

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA - UDESC

CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA - PPGF

Formação: Mestrado acadêmico em Física

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO OBTIDA POR

DENILSO PALAORO

**FORMULAÇÃO EM TERMOS DE ESPINORES DE DUAS
COMPONENTES DA TEORIA ELETROMAGNÉTICA CLÁSSICA**

Apresentada em 29/05/2009 Perante a Banca Examinadora:

Dr. Jorge Gonçalves Cardoso - CCT/UDESC - (presidente)

Dr. Paulo Cesar Rech - CCT/UDESC

Dr. Ricardo Antonio Mosna - IMECC/UNICAMP

Dr. Fábio Mallmann Zimmer - CCT/UDESC - (suplente)

Joinville 2009

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA - UDESC

CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA - PPGF

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Mestrando: Denilso Palaoro

Orientador Prof. Dr. Jorge Gonçalves Cardoso - CCT/UDESC

**FORMULAÇÃO EM TERMOS DE ESPINORES DE DUAS
COMPONENTES DA TEORIA ELETROMAGNÉTICA CLÁSSICA**

DISSERTAÇÃO APRESENTADA PARA A
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM
FÍSICA DA UNIVERSIDADE DO ESTADO DE
SANTA CATARINA, CENTRO DE CIÊNCIAS
TECNOLÓGICAS - CCT, ORIENTADA PELO
PROF. DR. JORGE GONÇALVES CARDOSO.

Joinville 2009

FICHA CATALOGRÁFICA

NOME: Denilso Palaoro	
DATA DEFESA: 29/05/2009	
LOCAL: Joinville, CCT/UDESC	
NÍVEL: Mestrado	Número de ordem: 04 - CCT/UDESC
FORMAÇÃO: Física	
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Física	
TÍTULO: Formulação em Termos de Espinores de Duas Componentes da Teoria Eletromagnética Clássica	
PALAVRAS-CHAVE: Espaço de Minkowski, Espinores, Equações de Maxwell, Equações de Onda	
NÚMERO DE PÁGINAS: viii, 70 p.	
CENTRO/UNIVERSIDADE: Centro de Ciências Tecnológicas da UDESC	
PROGRAMA: Pós-graduação em Física - PPGF	
CADASTRO CAPES: 41002016011P-4	
PRESIDENTE DA BANCA: Dr. Jorge Gonçalves Cardoso	
MEMBROS DA BANCA: Dr. Paulo Cesar Rech, Dr. Ricardo Antonio Mosna, Dr. Fábio Mallmann Zimmer,	

Agradecimentos

Faço abaixo um agradecimento especial à algumas pessoas e entidades que tiveram participação neste trabalho: Professor Dr. Jorge Gonçalves Cardoso (meu orientador) por sua orientação, CAPES (pela bolsa de estudos), Departamento de Física da UDESC, e meus colegas de mestrado pelo inestimável auxílio durante os estudos. Em especial, agradeço à Irene, Valdemiro e Derlaine (minha esposa, meu pai e minha irmã).

Sumário

1	Introdução	9
2	O Espaço de Minkowski Real	12
2.1	Tensores em \mathbb{M}	13
2.2	Estrutura causal	16
2.3	Formulação covariante do eletromagnetismo	22
3	Cálculo Espinorial	26
3.1	Espinor métrico	26
3.2	O produto interno	28
3.3	Transformações lineares	29
3.4	Operações básicas com espinores	29
3.5	Conexões entre tensores-mundo e espinores	31
4	Formulação Espinorial da Teoria de Maxwell	33
4.1	A primeira “metade” como identidades	33
4.2	O tensor momento-energia eletromagnético	47
5	Conclusões	60
	Apêndice	61

Resumo

Neste trabalho apresentaremos a formulação da teoria eletromagnética clássica em termos de espinores de duas componentes. Em particular, obteremos explicitamente as equações de onda para fótons de ambas helicidades. Para isso, primeiro trataremos explicitamente da formulação covariante da teoria eletromagnética clássica. Explicitaremos também o homomorfismo entre o grupo $SL(2, \mathbb{C})$ e o grupo de Lorentz restrito.

PALAVRAS-CHAVE: Espaço de Minkowski. Espinores. Equações de Maxwell.
Equação de Onda.

Abstract

In this work the two-component spinor formulation of the classical theory of electromagnetic fields is presented. In particular, we obtain explicitly the wave equation for photons of both helicities. For this purpose, we present first the formulation of the theory in Minkowski spacetime together with the homomorphism between $SL(2, C)$ and the restricted Lorentz group.

KEY WORDS: Minkowski space. Spinors. Maxwell equations. Wave equation.

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho apresentaremos a teoria eletromagnética clássica em termos de espinores de duas componentes. Dentre as motivações para desenvolvermos tal formulação, podemos citar o fato que formulações de teorias físicas bem estabelecidas, com base na existência de formalismos alternativos, podem propiciar conforto computacional e simplicidade formal, além de interpretações físicas antes não-devisáveis. A teoria eletromagnética em sua formulação covariante [8] mostra-se "livre" de sistemas de referência, daí um dos motivos desta formulação: obtermos equações de movimento que sejam independentes de sistemas de referência. Este fato também ocorre quando formulamos a teoria eletromagnética em termos de espinores de duas componentes. Veremos ainda que as equações de onda para fótons surgem de modo natural. Espinores foram introduzidos [1] na física teórica com o intuito de descrever funções de onda de sistemas quânticos com spin. Dirac utilizou espinores de quatro componentes para a descrição de sua teoria relativística [1]. A teoria dos espinores em relatividade foi formalizada por Infeld e van der Waerden, entre 1929 e 1933 [1].

