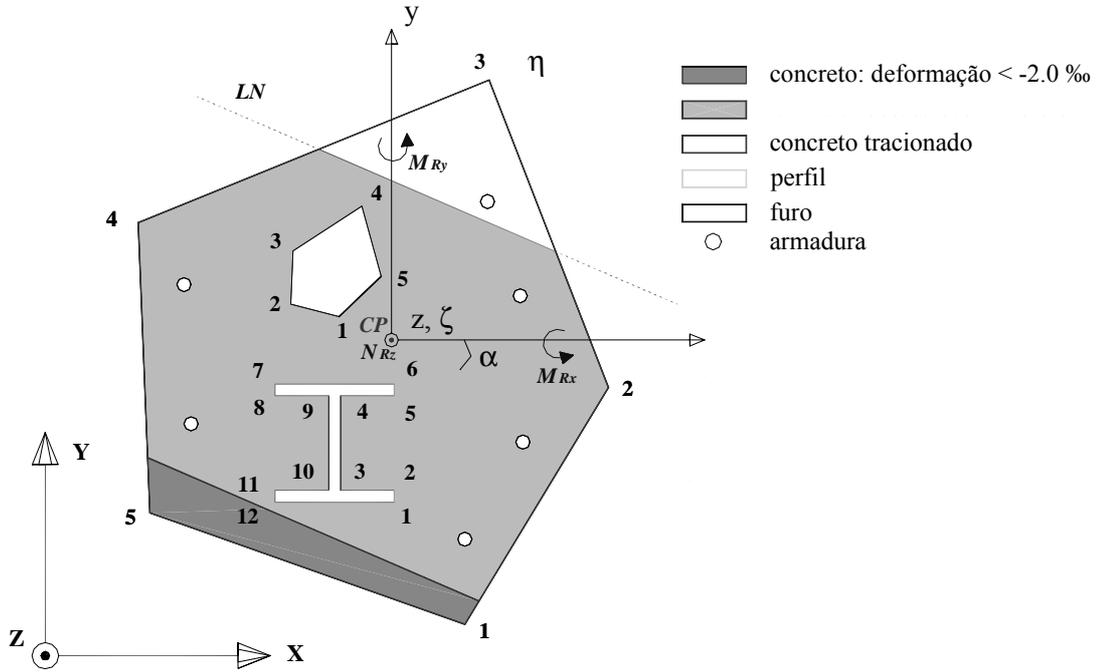


Figura 3.1 Definição da seção transversal, sistemas global e locais (seccionais).

### 3.3 ESFORÇOS RESISTENTES

Os esforços resistentes da seção transversal são os momentos fletores  $M_{Rx}$ ,  $M_{Ry}$  e o esforço normal  $N_{Rz}$  descritos segundo um sistema local, seccional, de coordenadas  $xyz$ , paralelo ao sistema global, seccional,  $XYZ$  e com origem em um ponto qualquer do plano que contém a seção. Tem-se utilizado, neste trabalho, a origem coincidente com o centróide plástico da seção mista,  $CP$ .

Para uma seção mista arbitrária, determina-se o centróide plástico (Roik e Bergman, 1990) através das expressões

$$X_{CP} = \frac{X_c A_c \alpha f_{ck} / \gamma_c + X_p A_p f_{yp} / \gamma_p + X_s A_s f_{ys} / \gamma_s}{A_c \alpha f_{ck} / \gamma_c + A_p f_{yp} / \gamma_p + A_s f_{ys} / \gamma_s} \quad (3.1a)$$

$$Y_{CP} = \frac{Y_c A_c \alpha f_{ck} / \gamma_c + Y_p A_p f_{yp} / \gamma_p + Y_s A_s f_{ys} / \gamma_s}{A_c \alpha f_{ck} / \gamma_c + A_p f_{yp} / \gamma_p + A_s f_{ys} / \gamma_s} \quad (3.1b)$$

onde  $A_c$ ,  $A_p$  e  $A_s$  são respectivamente as áreas de concreto, perfil e armaduras;  $f_{ck}$ ,  $f_{yp}$  e  $f_{ys}$  são a resistência característica do concreto, tensão de escoamento do aço do perfil e aço das armaduras respectivamente;  $\gamma_c$ ,  $\gamma_p$  e  $\gamma_s$  são os coeficientes de resistência;  $\alpha$  deve ser tomado igual a 1.00 ou 0.85, respectivamente, para concretos confinados ou não;  $X_c$ ,  $Y_c$ ,  $X_p$ ,  $Y_p$ ,  $X_s$  e  $Y_s$  são as coordenadas dos centróides das respectivas áreas dos materiais no sistema  $XYZ$  (Figura 3.1).

A utilização do centróide plástico em substituição ao centróide geométrico da seção mostrou-se mais adequada quando se trabalha com seções assimétricas. Esta observação foi feita por Chen *et al.* (2001) e Sfakianakis (2002), onde, fazendo-se a origem do sistema local, seccional,  $xyz$ , coincidente com o centróide plástico, observam-se menores problemas de convergência quando se trabalha com métodos iterativos como quasi-Newton, utilizado por Chen *et al.* (2001), e o Método de Newton Raphson, utilizado neste trabalho.

Um outro sistema local, seccional,  $\xi\eta\zeta$  rotacionado em relação ao sistema  $xyz$  de um ângulo igual ao de inclinação da linha neutra sendo o eixo  $\zeta$  paralelo à linha neutra com origem no  $CP$ , também é definido (Figura 3.1). A utilização deste é cômoda, por exemplo, na obtenção de pontos sob maiores e menores deformações na seção uma vez que o eixo  $\eta$  é perpendicular à linha neutra.

### 3.4 DEFORMADA DA SEÇÃO

Baseado na hipótese de que seções planas permanecem planas, e a perfeita aderência entre o concreto e aço, para definir a deformada da seção dispõe-se de três alternativas:

a)  $\varepsilon_0$ ,  $k_x$  e  $k_y$  definem, respectivamente, deformação no centróide plástico  $CP$  da seção transversal mista, curvatura em torno do eixo  $x$ , curvatura em torno do eixo  $y$  (Figura 3.1). Obtém-se a deformação em um ponto  $(x,y)$  qualquer da seção através da expressão

$$\varepsilon(x,y) = \varepsilon_0 + k_x y - k_y x \quad (3.2)$$

que será novamente apresentada no Capítulo 6, expressão (6.4), observando-se o sistema de referência da Figura 6.1;

b)  $\varepsilon_0$ ,  $k_0$  e  $\alpha$  definem, respectivamente, deformação no centróide plástico da seção transversal mista, Figura 3.1, curvatura em torno da linha neutra, ângulo de inclinação da linha neutra em relação ao eixo  $x$ , sendo positivo no sentido anti-horário. Obtém-se a deformação em um ponto  $(\zeta, \eta)$  qualquer através da expressão

$$\varepsilon(\zeta, \eta) = \varepsilon_0 + k_0 \eta \quad (3.3)$$

equivalente à expressão (3.2);

c)  $D$  e  $\alpha$ , onde  $\alpha$  tem o mesmo significado definido anteriormente e  $D$  é um parâmetro de deformação com o qual descrevem-se deformadas da seção restritas ao estado limite último. Este parâmetro é descrito no Capítulo 5.

### 3.5 MATERIAIS

A seguir apresentam-se as relações tensão-deformação que foram utilizadas para os materiais empregados em seções transversais mistas.

#### 3.5.1 Relação Tensão - Deformação do Concreto

Para o concreto, considerou-se o diagrama tensão-deformação simplificado fixado pelo Código Modelo CEB (CEB, 1990), composto de uma parábola e de uma reta.

A deformação  $\varepsilon_{cu}$  mostrada na Figura 3.2 é dada por

$$\varepsilon_{cu} = -0.0035, \text{ para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \quad (3.4)$$

e por

$$\varepsilon_{cu} = -0.0035 \left( \frac{50}{f_{ck}} \right), \text{ para } 50 < f_{ck} \leq 80 \text{ MPa} \quad (3.5)$$

Considerou-se neste trabalho que se deve ter sempre  $\varepsilon_{cu} \leq -0.0022$ , podendo-se assim utilizar concretos de  $f_{ck} > 80$  MPa. Esta adoção tem por base a observação de que para concretos de alta resistência com  $f_{ck} > 80$  MPa a ruptura se dá para deformações em torno de -0.002 a -0.0022. Esta observação pode ser feita através da relação tensão-deformação apresentada pelo CEB (1990) mostrada na Figura 2.5(b).

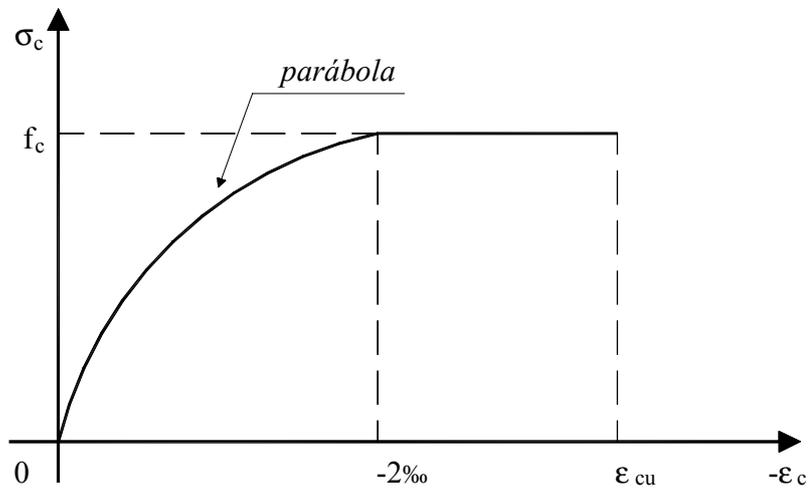


Figura 3.2 Diagrama tensão-deformação do concreto.

A resistência do concreto à compressão é dada por

$$f_c = 0.85 \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (3.6a)$$

para concretos sem confinamento e

$$f_c = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (3.6b)$$

para concretos confinados segundo o Eurocode 4 (1994) e a NBR 14323 (1999). Nas expressões (3.6)  $f_{ck}$  e  $\gamma_c$  são a resistência característica do concreto à compressão e o coeficiente de resistência do concreto, respectivamente.

Portanto, determinam-se as tensões de compressão no concreto através da expressão

$$\sigma_c = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 < \varepsilon \\ (a\varepsilon + b\varepsilon^2)f_c & \text{para } -0.002 < \varepsilon \leq 0 \\ -f_c & \text{para } \varepsilon_{cu} \leq \varepsilon \leq -0.002 \\ 0 & \text{para } \varepsilon < \varepsilon_{cu} \end{cases} \quad (3.7)$$

onde,  $a = 1000$  e  $b = 250000$ .

A expressão (3.7) define quatro intervalos de deformação do concreto, portanto, podem-se ter então quatro regiões na seção transversal:

- a) Região  $A_{c0}$  correspondente à região tracionada sem a contribuição resistente do concreto ( $0 < \varepsilon$ );
- b) Região  $A_{c1}$  correspondente à região comprimida de variação parabólica das tensões ( $-0.002 < \varepsilon \leq 0$ );
- c) Região  $A_{c2}$  correspondente à região comprimida de tensões constantes ( $\varepsilon_{cu} \leq \varepsilon \leq -0.002$ ), Figura 3.1;
- d) Região  $A_{c3}$  corresponde à região comprimida de tensões constantes nulas ( $\varepsilon < \varepsilon_{cu}$ ).

Eventualmente, pode-se considerar a região  $A_{c3}$  com tensões iguais as da região  $A_{c2}$ . Tal fato ocorre, por exemplo, em pilares circulares preenchidos (Han, 2004). Na verdade, a região  $A_{c3}$  possui um comportamento intermediário entre tensões nulas e tensões iguais as da região  $A_{c2}$ , Figura 2.5(b).

### 3.5.2 Relação Tensão - Deformação do Aço das Armaduras

Consideram-se dois tipos de aço para as armaduras, aços Classe *A* e aços Classe *B*. Implementou-se os aços Classe *B* com o intuito de se verificar estruturas existentes, já que a NBR 6118 (2003) não considera mais este tipo de relação tensão-deformação.

A resistência de cálculo do aço das armaduras é dada por

$$f_s = \frac{f_{ys}}{\gamma_s} \quad (3.8)$$

onde  $f_{ys}$  é a resistência característica do aço, tensão de escoamento, e  $\gamma_s$  é o coeficiente de minoração da resistência característica do aço.

O diagrama tensão deformação do aço Classe *A* é mostrado na Figura 3.3 e descrito pelas expressões

$$\sigma_s = \begin{cases} E_s \varepsilon & \text{para } |\varepsilon| < \varepsilon_y \\ \text{sinal}(\varepsilon) f_s & \text{para } |\varepsilon| \geq \varepsilon_y \end{cases} \quad (3.9)$$

onde,  $\varepsilon_y = \frac{f_s}{E_s}$ , sendo  $E_s$  o módulo de elasticidade longitudinal do aço. Utiliza-se a função *sinal*( ) para distinguir uma deformação de compressão da de tração.

O diagrama tensão deformação do aço Classe *B*, mostrado na Figura 3.3, é dado pelas expressões

$$\sigma_s = \begin{cases} E_s \varepsilon & \text{para } |\varepsilon| < \varepsilon_1 \\ \text{sinal}(\varepsilon) \left( c + \sqrt{c^2 + 45|\varepsilon| - 0.49} \right) f_s & \text{para } \varepsilon_1 < |\varepsilon| < \varepsilon_y \\ \text{sinal}(\varepsilon) f_s & \text{para } |\varepsilon| \geq \varepsilon_y \end{cases} \quad (3.10)$$

onde

$$\varepsilon_1 = 0.7 \frac{f_s}{E_s}$$

$$\varepsilon_y = 0.002 + \frac{f_s}{E_s}$$

$$c = 0.7 - 22.5 \frac{f_s}{E_s} \quad (3.11)$$

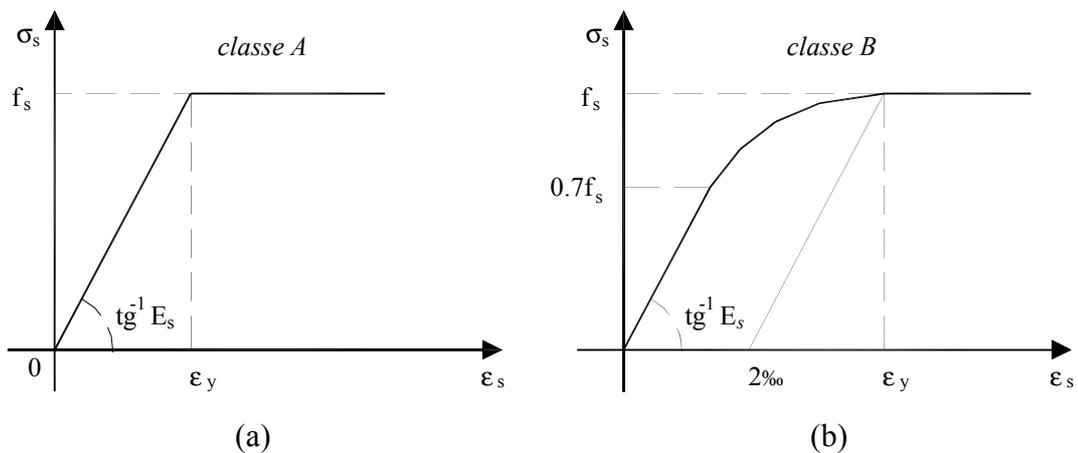


Figura 3.3 Diagrama tensão-deformação dos aços das armaduras:

(a) Classe A; (b) Classe B.

### 3.5.3 Relação Tensão - Deformação do Aço do Perfil

Admitiu-se para o aço do perfil o mesmo comportamento do aço Classe A das armaduras, definindo três regiões de deformação:

a) Região  $A_{p1}$  correspondente a uma região tracionada onde o aço encontra-se escoado ( $\varepsilon \geq f_y/E_p$ , onde  $f_y = \frac{f_{yp}}{\gamma_p}$ );

b) Região  $A_{p2}$  correspondente a uma região de variação linear das tensões, regime elástico ( $-f_y/E_p < \varepsilon < f_y/E_p$ );

c) Região  $A_{p3}$  correspondente a uma região comprimida onde o aço encontra-se escoado ( $\varepsilon \leq -f_y/E_p$ ).

### 3.6 OBTENÇÃO DOS ESFORÇOS RESISTENTES

Os esforços seccionais resistentes  $M_{Rx}$ ,  $M_{Ry}$  e  $N_{Rz}$ , momentos fletores em torno dos eixos locais, seccionais,  $x$  e  $y$  (Figura 3.1), e força normal segundo o eixo  $z$ , respectivamente, são obtidos por integração das tensões definidas para valores das variáveis de deformação, por exemplo  $\varepsilon_0$ ,  $k_x$ ,  $k_y$ , e da área de armadura individual  $A_{si}$ , através das expressões:

$$\begin{aligned}
 N_{Rz} &= \iint_A \sigma_z dA \\
 M_{Rx} &= \iint_A \sigma_z y dA \\
 M_{Ry} &= -\iint_A \sigma_z x dA .
 \end{aligned} \tag{3.12a}$$

que podem ser reescritas,

$$\begin{aligned}
 N_{Rz} &= \iint_{A_c} \sigma_c dA + \iint_{A_p} \sigma_p dA - \iint_{A_p} \sigma_c dA + \sum_{i=1}^{n_f} \left( \iint_{A_{fi}} \sigma_c dA \right) + \sum_{i=1}^{n_s} A_{si} \sigma_{si} \\
 M_{Rx} &= \iint_{A_c} \sigma_c y dA + \iint_{A_p} \sigma_p y dA - \iint_{A_p} \sigma_c y dA + \sum_{i=1}^{n_f} \left( \iint_{A_{fi}} \sigma_c y dA \right) + \sum_{i=1}^{n_s} A_{si} \sigma_{si} y_{si} \\
 M_{Ry} &= -\underbrace{\iint_{A_c} \sigma_c x dA}_{\text{concreto}} - \underbrace{\iint_{A_p} \sigma_p x dA + \iint_{A_p} \sigma_c x dA}_{\text{concreto sobreposto perfil}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n_f} \left( \iint_{A_{fi}} \sigma_c x dA \right)}_{\text{aberturas}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n_s} A_{si} \sigma_{si} x_{si}}_{\text{armaduras}} .
 \end{aligned} \tag{3.12b}$$

### 3.7 INTEGRAÇÃO

As integrais referentes aos esforços seccionais dados pelas expressões (3.12) são resolvidas após uma transformação das integrais de superfície em integrais de contorno através de uma aplicação do Teorema de Green.

Pela aplicação do Teorema de Green, a expressão de um termo genérico de um polinômio transformado para uma integral de contorno é dada por

$$\iint_A \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint (P dx + Q dy) = \sum_{i=1}^{nseg} \underbrace{\left( \oint_{P_{i-1} P_i} (P dx + Q dy) \right)}_{\text{segmentos}} \quad (3.13)$$

Com este teorema, pode-se obter de forma analítica qualquer integral polinomial em domínio plano fechado, desde que descrito por segmentos retos.

Manipulando a definição das funções  $P$  e  $Q$ , dependendo da integral requerida, e dada a parametrização do segmento da poligonal que define a região a ser integrada, obtém-se a expressão para a avaliação das integrais

$$I_{ab} = \iint_A x^a y^b dx dy \quad (3.14)$$

com  $a$  e  $b$  inteiros.

Fazendo a parametrização de um segmento genérico da poligonal (Figura 3.4) obtém-se as expressões

$$\begin{aligned} x &= x_1 + S(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + S(y_2 - y_1) \end{aligned} \quad 0 \leq S \leq 1 \quad (3.15)$$

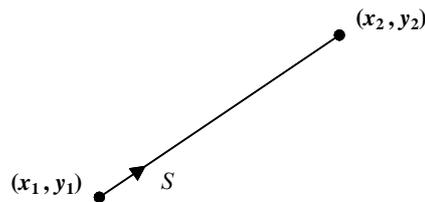


Figura 3.4 Parametrização do segmento.

Observando-se a expressão (3.14) com os termos  $a$  e  $b$  tomados iguais a zero, utilizando-se a expressão (3.13) e (3.15), tem-se para um segmento da poligonal

$$I_{00} = \iint_A x^0 y^0 dx dy = \oint_S x dy = \int_0^1 [x_1 + S(x_2 - x_1)](y_2 - y_1) ds = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)\Delta y. \quad (3.16)$$

Para,  $a$  e  $b$ , tomados iguais a 1 e 0, respectivamente, tem-se

$$\begin{aligned} I_{10} &= \iint_A x^1 y^0 dx dy = \oint_S \frac{x^2}{2} dy = \int_0^1 \frac{[x_1 + S(x_2 - x_1)]^2}{2} (y_2 - y_1) ds \\ &= \Delta y \left( \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1 \Delta x}{2} + \frac{\Delta x^2}{6} \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

e, analogamente, obtém-se as demais expressões que serão necessárias

$$\begin{aligned} I_{01} &= \iint_A x^0 y^1 dx dy = \oint_S xy dy = \int_0^1 (x_1 + S(x_2 - x_1))(y_1 + S(y_2 - y_1))(y_2 - y_1) ds \\ &= \Delta y \left( x_1 y_1 + \frac{\Delta x y_1 + \Delta y x_1}{2} + \frac{\Delta x \Delta y}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{11} &= \iint_A x^1 y^1 dx dy = \oint_S \frac{1}{2} x^2 y dy = \\ &= \frac{\Delta y}{2} \left( x_1^2 y_1 + \frac{1}{2} (x_1^2 \Delta y + 2x_1 y_1 \Delta x) + \frac{1}{3} (2x_1 \Delta x \Delta y + \Delta x^2 y_1) + \frac{1}{4} \Delta x^2 \Delta y \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{20} &= \iint_A x^2 y^0 dx dy = \oint_S \frac{1}{3} x^3 dy \\ &= \frac{\Delta y}{3} \left( x_1^3 + \frac{3x_1^2 \Delta x}{2} + x_1 \Delta x^2 + \frac{\Delta x^3}{4} \right) \end{aligned} \quad (3.18a)$$

$$\begin{aligned}
I_{02} &= \iint_A x^0 y^2 dx dy = \oint_S xy^2 dy \\
&= \Delta y \left( x_1 y_1^2 + x_1 y_1 \Delta y + \frac{x_1 \Delta y^2}{3} + \frac{y_1^2 \Delta x}{2} + \frac{2}{3} y_1 \Delta x \Delta y + \frac{1}{4} \Delta x \Delta y^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{12} &= \iint_A x^1 y^2 dx dy = \oint_S \frac{x^2 y^2}{2} dy \\
&= \frac{\Delta y}{2} \left( x_1^2 y_1^2 + x_1^2 y_1 \Delta y + \frac{1}{3} x_1^2 \Delta y^2 + x_1 \Delta x y_1^2 + \frac{4}{3} x_1 \Delta x y_1 \Delta y + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} x_1 \Delta x \Delta y^2 + \frac{1}{3} \Delta x^2 y_1^2 + \frac{1}{2} \Delta x^2 y_1 \Delta y + \frac{1}{5} \Delta x^2 \Delta y^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{21} &= \iint_A x^2 y^1 dx dy = \oint_S \frac{x^3 y}{3} dy \\
&= \frac{\Delta y}{3} \left( x_1^3 y_1 + \frac{3}{2} x_1^2 y_1 \Delta x + x_1 \Delta x^2 y_1 + \frac{\Delta x^3 y_1}{4} + \frac{x_1^3 \Delta y}{2} + \right. \\
&\quad \left. + x_1^2 \Delta x \Delta y + \frac{3}{4} x_1 \Delta x^2 \Delta y + \frac{1}{5} \Delta x^3 \Delta y \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{30} &= \iint_A x^3 y^0 dx dy = \oint_S \frac{x^4}{4} dy \\
&= \frac{\Delta y}{4} \left( x_1^4 + 2x_1^3 \Delta x + 2x_1^2 \Delta x^2 + x_1 \Delta x^3 + \frac{1}{5} \Delta x^4 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{03} &= \iint_A x^0 y^3 dx dy = \oint_S xy^3 dy \\
&= \Delta y \left( x_1 y_1^3 + \frac{3}{2} x_1 y_1^2 \Delta y + x_1 y_1 \Delta y^2 + \frac{x_1 \Delta y^3}{4} + \frac{1}{2} \Delta x y_1^3 + \right. \\
&\quad \left. + y_1^2 \Delta x \Delta y + \frac{3}{4} y_1 \Delta x \Delta y^2 + \frac{\Delta x \Delta y^3}{5} \right)
\end{aligned}$$

(3.18b)

Após serem detectadas as faixas de deformação em que se encontram os segmentos que formam cada área componente, obtêm-se as integrais correspondentes.

Como  $\sigma = f(\varepsilon)$  e  $\varepsilon = f(x, y)$  as integrais das expressões (3.12) podem ser obtidas de forma analítica.

É importante salientar que segmentos das poligonais que formam as áreas componentes, que estão situados em mais de uma faixa de deformação do seu respectivo diagrama tensão-deformação, devem ser divididos em tantos segmentos quantas foram as faixas em que se situam. Obtêm-se assim poligonais secundárias de acordo com os diagramas dos materiais componentes da seção. Para este fim pode-se utilizar, de forma bastante elegante, o algoritmo de determinação de isofaixas em domínios planos (Martha, 2003).

Em seguida, obtêm-se as expressões dos esforços resistentes de forma analítica usando-se a técnica apresentada. A partir das expressões (3.12) tem-se a expressão para o esforço normal resistente dado por

$$N_{Rz} = \underbrace{\iint_{A_c} \sigma_c dA}_{\text{concreto}} + \underbrace{\iint_{A_p} \sigma_p dA - \iint_{A_p} \sigma_c dA}_{\substack{\text{concreto sobreposto} \\ \text{perfil}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_f} \left( \iint_{A_{fi}} \sigma_c dA \right)}_{\text{aberturas}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_s} A_{si} \sigma_{si}}_{\text{armaduras}} \quad (3.19)$$

onde para o componente concreto, tem-se

$$\iint_{A_c} \sigma_c dA = \underbrace{\iint_{A_{c2}} (-f_c) dA}_{I_{A_{c2}}} + \underbrace{\iint_{A_{c1}} (a\varepsilon + b\varepsilon^2) f_c dA}_{I_{A_{c1}}}, \quad (3.20)$$

sendo  $A_{c1}$  a área do componente concreto correspondente à faixa do diagrama tensão-deformação descrito pela parábola e  $A_{c2}$  a área correspondente à faixa do diagrama descrito pela reta, conforme a Figura 3.2.

Escrevendo as variáveis de deformação em termos de  $\varepsilon_0$ ,  $k_x$  e  $k_y$ , tem-se para as integrais  $I_{A_{c1}}$  e  $I_{A_{c2}}$  da expressão (3.20) as expressões

$$\begin{aligned}
I_{A_{c1}} &= \iint_{A_{c1}} (a\varepsilon + b\varepsilon^2) f_c dA = af_c \iint_{A_{c1}} \varepsilon dA + bf_c \iint_{A_{c1}} \varepsilon^2 dA \\
&= af_c \iint_{A_{c1}} (\varepsilon_0 + k_x y - k_y x) dA + bf_c \iint_{A_{c1}} (\varepsilon_0 + k_x y - k_y x)^2 dA \\
&= (af_c \varepsilon_0 + bf_c \varepsilon_0^2) (I_{00})_{A_{c1}} + (-af_c k_y - 2bf_c \varepsilon_0 k_y) (I_{10})_{A_{c1}} + \\
&\quad + (af_c k_x + 2bf_c \varepsilon_0 k_x) (I_{01})_{A_{c1}} + (-2bf_c k_x k_y) (I_{11})_{A_{c1}} + \\
&\quad + (bf_c k_y^2) (I_{20})_{A_{c1}} + (bf_c k_x^2) (I_{02})_{A_{c1}} \\
I_{A_{c2}} &= \iint_{A_{c2}} (-f_c) dA = (-f_c) (I_{00})_{A_{c2}}. \tag{3.21}
\end{aligned}$$

Para o perfil, a contribuição ao esforço normal, expressão (3.19) é dada pela expressão

$$\iint_{A_p} \sigma_p dA. \tag{3.22}$$

Como as áreas  $A_{p1}$ ,  $A_{p2}$  e  $A_{p3}$  correspondem às faixas do diagrama tensão-deformação do aço do perfil, tem-se para expressão (3.22)

$$\begin{aligned}
\iint_{A_p} \sigma_p dA &= \iint_{A_{p3}} \sigma_p dA + \iint_{A_{p2}} \sigma_p dA + \iint_{A_{p1}} \sigma_p dA \\
&= \iint_{A_{p3}} -f_y dA + \iint_{A_{p2}} E_p \varepsilon_p dA + \iint_{A_{p1}} f_y dA \\
&= -f_y (I_{00})_{A_{p3}} + \underbrace{\iint_{A_{p2}} E_p (\varepsilon_0 + k_x y - k_y x) dA}_{I_{A_{p2}}} + f_y (I_{00})_{A_{p1}} \tag{3.23}
\end{aligned}$$

e, para a integral  $I_{A_{p2}}$ , utilizando as expressões (3.16), (3.17) e (3.18) tem-se

$$\begin{aligned} I_{A_{p2}} &= E_p \varepsilon_0 \iint_{A_{p2}} dA + E_p k_x \iint_{A_{p2}} y dA - E_p k_y \iint_{A_{p2}} x dA \\ &= E_p \varepsilon_0 (I_{00})_{A_{p2}} + E_p k_x (I_{01})_{A_{p2}} - E_p k_y (I_{10})_{A_{p2}} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Logo, pode-se escrever (3.22) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \iint_{A_p} \sigma_p dA &= -f_y (I_{00})_{A_{p3}} + E_p \varepsilon_0 (I_{00})_{A_{p2}} + E_p k_x (I_{01})_{A_{p2}} + \\ &\quad - E_p k_y (I_{10})_{A_{p2}} + f_y (I_{00})_{A_{p1}} \end{aligned} \quad (3.25)$$

A parcela que aparece na expressão (3.19) correspondente ao concreto sobreposto pela poligonal do perfil é obtida aplicando as expressão (3.20) na poligonal que define o perfil.

Para a consideração das aberturas na seção, expressão (3.19), como estes tem os vértices definidos no sentido horário, simplesmente aplica-se a expressão (3.20) na poligonal da abertura, resultando em uma integral de sentido contrário.

Para as armaduras, expressão (3.19), como estas são definidas pontualmente, após a obtenção da deformação no centróide destas, expressão (3.2) ou (3.3), obtém-se a tensão nestas através das expressões (3.9) ou (3.10) e chega-se à parcela de esforços resistidos por estas.

Como se definem todos os elementos, perfil, furos e armaduras no interior da poligonal que define o componente concreto, deve-se descontar as partes sobrepostas pelo perfil e armaduras. No caso das aberturas, já foi dito que estas têm os vértices definidos no sentido horário fornecendo uma integração em sentido contrário, integração negativa. No caso das armaduras esta sobreposição é desprezada, já que a área sobreposta é pequena em relação à área de concreto. No caso do perfil, como já mencionado, o que se faz é a integração, utilizando-se a expressão (3.20) sobre sua área.

Para o momento em torno do eixo  $x$ , dado nas expressões (3.12), ou seja,

$$M_{Rx} = \underbrace{\iint_{A_c} \sigma_c y dA}_{\text{concreto}} + \underbrace{\iint_{A_p} \sigma_p y dA - \iint_{A_p} \sigma_c y dA}_{\text{concreto sobreposto}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_f} \left( \iint_{A_{fi}} \sigma_c y dA \right)}_{\text{aberturas}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_s} A_{si} \sigma_{si} y_{si}}_{\text{armaduras}} \quad (3.26)$$

tem-se a mesma expressão (3.19) do esforço normal multiplicada por  $y$ . Logo, as diferenças entre as expressões (3.26) e (3.19) irão aparecer nas expressões  $I_{ab}$  dadas em (3.17) e (3.18). Logo, a obtenção dos momentos resistentes será análoga à obtenção do esforço normal.

Para o primeiro termo da expressão (3.26), componente concreto da seção transversal, tem-se

$$\begin{aligned} \iint_{A_c} \sigma_c y dA = & (af_c \varepsilon_0 + bf_c \varepsilon_0^2)(I_{01})_{A_{c1}} + (-af_c k_y - 2bf_c \varepsilon_0 k_y)(I_{11})_{A_{c1}} \\ & + (af_c k_x + 2bf_c \varepsilon_0 k_x)(I_{02})_{A_{c1}} + (-2bf_c k_x k_y)(I_{12})_{A_{c1}} + \\ & + (bf_c k_y^2)(I_{21})_{A_{c1}} + (bf_c k_x^2)(I_{03})_{A_{c1}} - (f_c)(I_{01})_{A_{c2}} \end{aligned} \quad (3.27)$$

sendo o terceiro termo semelhante a este porém a poligonal utilizada na integração é a do perfil, e no quarto termo, também tem-se a mesma expressão porém utiliza-se a poligonal das aberturas.

Para o segundo termo da expressão (3.26), correspondente ao componente perfil, tem-se a expressão

$$\begin{aligned} \iint_{A_p} \sigma_p y dA = & -f_y (I_{01})_{A_{p3}} + E_p \varepsilon_0 (I_{01})_{A_{p2}} + E_p k_x (I_{02})_{A_{p2}} + \\ & - E_p k_y (I_{11})_{A_{p2}} + f_y (I_{01})_{A_{p1}} \end{aligned} \quad (3.28)$$

e, para as armadura, quinto termo da expressão (3.26), tem-se a mesma expressão do esforço normal multiplicada por  $y_{si}$ , ordenada do centróide das armaduras.

Para o momento em torno do eixo  $y$ , dado nas expressões (3.12), ou seja,

$$M_{Ry} = - \underbrace{\iint_{A_c} \sigma_c x dA}_{\text{concreto}} - \underbrace{\iint_{A_p} \sigma_p x dA + \iint_{A_p} \sigma_c x dA}_{\text{concreto sobreposto}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n_f} \left( \iint_{A_{fi}} \sigma_c x dA \right)}_{\text{aberturas}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n_s} A_{si} \sigma_{si} x_{si}}_{\text{armaduras}} \quad (3.29)$$

tem-se a mesma expressão (3.19) do esforço normal multiplicada por  $-x$ . Logo, analogamente, obtêm-se as expressões

$$\begin{aligned} - \iint_{A_c} \sigma_c x dA &= (-af_c \varepsilon_0 - bf_c \varepsilon_0^2)(I_{10})_{A_{c1}} + (af_c k_y + 2bf_c \varepsilon_0 k_y)(I_{20})_{A_{c1}} \\ &+ (-af_c k_x - 2bf_c \varepsilon_0 k_x)(I_{11})_{A_{c1}} + (2bf_c k_x k_y)(I_{21})_{A_{c1}} + \\ &+ (-bf_c k_y^2)(I_{30})_{A_{c1}} + (-bf_c k_x^2)(I_{12})_{A_{c1}} + (f_c)(I_{10})_{A_{c2}} \\ - \iint_{A_p} \sigma_p x dA &= f_y (I_{10})_{A_{p3}} - E_p \varepsilon_0 (I_{10})_{A_{p2}} - E_p k_x (I_{11})_{A_{p2}} + \\ &+ E_p k_y (I_{20})_{A_{p2}} - f_y (I_{10})_{A_{p1}} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Os demais termos da expressão (3.29) são obtidos conforme as observações feitas para a expressão (3.26) no que se refere a área de concreto sobreposta pela poligonal do perfil, aberturas e armaduras.

### 3.8 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Utilizou-se para implementação computacional a linguagem C++. Esta é uma linguagem de alto nível que evoluiu a partir de C, sendo desenvolvida por Bjarne Stroustrup no início dos anos 80 (Deitel e Deitel, 2001). O programa chamado CSTM, *Cálculo de Seções Transversais Mista*, foi desenvolvido com o objetivo de analisar seções mistas genéricas. O programa foi desenvolvido para plataforma Windows, sendo totalmente gráfico e interativo.

A metodologia de programação que foi utilizada é a programação orientada a objetos. Visa-se com esta metodologia compatibilidade, portabilidade, facilidade de integração, extensão e eficiência.

A programação orientada a objetos, OOP, modela objetos do mundo real de forma a obtermos duplicatas em *software*. Ela tira partido da relação de *classe* e *herança* (Deitel e Deitel, 2001) onde objetos de uma mesma *classe* possuem as mesmas características e *classes* derivadas são criadas herdando e definindo suas próprias características.

Comunicação entre objetos, ocultação de informações e funções nos objetos são características da OOP. As *classes* criadas pelos programadores de C++ contém tanto os dados como também o conjunto de funções que manipulam os dados.

Na implementação foi desenvolvida uma *classe*, que contém a formulação apresentada neste capítulo e nos capítulos 4 e 5.

No desenvolvimento do programa, foram utilizados alguns pacotes, como:

a) IUP, *Sistema Portátil de Interface com o Usuário*, versão 1.8.8 ([www.tecgraf.puc-rio.br](http://www.tecgraf.puc-rio.br)). É um sistema de criação de interfaces com aproximadamente 100 funções para a criação e a manipulação de diálogos. Permite que um programa possa ser executado sem modificações em diferentes sistemas operacionais como Windows e Linux;

b) CD, *Canvas Draw*, biblioteca gráfica 2D, versão 4.1 ([www.tecgraf.puc-rio.br](http://www.tecgraf.puc-rio.br)). É uma biblioteca gráfica independente da plataforma, contendo funções para suportar aplicações com vetores e imagens. Permite a visualização de superfícies abstratas como Clipboard, Metafile e OS. Possui alguns *drivers* que permitem por exemplo a geração de arquivos em formato DXF, EMF e WMF;

c) XY++, é uma biblioteca extensível de *classes* para gráficos bidimensionais, versão 1.1 ([www.tecgraf.puc-rio.br](http://www.tecgraf.puc-rio.br)). Construída para facilitar o processo de geração de gráficos bidimensionais em geral. Foi desenvolvida usando C++ e CD, sendo apta a ser usada em ambientes como o Windows e Linux;

d) OpenGL, *Open Graphics Library* ([www.opengl.org](http://www.opengl.org)). Biblioteca de rotinas gráficas e de modelagem, bidimensional e tridimensional, extremamente portátil e rápida, desenvolvida pela *Silicon Graphics, Inc.* Ao invés de descrever a cena e como ela deve aparecer, é preciso apenas determinar os passos necessários para alcançar a

aparência ou efeito desejado. Estes passos envolvem chamadas a esta API, *Application Programming Interface*, portátil que inclui aproximadamente 250 comandos e funções.

Implementou-se a formulação que se apresenta neste capítulo, juntamente com outros algoritmos, como: algoritmos para obtenção de relações momento-curvatura (Capítulo 4); algoritmos para obtenção da deformada em função dos esforços solicitantes; algoritmos para obtenção da superfície de interação normal-momento e superfície de interação dos momentos nos eixos  $x$  e  $y$  para um dado esforço normal; superfície de interação tridimensional, normal e momentos (Capítulo 5).

### **3.9 EXEMPLOS**

A seguir apresentam-se alguns exemplos onde a formulação apresentada neste capítulo foi utilizada.

#### **3.9.1 Primeiro Exemplo: Pilares Retangulares Preenchidos**

Utilizou-se o programa CSTM para avaliar esforços resistentes em seções mistas e comparar seus resultados com ensaios realizados por Shakir e Mouli (1990) em pilares mistos de seções tubulares retangulares preenchidas. No programa, as seções tubulares retangulares preenchidas foram modeladas como perfeitamente retangulares, cantos curvos desprezados, com altura de 150 mm, largura de 100 mm e espessura das paredes do perfil de 5 mm. Os protótipos analisados por Shakir e Mouli (1990), foram ensaiados a compressão centrada e o comprimento destes é pequeno, 0.10 m. Portanto, pode-se desprezar os efeitos de segunda ordem e analisar-se somente a seção do pilar. Considerou-se como variáveis de deformação  $\varepsilon_0 = -0.002$ ,  $k_x = 0$  e  $k_y = 0$ , estado limite último do concreto segundo a NBR 6118 (2003). Os coeficientes de resistência foram tomados iguais à unidade. Os resultados obtidos são mostrados na Tabela 3.1.

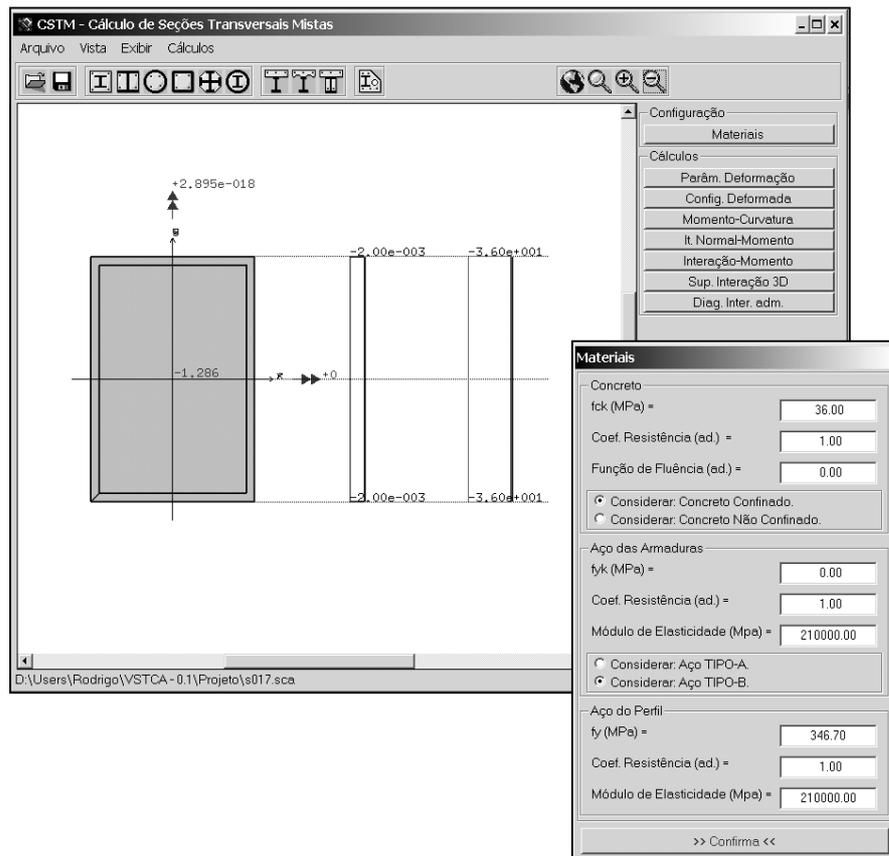


Figura 3.5 Protótipo 1 analisado no CSTM.

Tabela 3.1 Comparação do programa com ensaios e normas (Shakir e Mouli, 1990).

Protótipo (1)	Seção RHS (2)	$A_s$ (cm <sup>2</sup> ) (3)	$A_c$ (cm <sup>2</sup> ) (4)	$f_y$ (MPa) (5)	$f_c$ (MPa) (6)	$L_c$ (m) (7)
1	150x100x5	22.39	121.40	346.7	C36.0/46.0	0.1
2	150x100x5	22.39	120.00	346.7	C36.2/46.2	0.1
3	150x100x5	22.60	120.60	340.0	C36.6/46.6	0.1
4	150x100x5	22.60	120.10	340.0	C37.2/47.2	0.1

Protótipo (8)	Ensaio (kN) (9)	CSTM (kN) (10)	EC4 (kN) (11)	BS 5400 (kN) (12)	AISC (kN) (13)
1	1370	1286 (1.06)	1213 (1.13)	978*(1.40)	1147 (1.19)
2	1340	1288 (1.04)	1211 (1.11)	976*(1.37)	1145 (1.17)
3	1300	1277 (1.02)	1210 (1.07)	973*(1.34)	1143 (1.14)
4	1320	1285 (1.03)	1215 (1.09)	976*(1.35)	1148 (1.15)
	Médias	(1.04)	(1.10)	(1.36)	(1.16)

\* Valores multiplicados por 0.85 de acordo com a BS 5400.

Anotações entre parênteses representam a razão Ensaio / calculado.

### 3.9.2 Segundo Exemplo: Viga Mista

Neste exemplo, comparou-se uma viga mista calculada segundo a NBR 8800 (1986) com a formulação apresentada. A viga mista é formada pelo perfil soldado mostrado na Figura 3.6 com tensão de escoamento do aço de 250 MPa e módulo de elasticidade de 205000 MPa. A mesa de concreto que compõe a viga possui  $f_{ck}$  de 20 MPa. No programa, os coeficientes de ponderação das resistências do concreto e do aço foram tomados iguais a 1.40 e 1.10 respectivamente. Utilizando a norma brasileira encontra-se um momento resistente de 478 kNm e linha neutra na alma do perfil, no CSTM obteve-se um momento de 476 kNm e a linha neutra também na alma do perfil. O limite fixado no CSTM foi de que a fibra mais comprimida do concreto, parte superior da mesa de concreto, chegasse a -0.0035 de deformação.

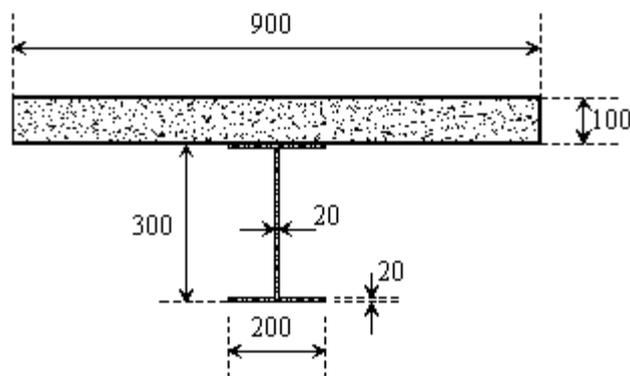


Figura 3.6 Viga mista analisada no CSTM, dimensões da seção em *mm*.

