

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

OTIMIZAÇÃO ERGÓDICA:
DA MAXIMIZAÇÃO RELATIVA
AOS HOMEOMORFISMOS EXPANSIVOS

EDUARDO GARIBALDI

PORTO ALEGRE, JUNHO DE 2006

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Tese submetida por Eduardo Garibaldi¹ como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Dr. Artur Oscar Lopes (Universidade Federal do Rio Grande do Sul)

Banca Examinadora:

Dr. Alexandre Baraviera (Universidade Federal do Rio Grande do Sul)

Dr. Jairo Bochi (Universidade Federal do Rio Grande do Sul)

Dr. Mário Jorge Dias Carneiro (Universidade Federal de Minas Gerais)

Dr. Rafael Oswaldo Ruggiero (Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro)

Dr. Philippe Thieullen (Université Bordeaux 1)

Data da Defesa: 23 de junho de 2006.

¹Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)

Il est impossible d'étudier les Œuvres des grands mathématiciens, et même celles des petits, sans remarquer et sans distinguer deux tendances opposées, ou plutôt deux sortes d'esprits entièrement différents. Les uns sont avant tout préoccupés de la logique, à lire leurs ouvrages, on est tenté de croire qu'ils n'ont avancé que pas à pas, avec la méthode d'un Vauban qui pousse ses travaux d'approche contre une place forte, sans rien abandonner au hasard. Les autres se laissent guider par l'intuition et font du premier coup des conquêtes rapides, mais quelquefois précaires, ainsi que de hardis cavaliers d'avant-garde.

Ce n'est pas la matière qu'ils traitent qui leur impose l'une ou l'autre méthode. Si l'on dit souvent des premiers qu'ils sont des *analystes* et si l'on appelle les autres *géomètres*, cela n'empêche pas que les uns restent analystes, même quand ils font de la Géométrie, tandis que les autres sont encore des géomètres, même s'ils s'occupent d'Analyse pure. C'est la nature même de leur esprit qui les fait logiciens ou intuitifs, et ils ne peuvent pas la dépouiller quand ils abordent un sujet nouveau.

Ce n'est pas non plus l'éducation qui a développé en eux l'une des deux tendances et qui a étouffé l'autre. On naît mathématicien, on ne le devient pas, et il semble aussi qu'on naît géomètre, ou qu'on naît analyste.

Henri Poincaré (em *La valeur de la science*)

Agradecimentos. O autor expressa sua gratidão ao Professor Artur Oscar Lopes por todas as discussões dinâmicas, inclusive pelas pictóricas. Ao agradecer ao Professor Philippe Thieullen, destaca a hospitalidade do Institut de Mathématiques da Université Bordeaux 1, onde parte deste trabalho foi desenvolvida durante o ano acadêmico de 2004-2005. Está o autor grato igualmente aos Professores Oliver Jenkinson e Flávia Malta Branco pela gentileza de fornecer cópias de suas teses.

Resumo. Sob novas perspectivas, discutimos aspectos da otimização ergódica sobre espaços compactos. No capítulo inicial, introduzimos funções para maximização relativa: as aplicações beta e alfa. Depois de um estudo sistemático acerca de regularidades, investigamos aproximações de certos valores destas funções a partir de órbitas periódicas. Estabelecemos ainda que a diferencial de uma aplicação alfa dita o comportamento assintótico das trajetórias otimizadas. No segundo capítulo, propomos um modelo para abordar questões de otimização referentes aos homeomorfismos expansivos. Uma versão do problema de Aubry-Mather em dinâmica simbólica é sugerida. Amparados na hipótese transitiva, constatamos a existência também neste contexto de subações para potenciais Hölder. Uma fórmula de representação para subações estritas é encontrada, a qual nos conduz naturalmente a um teorema de classificação para estas subações.

Résumé. Sous nouvelles perspectives, nous discutons des aspects de l'optimisation ergodique sur les espaces compacts. Dans le chapitre initial, nous introduisons des fonctions pour la maximisation relative: les applications bêta et alpha. Après une étude systématique à propos de régularités, nous enquêtons sur comment se rapprocher de certaines valeurs de ces fonctions en utilisant des orbites périodiques. Nous établissons encore que la différentielle d'une application alpha dicte le comportement asymptotique des trajectoires optimales. Dans le deuxième chapitre, nous proposons un modèle pour traiter des questions d'optimisation concernant les homéomorphismes expansifs. Une version du problème d'Aubry-Mather dans la dynamique symbolique est suggérée. Aidés par l'hypothèse de transitivité, aussi dans ce contexte nous vérifions l'existence de sous-actions pour les potentiels Hölder. Une formule de représentation pour les sous-actions strictes est trouvée, ce qui nous conduit naturellement à un théorème de classification pour ces sous-actions.

Abstract. Under new perspectives, we discuss aspects of the ergodic optimization on compact spaces. In the initial chapter, we introduce functions for relative maximization: the beta and alpha applications. After a systematic study concerning regularities, we investigate how to approximate certain values of these functions using periodic orbits. We establish yet that the differential of an alpha application dictates the asymptotic behavior of the optimal trajectories. In the second chapter, we propose a model to treat optimization questions regarding the expansive homeomorphisms. A version of the Aubry-Mather problem in symbolic dynamics is suggested. Aided by the transitive hypothesis, also in this context we verify the existence of sub-actions for Hölder potentials. A representation formula for strict sub-actions is found, which drives us naturally to a classification theorem for these sub-actions.

TÓPICOS

Funções para Maximização Relativa

1.0. Introdução	6
1.1. Primeiras Noções	7
1.2. Influências do Vínculo	10
1.3. Aproximação por Órbitas Periódicas	14
1.4. Subações e Diferenciabilidade de Funções Alfas	23

Problema de Aubry-Mather em Dinâmica Simbólica

2.0. Descrição do Modelo	28
2.1. Pergunta Dual e Respostas	31
2.2. Subações e Suportes	46
Referências	58

Funções para Maximização Relativa

1.0. INTRODUÇÃO

Tomemos X um espaço métrico compacto. Considere \mathcal{M} o conjunto das probabilidades sobre os borelianos de X . Lembre que \mathcal{M} é um conjunto convexo e, quando munido da topologia fraca*, torna-se um espaço metrizable compacto. Sendo $T : X \rightarrow X$ uma função contínua, denotamos por \mathcal{M}_T o subconjunto de \mathcal{M} das probabilidades T -invariantes. Como sabido, o conjunto \mathcal{M}_T trata-se também de um compacto convexo.

Dada aplicação $A \in C^0(X)$, atentamos para a constante

$$\beta_A = \max_{\mu \in \mathcal{M}_T} \int A d\mu.$$

Esta definição dista da gratuidade. Isto porque a caracterização das probabilidades T -invariantes cuja integral da função A atinge o valor máximo β_A consiste em um dos objetivos centrais da otimização ergódica sobre espaços compactos. Detalhes acerca das questões de otimização em teoria ergódica abordadas por esta teoria nascente encontram-se nas notas de Oliver Jenkinson (veja [19]).

Neste trabalho, inicialmente poremos o problema de descrição de *probabilidades maximizantes* em uma formulação mais abrangente. Ao introduzir um *vínculo*, ou melhor, ao introduzir uma aplicação contínua definida em X assumindo valores em \mathbb{R}^n , estenderemos o conceito da constante maximal β_A ao de uma função real definida em um subconjunto convexo de \mathbb{R}^n , em um *conjunto de rotação*. Esta aplicação côncava será chamada de *função beta* e sua transformada de Fenchel, de *função alfa*.

Na primeira seção, todas as definições serão realizadas cuidadosamente. Aproveitaremos para expor algumas propriedades elementares relativas a estes conceitos. Vários fatos são conhecidos e constam da literatura, portanto muitas vezes adotaremos uma atitude meramente compilatória, agrupando informações dispersas.

O tópico seguinte se destinará ao estudo do comportamento de aplicações alfas e betas frente a uma alteração do termo em posição de pivô, isto é, frente a uma modificação do vínculo. Mostraremos, por exemplo, o caráter Lipschitz da correspondência associando vínculos a valores de funções alfas. No tocante à influência sobre as funções betas, constataremos tipicamente continuidade da respectiva associação.

Faremos ainda um exame atento da possibilidade de, empregando probabilidades suportadas em órbitas periódicas, aproximar valores de funções alfas e betas. Assim nos contentaremos a avaliar este problema especificamente no ambiente da dinâmica simbólica. Sob a hipótese de recorrência simultânea (a ser discutida no momento oportuno), conseguiremos construir órbitas periódicas desempenhando a tarefa.

Concluiremos apresentando um teorema que descortina uma inaguardada ligação entre a diferencial de uma aplicação alfa e o comportamento assintótico de determinadas trajetórias. Na demonstração deste teorema, o conceito de subação não esconderá seu mérito. Esta noção tem sido alvo de muitos estudos, tais como os de Artur Oscar Lopes e Philippe Thieullen [25, 26], Rafael Rigão Souza [33] e Flávia Malta Branco [4].

Este trabalho pode ser visto como uma análise de propriedades da função beta – uma generalização da constante maximal β_A – e de sua transformada de Fenchel. Por outro lado, uma vez que o gráfico de uma aplicação beta é parte do bordo de um conjunto de rotação contido em \mathbb{R}^{n+1} , este estudo igualmente traz informações pertinentes sobre tal conjunto. No entanto, por certo não o faz de maneira tão explícita como, por exemplo, Jarosław Kwapisz [20, 21, 22] para conjuntos de rotação determinados a partir de funções contínuas do toro \mathbb{T}^2 homotópicas à identidade, Thierry Bousch [5] e Oliver Jenkinson [17] quando analisando o conjunto de baricentros de probabilidades invariantes para uma aplicação contínua do círculo em si mesmo ou Krystyna Ziemian [34] em dinâmica simbólica.

1.1. PRIMEIRAS NOÇÕES

Começemos por evidenciar o linguajar básico que utilizaremos em todo este estudo. Nada obstante, ressalva-se que não procederemos aqui de maneira exaustiva. Nas próximas seções, toda vez que for necessário, não nos furtaremos o direito de incorporar novos termos a nosso vocabulário de trabalho.

Seja $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua com funções coordenadas $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Temos, então, um mapa induzido $\varphi_* : \mathcal{M}_T \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por $\varphi_*(\mu) = \left(\int \varphi_1 d\mu, \dots, \int \varphi_n d\mu \right)$. Claramente, φ_* é uma função contínua e afim.

Chamamos $\varphi_*(\mu)$ de vetor de rotação da medida $\mu \in \mathcal{M}_T$. (Quando $n = 1$, optaremos por empregar a expressão número de rotação da medida.) Repare que a imagem $\varphi_*(\mathcal{M}_T) \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto compacto convexo,

herdando isto de \mathcal{M}_T . Denominamos $\varphi_*(\mathcal{M}_T)$ por conjunto de rotação. Para $h \in \varphi_*(\mathcal{M}_T)$, a fibra $\varphi_*^{-1}(h)$ é chamada classe de rotação de h . Também $\varphi_*^{-1}(h) \subset \mathcal{M}_T$ é um conjunto compacto convexo.

Se pensamos a aplicação induzida φ_* como uma projeção de um conjunto convexo (possivelmente contido em um espaço de dimensão infinita) sobre o conjunto de rotação, acabaremos por indagar sobre a sorte dos pontos extremais envolvidos. Uma resposta a esta questão fornece o primeiro resultado a salientar.

Proposição 0: Para mapa induzido $\varphi_* : \mathcal{M}_T \rightarrow \varphi_*(\mathcal{M}_T)$, destacam-se:

- (i) se a fibra $\varphi_*^{-1}(h)$ consiste em uma única probabilidade ergódica, então h é um ponto extremal de $\varphi_*(\mathcal{M}_T)$;
- (ii) se h é um ponto extremal de $\varphi_*(\mathcal{M}_T)$, então os pontos extremais de $\varphi_*^{-1}(h)$ são probabilidades ergódicas.

Na verdade, tal proposição vem a ser uma versão apenas escrita em termos gerais de resultados apresentados por Oliver Jenkinson (consulte os lemas 3.2 e 3.3 de [16]) em sua tese de doutorado.

Um conceito fundamental a ser introduzido é o de aplicação beta. Para $A \in C^0(X)$, definimos a função $\beta_A : \varphi_*(\mathcal{M}_T) \rightarrow \mathbb{R}$ pondo

$$\beta_A(h) = \sup \left\{ \int A d\mu : \mu \in \varphi_*^{-1}(h) \right\}.$$

Neste contexto, chamamos a aplicação φ de vínculo e a função A de potencial. Objetos de particular interesse serão as probabilidades pertencentes a classe de rotação de h que, sobre tal conjunto, maximizam a integral do potencial A . Em termos mais claros, consideremos

$$m_A(h) = \left\{ \mu \in \varphi_*^{-1}(h) : \int A d\mu = \beta_A(h) \right\}.$$

Caso $\mu \in \mathcal{M}_T$ pertença a este conjunto, dizemos que μ é uma probabilidade (A, h) -maximizante.

Algumas observações são pertinentes. Sendo a classe de rotação de h um conjunto compacto, é fácil comprovar que $m_A(h)$ é um conjunto compacto não vazio. Disto advém que a função $\beta_A : \varphi_*(\mathcal{M}_T) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação côncava. Mais ainda, como a correspondência $\mu \mapsto \int A d\mu$ é contínua, segue que a função β_A é contínua em todo o conjunto de rotação.

Tais propriedades de uma aplicação beta, por sua vez, legitimam a obtenção de uma função côncava $\alpha_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ via transformada de Fenchel

$$\alpha_A(c) = \min_{h \in \varphi_*(\mathcal{M}_T)} [\langle c, h \rangle - \beta_A(h)].$$

Uma tal aplicação é chamada uma função alfa.

É interessante examinar os comportamentos das aplicações beta e alfa quando os parâmetros que as definem são alterados. Por exemplo, podemos questionar o que a mudança de potencial acarreta a uma função beta. A resposta não porta complexidade. Fixado $h \in \varphi_*(\mathcal{M}_T)$, de maneira natural obtemos uma função $\beta(h) : C^0(X) \rightarrow \mathbb{R}$ que, a cada potencial A , simplesmente associa o valor $\beta_A(h)$. Esta aplicação, não é difícil constatar, resulta ser Lipschitz, com $\text{Lip}(\beta(h)) \leq 1$.

Uma primeira consequência deste fato é o caráter também Lipschitz de uma função alfa (valendo $\text{Lip}(\alpha_A) \leq \|\varphi\|_0$), eis que temos a escritura

$$\alpha_A(c) = - \max_{h \in \varphi_*(\mathcal{M}_T)} \beta_{A-\langle c, h \rangle}(h).$$

Efetivamente, ao tomarmos $h' \in \varphi_*(\mathcal{M}_T)$ tal que $\alpha_A(c') = -\beta_{A-\langle c', h' \rangle}(h')$, sobressai

$$\alpha_A(c) - \alpha_A(c') \leq \beta_{A-\langle c', h' \rangle}(h') - \beta_{A-\langle c, h' \rangle}(h') \leq |\langle c - c', h' \rangle| \leq \|\varphi\|_0 \|c - c'\|.$$

Um segundo imediato efeito consiste na seguinte versão da desigualdade de Fenchel

$$\begin{aligned} \beta_A(h) + \alpha_B(c) &\leq \beta_A(h) + \langle c, h \rangle - \beta_B(h) \\ &\leq \langle c, h \rangle + \|A - B\|_0. \end{aligned}$$

Porém, ao empregar esta desigualdade, vemos que igualmente é Lipschitz a aplicação que faz corresponder $\alpha_A(c)$ a cada potencial A , isto é, a função $\alpha(c) : C^0(X) \rightarrow \mathbb{R}$, observando $\text{Lip}(\alpha(c)) \leq 1$.

Algumas propriedades das aplicações $\beta(h), \alpha(c) : C^0(X) \rightarrow \mathbb{R}$ estão resumidas na proposição abaixo, cuja prova será omitida por ser mera consequência das definições.

Proposição 1: Sejam $A, B \in C^0(X)$, $a \in \mathbb{R}$ e $t, t' \in [0, 1]$ com $t + t' = 1$. Então as funções $\beta(h), \alpha(c) : C^0(X) \rightarrow \mathbb{R}$ verificam

- (i) $\beta_{aA}(h) = |a| \beta_{\text{sgn}(a)A}(h)$;
- (ii) $\beta_{A+B \circ T - B + a}(h) = \beta_A(h) + a$; (vi) $\alpha_{A+B \circ T - B + a}(c) = \alpha_A(c) - a$;
- (iii) $\beta_{A+B}(h) \leq \beta_A(h) + \beta_B(h)$;
- (iv) $\beta_{tA+t'B}(h) \leq t\beta_A(h) + t'\beta_B(h)$; (vii) $\alpha_{tA+t'B}(c) \geq t\alpha_A(c) + t'\alpha_B(c)$;
- (v) $A \leq B$ implica $\beta_A(h) \leq \beta_B(h)$; (viii) $A \leq B$ implica $\alpha_A(c) \geq \alpha_B(c)$.

Repare que expressões correspondentes aos itens (i) e (iii) acima seriam $\alpha_{aA}(c) = |a|\alpha_{\text{sgn}(a)A}(c/|a|)$ (para $a \neq 0$) e $\alpha_{A+B}(c+c') \geq \alpha_A(c) + \alpha_B(c')$, as quais não vêm a ser propriedades da aplicação $\alpha(c)$.

Ao redefinir uma função beta, a modificação do potencial ainda redescreve o conjunto das probabilidades maximizantes. Todavia, tipicamente uma particularidade prevalece. A fim de expô-la, lembremos que, como costumeiro, um conjunto é dito residual se contém uma intersecção enumerável de conjuntos abertos e densos.

Proposição 2: Assuma que $h \in \varphi_*(\mathcal{M}_T)$. Existe um subconjunto residual $\mathcal{G} = \mathcal{G}(h) \subset C^0(X)$ tal que, para cada potencial $A \in \mathcal{G}$, o conjunto $\mathcal{m}_A(h)$ contém uma única probabilidade.

Este resultado, na verdade, decorre de uma formulação mais geral (consulte a proposição 10 de [10]) obtida por Gonzalo Contreras, Artur Oscar Lopes e Philippe Thieullen em seu estudo sobre medidas que minimizam o expoente de Lyapunov para aplicações expansoras do círculo. Uma ressalva deve ser feita. Apesar de os autores fixarem como espaço S^1 , a demonstração apresentada vale para qualquer espaço métrico compacto X .

1.2. INFLUÊNCIAS DO VÍNCULO

Nosso objetivo agora será discutir como a alteração do vínculo afeta as funções beta e alfa. Necessitamos adotar uma notação que indique esta dependência. Desta maneira, para mostrar a qual vínculo nos referimos, designaremos as decorrentes aplicações beta e alfa e o respectivo conjunto das probabilidades (A, h) -maximizantes escrevendo simplesmente $\beta_{A,\varphi}$, $\alpha_{A,\varphi}$ e $\mathcal{m}_{A,\varphi}(h)$.

Tirando proveito da recém-estabelecida representação, realizemos um pequeno desvio antes de avançar sobre a questão central. A fim de contentar os aficionados do gênero, são listadas algumas propriedades no espírito da proposição 1. Para tanto, sejam $A, B \in C^0(X)$, $\varphi, \psi \in C^0(X, \mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}^n$ e $t, t' \in [0, 1]$ com $t + t' = 1$. Então, sucedem:

- (i) $\beta_{A,a\varphi}(h) = \beta_{A,\varphi}(h/a)$, $\alpha_{A,a\varphi}(c) = \alpha_{A,\varphi}(ac)$;
- (ii) $\beta_{A,\varphi+\psi \circ T^{-\psi+b}}(h) = \beta_{A,\varphi}(h-b)$, $\alpha_{A,\varphi+\psi \circ T^{-\psi+b}}(c) = \alpha_{A,\varphi}(c) + \langle c, b \rangle$;
- (iii) $\alpha_{A+B,\varphi+\psi}(c) \geq \alpha_{A,\varphi}(c) + \alpha_{B,\psi}(c)$;
- (iv) $\alpha_{tA+t'B,t\varphi+t'\psi}(c) \geq t\alpha_{A,\varphi}(c) + t'\alpha_{B,\psi}(c)$;
- (v) $\mathcal{m}_{A,\varphi}(h) \cap \mathcal{m}_{A,\psi}(h') \neq \emptyset \Rightarrow t\beta_{A,\varphi}(h) + t'\beta_{A,\psi}(h') \leq \beta_{A,\varphi+\psi}(h+h')$.

A verificação destes itens fica a cargo do leitor.

Ao iniciar a investigação da relação entre vínculos e as funções beta e alfa, perceba que a dificuldade inicial reside no fato de o vínculo determinar inclusive o domínio de uma aplicação beta. Logo, precisamos primeiramente estabelecer qual efeito a mudança deste parâmetro produz sobre o conjunto de rotação.

Mantendo este propósito em mente, para Y espaço métrico completo, denotaremos por $\mathcal{K}(Y)$ a coleção de seus subconjuntos compactos. Munida com a métrica de Hausdorff, $\mathcal{K}(Y)$ torna-se igualmente espaço métrico completo. Tais informações representam a totalidade dos requisitos para enunciar a proposição que esclarece a influência do vínculo sobre o conjunto de rotação. Para demonstrá-la, nada obstante, resta observar que a aplicação $*$: $C^0(X, \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0(\mathcal{M}_T, \mathbb{R}^n)$ é um operador linear limitado, com norma menor ou igual a 1.

Proposição 3: Seja $\Gamma_T : C^0(X, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ aplicação dada por $\Gamma_T(\varphi) = \varphi_*(\mathcal{M}_T)$. Então Γ_T é Lipschitz, com $\text{Lip}(\Gamma_T) \leq 1$.