Uma das características mais importantes da abordagem da teoria de Maxwell em termos de espinores de duas componentes, é o fato que todos os seis graus de liberdade eletromagnéticos são localmente representados por um par de espinores de dois índices simétricos. A um nível clássico, as equações de campo descrevem a propagação de campos "sem massa" com spin ± 1 . O bivector eletromagnético é responsável por levar toda informação a respeito dos graus de liberdade dos campos a todos os pontos do espaço tempo. A teoria completa aparece como um sistema de quatro equações diferenciais lineares complexas (oito reais) de primeira ordem para cada uma das componentes dos campos. Em relação a abordagem em espaço-tempo

real [2], o sistema inteiro de equações de campo pode ser considerado como sendo formado por duas "metades"(Hermitianas) $SL(2, \mathbb{C})$ -covariantes. A primeira metade é constituída pelas chamadas identidades de Bianchi da teoria [2]. A segunda metade é constituída por equações envolvendo derivadas apropriadas dos campos juntamente com as fontes.

Aqui, estamos basicamente interessados em derivar a teoria eletromagnética completa no espaço de Minkowski real \mathbb{M} a partir de dois princípios variacionais. A idéia chave na qual repousam nossos procedimentos é olhar a primeira "metade" da teoria como uma "teoria complementar" a qual pode ser efetivamente combinada com a outra parte. Usaremos a forma espinorial da densidade eletromagnética lagrangeana convencional sobre \mathbb{M} para obter a segunda metade das equações de Maxwell a partir de um dos princípios variacionais. As equações de movimento resultantes envolvem, então, a versão espinorial da densidade Lagrangeana de Maxwell. A ação relevante é definida sobre uma subvariedade limitada de \mathbb{M} .

Ao levar-se a cabo ambos os princípios variacionais, assumimos que variações arbitrárias do potencial eletromagnético se anulam sobre a fronteira da subvariedade. Ambos os campos serão tomados como contínuos sobre o fecho da subvariedade. Veremos que as equações de onda para os campos e potenciais emergem como uma consequência da estrutura formal das equações de campo.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira. No capítulo 2 apresentamos a formulação covariante da teoria eletromagnética. Este capítulo é dividido em três seções. Na seção 2.1, fazemos uma descrição do espaço de Minkowski real, bem como a apresentação do cálculo tensorial. A seção 2.2 é destinada a apresentação da estrutura causal. Nesta seção, apresentamos o grupo de Lorentz, o qual aparece formalmente como um conjunto de matrizes (4×4) que deixa a métrica Minkowskiana invariante, descrevemos sua operacionalidade, definimos suas componentes e introduzimos o homomorfismo entre o grupo $SL(2, \mathbb{C})$ e a componente ortócrona própria [2], sem esquecer da estrutura causal. Na Seção 2.3, apresentamos, propriamente dito, a formulação covariante (em espaço de Minkowski real) da teoria eletromagnética clássica. Nela, apresentamos as equações de Maxwell na formulação tradicional e, logo após, obtemos explicitamente as equações de campo a partir de um princípio variacional e das chamadas identidades de Bianchi [2]. E, de posse das equações de campo, obtemos as equações de onda para o potencial e para os campos.

O capítulo 3 é dedicado a introdução do cálculo espinorial, e é dividido em

seis seções. Na seção 3.1 fazemos uma breve introdução aos espinores. Na seção 3.2, apresentamos os espinores métricos, bem como os mecanismos para "levantar" e "abaixar" índices espinoriais. O produto interno de espinores é apresentado a seguir, na seção 3.3. O mecanismo que nos permite escrever espinores em diferentes sistemas de base é apresentado na seção 3.4. Na seção 3.5 apresentamos as operações básicas com espinores. E, na seção 3.6, os símbolos de Infeld-van der Waerden são apresentados como "objetos conectores" entre tensores-mundo e espinores.

No capítulo 4, apresentamos a teoria eletromagnética clássica em termos de espinores de duas componentes. Este capítulo é dividido em duas seções. A seção 4.1 trata das equações de Maxwell no \mathbb{R}^3 . Nela faremos uma breve revisão de algumas definições básicas. A primeira "metade" das equações aparece como um conjunto de identidades, não como equações de movimento. A seguir, formulamos o princípio variacional e apresentamos as equações de movimento juntamente com as integrais de carga. As equações de ondas eletromagnéticas são derivadas a seguir. Na seção 4.2, introduzimos explicitamente a definição espinorial do tensor momento-energia eletromagnético, e, a seguir, desenvolvemos a expressão para a energia eletromagnética. Por fim, as integrais cinemáticas covariantes são apresentadas. Neste estágio, obtemos uma expressão para o vetor de Poynting.

As conclusões são apresentadas no capítulo 5. E, no capítulo 6, temos o apêndice onde alguns cálculos que não foram exibidos no texto principal são apresentados de modo mais detalhado.