### 3.9.3 Terceiro Exemplo: Pilar Parcialmente Envolvido

O exemplo seguinte compara um pilar misto parcialmente envolvido dimensionado segundo a NBR 14323 (1999) com flexão em torno do eixo de menor inércia com a formulação apresentada. O pilar mostrado na Figura 3.7 apresenta tensão de escoamento do aço de 300 MPa e módulo de elasticidade de 205000 MPa. O concreto possui  $f_{ck}$  de 30 MPa. Na Tabela 3.2 são apresentados os resultados calculados segundo a norma e os obtidos no CSTM. No programa os coeficientes de resistência do concreto e do perfil foram tomados iguais a 1.40 e 1.10 respectivamente. Considerou-se

atingido o estado limite último quando a fibra mais comprimida do concreto chegou a -0.0035 de deformação.

Tabela 3.2 Comparação do programa CSTM com a NBR 14323 (1999).

Esforço Normal (kN) (1)	CSTM (kN.m) (2)	NBR (kN.m) (3)
0	366	389 (1.06)
2857	354	389 (1.10)
4874	242	--
6892	--	0
6991	0	--
Média :		(1.08)

Anotação entre parênteses representa a razão NBR / CSTM.

O sinal -- indica que não foi avaliado.

Com os pontos obtidos, obtém-se as curvas de interação mostradas na Figura 3.7.

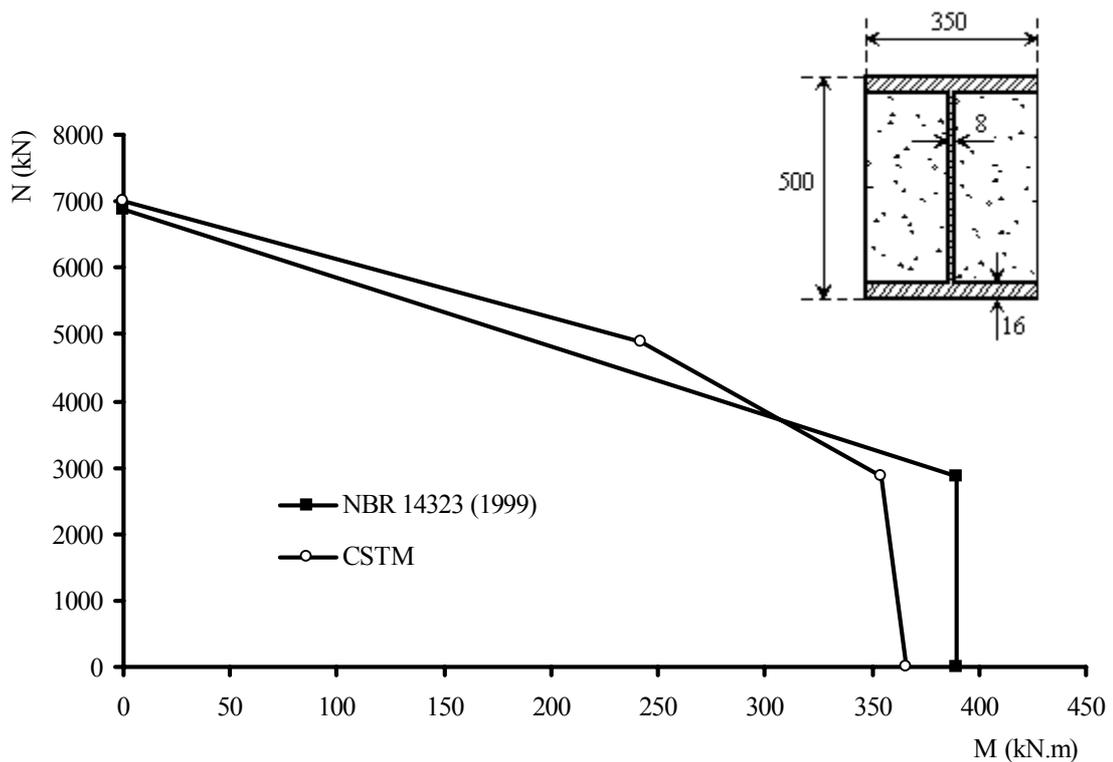


Figura 3.7 Pilar misto parcialmente envolvido fletido em torno do eixo de menor inércia: seção transversal, dimensões em *mm*; superfícies de interação obtidas através do CSTM e da NBR 14323.

# RELAÇÕES

# MOMENTO - CURVATURA

## 4.1 INTRODUÇÃO

Várias pesquisas têm sido desenvolvidas propondo métodos analíticos e procedimentos para o projeto de elementos com seções transversais mistas. Muitas diferenças entre procedimentos de normas são encontradas, mesmo quando os mesmos critérios básicos de projeto são adotados. Essas diferenças nos resultados de aplicações de normas indicam que procedimentos mais apurados são necessários. Devido a esta necessidade de conhecimento do comportamento de elementos com seções mistas diversos trabalhos vêm sendo desenvolvidos. Pode-se citar, por exemplo, o trabalho de Varma *et al.* (2002), que realizou ensaios experimentais em pilares retangulares preenchidos com concreto e aços de alta resistência. No trabalho de Sfakianakis (2002), foi proposto um novo método de estudo do mecanismo de falha baseado no modelo de fibras. Lakshmi e Shanmugam (2002) apresentaram um método semi-analítico para análise de pilares preenchidos retangulares onde as relações momento-curvatura são utilizadas para obtenção das rigidezes do pilar.

Uma das importâncias das relações momento-curvatura é a descrição do comportamento global da estrutura, pois a curva obtida tem informações sobre a história de carregamento e resposta quanto à deformação do elemento. Estas curvas obtidas para as seções transversais podem ser utilizadas para a análise do comportamento do elemento, como feito por Lakshmi e Shanmugam (2002). Nos procedimentos de

normas, o comportamento do elemento é tomado de forma simplificada através de uma análise elástica, e geralmente são apresentadas equações para o cálculo de rigidezes efetivas. Essas rigidezes tentam simular o comportamento não linear dos componentes que formam a seção transversal, como é feito no Eurocode 4 (1994) e NBR 14323 (1999).

O ponto máximo do diagrama momento-curvatura para um valor de esforço normal constitui um ponto de falha da superfície de interação de momentos para aquele esforço normal. O diagrama obtido expressa o comportamento da estrutura em cada nível de carregamento até a falha e após a falha.

Neste capítulo, a obtenção das relações momento-curvatura tem como base o Método de Newton Raphson. Utilizando-se esse método, implementaram-se dois algoritmos: algoritmo para obtenção das relações momento-curvatura através do controle do momento solicitante, incrementos nos momentos solicitantes à seção; algoritmo que controla através de incrementos a curvatura da seção transversal.

## **4.2 RELAÇÕES MOMENTO - CURVATURA**

As relações momento-curvatura são características da seção transversal, variam principalmente com a disposição e resistência dos elementos componentes da seção. Nas mais recentes pesquisas publicadas, a principal diferença é encontrada na relação tensão-deformação utilizada para o concreto. No trabalho de Lakshmi e Shanmugam (2002) foi utilizada uma relação parabólica. Outras relações podem ser utilizadas, como a apresentada por Sfakianakis (2002) constituída por uma parábola e uma reta de inclinação variável. Na Figura 2.5 têm-se relações utilizadas pela NBR 6118 (2003) e pelo CEB (1990). Um questionamento surge na consideração da deformação máxima de compressão a ser permitida para o concreto. Pode-se ver que esta deformação influi principalmente na resistência alcançada pelo perfil metálico, principalmente quando se empregam aços de alta resistência.

Observa-se que relações momento-curvatura obtidas a partir de elementos, que usam para o concreto relações tensão-deformação com ramos descendentes também apresentam ramos descendentes. Esta característica não é observada para as curvas apresentadas neste trabalho devido à relação tensão-deformação adotada e à limitação

das deformações conforme a Figura 4.2 (domínios de deformação correspondentes aos estados limites últimos).

Para obtenção das relações momento-curvatura, utilizaram-se dois algoritmos baseados no Método de Newton Raphson:

a) Algoritmo para obtenção das relações momento-curvatura através do controle do momento solicitante, com aplicação de incrementos nos momentos solicitantes à seção;

b) Algoritmo que controla através de incrementos a curvatura da seção transversal. Esta segunda opção é especialmente interessante para obter ramos descendentes da relação momento-curvatura.

#### 4.2.1 Controle do Momento

Fixado um valor de esforço normal,  $N_{Sz}$ , obtém-se, de forma iterativa, para cada incremento de momento, os parâmetros  $\varepsilon_o$ ,  $k_x$  e  $k_y$  que definem a configuração deformada da seção, que resiste aos esforços solicitantes  $N_{Sz}$ ,  $M_{Sx}$  e  $M_{Sy}$ .

Os momentos solicitantes são incrementados através da multiplicação de uma excentricidade pelo esforço normal solicitante, sendo estes dados de entrada. Estes incrementos de excentricidade podem ser em uma direção qualquer, surgindo flexão composta reta quando a excentricidade varia ao longo das direções  $x$  ou  $y$  do sistema local, seccional, da Figura 3.1, e existe simetria da seção transversal em relação aos mesmos eixos. Quando a excentricidade apresenta componentes em  $x$  e  $y$ , surge uma solicitação de flexão oblíqua. Este tipo de solicitação faz surgir momentos nos eixos  $x$  e  $y$  da seção transversal, com duas relações momento-curvatura, cada uma em relação a um dos eixos. A mesma situação é observada quando as seções são assimétricas.

Devido à forma destas curvas e ao método utilizado, controlando-se o momento atuante, os incrementos de momento são possíveis até o máximo momento resistente, não sendo possível com este tipo de controle obter possíveis ramos descendentes ou patamar da curva após o valor de pico.

As equações não lineares de equilíbrio a serem resolvidas em cada incremento dos momentos são:

$$\begin{cases} N_{Rz} - N_{Sz} = 0 \\ M_{Rx} - M_{Sx} = 0, \\ M_{Ry} - M_{Sy} = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

onde  $N_{Sz}$ ,  $M_{Sx}$  e  $M_{Sy}$  são os esforços solicitantes, e  $N_{Rz}$ ,  $M_{Rx}$  e  $M_{Ry}$  os esforços resistentes dados pela expressão (3.12) em função dos parâmetros  $\epsilon_0$ ,  $k_x$  e  $k_y$  conforme o Capítulo 3.

Expandindo as expressões (4.1) em Série de Taylor, em relação aos parâmetros  $\epsilon_0$ ,  $k_x$  e  $k_y$  e desprezando os termos de segunda ordem, chega-se a

$$\begin{cases} (N_{Rz} - N_{Sz}) + \frac{\partial N_{Rz}}{\partial \epsilon_0} \Delta \epsilon_0 + \frac{\partial N_{Rz}}{\partial k_x} \Delta k_x + \frac{\partial N_{Rz}}{\partial k_y} \Delta k_y = 0 \\ (M_{Rx} - M_{Sx}) + \frac{\partial M_{Rx}}{\partial \epsilon_0} \Delta \epsilon_0 + \frac{\partial M_{Rx}}{\partial k_x} \Delta k_x + \frac{\partial M_{Rx}}{\partial k_y} \Delta k_y = 0. \\ (M_{Ry} - M_{Sy}) + \frac{\partial M_{Ry}}{\partial \epsilon_0} \Delta \epsilon_0 + \frac{\partial M_{Ry}}{\partial k_x} \Delta k_x + \frac{\partial M_{Ry}}{\partial k_y} \Delta k_y = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Na expressão (4.2), os esforços solicitantes são constantes. O esforço normal solicitante é um dado de entrada e os momentos solicitantes são obtidos a partir do esforço normal multiplicado por uma excentricidade para cada incremento, durante o qual o sistema será resolvido. O valor do incremento em excentricidade é um dado de entrada do problema e através dele as excentricidades ao longo dos eixos  $x$  e  $y$  são obtidas.

Obtém-se, a partir de (4.2), o sistema linearizado em torno do ponto de solitação,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_{Rz}}{\partial \epsilon_0} & \frac{\partial N_{Rz}}{\partial k_x} & \frac{\partial N_{Rz}}{\partial k_y} \\ \frac{\partial M_{Rx}}{\partial \epsilon_0} & \frac{\partial M_{Rx}}{\partial k_x} & \frac{\partial M_{Rx}}{\partial k_y} \\ \frac{\partial M_{Ry}}{\partial \epsilon_0} & \frac{\partial M_{Ry}}{\partial k_x} & \frac{\partial M_{Ry}}{\partial k_y} \end{bmatrix}}_A \times \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \epsilon_0 \\ \Delta k_x \\ \Delta k_y \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} (N_{Sz} - N_{Rz}) \\ (M_{Sx} - M_{Rx}) \\ (M_{Sy} - M_{Ry}) \end{bmatrix}}_b. \quad (4.3)$$

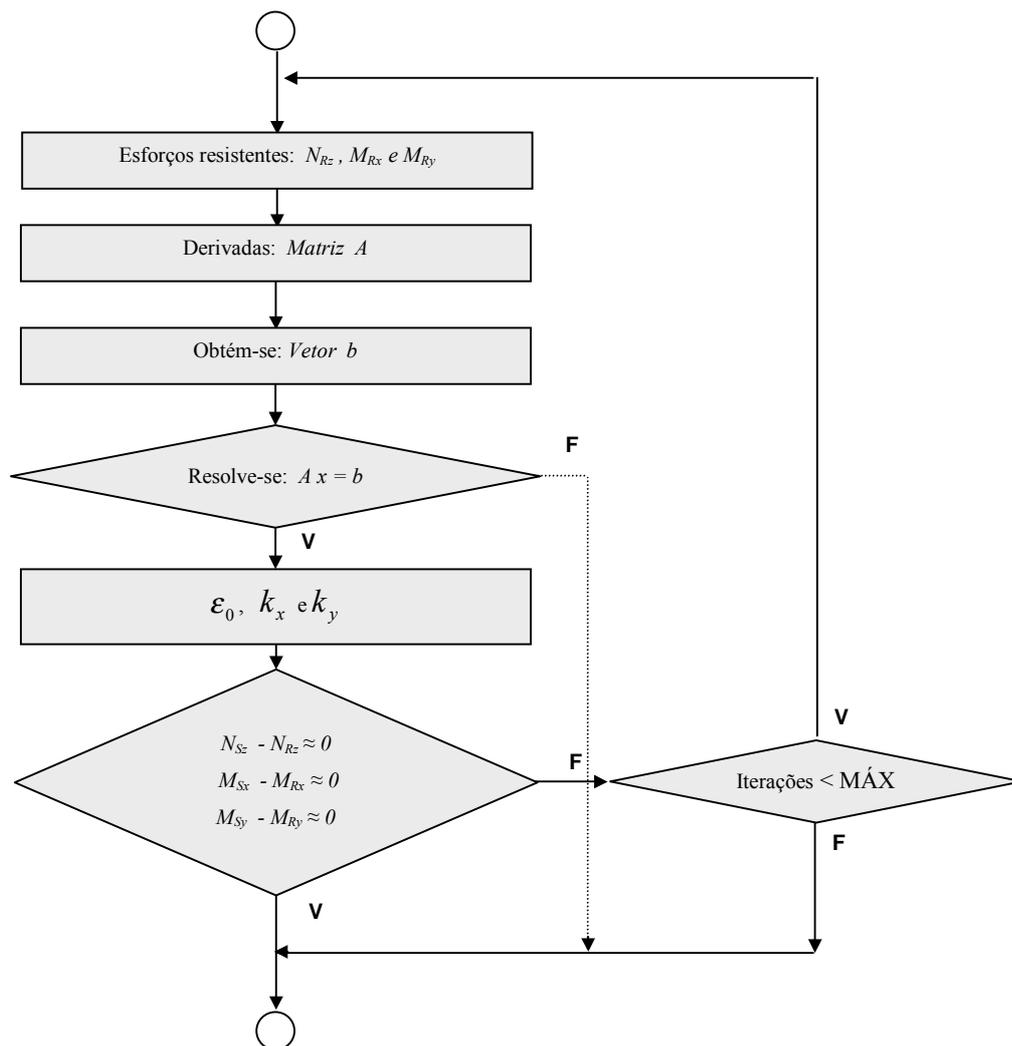


Figura 4.1 Fluxograma do processo iterativo utilizado em um incremento no Método de Newton Raphson para controle do momento.

As derivadas na matriz  $A$  são obtidas analiticamente a partir das expressões (3.12) utilizando-se o Teorema de Green, de forma análoga àquela demonstrada no Capítulo 3. As expressões são apresentadas no item 4.3.

Para cada incremento dos momentos solicitantes, as derivadas são obtidas, obtêm-se também os esforços resistentes e resolve-se o sistema linearizado.

As etapas de obtenção das derivadas, esforços resistentes e resolução do sistema, são repetidas até que as expressões do vetor  $b$ , mostrado na expressão (4.3), estejam

próximas de zero, até que o sistema não possa ser resolvido ou até que seja atingido o limite máximo de iterações. A cada etapa, os valores de  $\Delta\varepsilon_0$ ,  $\Delta k_x$  e  $\Delta k_y$  são acrescidos. No final do processo iterativo têm-se os valores de  $\varepsilon_0$ ,  $k_x$  e  $k_y$  para os quais os esforços resistentes são aproximadamente iguais aos solicitantes, de acordo com uma dada tolerância.

Na Figura 4.1, tem-se a estrutura típica do processo iterativo dos algoritmos que utilizam o método de Newton Raphson para controle dos momentos. O fluxograma apresentado demonstra os passos iterativos realizados a cada incremento dos esforços solicitantes.

#### 4.2.2 Controle da Curvatura

Este procedimento, similar ao apresentado anteriormente, controla, através de incrementos, a curvatura da seção. Assim, em cada incremento, o valor da curvatura em cada plano é conhecido.

Com este algoritmo, consegue-se obter ramos descendentes das relações momento-curvatura, ou algum patamar que o gráfico possa apresentar, por exemplo, devido ao escoamento do aço.

Abaixo, apresentam-se as equações não lineares que são resolvidas iterativamente para cada incremento das curvaturas.

$$\begin{cases} N_{Rz} - N_{Sz} = 0 \\ M_{Rx} - N_{Sz}e_x = 0 \\ M_{Ry} - N_{Sz}e_y = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

O momento solicitante será obtido pela multiplicação do esforço normal solicitante  $N_{Sz}$  por uma excentricidade  $e_x$  e  $e_y$ , a determinar.

Expandindo as expressões (4.4) em Série de Taylor, em relação aos parâmetros  $\varepsilon_0$ ,  $e_x$  e  $e_y$ , desprezando-se os termos de segunda ordem, chega-se ao sistema linear

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_{Rz}}{\partial \varepsilon_0} & 0 & 0 \\ \frac{\partial M_{Rx}}{\partial \varepsilon_0} & -N_{Sz} & 0 \\ \frac{\partial M_{Ry}}{\partial \varepsilon_0} & 0 & -N_{Sz} \end{bmatrix}}_A \times \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_0 \\ \Delta e_x \\ \Delta e_y \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} (N_{Sz} - N_{Rz}) \\ (N_{Sz} e_x - M_{Rx}) \\ (N_{Sz} e_y - M_{Ry}) \end{bmatrix}}_b. \quad (4.5)$$

Para cada incremento, as derivadas são obtidas, obtêm-se os esforços resistentes e resolve-se o sistema. As etapas de obtenção das derivadas, esforços resistentes, e resolução do sistema, são repetidas até que as expressões do vetor  $b$  estejam próximas de zero, até que o sistema não possa ser resolvido ou até que seja ultrapassado o limite máximo de iterações. A cada iteração, os valores de  $\Delta \varepsilon_0$ ,  $\Delta e_x$  e  $\Delta e_y$  são somados aos valores iniciais. No final do processo iterativo tem-se os valores de  $\varepsilon_0$ ,  $e_x$  e  $e_y$  para os quais os esforços resistentes são aproximadamente iguais aos solicitantes. Tem-se então um ponto do diagrama momento-curvatura.

### 4.3 DERIVADAS DOS ESFORÇOS RESISTENTES

As derivadas encontradas nas matrizes  $A$  das expressões (4.3) e (4.5), são obtidas analiticamente a partir das expressões (3.12) utilizando-se o Teorema de Green de forma análoga àquela demonstrada no Capítulo 3 para obtenção dos esforços na seção.

Logo, a partir das expressões (3.19) à (3.25), que dão o esforço normal resistente  $N_{Rz}$ , tem-se a derivada

$$\frac{\partial N_{Rz}}{\partial \varepsilon_0} = \underbrace{\iint_{A_c} \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon_0} dA}_{\text{concreto}} + \underbrace{\iint_{A_p} \frac{\partial \sigma_p}{\partial \varepsilon_0} dA - \iint_{A_p} \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon_0} dA}_{\text{concreto sobreposto}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_f} \left( \iint_{A_{fi}} \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon_0} dA \right)}_{\text{aberturas}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_s} A_{si} \frac{\partial \sigma_{si}}{\partial \varepsilon_0}}_{\text{armaduras}}. \quad (4.6)$$

onde para o componente concreto, tem-se

$$\iint_{A_c} \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon_o} dA = \iint_{A_{c1}} \underbrace{\frac{\partial(a\varepsilon + b\varepsilon^2)}{\partial \varepsilon_o}}_{I'_{A_{c1}}} f_c dA. \quad (4.7)$$

Na expressão (4.7)  $A_{c1}$  é a área do componente concreto correspondente à faixa do diagrama tensão-deformação descrito pela relação parabólica, conforme a Figura 3.2. Obtém-se estas faixas através de um algoritmo de isofaixas, conforme o Capítulo 3.

Escrevendo as variáveis de deformação em termos de  $\varepsilon_o$ ,  $k_x$  e  $k_y$ , tem-se para a integral  $I'_{A_{c1}}$  da expressão (4.7)

$$\begin{aligned} I'_{A_{c1}} &= \iint_{A_{c1}} \frac{\partial(a\varepsilon + b\varepsilon^2)}{\partial \varepsilon_o} f_c dA = \\ &= (af_c + 2bf_c \varepsilon_o)(I_{00})_{A_{c1}} - (2bf_c k_y)(I_{10})_{A_{c1}} + (2bf_c k_x)(I_{01})_{A_{c1}} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Para o perfil a parcela correspondente em (4.6) é dada pela expressão

$$\iint_{A_p} \frac{\partial \sigma_p}{\partial \varepsilon_o} dA. \quad (4.9)$$

Onde as áreas  $A_{p1}$ ,  $A_{p2}$  e  $A_{p3}$  correspondentes às faixas do diagrama tensão-deformação do aço do perfil. Logo, tem-se para expressão (4.9)

$$\begin{aligned} \iint_{A_p} \frac{\partial \sigma_p}{\partial \varepsilon_o} dA &= \iint_{A_{p3}} \frac{\partial \sigma_p}{\partial \varepsilon_o} dA + \iint_{A_{p2}} \frac{\partial \sigma_p}{\partial \varepsilon_o} dA + \iint_{A_{p1}} \frac{\partial \sigma_p}{\partial \varepsilon_o} dA \\ &= \iint_{A_{p3}} \frac{\partial(-f_y)}{\partial \varepsilon_o} dA + \iint_{A_{p2}} \frac{\partial(E_p \varepsilon_p)}{\partial \varepsilon_o} dA + \iint_{A_{p1}} \frac{\partial(f_y)}{\partial \varepsilon_o} dA. \\ &= \iint_{A_{p2}} E_p \frac{\partial(\varepsilon_o + k_x y - k_y x)}{\partial \varepsilon_o} dA = \underbrace{\iint_{A_{p2}} E_p dA}_{I'_{A_{p2}}} \end{aligned} \quad (4.10)$$

e, para a integral  $I'_{A_{p2}}$ , utilizando a expressão (3.16) tem-se

$$I'_{A_{p2}} = E_p \iint_{A_{p2}} dA = E_p (I_{00})_{A_{p2}}. \quad (4.11)$$

Logo, pode-se escrever (4.9) da seguinte forma

$$\iint_{A_p} \frac{\partial \sigma_p}{\partial \varepsilon_0} dA = E_p (I_{00})_{A_{p2}}. \quad (4.12)$$

A parcela que aparece na expressão (4.6) correspondente ao concreto sobreposto pelo perfil é obtida aplicando-se a expressão (4.7) na poligonal que define o perfil.

Para a consideração das aberturas na seção, expressão (4.6), como estes tem os vértices definidos no sentido horário, simplesmente aplica-se a expressão (4.7) na poligonal da abertura, resultando em uma integral de sentido contrário.

Para as armaduras, expressão (4.6), a derivada das tensões nestas é obtida a partir das expressões (3.9) ou (3.10).

As expressões de  $\frac{\partial M_{Rx}}{\partial \varepsilon_0}$  e  $\frac{\partial M_{Ry}}{\partial \varepsilon_0}$  são obtidas através da expressão (4.6)

multiplicada pelas variáveis  $y$  e  $-x$ , respectivamente. As demais derivadas dos esforços em relação a  $k_x$  e  $k_y$  são obtidas de forma análoga e portanto não serão apresentadas.

#### 4.4 ESTADO LIMITE ÚLTIMO

Como critério de parada para as relações momento-curvatura, verificam-se os estados limites últimos de acordo com o diagrama mostrado na Figura 4.2. Este diagrama está de acordo com o Código Modelo CEB (CEB, 1990) para concretos com  $f_{ck} \leq 80$  MPa. Porém com a limitação de  $\epsilon_{cu} \leq -0.0022$ , este diagrama foi estendido para concretos de  $f_{ck} > 80$  MPa.

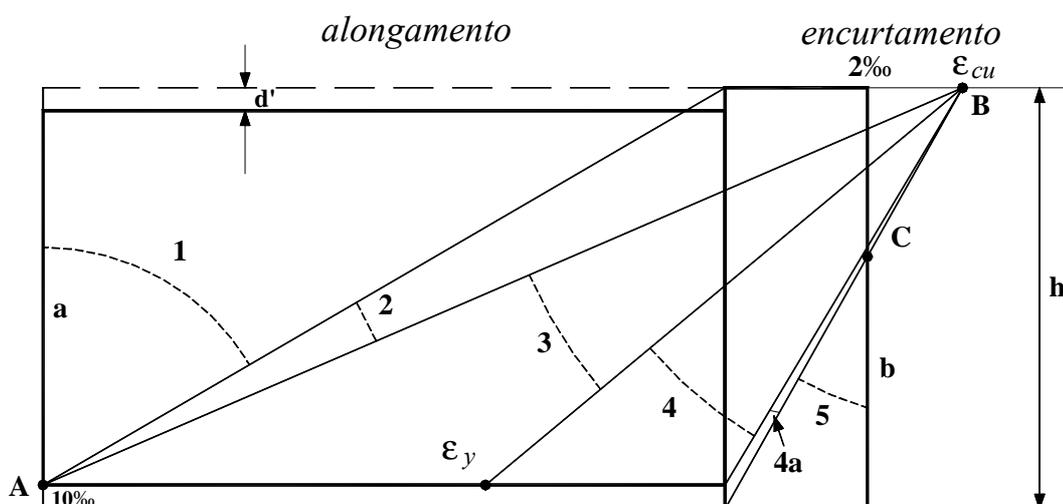


Figura 4.2 Representação dos domínios de deformação correspondentes ao estado limite último de uma seção.

Algumas observações devem ser feitas. O valor de  $\epsilon_{cu}$  varia de acordo com o valor do  $f_{ck}$ , conforme as expressões (3.4) e (3.5) e com a limitação de  $\epsilon_{cu} \leq -0.0022$ . Na implementação computacional, o estágio 4a mostrado na Figura 4.2 foi simplificado representando o início do estágio 5.

Quando é necessária a verificação do estado limite último na obtenção das relações momento curvatura, a cada incremento do momento solicitante ou curvatura segundo os algoritmos descritos anteriormente, o programa verifica se algum estado limite foi atingido segundo o diagrama da Figura 4.2. Atingido algum estado limite último, o processo é interrompido.

## 4.5 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Utilizou-se a metodologia de programação orientada a objetos. Dentro deste paradigma, foi desenvolvida uma classe que tem as propriedades e principais funções das seções transversais mistas de forma genérica, conforme apresentado no Capítulo 3. Como uma aplicação particular, pode-se ter uma seção de concreto armado, ou perfil metálico. Cada objeto da classe guarda suas próprias poligonais que definem a seção, as propriedades da seção como resistência, coeficientes de minoração da resistência. Cada objeto também tem suas próprias funções de obtenção das relações momento-curvatura, superfícies de interação, configuração deformada e outras implementadas.

## 4.6 EXEMPLOS

Em seguida são apresentados exemplos de obtenção das relações momento-curvatura em seções mistas. Foram utilizados os algoritmos desenvolvidos, a partir dos quais se obtiveram as relações momento-curvatura fazendo o controle do momento ou curvatura da seção. No primeiro exemplo, tem-se um pilar parcialmente envolvido para o qual foram obtidas as curvas em relação aos eixos de maior e menor inércia da seção. No segundo exemplo tem-se um pilar tubular circular preenchido.

### 4.6.1 Primeiro Exemplo: Pilar Parcialmente Envolvido

Como um primeiro exemplo da utilização da formulação apresentada foram obtidas as relações momento-curvatura de um pilar misto parcialmente envolvido com seção mostrada na Figura 4.3. O aço do perfil possui resistência ao escoamento de 250 MPa e módulo de elasticidade de 205000 MPa. O concreto utilizado possui  $f_{ck}$  de 20 MPa. Os coeficientes de resistência do concreto e do aço do perfil foram tomados iguais a 1.40 e 1.10 respectivamente. Para compressão simples,  $\varepsilon_o = -0.002$ , encontra-se um esforço normal resistente  $P_u$  igual a 6382 kN.

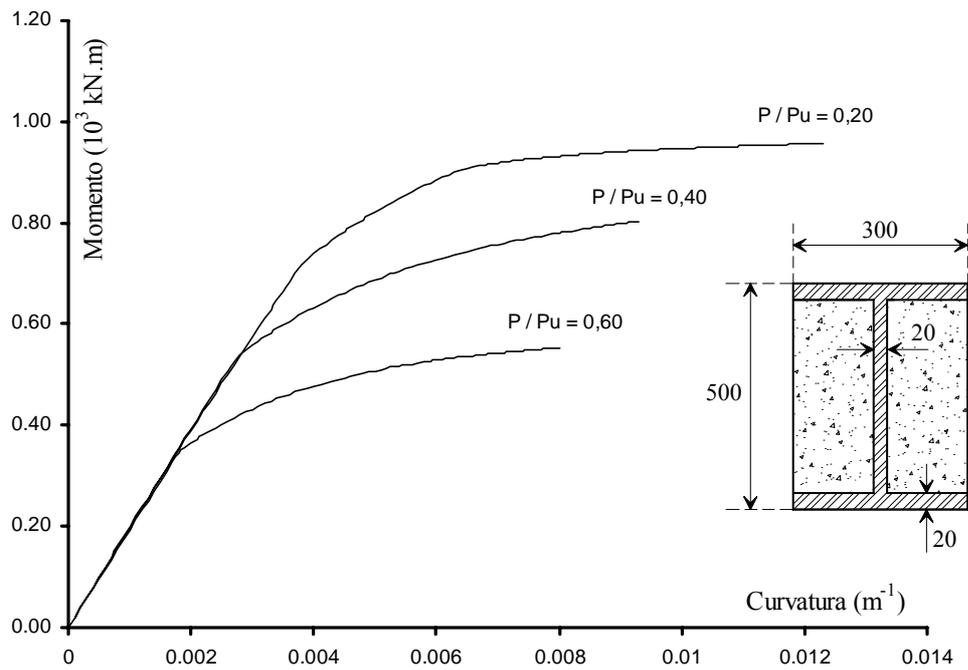


Figura 4.3 Relações momento-curvatura para o eixo de maior inércia, pilar parcialmente envolvido (dimensões da seção em *mm*).

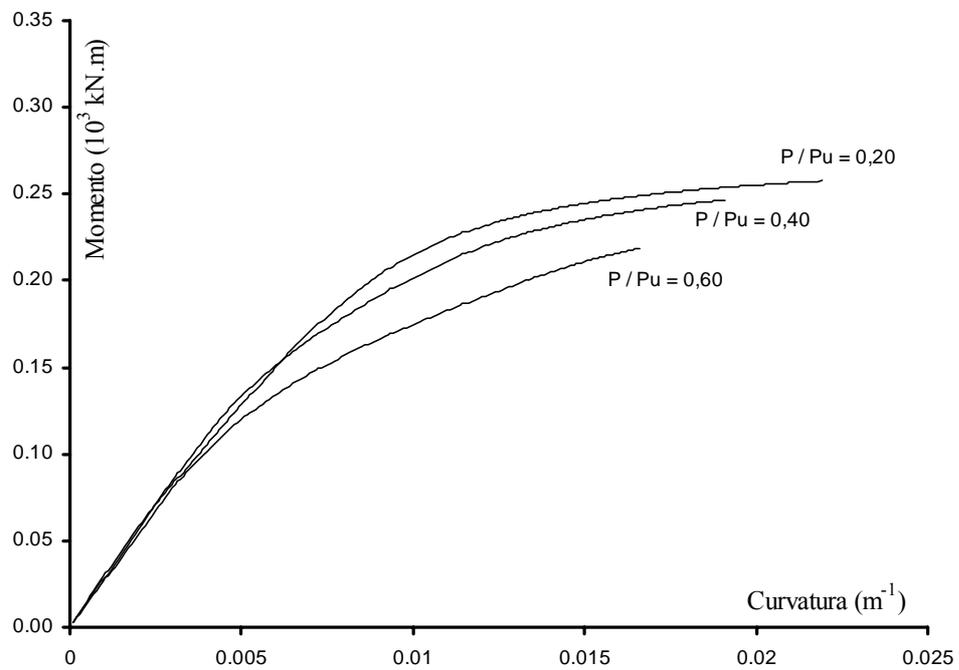


Figura 4.4 Relações momento-curvatura para o eixo de menor inércia, pilar parcialmente envolvido.

As relações momento-curvatura foram obtidas para flexão em torno do eixo de menor e maior inércia para as relações de esforço normal atuante  $P/P_u$  iguais a 0.20, 0.40 e 0.60. Os resultados são mostrados nos gráficos das Figura 4.3 e 4.4. Para obtenção dos resultados utilizou-se o Método de Newton Raphson com controle da curvatura da seção.

#### 4.6.2 Segundo Exemplo: Pilar Preenchido

Neste exemplo, utilizou-se o controle de momentos para obtenção das relações momento-curvatura de um perfil circular preenchido com diâmetro externo de 508 mm e espessura de 20 mm com  $f_y$  de 300 MPa e módulo de elasticidade de 205000 MPa. O concreto utilizado possui  $f_{ck}$  de 30 MPa, e é considerado confinado segundo a formulação apresentada. Os coeficientes de minoração das resistências do concreto e do aço do perfil foram tomados iguais a 1.40 e 1.10 respectivamente. Para compressão simples,  $\varepsilon_o = -0.002$ , encontrou-se um esforço normal resistente  $P_u$  igual a 11910 kN.

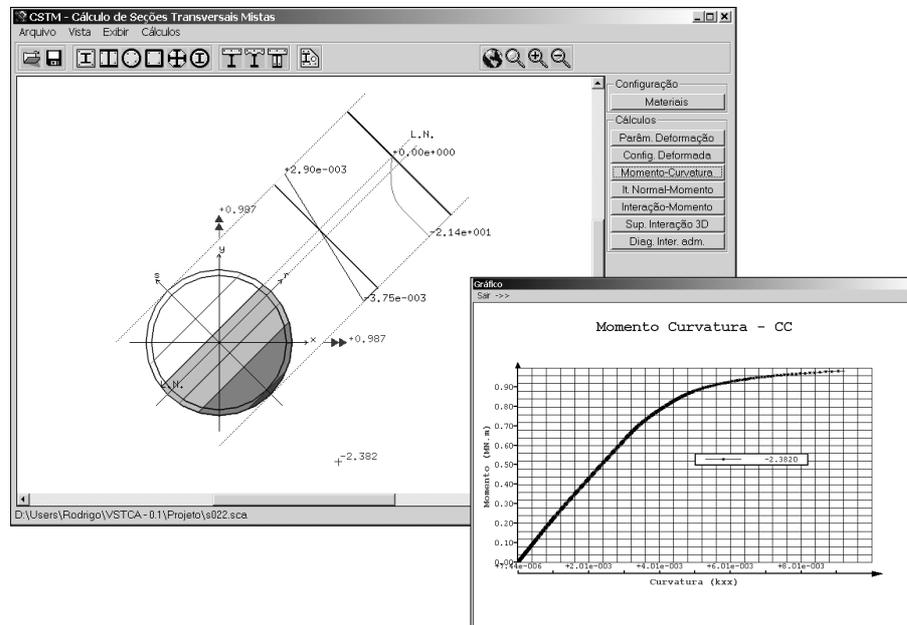


Figura 4.5 Obtenção da relação momento-curvatura no programa CSTM de uma seção tubular circular preenchida.

O diagrama mostrado na Figura 4.5 e os gráficos da Figura 4.6, foram obtidos para uma inclinação da linha neutra de  $-45^\circ$ , que é indiferente para o pilar analisado, gerando momentos iguais em relação aos eixos  $x$  e  $y$  do perfil.

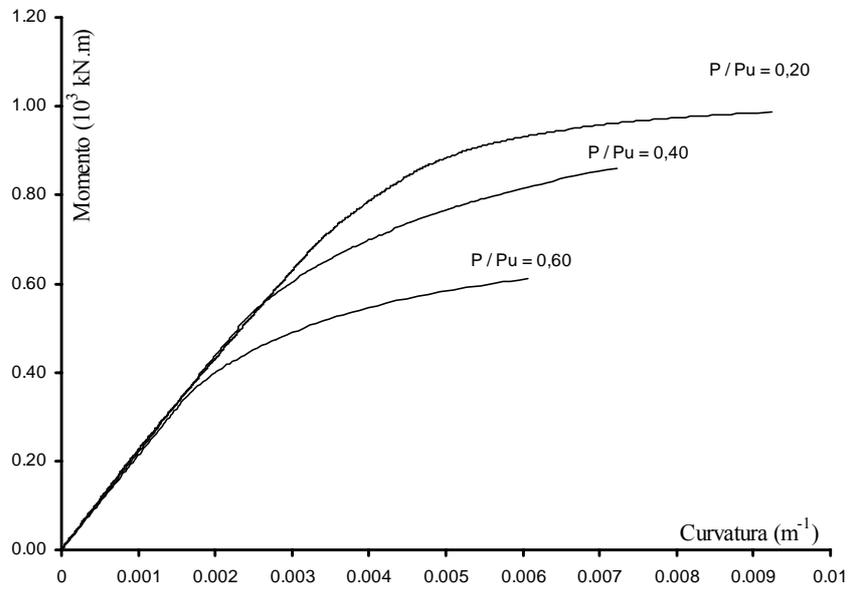


Figura 4.6 Relações momento-curvatura em torno dos eixos  $x$  e  $y$ .

# SUPERFÍCIES DE INTERAÇÃO

## 5.1 INTRODUÇÃO

Muitas pesquisas com intuito de estudar o comportamento e resistência de seções transversais mistas tem sido conduzidas. Alguns pesquisadores, como Roik e Bergmann (1990), propuseram métodos simplificados para análise de seções mistas retangulares sob flexão composta oblíqua. Normas como o Eurocode 4 (1994) propõem métodos simplificados baseados em análise rígido-plástica, nem sempre aplicável a todas as seções. Porém, a grande variabilidade de seções transversais mistas, podendo ser assimétricas, na forma ou carregamento, e a necessidade de uma análise mais realista, como, por exemplo, obter respostas das estruturas em serviço, torna necessário o desenvolvimento de metodologias mais condizentes com o comportamento destas seções. Algumas pesquisas com esse intuito foram desenvolvidas e vários métodos para obtenção das superfícies de interação têm sido propostos. Pode-se citar, por exemplo, os trabalhos de Chen *et al.* (2001), utilizando o método iterativo quasi-Newton e de Sfakianakis (2002) que utilizou um modelo computacional gráfico baseado no modelo de fibras.

Neste capítulo, faz-se a obtenção de superfícies de interação em seções mistas genéricas a partir de uma aplicação do Método de Newton Raphson e a partir de um parâmetro de deformação.

A falha de uma seção sob flexão, para um dado valor de esforço normal, corresponde ao maior valor de momento, do diagrama momento-curvatura, conforme o Capítulo 4. O diagrama momento-curvatura pode ser obtido através do Método de

Newton Raphson. Obtendo os diagramas para direções de excentricidade variadas, obtém-se os máximos momentos para as diferentes direções e, com estes valores, obtém-se a superfície de interação de momentos. Alterando o valor do esforço normal e repetindo o processo citado, pode-se construir a superfície de interação espacial, normal e momentos em duas direções.

A utilização do parâmetro de deformação (Melo, 2000) elimina os problemas de convergência que podem ocorrer em outros métodos (Newton Raphson, quasi-Newton etc.). Este parâmetro descreve as deformadas da seção no estado limite último. Variando o parâmetro de deformação e o ângulo de inclinação da linha neutra, percorre-se as possíveis configurações de falha da seção obtendo-se os pontos que constituem a superfície de interação espacial.

## **5.2 DEFINIÇÃO DA SUPERFÍCIE DE INTERAÇÃO**

A superfície de interação espacial é o lugar geométrico dos pontos  $(N_z, M_x, M_y)$  que correspondem à resistência última da seção. A superfície depende da geometria da seção, dos materiais empregados e dos limites de deformação fixados como últimos.

## **5.3 OBTENÇÃO DAS SUPERFÍCIES DE INTERAÇÃO**

A seguir, apresentam-se as duas formulações utilizadas para a obtenção das superfícies de interação em seções transversais genéricas.

### **5.3.1 Método de Newton Raphson**

A falha de uma seção corresponde ao máximo valor do diagrama momento-curvatura, sob esforço normal constante. No Capítulo 4 é descrita uma formulação para obtenção destes diagramas utilizando-se o método de Newton Raphson. Naquele capítulo, foram implementados dois algoritmos: um que controla o momento atuante e outro que controla a curvatura da seção. No algoritmo que controla o momento atuante, só é possível a obtenção do diagrama momento-curvatura até o ponto

de momento máximo, para o esforço normal fixado. Esses pontos, obtidos em diferentes direções de incremento da excentricidade, formam a superfície de interação dos momentos.

Fixado um valor de esforço normal, obtém-se de forma iterativa, para cada incremento de momento, os parâmetros que definem a configuração deformada da seção mista, que resiste aos esforços solicitantes. Os momentos são incrementados através da multiplicação de uma excentricidade pelo esforço normal solicitante. Esses incrementos da excentricidade podem ser em uma direção qualquer, sendo que excentricidade com componentes não nulas em  $x$  e  $y$  configuram uma solicitação de flexão oblíqua. Obtém-se a flexão reta quando uma das componentes da excentricidade,  $x$  ou  $y$  é tomada igual a zero.

Utilizando o Método de Newton Raphson através do controle do momento atuante, pode-se obter o máximo momento resistido pela seção para uma dada direção de incrementos dos momentos. Variando a direção da excentricidade de 0 a 360°, obtém-se toda a superfície de interação de momentos para um dado esforço normal.

A superfície espacial formada pelos pontos ( $N_z$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ) é obtida a partir da variação do esforço normal máximo de compressão ao esforço normal máximo de tração, em passos discretos, repetindo o processo de obtenção da superfície de interação dos momentos. Obtidas as várias superfícies de interação de momentos  $M_x$  e  $M_y$ , para cada valor de esforço normal dentro do intervalo considerado, obtém-se a superfície espacial.

### **5.3.2 Parâmetro de Deformação**

Para definir a configuração deformada de uma seção em flexão oblíqua, são necessários pelo menos três parâmetros, por exemplo  $\varepsilon_0$ ,  $k_x$  e  $k_y$ . Porém, se a descrição da deformada corresponde a um estado limite último, pode-se definir apenas dois parâmetros, já que algum valor de deformação sempre estará fixo.

O emprego do parâmetro de deformação  $D$  foi sugerido por Werner (1974), posteriormente, redefinido de acordo com a norma brasileira e estabelecido por pesquisadores da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (Ferreira, 1986,

Dumont *et al.*, 1987). Este parâmetro tem sido utilizado em vários trabalhos como o de Melo (2000), que propôs uma definição diferente de sua representação.

O parâmetro fixo é tirado dos domínios de deformação mostrados na Figura 4.2. A partir destas informações, ajustam-se equações que, a partir do valor do parâmetro  $D$  e do ângulo  $\alpha$ , ângulo de inclinação da linha neutra, permitem percorrer as configurações deformadas para o estado limite último da seção.

Uma inovação da determinação do parâmetro  $D$  apresentada neste trabalho, foi a consideração desse parâmetro para concretos de alta resistência e também a consideração da fluência de forma simplificada.

A fluência foi considerada através da translação do diagrama tensão-deformação do concreto através do coeficiente  $\phi$  (Fusco, 1986; Han e Yang, 2003; NBR 6118, 2003), Figura 5.1. Esta consideração também é feita quando se trabalha com o método de Newton Raphson na obtenção de superfícies de interação, na obtenção dos esforços e na obtenção das relações momento-curvatura.

