



---

# Universidade Estadual Paulista

Campus de São José do Rio Preto

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

---

## Controlabilidade de Sistemas Não Lineares de Equações Diferenciais Ordinárias

Alexandre da Silva Bairrada

Orientador: Prof. Dr. Adalberto Spezamiglio

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Câmpus São José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

São José do Rio Preto

Agosto - 2009

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**Alexandre da Silva Bairrada**

**Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Não Lineares de Entrada Única**

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Equações Diferenciais Ordinárias junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, "Júlio de Mesquita Filho", Campus São José do Rio Preto.

**BANCA EXAMINADORA**

Prof. Dr. Adalberto Spezamiglio  
UNESP - São José do Rio Preto - SP  
Orientador

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Rita de Cássia Pavani Lamas  
UNESP - São José do Rio Preto - SP

Prof. Dr. Jair Silvério dos Santos  
USP - Ribeirão Preto - SP

São José do Rio Preto, 7 de Agosto de 2009.

Aos meus pais,  
Aparecida e Anibal,  
aos meus avós,  
Maria e Antônio  
e as minhas irmãs,  
Araceli e Adriana.  
*dedico.*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus, pela força e por guiar-me.

À minha família pelo apoio incondicional, amor e confiança.

Ao Prof. Dr. Adalberto Spezamiglio, obrigado por orientar-me, pelo cuidado e dedicação, pela franqueza e objetividade de suas palavras e tudo que me ensinou.

Ao Prof. Dr. Jair Silvério dos Santos - Dept. de Física e matemática da USP - Ribeirão Preto e a Prof<sup>a</sup>. Dr. Rita de Cássia Pavani Lamas - Dept. de Matemática-Unesp-Ibilce, obrigado por terem aceitado o convite para participar da banca examinadora desse trabalho.

Agradeço também ao Prof. Dr. Luís Antonio Fernandes de Oliveira e à Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Roseli Arbach Fernandes de Oliveira professores da Feis-Unesp-Ilha Solteira por me encaminharem ao mestrado, pelos seus ensinamentos, dedicação ao curso de Matemática, motivação, por tudo.

A Regente Zuleica de Carvalho Moreira e aos amigos coralistas obrigado pela descontração que me proporcionaram com o Coral-Ibilce e todos os momentos inesquecíveis.

Aos amigos Rafael Alves, Helton Santana, Alina Carvalho, Wallance Pazin, Karina Almeida, Ismael da Silva Pena, Tassia Ferreira Tártaro, Meire Ellen Gonzalles Martins de Souza, Marisa de Souza Costa, Ana Paula Tremura Galves, Juliana R. Theodoro de Lima, Rodiak Nicolai Figueroa López, Rafael Marcel Asmat Uceda, Ana Carolina Mardegan, Antoniana Gardinali, Renato Ferneda de Souza, Ana Paula Soficier, Lilian Afonso Candido, Ana Cláudia Festucci, Paulo Henrique Graciano, Manuella Aparecida Felix de Lima, Andresa Baldam Marchioli, Marcos Proença de

Almeida, Marcos Pavani de Carvalho, Grasielle Cristiane Jorge , Agnaldo José Ferrari, Gilberto de Campos Fuzzari Jr., Elen Poliani da Silva Arlindo, Lucas Senna Gregório Fugisawa, Guilherme Messias sou grato pela paciência nos momentos de stress, pelo auxílio, companheirismo e acima de tudo, o apoio de cada um. Espero não ter esquecido ninguém, muitas pessoas foram importantes na conclusão desse trabalho.

Enfim, a todos os meus amigos pois todos contribuíram de alguma forma para que eu chegasse até aqui.

”...você aprende que realmente pode suportar, que realmente é forte e que pode ir muito mais longe depois de pensar que não se pode mais e que realmente a vida tem valor e que você tem valor diante da vida!”

( Trecho de O Menestrel - William Shakespeare )

# Resumo

Neste trabalho estudamos a controlabilidade de sistemas de  $n$  equações diferenciais ordinárias não lineares de entrada única, via mudança local de coordenadas e retroalimentação, que levam o sistema a um linear controlável. O elemento fundamental é a existência de uma função de grau relativo  $n$  em relação ao sistema, conceito que envolve a Derivada de Lie de um campo de vetores, que se constitui numa condição necessária e suficiente para a controlabilidade.

**Palavras chave:** controle; grau relativo  $n$ ; derivada de Lie.



# Abstract

In this work we study the controllability of systems of  $n$  nonlinear ordinary differential equations of single-input, by using local coordinate change and state feedback, which take the system to a controllable linear form. The main element is the existence of a function of relative degree  $n$  with respect to the system, a concept that involves the Lie Derivative of a vector field, and it is a necessary and sufficient condition to controllability.

**Key words:** control; relative degree  $n$ ; Lie Derivative.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>1 Controlabilidade de Sistemas de Equações Diferenciais Lineares</b>	<b>12</b>
1.1 Equivalência . . . . .	12
1.2 Controlabilidade e Observabilidade . . . . .	15
1.3 Retroalimentação Linear . . . . .	19
<b>2 Linearização de Entrada e Saída</b>	<b>25</b>
2.1 Linearização de Entrada e Saída. . . . .	26
2.2 Funções de Grau Relativo $n$ . . . . .	27
<b>3 Linearização do Estado de Entrada</b>	<b>35</b>
3.1 Preliminares . . . . .	36
3.2 Condições Necessárias à Solvabilidade do PLEE . . . . .	41
3.3 O Resultado Principal . . . . .	44
3.3.1 Aplicação . . . . .	50
<b>Bibliografia</b>	<b>53</b>

# Introdução

Nos últimos anos, a disponibilidade de poderosos microprocessadores de baixo custo tem dinamizado grandes avanços na teoria e aplicações de controle não-linear. Em termos de teoria, grandes avanços têm sido feitos nas áreas de linearização e retroalimentação, controle não-linear e adaptações de técnicas. Em termos de aplicações, muitas práticas de sistemas de controle não-linear foram desenvolvidas para controle de voo de aeronaves, controle de automóveis, robótica avançada e sistemas espaciais. Como resultado, o controle não-linear está ocupando um lugar cada vez mais importante e necessário na Engenharia, como se pode ver em [4], [5].

Neste trabalho partimos do controle em sistemas lineares dando ênfase a resultados importantes visando uma extensão para caso não linear. Nossa principal condição é a existência de uma função de grau relativo  $n$  num certo ponto de equilíbrio do sistema, utilizada na obtenção de uma transformação local de coordenadas para levar o sistema original à forma simples  $y^{(n)} = v$ . Este trabalho pode ser dividido em duas partes, o Capítulo 1 e os Capítulos 2 e 3.

No Capítulo 1, apresentamos resultados referentes a equivalência entre uma equação diferencial ordinária de ordem  $n$  e um sistema linear, que nos levam às condições de observabilidade e controlabilidade linear. Maiores detalhes desses resultados estão em [1] ou [3].

O capítulo 2 fala da equivalência entre um sistema não linear de  $n$  equações e uma equação diferencial ordinária de ordem  $n$ . Falamos do problema de linearização, retroalimentação, de funções de grau relativo  $n$  e a ligação dessas funções com a solução do problema, além de fornecer condições suficientes para uma equivalência

entre um sistema não linear e uma equação na forma simples  $y^{(n)} = v$  (nosso objetivo) como resultado principal. Aqui seguimos a referência [2].

No Capítulo 3 falamos da linearização do estado de entrada, retroalimentação, usando colchete de Lie e Identidade de Jacobi, que servem como base para nosso principal resultado, que dá condições necessárias à existência de uma transformação que leva o sistema original à equação  $y^{(n)} = v$ . Uma aplicação física, em robótica, é apresentada seguindo [6] e [7].

# Capítulo 1

## Controlabilidade de Sistemas de Equações Diferenciais Lineares

Neste capítulo vamos considerar alguns conceitos e resultados sobre controlabilidade de sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares que serão úteis no trabalho. Demonstrações e maiores detalhes podem ser conferidos em [1] e [3].

### 1.1 Equivalência

Vamos tratar aqui da equivalência entre uma equação diferencial ordinária linear e um sistema linear. Considere a seguinte equação diferencial ordinária linear não homogênea de ordem  $n$ ,

$$y^{(n)} + k_1 y^{(n-1)} + \dots + k_n y = u(t), \quad (1.1)$$

com  $k_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Ela é equivalente, via definição padrão, ao sistema de  $n$  equações diferenciais de primeira ordem:

$$z' = Pz + qu(t), \quad (1.2)$$

onde  $z = \begin{bmatrix} y & y' & \dots & y^{(n-1)} \end{bmatrix}^T$ ,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -k_n & -k_{n-1} & -k_{n-2} & \dots & -k_1 \end{bmatrix},$$

e

$$q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Mais detalhes sobre o sistema companheiro em [3] página 7.

Nosso interesse é na recíproca. Quando um sistema linear com coeficientes constantes,

$$x' = Ax + bu(t) \tag{1.3}$$

onde  $A$  é uma matriz  $n \times n$  e  $b$  é  $n \times 1$ , pode ser levado a (1.2) por uma transformação linear não-singular  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $x \mapsto Tx = z$ ?

Se  $z = Tx$ , então  $z' = Tx' = T(Ax + bu(t)) = TAx + Tbu(t) = TAT^{-1}(Tx) + (Tb)u(t)$ . Logo devemos ter  $P = TAT^{-1}$ , isto é,  $P \sim A$  e  $Tb = q$ .

**Definição 1.1.1** *O sistema  $x' = Ax + bu(t)$  é linearmente equivalente ao sistema  $z' = Pz + qu(t)$  se existe uma matriz  $T$  não-singular tal que*

$$TAT^{-1} = P \text{ e } Tb = q \tag{1.4}$$

**Definição 1.1.2** *Um vetor  $x \in \mathbb{R}^n$  é um vetor cíclico para uma matriz quadrada  $A$  de ordem  $n$  se os vetores  $x, Ax, A^2x, \dots, A^{n-1}x$  são linearmente independentes.*

Como exemplo, o vetor  $q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T$  é cíclico para a matriz  $P$  dada acima.

Se existe  $T$  não singular tal que  $TAT^{-1} = P$  e  $Tb = q$ , então  $TAT^{-1}q = TAb$  e  $TA^k b = TA^k T^{-1}q = (TAT^{-1})^k q = P^k q$ , para todo  $k \geq 0$  inteiro. A não singularidade de  $T$  implica que, sendo  $q$  cíclico para  $P$ , então  $b$  é cíclico para  $A$ . De fato,

$$\begin{aligned} n &= \text{rank} \begin{bmatrix} q & Pq & \dots & P^{n-1}q \end{bmatrix} \\ &= \text{rank} \begin{bmatrix} Tb & TAb & \dots & TA^{n-1}b \end{bmatrix} \\ &= \text{rank} \begin{bmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vemos que uma condição necessária para a existência da transformação  $T$  é que

$$\text{rank} \begin{bmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = n$$

Veremos que essa condição é também suficiente. Note que, para  $z = Tx$  onde  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ , temos  $z_1 = (\text{primeira linha de } T)x$ .

