

**Universidade Federal do Rio Grande do Sul**  
**Instituto de Matemática**  
**Programa de Pós Graduação em Matemática**

Equações de Advecção-Difusão com Aplicações às Equações de Navier-Stokes

por

**Lineia Schütz**

Porto Alegre, junho de 2008

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

## Conteúdo

<b>1</b>	<b>ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS . . . . .</b>	<b>10</b>
1.1	Introdução . . . . .	10
1.2	Estimativas para $\ w(\cdot, t)\ _{L^p(\mathbb{R}^2)}$ . . . . .	12
1.3	Estimativas para $\ u(\cdot, t)\ _{L^p(\mathbb{R}^2)}$ . . . . .	16
<b>2</b>	<b>EQUAÇÕES DE ADVECÇÃO-DIFUSÃO EM <math>\mathbb{R}^N</math> . . . . .</b>	<b>20</b>
2.1	Introdução . . . . .	20
2.2	Estimativas para $\ u(\cdot, t)\ _{L^p(\mathbb{R}^n)}$ . . . . .	21
<b>3</b>	<b>EQUAÇÕES DE ADVECÇÃO-DIFUSÃO MAIS GERAIS . . . . .</b>	<b>31</b>
3.1	Introdução . . . . .	31
3.2	Estimativas para $\ u(\cdot, t)\ _{L^p(\mathbb{R}^n)}$ . . . . .	32
3.3	Unicidade de soluções . . . . .	39
<b>4</b>	<b>EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES INCOMPRESSÍVEIS EM 2-D E 3-D . . . . .</b>	<b>42</b>
4.1	Introdução . . . . .	42
4.2	Estimativas Preliminares . . . . .	43
4.3	Decaimento de $\ u(\cdot, t)\ _{L^2(\mathbb{R}^n)}$ . . . . .	47
4.4	N-S e Equação do Calor . . . . .	48

4.5	Blow-up de soluções ( $n=3$ ) . . . . .	51
5	APÊNDICE 1 . . . . .	56
5.1	Resultados Preliminares . . . . .	56
5.2	Demonstração do Teorema 1.3.1 . . . . .	59
	BIBLIOGRAFIA . . . . .	64

## RESUMO

Este trabalho consiste de duas partes.

Na primeira, estendemos o resultado de Braz e Silva e Zingano [2], [3] sobre soluções  $u(\cdot, t) \in C^0([0, T[, L^p(\mathbb{R}^n))$  de equações de advecção-difusão em meios heterogêneos para classes mais gerais de equações parabólicas, aplicando os resultados às equações de Navier-Stokes incompressíveis no plano formuladas em termos da vorticidade do escoamento. Em particular, estabelecemos estimativas mostrando o decaimento em certas normas do campo de velocidade  $u(\cdot, t)$  em caso de escoamentos de energia infinita.

Na segunda parte, consideramos as equações de Navier-Stokes em dimensão  $n = 2, 3$  examinando soluções  $u(\cdot, t)$  de energia finita. Inicialmente, obtemos uma nova derivação, mais simples, do resultado obtido originalmente por Kato [20] estabelecendo o decaimento assintótico ( $t \rightarrow \infty$ ) de  $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ , para estados iniciais  $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$  (com divergente nulo) arbitrários. Na linha deste argumento obtemos uma formulação mais forte dos resultados fundamentais de Wiegner [36] relacionando  $u(\cdot, t)$  com soluções  $e^{\nu\Delta}u_0$  da equação do calor, adaptando o método recentemente introduzido em [22], [23] para a derivação destes resultados. O método de [22], [23] também é utilizado para estabelecermos (dimensão  $n=3$ ) que, ocorrendo "blow-up" de  $u(\cdot, t)$  em tempo finito  $t_*$ , necessariamente  $t_* < 0.159\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^4\nu^{-5}$ , sendo  $\nu$  a viscosidade dinâmica do escoamento.

## ABSTRACT

In the first part of this work, we extend results by Braz e Silva e Zingano [2], [3] concerning  $L^p$  solutions  $u(\cdot, t) \in C^0([0, T[, L^p(\mathbb{R}^n))$  of advection-diffusion equations in heterogeneous media to broader classes of quasilinear parabolic equations, applying the results to incompressible Navier-Stokes flows in the plane by way of the vorticity formulation. In particular, we obtain some decay rates (as  $t \rightarrow \infty$ ) for certain norms of the velocity field  $u(\cdot, t)$  in case of flow with infinity energy.

In the second part, we consider the Navier-Stokes equations in dimension  $n = 2, 3$  and examine solutions  $u(\cdot, t)$  with finite energy. First, we give a new (and simpler) derivation of the time asymptotic result originally obtained by Kato [20] and Masuda [28] showing the decay of the  $L^2$  norm of divergence-free, finite-energy solutions. Following these footsteps, we give a stronger formulation of the fundamental results obtained by Wiegner [36] relating the velocity field  $u(\cdot, t)$  to solutions  $e^{\nu\Delta t}u_0$  of the heat equation, adapting the approach introduced in [22], [23] for the derivation of Wiergner's results. The analysis in [22], [23] is also used to obtain an interesting bound for the blow-up time  $t_*$  in  $3 - D$  flows, in case solutions cease to be smooth: one must have  $t_* < 0.159\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^4\nu^{-5}$ , where  $\nu$  is the dynamic viscosity.

# INTRODUÇÃO

Este trabalho consiste de duas partes.

Na primeira parte, formada pelos capítulos 1, 2 e 3, desenvolvemos vários resultados sobre soluções  $u(\cdot, t) \in C^0([0, T], L^p(\mathbb{R}^n))$  de equações parabólicas quase-lineares da forma

$$u_t + \operatorname{div}(b(x, t, u)u) = \operatorname{div}(A(x, t, u)\nabla u) + c(x, t, u)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (1)$$

associadas a estados iniciais

$$u(\cdot, 0) = u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad (2)$$

para certo  $1 \leq p < \infty$ . Aqui  $A, b, c$  denotam funções suaves dadas, satisfazendo condições apropriadas conforme os vários capítulos; em particular, supomos sempre  $A(x, t, u)$  positiva definida, com

$$\langle A(x, t, u)\xi, \xi \rangle \geq \mu(t)|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad (3)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$  e  $u \in \mathbb{R}$ , com  $\mu(t) > 0$  para cada  $t$ <sup>1</sup>, onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto interno e  $|\cdot|$  a norma Euclidiana. Supondo, por exemplo,

$$A, b, c, \frac{\partial c}{\partial u}, \frac{\partial \vec{b}}{\partial x_j}, \frac{\partial b}{\partial u}, \frac{\partial^2 b}{\partial x_j \partial u}, \frac{\partial A}{\partial x_j}, \frac{\partial A}{\partial u}, \frac{\partial^2 A}{\partial x_j \partial u}, \frac{\partial^2 A}{\partial u^2} \quad (4)$$

limitadas para  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T], u \in [-M, M]$ , para cada  $M > 0$ , segue de [25], Capítulo 5, e das estimativas aqui obtidas que o problema (1), (2) possui soluções  $u(\cdot, t) \in C^0([0, T], L^p(\mathbb{R}^n))$  que são limitadas para  $t > 0$ , uniformemente em compactos  $\subseteq ]0, T]$  (ou seja,  $u(\cdot, t) \in L^\infty(]0, T], L^\infty(\mathbb{R}^n))$ ) e são estas soluções que examinamos no trabalho.

No Capítulo 1, consideramos o problema dado por

$$w_t + (u \cdot \nabla)w = \nu \Delta w, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \quad (5)$$

---

<sup>1</sup>No capítulo 1, considera-se  $\mu(t) = \mu > 0$  constante

$$w(\cdot, 0) = w_0 \in L^p(\mathbb{R}^2), \quad (6)$$

onde  $u(\cdot, 0)$  tem divergente nulo e é dado pela chamada Lei de Biot-Savart [6],

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^2} K(x - y)w(y, t)dy, \quad (7)$$

onde

$$K(\xi) = \frac{1}{2\pi|\xi|^2} \begin{pmatrix} -\xi_2 \\ \xi_1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Aqui  $\nu$  denota uma constante positiva dada.

As equações (5), (6), (7), (8) correspondem à formulação de vorticidade para escoamentos viscosos incompressíveis no plano, sendo  $u(x, t)$  a velocidade de escoamento no ponto  $x$  e instante  $t$  e  $w(x, t) = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$  a vorticidade correspondente [5], [6], [21], [24]. Note que a equação (5) pode ser escrita como

$$w_t + \operatorname{div}(wu) = \nu \Delta w, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \quad (9)$$

e, conhecendo-se propriedades de  $w(\cdot, t)$  pode-se esperar obter informações sobre  $u(\cdot, t)$  via (7), (ver por exemplo, [5], [21]).

Na seção 1.3, aplicamos os resultados obtidos sobre  $w(\cdot, t)$ , solução de (5), para investigar o campo de velocidade  $u(\cdot, t)$ . Utilizando o teorema de Sobolev-Thorin <sup>2</sup>, [35], resulta que

$$u(\cdot, t) \in L^q(\mathbb{R}^2), \quad q \in \frac{2p}{2-p}, \quad (10)$$

supondo  $1 < p < 2$ , com

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq K(q)\|w(\cdot, t)\|_{L^{\frac{2q}{q+2}}(\mathbb{R}^2)} = O(1)t^{-\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right)} \quad (11)$$

para todo  $q \geq \frac{2p}{2-p}$  finito e certa constante  $K(q)$  dependendo de  $q$ . Além disso, estimando o item (7) por um argumento direto, mostramos, no final da seção 1.3, que  $u(\cdot, t) \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$  quando  $1 \leq p < 2$ , tendo-se

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq K(q)\|w_0\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}t^{-\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)}, \quad t > 0, \quad (12)$$

---

<sup>2</sup>Por conveniência, incluímos uma porva do teorema de Sobolev-Thorin no Apêndice 1, seguindo [17], [29], [32], [33]



para cada constante  $K(p)$  dependendo de  $p$ .

No Capítulo 2 , adaptamos o método desenvolvido em [2], [3], para o caso do problema

$$u_t + \operatorname{div}(b(x, t, u)u) = \operatorname{div}(A(x, t, u)\nabla(u)) + c(x, t, u)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (13)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n), \quad (14)$$

onde se supõe ademais,

$$c(x, t, u) \leq 0 \quad (15)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^q \operatorname{div}(b(x, t, \varphi(x))) dx \geq 0, \quad \forall q \geq p \quad (16)$$

para toda  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . A condição (??) é introduzida em [2] e usada aqui para substituir a condição sobre  $b(x, t, u)$  utilizada em [3], descrita por

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial b_j}{\partial x_j}(x, t, u) \geq 0 \quad \forall x, t, u. \quad (17)$$

onde  $b_1, \dots, b_n$  denotam as componentes da velocidade de advecção  $\vec{b}$ . Adaptando o procedimento em [3], obtemos resultados similares, como a estimativa fundamental

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n, p) \left( \int_0^t \mu(\tau)^{-\frac{n}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} t^{-\frac{1}{p} \left(1 + \frac{n}{2}\right)} \quad (18)$$

para todo  $t > 0$ , onde  $\mu(t)$  é dada em (3) e  $K(n, p)$  é certa constante que depende apenas dos parâmetros  $n$  e  $p$  do problema. Como em [3], este resultado é utilizado para estabelecer a unicidade de soluções em  $C^0([0, \infty[, L^p(\mathbb{R}^n)) \cap L_{loc}^\infty([0, \infty[, L^\infty(\mathbb{R}^n))$ .

No Capítulo 3, estendemos a análise apresentada em [2], [3] para o problema mais geral

$$u_t + \operatorname{div}(b(x, t, u)u) = \operatorname{div}(A(x, t, u)\nabla(u)) + c(x, t, u)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (19)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n), \quad (20)$$

onde  $b, c$  são supostas limitadas, em substituição às condições (15), (16), (17) acima. Novamente, supondo (3) consegue-se estimar  $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$  em termos de  $\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ , na forma

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n, p, T) \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} (\nu t)^{-\frac{n}{2p}} \quad (21)$$

para todo  $0 < t < T$ , sendo  $\nu = \inf_{0 < t < T} \mu(t)$  e  $K(n, p, T)$  uma constante que depende apenas dos valores  $n, p, T$  dados. Na seção 3.3, generalizamos o procedimento utilizado em [3] para estabelecer a unicidade de soluções a partir de estimativas do tipo (21); em particular, torna-se claro que tal unicidade pode ser obtida diretamente da desigualdade de energia descrita no Teorema 3.2.2, mais simples de ser obtida que a desigualdade(21) acima.

Na segunda parte deste trabalho, voltamos nossa atenção para a equação de Navier-Stokes em  $\mathbb{R}^n$  (sendo  $n = 2, 3$ ),

$$u_t + (u \cdot \nabla)u + \frac{1}{\delta} \nabla p = \nu \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0. \quad (22)$$

$$\operatorname{div}(u) = 0, \quad (23)$$

supondo  $u(\cdot, 0) = u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ , onde  $\delta, \nu$  denotam constantes positivas. Nestas condições, existe  $T > 0$  (dependendo de  $u_0$ ) tal que o problema (22), (23) admite uma única solução  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times ]0, T[)$ ,  $p \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times ]0, T[)$ , com  $T = \infty$  no caso  $n = 2$  ( ver [22], [23], [24]). Para  $n = 3$ , o problema admite solução fraca  $u(\cdot, t)$ ,  $p(\cdot, t)$  global ( i.e,  $T = \infty$  ), que se torna clássica (  $C^\infty$  ) para  $t$  suficientemente grande (ver [22], [23], [26], [36] ). Em 1986, Wiegner obteve o decaimento

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(t^{-\gamma}), \quad (24)$$

para  $0 < \gamma \leq \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$ , supondo que se tenha

$$\|e^{\nu \Delta t} u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(t^{-\gamma}), \quad (25)$$

onde  $v(\cdot, t) = e^{\nu\Delta t}u_0$  denota a solução da equação do calor

$$v_t = \nu\Delta v, \quad t > 0, \quad (26)$$

associada ao estado inicial considerado  $v(\cdot, 0) = u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ . Na seção 4.3, mostramos que, nas hipóteses acima, tem-se o resultado mais forte

$$t^\gamma \|u(\cdot, t) - e^{\nu\Delta t}u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0, \quad \text{quando } t \rightarrow \infty, \quad (27)$$

no caso  $0 < \gamma < \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$ . Este resultado é obtido adaptando o argumento desenvolvido em [22], [23] para a obtenção de (24), (25), (26). Na mesma linha, obtemos, na seção 4.4, uma derivação elementar para

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0, \quad \text{quando } t \rightarrow \infty, \quad (28)$$

no caso geral  $u(\cdot, 0) = u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ , um resultado obtido originalmente por Kato [20] e sugerido no trabalho fundamental de Leray [18]. Portanto, a propriedade (27) é também válida no caso  $\gamma = 0$ , mas não conseguimos determinar sua velocidade no caso limite  $\frac{n}{4} + \frac{1}{2}$ , aqui omitido.

Finalmente, na seção 4.5, no caso  $3 - D$ , aproveitamos o resultado obtido em [22], [23] sobre a monotonicidade eventual de  $\|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^3$  para mostrarmos que se  $u(\cdot, t)$  experimentar "blow-up" em tempo finito  $t_* > 0$ <sup>4</sup>, então, necessariamente deve valer

$$t_* < 0.159 \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^4 \nu^{-5}, \quad (29)$$

onde  $\nu > 0$  é a viscosidade dinâmica. Para a obtenção da constante 0.159, procuramos determinar uma constante  $K$  razoavelmente pequena para a desigualdade de Nirenberg-Gagliardo [13], [34],

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq K \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D^2u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}}, \quad u \in H^2(\mathbb{R}^3), \quad (30)$$

modificando a derivação encontrada em [34], Capítulo 13, para se adequar aos nossos propósitos.

---

<sup>3</sup>Para todo  $t_0 > 0$  suficientemente grande (dependendo de  $u_0$ ),  $\|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ , conforme [22], [23], decresce em  $[t_0, \infty[$ , com  $\|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0$  ao  $t \rightarrow \infty$ .

<sup>4</sup>Este "blow-up" é caracterizado por  $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \rightarrow \infty$  ao  $t \rightarrow t_*$  [24]

# 1 ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS

## 1.1 Introdução

Neste capítulo, vamos estudar algumas propriedades das soluções  $u(\cdot, t)$  do problema de Navier-Stokes incompressível em  $\mathbb{R}^2$  aplicando, para a vorticidade, as técnicas que serão discutidas em maior generalidade nos capítulos 2 e 3 deste trabalho. Desta forma, as demonstrações dos resultados apresentados na seção 1.2 estão feitas em detalhes nos capítulos 2 e 3.

Mais precisamente, as equações de Navier-Stokes de um fluido incompressível em  $\mathbb{R}^2$  de densidade constante  $\rho > 0$  são dadas por

$$u_t + (u \cdot \nabla)u = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta u, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div}(u) = 0, \quad (1.2)$$

onde  $\rho$  é a densidade do fluido,  $u(\cdot, t)$  é o campo de velocidade e  $p(\cdot, t)$ , a pressão,  $\nu$  é a viscosidade dinâmica e  $\operatorname{div}$  é o divergente com respeito às variáveis espaciais  $x = (x_1, x_2)$ .

O rotacional da equação (1.1) nos dá a equação da vorticidade

$$w_t + (u \cdot \nabla)w = \nu\Delta w, \quad (1.3)$$

onde

$$w = \partial_{x_1}u_2 - \partial_{x_2}u_1 \quad (1.4)$$

é a vorticidade.