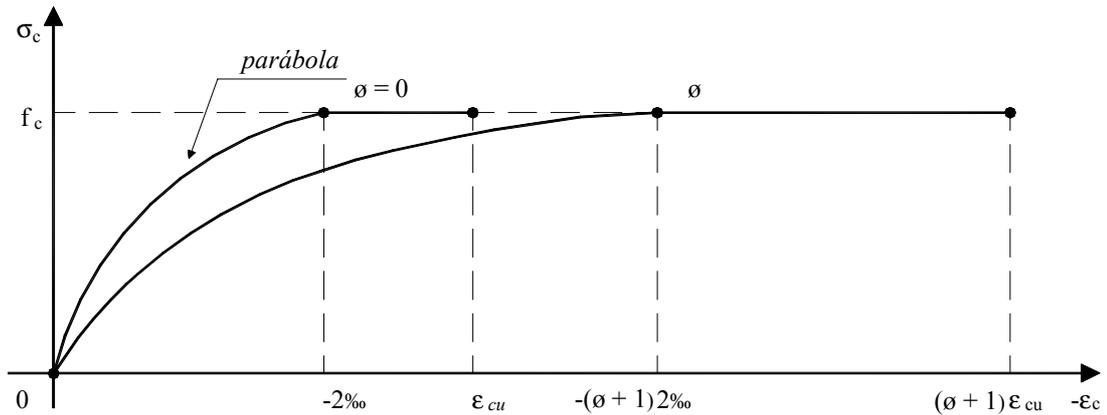


Figura 5.1 Consideração da fluência no diagrama tensão-deformação do concreto.

Para os estados limites últimos, que foram adotados iguais aos do concreto armado, definidos na Figura 4.2, em todos os domínios de deformação tem-se fixada uma das deformações, superior ou inferior, e no domínio 5, tem-se as expressões

$$\epsilon_c^{\min} - \left( \frac{0.002(\phi + 1) + \epsilon_{cuf}}{0.002(\phi + 1)} \right) \epsilon_c^{\max} = \epsilon_{cuf} \quad (5.1)$$

para compressão em  $\varepsilon_c^{min}$  e

$$\varepsilon_c^{max} - \left( \frac{0.002(\phi + 1) + \varepsilon_{cuf}}{0.002(\phi + 1)} \right) \varepsilon_c^{min} = \varepsilon_{cuf} \quad (5.2)$$

para compressão em  $\varepsilon_c^{max}$ , que fixam o ponto  $C$ , mostrado na Figura 4.2. Em (5.1) e (5.2)  $\varepsilon_c^{min}$  corresponde à deformação na fibra do componente concreto de menor coordenada  $\eta$  no sistema seccional  $\zeta\eta\zeta$ , e  $\varepsilon_c^{max}$  corresponde à deformação na fibra do componente concreto de maior coordenada  $\eta$  do sistema  $\zeta\eta\zeta$ . Nas expressões (5.1) e (5.2) tem-se

$$\varepsilon_{cuf} = \varepsilon_{cu}(\phi + 1) . \quad (5.3)$$

Nas equações seguintes,  $\varepsilon_s^{min}$  e  $\varepsilon_s^{max}$  têm o mesmo significado de  $\varepsilon_c^{min}$  e  $\varepsilon_c^{max}$  porém se referem aos vértices da poligonal que define o perfil ou à armadura pontual, de acordo com a Figura 4.2. Apresentam-se a seguir as equações que definem os estados limites últimos em função do valor do parâmetro de deformação  $D$ .

Observando a Figura 4.2, para  $0 \leq D \leq 1$  tem-se o domínio 1, onde

$$\begin{aligned} \varepsilon_s^{max} &= 0.010 \\ \varepsilon_c^{min} &= (1 - D) / 100, \end{aligned} \quad (5.4)$$

para  $D \leq 8$  tem-se o domínio 2, onde

$$\begin{aligned} \varepsilon_s^{max} &= 0.010 \\ \varepsilon_c^{min} &= ((1 - D) / 2000)(\varepsilon_{cuf} / (-0.0035)), \end{aligned} \quad (5.5)$$

para  $D \leq 18$  tem-se os domínios 3 e 4, onde

$$\begin{aligned}\varepsilon_s^{máx} &= (18 - D) / 1000 \\ \varepsilon_c^{mín} &= \varepsilon_{cuf},\end{aligned}\tag{5.6}$$

neste domínio deve-se verificar se não há compressão na fibra de concreto mais próxima ao lado tracionado da seção. Esta situação ocorre sempre que se tem seções preenchidas com concreto.

Para  $D < 19$  tem-se o domínio 4a que foi simplificado, passando-se diretamente ao início do domínio 5, logo

$$\begin{aligned}\varepsilon_c^{máx} &= 0 \\ \varepsilon_c^{mín} &= \varepsilon_{cuf},\end{aligned}\tag{5.7}$$

para  $D \leq 26$  tem-se o domínio 5, onde

$$\begin{aligned}\varepsilon_c^{máx} &= ((19 - D) / 3500) (\phi + 1) \\ \varepsilon_c^{mín} &= ( ((0.002 (\phi + 1)) + \varepsilon_{cuf}) / (0.002 (\phi + 1)) ) \varepsilon_c^{máx} + \varepsilon_{cuf}.\end{aligned}\tag{5.8}$$

A partir deste ponto, há inversão dos pontos de verificação de estado limite último. Então, para  $D \leq 33$  tem-se o domínio 5, onde

$$\begin{aligned}\varepsilon_c^{mín} &= ((D - 33) 0.002 / 7) (\phi + 1) \\ \varepsilon_c^{máx} &= ( ((0.002 (\phi + 1)) + \varepsilon_{cuf}) / (0.002 (\phi + 1)) ) \varepsilon_c^{mín} + \varepsilon_{cuf},\end{aligned}\tag{5.9}$$

para  $D < 34$  tem-se o domínio 4a, desprezado, logo

$$\varepsilon_c^{min} = 0$$

$$\varepsilon_c^{max} = \varepsilon_{cuf}, \quad (5.10)$$

para  $D \leq 44$  tem-se o domínio 4 e 3, onde

$$\varepsilon_c^{max} = \varepsilon_{cuf}$$

$$\varepsilon_s^{min} = (D - 34) / 1000, \quad (5.11)$$

para  $D \leq 51$  tem-se o domínio 2, onde

$$\varepsilon_c^{max} = ((D - 51) / 2000)(\varepsilon_{cuf} / (-0.0035))$$

$$\varepsilon_s^{min} = 0.010, \quad (5.12)$$

para  $D \leq 52$  tem-se o domínio 1, onde

$$\varepsilon_c^{max} = (D - 51) / 100$$

$$\varepsilon_s^{min} = 0.010. \quad (5.13)$$

Pode-se verificar que as deformações máximas são funções periódicas do parâmetro de deformação  $D$ .

Com as equações apresentadas, pode-se obter de forma direta os parâmetros de deformação  $\varepsilon_0$ ,  $k_x$  e  $k_y$  para cada estado limite último através das expressões

$$k_0 = (\varepsilon(\eta^{max}) - \varepsilon(\eta^{min})) / (\eta^{max} - \eta^{min}) \quad (5.14a)$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon(\eta^{max}) - k_0 \eta^{max}$$

$$k_x = k_o \cos(\alpha)$$

$$k_y = k_o \sin(\alpha) , \tag{5.14b}$$

onde  $\varepsilon(\eta^{m\acute{a}x})$  e  $\varepsilon(\eta^{m\grave{i}n})$  correspondem aos vértices da poligonal ou fibra de maior e menor coordenada  $\eta$  do sistema seccional  $\xi\eta\zeta$ , Figura 3.1, podendo ser uma fibra do componente concreto,  $\varepsilon_c^{m\acute{a}x}$  ou  $\varepsilon_c^{m\grave{i}n}$  respectivamente, um vértice da poligonal do perfil ou barra de armadura conforme as expressões (5.4)  (5.13),  $\varepsilon_s^{m\acute{a}x}$  ou  $\varepsilon_s^{m\grave{i}n}$  respectivamente.  $\eta^{m\acute{a}x}$  e  $\eta^{m\grave{i}n}$  correspondem às deformações  $\varepsilon(\eta^{m\acute{a}x})$  e  $\varepsilon(\eta^{m\grave{i}n})$ , respectivamente.

Variando o valor do parâmetro de deformação  $D$  de 0 a 52, para um valor fixo do ângulo da linha neutra  $\alpha$ , obtem-se os pontos da superfície de interação normal-momento. Repetindo este processo para diferentes valores de  $\alpha$ , obtem-se a superfície de interação espacial  $N_z$ ,  $M_x$  e  $M_y$ , formada pelos vários vetores obtidos. Tem-se então um conjunto de pontos  $(N_z, M_x, M_y)$  que representam os estados limites últimos da seção.

Para obter a superfície de interação de momentos, para um valor fixo de esforço normal, desenvolveu-se um algoritmo que dado o valor do esforço normal para o qual se deseja a superfície de interação de momentos, esse varre o vetor correspondente a cada ângulo  $\alpha$  detectando os pontos de esforço normal imediatamente superior e inferior ao esforço dado. Os momentos correspondentes são então interpolados linearmente. Repetindo esse processo para todos os valores de  $\alpha$ , obtem-se a superfície de interação de momentos para o esforço normal dado.

#### 5.4 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

A formulação apresentada foi implementada no programa CSTM, *Cálculo de Seções Transversais Mistas*, sendo essa parte de algumas das funções que compõem a classe desenvolvida para análise de seções transversais conforme citado no Capítulo 3.



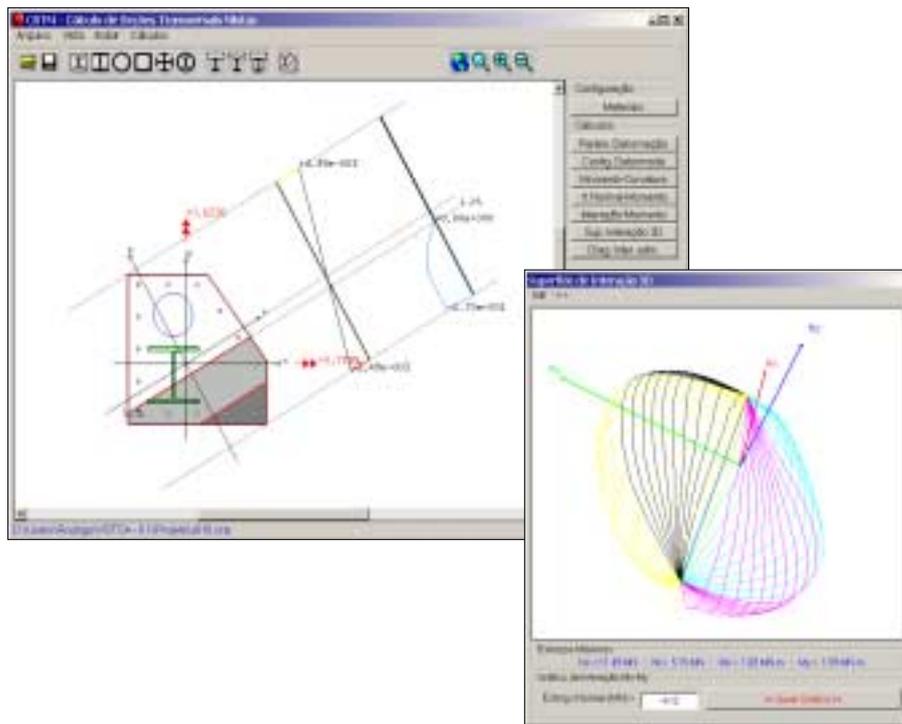


Figura 5.3 Superfície de interação espacial obtida no CSTM através da utilização do parâmetro  $D$ .

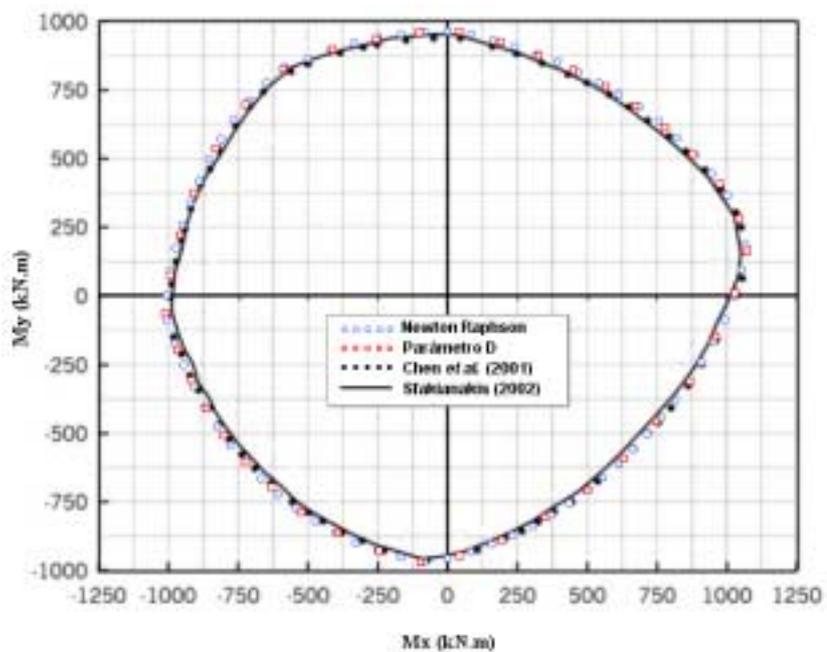


Figura 5.4 Comparação das superfícies de interação de momentos para esforço normal de  $-4120$  kN (Sfakianakis, 2002; Chen *et al.*, 2001).

### 5.5.2 Segundo Exemplo: Seções Mistas Assimétricas (Roik e Bergmann, 1990)

Neste exemplo, comparou-se os resultados do CSTM com os resultados dos ensaios das seções apresentadas na Figura 5.5. Estas seções foram analisadas por Roik e Bergmann (1990). Três espécimes foram ensaiados para cada seção; as características da seção estão listadas na Tabela 5.1. Os resultados são apresentados na Tabela 5.2.

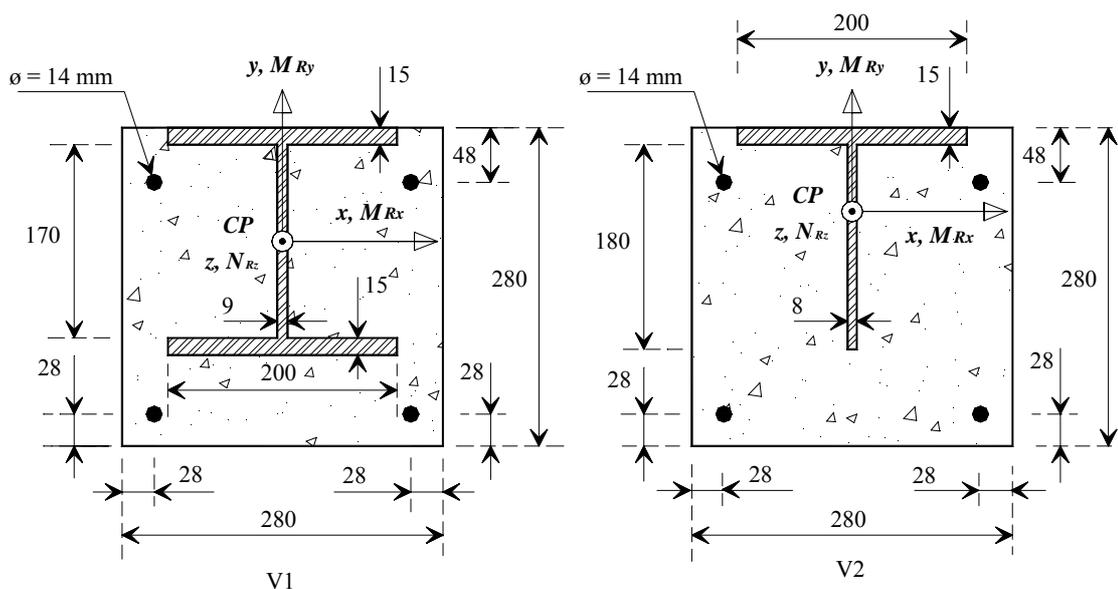


Figura 5.5 Seções assimétricas analisadas experimentalmente por Roik e Bergmann (1990), dimensões em *mm*.

Tabela 5.1 Propriedades dos materiais (Roik e Bergmann, 1990).

Protótipo Analisado (1)	Seção Ident. (2)	$f_{ck}$ (MPa) (3)	$f_{y,flange}$ (MPa) (4)	$f_{y,alma}$ (MPa) (5)	$f_{y,barras}$ (MPa) (6)
V11, V12, V13	V1	37.4	206.0	220.0	420.0
V21, V22, V23	V2	37.4	255.0	239.0	420.0

Na Tabela 5.1 percebe-se que o flange dos perfis tem tensão de escoamento diferente da alma. No programa, utiliza-se somente um tipo de aço para o perfil. A tensão de escoamento utilizada foi uma média aritmética em relação à área dos flanges e alma resultando para a seção V1,  $f_y = 208.84$  MPa e para a seção V2,  $f_y = 249.81$  MPa. O módulo de elasticidade adotado para o aço do perfil e das armaduras, Classe A, utilizado foi de  $E = 210000$  MPa. As demais características foram tomadas iguais as da Tabela 5.1 sendo os coeficientes de resistência adotados iguais a unidade para simular os resultados dos ensaios.

Tabela 5.2 Carregamentos e comparação com ensaios realizados por Roik e Bergmann (1990).

Protótipo Analisado (1)	$e_y$ (mm) (2)	$N_{z,Ensaio}$ (kN) (3)	$M_{x,Ensaio}$ (kN.m) (4)	$M_{x,CSTM}$ (kN.m) (5)	$\frac{M_{x,Ensaio}}{M_{x,CSTM}}$ (6)
V11	0	3617	44.94	46.08	0.98
V12	-40	2825	148.10	126.36	1.17
V13	100	1800	-157.64	-180.42	0.87
V21	0	2654	67.84	95.94	0.71
V22	-40	1998	130.99	148.96	0.88
V23	100	1706	-126.99	-165.84	0.77
				Média:	0.90
				Desvio Padrão:	0.16

$e_y$  = excentricidade de  $N_{z,Ensaio}$  na direção-y com referência ao centróide geométrico.

Os momentos apresentados são em relação ao centróide plástico.

Os momentos  $M_{x,CSTM}$  foram obtidos para os mesmos valores de esforço normal dos ensaios.

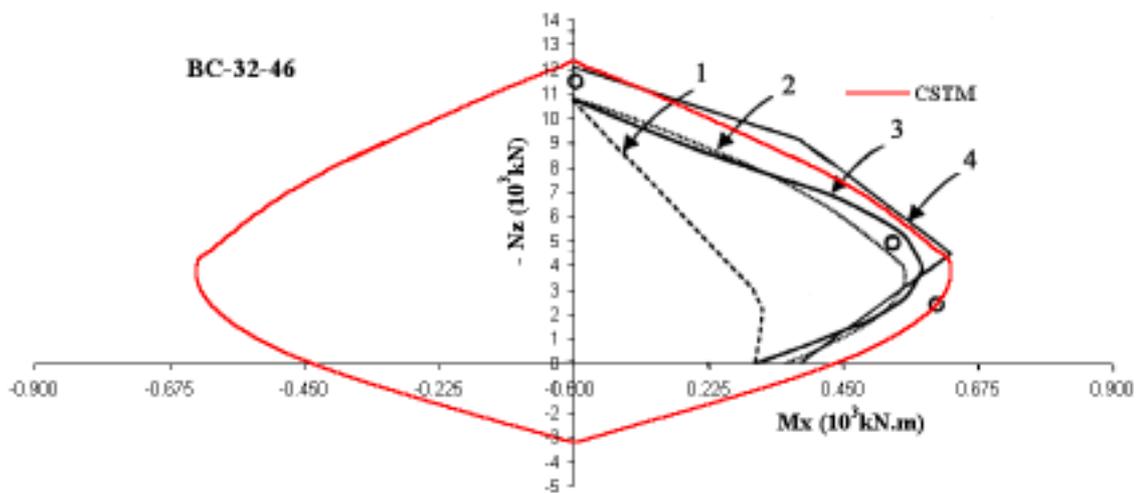
### 5.5.3 Terceiro Exemplo: Pilar Retangular Preenchido com Materiais de Alta Resistência

O comportamento de tubos retangulares preenchidos, formado por materiais de alta resistência, aço e concreto, foi investigado em trabalho recente por Varma *et al.* (2002). Os parâmetros estudados foram a razão largura-espessura ( $b/t$ ), a

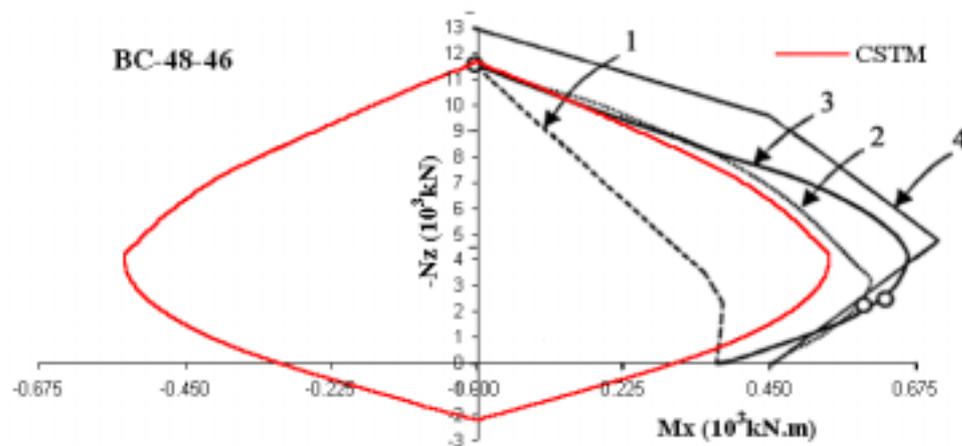
tensão de escoamento,  $f_y$ , e o nível de carregamento axial. Quatro colunas curtas e oito vigas coluna foram ensaiadas. Os testes com as vigas colunas foram conduzidos sob carregamento axial constante de 20% e 40% da capacidade máxima de carregamento axial,  $P_u$ . Os tubos quadrados com 305 mm de largura, foram preenchidos com concreto de  $f_{ck} = 110$  MPa e eram de aços com  $f_y = 317$  e 552 MPa . Na Tabela 5.3 ,  $t_m$ ,  $P$ , e  $P_u$  são respectivamente a espessura do tubo, carregamento aplicado e capacidade de carregamento determinado a partir dos testes em colunas curtas. Os resultados dos ensaios foram comparados com as normas American Institute of Steel Construction (AISC, 1999), American Concrete Institute (ACI, 1999), Architectural Institute of Japan (AIJ, 1987), e Eurocode 4 (1994). Os dados obtidos por Varma *et al.* (2002) são comparados com o CSTM onde considerou-se o concreto confinado, perfis perfeitamente quadrados (cantos curvos desprezados), com largura de 305 mm e espessuras de acordo com a Tabela 5.3. O módulo de elasticidade do aço foi considerado igual a 210000 MPa. Os coeficientes de resistência foram tomados iguais a unidade. Os resultados são apresentados nas Figuras 5.6 e 5.7 e Tabela 5.4.

Tabela 5.3 Dimensões dos protótipos ensaiados (Varma *et al.*, 2002).

Protótipo Analisado (1)	$f_y$ (MPa) (2)	$t_m$ (mm) (3)	b/t (4)	L (m) (5)	P (kN) (6)	$\frac{P}{P_u}$ (7)
BC-32-46-20	317	8.6	35.59		2520	0.21
BC-32-46-40	317	8.6	35.29		5035	0.43
BC-32-80-20	552	8.9	34.29		3050	0.20
BC-32-80-40	552	8.9	34.29	1.52	6100	0.41
BC-48-46-20	317	5.8	52.17		2360	0.18
BC-48-46-22	317	5.8	52.17		2520	0.22
BC-48-80-20	552	6.1	50.00		2740	0.19
BC-48-80-40	552	6.1	50.00		5480	0.38



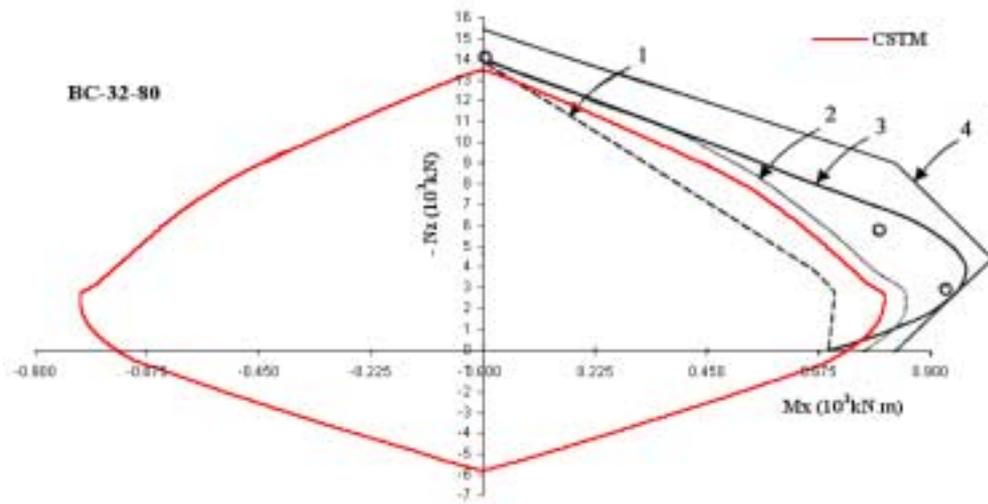
(a)



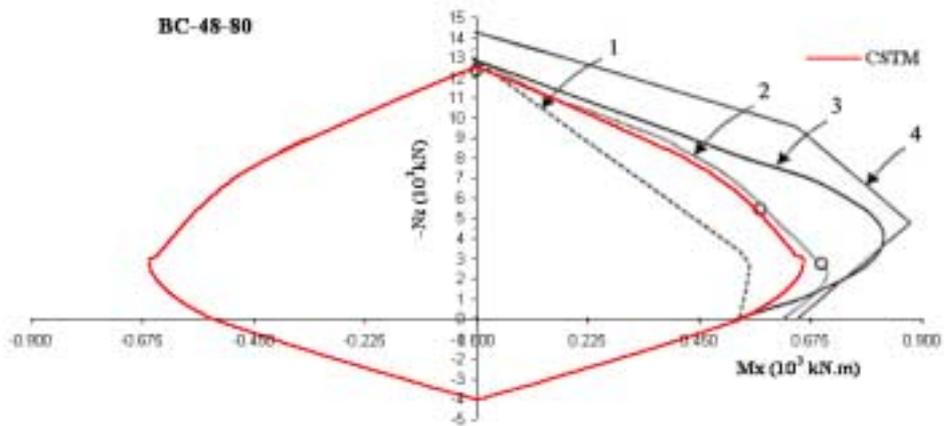
(b)

1 AISC    2 ACI    3 AIJ    4 EC4    o Dados experimentais

Figura 5.6 Comparação do CSTM com curvas de interação  $N$ - $M$  de normas e ensaios obtidos a partir: (a) BC-32-46 com  $b/t = 32$  e aço com  $f_y = 317$  MPa; (b) BC-48-46 com  $b/t = 48$  e aço com  $f_y = 317$  MPa (adaptado de Varma *et al.*, 2002).



(a)



(b)

1 AISC    2 ACI    3 AIJ    4 EC4    o Dados experimentais

Figura 5.7 Comparação do CSTM com curvas de interação  $N$ - $M$  de normas e ensaios obtidos a partir: (a) BC-32-80 com  $b/t = 32$  e aço com  $f_y = 552$  MPa; (b) BC-48-80 com  $b/t = 48$  e aço com  $f_y = 552$  MPa (adaptado de Varma *et al.*, 2002).

Tabela 5.4 Comparação dos resultados experimentais com normas e o programa CSTM  
(Varma *et al.*, 2002)

Protótipo Analisado (1)	$M_u$ (kN.m) (2)	$\frac{M_u}{M_{LRFD}}$ (3)	$\frac{M_u}{M_{ACI}}$ (4)	$\frac{M_u}{M_{AIJ}}$ (5)	$\frac{M_u}{M_{EC4}}$ (6)	$\frac{M_u}{M_{CSTM}}$ (7)
BC-32-46-20	606	1.96	1.12	1.10	1.17	0.99
BC-32-46-40	543	2.51	1.06	0.95	0.89	0.93
BC-32-80-20	933	1.33	1.10	0.97	0.97	1.19
BC-32-80-40	806	1.56	1.17	0.91	0.84	1.27
BC-48-46-20	597	1.54	1.00	0.97	1.03	1.19
BC-48-46-22	629	1.66	1.05	1.01	1.06	1.23
BC-48-80-20	700	1.26	1.00	0.87	0.89	1.06
BC-48-80-40	574	1.37	0.99	0.72	0.68	1.02
	Média:	1.65	1.06	0.94	0.94	1.11
	Desvio Padrão:	0.41	0.06	0.11	0.15	0.13

Observa-se a partir da Tabela 5.4 e das curvas carga-deslocamento apresentadas nas Figuras 5.6 e 5.7 que a aproximação utilizada para relação tensão-deformação do concreto, que neste caso, terá uma deformação última de  $-0.0022$  foi adequada. Conclui-se também que as considerações que o Eurocode faz em relação à aproximação para a curva carga-deslocamento são contra segurança para materiais de alta resistência (Figuras 5.6 e 5.7).

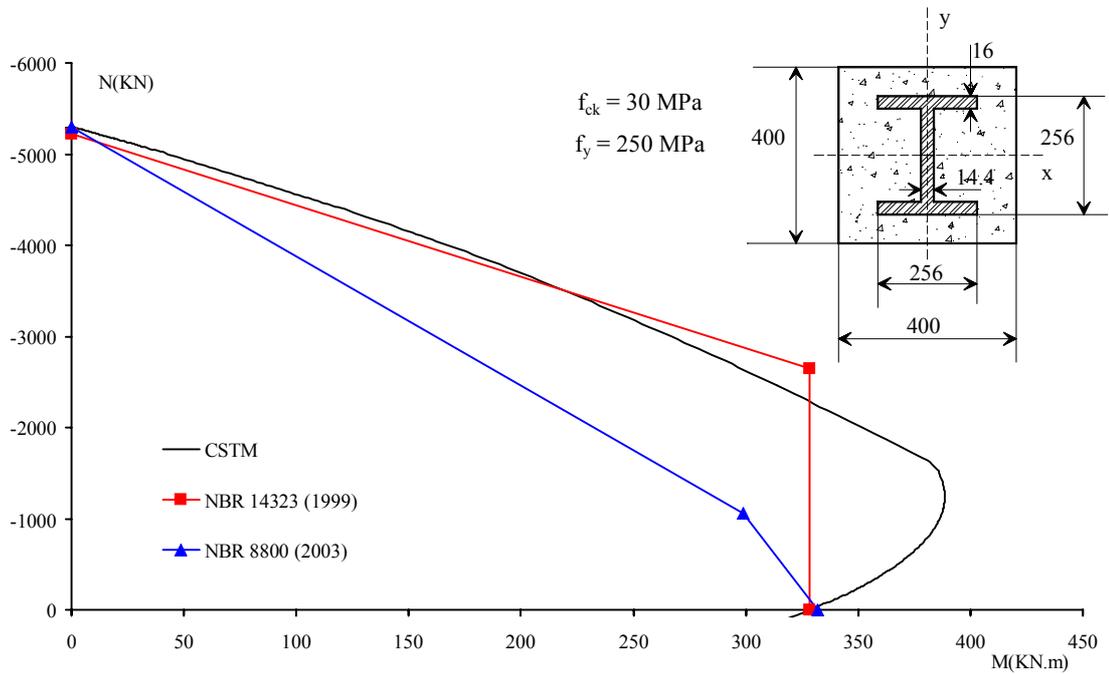
No trabalho de Varma *et al.* (2002) os autores concluem que a curva carga-deslocamento dada pelo ACI é a mais apropriada. Pode-se observar que estas curvas tem boa concordância com as curvas obtidas no CSTM.

#### 5.5.4 Quarto Exemplo: Comparações entre CSTM, NBR 14323 (1999) e NBR 8800 (2003)

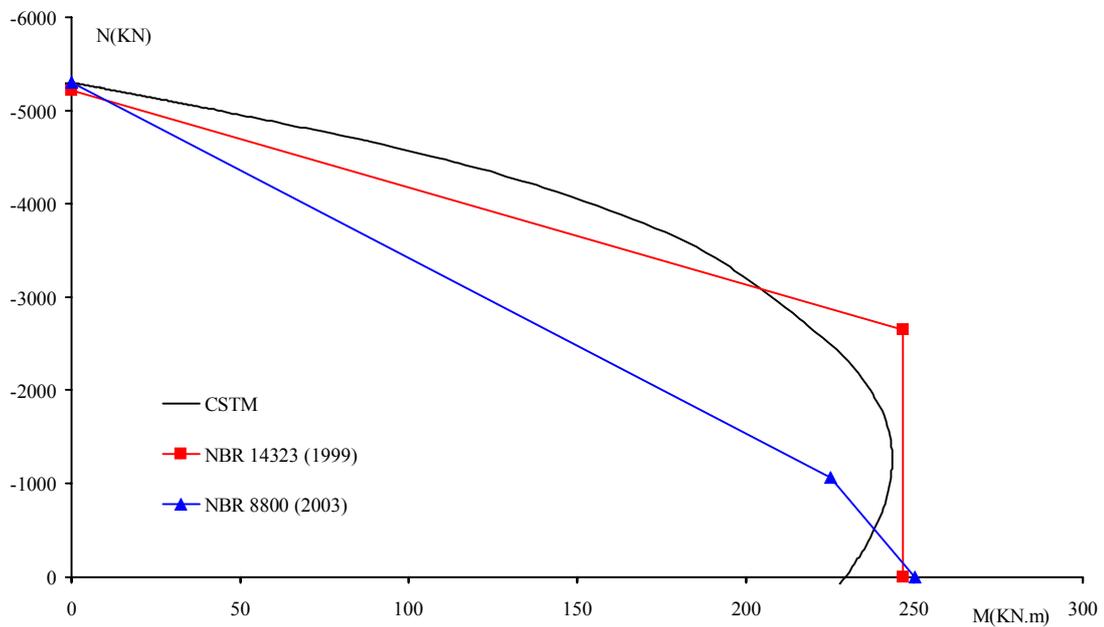
Neste exemplo, faz-se uma comparação entre as superfícies de interação obtidas com a formulação apresentada no presente trabalho com as obtidas segundo a NBR 14323 (1999) e projeto de revisão NBR 8800 (2003). Nas comparações, são utilizadas as seções apresentadas pela NBR 14323. Na determinação das curvas foram utilizados os respectivos coeficientes de resistência dos materiais que são os mesmos para as normas e para o CSTM, diferenciando apenas pela forma de aplicação às equações.

### 5.5.4.1 Pilar Envolvido

A Figura 5.8 mostra as curvas obtidas para a seção do pilar envolvido.



(a)



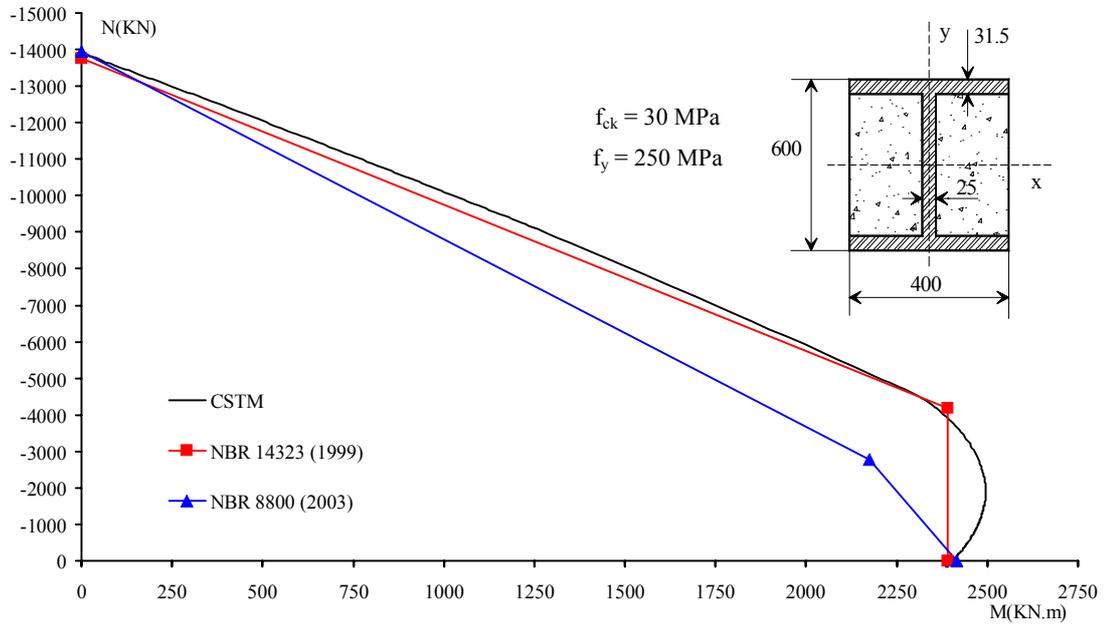
(b)

Figura 5.8 Comparação entre as superfícies de interação  $N-M$ , pilar envolvido:

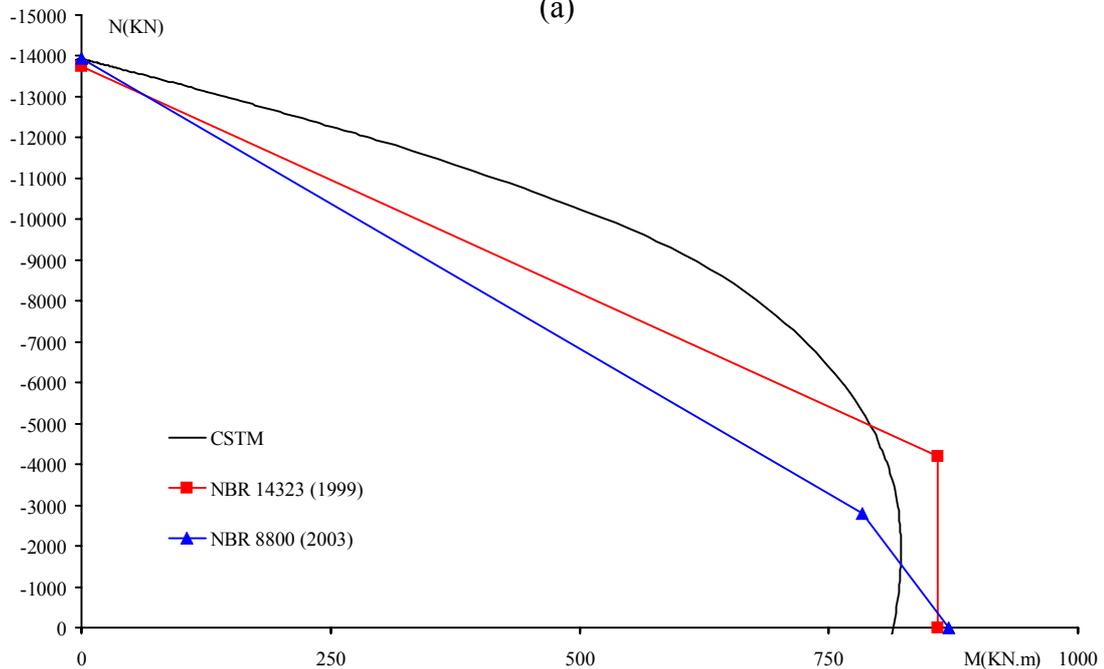
(a) flexão em torno do eixo  $x$ ; (b) flexão em torno do eixo  $y$ ;

### 5.5.4.2 Pilar Parcialmente Envolvido

A Figura 5.9 mostra as curvas para a seção do pilar parcialmente envolvido.



(a)



(b)

Figura 5.9 Comparação entre as superfícies de interação  $N-M$ , pilar parcialmente envolvido: (a) flexão em torno do eixo  $x$ ; (b) flexão em torno do eixo  $y$ ;

### 5.5.4.3 Pilar Circular Preenchido

A Figura 5.10 mostra as curvas para a seção do pilar circular preenchido.

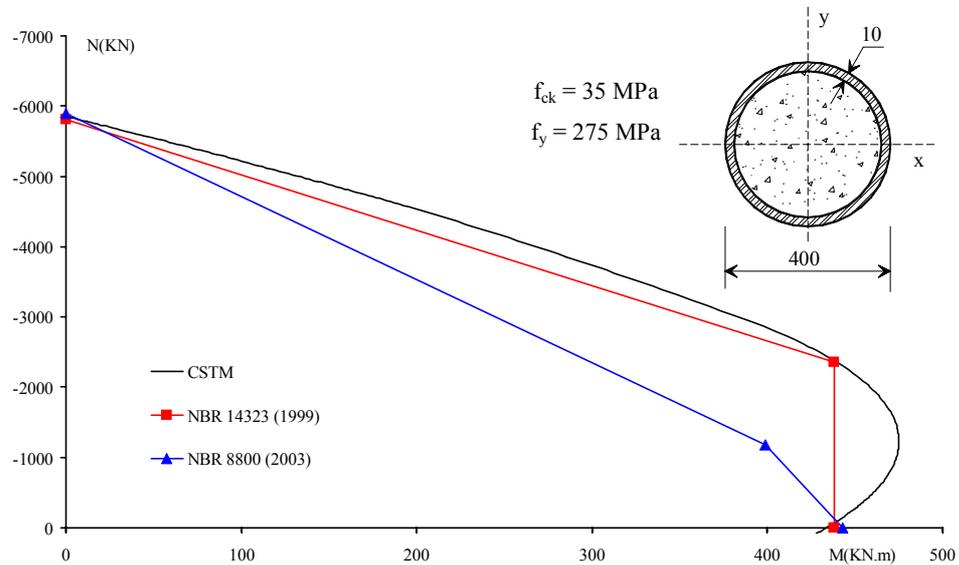


Figura 5.10 Comparação entre as superfícies de interação  $N-M$ , pilar circular preenchido.

### 5.5.4.4 Pilar Retangular Preenchido

A Figura 5.11 mostra as curvas para a seção do pilar retangular preenchido.

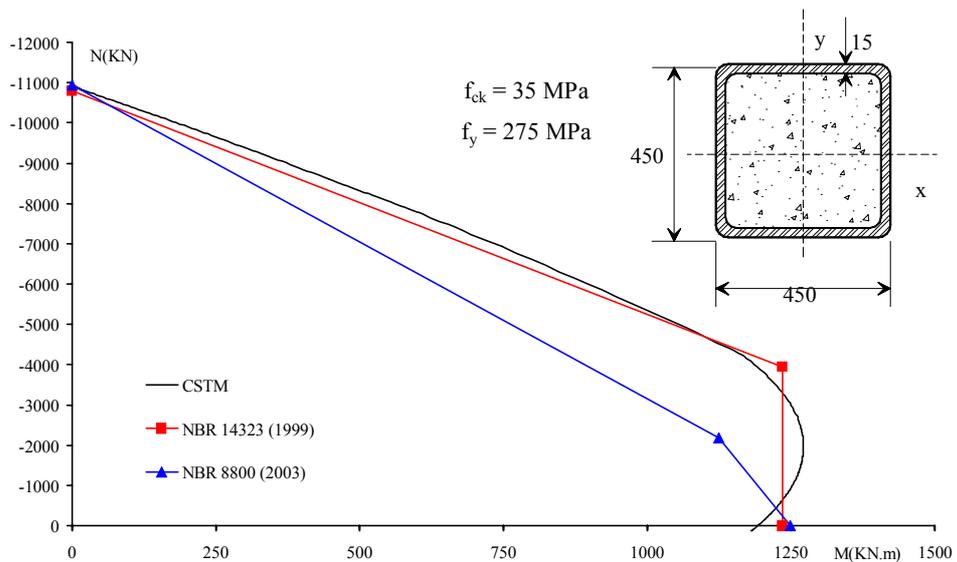


Figura 5.11 Comparação entre as superfícies de interação  $N-M$ , pilar retangular preenchido.

Os dados apresentados foram obtidos no CSTM utilizando o parâmetro de deformação  $D$ . Observa-se a partir dos gráficos das Figuras 5.8 a 5.11 que em todos os casos o projeto de revisão da NBR 8800 apresentou resultados conservadores em comparação ao CSTM e a NBR 14323 (1999). As expressões utilizadas na obtenção das superfícies de interação, (2.13) e (2.14), apresentadas no projeto de revisão (NBR 8800, 2003) são semelhantes às expressões da norma AISC (1999). A diferença principal é que a AISC despreza o efeito do confinamento em pilares preenchidos e não considera os pilares parcialmente envolvidos por concreto, além de apresentar nas expressões (2.21) e (2.22) o coeficiente  $\phi_b$  que multiplica o momento de plastificação da seção. Apesar do comportamento geral das curvas serem conservadores, observa-se, em alguns casos, principalmente quando se tem flexão em relação ao eixo de menor inércia, que nos pontos de abscissas próximos ao valor de momento de plastificação teve-se um comportamento contra a segurança. Na NBR 14323 este problema é amenizado pela consideração nas expressões (2.8) e (2.9) do coeficiente 0.9 multiplicando o momento de plastificação, não adotado para a obtenção das curvas das Figuras 5.8 a 5.11.

A NBR 14323 (1999) possui melhores resultados em comparação ao CSTM do que o projeto de revisão da NBR 8800 baseado na AISC. Percebe-se que a não consideração do ponto de abscissa igual ao momento de plastificação e ordenada igual à resistência do componente concreto, conforme a NBR 14323, ponto  $C$  da Figura 2.7, e a adoção do ponto de ordenada igual a 20 % do esforço normal de plastificação afasta as superfícies de interação tornando, nos casos apresentados, o projeto de revisão conservador.

De acordo com as figuras conclui-se que quando se tem flexão em torno do eixo de menor inércia do perfil, tanto a NBR 14323 e a NBR 8800, são conservadoras a não ser pelos pontos de abscissas próximas ao valor de momento de plastificação, conforme mencionado no parágrafo anterior.

# ANÁLISE NUMÉRICA DE PILARES MISTOS

## 6.1 INTRODUÇÃO

Freqüentemente, na engenharia é necessária a solução de um problema físico através da modelagem matemática. Às vezes os modelos matemáticos são simples e obtém-se sua solução analítica ou aproximada de maneira simples e rápida. Alguns problemas, porém, são mais complexos do ponto de vista matemático e a análise numérica apresenta-se como uma ferramenta poderosa, que aliada a métodos como o Método dos Elementos Finitos (Zienkiewicz, 1977; Bathe, 1996; Cook *et al.*, 1989) são capazes de fornecer respostas adequadas.