Prova:

Repare que, para quaisquer $\varphi, \psi \in C^0(X, \mathbb{R}^n)$ e $\mu \in \mathcal{M}_T$, ocorre

$$\begin{aligned} d(\varphi_*(\mu), \psi_*(\mathcal{M}_T)) &= \inf_{\nu \in \mathcal{M}_T} \|\varphi_*(\mu) - \psi_*(\nu)\| \\ &\leq \|\varphi_*(\mu) - \psi_*(\mu)\| \\ &\leq \|(\varphi - \psi)_*\|_0 \\ &\leq \|\varphi - \psi\|_0. \end{aligned}$$

Entretanto, pela construção da métrica de Hausdorff, este argumento basta para estabelecer a proposição. \square

Em certos contextos, a uma aplicação $T \in C^0(X, X)$ naturalmente associamos uma função $\varphi_T \in C^0(X, \mathbb{R}^n)$. Isto ocorre, por exemplo, nos trabalhos sobre conjuntos de rotação obtidos a partir de homeomorfismos do toro n -dimensional homotópicos à identidade ou quando se quer analisar o espectro dos expoentes de Lyapunov de uma aplicação diferenciável. Assim, motivados pela proposição acima, podemos questionar qual a regularidade do mapa $T \mapsto (\varphi_T)_*(\mathcal{M}_T)$. A proposição 4 se encarrega de responder a esta demanda.

Proposição 4: Considere $\mathcal{U} \subset C^0(X, X)$ munido da topologia induzida. Seja $T \in \mathcal{U} \mapsto \varphi_T \in C^0(X, \mathbb{R}^n)$ correspondência contínua. Então a

aplicação $\Gamma_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ definida por $\Gamma_{\mathcal{U}}(T) = (\varphi_T)_*(\mathcal{M}_T)$ é semicontínua superiormente.

Prova:

Se a semicontinuidade superior da função $\Gamma_{\mathcal{U}}$ não fosse válida, isto significaria a existência de uma aplicação $T \in \mathcal{U}$ e de algum $\epsilon > 0$ para os quais poderíamos determinar uma seqüência $\{T_j\} \subset \mathcal{U}$ convergente a T , bem como uma seqüência $\{\mu_j\} \subset \mathcal{M}$ satisfazendo tanto $\mu_j \in \mathcal{M}_{T_j}$ quanto $d((\varphi_{T_j})_*(\mu_j), \Gamma_{\mathcal{U}}(T)) \geq \epsilon$. Todavia, disporíamos de uma subseqüência $\{\mu_{j_k}\}$ convergente a $\mu \in \mathcal{M}$. Assim sendo, a possibilidade de, para qualquer função $f \in C^0(X, \mathbb{R})$, passar ao limite na identidade

$$\int f \circ T_{j_k} d\mu_{j_k} = \int f d\mu_{j_k}$$

estabeleceria a contradição: $\mu \in \mathcal{M}_T$ e $d((\varphi_T)_*(\mu), (\varphi_T)_*(\mathcal{M}_T)) \geq \epsilon$. \square

Para conjuntos de rotação definidos a partir de aplicações contínuas do toro \mathbb{T}^n homotópicas à identidade, resultado no espírito da proposição anterior foi demonstrado tanto por Michał Misiurewicz e Krystyna Ziemian (veja o teorema 2.10 de [29]), quanto por Michael Robert Herman (consulte a seção 10 do capítulo 1 de [14]).

Prosseguimos agora a procura pela influência do vínculo sobre as funções alfa e beta. O próximo lema nos será útil nesta tarefa.

Lema 5: Dado $\varphi \in C^0(X, \mathbb{R}^n)$ vínculo, fixe $h \in \varphi_*(\mathcal{M}_T)$. Considere uma seqüência de vínculos $\{\varphi_j\}$ convergindo a φ . Segue que

- (i) $\lim_{j \rightarrow \infty} d(h, (\varphi_j)_*(\mathcal{M}_{A, \varphi}(h))) = 0$;
- (ii) $\lim_{j \rightarrow \infty} d(h, \varphi_*(\mathcal{M}_{A, \varphi_j}(h))) = 0$ quando $h \in (\varphi_j)_*(\mathcal{M}_T)$;
- (iii) $\lim_{j \rightarrow \infty} d(h, \varphi_*(\mathcal{M}_{A, \varphi_j}(h_j))) = 0$ quando $h_j \in (\varphi_j)_*(\varphi_*^{-1}(h))$.

Prova:

Ao empregarmos raciocínio similar ao utilizado na proposição 3, obtemos $d(h', \psi_*(\mathcal{M}_{A, \psi'}(h'))) \leq \|\psi - \psi'\|_0$, donde resultam imediatamente os itens (i) e (ii).

Demais, sucede $d(h, \varphi_*(\mathcal{M}_{A, \varphi_j}(h_j))) \leq \|h - h_j\| + d(h_j, \varphi_*(\mathcal{M}_{A, \varphi_j}(h_j)))$. Conseqüentemente, para a segunda parcela, tal como no parágrafo anterior, temos $d(h_j, \varphi_*(\mathcal{M}_{A, \varphi_j}(h_j))) \leq \|\varphi_j - \varphi\|_0$. E para a primeira, ao selecionarmos $\mu \in \varphi_*^{-1}(h) \cap (\varphi_j)_*^{-1}(h_j)$, estabelecemos $\|h - h_j\| = \|\varphi_*(\mu) - (\varphi_j)_*(\mu)\| \leq \|\varphi - \varphi_j\|_0$, concluindo a demonstração do item (iii). \square

Asseguradas as convergências acima, podemos, por exemplo, constatar uma espécie de *continuidade holográfica* da aplicação beta como função do vínculo. A seguir, aproveitamos também para determinar a continuidade da aplicação alfa em relação ao mesmo parâmetro.

Proposição 6: Sobre o comportamento das funções beta e alfa frente à modificação do vínculo, temos os seguintes resultados.

(I) Para um vínculo $\varphi \in C^0(X, \mathbb{R}^n)$, tome $h \in \varphi_*(\mathcal{M}_T)$. Seja $\{\varphi_j\}$ seqüência de vínculos convergente a φ . Assuma $\{h_j\}$ seqüência de vetores de \mathbb{R}^n satisfazendo $h_j \in (\varphi_j)_*(\mathcal{M}_{A,\varphi}(h))$. Então $\lim \beta_{A,\varphi_j}(h_j) = \beta_{A,\varphi}(h)$.

(II) Fixado $c \in \mathbb{R}^n$, a correspondência $\varphi \mapsto \alpha_{A,\varphi}(c)$ é Lipschitz, com $\text{Lip}(\alpha_{A,\cdot}(c)) \leq \|c\|$.

Prova:

(I) Inicialmente, repare que, em razão da escolha de h_j , ocorre $\beta_{A,\varphi}(h) \leq \beta_{A,\varphi_j}(h_j)$. Defina, por conseguinte, seqüência $\{\eta_j\} \subset \mathbb{R}^n$ tal que, para cada índice j , o vetor $\eta_j \in \varphi_*(\mathcal{M}_{A,\varphi_j}(h_j))$ cumpra $\|h - \eta_j\| = d(h, \varphi_*(\mathcal{M}_{A,\varphi_j}(h_j)))$. Naturalmente, obtemos $\beta_{A,\varphi}(h) \leq \beta_{A,\varphi_j}(h_j) \leq \beta_{A,\varphi}(\eta_j)$. Além disso, pelo item (iii) do lema acima, garantimos que $\lim \eta_j = h$, de modo a legitimar $\lim \beta_{A,\varphi}(\eta_j) = \beta_{A,\varphi}(h)$.

(II) Dado $\epsilon > 0$, considere $h \in \varphi_*(\mathcal{M}_T)$ cumprindo $\langle c, h \rangle - \beta_{A,\varphi}(h) < \alpha_{A,\varphi}(c) + \epsilon/2$. Em seguida, tome probabilidade $\mu \in \varphi_*^{-1}(h)$ satisfazendo $\int A d\mu > \beta_{A,\varphi}(h) - \epsilon/2$. Logo, $\langle c, \varphi_*(\mu) \rangle - \int A d\mu < \alpha_{A,\varphi}(c) + \epsilon$. Ademais, se $\psi \in C^0(X, \mathbb{R}^n)$ é igualmente vínculo, a desigualdade de Fenchel fornece $\alpha_{A,\psi}(c) + \int A d\mu \leq \alpha_{A,\psi}(c) + \beta_{A,\psi}(\psi_*(\mu)) \leq \langle c, \psi_*(\mu) \rangle$. Portanto, constatamos $\alpha_{A,\psi}(c) - \alpha_{A,\varphi}(c) < \langle c, (\psi - \varphi)_*(\mu) \rangle + \epsilon \leq \|c\| \|\psi - \varphi\|_0 + \epsilon$. E o resultado decorre dos papéis simétricos desempenhados por φ e ψ e da arbitrariedade de ϵ . \square

A presença da seqüência $\{h_j\}$ na proposição 6.I traz um determinado grau de desapontamento. Mesmo que, em virtude do item (i) do lema 5, possamos escolhê-la convergindo para h , a inquietação permanece: enfim, quando $\lim \beta_{A,\varphi_j}(h) = \beta_{A,\varphi}(h)$? O primeiro aspecto a ser reparado é a necessidade de garantir $h \in (\varphi_j)_*(\mathcal{M}_T)$. Entretanto, caso $h \in \text{int}(\varphi_*(\mathcal{M}_T))$, a proposição 3 assegura que, para vínculo ψ suficientemente próximo de φ , ocorre $h \in \text{int}(\psi_*(\mathcal{M}_T))$. Esta hipótese adicional permite atender aos insatisfeitos.

Proposição 7: Sendo $\varphi \in C^0(X, \mathbb{R}^n)$ vínculo, assumamos $h \in \text{int}(\varphi_*(\mathcal{M}_T))$. Dada $\{\varphi_j\}$ uma seqüência arbitrária de vínculos convergente a φ , sucede $\lim \beta_{A, \varphi_j}(h) = \beta_{A, \varphi}(h)$.

Prova:

Pelo exposto acima, sem perda de generalidade, podemos admitir que $h \in \text{int}((\varphi_j)_*(\mathcal{M}_T))$. Porém, necessitaremos de uma versão mais forte desta suposição. Afortunadamente, a própria proposição 3 nos permite assumir que $D_\epsilon[h] \subset \text{int}((\varphi_j)_*(\mathcal{M}_T))$, onde $D_\epsilon[h]$ é uma bola fechada de centro h e raio $\epsilon > 0$ contida em $\text{int}(\varphi_*(\mathcal{M}_T))$.

Defina, em seguida, uma seqüência de probabilidades $\{\mu_j\} \subset \mathcal{m}_{A, \varphi}(h)$ tal que, para cada índice j , temos $\|h - (\varphi_j)_*(\mu_j)\| = d(h, (\varphi_j)_*(\mathcal{m}_{A, \varphi}(h)))$. Pondo $h_j = (\varphi_j)_*(\mu_j)$, atribuímos

$$\epsilon_j = \frac{\|h - h_j\|}{\|h - h_j\| + \frac{\epsilon}{3}}.$$

Escreva, então, $h'_j = h_j + \epsilon_j^{-1}(h - h_j)$. Repare que, em razão do item (i) do lema 5, para índice j suficientemente grande, acontece $\|h - h_j\| \leq \epsilon/3$. Com isto, para tais índices, verificamos $h'_j \in D_\epsilon[h] \subset \text{int}((\varphi_j)_*(\mathcal{M}_T))$, isto é, obtemos $h'_j = (\varphi_j)_*(\mu'_j)$ para alguma probabilidade T -invariante μ'_j .

Ponha, para j suficientemente grande, $\mu''_j = \epsilon_j \mu'_j + (1 - \epsilon_j) \mu_j$. Note que $(\varphi_j)_*(\mu''_j) = \epsilon_j h'_j + (1 - \epsilon_j) h_j = h$. Logo, se $\eta_j \in \varphi_*(\mathcal{m}_{A, \varphi_j}(h))$ cumpre $\|h - \eta_j\| = d(h, \varphi_*(\mathcal{m}_{A, \varphi_j}(h)))$, constatamos

$$\epsilon_j \int A d\mu'_j + (1 - \epsilon_j) \beta_{A, \varphi}(h) = \int A d\mu''_j \leq \beta_{A, \varphi_j}(h) \leq \beta_{A, \varphi}(\eta_j).$$

E o resultado segue diretamente dos itens (i) e (ii) do lema 5. \square

A proposição acima admite uma demonstração mais direta, porém talvez menos instrutiva. Na verdade, bastaria simplesmente aplicar a conclusão da proposição 3 às funções $\Phi = (\varphi, A)$ e $\Phi_j = (\varphi_j, A)$. Tal argumento será explorado adiante no texto².

1.3. APROXIMAÇÃO POR ÓRBITAS PERIÓDICAS

Embora, nesta seção, restrinjamos a classe de sistemas dinâmicos a ser examinada, limitando-nos a estudar o problema de aproximação por órbitas

²Veja, por exemplo, a prova da proposição 13.

periódicas no contexto da dinâmica simbólica, traçamos um roteiro geral em certos aspectos. Este roteiro descreve de que maneira, quando o propósito é estimar determinados valores de uma aplicação beta ou de uma função alfa, podemos encontrar probabilidades suportadas em órbitas periódicas realizando tal empreitada.

Inicialmente, convêm alguns comentários sobre definições e notações. Observe que, num espaço de probabilidade (Y, \mathcal{B}, ν) qualquer, dada uma aplicação integrável $f : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$, temos ainda a idéia de vetor de rotação da medida ν . A integrabilidade, de fato, desempenha o papel principal quando escrevemos $f_*(\nu) = \left(\int f_1 d\nu, \dots, \int f_n d\nu \right)$. Frente a uma função ergódica $F : Y \rightarrow Y$, convencionamos $b(f)$ para indicar o conjunto dos elementos de Y que, para a aplicação $f \in L^1(Y, \mathcal{B}, \nu)$, satisfazem o teorema ergódico de Birkhoff. Para a função característica de um conjunto mensurável D , contudo, preferiremos denotá-lo por $b(D)$. Ademais, atentando apenas para a mensurabilidade de F , colocamos $S_k f = \sum_{j=0}^{k-1} f \circ F^j$ para $k > 0$. Também poremos $S_0 f = 0$.

Mantidas as circunstâncias acima, consideramos $\Xi(D)$ o conjunto dos elementos z de D tais que, para qualquer $\epsilon > 0$, existe inteiro positivo L cumprindo $F^L(z) \in D$, bem como $\|S_L f(z) - L f_*(\nu)\| < \epsilon$. Assim sendo, dizemos que a função integrável f é simultaneamente recorrente (em relação à probabilidade ν) se, para todo $D \in \mathcal{B}$, ocorre $\nu(\Xi(D)) = \nu(D)$. (Quando $n = 1$, simplesmente diremos que a aplicação f é recorrente.) A respeito de tal propriedade, a proposição a seguir fornece uma condição suficiente para que certa função a verifique.

Proposição 8: Seja (Y, \mathcal{B}, ν) um espaço de probabilidade. Considere uma aplicação ergódica $F : Y \rightarrow Y$ e uma função integrável $f : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^{1/n}} \|S_k f(y) - k f_*(\nu)\| = 0$$

para ν -quase todo ponto $y \in Y$. Então f é simultaneamente recorrente.

Repare que, se $n = 1$, para toda aplicação integrável, temos de imediato, graças ao teorema ergódico de Birkhoff, o limite exigido. Em termos mais claros, decorre da proposição 8 que qualquer função integrável $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ é recorrente. Este resultado foi empregado por Ricardo Mañé em um de seus trabalhos sobre medidas minimizantes para sistemas lagrangianos (consulte o lema 2.2 de [28]). Nada obstante, duas décadas antes, teorema do qual

decorre tal versão unidimensional fora obtido por Giles Atkinson em [1]. De mais a mais, a demonstração que será apresentada para o caso geral, em verdade, consiste em uma reformulação de uma prova proposta para a situação particular utilizada por Mañé. A demonstração para o caso $n = 1$ em questão é a publicada por Gonzalo Contreras e Renato Iturriaga em seu livro acerca de minimizantes globais para sistemas lagrangianos autônomos (veja o lema 3-6.4 de [9]).

Prova:

Sem perda de generalidade, podemos tomar $f_*(\nu) = 0$. Seja $D \in \mathcal{B}$ com $\nu(D) > 0$. Ao assumir $\epsilon > 0$, notaremos $\Xi_\epsilon(D)$ ao conjunto de pontos $z \in D$ para os quais há inteiro positivo L tal que $F^L(z) \in D$ e $\|S_L f(z)\| < \epsilon$. Como $\Xi(D) = \bigcap \Xi_{1/j}(D)$, basta mostrar que $\nu(\Xi_\epsilon(D)) = \nu(D)$.

Fixe $y \in D \cap \tilde{b}(f) \cap \tilde{b}(D) \cap \tilde{b}(\Xi_\epsilon(D))$ tal que $\lim k^{-1/n} \|S_k f(y)\| = 0$. Sejam, por conseguinte, $L_1 < L_2 < \dots$ os inteiros positivos tais que $F^{L_k}(y) \in D$. Definindo $a_k = S_{L_k} f(y)$, considere ainda

$$R = \{k : \forall m > k, \|a_m - a_k\| \geq \epsilon\} \text{ e } R_k = R \cap \{1, \dots, k\}.$$

Note então que, para cada $l \in \{1, \dots, k\} - R_k$, existe necessariamente $m > l$ cumprindo $\|S_{L_m - L_l} f(F^{L_l}(y))\| = \|a_m - a_l\| < \epsilon$. Em outros termos, $l \in \{1, \dots, k\} - R_k$ implica $F^{L_l}(y) \in \Xi_\epsilon(D)$. Logo, constatamos

$$\begin{aligned} 1 + \#R_k &\geq 1 + \#\{1 \leq l < k : F^{L_l}(y) \notin \Xi_\epsilon(D)\} \\ &\geq \#\{0 \leq j < L_k : F^j(y) \in D - \Xi_\epsilon(D)\}. \end{aligned}$$

Com isto, uma vez que

$$\nu(D - \Xi_\epsilon(D)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{L_k} \sum_{j=0}^{L_k-1} \chi_{D - \Xi_\epsilon(D)}(F^j(y)),$$

a proposição estará demonstrada no momento em que obtivermos uma subsequência de $\{(\#R_k)/L_k\}$ convergindo a zero.

Se R for um conjunto finito, não há o que argumentar. Suponha R conjunto infinito. Daí, pela construção deste, segue $\{a_k : k \in R\}$ ilimitado. Assim sendo, escolha uma seqüência infinita $S \subset R$ tal que, para todo $k \in S$,

$$\|a_k\| = \max_{l \in R_k} \|a_l\|.$$

Ao denotar a bola aberta centrada em $\gamma \in \mathbb{R}^n$ de raio $\rho > 0$ por $D_\rho(\gamma)$, observamos que, dado $k \in S$, $D_{\epsilon/2}(a_l) \subset D_{\|a_k\| + \epsilon/2}(0)$ para cada $l \in R_k$.

Além disso, pela própria definição de R , estas bolas $D_{\epsilon/2}(a_l)$, $l \in R_k$, são disjuntas. Conseqüentemente,

$$\#R_k \leq \frac{\left(\|a_k\| + \frac{\epsilon}{2}\right)^n}{\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^n} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \|S_{L_k} f(y)\|^j \left(\frac{2}{\epsilon}\right)^j.$$

Lembrando que $\lim k^{-1/n} \|S_k f(y)\| = 0$, verificar

$$\lim_{k \in S} \frac{\#R_k}{L_k} = 0$$

é tarefa corriqueira. □

Diante de uma aplicação f simultaneamente recorrente em relação a uma probabilidade ν , dado conjunto mensurável D de medida positiva, observe que, ao escrever $\Xi^j(D) = \Xi(\Xi^{j-1}(D))$, acontece $\nu(\bigcap \Xi^j(D)) = \nu(D) > 0$. Em particular, se tivermos $E \in \mathcal{B}$ com $\nu(E) = 1$, então $\bigcap \Xi^j(D) \cap E \neq \emptyset$. Este simples fato desempenhará papel crucial na prova do próximo resultado. Contudo, apesar de seu caráter geral, precisaremos de mais elementos para desenvolver tal demonstração. Assim, nosso estudo será conduzido em direção à dinâmica simbólica.

Começemos, nada obstante, lembrando ou apresentando conceitos não restritos a este ambiente. Dado um ponto periódico $x \in X$ de período M , naturalmente temos a probabilidade T -invariante por este definida, a saber

$$\mu = \frac{1}{\#\text{orb}(x)} \sum_{y \in \text{orb}(x)} \delta_y = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} \delta_{T^j(x)}.$$

Uma maneira adicional de se referir a uma tal medida μ será chamando-a de probabilidade periódica. Ao tomar $x, y \in X$ e inteiro positivo k , outro item a ser lembrado é a síntese entre a métrica e a dinâmica guardada por

$$d_k(x, y) = \max_{0 \leq j < k} d(T^j(x), T^j(y)).$$

Atrairá nossa atenção uma coleção especial de potenciais, qual seja, o subconjunto dos potenciais Walters. Uma aplicação $f \in C^0(X)$ é uma aplicação Walters se simplesmente admitir um módulo de Walters, isto é, se existir função $H : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ crescente, nula e contínua em zero, tal que

$$\forall s \in \mathbb{R}^+, \forall k > 0, \forall x, y \in X, d_k(x, y) \leq s \Rightarrow |S_k f(x) - S_k f(y)| \leq H(s).$$

Na construção de funções de subação e no exame de medidas maximizantes, esta condição de regularidade foi introduzida por Thierry Bousch em [6]. Trata-se, a bem da verdade, de uma condição assaz abrangente. Com efeito, para sistemas dinâmicos hiperbólicos, o conjunto das aplicações Walters contém (veja a definição-proposição 2 de [6]) as funções de variação somável, em consequência as funções Hölder são aí exemplos de aplicações Walters.

Seja finalmente $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ um *subshift* de tipo finito. Dada constante $\lambda \in (0, 1)$, adotamos para Σ a métrica $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda^k$, onde $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma$, $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots)$, $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots)$ e $k = \min\{j : x_j \neq y_j\}$. Recordamos ainda que uma função contínua $g : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ depende de um número finito de coordenadas se existir inteiro $j \geq 0$ tal que $g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{y})$ quando $x_0 = y_0, \dots, x_j = y_j$. Caso se exija precisão, diremos que esta aplicação depende de $j + 1$ coordenadas.