Neste trabalho adota-se o sistema de unidades natural, onde em particular $c = \hbar = 1$. Utilizaremos letras latinas maiúsculas não-linhadas e "linhadas" para rotular componentes de espinores e suas respectivas complexa conjugada. Consideraremos, aqui, apenas espinores conectados com objetos geométricos definidos no espaço-tempo de Minkowski real. Usaremos o símbolo " ∂ " para representar derivada parcial. Ao longo do trabalho apresentaremos mais notação conforme for necessário.

Capítulo 2

O Espaço de Minkowski Real

O espaço de Minkowski real \mathbb{M} é o ambiente físico no qual a teoria da relatividade especial é formulada. Topologicamente, $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, e \mathbb{M} é equipado com um tensor métrico covariante $\eta_{\mu\nu}$ dado por

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (\eta^{\mu\nu}). \quad (2.1)$$

Notemos que a assinatura métrica [3, 4] usada é $(+ - - -)$. Eventualmente pode-se usar a assinatura métrica $(- + + +)$, mas nesse trabalho usaremos a primeira.

Eventos em \mathbb{M} são representados por x^μ , assim usaremos índices gregos como rotuladores, $\mu, \nu, \dots, \lambda = 0, 1, 2, 3$ e trabalharemos com coordenadas cartesianas, de modo que

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3), \quad (2.2)$$

onde $x^0 \equiv c.t$ (c é a velocidade da luz no vácuo) é a coordenada temporal e $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$ e $x^3 \equiv z$ são coordenadas espaciais.

O intervalo entre dois eventos é dado por $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Este intervalo posto de maneira explícita fica

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2. \quad (2.3)$$

Existe $\eta^{\mu\nu}$ tal que [5, 6]

$$\eta_{\mu\lambda} \eta^{\lambda\nu} = \delta_\mu^\nu = \begin{cases} 1 & \text{se } \mu = \nu \\ 0 & \text{se } \mu \neq \nu \end{cases}, \quad (2.4)$$

onde $\eta^{\mu\nu}$ é o tensor métrico contravariante de \mathbb{M} , e δ_μ^ν é o chamado delta de Kronecker. Assim podemos notar que $(\eta_{\mu\nu}) = (\eta^{\mu\nu})$.

Disposmos de mecanismos elementares para mover índices, tais como

$$x_\mu = \eta_{\mu\lambda}x^\lambda = \eta_{\mu 0}x^0 + \eta_{\mu 1}x^1 + \eta_{\mu 2}x^2 + \eta_{\mu 3}x^3, \quad (2.5)$$

e

$$x^\mu = \eta^{\mu\lambda}x_\lambda = \eta^{\mu 0}x_0 + \eta^{\mu 1}x_1 + \eta^{\mu 2}x_2 + \eta^{\mu 3}x_3. \quad (2.6)$$

Assim, tem-se as correspondências

$$x^0 = x_0, \quad x^1 = -x_1, \quad x^2 = -x_2, \quad x^3 = -x_3, \quad (2.7)$$

ou ainda

$$x^0 = x_0, \quad x^k = -x_k, \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.8)$$

Assim, notamos que a métrica (a qual escolhemos) mantém a orientação temporal e inverte a espacial.

O produto escalar entre dois 4-vetores de \mathbb{M} é expresso por

$$\eta_{\mu\nu}x^\mu y^\nu = x^\mu y_\mu. \quad (2.9)$$

Em virtude da simetria de $\eta_{\mu\nu}$, tem-se

$$\eta_{\mu\nu}x^\mu y^\nu = x^\mu y_\mu = \eta^{\mu\lambda}x_\mu y_\lambda = x_\mu y^\mu. \quad (2.10)$$

2.1 Tensores em \mathbb{M}

Tensores são mapeamentos multilineares. Tensores que possuem p índices superiores são chamados contravariantes, assim [5-7]

$$\mathbb{M} \times \mathbb{M} \times \dots \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ com } p \text{ cópias de } \mathbb{M}. \quad (2.11)$$

Em componentes,

$$T^{\mu\nu\dots\lambda} = x^\mu \otimes y^\nu \otimes \dots \otimes z^\lambda. \quad (2.12)$$

O tensor $T^{\mu\nu\dots\lambda}$ é um tensor de valência $(a, 0)$, e o símbolo \otimes denota produto tensorial.

Denotamos por \mathbb{M}^* o dual do espaço vetorial \mathbb{M} , o conjunto de todas as funções lineares reais sobre \mathbb{M} . Então, para um elemento de \mathbb{M}^* , temos um mapeamento

$\mathbb{M}^* \times \mathbb{M}^* \times \dots \times \mathbb{M}^* \rightarrow \mathbb{R}$ com b cópias. Tensores que possuem todos os índices inferiores são chamados tensores covariantes. Assim,

$$U_{\mu\nu\dots\lambda} \simeq x_\mu \otimes y_\nu \otimes \dots \otimes z_\lambda, \quad (2.13)$$

onde $U_{\mu\nu\dots\lambda}$ é um tensor de valencia $(0, b)$. Tensores do tipo $W^{\mu\nu\dots\lambda}_{\alpha\beta\dots\gamma}$, que possuem a índices superiores e b inferiores são chamados de tensores mistos e possuem valencia (a, b) .