Denotemos a primeira linha de  $T$  por  $\tau$ . Assim, desde que  $Tb = q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T$  e  $TA^k b = P^k q$ , temos  $\tau b = 0$ ,  $\tau Ab = 0, \dots, \tau A^{n-2}b = 0$ ,  $\tau A^{n-1}b = 1$ .

Podemos escrever isso como

$$\tau \begin{bmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} = q^T.$$

Se  $\text{rank} \begin{bmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = n$ , há uma única solução da equação acima para  $\tau$ .

Seja agora  $z_2 = (\text{segunda linha de } T)x = z'_1 = \tau x' = \tau(Ax + bu(t)) = \tau Ax + \tau bu(t) = \tau Ax$ . Logo  $z_2 = \tau Ax$ .

Prosseguindo com as outras coordenadas, obtém-se  $z_k = \tau A^{k-1}x$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Assim,  $z = Tx$  é tal que

$$T = \begin{bmatrix} \tau \\ \tau A \\ \vdots \\ \tau A^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Obtemos assim o seguinte resultado:

**Teorema 1.1.1** *O sistema  $x' = Ax + bu(t)$  com  $x \in \mathbb{R}^n$  pode ser transformado no sistema companheiro  $z' = Pz + qu(t)$ , por uma transformação linear não singular  $z = Tx$  se, e somente se,  $\text{rank} \begin{bmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = n$ . Neste caso,  $T$  é definida*

univocamente por  $T = \begin{bmatrix} \tau \\ \tau A \\ \vdots \\ \tau A^{n-1} \end{bmatrix}$ , onde  $\tau$  é a única solução de

$$\tau \begin{bmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} = q^T.$$

## 1.2 Controlabilidade e Observabilidade

**Definição 1.2.1** *O sistema linear (1.3) é completamente controlável se dados quaisquer  $x_0, x_f \in \mathbb{R}^n$ , existe  $t_f > 0$  e uma função controle  $u(t)$  definida em  $0 \leq t \leq t_f$ , tais que a solução de (1.3), com condição inicial  $x(0) = x_0$ , satisfaz  $x(t_f) = x_f$ .*

A solução para (1.3) com  $x(0) = x_0$  é dada por

$$x(t) = e^{tA} \left[ x_0 + \int_0^t e^{-sA} bu(s) ds \right].$$

O sistema (1.3) é completamente controlável se para quaisquer  $x_0, x_f$  dados, existe  $t_f$  e uma função  $u$  localmente integrável em  $0 \leq t \leq t_f$  tais que



$$x(t_f) = e^{t_f A} \left[ x_0 + \int_0^{t_f} e^{-sA} b u(s) ds \right] = x_f.$$

Explorando a expressão acima, mostra-se que a relação entre equivalência, já discutida, e controlabilidade, está no fato de que o sistema linear (1.3) é completamente controlável se, e somente se,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = n,$$

ou seja, ele é equivalente a uma equação do tipo (1.1) com  $y = z_1 = \tau x$ .

Perguntamos agora se dado  $c \in \mathbb{R}^n$ , o sistema (1.3) é equivalente a uma equação do tipo (1.1) com  $y = c^T x$ . Vamos escrever o sistema (1.3) com saída especificada  $y = c^T x$  assim:

$$\begin{cases} x' = Ax + bu(t) & (a) \\ y = c^T x & (b) \end{cases} \quad (1.5)$$

onde  $c$  é um vetor constante e  $y(t)$  denotando sua função de saída.

Especificamente, quando  $c^T$  é a primeira linha de uma transformação  $T$  do sistema (1.3) para (1.2), onde  $y$  é a variável dependente em (1.1)?

Se  $T$  existe, devemos ter

$$T = \begin{bmatrix} \tau \\ \tau A \\ \vdots \\ \tau A^{n-1} \end{bmatrix}, \text{ onde } \tau = c^T \text{ e } Tb = q. \quad (1.6)$$

Então,

$$\text{rank}(T) = \text{rank} \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (1.7)$$

Além disso, como  $Tb = q$ ,

$$\begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^T \\ b^T A^T \\ \vdots \\ \vdots \\ b^T (A^{n-1})^T \end{bmatrix} c \quad (1.8)$$

Então existe uma transformação  $T$  não singular transformando (1.3) para a forma companheira em (1.2) com  $z_1 = c^T x$  se, e somente se, as condições (1.7) e (1.8) estão satisfeitas. Neste caso,  $T$  é univocamente determinada, e é a matriz em (1.6). Observemos que os vetores  $c \in \mathbb{R}^n$  são as soluções de um sistema linear não homogêneo dado pela última equação em (1.8).

**Definição 1.2.2** *O sistema (1.3) juntamente com a saída  $y = c^T x$  é completamente observável se para qualquer  $x_0 = x(0)$ , existe um tempo  $t_f > 0$  finito tal que o conhecimento da entrada  $u$  e da saída  $y$  em  $[0, t_f]$  são suficientes para determinar  $x_0$  de maneira única.*

Pode-se mostrar (ver [1],[3]) que o sistema (1.3) é completamente observável se, e somente se, a condição (1.7) está satisfeita.

Por isso, a condição (1.7) é conhecida como a condição de observabilidade do posto e

$$\begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix}$$

é chamada matriz observabilidade para o sistema (1.3), com a saída especificada  $y = c^T x$ .

Com as informações anteriores, compomos o teorema:

**Teorema 1.2.1** *O Sistema (1.3) pode ser transformado por uma transformação não singular  $z = Tx$  para a forma companheira em (1.2) se, e somente se,*

$$\text{rank} \begin{bmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = n$$

*((1.3) é completamente controlável). Quando for o caso,  $T$  é única e*

$$T = \begin{bmatrix} \tau \\ \tau A \\ \vdots \\ \tau A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

onde  $\tau$  é a única solução de

$$\tau \begin{bmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} = q^T .$$

*Existe uma transformação linear não-singular  $z = Tx$  que leva (1.3) no sistema companheiro (1.2) com  $z_1 = y = c^T x$  se, e somente se*

$$\text{rank} \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix} = n,$$

*((1.3) é completamente observável) e*

$$\begin{bmatrix} b^T \\ b^T A^T \\ \vdots \\ \vdots \\ b^T (A^{n-1})^T \end{bmatrix} c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

*Quando for o caso,  $T$  é única e será dada pela matriz em (1.9) com  $\tau = c^T$ .*

### 1.3 Retroalimentação Linear

No sistema (1.3), uma retroalimentação linear é da forma  $u = Kx$  onde  $K$  é uma matriz linha  $1 \times n$ . O correspondente sistema de laço fechado fica  $x' = (A + bK)x$ .

Consideremos a forma companheira à (1.3),  $z' = Pz + qu(t)$ , onde

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -k_n & -k_{n-1} & -k_{n-2} & \dots & -k_1 \end{bmatrix}$$

e  $q = [0 \ 0 \ \dots \ 1]^T$ . Tomando  $K = [-\alpha_n \ -\alpha_{n-1} \ -\alpha_{n-2} \ \dots \ -\alpha_1]$  e uma retroalimentação  $u = Kz + v(t)$ , o sistema anterior fica na forma

$$z' = (P + qK)z + qv ,$$

$$z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -(k_n + \alpha_n) & -(k_{n-1} + \alpha_{n-1}) & -(k_{n-2} + \alpha_{n-2}) & \dots & -(k_1 + \alpha_1) \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

Se escolhermos  $\alpha_j = -k_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , o sistema ficará

$$z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

e lembrando que  $z = [y \ y' \ \dots \ y^{(n-1)}]^T$ , ele é equivalente à equação  $y^{(n)} = v$ .

Veremos no próximo capítulo como isso pode ser obtido no caso de sistemas não lineares.

**Exemplo 1.3.1** *Considere o sistema,*

$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 + 2x_2 + u(t) \\ x_2' = x_1 - x_2 \end{cases}$$

Pela forma (1.3), temos  $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , e

$$\text{rank} \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2.$$

Logo, esse sistema é completamente controlável.

Para obtenção da E.D.O equivalente ao sistema companheiro devemos encontrar  $\tau$  de forma que  $T$  transforme o sistema dado na forma companheira. Assim  $\tau$  deve satisfazer

$$\tau \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escrevendo  $\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_2 \end{bmatrix}$ , temos

$$\begin{cases} \tau_1 + 0 = 0 \\ -2\tau_1 + \tau_2 = 1 \end{cases}$$

Daí, obtemos  $\tau = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$  e  $\tau A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$ .

$$\text{Então } T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Como } P = TAT^{-1}, \text{ temos } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Portanto, o sistema companheiro

$$\begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

Isto é,

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = -3z_2 + u(t) \end{cases}$$

Além disso, como a (primeira linha de  $T$ ) $x = \tau x = y$  e  $z = Tx$ , temos que  $z_1 = y$  e, pelo sistema acima,  $z_2 = z_1' = y'$  que implica  $z_2' = y''$  e

$$y'' = -3y' + u(t).$$

Portanto, o sistema companheiro é equivalente a seguinte equação diferencial

$$y'' + 3y' = u(t).$$

**Exemplo 1.3.2** Considere o sistema,

$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 + 2x_2 + u(t) \\ x_2' = x_1 - x_2 + u(t) \end{cases}$$

$$\text{Pela forma (1.3), temos } A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1.$$

Logo, esse sistema não é completamente controlável.

**Exemplo 1.3.3** Considere o sistema,

$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 + x_2 + u(t) \\ x_2' = x_1 - x_2 \end{cases}.$$

Pela forma (1.3), temos  $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , e

$$\text{rank} \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2.$$

Logo, esse sistema é completamente controlável.

Agora devemos escolher uma saída  $y = c^T x$  de forma conveniente para que  $T$  transforme o sistema para a forma companheira (de acordo com o teorema 1.2.1). Conforme (1.8),  $c$  deve satisfazer

$$\begin{bmatrix} b^T \\ b^T A^T \end{bmatrix} c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Escrevendo  $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ , temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

Ou seja,  $c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  e  $c^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Portanto,  $y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  é a saída conveniente para que o sistema dado seja transformado no sistema companheiro. De fato,

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Como  $P = TAT^{-1}$ , temos  $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ .

Com isso, temos o sistema companheiro

$$\begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t) ,$$

isto é,

$$\begin{cases} z'_1 = z_2 \\ z'_2 = -z_1 - 3z_2 + u(t) \end{cases} .$$

Além disso, como a (primeira linha de  $T$ ) $x = c^T x = y$  e  $z = Tx$ , temos que  $z_1 = y$  e, pelo sistema acima, temos  $z_2 = z'_1 = y'$ . Logo,  $z'_2 = y''$  e

$$y'' = -y - 3y' + u(t) .$$



Concluimos que o sistema companheiro é equivalente a seguinte equação diferencial

$$y'' + 3y' + y = u(t) .$$

**Exemplo 1.3.4** Vamos considerar o exemplo 1.3.1. O sistema em questão é equivalente a forma companheira

$$z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

onde  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = P$  e  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = q$ .

Escolhendo  $\alpha_1 = -3$  e  $\alpha_2 = 0$ , temos que  $K = \begin{bmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}$  e, com a retroalimentação  $u = Kz + v(t)$ , o sistema fica  $z' = (P + qK)z + qv$ , isto é,

$$z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} z_2 \\ v \end{bmatrix} .$$

Como  $z = \begin{bmatrix} y & y' \end{bmatrix}^T$ , esse sistema é equivalente à equação  $y'' = v$ .

## Capítulo 2

# Linearização de Entrada e Saída

Vamos inicialmente destacar um cálculo essencial feito na prova do Teorema 1.2.1, útil em sua generalização. Considere o produto de matrizes abaixo,

$$\begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & c^T A^{n-1}b \\ 0 & & & * & * \\ \vdots & & & * & \vdots \\ 0 & * & & & \vdots \\ c^T A^{n-1}b & * & \dots & \dots & * \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Essa igualdade é verdadeira quando  $A$ ,  $b$  e  $c$  satisfazem  $c^T A^k b = 0$  para  $0 \leq k \leq n - 2$ . Se  $c^T A^{n-1}b \neq 0$  as matrizes no lado esquerdo são não singulares.

No capítulo 1 vimos, reciprocamente, que se uma das matrizes no lado esquerdo for não singular (para algum  $b$ , respectivamente  $c$ ) então a outra também será (para algum  $c$ , respectivamente  $b$ ). Assim, a não singularidade da matriz do lado direito implica nas condições de controlabilidade e observabilidade do sistema linear (1.3).

Se substituirmos  $Ax$  e o vetor  $b$  em (1.3), respectivamente, pelo campo vetorial  $f(x)$  e pelo campo vetorial  $g(x)$ , perguntamos quando o sistema não linear de entrada única  $x' = f(x) + g(x)u(t)$  pode ser transformado para uma equação na forma especial  $y^{(n)} = v(t)$  por uma mudança local de coordenadas e um estado de retroalimentação? Se tal transformação e retroalimentação são possíveis, podemos explorar as propriedades da teoria do controle discutidas no Capítulo 1 para essa forma es-

pecial. Nesse caso, um sistema não linear pode ser controlado usando métodos de controle linear.

**Exemplo 2.0.5** *Suponha  $x \in \mathbb{R}^3$  e  $u(t) \in \mathbb{R}$ . O sistema*

$$x' = f(x) + g(x)u(t) = \begin{bmatrix} e^{-x_2} \\ x_1 \\ \frac{1}{2}x_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

*é equivalente a alguma equação do tipo  $y^{(3)} = v(t)$ ? Que equivalência seria essa? Como determinar se uma equivalência é possível?*

## 2.1 Linearização de Entrada e Saída.

Considere a versão de entrada e saída únicas não linear para (1.3) descrita por

$$x' = f(x) + g(x)u(t) \tag{2.2}$$

onde  $f$  e  $g$  são campos vetoriais suaves definidos numa região aberta  $\mathcal{G}$  no  $\mathbb{R}^n$ . O termo suave significa que as componentes de  $f$  e  $g$  são continuamente diferenciáveis, que será exigido por muitas vezes em nossas discussões.

À equação (2.2) podemos acrescentar uma saída conhecida

$$y = h(x), \tag{2.3}$$

onde  $h$  é uma função suave de valores reais definida em  $\mathcal{G}$ .

Procuramos condições necessárias e suficientes sobre o sistema (2.2) para que seja equivalente a um sistema linear companheiro. Dessa maneira, uma equivalência, se possível, geralmente requer retroalimentação aliada a uma mudança de coordenadas. A condição que permite uma transformação de coordenada diretamente à forma companheira no caso linear, geralmente não pode se esperada aqui.

Como no caso linear podemos tentar usar uma saída conhecida  $h$  para ajudar a definir uma mudança local de coordenadas,  $z = T(x)$ , e um estado de retroalimentação,  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$  (com  $\beta(x) \neq 0$ ), numa vizinhança  $U$  de  $x_0$  em (2.2),

para produzir uma equação de entrada e saída linear

$$y^{(j)} = v \tag{2.4}$$

Em (2.4),  $v$  é chamada de nova entrada de referência.

Gostaríamos de obter  $j = n$  para obter o sistema dinâmico  $n$ -dimensional completo. Este é o problema de linearização de entrada e saída (PLES).

A ideia é que a retroalimentação  $u$  simplifique o sistema. O termo  $\alpha(x)$  pode ser usado para o cancelamento de não linearidades e o termo  $\beta(x)v$  pode definir  $v$  para controlar a dinâmica da maneira desejada.

**Exemplo 2.1.1** *Considere o sistema*

$$\begin{aligned} x_1' &= \text{sen}x_2 \\ x_2' &= -x_1^2 + u(t) \end{aligned}$$

É fácil linearizar o comportamento entrada-saída. Se  $y = x_2$  e  $u = x_1^2 + v$ , temos a relação de entrada e saída linear  $y' = v$ .

Essa relação tornar fácil a descoberta da saída  $y(t) = x_2(t)$  especificada pelo controle  $v$ , mas o controle  $v$  deixa  $x_1$  inobservável, ficando a dinâmica bidimensional original obscura. A presença de tal inobservabilidade dinâmica introduz a questão de estabilidade interna para essa dinâmica. A variável  $x_1$  pode não continuar a manter o bom comportamento quando usada a estratégia de controle  $y' = v$ . Por exemplo, suponha que nós queremos assegurar a saída  $y = x_2$  pela constante  $x_2 = c$ . Então a solução  $x_1$  deve ser  $x_1(t) = x_1(0) + t\text{sen}c$  e, portanto,  $|x_1(t)|$  fica não limitado quando  $t \rightarrow \infty$ .

## 2.2 Funções de Grau Relativo $n$ .

A próxima definição recorda o comportamento de saídas especiais que produzem observabilidade e uma forma companheira no caso linear no capítulo anterior. A definição é motivada pelo formato dos termos que surgem quando a função é diferenciada repetidamente ao longo do sistema (2.2).

**Definição 2.2.1** A derivada de Lie de uma função de valores reais  $h$  ao longo de um campo vetorial  $g$  é a função de valores reais  $\mathcal{L}_g h$  definida por  $\mathcal{L}_g h \equiv dh(x) \cdot g(x)$ , onde  $dh(x)$  é o gradiente linha de  $h$  em  $x$ . Para derivadas iteradas desse tipo, escrevemos  $\mathcal{L}_g^0 h = h$  e  $\mathcal{L}_g^k h = \mathcal{L}_g(\mathcal{L}_g^{k-1})$ .

**Definição 2.2.2** A função  $h$  tem grau relativo  $j = 1$  em relação a (2.2) em  $x_0$  se  $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^0 h(x_0) \neq 0$ , isto é,  $\mathcal{L}_g h(x_0) \neq 0$ , e tem grau relativo  $j > 1$  em relação a (2.2) em  $x_0$  se:

- (i)  $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^k h(x) = 0$  para todo  $x$  numa vizinhança de  $x_0$ , para todo  $0 \leq k < j - 1$ , e
- (ii)  $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{j-1} h(x_0) \neq 0$ .

Existem pontos  $x_0$  onde, eventualmente, não é definido grau relativo. Por continuidade das condições (i) e (ii), podemos falar da função  $h$  tendo grau relativo  $j$  num conjunto aberto  $\mathcal{U}$  contendo  $x_0$ .

**Exemplo 2.2.1** Considere o sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= \operatorname{sen} x_2 \\ x_2' &= -x_1^2 + u(t) \end{aligned}$$

onde  $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2$ . Temos

$$f(x) = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} x_2 & -x_1^2 \end{bmatrix}^T \text{ e } g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

**1º Caso:**

Se  $y = h(x) = x_2$ ;  $dh(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$  e, portanto,  $\mathcal{L}_g h = dh(x) \cdot g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T = 1$ , isto é,  $y = h(x)$  tem grau relativo 1 para qualquer  $x$ .

**2º Caso:**

Se escolhêssemos a função  $y = h(x) = x_1$ ,  $dh(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,

- $\mathcal{L}_g h = dh(x) \cdot g(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T = 0$  para qualquer  $x$ ;
- $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f h(x) = \mathcal{L}_g(dh(x) \cdot f(x)) = \mathcal{L}_g \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{sen}x_2 & -x_1^2 \end{bmatrix}^T \right) = \mathcal{L}_g(\text{sen}x_2) = d(\text{sen}x_2) \cdot g(x) = \begin{bmatrix} 0 & \text{cos}x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \text{cos}x_2.$

Portanto, essa função tem grau relativo 2 no ponto  $x_0 = 0$ , pois  $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f h(x_0) = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f h(0) = \text{cos}(0) = 1 \neq 0$ .

**Exemplo 2.2.2** Suponha  $x \in \mathbb{R}^3$  e  $u \in \mathbb{R}$ . Considere o sistema

$$x' = f(x) + g(x)u = \begin{bmatrix} e^{-x_2} \\ x_1 \\ \frac{1}{2}x_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Logo,  $f(x) = \begin{bmatrix} e^{-x_2} & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 \end{bmatrix}^T$  e  $g(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ .

**1º Caso:**

Se  $y = h(x) = x_1$ ,  $dh(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  e temos

- $\mathcal{L}_g h = dh(x) \cdot g(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = 1.$

Portanto o grau relativo de  $y = h(x) = x_1$  é 1 para qualquer  $x \in \mathbb{R}^3$ .

**2º Caso:**

Se  $y = h(x) = x_2$ , então  $dh(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  e

- $\mathcal{L}_g h = dh(x) \cdot g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = 0$  para qualquer  $x \in \mathbb{R}^3$ ;
- $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f h(x) = \mathcal{L}_g(dh(x) \cdot f(x)) = \mathcal{L}_g \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-x_2} & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 \end{bmatrix}^T \right) = \mathcal{L}_g(x_1) = d(x_1) \cdot g(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = 1.$

Portanto o grau relativo de  $h(x) = x_2$  é 2 para qualquer  $x \in \mathbb{R}^3$ .