Teorema 9: Sejam $\varphi \in C^0(\Sigma, \mathbb{Q}^n)$ um vínculo que depende de um número finito de coordenadas e A um potencial Walters. Assuma ainda φ simultaneamente recorrente em relação a uma probabilidade ergódica $\nu \in \varphi_*^{-1}(r)$, onde $r \in \varphi_*(\mathcal{M}_\sigma) \cap \mathbb{Q}^n$. Então, para cada $\epsilon > 0$, existe uma probabilidade periódica $\mu \in \varphi_*^{-1}(r)$ tal que $\left| \int A d\nu - \int A d\mu \right| < \epsilon$.

Prova:

Tome $\mathbf{x} \in \text{supp}(\nu)$. Para inteiro $l \geq 0$, designamos a bola aberta centrada em \mathbf{x} de raio igual a λ^l por $D_l = \{\mathbf{y} \in \Sigma : y_j = x_j \ \forall 0 \leq j < l\}$. Seja H um módulo de Walters para o potencial A . Dado $\epsilon > 0$, escolhamos l suficientemente grande (tomando-o inclusive maior que o número de coordenadas do qual depende φ) de modo a acontecer $H(\lambda^l) < \epsilon/2$.

O fato de o vínculo $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{Q}^n$ depender de um número finito de coordenadas obriga sua imagem a se reduzir a um conjunto finito de vetores com coordenadas racionais. Supondo-as escritas na forma de frações irredutíveis, seja o inteiro positivo Q produto de seus denominadores. Da mesma forma, consideremos o inteiro positivo q produto dos denominadores das coordenadas de r .

A recorrência simultânea da aplicação φ garante a existência de um ponto $\mathbf{y} \in \bigcap \Xi^j(D_l) \cap b(A)$. Com isto, obtemos inteiro positivo M_0 tal que, para qualquer $M \geq M_0$, sucede

$$\left| \frac{1}{M} S_M A(\mathbf{y}) - \int A d\nu \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Ademais, como em específico $\mathbf{y} \in \Xi^{M_0}(D_l)$, de simples argumento indutivo resulta a existência de inteiros positivos L_1, \dots, L_{M_0} satisfazendo tanto $\sigma^{L_1+\dots+L_k}(\mathbf{y}) \in \Xi^{M_0-k}(D_l)$ quanto

$$\|S_{L_1+\dots+L_k}\varphi(\mathbf{y}) - (L_1 + \dots + L_k)\varphi_*(\nu)\| < \frac{1}{qQ} \sum_{j=1}^k \frac{1}{2^{l+j}}$$

para todo $k \in \{1, \dots, M_0\}$.

Ponha $M = L_1 + \dots + L_{M_0} \geq M_0$. Tome, a seguir, ponto periódico $\mathbf{z} \in \Sigma$ dado pela repetição da palavra (y_0, \dots, y_{M-1}) . Enfim, seja μ a probabilidade σ -invariante por \mathbf{z} definida. Falta apenas verificar que tal probabilidade cumpre as exigências.

Inicialmente, devido ao fato de termos tomado l maior que o número de coordenadas do qual depende o vínculo φ , constatamos $\varphi(\sigma^j(\mathbf{y})) = \varphi(\sigma^j(\mathbf{z}))$ quando $j \in \{0, \dots, M-1\}$. Logo,

$$M \|\varphi_*(\mu) - r\| = \|S_M\varphi(\mathbf{y}) - M\varphi_*(\nu)\| < \frac{1}{qQ} \sum_{j=1}^{M_0} \frac{1}{2^{l+j}} < \frac{1}{qQ} \cdot \frac{1}{2^l}.$$

Uma vez que $QM\varphi_*(\mu) = QS_M\varphi(\mathbf{z}) \in \mathbb{Z}^n$, a desigualdade acima assegura $\varphi_*(\mu) = r$. Além disso, repare que $d_M(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \leq \lambda^l$ implica

$$\left| \int A \, d\mu - \frac{1}{M} S_M A(\mathbf{y}) \right| = \frac{1}{M} |S_M A(\mathbf{z}) - S_M A(\mathbf{y})| \leq \frac{1}{M} H(\lambda^l) < \frac{\epsilon}{2},$$

o que encerra a demonstração. \square

Há duas maneiras de interpretar a conclusão do teorema acima. A primeira é sugerida pelo bem conhecido fato segundo o qual um homeomorfismo do círculo de número de rotação racional possui um ponto periódico, cujo período é igual ao denominador deste racional. Tal ponto de vista segue o mesmo espírito, por exemplo, do teorema de John Franks para conjuntos de rotação determinados a partir de homeomorfismos do toro \mathbb{T}^2 homotópicos à identidade (veja [12]). No contexto da dinâmica simbólica, um resultado deste gênero foi já demonstrado por Ziemian (consulte o teorema 4.2 de [34]). A diferença entre o resultado de Ziemian e o aqui obtido reside na hipótese de transitividade. Ao abrirmos mão desta suposição, contudo, fomos levados a introduzir a condição de recorrência simultânea. Assim, temos o imediato corolário.

Corolário 10: Suponha que $\varphi \in C^0(\Sigma, \mathbb{Q}^n)$ depende de um número finito de coordenadas. Dado $r \in \varphi_*(\mathcal{M}_\sigma) \cap \mathbb{Q}^n$, se houver na fibra $\varphi_*^{-1}(r)$ uma

probabilidade ergódica em relação à qual φ é simultaneamente recorrente, então a esta fibra também pertence uma probabilidade periódica.

A segunda consequência do teorema 9 está na possibilidade de fornecer uma descrição especial a uma aplicação beta. A questão da descrição é particularmente interessante. Tão interessante que adiaremos a apresentação do segundo corolário para que possamos nos deter brevemente sobre este ponto.

Em geral, para uma função alfa, podemos apontar as caracterizações:

$$\begin{aligned} \alpha_{A,\varphi}(c) &= \min_{\mu \in \mathcal{M}_T} \int (\langle c, \varphi \rangle - A) d\mu \\ &= \sup_{f \in C^0(X)} \min_{x \in X} (\langle c, \varphi \rangle - A + f - f \circ T)(x) \\ &= \inf_{x \in \text{Reg}(\langle c, \varphi \rangle - A, T)} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} S_k(\langle c, \varphi \rangle - A)(x) \\ &= \inf_{x \in X} \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} S_k(\langle c, \varphi \rangle - A)(x), \end{aligned}$$

onde $\text{Reg}(f, T)$ denota simplesmente o conjunto dos pontos $x \in X$ para os quais está assegurada a existência do limite de $k^{-1}S_k f(x)$ quando k tende a infinito. A primeira das igualdades acima, o leitor notará, decorre sem dificuldade da definição da aplicação alfa. A segunda expressão é a versão dual da anterior obtida recentemente por Lucian Radu (veja [31]). A partir da primeira, as duas últimas identidades podem ser asseguradas via o teorema ergódico de Birkhoff. Os detalhistas, se desejarem, podem obtê-las adaptando lemas contidos no trabalho de Brian Rank Hunt e Guo Cheng Yuan (consulte os lemas 2.3 e 2.4 de [15]).

Em relação à representação de uma função beta, sempre verificamos a fórmula dual

$$\beta_{A,\varphi}(h) = \inf_{(f,c) \in C^0(X) \times \mathbb{R}^n} \max_{x \in X} (A + f - f \circ T - \langle c, \varphi - h \rangle)(x).$$

Ao empregar o teorema de dualidade de Fenchel-Rockafellar³, Radu estabeleceu tal igualdade em [31]. A partir desta e das identidades acima, conse-

³No segundo capítulo, em uma situação distinta, usaremos este tipo de argumento para derivar uma fórmula dual (veja o teorema 17).

guimos as caracterizações:

$$\begin{aligned}
\beta_{A,\varphi}(h) &= \inf_{c \in \mathbb{R}^n} \beta_{A-\langle c, \varphi-h \rangle, 0}(0) \\
&= - \sup_{c \in \mathbb{R}^n} \alpha_{A, \varphi-h}(c) \\
&= \inf_{c \in \mathbb{R}^n} \sup_{x \in \text{Reg}(A-\langle c, \varphi-h \rangle, T)} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} S_k(A - \langle c, \varphi - h \rangle)(x) \\
&= \inf_{c \in \mathbb{R}^n} \sup_{x \in X} \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} S_k(A - \langle c, \varphi - h \rangle)(x).
\end{aligned}$$

Por sua vez, o teorema 9 assegura o seguinte para *subshifts* de tipo finito.

Corolário 11: Considere $\varphi \in C^0(\Sigma, \mathbb{Q}^n)$ um vínculo que depende de um número finito de coordenadas e A um potencial Walters. Tomando $r \in \varphi_*(\mathcal{M}_\sigma) \cap \mathbb{Q}^n$, assumamos a existência de uma medida (A, r) -maximizante ergódica, em relação à qual φ é simultaneamente recorrente. Então

$$\beta_{A,\varphi}(r) = \sup \left\{ \int A \, d\mu : \mu \in \varphi_*^{-1}(r), \mu \text{ probabilidade periódica} \right\}.$$

O grau de aplicabilidade do corolário acima, admitamos, fica muito circunscrito diante da necessidade de encontrar probabilidade maximizante em relação à qual o vínculo seja simultaneamente recorrente. Porém, se nos concentramos apenas em vínculos tomando valores em \mathbb{Q} , a proposição 8, como vimos, garante imediatamente a recorrência.

Em todo caso, pode ainda parecer um tanto localizado ou até talvez limitado aproximar valores de pontos racionais de uma aplicação beta unicamente sob a hipótese de existência de probabilidade maximizante ergódica. No entanto, sob pena de, doravante nesta seção, assumir que nosso *subshift* de tipo finito $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é transitivo, temos o resultado a seguir.

Teorema 12: Tome $g \in C^0(\Sigma, \mathbb{R}^n)$ aplicação que depende de um número finito de coordenadas. Todo ponto do interior do conjunto de rotação $g_*(\mathcal{M}_\sigma)$ é vetor de rotação de uma probabilidade ergódica.

Este teorema foi obtido (consulte o teorema 4.6 de [34]) por Ziemian quando a função g depende de duas coordenadas. Por passagem a uma representação em palavras maiores de Σ , o leitor familiarizado com este argumento perceberá que o caso geral se reduz a situação tratada por Ziemian. Aos não habituados, o capítulo inicial de [23] será esclarecedor.

Igualmente é útil deixar patente, clara a importância topológica das aplicações que dependem de um número finito de coordenadas. Para tanto, seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto denso. Se, por alguns instantes, notarmos $\mathcal{F}_j(D)$ a coleção das funções de $C^0(\Sigma, D)$ que dependem de $j+1$ coordenadas, facilmente constatamos que $\bigcup \mathcal{F}_j(D)$ é denso em $C^0(\Sigma, \mathbb{R}^n)$. Mais ainda, dada aplicação $g \in C^0(\Sigma, \mathbb{R}^n)$, sem dificuldade podemos construir seqüência $\{g_j\}$ convergente a g tal que $g_j \in \mathcal{F}_j(D)$ para cada índice $j \geq 0$.

Proposição 13: Suponha $\varphi \in C^0(\Sigma, \mathbb{Q})$ um vínculo que depende de um número finito de coordenadas e A um potencial Walters. Considere um número racional $r \in \text{int}(\varphi_*(\mathcal{M}_\sigma))$. Para qualquer $\epsilon > 0$, há probabilidade periódica $\mu \in \varphi_*^{-1}(r)$ tal que $\beta_{A,\varphi}(r) - \epsilon < \int A d\mu$.

Prova:

Levando em conta o teorema 9, fixado $\epsilon > 0$, basta assegurar a existência de uma probabilidade ergódica ν com número de rotação r satisfazendo $\beta_{A,\varphi}(r) - \epsilon < \int A d\nu$. Pondo $\Phi = (\varphi, A)$, a estratégia então reside em empregar o fato do gráfico da aplicação $\beta_{A,\varphi}$ fazer parte do bordo do conjunto de rotação $\Phi_*(\mathcal{M}_\sigma)$. Assim sendo, se este conjunto de rotação se reduz a um segmento, note que a existência de uma probabilidade ergódica tal como solicitada decorre imediatamente do teorema 12.

Resta-nos, portanto, examinar a outra possibilidade: $\text{int}(\Phi_*(\mathcal{M}_\sigma)) \neq \emptyset$. Primeiro, seja $\{A_j\} \subset C^0(\Sigma)$ seqüência convergente a A na qual cada função A_j depende de $j+1$ coordenadas. Note que o gráfico da aplicação $\beta_{A,\varphi}$ é parte do bordo do conjunto de rotação $\Phi_*(\mathcal{M}_\sigma)$. Tome, por conseguinte, $\eta > \beta_{A,\varphi}(r) - \epsilon/2$ tal que $(r, \eta) \in \text{int}(\Phi_*(\mathcal{M}_\sigma))$. Ao colocarmos $\Phi_j = (\varphi, A_j)$, da proposição 3 resulta $(r, \eta) \in \text{int}((\Phi_j)_*(\mathcal{M}_\sigma))$ para índice j suficientemente grande, o qual pode ser suposto inclusive cumprindo $\|A_j - A\|_0 < \epsilon/2$. Pelo teorema 12, existe probabilidade ergódica $\nu \in \mathcal{M}_\sigma$ satisfazendo $(\Phi_j)_*(\nu) = (r, \eta)$, ou melhor, tal que $\varphi_*(\nu) = r$ e $\int A_j d\nu = \eta > \beta_{A,\varphi}(r) - \epsilon/2$. Porém, uma vez que

$$\left| \int A_j d\nu - \int A d\nu \right| \leq \|A_j - A\|_0 < \frac{\epsilon}{2},$$

sucede $\int A d\nu > \beta_{A,\varphi}(r) - \epsilon$. □

Se, após a proposição 7, ainda restavam dúvidas sobre a utilidade de apreciar as aplicações de $C^0(X, \mathbb{R}^n)$ que definem conjuntos de rotação de

interior não vazio, agora tais desconfianças devem ter completamente desaparecido. Entretanto, outra inquietação pode ter de repente surgido. O que caracteriza as funções a serem evitadas? Qual(is) propriedade(s) força(m) $\text{int}(\varphi_*(\mathcal{M}_\sigma)) = \emptyset$?

No contexto em que nos encontramos, há uma resposta satisfatória para esta demanda. Para apresentá-la, todavia, é conveniente trazer à tona mais vocábulos e fatos comuns ao quadro geral. Uma função $g \in C^0(X)$, recordemos, é um cobordo (topológico) quando existir uma aplicação $f \in C^0(X)$ tal que $g = f \circ T - f$. Repare que todo cobordo é trivialmente uma função Walters. Ademais, duas aplicações pertencentes a $C^0(X)$ são ditas cohomólogas caso sua diferença seja um cobordo.

De resultados obtidos por Bousch (em [6], retome o teorema 4 partindo do teorema 1), decorre uma versão do teorema de Livšic particularmente interessante, a saber, uma aplicação $f \in C^0(\Sigma)$ é cohomóloga a uma constante se, e somente se, f é uma função Walters e $\text{int}(f_*(\mathcal{M}_\sigma)) = \emptyset$. Uma função que depende de número finito de coordenadas, convém ressaltar, é um exemplo especial de aplicação Walters.

Corolário 14: Seja $\varphi \in C^0(\Sigma, \mathbb{Q})$ um vínculo que depende de um número finito de coordenadas, não cohomólogo a uma constante. Assuma A um potencial Walters. Para cada $c \in \mathbb{R}$, dado $\epsilon > 0$, existe um número racional $r \in \text{int}(\varphi_*(\mathcal{M}_\sigma))$ e uma probabilidade periódica $\mu \in \varphi_*^{-1}(r)$ satisfazendo $cr - \int A d\mu < \alpha_{A,\varphi}(c) + \epsilon$.

1.4. SUBAÇÕES E DIFERENCIABILIDADE DE FUNÇÕES ALFAS

Obteremos um resultado relacionando o comportamento assintótico de trajetórias otimizadas relativas a certas subações e as diferenciais de uma função alfa. Relembremos que, dado um potencial A , uma aplicação $u \in C^0(X)$ é dita uma subação (para A) se

$$A + u - u \circ T \leq \beta_{A,0}(0) = \max_{\mu \in \mathcal{M}_T} \int A d\mu.$$

Um retrospecto é talvez aconselhável. As construções iniciais de subações se deram no contexto da dinâmica simbólica. Em 1999, em [32], Sergey V. Savchenko publicou um teorema garantindo a existência de subações para potenciais Hölder. Em seguida, para aplicações expansoras do círculo, sucederam-se os trabalhos de Bousch (veja [5]) e de Contreras, Lopes e Thieullen (consulte [10]). Em 2001, ao estudar rotação, entropia e estados

de equilíbrio em [18], Oliver Jenkinson apresentou uma versão mais abrangente do teorema de Savchenko, incluindo todos os potenciais de variação somável. Em continuação a suas respectivas pesquisas, Bousch sintetizou em [6] os resultados precedentes ao determinar subações para potenciais Walters tanto no caso expansivo, quanto no caso hiperbólico, e Lopes e Thieullen (veja [25]) concentraram-se em difeomorfismos de Anosov para estabelecer subações para potenciais Hölder. Convém ainda frisar que a existência de subações pode ser naturalmente discutida no caso de fluxos, como nos mostram, por exemplo, os trabalhos de Lopes e Thieullen [26], de Mark Pollicott e Richard Sharp [30] ou de Artur Oscar Lopes, Vladimir Rosas e Rafael Oswald Ruggiero [24].

Um dos papéis mais importantes desempenhado pelas subações consiste na localização dos suportes das probabilidades maximizantes. Em termos mais claros, se colocamos $A^u = A + u - u \circ T$, sem dificuldade verificamos

$$m_{A,0}(0) = \{ \mu \in \mathcal{M}_T : \text{supp}(\mu) \subset (A^u)^{-1}(\beta_{A,0}(0)) \}.$$

Por sua nítida importância, o conjunto compacto $\mathbb{M}_A(u) = (A^u)^{-1}(\beta_{A,0}(0))$ não escapará de batismo, sendo denominado um conjunto de Mañé⁴. Deste modo, se tomarmos uma aplicação $f \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ com $f(0) = 0$ e definirmos $A_f(x) = A(x) - f(d(x, \mathbb{M}_A(u)))$, observaremos uma propriedade de persistência: $m_{A_f,0}(0) = m_{A,0}(0)$.

Caracterizar qualquer comportamento de subações frente à variação do potencial vem a ser uma questão não elementar. Ainda assim, a proposição a seguir, mesmo guardando sua valia, não escapa do título de amostra de uma resposta rudimentar.

Consideraremos (X, T) uma dinâmica transitiva, expansiva e possuindo número de pré-imagens localmente constante. Lembre que a expansividade é estabelecida a partir da existência de constantes $\zeta > 0$ e $\kappa > 1$ tais que $d(x, y) < \zeta$ implica $\kappa d(x, y) \leq d(T(x), T(y))$. O fato de o número de pré-imagens ser assumido localmente constante indica, então, haver $\xi > 0$ tal que, quando $d(x', y') < \xi$ e $x \in T^{-1}(x')$, podemos determinar $y \in T^{-1}(y')$ cumprindo $d(x, y) < \zeta$.

Recordemos ainda que, para uma aplicação θ -Hölder f , a sua constante de Hölder é simplesmente

$$\text{Höld}_\theta(f) = \sup_{d(x,y)>0} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^\theta}.$$

⁴Tendo seu estudo encontrado inspiração em idéias de Ricardo Mañé para sistemas lagrangianos, esta nomenclatura foi sugerida por Contreras, Lopes e Thieullen em [10].

Como de costume, munimos $C^\theta(X)$ com a norma $\|\cdot\|_\theta = \text{Höld}_\theta(\cdot) + \|\cdot\|_0$.

Proposição 15: Tome (X, T) um sistema dinâmico transitivo, expansivo e possuindo número de pré-imagens localmente constante. Seja $\{B_j\}$ uma seqüência de funções θ -Hölder convergindo em $C^\theta(X)$ a um potencial A . Então, para cada índice j , podemos encontrar uma subação v_j para o potencial B_j , de modo que qualquer ponto de acumulação da seqüência $\{v_j\}$ seja uma subação para A .

Prova:

Basta construir uma seqüência $\{v_j\}$ pré-compacta. Com efeito, como

$$\beta_{B_j,0}(0) \geq B_j + v_j - v_j \circ T,$$

se $u \in C^0(X)$ é um ponto de acumulação de $\{v_j\}$, a simples passagem ao limite mostra que a função u é uma subação para A .

Nada obstante, na situação suposta, dado um potencial θ -Hölder B , é possível estabelecer uma subação v para B que satisfaz

$$|v(x) - v(y)| \leq \frac{\text{Höld}_\theta(B)}{\kappa^\theta - 1} d(x, y)^\theta \text{ se } d(x, y) < \xi \text{ e}$$

$$\|v\|_0 \leq \text{Höld}_\theta(B) \left(\frac{2\xi^\theta}{\kappa^\theta - 1} + K \text{diam}(X)^\theta \right),$$

sendo o inteiro positivo K dependente apenas de ξ . Para uma prova desta afirmação, consulte, por exemplo, a demonstração do teorema 4.7 de [19].