A análise estrutural objetiva determinar o comportamento de uma estrutura, ou seja, tensões, deformações e deslocamentos, quando submetida a ações externas. Em geral não é possível obter uma solução que satisfaça as equações diferenciais de equilíbrio em todos os pontos do domínio de uma estrutura contínua. Através de formulações variacionais ou utilizando o princípio dos trabalhos virtuais, podem-se obter soluções aproximadas que satisfazem o equilíbrio na média (formulação fraca). Associando-se soluções aproximadas à discretização por elementos finitos, produzem-se equações discretas que governam o problema, e tendem para a solução exata quando se refina a malha de elementos finitos.

Essas soluções são procuradas em função de um número finito de parâmetros incógnitos, variáveis de campo nos pontos nodais dentro e no contorno do elemento. As relações entre os elementos que formam a estrutura levam a um sistema de equações lineares ou não-lineares cuja resolução fornece os valores dos parâmetros incógnitos.

A solução do problema não-linear oriundo da análise de pilares mistos pode ser efetuada utilizando-se diversos modelos, obtidos basicamente através de elementos de barra ou elementos tridimensionais. Vários trabalhos que fazem análise numérica de pilares mistos utilizando o Método dos Elementos Finitos vem sendo desenvolvidos. Entre estes podem-se citar os trabalhos de Mirza *et al.* (1996) e Johansson e Gylltoft (2002), utilizando o programa ABAQUS ([www.abaqus.com](http://www.abaqus.com)), no qual aplicaram modelos de elementos finitos de barras e tridimensionais, respectivamente. Em trabalhos como o de Queiroz e Queiroz (2003a, 2003b) foi empregado o programa ANSYS ([www.ansys.com](http://www.ansys.com)) no desenvolvimento de modelos tridimensionais para análise de pilares parcialmente envolvidos. Nestes trabalhos os pesquisadores relatam que houve dificuldades na convergência das análises principalmente quando parte da seção mista é tracionada. No trabalho de De Nardim (1999) o programa ANSYS também foi utilizado para simulação de pilares preenchidos através de modelos tridimensionais. No trabalho de Lakshmi e Shanmugam (2002) é apresentado um método semianalítico que utiliza relações momento-curvatura para obtenção das rigidezes dos elementos de barra usados para simular o comportamento de pilares mistos preenchidos.

No modelo que se apresenta neste capítulo, as equações de equilíbrio discretas do Método dos Elementos Finitos, para elementos de barra com rotações moderadas, em sua formulação baseada em deslocamentos, são derivadas usando-se o princípio dos trabalhos virtuais.

Em cada elemento usa-se para aproximação do componente de deslocamento axial um polinômio quadrático, sendo que para os deslocamentos transversais, usam-se polinômios cúbicos. No problema abordado necessita-se de um modelo matemático que considere as não-linearidades física e geométrica inerentes ao comportamento da estrutura. A não-linearidade física é considerada ao nível seccional através das relações

tensão-deformação não-lineares de cada material envolvido. A não-linearidade geométrica é considerada através de medidas adequadas de deformação. Utiliza-se na resolução do sistema de equações o Método de Newton Raphson com Controle de Carga ou com Controle de Deslocamento.

Considera-se apenas um caso de carga e o processo de carregamento é suposto ser quase estático desprezando-se os efeitos dinâmicos. Tratam-se as cargas como aplicadas somente nos pontos nodais do modelo discretizado.

## **6.2 FLEXÃO DE BARRAS PRISMÁTICAS - ROTAÇÕES MODERADAS**

Neste item, estabelece-se a formulação do problema de flexão de barras para a classe de rotações moderadas através do princípio dos trabalhos virtuais.

### **6.2.1 Hipóteses e Sistema de Referência**

Na Figura 6.1 apresenta-se uma barra reta indeformada de comprimento  $\ell$ , seção transversal qualquer e um sistema de eixos cartesianos globais ortogonais  $xyz$ . A origem pode ser em um ponto qualquer no plano de uma das seções extremas. Em trabalhos recentes (Chen *et al.*, 2001; Sfakianakis, 2002) e no presente trabalho tem-se utilizado a origem do sistema coincidente com o centróide plástico da seção, expressão (3.1), por razões esclarecidas no Capítulo 3.

Admite-se que seções planas permanecem planas após a deformação, hipótese de Navier-Bernoulli, e considera-se total aderência entre o aço e o concreto. O efeito das deformações produzidas pelo esforço cortante é desprezado na formulação, considerando-se estado uniaxial de tensões.

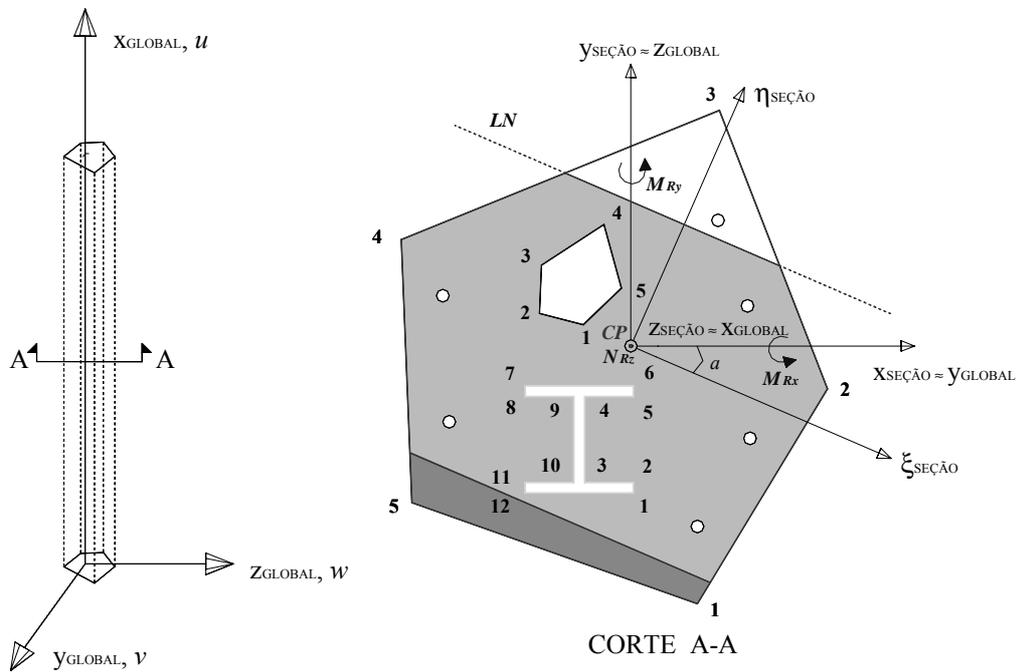


Figura 6.1 Sistema de coordenadas de referência.

### 6.2.2 Relação Deformação - Deslocamento

Sendo  $u$ ,  $v$  e  $w$  as componentes de deslocamento nas direções globais  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, tem-se (Garcia e Villaça, 1999, Crisfield, 1991) a expressão para rotações moderadas para a componente  $\varepsilon_x$  de deformação axial

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (6.1)$$

Usando-se a notação  $( )' = \partial( ) / \partial x$ , nas expressões seguintes e sendo o campo de deslocamentos dados por

$$u = u_o(x) - yv' - zw'$$

$$v = v_o(x)$$

$$w = w_o(x), \tag{6.2}$$

tem-se

$$\varepsilon_x = u' + \frac{1}{2}[(v')^2 + (w')^2] - yv'' - zw'', \tag{6.3}$$

ou

$$\varepsilon_x = \varepsilon_o - yk_z + zk_y, \tag{6.4}$$

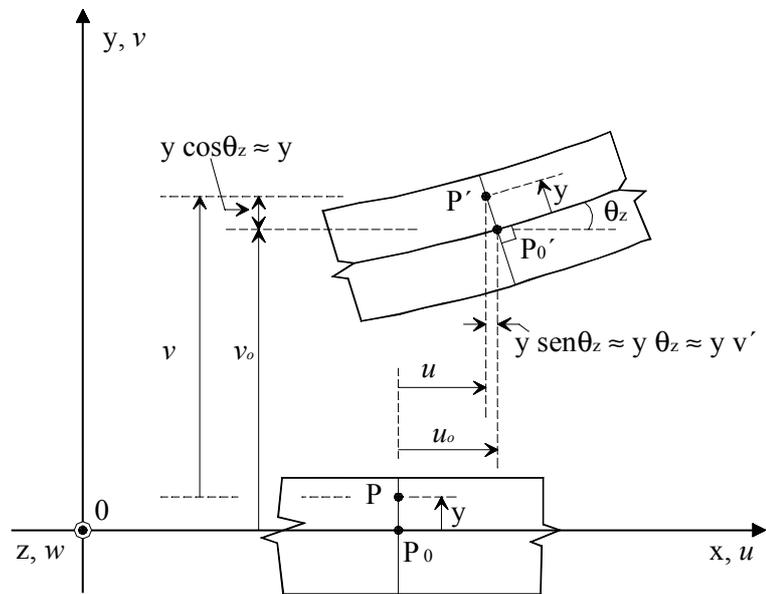
onde

$$\varepsilon_o = u' + \frac{1}{2}[(v')^2 + (w')^2] \tag{6.5a}$$

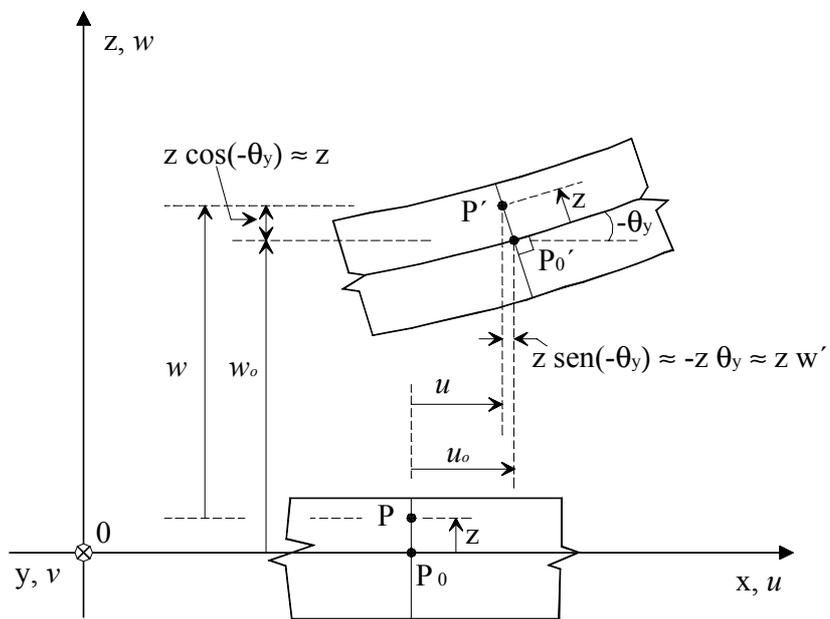
$$k_y = -w''$$

$$k_z = v'' \tag{6.5b}$$

são, respectivamente, a deformação axial e as curvaturas em torno dos eixos  $y$  e  $z$ .



(a)



(b)

Figura 6.2 Deformação de um segmento do eixo da barra:

(a) plano  $xy$ ; (b) plano  $xz$ .

### 6.2.3 Formulação do Problema de Equilíbrio

Se um sólido for submetido a um campo de deslocamentos virtuais, o trabalho virtual interno das tensões sobre as deformações virtuais será igual ao trabalho virtual externo sobre os deslocamentos virtuais (Garcia e Villaça, 1999). Este é o princípio dos trabalhos virtuais, PTV, para um sólido deformável em equilíbrio.

Usando-se o PTV pode-se estabelecer as equações de equilíbrio não lineares para a estrutura. Conforme Garcia e Villaça (1999) tem-se a expressão para a avaliação dos trabalhos interno e externo no caso geral

$$\iiint_V \bar{\sigma}_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \iint_{S_f} t_k^{(n^*)} \delta u_k dS + \iiint_V B_k \delta u_k dV, \quad (6.6)$$

onde  $\bar{\sigma}_{ij}$  são as componentes de tensão de Kirchhoff;  $\varepsilon_{ij}$  são as componentes de deformação de Green-Lagrange;  $t_k^{(n^*)}$  são as componentes da força de superfície definida em relação à área indeformada  $dS$ ;  $B_k$  são as componentes da força de massa definida em relação ao volume indeformado  $dV$ ;  $S_f$  define a área de atuação das forças de superfície e  $V$  o volume, ambos na configuração inicial indeformada;  $u_k$  são as componentes de deslocamento associadas às forças aplicadas e  $\delta$  é o operador variacional.

Com as hipóteses adotadas na presente formulação, reduz-se a expressão do PTV para

$$\delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}} = 0, \quad (6.7)$$

sendo

$$\delta W_{\text{int}} = \iiint_V \sigma_x \delta \varepsilon_x dV \quad (6.8)$$

onde  $\delta\varepsilon_x$  é a variação na deformação axial produzida pela variação nos deslocamentos virtuais. A integral de volume é realizada na estrutura indeformada, caracterizando uma formulação Lagrangiana total.

Discretizando o volume  $V$  da estrutura em elementos finitos de volume  $V_m$ , sendo  $m$  um elemento genérico e  $ne$  o número total de elementos, pode-se escrever a expressão (6.8) como

$$\delta W_{\text{int}} = \sum_{m=1}^{ne} \left( \iiint_{V_m} \sigma_x \delta\varepsilon_x dV \right). \quad (6.9)$$

A variação de  $\varepsilon_x$ , expressão (6.3), resulta em

$$\delta\varepsilon_x = \delta u' + v' \delta v' + w' \delta w' - y \delta v'' - z \delta w''. \quad (6.10)$$

Substituindo-se a expressão (6.10) na expressão (6.9), tem-se

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} &= \sum_{m=1}^{ne} \left( \iiint_{V_m} \sigma_x \delta\varepsilon_x dV \right) \\ &= \sum_{m=1}^{ne} \left[ \iiint_{V_m} \sigma_x (\delta u' + v' \delta v' + w' \delta w' - z \delta w'' - y \delta v'') dA dx \right] . \\ &= \sum_{m=1}^{ne} \left[ \iiint_{V_m} \sigma_x (\delta u' + v' \delta v' + w' \delta w') dA dx - \iiint_{V_m} \sigma_x z \delta w'' dA dx \right. \\ &\quad \left. - \iiint_{V_m} \sigma_x y \delta v'' dA dx \right] \end{aligned} \quad (6.11)$$

A partir das expressões (3.12), e observando-se a Figura 6.1, tem-se

$$\begin{aligned}
N_x &= \iint_{A_m} \sigma_x dA = \iint_{A_c} \sigma_c dA + \iint_{A_p} \sigma_p dA - \sum_{i=1}^{n_f} \left( \iint_{A_{fi}} \sigma_c dA \right) + \sum_{i=1}^{n_s} A_{si} \sigma_{si} \\
M_y &= \iint_{A_m} \sigma_x z dA = \iint_{A_c} \sigma_c z dA + \iint_{A_p} \sigma_p z dA - \sum_{i=1}^{n_f} \left( \iint_{A_{fi}} \sigma_c z dA \right) + \sum_{i=1}^{n_s} A_{si} \sigma_{si} z_{si} \\
M_z &= - \iint_{A_m} \sigma_x y dA = - \underbrace{\iint_{A_c} \sigma_c y dA}_{\text{concreto}} - \underbrace{\iint_{A_p} \sigma_p y dA}_{\text{perfil}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_f} \left( \iint_{A_{fi}} \sigma_c y dA \right)}_{\text{aberturas na seção}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n_s} A_{si} \sigma_{si} y_{si}}_{\text{armaduras}}, \quad (6.12)
\end{aligned}$$

onde as variáveis  $A_c$ ,  $A_p$ ,  $A_{si}$ ,  $\sigma_c$ ,  $\sigma_p$ ,  $\sigma_{si}$ ,  $y_{si}$  e  $z_{si}$ , são definidas para uma dada seção do elemento  $m$  e representam, respectivamente, as áreas de concreto, do perfil, armaduras, as tensões no concreto, perfil, armaduras, e as coordenadas  $y$  e  $z$  dos centros de gravidade das armaduras. A parcela referente ao concreto sobreposto pelo perfil, que aparece nas expressões (3.12), foi omitida para não sobrecarregar as expressões (6.12).

Em (6.12)  $N_x$  é a força normal interna na direção  $x$ , resultante das tensões no concreto e aço;  $M_y$  o momento interno em torno do eixo  $y$ , resultante das tensões no concreto e aço em relação à origem;  $M_z$  o momento interno em torno do eixo  $z$ , resultante das tensões no concreto e aço em relação à origem, podendo ser a origem definida em um ponto qualquer no plano da seção localizada no início do elemento (em geral considera-se a origem coincidente com o centróide plástico da seção, ver Capítulo 3).

Observando-se as convenções da Figura 6.3 e substituindo as expressões (6.12) em (6.11) tem-se

$$\delta W_{\text{int}} = \sum_{m=1}^{ne} \left\{ \int_{\ell_m} [N_x (\delta u' + v' \delta v' + w' \delta w') - M_y \delta w'' + M_z \delta v''] dx \right\}. \quad (6.13)$$

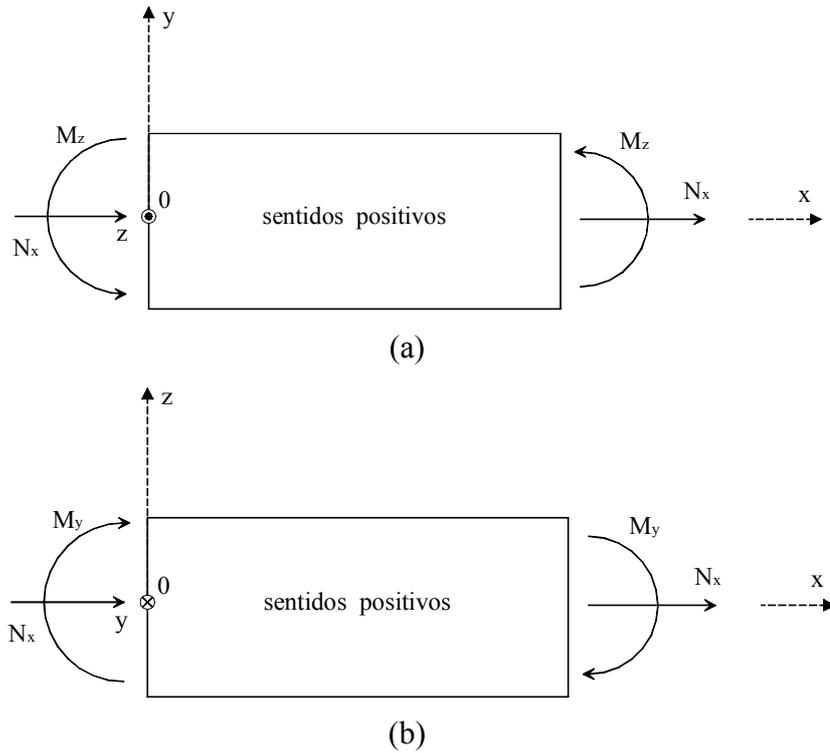


Figura 6.3 Convenção de sinal para os esforços  $N_x$ ,  $M_y$  e  $M_z$ .

### 6.3 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

Derivam-se em seguida as equações de equilíbrio, matrizes de rigidez tangente e vetores de forças desequilibradas para o modelo de elementos finitos em questão. Na formulação que se apresenta, o objetivo é analisar elementos de seções genéricas submetidos à flexão e compressão, considerando as não-linearidades presentes no problema, geométrica e física.

Com a formulação apresentada será possível analisar-se elementos, pilares ou vigas, de concreto armado, metálicos ou mistos com seções transversais quaisquer.

#### 6.3.1 Equação de Equilíbrio

Sendo o carregamento externo,  $\mathbf{r}_m$  aplicado nos nós do elemento, tem-se

$$\delta W_{ext} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{r}_m, \quad (6.14)$$

e, sendo  $\mathbf{q}$  um conjunto de deslocamentos nodais generalizados para um dado elemento, obtém-se

$$\begin{aligned}
\delta u' &= \left( \frac{\partial u'}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \delta \mathbf{q} = \delta \mathbf{q}^T \frac{\partial u'}{\partial \mathbf{q}} \\
\delta v' &= \delta \mathbf{q}^T \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \\
\delta w' &= \delta \mathbf{q}^T \frac{\partial w'}{\partial \mathbf{q}} \\
\delta v'' &= \delta \mathbf{q}^T \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} \\
\delta w'' &= \delta \mathbf{q}^T \frac{\partial w''}{\partial \mathbf{q}} .
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Substituindo as expressões (6.15) em (6.13), tem-se para o elemento

$$\delta W_{\text{int}} = \delta \mathbf{q}^T \int_{\ell_m} \left[ N_x \left( \frac{\partial u'}{\partial \mathbf{q}} + v' \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} + w' \frac{\partial w'}{\partial \mathbf{q}} \right) - M_y \frac{\partial w'}{\partial \mathbf{q}} + M_z \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right] dx . \tag{6.16}$$

Levando-se as expressões (6.16) e (6.14) em (6.7), obtém-se para o elemento a expressão

$$\delta \mathbf{q}^T \int_{\ell_m} \left[ N_x \left( \frac{\partial u'}{\partial \mathbf{q}} + v' \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} + w' \frac{\partial w'}{\partial \mathbf{q}} \right) - M_y \frac{\partial w'}{\partial \mathbf{q}} + M_z \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right] dx - \delta \mathbf{q}^T \mathbf{r}_m = 0 , \tag{6.17}$$

que pode ser reescrita da seguinte forma

$$\delta \mathbf{q}^T \left( \int_{\ell_m} \left[ N_x \left( \frac{\partial u'}{\partial \mathbf{q}} + v' \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} + w' \frac{\partial w'}{\partial \mathbf{q}} \right) - M_y \frac{\partial w'}{\partial \mathbf{q}} + M_z \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right] dx - \mathbf{r}_m \right) = 0 . \tag{6.18}$$

Uma vez que a equação (6.18) é válida para quaisquer variações  $\delta \mathbf{q}^T$ , tem-se então um conjunto de *neq* equações não-lineares, onde *neq* é o número de graus de liberdade do elemento, na forma

$$\begin{aligned} \Psi &= \int_{\ell_m} \left[ N_x \left( \frac{\partial u'}{\partial \mathbf{q}} + v' \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} + w' \frac{\partial w'}{\partial \mathbf{q}} \right) - M_y \frac{\partial w''}{\partial \mathbf{q}} + M_z \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} \right] dx - \mathbf{r}_m, \\ &= \mathbf{f}_m - \mathbf{r}_m = 0 \end{aligned} \quad (6.19)$$

onde

$$\mathbf{f}_m = \int_{\ell_m} \left[ N_x \left( \frac{\partial u'}{\partial \mathbf{q}} + v' \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} + w' \frac{\partial w'}{\partial \mathbf{q}} \right) - M_y \frac{\partial w''}{\partial \mathbf{q}} + M_z \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} \right] dx \quad (6.20)$$

é o vetor das forças internas dos elementos individuais. A partir de (6.19) chega-se, para a estrutura, a

$$\begin{aligned} \Psi &= \sum_{m=1}^{ne} \left\{ \int_{\ell_m} \left[ N_x \left( \frac{\partial u'}{\partial \mathbf{q}} + v' \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} + w' \frac{\partial w'}{\partial \mathbf{q}} \right) - M_y \frac{\partial w''}{\partial \mathbf{q}} + M_z \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} \right] dx \right\} - \mathbf{R} \\ &= \mathbf{F} - \mathbf{R} = \mathbf{F} - \lambda \mathbf{P} = 0 \end{aligned} \quad (6.21)$$

onde

$$\mathbf{F} = \sum_{m=1}^{ne} \left\{ \int_{\ell_m} \left[ N_x \left( \frac{\partial u'}{\partial \mathbf{q}} + v' \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} + w' \frac{\partial w'}{\partial \mathbf{q}} \right) - M_y \frac{\partial w''}{\partial \mathbf{q}} + M_z \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} \right] dx \right\} \quad (6.22)$$

é o vetor das forças nodais internas da estrutura, formado a partir das contribuições das forças internas dos elementos individuais, expressão (6.20).  $\mathbf{R} = \lambda \mathbf{P}$  é o vetor das forças externas aplicadas e associadas com as correspondentes direções dos deslocamentos.  $\mathbf{P}$  é um vetor de cargas nodais de referência que representa a distribuição das cargas externas sobre a estrutura e  $\lambda$  é o fator de carga.

Na expressão (6.21) e (6.22) o operador somatório corresponde ao espalhamento das forças internas dos elementos na matriz de força interna da estrutura da forma tradicional do MEF.

## 6.4 SOLUÇÃO DO SISTEMA NÃO - LINEAR

Apresenta-se nesta seção uma breve descrição dos métodos incrementais-iterativos para a determinação do caminho de equilíbrio de estruturas não-lineares (*path-following methods*). Para determinar o comportamento da estrutura, é necessário resolver o sistema de equações de equilíbrio, dado pela expressão (6.21), que pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\Psi(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{F}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{P} = 0 \quad (6.23)$$

onde  $\Psi$  é o vetor das forças desequilibradas. Este sistema de  $n$  equações não-lineares descreve o caminho de equilíbrio em função das  $n + 1$  variáveis do problema  $(\mathbf{u}, \lambda)$ .

Assim, surge a necessidade de aumentar o número de equações. Logo, adicionando-se uma equação de restrição,  $A$ , ao sistema descrito pela expressão (6.23), chega-se ao sistema

$$\begin{bmatrix} \Psi(\mathbf{u}, \lambda) \\ A(\mathbf{u}, \lambda) \end{bmatrix} = 0 \quad (6.24)$$

no qual o número de equações é igual ao número de variáveis.

Linearizando a equação (6.24) em relação a  $\mathbf{u}$  e  $\lambda$ , obtém-se o sistema de equações utilizado nas iterações de equilíbrio para obtenção da curva carga-deslocamento (Figura 6.4)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & -\mathbf{P} \\ A_{,\mathbf{u}}^T & A_{,\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Psi \\ A \end{bmatrix}. \quad (6.25)$$

A expressão (6.25), que trata o fator de carga como uma variável, permite obter completamente a curva de equilíbrio, trecho  $OABC$  da Figura 6.4, ultrapassando os pontos limite.

Diversos métodos de determinação da curva carga-deslocamento, como o Método de Controle de Deslocamento (Batoz e Dhat, 1979), os diversos Métodos de Comprimento de Arco (Riks, 1979, Ramm, 1981, Crisfield, 1981), o Método do Controle Generalizado de Deslocamentos (Yang e Kuo, 1994) e o Método de Incremento Constante do Trabalho Externo (Bathe e Dvorkin, 1983), podem ser derivados a partir da equação (6.25), diferenciando-se basicamente pela equação de restrição utilizada.

O método iterativo mais simples para resolver este sistema de equações é o de Newton Raphson com Controle de Carga. Neste método, o valor de  $\lambda$  é prescrito antes do início das iterações, portanto, os deslocamentos nodais da estrutura,  $\mathbf{u}$ , são as únicas variáveis do problema. Logo, utilizando a restrição

$$A = \lambda - \lambda_p, \quad (6.26)$$

onde  $p$  denota um valor prescrito, a equação (6.25) representa o Método de Newton Raphson com Controle de Carga e pode ser reescrita como:

$$\mathbf{K}_{T_i} \Delta \mathbf{u} = -\Psi_i. \quad (6.27)$$

Calculado o incremento  $\Delta \mathbf{u}$ , os novos deslocamentos ( $\mathbf{u}_{i+1}$ ) são calculados através da expressão

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \Delta \mathbf{u}. \quad (6.28)$$

Na seqüência, o vetor de forças internas e o vetor de forças desequilibradas são recalculados considerando os deslocamentos atualizados. O processo iterativo continua até que o equilíbrio seja alcançado,

$$\frac{\|\Psi_i\|}{\|\mathbf{P}\|} \leq tol \quad (6.29)$$

onde  $tol$  indica uma tolerância dada.

Incrementando sucessivamente o valor de  $\lambda$  e repetindo o processo iterativo descrito anteriormente, obtém-se pontos da curva carga-deslocamento da estrutura, Figura 6.4.

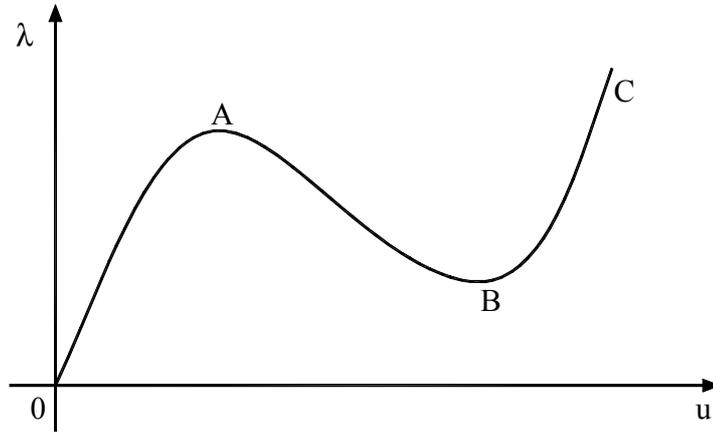


Figura 6.4 Curva carga-deslocamento (Parente Jr, 2000).

O Método de Newton Raphson com Controle de Carga funciona bem para o trecho ascendente da curva de equilíbrio (trecho  $OA$ ), no entanto, ele é incapaz de descrever esta curva após o primeiro ponto limite (trecho  $ABC$ ). Depois de ultrapassar o ponto  $A$  atinge-se o equilíbrio no ponto  $C$ , caso obtenha-se a convergência, levando a uma avaliação incorreta da capacidade de carga da estrutura.

Fazendo-se

$$A = u_j - u_p, \quad (6.30)$$

onde  $u_j$  representa uma certa componente de deslocamento, chega-se ao Método de Controle de Deslocamentos.

#### 6.4.1 Matriz de Rigidez Tangente

A partir da expressão (6.20), para um determinado valor das variáveis  $\mathbf{u}$ , derivando o vetor de forças internas em relação aos deslocamentos nodais, obtém-se a matriz de rigidez  $\mathbf{k}_T$  do elemento, onde

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_T &= \left[ \frac{\partial \mathbf{f}_m}{\partial \mathbf{q}} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \int_{\ell_m} \left[ N_x \left( \frac{\partial u'}{\partial \mathbf{q}} + v' \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} + w' \frac{\partial w'}{\partial \mathbf{q}} \right) - M_y \frac{\partial w''}{\partial \mathbf{q}} + M_z \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} \right] dx \right) \end{aligned} \quad (6.31)$$

Usando-se a regra da cadeia e em função da relação linear entre as componentes  $u$ ,  $v$  e  $w$ , do deslocamento e os deslocamentos generalizados locais  $\mathbf{q}$ , expressões (6.35) adiante, tem-se para a matriz de rigidez do elemento

$$\mathbf{k}_T = \int_{\ell_m} \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{\partial u'}{\partial \mathbf{q}} + v' \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} + w' \frac{\partial w'}{\partial \mathbf{q}} \right) \left\{ \frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} \right\}^T + N_x \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \left( \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + N_x \frac{\partial w'}{\partial \mathbf{q}} \left( \frac{\partial w'}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ - \frac{\partial w''}{\partial \mathbf{q}} \left\{ \frac{\partial M_y}{\partial \mathbf{q}} \right\}^T + \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} \left\{ \frac{\partial M_z}{\partial \mathbf{q}} \right\}^T \end{array} \right] dx. \quad (6.32)$$

## 6.5 MODELO IMPLEMENTADO

O Método dos Elementos Finitos baseado em deslocamentos necessita que se defina a variação dos deslocamentos no elemento em função dos valores nodais. Os elementos de barra com base na teoria de Kirchhoff necessitam de continuidade dos deslocamentos transversais e de suas derivadas nas extremidades, e continuidade dos deslocamentos axiais nas extremidades,  $C^0$ . Dessa forma, deve-se ter no mínimo uma função cúbica para interpolação dos deslocamentos em  $w$  e  $v$ , sendo que em  $u$  deve se ter no mínimo uma função linear. Uma discussão sobre a ordem de interpolação pode ser encontrada em Crisfield (1991).

No modelo implementado faz-se interpolação quadrática para  $u$ , e cúbica para  $v$  e  $w$ . Essa última satisfaz a compatibilidade entre elementos garantindo a continuidade nos extremos tanto de  $v$  e  $v'$ , continuidade  $C^1$ , e de  $w$  e  $w'$ . A condição de completude também é satisfeita, o que assegura a convergência da solução com o aumento do número de elementos.

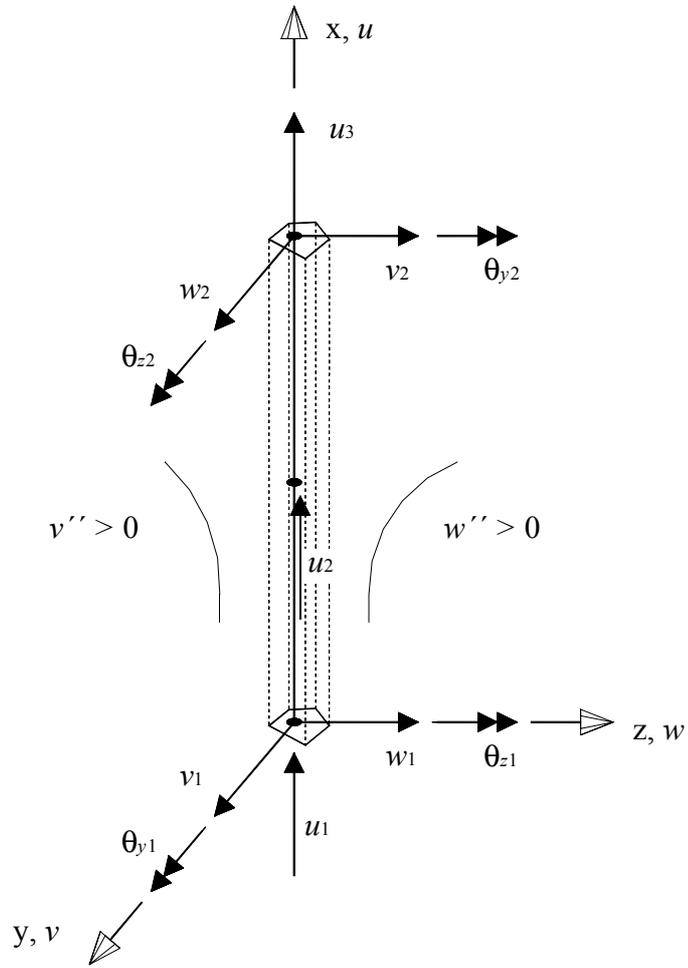


Figura 6.5 Eixos de referência e graus de liberdade locais.

No modelo, as componentes de deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$  são aproximados em função dos deslocamentos nodais locais generalizados<sup>1</sup>  $\mathbf{q}^T = [\mathbf{q}_u^T \quad \mathbf{q}_v^T \quad \mathbf{q}_w^T]$ , sendo

$$\mathbf{q}_u^T = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]$$

$$\mathbf{q}_v^T = [v_1 \quad \theta_{z1} \quad v_2 \quad \theta_{z2}]$$

$$\mathbf{q}_w^T = [w_1 \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{y2}]$$

(6.33)

<sup>1</sup>A notação  $\mathbf{q}$  será empregada para representar vetor linha.

e, usando-se os polinômios

$$\phi_u = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\xi(\xi-1) \\ 1-\xi^2 \\ \frac{1}{2}\xi(\xi+1) \end{Bmatrix}$$

$$\phi_v = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}-\frac{3}{4}\xi+\frac{1}{4}\xi^3 \\ \frac{\ell}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\xi-\frac{1}{4}\xi^2-\frac{1}{4}\xi^3\right) \\ \frac{1}{2}+\frac{3}{4}\xi-\frac{1}{4}\xi^3 \\ \frac{\ell}{2}\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\xi+\frac{1}{4}\xi^2+\frac{1}{4}\xi^3\right) \end{Bmatrix}$$

$$\phi_w = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}-\frac{3}{4}\xi+\frac{1}{4}\xi^3 \\ -\frac{\ell}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\xi-\frac{1}{4}\xi^2-\frac{1}{4}\xi^3\right) \\ \frac{1}{2}+\frac{3}{4}\xi-\frac{1}{4}\xi^3 \\ -\frac{\ell}{2}\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\xi+\frac{1}{4}\xi^2+\frac{1}{4}\xi^3\right) \end{Bmatrix} \quad (6.34)$$

como funções de interpolação na coordenada generalizada  $\xi = \frac{2}{\ell}x - 1$ , tem-se

$$u = \phi_u^T \mathbf{q}_u$$

$$v = \phi_v^T \mathbf{q}_v$$

$$w = \phi_w^T \mathbf{q}_w \quad (6.35)$$

As derivadas dessas expressões em relação à coordenada  $x$  fornece

$$\begin{aligned}
u' &= \phi_u'^T \mathbf{q}_u \\
v' &= \phi_v'^T \mathbf{q}_v \\
w' &= \phi_w'^T \mathbf{q}_w
\end{aligned} \tag{6.36}$$

e, em relação a  $\mathbf{q}$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u'}{\partial \mathbf{q}} &= \begin{Bmatrix} \phi_u' \\ \mathbf{0}_v \\ \mathbf{0}_w \end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \phi_v' \\ \mathbf{0}_w \end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial w'}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \\ \phi_w' \end{Bmatrix}, \\
\frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \phi_v'' \\ \mathbf{0}_w \end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial w''}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \\ \phi_w'' \end{Bmatrix}.
\end{aligned} \tag{6.37}$$

Observa-se a presença das rotações  $\theta$  nos graus de liberdade generalizados, mas, pela hipótese de rotações moderadas,  $\theta_x \cong v'$  e  $\theta_y \cong -w'$ , Figura 6.2, ficando assegurada a continuidade de  $v'$  e  $w'$ . A Figura 6.5 mostra o eixo local  $xyz$  e os graus de liberdade locais do elemento.

Derivando as funções de interpolação, expressões (6.34), tem-se

$$\begin{aligned}
\phi_u'^T &= \left[ \frac{2}{\ell} \left( \xi - \frac{1}{2} \right) \quad \frac{2}{\ell} (-2\xi) \quad \frac{2}{\ell} \left( \xi + \frac{1}{2} \right) \right] \\
\phi_v'^T &= \left[ \frac{2}{\ell} \left( -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \xi^2 \right) \quad -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \xi + \frac{3}{4} \xi^2 \quad \frac{2}{\ell} \left( \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \xi^2 \right) \quad -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \xi + \frac{3}{4} \xi^2 \right]
\end{aligned} \tag{6.38a}$$

$$\begin{aligned}
\phi_w'^T &= \left[ \frac{2}{\ell} \left( -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \xi^2 \right) + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \xi - \frac{3}{4} \xi^2 \quad \frac{2}{\ell} \left( \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \xi^2 \right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \xi - \frac{3}{4} \xi^2 \right] \\
\phi_v'^T &= \left[ \frac{4}{\ell^2} \left( \frac{3}{2} \xi \right) \quad \frac{2}{\ell} \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \xi \right) \quad \frac{4}{\ell^2} \left( -\frac{3}{2} \xi \right) \quad \frac{2}{\ell} \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \xi \right) \right] \\
\phi_w''^T &= \left[ \frac{4}{\ell^2} \left( \frac{3}{2} \xi \right) \quad -\frac{2}{\ell} \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \xi \right) \quad \frac{4}{\ell^2} \left( -\frac{3}{2} \xi \right) \quad -\frac{2}{\ell} \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \xi \right) \right] \quad (6.38b)
\end{aligned}$$

e, com relação às derivadas referidas a  $\mathbf{q}$ , os vetores nulos presentes em (6.37) são definidos como

$$\begin{aligned}
\mathbf{0}_u^T &= [0 \quad 0 \quad 0] \\
\mathbf{0}_v^T &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \\
\mathbf{0}_w^T &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]. \quad (6.39)
\end{aligned}$$

Substituindo as devidas relações nas expressões (6.32) e (6.20), obtém-se, respectivamente, a matriz de rigidez tangente e o vetor das forças internas no elemento.

Logo,

$$\mathbf{k}_T = \int_{\ell_m} \left[ \begin{aligned} & \left( \begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} \phi'_u \\ \mathbf{0}_v \\ \mathbf{0}_w \end{aligned} \right\} + v' \left\{ \begin{aligned} \mathbf{0}_u \\ \phi'_v \\ \mathbf{0}_w \end{aligned} \right\} + w' \left\{ \begin{aligned} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \\ \phi'_w \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right) \left\{ \frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} \right\}^T \\ & + N_x \left( \begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} \mathbf{0}_u \\ \phi'_v \\ \mathbf{0}_w \end{aligned} \right\} \left[ \mathbf{0}_u \quad \phi'_v \quad \mathbf{0}_w \right] + \left\{ \begin{aligned} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \\ \phi'_w \end{aligned} \right\} \left[ \mathbf{0}_u \quad \mathbf{0}_v \quad \phi'_w \right] \end{aligned} \right) dx \\ & - \left\{ \begin{aligned} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \\ \phi''_w \end{aligned} \right\} \left\{ \frac{\partial M_y}{\partial \mathbf{q}} \right\}^T + \left\{ \begin{aligned} \mathbf{0}_u \\ \phi''_v \\ \mathbf{0}_w \end{aligned} \right\} \left\{ \frac{\partial M_z}{\partial \mathbf{q}} \right\}^T \end{aligned} \right] \quad (6.40)
\end{aligned}$$

e

$$\mathbf{f}_m = \int_{\ell_m} \left[ N_x \left( \begin{Bmatrix} \phi'_u \\ \mathbf{0}_v \\ \mathbf{0}_w \end{Bmatrix} + v' \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \phi'_v \\ \mathbf{0}_w \end{Bmatrix} + w' \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \\ \phi'_w \end{Bmatrix} \right) - M_y \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \\ \phi''_w \end{Bmatrix} + M_z \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \phi''_v \\ \mathbf{0}_w \end{Bmatrix} \right] dx \quad (6.41)$$

Estas expressões podem ser particionadas e, em função da presença dos vetores nulos, fica-se com

$$\mathbf{k}_T = \int_{\ell_m} \left[ \begin{array}{c} \phi'_u \left\{ \frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} \right\}^T \\ \phi'_v \left( v' \left\{ \frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} \right\}^T + N_x \begin{bmatrix} \mathbf{0}_u & \phi'_v & \mathbf{0}_w \end{bmatrix} \right) + \phi''_v \left\{ \frac{\partial M_z}{\partial \mathbf{q}} \right\}^T \\ \phi'_w \left( w' \left\{ \frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} \right\}^T + N_x \begin{bmatrix} \mathbf{0}_u & \mathbf{0}_v & \phi'_w \end{bmatrix} \right) - \phi''_w \left\{ \frac{\partial M_y}{\partial \mathbf{q}} \right\}^T \end{array} \right] dx \quad (6.42)$$

e,

$$\mathbf{f}_m = \int_{\ell_m} \left[ \begin{array}{c} N_x \phi'_u \\ N_x v' \phi'_v + M_z \phi''_v \\ N_x w' \phi'_w - M_y \phi''_w \end{array} \right] dx. \quad (6.43)$$

### 6.5.1 Derivada dos Esforços Internos

Para obtenção da matriz de rigidez do elemento, expressão (6.42), são necessárias as derivadas de  $N_x$ ,  $M_y$  e  $M_z$  em relação aos deslocamentos nodais generalizados  $\mathbf{q}$ . De (6.12), tem-se

$$\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \iint_{A_m} \sigma_x dA = \iint_{A_m} \frac{\partial \sigma_x}{\partial \mathbf{q}} dA = \iint_{A_m} \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{q}} dA = \iint_{A_m} E_T \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{q}} dA$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_y}{\partial \mathbf{q}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \iint_{A_m} \sigma_x z dA = \iint_{A_m} \frac{\partial \sigma_x}{\partial \mathbf{q}} z dA = \iint_{A_m} E_T \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{q}} z dA \\ \frac{\partial M_z}{\partial \mathbf{q}} &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \iint_{A_m} \sigma_x y dA = -\iint_{A_m} \frac{\partial \sigma_x}{\partial \mathbf{q}} y dA = -\iint_{A_m} E_T \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{q}} y dA\end{aligned}\quad (6.44)$$

onde  $E_T$  é o módulo de elasticidade tangente do material, e, a partir de (6.3), tem-se

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial u'}{\partial \mathbf{q}} + v' \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} + w' \frac{\partial w'}{\partial \mathbf{q}} - y \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} - z \frac{\partial w''}{\partial \mathbf{q}}. \quad (6.45)$$

Substituindo a expressão (6.45) em (6.44), e utilizando as relações apresentadas, obtém-se as expressões

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} &= \iint_{A_m} E_T \left( \begin{Bmatrix} \phi'_u \\ \mathbf{0}_v \\ \mathbf{0}_w \end{Bmatrix} + v' \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \phi'_v \\ \mathbf{0}_w \end{Bmatrix} + w' \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \\ \phi'_w \end{Bmatrix} \right) dA - \iint_{A_m} E_T \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \phi''_v \\ \mathbf{0}_w \end{Bmatrix} y dA + \\ &\quad - \iint_{A_m} E_T \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \\ \phi''_w \end{Bmatrix} z dA \\ \frac{\partial M_y}{\partial \mathbf{q}} &= \iint_{A_m} E_T \left( \begin{Bmatrix} \phi'_u \\ \mathbf{0}_v \\ \mathbf{0}_w \end{Bmatrix} + v' \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \phi'_v \\ \mathbf{0}_w \end{Bmatrix} + w' \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \\ \phi'_w \end{Bmatrix} \right) z dA - \iint_{A_m} E_T \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \phi''_v \\ \mathbf{0}_w \end{Bmatrix} z y dA + \\ &\quad - \iint_{A_m} E_T \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \\ \phi''_w \end{Bmatrix} z^2 dA\end{aligned}\quad (6.46a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_z}{\partial \mathbf{q}} = & - \iint_{A_m} E_T \left( \begin{Bmatrix} \phi'_u \\ \mathbf{0}_v \\ \mathbf{0}_w \end{Bmatrix} + v' \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \phi'_v \\ \mathbf{0}_w \end{Bmatrix} + w' \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \\ \phi'_w \end{Bmatrix} \right) y dA + \iint_{A_m} E_T \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \phi''_v \\ \mathbf{0}_w \end{Bmatrix} y^2 dA + \\ & + \iint_{A_m} E_T \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \\ \phi''_w \end{Bmatrix} y z dA \end{aligned} \quad (6.46b)$$

que podem ser reescritas da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} = & \left\{ \begin{array}{l} \phi'_u \iint_{A_m} E_T dA \\ v' \phi'_v \iint_{A_m} E_T dA - \phi''_v \iint_{A_m} E_T y dA \\ w' \phi'_w \iint_{A_m} E_T dA - \phi''_w \iint_{A_m} E_T z dA \end{array} \right\} \\ \\ \frac{\partial M_y}{\partial \mathbf{q}} = & \left\{ \begin{array}{l} \phi'_u \iint_{A_m} E_T z dA \\ v' \phi'_v \iint_{A_m} E_T z dA - \phi''_v \iint_{A_m} E_T z y dA \\ w' \phi'_w \iint_{A_m} E_T z dA - \phi''_w \iint_{A_m} E_T z^2 dA \end{array} \right\} \\ \\ \frac{\partial M_z}{\partial \mathbf{q}} = & \left\{ \begin{array}{l} -\phi'_u \iint_{A_m} E_T y dA \\ -v' \phi'_v \iint_{A_m} E_T y dA + \phi''_v \iint_{A_m} E_T y^2 dA \\ -w' \phi'_w \iint_{A_m} E_T y dA + \phi''_w \iint_{A_m} E_T y z dA \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (6.47)$$

As expressões de rigidez generalizada

$$\iint_{A_m} E_T dA,$$

$$\begin{aligned}
& \iint_{A_m} E_T y dA, \\
& \iint_{A_m} E_T z dA, \\
& \iint_{A_m} E_T zy dA, \\
& \iint_{A_m} E_T z^2 dA \text{ e} \\
& \iint_{A_m} E_T y^2 dA
\end{aligned} \tag{6.48}$$

que aparecem nas expressões (6.47) podem ser avaliadas pela técnica de integração apresentada no Capítulo 3. É interessante observar que para barras prismáticas com material linear as integrais de (6.48) representam os momentos de área das seções transversais.