Operações com tensores

Temos operações que podemos realizar com tensores, cujo resultado são novos tensores. São elas: soma, produto, contração e substituição indicial. Temos:

- Soma: é comutativa e estritamente para tensores de mesma valencia, sendo que o novo tensor possui a mesma valencia dos tensores somados. Por exemplo,

$$T^{\mu\dots\nu}_{\lambda\dots\sigma} + U^{\mu\dots\nu}_{\lambda\dots\sigma} = W^{\mu\dots\nu}_{\lambda\dots\sigma}. \quad (2.14)$$

- Produto: é linear, distributivo com relação a soma e não é comutativo. O produto de tensores leva-nos à novos tensores cujas valencias são dadas como a "soma" das valencias dos tensores originais. Por exemplo,

$$W = T \otimes U \rightarrow W^{\mu\nu\dots\lambda}_{\alpha\beta\dots\gamma} = T^{\mu\nu\dots\lambda} U_{\alpha\beta\dots\gamma}, \quad (2.15)$$

tal que W tem valencia (a, b) se $T^{\mu\nu\dots\lambda}$ possui valencia $(a, 0)$ e $U_{\alpha\beta\dots\gamma}$ possui valencia $(0, b)$.

- Contração: pegam tensores de valencia (a, b) e levam a tensores de valencia $(a - 1, b - 1)$. Por exemplo,

$$W^{\mu\nu\dots\lambda}_{\alpha\beta\dots\gamma} \rightarrow W^{\sigma\nu\dots\lambda}_{\alpha\sigma\dots\gamma} = V^{\nu\dots\lambda}_{\alpha\dots\gamma}. \quad (2.16)$$

- Substituição indicial: a operação de substituição indicial mantém valencias e pode ser aplicada a quaisquer índices (contraídos ou livres). Por exemplo,

$$W^{\mu\nu\dots\lambda}_{\alpha\beta\dots\gamma} \rightarrow W^{\sigma\rho\dots\tau}_{\delta\theta\dots\xi}. \quad (2.17)$$

Operações de Simetria

As operações de simetria utilizadas na álgebra tensorial são chamadas de simetrização e antissimetrização. Estas operações atuam em estruturas indiciais, não dependendo se os índices são covariantes ou contravariantes. Além disso, elas fornecem configurações independentes do caráter geométrico dos objetos considerados.

Notação: A operação de simetrização é denotada por parênteses, e a operação de antissimetrização, por colchetes. Um tensor é dito ser simétrico se $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$. Um tensor antissimétrico satisfaz $B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}$. Temos a seguir exemplos das operações:

$$A_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu}), \quad (2.18)$$

e

$$B_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(B_{\mu\nu} - B_{\nu\mu}). \quad (2.19)$$

Mais geralmente, temos as expansões (que envolvem permutações cíclicas de n índices)

$$A_{(\mu\nu\dots\lambda)} = \frac{1}{n!}(A_{\mu\nu\dots\lambda} + A_{\nu\mu\dots\lambda} + \dots + A_{\lambda\mu\dots\nu}). \quad (2.20)$$

Por exemplo, para $n = 3$,

$$A_{(\mu\nu\lambda)} = \frac{1}{3!}(A_{\mu\nu\lambda} + A_{\nu\mu\lambda} + A_{\mu\lambda\nu} + A_{\lambda\mu\nu} + A_{\lambda\nu\mu} + A_{\nu\lambda\mu}). \quad (2.21)$$

Observe que a expressão (2.20) pode ser escrita como

$$A_{(\mu\nu\lambda)} = \frac{1}{3!}(2!A_{(\mu\nu)\lambda} + 2!A_{(\mu\lambda)\nu} + 2!A_{(\lambda\nu)\mu}). \quad (2.22)$$

Assim, para um tensor simétrico com n índices, temos

$$A_{(\mu\nu\dots\lambda)} = \frac{1}{n}(A_{\mu(\lambda\dots\nu)} + A_{\nu(\mu\dots\lambda)} + \dots + A_{\lambda(\mu\dots\nu)}). \quad (2.23)$$

Similarmente, para um tensor antissimétrico temos

$$B_{[\mu\nu\dots\lambda]} = \frac{1}{n!}(B_{\mu\nu\dots\lambda} - B_{\nu\mu\dots\lambda} + \dots + (-1)^N \dots + B_{\lambda\mu\dots\nu}), \quad (2.24)$$

onde $(-1)^N$ controla as paridades (para antissimetria). Por exemplo, para $n = 3$,

$$\begin{aligned} B_{[\mu\nu\lambda]} &= \frac{1}{3!}(B_{\mu\nu\lambda} - B_{\mu\lambda\nu} + B_{\nu\lambda\mu} - B_{\nu\mu\lambda} + B_{\lambda\mu\nu} - B_{\lambda\nu\mu}) \\ &= \frac{1}{3!}(2!B_{\mu[\nu\lambda]} - 2!B_{\nu[\mu\lambda]} + 2!B_{\lambda[\mu\nu]}). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Assim, para um tensor antissimétrico com n índices, temos

$$B_{[\mu\nu\dots\lambda]} = \frac{1}{n}(B_{\mu[\nu\dots\lambda]} - B_{\nu[\mu\dots\lambda]} + \dots + (-1)^{n-1}B_{\lambda[\nu\dots\mu]}). \quad (2.26)$$

2.2 Estrutura causal

As leis físicas que governam o comportamento de campos e partículas são expressas em \mathbb{M} . Por outro lado, as leis físicas que descrevem a natureza são independentes da escolha de sistemas de coordenadas: um processo físico ocorre sem levar em conta a escolha do sistema de coordenadas do observador [4, 7]. Consequentemente, a transformação entre diferentes sistemas de referência, e as quantidades que são invariantes sobre essas transformações, assumem uma importância fundamental.