Uma vez que estamos supondo convergência em $C^\theta(X)$, obtemos assim uma seqüência $\{v_j\}$ eqüicontínua e uniformemente limitada, donde pré-compacta. \square

Uma subação u para um potencial θ -Hölder A deve obedecer

$$u(x) - 2u(T(x)) + u(T^2(x)) \geq -\text{Höld}_\theta(A) d(x, T(x))^\theta$$

para todo $x \in \mathbb{M}_A(u)$. De fato, uma vez que

$$(A + u - u \circ T)(x) = \beta_{A,0}(0) \text{ e } (A + u - u \circ T)(T(x)) \leq \beta_{A,0}(0),$$

valida-se a relação de regularidade anterior por simples subtração. Ademais, para ponto x pertencente ao suporte de uma probabilidade maximizante, claramente temos

$$|u(x) - 2u(T(x)) + u(T^2(x))| \leq \text{Höld}_\theta(A) d(x, T(x))^\theta.$$

Bousch foi capaz de construir (veja o teorema 1 de [6]) subação u para potencial Walters A tal que

$$u(y) = \max_{T(x)=y} (A + u - \beta_{A,0}(0))(x). \quad (1)$$

Para tanto, considerou dinâmica (X, T) transitiva e verificando a propriedade de expansão fraca. Lembremos que um sistema dinâmico (X, T) cumpre a propriedade de expansão fraca se a aplicação $T^{-1} : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$ é 1-Lipschitz com respeito a métrica de Hausdorff.

Neste contexto, diremos que uma seqüência $\{x_j\} \subset X$ é uma trajetória ótima (associada ao potencial A) quando $T(x_{j+1}) = x_j$ e

$$u(x_j) = A(x_{j+1}) + u(x_{j+1}) - \beta_{A,0}(0).$$

Em geral, como observado na seção precedente, verificamos a igualdade $\alpha_{A,\varphi}(c) = -\beta_{A-\langle c,\varphi \rangle,0}(0)$. Este é o derradeiro requisito para a formulação do próximo teorema.

Teorema 16: Seja (X, T) um sistema dinâmico transitivo que satisfaz a propriedade de expansão fraca. Considere um potencial Walters $A \in C^0(X)$, bem como um vínculo Walters $\varphi \in C^0(X, \mathbb{R}^n)$. Dada uma trajetória ótima $\{x_j\} \subset X$ associada ao potencial $A - \langle c, \varphi \rangle$, temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \varphi(x_j) = D\alpha_{A,\varphi}(c)$$

desde que a aplicação $\alpha_{A,\varphi}$ seja diferenciável em $c \in \mathbb{R}^n$.

Prova:

Diretamente da definição sucede

$$u_c(x_0) = u_c(x_k) + \sum_{j=0}^{k-1} [A(x_j) - \langle c, \varphi(x_j) \rangle] + \alpha_{A,\varphi}(c).$$

Tome $\rho > 0$ e $\gamma \in \mathbb{R}^n$ com $\|\gamma\| = 1$. Sendo a aplicação $u_{c+\rho\gamma} \in C^0(X)$ uma subação para o potencial $A - \langle c + \rho\gamma, \varphi \rangle$, a qual ainda obedece a identidade (1), constatamos

$$u_{c+\rho\gamma}(x_0) \geq u_{c+\rho\gamma}(x_k) + \sum_{j=0}^{k-1} [A(x_j) - \langle c + \rho\gamma, \varphi(x_j) \rangle] + \alpha_{A,\varphi}(c + \rho\gamma).$$

Por simples subtração, averiguamos

$$\begin{aligned} -2\|u_c - u_{c+\rho\gamma}\|_0 &\leq \sum_{j=0}^{k-1} [\langle \rho\gamma, \varphi(x_j) \rangle + \alpha_{A,\varphi}(c) - \alpha_{A,\varphi}(c + \rho\gamma)] \\ &= \rho \left\langle \sum_{j=0}^{k-1} \varphi(x_j) - kD\alpha_{A,\varphi}(c), \gamma \right\rangle + o(k\rho), \end{aligned}$$

de modo a garantir

$$\rho \left\langle \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \varphi(x_j) - D\alpha_{A,\varphi}(c), \gamma \right\rangle = O\left(\frac{1}{k}\right) + o(\rho).$$

Assim, ao fazer k tender a infinito e em seguida considerar ρ arbitrariamente pequeno, obtemos

$$\left\langle \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \varphi(x_j) - D\alpha_{A,\varphi}(c), \gamma \right\rangle = 0$$

para todo $\gamma \in \mathbb{R}^n$ com $\|\gamma\| = 1$, ou seja,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \varphi(x_j) = D\alpha_{A,\varphi}(c).$$

O mesmo argumento pode ser empregado para o limite inferior. \square

O leitor notará que, na demonstração apresentada, as hipóteses sobre a dinâmica, o potencial e o vínculo são secundárias. O elemento central do raciocínio apóia-se na existência de subações satisfazendo a identidade (1), as quais são denominadas de subações estritas. Portanto, o teorema acima poderia ser reformulado para qualquer contexto no qual a igualdade em questão estivesse assegurada. E isto sequer se restringe à otimização ergódica sobre espaços compactos. Diogo Aguiar Gomes, por exemplo, obteve recentemente resultado análogo (consulte o teorema 6.2 de [13]) ao examinar o problema discreto de Aubry-Mather.

Problema de Aubry-Mather em Dinâmica Simbólica

2.0. DESCRIÇÃO DO MODELO

Um trabalho em via de ser publicado de Artur Oscar Lopes e Philippe Thieullen [27] revela conexões entre a questão variacional de Aubry-Mather em mecânica lagrangiana e aspectos da otimização ergódica em dinâmica simbólica. Por si só, esta aproximação de teorias motiva a propor uma versão do problema de Aubry-Mather para *subshifts* de tipo finito.

Esta, entretanto, não é a única razão para apresentar um novo ambiente para otimização em dinâmica simbólica. Pesquisadores que examinam o modelo da capítulo precedente (X, T, \mathcal{M}_T) buscando inspiração na teoria de Aubry-Mather, por vezes, ressentem-se do impedimento de raciocinar em termos de uma *primeira maximização*, da impossibilidade de introduzir noções como segmentos maximais. (Para aqueles que desconhecem a importância deste ponto de vista variacional na referida teoria, a leitura do artigo sistematizador de Victor Bangert [2] é mais do que recomendada.) Alguns destes matemáticos receberão com contentamento, portanto, a notícia de que tal limitação não está presente no modelo que passamos a expor.

Para tanto, fixamos um alfabeto finito $\mathcal{A} = \{s_1, \dots, s_N\}$. Ao tomarmos $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ um *subshift* de tipo finito, como sempre está subentendida uma matriz de transição determinando as palavras permitidas. Assim, introduzimos o *subshift* dual $\sigma^* : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ utilizando como matriz de transição a transposta da original. É possível, desta forma, identificar o espaço da dinâmica $(\hat{\Sigma}, \hat{\sigma})$, a extensão natural de (Σ, σ) , com um subconjunto de $\Sigma^* \times \Sigma$. De fato, se convencionamos denotar $\mathbf{y} = (\dots, y_1, y_0) \in \Sigma^*$ e $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots) \in \Sigma$, então $\hat{\Sigma}$ será exatamente o conjunto dos pontos $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = (\dots, y_1, y_0 | x_0, x_1, \dots) \in \Sigma^* \times \Sigma$ tais que a palavra (y_0, x_0) é permitida.

Consideremos, para cada inteiro positivo j , aplicação $\tau^j : \hat{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ pondo

$$\tau^j(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \tau_{\mathbf{y}}^j(\mathbf{x}) = (y_{j-1}, \dots, y_0, x_0, x_1, \dots).$$

Observe que $\hat{\sigma}^{-j}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = ((\sigma^*)^j(\mathbf{y}), \tau_{\mathbf{y}}^j(\mathbf{x}))$.

Lembre que \mathcal{M} simboliza o conjunto das probabilidades sobre os borelianos de $\hat{\Sigma}$. Tendo como inspiração as formulações de Gomes [13] para o problema discreto de Aubry-Mather, podemos, a partir da função $\tau = \tau^1$, definir o subconjunto compacto convexo

$$\mathcal{M}_0 = \left\{ \hat{\mu} \in \mathcal{M} : \int_{\hat{\Sigma}} f(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \int_{\hat{\Sigma}} f(\mathbf{x}) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \forall f \in C^0(\Sigma) \right\}.$$

Repare que $\mathcal{M}_{\hat{\sigma}} \subset \mathcal{M}_0$. Além disso, não é difícil constatar que, quando $\mu^* \times \mu \in \mathcal{M}_0$, necessariamente temos $\mu \in \mathcal{M}_\sigma$. Mais ainda, se $\hat{\mu} \in \mathcal{M}_0$, então $\hat{\mu} \circ \pi_1^{-1} \in \mathcal{M}_\sigma$, onde $\pi_1 : \hat{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ é a projeção canônica. De fato, caso $f \in C^0(\Sigma)$, ocorre

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} f \circ \sigma(\mathbf{x}) d(\hat{\mu} \circ \pi_1^{-1})(\mathbf{x}) &= \int_{\hat{\Sigma}} f \circ \sigma(\mathbf{x}) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \\ &= \int_{\hat{\Sigma}} f \circ \sigma(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \int_{\hat{\Sigma}} f(\mathbf{x}) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \int_{\Sigma} f(\mathbf{x}) d(\hat{\mu} \circ \pi_1^{-1})(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

No entanto, \mathcal{M}_0 não contém apenas probabilidades $\hat{\sigma}$ -invariantes. Com efeito, se $\mathbf{x} \in \Sigma$ é um ponto periódico de período M , fixe qualquer subconjunto $\{\mathbf{y}^0, \dots, \mathbf{y}^{M-1}\} \subset \Sigma^*$ respeitando $y_0^j = x_{M-1+j}$ para $0 \leq j \leq M-1$. Logo, é fácil confirmar

$$\hat{\mu} = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} \delta_{\mathbf{y}^j} \times \delta_{\sigma^j(\mathbf{x})} \in \mathcal{M}_0.$$

De um ponto de vista puramente abstrato, para a otimização ergódica há pouca diferença em relação a qual subconjunto compacto convexo das probabilidades sobre os borelianos é feita a maximização. Na verdade, uma adaptação da proposição 10 de [10] assegura que, ao fixar um conjunto compacto convexo $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, uma aplicação Hölder genérica admite uma única probabilidade maximizante em \mathcal{N} . (A caracterização de tal probabilidade, no entanto, pode dar lugar a conjecturas!) De mais a mais, o modelo $(\hat{\Sigma}, \hat{\sigma}, \mathcal{M}_0)$ está subentendido no trabalho de Alexandre Baraviera, Artur Oscar Lopes e Philippe Thieullen sobre um princípio de grandes desvios para estados de equilíbrio de potenciais Hölder (veja [3]).

Por outro lado, se quisermos limitar nossa atenção à maximização da integral de uma função $A \in C^0(\Sigma)$, é importante destacar que nenhum novo valor maximal será encontrado, pois

$$\max_{\hat{\mu} \in \mathcal{M}_0} \int_{\hat{\Sigma}} A(\mathbf{x}) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \max_{\mu \in \mathcal{M}_\sigma} \int_{\Sigma} A(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}).$$

Com efeito, não só temos a correspondência $\hat{\mu} \in \mathcal{M}_0 \mapsto \hat{\mu} \circ \pi_1^{-1} \in \mathcal{M}_\sigma$ preservando a integração em $C^0(\Sigma)$, como observamos a mesma propriedade sendo obedecida pelo mapa $\mu \in \mathcal{M}_\sigma \mapsto \mu \circ \pi_1 \circ \hat{\sigma}^{-1} \in \mathcal{M}_0$.

Tal como no capítulo anterior, se $\varphi \in C^0(\hat{\Sigma}, \mathbb{R}^n)$ possui aplicações coordenadas $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, consideramos o mapa induzido $\varphi_* \in C^0(\mathcal{M}_0, \mathbb{R}^n)$ dado

por $\varphi_*(\hat{\mu}) = \left(\int_{\hat{\Sigma}} \varphi_1(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \dots, \int_{\hat{\Sigma}} \varphi_n(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right)$. Desta maneira, ao supor $A \in C^0(\hat{\Sigma})$, podemos novamente introduzir uma função beta $\beta_{A,\varphi} : \varphi_*(\mathcal{M}_0) \rightarrow \mathbb{R}$ definindo

$$\beta_{A,\varphi}(h) = \max_{\hat{\mu} \in \varphi_*^{-1}(h)} \int_{\hat{\Sigma}} A(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}),$$

bem como uma aplicação alfa $\alpha_{A,\varphi} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ colocando

$$\alpha_{A,\varphi}(c) = \min_{h \in \varphi_*(\mathcal{M}_0)} [\langle c, h \rangle - \beta_{A,\varphi}(h)].$$

Estas funções se comportam da mesma forma que suas restrições a $\mathcal{M}_{\hat{\sigma}}$. Por exemplo, uma aplicação $\beta_{A,\varphi}$ é côncava e contínua em $\varphi_*(\mathcal{M}_0)$ e uma função alfa $\alpha_{A,\varphi}$ ainda é Lipschitz, com $\text{Lip}(\alpha_{A,\varphi}) \leq \|\varphi\|_0$. Mais uma razão para mantermos as denominações anteriores, tal como vínculo para a aplicação φ e potencial para a função A

Na próxima seção, nossa atenção será voltada para a obtenção da identidade dual

$$\beta_{A,0}(0) = \inf_{f \in C^0(\Sigma)} \max_{(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in \hat{\Sigma}} [A(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) - f(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}))].$$

Também nos concentraremos em respostas para a questão implícita, mais precisamente, empregaremos nossos esforços para a construção de aplicações $u \in C^0(\Sigma)$ realizando o ínfimo da expressão anterior. Primeiramente, buscaremos funções satisfazendo

$$u(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y} \in \Sigma_{\mathbf{x}}^*} [u(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) - A(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \beta_{A,0}(0)],$$

onde, para cada ponto $\mathbf{x} \in \Sigma$, denotamos por $\Sigma_{\mathbf{x}}^*$ o subconjunto dos elementos $\mathbf{y} \in \Sigma^*$ tais que $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in \hat{\Sigma}$. Mostraremos que, sob a hipótese de transitividade, para um potencial θ -Hölder A , sempre podemos encontrar uma tal solução dual, uma subação estrita $u \in C^\theta(\Sigma)$. Não nos limitaremos a esta resposta. Ainda para o caso Hölder, porém assumindo topologicamente *mixing* a dinâmica (Σ, σ) , determinaremos subação estrita Hölder de caráter maximal. Ávidos, extrapolaremos estas construções. Novamente no contexto transitivo, introduziremos a barreira de Peierls $S_A : \Sigma \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ para estabelecer uma família a um parâmetro de subações estritas Hölder, a saber, $\{S_A(\mathbf{x}, \cdot)\}_{\mathbf{x} \in \Omega(A)}$, onde $\Omega(A)$ indicará o conjunto dos pontos não-errantes com respeito ao potencial $A \in C^\theta(\hat{\Sigma})$. Todos os conceitos apenas

mencionados, caros leitores, serão evidentemente precisados no momento oportuno.

Adiante, o binômio subação-suporte será alvo de nosso exame. Veremos, por exemplo, propriedade dos suportes de probabilidades pertencentes a \mathcal{M}_0 , bem como de probabilidades maximizantes, ou seja, pertencentes ao conjunto

$$m_{A,0}(0) = \left\{ \hat{\mu} \in \mathcal{M}_0 : \int_{\hat{\Sigma}} A(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \beta_{A,0}(0) \right\}.$$

Os principais resultados desta seção, no entanto, começarão a ser revelados quando argumentarmos que uma subação estrita $u \in C^0(\Sigma)$ para um potencial $A \in C^\theta(\hat{\Sigma})$ deve cumprir a identidade

$$u(\bar{\mathbf{x}}) = \inf_{\mathbf{x} \in \Omega(A)} [u(\mathbf{x}) + S_A(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})].$$

Sob a hipótese de transitividade, este teorema e sua recíproca permitirão, via uma bijeção isométrica, caracterizar o conjunto das subações estritas para um potencial Hölder. Ainda neste contexto, voltaremos então o foco para o suporte de probabilidades maximizantes mostrando que $\hat{\mu} \in m_{A,0}(0)$ com $\hat{\mu} \circ \pi_1^{-1}$ ergódica implica $\pi_1(\text{supp}(\hat{\mu})) \subset \Omega(A)$. Isto nos conduzirá espontaneamente a outras questões, como, por exemplo, a possibilidade de refinar conjuntos de Mañé.

Enfim, ressalva-se que adotaremos a simplicidade estética. Uma vez que, neste capítulo, a ênfase não mais estará concentrada em aspectos de maximização relativa, empregaremos preferencialmente as notações β_A e m_A no lugar de $\beta_{A,0}(0)$ e $m_{A,0}(0)$.

2.1. PERGUNTA DUAL E RESPOSTAS

Iniciamos enunciando a primeira meta desta seção.

Teorema 17: Seja um potencial $A \in C^0(\hat{\Sigma})$. Então obtemos

$$\beta_A = \inf_{f \in C^0(\Sigma)} \max_{(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in \hat{\Sigma}} [A(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) - f(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}))].$$

Este teorema é apenas uma consequência do teorema de dualidade de Fenchel-Rockafellar. Além disso, resultado similar foi estabelecido por Radu [31] para o modelo habitual (X, T, \mathcal{M}_T) .

Sejamos, não obstante, explícitos. Primeiro tomemos correspondência convexa $F : C^0(\hat{\Sigma}) \rightarrow \mathbb{R}$ colocando $F(g) = \max(A + g)$. Considere, por conseguinte, o subconjunto

$$\mathcal{C} = \{g \in C^0(\hat{\Sigma}) : g(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) \text{ para certa } f \in C^0(\Sigma)\}.$$

Com isto, estabelecemos correspondência côncava $G : C^0(\hat{\Sigma}) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ fazendo $G(g) = 0$ se $g \in \bar{\mathcal{C}}$ e simplesmente $G(g) = -\infty$ caso contrário.

Seja \mathcal{S} o conjunto das medidas com sinal sobre os borelianos de $\hat{\Sigma}$. Recorde que as respectivas transformadas de Fenchel, $F^* : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e $G^* : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, são definidas pondo

$$F^*(\hat{\mu}) = \sup_{g \in C^0(\hat{\Sigma})} \left[\int_{\hat{\Sigma}} g(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - F(g) \right] \text{ e}$$

$$G^*(\hat{\mu}) = \inf_{g \in C^0(\hat{\Sigma})} \left[\int_{\hat{\Sigma}} g(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - G(g) \right].$$

Escrevendo, então,

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \hat{\mu} \in \mathcal{S} : \int_{\hat{\Sigma}} f(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \int_{\hat{\Sigma}} f(\mathbf{x}) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \forall f \in C^0(\Sigma) \right\},$$

temos o seguinte resultado.

Lema 18: Mantidas as notações acima, verificamos

$$F^*(\hat{\mu}) = \begin{cases} - \int_{\hat{\Sigma}} A(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) & \text{se } \hat{\mu} \in \mathcal{M} \\ +\infty & \text{caso contrário} \end{cases} \text{ e}$$

$$G^*(\hat{\mu}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \hat{\mu} \in \mathcal{S}_0 \\ -\infty & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Prova:

Assumamos que $\hat{\mu} \in \mathcal{S}$ seja não positiva, isto é, que atribua medida negativa a algum boreliano. Assim, podemos determinar uma seqüência $\{g_j\} \subset C^0(\hat{\Sigma}, \mathbb{R}^-)$ com $\lim \int_{\hat{\Sigma}} g_j(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = +\infty$. Uma vez que $F(g_j) \leq F(0) < +\infty$, isto garante $F^*(\hat{\mu}) = +\infty$.

Suponhamos, então, $\hat{\mu} \in \mathcal{S}$ tal que $\hat{\mu} \geq 0$ e $\hat{\mu}(\hat{\Sigma}) \neq 1$. Neste caso, observamos

$$\begin{aligned} \sup_{g \in C^0(\hat{\Sigma})} \left[\int_{\hat{\Sigma}} g(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - F(g) \right] &\geq \sup_{a \in \mathbb{R}} \left[\int_{\hat{\Sigma}} a d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - F(a) \right] \\ &= \sup_{a \in \mathbb{R}} \left[a(\hat{\mu}(\hat{\Sigma}) - 1) - F(0) \right] = +\infty. \end{aligned}$$

Por outro lado, quando consideramos $\hat{\mu} \in \mathcal{M}$, diretamente da desigualdade $\int_{\hat{\Sigma}} A(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \int_{\hat{\Sigma}} g(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \leq F(g)$ advém

$$- \int_{\hat{\Sigma}} A(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \geq \sup_{g \in C^0(\hat{\Sigma})} \left[\int_{\hat{\Sigma}} g(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - F(g) \right].$$

Uma vez que $F(-A) = 0$, isto encerra a caracterização da transformada F^* .

Quanto à aplicação G^* , se $\hat{\mu} \notin \mathcal{S}_0$, há função $f \in C^0(\Sigma)$ tal que $\int_{\hat{\Sigma}} f(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \neq \int_{\hat{\Sigma}} f(\mathbf{x}) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. Logo, temos

$$\begin{aligned} G^*(\hat{\mu}) &= \inf_{g \in \mathcal{C}} \int_{\hat{\Sigma}} g(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \\ &\leq \inf_{a \in \mathbb{R}} a \int_{\hat{\Sigma}} [f(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) - f(\mathbf{x})] d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -\infty. \end{aligned}$$

Ademais, para $\hat{\mu} \in \mathcal{S}_0$, claramente $G^*(\hat{\mu}) = 0$. □

Este lema contém toda a informação que precisamos para obter a expressão dual da constante $\beta_A = \max_{\hat{\mu} \in \mathcal{M}_0} \int_{\hat{\Sigma}} A(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

Prova do Teorema 17:

Uma vez que a correspondência F é Lipschitz, o teorema de dualidade de Fenchel-Rockafellar assegura

$$\sup_{g \in C^0(\hat{\Sigma})} [G(g) - F(g)] = \inf_{\hat{\mu} \in \mathcal{S}} [F^*(\hat{\mu}) - G^*(\hat{\mu})].$$

Desta forma, pelo lema 18,

$$\sup_{g \in \mathcal{C}} \left[- \max_{(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in \hat{\Sigma}} (A + g)(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right] = \inf_{\hat{\mu} \in \mathcal{M}_0} \left[- \int_{\hat{\Sigma}} A(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right].$$

E a definição do conjunto \mathcal{C} permite, enfim, estabelecer a identidade requerida. \square

A exemplo do trabalho de Radu (consulte [31]), empregando uma argumentação um pouco mais refinada, temos a fórmula dual para uma aplicação beta

$$\beta_{A,\varphi}(h) = \inf_{(f,c) \in C^0(\Sigma) \times \mathbb{R}^n} \max_{(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in \hat{\Sigma}} (A + f \circ \pi_1 - f \circ \pi_1 \circ \hat{\sigma}^{-1} - \langle c, \varphi - h \rangle)(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

De qualquer modo, a igualdade descortinada pelo teorema 17 merece por si só nossa análise. Efetivamente, esta traz uma pergunta natural. Podemos encontrar funções realizando o ínfimo da expressão dual? De maneira equivalente, há aplicação $u \in C^0(\Sigma)$ tal que

$$A + u \circ \pi_1 - u \circ \pi_1 \circ \hat{\sigma}^{-1} \leq \beta_A?$$

Por mera extrapolação, denominaremos uma tal solução u da questão dual também de subação (para A). O próximo resultado garantirá a existência de subação para um potencial θ -Hölder, mais ainda, como alertado na seção introdutória deste capítulo, esta primeira resposta respeitará uma identidade funcional.