### 6.5.2 Rigidezes Generalizadas

Neste item, obtém-se as rigidezes generalizadas dadas pelas expressões (6.48), que aparecem em (6.47) nas derivadas dos esforços internos. Para

$$\iint_{A_m} E_T dA \tag{6.49}$$

tem-se

$$\begin{aligned}
\iint_{A_m} E_T dA = & \underbrace{\iint_{A_c} E_{Tc} dA}_{\text{concreto}} + \underbrace{\iint_{A_p} E_{Tp} dA - \iint_{A_p} E_{Tc} dA}_{\text{concreto sobreposto}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_f} \left( \iint_{A_{fi}} E_{Tc} dA \right)}_{\text{aberturas}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_s} \iint_{A_{si}} E_{Tsi} dA}_{\text{armaduras}}
\end{aligned} \tag{6.50}$$

onde, para o componente concreto, considerando as faixas tensão-deformação da Figura 3.2, tem-se

$$\iint_{A_c} E_{T_c} dA = \iint_{A_{c1}} E_{T_c} dA + \iint_{A_{c2}} E_{T_c} dA. \quad (6.51)$$

Logo, tem-se

$$(E_{T_c})_{A_{c1}} = \left( \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon_x} \right)_{A_{c1}} = \frac{\partial [(a\varepsilon_x + b\varepsilon_x^2)f_c]}{\partial \varepsilon_x} = af_c + 2b\varepsilon_x f_c,$$

$$(E_{T_c})_{A_{c2}} = \left( \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon_x} \right)_{A_{c2}} = 0. \quad (6.52)$$

Observa-se que o termo referente à faixa denominada  $A_{c2}$  da Figura 3.2 é nulo, pois, tem-se a faixa referente ao retângulo na relação tensão-deformação parábola-retângulo utilizada para o concreto. Substituindo (6.52) em (6.51) tem-se

$$\iint_{A_c} E_{T_c} dA = \iint_{A_{c1}} (af_c + 2b\varepsilon_x f_c) dA. \quad (6.53)$$

Tomando a expressão (6.4),  $\varepsilon_x = \varepsilon_o - yk_z + zk_y$ , e substituindo em (6.53) obtém-se

$$\iint_{A_c} E_{T_c} dA = \iint_{A_{c1}} [af_c + 2b(\varepsilon_o - yk_z + zk_y)f_c] dA, \quad (6.54)$$

que pode ser reescrita

$$\iint_{A_c} E_{T_c} dA = (af_c) \iint_{A_{c1}} dA + (2b\varepsilon_o f_c) \iint_{A_{c1}} dA - (2bk_z f_c) \iint_{A_{c1}} y dA + (2bk_y f_c) \iint_{A_{c1}} z dA \quad (6.55)$$

e, utilizando-se das expressões (3.16), (3.17) e (3.18) e observando os eixos globais e seccionais definidos na Figura 6.1 chega-se a

$$\iint_{A_c} E_{Tc} dA = af_c(I_{00})_{A_{c1}} + 2b\varepsilon_o f_c(I_{00})_{A_{c1}} - 2bk_z f_c(I_{10})_{A_{c1}} + 2bk_y f_c(I_{01})_{A_{c1}} \quad (6.56)$$

Para o perfil de aço, observando as faixas do diagrama tensão-deformação, item 3.5.3, tem-se de forma análoga

$$\iint_{A_p} E_{Tp} dA = \underbrace{\iint_{A_{p1}} E_{Tp} dA}_{\text{nulo}} + \iint_{A_{p2}} E_{Tp} dA + \underbrace{\iint_{A_{p3}} E_{Tp} dA}_{\text{nulo}}. \quad (6.57)$$

Obtém-se portanto

$$\iint_{A_p} E_{Tp} dA = \iint_{A_{p2}} E_p dA = E_p \iint_{A_{p2}} dA, \quad (6.58)$$

e, chega-se a

$$\iint_{A_p} E_{Tp} dA = E_p (I_{00})_{A_{p2}}. \quad (6.59)$$

Para a consideração das aberturas na seção, como estas tem os vértices definidos no sentido horário, simplesmente aplica-se a expressão (6.56) na poligonal que define a abertura, conforme a expressão

$$\iint_{A_{\beta}} E_{Tc} dA = af_c(I_{00})_{A_{\beta1}} + 2b\varepsilon_o f_c(I_{00})_{A_{\beta1}} - 2bk_z f_c(I_{10})_{A_{\beta1}} + 2bk_y f_c(I_{01})_{A_{\beta1}} \quad (6.60)$$

que resulta em uma integral em sentido contrário à integral da expressão (6.56) pois a definição dos vértices das aberturas foi feita no sentido horário.

Para as armaduras, como estas são definidas pontualmente, após a obtenção da deformação, expressão (6.4), obtém-se o módulo de elasticidade também de forma analítica através das derivadas das expressões (3.9) e (3.10) em relação à deformação  $\varepsilon_x$ ;

$$\sum_{i=1}^{n_s} \iint_{A_{si}} E_{Tsi} dA = \sum_{i=1}^{n_s} E_{si} A_{si} . \quad (6.61)$$

Observa-se que, como se definem as poligonais do perfil, furos e armaduras pontuais no interior da poligonal que define o componente concreto, deve-se descontar as partes sobrepostas pelo perfil e armaduras. No caso das aberturas, viu-se que a expressão (6.60) já fornece a integração em sentido contrário. No caso das armaduras essa sobreposição é pequena e, portanto, desprezada. No caso do perfil o que se faz é a integração utilizando-se a expressão (6.56) sobre a área do perfil, posteriormente, essa é subtraída na expressão (6.50). Esse procedimento é análogo ao descrito no Capítulo 3 na obtenção dos esforços na seção.

Tem-se, portanto, para a expressão (6.49)

$$\begin{aligned} \iint_{A_m} E_T dA = & \underbrace{\iint_{A_c} E_{Tc} dA}_{\text{concreto}} + \underbrace{\iint_{A_p} E_{Tp} dA - \iint_{A_p} E_{Tc} dA}_{\substack{\text{concreto sobreposto} \\ \text{perfil}}} + \sum_{i=1}^{n_f} \left( \underbrace{\iint_{A_{fi}} E_{Tc} dA}_{\text{aberturas}} \right) + \\ & + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_s} \iint_{A_{si}} E_{Tsi} dA}_{\text{armaduras}} \end{aligned} \quad (6.62)$$

que finalmente, utilizando as expressões (6.56), (6.59), (6.60), (6.61) e utilizando-se as observações feitas, pode ser escrita da forma

$$\begin{aligned}
\iint_{A_m} E_T dA &= \underbrace{af_c(I_{00})_{A_{c1}} + 2b\varepsilon_o f_c(I_{00})_{A_{c1}} - 2bk_z f_c(I_{10})_{A_{c1}} + 2bk_y f_c(I_{01})_{A_{c1}}}_{\text{concreto}} + \\
&+ E_p(I_{00})_{A_{p2}} - \underbrace{\left[ af_c(I_{00})_{A_{c1}} + 2b\varepsilon_o f_c(I_{00})_{A_{c1}} - 2bk_z f_c(I_{10})_{A_{c1}} + 2bk_y f_c(I_{01})_{A_{c1}} \right]}_{\text{concreto sobreposto}}_{A_p} + \\
&\underbrace{\sum_{i=1}^{nf} \left[ af_c(I_{00})_{A_{c1}} + 2b\varepsilon_o f_c(I_{00})_{A_{c1}} - 2bk_z f_c(I_{10})_{A_{c1}} + 2bk_y f_c(I_{01})_{A_{c1}} \right]}_{\text{aberturas}}_{A_{fi}} + \\
&\underbrace{\sum_{i=1}^{ns} E_{Tsi} A_{si}}_{\text{armaduras}}
\end{aligned} \tag{6.63}$$

As demais expressões de rigidezes generalizadas, expressões (6.48)

$$\iint_{A_m} E_T y dA,$$

$$\iint_{A_m} E_T z dA,$$

$$\iint_{A_m} E_T zy dA,$$

$$\iint_{A_m} E_T z^2 dA \text{ e}$$

$$\iint_{A_m} E_T y^2 dA,$$

(6.64)

são obtidas de forma análoga, diferenciando-se apenas pela presença dos termos  $z$ ,  $y$ ,  $z^2$  e  $y^2$ , portando influenciando apenas nas expressões das integrais  $I_{ab}$  que aparecem na expressão (6.63), logo, para

$$\iint_{A_m} E_T y dA, \quad (6.65)$$

tem-se

$$\begin{aligned} \iint_{A_m} E_T y dA &= \underbrace{af_c(I_{10})_{A_{c1}} + 2b\varepsilon_o f_c(I_{10})_{A_{c1}} - 2bk_z f_c(I_{20})_{A_{c1}} + 2bk_y f_c(I_{11})_{A_{c1}}}_{\text{concreto}} + \\ &+ E_p(I_{10})_{A_{p2}} - \underbrace{\left[af_c(I_{10})_{A_{c1}} + 2b\varepsilon_o f_c(I_{10})_{A_{c1}} - 2bk_z f_c(I_{20})_{A_{c1}} + 2bk_y f_c(I_{11})_{A_{c1}}\right]_{A_p}}_{\text{concreto sobreposto}} + \\ &\underbrace{\left[af_c(I_{10})_{A_{c1}} + 2b\varepsilon_o f_c(I_{10})_{A_{c1}} - 2bk_z f_c(I_{20})_{A_{c1}} + 2bk_y f_c(I_{11})_{A_{c1}}\right]_{A_{fi}}}_{\text{perfil}} + \\ &+ \sum_{i=1}^{nf} \underbrace{\left[af_c(I_{10})_{A_{c1}} + 2b\varepsilon_o f_c(I_{10})_{A_{c1}} - 2bk_z f_c(I_{20})_{A_{c1}} + 2bk_y f_c(I_{11})_{A_{c1}}\right]_{A_{fi}}}_{\text{aberturas}} + \\ &\quad + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_s} E_{si} y A_{si}}_{\text{armaduras}} \end{aligned} \quad (6.66)$$

Para a rigidez generalizada, expressões (6.64), dada por

$$\iint_{A_m} E_T z dA, \quad (6.67)$$

tem-se

$$\begin{aligned} \iint_{A_m} E_T z dA &= \underbrace{af_c(I_{01})_{A_{c1}} + 2b\varepsilon_o f_c(I_{01})_{A_{c1}} - 2bk_z f_c(I_{11})_{A_{c1}} + 2bk_y f_c(I_{02})_{A_{c1}}}_{\text{concreto}} + \\ &+ E_p(I_{01})_{A_{p2}} - \underbrace{\left[af_c(I_{01})_{A_{c1}} + 2b\varepsilon_o f_c(I_{01})_{A_{c1}} - 2bk_z f_c(I_{11})_{A_{c1}} + 2bk_y f_c(I_{02})_{A_{c1}}\right]_{A_p}}_{\text{concreto sobreposto}} + \\ &\underbrace{\left[af_c(I_{01})_{A_{c1}} + 2b\varepsilon_o f_c(I_{01})_{A_{c1}} - 2bk_z f_c(I_{11})_{A_{c1}} + 2bk_y f_c(I_{02})_{A_{c1}}\right]_{A_{fi}}}_{\text{perfil}} + \\ &+ \sum_{i=1}^{nf} \underbrace{\left[af_c(I_{01})_{A_{c1}} + 2b\varepsilon_o f_c(I_{01})_{A_{c1}} - 2bk_z f_c(I_{11})_{A_{c1}} + 2bk_y f_c(I_{02})_{A_{c1}}\right]_{A_{fi}}}_{\text{aberturas}} + \\ &\quad + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_s} E_{si} z A_{si}}_{\text{armaduras}} \end{aligned} \quad (6.68)$$

Para  $\iint_{A_m} E_T zy dA$ , tem-se

$$\begin{aligned}
\iint_{A_m} E_T zy dA &= \underbrace{af_c(I_{11})_{A_{c1}} + 2b\varepsilon_o f_c(I_{11})_{A_{c1}} - 2bk_z f_c(I_{21})_{A_{c1}} + 2bk_y f_c(I_{12})_{A_{c1}}}_{\text{concreto}} + \\
&+ E_p(I_{11})_{A_{p2}} - \underbrace{\left[af_c(I_{11})_{A_{c1}} + 2b\varepsilon_o f_c(I_{11})_{A_{c1}} - 2bk_z f_c(I_{21})_{A_{c1}} + 2bk_y f_c(I_{12})_{A_{c1}}\right]}_{\text{concreto sobreposto}}_{A_p} + \\
&\underbrace{\sum_{i=1}^{nf} \left[af_c(I_{11})_{A_{c1}} + 2b\varepsilon_o f_c(I_{11})_{A_{c1}} - 2bk_z f_c(I_{21})_{A_{c1}} + 2bk_y f_c(I_{12})_{A_{c1}}\right]}_{\text{aberturas}}_{A_{fi}} + \\
&\quad + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_s} E_{si} zy A_{si}}_{\text{armaduras}}
\end{aligned} \tag{6.69}$$

Para  $\iint_{A_m} E_T z^2 dA$ , tem-se

$$\begin{aligned}
\iint_{A_m} E_T z^2 dA &= \underbrace{af_c(I_{02})_{A_{c1}} + 2b\varepsilon_o f_c(I_{02})_{A_{c1}} - 2bk_z f_c(I_{12})_{A_{c1}} + 2bk_y f_c(I_{03})_{A_{c1}}}_{\text{concreto}} + \\
&+ E_p(I_{02})_{A_{p2}} - \underbrace{\left[af_c(I_{02})_{A_{c1}} + 2b\varepsilon_o f_c(I_{02})_{A_{c1}} - 2bk_z f_c(I_{12})_{A_{c1}} + 2bk_y f_c(I_{03})_{A_{c1}}\right]}_{\text{concreto sobreposto}}_{A_p} + \\
&\underbrace{\sum_{i=1}^{nf} \left[af_c(I_{02})_{A_{c1}} + 2b\varepsilon_o f_c(I_{02})_{A_{c1}} - 2bk_z f_c(I_{12})_{A_{c1}} + 2bk_y f_c(I_{03})_{A_{c1}}\right]}_{\text{aberturas}}_{A_{fi}} + \\
&\quad + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_s} E_{si} z^2 A_{si}}_{\text{armaduras}}
\end{aligned} \tag{6.70}$$

e, finalmente, para  $\iint_{A_m} E_T y^2 dA$ , tem-se a expressão

$$\begin{aligned}
\iint_{A_m} E_T y^2 dA &= \underbrace{af_c(I_{20})_{A_{c1}} + 2b\varepsilon_o f_c(I_{20})_{A_{c1}} - 2bk_z f_c(I_{30})_{A_{c1}} + 2bk_y f_c(I_{21})_{A_{c1}}}_{\text{concreto}} + \\
&+ E_p(I_{20})_{A_{p2}} - \underbrace{\left[af_c(I_{20})_{A_{c1}} + 2b\varepsilon_o f_c(I_{20})_{A_{c1}} - 2bk_z f_c(I_{30})_{A_{c1}} + 2bk_y f_c(I_{21})_{A_{c1}}\right]}_{\text{concreto sobreposto}}_{A_p} + \\
&\underbrace{\sum_{i=1}^{nf} \left[af_c(I_{20})_{A_{c1}} + 2b\varepsilon_o f_c(I_{20})_{A_{c1}} - 2bk_z f_c(I_{30})_{A_{c1}} + 2bk_y f_c(I_{21})_{A_{c1}}\right]}_{\text{aberturas}}_{A_{fi}} + \\
&\underbrace{\sum_{i=1}^{n_s} E_{si} y^2 A_{si}}_{\text{armaduras}}
\end{aligned} \tag{6.71}$$

Observa-se que, conhecida a geometria da seção e os valores dos parâmetros de deformação,  $\varepsilon_0$ ,  $k_x$  e  $k_y$ , pode-se obter a força interna e a matriz de rigidez tangente, através da integração numérica das expressões (6.42) e (6.43), ou seja,

$$\mathbf{k}_T = \sum_{i=1}^{npt} \begin{bmatrix} \phi'_u \left\{ \frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} \right\}^T \\ \phi'_v \left( v' \left\{ \frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} \right\}^T + N_x \begin{bmatrix} \mathbf{0}_u & \phi'_v & \mathbf{0}_w \end{bmatrix} \right) + \phi''_v \left\{ \frac{\partial M_z}{\partial \mathbf{q}} \right\}^T \\ \phi'_w \left( w' \left\{ \frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} \right\}^T + N_x \begin{bmatrix} \mathbf{0}_u & \mathbf{0}_v & \phi'_w \end{bmatrix} \right) - \phi''_w \left\{ \frac{\partial M_y}{\partial \mathbf{q}} \right\}^T \end{bmatrix} W_i |\mathbf{J}| \tag{6.72}$$

e,

$$\mathbf{f}_m = \sum_{i=1}^{npt} \begin{bmatrix} N_x \phi'_u \\ N_x v' \phi'_v + M_z \phi''_v \\ N_x w' \phi'_w - M_y \phi''_w \end{bmatrix} W_i |\mathbf{J}|. \tag{6.73}$$

Nas expressões (6.72) e (6.73),  $W$  são os pesos correspondentes aos pontos de integração e,  $\mathbf{J}$ , a matriz jacobiana.

## 6.6 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

A formulação apresentada neste capítulo foi implementada utilizando-se a técnica de programação orientada a objetos, OOP, em linguagem C++. Como base para a implementação utilizou-se o programa FEMOOP, *Finite Element Method Object Oriented Program* ([www.lmc.ep.usp.br/people/tbitten/femoop/home.htm](http://www.lmc.ep.usp.br/people/tbitten/femoop/home.htm)). Com a OOP somente foi necessária a criação de classes a partir da herança de outras voltadas para a análise de elementos de viga já implementados no FEMOOP. Toda parte de resolução do sistema não-linear de equações foi desenvolvida em trabalhos anteriores. As novas classes contêm as informações necessárias para as análises conforme o modelo apresentado neste capítulo. Basicamente foi necessária a criação de duas novas classes: uma contendo o modelo de análise onde se definem os graus de liberdade do elemento que deverão ser avaliados e conseqüentemente os vetores e dados necessários; a outra classe contém as matrizes de rigidez, força interna e demais funções necessárias à obtenção destas.

A entrada e saída de dados do programa são feitas através de arquivos neutros ([www.tecgraf.puc-rio.br/neutralfile](http://www.tecgraf.puc-rio.br/neutralfile)). O arquivo neutro, *Neutral File*, é criado com os objetivos de conter todas as informações necessárias para os programas de pré e pós-processamento e análise por elementos finitos, ser facilmente legível para programas em FORTRAN, C ou C++ e ter uma estrutura simples.

O FEMOOP originou-se de trabalhos desenvolvidos na PUC-Rio desde 1990 (Guimarães, 1992). Desde então o programa tem sido utilizado por diversos trabalhos em várias universidades do Brasil (Parente Jr., 2000; Sousa Jr., 2000). Na UFOP, este é o primeiro trabalho de mestrado utilizando o programa.

Na implementação realizada neste trabalho, necessitou-se fazer a condensação estática (Cook *et al.*, 1989) do grau de liberdade  $u_2$ , Figura 6.5, uma vez que no FEMOOP, os modelos de análise de elementos de barra supõem elementos com até seis graus de liberdade nos pontos nodais localizados em suas extremidades. O processo ocorre da seguinte forma: começa-se a solução do sistema de equações formado pela matriz de rigidez do elemento e interrompe-se o processo antes da matriz de rigidez ser totalmente reduzida.

Supondo que a matriz  $\mathbf{k}$  seja a matriz de rigidez do elemento apresentado na Figura 6.5, definida pela expressão 6.42, e dividindo-se os graus de liberdade locais  $\mathbf{q}$  em  $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_r \quad \mathbf{q}_c]^T$ , onde  $\mathbf{q}_r$  são os graus de liberdade que serão mantidos e  $\mathbf{q}_c$  são os graus de liberdade que serão eliminados através da condensação, tem-se,  $\mathbf{k}\mathbf{q} = \mathbf{r}$ , que pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{rr} & \mathbf{k}_{rc} \\ \mathbf{k}_{cr} & \mathbf{k}_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_r \\ \mathbf{q}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_r \\ \mathbf{r}_c \end{Bmatrix}. \quad (6.74)$$

Resolvendo a equação da parte inferior da expressão (6.74) tem-se

$$\mathbf{q}_c = -\mathbf{k}_{cc}^{-1}(\mathbf{k}_{cr} \mathbf{q}_r - \mathbf{r}_c) \quad (6.75)$$

e, substituindo-se a expressão (6.75) na equação superior da expressão (6.74) chega-se à expressão

$$\underbrace{(\mathbf{k}_{rr} - \mathbf{k}_{rc} \mathbf{k}_{cc}^{-1} \mathbf{k}_{cr})}_{\mathbf{k} \text{ condensada}} \mathbf{q}_r = \underbrace{(\mathbf{r}_r - \mathbf{k}_{rc} \mathbf{k}_{cc}^{-1} \mathbf{r}_c)}_{\mathbf{r} \text{ condensado}}. \quad (6.76)$$

O elemento é agora tratado na forma padrão: a matriz de rigidez condensada e as forças nodais condensadas são utilizadas na obtenção da matriz de rigidez da estrutura, condições de contorno são impostas e os deslocamentos são computados. Desta maneira  $\mathbf{q}_r$  torna-se conhecido e a recuperação dos graus de liberdade internos é feita conforme a expressão (6.75) (Cook *et al.*, 1989).

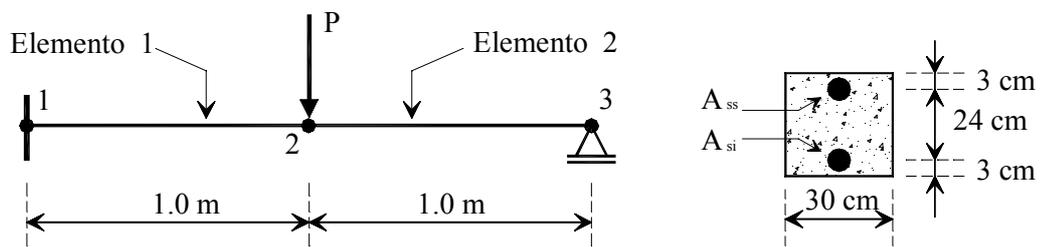
## 6.7 EXEMPLOS

No primeiro exemplo que é apresentado, procurou-se validar a formulação apresentada. Com este objetivo os resultados obtidos com a formulação em questão foram comparados com os de Melo (2000) que utilizou um modelo bastante semelhante.

Posteriormente os resultados da formulação foram comparados com ensaios e análises numéricas em pilares e vigas mistas.

### 6.7.1 Primeiro Exemplo: Viga de Concreto Engastada e Simplesmente Apoiada

Neste exemplo foram comparados os resultados obtidos por Melo (2000) na análise de uma viga de concreto armado mostrada na Figura 6.6 com os resultados obtidos segundo a formulação apresentada.



Aço: CA-50A;  $E_s = 210000 \text{ MPa}$ ;  $A_{ss} = A_{si} = 5\text{cm}^2$ ;  $f_{ys} = (500 / 1.15) \text{ Mpa}$   
 Concreto:  $f_{ck} = (18 / 1.4) \text{ MPa}$

Figura 6.6 Viga de concreto analisada (Melo, 2000).

Os resultados são apresentados no gráfico mostrado na Figura 6.7.

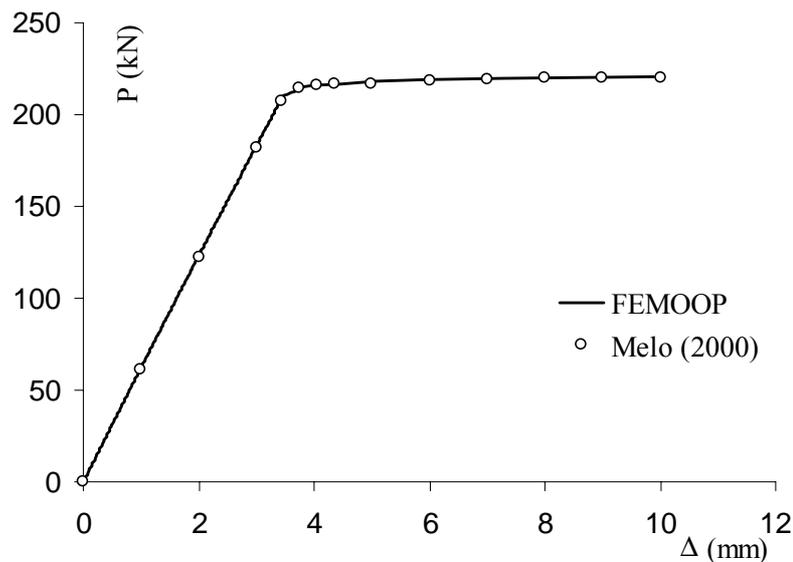


Figura 6.7 Comparação dos resultados para análise da viga de concreto, FEMOOP e Melo (2000).

No presente trabalho e em Melo (2000) os elementos utilizados possuíam dois pontos de Gauss.

### 6.7.2 Segundo Exemplo: Pilares Mistos Envolvidos

Mirza *et al.* (1996) realizaram ensaios experimentais em pilares mistos envolvidos com concreto onde os efeitos de segunda ordem eram significativos. Nesse estudo, 16 protótipos foram carregados até a falha. O carregamento aplicado incluía combinações de cargas axiais e transversais, Figura 6.8, produzindo diferentes valores de excentricidade. A razão da carga transversal para a carga axial foi mantida constante para todos os estágios de carregamentos em cada protótipo. As cargas produziam curvatura simples na flexão em relação ao eixo de maior inércia da seção, Figura 6.9. As condições de interação entre perfil e concreto foram estudadas e mostraram pouca influência na carga última.

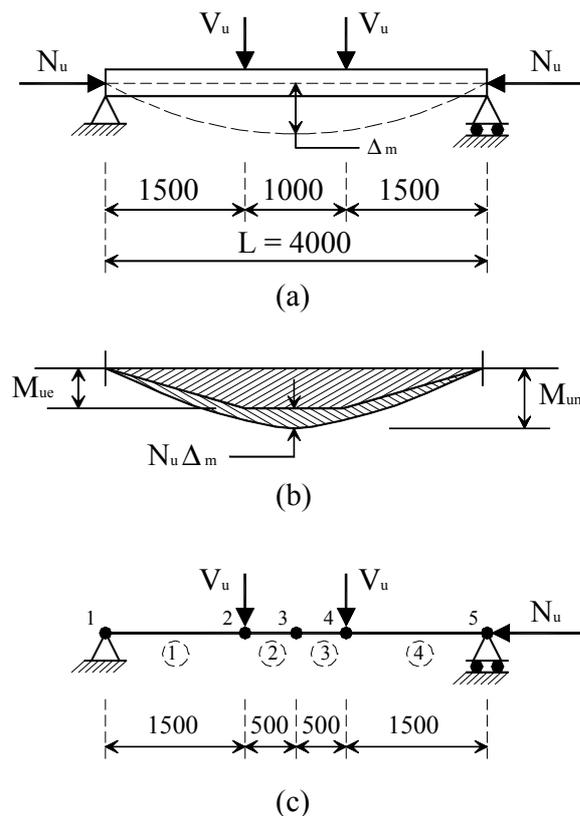


Figura 6.8 Forma de aplicação do carregamento utilizada em Mirza *et al.* (1996):

- (a) diagrama do carregamento; (b) diagrama de momentos;
- (c) modelo analisado no FEMOOP (dimensões em *mm*).

Na Figura 6.8  $M_{ue}$  é o momento aplicado, momento de primeira ordem, devido às cargas  $V_u$  e ao peso próprio do protótipo. O momento  $M_{um}$  é dado pela soma de  $M_{ue}$  mais  $N_u \Delta_m$ , sendo este o momento total na seção crítica, localizada no meio do comprimento do protótipo.

A Figura 6.9 apresenta as seções transversais utilizadas no trabalho em questão. Nestas, uma placa de aço com e sem furos é soldada ao perfil conforme a figura.

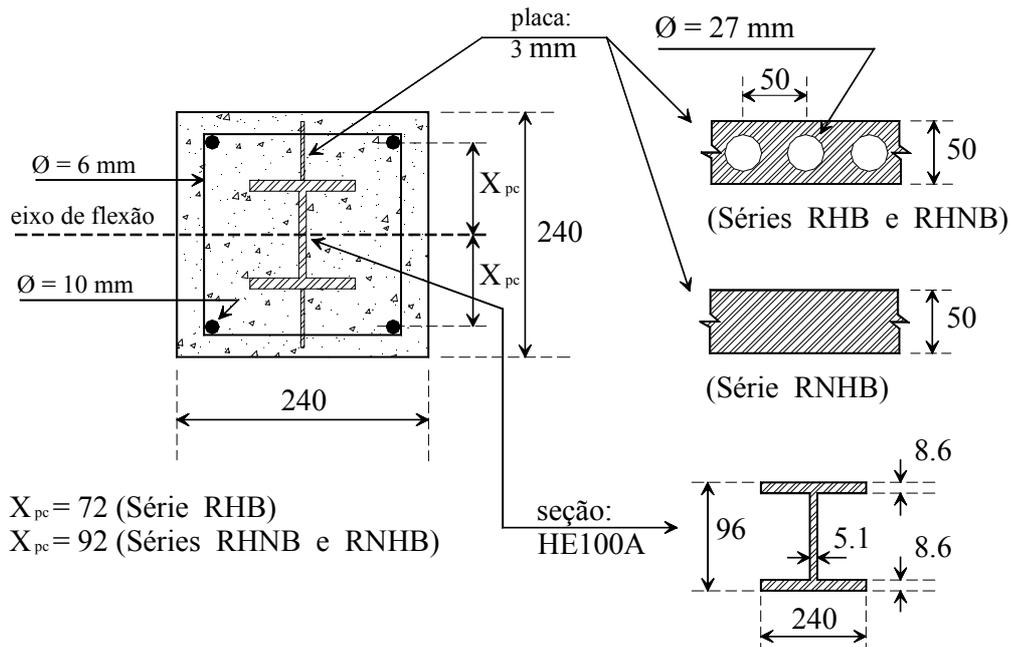


Figura 6.9 Detalhes da seção dos protótipos, dimensões em *mm* (Mirza *et al.*, 1996).

As seções dos protótipos foram agrupadas em três séries: (1) RHB que se refere a seis protótipos que possuem furos nas placas de conexão; (2) RNHB referente a cinco protótipos sem furos nas placas de conexão; (3) RHNB utilizada para se referir aos protótipos nos quais os furos da placa de conexão foram preenchidos com discos de madeira e cobertos com plástico liso e óleo no intuito de impedir qualquer ligação entre o aço das placas de conexão e o concreto envolvente. Para os protótipos da série RHB, os estribos passam através dos furos na placa agindo como uma conexão mecânica. Nos demais tipos de seção, os estribos passam fora da região das placas de conexão. Portanto, nos protótipos da série RHB, a resistência ao fluxo de cisalhamento é dada pelos estribos agindo como conectores mecânicos, pelo concreto que preenche os furos

da placa de conexão e pela adesão e atrito entre a placa de conexão e o concreto envolvente.

No presente trabalho as placas de conexão não foram modeladas uma vez que a análise feita supõe interação total entre os componentes aço e concreto. Esta suposição não será problemática já que o trabalho de Mirza *et al.* (1996) concluiu que a influência dos tipos de conexão estudados era pequena na carga última dos protótipos.

As características dos materiais utilizados nos protótipos e que também foram utilizadas no FEMOOP são apresentadas na Tabela 6.1. Na análise feita, os elementos finitos possuíam quatro pontos de Gauss. O módulo de elasticidade adotado para o aço foi de 200000 MPa.

Tabela 6.1 Propriedades mecânicas do concreto e do aço (Mirza *et al.*, 1996).

Protótipo Analisado (1)	Concreto Res. Cúbica (MPa) (2)	Concreto Res. Cilin. (MPa) (3)	Perfil $f_y$ (MPa) (4)	Armaduras $f_{ys}$ (MPa) (5)
(a) Séries RHB				
RHB-1	33.6	27.2	293.4	565.0
RHB-2	33.6	27.2	293.4	565.0
RHB-3	34.2	27.7	293.4	565.0
RHB-4	31.9	25.8	311.2	634.0
RHB-4A	31.0	25.1	293.4	565.0
RHB-5	35.3	28.6	293.4	565.0
(b) Séries RNHB				
RNHB-1	34.0	27.5	311.2	634.0
RNHB-2	34.0	27.5	311.2	634.0
RNHB-3	33.0	26.7	293.4	565.0
RNHB-4	33.6	27.2	293.4	565.0
RNHB-5	34.7	28.1	293.4	565.0
(c) Séries RHNB				
RHNB-1	34.0	27.5	311.2	634.0
RHNB-2	34.0	27.5	311.2	634.0
RHNB-3	31.9	25.8	311.2	634.0
RHNB-4	31.9	25.8	311.2	634.0
RHNB-5	31.9	25.8	311.2	634.0

Nota: A resistência cilíndrica, coluna (3), para o concreto foi calculada a partir da multiplicação do fator 0.81 à coluna (2) segundo o trabalho de Mirza *et al.* (1996).

A Tabela 6.2 apresenta a comparação dos resultados experimentais obtidos por Mirza *et al.* (1996) com os obtidos pelo presente trabalho.

Tabela 6.2 Comparação dos resultados com Mirza *et al.* (1996).

Protótipo Analisado (1)	Excentricidade Externa e/h (2)	Ensaio Desl. $\Delta_m$ (mm) (3)	FEMOOP Desl. $\Delta_m$ (mm) (4)	Ensaio $N_u$ (kN) (5)	FEMOOP $N_u$ (kN) (6)	$N_u$ (Ensaio) $N_u$ (FEMOOP) (7)	
(a) Séries RHB							
RHB-1	0.165	27.8	26.3	950.0	917.2	1.04	
RHB-2	0.274	49.1	36.3	550.0	674.3	0.82	
RHB-3	0.440	31.5	41.5	570.0	480.0	1.19	
RHB-4	0.834	59.3	46.2	307.5	275.2	1.12	
RHB-4A	1.545	56.8	48.7	154.3	155.9	0.99	
RHB-5	2.640	56.4	50.7	95.0	90.1	1.05	
(b) Séries RNHB							
RNHB-1	0.205	39.8	33.2	925.0	867.4	1.07	
RNHB-2	0.240	40.5	34.9	775.0	790.9	0.98	
RNHB-3	0.441	46.5	41.3	540.0	511.4	1.06	
RNHB-4	0.871	56.9	43.6	352.5	282.5	1.25	
RNHB-5	2.624	53.7	51.4	107.5	96.0	1.12	
(c) Séries RHNB							
RHNB-1	0.174	35.9	29.5	927.0	953.9	0.97	
RHNB-2	0.247	37.9	35.2	720.0	778.9	0.92	
RHNB-3	0.410	55.3	40.5	540.0	531.2	1.02	
RHNB-4	0.858	64.1	45.8	296.0	295.4	1.00	
RHNB-5	2.584	67.2	50.9	100.0	100.7	0.99	
Média:						1.04	
Desvio Padrão:						0.10	
Protótipo Analisado (1)	Ensaio $V_u$ (kN) (2)	FEMOOP $V_u$ (kN) (3)	$V_u$ (Ensaio) $V_u$ (FEMOOP) (4)	Ensaio $M_{um}$ (kN.m) (5)	FEMOOP $M_{um}$ (kN.m) (6)	$M_{um}$ (Ensaio) $M_{um}$ (FEMOOP) (7)	
(a) Séries RHB							
RHB-1	23.0	22.2	1.04	64.1	57.3	1.12	
RHB-2	22.0	27.0	0.82	63.2	64.8	0.97	
RHB-3	38.0	32.1	1.19	78.2	67.9	1.15	
RHB-4	38.9	34.8	1.12	79.8	62.2	1.28	
RHB-4A	36.0	36.4	0.99	66.0	64.9	1.02	
RHB-5	38.0	36.1	1.05	65.6	58.6	1.12	
(b) Séries RNHB							
RNHB-1	28.1	26.4	1.06	82.2	68.3	1.20	
RNHB-2	27.6	28.2	0.98	76.0	69.8	1.09	
RNHB-3	36.0	34.2	1.05	82.3	72.2	1.14	
RNHB-4	47.0	37.6	1.25	93.8	68.7	1.37	
RNHB-5	43.0	38.5	1.12	73.5	62.6	1.17	
(c) Séries RHNB							
RHNB-1	23.7	24.4	0.97	72.0	64.6	1.11	
RHNB-2	26.3	28.5	0.92	69.9	70.0	1.00	
RHNB-3	33.3	32.8	1.02	83.0	70.5	1.18	
RHNB-4	38.5	38.4	1.00	79.9	71.1	1.12	
RHNB-5	39.2	39.5	0.99	68.7	64.4	1.07	
Média:			1.04	Média:			1.13
Desvio Padrão:			0.10	Desvio Padrão:			0.10

Nas figuras seguintes apresentam-se as curvas carga-deslocamento obtidas por Mirza *et al.* (1996) através de ensaios experimentais e análise por elementos finitos, e as curvas obtidas no presente trabalho.

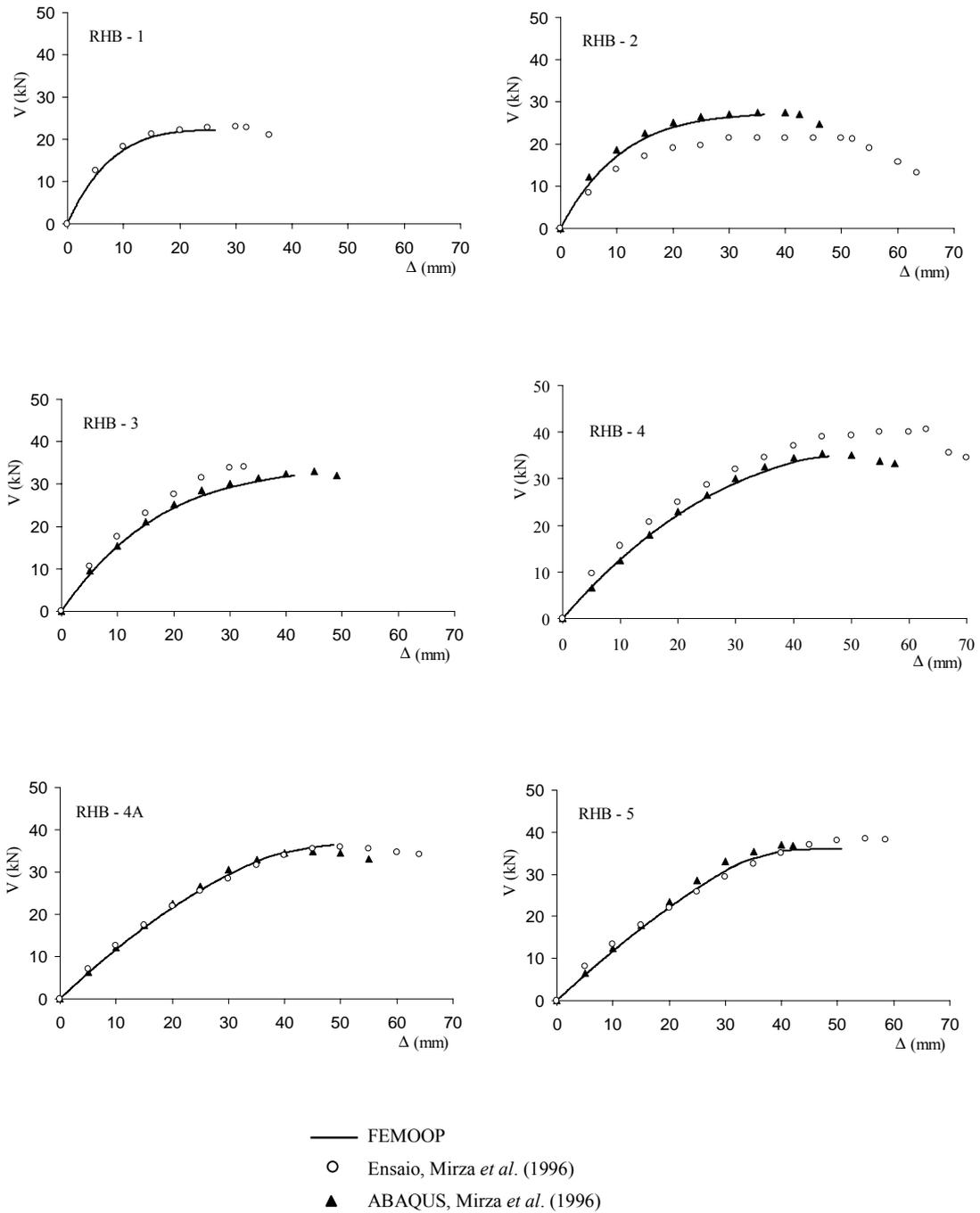


Figura 6.10 Comparação das curvas carga-deslocamento para os protótipos RHB (Mirza *et al.*, 1996).

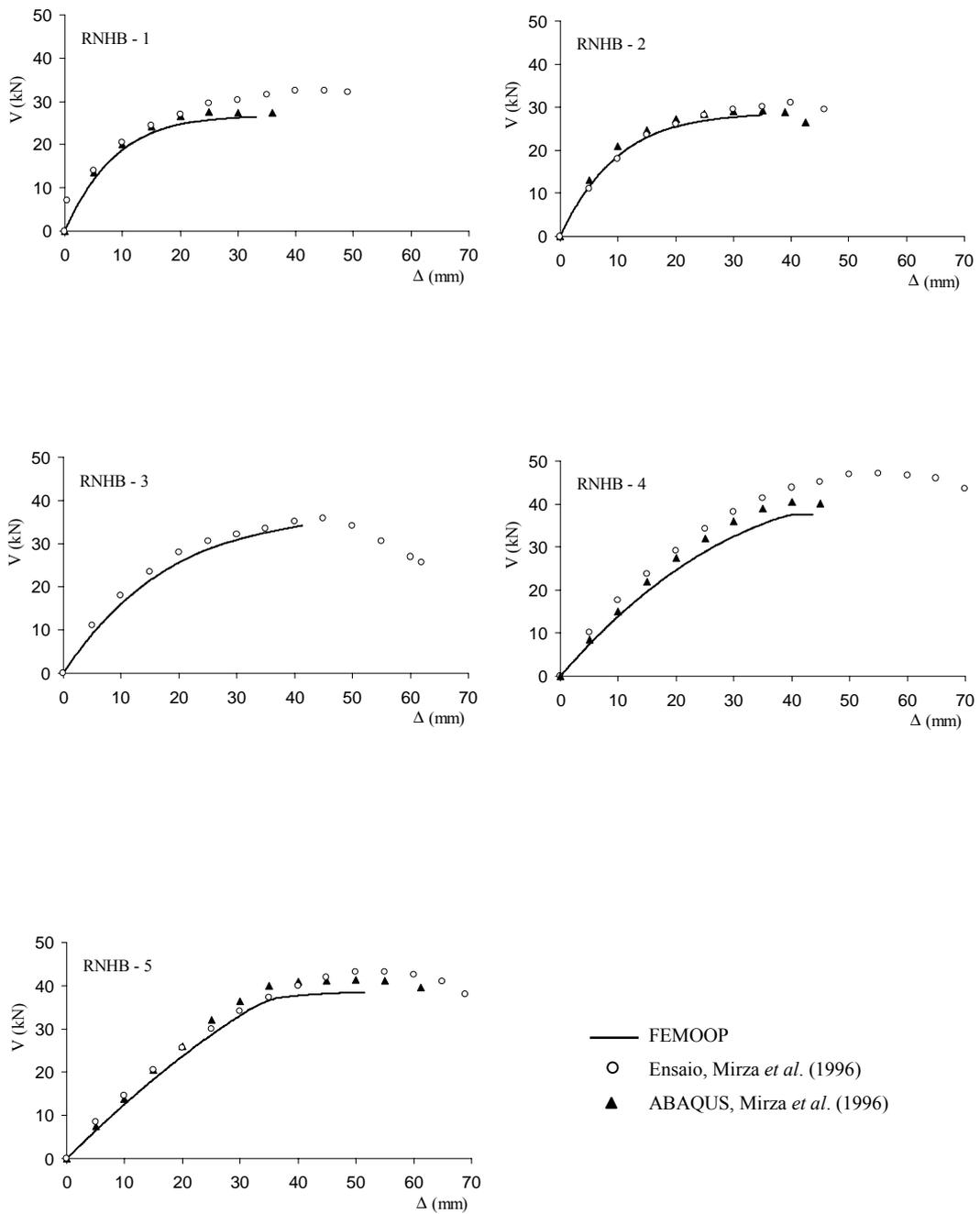


Figura 6.11 Comparação das curvas carga-deslocamento para os protótipos RNHB (Mirza *et al.*, 1996).