Por (1.2), existe potencial  $\psi$  tal que  $u_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x_2}$  e  $u_2 = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1}$ , ou seja,

$$-\Delta\psi = w$$

. Resolvendo esta equação com a condição de fronteira  $\nabla\psi \rightarrow 0$  ao  $\infty$  obtemos

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^2} K(x - y)w(y, t)dy, \quad (1.5)$$

onde

$$K(x) = \frac{1}{2\pi|x|^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Assim, através de estimativas para  $w(\cdot, t)$  e a Lei de Biot-Savart (1.5), (1.6) acima, obtemos informações para a solução  $u(\cdot, t)$  do problema de Navier-Stokes incompressível em duas dimensões.

Na seção 1.2, derivamos propriedades para  $w(\cdot, t)$  solução do problema descrito por (1.8), (1.9) e (1.10), seguindo um procedimento análogo ao desenvolvido em [2], [3]. Começamos observando que  $\|w(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$  decresce monotonicamente com  $t$ , quando  $w(\cdot, 0) \in L^p(\mathbb{R}^2)$  para todo  $1 \leq p < \infty$ . No Teorema 1.2.2 obtemos uma desigualdade de energia para a solução  $w(\cdot, t)$ , dado  $1 \leq p < \infty$ . Em seguida, no Teorema 1.2.3, mostramos que  $w(\cdot, t)$  é limitada para  $t > 0$ , e obtemos a seguinte estimativa para a norma do sup:

$$\|w(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq K(p)\|w_0\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}(\nu t)^{-\frac{1}{p}},$$

para certa constante  $K(p)$  dependendo apenas de  $p$ . Além disso, provamos a contratividade das soluções  $w(\cdot, t)$  em  $L^1(\mathbb{R}^2)$ . Então, como consequência das desigualdades obtidas nos teoremas citados, provamos a unicidade das soluções  $w(\cdot, t)$  em  $L^p(\mathbb{R}^2)$ , para  $1 \leq p < \infty$ . Para finalizar a seção 1.2, mostramos que, para  $p \geq 1$ ,  $\|w(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ , adaptando o argumento em [3].

Na seção 1.3, utilizando as estimativas obtidas para a vorticidade  $w(\cdot, t)$ , o Teorema de Thorin-Sobolev [32], [33], [35] e a Lei de Biot-Savart (1.5), (1.6), obtemos

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq C(p)\|w(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}, \text{ para } q = \frac{2p}{2-p} \text{ e } 1 < p < 2,$$

onde  $u(\cdot, t)$  é solução do problema de Navier-Stokes incompressível em  $\mathbb{R}^2$ . Para  $q = +\infty$ , mostramos por um argumento direto, Teorema 1.3.3, que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq K\|w_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}(\nu t)^{-\frac{1}{2}}, \quad (1.7)$$

no caso  $p = 1$ , e

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq K(p, \nu) t^{-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} \|w_0\|_{L^p(\mathbb{R}^2)},$$

para  $1 < p < 2$ .

## 1.2 Estimativas para $\|w(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$ .

Nesta seção, vamos derivar algumas propriedades de  $w(\cdot, t)$ , solução do problema

$$w_t + (u \cdot \nabla)w = \nu \Delta w, \quad (1.8)$$

$$\operatorname{div} w = 0, \quad (1.9)$$

para  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $t > 0$  e com condições iniciais em  $L^p$  dado  $1 \leq p < \infty$ , i.e.,

$$w(\cdot, 0) = w_0 \in L^p(\mathbb{R}^2) \quad (1.10)$$

onde,  $\operatorname{div}$  é o divergente e  $\Delta$  é o laplaciano, ambos com respeito às variáveis espaciais  $x = (x_1, x_2)$ ,  $w = \nabla \times u$  é o rotacional de  $u$  e  $\nu$  é uma constante positiva. Para isso, fazemos uso das chamadas *funções sinais regularizadas* [15], [24]: tomando  $\varphi \in C^\infty$  função crescente e ímpar tal que

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 1, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ -1, & \text{se } x \leq -1, \end{cases} \quad (1.11)$$

considere, para cada  $\delta > 0$ ,  $\varphi_\delta(x) = \varphi\left(\frac{x}{\delta}\right)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Definindo  $L_\delta \in C^\infty$  por

$$L_\delta(x) = \int_0^x \varphi_\delta(\xi) d\xi, \quad (1.12)$$

temos:

$$L_\delta \geq 0, \quad (1.13)$$

$$L_\delta'' \geq 0, \quad (1.14)$$

$$L_\delta(x) \rightarrow |x| \text{ quando } \delta \rightarrow 0, \quad (1.15)$$

$$L'_\delta(x) \rightarrow \operatorname{sgn}(x) \text{ quando } \delta \rightarrow 0, \quad (1.16)$$

onde  $\operatorname{sgn}$  denota a *função sinal*.

As idéias aplicadas nas demonstrações dos teoremas a seguir seguem a discussão em [2], [3] e são estendidas a problemas mais gerais nos capítulos 2 e 3.

**Teorema 1.2.1.** *Se  $w(\cdot, t) \in C^0([0, T], L^p(\mathbb{R}^2))$ ,  $1 \leq p < \infty$ , é solução de (1.8), (1.9) e (1.10), então,*

$$\|w(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq \|w_0\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}, \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.17)$$

**Prova:** Seja  $\Phi_\delta(\cdot) = L_\delta(\cdot)^p$ , para  $L_\delta(\cdot)$  definida como em (1.12). Multiplicando a equação (1.8) por  $\Phi'_\delta(w)$  e integrando o resultado sobre  $\mathbb{R}^2 \times [t_0, t]$ , para  $0 < t_0 < t \leq T$  dados, obtemos,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^2} \Phi'_\delta(w) w_\tau dx d\tau + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^2} \Phi'_\delta(w) (u(x, \tau) \nabla) w(x, \tau) dx d\tau \\ = \nu \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^2} \Phi'_\delta(w) \Delta w(x, \tau) dx d\tau. \end{aligned}$$

Segue do Teorema do Divergente, de (1.9) e de  $\Phi'_\delta(w) w_t = \frac{d}{dt} [\Phi_\delta(w)]$  que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Phi_\delta(w(x, t)) dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} \Phi_\delta(w(x, t_0)) dx - \nu \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^2} \Phi''_\delta(w) |\nabla w(x, \tau)|^2 dx d\tau$$

Como  $\nu$  é uma constante positiva e  $\Phi''_\delta(w) \geq 0$ , fazendo  $\delta \rightarrow 0$  e  $t_0 \rightarrow 0$  obtemos

$$\|w(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq \|w(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}.$$

□

O resultado acima será utilizado na obtenção da desigualdade de energia a seguir, que tem papel fundamental na análise deste capítulo. Na prova a seguir, vamos utilizar a desigualdade de Sobolev (Gagliardo-Nirenberg) dada por

$$\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C_2 \|v\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}}, \quad v \in C_0^\infty, \quad (1.18)$$

onde  $C_2$  é constante ( independe de  $v$  ).

**Teorema 1.2.2.** *Se  $w(\cdot, t) \in C^0([0, T], L^p(\mathbb{R}^2))$ ,  $1 \leq p < \infty$ , satisfaz (1.8), (1.9) e (1.10), então*

$$\begin{aligned} \|w(\cdot, t)\|_{L^{2p}(\mathbb{R}^2)}^{2p} + \frac{4\nu}{t^2} \left(1 - \frac{1}{2p}\right) \int_0^t \tau^2 \int_{\mathbb{R}^2} |w(x, \tau)|^{2p-2} |\nabla(w(x, \tau))|^2 dx d\tau \\ \leq C_2^4 \left(\nu t \left(1 - \frac{1}{2p}\right)\right)^{-1} \|w_0\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^{2p} \quad \forall t \in (0, T] \end{aligned} \quad (1.19)$$

onde  $C_2$  é a constante da Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg dada em (1.18) acima.

**Prova:** Sejam  $t_0 \in (0, t)$  e  $\phi_\delta(\cdot) = L_\delta(\cdot)^{2p}$ , para  $L_\delta(\cdot)$  definida em (1.12). Multiplicando a equação (1.8) por  $(t-t_0)^2 \phi'_\delta(w(x, t))$ , integrando o resultado sobre  $\mathbb{R}^2 \times [t_0, t]$ , aplicando o Teorema do Divergente, a condição (1.9) e fazendo  $t_0 \rightarrow 0$  obtemos

$$\begin{aligned} t^2 \|w(\cdot, t)\|_{L^{2p}(\mathbb{R}^2)}^{2p} + 4\nu \left(1 - \frac{1}{2p}\right) \int_0^t \tau^2 \int_{\mathbb{R}^2} |w(x, \tau)|^{2p-2} |\nabla(w(x, \tau))|^2 dx d\tau \\ = 2 \int_0^t \tau \int_{\mathbb{R}^2} |w(x, \tau)|^{2p} dx d\tau \end{aligned}$$

Considerando

$$E_p(t) = t^2 \|w(\cdot, t)\|_{L^{2p}(\mathbb{R}^2)}^{2p} + 4\nu \left(1 - \frac{1}{2p}\right) \int_0^t \tau^2 \int_{\mathbb{R}^2} |w(x, \tau)|^{2p-2} |\nabla(w(x, \tau))|^2 dx d\tau$$

e definindo  $v(\cdot, t)$  como

$$v(x, t) = \begin{cases} w(x, t) & \text{se } p = 1 \\ |w(x, t)|^p & \text{se } p > 1. \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} E_p(t) &= t^2 \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + 4\nu \left(1 - \frac{1}{2p}\right) \int_0^t \tau^2 \int_{\mathbb{R}^2} \|\nabla v(x, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\tau \\ &= 2 \int_0^t \tau \int_{\mathbb{R}^2} |w(x, \tau)|^{2p} dx d\tau. \end{aligned} \quad (1.20)$$



Pela desigualdade (1.18), temos

$$\|v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C_2 \|w(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^{\frac{p}{2}} \|\nabla v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}}. \quad (1.21)$$

Das desigualdades (1.17), (1.20) e da desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned} t^2 \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + 4\nu \left(1 - \frac{1}{2p}\right) \int_0^t \tau^2 \int_{\mathbb{R}^2} \|\nabla v(x, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 dx d\tau \\ \leq 2C_2^2 \|w_0(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^p \left[E_p(t)\right]^{\frac{1}{2}} \left[4\nu \left(1 - \frac{1}{2p}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Assim,

$$E_p(t) \leq 2C_2^2 \|w_0(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^p \left[E_p(t)\right]^{\frac{1}{2}} \left[4\nu \left(1 - \frac{1}{2p}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|w(\cdot, t)\|_{L^{2p}(\mathbb{R}^2)}^{2p} + \frac{4\nu}{t^2} \left(1 - \frac{1}{2p}\right) \int_0^t \tau^2 \int_{\mathbb{R}^n} |w(x, \tau)|^{2p-2} |\nabla(w(x, \tau))|^2 dx d\tau \leq \\ C_2^4 \left(1 - \frac{1}{2p}\right)^{-1} \|w_0\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^{2p} (\nu t)^{-1}. \end{aligned}$$

□

Por um procedimento análogo ao esquema de Moser [14], Capítulo 8, a desigualdade (1.19) pode ser usada iterativamente para obter o seguinte resultado fundamental.

**Teorema 1.2.3.** *Se  $w(\cdot, t) \in C^0([0, T], L^p(\mathbb{R}^2))$ ,  $1 \leq p < \infty$ , é solução de (1.8), (1.9) e (1.10), então*

$$\|w(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \left(\frac{C_2^4}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \|w_0\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} (\nu t)^{-\frac{1}{p}} \quad (1.22)$$

**Prova:** Considere  $t_0 = \frac{t}{2^k}$  e  $t_i = t_{i-1} + \frac{t_0}{2^i}$  para  $i \in 1, \dots, k$ ,  $k$  um número natural. Como, pelo teorema anterior,

$$\begin{aligned} \|w(\cdot, t)\|_{L^{2p}(\mathbb{R}^2)}^{2p} \leq C_2^4 \left(\nu(t-s) \left(1 - \frac{1}{2p}\right)\right)^{-1} \|w(\cdot, s)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^{2p} \\ \forall 0 \leq s < t < T \text{ e } \forall 1 \leq p \leq \infty, \end{aligned} \quad (1.23)$$

aplicando a desigualdade (1.23) para  $t = t_i$  e  $s = t_{i-1}$  temos

$$\|w(\cdot, t_i)\|_{L^{2^i p}(\mathbb{R}^2)} \leq \left(C_2^4\right)^{\frac{1}{2^i p}} \left(1 - \frac{1}{2^i p}\right)^{-\frac{1}{2^i p}} \|w(\cdot, t_{i-1})\|_{L^{2^{i-1} p}(\mathbb{R}^2)} (\nu t)^{-\frac{1}{2^i p}},$$

$$\forall 0 \leq i \leq k. \quad (1.24)$$

Aplicando a desigualdade (1.24) para  $i = k, k-1, k-2, \dots, 1$  e observando que  $t_k = t$  obtemos

$$\|w(\cdot, t)\|_{L^{2^k p}(\mathbb{R}^2)} \leq \left(\frac{C_2^4}{\nu t}\right)^{\sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{2^i p}\right)} \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{2^i p}\right)^{-\frac{1}{2^i p}} \|w(\cdot, t_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}. \quad (1.25)$$

Mas,

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i p} = \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$$

e

$$\prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{2^i p}\right)^{-\frac{1}{2^i p}} \leq 2^{-\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \frac{1}{p}}.$$

Portanto, fazendo  $k \rightarrow +\infty$ , obtemos

$$\|w(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \left(\frac{C_2^4}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \|w_0\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} (\nu t)^{-\frac{1}{p}}.$$

□

### 1.3 Estimativas para $\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$ .

Nesta seção, vamos utilizar os resultados da seção anterior para obter estimativas para  $u(\cdot, t)$  dada por (1.5). Inicialmente, investigamos a seguinte questão: tendo-se  $w(\cdot, t) = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$  em dado espaço  $L^p(\mathbb{R}^2)$ <sup>1</sup>, em que espaço  $L^q(\mathbb{R}^2)$  está  $u(\cdot, t)$ ?

<sup>1</sup>Pelos resultados da seção 1.2, tem-se, na verdade,  $w(\cdot, t) \in L^p(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ , e assim  $w(\cdot, t) \in L^r(\mathbb{R}^2)$

Começamos observando que, supondo  $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) \in L^p(\mathbb{R}^2)$  para  $1 < p < 2$ , obtem-se a desigualdade de Sobolev [[13], página 24]

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq K(p) \|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}, \quad (1.26)$$

para  $q > p$  dado por

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}. \quad (1.27)$$

É notável que se tenha também  $u(\cdot, t) \in L^q(\mathbb{R}^2)$  para  $q$  dado em (1.27), supondo apenas que  $w(\cdot, t) = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \in L^p(\mathbb{R}^2)$ ,  $1 < p < 2$ , como obtemos abaixo utilizando o Teorema de Thorin-Sobolev. Este resultado trata de operadores singulares da forma

$$T_\lambda[f](x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^\lambda} dy, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n), \quad (1.28)$$

onde  $\lambda \in ]0, n[$ .

**Teorema 1.3.1.** (Thorin-Sobolev) *Se  $f$  é uma função em  $L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 < p < q < \infty$ , e  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\lambda}{n} - 1$ , com  $0 < \lambda < n$ , então  $T_\lambda f \in L^q(\mathbb{R}^n)$  para  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  e  $T_\lambda$  é um operador limitado,*

$$\|T_\lambda[f]\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq A(p, n, \lambda) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n), \quad (1.29)$$

onde  $A(p, n, \lambda)$  é uma constante dependendo apenas de  $p, n, \lambda$ .

**Prova:** A demonstração do teorema está feita no apêndice 1, seguindo [29], [17].

**Observação:** o Teorema 1.3.1 no caso  $n = 2$  e  $\lambda = 1$  nos dá

$$\|T_\lambda[f]\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq A(p, n, \lambda) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^2), \quad (1.30)$$

onde  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$  e  $1 < p < 2$ .

Em particular, obtemos de (1.5), (1.6) o seguinte resultado fundamental.

**Teorema 1.3.2.** *Se  $w(\cdot, t) \in C^0([0, T], L^p(\mathbb{R}^2))$  é solução de (1.8), (1.9) e (1.10), então, para  $1 < p < 2$ ,*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq C(p) \|w(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}, \quad (1.31)$$

$$(1.32)$$

onde  $u(\cdot, t)$  é dada por (1.5), (1.6), e  $q = \frac{2p}{2-p}$ .

**Prova:** Considerando  $q = \frac{2p}{2-p}$  e aplicando o teorema 1.3.1 para

$f(\cdot) = \frac{1}{2\pi}|w(\cdot, t)|$ ,  $\lambda = 1$  e  $n = 2$  temos

$$\frac{1}{2\pi} \left( \int_{\mathbb{R}^2} \left( \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|w(y, t)|}{|x-y|} dy \right)^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{A(p)}{2\pi} \left( \int_{\mathbb{R}^2} |w(y, t)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}},$$

ou seja,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq A(p) \|w(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}. \quad (1.33)$$

□

Podemos também obter o seguinte resultado para  $u(\cdot, t)$ , que inclui o caso  $p = 1$ .