Teorema 19: Seja $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ um *subshift* de tipo finito transitivo. Para cada potencial $A \in C^\theta(\hat{\Sigma})$, há uma aplicação $u \in C^\theta(\Sigma)$ cumprindo

$$u(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y} \in \Sigma_{\mathbf{x}}^*} [u(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) - A(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \beta_A]. \quad (2)$$

Prova:

Dado $\rho \in (0, 1]$, definimos o operador não linear $\mathcal{L}_\rho : C^0(\Sigma) \rightarrow C^0(\Sigma)$ colocando

$$\mathcal{L}_\rho(f)(\mathbf{x}) = \rho \min_{\mathbf{y} \in \Sigma_{\mathbf{x}}^*} [f(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) - A(\mathbf{y}, \mathbf{x})].$$

Uma vez que \mathcal{L}_ρ é ρ -Lipschitz, considere, quando $0 < \rho < 1$, seu ponto fixo $u_\rho \in C^0(\Sigma)$.

O primeiro fato a ser notado é a equicontinuidade da família $\{u_\rho\}$. Com efeito, observe que $\Sigma_{\mathbf{x}^0}^* = \Sigma_{\bar{\mathbf{x}}^0}^*$ quando $d(\mathbf{x}^0, \bar{\mathbf{x}}^0) \leq \lambda$. Assim, se tomamos $\mathbf{y}^0 \in \Sigma_{\mathbf{x}^0}^*$ satisfazendo $u_\rho(\mathbf{x}^0) = \rho[u_\rho(\tau_{\mathbf{y}^0}(\mathbf{x}^0)) - A(\mathbf{y}^0, \mathbf{x}^0)]$, imediatamente temos $u_\rho(\bar{\mathbf{x}}^0) \leq \rho[u_\rho(\tau_{\mathbf{y}^0}(\bar{\mathbf{x}}^0)) - A(\mathbf{y}^0, \bar{\mathbf{x}}^0)]$. Logo, pondo $\mathbf{x}^1 = \tau_{\mathbf{y}^0}(\mathbf{x}^0)$ e $\bar{\mathbf{x}}^1 = \tau_{\mathbf{y}^0}(\bar{\mathbf{x}}^0)$, verificamos a desigualdade

$$u_\rho(\bar{\mathbf{x}}^0) - u_\rho(\mathbf{x}^0) \leq \rho[A(\mathbf{y}^0, \mathbf{x}^0) - A(\mathbf{y}^0, \bar{\mathbf{x}}^0)] + \rho[u_\rho(\bar{\mathbf{x}}^1) - u_\rho(\mathbf{x}^1)].$$

Desta forma, ao fazer $\mathbf{x}^j = \tau_{\mathbf{y}^{j-1}}(\mathbf{x}^{j-1})$ e $\bar{\mathbf{x}}^j = \tau_{\mathbf{y}^{j-1}}(\bar{\mathbf{x}}^{j-1})$, prosseguimos indutivamente obtendo $\mathbf{y}^j \in \Sigma_{\mathbf{x}^j}^*$ tal que $u_\rho(\mathbf{x}^j) = \rho[u_\rho(\tau_{\mathbf{y}^j}(\mathbf{x}^j)) - A(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j)]$. Como conseqüência desta construção, resulta

$$u_\rho(\bar{\mathbf{x}}^0) - u_\rho(\mathbf{x}^0) \leq \sum_{j=0}^{k-1} \rho^{j+1} [A(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j) - A(\mathbf{y}^j, \bar{\mathbf{x}}^j)] + \rho^k [u_\rho(\bar{\mathbf{x}}^k) - u_\rho(\mathbf{x}^k)],$$

de modo que

$$\begin{aligned} u_\rho(\bar{\mathbf{x}}^0) - u_\rho(\mathbf{x}^0) &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{j+1} [A(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j) - A(\mathbf{y}^j, \bar{\mathbf{x}}^j)] \\ &\leq \text{Höld}_\theta(A) \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{j+1} d(\mathbf{x}^j, \bar{\mathbf{x}}^j)^\theta \\ &\leq \text{Höld}_\theta(A) d(\mathbf{x}^0, \bar{\mathbf{x}}^0)^\theta \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{j+1} \lambda^{j\theta} \\ &= \frac{\rho \text{Höld}_\theta(A)}{1 - \rho \lambda^\theta} d(\mathbf{x}^0, \bar{\mathbf{x}}^0)^\theta. \end{aligned}$$

Desta majoração segue que a família $\{u_\rho\}$ é uniformemente θ -Hölder (em particular, equicontínua).

Outro aspecto a destacar é a oscilação uniformemente limitada desta coleção de pontos fixos. De fato, repare que, para todo $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in \hat{\Sigma}$,

$$\begin{aligned} u_\rho(\mathbf{x}) - \min u_\rho &\leq \rho[u_\rho(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) - A(\mathbf{y}, \mathbf{x})] - \min \rho[u_\rho \circ \pi_1 \circ \hat{\sigma}^{-1} - A] \\ &\leq \rho[\max A - A(\mathbf{y}, \mathbf{x})] + \rho[u_\rho(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) - \min u_\rho] \\ &\leq \text{Höld}_\theta(A) + u_\rho(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) - \min u_\rho. \end{aligned}$$

Lembre que (Σ, σ) é um sistema dinâmico transitivo. Podemos, então, determinar um conjunto finito $\{(\mathbf{y}^j, k_j)\} \subset \Sigma^* \times \mathbb{N}$ escolhendo, para cada par de símbolos $s, s' \in \mathcal{A}$, uma palavra permitida $(y_{k_j-1}^j, \dots, y_0^j)$ tal que $y_{k_j-1}^j = s'$ e (y_0^j, s) é palavra permitida. Por conseguinte, dado $\mathbf{x} \in \Sigma$ com $x_0 = s$, a desigualdade

$$u_\rho(\mathbf{x}) - \min u_\rho \leq k_j \text{Höld}_\theta(A) + u_\rho(\tau_{\mathbf{y}^j}^{k_j}(\mathbf{x})) - \min u_\rho$$

assegura

$$\max_{x_0=s, \bar{x}_0=s'} [u_\rho(\mathbf{x}) - u_\rho(\bar{\mathbf{x}})] \leq k_j \text{Höld}_\theta(A) + \frac{\text{Höld}_\theta(A)}{1 - \lambda^\theta} \lambda^\theta.$$

Portanto, ao colocar $K = \max k_j$, deduzimos

$$\max_{\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} \in \Sigma} [u_\rho(\mathbf{x}) - u_\rho(\bar{\mathbf{x}})] \leq \left(K + \frac{\lambda^\theta}{1 - \lambda^\theta} \right) \text{Höld}_\theta(A),$$

isto é, a família $\{u_\rho\}$ possui oscilação uniformemente limitada.

Em conseqüência, a família $\{u_\rho - \max u_\rho\}$ é pré-compacta. Note que temos $u_\rho - \max u_\rho = (\rho - 1) \max u_\rho + \mathcal{L}_\rho(u_\rho - \max u_\rho)$. Daí, se a aplicação u (necessariamente θ -Hölder) é um ponto de acumulação de $\{u_\rho - \max u_\rho\}$ quando ρ tende a 1, vale $u = a + \mathcal{L}_1(u)$ para uma constante $a \in \mathbb{R}$.

Falta mostrar que $a = \beta_A$. Seja $\tilde{A} = A + u \circ \pi_1 - u \circ \pi_1 \circ \hat{\sigma}^{-1}$. Como $\tilde{A} \leq a$, para $\hat{\mu} \in \mathcal{M}_0$ ocorre

$$\int_{\hat{\Sigma}} A(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \int_{\hat{\Sigma}} \tilde{A}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \leq a,$$

donde $\beta_A \leq a$. Demais, note que

$$a = \max_{\mathbf{y} \in \Sigma_{\mathbf{x}}^*} \tilde{A}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma.$$

Deste modo, dado $\mathbf{x}^0 \in \Sigma$, tome $\mathbf{y}^0 \in \Sigma_{\mathbf{x}^0}^*$ cumprindo $\tilde{A}(\mathbf{y}^0, \mathbf{x}^0) = a$. Ao pôr $\mathbf{x}^j = \tau_{\mathbf{y}^{j-1}(x^{j-1})}$, indutivamente considere $\mathbf{y}^j \in \Sigma_{\mathbf{x}^j}^*$ tal que $\tilde{A}(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j) = a$. Seja, então, $\hat{\mu} \in \mathcal{M}$ um ponto de acumulação da seqüência de probabilidades

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \delta_{(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j)}.$$

Claramente vale $\int_{\hat{\Sigma}} \tilde{A}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = a$. Logo, se comprovarmos $\hat{\mu} \in \mathcal{M}_0$, teremos $a \leq \beta_A$. No entanto, eis que, para qualquer $f \in C^0(\Sigma)$, ocorre

$$\begin{aligned} \left| \int_{\hat{\Sigma}} [f(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) - f(\mathbf{x})] d\hat{\mu}_k(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right| &= \frac{1}{k} \left| \sum_{j=0}^{k-1} [f(\tau_{\mathbf{y}^j}(\mathbf{x}^j)) - f(\mathbf{x}^j)] \right| \\ &= \frac{1}{k} \left| f(\mathbf{x}^k) - f(\mathbf{x}^0) \right| \leq \frac{2}{k} \|f\|_0, \end{aligned}$$

a simples passagem ao limite garante que $\hat{\mu} \in \mathcal{M}_0$. □

O resultado acima pode ser visto como análogo ao famoso teorema estabelecido por Albert Fathi no contexto dos fluxos lagrangianos (veja [11]). Em otimização ergódica sobre espaços compactos, mais especificamente para

sistemas dinâmicos transitivos que satisfaçam a propriedade de expansão fraca, Bousch (consulte [6]) explorou, tal como acabamos de fazer, a idéia de construir subações a partir de pontos de acumulação associados a uma família de pontos fixos de contrações.

A bem da verdade, a marca de generalização do teorema anterior é indisfarçável. De fato, ao tomar um potencial $A \in C^\theta(\Sigma)$, notemos que $A \circ \tau \in C^\theta(\hat{\Sigma})$. Portanto, sob a hipótese de transitividade, asseguramos a existência de uma aplicação $u \in C^\theta(\Sigma)$ satisfazendo

$$u(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y} \in \Sigma_{\mathbf{x}}^*} [u(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) - A \circ \tau(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \beta_{A \circ \tau}].$$

Como $\beta_{A \circ \tau} = \beta_A = \max_{\mu \in \mathcal{M}_\sigma} \int_{\Sigma} A(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x})$, pondo $\mathbf{z} = \tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$, tombamos sobre situações familiares:

$$u(\mathbf{x}) = \min_{\sigma(\mathbf{z})=\mathbf{x}} (u - A + \beta_A)(\mathbf{z}).$$

Mais importante do que as inspirações são as aplicações do teorema 19. Olhando atentamente para sua demonstração, fica evidente que poderíamos apresentar um resultado semelhante à proposição 15. Além disso, como a igualdade $\alpha_{A,\varphi}(c) = -\beta_{A-\langle c,\varphi \rangle,0}(0)$ é preservada na formulação atual, podemos sem dificuldade assegurar a versão do teorema 16 deste contexto. Por simples analogia, quando contarmos com uma subação $u \in C^0(\Sigma)$ obedecendo a igualdade funcional (2), adotaremos a expressão subação estrita para a esta nos referir. Dizemos ainda que a seqüência $\{\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j\} \subset \hat{\Sigma}$ é uma trajetória ótima (associada ao potencial A) caso aconteça $\mathbf{x}^j = \tau_{\mathbf{y}^{j-1}}(\mathbf{x}^{j-1})$ e valha $u(\mathbf{x}^j) = u(\mathbf{x}^{j+1}) - A(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j) + \beta_{A,0}(0)$. Assim, sob a hipótese de transitividade, se o potencial A e o vínculo φ são Hölder, toda trajetória ótima $\{\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j\}$ associada a $A - \langle c, \varphi \rangle$ deve cumprir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \varphi(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j) = D\alpha_{A,\varphi}(c)$$

desde que a função $\alpha_{A,\varphi}$ seja diferenciável no ponto $c \in \mathbb{R}^n$.

O rápido vislumbre do poderio do teorema 19 talvez já chame a atenção. Nada obstante, não contentes com apenas uma solução para a pergunta dual, formularemos uma segunda resposta. Para tanto, recorde que um sistema dinâmico topológico (X, T) é dito topologicamente *mixing* se, para quaisquer conjuntos abertos não-vazios $D, E \subset X$, há inteiro $K > 0$ tal que $T^k(D) \cap E \neq \emptyset$ para todo $k > K$.

Proposição 20: Considere $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ um *subshift* de tipo finito topologicamente *mixing*. Tome um potencial $A \in C^\theta(\hat{\Sigma})$. Então existe uma subação estrita $u_A \in C^\theta(\Sigma, \mathbb{R}^-)$ tal que, para uma subação $u \in C^0(\Sigma, \mathbb{R}^-)$ arbitrária, acontece $u_A \geq u$.

Uma subação dada como acima (não necessariamente Hölder, tampouco obrigatoriamente estrita) chamaremos de subação maximal.

Prova:

Sem perda de generalidade, podemos assumir $\beta_A = 0$. Daí, para cada $\mathbf{x} \in \Sigma$, coloque

$$u_A(\mathbf{x}) = \inf \left\{ - \sum_{j=0}^{k-1} A(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j) : k \geq 0, \mathbf{x}^0 = \mathbf{x}, \mathbf{y}^j \in \Sigma_{\mathbf{x}^j}^*, \mathbf{x}^{j+1} = \tau_{\mathbf{y}^j}(\mathbf{x}^j) \right\}.$$

(Convencionamos soma nula no caso $k = 0$.)

Suponha momentaneamente que, além da boa definição, está assegurada a regularidade Hölder da aplicação u_A . Note então que, pondo $\mathbf{y}^0 = \mathbf{y}$ e $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}$, ocorre

$$\begin{aligned} A(\mathbf{y}, \mathbf{x}) &= \sum_{j=0}^k A(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j) - \sum_{j=0}^{k-1} A(\mathbf{y}^{j+1}, \mathbf{x}^{j+1}) \\ &\leq - \sum_{j=0}^{k-1} A(\mathbf{y}^{j+1}, \mathbf{x}^{j+1}) - u_A(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Claramente $\mathbf{x}^1 = \tau_{\mathbf{y}^0}(\mathbf{x}^0) = \tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$. Deste modo, como a desigualdade vale para todo inteiro $k \geq 0$ e quaisquer pontos $(\mathbf{y}^1, \mathbf{x}^1), \dots, (\mathbf{y}^k, \mathbf{x}^k) \in \hat{\Sigma}$ tais que $\mathbf{x}^{j+1} = \tau_{\mathbf{y}^j}(\mathbf{x}^j)$, decorre $A(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \leq u_A(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) - u_A(\mathbf{x})$, isto é, u_A é uma subação para o potencial A .

Na realidade, estamos diante de uma subação estrita. Basta observar que, para cada $\mathbf{x} \in \Sigma$, podemos determinar um ponto $\mathbf{y} \in \Sigma_{\mathbf{x}}^*$ tal que $A(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \geq u_A(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) - u_A(\mathbf{x})$. De fato, fixado $\rho > 0$, tome pontos $(\mathbf{y}^0, \mathbf{x}^0), \dots, (\mathbf{y}^{k-1}, \mathbf{x}^{k-1}) \in \hat{\Sigma}$, com $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}$ e $\mathbf{x}^{j+1} = \tau_{\mathbf{y}^j}(\mathbf{x}^j)$, satisfazendo

$$- \sum_{j=0}^{k-1} A(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j) < u_A(\mathbf{x}) + \rho.$$

Temos, portanto, uma família $\{\mathbf{y}^0\}_{\rho>0} \subset \Sigma_{\mathbf{x}}^*$. Seja \mathbf{y} um ponto de acumulação desta família quando ρ tende a zero. Uma vez que

$$u_A(\tau_{\mathbf{y}^0}(\mathbf{x})) - A(\mathbf{y}^0, \mathbf{x}) \leq - \sum_{j=0}^{k-1} A(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j),$$

a passagem ao limite produz $u_A(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) - A(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \leq u_A(\mathbf{x})$.

Vejamus agora que a aplicação u_A foi bem definida. Recorde que, quando $\bar{\mathbf{x}} \in \Sigma$ é um ponto periódico de período k , elegidos pontos $\bar{\mathbf{y}}^j \in \Sigma^*$ com

$$\bar{\mathbf{y}}_0^j = \bar{\mathbf{x}}_{k-(j+1)}, \text{ temos } \hat{\mu} = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \delta_{\bar{\mathbf{y}}^j} \times \delta_{\sigma^{k-j}(\bar{\mathbf{x}})} \in \mathcal{M}_0. \text{ Portanto,}$$

$$- \sum_{j=0}^{k-1} A(\bar{\mathbf{y}}^j, \sigma^{k-j}(\bar{\mathbf{x}})) = -k \int_{\hat{\Sigma}} A(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \geq 0.$$

Mantendo este fato em mente, dado $\mathbf{x} \in \Sigma$, escolha livremente pontos $(\mathbf{y}^0, \mathbf{x}^0), \dots, (\mathbf{y}^{k-1}, \mathbf{x}^{k-1}) \in \hat{\Sigma}$ cumprindo $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}$ e $\mathbf{x}^{j+1} = \tau_{\mathbf{y}^j}(\mathbf{x}^j)$. Como (Σ, σ) é topologicamente *mixing*, existe um inteiro $K > 0$ tal que, caso $k > K$, podemos encontrar um ponto periódico $\bar{\mathbf{x}}$ de período k satisfazendo $d(\mathbf{x}^k, \bar{\mathbf{x}}) < \lambda^{k-K}$, onde $\mathbf{x}^k = \tau_{\mathbf{y}^{k-1}}(\mathbf{x}^{k-1})$. Assim, ao fazer $\bar{\mathbf{y}}^j = \mathbf{y}^j$ quando $K \leq j \leq k-1$, segue

$$\left| \sum_{j=0}^{k-1} A(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j) - \sum_{j=0}^{k-1} A(\bar{\mathbf{y}}^j, \sigma^{k-j}(\bar{\mathbf{x}})) \right| \leq \frac{\text{Höld}_\theta(A)}{1 - \lambda^\theta} + 2K\|A\|_0,$$

donde imediatamente u_A resulta bem definida.

A aplicação u_A é, na verdade, θ -Hölder. Com efeito, fixados $\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} \in \Sigma$ com $d(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \leq \lambda$, considere mais uma vez pontos $(\mathbf{y}^0, \mathbf{x}^0), \dots, (\mathbf{y}^{k-1}, \mathbf{x}^{k-1}) \in \hat{\Sigma}$ obedecendo $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}$ e $\mathbf{x}^{j+1} = \tau_{\mathbf{y}^j}(\mathbf{x}^j)$. Sendo assim, ao colocar $\bar{\mathbf{x}}^0 = \bar{\mathbf{x}}$, faça $\bar{\mathbf{x}}^{j+1} = \tau_{\mathbf{y}^j}(\bar{\mathbf{x}}^j)$. Logo, eis que

$$\left| \sum_{j=0}^{k-1} A(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j) - \sum_{j=0}^{k-1} A(\mathbf{y}^j, \bar{\mathbf{x}}^j) \right| \leq \frac{\text{Höld}_\theta(A)}{1 - \lambda^\theta} d(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})^\theta,$$

a arbitrariedade da coleção $\{(\mathbf{x}^j, \mathbf{y}^j)\}$ assegura

$$|u_A(\mathbf{x}) - u_A(\bar{\mathbf{x}})| \leq \frac{\text{Höld}_\theta(A)}{1 - \lambda^\theta} d(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})^\theta.$$

Tampouco há dificuldade em comprovar o caráter maximal da subação u_A . Basta perceber que qualquer subação $u \in C^0(\Sigma, \mathbb{R}^-)$ verifica

$$u(\mathbf{x}) \leq u(\tau_{\mathbf{y}^{k-1}}(\mathbf{x}^{k-1})) - \sum_{j=0}^{k-1} A(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j) \leq - \sum_{j=0}^{k-1} A(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j)$$

quando $k \geq 0$, $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}$, $\mathbf{y}^j \in \Sigma_{\mathbf{x}^j}^*$ e $\mathbf{x}^{j+1} = \tau_{\mathbf{y}^j}(\mathbf{x}^j)$. \square

Apesar da proposição anterior, não é evidente que devemos presumir a existência de uma subação de caráter minimal. De qualquer modo, se supomos transitividade, dado um potencial $A \in C^\theta(\hat{\Sigma})$, uma abordagem inicial a esta ponderação é fornecida pela função $U_A^{K,\theta} \in C^\theta(\Sigma)$ definida simplesmente por

$$U_A^{K,\theta} = \inf\{u \in C^\theta(\Sigma) : u \text{ subação para } A, \text{Höld}_\theta(u) \leq K, \max u = 0\}.$$

Certamente a subação $U_A^{K,\theta}$ guarda certo aspecto minimal!