**3º Caso:**

Se  $y = h(x) = x_3$ , então  $dh(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e$

- $\mathcal{L}_g h = dh(x) \cdot g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = 0$  para qualquer  $x \in \mathbb{R}^3$ ;
- $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f h(x) = \mathcal{L}_g (dh(x) \cdot f(x)) = \mathcal{L}_g \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-x_2} & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 \end{bmatrix}^T \right) = \mathcal{L}_g \left( \frac{1}{2}x_1^2 \right) = d\left(\frac{1}{2}x_1^2\right) \cdot g(x) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = x_1.$

Para  $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ ,  $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f h(x_0) = 1.$

Portanto o grau relativo de  $y = h(x) = x_3$  em  $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$  é 2.

Porém, não é possível definir o grau relativo em todo ponto. De fato, no ponto  $x_0 = (0, 1, 0)$ , teríamos  $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f h(x_0) = 0$  mas  $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f h(x) \neq 0$  para algum  $x$  em qualquer vizinhança de  $x_0$ , bastando escolher  $x$  próximo o suficiente de  $x_0$  com primeira coordenada não nula.

Nesse caso, as exigências da definição de grau relativo não são satisfeitas, isto é, em  $x_0 = (0, 1, 0)$  não é definido o grau relativo de  $y = h(x) = x_3$ .

**Exemplo 2.2.3** Suponha  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $u \in \mathbb{R}$ . Considere o sistema linear com saída especificada

$$\begin{cases} x' = Ax + bu(t) & (a) \\ y = c^T x & (b) \end{cases}$$

e o produto considerado na introdução deste capítulo,

$$\begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & c^T A^{n-1}b \\ 0 & & & * & * \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & * & & \vdots & \vdots \\ c^T A^{n-1}b & * & \dots & \dots & * \end{bmatrix}.$$

Essa igualdade é verdadeira quando  $A$ ,  $b$  e  $c$  satisfazem  $c^T A^k b = 0$  para  $0 \leq k \leq n - 2$ . Se  $c^T A^{n-1} b \neq 0$  as matrizes no lado esquerdo são não singulares, ou seja, o sistema pode ser transformado no sistema companheiro pelo teorema (1.2.1).

Vamos analisar o grau relativo da saída  $y = h(x) = c^T x$  em (b) e a relação entre grau relativo e a não singularidade das matrizes no lado esquerdo acima.

Considere  $c^T = \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_n \end{bmatrix}$ , onde  $c^T$  é a primeira linha de  $T$ , a transformação que leva o sistema atual no sistema companheiro e  $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$ . Temos

- $dh(x) = d(c^T x) = d(\tau_1 x_1, \tau_2 x_2, \dots, \tau_n x_n) = \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_n \end{bmatrix} = c^T$ ;
- $d(c^T Ax) = d\left(\sum_{i=1}^n (c^T A)_i x_i\right) = \begin{bmatrix} (c^T A)_1 & (c^T A)_2 & \dots & (c^T A)_n \end{bmatrix} = (c^T A)$ ;
- $d(c^T A^2 x) = d\left(\sum_{i=1}^n (c^T A^2)_i x_i\right) = \begin{bmatrix} (c^T A^2)_1 & (c^T A^2)_2 & \dots & (c^T A^2)_n \end{bmatrix} = (c^T A^2)$ ;

Por indução, chega-se a

- $d(c^T A^n x) = c^T A^n$ .

Agora, considerando  $f(x) = Ax$ ,  $g(x) = b$ , onde  $A$ ,  $x$  e  $b$  são, respectivamente, matrizes  $n \times n$ ,  $n \times 1$  e  $n \times 1$ , vamos calcular o grau relativo da saída  $y = c^T x = h(x)$ .

- $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^0 h(x) = \mathcal{L}_g h(x) = dh(x) \cdot g(x) = c^T b$ ;
- $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f h(x) = \mathcal{L}_g (dh(x) \cdot f(x)) = \mathcal{L}_g (c^T Ax) = d(c^T Ax) \cdot g(x) = c^T Ab$ ;
- $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^2 h(x) = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f (dh(x) \cdot f(x)) = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f (c^T Ax) = \mathcal{L}_g (d(c^T Ax) \cdot f(x)) = \mathcal{L}_g (c^T A^2 x) = d(c^T A^2 x) \cdot g(x) = c^T A^2 b$ ;

Supondo que



- $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-2} h(x) = c^T A^{n-2} b,$

tem-se

- $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-1} h(x) = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f (\mathcal{L}_f^{n-2} h(x)) = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f (c^T A^{n-2} x) =$   
 $\mathcal{L}_g (d(c^T A^{n-2} x) \cdot f(x)) = \mathcal{L}_g (c^T A^{n-2} \cdot A(x)) = d(c^T A^{n-1}(x)) \cdot g(x) = c^T A^{n-1} b.$

No cálculo matricial feito no início deste exemplo, supomos  $c^T A^k b = 0$ ,  $0 \leq k \leq n-2$  e  $c^T A^{n-1} b \neq 0$ . As fórmulas acima mostram que isso é equivalente a dizer que

- $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^k h(x) = c^T A^k b = 0$ ,  $0 \leq k \leq n-2$ , e

- $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-1} h(x) = c^T A^{n-1} b \neq 0$ ,

ou seja, o grau relativo de  $y = h(x) = c^T x$  é  $n$ .

Assim, uma saída  $y = c^T x$  de grau relativo  $n$  implica na não singularidade das matrizes

$$\begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix},$$

que são as condições de controlabilidade e observabilidade do sistema linear, conforme o teorema 1.2.1.

Vamos supor agora uma saída  $y = h(x)$  com grau relativo  $n$  em  $x_0$ . Então,  $y$  e suas  $n$  primeiras derivadas ao longo do campo (2.2) são dadas por

- $y = h(x)$

- $y' = dh(x) \cdot x' = dh(x)(f(x) + g(x)u) = dh(x) \cdot f(x) + dh(x) \cdot g(x)u =$   
 $\mathcal{L}_f h(x) + (\mathcal{L}_g h(x)) \cdot u = \mathcal{L}_f h(x) + 0 \cdot u$

- $y'' = (y')' = (\mathcal{L}_f h(x))' = d(\mathcal{L}_f h(x)) \cdot x' = d(\mathcal{L}_f h(x)) \cdot (f(x) + g(x)u) =$   
 $d(\mathcal{L}_f h(x)) \cdot f(x) + d(\mathcal{L}_f h(x)) \cdot g(x) \cdot u = \mathcal{L}_f^2 h(x) + \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f h(x) = \mathcal{L}_f^2 h(x) + 0 \cdot u$

$$\bullet \quad y''' = (y'')' = (\mathcal{L}_f^2 h(x))' = d(\mathcal{L}_f^2 h(x)) \cdot x' = d(\mathcal{L}_f^2 h(x)) \cdot (f(x) + g(x)u) = d(\mathcal{L}_f^2 h(x)) \cdot f(x) + d(\mathcal{L}_f^2 h(x)) \cdot g(x) \cdot u = \mathcal{L}_f(\mathcal{L}_f^2 h(x)) + \mathcal{L}_g(\mathcal{L}_f^2 h(x)) \cdot u = \mathcal{L}_f^3 h(x) + \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^2 h(x) \cdot u = \mathcal{L}_f^3 h(x) + 0 \cdot u$$

⋮

$$\bullet \quad y^{(n-1)} = \mathcal{L}_f^{n-1} h(x) + \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-2} h(x) \cdot u = \mathcal{L}_f^{n-1} h(x) + 0 \cdot u$$

$$\bullet \quad y^{(n)} = \mathcal{L}_f^n h(x) + \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-1} h(x) \cdot u,$$

Temos assim

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ \mathcal{L}_f h(x) \\ \vdots \\ \mathcal{L}_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix}, e \quad (2.5)$$

$$y^{(n)} = \mathcal{L}_f^n h(x) + \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-1} h(x) u. \quad (2.6)$$

Mostraremos mais adiante que, se  $h$  tem grau relativo  $n$  em  $x_0$ , o vetor do segundo membro em (2.5) tem matriz Jacobiana não singular em  $x_0$ . Então o segundo membro de (2.5) define uma transformação de coordenadas local numa vizinhança de  $x_0$ .

A presença da função não nula  $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-1} h(x)$  como coeficiente de  $u$  em (2.6) nos impede de obter um sistema linear controlável companheiro para  $z = \begin{bmatrix} y & y' & \dots & y^{(n-1)} \end{bmatrix}^T$  usando apenas a mudança de coordenadas. No entanto, a mudança de coordenadas juntamente com a retroalimentação produz a forma simples  $y^{(n)} = v$ . Basta definir

$$u = \frac{1}{\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-1} h(x)} [-\mathcal{L}_f^n h(x) + v]$$

em que  $v$  é a nova entrada de referência.

Essa situação permite ação de controle sobre o sistema não linear operando com a forma linear controlável (2.4) (com  $j = n$ ). O grau relativo  $n$  de  $h$  em  $x_0$  é um

tipo de condição de observabilidade local. O teorema da Função Inversa aplicado em (2.5) implica que  $x$  é determinado por  $z = \begin{bmatrix} y & y' & \dots & y^{(n-1)} \end{bmatrix}^T$  perto de  $x_0$ .

Com esses resultados podemos enunciar o teorema abaixo:

**Teorema 2.2.1** *Consideremos o sistema (2.2) para o qual existe uma função de saída  $y = h(x)$  de grau relativo  $n$  em  $x_0$ . Então, existe uma transformação  $z = T(x)$  definida pelo segundo membro em (2.5) numa vizinhança de  $x_0$  e uma retroalimentação  $u = \frac{1}{\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-1} h(x)} [-\mathcal{L}_f^n h(x) + v]$  que juntas transformam o sistema (2.2) com saída  $y = h(x)$  na equação  $y^{(n)} = v$ .*

## Capítulo 3

# Linearização do Estado de Entrada

Se uma função de grau relativo  $n$  não está disponível como função de saída, ainda queremos uma mudança local de coordenadas  $z = T(x)$  e uma retroalimentação  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$  com  $\beta(x) \neq 0$  próximo de  $x_0$ , que produza um sistema linear controlável para  $z$ . Este é o Problema de Linearização do estado de entrada (PLEE). Como no Capítulo 1, a partir de um sistema linear controlável, uma mudança de coordenadas adicional e um estado de retroalimentação podem ser usados para produzir um sistema linear

$$z' = Nz + qv \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & 1 \\ 0 & \dots & \dots & & & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v, \quad (3.1)$$

onde  $N$  é um bloco nilpotente, de entradas  $n_{(i-1,i)} = 1$ ,  $i = 2, \dots, n$ , as demais, são iguais a zero e  $q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ .

Há uma diferença essencial entre os problemas de linearização (PLEE) e (PLES). Num, quando está disponível uma função de saída de grau relativo  $n$ ; no outro, tal função deve ser construída.

A partir do (PLEE) e através dele, tentaremos chegar à forma (3.1). O objetivo agora é mostrar que o (PLEE) é solúvel se, e somente se, existe uma função de

grau relativo  $n$  em  $x_0$  para (2.2). Já discutimos no capítulo anterior a suficiência da condição de grau relativo  $n$ .

### 3.1 Preliminares

**Definição 3.1.1** *O colchete de Lie  $[g_1, g_2]$  de dois campos vetoriais  $g_1$  e  $g_2$  é o campo vetorial definido por*

$$[g_1, g_2](x) \equiv \frac{\partial g_2}{\partial x} g_1(x) - \frac{\partial g_1}{\partial x} g_2(x)$$

onde  $\frac{\partial g_i}{\partial x}$  é a matriz jacobiana de  $g_i$ .

Para as iteradas do colchete de Lie, introduzimos a notação:

$$\begin{aligned} ad_{g_1}^0 g_2 &= g_2 \\ ad_{g_1} g_2 &= [g_1, g_2] \\ &\vdots \\ ad_{g_1}^k g_2 &= [g_1, ad_{g_1}^{k-1} g_2] \text{ para } k \geq 0. \end{aligned}$$

**Exemplo 3.1.1** *Se  $f(x) = Ax$  e  $g(x) = b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ , então  $[f, g](x) = -Ab$ . Também  $ad_f^2 g = [f, [f, g]](x) = A^2 b$  e, em geral,  $ad_f^k g(x) = (-1)^k A^k b$ .*

*De fato,*

- $ad_f^0 g(x) = g(x) = b;$
- $ad_f g(x) = [f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x) = -\frac{\partial f}{\partial x} g(x) = -Ab = (-1)Ab;$
- $ad_f^2 g(x) = [f, [f, g]](x) = [f, -Ab](x) = \frac{\partial}{\partial x}(-Ab)f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}(x)(-Ab) = -A(-Ab) = A^2 b = (-1)^2 A^2 b;$
- $ad_f^3 g(x) = [f, ad_f^2 g](x) = [f, A^2 b](x) = \frac{\partial}{\partial x}(A^2 b)f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}(x)(A^2 b) = -A(A^2 b) = -A^3 b = (-1)^3 A^3 b;$

*Por indução, chega-se a*

- $ad_f^k g(x) = [f, ad_f^{k-1} g](x) = (-1)^k A^k b, k = 0, 1, 2, \dots$

A propriedade que conecta o colchete de Lie sobre campos vetoriais e a derivada de Lie sobre uma função é a identidade de Jacobi.

**Proposição 3.1.1 (Identidade de Jacobi)** *Dados  $v$  e  $w$  campos vetoriais e  $\lambda$  uma função suave, temos*

$$(\mathcal{L}_{[v, w]}\lambda)(x) = (\mathcal{L}_v\mathcal{L}_w\lambda - \mathcal{L}_w\mathcal{L}_v\lambda)(x) .$$

**Demonstração:**  $\mathcal{L}_v\mathcal{L}_w\lambda(x) - \mathcal{L}_w\mathcal{L}_v\lambda(x) = \mathcal{L}_v(d\lambda(x)w(x)) - \mathcal{L}_w(d\lambda(x)v(x)) = d(d\lambda(x)w(x))v(x) - d(d\lambda(x)v(x))w(x) =$

$$\left( w(x)^T (d^2\lambda(x))^T + d\lambda(x) \frac{\partial w}{\partial x}(x) \right) v(x) - \left( v(x)^T (d^2\lambda(x))^T + d\lambda(x) \frac{\partial v}{\partial x}(x) \right) w(x) \quad (3.2)$$

onde  $d^2\lambda(x)$  é a matriz das derivadas parciais de segunda ordem de  $\lambda$  em  $x$ . Como  $d^2\lambda(x)$  é simétrica, (3.2) é igual a

$$d^2\lambda(x)w(x)v(x) - d^2\lambda(x)v(x)w(x) + d\lambda(x) \frac{\partial w}{\partial x}(x)v(x) - d\lambda(x) \frac{\partial v}{\partial x}(x)w(x) = d\lambda(x) \left( \frac{\partial w}{\partial x}(x)v(x) - \frac{\partial v}{\partial x}(x)w(x) \right) = d\lambda(x) \cdot [v, w] = \mathcal{L}_{[v, w]}\lambda(x).$$

□

A identidade de Jacobi também ajuda a identificar o  $\ker d\lambda(x)$  para  $x \in U$  de uma função  $\lambda$  de grau relativo  $n$  em relação a (2.2). De fato, neste caso  $\mathcal{L}_g\mathcal{L}_f^k\lambda(x) \equiv 0, k = 0, 1, 2, \dots, n - 2$ . Temos:

$$\mathcal{L}_g\lambda(x) \equiv 0 \Rightarrow d\lambda(x)g(x) \equiv 0, \text{ isto é,}$$

- $g(x) \in \ker d\lambda(x);$

$$d\lambda(x)ad_f g(x) = d\lambda(x) \cdot [f, g](x) = (\mathcal{L}_{[f, g]}\lambda)(x) =$$

$$(\mathcal{L}_f\mathcal{L}_g\lambda - \mathcal{L}_g\mathcal{L}_f\lambda)(x) \equiv 0, \text{ isto é,}$$

- $ad_f g \in \ker d\lambda(x);$

$$d\lambda(x)ad_f^2 g(x) = \mathcal{L}_{ad_f^2 g}\lambda(x) = (\mathcal{L}_{[f, [f, g]]}\lambda)(x) = (\mathcal{L}_f\mathcal{L}_{[f, g]}\lambda - \mathcal{L}_{[f, g]}\mathcal{L}_f\lambda)(x) =$$

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_{[f, g]}\mathcal{L}_f\lambda(x) &= -\mathcal{L}_{[f, g]}(d\lambda(x) \cdot f(x)) = -\mathcal{L}_f\mathcal{L}_g(d\lambda(x) \cdot f(x)) + \\
\mathcal{L}_g\mathcal{L}_f(d\lambda(x) \cdot f(x)) &= \\
-\mathcal{L}_f\mathcal{L}_g\mathcal{L}_f\lambda(x) + \mathcal{L}_g\mathcal{L}_f\mathcal{L}_f\lambda(x) &= -\mathcal{L}_f(\mathcal{L}_g\mathcal{L}_f\lambda(x)) + \mathcal{L}_g\mathcal{L}_f^2\lambda(x) \equiv 0, \text{ isto é,}
\end{aligned}$$

- $ad_f^2g(x) \in \ker d\lambda(x);$

$$\begin{aligned}
d\lambda(x)ad_f^3g(x) &= \mathcal{L}_{ad_f^3g}\lambda(x) = (\mathcal{L}_{[f, ad_f^2g]}\lambda)(x) = (\mathcal{L}_f\mathcal{L}_{ad_f^2g}\lambda(x) - \mathcal{L}_{[ad_f^2g]}\mathcal{L}_f\lambda)(x) = \\
\mathcal{L}_f[-\mathcal{L}_f(\mathcal{L}_g\mathcal{L}_f\lambda)(x) + \mathcal{L}_g\mathcal{L}_f^2\lambda(x)] &- [-\mathcal{L}_f(\mathcal{L}_g\mathcal{L}_f) + \mathcal{L}_g\mathcal{L}_f^2](\mathcal{L}_f\lambda(x)) = -\mathcal{L}_f^2\mathcal{L}_g\mathcal{L}_f\lambda(x) + \\
\mathcal{L}_f\mathcal{L}_g\mathcal{L}_f^2\lambda(x) + \mathcal{L}_f\mathcal{L}_g\mathcal{L}_f\mathcal{L}_f\lambda(x) &- \mathcal{L}_g\mathcal{L}_f^2\mathcal{L}_f\lambda(x) = -\mathcal{L}_f^2\mathcal{L}_g\mathcal{L}_f\lambda(x) + \mathcal{L}_f\mathcal{L}_g\mathcal{L}_f^2\lambda(x) + \\
\mathcal{L}_f\mathcal{L}_g\mathcal{L}_f^2\lambda(x) - \mathcal{L}_g\mathcal{L}_f^3\lambda(x) &\equiv 0, \text{ isto é,}
\end{aligned}$$

- $ad_f^3g(x) \in \ker d\lambda(x);$

⋮

- $ad_f^{n-2}g(x) \in \ker d\lambda(x).$

- $ad_f^{n-1}g(x) = (-1)^{n-1}\mathcal{L}_g\mathcal{L}_f^{n-1}\lambda(x) \neq 0.$  Portanto,  $ad_f^{n-1}g(x)$  não pertence a  $\ker d\lambda(x).$

Portanto  $ad_f^k g(x) \in \ker d\lambda(x)$  para  $k = 1, 2, \dots, n - 2.$

Vejam agora a versão não linear para o cálculo em (2.1).