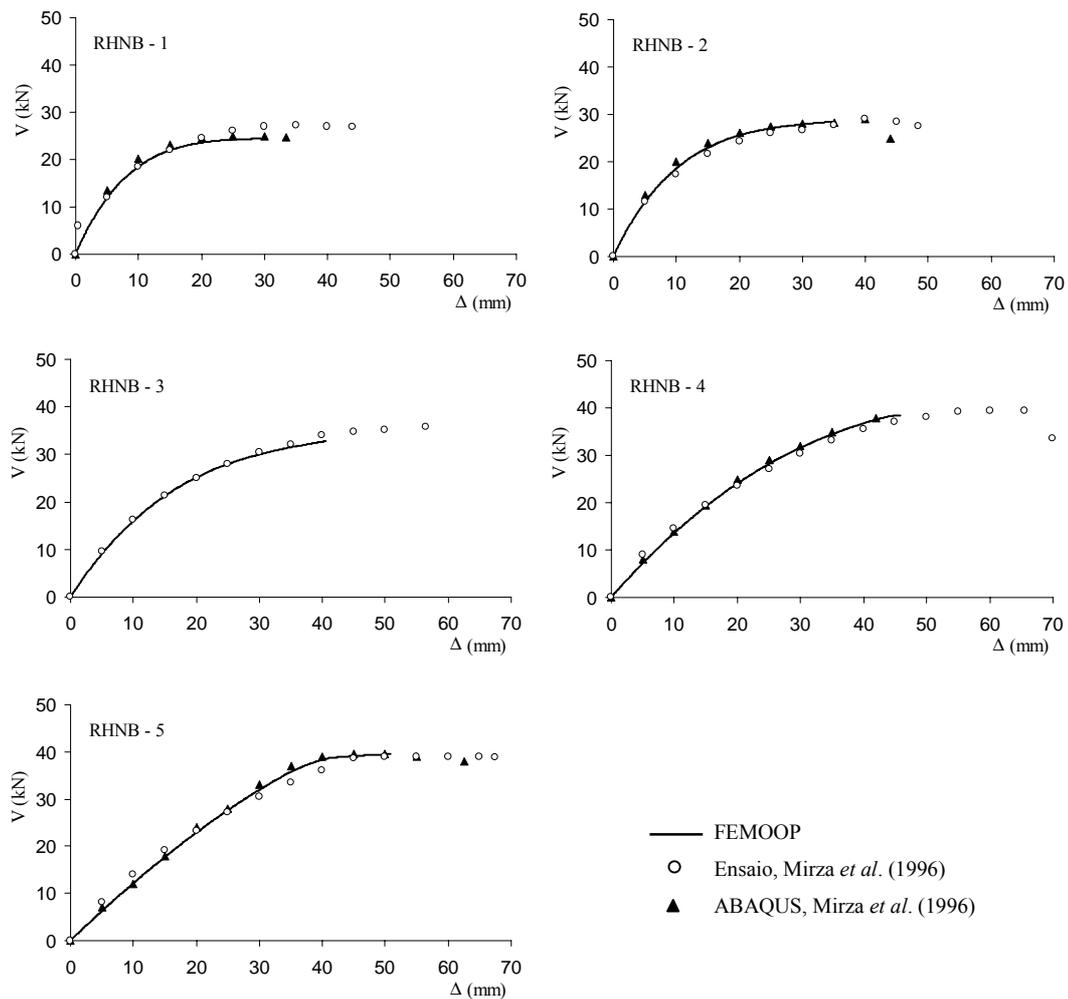


Figura 6.12 Comparação das curvas carga-deslocamento para os protótipos RHNB (Mirza *et al.*, 1996).

Nas Figuras 6.10, 6.11 e 6.12, os gráficos que apresentavam curvas obtidas no ABAQUS com boa concordância com os resultados obtidos no presente trabalho e com os experimentais, foram omitidos para não sobrecarregar as figuras.

A análise apresentada em Mirza *et al.* (1996) feita no programa ABAQUS foi realizada utilizando elementos de viga. Elementos de viga com seção I são utilizados para modelar o perfil que compõe a seção mista e elementos excêntricos retangulares são empregados para simular as placas de conexão. Para modelagem do aço utilizou-se uma relação tensão-deformação elasto-plástica e para o concreto o modelo utilizado foi

o apresentado em Saenz (1964). Maiores detalhes sobre o modelo e relações tensão-deformação podem ser encontrados no trabalho de Mirza *et al.* (1996).

### 6.7.3 Terceiro Exemplo: Pilares Mistos Preenchidos e Envolvidos

Os resultados utilizados neste exemplo foram retirados do trabalho de Wang (1999). Neste foram ensaiados oito pilares com seção tubular retangular preenchida e sete pilares de seção I envolvida. Os pilares foram submetidos a carregamentos excêntricos produzindo curvaturas reversas e simples associadas a flexões compostas retas e oblíquas. A Tabela 6.3 apresenta um resumo das informações dos ensaios e utilizadas nas análises feitas no FEMOOP.

Tabela 6.3 Resumo das informações dos ensaios (Wang, 1999).

Protótipo	Flexão: Maior Inércia		Flexão: Menor Inércia		Concreto	Aço
Analísado	Excentr. (mm)	Momentos Razão	Excentr. (mm)	Momentos Razão	Resistência Cilínd. (MPa)	Resistência $f_y$ (MPa)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
(a) Séries RHS (Pilares Preenchidos)						
RHS-1	0	-	55	-1	55	370
RHS-2	0	-	55	0	55	370
RHS-3	55	0	110	0	55	370
RHS-4	55	0	110	-1	55	370
RHS-5	55	-1	110	-1	55	370
RHS-6	55	0	55	0	55	370
RHS-7	55	-1	0	-	55	370
RHS-8	55	0	0	-	55	370
(b) Séries RSJ (Pilares Envolvidos)						
RSJ-1	55	0	0	-	55	310
RSJ-2	0	-	55	-1	45	310
RSJ-3	0	-	55	0	45	310
RSJ-4	55	0	55	0	25	310
RSJ-5	55	0	110	-1	45	310
RSJ-6	55	-1	110	-1	25	310
RSJ-7	55	0	110	0	25	310

Nota: Uma razão entre momentos nas extremidades negativa indica curvatura reversa.

As seções dos protótipos são apresentadas na Figura 6.13. No FEMOOP, a seção do componente aço foi simplificada desprezando-se os cantos curvos. Foram utilizados quatro elementos de tamanhos iguais nas análises. Cada elemento possuía dois pontos de Gauss. O módulo de elasticidade adotado para o aço foi de 210000 MPa.

Tabela 6.4 Resultados das análises (Wang, 1999).

Protótipo Analisado	Ensaio Normal (kN)	FEMOOP Normal (kN)	Ensaio FEMOOP
(1)	(2)	(3)	(4)
(a) Séries RHS			
RHS-1	368	428	0.86
RHS-2	246	236	1.04
RHS-3	172	172	1.00
RHS-4	238	231	1.03
RHS-5	251	236	1.06
RHS-6	234	223	1.05
RHS-7	520	555	0.94
RHS-8	480	385	1.25
(b) Séries RSJ			
RSJ-1	960	957	1.00
RSJ-2	816	868	0.94
RSJ-3	570	626	0.91
RSJ-4	427	350	1.22
RSJ-5	380	374	1.02
RSJ-6	330	258	1.28
RSJ-7	257	231	1.11
		Média:	1.05
		Desvio Padrão:	0.12

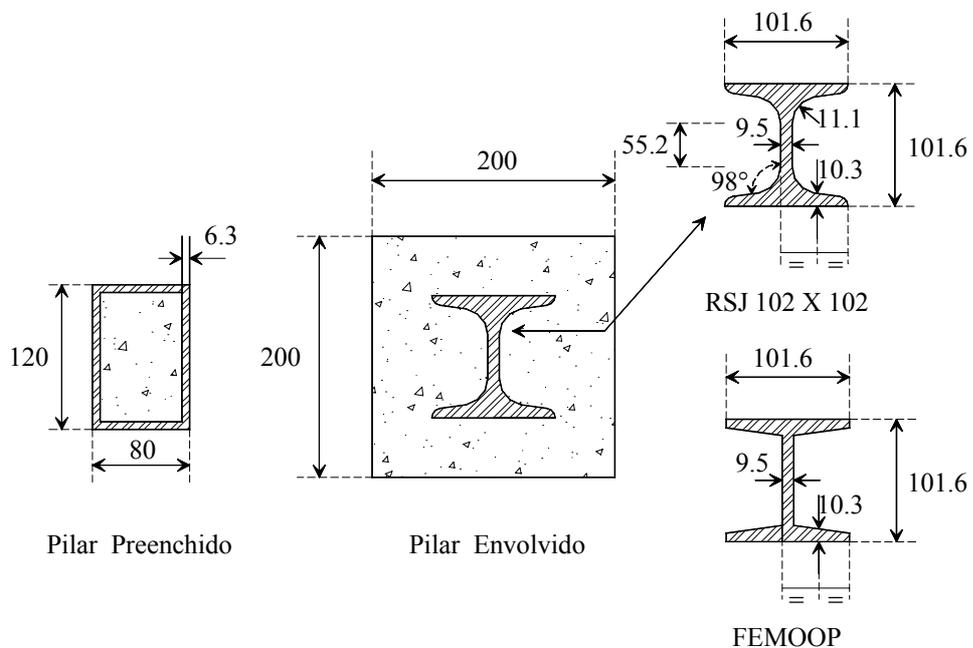


Figura 6.13 Seções transversais dos protótipos ensaiados por Wang (1999) e seção analisada no FEMOOP, dimensões em *mm*.

As figuras seguintes apresentam as curvas experimentais obtidas em comparação ao presente trabalho. Para os carregamentos que produzem curvatura reversa em um dado plano foram obtidos nas análises deslocamentos nulos no meio do pilar e portanto não serão apresentados.

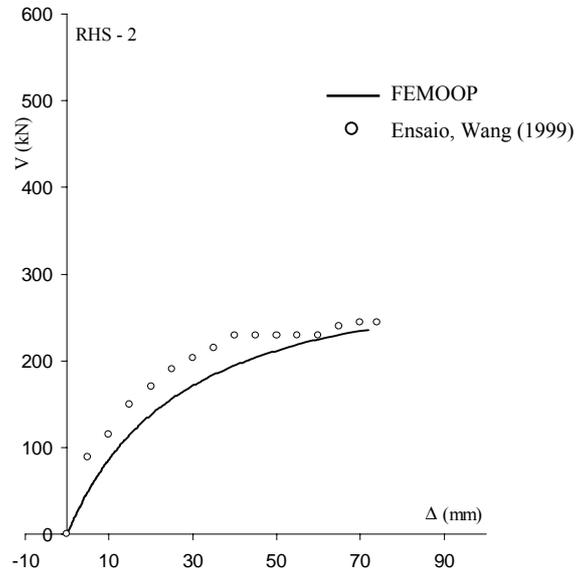


Figura 6.14 Deslocamentos no meio do pilar RHS-2 na direção do eixo de maior inércia (Wang, 1999).

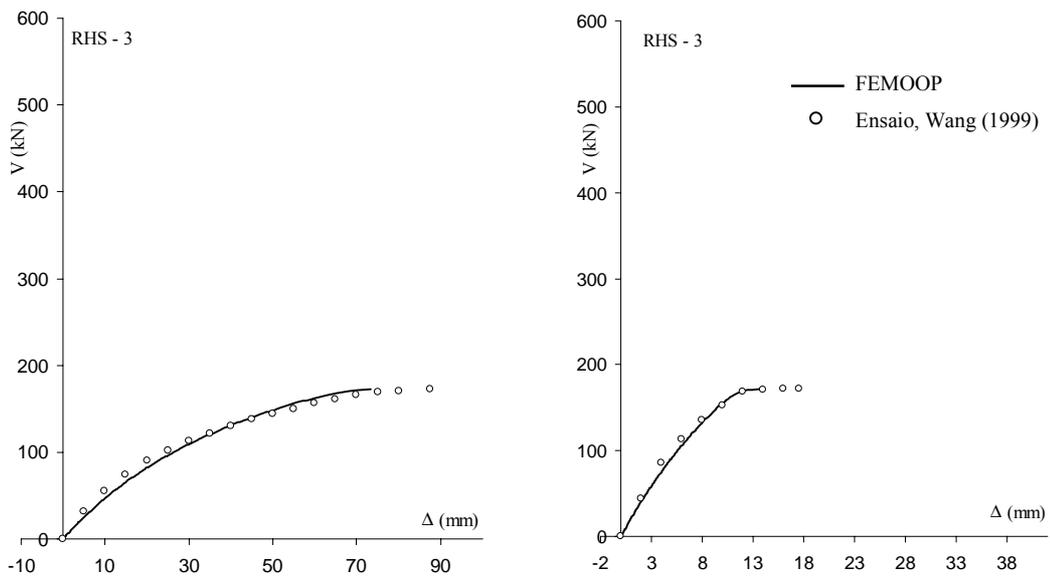


Figura 6.15 Deslocamentos no meio do pilar RHS-3 nas direções dos eixos de maior e menor inércia (Wang, 1999).

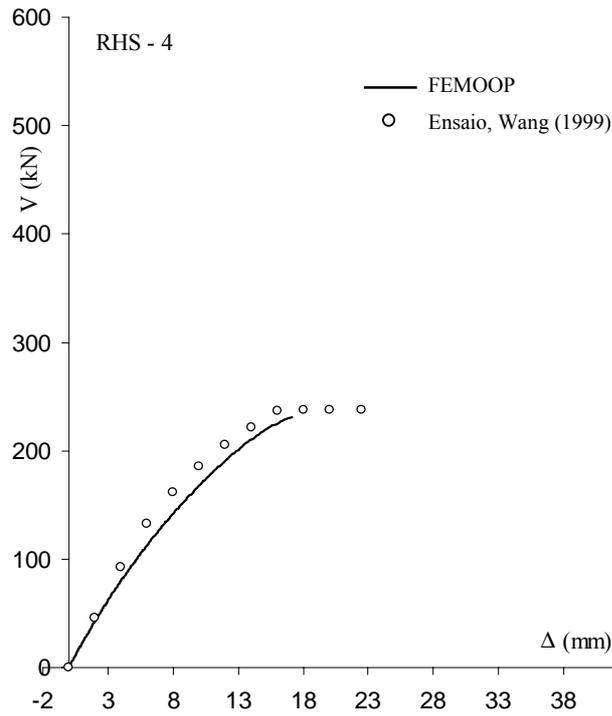


Figura 6.16 Deslocamentos no meio do pilar RHS-4 na direção do eixo de menor inércia (Wang, 1999).

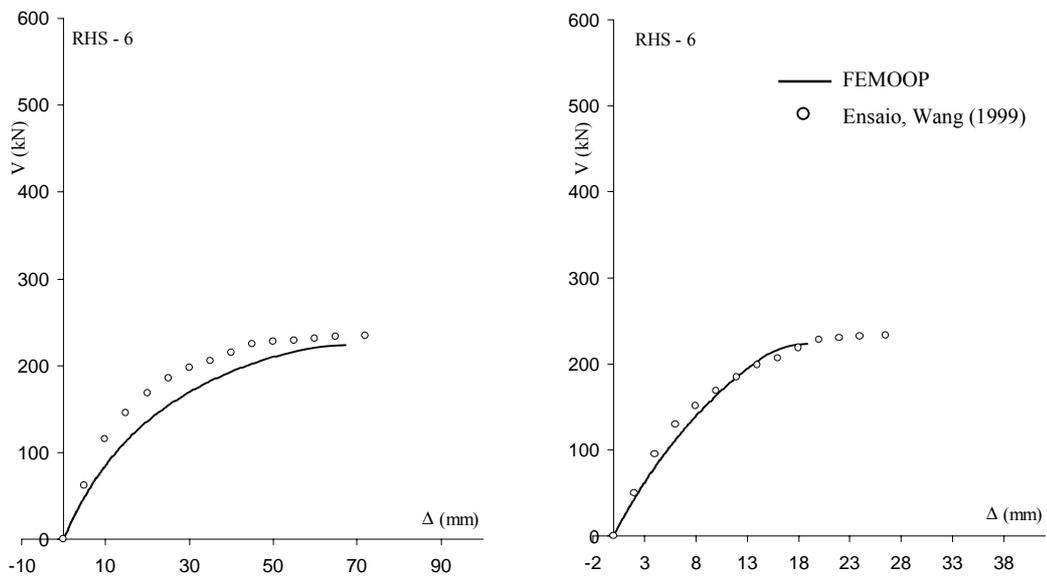


Figura 6.17 Deslocamentos no meio do pilar RHS-6 nas direções dos eixos de maior e menor inércia (Wang, 1999).

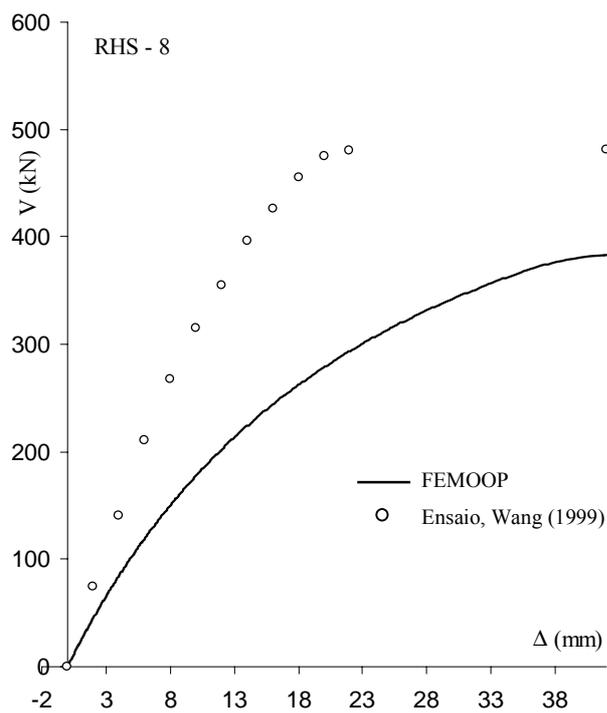


Figura 6.18 Deslocamentos no meio do pilar RHS-8 na direção do eixo de menor inércia (Wang, 1999).

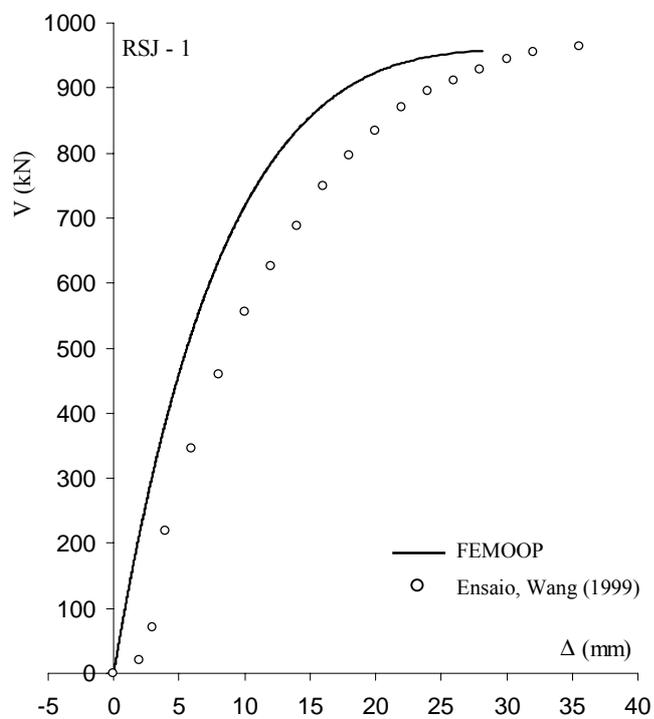


Figura 6.19 Deslocamentos no meio do pilar RSJ-1 na direção do eixo de menor inércia (Wang, 1999).

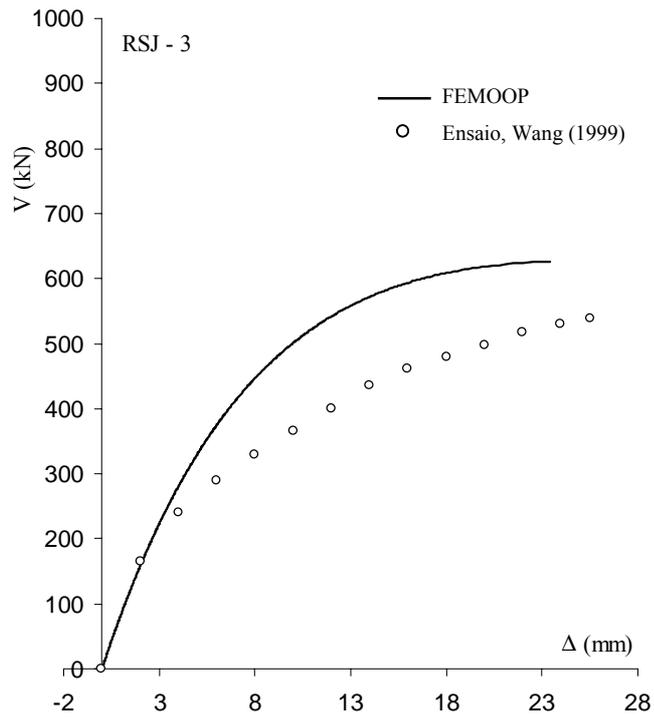


Figura 6.20 Deslocamentos no meio do pilar RSJ-3 na direção do eixo de maior inércia (Wang, 1999).

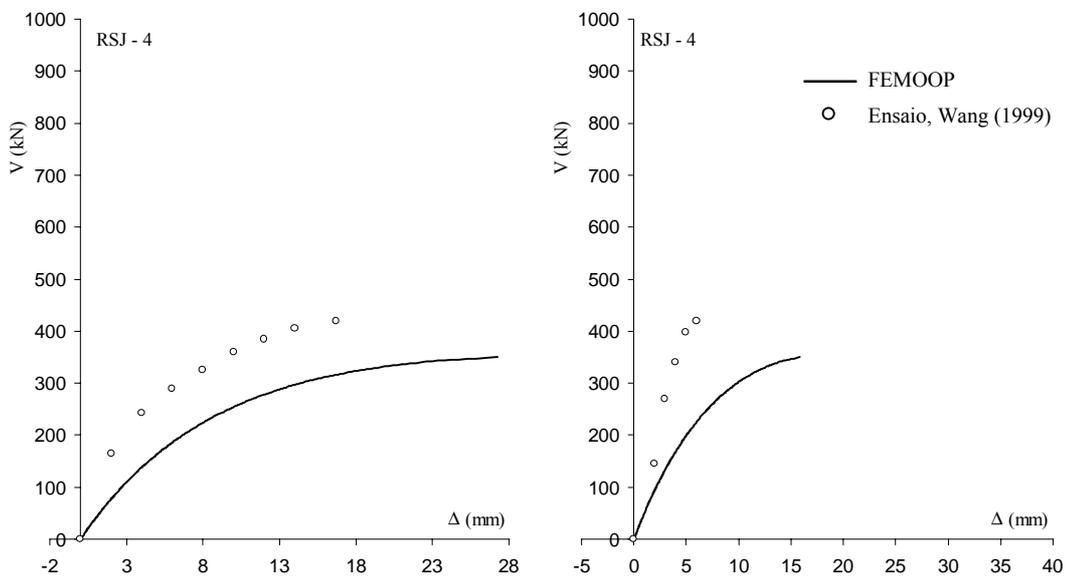


Figura 6.21 Deslocamentos no meio do pilar RSJ-4 nas direções dos eixos de maior e menor inércia (Wang, 1999).

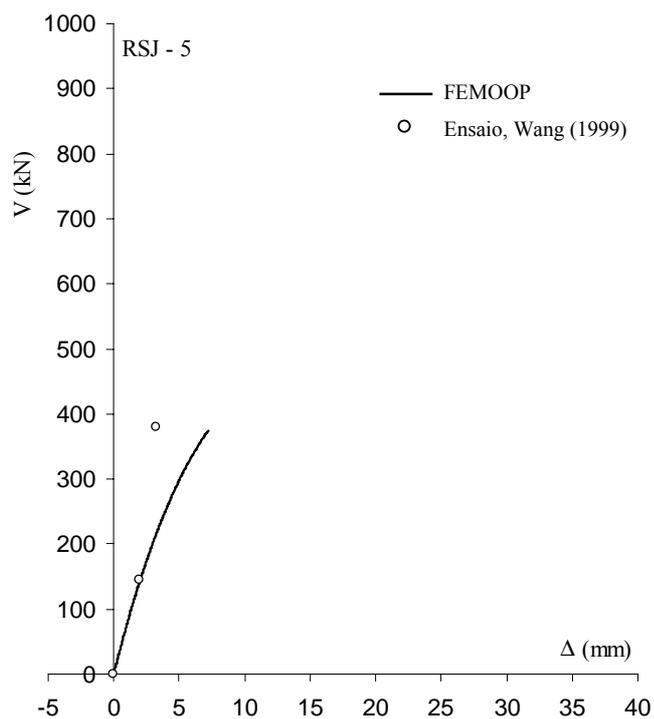


Figura 6.22 Deslocamentos no meio do pilar RSJ-5 na direção do eixo de menor inércia (Wang, 1999).

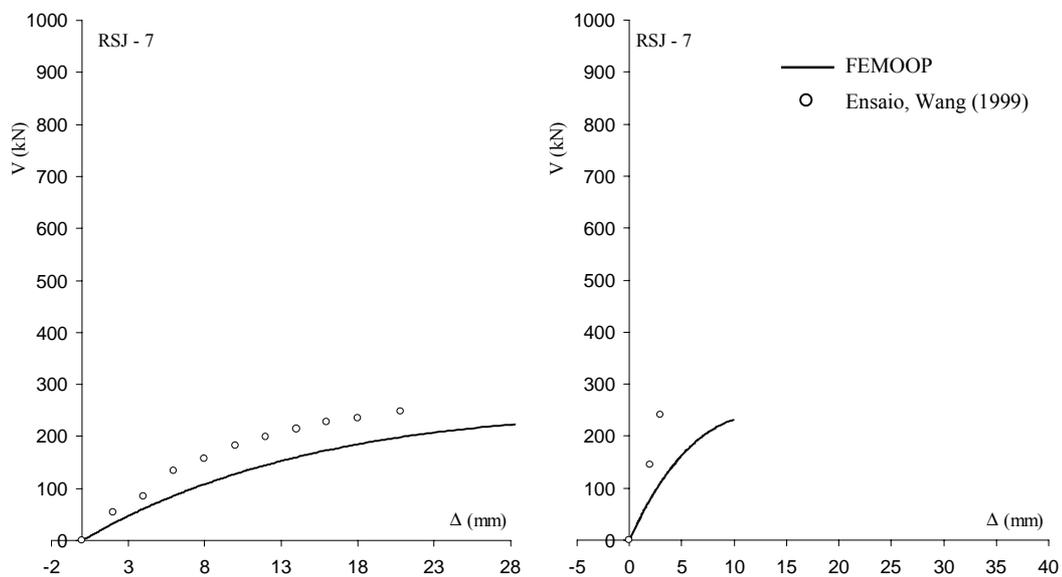


Figura 6.23 Deslocamentos no meio do pilar RSJ-7 nas direções dos eixos de maior e menor inércia (Wang, 1999).

Segundo Wang (1999), apesar dos pilares serem considerados rotulados, há um certo grau de engastamento que tende a desaparecer quando os momentos nas extremidades são aplicados. O autor relata que este grau de engastamento tem maior influência nos protótipos que não possuem momentos em relação ao eixo de menor inércia, protótipos RHS-7, RHS-8 e RSJ-1. O efeito dessa restrição à condição de rótulas ideais leva a uma redução do comprimento de flambagem do pilar, aumentando a sua resistência. Em Wang (1999), foram utilizados em análises numéricas, via MEF, comprimentos de flambagem iguais a 80 % do comprimento do pilar com o propósito de simular os ensaios dos protótipos RHS-7, RHS-8 e RSJ-1. Estas considerações não foram feitas nas análises realizadas neste trabalho, o que melhorariam os resultados apresentados.

Observa-se nas curvas carga-deslocamento apresentados por Wang (1999) que mesmo os pilares com curvaturas reversas apresentam grandes deslocamentos que foram nulos nas análises feitas no FEMOOP, como era de se esperar. Isto pode indicar a influência de imperfeições no pilar ou no ensaio.

#### 6.7.4 Quarto Exemplo: Vigas Parcialmente Envolvidas

Kindmann *et al.* (1993) realizaram ensaios em vigas parcialmente envolvidas. As seções e forma de aplicação dos carregamentos são apresentadas na Figura 6.24.

Os parâmetros relacionados aos ensaios que foram comparados com o FEMOOP são apresentados na Tabela 6.5.

Tabela 6.5 Parâmetros envolvidos nos ensaios (Kindmann *et al.*, 1993).

Protótipo Analisado (1)	Perfil Seção (2)	Reforço Longitudinal (3)	Concreto $f_{ck}$ (MPa) (4)	Perfil $f_y$ (MPa) (5)	Armaduras $f_{ys}$ (MPa) (6)
V1	HE 400AA	4 $\phi$ 25 mm	49.8	458.0	558.00
V8	HE 400AA	--	45.2	442.0	558.00
V11	HE 400AA	IPE 200	45.2	492.0	558.00

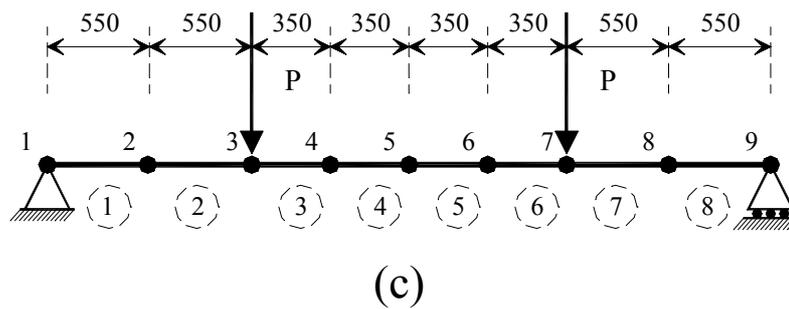
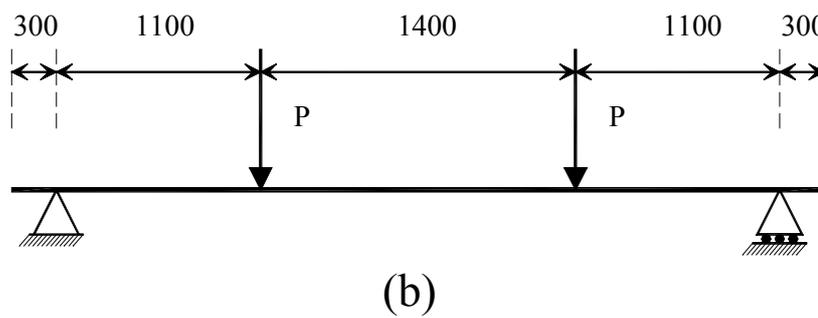
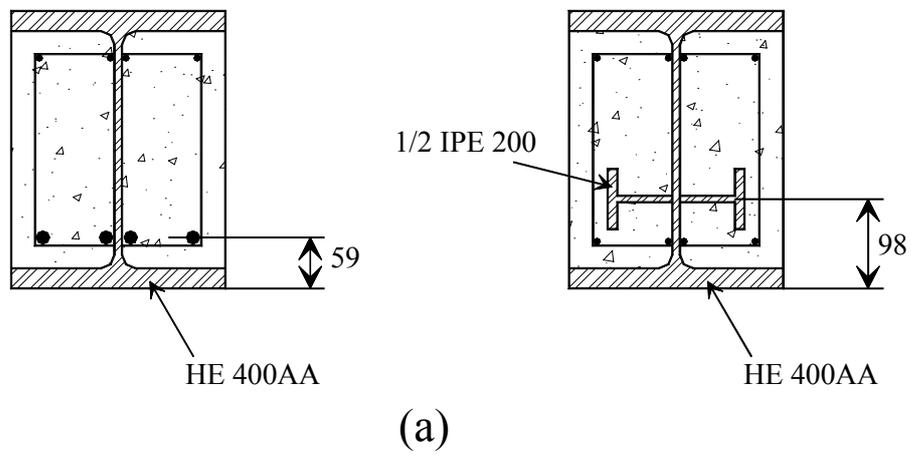


Figura 6.24 Seções e aplicação do carregamento conforme Kindmann *et al.* (1993):  
 (a) seções analisadas, dimensões em *mm*; (b) diagrama do ensaio realizado;  
 (c) modelo analisado no FEMOOP.

As figuras que são apresentadas em seguida fazem comparação entre as curvas obtidas nos ensaios e as obtidas no FEMOOP.

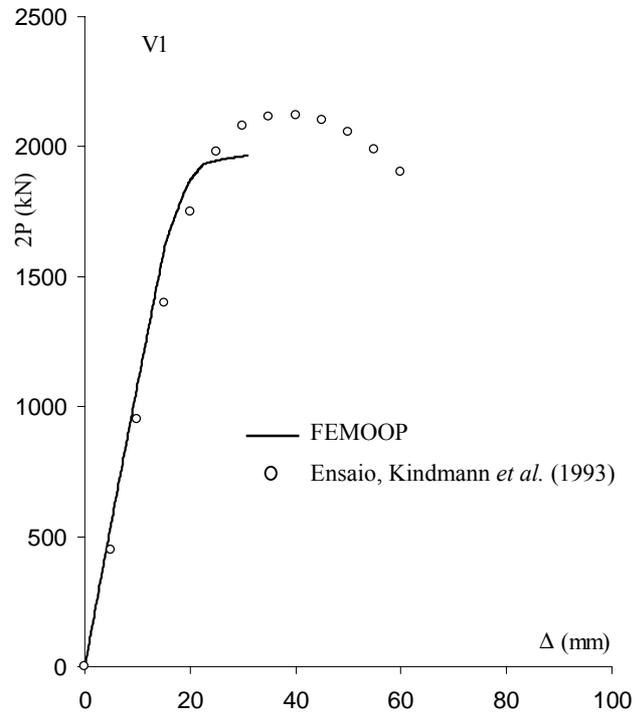


Figura 6.25 Curva carga-deslocamento no centro da viga V1 (Kindmann *et al.*, 1993).

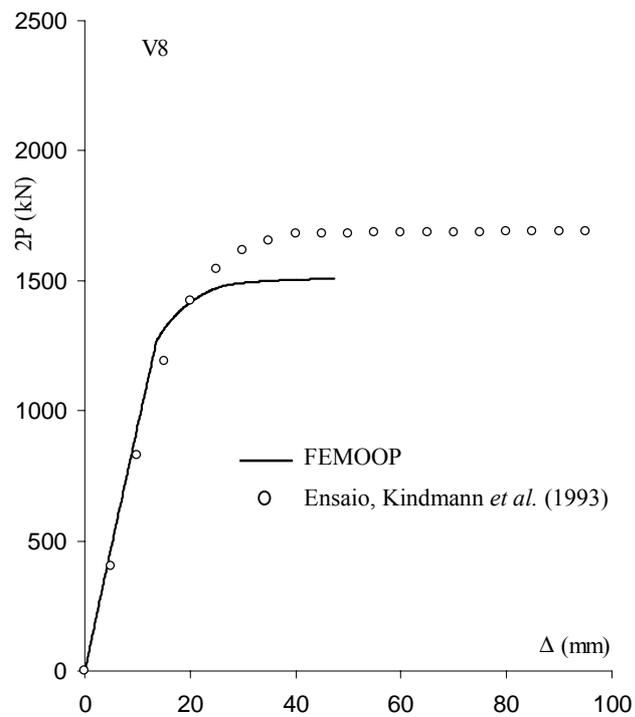


Figura 6.26 Curva carga-deslocamento no centro da viga V8 (Kindmann *et al.*, 1993).

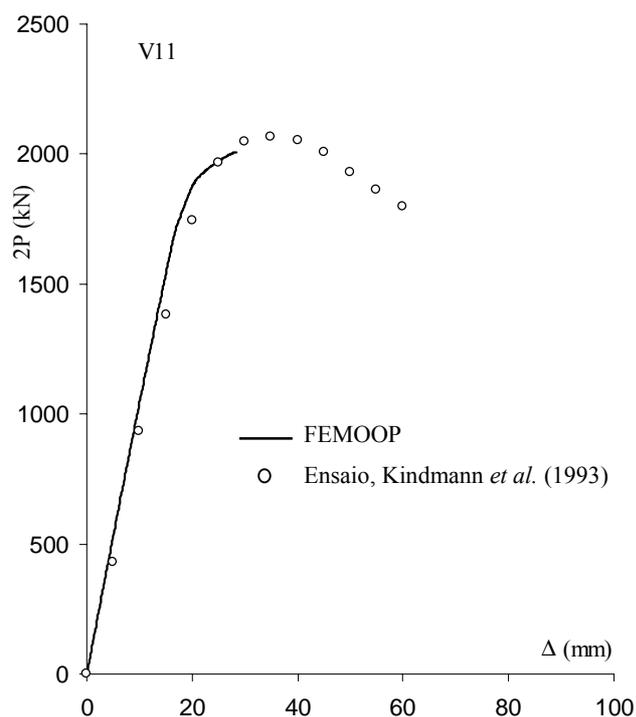


Figura 6.27 Curva carga-deslocamento no centro da viga V11 (Kindmann *et al.*, 1993).

A Tabela 6.6 apresenta uma comparação entre os resultados obtidos nos ensaios e nas análises feitas no FEMOOP.

Tabela 6.6 Comparação entre os resultados (Kindmann *et al.*, 1993).

Protótipo Analisado (1)	Ensaio $P_{\text{ensaio}}$ (kN) (2)	FEMOOP $P_{\text{FEMOOP}}$ (kN) (3)	$\frac{P_{\text{ensaio}}}{P_{\text{FEMOOP}}}$ (4)
V1	1059	983	1.08
V8	839	754	1.11
V11	1032	1004	1.03
		Média:	1.07
		Desvio Padrão:	0.04

Nas análises feitas no FEMOOP foram utilizados elementos com dois pontos de Gauss. Para o aço foi adotado módulo de elasticidade igual a 210000 MPa.

### 6.7.5 Quinto Exemplo: Pilares Retangulares Preenchidos

No trabalho de Lakshmi e Shanmugam (2002) são encontrados dados e referências ao trabalho de Matsui *et al.* (1995). Neste, foram realizados ensaios experimentais em pilares esbeltos com seção transversal mostrada na Figura 6.28.

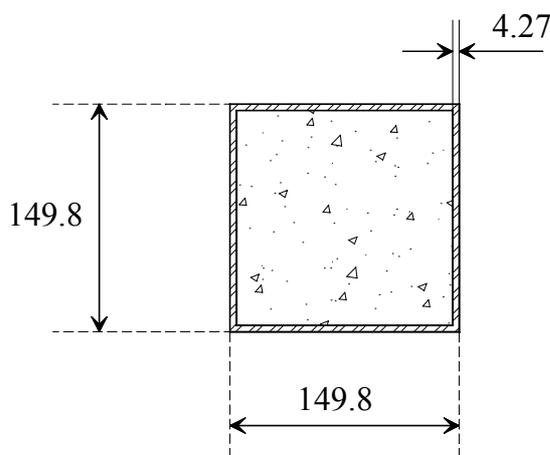


Figura 6.28 Seção dos protótipos analisados por Matsui *et al.* (1995), dimensões em *mm*.

A tensão de escoamento do aço do tubo era de 412 MPa preenchido com concreto de  $f_{ck} = 31.9$  MPa. O comprimento dos pilares variou de 0.6 m até 4.5 m com excentricidades iguais em relação aos eixos principais de inércia (flexão composta oblíqua) variando de zero ao máximo de 125 mm. Na Tabela 6.7 são apresentados os resultados e comparações feitas.

No FEMOOP, as análises foram feitas com quatro elementos de comprimentos iguais e quatro pontos de Gauss cada. Os pilares são considerados, como nos ensaios, biapoiados com momentos aplicados nas duas extremidades, provocando curvatura simples em cada plano de flexão. O módulo de elasticidade adotado para o aço foi de 210000 MPa.

Tabela 6.7 Comparação com os protótipos ensaiados por Matsui *et al.* (1995).

Protótipo Número (1)	Comprimento (mm) (2)	Excentricidade (mm) (3)	Ensaio P (kN) (4)	FEMOOP P (kN) (5)	$\frac{P_{\text{Ensaio}}}{P_{\text{FEMOOP}}}$ (6)
1	600	25	1184	1161	1.02
2		75	734	692	1.06
3		125	514	488	1.05
4	1200	25	1133	1118	1.01
5		75	665	667	1.00
6		125	484	473	1.02
7	1800	25	1025	1056	0.97
8		75	631	631	1.00
9		125	445	449	0.99
10	2700	75	553	564	0.98
11	3600	25	705	802	0.88
12		75	441	490	0.90
13		125	326	359	0.91
14	4500	25	588	666	0.88
15		75	373	420	0.89
16		125	277	315	0.88
				Média:	0.97
				Desvio Padrão:	0.07

Observa-se a partir da Tabela 6.7 que com o aumento do comprimento do pilar tem-se um aumento na diminuição da resistência obtida no ensaio em relação à obtida no FEMOOP. Tal fato deve estar associado às imperfeições que se tornam mais influentes na resistência quando se aumenta o comprimento do pilar. Em geral o que se faz é a consideração de uma imperfeição, desvio do eixo do pilar, igual à milésima parte do comprimento do pilar (Lakshmi e Shanmugam, 2002). Nas análises feitas no FEMOOP preferiu-se não considerar as imperfeições, por serem estas pequenas em condições de ensaios. No caso de dimensionamento e verificações de projeto deve-se adotar valores como os indicados no Eurocode 4 (1994).

### 6.7.6 Sexto Exemplo: Pilares Circulares Preenchidos com Concreto de Alta Resistência

Resultados de ensaios de nove pilares esbeltos carregados excentricamente com seções transversais formadas por perfis tubulares circulares preenchidos com concreto, Figura 6.29, foram obtidos a partir do trabalho de Rangan e Joyce (1992).

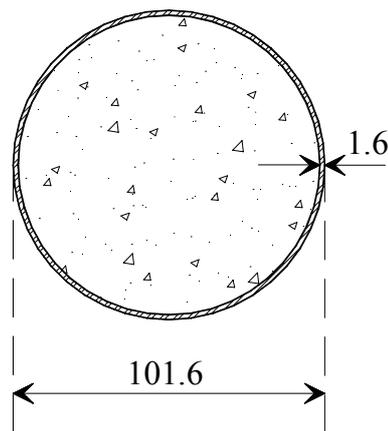


Figura 6.29 Seção transversal dos protótipos analisados por Rangan e Joyce (1992), dimensões em *mm*.

Para a tensão de escoamento do aço e resistência cilíndrica do concreto foram utilizados nas análises feitas no FEMOOP os valores de 218.0 e 67.4 MPa respectivamente. Estes valores são as médias apresentadas pelos pesquisadores obtidas através de ensaios de caracterização dos materiais.

Observa-se que o concreto utilizado é de alta resistência. Nas análises, a deformação última do concreto foi liberada. Logo, a região  $A_{c2}$  definida no item 3.5.1 se estenderá indefinidamente nas análises. Estas considerações foram tomadas baseadas em resultados de ensaios (Han, 2004) onde se observa que concretos confinados em seções tubulares circulares apresentam comportamento dúctil sem decaimento expressivo da tensão. Observou-se a partir das análises que esta consideração não influencia significativamente a carga última.

No FEMOOP, as análises foram feitas com quatro elementos de comprimentos iguais e quatro pontos de Gauss cada. Os pilares são considerados, como nos ensaios,

biapoiados, com momentos aplicados nas duas extremidades provocando curvatura simples.

Os resultados são apresentados na Tabela 6.8.

Tabela 6.8 Comparação com os ensaios realizados por Rangan e Joyce (1992).