Sistemas de referência no qual partículas livres movem-se uniformemente são chamadas sistemas de referência inerciais. Este conceito, formalmente, é o mesmo tanto em mecânica clássica como na teoria da relatividade especial.

Na mecânica clássica, a correspondência entre diferentes sistemas inerciais é expressa pelas leis de transformação de Galileu: dois sistemas de coordenadas movendo-se um em relação ao outro com velocidade relativa constante são mecânicamente equivalentes. As leis de Newton são formalmente as mesmas para todos os sistemas inerciais.

Leis físicas mais gerais (ou teorias) podem não ser válidas para a classe de sistemas galileanos. No caso da propagação de ondas eletromagnéticas no vácuo, foi estabelecido experimentalmente que a velocidade c é a mesma para todos os sistemas inerciais, contrariamente à regra galileana de adição de velocidades. Do ponto de vista teórico, a propagação da luz é corretamente descrita pelas equações de Maxwell, as quais *não* são válidas em sistemas galileanos. Matematicamente, as equações de Maxwell *não são invariantes sob transformações de Galileu*.

Esta dificuldade foi solucionada pela teoria da relatividade especial. As transformações de Lorentz desenvolvidas abaixo definem uma nova classe de sistemas inerciais para fenômenos eletromagnéticos e, por causa disto, acredita-se que as relações de fenômenos físicos com observadores são as mesmas para toda física.

O grupo de Lorentz

O grupo de Lorentz é o conjunto de todas as matrizes (4×4) que satisfazem a relação

$$L^T \eta L \doteq \eta, \tag{2.27}$$

com “ T ” denotando transposição matricial, o símbolo “ \doteq ” significa *igual por definição*,

e

$$L = (L^\mu{}_\nu) = \begin{bmatrix} L^0_0 & L^0_1 & L^0_2 & L^0_3 \\ L^1_0 & L^1_1 & L^1_2 & L^1_3 \\ L^2_0 & L^2_1 & L^2_2 & L^2_3 \\ L^3_0 & L^3_1 & L^3_2 & L^3_3 \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Aqui, adotamos a convenção: $L^T = (L_\mu{}^\nu)$. Assim, o grupo de Lorentz deixa $\eta_{\mu\nu}$ invariante. Mais explicitamente, a definição (2.27) é expressa por

$$\eta_{\mu\nu} = L_\mu{}^\lambda \eta_{\lambda\sigma} L^\sigma{}_\nu. \quad (2.29)$$

Operacionalidade do grupo de Lorentz

Vamos considerar um evento visto por um observador em um referencial S e também visto por outro observador localizado num outro referencial S' . Visto pelo observador S , o evento possui coordenadas dadas por x^μ , enquanto que visto pelo observador S' , o evento possui coordenadas dada por x'^μ . As duas observações podem ser relacionadas por

$$x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu. \quad (2.30)$$

Explicitamente,

$$\begin{bmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L^0_0 & L^0_1 & L^0_2 & L^0_3 \\ L^1_0 & L^1_1 & L^1_2 & L^1_3 \\ L^2_0 & L^2_1 & L^2_2 & L^2_3 \\ L^3_0 & L^3_1 & L^3_2 & L^3_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

O grupo de Lorentz pode ser definido como o grupo que mantém invariante o produto escalar $x^\mu \cdot y_\mu = \textit{invariante}$. As transformações de Lorentz relacionam eventos em \mathbb{M} . Finalmente, uma transformação de Lorentz L mapeia um espaço-tempo em outro, preservando o produto escalar:

$$(Lx) \cdot (Ly) = x \cdot y. \quad (2.32)$$

O grupo de Lorentz L possui quatro componentes, cada qual podendo ser conectada no sentido que algum ponto de uma componente pode ser conectado continuamente à algum outro ponto de outra, mas nenhuma transformação de Lorentz pode conectar uma em outra. As componentes do grupo de Lorentz emergem quando

tomamos o determinante da equação (2.27). Tem-se, então, (lembrando que o determinante da transposta de uma matriz é igual ao determinante da matriz original)

$$|L|^2 \doteq (\det L)^2 = 1 = [\det(L^\mu_\nu)]^2, \quad (2.33)$$

ou seja

$$\det(L^\mu_\nu) = \pm 1. \quad (2.34)$$

Pondo $\mu = \nu = 0$ em (2.29), vem

$$\eta_{00} = L_0^\lambda \eta_{\lambda\sigma} L^\sigma_0, \quad (2.35)$$

e, com base na Eq. (2.33), obtemos explicitamente

$$(L^0_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (L^i_0)^2 = 1. \quad (2.36)$$