**Teorema 3.1.1** *Se uma função  $\lambda$  tem grau relativo  $n$  em relação a (2.2) num conjunto aberto  $U$ , então para todo  $x \in U$ ,*

(i) *os covetores  $d\mathcal{L}_f^0\lambda(x), d\mathcal{L}_f\lambda(x), \dots, d\mathcal{L}_f^{n-1}\lambda(x)$ , onde  $\mathcal{L}_f^0\lambda(x) = \lambda(x)$  são linearmente independentes;*

(ii) *os vetores  $ad_f^0g(x), ad_fg(x), \dots, ad_f^{n-1}g(x)$ , onde  $ad_f^0g(x) = g(x)$  são linearmente independentes.*

**Demonstração:** Considere o produto de matrizes

$$\begin{bmatrix} d\lambda(x) \\ d\mathcal{L}_f\lambda(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ d\mathcal{L}_f^{n-1}\lambda(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g(x) & ad_f g(x) & \dots & ad_f^{n-1}g(x) \end{bmatrix} = \quad (3.3)$$

$$\begin{bmatrix} d\lambda(x)g(x) & d\lambda(x)ad_f g(x) & \dots & d\lambda(x)ad_f^{n-2}g(x) & d\lambda(x)ad_f^{n-1}g(x) \\ d(\mathcal{L}_f\lambda(x))g(x) & d(\mathcal{L}_f\lambda(x))ad_f g(x) & \dots & d(\mathcal{L}_f\lambda(x))ad_f^{n-2}g(x) & * \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ d(\mathcal{L}_f^{n-1}\lambda(x))g(x) & * & \dots & \dots & * \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_g\lambda(x) & \mathcal{L}_{ad_f g}\lambda(x) & \dots & \mathcal{L}_{ad_f^{n-2}g}\lambda(x) & \mathcal{L}_{ad_f^{n-1}g}\lambda(x) \\ \mathcal{L}_g\mathcal{L}_f\lambda(x) & \mathcal{L}_{ad_f g}\mathcal{L}_f\lambda(x) & \dots & \mathcal{L}_{ad_f^{n-2}g}\mathcal{L}_f\lambda(x) & * \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \mathcal{L}_g\mathcal{L}_f^{n-1}\lambda(x) & * & * & \dots & * \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Vemos que os elementos da matriz acima são da forma  $\mathcal{L}_{ad_f^l g}\mathcal{L}_f^k\lambda(x)$ , onde  $0 \leq k, l \leq n-1$ ,  $k, l \in \mathbb{N}$ . Então os elementos da diagonal secundária,

$$\mathcal{L}_g\mathcal{L}_f^{n-1}\lambda(x), \mathcal{L}_{ad_f g}\mathcal{L}_f^{n-2}\lambda(x), \dots, \mathcal{L}_{ad_f^{n-2}g}\mathcal{L}_f\lambda(x), \mathcal{L}_{ad_f^{n-1}g}\lambda(x),$$

são da forma  $\mathcal{L}_{ad_f^l g}\mathcal{L}_f^k\lambda(x)$ , onde  $0 \leq k, l \leq n-1$  e  $l+k = n-1$ ,  $k, l \in \mathbb{N}$ .

Assim, para que tenhamos os elementos da diagonal em questão não nulos e os elementos superiores a ela nulos, basta que

$$\mathcal{L}_{ad_f^l g}\mathcal{L}_f^k\lambda(x) = 0 \text{ para } l+k < n-1; k, l \in \mathbb{N} \quad (3.5)$$

e

$$\mathcal{L}_{ad_f^l g}\mathcal{L}_f^k\lambda(x) \neq 0 \text{ para } l+k = n-1; k, l \in \mathbb{N}. \quad (3.6)$$



Vamos provar por indução sobre  $l$ .

- Para  $l = 0$ ,

como  $\lambda(x)$  tem grau relativo  $n$ , a primeira coluna da matriz (3.4), tem seus elementos todos nulos exceto pelo  $n$ -ésimo termo.

- Para  $l = 1$ ,

usando a Identidade de Jacobi e o grau relativo de  $\lambda(x)$  igual a  $n$ , temos que (3.5) e (3.6) são, respectivamente iguais a

$$\mathcal{L}_{adfg}\mathcal{L}_f^k\lambda(x) = \mathcal{L}_f\mathcal{L}_g\mathcal{L}_f^k\lambda(x) - \mathcal{L}_g\mathcal{L}_f^{k+1}\lambda(x) = 0 \text{ para } 1 + k < n - 1$$

e

$$\mathcal{L}_{adfg}\mathcal{L}_f^k\lambda(x) = \mathcal{L}_f\mathcal{L}_g\mathcal{L}_f^k\lambda(x) - \mathcal{L}_g\mathcal{L}_f^{k+1}\lambda(x) = -\mathcal{L}_g\mathcal{L}_f^{k+1}\lambda(x) \neq 0 \text{ para } 1 + k = n - 1.$$

- Se (3.5) e (3.6) são verdadeiras para  $l$ , provaremos para  $l + 1$ , isto é,

$$\mathcal{L}_{ad_f^{l+1}g}\mathcal{L}_f^k\lambda(x) = 0 \text{ para } l + k < n - 2; k, l \in \mathbb{N}$$

pois  $l + 1 + k < n - 1 \Leftrightarrow l + k < n - 2$

e

$$\mathcal{L}_{ad_f^{l+1}g}\mathcal{L}_f^k\lambda(x) \neq 0 \text{ para } l + k = n - 2; k, l \in \mathbb{N}.$$

pois  $l + 1 + k = n - 1 \Leftrightarrow l + k = n - 2$

De fato, para  $k + l < n - 2$ , usando a Identidade de Jacobi e a afirmação (3.5) verdadeira para  $l$ , temos

$$\mathcal{L}_{ad_f^{l+1}g}\mathcal{L}_f^k\lambda(x) = \mathcal{L}_f\mathcal{L}_{ad_f^l g}\mathcal{L}_f^k\lambda(x) - \mathcal{L}_{ad_f^l g}\mathcal{L}_f^{k+1}\lambda(x) = 0$$

pois,  $l + k < l + k + 1 < n - 1$ .

Para  $l + k = n - 2$ ,

usando a Identidade de Jacobi e supondo a afirmação (3.6) verdadeira para  $l$ , temos

$$\mathcal{L}_{ad_f^{l+1}g}\mathcal{L}_f^k\lambda(x) = \mathcal{L}_f\mathcal{L}_{ad_f^l g}\mathcal{L}_f^k\lambda(x) - \mathcal{L}_{ad_f^l g}\mathcal{L}_f^{k+1}\lambda(x) = -\mathcal{L}_{ad_f^l g}\mathcal{L}_f^{k+1}\lambda(x) \neq 0$$

pois  $l + k + 1 = n - 1$ .

Logo, os elementos superiores a diagonal secundária são todos nulos e o determinante da matriz (3.4) é diferente de zero. Segue que (3.4) é não singular.

Então, as matrizes no produto (3.3) são não singulares.

Portanto, (i), (ii) são verdadeiras.  $\square$

Mostraremos em seguida que a solubilidade do (PLEE) implica a existência de uma função  $\lambda(x)$  de grau relativo  $n$  em relação a (2.2) em  $x_0$ .

## 3.2 Condições Necessárias à Solvabilidade do PLEE

Mostraremos agora que a solução para o (PLEE) esta ligada à existência de uma função de grau relativo  $n$ .

Supondo o (PLEE) solúvel, então a transformação  $z = T(x)$ , combinada com a retroalimentação  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ , produzem o sistema linear (3.1). Das definições das variáveis, isso ocorre se, e somente se,

$$\frac{\partial T}{\partial x}(f(x) + g(x)u) = NT(x) + qv, \quad (3.7)$$

onde a igualdade é verdadeira para todo  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ , com  $v$  arbitrário. De fato,

$$z' = NT(x) + qv \Rightarrow T'(x)x' = NT(x) + qv \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x}(f(x) + g(x)u) = NT(x) + qv.$$

Considerando  $u = 0$ , temos

$$0 = \alpha(x) + \beta(x)v \Rightarrow v = -\alpha(x)\beta^{-1}(x) \text{ onde } \beta^{-1}(x) = \frac{1}{\beta(x)}, \text{ e}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(f(x) + g(x)u) = NT(x) + qv \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x}f(x) = NT(x) + q(-\alpha(x)\beta^{-1}(x)) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(f(x)) = NT(x) - q\alpha(x)\beta^{-1}(x) \quad (3.8)$$

E agora fazendo  $u = 1$ , temos

$1 = \alpha(x) + \beta(x)v \Rightarrow v = (1 - \alpha(x))\beta^{-1}(x)$ , e então, usando (3.8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x}(f(x) + g(x)) = NT(x) + qv &\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x}(f(x)) + \frac{\partial T}{\partial x}(g(x)) = NT(x) + qv \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x}(g(x)) = \\ NT(x) + q((1 - \alpha(x))\beta^{-1}(x)) - (NT(x) - q\alpha(x)\beta^{-1}(x)) &\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x}(g(x)) = NT(x) + \\ q\beta^{-1}(x) - q\alpha(x)\beta^{-1}(x) - NT(x) + q\alpha(x)\beta^{-1}(x) . \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\partial T}{\partial x}g(x) = q\beta^{-1}(x) .$$

Vemos que se (3.7) está satisfeita, o sistema de duas equações diferenciais parciais se verifica:

$$\frac{\partial T}{\partial x}f(x) = NT(x) - q\alpha(x)\beta^{-1}(x) \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}g(x) = q\beta^{-1}(x) \quad (3.10)$$

Se  $T(x) = \left[ T_1(x) \ T_2(x) \ \dots \ T_n(x) \right]^T$ , então

$$NT(x) - q\alpha(x)\beta^{-1}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & 1 & \\ 0 & \dots & \dots & & 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \\ T_3(x) \\ \vdots \\ T_n(x) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha(x)\beta^{-1}(x) =$$

$$\begin{bmatrix} T_2(x) \\ T_3(x) \\ \vdots \\ T_n(x) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha(x)\beta^{-1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_2(x) & T_3(x) & \dots & T_n(x) & -\alpha(x)\beta^{-1}(x) \end{bmatrix}^T .$$

Então, usando (3.9)

$$dT_k(x)f(x) = T_{k+1}(x), \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

Como  $dT_k(x)f(x) = \mathcal{L}_f T_k(x)$ ,

$$\mathcal{L}_f T_k(x) = T_{k+1}(x), \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.11)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} T_2(x) = \mathcal{L}_f T_1(x) \Rightarrow T_3(x) = \mathcal{L}_f T_2(x) = \mathcal{L}_f \mathcal{L}_f T_1(x) = \mathcal{L}_f^2 T_1(x) \Rightarrow \dots \Rightarrow \\ T_{k+1}(x) = \mathcal{L}_f^k T_1(x), \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (3.12)$$

e para  $k = n$ ,

$$\begin{aligned} dT_n(x)f(x) = -\alpha(x)\beta^{-1}(x) \Rightarrow \mathcal{L}_f T_n(x) = -\alpha(x)\beta^{-1}(x) \Rightarrow \\ \mathcal{L}_f^n T_1(x) = -\alpha(x)\beta^{-1}(x) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Portanto todas as linhas de  $T(x)$  são determinadas em função da primeira ( $T_1(x)$ ) e a última equação (3.13) especifica a razão  $-\alpha(x)\beta^{-1}(x)$  em termos de  $T_1(x)$ .