Protótipo Número (1)	Comprimento (mm) (2)	Excentricidade (mm) (3)	Ensaio P (kN) (4)	FEMOOP P (kN) (5)	$\frac{P_{\text{Ensaio}}}{P_{\text{FEMOOP}}}$ (6)
1	807.5	10	430	404	1.06
2	807.5	30	235	197	1.19
3	1312.5	10	350	354	0.99
4	1312.5	30	190	160	1.19
5	1565	10	315	326	0.97
6	1817.5	10	280	296	0.95
7	1817.5	30	140	127	1.10
8	2322.5	10	220	238	0.92
9	2322.5	30	126	101	1.25
Média:					1.07
Desvio Padrão:					0.12

### 6.7.7 Sétimo Exemplo: Pilares Retangulares Preenchidos Formados com Materiais de Alta Resistência

A formulação apresentada foi comparada com os resultados experimentais e procedimentos de normas apresentados por Liu *et al.* (2003), onde foram analisados pilares curtos retangulares preenchidos formados por materiais de alta resistência. A média das tensões de escoamento do aço é de 550 MPa e para o concreto tem-se resistências características de 60.8 e 72.1 MPa. A Figura 6.30 e Tabela 6.9 fornecem a seção dos protótipos analisados. No FEMOOP as seções foram modeladas como perfeitamente retangulares e o módulo de elasticidade adotado para o aço foi de 210000 MPa. Foram utilizados quatro elementos de tamanhos iguais e quatro pontos de Gauss cada.

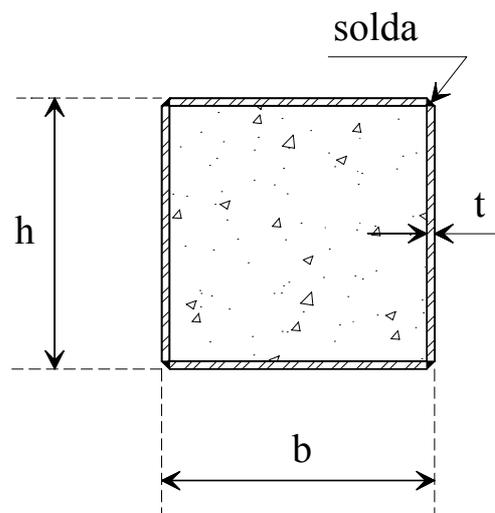


Figura 6.30 Pilar retangular preenchido, seção transversal, Liu *et al.* (2003).

Tabela 6.9 Propriedades dos protótipos analisados por Liu *et al.* (2003).

Protótipo Analisado	b (mm)	h (mm)	t (mm)	Comprimento (mm)	$f_{ck}$ (MPa)	$f_y$ (MPa)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
C1-1	100.3	98.2	4.18	300	60.8	550
C1-2	101.5	100.6	4.18	300	60.8	550
C2-1	101.2	101.1	4.18	300	72.1	550
C2-2	100.7	100.4	4.18	300	72.1	550
C3	182.8	181.2	4.18	540	60.8	550
C4	181.8	180.4	4.18	540	72.1	550
C5-1	120.7	80.1	4.18	360	60.8	550
C5-2	119.3	80.6	4.18	360	60.8	550
C6-1	119.6	80.6	4.18	360	72.1	550
C6-2	120.5	80.6	4.18	360	72.1	550
C7-1	179.7	121.5	4.18	540	60.8	550
C8-1	180.4	119.8	4.18	540	72.1	550
C8-2	179.2	121.3	4.18	540	72.1	550
C9-1	160.2	81.4	4.18	480	60.8	550
C9-2	160.7	80.5	4.18	480	60.8	550
C10-1	160.1	81.0	4.18	480	72.1	550
C10-2	160.6	80.1	4.18	480	72.1	550
C11-1	199.8	101.2	4.18	600	60.8	550
C11-2	200.2	98.9	4.18	600	60.8	550
C12-1	199.2	102.1	4.18	600	72.1	550
C12-2	199.8	99.6	4.18	600	72.1	550

Tabela 6.10 Resultados e comparações das análises realizadas por Liu *et al.* (2003) com o presente trabalho.

Protótipo	Experimental	FEMOOP	Experimental	EC4	Experimental	AISC	Experimental	ACI	Experimental
Analisado	(kN)	(kN)	FEMOOP	(kN)	EC4	(kN)	AISC	(kN)	ACI
(1)	(2)	(3)	(4)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
C1-1	1490	1376	1.083	1376	1.083	1291	1.154	1301	1.145
C1-2	1535	1413	1.086	1413	1.086	1325	1.158	1335	1.150
C2-1	1740	1447	1.202	1513	1.150	1409	1.235	1419	1.226
C2-2	1775	1434	1.238	1499	1.184	1397	1.271	1407	1.262
C3	3590	3468	1.035	3468	1.035	3171	1.132	3193	1.124
C4	4210	3659	1.151	3778	1.114	3429	1.228	3456	1.218
C5-1	1450	1375	1.055	1375	1.055	1282	1.131	1301	1.115
C5-2	1425	1368	1.042	1368	1.042	1276	1.117	1295	1.100
C6-1	1560	1397	1.117	1461	1.068	1353	1.153	1375	1.135
C6-2	1700	1405	1.210	1470	1.156	1361	1.249	1383	1.229
C7-1	2530	2525	1.002	2525	1.002	2318	1.091	2348	1.078
C8-1	2970	2626	1.131	2724	1.090	2477	1.199	2517	1.180
C8-2	2590	2636	0.983	2734	0.947	2487	1.041	2526	1.025
C9-1	1710	1747	0.979	1747	0.979	1606	1.065	1646	1.039
C9-2	1820	1739	1.047	1739	1.047	1598	1.139	1639	1.110
C10-1	1880	1786	1.053	1865	1.008	1701	1.105	1746	1.077
C10-2	2100	1777	1.182	1856	1.131	1692	1.241	1738	1.208
C11-1	2350	2426	0.969	2426	0.969	2209	1.064	2264	1.038
C11-2	2380	2393	0.995	2393	0.995	2178	1.093	2234	1.065
C12-1	2900	2538	1.143	2637	1.100	2382	1.217	2443	1.187
C12-2	2800	2500	1.120	2598	1.078	2345	1.194	2409	1.162
		Média:	1.087	Média:	1.063	Média:	1.156	Média:	1.137
		D. Padrão:	0.081	D. Padrão:	0.065	D. Padrão:	0.068	D. Padrão:	0.069

### 6.7.8 Oitavo Exemplo: Vigas Retangulares Preenchidas

No trabalho de Han (2004) foram ensaiadas vigas retangulares preenchidas com concreto. Os principais parâmetros envolvidos nos ensaios são a relação altura-largura da seção, variando entre 1 e 2, e a esbeltez das paredes do perfil. A seção transversal, o diagrama do ensaio, e o modelo analisado no FEMOOP, são apresentados na Figura 6.31 e Tabela 6.11. A Tabela 6.11 mostra as propriedades geométricas e físicas dos protótipos.  $M_{ue}$ , dado na coluna (6) da Tabela 6.11, é momento último, medido durante o ensaio para uma deformação de tração no perfil de 0.010.

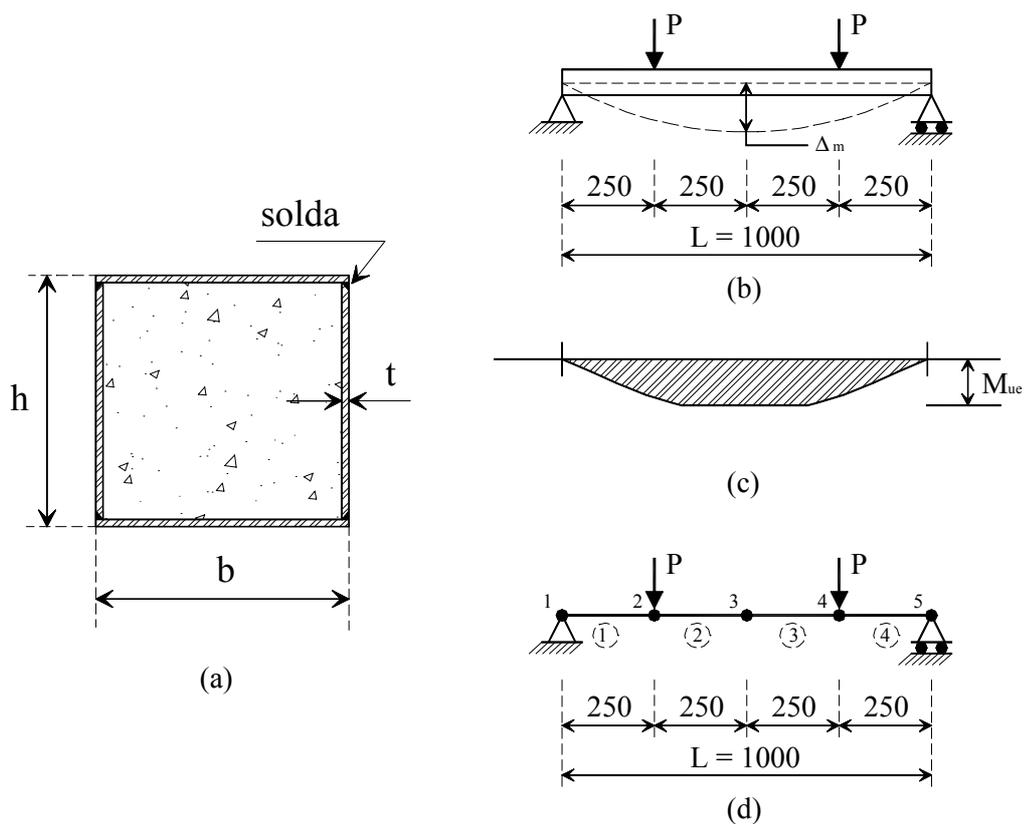


Figura 6.31 Vigas analisadas por Han (2004): (a) seção transversal; (b) esquema do ensaio; (c) diagrama de momentos; (d) modelo analisado no FEMOOP, dimensões em *mm*.

Tabela 6.11 Propriedades das vigas ensaiadas por Han (2004).

Protótipo Analisado	Experimental (kN)	Dimensões h x b x t	$f_{ck}$ (Mpa)	$f_y$ (Mpa)	$M_{ue}$ (kN.m)	$M_{FEMOOP}$ (kN.m)	$\frac{M_{ue}}{M_{FEMOOP}}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
RB1	1490	120 x 120 x 3.84	18.3	330.1	29.3	27.9	1.052
RB2	1535	120 x 120 x 3.84	23.6	330.1	30.2	28.4	1.062
RB3	1740	120 x 120 x 5.86	21.0	321.1	40.9	39.3	1.041
RB4	1775	120 x 120 x 5.86	26.8	321.1	41.4	39.8	1.041
RB5	3590	150 x 120 x 2.93	23.1	293.8	31.4	28.0	1.121
RB6	4210	120 x 90 x 2.93	23.1	293.8	20.2	16.7	1.210
RB7	1450	150 x 90 x 2.93	23.1	293.8	28.4	23.5	1.209
RB8	1425	120 x 60 x 2.93	23.1	293.8	18.4	13.1	1.405
						Média:	1.142
						D. Padrão:	0.127

$M_{ue}$  foi medido para uma deformação de tração no aço igual a 0.010.

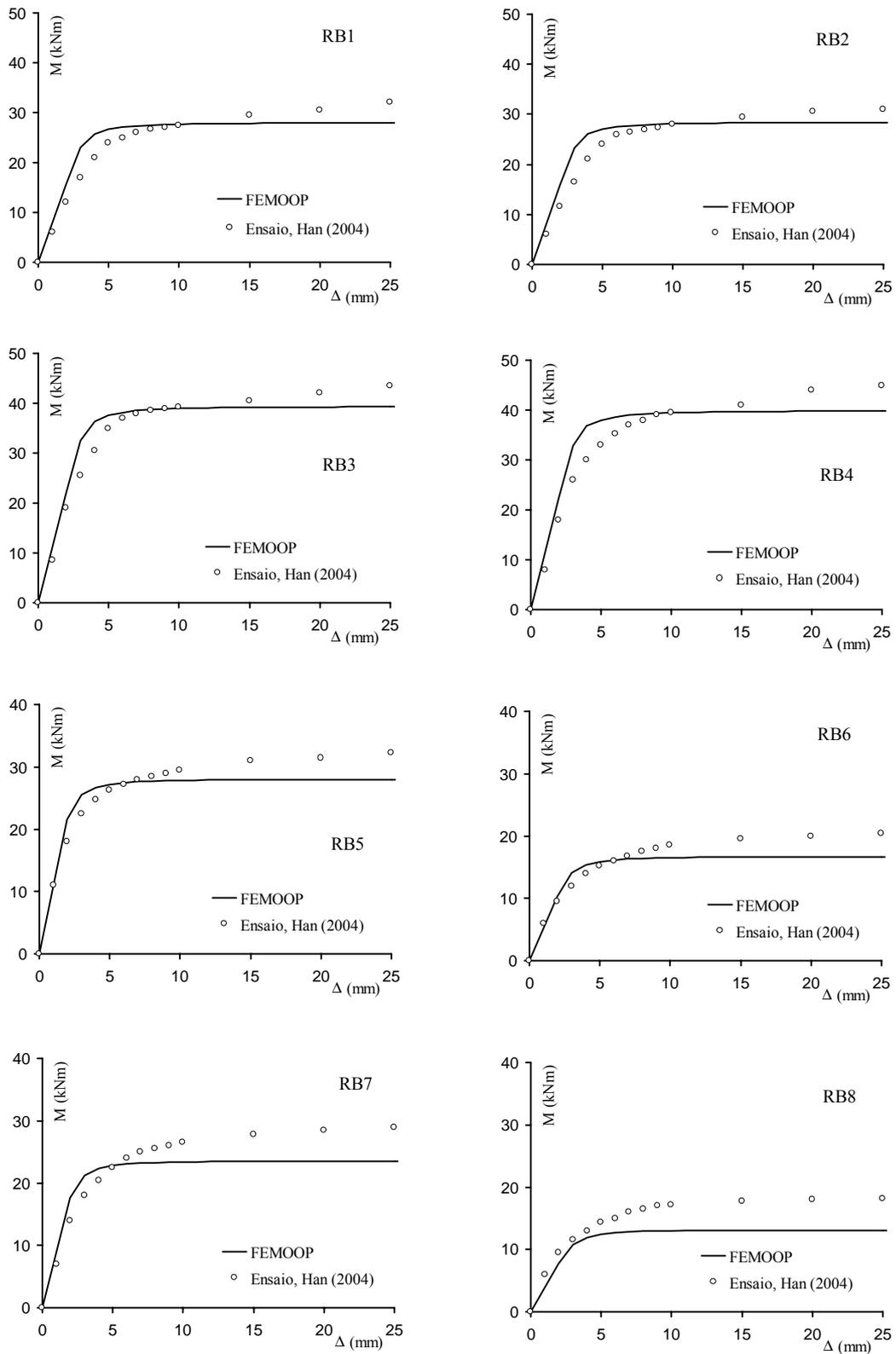


Figura 6.32 Comparação das curvas momento-deslocamento obtidas no presente trabalho e experimentalmente por Han (2004).

Nas análises feitas no presente trabalho os elementos mostrados na Figura 6.31(d) possuíam quatro pontos de Gauss e o módulo de elasticidade adotado para o aço foi de 200000 MPa. Foi liberada a deformação última do concreto, logo, este terá tensões constantes na região  $A_{c3}$  iguais às da região  $A_{c2}$ , item 3.5.1. Esta decisão teve base nas relações tensão-deformação apresentadas por Han (2004), onde se percebe que o concreto tem um comportamento dúctil e deformações últimas muito superiores a  $-0.0035$ . Convém dizer que se tal consideração não fosse feita, o valor de momento último seria praticamente o mesmo, a diferença seria na curva após pico, o que não é tão importante no dimensionamento a não ser pelo caráter de ruptura dúctil.

Esta consideração faz aparecer nas curvas um patamar, gráficos da Figura 6.32, indicando que tanto o aço como o concreto tem praticamente todas as tensões presentes na seção, localizadas na região de tensões constantes.

Os momentos utilizados na Tabela 6.11 em comparação com os experimentais foram os máximos momentos obtidos nas curvas momento-deslocamento da Figura 6.32. Pode-se notar que este valor de momento é praticamente constante a partir de um certo ponto. Nas análises feitas, observa-se que os efeitos de segunda ordem nos protótipos são desprezíveis, sendo a resistência dos elementos definida pela resistência da seção.

### **6.7.9 Nono Exemplo: Pilares Retangulares Preenchidos com Carga de Longa Duração**

No trabalho de Uy (1998b) é feito um estudo do comportamento e procedimentos de projeto acerca dos pilares preenchidos. O trabalho faz um levantamento sobre procedimentos de projeto para todos os casos de carregamento pertinentes. Segundo Uy (1998b) os efeitos da fluência e retração do concreto são mais pronunciados em seções com maior porcentagem de área do componente concreto em relação ao aço. Uy (1998b) cita os trabalhos de Nakai *et al.* (1991), Terrey *et al.* (1994) e Morino *et al.* (1996) nos quais os autores estudaram os efeitos da fluência e retração do concreto em pilares tubulares preenchidos. Os valores finais de deformação devido à retração e coeficiente de fluência determinados a partir destes trabalhos são apresentados na Tabela 6.12.

Tabela 6.12 Coeficientes de fluência finais e deformações finais devido à retração em pilares tubulares preenchidos (Uy, 1998b).

Referência (1)	Coeficiente de Fluência (adimensional.) (2)	Deformação de Retração ( $\mu\epsilon$ ) (3)	$f_{ck}$ (MPa) (4)
Nakai <i>et al.</i> (1991)	0.5	50	30
Terrey <i>et al.</i> (1994)	1.5	200	45
Morino <i>et al.</i> (1996)	1.5	--	25

O sinal -- indica que não foi avaliado.

Han e Yang (2003) apresentaram um modelo baseado no ACI para prever o comportamento em relação ao tempo de pilares mistos preenchidos. Um modelo teórico para avaliação dos efeitos de retração e fluência em pilares preenchidos retangulares sob carregamento constante foi desenvolvido a partir de análises utilizadas para carregamentos de curta duração. O trabalho apresenta resultados de ensaios, análise e influência de vários parâmetros, como relação largura-espessura das placas do perfil, nível de carregamento de longa duração, esbeltez do pilar, resistência dos materiais e desenvolvimento de equações para o cálculo da resistência última considerando carregamento de longa duração.

A partir do trabalho de Han e Yang (2003) conclui-se que para pilares retangulares preenchidos com índice de esbeltez dado por  $\lambda = 2\sqrt{3}L/b = 40$ , onde  $L$  é o comprimento do pilar, e  $b$  a menor dimensão externa da seção transversal, tem-se uma relação  $SI$ , razão entre carga última considerando os efeitos da longa duração do carregamento e carga última sob carregamento de curta duração em torno de 0.9. Para  $\lambda = 80$ ,  $SI$  fica em torno de 0.80. As análises feitas por Han e Yang (2003) consideram um período de carregamento de longa duração igual a 50 anos. Maiores informações do modelo utilizado podem ser encontradas em Han *et al.* (2001).

A partir dos dados destes trabalhos, pilares retangulares preenchidos foram analisados considerando diferentes valores para os coeficientes de fluência, Figura 5.1, com índices de esbeltez, conforme definido de 40 e 80. Nas análises foram considerados carregamentos com uma excentricidade de  $L/1000$ . Os resultados são apresentados nas Tabelas 6.13 e 6.14.

Tabela 6.13 Análises realizadas no presente trabalho para um pilar com  $\lambda = 40$ .

Coefficiente de Fluência (adimensional) (1)	SI (adimensional) (2)
0.0	1.00
1.0	0.91
1.5	0.88
2.0	0.85

SI, razão entre carga última sob carregamento de longa duração e carga última sob carregamento de curta duração.

Tabela 6.14 Análises realizadas no presente trabalho para um pilar com  $\lambda = 80$ .

Coefficiente de Fluência (adimensional) (1)	SI (adimensional) (2)
0.0	1.00
1.0	0.86
1.5	0.82
2.0	0.79

SI, razão entre carga última sob carregamento de longa duração e carga última sob carregamento de curta duração.

Conclui-se que o coeficiente de fluência igual a 1.5 para o pilar com  $\lambda = 40$  resulta em uma razão *SI* próxima a 0.9 e para  $\lambda = 80$  o coeficiente de 1.5 resulta em uma razão *SI* próxima a 0.8. Observa-se que para o coeficiente de fluência igual a 1.5 conforme os trabalhos de Terrey *et al.* (1994) e Morino *et al.* (1996) chegou-se a resultados coerentes com o trabalho de Han e Yang (2003), ou seja *SI* próximos a 0.8 e 0.9 respectivamente.

## 6.8 COMENTÁRIOS FINAIS

Observa-se a partir dos exemplos que o modelo apresentado simula de forma adequada o comportamento, curva carga-deslocamento, e carga última dos pilares e vigas mistas analisados. Pode-se notar que o caráter genérico aplicado à definição da seção transversal dos elementos torna capaz a simulação de elementos envolvidos e preenchidos e, em ambos, tem-se bons resultados. As características adotadas para os

materiais, relações tensão-deformação, também foram apropriadas, mostrando que estas predizem com adequada precisão o comportamento dos materiais.

# IMPLEMENTAÇÕES ADICIONAIS

## 7.1 CONSIDERAÇÕES

Neste capítulo apresentam-se implementações adicionais e alguns exemplos de aplicações onde foi utilizada uma formulação derivada da apresentada no Capítulo 6. O objetivo deste capítulo é mostrar possíveis trabalhos que podem ser desenvolvidos a partir da formulação apresentada. Devido ao caráter dado a este capítulo, optou-se por não incluir no Capítulo 2 nenhuma referência bibliográfica associada ao que se apresenta aqui.

O modelo de elementos finitos apresentado no Capítulo 6 foi modificado eliminando-se os graus de liberdade fora do plano  $xz$ , Figura 6.5, e incluindo ao sistema de análise a matriz de rotação, tornado possível a análise de pórticos metálicos, de concreto, mistos ou híbridos. Além disto, foram adicionados ao sistema elementos de mola capazes de simular ligações semi-rígidas e mistas, Figura 7.1.

Os principais passos da implementação são descritos resumidamente. A partir da expressão (6.20) e utilizando uma matriz de rotação (Cook *et al.*, 1989) no plano  $xz$ ,  $\mathbf{T}_m$ , tem-se para a expressão (6.22)

$$\mathbf{F} = \sum_{m=1}^{ne} \{ \mathbf{T}_m^T \mathbf{f}_m \} \quad (7.1)$$

sendo  $\mathbf{F}$  o vetor de forças nodais internas da estrutura, formado a partir das contribuições das forças internas dos elementos individuais  $\mathbf{f}_m$ , expressão (6.20).

Da mesma forma, a partir da expressão (6.32) chega-se à expressão da matriz de rigidez da estrutura

$$\mathbf{K} = \sum_{m=1}^{ne} \{\mathbf{T}_m^T \mathbf{k}_T \mathbf{T}_m\}. \quad (7.2)$$

As ligações semi-rígidas e mistas são modeladas através de elementos de mola com comprimento nulo que são associados aos elementos de viga. Os elementos de mola possuem somente os graus de liberdade rotacionais na direção do eixo Y, Figura 7.1.

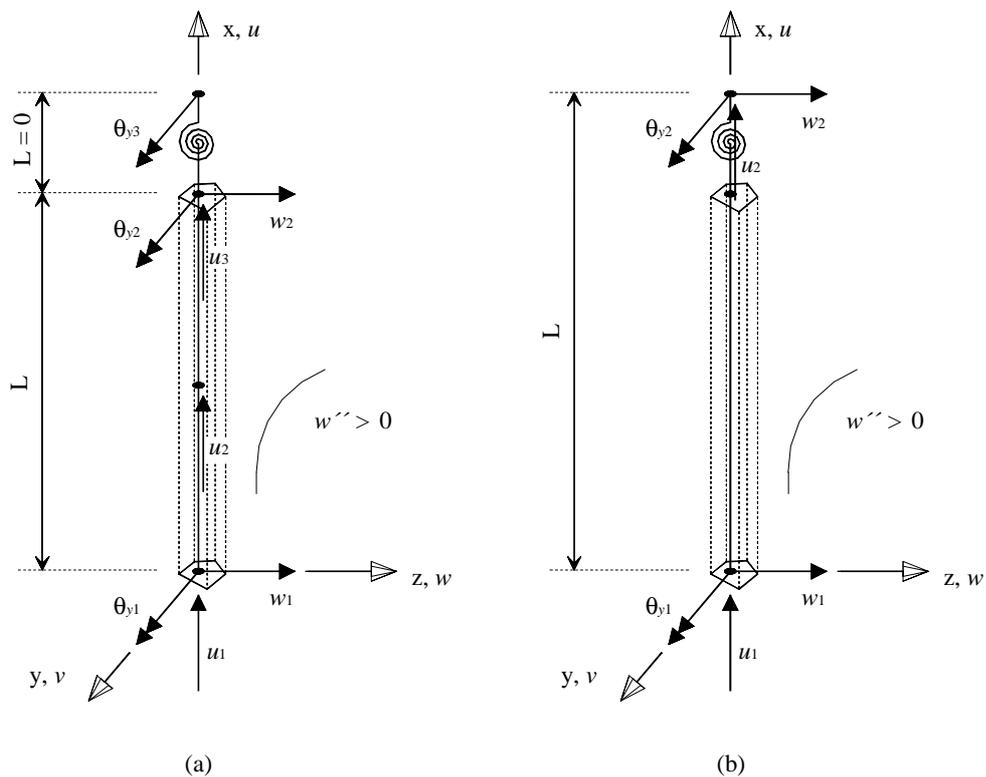


Figura 7.1 Eixos de referência e graus de liberdade locais: (a) elementos de viga e mola; (b) elemento híbrido.

A partir da associação de um elemento de mola à extremidade do elemento de viga obtém-se o elemento híbrido (Chan e Chui, 2000) mostrado na Figura 7.1. Os graus

de liberdade internos do elemento híbrido,  $\theta_{y2}$ , são condensados estaticamente, conforme apresentado no item 6.6. Na modelagem dos pórticos somente será necessária a definição dos dois nós situados nas extremidades do elemento híbrido.

Para a simulação das ligações fez-se a implementação no FEMOOP de uma classe sendo suas principais funções as de rigidez inicial e rigidez tangente. A partir desta classe outras podem ser herdadas e desta forma implementados vários modelos de representação das curvas momento-rotação. Neste trabalho foram implementados os modelos linear e multi-linear (Chen e Toma, 1992). O modelo linear é definido apenas pela rigidez constante da mola à rotação, enquanto o modelo multi-linear é definido através dos pontos da curva momento-rotação da ligação. A seguir apresentam-se alguns exemplos de utilização das implementações feitas.

## 7.2 EXEMPLOS

### 7.2.1 Primeiro Exemplo: Pórtico de Concreto Armado

Analisa-se neste exemplo o pórtico da Figura 7.2 e compara-se com o trabalho de Melo (2000). A Figura 7.3 mostra as comparações entre os resultados.

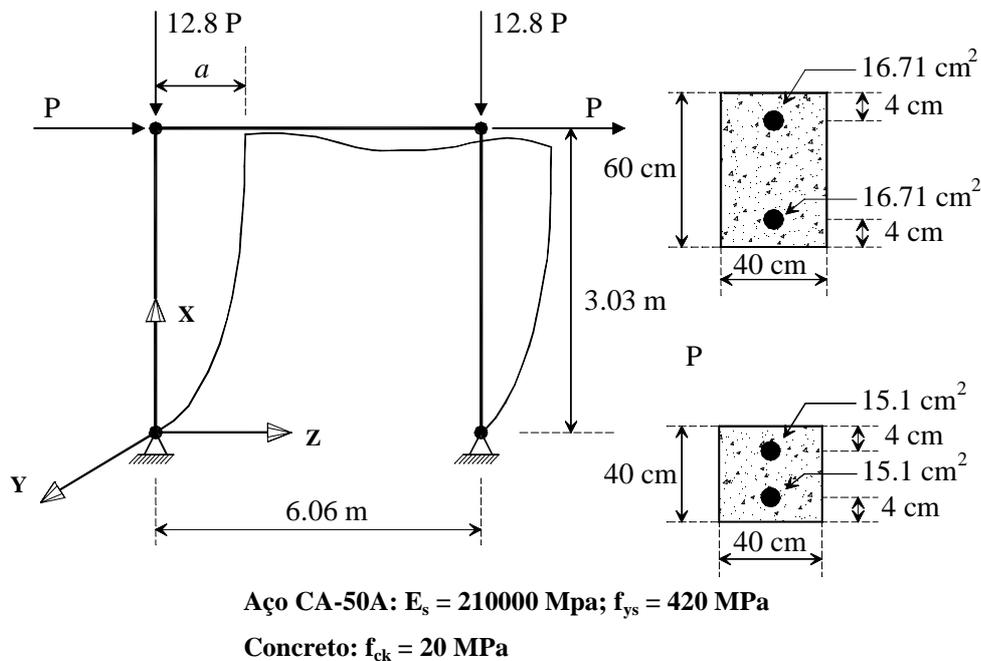


Figura 7.2 Pórtico de concreto armado (Melo, 2000).

Assim como em Melo (2000) foi utilizado no FEMOOP apenas um elemento para modelar pilares e vigas, sendo este com dois pontos de Gauss.

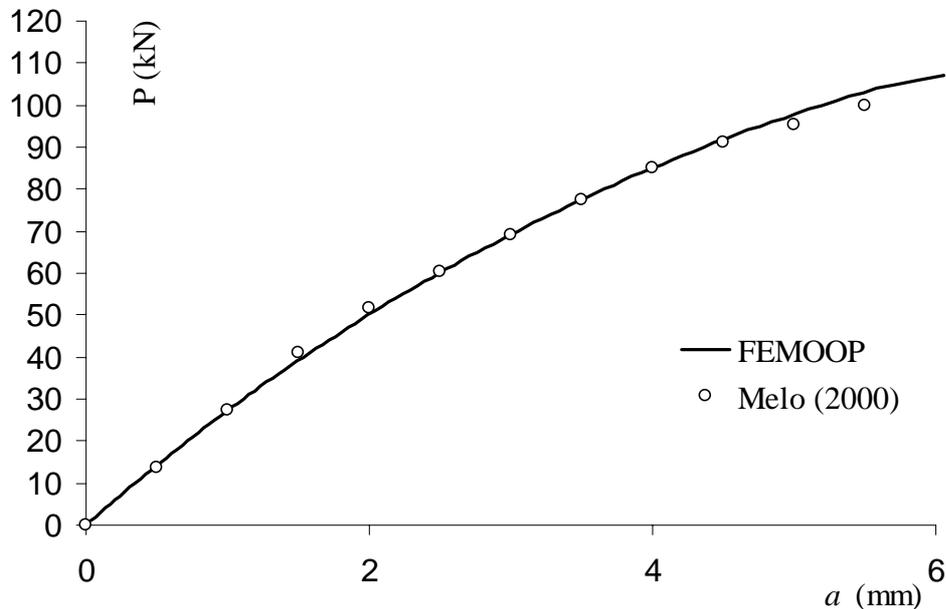


Figura 7.3 Curva carga  $P$  versus deslocamento  $a$ .

### 7.2.2 Segundo Exemplo: Viga Mista Semi - Contínua

Em Queiroz *et al.* (2001b) é apresentado um modelo para análise de vigas mistas com ligações mistas. As vigas apresentadas em Queiroz *et al.* (2001b) foram analisadas utilizando-se análise linear elástica (Figura 7.4). As inércias transformadas utilizadas para os elementos foram obtidas através da homogeneização da seção, sendo o módulo de elasticidade do concreto dividido por dois para consideração das cargas de longa duração. Na região de momentos negativos, seção V3 da Figura 7.4, o concreto tracionado é totalmente desprezado e as armaduras são quantificadas na obtenção da inércia transformada. Segundo Queiroz *et al.* (2001b) a inércia transformada obtida para a seção V3 deve ser utilizada em 15 % do comprimento do vão de cada lado do apoio. As ligações mistas são modeladas como molas de comprimento desprezível e rigidez constante igual à rigidez inicial da ligação.

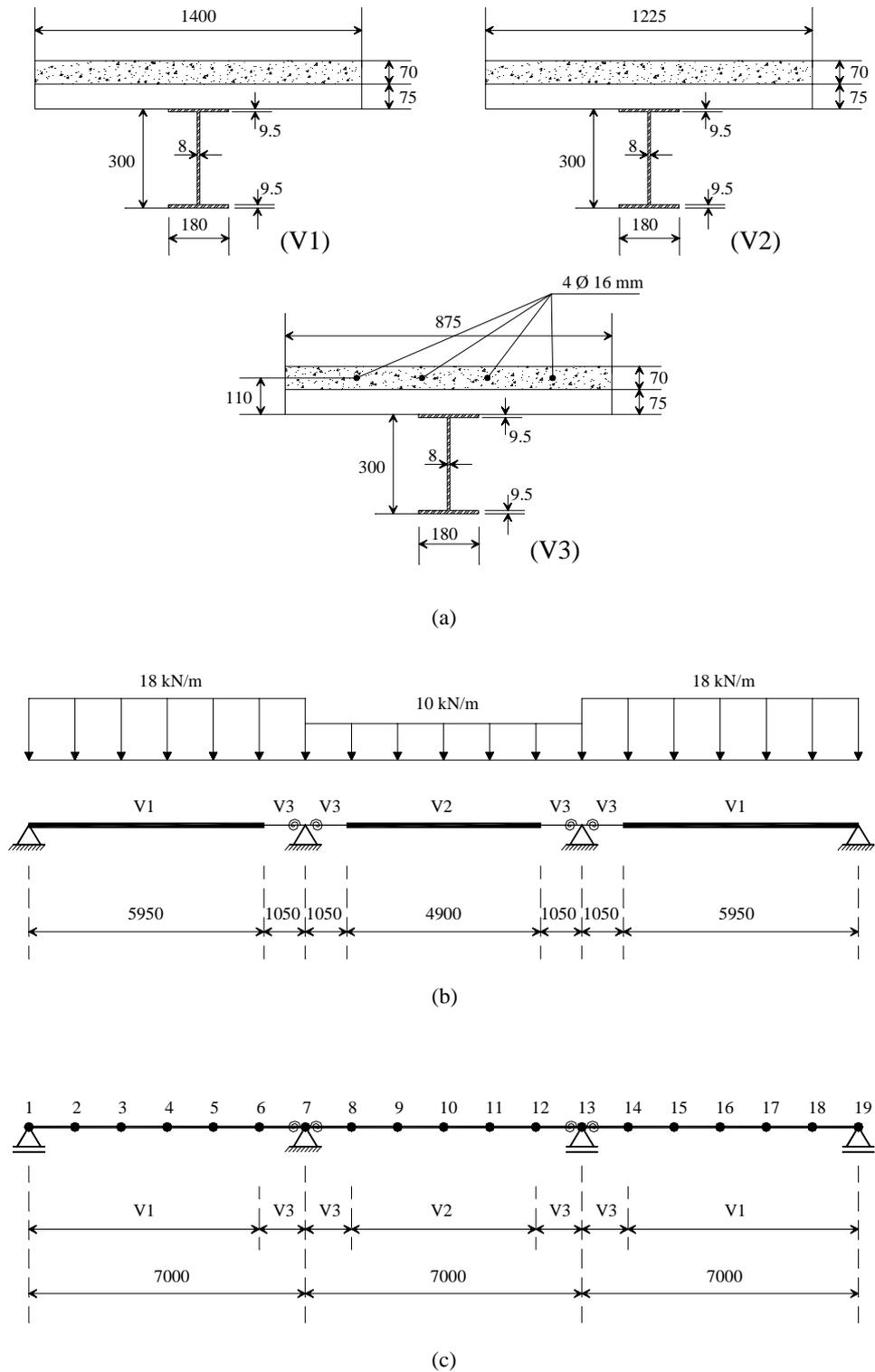


Figura 7.4 Modelos para análise: (a) seções transversais que compõem a viga mista, dimensões em *mm*; (b) viga mista analisada em Queiroz *et al.* (2001b); (c) viga mista analisada no FEMOOP.

A viga possui  $f_{ck} = 20$  MPa e  $f_y = 250$  MPa. As armaduras, seção V3 da Figura 7.4, são compostas por quatro barras de diâmetro 16 mm e aço CA 50 A. As ligações mistas tem rigidez inicial igual a 30270 kNm/rad, Queiroz *et al.* (2001b) .

No FEMOOP, os elementos possuem tamanhos iguais e foram utilizados dois pontos de Gaus nas análises. Para simular a influência do carregamento de longa duração foram feitas análises com vários coeficientes de fluência. O módulo de elasticidade adotado para o aço foi de 205000 MPa.

A Tabela 7.1 mostra os resultados das análises onde os deslocamentos são medidos no meio do primeiro vão da viga. Foram feitas duas análises: uma considerando a viga semi-contínua e outra considerando a viga contínua, ou seja, com ligações rígidas.

Tabela 7.1 Resultados das análises da viga mista semi-contínua:  
deslocamentos no meio do primeiro vão.

Queiroz <i>et al.</i> (2001b) Deslocamento = 0.792 cm		
FEMOOP		
Coefficiente de Fluência $\phi$ (1)	Deslocamentos (cm) (2)	<u>Deslocamento FEMOOP</u> 0.792 (3)
0.0	0.691	0.872
1.0	0.853	1.077
2.0	0.920	1.162

Tabela 7.2 Resultados das análises da viga mista contínua:  
deslocamentos no meio do primeiro vão.

Queiroz <i>et al.</i> (2001b) Deslocamento = 0.686 cm		
FEMOOP		
Coefficiente de Fluência $\phi$ (1)	Deslocamentos (cm) (2)	<u>Deslocamento FEMOOP</u> 0.686 (3)
0.0	0.613	0.894
1.0	0.759	1.106
2.0	0.873	1.273

Queiroz *et al.* (2001b) também apresentam o resultado da análise da viga modelada de forma contínua, considerando as ligações rígidas. Os resultados são apresentados na Tabela 7.2.

Pode-se observar, a partir da Tabela 7.1 e 7.2, que para o coeficiente de fluência igual a 1.0, tem-se os melhores resultados considerando a análise realizada em Queiroz *et al.* (2001b). As diferenças entre os valores encontrados são justificadas pelos tipos de análise adotados. Em Queiroz *et al.* (2001b) tem-se uma análise linear física e geométrica conforme já mencionado. Observa-se que a consideração do módulo de elasticidade do concreto dividido por dois, é equivalente ao coeficiente de fluência tomado igual a 1.0. Observa-se que para o coeficiente de fluência igual a 1.0, tem-se deslocamentos pouco maiores para as análises feitas no FEMOOP, como era de se esperar, devido as características das análises, que incluem não-linearidade física.

### **7.2.3 Terceiro Exemplo: Pórtico Semi - Rígido**

Chan e Chui (2000) apresentam resultados da análise de um pórtico de aço simples com ligações rígidas e semi-rígidas. O pórtico é formado por vigas e pilares de seção W 8 x 31, a tensão de escoamento do aço é de 250 MPa e o módulo de elasticidade 200000 MPa. A rigidez linear da ligação é de  $10 EI / L$ , sendo E, I e L referentes à viga, Figura 7.5. Nas análises feitas por Chan e Chui (2000), utilizaram-se elementos de mola de comprimento nulo para simulação das ligações semi-rígidas e das rótulas plásticas. Estes elementos, associados a elementos de barra, têm os graus de liberdade internos condensados. Os autores descrevem dois modelos de análise para a consideração da formação das rótulas plásticas:

(a) Método da rótula elasto-plástica, EPH. Neste modelo a rótula plástica possui comportamento elasto-plástico baseado no conceito de que o perfil metálico é formado por placas. Neste conceito da seção formada por placas, parte da alma do perfil é considerada plastificada pela força normal, sendo o restante da alma e flanges do perfil resistentes ao momento fletor. A plastificação total da seção ocorre quando se esgota a resistência a plastificação da seção pelo esforço normal e momento. Segundo Chan e Chui (2000) essa simplificação está de acordo com os procedimentos da BS 5950 (1990) e é compatível com os resultados de resistência a flexão sob esforço normal publicados pelo *Steel Construction Institute* (SCI, 1987). Nesta simulação das rótulas plásticas, tem-se uma modificação abrupta da rigidez da mola, passando da consideração de rigidez infinita para rigidez nula;

(b) Método refinado da rótula plástica, RPH. Um segundo modelo, também baseado no conceito de que o perfil é formado por placas, considera o início do escoamento na seção simulando uma plastificação gradual até o escoamento total. O início do escoamento da seção é detectado em função do módulo elástico da seção e da tensão de escoamento diminuída do valor da tensão residual do aço e da tensão provocada pelo esforço normal na seção. O escoamento gradual é simulado através de uma expressão de transição suave entre o início e o escoamento total da seção.

A média das diferenças entre as análises feitas no FEMOOP e as análises EPH fica em torno de 2%, e pode-se verificar que a rigidez inicial obtida é praticamente a mesma. Observa-se a partir dos gráficos da Figura 7.5 que a análise feita no FEMOOP fica mais próxima da análise EPH realizada por Chan e Chui (2000). Em relação às análises RPH, as análises feitas no FEMOOP tem em média uma diferença de 14%.

Observa-se que o comportamento elasto-plástico adotado para o aço é preponderante nas análises, apesar da formulação monitorar a não-linearidade física nos pontos de integração, neste caso quatro pontos de Gauss, através da obtenção da matriz de rigidez e força interna, considerando o escoamento parcial e total da seção.

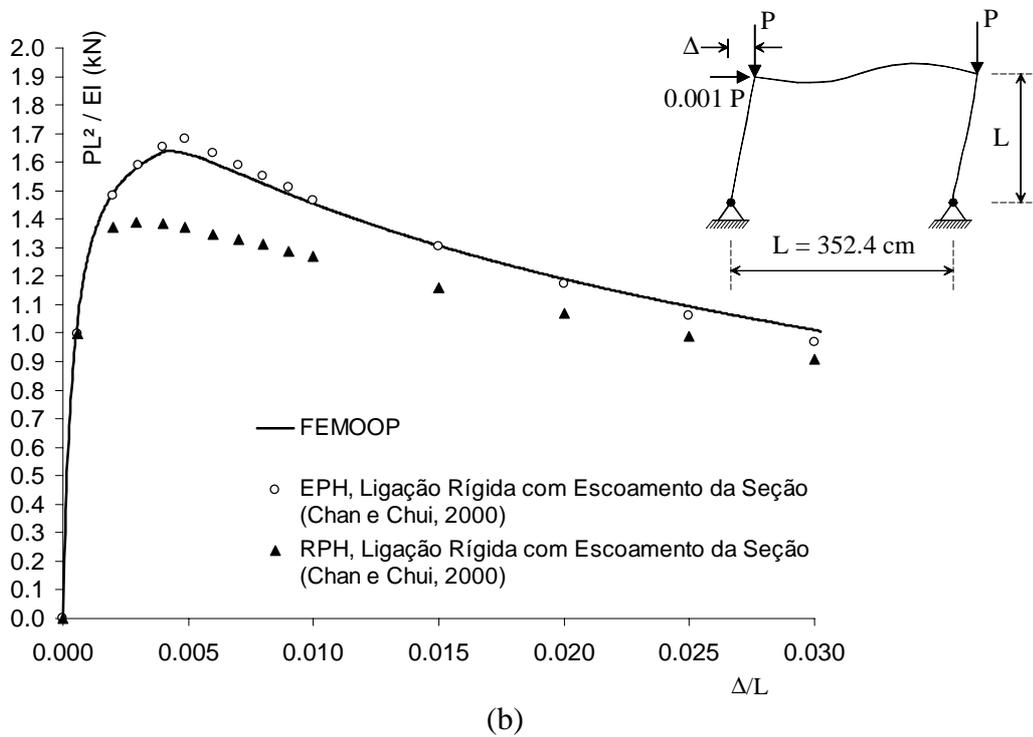
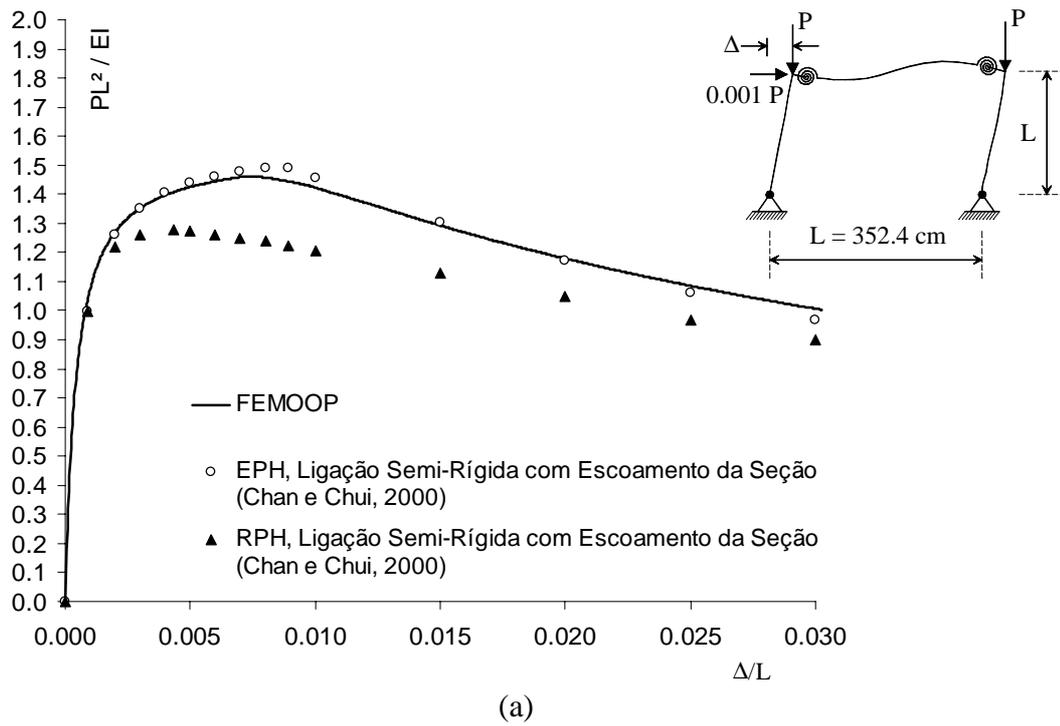


Figura 7.5 Curvas carga-deslocamento: (a) pórtico com ligações semi-rígidas;  
(b) pórtico com ligações rígidas.