**Teorema 1.3.3.** *Se  $w(\cdot, t) \in C^0([0, T], L^p(\mathbb{R}^2))$ ,  $p \in [1, 2)$  é solução de (1.8), (1.9) e (1.10), então  $u(\cdot, t)$  satisfaz*

1. para  $p=1$ ,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \left( \frac{C_2^4}{2} + \frac{1}{2\pi} \right) \|w_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} (\nu t)^{-\frac{1}{2}}. \quad (1.34)$$

2. para  $1 < p < 2$ ,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C(p) (\nu t)^{-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} \|w_0\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}, \quad (1.35)$$

onde

$$C(p) = \frac{C_2^4}{2} + (4\pi)^{-\frac{1}{p}} \left( \frac{p-1}{2-p} \right)^{1-\frac{1}{p}}. \quad (1.36)$$

**Prova:** Pela Lei de Biot-Savart, (1.5) e (1.6),

$$|u(x, t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|w(y, t)|}{|x-y|} dy.$$

Assim, se  $p = 1$ ,

$$\begin{aligned}
|u(x, t)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|x-y| \leq (\nu t)^{\frac{1}{2}}} \frac{|w(y, t)|}{|x-y|} dy + \frac{1}{2\pi} \int_{|x-y| > (\nu t)^{\frac{1}{2}}} \frac{|w(y, t)|}{|x-y|} dy \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \|w(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \int_{|x-y| \leq (\nu t)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{|x-y|} dy \\
&\quad + \frac{(\nu t)^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_{|x-y| > (\nu t)^{\frac{1}{2}}} |w(y, t)| dy \\
&\leq (\nu t)^{\frac{1}{2}} \|w(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} + \frac{(\nu t)^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} \|w(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \\
&\stackrel{\text{Teorema 1.2.3}}{\leq} \frac{C_2^4}{2} \|w_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} (\nu t)^{-\frac{1}{2}} + \frac{(\nu t)^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} \|w_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}. \tag{1.37}
\end{aligned}$$

Como a desigualdade (1.37) vale para todo  $x$  em  $\mathbb{R}^2$ , então,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \left( \frac{C_2^4}{2} + \frac{1}{2\pi} \right) \|w_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} (\nu t)^{-\frac{1}{2}},$$

o que prova o ítem 1.

Além disso, dado  $1 < p < 2$ , seja  $p' = \frac{p}{p-1}$ . Tomando  $0 < \alpha < \frac{2}{p} - 1$ , temos:

$$\begin{aligned}
2\pi |u(x, t)| &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|w(y, t)|}{|x-y|} dy = \int_{|x-y| \leq (\nu t)^{\frac{1}{2}}} \frac{|w(y, t)|}{|x-y|} dy + \int_{|x-y| > (\nu t)^{\frac{1}{2}}} \frac{|w(y, t)|}{|x-y|} dy \\
&\leq \|w(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \int_{|x-y| \leq (\nu t)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{|x-y|} dy + \int_{|x-y| > (\nu t)^{\frac{1}{2}}} \frac{|w(y, t)|}{|x-y|} dy \\
&\leq \|w(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \int_{|x-y| \leq (\nu t)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{|x-y|} dy \\
&\quad + \left( \int_{|x-y| > (\nu t)^{\frac{1}{2}}} \frac{|w(y, t)|^p}{|x-y|^{\alpha p}} dy \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{|x-y| > (\nu t)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{|x-y|^{(1-\alpha)p'}} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq 2\pi \|w(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} (\nu t)^{\frac{1}{2}} + \|w(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} t^{-\alpha \frac{1}{2}} \left( 2\pi \int_{(\nu t)^{\frac{1}{2}}}^{\infty} r^{(\alpha-1)p'+1} dr \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\stackrel{\text{Teorema 1.2.3}}{\leq} C_2^4 \pi (\nu t)^{-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} \|w_0\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \\
&\quad + (2\pi)^{\frac{p-1}{p}} \left( \frac{t^{-\frac{1}{2}((1-\alpha)p'-2)}}{(1-\alpha)p'-2} \right)^{\frac{1}{p'}} (\nu t)^{-\alpha \frac{1}{2}} \|w_0\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}. \tag{1.38}
\end{aligned}$$

Tomando  $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$  obtemos o resultado.  $\square$

## 2 EQUAÇÕES DE ADVECÇÃO-DIFUSÃO EM $\mathbb{R}^N$

### 2.1 Introdução

Neste capítulo, adaptamos o método desenvolvido em [2], [3], vamos examinar o comportamento das soluções  $u(\cdot, t)$  da equação de advecção-difusão,

$$u_t + \operatorname{div}(b(x, t, u)u) = \operatorname{div}(A(x, t, u)\nabla(u)) + c(x, t, u)u, \quad (2.1)$$

para  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$ , com condições iniciais em  $L^p$ , para  $1 \leq p < \infty$ , i.e.,

$$u(\cdot, 0) = u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n), \quad (2.2)$$

onde  $\operatorname{div}$  é o divergente com respeito às variáveis espaciais  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , e  $A, b, c$  são funções suaves como descrito na introdução, página 5, com

$$\langle A(x, t, u)\xi, \xi \rangle \geq \mu(t)|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad (2.3)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^q \operatorname{div}(b(x, t, u(x)))dx \geq 0, \quad \forall q \geq 1 \quad (2.4)$$

e

$$c(x, t, u) \leq 0 \quad (2.5)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}$ , e alguma função  $\mu \in C^0([0, \infty[)$  positiva, onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto escalar usual em  $\mathbb{R}^n$  e  $|\cdot|$  é a norma Euclidiana. Vamos mostrar que a análise apresentada em [2], [3] pode ser aplicada neste caso, modificando apropriadamente alguns argumentos.

Na seção a seguir, derivamos algumas propriedades das soluções  $u(\cdot, t)$  do problema descrito acima. Em particular, vemos que  $\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$  decresce monotonicamente com  $t$ , quando  $u(\cdot, 0) \in L^p$  (Teorema 2.2.1), isto é,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot, t_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall t_0 \in [0, T],$$

para todo  $1 \leq p < \infty$ . Em seguida, obtemos a seguinte desigualdade de energia para as solução  $u(\cdot, t)$ , quando  $1 \leq p < \infty$  (Teorema 2.2.2):

$$\begin{aligned} & t^{1+\frac{n}{2}} \|u(\cdot, t)\|_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)}^{2p} + 2p(2p-1) \int_0^t \tau^{1+\frac{n}{2}} \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \tau)|^{2p-2} |\nabla(u(x, \tau))|^2 dx d\tau \\ & \leq C_n^{n+2} \left(1 + \frac{n}{2}\right)^{\left(1+\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{2p(2p-1)}{p^2}\right)^{-\frac{n}{2}} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{2p} \int_0^t \mu(\tau)^{-\frac{n}{2}} d\tau \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Para  $p = +\infty$ , pelo Teorema 2.2.3, temos que  $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Ademais, a  $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = O(t^{-\frac{n}{2}})$ . Por fim, obtemos a unicidade das soluções do problema em questão.

## 2.2 Estimativas para $\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ .

Nesta seção, derivamos estimativas para as soluções  $u(\cdot, t)$  do da equação de advecção-difusão (2.1), com as condições (2.2), (2.4), (2.3) e (2.5).

Vamos utilizar as funções sinais regularizadas definidas no capítulo anterior (seção 1.2).

**Teorema 2.2.1.** (*Princípio do máximo*) *Se  $u(\cdot, t) \in C^0([0, T], L^p(\mathbb{R}^n))$  é solução de (2.1) e (2.2), então*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.6)$$

**Prova:** Seja  $\Phi_\delta(\cdot) = L_\delta(\cdot)^p$ , para  $L_\delta(\cdot)$  definida em (1.12). Multiplicando a equação (2.1) por  $\Phi'_\delta(u)$  e integrando o resultado sobre  $\mathbb{R}^n \times [t_0, t]$ , para  $0 < t_0 < t$  dados, obtemos,

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u) u_\tau dx d\tau + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u) \operatorname{div}(b(x, \tau, u)u) dx d\tau = \\ & \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u) \operatorname{div}(A(x, \tau, u)\nabla(u)) dx d\tau + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u) c(x, \tau, u) u dx d\tau. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema do Divergente e observando que  $\Phi'_\delta(u)u_t = \frac{d}{dt}[\Phi_\delta(u)]$  temos,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\delta(u(x, t)) dx - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\delta(u(x, t_0)) dx + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u) \operatorname{div}(b(x, \tau, u)u) dx d\tau = \\ & - \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \phi''_\delta(u) \langle \nabla(u), (A(x, \tau, u) \nabla(u)) \rangle dx d\tau + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u) c(x, \tau, u) u dx d\tau. \end{aligned}$$

Segue, de (2.3) e (1.14), que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\delta(u(x, t)) dx & \leq - \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u) \operatorname{div}(b(x, \tau, u)u) dx d\tau + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\delta(u(x, t_0)) dx \\ & + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u) c(x, \tau, u) u dx d\tau. \end{aligned}$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u) \operatorname{div}(b(x, \tau, u)u) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u) u \operatorname{div}(b(x, \tau, u)) dx - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\delta(u) \operatorname{div}(b(x, \tau, u)) dx \quad (2.7)$$

fazendo  $\delta \rightarrow 0$  obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^p dx & \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t_0)|^p dx + p \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} c(x, \tau, u) |u|^p dx d\tau \\ & + (1-p) \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \tau)|^p \operatorname{div}(b(x, \tau, u)) dx d\tau. \end{aligned}$$

Assim, como de (2.4) e (2.5)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t_0)|^p dx \leq 0$$

e

$$(1-p) \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \tau)|^p \operatorname{div}(b(x, \tau, u)) dx d\tau \leq 0,$$

fazendo  $t_0 \rightarrow 0$ , obtemos

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

□

No resultado a seguir vamos fazer uso da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg

$$\|v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_n \|v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2}{n+2}} \|\nabla v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{n}{n+2}} \quad (2.8)$$



**Teorema 2.2.2.** *Se  $u(\cdot, t) \in C^0([0, T], L^p(\mathbb{R}^n))$ ,  $1 \leq p < \infty$ , é solução de (2.1) e (2.2), então*

$$\begin{aligned} & t^{1+\frac{n}{2}} \|u(\cdot, t)\|_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)}^{2p} + 2p(2p-1) \int_0^t \tau^{1+\frac{n}{2}} \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \tau)|^{2p-2} |\nabla(u(x, \tau))|^2 dx d\tau \\ & \leq C_n^{n+2} \left(1 + \frac{n}{2}\right)^{\left(1+\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{2p(2p-1)}{p^2}\right)^{-\frac{n}{2}} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{2p} \int_0^t \mu(\tau)^{-\frac{n}{2}} d\tau \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde  $C_n$  é a constante da Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (2.8).

**Prova:** Sejam  $t_0 \in (0, t]$  e  $\phi_\delta(v) = L_\delta(v)^{2p}$ , para  $L_\delta(\cdot)$  definida em (1.12). Multiplicando a equação (2.1) por  $(t - t_0)^{1+\frac{n}{2}} \phi'_\delta(u(x, t))$  e integrando o resultado sobre  $\mathbb{R}^n \times [t_0, t]$  obtemos

$$\begin{aligned} & (t - t_0)^{1+\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x, t))^{2p} dx + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} (\tau - t_0)^{1+\frac{n}{2}} \phi'_\delta(u(x, \tau)) \operatorname{div}(b(x, \tau, u)u) dx d\tau \\ & = \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} (\tau - t_0)^{1+\frac{n}{2}} \phi'_\delta(u(x, \tau)) \operatorname{div}(A(x, \tau, u) \nabla(u(x, \tau))) dx d\tau \\ & \quad + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} (\tau - t_0)^{1+\frac{n}{2}} \phi'_\delta(u(x, \tau)) c(x, \tau, u) u dx d\tau \\ & \quad + \int_{t_0}^t \left(1 + \frac{n}{2}\right) (\tau - t_0)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x, \tau))^{2p} dx. \end{aligned}$$

Do Teorema do Divergente e de (2.3) temos

$$\begin{aligned} & (t - t_0)^{1+\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x, t))^{2p} dx + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} (\tau - t_0)^{1+\frac{n}{2}} \phi'_\delta(u(x, \tau)) \operatorname{div}(b(x, \tau, u)u) dx d\tau \\ & \quad + \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{1+\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi''_\delta(u(x, \tau)) \mu(\tau) |\nabla u(x, \tau)|^2 dx d\tau \\ & \leq \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} (\tau - t_0)^{1+\frac{n}{2}} \phi'_\delta(u(x, \tau)) c(x, \tau, u) u dx d\tau \\ & \quad + \int_{t_0}^t \left(1 + \frac{n}{2}\right) (\tau - t_0)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x, \tau))^{2p} dx. \end{aligned}$$

Fazendo  $\delta \rightarrow 0$ , por (2.7) temos

$$(1 - p) \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \tau)|^p \operatorname{div}(b(x, \tau, u)) dx d\tau \leq 0,$$

Segue então, de (2.4),(2.5) e do fato de que

$$\phi'_\delta(u) \rightarrow 2p|u|^{2p-1} \quad \text{quando } \delta \rightarrow 0 \quad (2.10)$$

$$\phi''_\delta(u) \rightarrow 2p(2p-1)|u|^{2p-2} \quad \text{quando } \delta \rightarrow 0, \quad (2.11)$$

que

$$\begin{aligned} (t-t_0)^{1+\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^{2p} dx + \int_{t_0}^t (\tau-t_0)^{1+\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} 2p(2p-1)\mu(\tau)|u|^{2p-2}|\nabla u|^2 dx d\tau \\ \leq \int_{t_0}^t \left(1+\frac{n}{2}\right)(\tau-t_0)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\tau)|^{2p} dx d\tau. \end{aligned}$$

Fazendo  $t_0 \rightarrow 0$  obtemos

$$\begin{aligned} t^{1+\frac{n}{2}} \|u(x,t)\|_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)}^{2p} + 2p(2p-1) \int_0^t \tau^{1+\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mu(\tau)|u(x,\tau)|^{2p-2}|\nabla u(x,\tau)|^2 dx d\tau \\ \leq \int_0^t \left(1+\frac{n}{2}\right)(\tau)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\tau)|^{2p} dx d\tau. \end{aligned}$$

Considere

$$E_p(t) = t^{1+\frac{n}{2}} \|u(x,t)\|_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)}^{2p} + 2p(2p-1) \int_0^t \tau^{1+\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mu(\tau)|u|^{2p-2}|\nabla u|^2 dx d\tau$$

e defina  $w(\cdot, t)$  como

$$w(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & \text{se } p=1 \\ |u(x,t)|^p & \text{se } p>1. \end{cases}$$

Então

$$\begin{aligned} E_p(t) = t^{1+\frac{n}{2}} \|w(x,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \frac{2p(2p-1)}{p^2} \int_0^t \tau^{1+\frac{n}{2}} \mu(\tau) \|\nabla w(x,\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \\ \leq \left(1+\frac{n}{2}\right) \int_0^t \tau^{\frac{n}{2}} \|w(x,\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \end{aligned}$$

Da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (2.8). segue que

$$\|w(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_n \|\nabla w(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2p}{n+2}} \|\nabla w(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{n}{n+2}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} t^{1+\frac{n}{2}} \|w(x,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \frac{2p(2p-1)}{p^2} \int_0^t \tau^{1+\frac{n}{2}} \mu(\tau) \|\nabla w(x,\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \\ \leq \left(1+\frac{n}{2}\right) \int_0^t \tau^{\frac{n}{2}} C_n^2 \|u(\cdot, \tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{4p}{n+2}} \|\nabla w(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2n}{n+2}} d\tau. \end{aligned}$$

Do princípio do máximo (2.6) e da Desigualdade de Hölder ( $p = \frac{n+2}{n}$  e  $q = \frac{n+2}{2}$ ) obtemos

$$t^{1+\frac{n}{2}} \|w(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \frac{2p(2p-1)}{p^2} \int_0^t \tau^{1+\frac{n}{2}} \mu(\tau) \|\nabla w(x, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \leq \left(1 + \frac{n}{2}\right) C_n^2 \|u_0\|_{L^{\frac{4p}{n+2}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{4p}{n+2}} \left(\int_0^t \mu(\tau)^{-\frac{n}{2}} d\tau\right)^{\frac{2}{n+2}} \left(\int_0^t \tau^{1+\frac{n}{2}} \mu(\tau) \|\nabla w(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau\right)^{\frac{n}{n+2}}.$$

Então,

$$E_p(t) \leq \left(1 + \frac{n}{2}\right) C_n^2 \left(\frac{2p(2p-1)}{p^2}\right)^{-\frac{n}{n+2}} \|u_0\|_{L^{\frac{4p}{n+2}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{4p}{n+2}} \left(\int_0^t \mu(\tau)^{-\frac{n}{2}} d\tau\right)^{\frac{2}{n+2}} (E_p(t))^{\frac{n}{n+2}}.$$

Logo,

$$E_p(t) \leq \left(1 + \frac{n}{2}\right)^{\frac{n+2}{2}} C_n^{n+2} \left(\frac{2p(2p-1)}{p^2}\right)^{-\frac{n}{2}} \|u_0\|_{L^{\frac{4p}{n+2}}(\mathbb{R}^n)}^{2p} \int_0^t \mu(\tau)^{-\frac{n}{2}} d\tau.$$