Analogamente, de (3.10),

$$\frac{\partial T}{\partial x} g(x) = q\beta^{-1}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \beta^{-1}(x) \end{bmatrix}^T.$$

Logo,

$$dT_k(x)g(x) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1, \text{ e}$$

$$dT_k(x)g(x) = \mathcal{L}_g T_k(x) = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f T_{k-1}(x) = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{k-1} T_1(x) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.14)$$

Para  $k = n$ ,

$$\beta^{-1}(x) = dT_n(x)g(x) = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-1} T_1(x), \text{ e então}$$

$$\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-1} T_1(x) = \beta^{-1}(x) \neq 0. \quad (3.15)$$

Por (3.14) e (3.15), vemos que a solução do (PLEE) requer uma função vetorial  $T_1(x)$  que tenha grau relativo  $n$ . Dada  $T_1(x)$ , as outras linhas de  $T(x)$  são obtidas a partir de  $T_1(x)$  usando (3.12). E a retroalimentação exigida será  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$  onde  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$  serão determinadas através de (3.13) e (3.15). De fato,

$$\alpha(x) = -\frac{\mathcal{L}_f^n T_1(x)}{\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-1} T_1(x)} \quad e \quad \beta(x) = \frac{1}{\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-1} T_1(x)} \quad (3.16)$$

Com esses resultados podemos enunciar o teorema a seguir:

**Teorema 3.2.1** *Se o sistema (2.2) pode ser levado por uma transformação local de coordenadas  $z = T(x)$  aliada a uma retroalimentação  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$  numa vizinhança de  $x_0$  para a forma linear controlável  $z' = Nz + qv$ , então existe uma função vetorial  $\lambda(x)$  com grau relativo  $n$  em relação a (2.2) no ponto  $x_0$ . Neste caso,  $T(x)$  é determinada por (3.11) definindo a primeira linha  $T_1(x) = \lambda(x)$  e o estado de retroalimentação  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$  é determinado por (3.16).*

### 3.3 O Resultado Principal

**Teorema 3.3.1** *O sistema (2.2) definido numa região aberta  $\mathfrak{G} \subset \mathbb{R}^n$  pode ser levado por uma transformação local de coordenadas  $z = T(x)$  aliada a um estado de retroalimentação  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$  numa vizinhança de  $x_0$  para a forma linear controlável  $z' = Nz + qv$  se, e somente se, existe uma função  $\lambda(x)$  com grau relativo  $n$  em relação a (2.2) no ponto  $x_0$ . Neste caso,  $T(x)$  é determinada por (3.11) definindo a primeira linha  $T_1(x) = \lambda(x)$  e o estado de retroalimentação é determinado por (3.16).*

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) Pelo desenvolvimento de (3.7), vimos na seção anterior que existem uma função de grau relativo  $n$ ,  $\lambda(x) = T_1(x)$ , uma transformação de coor-

denadas  $z = T(x) = \begin{bmatrix} \lambda(x) \\ \mathcal{L}_f \lambda(x) \\ \vdots \\ \mathcal{L}_f^{n-1} \lambda(x) \end{bmatrix}$  e um estado de retroalimentação determinado

por (3.16) que levam (2.2) à forma controlável  $z' = Nz + qv$ .

( $\Leftarrow$ ) Se existe uma função vetorial  $\lambda(x)$  de grau relativo  $n$  em relação (2.2) em  $x_0$ , tomamos

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} \lambda(x) \\ \mathcal{L}_f \lambda(x) \\ \vdots \\ \mathcal{L}_f^{n-1} \lambda(x) \end{bmatrix}.$$

$$\text{Temos: } z' = \frac{\partial T}{\partial x}(x) \cdot x' = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \lambda}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\mathcal{L}_f \lambda}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\mathcal{L}_f \lambda}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\mathcal{L}_f^{n-1} \lambda}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\mathcal{L}_f^{n-1} \lambda}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} \cdot (f(x) + g(x)u) =$$

$$\begin{bmatrix} d\lambda(x) \\ d\mathcal{L}_f \lambda(x) \\ \vdots \\ d\mathcal{L}_f^{n-1} \lambda(x) \end{bmatrix} \cdot (f(x) + g(x)u) = \begin{bmatrix} d\lambda(x) \cdot f(x) & + & d\lambda(x) \cdot g(x)u \\ d\mathcal{L}_f \lambda(x) \cdot f(x) & + & d\mathcal{L}_f \lambda(x) \cdot g(x)u \\ \vdots & & \vdots \\ d\mathcal{L}_f^{n-1} \lambda(x) \cdot f(x) & + & d\mathcal{L}_f^{n-1} \lambda(x) \cdot g(x)u \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_f \lambda(x) & + & \mathcal{L}_g \lambda(x)u \\ \mathcal{L}_f^2 \lambda(x) & + & \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f \lambda(x)u \\ \vdots & & \vdots \\ \mathcal{L}_f^n \lambda(x) & + & \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-1} \lambda(x)u \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Como o grau relativo de  $\lambda$  em relação a (2.2) é igual a  $n$ , (3.17) é igual a

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_f \lambda(x) & + & & & 0 \\ \mathcal{L}_f^2 \lambda(x) & + & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \mathcal{L}_f^{n-1} \lambda(x) & & & & 0 \\ \mathcal{L}_f^n \lambda(x) & + & (\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-1} \lambda(x)) & \frac{-\mathcal{L}_f^n \lambda(x) + v}{\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-1} \lambda(x)} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_f \lambda(x) \\ \vdots \\ \mathcal{L}_f^{n-1} \lambda(x) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & 1 \\ 0 & \dots & \dots & & & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda(x) \\ \mathcal{L}_f \lambda(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathcal{L}_f^{n-1} \lambda(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v = Nz + qv$$

□

**Exemplo 3.3.1** Considere o sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= \text{sen} x_2 \\ x_2' &= -x_1^2 + u \end{aligned}$$

perto do ponto de equilíbrio  $x_0 = 0$  onde  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ .

Temos  $f(x) = [\text{sen} x_2 \quad -x_1^2]^T$  e  $g(x) = [0 \quad 1]^T$ ;  $f$  e  $g$  em  $\mathbb{R}^2$ .

Se  $T_1(x)$  tem grau relativo 2, então

$$\mathcal{L}_g T_1(x) = 0; \tag{3.18}$$

e, por (3.11)

$$\mathcal{L}_g T_2(x) = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f T_1(x) \neq 0. \tag{3.19}$$

Agora,

$$\mathcal{L}_g T_1(x) = dT_1(x) \cdot g(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial T_1}{\partial x_2}(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{\partial T_1}{\partial x_2}(x)$$

De (3.18), temos que  $\frac{\partial T_1}{\partial x_2}(x) = 0$

Concluimos que  $T_1(x)$  é independente de  $x_2$ ,  $dT_1(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(x) & 0 \end{bmatrix}$  e que

$$T_2(x) = \mathcal{L}_f T_1(x) = dT_1(x) \cdot f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(x) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{sen}x_2 & -x_1^2 \end{bmatrix}^T = \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(x) \text{sen}x_2. \quad (3.20)$$

Por outro lado,

$$\mathcal{L}_g T_2(x) = dT_2(x) \cdot g(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial T_2}{\partial x_2}(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{\partial T_2}{\partial x_2}(x) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(x) \text{sen}x_2 \right)$$

e pela independência de  $T_1(x)$  em relação a  $x_2$ ,

$$\mathcal{L}_g T_2(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(x) \cdot \frac{\partial(\text{sen}x_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(x) \cdot \text{cos}x_2 \neq 0. \quad (3.21)$$

Assim,  $\frac{\partial T_1}{\partial x_1}(x)$  e  $\text{cos}x_2$  são diferentes de zero, próximos de  $x_0 = 0$ .

Como  $x_1$  tem grau relativo 2 em relação a  $x_0$  (Exemplo 2.2.1, 2º Caso), tomemos  $T_1(x) = x_1$ . Temos, pelo visto acima,

$$T_2(x) = \text{sen}x_2 \text{ e}$$

$$T(x) = \begin{bmatrix} T_1(x) & T_2(x) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_1 & \text{sen}x_2 \end{bmatrix}^T$$

Agora vamos determinar a retroalimentação  $u(x) = \alpha(x) + \beta(x)v$ .

Temos,

$$\beta^{-1}(x) = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f T_1(x) \underbrace{=}_{(3.21)} \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(x) \cdot \text{cos}x_2 = \text{cos}x_2 \Rightarrow \beta(x) = \frac{1}{\text{cos}x_2} = \text{sec}x_2.$$



$$\alpha(x) = -\frac{\mathcal{L}_f^2 T_1(x)}{\cos x_2} = -\frac{\mathcal{L}_f \mathcal{L}_f T_1(x)}{\cos x_2} = -\frac{\mathcal{L}_f T_2(x)}{\cos x_2} = -\frac{\mathcal{L}_f \text{sen}(x_2)}{\cos x_2} =$$

$$-\frac{d \text{sen}(x_2) \cdot f(x)}{\cos x_2} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & \cos x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{sen} x_2 & -x_1^2 \end{bmatrix}^T}{\cos x_2} = \frac{-x_1^2 \cos x_2}{\cos x_2} = -x_1^2$$

Logo,

$$u(x) = -x_1^2 + \text{sec} x_2 \cdot v.$$

Vamos verificar agora que  $T(x)$  aliada à retroalimentação  $u(x)$  produz a forma  $z' = Nz + qv$ .

$$z' = \frac{\partial T}{\partial x} \cdot x' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{sen} x_2 \\ -x_1^2 + u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen} x_2 \\ -x_1^2 \cdot \cos x_2 + u \cdot \cos x_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \text{sen} x_2 \\ -x_1^2 \cdot \cos x_2 + (-x_1^2 + \text{sec} x_2 \cdot v) \cdot \cos x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen} x_2 \\ -x_1^2 \cdot \cos x_2 - x_1^2 \cos x_2 + v \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \text{sen} x_2 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen} x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T(x) + qv.$$

Em geral,  $T$  não é única. Escolhendo  $T_1(x) = x_1 - x_1^2$ ,  $T_1$  também tem grau relativo 2 em  $x_0 = 0$ . De fato,

$$\mathcal{L}_g T_1(x) = dT_1(x) \cdot g(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial T_1}{\partial x_2}(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T =$$

$$\begin{bmatrix} 1 - 2x_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T = 0 \text{ para todo } x \text{ e}$$

$$\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f T_1(x) = \mathcal{L}_g (dT_1(x) \cdot f(x)) = \mathcal{L}_g \left( \begin{bmatrix} 1 - 2x_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{sen} x_2 & -x_1^2 \end{bmatrix}^T \right) =$$

$$\mathcal{L}_g (\text{sen} x_2 - 2x_1 \text{sen} x_2) = d(\text{sen} x_2 - 2x_1 \text{sen} x_2) \cdot g(x) =$$

$$\begin{bmatrix} -2\operatorname{sen}x_2 & \operatorname{cos}x_2 - 2x_1\operatorname{cos}x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \operatorname{cos}x_2 - 2x_1\operatorname{cos}x_2.$$

Portanto, em  $x_0 = 0$ ,  $\mathcal{L}_g\mathcal{L}_fT_1(0) = \operatorname{cos}0 - 2 \cdot 0 \cdot \operatorname{cos}0 = 1$

Além disso,

$$T_2(x) = \mathcal{L}_fT_1(x) = dT_1(x) \cdot f(x) = \begin{bmatrix} 1 - 2x_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{sen}x_2 & -x_1^2 \end{bmatrix}^T = \operatorname{sen}x_2 - 2x_1\operatorname{sen}x_2.$$

Assim, obtemos  $T(x) = \begin{bmatrix} T_1(x) & T_2(x) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_1 - x_1^2 & \operatorname{sen}x_2 - 2x_1\operatorname{sen}x_2 \end{bmatrix}^T$ .