Transformações de Lorentz são determinadas por seis parâmetros reais. Classificamos as transformações de Lorentz, de acordo com o sinal de L^0_0 , em dois grupos: transformações ortócronas L^\uparrow com $L^0_0 \geq 0$, e transformações anti-ortócronas L^\downarrow com $L^0_0 \leq 0$. Sob L^\uparrow , o sinal da componente zero de vetores tipo-tempo não mudam: L^\uparrow mapeia uma direção temporal na mesma direção temporal; esta componente opera dentro de uma classe equivalente de vetores tipo-tempo. Por outro lado, L^\downarrow muda o sinal de x^0 e conecta duas classes diferentes de direções temporais. Então, devido à Eq. (2.34), temos quatro componentes para o grupo de Lorentz, as quais são caracterizadas pelo valor de $\det(L^\mu_\nu)$ e pelo sinal de L^0_0 . Assim, temos as quatro possibilidades:

$$\begin{aligned} L^\uparrow_+ : \det(L) = +1, \quad L^0_0 = +1, \\ L^\uparrow_- : \det(L) = -1, \quad L^0_0 = +1, \\ L^\downarrow_+ : \det(L) = +1, \quad L^0_0 = -1, \\ L^\downarrow_- : \det(L) = -1, \quad L^0_0 = -1. \end{aligned} \quad (2.39)$$

A interseção de L^\uparrow com L_+ fornece o grupo de Lorentz restrito L^\uparrow_+ . Por isso obtemos as seguintes quatro componentes do grupo de Lorentz: L^\uparrow_+ , L^\uparrow_- , L^\downarrow_+ , L^\downarrow_- . Estas são desconectadas, isto é, dois elementos do grupo em diferentes componentes não podem ser conectados continuamente um com o outro.

A componente que temos particular interesse é L^\uparrow_+ . Associado com o grupo de Lorentz L^\uparrow_+ , está o grupo de matrizes complexas (2×2) unimodulares, o qual

denotamos por $SL(2, \mathbb{C})$. Tal associação desempenha um papel crucial na formulação a ser considerada aqui (ver Capítulo 4).

O homomorfismo entre $SL(2, \mathbb{C})$ e o grupo de Lorentz restrito

Discutiremos agora uma correspondência (um homomorfismo) [2, 8-11] entre o grupo unimodular $SL(2, \mathbb{C})$ de matrizes complexas (2×2) e o grupo de Lorentz ortócrono próprio L_+^\uparrow . Isto nos permitire introduzir as entidades básicas chamadas *espinores*. Ambos grupos são de seis parâmetros, e a correspondência a ser discutida é uma generalização do homomorfismo entre o grupo de rotações 3-D e o grupo unimodular-unitário 2-D.

Mais precisamente, queremos mostrar que se A é uma matriz unimodular (2×2), então para $\pm A$ corresponde uma transformação de Lorentz $L(A)$, tal que

$$\pm A \rightarrow L(A) \in L_+^\uparrow, \quad (2.40)$$

e esta correspondência preserva a lei da multiplicação (isto é, um homomorfismo na linguagem matemática):

$$\pm(AB) \rightarrow L(A)L(B) = L(AB). \quad (2.41)$$

Assim, o homomorfismo é dois-para-um. Ambos $+A$ e $-A$ estão associados com a mesma transformação de Lorentz. Mostraremos esta importante correspondência explicitamente na seguinte forma: deixe X ser qualquer matriz hermitiana (2×2). Qualquer matriz (2×2) pode ser escrita como uma combinação linear da identidade e três matrizes (2×2) de base. Então, com I denotando a matriz identidade (2×2), temos

$$X = x^0 I + x^1 \sigma_1 + x^2 \sigma_2 + x^3 \sigma_3 = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

onde os coeficientes x^0, x^1, x^2, x^3 são números reais e as matrizes de base σ são escolhidas como as matrizes hermitianas de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Escrevendo $\sigma_0 = I$, podemos usar a notação concisa

$$X = \sigma_\mu x^\mu. \quad (2.44)$$

Agora deixemos A ser uma matriz complexa unimodular arbitrária, ou seja

$$\det A = 1. \quad (2.45)$$

Então X'^T é novamente uma matriz hermitiana (2×2) e deve ser da forma

$$X' = x'^\mu \sigma_\mu. \quad (2.46)$$

Agora $\det X' = \det X$, ou explicitamente

$$x^{0^2} - x^{1^2} - x^{2^2} - x^{3^2} = x^{0'^2} - x^{1'^2} - x^{2'^2} - x^{3'^2}. \quad (2.47)$$

Por isso, a matriz transformação X'^T induz a transformação nos coeficientes x^μ , que é uma transformação de Lorentz $L(A)x' = L(A)x$. Para encontra-la explicitamente, notemos que

$$L^\mu{}_\nu x^\nu \sigma_\mu = Ax^\mu \sigma_\mu A^T = x^\mu A \sigma_\mu A^T, \quad (2.48)$$

ou comparando os coeficientes de x^μ

$$L^\mu{}_\nu \sigma_\mu = A \sigma_\nu A^T. \quad (2.49)$$

Para obter $L^\mu{}_\nu$, multiplicamos ambos os lados com σ_ρ e tomamos o traço, o que nos leva a

$$[L(A)]^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_\mu A \sigma_\nu A^T) = \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{\sigma}^\mu A \sigma_\nu A^T). \quad (2.50)$$

Esta é a correspondência desejada. Claramente as matrizes A e $-A$ geram a mesma $L(A)^\mu{}_\nu$.