Tal como no trabalho de Contreras, Lopes e Thieullen [10], avolumam-se analogias com conceitos de mecânica lagrangiana. Assim, chamaremos de caminho começando, a menos de $\epsilon > 0$, em $\mathbf{x} \in \Sigma$ e terminando em $\bar{\mathbf{x}} \in \Sigma$ a quaisquer pontos $(\mathbf{y}^0, \mathbf{x}^0), \dots, (\mathbf{y}^{k-1}, \mathbf{x}^{k-1}) \in \hat{\Sigma}$ satisfazendo $\mathbf{x}^0 = \bar{\mathbf{x}}$, $\mathbf{x}^{j+1} = \tau_{\mathbf{y}^j}(\mathbf{x}^j)$ e $d(\tau_{\mathbf{y}^{k-1}}(\mathbf{x}^{k-1}), \mathbf{x}) < \epsilon$. Designaremos por $\mathcal{P}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, \epsilon)$ o conjunto de tais caminhos.

Um ponto $\mathbf{x} \in \Sigma$ será classificado como não-errante com respeito a um potencial $A \in C^0(\hat{\Sigma})$ quando, para todo $\epsilon > 0$, pudermos determinar um caminho $\{(\mathbf{y}^0, \mathbf{x}^0), \dots, (\mathbf{y}^{k-1}, \mathbf{x}^{k-1})\} \in \mathcal{P}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \epsilon)$ tal que

$$\left| \sum_{j=0}^{k-1} (A - \beta_A)(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j) \right| < \epsilon.$$

Denotaremos por $\Omega(A)$ o conjunto dos pontos não-errantes com respeito a A . Quando o potencial é Hölder, não é difícil averiguar que $\Omega(A)$ é um conjunto compacto invariante. Convém ressaltar também que se trata de um conjunto não vazio.

Lema 21: Se $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é um *subshift* de tipo finito transitivo, então, para todo potencial $A \in C^\theta(\hat{\Sigma})$, resulta $\Omega(A) \neq \emptyset$.

Prova:

Seja $u \in C^0(\Sigma)$ subação assegurada pelo teorema 19. Dado $\mathbf{x}^0 \in \Sigma$, tome $\mathbf{y}^0 \in \Sigma_{\mathbf{x}^0}^*$ satisfazendo a identidade $u(\mathbf{x}^0) = u(\tau_{\mathbf{y}^0}(\mathbf{x}^0)) - A(\mathbf{y}^0, \mathbf{x}^0) + \beta_A$. Ao

escrever $\mathbf{x}^{j+1} = \tau_{\mathbf{y}^j}(\mathbf{x}^j)$, prossiga de maneira indutiva determinando um ponto $\mathbf{y}^{j+1} \in \Sigma_{\mathbf{x}^{j+1}}^*$ tal que $u(\mathbf{x}^{j+1}) = u(\tau_{\mathbf{y}^{j+1}}(\mathbf{x}^{j+1})) - A(\mathbf{y}^{j+1}, \mathbf{x}^{j+1}) + \beta_A$. Seja, por conseguinte, $\mathbf{x} \in \Sigma$ limite de uma subsequência $\{\mathbf{x}^{j_m}\}$.

Vejamus que $\mathbf{x} \in \Omega(A)$. Antes de qualquer argumento, observe que, caso $m_2 > m_1$, a definição da seqüência $\{\mathbf{x}^j\}$ fornece

$$- \sum_{j=j_{m_1}}^{j_{m_2}-1} (A - \beta_A)(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j) = u(\mathbf{x}^{j_{m_1}}) - u(\mathbf{x}^{j_{m_2}}).$$

Fixado $\epsilon > 0$, considere inteiro $l > 0$ tal que $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \Sigma$ e $d(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') < \lambda^l$ implicam $|u(\mathbf{x}') - u(\mathbf{x}'')| < \epsilon/2$. Podemos supor l tão grande quanto preciso de modo a também validar

$$\max \left\{ \lambda^l, \frac{\text{Höld}_\theta(A)}{1 - \lambda^\theta} \lambda^{\theta l} \right\} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Desta forma, considere um índice m_0 suficientemente grande assegurando $d(\mathbf{x}^{j_m}, \mathbf{x}) < \lambda^l/2$ para qualquer $m > m_0$. Ao tomar $m_2 > m_1 > m_0$, coloque $k = j_{m_2} - j_{m_1}$. Eis que $\Sigma_{\mathbf{x}}^* = \Sigma_{\mathbf{x}^{j_{m_1}}}^*$, é legítima a escolha $\bar{\mathbf{y}}^j = \mathbf{y}^{j_{m_1}+j}$ para $0 \leq j \leq k-1$. Finalmente, faça $\bar{\mathbf{x}}^0 = \mathbf{x}$ e $\bar{\mathbf{x}}^{j+1} = \tau_{\bar{\mathbf{y}}^j}(\bar{\mathbf{x}}^j)$. Primeiro, temos $\{(\bar{\mathbf{y}}^0, \bar{\mathbf{x}}^0), \dots, (\bar{\mathbf{y}}^{k-1}, \bar{\mathbf{x}}^{k-1})\} \in \mathcal{P}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \epsilon)$. De fato, basta perceber que

$$d(\tau_{\bar{\mathbf{y}}^{k-1}}(\bar{\mathbf{x}}^{k-1}), \mathbf{x}) \leq d(\tau_{\bar{\mathbf{y}}^{k-1}}(\bar{\mathbf{x}}^{k-1}), \mathbf{x}^{j_{m_2}}) + d(\mathbf{x}^{j_{m_2}}, \mathbf{x}) < \lambda^{k+l} + \lambda^l < \epsilon.$$

Além disso, como $d(\mathbf{x}^{j_{m_1}}, \mathbf{x}^{j_{m_2}}) < \lambda^l$, constatamos

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=0}^{k-1} (A - \beta_A)(\bar{\mathbf{y}}^j, \bar{\mathbf{x}}^j) \right| &\leq \\ &\leq \left| \sum_{j=0}^{k-1} A(\bar{\mathbf{y}}^j, \bar{\mathbf{x}}^j) - \sum_{j=j_{m_1}}^{j_{m_2}-1} A(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j) \right| + |u(\mathbf{x}^{j_{m_1}}) - u(\mathbf{x}^{j_{m_2}})| < \\ &< \frac{\text{Höld}_\theta(A)}{1 - \lambda^\theta} \lambda^{\theta l} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathbf{x} \in \Omega(A)$. □

Dados dois pontos $\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} \in \Sigma$, definimos a barreira de Peierls pondo

$$S_A(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} S_A^\epsilon(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}),$$

onde

$$S_A^\epsilon(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \inf_{\{(\mathbf{y}^0, \mathbf{x}^0), \dots, (\mathbf{y}^{k-1}, \mathbf{x}^{k-1})\} \in \mathcal{P}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, \epsilon)} \left[- \sum_{j=0}^{k-1} (A - \beta_A)(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j) \right].$$

Não deixe de observar que $\Omega(A) = \{\mathbf{x} \in \Sigma : S_A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0\}$.

Para a questão dual, é interessante o papel desempenhado pela barreira de Peierls. Isto porque esta nos permite fornecer para um potencial Hölder uma família a um parâmetro de subações igualmente Hölder.

A demonstração deste resultado solicita conhecimento de uma propriedade da barreira de Peierls. A fim de apresentá-la, contudo, precisamos introduzir a noção de u -conexão. Se $u \in C^0(\Sigma)$ é uma subação para o potencial $A \in C^0(\hat{\Sigma})$, dizemos que o ponto $\mathbf{x} \in \Sigma$ está u -conectado ao ponto $\bar{\mathbf{x}} \in \Sigma$ e indicamos $\mathbf{x} \xrightarrow{u} \bar{\mathbf{x}}$ quando, para todo $\epsilon > 0$, houver caminho $\{(\mathbf{y}^0, \mathbf{x}^0), \dots, (\mathbf{y}^{k-1}, \mathbf{x}^{k-1})\} \in \mathcal{P}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, \epsilon)$ tal que

$$\left| \sum_{j=0}^{k-1} (A - \beta_A)(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j) - (u(\mathbf{x}) - u(\bar{\mathbf{x}})) \right| < \epsilon.$$

Note que $\mathbf{x} \in \Omega(A)$ assegura $\mathbf{x} \xrightarrow{u} \mathbf{x}$ para qualquer subação u .

Lema 22: Considere um potencial $A \in C^0(\hat{\Sigma})$. Dada $u \in C^0(\Sigma)$ uma subação para A , para quaisquer $\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} \in \Sigma$, vale $S_A(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \geq u(\bar{\mathbf{x}}) - u(\mathbf{x})$. Além disso, a igualdade ocorre se, e só se, $\mathbf{x} \xrightarrow{u} \bar{\mathbf{x}}$.

Antes de demonstrar o lema, aproveitamos para fazer um apontamento importante. Exibida uma das principais propriedades da barreira de Peierls, convém no mínimo comunicar outra de idêntica relevância: se A é um potencial θ -Hölder, então $S_A(\mathbf{x}, \bar{\bar{\mathbf{x}}}) \leq S_A(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) + S_A(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\bar{\mathbf{x}}})$ para quaisquer pontos $\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\bar{\mathbf{x}}} \in \Sigma$. A verificação deste fato fica, contudo, a cargo do leitor.

Prova:

Fixe $\rho > 0$. Tome $\epsilon \in (0, \rho)$ tal que $|u(\mathbf{x}') - u(\mathbf{x}'')| < \rho$ quando $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \Sigma$ cumprem $d(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') < \epsilon$. Seja, por conseguinte, um caminho $\{(\mathbf{y}^0, \mathbf{x}^0), \dots, (\mathbf{y}^{k-1}, \mathbf{x}^{k-1})\} \in \mathcal{P}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, \epsilon)$. Uma vez que

$$u(\bar{\mathbf{x}}) - u(\mathbf{x}) - \rho < u(\mathbf{x}^0) - u(\tau_{\mathbf{y}^{k-1}}(\mathbf{x}^{k-1})) \leq - \sum_{j=0}^{k-1} (A - \beta_A)(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j),$$

sem dificuldade derivamos $u(\bar{\mathbf{x}}) - u(\mathbf{x}) - \rho \leq S_A(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$, bastando assumir ρ arbitrariamente pequeno para produzir a desigualdade requerida.

Se $S_A(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = u(\bar{\mathbf{x}}) - u(\mathbf{x})$, então da definição da barreira de Peierls de imediato concluímos $\mathbf{x} \xrightarrow{u} \bar{\mathbf{x}}$. Reciprocamente, suponha que \mathbf{x} esteja u -conectado a $\bar{\mathbf{x}}$. Tome $\rho > 0$. Dado $\epsilon \in (0, \rho)$, escolha um caminho $\{(\mathbf{y}^0, \mathbf{x}^0), \dots, (\mathbf{y}^{k-1}, \mathbf{x}^{k-1})\} \in \mathcal{P}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, \epsilon)$ cumprindo

$$\left| \sum_{j=0}^{k-1} (A - \beta_A)(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j) - (u(\mathbf{x}) - u(\bar{\mathbf{x}})) \right| < \epsilon.$$

Observe que

$$-\sum_{j=0}^{k-1} (A - \beta_A)(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j) < u(\bar{\mathbf{x}}) - u(\mathbf{x}) + \epsilon < u(\bar{\mathbf{x}}) - u(\mathbf{x}) + \rho$$

obriga $S_A(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \leq u(\bar{\mathbf{x}}) - u(\mathbf{x}) + \rho$. Logo, a possibilidade de fazer ρ arbitrariamente pequeno estabelece, neste caso, a desigualdade oposta. \square

Podemos agora resgatar a proposição posta em lista de espera.

Proposição 23: Suponha que $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é um *subshift* de tipo finito transitivo. Seja A um potencial θ -Hölder. Então, para cada $\mathbf{x} \in \Omega(A)$, a aplicação $S_A(\mathbf{x}, \cdot)$ é uma subação estrita θ -Hölder.

Prova:

Dado $\mathbf{x} \in \Omega(A)$, em vista do lema 22, a boa definição de $S_A(\mathbf{x}, \cdot)$ estará estabelecida caso mostremos que $S_A(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) < +\infty$ para qualquer $\bar{\mathbf{x}} \in \Sigma$.

Suponha, então, $\epsilon > 0$ arbitrário. Fixado $\epsilon' \in (0, \lambda]$, considere um caminho $\{(\mathbf{y}^0, \mathbf{x}^0), \dots, (\mathbf{y}^{k-1}, \mathbf{x}^{k-1})\} \in \mathcal{P}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, \epsilon')$ satisfazendo

$$-\sum_{j=0}^{k-1} (A - \beta_A)(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j) < S_A^{\epsilon'}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) + \epsilon.$$

Como $\mathbf{x} \in \Omega(A)$, podemos tomar $\{(\bar{\mathbf{y}}^0, \bar{\mathbf{x}}^0), \dots, (\bar{\mathbf{y}}^{\bar{k}-1}, \bar{\mathbf{x}}^{\bar{k}-1})\} \in \mathcal{P}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \epsilon/2)$, com $\lambda^{\bar{k}} \epsilon' < \epsilon/2$, tal que

$$\left| \sum_{j=0}^{\bar{k}-1} (A - \beta_A)(\bar{\mathbf{y}}^j, \bar{\mathbf{x}}^j) \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Assim sendo, faça $\mathbf{y}^j = \bar{\mathbf{y}}^{j-k}$ para $k \leq j < k + \bar{k}$. Em seguida, repare que $\mathbf{y}^k = \bar{\mathbf{y}}^0 \in \Sigma_{\bar{\mathbf{x}}^0}^* = \Sigma_{\tau_{\bar{\mathbf{y}}^{k-1}}(\mathbf{x}^{k-1})}^*$, o que permite definir $\mathbf{x}^{j+1} = \tau_{\mathbf{y}^j}(\mathbf{x}^j)$ para $k-1 \leq j < k + \bar{k} - 1$.

Afirmamos que $\{(\mathbf{y}^0, \mathbf{x}^0), \dots, (\mathbf{y}^{k+\bar{k}-1}, \mathbf{x}^{k+\bar{k}-1})\} \in \mathcal{P}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, \epsilon)$. De fato,

$$\begin{aligned} d(\tau_{\mathbf{y}^{k+\bar{k}-1}}(\mathbf{x}^{k+\bar{k}-1}), \mathbf{x}) &\leq \\ &\leq d(\tau_{\mathbf{y}^{k+\bar{k}-1}}(\mathbf{x}^{k+\bar{k}-1}), \tau_{\bar{\mathbf{y}}^{\bar{k}-1}}(\bar{\mathbf{x}}^{\bar{k}-1})) + d(\tau_{\bar{\mathbf{y}}^{\bar{k}-1}}(\bar{\mathbf{x}}^{\bar{k}-1}), \mathbf{x}) < \\ &< \lambda^{\bar{k}} \epsilon' + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \end{aligned}$$

Além disso, facilmente verificamos

$$\left| \sum_{j=k}^{k+\bar{k}-1} A(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j) - \sum_{j=0}^{\bar{k}-1} A(\bar{\mathbf{y}}^j, \bar{\mathbf{x}}^j) \right| \leq \frac{\text{Höld}_\theta(A)}{1 - \lambda^\theta} (\epsilon')^\theta.$$

Portanto, de pronto constatamos

$$S_A^\epsilon(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \leq - \sum_{j=0}^{k+\bar{k}-1} (A - \beta_A)(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j) < \frac{\text{Höld}_\theta(A)}{1 - \lambda^\theta} (\epsilon')^\theta + S_A^{\epsilon'}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) + \frac{3}{2} \epsilon,$$

de modo a assegurar

$$S_A(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \leq \frac{\text{Höld}_\theta(A)}{1 - \lambda^\theta} (\epsilon')^\theta + S_A^{\epsilon'}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}).$$

Estando bem definida, quando $\mathbf{x} \in \Omega(A)$, a aplicação $S_A(\mathbf{x}, \cdot)$, vejamos que se trata de uma função θ -Hölder.

Para tanto, sejam $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\bar{\mathbf{x}}} \in \Sigma$ pontos tais que $d(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\bar{\mathbf{x}}}) \leq \lambda$. Fixe $\rho > 0$. Dado $\epsilon > 0$, considere um caminho $\{(\mathbf{y}^0, \mathbf{x}^0), \dots, (\mathbf{y}^{k-1}, \mathbf{x}^{k-1})\} \in \mathcal{P}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, \epsilon)$, com $\lambda^{k+1} < \epsilon$, tal que

$$- \sum_{j=0}^{k-1} (A - \beta_A)(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j) < S_A^\epsilon(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) + \rho.$$

Colocando $\bar{\mathbf{y}}^j = \mathbf{y}^j$ para $0 \leq j < k$, pondo $\bar{\mathbf{x}}^0 = \bar{\bar{\mathbf{x}}}$ e, enfim, definindo $\bar{\mathbf{x}}^{j+1} = \tau_{\bar{\mathbf{y}}^j}(\bar{\mathbf{x}}^j)$ quando $0 \leq j < k-1$, sem dificuldades confirmamos $\{(\bar{\mathbf{y}}^0, \bar{\mathbf{x}}^0), \dots, (\bar{\mathbf{y}}^{k-1}, \bar{\mathbf{x}}^{k-1})\} \in \mathcal{P}(\mathbf{x}, \bar{\bar{\mathbf{x}}}, 2\epsilon)$, bem como

$$- \sum_{j=0}^{k-1} A(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j) \geq - \sum_{j=0}^{k-1} A(\bar{\mathbf{y}}^j, \bar{\mathbf{x}}^j) - \frac{\text{Höld}_\theta(A)}{1 - \lambda^\theta} d(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\bar{\mathbf{x}}})^\theta.$$

Logo, temos a seguinte sucessão de desigualdades

$$\begin{aligned}
 S_A(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) &\geq S_A^\epsilon(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \\
 &> - \sum_{j=0}^{k-1} (A - \beta_A)(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j) - \rho \\
 &\geq - \sum_{j=0}^{k-1} (A - \beta_A)(\tilde{\mathbf{y}}^j, \bar{\mathbf{x}}^j) - \frac{\text{Höld}_\theta(A)}{1 - \lambda^\theta} d(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\bar{\mathbf{x}}})^\theta - \rho \\
 &\geq S_A^{2\epsilon}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) - \frac{\text{Höld}_\theta(A)}{1 - \lambda^\theta} d(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\bar{\mathbf{x}}})^\theta - \rho.
 \end{aligned}$$

Assim, ao fazer ϵ tender a zero e ao supor em seguida ρ arbitrariamente pequeno, resulta

$$S_A(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) - S_A(\mathbf{x}, \bar{\bar{\mathbf{x}}}) \geq - \frac{\text{Höld}_\theta(A)}{1 - \lambda^\theta} d(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\bar{\mathbf{x}}})^\theta,$$

donde de imediato decorre $S_A(\mathbf{x}, \cdot) \in C^\theta(\Sigma)$.

Falta apenas mostrar que tal aplicação é uma subação estrita.

Tome ponto $(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}) \in \hat{\Sigma}$. Caso $\{(\mathbf{y}^1, \mathbf{x}^1), \dots, (\mathbf{y}^k, \mathbf{x}^k)\} \in \mathcal{P}(\mathbf{x}, \tau_{\bar{\mathbf{y}}}(\bar{\mathbf{x}}), \epsilon)$, ponha $\mathbf{y}^0 = \bar{\mathbf{y}}$, $\mathbf{x}^0 = \bar{\mathbf{x}}$ e repare que

$$\begin{aligned}
 A(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}) - \beta_A &= \sum_{j=0}^k (A - \beta_A)(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j) - \sum_{j=0}^{k-1} (A - \beta_A)(\mathbf{y}^{j+1}, \mathbf{x}^{j+1}) \\
 &\leq - \sum_{j=0}^{k-1} (A - \beta_A)(\mathbf{y}^{j+1}, \mathbf{x}^{j+1}) - S_A^\epsilon(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}).
 \end{aligned}$$

Desta maneira, pela arbitrariedade do caminho considerado, concluímos $A(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}) - \beta_A \leq S_A^\epsilon(\mathbf{x}, \tau_{\bar{\mathbf{y}}}(\bar{\mathbf{x}})) - S_A^\epsilon(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$. A passagem ao limite, portanto, estabelece que se trata de uma subação para o potencial A .

A fim de verificar que determinamos, na verdade, uma subação estrita, devemos ser capazes de encontrar, para cada $\bar{\mathbf{x}} \in \Sigma$, um ponto $\bar{\mathbf{y}} \in \Sigma_{\bar{\mathbf{x}}}^*$ cumprindo $S_A(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = S_A(\mathbf{x}, \tau_{\bar{\mathbf{y}}}(\bar{\mathbf{x}})) - A(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}) + \beta_A$. Dado $\epsilon > 0$, seja $\{(\mathbf{y}^0, \mathbf{x}^0), \dots, (\mathbf{y}^{k-1}, \mathbf{x}^{k-1})\} \in \mathcal{P}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, \epsilon)$ caminho tal que

$$- \sum_{j=0}^{k-1} (A - \beta_A)(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j) < S_A^\epsilon(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) + \epsilon.$$

Isto define uma família $\{\mathbf{y}^0\}_{\epsilon > 0} \subset \Sigma_{\bar{\mathbf{x}}}^*$. Tome $\bar{\mathbf{y}} \in \Sigma_{\bar{\mathbf{x}}}^*$ um ponto de acumulação desta família quando ϵ tende a zero. Observe que

$$S_A^\epsilon(\mathbf{x}, \tau_{\mathbf{y}^0}(\bar{\mathbf{x}})) - (A - \beta_A)(\mathbf{y}^0, \bar{\mathbf{x}}) \leq - \sum_{j=0}^{k-1} (A - \beta_A)(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j).$$

Como temos $\tau_{\mathbf{y}^0}(\bar{\mathbf{x}}) = \tau_{\bar{\mathbf{y}}}(\bar{\mathbf{x}})$ para ϵ suficientemente pequeno, ao fazê-lo arbitrariamente pequeno em $S_A^\epsilon(\mathbf{x}, \tau_{\bar{\mathbf{y}}}(\bar{\mathbf{x}})) - (A - \beta_A)(\mathbf{y}^0, \bar{\mathbf{x}}) < S_A^\epsilon(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) + \epsilon$, findamos a discussão. \square

Não encerraremos esta seção sem discutir a versão do teorema de Livšic para o modelo $(\hat{\Sigma}, \hat{\sigma}, \mathcal{M}_0)$. A bem da verdade, estes comentários poderiam ter sido feitos logo após a demonstração do teorema 19. De qualquer modo, em nova extrapolação, diremos que uma aplicação $A \in C^0(\hat{\Sigma})$ é cohomóloga a uma constante $a \in \mathbb{R}$ quando existir uma função $u \in C^0(\Sigma)$ tal que $A + u \circ \pi_1 - u \circ \pi_1 \circ \hat{\sigma}^{-1} = a$.