**Exemplo 3.3.2** Usando o teorema 3.3.1 podemos mostrar que

$$x' = f(x) + g(x)u = \begin{bmatrix} e^{-x_2} \\ x_1 \\ \frac{1}{2}x_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

onde  $x \in \mathbb{R}^3$  e  $u \in \mathbb{R}$  não é entrada-saída linearizável.

Suponha  $\lambda(x)$  uma função suave com grau relativo 3. Então,

$$0 = \mathcal{L}_g\lambda(x) = d\lambda(x) \cdot g(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial\lambda(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial\lambda(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial\lambda(x)}{\partial x_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \frac{\partial\lambda(x)}{\partial x_1}.$$

Segue que  $\lambda$  é linearmente independente de  $x_1$  em  $\mathcal{U}$ , uma vizinhança de  $x_0$ , e

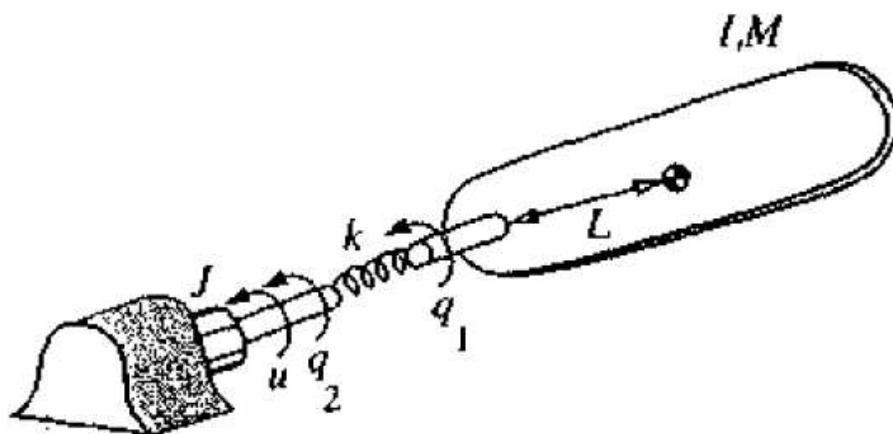
$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}_g\mathcal{L}_f\lambda(x) = \mathcal{L}_g(d\lambda(x) \cdot f(x)) = \mathcal{L}_g\left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial\lambda(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial\lambda(x)}{\partial x_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-x_2} & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 \end{bmatrix}^T\right) = \\ &= \mathcal{L}_g\left(\frac{\partial\lambda(x)}{\partial x_2}x_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial\lambda(x)}{\partial x_3}x_1^2\right) = d\left(\frac{\partial\lambda(x)}{\partial x_2}x_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial\lambda(x)}{\partial x_3}x_1^2\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \frac{\partial(\frac{\partial\lambda(x)}{\partial x_2}x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\frac{1}{2}\frac{\partial\lambda(x)}{\partial x_3}x_1^2)}{\partial x_1} = \\ &= \frac{\partial\lambda(x)}{\partial x_2} + \frac{\partial\lambda(x)}{\partial x_3} \cdot x_1. \end{aligned}$$

Logo,  $\frac{\partial\lambda(x)}{\partial x_2} = -\frac{\partial\lambda(x)}{\partial x_3} \cdot x_1$  (Absurdo!  $\lambda$  é independente de  $x_1$ ).

Portanto, não há função de grau relativo 3 em relação ao sistema num aberto de  $\mathbb{R}^3$ , isto é, o sistema não é entrada-saída linearizável.

### 3.3.1 Aplicação

Considere a figura abaixo que representa um mecanismo com junta flexível e conexão única (braço de robô) impulsionado por um motor através de uma mola torsional de amortecimento desprezível no plano vertical. (ver [7], pg 528 e [6], pg 242)



Suas equações de movimento podem ser obtidas como

$$\begin{cases} Iq_1'' + MgL \text{sen} q_1 + k(q_1 - q_2) = 0 \\ Jq_2'' - k(q_1 - q_2) = u, \end{cases}$$

onde  $q_1$  e  $q_2$  são posições angulares,  $I$  e  $J$  são momentos de inércia,  $k$  é a constante da mola,  $M$  é uma massa,  $G$  é a constante gravitacional,  $L$  representa uma distância e  $u$  é o torque de entrada do motor.

Note que as não linearidades aparecem na primeira equação, enquanto o controle  $u$  aparece somente na segunda equação, onde não é possível obter um vasto controle de maneira óbvia. Vamos agora analisar se uma linearização estado de entrada é possível. Primeiro, vamos colocar a dinâmica do sistema em um espaço de representação escrevendo  $x = \begin{bmatrix} q_1 & q_1' & q_2 & q_2' \end{bmatrix}^T$ , então o sistema acima pode ser escrito na forma

$$x' = f(x) + g(x)u \equiv \begin{bmatrix} x_2 \\ -asenx_1 - b(x_1 - x_3) \\ x_4 \\ c(x_1 - x_3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e \end{bmatrix} u, \quad (3.22)$$

usando as constantes positivas  $a = \frac{MGL}{I}$ ,  $b = \frac{k}{I}$ ,  $c = \frac{k}{J}$  e  $e = \frac{1}{J}$ .

Vamos analisar o sistema próximo ao ponto de equilíbrio  $x_0 = 0$ . Se existir uma função  $T_1(x)$  de grau relativo 4, pelo teorema 3.3.1, esse sistema é levado à forma linear controlável  $z' = Nz + dv$  através de uma transformação  $T$  aliada a retroalimentação  $u$ . De fato,

Vamos escolher  $T_1(x) = x_1$ .

- $\mathcal{L}_g T_1(x) = dT_1(x) \cdot g(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e \end{bmatrix}^T = 0.$

- $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f T_1(x) = \mathcal{L}_g (dT_1(x) \cdot f(x)) = \mathcal{L}_g \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot f(x) \right) = \mathcal{L}_g(x_2) =$

$$d(x_2) \cdot g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e \end{bmatrix}^T = 0.$$

- $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^2 T_1(x) = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f (dT_1(x) \cdot f(x)) = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot f(x) \right) =$   
 $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f(x_2) = \mathcal{L}_g (d(x_2) \cdot f(x)) = \mathcal{L}_g \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot f(x) =$   
 $\mathcal{L}_g(-asenx_1 - b(x_1 - x_3)) = \begin{bmatrix} -acosx_1 - b & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e \end{bmatrix}^T = 0.$

- $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^3 T_1(x) = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f \mathcal{L}_f^2 T_1(x) = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f(-asenx_1 - b(x_1 - x_3)) =$

$$\mathcal{L}_g \left( \begin{bmatrix} -acosx_1 - b & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \cdot f(x) \right) = \mathcal{L}_g(-ax_2 \cos x_1 - bx_2 + bx_4) =$$

$$\begin{bmatrix} ax_2 \sin x_1 & -acosx_1 - b & 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e \end{bmatrix}^T = b.e \neq 0, \text{ pois } b, e > 0.$$

- $\mathcal{L}_f^4 T_1(x) = \mathcal{L}_f \mathcal{L}_f^3 T_1(x) = \mathcal{L}_f(-ax_2 \cos x_1 - b(x_2 - x_4)) =$

$$= \begin{bmatrix} ax_2 \operatorname{sen} x_1 & -a \cos x_1 - b & 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ -a \operatorname{sen} x_1 - b(x_1 - x_3) \\ x_4 \\ c(x_1 - x_3) \end{bmatrix} =$$

$$= ax_2^2 \operatorname{sen} x_1 + (-a \cos x_1 - b)(-a \operatorname{sen} x_1 - b(x_1 - x_3)) + bc(x_1 - x_3)$$

Logo  $T_1(x) = x_1$  tem grau relativo 4 em  $x_0 = 0$  e pelo Teorema 3.3.1, existe uma transformação  $T(x)$  que aliada a uma retroalimentação  $u(x)$  leva o sistema (3.22) para a forma linear controlável  $z' = Nz + dv$  numa vizinhança de  $x_0$ . Além disso,

- $T_2(x) = \mathcal{L}_f T_1(x) = x_2$
- $T_3(x) = \mathcal{L}_f^2 T_1(x) = -a \operatorname{sen} x_1 - b(x_1 - x_3)$
- $T_4(x) = \mathcal{L}_f^3 T_1(x) = -ax_2 \cos x_1 - b(x_2 - x_4)$

Logo,

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -a \operatorname{sen} x_1 - b(x_1 - x_3) \\ -ax_2 \cos x_1 - b(x_2 - x_4) \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$u(x) = \alpha(x) + \beta(x)v = -\frac{\mathcal{L}_f^4 T_1(x)}{\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^3 T_1(x)} + \frac{v}{\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^3 T_1(x)} = \frac{ax_2^2 \operatorname{sen} x_1 + (-a \cos x_1 - b)(-a \operatorname{sen} x_1 - b(x_1 - x_3)) + bc(x_1 - x_3) + v}{b.e}$$

.

Portanto, (3.22) é equivalente ao sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -a \operatorname{sen} x_1 - b(x_1 - x_3) \\ -ax_2 \cos x_1 - b(x_2 - x_4) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v .$$

# Referências Bibliográficas

- [1] Terrell, W. J. *Some Fundamental Control Theory I: Controllability, Observability, and Duality*. American Mathematical Monthly, v.106, n.8, p.705-719, 1999.
- [2] Terrell, W. J. *Some Fundamental Control Theory II: Feedback Linearization of Single Input Nonlinear Systems*. American Mathematical Monthly, v.106, n.8, p.812-828, 1999.
- [3] Pavani, M. *Controlabilidade de Sistemas de Equações Diferenciais Lineares*. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Departamento de Matemática, Ibilce-Unesp, São José do Rio Preto, 58p, 2008.
- [4] Burghes, D.; Graham, A. *Control and Optimal Control Theories with Applications*. Chichester: Horwood, 2004.
- [5] van der Schaft, A.J.;Nijmeijer, H. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. New York: Springer-Verlag, 1991.
- [6] Slotine, J.J.E; Li,W. *Applied Nonlinear Control*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1991. 461p.
- [7] Khalil, H. K. *Nonlinear Systems*. 2ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1996. 734p.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)