Estrutura causal

Cada \mathbb{M} possui uma magnitude de x^μ . O espaço-tempo é dividido em três cones abertos conectados e, de acordo com a terminologia das Refs. [12, 13], temos:

$$\begin{aligned} x^\mu x_\mu &> 0, \text{ com } x^0 \geq 0 \\ x^\mu x_\mu &= 0, \text{ com } x^0 \geq 0 \\ x^\mu x_\mu &< 0. \end{aligned} \quad (2.51)$$

No primeiro caso de (2.51), se $x^0 > 0$, temos um vetor tipo-tempo futuro, que corresponde a região I' na figura (1). Se $x^0 < 0$ teremos um vetor tipo-tempo passado, e este corresponde a região I'' . No segundo caso de (2.51), temos um vetor tipo luz (ou vetor nulo) com uma classificação causal (futuro e passado) que é a mesma de antes. No terceiro caso de (2.51) temos um vetor tipo espaço que, na figura (1), correspondem as regiões II' e II'' .

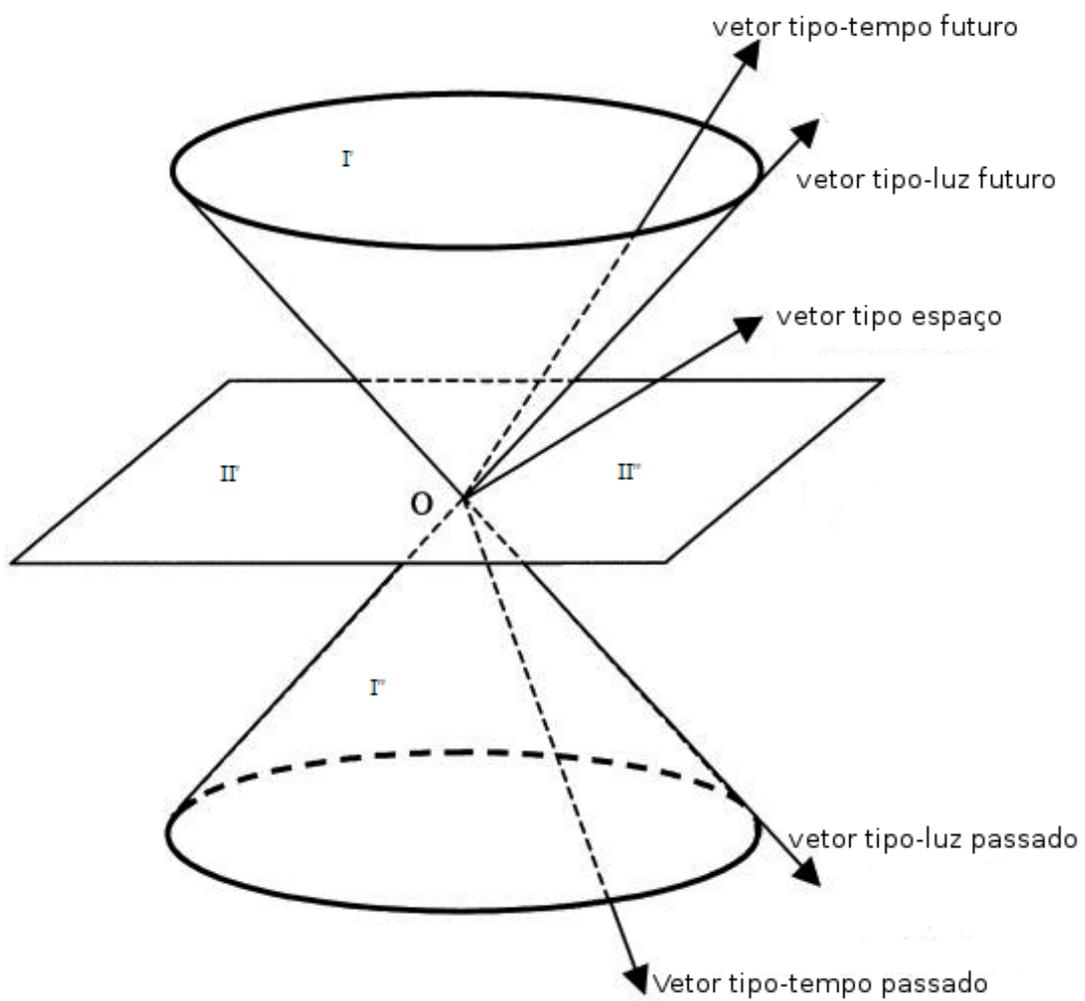


Fig. 01 Cone de Luz - O'Donnell; P., Introduction to 2-Spinor in General Relativity

2.3 Formulação covariante do eletromagnetismo

As equações de Maxwell na formulação tradicional

As equações de Maxwell para campos elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} produzidos por uma dada densidade de carga ρ e uma densidade de corrente \vec{J} são [6, 14]

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{J}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0.\end{aligned}\tag{2.52}$$

Estas equações podem ser escritas numa formulação covariante a partir do princípio variacional Minkowskiano.