Portanto,

$$t^{1+\frac{n}{2}} \|u(\cdot, t)\|_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)}^{2p} + 2p(2p-1) \int_0^t \tau^{1+\frac{n}{2}} \mu(\tau) |u(x, \tau)|^{2p-2} |\nabla(u(x, \tau))|^2 dx d\tau \leq C_n^{n+2} \left(1 + \frac{n}{2}\right)^{\left(1+\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{2p(2p-1)}{p^2}\right)^{-\frac{n}{2}} \|u_0\|_{L^{\frac{4p}{n+2}}(\mathbb{R}^n)}^{2p} \int_0^t \mu(\tau)^{-\frac{n}{2}} d\tau,$$

como queríamos demonstrar.  $\square$

**Teorema 2.2.3.** *Se  $u(\cdot, t) \in C^0([0, T], L^p(\mathbb{R}^n))$  é solução de (2.1) e (2.2), então*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \left[2C_n^{(n+2)}(n+2)^{\left(1+\frac{n}{2}\right)}\right]^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^t \mu(\tau)^{-\frac{n}{2}} d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} t^{-\frac{1}{p}\left(1+\frac{n}{2}\right)}. \quad (2.12)$$

**Prova:** Das desigualdades (2.6) , (2.9) e como  $\mu$  é uma função positiva, temos

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)}^{2p} \leq K(n) \left(1 - \frac{1}{2p}\right)^{-\frac{n}{2}} \|u(\cdot, s)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{2p} (t-s)^{-\left(1+\frac{n}{2}\right)} \int_0^t \mu(\tau)^{-\frac{n}{2}} d\tau \quad \forall s \leq t \leq T,$$

onde

$$K(n) = C_n^{(n+2)} \left(1 + \frac{n}{2}\right)^{\left(1+\frac{n}{2}\right)} 2^{-n}. \quad (2.13)$$

Tomando  $t_0 = \frac{t}{2^k}$ ,  $t_i = t_{i-1} + \frac{t}{2^i}$ , para  $1 \leq i \leq k$  e  $k \in \mathbb{N}$ , temos que  $t_k = t$  e

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^{2^i p}(\mathbb{R}^n)}^{2^i p} \leq K(n) \left(1 - \frac{1}{2^i p}\right)^{-\frac{n}{2}} \|u(\cdot, s)\|_{L^{2^{i-1} p}(\mathbb{R}^n)}^{2^i p} \left(\frac{t}{2^i}\right)^{-(1+\frac{n}{2})} \int_0^t \mu(\tau)^{-\frac{n}{2}} d\tau. \quad (2.14)$$

Aplicando a desigualdade (2.14) para  $i = k, k-1, k-2, \dots, 1$ , temos

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^{2^k p}(\mathbb{R}^n)} \leq \tilde{K}(n, p) \|u(\cdot, t_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \prod_{i=1}^k \left(\frac{t}{2^i}\right)^{-\left(1+\frac{n}{2}\right)\frac{1}{2^i p}} \prod_{i=1}^k \left(\int_0^t \mu(\tau)^{-\frac{n}{2}} d\tau\right)^{\frac{1}{2^i p}},$$

onde

$$\tilde{K}(n, p) = \prod_{i=1}^k [K(n)]^{\frac{1}{2^i p}} \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{2^i p}\right)^{-\frac{n}{2^{i+1} p}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \tilde{K}(n, p) &= [K(n)]^{\sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i p}} \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{2^i p}\right)^{-\frac{n}{2^{i+1} p}} \\ &\leq [K(n)]^{\frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)} 2^{\frac{n}{2^k}}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^k \left(\int_0^t \mu(\tau)^{-\frac{n}{2}} d\tau\right)^{\frac{1}{2^i p}} &= \left(\int_0^t \mu(\tau)^{-\frac{n}{2}} d\tau\right)^{\sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i p}} \\ &= \left(\int_0^t \mu(\tau)^{-\frac{n}{2}} d\tau\right)^{\frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

e

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^k \left(\frac{t}{2^i}\right)^{-\left(1+\frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{2^i p}\right)} &= t^{-\left(1+\frac{n}{2}\right)\sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i p}} 2^{\sum_{i=1}^k \frac{i}{2^i p}} \\ &= t^{-\left(1+\frac{n}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)} 2^{\frac{1}{p} \sum_{i=1}^k \frac{i}{2^i}} \\ &\leq t^{-\left(1+\frac{n}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)} 2^{\frac{2}{p}}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Então, de (2.15), (2.16) e (2.17), fazendo  $k \rightarrow \infty$ , obtemos

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \left[2C_n^{(n+2)}(n+2)^{\left(1+\frac{n}{2}\right)}\right]^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^t \mu(\tau)^{-\frac{n}{2}}\right)^{\frac{1}{p}} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} t^{-\frac{1}{p}\left(1+\frac{n}{2}\right)}.$$

□

**Teorema 2.2.4.** *Se  $u(\cdot, t), \tilde{u}(\cdot, t) \in C^0([0, T], L^p(\mathbb{R}^n))$ , são soluções de (2.1) correspondendo aos estados iniciais  $u_0, \tilde{u}_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$  respectivamente, com  $u_0 - \tilde{u}_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$  e  $c(x, t, u)$  satisfazendo (2.5) uma função lipschitz na terceira variável para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e para todo  $t \in [0, T]$  então,*

$$\|u(\cdot, t) - \tilde{u}(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C(T)\|u_0 - \tilde{u}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.18)$$

onde  $C(T)$  é uma constante que depende de  $T > 0$  dado e de  $\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \|\tilde{u}_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ .

**Prova:** Dado  $t \in (0, T)$ , seja  $v(\cdot, t) = u(\cdot, t) - \tilde{u}(\cdot, t)$ . Então  $v$  satisfaz:

$$\begin{aligned} v_t + \operatorname{div}(b(x, t, u)v) + \operatorname{div}([b(x, t, u) - b(x, t, \tilde{u})]\tilde{u}) &= \operatorname{div}(A(x, t, u)\nabla v) \\ + \operatorname{div}([A(x, t, u) - A(x, t, \tilde{u})]\nabla\tilde{u}) + c(x, t, u)v + [c(x, t, u) - c(x, t, \tilde{u})]\tilde{u} \end{aligned}$$

Multiplicando a equação acima por  $L'_\delta(v)$ , integrando o resultado sobre  $\mathbb{R}^n \times [t_0, t]$ , onde  $t_0 \in (0, t)$ , e observando que  $L'_\delta(v)v_t = \frac{d[L_\delta(v)]}{dt}$ , obtemos,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(v(\cdot, t))dx + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L'_\delta(v)\operatorname{div}([b(x, t, u) - b(x, t, \tilde{u})]\tilde{u})dx d\tau + \\ &\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L'_\delta(v)\operatorname{div}(b(x, \tau, u)v)dx d\tau = \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L'_\delta(v)\operatorname{div}(A(x, t, u)\nabla v)dx d\tau \\ &+ \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L'_\delta(v)c(x, \tau, u)vdx d\tau + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L'_\delta(v)[c(x, t, u) - c(x, t, \tilde{u})]\tilde{u}dx d\tau \\ &+ \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L'_\delta(v)\operatorname{div}([A(x, t, u) - A(x, t, \tilde{u})]\nabla\tilde{u})dx d\tau + \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(v(\cdot, t_0))dx \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Divergente temos

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(v(\cdot, t))dx - \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L''_\delta(v)\langle [b(x, t, u) - b(x, t, \tilde{u})]\tilde{u}, \nabla v \rangle dx d\tau - \\ &\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L''_\delta(v)\langle b(x, \tau, u)v, \nabla v \rangle dx d\tau = - \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L''_\delta(v)\langle A(x, t, u)\nabla v, \nabla v \rangle dx d\tau \\ &+ \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L'_\delta(v)c(x, \tau, u)vdx d\tau + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L'_\delta(v)[c(x, t, u) - c(x, t, \tilde{u})]\tilde{u}dx d\tau \\ &- \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L''_\delta(v)\langle [A(x, t, u) - A(x, t, \tilde{u})]\nabla\tilde{u}, \nabla v \rangle dx d\tau + \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(v(\cdot, t_0))dx \end{aligned}$$

Como  $L''_\delta(v) \geq 0$  e por (2.3)

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(v(\cdot, t)) dx + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L''_\delta(v) \langle [A(x, t, u) - A(x, t, \tilde{u})] \nabla \tilde{u}, \nabla v \rangle dx d\tau \leq \\ & \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(v(\cdot, t_0)) dx + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L''_\delta(v) \langle [b(x, t, u) - b(x, t, \tilde{u})] \tilde{u}, \nabla v \rangle dx d\tau + \\ & \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L'_\delta(v) c(x, \tau, u) v dx d\tau + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L'_\delta(v) [c(x, t, u) - c(x, t, \tilde{u})] \tilde{u} dx d\tau \\ & + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L''_\delta(v) \langle b(x, \tau, u) v, \nabla v \rangle dx d\tau \end{aligned}$$

Fazendo  $\delta \rightarrow 0$ ,  $L''_\delta(v) \rightarrow 0$  e então, pelo teorema da Convergência Dominada,

$$\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L''_\delta(v) \langle [A(x, t, u) - A(x, t, \tilde{u})] \nabla \tilde{u}, \nabla v \rangle dx d\tau \rightarrow 0,$$

$$\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L''_\delta(v) \langle [b(x, t, u) - b(x, t, \tilde{u})] \tilde{u}, \nabla \tilde{u} \rangle dx d\tau \rightarrow 0,$$

e

$$\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L''_\delta(v) \langle b(x, \tau, u) v, \nabla v \rangle dx d\tau \rightarrow 0$$

Assim, como  $L_\delta(v) \rightarrow |v|$  e  $L'_\delta(v) \rightarrow \text{sgn}(v)$  ao  $\delta \rightarrow 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} \|v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} & \leq \|v(\cdot, t_0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} c(x, \tau, u) |v(\cdot, \tau)| dx d\tau \\ & + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} [c(x, t, u) - c(x, t, \tilde{u})] \tilde{u} \text{sgn}(v) dx d\tau. \end{aligned}$$

Ainda, como  $c(x, t, u) \leq 0$ , temos

$$\|v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|v(\cdot, t_0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + C \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}(\cdot, t)| |v(\cdot, t)| dx d\tau.$$

Então,

$$\|v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|v(\cdot, t_0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + C \|\tilde{u}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |v(\cdot, \tau)| dx d\tau. \quad (2.19)$$

Pelo Lema de Gronwall obtemos

$$\|v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|v(\cdot, t_0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} e^{C(n, T) \|\tilde{u}(\cdot, t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} (t-t_0)}.$$

Portanto, fazendo  $t_0 \rightarrow 0$

$$\|v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} e^{C(n,T)\|\tilde{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}t},$$

de onde segue o resultado.  $\square$

Os resultados acima permitem estabelecer a unicidade das soluções consideradas.

**Teorema 2.2.5.** *Se  $u(\cdot, t), \tilde{u}(\cdot, t) \in C^0([0, T], L^p(\mathbb{R}^n))$  são soluções de (2.1) e (2.2), com  $u(\cdot, 0) = \tilde{u}(\cdot, 0)$  então  $u(\cdot, t) = \tilde{u}(\cdot, t), \forall t > 0$ .*

**Prova:** Se  $p = 1$  o resultado decorre imediatamente do Teorema 2.2.4, de modo que vamos supor  $p > 1$  no que segue. Dados  $t > 0$  e  $M > 0$ , considere

$$u_0^{[M]}(x) = \begin{cases} u_0(x) & \text{se } |u_0(x)| \leq M \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seja  $u^M$  solução da equação (2.1) com a condição inicial  $u_0^{[M]}$  dada acima. Como

$$\|u_0^M\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

pelo Teorema 2.2.3, existe uma constante  $K(t) > 0$  tal que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(t)$$

e

$$\|u^M(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(t)$$

Assim, para  $p > 1$ ,

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t) - u^{[M]}(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \|u(\cdot, t) - u^{[M]}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{1}{p}} \|u(\cdot, t) - u^{[M]}(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (2K(t))^{1-\frac{1}{p}} \|u(\cdot, t) - u^{[M]}(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Obtemos, pelo teorema anterior,

$$\|u(\cdot, t) - u^{[M]}(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq (2K(t))^{1-\frac{1}{p}} \left( C(T) \|u_0 - u_0^M\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

Observando que

$$\|u_0 - u_0^M\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |u_0 - u_0^M|^p |u_0 - u_0^M|^{1-p} \leq M^{1-p} \int_{\mathbb{R}^n} |u_0 - u_0^M|^p,$$

temos

$$\|u(\cdot, t) - u^{[M]}(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq (2K(t))M^{\frac{1-p}{p}}C(T)\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Então, dadas  $u(\cdot, t)$ ,  $\tilde{u}(\cdot, t)$  duas soluções de (2.1) com  $u(\cdot, 0) = \tilde{u}(\cdot, 0)$ , temos

$$\|u(\cdot, t) - \tilde{u}(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \widehat{K}(t, p)M^{\frac{1-p}{p}}C(T)\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

$$\forall M > 0, \quad \forall p > 1.$$

Fazendo  $M \rightarrow \infty$ , como  $\widehat{K}(t, p)$  não depende de  $M$ , obtemos

$$\|u(\cdot, t) - \tilde{u}(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0, \quad \forall 1 < p < \infty,$$

o que conclui o argumento. □



### 3 EQUAÇÕES DE ADVECÇÃO-DIFUSÃO MAIS GERAIS

#### 3.1 Introdução

Neste capítulo, estendemos as idéias discutidas no capítulo 2, voltando a examinar em maior generalidade o problema

$$u_t + \operatorname{div}(b(x, t, u)u) = \operatorname{div}(A(x, t, u)\nabla u) + c(x, t, u)u, \quad 0 < t < T, \quad (3.1)$$

para  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$  e com condições iniciais em  $L^p$  para  $1 \leq p < \infty$ , i.e.,

$$u(\cdot, 0) = u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad (3.2)$$

onde  $A, b, c$  são funções suaves, como descrito na introdução (página 5), porém, estamos supondo apenas que

$$|b(x, t, u)| \leq B(T) \quad (3.3)$$

e

$$|c(x, t, u)| \leq C(T), \quad (3.4)$$

com

$$\langle A(x, t, u)\xi, \xi \rangle \geq \mu|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad (3.5)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $t \in [0, T]$  e  $\mu$  uma constante positiva, onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto escalar usual em  $\mathbb{R}^n$ ,  $|\cdot|$  é a norma Euclidiana,  $B(T)$  e  $C(T)$  são constantes dadas.

Na seção 3.2, estudamos algumas propriedades de  $u(\cdot, t)$  solução do problema descrito por (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) e (3.5). Em particular, pelo Teorema 3.2.1, temos que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K(T)\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad 0 < t < T$$

onde  $K(T)$  é uma constante que depende de  $p, T, \mu$ . No Teorema 3.2.2 obtemos uma desigualdade de energia para as soluções  $u(\cdot, t)$  quando  $1 \leq p < \infty$ . Por fim, no Teorema 3.2.3, obtemos a seguinte desigualdade para a norma do sup:

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(T)t^{-\frac{n}{2p}}, \quad 0 < t < T$$

onde  $K(T)$  é uma constante que depende de  $n, p, \mu, T$ .

Na Seção 3.3, como consequência das desigualdades obtidas na seção 3.2, provamos a unicidade das soluções  $u(\cdot, t)$  em  $L^p(\mathbb{R}^n)$  para  $1 \leq p < \infty$ .

### 3.2 Estimativas para $\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ .

Nesta seção, vamos obter estimativas para as soluções  $u(\cdot, t)$  do problema (3.1), (3.2).

**Teorema 3.2.1.** *Se  $u(\cdot, t) \in C^0([0, T], L^p(\mathbb{R}^n))$  é solução de (3.1) e (3.2), então*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K(T)\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.6)$$

onde  $K(T) = e^{\left(\frac{B^2(T)}{2\mu}(p-1) + C(T)\right)t}$ .

**Prova:** Seja  $\Phi_\delta(\cdot) = L_\delta^p(\cdot)$ , onde  $L_\delta(\cdot)$  é definida em (1.12). Multiplicando a equação (3.1) por  $\Phi'_\delta(u)$  e integrando o resultado sobre  $\mathbb{R}^n \times [t_0, t]$ , para  $0 < t_0 < t$  dados, obtemos,

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u) u_\tau dx d\tau + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u) \operatorname{div}(b(x, \tau, u)u) dx d\tau = \\ & \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u) \operatorname{div}(A(x, \tau, u)\nabla(u)) dx d\tau + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u) c(x, \tau, u)u dx d\tau. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema do Divergente e observando que  $\Phi'_\delta(u) = \frac{d}{dt}[L_\delta(u)^p]$  temos,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x, t))^p dx + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \phi''_\delta(u) \langle A(x, \tau, u)\nabla u, \nabla u \rangle dx d\tau = \\ & \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x, t_0))^p dx + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \phi''_\delta(u) \langle b(x, \tau, u)u, \nabla u \rangle dx d\tau \\ & \quad + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u) c(x, \tau, u)u dx d\tau. \end{aligned}$$

Segue de (3.3), (3.4), (3.5) e da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x, t))^p dx - \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x, t_0))^p dx &\leq B(T) \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta''(u) |u| |\nabla u| dx d\tau \\ &+ C(T) \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\delta'(u) u dx d\tau - \mu \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta''(u) |\nabla u|^2 dx d\tau. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy,

$$|u| |\nabla u| \leq \frac{1}{2\mu} |u|^2 + \frac{\mu}{2} |\nabla u|^2. \quad (3.7)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x, t))^p dx - \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x, t_0))^p dx &\leq \frac{B^2(T)}{2\mu} \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta''(u) |u|^2 dx d\tau + \\ C(T) \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\delta'(u) u dx d\tau - \frac{\mu}{2} \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta''(u) |\nabla u|^2 &\leq \frac{B^2(T)}{2\mu} \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta''(u) |u|^2 dx d\tau \\ &+ C(T) \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta'(u) u dx d\tau. \end{aligned}$$

Então, fazendo  $\delta \rightarrow 0$ ,

$$\|u(x, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq \|u(x, t_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p + \left( p(p-1) \frac{B^2(T)}{2\mu} + C(T)p \right) \int_{t_0}^t \|u(x, \tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p d\tau.$$

Assim, pelo Lema de Gronwall, obtemos

$$\|u(x, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq \|u(x, t_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p e^{(p(p-1) \frac{B^2(T)}{2\mu} + C(T)p)(t-t_0)} \quad (3.8)$$

Fazendo  $t_0 \rightarrow 0$ , obtemos (3.6).  $\square$

O resultado acima é usado na derivação da seguinte estimativa fundamental.