Sendo assim, assumamos que $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é um *subshift* de tipo finito transitivo e suponhamos que A é um potencial θ -Hölder. Então $m_A = \mathcal{M}_0$ se, e somente se, A é cohomólogo a β_A .

A suficiência é óbvia. Reciprocamente, uma vez que $m_A = \mathcal{M}_0$ implica $\beta_A = -\beta_{-A}$, considere aplicações $u, u' \in C^\theta(\Sigma)$ satisfazendo

$$A + u \circ \pi_1 - u \circ \pi_1 \circ \hat{\sigma}^{-1} \leq \beta_A \quad \text{e} \quad \beta_A \leq A - u' \circ \pi_1 + u' \circ \pi_1 \circ \hat{\sigma}^{-1}.$$

Logo, temos $(u + u') \circ \pi_1 \leq (u + u') \circ \pi_1 \circ \hat{\sigma}^{-1}$. Neste caso, porém, a hipótese de transitividade obriga que a função $u + u'$ seja identicamente constante, donde decorre a igualdade buscada.

2.2. SUBAÇÕES E SUPORTES

Como o título sugere, esta seção é dedicada à análise de temas incidindo sobre a interação entre as subações e os suportes de probabilidades pertencentes a \mathcal{M}_0 . Um elemento unificador destes dois conceitos continua sendo o de conjunto de Mañé. Frente a qualquer subação $u \in C^0(\Sigma)$ para um potencial $A \in C^0(\hat{\Sigma})$, ao definir a função $A^u = A + u \circ \pi_1 - u \circ \pi_1 \circ \hat{\sigma}^{-1}$, novamente extrapolamos a nomenclatura original dizendo que o conjunto $\mathbb{M}_A(u) = (A^u)^{-1}(\beta_A)$ é um conjunto de Mañé. Seu papel sobre a localização dos suportes das probabilidades maximizantes não desaparece.

Proposição 24: Dada uma subação arbitrária $u \in C^0(\Sigma)$ para um potencial $A \in C^0(\hat{\Sigma})$, considere $\mathbb{M}_A(u)$ seu respectivo conjunto de Mañé.

Então

$$m_A = \{\hat{\mu} \in \mathcal{M}_0 : \text{supp}(\hat{\mu}) \subset \mathbb{M}_A(u)\}.$$

Independente do contexto, a prova deste tipo de afirmação se reduz ao bem conhecido fato que assegura ser nula quase toda parte uma aplicação mensurável não negativa cuja integral resulte nula. Por isto, será sempre deixada a cargo do leitor.

A próxima proposição não se contenta apenas com as probabilidades maximizantes e foca todas as probabilidades pertencentes a \mathcal{M}_0 . Temos, deste modo, a seguinte propriedade do suporte de uma tal probabilidade.

Proposição 25: Seja $\hat{\mu} \in \mathcal{M}_0$. Quase todo ponto $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in \text{supp}(\hat{\mu})$ é da forma $(\mathbf{y}, \tau_{\bar{\mathbf{y}}}(\bar{\mathbf{x}}))$ com $(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}) \in \text{supp}(\hat{\mu})$.

Prova:

Considere o conjunto

$$\hat{R} = \{(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in \text{supp}(\hat{\mu}) : \mathbf{x} \neq \tau_{\bar{\mathbf{y}}}(\bar{\mathbf{x}}) \quad \forall (\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}) \in \text{supp}(\hat{\mu})\}.$$

Suponhamos que $\hat{\mu}(\hat{R}) = \epsilon > 0$. Ponha $R = \pi_1(\hat{R})$. Por conseguinte, sejam $D \subset \Sigma$ subconjunto compacto e $E \subset \Sigma$ subconjunto aberto satisfazendo $D \subset R \subset E$ com $(\hat{\mu} \circ \pi_1^{-1})(E - D) < \epsilon/2$. Fixe aplicação $f \in C^0(\Sigma, [0, 1])$ cumprindo $f|_D \equiv 1$ e $f|_{\Sigma - E} \equiv 0$. Uma vez que $\pi_1^{-1}(R) \cap \text{supp}(\hat{\mu}) = \hat{R}$, de pronto verificamos

$$\int_{\hat{\Sigma}} f(\mathbf{x}) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \geq \hat{\mu}(\pi_1^{-1}(D)) \geq \hat{\mu}(\pi_1^{-1}(R)) - \hat{\mu}(\pi_1^{-1}(E - D)) > \frac{\epsilon}{2}.$$

Assim sendo, tome uma seqüência de aplicações $\{f_j\} \subset C^0(\Sigma, [0, 1])$ tal que $f_j \uparrow \chi_{E-D}$. Pelo teorema da convergência monótona, constatamos

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\Sigma}} \chi_{E-D}(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\hat{\Sigma}} f_j(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\hat{\Sigma}} f_j(\mathbf{x}) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \\ &= \hat{\mu}(\pi_1^{-1}(E - D)) < \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Note, então, que a definição de R produz $\int_{\text{supp}(\hat{\mu})} \chi_R(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0$.

Logo, como $0 \leq f \leq \chi_E$, vale

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\Sigma}} f(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) &\leq \int_{\text{supp}(\hat{\mu})} \chi_{E-R}(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \\ &\leq \int_{\text{supp}(\hat{\mu})} \chi_{E-D}(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) d\hat{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) < \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Estamos, todavia, diante de uma contradição, pois $f \in C^0(\Sigma)$. Portanto, nada resta a concluir senão $\hat{\mu}(\hat{R}) = 0$. \square

Na próxima proposição, destacamos relações de regularidade que uma subação estrita $u \in C^0(\Sigma)$ deve respeitar.

Proposição 26: Considere $u \in C^0(\Sigma)$ uma subação estrita para um potencial $A \in C^0(\hat{\Sigma})$. Tome $\mathbb{M}_A(u)$ o respectivo conjunto de Mañé. Então, se $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in \mathbb{M}_A(u)$, ocorrem:

- (i) $u(\sigma(\mathbf{x})) - 2u(\mathbf{x}) + u(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) \leq A(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - A(\hat{\sigma}(\mathbf{y}, \mathbf{x}))$;
- (ii) $u(\tau_{\mathbf{y}}^2(\mathbf{x})) - 2u(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) + 2u(\mathbf{x}) - u(\sigma(\mathbf{x})) \geq A(\hat{\sigma}(\mathbf{y}, \mathbf{x})) - 2A(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + A(\hat{\sigma}^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{x}))$.

Ademais, quando $(\mathbf{y}, \mathbf{x}), (\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}) \in \mathbb{M}_A(u)$ satisfazem $d(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \leq \lambda$, verifica-se

- (iii) $u(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) + u(\tau_{\bar{\mathbf{y}}}(\bar{\mathbf{x}})) - u(\tau_{\bar{\mathbf{y}}}(\mathbf{x})) - u(\tau_{\mathbf{y}}(\bar{\mathbf{x}})) \geq A(\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{x}) + A(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{x}}) - A(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - A(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}})$.

Prova:

Observe que, graças a igualdade (2), valem

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= u(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) - A(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \beta_A, \\ u(\sigma(\mathbf{x})) &\leq u(\mathbf{x}) - A(\hat{\sigma}(\mathbf{y}, \mathbf{x})) + \beta_A \quad \text{e} \\ u(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) &\leq u(\tau_{\mathbf{y}}^2(\mathbf{x})) - A(\hat{\sigma}^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{x})) + \beta_A. \end{aligned}$$

O item (i) decorre diretamente das duas primeiras expressões. Por outro lado, as duas desigualdades produzem

$$u(\tau_{\mathbf{y}}^2(\mathbf{x})) - u(\sigma(\mathbf{x})) \geq u(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) - u(\mathbf{x}) + A(\hat{\sigma}(\mathbf{y}, \mathbf{x})) + A(\hat{\sigma}^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{x})) - 2\beta_A.$$

Logo, na desigualdade acima, basta adicionar a identidade multiplicada por dois para derivar o item (ii).

Quanto ao item (iii), a hipótese $d(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \leq \lambda$ assegura $\Sigma_{\mathbf{x}}^* = \Sigma_{\bar{\mathbf{x}}}^*$. Assim, legitimamos as seguintes expressões

$$u(\mathbf{x}) = u(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) - A(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \beta_A, \quad u(\bar{\mathbf{x}}) = u(\tau_{\bar{\mathbf{y}}}(\bar{\mathbf{x}})) - A(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}) + \beta_A,$$

$$u(\mathbf{x}) \leq u(\tau_{\bar{\mathbf{y}}}(\mathbf{x})) - A(\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{x}) + \beta_A \quad \text{e} \quad u(\bar{\mathbf{x}}) \leq u(\tau_{\mathbf{y}}(\bar{\mathbf{x}})) - A(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{x}}) + \beta_A.$$

E o resultado sucede de imediatas subtrações. \square

O próximo teorema fornece uma caracterização das subações obtidas no teorema 19, tornando evidente igualmente uma interação entre estas aplicações e a família de subações estabelecidas na proposição 23.

Teorema 27: Seja $u \in C^0(\Sigma)$ uma subação estrita para o potencial $A \in C^\theta(\hat{\Sigma})$. Então

$$u(\bar{\mathbf{x}}) = \inf_{\mathbf{x} \in \Omega(A)} [u(\mathbf{x}) + S_A(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})].$$

Prova:

Do lema 22, imediatamente segue que

$$u(\bar{\mathbf{x}}) \leq \inf_{\mathbf{x} \in \Omega(A)} [u(\mathbf{x}) + S_A(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})].$$

Ademais, garantiremos a identidade se pudermos assegurar a existência de um ponto $\mathbf{x} \in \Omega(A)$ satisfazendo $\mathbf{x} \xrightarrow{u} \bar{\mathbf{x}}$. Passemos, então, a construção de um tal ponto.

Para tanto, seja $\{(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j)\} \subset \hat{\Sigma}$ uma trajetória otimal associada ao potencial A tal que $\mathbf{x}^0 = \bar{\mathbf{x}}$. Assuma, em seguida, $\mathbf{x} \in \Sigma$ limite de uma subsequência $\{\mathbf{x}^{j_m}\}$.

Como a demonstração do lema 21 fornece exatamente $\mathbf{x} \in \Omega(A)$, falta apenas mostrar que $\mathbf{x} \xrightarrow{u} \bar{\mathbf{x}}$. Tome $\epsilon > 0$. Escolha inteiro $l > 0$ de maneira a obrigar $|u(\mathbf{x}') - u(\mathbf{x}'')| < \epsilon$ sempre que $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \Sigma$ cumprirem $d(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') < \lambda^l$. Assuma l satisfazendo ainda $\lambda^l < \epsilon$. Fixe índice m suficientemente grande tal que $d(\mathbf{x}^{j_m}, \mathbf{x}) < \lambda^l$. Com isto, ponha $k = j_m$.

Inicialmente, repare que $d(\tau_{\mathbf{y}^{k-1}}(\mathbf{x}^{k-1}), \mathbf{x}) = d(\mathbf{x}^{j_m}, \mathbf{x}) < \epsilon$. Logo, asseguramos $\{(\mathbf{y}^0, \mathbf{x}^0), \dots, (\mathbf{y}^{k-1}, \mathbf{x}^{k-1})\} \in \mathcal{P}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, \epsilon)$. Ademais, lembrando que

$$\sum_{j=0}^{k-1} (A - \beta_A)(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j) - (u(\mathbf{x}^k) - u(\bar{\mathbf{x}})) = 0,$$

sem dificuldade obtemos

$$\left| \sum_{j=0}^{k-1} (A - \beta_A)(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j) - (u(\mathbf{x}) - u(\bar{\mathbf{x}})) \right| = |u(\mathbf{x}^{j_m}) - u(\mathbf{x})| < \epsilon,$$

o que encerra a prova. \square

O teorema 27 deixa claro a importância do conjunto dos pontos não-errantes com respeito a um potencial Hölder. O corolário abaixo sintetiza o papel deste conjunto na determinação das subações estritas.

Corolário 28: Sejam $u, u' \in C^0(\Sigma)$ subações estritas para o potencial $A \in C^\theta(\hat{\Sigma})$. Se $u \leq u'$ em $\Omega(A)$, então $u \leq u'$ em Σ . Em particular, a igualdade em $\Omega(A)$ o mesmo estabelece em Σ .

O teorema 27 admite uma recíproca. Na obtenção deste resultado nos concentraremos.

Teorema 29: Seja $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ um *subshift* de tipo finito transitivo. Tome um potencial $A \in C^\theta(\hat{\Sigma})$. Assuma que a aplicação $f : \Omega(A) \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada inferiormente. Então

$$u(\bar{\mathbf{x}}) = \inf_{\mathbf{x} \in \Omega(A)} [f(\mathbf{x}) + S_A(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})]$$

define uma subação estrita θ -Hölder. Além disso, se $f(\bar{\mathbf{x}}) - f(\mathbf{x}) \leq S_A(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ para quaisquer $\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} \in \Omega(A)$, resulta $u = f$ em $\Omega(A)$.

Prova:

A boa definição da função $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ prescinde de discussão. Vejamos que se trata de uma aplicação Hölder. Sejam $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\bar{\mathbf{x}}} \in \Sigma$ pontos cumprindo $d(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\bar{\mathbf{x}}}) \leq \lambda$. Fixe $\epsilon > 0$. Considere $\mathbf{x} \in \Omega(A)$ tal que $f(\mathbf{x}) + S_A(\mathbf{x}, \bar{\bar{\mathbf{x}}}) < u(\bar{\bar{\mathbf{x}}}) + \epsilon$. Segue da demonstração da proposição 23

$$u(\bar{\mathbf{x}}) - u(\bar{\bar{\mathbf{x}}}) - \epsilon < S_A(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) - S_A(\mathbf{x}, \bar{\bar{\mathbf{x}}}) \leq \frac{\text{Höld}_\theta(A)}{1 - \lambda^\theta} d(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\bar{\mathbf{x}}})^\theta.$$

Da arbitrariedade de ϵ , portanto, garantimos $u \in C^\theta(\Sigma)$.

Tampouco é difícil mostrar que u é uma subação para o potencial A . Com efeito, tome um ponto $(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}) \in \hat{\Sigma}$. Dado $\epsilon > 0$, escolha $\mathbf{x} \in \Omega(A)$ satisfazendo $f(\mathbf{x}) + S_A(\mathbf{x}, \tau_{\bar{\mathbf{y}}}(\bar{\mathbf{x}})) < u(\tau_{\bar{\mathbf{y}}}(\bar{\mathbf{x}})) + \epsilon$. Como

$$u(\bar{\mathbf{x}}) - u(\tau_{\bar{\mathbf{y}}}(\bar{\mathbf{x}})) - \epsilon < S_A(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) - S_A(\mathbf{x}, \tau_{\bar{\mathbf{y}}}(\bar{\mathbf{x}})) \leq \beta_A - A(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}),$$

novamente o argumento baseia-se na possibilidade de fazer ϵ tender a zero.

O caráter estrito também é herdado das subações $S_A(\mathbf{x}, \cdot)$, $\mathbf{x} \in \Omega(A)$. De fato, fixando $\bar{\mathbf{x}} \in \Sigma$, escolha ponto $\mathbf{x}^j \in \Omega(A)$ tal que

$$f(\mathbf{x}^j) + S_A(\mathbf{x}^j, \bar{\mathbf{x}}) < u(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{j}.$$

Determine, para cada índice j , um ponto $\mathbf{y}^j \in \Sigma_{\bar{\mathbf{x}}}^*$ satisfazendo

$$S_A(\mathbf{x}^j, \bar{\mathbf{x}}) = S_A(\mathbf{x}^j, \tau_{\mathbf{y}^j}(\bar{\mathbf{x}})) - A(\mathbf{y}^j, \bar{\mathbf{x}}) + \beta_A.$$

Seja, por conseguinte, $\bar{\mathbf{y}} \in \Sigma_{\bar{\mathbf{x}}}^*$ um ponto de acumulação da seqüência $\{\mathbf{y}^j\}$. Eis que $u(\tau_{\bar{\mathbf{y}}^j}(\bar{\mathbf{x}})) \leq f(\mathbf{x}^j) + S_A(\mathbf{x}^j, \tau_{\bar{\mathbf{y}}^j}(\bar{\mathbf{x}}))$, temos

$$u(\tau_{\bar{\mathbf{y}}^j}(\bar{\mathbf{x}})) - A(\mathbf{y}^j, \bar{\mathbf{x}}) + \beta_A < u(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{j},$$

donde $u(\tau_{\bar{\mathbf{y}}}(\bar{\mathbf{x}})) - A(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}) + \beta_A \leq u(\bar{\mathbf{x}})$.

Por fim, suponha que $f(\bar{\mathbf{x}}) - f(\mathbf{x}) \leq S_A(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ para quaisquer $\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} \in \Omega(A)$. Daí, as desigualdades $u(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x}) + S_A(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ válidas para todo $\mathbf{x} \in \Omega(A)$ implicam imediatamente $u = f$ em $\Omega(A)$. \square

Uma das principais conseqüências do teorema anterior é o reconhecimento de uma espécie de *supremacia Hölder* para subações. De modo preciso, estando em mente o lema 22, segue o corolário.

Corolário 30: Suponha que $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é um *subshift* de tipo finito transitivo. Se $u \in C^0(\Sigma)$ é uma subação para um potencial $A \in C^\theta(\hat{\Sigma})$, então $u|_{\Omega(A)}$ é θ -Hölder.

Juntos os teoremas 27 e 29 asseguram que toda subação estrita para um potencial Hölder é obrigatoriamente Hölder. Mais ainda, estes teoremas permitem descrever o conjunto de tais subações.

Teorema 31: Considere $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ um *subshift* de tipo finito transitivo. Seja A um potencial θ -Hölder. Então há uma correspondência bijetiva e isométrica entre o conjunto das subações estritas para A e o conjunto das funções $f \in C^0(\Omega(A))$ satisfazendo $f(\bar{\mathbf{x}}) - f(\mathbf{x}) \leq S_A(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ para $\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} \in \Omega(A)$.

Prova:

Analisemos a correspondência

$$f \mapsto u_f = \inf_{\mathbf{x} \in \Omega(A)} [f(\mathbf{x}) + S_A(\mathbf{x}, \cdot)].$$

O teorema 29 assegura a boa definição e a injetividade desta aplicação. Já o teorema 27 garante a sobrejetividade. Além disso, estamos diante de uma isometria. Com efeito, se $\bar{\mathbf{x}} \in \Sigma$, fixado $\epsilon > 0$, tome $\mathbf{x} \in \Omega(A)$ tal que $f(\mathbf{x}) + S_A(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) < u_f(\bar{\mathbf{x}}) + \epsilon$. Logo, verificamos

$$u_g(\bar{\mathbf{x}}) - u_f(\bar{\mathbf{x}}) - \epsilon < g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \leq \|f - g\|_0.$$

Ao fazer ϵ tender a zero, a arbitrariedade do ponto $\bar{\mathbf{x}}$ e o papel simétrico das aplicações f e g determinam $\|u_f - u_g\|_0 \leq \|f - g\|_0$. Porém, $u_f|_{\Omega(A)} = f$ e $u_g|_{\Omega(A)} = g$ implicam $\|u_f - u_g\|_0 \geq \|f - g\|_0$. \square

Teorema comparável ao acima consta da literatura em mecânica clássica. Em [8], para um lagrangiano convexo superlinear definido em uma variedade compacta, Gonzalo Contreras caracteriza as soluções KAM fracas da equação de Hamilton-Jacobi em termos de seus valores em cada classe estática e do potencial ação de Mañé.

Desde o teorema 27, somente um dos temas mirados por esta seção vem sendo abordado. Examinemos como o suporte de probabilidades maximizantes contribui para enriquecer as discussões ora conduzidas. Contamos com um resultado preliminar.

Lema 32: Considere uma seqüência $\{a_j\} \subset \mathbb{R}$ para a qual temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k a_j = b.$$

Seja R um subconjunto dos inteiros positivos satisfazendo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \#\{j \in R : j \leq k\} > 0.$$

Então, para todo $\epsilon > 0$ e qualquer inteiro positivo K , existem $k_1, k_2 \in R$ tais que $k_2 > k_1 \geq K$ e

$$\left| \sum_{j=k_1+1}^{k_2} a_j - (k_2 - k_1)b \right| < \epsilon.$$

Este lema foi utilizado por Mañé em [28]. Assumindo-o tacitamente, lograremos a seguinte proposição.

Proposição 33: Suponha $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ um *subshift* de tipo finito transitivo e A um potencial θ -Hölder. Assuma $\hat{\mu} \in \mathcal{M}_A$ com $\hat{\mu} \circ \pi_1^{-1}$ ergódica. Então $\pi_1(\text{supp}(\hat{\mu})) \subset \Omega(A)$.

Prova:

Basta argumentar que $(\hat{\mu} \circ \pi_1^{-1})(\Omega(A)) = 1$. Fixe $\epsilon > 0$. Denotemos por $\Omega(A, \epsilon)$ o conjunto dos pontos $\mathbf{x} \in \Sigma$ para os quais podemos encontrar um caminho $\{(\mathbf{y}^0, \mathbf{x}^0), \dots, (\mathbf{y}^{k-1}, \mathbf{x}^{k-1})\} \in \mathcal{P}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \epsilon)$ com

$$\left| \sum_{j=0}^{k-1} (A - \beta_A)(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j) \right| < \epsilon.$$

Como $\Omega(A) = \bigcap \Omega(A, 1/j)$, é suficiente mostrar que $(\hat{\mu} \circ \pi_1^{-1})(\Omega(A, \epsilon)) = 1$.