A integração numérica por Lobatto também foi utilizada, e chegou-se, praticamente, aos mesmos resultados.

Utilizando para o aço uma relação tensão-deformação que considere a influência das tensões residuais deve-se ter uma melhor concordância entre os resultados e o método RPH. Nas análises RPH, realizadas em Chan e Chui (2000), utilizou-se o valor de 125 MPa para as tensões residuais.

#### 7.2.4 Quarto Exemplo: Pórticos de Dois Andares

Pórticos metálicos com dois andares e diferentes condições de apoio são mostrados nas Figuras 7.6 a 7.10. Os pórticos possuem vigas de seção W 14 x 48 e pilares de seção W 12 x 96, sendo considerados casos de pórticos contraventados e não contraventados. Os contraventamentos foram feitos com cantoneiras L 3 x 3 x 1/2. As ligações são consideradas rígidas e somente os contraventamentos são rotulados. Os dados utilizados nas comparações com o FEMOOP foram obtidos do trabalho de Chan e Chui (2000).

Nas análises feitas por Chan e Chui (2000), os autores utilizaram o método refinado da rótula plástica, RPH, descrito no exemplo anterior.

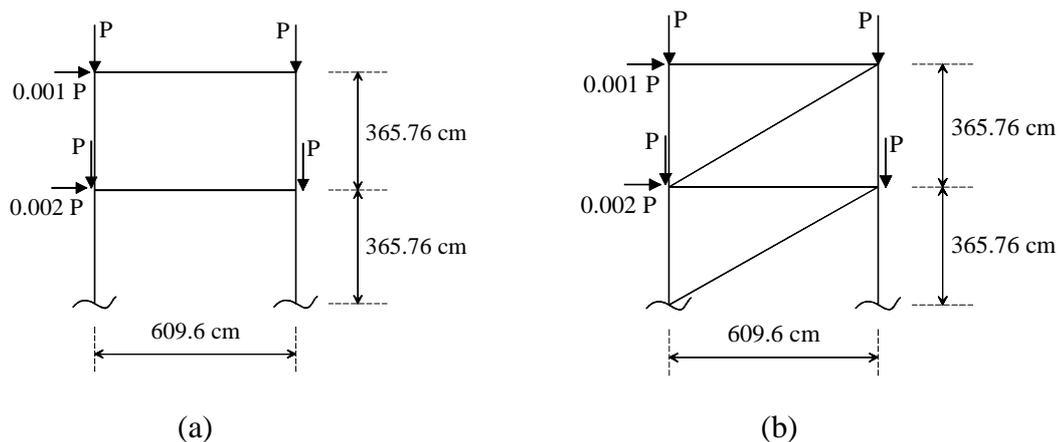


Figura 7.6 Pórticos analisados por Chan e Chui (2000):  
(a) pórtico sem contraventamento; (b) pórtico contraventado.

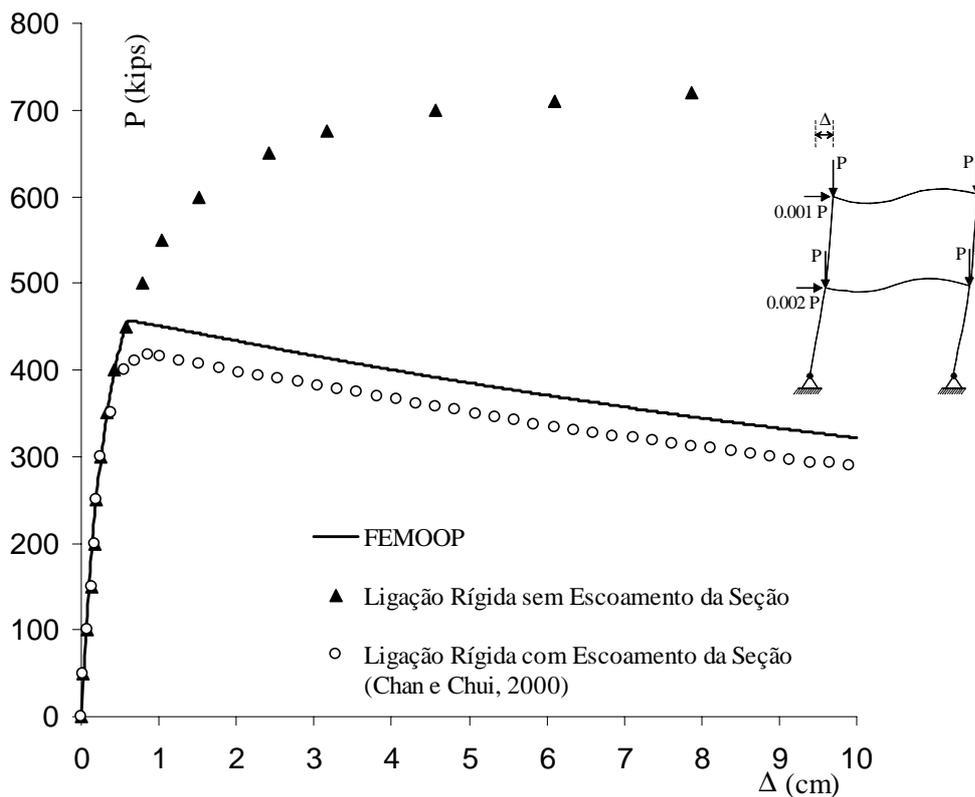


Figura 7.7 Curva carga-deslocamento, apoios rotulados sem contraventamento.

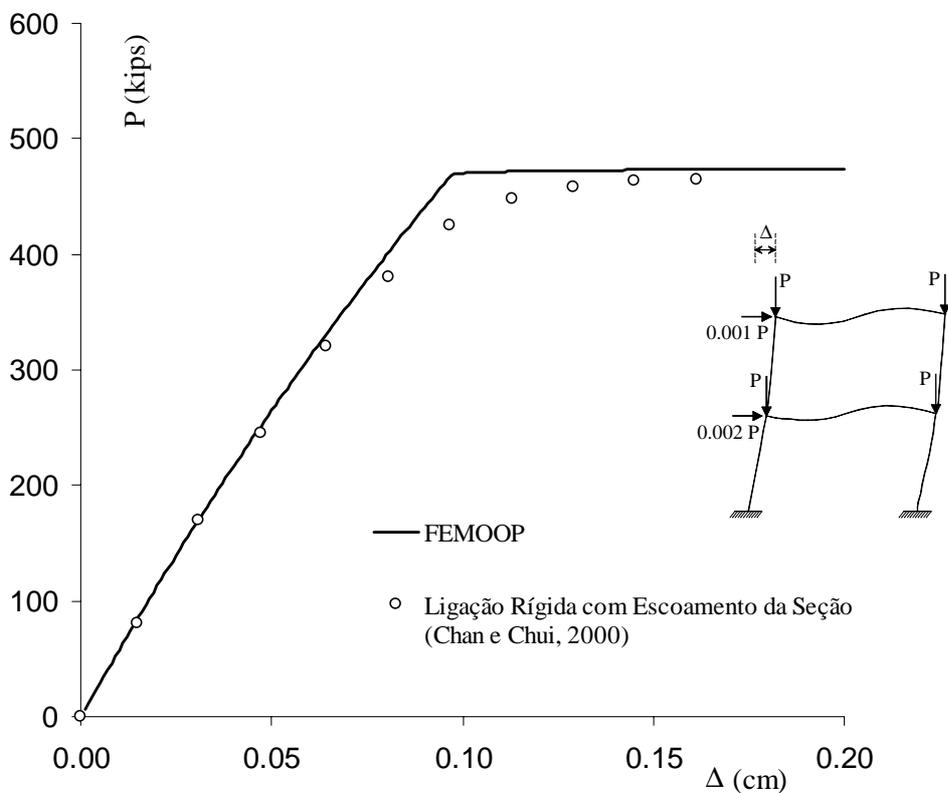


Figura 7.8 Curva carga-deslocamento, apoios engastados sem contraventamento.

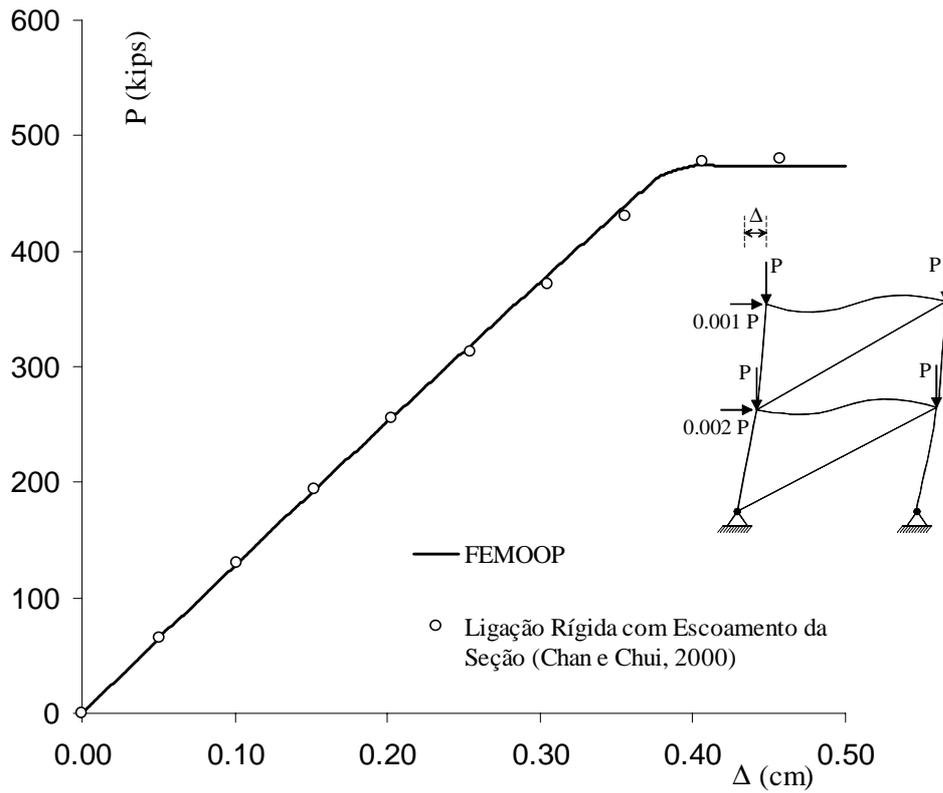


Figura 7.9 Curva carga-deslocamento, apoios rotulados com contraventamento.

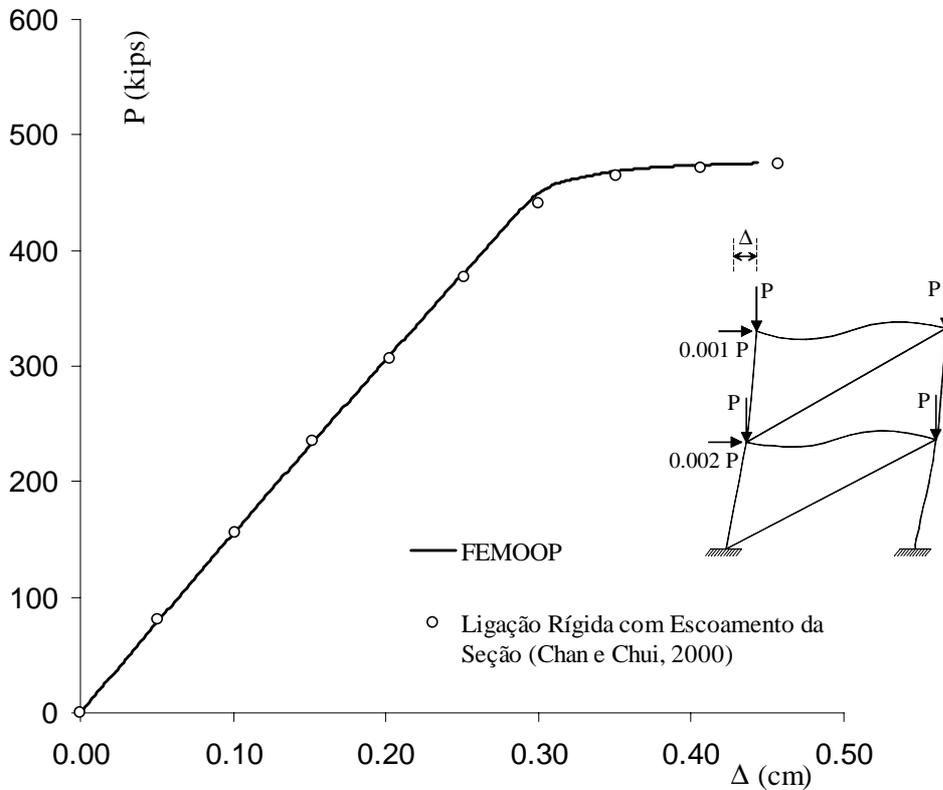


Figura 7.10 Curva carga-deslocamento, apoios engastados com contraventamento.

A média das diferenças entre os resultados do FEMOOP e os obtidos em Chan e Chui (2000) ficam em torno de 3 % e a rigidez inicial dos pórticos é praticamente a mesma. O módulo de elasticidade e a tensão de escoamento do aço utilizados nas análises feitas no FEMOOP são de 205000 MPa e 235 MPa, respectivamente. Nas análises feitas por Chan e Chui (2000) não é citado o valor do módulo de elasticidade e da tensão de escoamento adotados para o aço, nem o valor da tensão residual.

As diferenças entre as curvas carga-deslocamento devem estar associadas principalmente à consideração de comportamento elástico-plástico perfeito adotado para o aço no presente trabalho. Observa-se que a curva de transição entre o início e o escoamento completo da seção adotada no modelo refinado da rótula plástica, RPH, simula o comportamento do aço que na realidade se difere do comportamento elasto-plástico perfeito.

A consideração da influência da tensão residual na relação tensão-deformação do aço deverá levar a resultados mais próximos aos do método RPH.

# CONCLUSÕES E SUGESTÕES

## 8.1 COMENTÁRIOS GERAIS E CONCLUSÕES

Ao longo deste trabalho foram desenvolvidas e implementadas formulações voltadas para análise e dimensionamento de pilares mistos. O caráter genérico da formulação permite a análise de pilares e vigas de concreto, aço ou mistas. Foram analisados pilares mistos envolvidos e preenchidos, e ao final do trabalho, a formulação foi estendida e aplicada para análise de pórticos semi-rígidos com seções quaisquer, capazes de considerar as não-linearidades física e geométrica.

No Capítulo 1 apresentou-se uma visão geral sobre estruturas mistas. Pode-se observar que a utilização dessas estruturas, em relação às estruturas de concreto, ainda é pequena no Brasil. Pesquisas devem ser elaboradas no intuito de divulgar, tanto no meio profissional, como acadêmico, essas soluções e suas vantagens.

Uma revisão bibliográfica acerca dos métodos utilizados para análise e dimensionamento de pilares mistos, além de um levantamento sobre trabalhos já realizados são apresentados no Capítulo 2. Observou-se que os procedimentos de norma são simplificados e que as pesquisas recentes tem buscado métodos mais precisos. Poucos trabalhos têm um caráter geral de tratamento dos pilares, a não ser aqueles voltados para análise da seção transversal. A maioria trata de pilares mistos em casos particulares, diferentemente do presente trabalho. Em geral, os modelos de elementos finitos utilizados para comparar resultados experimentais são os disponíveis em

programas comerciais, sendo estes modelos muitas vezes tridimensionais, que geralmente demandam tempo excessivo de modelagem e análise.

A obtenção de esforços em seções transversais genéricas constituídas por concreto e aço foi tratada no Capítulo 3. O método de integração, a consideração do centróide plástico e as relações tensão-deformação utilizadas se mostraram adequadas e genéricas, permitindo não só a análise de pilares como de vigas de concreto, aço ou mistas.

Relações momento-curvatura foram obtidas no Capítulo 4 através do Método de Newton Raphson, controlando o momento atuante na seção ou controlando a curvatura. Os estados limites últimos considerados foram os mesmos utilizados em estruturas de concreto armado. Estas relações podem ser utilizadas na obtenção das rigidezes em análises por elementos finitos, como foi apresentado no Capítulo 6.

No Capítulo 5, apresentaram-se duas formulações para obtenção de superfícies de interação, uma utilizando o Método de Newton Raphson e outra utilizando um parâmetro de deformação. Os resultados apresentados nos exemplos foram coerentes com outros trabalhos e resultados de normas, podendo a formulação ser utilizada na verificação de seções de pilares e na análise de procedimentos simplificados de normas.

Um modelo de elementos finitos para análise de pilares mistos foi desenvolvido e implementado no Capítulo 6. Os resultados apresentados nos exemplos foram coerentes com outros trabalhos numéricos e experimentais, o que comprova o caráter genérico da formulação, tendo sido analisadas vigas de concreto, pilares mistos envolvidos, preenchidos e vigas parcialmente envolvidas. Recentemente, implementou-se a opção de se definir qualquer relação tensão-deformação para os materiais, podendo-se ter quantos materiais se queira na seção. Esta implementação vem sendo testada e com ela poderão ser usadas relações tensão-deformação mais apropriadas para o concreto.

O modelo de elementos finitos desenvolvido foi modificado para simulação de pórticos planos com ligações semi-rígidas ou mistas através da implementação da matriz de rotação e incorporação de elementos de mola, Capítulo 7. O modelo se mostrou adequado para análise de pórticos de concreto e metálicos com as considerações das ligações semi-rígidas e a não-linearidade do material. Na análise feita com a viga mista semi-contínua, ligações mistas, e cargas de longa duração o modelo se mostrou apropriado.

Concluindo, observa-se que os parâmetros envolvidos na análise de estruturas mistas são variados e complexos, o que mostra que há uma série de questões e fenômenos que devem ser avaliados e analisados de forma mais consistente e eficaz.

## **8.2 SUGESTÕES**

Sugere-se que seja adicionada ao modelo de elementos finitos a consideração do efeito das deformações produzidas pelo esforço cortante. Este efeito deverá ser importante na análise de vigas com grande razão altura da seção em relação ao vão viga. Espera-se que este efeito não seja importante para estruturas mistas uma vez que em geral as vigas mistas tem pequena relação altura vão e, portanto, predominam na seção as tensões de flexão. A simulação da interação parcial também deve ser estudada. Segundo Spacone e El-Tawil (2004) a interação parcial é um problema inerente às estruturas mistas influenciando principalmente nos estados limites de utilização, dissipação de energia, distribuições locais de tensões e estados limites últimos.

Considerações sobre interação parcial, carregamentos de longa duração, formas de edificação da estrutura podem ser adicionadas ao modelo apresentado no Capítulo 6.

Modelos de elementos finitos co-rotacionais e considerações sobre imperfeições iniciais podem ser acrescentadas ao modelo (Crisfield, 1991).

Uma alternativa a modelos baseados em deslocamentos são modelos baseados no método das forças. Este tipo de modelo tem sido utilizado em simulações de estruturas de concreto armado e metálicas. Segundo Spacone e El-Tawil (2004) a utilização de modelos baseados em forças pode ser naturalmente estendida para simulação da interação parcial em estruturas mistas. Os mesmos autores também levantam questões sobre a interpolação cúbica utilizada para os deslocamentos transversais. Este esquema fornece curvaturas lineares que devem ser exatas somente no âmbito de comportamento linear e seção transversal constante, sendo uma aproximação para seções de propriedades variáveis ao longo da barra, o que é comum quando se tem a não-linearidade física e geométrica. O problema pode ser resolvido de forma satisfatória utilizando uma maior discretização, o que por outro lado aumenta o número de graus de liberdade globais.

Outros modelos de ligações semi-rígidas devem ser implementados, porém o modelo multi-linear deve representar bem qualquer curva dependendo do número de pontos adotados. Pesquisas devem ser feitas em relação ao fenômeno da fluência. Pode-se, através do modelo aqui adotado, calibrar, a partir de experimentos, coeficientes de fluência adequados para análises de projeto.

A obtenção de esforços como apresentado pode ser utilizada para análise avançada de estruturas em situação de incêndio, seguindo os seguintes passos: (a) Obtenção da distribuição de temperaturas na estrutura e conseqüentemente nas seções dos elementos; (b) Definição da seção transversal em poligonais de acordo com o material e a temperatura média. Os esforços nestas seções serão obtidos a partir da integração das respectivas relações tensão-deformação, definidas em função do material e da faixa de temperatura em que se encontra; (c) As ligações em situação de incêndio podem ser modeladas a partir das relações momento-rotação em função da temperatura, baseadas na degradação da rigidez rotacional e resistência da ligação obtidas através de ensaios experimentais ou segundo recomendações de normas.

Programas computacionais totalmente gráficos e interativos, capazes de resolver estruturas de concreto, metálicas e mistas, otimização de seções e estruturas, são trabalhos que podem ser desenvolvidos a partir da pesquisa apresentada fornecendo ferramentas avançadas para a análise e dimensionamento destas estruturas.

---

# BIBLIOGRAFIA

ACI-318 (1999). Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary. American Concrete Institute, Detroit.

AIJ (1987). Structural Calculations of Steel Reinforced Concrete Structures. Architectural Institute of Japan, Tokio.

AISC (1999). Load and Resistance Factor Design Specification for Steel Buildings. American Institute of Steel Construction, with errata incorporated as of September 4, 2001, Chicago.

Alva, G. M. S. (2000). Sobre o Projeto de Edifícios em Estrutura Mista Aço-Concreto. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

Anslijn, R. e Janss J. (1974). Le Calcul de Charges Ultimes des Colonnes Metalliques Enrobes de Beton. C.R.I.R., Report MT 89, Abril, Brussels.

AS 4100 (1990). Steel Structures. Standards Australia, Sydney, Australia.

Bathe, K. J. (1996). Finite Element Procedure. New Jersey. Prentice-Hall.

Bathe, K. J. e Dvorkin, E. N. (1983). On the Automatic Solution of Nonlinear Finite Element Equations. Comput. Struct., v. 17, p. 871-879.

Batoz, J. L. e Dhatt, G. (1979). Incremental Displacement Algorithms for Non-Linear Problems. Int. J. Numer. Methods. Eng., v. 14, p. 1262-1266.

Boyd, P. F., Cofer, W. F., McLean, D. I. (1995). Seismic Performance of Steel-Encased Composite Columns under Flexural Loading. ACI Structural Journal, v. 92(3), p. 335-64.

Bridge, R. Q. (1976). Concrete-Filled Steel Tubular Columns. Civil Engineering Transactions, Institution of Engineers, CE18, p. 127-33, Australia.

Bridge, R. Q., O'Shea, M. D., Gardner, P., Grigson, R. e Tyrell, J. (1995). Local Buckling of Square Thin-Walled Steel Tubes with Concrete in-Fill. Proceedings of International Conference on Structural Stability and Design, p. 307-14, Sydney.

BS 5400 (1979). Steel, Concrete and Composite Bridges: Part 5: Code of Practice for Design of Composite Bridges. British Standards Institution, London.

BS 5950 (1990). Part 1: Structural Use of Steelwork in Buildings. British Standards Institution, London, England.

Cai, S. H. (1991). Influence of Moment Distribution Diagram on Load-Carrying Capacity of Concrete-Filled Steel Tubular Columns. Proceedings of Third International Conference on Steel-Concrete Composite Structures, ASCCS, p. 113-18, Japan, September.

Caldas, R. B. e Sousa Jr., J. B. M. (2003). Superfícies de Interação em Seções Transversais Mistas Aço-Concreto. Proceedings of XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE, Ouro Preto, Brasil.

CEB (1990). CEB - FIP - Model Code 1990 - Final Draft. Bulletin d'Information n.203, Comité Euro-Internacional Du Beton, Paris.

CFT Working Group (1993). Compression Test on Concrete-Filled Circular Steel Tube Columns. Kozai Club, December.

Chan, S. L. e Chui, P. P. T. (2000). Non-Linear Static and Cyclic Analysis of Steel Frames with Semi-Rigid Connections. Elsevier, Oxford.

Chen, S. F., Teng, J. G. e Chan, S. L. (2001). Design of Biaxially Loaded Short Composite Columns of Arbitrary Section. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 127(6), June.

Chen, W. F. e Toma, S. (1992). Advanced Analysis of Steel Frames. CRC Pres.

Cook, R. D., Malkus, D. S. e Plesha, M. E. (1989). Concepts and Applications of Finite Element Analysis. John Wiley & Sons.

Crisfield, M. A. (1981). A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles Snap-Through. Comput. Struct., v. 13, p. 55 - 62.

Crisfield, M. A. (1991). Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. John Wiley & Sons, v. 1.

Deitel, H. M. e Deitel, P. J. (2001). C++ Como Programar. Bookman.

De Nardim, S. (1999). Estudo Teórico-Experimental de Pilares Mistos Compostos por Tubos de Aço Preenchidos com Concreto de Alta Resistência. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

De Nardim, S., El Debs, A. L. e Marques, S. P. C. (2001). Comportamento de Pilares Preenchidos Submetidos à Flexão Normal Composta. I Congresso Internacional da Construção Metálica, CICOM, São Paulo, Brasil.

De Nardim, S. e El Debs, A. L. (2002). Estudo da Capacidade Resistente de Pilares Preenchidos via Investigação Experimental. II Congresso Internacional da Construção Metálica, CICOM, São Paulo, Brasil.

Drysdale, R. G. e Huggins, M. W. (1971). Sustained Biaxial Load on Slender Concrete Columns. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 97(5), p. 1423 - 42.

Dumont, N. A., Musso, Jr., F. e Ferreira, L. T. S. (1987). Um programa Iterativo de Dimensionamento Geral e Verificação de Estabilidade de Estruturas de Concreto Armado usando Microcomputadores e Recursos Gráficos. Anais do Colloquia, v. 2, p. 1 - 14.

Elnashai, A. S., Takanashi, K., Elghazouli, A. Y. e Dowling, P. J. (1991). Experimental Behaviour of Partially Encased Composite Beam-Columns under Cyclic and Dynamic Loads: Part 2. Proceedings of Institution of Civil Engineers. Structures & Buildings, v. 91, p. 259 - 72, June.

Eurocode 2 (1992). Design of Concrete Structures: Part1-1: General Rules and Rules for Buildings. ENV 1992-1-1, European Committee for Standardization.

Eurocode 3 (1995). Design of Steel Structures: Part 1-2: General Rules Structural Fire Design. ENV 1993-1-2, European Committee for Standardization.

Eurocode 4 (1994). Design of Composite Steel and Concrete Structures: Part 1.1: General rules and rules for buildings. DRAFT prEN 1994-1-1:2001, European Committee for Standardization, April, 2001.

Ferreira, L. T. S. (1986). Desenvolvimento de um Sistema Geral de Dimensionamento de Estruturas de Concreto Armado usando Microcomputadores. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC/Rio.

Figueiredo, L. M. B. (1998). Projeto e Construção de Pilares Mistos Aço-Concreto. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

Fuji, K. (1994). Structural and Ultimate Behaviour of two Types of Mortar Filled Steel Tubes in Compression. Proceedings of Fourth International Conference on Steel-Concrete Composite Structures, ASCCS, p. 194 - 7, June, Slovakia.

Furlong, R. W. (1976). AISC Column logic Makes Sense for Composite Columns, too. Engineering Journal, AISC, v. 1, p. 1 - 7.

Fusco, P. B. (1986). Estruturas de Concreto: Solicitações Normais: Estados Limites Últimos: Teoria e Aplicação. Guanabara Dois, Rio de Janeiro.

Garcia, L. F. T. e Villaça, S. F. (1999). Introdução à Elasticidade não Linear. 3ª ed., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

Ge, H. e Usami, T. (1992). Strength of Concrete-Filled Thin Walled Steel Box Columns: Experiment. *Journal Structural Engineering, ASCE*, v. 118(11), p. 3036 - 54.

Gomes, N. S. (1994). Pilares Mistos Tubulares de Aço e Concreto. Tese de Doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo.

Griffs, L. G. (1994). The 1994 T. R. High Lecture: Composite Frame Construction. *National Steel Construction Conference, AISC*, v. 1, p. 1.1 - 1.72, New York.

Guimarães, L. G. S. (1992). Disciplina Orientada a Objetos para Análise e Visualização Bidimensional de Modelos de Elementos Finitos. Dissertação de Mestrado, PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil.

Han, L.-H. (2004). Flexural Behaviour of Concrete-Filled Steel Tubes. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 60, p. 313 - 337.

Han, L.-H. e Yang, Y.-F. (2003). Analysis of Thin-Walled Steel RHS Columns Filled with Concrete under Long-Term Sustained Loads. *Thin-Walled Structures*.

Han, L.-H., Zhao, X. L. e Tao, Z. (2001). Tests and Mechanics Model of Concrete-Filled SHS Stub Columns: Columns and Beam-Column. *Steel & Composite Structures: An International Journal*, v. 1(1), p. 51 - 74.

Hayashi, N., Fukumoto, T., Inoue, T., Akiyama, H. e Okada, T. (1995). Shear-Flexural Behavior of Concrete-Filled Square Steel Tubular Columns Using High-Strength Materials. *Proceedings of Fourth Pacific Structural Steel Conference, Steel-Concrete Composite Structures*, v. 3, p. 13 - 20.

Hunaiti, Y. M. e Fattah, B. A. (1994). Design Considerations of Partially Encased Composite Column. Proceedings of Institution of Civil Engineers, Structures & Buildings, v. 106, p. 75 - 82, February.

Johansson, M. e Gylltoft, K. (2002). Mechanical Behavior of Circular Steel-Concrete Composite Stub Columns. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 128(8), August.

Johnston, B. G. (1976). Guide to the Stability Design Criteria for Metal Structures. Structural Stability Research Council, SSRC, ed. 3<sup>a</sup>, New York.

Kato, B. (1996). Column Curves of Steel-Concrete Composite Members. Journal Constructional Steel Research. v. 39(2), p. 121 - 135.

Kawano, A. e Matsui, C. (1997). Composite Construction in Steel and Concrete III. Dale Burckner C, Shahrooz, B. M., editors. Proceedings of an Engineering Foundation Conference, Swabian Conference Center, Germany, v. 9 - 14, ASCE, p. 602 - 15.

Kilpatrick, A. E. (1994). Response of Composite Columns to Applied Axial Shortening. Proc. Fourth International Conference on Steel-Concrete Composite Structures. ASCCS, p. 218 - 21, Slovakia.

Kilpatrick, A. E. (1996). The Behaviour of High-Strength Composite Concrete Columns. Tese de Doutorado, Curtin University of Technology, Australia.

Kim, W. J., Park, J. M. e Oh, Y. S. (1995). The Properties of Mechanical Behaviour of Concrete Filled Steel Tube Column. Proceedings of Fourth Pacific Structural Steel Conference, Steel-Concrete Composite Structures, v. 3, p. 21 - 8.

Kindmann, R., Bergmann, R., Cajot, L.-G. e Schleich, J. B. (1993). Effect of Reinforced Concrete Between the Flanges of the Steel Profile of Partially Encased Composite Beams. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 27, p. 107 - 122.

Knowles, R. B., e Park, R. (1969). Strength of Concrete Filled Steel Tubular Columns. *Journal of the Structural Division, ASCE*, v. 105(12), p. 2565 - 87.

Konno, K., Kei, T., Nagashima, T. (1990). Behaviour of Concrete-Filled Square Steel Columns. *International Association for Bridge and Structural Engineering Conference*, p. 269 - 70, Brussels.

Lakshmi, B. e Shanmugam, N. E. (2002). Nonlinear Analysis of In-Filled Steel-concrete Composite Columns. *Journal of Structural Engineering*, v. 128, p. 922 – 933.

Liu, D., Gho, W.-M. e Yuan, J. (2003). Ultimate Capacity of High-Strength Rectangular Concrete-Filled Steel Hollow Section Stub Columns. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 59, p. 1499 - 1515.

Malite, M., Sáles, J. J. e Takeya, T. (1995). Contribuição ao Dimensionamento de Colunas Mistas Aço-Concreto. *XXVII Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural*, v. 1, p. 483 – 494, Argentina.

Martha, L. F. (2003). Notas de Aula do Curso Fundamentos de Computação Gráfica Aplicada. PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil, ([www.tecgraf.puc-rio.br/~lfm](http://www.tecgraf.puc-rio.br/~lfm)).

Matsui, C. (1979). Study on Elasto-Plastic Behaviour of Concrete-Encased Columns Subjected to Eccentric Axial Thrust. Annual Assembly of Architectural Institute of Japan, p. 1627 - 8.

Matsui, C. (1993). Local Buckling of Concrete Filled Steel Square Tubular Columns. International Association for Bridge and Structural Engineering Conference, Symposium papers, p. 269 - 76, Luxembourg.

Matsui, C., Tsuda, K. e Ishibashi, Y. (1995). Slender Concrete-Filled Steel Tubular Columns under Combined Compression and Bending. Proceedings of 4<sup>th</sup> Pacific Structural Steel Conference, v. 3, p. 29 - 36.

Melo, A. M. C. (2000). Projeto Ótimo de Pórticos de Concreto Armado. Tese de doutorado, COPPE/UFRJ, Departamento de Engenharia Civil, Rio de Janeiro.

Mirza, S. A., Hyttinen, V. e Hyttinen, E. (1996). Physical Tests and Analyses of Composite Steel-Concrete Beam-Columns. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 122(11), p. 1317 - 26.

Mirza, S. A. e Skrabek, B. W. (1991). Reliability of Short Composite Beam-Column Strength Interaction. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 117(8), p. 2320 - 39.

Mirza, S. A. e Skrabek, B. W. (1992). Statistical Analysis of Slender Composite Beam-Column Strength. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 118(5), p. 1312 - 31.

Morino, S., Kawaguchi, J. e Cao, Z. S. (1996). Creep Behavior of Concrete-Filled Steel Tubular Members. Proceedings Engineering Foundation Conference: Composite Construction in Steel and Concrete III, Germany.

Morino, S., Matsui, C. e Watnabe, H. (1984). Strength of Biaxially Loaded SRC Column. Composite and Mixed Construction, ASCE, ed. Roeder C. W., p. 185 - 94.

Munoz, P. R., e Thomas Hsu, C. T. (1997). Behaviour of Biaxially Loaded Concrete-Encased Composite Columns. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 123(9), p. 1163 - 71.

Nakai, H., Kurita, A. e Ichinose, L., H. (1991). An Experimental Study on Creep of Concrete Filled Steel Pipes. Proceedings 3<sup>rd</sup> International Conference on Steel-Concrete Composite Structures, p. 55 - 60, Fukuoka, Japan.

Nakamura, T. (1994). Experimental Study on Compression Strength of Concrete-Filled Square Tubular Steel Columns. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 40, p. 411 - 7.

Nakanishi, K., Kitada, T. e NaKai, H. (1999). Experimental Study on Ultimate Strength and Ductility of Concrete Filled Steel Columns under Strong Earthquake. Journal of Constructional Steel Research, v. 51, p. 297 - 319.

NBR 6118 (2003). Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado. Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro.

NBR 8800 (1986). Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios. Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro.

NBR 8800 (2003). Projeto de Revisão. Projeto e Execução de Estruturas de Aço e Estruturas Mistas Aço-Concreto de Edifícios. Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro.

NBR 14323 (1999). Dimensionamento de Estruturas de Aço de Edifícios em Situação de Incêndio. Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro.

Neogi, P. K., Sen, H. K. e Chapman, J. C. (1969). Concrete-Filled Tubular Steel Columns under Eccentric Loading. *The Structural Engineer*, v. 47(5), p. 187 - 95.

O'Brien, A. D. e Rangan, B. V. (1993). Tests on Slender Tubular Steel Columns Filled with High-Strength Concrete. *Australian Civil Engineering Transactions*, v. 35(4), p. 287 - 92.

Oehlers, D. J. e Bradford, M. A. (1995), *Composite Steel and Concrete Structural Members: Fundamental Behaviour*. Pergamon Press, Oxford.

Oehlers, D. J. e Bradford, M. A. (1999). *Elementary Behaviour of Composite Steel and Concrete Structural Members*. Biddles Ltda.

O'Shea, M. D. e Bridge, R. Q. (1995). Circular Thin Walled Concrete Filled Steel Tubes. *Proceedings Fourth Pacific Structural Steel Conference, Steel-Concrete Composite Structures*, v. 3, p. 53 - 60.

Parente Jr., E. (2000). *Análise de Sensibilidade e Otimização de Forma de Estruturas Geometricamente Não-Lineares*. Tese de Doutorado, PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil, Rio de Janeiro.

Prion, H. G. L. e Boehme, J. (1989). Beam-Column Behaviour of Steel Tubes Filled with High-Strength Concrete. Fourth International Colloquium, SSRIC, p. 439 - 49, New York.

Queiroz, G. e Prestes, J. A. S. (2001). Pilares Mistos Parcialmente Revestidos de Concreto. I Congresso Internacional da Construção Metálica, CICOM, São Paulo, Brasil.

Queiroz, G. e Prestes, J. A. S. (2002). Proposta de um Diagrama de Interação para a Verificação de Pilares Mistos Sujeitos à Flexão Composta. II Congresso Internacional da Construção Metálica, CICOM, São Paulo, Brasil.

Queiroz, G. e Queiroz, F. D. (2003a). Modelos de Elementos Finitos para Pilares Mistos Aço-Concreto Parcialmente Revestidos Submetidos à Flexo Compressão. Proceedings of XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE, Ouro Preto, Brasil.

Queiroz, G. e Queiroz, F. D. (2003b). Modelos de Elementos Finitos para Pilares Mistos Aço-Concreto Parcialmente Revestidos Submetidos a Forças Axiais. Proceedings of XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE, Ouro Preto, Brasil.

Queiroz, G., Rodrigues, F. C. e Chaves, L. B. (2001a). Análise de Repartição de Cargas entre Aço e Concreto no Pilares Mistos. I Congresso Internacional da Construção Metálica, CICOM, São Paulo, Brasil.

Queiroz, G., Pimenta, R. J. e Da Mata, L. A. C. (2001b). Elementos das Estruturas Mistas Aço-Concreto. Belo Horizonte.

Ramm, E. (1981). Strategies for Tracing the Nonlinear Response Near Limit Points. W. Wunderlich, E. Stein e K. J. Bathe, editors, *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, p. 63 - 89, Springer-Verlag.

Rangan, B. V. e Joyce, M. (1992). Strength of Eccentrically Loaded Slender Steel Tubular Columns Filled with High Strength Concrete. *ACI Structural Journal*, v. 89(6), p. 676 - 81.

Ricles, J. M. e Paboojian, S. D. (1994). Seismic Performance of Steel-Encased Composite Columns. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, v. 120(8), p. 2474 - 94.

Riks, E. (1979). An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems. *Int. J. Sol. Struct.*, v.15, p. 529 - 551.

Roderick, J. W. e Loke, Y. O. (1975). Pin-Ended Composite Columns Bent About the Minor Axis. *Civil Engineering Transactions*, v. 17(2), p. 51 - 8.

Rodriguez, J. A. e Aristizabal-Ochoa, J. D. (1999). Biaxial Interaction Diagrams for Short RC Columns of any Cross Section. *Journal Structural Engineering, ASCE*, v. 125(6), p. 672 - 683.

Roik, K. e Bergmann, R. (1984). Composite Columns: Design and Examples for Construction. State of the Art Report on Composite or Mixed Steel-Concrete Construction for Buildings. 2<sup>nd</sup> US-Japan Seminar on Composite and Mixed Construction, Seattle, Washington, ASCE, p. 272 - 4.

Roik, K. e Bergmann, R. (1989). Eurocode 4: composite columns. Report EC4/6/89, University of Bochum, June.

Roik, K. e Bergmann, R. (1990). Design Method for Composite Columns with Unsymmetrical Cross-Sections. *Journal Constructional Steel Research*, v.15, p.153 - 168.

Roik, K. e Schwalbenhofer, K. (1989). Experimental and Theoretical Examinations on the Plastic Behaviour and the Rotation Capacity of Composite Beam-Columns. *Wilhelm Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin*.

Saenz, L. P. (1964). Discussion of 'Equation for the Stress-Strain Curve of Concrete' by Prakash Desayi and S. Krishnan. *ACI J.*, v. 61(9), p. 1229 - 1235.

Sasaki, R. (1984). Experimental Study on Buckling Strength of Composite Columns having Steel Tube. *Annual Assembly of Architectural Institute of Japan*, p. 2735 - 6, October.

Saw, H. S., Richard Liew, J. Y. (2000), Assessment of current methods for the design of composite columns in buildings. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 53, p. 121 - 147.

SCI (1987). *Steelwork Design Guide to BS5950: Part 1: Vol. 1: Section Properties and Member Capacities*. 2<sup>nd</sup> edn., The Steel Construction Institute.

SCI (1994). *Composite Column Design to Eurocode 4: Based on DD ENV 1994-1-1: 1994 Eurocode 4: Design of Composite Steel and Concrete Structures: Part 1.1: General Rules and Rules for Buildings with Reference to the UK National Application Document*: Chung, K. F. and Narayanan. The Steel Construction Institute.

Sfakianakis, M. G. (2002). Biaxial Bending with Axial Force of Reinforced, Composite and Repaired Concrete Sections of Arbitrary Shape by Fiber Model and Computer Graphics. *Advances in Engineering Software*, v. 33, p. 227 - 242.

Shakir-Khalil, H. e Al-Rawdan, A. (1994). Composite Construction in Steel and Concrete 3. editors: Buckner, D. e Shahrooz, B. M., ASCE, p. 222 - 35.

Shakir-Khalil, H. e Mouli, M. (1990). Further Tests on Concrete-Filled Rectangular Hollow-Section Columns. *The Structural Engineer*, v. 68(20), p. 405 - 13.

Shakir-Khalil, H. e Zeghiche, J. (1989). Experimental Behaviour of Concrete-Filled Rolled Rectangular Hollow-Section Columns. *The Structural Engineer*, v. 67(19), p. 346 - 53.

Shanmugam, N. E., Lakshmi, B. (2001). State of the Art Report on Steel-Concrete Composite Columns. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 57, p. 1041 - 1080.

Sousa Jr., J. B. M. (2000). Auto-Adaptação e Otimização de Forma em Cascas. Tese de Doutorado, PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil, Rio de Janeiro.

Sousa Jr., J. B. M. e Caldas, R. B. (2003a). Obtenção de Esforços em Seções Transversais Mistas Aço-Concreto. Proceedings of XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE, Ouro Preto, Brasil.

Sousa Jr., J. B. M. e Caldas, R. B. (2003b). Relações Momento-Curvatura em Seções Transversais Mistas Aço-Concreto. Proceedings of XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE, Ouro Preto, Brasil.

Spacone, E. e El-Tawil, S. (2004). Nonlinear Analysis of Steel-Concrete Composite Structures: State of the Art. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v. 130(2), p. 159 - 168.

Stevens, R. R. (1965). Encased Stanchions. Structural Engineers London, v. 43.

SSRC (1979). A Specification for the Design of Steel-Concrete Composite Columns. Task Group 20 of the Structural Stability Research Council, SSRC, Engineering Journal, AISC, v. 4, p. 101 - 15.

Stark, J. W. B. (2001). European Developments in Steel and Composite Structures. I International Conference on steel Construction, November, São Paulo.

Terrey, P. J., Bradford, M. A. e Gilbert, R. I. (1994). Creep and Shrinkage of Concrete in Concrete-Filled Circular Steel Tubes. Proceedings 6<sup>th</sup> International Symposium on Tubular Structures, p. 293 - 298, Melbourne.

Thirugnanasundralingam, K., Thayalan, P. e Patnaikuni, I. (1997). Behaviour of Concrete Filled Steel Tubular Columns Subjected to Repeated Loading. Proceedings of the 15<sup>th</sup> Australasian Conference on the Mechanics of Structures and Materials, p. 165 - 72, December, Australia.

Uy, B. (1998a). Local and Post-Local Buckling of Concrete-Filled Steel Welded Box Columns. Journal of Constructional Steel Research, v. 47, p. 47 - 72.

Uy, B. (1998b). Concrete-Filled Fabricated Steel Box Columns for Multistorey Buildings: Behaviour and Design. Construction Research Communications Limited, ISSN 1365-0556, p. 150 - 158.

Uy, B. (2001). Strength of short concrete filled high strength steel box columns. Journal of Constructional Steel Research, v. 57, p. 113 - 134.

Uy, B. e Das, S. (1997). Behaviour and Design of Concrete Filled Fabricated Steel Box Columns. Proceedings of 15<sup>th</sup> Australasian Conference on the Mechanics of Structures and Materials, p. 129-34, December, Australia.

Varma, A. H., Ricles, J. M., Sause, R. e Lu, L.-W. (2002). Experimental Behavior of High Strength Square Concrete-Filled Steel Tube Beam-Columns. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 128(3), March.

Viridi, K. S. e Dowling, P. J. (1973). The Ultimate strength of Composite Columns in Biaxial Bending. Proceedings Institution of Civil Engineers, Part 2, v. 55, p. 251-72, March.

Wang, Y. C. (1999). Tests on Slender Composite Columns. Journal of Constructional Steel Research, v. 49, p. 25 - 41.

Wang, Y. C. e Moore, D. B. (1997). A Design Method for Concrete-Filled Hollow Section Composite Columns. The Structural Engineer, v. 75(21), p. 368 - 72.

Weng, C. C., Yen, S. I. (2002) Comparisons of Concrete-Encased Composite Column Strength Provisions of ACI Code and AISC Specification. Engineering Structures, v. 24, p. 59 - 72.

Werner, H. (1974). Schiefe Biegung Polygonal Umrandeter Stahlbetonquerschnitte. Beton - und Stahlbetonbau.

Wium, J. A., e Lebet, J. P. (1994). Simplified Calculation Method for Force Transfer. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 120(3), p. 728 - 45.

Yang, Y. e Kuo, S. (1994). Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures. Prentice Hall.

Zienkiewicz, O. C. (1977). The Finite Element Method. 3<sup>rd</sup> ed., London, McGraw Hill Book Company.