**Teorema 3.2.2.** *Se  $u(\cdot, t) \in C^0([0, T], L^p(\mathbb{R}^n))$  é solução de (3.1) e (3.2), então*

$$\begin{aligned} t^{n+1} \|u(\cdot, t)\|_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)}^{2p} + \frac{\mu p(2p-1)}{p^2} \int_0^t \tau^{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2p-2} |\nabla u|^2 dx d\tau &\leq \\ (C_n F(t))^{\frac{n+2}{2}} \left( \frac{\mu p(2p-1)}{p^2} \right)^{-\frac{n}{2}} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{2p} e^{\frac{n+2}{2} K_2(\mu, T, p) t}, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde

$$F(t) = K_1(\mu, T, p) \left( \frac{t^{n+2}}{n+2} \right)^{\frac{2}{n+2}} + (n+1) \left( 2 \frac{t^{\frac{n+2}{2}}}{n+2} \right)^{\frac{2}{n+2}},$$

$$K_1 = K_1(\mu, T, p) = \left( \frac{B^2(T)p(2p-1)}{\mu} + 2pC(T) \right)$$

e

$$K_2 = K_2(\mu, T, p) = \left( \frac{B^2(T)(p-1)}{2\mu} + C(T) \right).$$

**Prova:** Sejam  $t_0 \in (0, t)$  e  $\Phi_\delta(\cdot) = L_\delta^{2p}(\cdot)$ , com  $L_\delta(\cdot)$  como em (1.12). Multiplicando a equação (3.1) por  $(t - t_0)^{n+1}\Phi'_\delta(u)$  e integrando o resultado sobre  $\mathbb{R}^n \times [t_0, t]$ , obtemos,

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} (\tau - t_0)^{n+1} \Phi'_\delta(u) u_\tau dx d\tau + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} (\tau - t_0)^{n+1} \Phi'_\delta(u) \operatorname{div}(b(x, \tau, u)u) dx d\tau \\ &= \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} (\tau - t_0)^{n+1} \Phi'_\delta(u) \operatorname{div}(A(x, \tau, u)\nabla(u)) dx d\tau \\ &+ \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} (\tau - t_0)^{n+1} \Phi'_\delta(u) c(x, \tau, u) u dx d\tau. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema do Divergente e observando que

$$\frac{d}{dt} [(t - t_0)^{n+1} \Phi_\delta(u)] = (t - t_0)^{n+1} \Phi'_\delta(u) u_t + (n+1)(t - t_0)^n \Phi_\delta(u),$$

temos

$$\begin{aligned} & (t - t_0)^{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x, t))^{2p} dx - \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} (\tau - t_0)^{n+1} \phi''_\delta(u) \langle b(x, \tau, u)u, \nabla u \rangle dx d\tau \\ &= \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} (\tau - t_0)^{n+1} \Phi'_\delta(u) c(x, \tau, u) u dx d\tau + (n+1) \int_{t_0}^t (t - t_0)^n \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x, \tau))^{2p} dx d\tau \\ &\quad - \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} (\tau - t_0)^{n+1} \phi''_\delta(u) \langle A(x, \tau, u)\nabla u, \nabla u \rangle dx d\tau. \end{aligned}$$

Segue de (3.3), (3.4), (3.5), (3.7) e da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned} & (t - t_0)^{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x, t))^{2p} dx + \mu \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} \phi''_\delta(u) |\nabla u|^2 dx d\tau \leq \\ & (n+1) \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^n \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x, \tau))^{2p} dx d\tau + \frac{\mu}{2} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi''_\delta(u) |\nabla u|^2 dx d\tau \\ &+ \frac{B(T)^2}{2\mu} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi''_\delta(u) |u|^2 dx d\tau + C(T) \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u) u dx d\tau. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} & (t - t_0)^{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x, t))^{2p} dx + \frac{\mu}{2} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta''(u) |\nabla u|^2 dx d\tau \leq \\ & (n + 1) \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^n \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x, \tau))^{2p} dx d\tau + C(T) \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\delta'(u) u dx d\tau \\ & + \frac{B(T)^2}{2\mu} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\delta''(u) |u|^2 dx d\tau. \end{aligned}$$

Fazendo  $\delta \rightarrow 0$  e  $t_0 \rightarrow 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} & t^{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{2p} dx + \mu p(2p - 1) \int_0^t \tau^{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2p-2} |\nabla u|^2 dx d\tau \\ & \leq (n + 1) \int_0^t \tau^n \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \tau)|^{2p} dx d\tau + 2pC(T) \int_0^t \tau^{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \tau)|^{2p} dx d\tau \\ & \quad + \frac{B(T)^2 p(2p - 1)}{\mu} \int_0^t \tau^{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \tau)|^{2p} dx d\tau. \end{aligned}$$

Considere  $w(\cdot, t)$  da seguinte forma:

$$w(x, t) = \begin{cases} u(x, t) & \text{se } p = 1 \\ |u(x, t)|^p & \text{se } p > 1 \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & t^{n+1} \|w(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \frac{\mu p(2p - 1)}{p^2} \int_0^t \tau^{n+1} \|\nabla w(x, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \leq \\ & K_1 \int_0^t \tau^{n+1} \|w(x, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau + (n + 1) \int_0^t \tau^n \|w(x, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau, \end{aligned}$$

onde

$$K_1 = K_1(\mu, T, p) = \left( \frac{B^2(T) p(2p - 1)}{\mu} + 2pC(T) \right). \quad (3.10)$$

Pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (2.8) temos

$$\begin{aligned} & t^{n+1} \|w(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \frac{\mu p(2p - 1)}{p^2} \int_0^t \tau^{n+1} \|\nabla w(x, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \\ & \leq K_1 C_n \int_0^t \tau^{n+1} \|w(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{4}{n+2}} \|\nabla w(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2n}{n+2}} d\tau \\ & + (n + 1) C_n \int_0^t \tau^n \|w(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{4}{n+2}} \|\nabla w(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2n}{n+2}} d\tau. \end{aligned}$$

Pela desigualdade (3.6)

$$\begin{aligned} & t^{n+1} \|w(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \frac{\mu p(2p-1)}{p^2} \int_0^t \tau^{n+1} \|\nabla w(x, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \\ & \leq K_1 C_n \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{4p}{n+2}} e^{K_2} \int_0^t \tau^{n+1} \|\nabla w(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2n}{n+2}} d\tau \\ & \quad + (n+1) C_n \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{4p}{n+2}} e^{K_2(\mu, T, p)} \int_0^t \tau^n \|\nabla w(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2n}{n+2}} d\tau, \end{aligned}$$

onde

$$K_2 = K_2(\mu, T, p) = \left( \frac{B^2(T)p(p-1)}{2\mu} + C(T)p \right). \quad (3.11)$$

Aplicando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned} & t^{n+1} \|w(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \frac{\mu p(2p-1)}{p^2} \int_0^t \tau^{n+1} \|\nabla w(x, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \\ & \leq K_1 C_n \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{4p}{n+2}} \left( \frac{t^{n+2}}{n+2} \right)^{\frac{2}{n+2}} e^{K_2(\mu, T, p)} \left( \int_0^t \tau^{n+1} \|\nabla w(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2n}{n+2}} d\tau \right)^{\frac{n}{n+2}} \\ & \quad + (n+1) C_n \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{4p}{n+2}} \left( 2 \frac{t^{\frac{n+2}{2}}}{n+2} \right)^{\frac{2}{n+2}} e^{K_2(\mu, T, p)} \left( \int_0^t \tau^{n+1} \|\nabla w(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2n}{n+2}} d\tau \right)^{\frac{n}{n+2}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} & t^{n+1} \|w(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \frac{\mu p(2p-1)}{p^2} \int_0^t \tau^{n+1} \|\nabla w(x, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \leq \\ & \left[ K_1 \left( \frac{t^{n+2}}{n+2} \right)^{\frac{2}{n+2}} + (n+1) \left( 2 \frac{t^{\frac{n+2}{2}}}{n+2} \right)^{\frac{2}{n+2}} \right] C_n \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{4p}{n+2}} e^{K_2(\mu, T, p)} \cdot \\ & \cdot K_3^{-\frac{n}{n+2}} \left( t^{n+1} \|w(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + K_3 \int_0^t \tau^{n+1} \|\nabla w(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2n}{n+2}} d\tau \right)^{\frac{n}{n+2}}, \end{aligned}$$

onde

$$K_3 = K_3(\mu, p) = \frac{\mu p(2p-1)}{p^2}. \quad (3.12)$$

Assim,

$$\left( t^{n+1} \|w(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + K_3 \int_0^t \tau^{n+1} \|\nabla w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \right)^{\frac{2}{n+2}} \leq C_n K_3^{-\frac{n}{n+2}} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{4p}{n+2}} F(t) e^{K_2 t},$$

para

$$F(t) = K_1 \left( \frac{t^{n+2}}{n+2} \right)^{\frac{2}{n+2}} + (n+1) \left( 2 \frac{t^{\frac{n+2}{2}}}{n+2} \right)^{\frac{2}{n+2}}. \quad (3.13)$$

Então,

$$t^{n+1} \|w(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \frac{\mu p(2p-1)}{p^2} \int_0^t \tau^{n+1} \|\nabla w(x, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \leq \\ (C_n F(t))^{\frac{n+2}{2}} \left( \frac{\mu p(2p-1)}{p^2} \right)^{-\frac{n}{2}} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{2p} e^{\frac{n+2}{2} K_2(\mu, T, p)t},$$

onde  $K_2$  e  $F(t)$  são definidas por (3.11) e (3.13) respectivamente. Portanto,

$$t^{n+1} \|u(\cdot, t)\|_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)}^{2p} + \frac{\mu p(2p-1)}{p^2} \int_0^t \tau^{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2p-2} |\nabla u|^2 dx d\tau \leq \\ (C_n F(t))^{\frac{n+2}{2}} \left( \frac{\mu p(2p-1)}{p^2} \right)^{-\frac{n}{2}} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{2p} e^{\frac{n+2}{2} K_2(\mu, T, p)t}, \quad \forall t \in [0, T].$$

como queríamos demonstrar.  $\square$

Como em [3], este resultado permite estimar  $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$

**Teorema 3.2.3.** *Se  $u(\cdot, t) \in C^0([0, T], L^p(\mathbb{R}^n))$  é solução de (3.1) e (3.2), então*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq (3\mu t)^{-\frac{n}{2p}} \left( c_n p^2 2^{16} (K_4 T + n + 1) \right)^{\frac{n+2}{2p}} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} e^{\frac{n+2}{2} 3p K_4 t} \\ \forall t \in [0, T], \quad (3.14)$$

onde

$$K_4 = \left( \frac{B^2(T)}{\mu} + C(T) \right)$$

**Prova:** Pelas desigualdades (3.8) e (3.9),  $u(\cdot, t)$  satisfaz

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)}^{2p} \leq C_n^{\frac{n+2}{2}} K_3^{-\frac{n}{2}} \|u(\cdot, s)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{2p} t^{-(n+1)} F(t)^{\frac{n+2}{2}} e^{\frac{n+2}{2} K_2(t-s)}, \\ \forall 0 \leq s < t < T,$$

onde  $K_3$  e  $F(t)$  estão definidas em (3.12) e (3.13) respectivamente. Como,

$$t^{-(n+1)} F(t)^{\frac{n+2}{2}} = t^{-(n+1)} \left[ K_1 \left( \frac{t^{n+2}}{n+2} \right)^{\frac{2}{n+2}} + (n+1) \left( 2 \frac{t^{\frac{n+2}{2}}}{n+2} \right)^{\frac{2}{n+2}} \right]^{\frac{n+2}{2}} \\ = t^{-\frac{n}{2}} \left[ K_1 \left( \frac{1}{n+2} \right)^{\frac{2}{n+2}} t + (n+1) \left( \frac{2}{n+2} \right)^{\frac{2}{n+2}} \right]^{\frac{n+2}{2}} \\ \leq (t-s)^{-\frac{n}{2}} \left[ K_1 \left( \frac{1}{n+2} \right)^{\frac{2}{n+2}} T + (n+1) \left( \frac{2}{n+2} \right)^{\frac{2}{n+2}} \right]^{\frac{n+2}{2}} \quad (3.15)$$

$$K_1 = \frac{B^2(T)}{\mu} p(2p-1) + C(T)2p \leq (2p)^2 \left( \frac{B^2(T)}{\mu} + C(T) \right), \quad \forall p > 1 \quad (3.16)$$

e

$$K_2 = \frac{B^2(T)p(p-1)}{2\mu} + C(T)p \leq p^2 \left( \frac{B^2(T)}{\mu} + C(T) \right), \quad \forall p > 1 \quad (3.17)$$

temos

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)} \leq (t-s)^{-\frac{n}{4p}} \Gamma^{\frac{1}{2p}} \|u(\cdot, s)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} e^{\left(\frac{n+2}{2}\right)p^2 \left(\frac{B^2(T)}{\mu} + C(T)\right) \frac{(t-s)}{2p}},$$

$\forall 0 \leq s < t < T$ , onde

$$\Gamma = \frac{2}{n+2} (2p)^{n+2} \left[ C_n \left( \left( \frac{B^2(T)}{\mu} + C(T) \right) T + (n+1) \right) \right]^{\frac{n+2}{2}} \left( \frac{\mu p(2p-1)}{p^2} \right)^{-\frac{n}{2}}.$$

Então, tomando  $t_0 = 3\frac{t}{4^k}$ ,  $t_i = t_{i-1} + 3\frac{t}{4^i}$ ,  $1 \leq i \leq k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , temos que

$t_k = t$  e

$$\|u(\cdot, t_i)\|_{L^{2^i p}(\mathbb{R}^n)} \leq \left( \frac{3t}{2^{2i}} \right)^{-\frac{n}{2^{i+1}p}} \Gamma_i^{\frac{1}{2^i p}} \|u(\cdot, t_{i-1})\|_{L^{2^{i-1}p}(\mathbb{R}^n)} e^{\left(\frac{n+2}{2}\right)p \left(\frac{B^2(T)}{\mu} + C(T)\right) \frac{3t}{2^i}},$$

$\forall 0 \leq i \leq k$

(3.18)

onde,

$$\Gamma_i = \frac{2}{n+2} (2^i p)^{n+2} \left[ C_n \left( \left( \frac{B^2(T)}{\mu} + C(T) \right) T + (n+1) \right) \right]^{\frac{n+2}{2}} \left( 2\mu \left( 1 - \frac{1}{2^i p} \right) \right)^{-\frac{n}{2}}.$$

Aplicando a desigualdade (3.18) para  $i = k, k-1, k-2, \dots, 1$ , obtemos

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^{2^k p}(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^k \left( \frac{3t}{2^{2i}} \right)^{-\frac{n}{2^{i+1}p}} \prod_{i=1}^k \Gamma_i^{\frac{1}{2^i p}} \|u(\cdot, t_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} e^{\sum_{i=1}^k \left(\frac{n+2}{2}\right)p K_4 \frac{3t}{2^i}}$$

$\forall 0 \leq i \leq k$

onde

$$k_4 = \left( \frac{B^2(T)}{\mu} + C(T) \right). \quad (3.19)$$

Então, ao  $k \rightarrow \infty$ ,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq (3\mu t)^{-\frac{n}{2p}} \left( C_n p^2 2^{16} (K_4 T + n + 1) \right)^{\frac{n+2}{2p}} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} e^{\frac{n+2}{2} 3p K_4 t}$$



□

Analogamente ao Teorema 2.2.4 do Capítulo 2, obtemos

**Teorema 3.2.4.** *Se  $u(\cdot, t), \tilde{u}(\cdot, t) \in C^0([0, T], L^p(\mathbb{R}^n))$  são soluções de (3.1) correspondendo aos estados iniciais  $u_0, \tilde{u}_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$  respectivamente, com  $u_0 - \tilde{u}_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$  e  $c(x, t, u)$  satisfazendo (2.5) uma função lipschitz na terceira variável para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e para todo  $t \in [0, T]$  então,*

$$\|u(\cdot, t) - \tilde{u}(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C(T) \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.20)$$

onde  $C(T)$  é uma constante que depende de  $T > 0$  dado e de  $\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \|\tilde{u}_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ .

### 3.3 Unicidade de soluções

Vamos descrever o procedimento utilizado no Capítulo 2 para estabelecer a unicidade de soluções em maior generalidade.

**Teorema 3.3.1.** *Suponhamos que uma dada equação diferencial*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) = P[u(\cdot, t)], \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T, \quad (3.21)$$

com condição inicial

$$u(\cdot, 0) = u_0 \in L^p(\Omega), \quad (3.22)$$

possua solução  $u(\cdot, t) \in C^0([0, T], L^p(\Omega))$ , sendo  $u_0 \in L^p(\Omega)$  para qualquer  $1 \leq p < \infty$ . Se tivermos

1.

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\Omega)} \leq K_p(T, \|u_0\|_{L^p(\Omega)}) \quad \forall 0 < t \leq T \quad (3.23)$$

2.