Tome inteiro $l > 0$ suficientemente grande de modo a garantir $2\lambda^l < \epsilon$. Se supomos $(\hat{\mu} \circ \pi_1^{-1})(\pi_1(\text{supp}(\hat{\mu})) - \Omega(A, \epsilon)) > 0$, somos obrigados a admitir a existência de $\mathbf{x} \in \pi_1(\text{supp}(\hat{\mu}))$ tal que $(\hat{\mu} \circ \pi_1^{-1})(D_l - \Omega(A, \epsilon)) > 0$, onde D_l representa a bola aberta de raio λ^l centrada no ponto \mathbf{x} .

Desta forma, considere um ponto $\bar{\mathbf{x}} \in \pi_1(\text{supp}(\hat{\mu}))$ cumprindo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \#\{0 \leq j < k : \sigma^j(\bar{\mathbf{x}}) \in D_l - \Omega(A, \epsilon)\} > 0.$$

Pela proposição 25, podemos assumir que, para todo índice $j > 0$, há ponto $\bar{\mathbf{y}}^j \in \Sigma^*$ tal que $(\bar{\mathbf{y}}^j, \sigma^j(\bar{\mathbf{x}})) \in \text{supp}(\hat{\mu})$ e $\sigma^{j-1}(\bar{\mathbf{x}}) = \tau_{\bar{\mathbf{y}}^j}(\sigma^j(\bar{\mathbf{x}}))$.

Sendo $u \in C^0(\Sigma)$ uma subação arbitrária para A , a proposição 24 fornece $A(\bar{\mathbf{y}}^j, \sigma^j(\bar{\mathbf{x}})) - \beta_A = u(\sigma^{j-1}(\bar{\mathbf{x}})) - u(\sigma^j(\bar{\mathbf{x}}))$. Defina, enfim,

$$a_j = u(\sigma^{j-1}(\bar{\mathbf{x}})) - u(\sigma^j(\bar{\mathbf{x}})) \text{ e } R = \{j : \sigma^j(\bar{\mathbf{x}}) \in D_l - \Omega(A, \epsilon)\}.$$

Aplicando o lema anterior, asseguramos a existência de $k_1, k_2 \in R$, com $1 \leq k_1 < k_2$, tais que

$$\left| \sum_{j=k_1+1}^{k_2} (A - \beta_A)(\bar{\mathbf{y}}^j, \sigma^j(\bar{\mathbf{x}})) \right| = \left| \sum_{j=k_1+1}^{k_2} a_j \right| < \epsilon.$$

Porém, uma vez que $\sigma^{k_1}(\bar{\mathbf{x}}), \sigma^{k_2}(\bar{\mathbf{x}}) \in D_l$, resulta $d(\sigma^{k_1}(\bar{\mathbf{x}}), \sigma^{k_2}(\bar{\mathbf{x}})) \leq 2\lambda^l$. Logo, $\{(\bar{\mathbf{y}}^{k_2}, \sigma^{k_2}(\bar{\mathbf{x}})), \dots, (\bar{\mathbf{y}}^{k_1+1}, \sigma^{k_1+1}(\bar{\mathbf{x}}))\} \in \mathcal{P}(\sigma^{k_2}(\bar{\mathbf{x}}), \sigma^{k_2}(\bar{\mathbf{x}}), \epsilon)$ obriga $\sigma^{k_2}(\bar{\mathbf{x}}) \in \Omega(A, \epsilon)$, contrariando o fato de k_2 estar em R .

Frente a este absurdo, constatamos que $(\hat{\mu} \circ \pi_1^{-1})(\Omega(A, \epsilon)) = 1$. \square

Um comentário deve ser feito sobre a hipótese de ergodicidade assumida na proposição anterior. Lembrando que a adição de uma constante não altera o papel desempenhado por uma subação específica, é importante ter em mente o fator condicionante imposto por aquela suposição.

Proposição 34: Tome probabilidade $\hat{\mu} \in \mathcal{m}_A$ tal que $\hat{\mu} \circ \pi_1^{-1}$ é ergódica. Se $u, u' \in C^0(\Sigma)$ são subações para $A \in C^0(\hat{\Sigma})$, então $u - u'$ é identicamente constante em $\pi_1(\text{supp}(\hat{\mu}))$.

Prova:

Seja $\mathbf{x} \in \pi_1(\text{supp}(\hat{\mu}))$. Podemos empregar a proposição 25 para estabelecer ponto $(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}) \in \text{supp}(\hat{\mu})$ com $\mathbf{x} = \tau_{\bar{\mathbf{y}}}(\bar{\mathbf{x}})$. Da proposição 24, resulta

$$u(\bar{\mathbf{x}}) - u(\mathbf{x}) = -A(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}) + \beta_A = u'(\bar{\mathbf{x}}) - u'(\mathbf{x}),$$

de modo que $(u - u')(\mathbf{x}) = (u - u')(\bar{\mathbf{x}}) = (u - u') \circ \sigma(\mathbf{x})$. Portanto, temos $u - u' = (u - u') \circ \sigma$ em $\pi_1(\text{supp}(\hat{\mu}))$. Assim, como a probabilidade $\hat{\mu} \circ \pi_1^{-1}$ é ergódica, segue $u - u'$ constante em $\pi_1(\text{supp}(\hat{\mu}))$. \square

Retomemos as hipóteses de transitividade para a dinâmica e de continuidade Hölder para o potencial. Dado $\mathbb{M}_A(u)$ um conjunto de Mañé qualquer, em geral vale $\Omega(A) \subset \pi_1(\mathbb{M}_A(u))$. Apenas o ordinário consta nesta afirmação quando $u \in C^\theta(\Sigma)$ é uma subação estrita, visto que seu respectivo conjunto de Mañé exagera ao verificar $\pi_1(\mathbb{M}_A(u)) = \Sigma$. O fato, no entanto, não faz exceções. Com efeito, pelo teorema 29, toda subação $u \in C^0(\Sigma)$ para o potencial A se comporta em $\Omega(A)$ como uma subação estrita.

Em resumo, temos então as inclusões

$$\bigcup_{\substack{\hat{\mu} \in \mathcal{m}_A \\ \hat{\mu} \circ \pi_1^{-1} \text{ ergódica}}} \pi_1(\text{supp}(\hat{\mu})) \subset \Omega(A) \subset \bigcap_{\substack{u \in C^0(\Sigma) \\ u \text{ subação}}} \pi_1(\mathbb{M}_A(u)).$$

Em determinados casos para o modelo (X, T, \mathcal{M}_T) , dado um potencial Hölder A , sabe-se que uma probabilidade é maximizante se, e somente se, seu suporte está contido no conjunto dos pontos não-errantes com respeito a A . Isto ocorre, por exemplo, para aplicações expansoras do círculo (proposição 15.ii de [10]) ou para difeomorfismos de Anosov (lemas 12 e 13 de [25]).

Tal fato nos leva a questionar se, a fim de concluir que $\hat{\mu} \in \mathcal{m}_A$, bastaria verificar $\hat{\mu} \circ \pi_1^{-1}$ ergódica com $\pi_1(\text{supp}(\hat{\mu})) \subset \Omega(A)$. A resposta, para a surpresa de alguns, é negativa.

Eis o contra-exemplo. Tome $A : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$ dependendo de três coordenadas tal que $A(1, 1|1) > A(s, s'|s'')$ quando $s + s' + s'' \leq 2$. Se indicamos por ss' ora o ponto periódico $(s, s', \dots, s, s', \dots) \in \Sigma$, ora o ponto periódico $(\dots, s, s', \dots, s, s') \in \Sigma^*$, temos $\delta_{(\underline{11}, \underline{11})}, \delta_{(\underline{01}, \underline{11})} \in \mathcal{M}_0$ satisfazendo $\delta_{(\underline{11}, \underline{11})} \circ \pi_1^{-1} = \delta_{\underline{11}} = \delta_{(\underline{01}, \underline{11})} \circ \pi_1^{-1}$. Não obstante, enquanto $\delta_{(\underline{11}, \underline{11})}$ é uma probabilidade maximizante, claramente $\delta_{(\underline{01}, \underline{11})} \notin \mathcal{M}_A$.

A segunda inclusão também inspira questionamentos. Uma indagação natural antepõe-se: quão irrelevante pode vir a ser um dos conjuntos complementares $\pi_1(\mathbb{M}_A(u)) - \Omega(A)$? A proposição abaixo esforça-se pela busca de uma resposta.

Proposição 35: Seja $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ um *subshift* de tipo finito transitivo. Assuma $A \in C^\theta(\hat{\Sigma})$ um potencial não cohomólogo a uma constante. Tome $u \in C^0(\Sigma)$ uma subação arbitrária para A . Então, para cada inteiro positivo k , há subação $U_k \in C^0(\Sigma)$ cumprindo

$$\pi_1(\mathbb{M}_A(U_k)) \subset \bigcap_{j=0}^{k-1} \sigma^{-j}(\pi_1(\mathbb{M}_A(u))).$$

Mais ainda, se u for θ -Hölder, U_k também o será.

Prova:

Começamos com $A^u = A + u \circ \pi_1 - u \circ \pi_1 \circ \hat{\sigma}^{-1} \leq \beta_A$.

Dados $k > 0$ e $\mathbf{x} \in \Sigma$, chamamos de caminho de tamanho k terminando no ponto \mathbf{x} quaisquer pontos $(\mathbf{y}^0, \mathbf{x}^0), \dots, (\mathbf{y}^{k-1}, \mathbf{x}^{k-1}) \in \hat{\Sigma}$ que verifiquem $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}$ e $\mathbf{x}^{j+1} = \tau_{\mathbf{y}^j}(\mathbf{x}^j)$ para $0 \leq j < k-1$. Indiquemos por $\mathcal{P}_k(\mathbf{x})$ o conjunto de tais caminhos. Repare que evidentemente

$$\sum_{j=0}^{k-1} A^u(\mathbf{y}^j, \mathbf{x}^j) \leq k\beta_A$$

para $\{(\mathbf{y}^0, \mathbf{x}^0), \dots, (\mathbf{y}^{k-1}, \mathbf{x}^{k-1})\} \in \mathcal{P}_k(\mathbf{x})$.

Sendo $\{(\mathbf{y}^0, \sigma^{k-1}(\mathbf{x})), (\mathbf{y}^1, \sigma^{k-2}(\mathbf{x})), \dots, (\mathbf{y}^{k-1}, \mathbf{x})\} \in \mathcal{P}_k(\sigma^{k-1}(\mathbf{x}))$, note a identidade

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-1} A(\mathbf{y}^j, \sigma^{k-1-j}(\mathbf{x})) &= \\ &= kA(\mathbf{y}^{k-1}, \mathbf{x}) + \sum_{j=0}^{k-1} jA(\mathbf{y}^{j-1}, \sigma^{k-j}(\mathbf{x})) - \sum_{j=0}^{k-1} jA(\mathbf{y}^j, \sigma^{k-1-j}(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Defina, por conseguinte, a aplicação $W : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ colocando

$$W(\mathbf{x}) = \max_{\{(\mathbf{y}^0, \sigma^{k-1}(\mathbf{x})), \dots, (\mathbf{y}^{k-1}, \mathbf{x})\} \in \mathcal{P}_k(\sigma^{k-1}(\mathbf{x}))} \left[\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k-1} j A(\mathbf{y}^{j-1}, \sigma^{k-j}(\mathbf{x})) \right].$$

Uma vez que a correspondência $\mathbf{x} \mapsto \max_{y_0=x_0} A(\mathbf{y}, \sigma(\mathbf{x}))$ é θ -Hölder, o mesmo vale para a função W .

Tome um ponto $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in \hat{\Sigma}$. Determine, em seguida, algum caminho $\{(\mathbf{y}^0, \sigma^{k-1}(\mathbf{x})), \dots, (\mathbf{y}^{k-2}, \sigma(\mathbf{x})), (\mathbf{y}, \mathbf{x})\} \in \mathcal{P}_k(\sigma^{k-1}(\mathbf{x}))$ satisfazendo

$$\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k-1} j A(\mathbf{y}^{j-1}, \sigma^{k-j}(\mathbf{x})) = W(\mathbf{x}).$$

Faça $\mathbf{y}^{k-1} = \mathbf{y}$. Como $\{(\mathbf{y}^1, \sigma^{k-2}(\mathbf{x})), \dots, (\mathbf{y}^{k-1}, \mathbf{x})\} \in \mathcal{P}_{k-1}(\sigma^{k-1}(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})))$, constatamos

$$\begin{aligned} A(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + W(\mathbf{x}) - W(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) &\leq \\ &\leq A(\mathbf{y}^{k-1}, \mathbf{x}) + \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} j A(\mathbf{y}^{j-1}, \sigma^{k-j}(\mathbf{x})) - \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} j A(\mathbf{y}^j, \sigma^{k-1-j}(\mathbf{x})) = \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} A(\mathbf{y}^j, \sigma^{k-1-j}(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Portanto, se pormos $U_k = W + k^{-1}S_k u$, derivamos

$$\begin{aligned} A(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + U_k(\mathbf{x}) - U_k(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) &\leq \\ &\leq \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} A(\mathbf{y}^j, \sigma^{k-1-j}(\mathbf{x})) + \frac{1}{k} S_k u(\mathbf{x}) - \frac{1}{k} S_k u(\tau_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) = \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} A^u(\mathbf{y}^j, \sigma^{k-1-j}(\mathbf{x})) \leq \beta_A, \end{aligned}$$

ou seja, U_k é uma subação para o potencial A .

Falta argumentar que tal subação cumpre o solicitado. Para tanto, raciocinaremos percorrendo em sentido contrário o roteiro da construção de U_k . Desta forma, sendo $\mathbf{x} \in \pi_1(\mathbb{M}_A(U_k))$, necessariamente existe um caminho $\{(\mathbf{y}^0, \sigma^{k-1}(\mathbf{x})), \dots, (\mathbf{y}^{k-1}, \mathbf{x})\} \in \mathcal{P}_k(\sigma^{k-1}(\mathbf{x}))$ satisfazendo

$$\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} A^u(\mathbf{y}^j, \sigma^{k-1-j}(\mathbf{x})) = \beta_A,$$

de modo a obrigar $A^u(\mathbf{y}^j, \sigma^{k-1-j}(\mathbf{x})) = \beta_A$. Em outros termos, concluímos que $\sigma^{k-1-j}(\mathbf{x}) \in \pi_1(\mathbb{M}_A(u))$ para todo $j \in \{0, \dots, k-1\}$. \square

A demonstração acima, reconhecemos, achou inspiração na estratégia empregada por Thierry Bousch [7] para a obtenção de um lema de Mañé bilateral.

No entanto, a relevância da proposição 35, o leitor cauteloso concordará, só fica atestada caso apresentemos algum exemplo de subação não estrita. Mantidas as hipóteses sobre a dinâmica e o potencial, assumamos, então, que $u \in C^\theta(\Sigma)$ é uma subação estrita. Sendo assim, suponhamos a existência de um ponto $(\mathbf{y}^0, \mathbf{x}^0) \in \hat{\Sigma}$ satisfazendo $A(\mathbf{y}^0, \mathbf{x}^0) = \max_{y_0=y_0^0} A(\mathbf{y}, \mathbf{x}^0)$ e

$$A(\mathbf{y}^0, \mathbf{x}^0) + u(\mathbf{x}^0) - u(\tau_{\mathbf{y}^0}(\mathbf{x}^0)) < \beta_A$$

(Se a função $A \in C^\theta(\Sigma)$ não é cohomóloga a uma constante, o potencial $A \circ \tau$ claramente cumpre esta exigência.) Com isto, segue que a aplicação $U \in C^\theta(\Sigma)$ definida como

$$U(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}[u(\sigma(\mathbf{x})) + u(\mathbf{x})] + \frac{1}{2} \max_{y_0=x_0} A(\mathbf{y}, \sigma(\mathbf{x}))$$

é uma subação não estrita para A . De fato, a função U nada mais é do que a subação U_2 presente na prova da proposição anterior. Ademais, note que, para todo $\mathbf{y} \in \Sigma_{\tau_{\mathbf{y}^0}(\mathbf{x}^0)}^*$,

$$\begin{aligned} A(\mathbf{y}, \tau_{\mathbf{y}^0}(\mathbf{x}^0)) + U(\tau_{\mathbf{y}^0}(\mathbf{x}^0)) - U(\tau_{\mathbf{y}}(\tau_{\mathbf{y}^0}(\mathbf{x}^0))) &\leq \\ &\leq \frac{1}{2}[A(\mathbf{y}, \tau_{\mathbf{y}^0}(\mathbf{x}^0)) + u(\tau_{\mathbf{y}^0}(\mathbf{x}^0)) - u(\tau_{\mathbf{y}}(\tau_{\mathbf{y}^0}(\mathbf{x}^0)))] + \\ &\quad + \frac{1}{2}[A(\mathbf{y}^0, \mathbf{x}^0) + u(\mathbf{x}^0) - u(\tau_{\mathbf{y}^0}(\mathbf{x}^0))] < \beta_A, \end{aligned}$$

ou seja, $\tau_{\mathbf{y}^0}(\mathbf{x}^0) \notin \pi_1(\mathbb{M}_A(U))$.

Referências

- [1] G. Atkinson, Recurrence of co-cycles and random walks, *The Journal of the London Mathematical Society* **13** (1976), 486-488.
- [2] V. Bangert, Mather sets for twist maps and geodesics on tori, *Dynamics Reported* **1** (1988), 1-56.
- [3] A. Baraviera, A. O. Lopes, P. Thieullen, A large deviation principle for equilibrium states of Holder potentials: the zero temperature case, *Stochastics and Dynamics* **6** (2006), 77-96.
- [4] F. M. Branco, *Subação para transformações unidimensionais*, Tese, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2003.
- [5] T. Bousch, Le poisson n'a pas d'arêtes, *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques* **36** (2000), 489-508.
- [6] T. Bousch, La condition de Walters, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* **34** (2001), 287-311.
- [7] T. Bousch, Un lemme de Mañé bilatéral, *Comptes Rendus Mathématique* **335** (2002), 533-536.
- [8] G. Contreras, Action potential and weak KAM solutions, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* **13** (2001), 427-458.
- [9] G. Contreras, R. Iturriaga, *Global minimizers of autonomous Lagrangians*, 22º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1999.
- [10] G. Contreras, A. O. Lopes, P. Thieullen, Lyapunov minimizing measures for expanding maps of the circle, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **21** (2001), 1379-1409.
- [11] A. Fathi, Théorème KAM faible et théorie de Mather sur les systèmes lagrangiens, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série I, Mathématique* **324** (1997), 1043-1046.
- [12] J. Franks, Realizing rotation vectors for torus homeomorphisms, *Transactions of the American Mathematical Society* **311** (1989), 107-115.
- [13] D. A. Gomes, Viscosity solution method and the discrete Aubry-Mather problem, *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series A* **13** (2005), 103-116.

- [14] M. R. Herman, Inégalités a priori pour des tores lagrangiens invariants par des difféomorphismes symplectiques, *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques* **70** (1989), 47-101.
- [15] B. R. Hunt, G. C. Yuan, Optimal orbits of hyperbolic systems, *Nonlinearity* **12** (1999), 1207-1224.
- [16] O. Jenkinson, *Conjugacy rigidity, cohomological triviality and barycentres of invariant measures*, Tese, Universidade de Warwick, 1996.
- [17] O. Jenkinson, Geometric barycentres of invariant measures for circle maps, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **21** (2001), 511-532.
- [18] O. Jenkinson, Rotation, entropy, and equilibrium states, *Transactions of the American Mathematical Society* **353** (2001), 3713-3739.
- [19] O. Jenkinson, Ergodic optimization, *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series A* **15** (2006), 197-224.
- [20] J. Kwapisz, Every convex polygon with rational vertices is a rotation set, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **12** (1992), 333-339.
- [21] J. Kwapisz, A toral diffeomorphism with a nonpolygonal rotation set, *Nonlinearity* **8** (1995), 461-476.
- [22] J. Kwapisz, A priori degeneracy of one-dimensional rotation sets for periodic point free torus maps, *Transactions of the American Mathematical Society* **354** (2002), 2865-2895.
- [23] D. Lind, B. Marcus, *An introduction to symbolic dynamics and coding*, Cambridge University Press, 1995.
- [24] A. O. Lopes, V. Rosas, R. O. Ruggiero, Cohomology and subcohomology for expansive geodesic flows, *pré-publicação*.
- [25] A. O. Lopes, P. Thiullen, Sub-actions for Anosov diffeomorphisms, *Astérisque* **287** (2003), 135-146.
- [26] A. O. Lopes, P. Thiullen, Sub-actions for Anosov flows, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **25** (2005), 605-628.
- [27] A. O. Lopes, P. Thiullen, Mather measures and the Bowen-Series transformation, *pré-publicação*.

- [28] R. Mañé, Generic properties and problems of minimizing measures of Lagrangian systems, *Nonlinearity* **9** (1996), 273-310.
- [29] M. Misiurewicz, K. Ziemian, Rotation sets for maps of tori, *The Journal of the London Mathematical Society* **40** (1989), 490-506.
- [30] M. Pollicott, R. Sharp, Livsic theorems, maximizing measures and the stable norm, *Dynamical Systems* **19** (2004), 75-88.
- [31] L. Radu, Duality in thermodynamic formalism, *pré-publicação*.
- [32] S. V. Savchenko, Cohomological inequalities for finite Markov chains, *Functional Analysis and Its Applications* **33** (1999), 236-238.
- [33] R. R. Souza, Sub-actions for weakly hyperbolic one-dimensional systems, *Dynamical Systems* **18** (2003), 165-179.
- [34] K. Ziemian, Rotation sets for subshifts of finite type, *Fundamenta Mathematicae* **146** (1995), 189-201.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)