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\Omega)} \leq K_q(T, \|u_0\|_{L^p(\Omega)}) \quad \forall 0 < t \leq T, \quad (3.24)$$

para algum  $q > p$ , finito ou não.

3. sendo  $u(\cdot, t), v(\cdot, t) \in C^0([0, T], L^r(\Omega))$  soluções de (3.21), onde  $1 \leq r < p$ , com

$$\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^r(\Omega)} \leq K_r(T, \|u_0\|_{L^r(\Omega)}, \|v_0\|_{L^r(\Omega)}) \|u(\cdot, 0) - v(\cdot, 0)\|_{L^r(\Omega)}^\alpha \quad (3.25)$$

para  $\alpha > 0$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,

então, a solução  $u(\cdot, t) \in C^0([0, T], L^p(\Omega))$  do problema (3.21), (3.22) é única.

**Prova:** Dados  $t > 0$  e  $M > 0$ , considere

$$u_0^{[M]}(x) = \begin{cases} u_0(x), & \text{se } |u_0(x)| \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seja  $u^{[M]}$  solução de (3.21), com condição inicial  $u_0^{[M]}$ . Assim, para  $p > 1$ , dados  $r$  e  $q$  tais que  $r < p < q$ , por interpolação, (3.23) e (3.24), temos

$$\|u(\cdot, t) - u^{[M]}(\cdot, t)\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u(\cdot, t) - u^{[M]}(\cdot, t)\|_{L^r(\Omega)}^{\frac{\theta r}{p}} \|u(\cdot, t) - u^{[M]}(\cdot, t)\|_{L^q(\Omega)}^{\frac{(1-\theta)q}{p}},$$

para  $0 < \theta < 1$  tal que  $p = \theta r + (1 - \theta)q$ . Por (3.25) obtemos

$$\|u(\cdot, t) - u^{[M]}(\cdot, t)\|_{L^p(\Omega)} \leq K_{r,q,\theta}(T, \|u_0\|_{L^p(\Omega)}) \|u(\cdot, t) - u^{[M]}(\cdot, t)\|_{L^r(\Omega)}^{\frac{\alpha\theta r}{p}},$$

para algum  $\alpha > 0$ . Segue da definição de  $u_0^{[M]}$  que

$$\|u(\cdot, t) - u^{[M]}(\cdot, t)\|_{L^p(\Omega)} \leq C(T, \|u_0\|_{L^p(\Omega)}) M^{(1-\frac{p}{r})}, \quad \forall M > 0.$$

Portanto, fazendo  $M \rightarrow \infty$ , como  $C$  não depende de  $M$ , obtemos

$$\|u(\cdot, t) - u^M(\cdot, t)\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0,$$

de onde segue o resultado. □

Como corolário do Teorema 3.3.1 obtemos o seguinte resultado, em vista de (3.6) e (3.9) ou (3.14).

**Teorema 3.3.2.** *Se  $u(\cdot, t), \tilde{u}(\cdot, t) \in C^0([0, T], L^p(\mathbb{R}^n))$  são soluções de (3.1), com  $u(\cdot, 0) = \tilde{u}(\cdot, 0)$  então  $u(\cdot, t) = \tilde{u}(\cdot, t), \forall 0 < t \leq T$ .*

## 4 EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES INCOMPRESSÍVEIS EM 2-D E 3-D

### 4.1 Introdução

Neste capítulo vamos obter alguns resultados para  $u(\cdot, t)$  solução das equações de Navier-Stokes

$$\begin{cases} u_t + u \cdot \nabla u + \nabla p = \nu \Delta u & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ \operatorname{div}(u) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

em dimensão  $n = 2, 3$ , com a condição inicial

$$u(\cdot, 0) = u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n), \quad (4.2)$$

sendo  $\operatorname{div}(u_0) = 0$ . Para examinar  $u(\cdot, t)$  vamos fazer uso de estimativas obtidas em [22], [23], desenvolvendo resultados que estendem ou fortalecem a discussão em [22], [23]. Em [22], [23], os resultados de Wiegner [36] sobre o comportamento de  $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$  ao  $t \rightarrow \infty$ , são reobtidos a partir de argumentos mais simples (parte dos quais considerados na seção 4.2 a seguir). Estes resultados estabelecem que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(t^{-\gamma}),$$

para  $0 < \gamma \leq \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$  se acontecer

$$\|e^{\nu \Delta t} u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(t^{-\gamma}),$$

onde  $\tilde{u}(\cdot, t) = e^{\nu \Delta t} u_0$  denota a solução da equação do calor

$$\tilde{u}_t = \nu \Delta \tilde{u} \quad (4.3)$$

associada ao estado inicial  $u(\cdot, 0) = u_0$ .

Na seção 4.4, mostraremos que, nas hipóteses acima,

$$t^\gamma \|u(\cdot, t) - e^{\nu \Delta t} u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty$$

para qualquer solução de (4.1), (4.2), fornecendo assim, uma nova prova para este resultado, conjecturado por Leray [26], [27] e estabelecido originalmente por Kato [20].

Finalmente, na seção 4.5, consideramos o problema de "blow-up" em  $3 - D$ , mostrando que, supondo ocorrer "blow-up" em tempo finito  $t_* > 0$ , tem-se

$$t_* < 0.159 \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^4 \nu^{-5}. \quad (4.4)$$

Segue da análise em [3], [33] que  $t_*$  pode ser estimado superiormente nesta forma,

$$t_* < K \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^4 \nu^{-5}$$

e na seção 4.5 obtemos um valor razoável para  $K$  dada em (4.4) acima.

## 4.2 Estimativas Preliminares

Seguindo , [3], [23], observamos que a solução  $u(\cdot, t)$  do problema (4.1), (4.2) pode ser escrita como

$$u(t) = e^{\nu\Delta t} u_0 + \int_0^t e^{\nu\Delta(t-s)} Q(s) ds, \quad (4.5)$$

onde  $e^{\nu\Delta t}$  é o operador solução da equação do calor e  $Q = -\nabla p - u \cdot \nabla u$ . Além disso, vamos utilizar a transformada de fourier aqui definida por

$$\widehat{v}(\kappa) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\kappa \cdot x} v(x) dx, \quad \kappa \in \mathbb{R}^n \quad (4.6)$$

para  $v \in L^1(\mathbb{R}^n)$  qualquer.

**Teorema 4.2.1.** *A transformada de Fourier  $\widehat{Q}$  do termo  $Q = -\nabla(p) - u \cdot \nabla(u)$  satisfaz*

$$|\widehat{Q}(\kappa, t)| \leq \frac{2\sqrt{n}}{(2\pi)^{n/2}} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad (4.7)$$

$$|\widehat{Q}(\kappa, t)| \leq \frac{2n|\kappa|}{(2\pi)^{n/2}} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2, \quad \forall \kappa \in \mathbb{R}^n. \quad (4.8)$$

**Teorema 4.2.2.** *Sejam  $\widehat{u}_0, |\kappa|^{-1}\widehat{u}_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Então, a solução  $e^{\nu\Delta t}u_0$  da equação do calor satisfaz*

$$\|e^{\nu\Delta t}u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c_1(\nu t)^{-\frac{n}{4}}\|\widehat{u}_0\|_\infty \quad (4.9)$$

e

$$\|e^{\nu\Delta t}u_0\| \leq c_2(\nu t)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}\|\widehat{w}_0\|_\infty, \quad \text{se } \widehat{w}_0(\kappa) = |\kappa|^{-1}\widehat{u}_0(\kappa). \quad (4.10)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes adequadas (que não dependem de  $u$ ).

**Teorema 4.2.3.** *Para o integrando da equação (4.5), os Teoremas 4.2.1 e 4.2.2 implicam em*

$$\begin{aligned} \|e^{\nu\Delta(t-s)}Q(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\leq c_1\nu^{-\frac{n}{4}}(t-s)^{-\frac{n}{4}}\|\widehat{Q}(s)\|_\infty \\ &\leq \frac{2c_1\sqrt{n}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\nu^{-\frac{n}{4}}(t-s)^{-\frac{n}{4}}\|u(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|Du(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \end{aligned} \quad (4.11)$$

e

$$\begin{aligned} \|e^{\nu\Delta(t-s)}Q(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\leq c_2\nu^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}(t-s)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}\||\kappa|^{-1}\widehat{Q}(s)\|_\infty \\ &\leq \frac{2c_2n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\nu^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}(t-s)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}\|u(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2. \end{aligned} \quad (4.12)$$

A prova dos resultados acima pode ser encontrada em [23].

A seguir, apresentamos algumas estimativas conhecidas envolvendo  $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$  e  $\|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ .

**Teorema 4.2.4.** *Seja  $u(\cdot, t)$  solução de (4.1) e (4.2). Então,*

$$\frac{d}{dt}\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2\nu\|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = 0, \quad t \geq 0 \quad (4.13)$$

**Prova:** Como  $u(\cdot, t)$  é solução de (4.1), então, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \nu\Delta u_i \quad (4.14)$$

Assim, multiplicando a equação (4.15) por  $2u_i(\cdot, t)$  e aplicando a integração por partes em  $\mathbb{R}^n$  temos

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} u_i(\cdot, t)^2 dx + \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} u_j \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i^2) dx - 2 \int_{\mathbb{R}^n} p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dx = -2\nu \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx$$

Mas, como  $\operatorname{div}(u(\cdot, t)) = 0$ ,

$$\sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} u_j \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i^2) dx = \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i^2) dx = 0.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} u_i(\cdot, t)^2 dx - 2 \int_{\mathbb{R}^n} p(\cdot, t) \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dx = -2\nu \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx$$

Somando em  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  e usando novamente o fato que  $\operatorname{div}(u(\cdot, t)) = 0$ , temos

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} u(\cdot, t)^2 dx = -2\nu \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx.$$

□

**Teorema 4.2.5.** *Seja  $u(\cdot, t)$  solução de (4.1) e (4.2). Então,  $\forall t > 0$ ,*

$$\frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} - 2\nu \|D^2u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.$$

**Prova:** Considere a equação

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \nu \Delta u_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.15)$$

Derivando (4.15) em relação a  $x_\ell$ , multiplicando por  $2\frac{\partial u_i}{\partial x_\ell}$ , somando em  $i, \ell = 1, 2, 3$ , integrando em  $\mathbb{R}^3$ , obtemos:

$$\begin{aligned} & \sum_{i,\ell=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\ell \partial t} dx + 2 \sum_{i,j,\ell=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left( u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx \\ & + 2 \sum_{i,\ell=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial^2 p}{\partial x_\ell \partial x_i} dx = 2\nu \sum_{i,j,\ell=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_\ell \partial x_j^2} dx. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Mas,

$$\begin{aligned} \sum_{i,\ell=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\ell \partial t} dx &= \sum_{i,\ell=1}^3 \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} \right)^2 dx \\ &= \frac{d}{dt} \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Observe ainda que, como  $\operatorname{div}(u(\cdot, t)) = 0$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,\ell=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left( u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx &= - \sum_{i,j,\ell=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\ell \partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} u_j dx \\ &\quad - \sum_{i,j,\ell=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\ell \partial x_j} u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_\ell} dx \\ &= - \sum_{i,j,\ell=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\ell \partial x_j} u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_\ell} dx. \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\sum_{i,\ell=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_\ell} dx = \sum_{i,\ell=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial^2 p}{\partial x_\ell^2} dx = 0. \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,\ell=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_\ell \partial x_j^2} dx &= - \sum_{i,j,\ell=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_\ell} \right)^2 dx \\ &= - \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Então, de (4.16)-(4.20) segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \|D^2u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &= 2 \sum_{i,j,\ell=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\ell \partial x_j} u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_\ell} dx \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^3} \left( \sum_{i,j,\ell=1}^3 \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\ell \partial x_j} \right)^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i,j,\ell=1}^3 u_i^2 \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_\ell} \right)^2 \right)^{1/2} dx \\ &\leq 2 \|D^2u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \left( \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 \sum_{j,\ell=1}^3 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} \right)^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq 2 \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D^2u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

□



**Observação:**

Para  $n = 2$ , pode-se mostrar que a solução de (4.1) satisfaz na verdade

$$\frac{d}{dt} \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = -2\nu \|D^2u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \quad (4.21)$$

Deste resultado segue, em particular, a não ocorrência de "blow-up" no caso  $2 - D$  [22], [23], [24].

**Teorema 4.2.6.** *Considere  $u(\cdot, t) \in H^1(\mathbb{R}^3)$ . Então,  $u(\cdot, t)$  satisfaz*

$$\|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \sqrt{3} \|D^2u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \quad (4.22)$$

**Prova:** A demonstração segue por integração por partes. □

**4.3 Decaimento de  $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$** 

**Teorema 4.3.1.** (Kato, 1984).

Dada  $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$  de divergente nulo, a solução  $u(\cdot, t)$  de (4.1), (4.2) satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0. \quad (4.23)$$

**Prova:** De (4.5) e (4.11), temos

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq w(t) + K \int_0^t (t-s)^{-n/4} \|u(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|Du(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds, \quad (4.24)$$

onde  $w(t) = \|e^{\nu\Delta t}u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$  e  $K > 0$  é uma constante dependendo de  $n, \nu$ , e onde  $\|Du(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(1+s)^{-1/2}$  [22], [23]. Considerando o caso  $n = 3$  primeiro e lembrando que  $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$  é decrescente, obtemos então

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq w(t) + C \int_0^t (t-s)^{-3/4} (1+s)^{-1/2} ds, \quad (4.25)$$

onde  $C > 0$  constante depende de  $\nu, u_0$ . Assim,  $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = w(t) + O(t^{-1/4})$ , e o resultado segue do fato de se ter  $w(t) \rightarrow 0$  ao  $t \rightarrow \infty$ .

Quando  $n = 2$ , podemos proceder do seguinte modo: dado  $t_0 > 0$  qualquer, temos, por (4.4) e (4.10),

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq w(t) + C \int_{t_0}^t (t-s)^{-1/2} \|Du(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} ds$$

para todo  $t > t_0$ , sendo  $w(t) = \|e^{\nu\Delta(t-t_0)}u(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$  e  $C$  constante dependendo de  $\nu, u_0$ , mas independente de  $t_0$ . Como

$$\int_{t_0}^t (t-s)^{-1/2} \|Du(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} ds \leq 4 \sup_{t > t_0} \{ (1+t)^{1/2} \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \}$$

para todo  $t > t_0$ , visto que

$$\int_{t_0}^t (t-s)^{-1/2} (1+s)^{-1/2} ds \leq 4$$

para todo  $t > t_0 > 0$ , resulta que, dado  $\varepsilon > 0$  arbitrário, obtemos

$$\int_{t_0}^t (t-s)^{-1/2} \|Du(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} ds \leq \varepsilon$$

para todo  $t > t_0$  se escolhermos  $t_0 > 0$  suficientemente grande, temos de ter  $t^{1/2} \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \rightarrow 0$  ao  $t \rightarrow \infty$  [22], [23]. Em particular, lembrando novamente que  $w(t) \rightarrow 0$  ao  $t \rightarrow \infty$ , obtemos  $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \varepsilon$  para todo  $t$  suficientemente grande, e a demonstração está completa.  $\square$

#### 4.4 N-S e Equação do Calor

**Teorema 4.4.1.** *Seja  $u(\cdot, t)$  solução de (4.1) e (4.2), então, valendo (4.5), tem-se*

$$t^\gamma \|u(\cdot, t) - e^{\nu\Delta t}u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 \quad \text{ao} \quad t \rightarrow +\infty, \quad (4.26)$$

se  $0 \leq \gamma < \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$ .

**Prova:** O caso  $\gamma = 0$  foi obtido na seção anterior. Considerando  $\gamma > 0$ , por (4.5), temos

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot, t) - e^{\nu\Delta t}u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \|e^{\nu\Delta t}u_0 + \int_0^t e^{\nu\Delta(t-s)}Q(s)ds - e^{\nu\Delta t}u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= \left\| \int_0^t e^{\nu\Delta(t-s)}Q(s)ds \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \int_0^t \|e^{\nu\Delta(t-s)}Q(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds \\
&= \int_0^{\frac{t}{2}} \|e^{\nu\Delta(t-s)}Q(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds + \int_{\frac{t}{2}}^t \|e^{\nu\Delta(t-s)}Q(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds
\end{aligned}$$

Do Teorema 4.2.3 segue que

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot, t) - e^{\nu\Delta t}u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\leq K_2 \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 ds \\
&\quad + K_1 \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{-\frac{n}{4}} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds \\
&\leq K_2 \left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} (1+s)^{-2\gamma} ds \\
&\quad + K_1 \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{-\frac{n}{4}} (1+s)^{-\gamma} (1+s)^{-\gamma-\frac{1}{2}} ds \\
&\leq K_2 \left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{1-2\gamma} \left(1+\frac{t}{2}\right)^{1-2\gamma} - \frac{1}{1-2\gamma} \right] \\
&\quad + K_1 \left(1+\frac{t}{2}\right)^{-2\gamma-\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(1-\frac{n}{4}\right)} \left(\frac{t}{2}\right)^{1-\frac{n}{4}} \tag{4.27}
\end{aligned}$$

Se  $\gamma \in \left(\frac{1}{2}, \frac{n}{4} + \frac{1}{2}\right)$ , por (4.27)

$$\|u(\cdot, t) - e^{\nu\Delta t}u_0\|_{L^2\mathbb{R}^n} \leq \frac{K_2}{2\gamma-1} \left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}} + K_1 \left(1+\frac{t}{2}\right)^{-2\gamma-\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(1-\frac{n}{4}\right)} \left(\frac{t}{2}\right)^{1-\frac{n}{4}} \tag{4.28}$$

Se  $\gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ , por (4.27)

$$\|u(\cdot, t) - e^{\nu\Delta t}u_0\|_{L^2\mathbb{R}^n} \leq K_2 \frac{\left(1+\frac{t}{2}\right)^{1-2\gamma}}{2\gamma-1} \left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}} + \frac{K_1}{\left(1-\frac{n}{4}\right)} \left(1+\frac{t}{2}\right)^{-2\gamma-\frac{1}{2}} \left(\frac{t}{2}\right)^{1-\frac{n}{4}} \tag{4.29}$$

Se  $\gamma = \frac{1}{2}$  e  $n = 2$  então

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot, t) - e^{\nu\Delta t}u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\leq \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \left((1+s)^{-\frac{1}{2}}\right)^2 ds \\
&\quad + \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} (1+s)^{-\frac{1}{2}} (1+s)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} ds \\
&\leq \left(\frac{t}{2}\right)^{-1} \int_0^{\frac{t}{2}} (1+s)^{-1} ds \\
&\quad + \left(1 + \frac{t}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} ds \\
&= \left(\frac{t}{2}\right)^{-1} \int_0^{\frac{t}{2}} (1+s)^{-1} (1+s)^{\frac{1}{4}} (1+s)^{-\frac{1}{4}} ds \\
&\quad + 2 \left(1 + \frac{t}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{t}{2}\right)^{-1} \left(\int_0^{\frac{t}{2}} (1+s)^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\frac{t}{2}} (1+s)^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} ds \\
&\quad + 2 \left(1 + \frac{t}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{t}{2}\right)^{-1} \left(2 \left(1 + \frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - 2\right)^{\frac{1}{2}} \left(2 - 2 \left(1 + \frac{t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + 2 \left(1 + \frac{t}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\|u(\cdot, t) - e^{\nu\Delta t}u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 2 \left(\frac{t}{2}\right)^{-1} \left(1 + \frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{4}} + 2 \left(1 + \frac{t}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.30}$$

Se  $\gamma = \frac{1}{2}$  e  $n = 3$  então

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot, t) - e^{\nu\Delta t}u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\leq \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} (1+s)^{-\frac{1}{2}} (1+s)^{-1} ds \\
&= \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{-\frac{3}{4}} (1+s)^{-\frac{3}{2}} ds \\
&\quad + \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} (1+s)^{-\frac{3}{2}} ds \\
&\leq 2 \left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{3}{4}} + 4 \left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \left(1 + \frac{t}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Portanto, de (4.29), (4.30) e (4.31),

$$t^\gamma \|u(\cdot, t) - e^{\nu\Delta t} u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 \text{ ao } t \rightarrow +\infty,$$

o que finaliza a demonstração.  $\square$

## 4.5 Blow-up de soluções (n=3)

No teorema abaixo determinamos uma constante  $K$  razoavelmente pequena para a desigualdade de Nirenberg-Gagliardo

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq K \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D^2 u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}}.$$

A prova deste resultado melhorou significativamente o argumento utilizado em [34] capítulo 13.

**Teorema 4.5.1.** *Considere  $u(\cdot, t) \in H^1(\mathbb{R}^3)$ . Então,  $u(\cdot, t)$  satisfaz*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq K \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D^2 u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}}, \quad K = 0.654 \quad (4.32)$$

**Prova:** Dados  $x \in \mathbb{R}^3$  e  $g \in C^2([0, 1])$  tal que  $g(0) = 1$ ,  $g(1) = 0$  e  $g'(1) = 0$ , temos

$$u(x) = - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r} [g(r)u(x + rw)] dr$$

Integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^1 r \frac{\partial^2}{\partial r^2} [g(r)u(x + rw)] dr \\ &= \int_0^1 r [g''(r)u(x + rw)] + 2g'(r) \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x_j}(x + rw)] w_j \\ &\quad + g(r) \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(x + rw)] w_i w_j] dr \end{aligned}$$

Assim, por Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \left( \int_0^1 |g''(r)|^2 dr \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^1 r^2 |u(x+rw)|^2 dr \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + 2 \left( \int_0^1 |g'(r)|^2 dr \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^1 r^2 |Du(x+rw)|^2 dr \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left( \int_0^1 |g(r)|^2 dr \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^1 r^2 |D^2u(x+rw)|^2 dr \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Integrando em  $|w| = 1$  temos

$$|u(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left( C(g) \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2B(g) \|Du\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + A(g) \|D^2u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right), \quad (4.33)$$

onde

$$A(g) = \|g\|_{L^2([0,1])} \quad (4.34)$$

$$B(g) = \|g'\|_{L^2([0,1])} \quad (4.35)$$

$$C(g) = \|g''\|_{L^2([0,1])} \quad (4.36)$$

Segue do Teorema 4.2.6 que

$$\begin{aligned} \sqrt{4\pi} \|u(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} &\leq C(g) \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2B3^{\frac{1}{4}}(g) \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2}} \|D^2u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + A(g) \|D^2u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Aplicando a desigualdade (4.37) para  $v(x) = u(\lambda x)$  obtemos

$$\begin{aligned} \sqrt{4\pi} \|u(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} &\leq C(g) \lambda^{-\frac{3}{2}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2B(g) 3^{\frac{1}{4}} \lambda^{-\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D^2u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + A(g) \lambda^{\frac{1}{2}} \|D^2u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Assim, dado  $t > 0$ , seja  $\lambda > 0$  dado por

$$\lambda = t^{-\frac{2}{3}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D^2u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{-\frac{1}{2}} \quad (4.39)$$

Então, segue de (4.38) e (4.39) que

$$\sqrt{4\pi}\|u(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq (C(g)t + 2B(g)3^{\frac{1}{4}}t^{\frac{1}{3}} + A(g)t^{-\frac{1}{3}})\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}}\|D^2u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}} \quad (4.40)$$

Tomando

$$t = \left( \frac{-3^{\frac{1}{4}}B(g) + \sqrt{3^{\frac{1}{2}}B(g)^2 + 3A(g)C(g)}}{3C(g)} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (4.41)$$

obtemos

$$\|u(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{4}{3} \widehat{K}(g, g', g'') \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D^2u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}}, \quad (4.42)$$

onde

$$\widehat{K}(g, g', g'') = \frac{1}{\sqrt{3C(g)}} \frac{3A(g)C(g) - 3^{\frac{1}{2}}B(g)^2 + 3^{\frac{1}{4}}B(g)\sqrt{3^{\frac{1}{2}}B(g)^2 + 3A(g)C(g)}}{(-3^{\frac{1}{4}}B(g) + \sqrt{3^{\frac{1}{2}}B(g)^2 + 3A(g)C(g)})^{\frac{1}{2}}} \quad (4.43)$$

Tomando

$$g(r) = (1-r)^\alpha(1+\rho r), \quad (4.44)$$

para  $\alpha, \rho \in \mathbb{R}$ , temos

$$A(g)^2 = \frac{1}{2\alpha+1} \left( 1 + \frac{\rho}{\alpha+1} \left( 1 + \frac{\rho}{2\alpha+3} \right) \right) \quad (4.45)$$

$$B(g)^2 = \frac{1}{\alpha(2\alpha-1)} \left( \frac{\rho^2(1+\alpha)^2}{2\alpha+1} + (\rho-\alpha)(\rho^2+\alpha) \right) \quad (4.46)$$

$$C(g)^2 = \frac{\alpha^2}{(\alpha-1)(2\alpha-3)} \left[ \frac{\rho^2(1+\alpha)^2}{2\alpha-1} + (\alpha-2\rho-1) \left( (\alpha-\rho)(\alpha-2)\rho+1 \right) \right] \quad (4.47)$$

Então, escolhendo  $\alpha = 1.501$  e  $\rho = -1.05$ , obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{4}{3} \widehat{K}(g, g', g'') = 0.654, \quad (4.48)$$

o que finaliza a demonstração do Teorema 4.5.1.  $\square$

**Teorema 4.5.2.** *Considere  $u(\cdot, t)$  solução de (4.1) e (4.2). Se*

$$\|u(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|Du(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{\nu^2}{3^{\frac{1}{4}} K^2},$$

para algum  $t_0$ , onde  $K$  é a constante em (4.32), então

$$\frac{d}{dt} \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq 0 \quad \forall \quad t > t_0.$$

**Prova:** Seguindo [22], [23] temos, pelos Teoremas 4.2.5 e 4.2.6,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\leq 2\sqrt{3} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D^2u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{7}{4}} \\ &\quad - 2\nu \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 4.5.1,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\leq \\ 2\|D^2u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &\left( \sqrt{3} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D^2u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{-\frac{1}{4}} - \nu \right). \end{aligned}$$

Assim, se

$$\|u(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|Du(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{\nu^2}{3^{\frac{1}{4}} K^2},$$

para algum  $t_0 > 0$ , então

$$\frac{d}{dt} \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq 0,$$

para  $t > t_*$ , o que finaliza a prova do teorema.  $\square$

No teorema a seguir, obtemos uma limitação para o tempo de "blow-up" de  $u(\cdot, t)$ .



**Teorema 4.5.3.** *Seja  $u(\cdot, t)$  solução de (4.1) e (4.2). Se existe "blow-up" em  $u(\cdot, t)$  num instante  $t_* > 0$ , então*

$$t_* < 0.159 \frac{1}{\nu^5} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^4$$

**Prova:** Integrando (4.13) em  $[0, T]$ , obtemos

$$\|u(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_0^T \|Du(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2. \quad (4.49)$$

Mas, pelo Teorema do Valor Médio, existe  $t_m \in [0, T]$  tal que

$$\|Du(\cdot, t_m)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \frac{1}{2\nu T} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2, \quad (4.50)$$

e então,

$$\|u(\cdot, t_m)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|Du(\cdot, t_m)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \frac{1}{2\nu T} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^4. \quad (4.51)$$

Logo, se

$$T \leq \frac{(0.654)^4 \sqrt{3}}{2\nu^5} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^4, \quad (4.52)$$

então

$$\|u(\cdot, t_m)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|Du(\cdot, t_m)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{\nu^2}{3^{\frac{1}{4}} (0,654)^2},$$

Portanto, tomando  $t_0 = t_m$ , para  $T$  dado por (4.52), do Teorema 4.5.2 segue o resultado.  $\square$

## 5 APÊNDICE 1

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados sobre integrais fracionárias, com o objetivo de provar o Teorema 1.3.1.

O resultado 1.3.1, segundo Nicolas Du Pressis [29], segue da generalização do teorema devido a G. H. Hardy e J.E. Littlewood [17], como descrito a seguir.

### 5.1 Resultados Preliminares

Vamos descrever aqui algumas desigualdades que serão necessárias na próxima seção e que foram adaptadas de [19].

**Teorema 5.1.1.** *Se  $r > 1$ ,  $s > 1$ ,  $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \geq 1$  e  $u_j$  e  $v_j$  são positivas, então*

$$\sum u_j v_j \leq \left( \sum u_j^r \right)^{\frac{1}{r}} \left( \sum v_j^s \right)^{\frac{1}{s}}$$

**Prova:** Dados  $r > 1$  e  $s > 1$ , se  $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ , obtemos a desigualdade devido a Hölder, [19]. Se  $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \rho > 1$ , considere  $p = \rho r$  e  $q = \rho s$ . Assim,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  e então,

$$\sum u_j v_j \leq \left( \sum u_j^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum v_j^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Como  $p > r$  e  $q > s$ , pela Desigualdade de Jensen [1],

$$\left( \sum u_j^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum v_j^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left( \sum u_j^r \right)^{\frac{1}{r}} \left( \sum v_j^s \right)^{\frac{1}{s}}$$

Portanto,

$$\sum u_j v_j \leq \left( \sum u_j^r \right)^{\frac{1}{r}} \left( \sum v_j^s \right)^{\frac{1}{s}}$$

□

**Teorema 5.1.2.** *Se  $a_j$  e  $b_j$  são positivas, monótonas, uma crescente e outra decrescente, então*

$$N \sum_{j=1}^N a_j b_j \leq \sum_{j=1}^N a_j \sum_{j=1}^N b_j$$

**Prova:** De fato,

$$\begin{aligned} N \sum_{j=1}^N a_j b_j - \left( \sum_{j=1}^N a_j \right) \left( \sum_{j=1}^N b_j \right) &= \sum_{i,j=1}^N a_j b_j - \sum_{i,j=1}^N a_i b_j \sum_{i,j=1}^N (a_i b_i - a_j b_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (a_j b_j + a_i b_i - a_i b_j - a_j b_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (a_j - a_i) (b_j - b_i) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

□

**Teorema 5.1.3.** *Se  $p > 1$ ,  $a_n$  é positiva e  $A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , então*

$$\sum_{n=1}^N \left( \frac{A_n}{n} \right)^p \leq \left( \frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n=1}^N a_n^p$$

**Prova:** Defina  $\alpha_n$  por

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{A_n}{n} & \text{se } n > 0 \\ 0 & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{A_n}{n}\right)^p - \frac{p}{p-1} \left(\frac{A_n}{n}\right)^{p-1} a_n &= \alpha_n^p - \frac{p}{p-1} \alpha_n^{p-1} a_n \\
&= \alpha_n^p - \frac{p}{p-1} \alpha_n^{p-1} (n\alpha_n - (n-1)\alpha_{n-1}) \\
&= \alpha_n^p \left(1 - \frac{np}{p-1}\right) + \frac{p(n-1)}{p-1} \alpha_n^{p-1} \alpha_{n-1} \\
&\leq \alpha_n^p \left(1 - \frac{np}{p-1} + n-1\right) + \frac{n-1}{p-1} \alpha_{n-1}^p \\
&= \frac{1}{p-1} (-n\alpha_n^p + (n-1)\alpha_{n-1}^p) \quad \forall n \geq 1,
\end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^N \left(\frac{A_n}{n}\right)^p - \frac{p}{p-1} \sum_{n=1}^N \left(\frac{A_n}{n}\right)^{p-1} a_n &= -\frac{1}{p-1} \sum_{n=1}^N (n\alpha_n^p - (n-1)\alpha_{n-1}^p) \\
&= -\frac{N}{p-1} \alpha_N^p \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^N \left(\frac{A_n}{n}\right)^p &\leq \frac{p}{p-1} \sum_{n=1}^N \left(\frac{A_n}{n}\right)^{p-1} a_n \\
&\leq \frac{p}{p-1} \left(\sum_{n=1}^N \left(\frac{A_n}{n}\right)^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{n=1}^N a_n^p\right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left(\sum_{j=1}^N \left(\frac{A_j}{j}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1} \left(\sum_{n=1}^N a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

como queríamos mostrar. □

**Teorema 5.1.4.** *Suponha que*

$$S = \sum_{m,n=-N}^N c_{m-n} a_m b_n,$$

onde  $c_v = c_{-v}$ ,  $c_0 \geq c_1 \geq c_3 \geq \dots$ ,  $a_i > 0$  e  $b_i > 0 \quad \forall i$ . Então, entre todas as ordenações para as quais  $S$  assume seu valor máximo, existe uma na qual  $a_m - a_{m'} \geq 0$ ,  $b_n - b_{n'} \geq 0$  sempre que  $|m| < |m'|$ ,  $|n| < |n'|$

**Prova:** Para a demonstração veja [19]

## 5.2 Demonstração do Teorema 1.3.1

**Teorema 5.2.1.** Se  $a_m \geq 0$ ,  $b_m \geq 0$ ,  $r > 1$ ,  $s > 1$ ,  $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} > 1$  e as séries  $\sum a_m^r$ ,  $\sum b_n^r$  convergem, então

$$T = \sum_{m \neq n} \frac{a_m b_n}{|m - n|^\lambda} \leq K A^{\frac{1}{r}} B^{\frac{1}{s}}, \quad (5.1)$$

onde  $\lambda = 2 - \frac{1}{r} - \frac{1}{s}$ , e  $K$  é uma função de  $r$  e  $s$  apenas.

**Prova:** A prova a seguir é adaptada de [17]. Para provarmos o teorema basta mostrar a desigualdade (5.1) para  $T_N = \sum_{m,n=-N; m \neq n} \frac{a_m b_n}{|m-n|^\lambda}$ . Considerando  $c_0 = 1$  e  $c_\xi = |\xi|^{-\lambda}$  temos que  $T_N \leq \sum_{m,n=-N} c_{m-n} a_m b_n$ , com  $c_\xi = c_{-\xi}$  e  $c_0 \geq c_1 \geq c_2 \geq \dots$ , como nas hipóteses do Teorema 5.1.4. Observe que em qualquer ordenação de  $a'_m s$  e  $b'_n s$ ,  $S$  não excede a soma de 4 somas do tipo  $\bar{S} = \sum_{m,n=0}^N c_{m-n} a_m b_n$ , com  $a_m$  e  $b_n$  funções decrescentes. Além disso, cada soma  $\bar{S}$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$\bar{S} = S_0 + S_1 + S_2$$

onde  $S_0 = \sum a_m b_m$ ,  $S_1 = \sum_{m > n} \frac{a_m b_n}{|m-n|^\lambda}$  e  $S_2 = \sum_{m < n} \frac{a_m b_n}{|m-n|^\lambda}$ . Assim, é suficiente mostrar que  $S_0$  e  $S_1$  satisfazem (5.1). Para isto vamos utilizar as desigualdades dos teoremas (5.1.1), (5.1.2) e (5.1.3). Assim, pelo Teorema 5.1.1, a soma  $S_0$  satisfaz (5.1). Além disso, temos:  $S_1 = \sum_{m=2}^N a_m \sum_{n=1}^{m-1} \frac{b_n}{(m-n)^\lambda}$ . Como  $(m-n)^{-\lambda}$  cresce com  $n$  e  $b_n$  decresce, escrevendo  $B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n$ , segue do Teorema 5.1.2 que  $\sum_{n=1}^{m-1} \frac{b_n}{(m-n)^\lambda} \leq \frac{B_{m-1}}{m-1} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{(m-n)^\lambda} \leq \frac{B_{m-1}}{(1-\lambda)(m-1)^\lambda}$ . Então  $S_1 \leq \sum_{m=2}^N a_m \frac{B_{m-1}}{(1-\lambda)(m-1)^\lambda}$ . Aplicando o Teorema 5.1.1 com  $r' = \frac{r}{r-1} > s$  no lugar

de  $s$  obtemos  $S_1 \leq \frac{1}{1-\lambda} \sum_{m=2}^N a_m \frac{B_{m-1}}{(m-1)^\lambda} = \frac{1}{1-\lambda} \sum_{m=1}^{N-1} a_{m+1} \frac{B_m}{m^\lambda} \leq \frac{A^{\frac{1}{r}}}{1-\lambda} \left( \sum_{m=1}^N \frac{B_m^{r'}}{m^{\lambda r'}} \right)^{\frac{1}{r'}}$ . Mas, aplicando o Teorema 5.1.1 para  $s$  e  $s'$ ,  $B_m^s \leq m^{s-1} B$  e então  $m^{-\lambda r'} B_m^{r'} \leq m^{-\lambda r'} B_m^s (m^{s-1} B)^{\frac{r'-s}{s}} = B^{\frac{r'-s}{s}} \left( \frac{B_m}{m} \right)^s$ , se  $-\lambda r' + \frac{(r'-s)(s-1)}{s} = -s$ . Assim, pelo Teorema 5.1.3,  $S_1 \leq \frac{A^{\frac{1}{r}}}{1-\lambda} B^{\frac{r'-s}{s}} \left( \sum_{m=1}^N \left( \frac{B_m}{m} \right)^s \right)^{\frac{1}{r'}}$   $\leq \frac{A^{\frac{1}{r}}}{1-\lambda} B^{\frac{1}{s} - \frac{1}{r'}} \left( \frac{s}{s-1} \right)^{\frac{s}{r'}}$   $B^{\frac{1}{r'}} = K A^{\frac{1}{r}} B^{\frac{1}{s}}$ .  $\square$

**Teorema 5.2.2.** *Se  $f \in L^r(0, \infty)$ ,  $g \in L^s(0, \infty)$ ,  $f \geq 0$ ,  $g \geq 0$ ,  $r > 1$ ,  $s > 1$ ,  $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} > 1$ , e  $F = \int_0^\infty f^r(x) dx$ ,  $G = \int_0^\infty g^s(x) dx$ , então*

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{|x-y|^\lambda} dx dy \leq F^{\frac{1}{r}} G^{\frac{1}{s}} \quad (5.2)$$

**Prova:** Suponhamos que  $f(x)$  e  $g(x)$  sejam zero para  $x > \xi$  ou  $y > \xi$  e contínuas em  $(0, \xi)$ . Denotamos o quadrado  $0 \leq x \leq \xi$ ,  $0 \leq y \leq \xi$  por  $D$  e a parte de  $D$  na qual  $|x-y| \geq \epsilon > 0$  por  $D(\epsilon)$ . Logo, basta mostrar que

$$J(\epsilon) = \iint_{D(\epsilon)} \frac{f(x)g(y)}{|x-y|^\lambda} dx dy \leq F^{\frac{1}{r}} G^{\frac{1}{s}} \quad \forall \epsilon. \quad (5.3)$$

Considerando  $x_m = \frac{m\xi}{v}$  e  $y_n = \frac{n\xi}{v}$ , onde  $0 \leq m \leq v$  e  $0 \leq n \leq v$ . Dividindo  $D$  pelas linhas  $x_m$  e  $y_n$ , definimos  $D_{m,n}$  o quadrado correspondendo a  $m-1, m, n-1, n$  e chamamos de  $D_{m,n}(\epsilon)$  qualquer quadrado  $D_{m,n}$  que tenha alguma ponto em comun com  $D(\epsilon)$ . Assim,

$$J(\epsilon) = \lim_{v \rightarrow \infty} \sum \iint_{D_{m,n}(\epsilon)} \frac{f(x)g(y)}{|x-y|^\lambda} dx dy. \quad (5.4)$$

Suponda ainda que  $v$  é grande o suficiente de modo que  $|m-n| \geq 2$  e  $|x-y| \geq |m-n| \frac{\xi}{2v}$  em todo o ponto de  $D_{m,n}(\epsilon)$ . Além disso, em  $D_{m,n}(\epsilon)$

$$f(x)g(y) \leq f(x_m)g(y_n) + \eta_v,$$

onde  $\eta_v$  tende uniformemente a zero quando  $v \rightarrow \infty$ . Assim, temos que

$$J(\epsilon) \leq \overline{\lim} \left( \frac{2v}{\xi} \right)^\lambda \sum \iint_{D_{m,n}(\epsilon)} \frac{f(x_m)g(y_n) + \eta_v}{|m-n|^\lambda} dx dy.$$

Mas, pelo Teorema 5.2.1,

$$\begin{aligned} \overline{\lim} \left( \frac{2v}{\xi} \right)^\lambda \sum_{m,n} \iint_{D_{m,n}(\epsilon)} \frac{\eta_v}{|m-n|^\lambda} dx dy &= 2^\lambda \xi^{2-\lambda} \overline{\lim} \left( \eta_v v^{2-\lambda} \sum_{m \neq n} \frac{1}{|m-n|^\lambda} \right) \\ &\leq K \xi^{2-\lambda} \overline{\lim} \eta_v = 0. \end{aligned}$$

Então, novamente pelo Teorema 5.2.1, obtemos

$$\begin{aligned} J(\epsilon) &\leq 2^\lambda \overline{\lim} \left( \frac{\xi}{v} \right)^{2-\lambda} \sum_{m \neq n} \frac{f(x_m)g(y_n)}{|x-y|^\lambda} \\ &\leq K \overline{\lim} \left( \frac{\xi}{v} \right)^{2-\lambda} \left( \sum_1^v f^r(x_m) \right)^{\frac{1}{r}} \left( \sum_1^v g^s(y_n) \right)^{\frac{1}{s}} \\ &= K \overline{\lim} \left( \frac{\xi}{v} \sum_1^v f^r(x_m) \right)^{\frac{1}{r}} \left( \frac{\xi}{v} \sum_1^v g^s(y_n) \right)^{\frac{1}{s}} \\ &= KF^{\frac{1}{r}} G^{\frac{1}{s}}, \end{aligned}$$

o que prova (5.3).

Se  $f(x)$  e  $g(x)$  são quaisquer funções em  $L^r(0, \xi)$  e  $L^s(0, \xi)$  respectivamente, tal que  $f(x) = 0$  e  $g(y) = 0$  para  $x \in [\xi, \infty)$ , o resultado (5.3) segue por aproximação. Portanto, fazendo  $\xi \rightarrow \infty$ , obtemos (5.2).  $\square$

**Teorema 5.2.3.** *Se  $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ ,  $g \in L^s(\mathbb{R}^n)$ ,  $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} > 1$ ,  $r > 1$ ,  $s > 1$  e  $\mu = 2 - \frac{1}{r} - \frac{1}{s}$  então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)g(y)}{|x-y|^{-n\mu}} dx dy \leq K \|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^s(\mathbb{R}^n)} \quad (5.5)$$

**Prova:** Vamos mostrar o caso  $n=3$ . Como a média aritmética é maior que a correspondente média geométrica temos

$$\begin{aligned} |x-y|^2 &= (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 \\ &\geq 3|x_1 - y_1|^{\frac{2}{3}}|x_2 - y_2|^{\frac{2}{3}}|x_3 - y_3|^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

e então,

$$|x-y|^{-3\mu} \leq C|x_1 - y_1|^{-\mu}|x_2 - y_2|^{-\mu}|x_3 - y_3|^{-\mu} \quad (5.6)$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x)g(y)}{|x-y|^{3\mu}} dx dy \leq C \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x)g(y)}{|x_1-y_1|^\mu |x_2-y_2|^\mu |x_3-y_3|^\mu} dx dy \quad (5.7)$$

Mas, pelo teorema 5.2.2,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x)g(y)}{|x_3-y_3|^\mu} dx_3 dy_3 \leq C \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^r dx_3 \right)^{\frac{1}{r}} \left( \int_{\mathbb{R}} |g(y)|^s dy_3 \right)^{\frac{1}{s}}$$

Assim (5.7) é dominado por

$$C \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(x_1, x_2)G(y_1, y_2)}{|x_1-y_1|^\mu |x_2-y_2|^\mu} dx_1 dx_2 dy_1 dy_2, \quad (5.8)$$

onde  $F(x_1, x_2) = \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^r dx_3 \right)^{\frac{1}{r}}$  e  $G(y_1, y_2) = \left( \int_{\mathbb{R}} |g(y)|^s dy_3 \right)^{\frac{1}{s}}$ . Da mesma forma, (5.8) é limitada superiormente por

$$C \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\bar{F}(x_1)\bar{G}(y_1)}{|x_1-y_1|^{-\mu}} dx_1 dy_2, \quad (5.9)$$

onde  $\bar{F}(x_1) = \left( \int_{\mathbb{R}} |F(x_1, x_2)|^r dx_2 \right)^{\frac{1}{r}}$  e  $\bar{G}(y_1) = \left( \int_{\mathbb{R}} |G(y_1, y_2)|^s dy_2 \right)^{\frac{1}{s}}$ . Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)g(y)}{|x-y|^{n\mu}} dx dy \leq K \|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^s(\mathbb{R}^n)}.$$

□

Finalmente, utilizando os resultados acima, provamos o Teorema 1.3.1 utilizado no capítulo 1, seção 1.3.1 .

**Teorema 1.3.1:** *Se  $f$  é uma função em  $L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 < r < s < \infty$ , e  $\frac{1}{s} = \frac{1}{r} + \frac{\lambda}{n} - 1$ , então  $T_\lambda f$  existe quase sempre e*

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |T_\lambda f|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \leq A \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^r dx \right)^{\frac{1}{r}}, \quad (5.10)$$

onde

$$T_\lambda f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^\lambda} dy, \quad 0 < \lambda < n,$$



**Prova:** Dada  $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ , considere o operador  $T_\lambda[f] \in L^s(\mathbb{R}^n)$  definido por:

$$T_\lambda[f](x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^\lambda} dy. \quad (5.11)$$

Então,

$$\|T_\lambda[f]\|_{L^s(\mathbb{R}^n)} = \sup_{g \in L^{s'}, \|g\|_{L^{s'}}=1} \int_{\mathbb{R}^n} |T_\lambda[f](x)| |g(x)| dx, \quad (5.12)$$

onde  $s'$  é tal que  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$ . Mas,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |T_\lambda[f](x)| |g(x)| dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)g(x)}{|x-y|} dy dx \\ &\leq \underbrace{K(\lambda, n, r, s')}_{\text{Teorema 5.2.3}} \|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^{s'}(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

onde  $\frac{1}{s} = \frac{1}{r} + \frac{\lambda}{n} - 1$ . Portanto, como  $\|g\|_{L^{s'}(\mathbb{R}^n)} = 1$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_\lambda[f](x)| |g(x)| dx \leq K(\lambda, n, r, s') \|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)},$$

o que finaliza a prova do Teorema 1.3.1. □

## Bibliografía

- [1] BECKENBACH, E. F. , BELLMAN, R. , *Inequalities* , Springer-Verlag, (1965).
- [2] BRAZ E SILVA, P. , ZINGANO, P.R. , *Some asymptotic properties for solutions of one-dimensional advection-diffusion equations with Cauchy data in  $L^p(\mathbb{R})$*  , Comptes rendus-Mathématique, (2006), 465 - 467.
- [3] BRAZ E SILVA, P. , ZINGANO, P.R. , *A supnorm estimate for advection-diffusion equations in heterogeneous medio*, Submitted.
- [4] BRÉZIS, H., *Annálisis funcional - Teoría y aplicaciones*, Alianza Editorial, 1983.
- [5] CARLEN, E. A. , LOSS, M., *Optimal smoothing and decay estimates for viscously damped conservation laws, with aplicaciones to the 2-D Navier-Stokes equation*, Duke Math. J., **86**, (1996), 135-157.
- [6] CHORIN, A. , MARSDEN J. E., *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer, 3rd ed., New York, 1993.
- [7] DURO, G. , CARPIO, A., *Assinptotic profiles for convection-diffusion equations with variable diffusion*, Nonlinear Anal. T.M.A., **45**, (2001), 407-433.
- [8] DURO, G. , ZUAZUA, E. , *Large time behavior for convection- diffusion equatio in  $\mathbb{R}^n$  with assinptotic constant diffusion*, Comm. Partial. Diff. Eqs., **24**, (1999).
- [9] ESCOBEDO, M. , ZUAZUA, E., *Large time behavior for convection-diffusion equatio in  $\mathbb{R}^n$* , J. Funct. Anal., **100**, (1991), 119-161.

- [10] ESCOBEDO, M. , VAZQUEZ, J. L. , ZUAZUA, E., *On a diffusion-convection equation in several space dimensions*, Indiana Univ. Math. J., **42**, (1993), 1413-1440.
- [11] FEFFERMAN C. L. , *Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation, in: J. Carlson, A. Jaffe and A. Wiles (Eds.), The Millenium Prize Problems*, American Mathematical Society, Providence, (2006), 57-67.
- [12] FEFFERMAN, C. L. , *Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation*, Clay Mathematics Institute, Cambridge, (2000).
- [13] FRIEDMAN, A., *Partial Differential Equations*, New York, (1969).
- [14] GILBARG, D. , TRUDINGER, N., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Berlin, Springer, (1977).
- [15] HARABETIAN, E. , *Rerefactions and large time behavior for parabolic equations and monotone schemes*, Comm. Math. Phys., **114** (1988),527-536.
- [16] HARAUX, A. , WEISSLER, F.B., *Non-uniqueness for a semilinear initial value problem* , Indiana Univ. Math. J, **31** (1982), 167–189.
- [17] HARDY, G.H. , LITTLEWOOD, J.E. , *Some properties of fractional integrals. I*, Math. Z., Springer, **4** , (1928), 565 - 606.
- [18] HARDY, G.H. , LITTLEWOOD, J.E. , POLYA, G. , *The Maximum of a Certain Bilinear Form*, Proc. of the London Math. Soc., (1926), 265 - 282.
- [19] HARDY, G.H. , LITTLEWOOD, J.E. , POLYA, G., *Inequalities*, Cambridge, (1952).

- [20] KATO, T. , *Strong  $L^p$ -solutions of the Navier-Stokes equation in  $\mathbb{R}^m$ , with applications to weak solutions*, Math Z.- Springer, **187** (1984), 471 – 480.
- [21] KATO, T. , *The Navier-Stokes equations for an incompressible fluid in  $\mathbb{R}^2$  with a measure as the initial vorticity*, Differ. Integ. Eqs., **7** (1994), 949-966.
- [22] KREISS, H.O. , HAGSTROM, T. , LORENZ, J. , ZINGANO,P. , *Decay in time of the solution of the Navier-Stokes equation of incompressible flows*, Manuscripts (unpublished), Univerity of New Mexico, Albuquerque, NM ,(2003)
- [23] KREISS, H.O. , HAGSTROM, T. , LORENZ, J. , ZINGANO,P., *Decay in time of incompressible flows*, J. Math. Fluid Mech., **5** (2003), 231-244
- [24] KREISS, H.O. , LORENZ, J., *Initia Value Problems and the Navier-Stokes Equations*, Academic Press, New York , 1989.
- [25] LADYZHENSKAYA, O. A. , SOLONNIKOV, V. A. , URAL’CEVA, N. N., *Linear and Quasilinear equations of Parabolic Type*, Aner. Math. Soc , Providence , (1968).
- [26] LERAY, J., *Essai sur le mouvement d’un liquido visque emplissant l’espace*, Acta Math. **63** (1934).
- [27] MASUDA, K., *Weak solutions of Navier-Stokes equations*, Tohoku Math. J., 36 (1984), 623-646.
- [28] MASUDA, K.,  *$L^2$  decay of solutions of the Navier-Stokes equations in the exterior domain*, Proc. Symp. Pure Math., AMS, vol. 45 (1986), Part 2, 179-182.
- [29] N DU PLESSIS, *Some theorems about the Riesz fractional integral*, Trans. Amer. Math. Soc, (1955), 124 - 134.

- [30] SCHONBECK, M.E., *Decay of solution to parabolic conservation laws*, Comm. Partial Diff. Eqs., **7**, (1980), 449-473.
- [31] SCHONBECK, M.E., *Uniform decay rates for parabolic conservation laws*, Nonlinear Anal. T.M.A., **10**, (1986), 943-956.
- [32] SOBOLEV, S., *On a Theorem of Functional Analysis(Russian)*, Math. Shornik., **4** , (1938), 471-497.
- [33] STEIN,E. M., WEISS, G. , *Fractional integrals on n-dimensional Euclidean space*, J. Math. Mech, 1958 **7** , (1958), 504-514.
- [34] TAYLOR, M.E., *Partial Differential Equations*, Vol. 3, Springer, New york (1996).
- [35] THORIN, G.D., *Convexity Theorems*, Comm. Sem. Math. Univ. Lund, Uppsala, (1948), 1-57.
- [36] WIEGNER, M., *Decay Results for Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations on  $\mathbb{R}^n$* , J. London Math. Soc., Marcel Dekker, **2** , 1987.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)