Princípio Variacional Minkowskiano

A partir do princípio variacional Minkowskiano podemos obter as equações dinâmicas de Maxwell, ou seja as equações que envolvem fontes, na sua formulação covariante. A vantagem de se escrever as equações de Maxwell na formulação covariante é que obtém-se equações “livres de sistemas de referência”

O princípio variacional é dado por [3]:

$$\delta \int_{\Omega} L d^4x = 0,\tag{2.53}$$

onde L é a densidade lagrangeana que é dada por:

$$L = \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_{\mu} J^{\mu},\tag{2.54}$$

onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor eletromagnético. Este tensor “carrega” informação a respeito do campo elétrico \vec{E} e do campo magnético \vec{B} , de acordo com [5]

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}.\tag{2.55}$$

Podemos relacionar o tensor eletromagnético com o 4-potencial (lê-se quadri-potencial) A_{μ} , o qual traz informação [14] a respeito do potencial eletrostático ϕ e do

potencial magnético \vec{A} , de modo que $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (\phi, \vec{A})$, onde fica claro que $A^0 = \phi$ e $A^i = \vec{A}$ com $i = 1, 2, 3$. O termo J^μ na equação (2.54) é chamado 4-corrente e está relacionado com a densidade de carga ρ e com a densidade de corrente \vec{j} , de modo que $J^\mu = (j^0, j^1, j^2, j^3) = (\rho, \vec{j})$ onde vemos que $j^0 = \rho$ e $j^i = \vec{j}$. Temos ainda a relação [3] entre o tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$ e o 4-potencial A_μ

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.56)$$

Substituindo (2.54) em (2.53) obtemos

$$\delta \int_{\Omega} \left(\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu \right) d^4x = 0, \quad (2.57)$$

onde

$$d^4x = \frac{1}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\sigma, \quad (2.58)$$

é o elemento de 4-volume e

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{para } \mu = 0, \nu = 1, \lambda = 2, \sigma = 3 \\ 0 & \text{se qualquer dois índices forem iguais} \\ -1 & \text{para qualquer permutação ímpar } \mu \neq \nu \end{cases} \quad (2.59)$$

é o símbolo de Levi-Civita [6,7]. Sabendo que δ comuta com a integral, vem

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{16\pi} \delta(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + \delta(A_\mu J^\mu) \right] d^4x = 0. \quad (2.60)$$

Como J^μ não sente a atuação de δ , devemos ter $\delta J^\mu = 0$ e, temos ainda

$$\delta[F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] = \delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} = 2F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu}. \quad (2.61)$$

Substituindo (2.61) em (2.60) obtemos

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{16\pi} (2F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu}) + J^\mu \delta A_\mu \right] d^4x = 0. \quad (2.62)$$

Agora, substituindo o tensor eletromagnético (2.56) na equação acima, resulta

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} \delta(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + J^\mu \delta A_\mu \right] d^4x = 0. \quad (2.63)$$

Com δ atuando nos termos dentro dos parenteses, lembrando ainda que δ comuta com ∂ , obtemos

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu - \frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} \partial_\nu \delta A_\mu + J^\mu \delta A_\mu \right) d^4x = 0. \quad (2.64)$$

Permutando μ e ν no primeiro termo de (2.64), e lembrando que o tensor eletromagnético (2.56) é antissimétrico, ou seja, $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$, obtemos

$$\int_{\Omega} \left(-\frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} \partial_{\nu} \delta A_{\mu} - \frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} \partial_{\nu} \delta A_{\mu} + J^{\mu} \delta A_{\mu} \right) d^4x = 0. \quad (2.65)$$

Agrupando os termos adequadamente, vem

$$\int_{\Omega} \left(-\frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \partial_{\nu} \delta A_{\mu} + J^{\mu} \delta A_{\mu} \right) d^4x = 0. \quad (2.66)$$

Integrando por partes a primeira destas integrais, obtemos¹

$$\int_{\Omega} -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \partial_{\nu} \delta A_{\mu} d^4x = - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \delta A_{\mu} d^3x_{\nu} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \delta A_{\mu} \partial_{\nu} F^{\mu\nu} d^4x, \quad (2.67)$$

onde $\partial\Omega$ denota a fronteira de Ω . A integral de fronteira de (2.67) pode ser negligenciada pois $\delta A_{\mu} \equiv 0$ sobre $\partial\Omega$. Assim,

$$\int_{\Omega} -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \partial_{\nu} \delta A_{\mu} d^4x = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \delta A_{\mu} \partial_{\nu} F^{\mu\nu} d^4x. \quad (2.68)$$

Substituindo (2.68) em (2.66) e pondo δA_{μ} em evidência

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{4\pi} \partial_{\nu} F^{\mu\nu} + J^{\mu} \right) \delta A_{\mu} d^4x = 0. \quad (2.69)$$

De acordo com o princípio de ação mínima, as variações δA_{μ} são arbitrárias e então os coeficientes dos δA_{μ} devem ser nulos [3]. Assim

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = -4\pi J^{\nu}, \quad (2.70)$$

que é a equação que inicialmente buscávamos. A equação (2.70) está relacionada com as duas primeiras equações (2.52), nos fornecendo então quatro equações numéricas, e demonstrando vividamente a economia da notação de tensores. A título de exemplo, no apêndice A1 é mostrado explicitamente como obtemos as duas primeiras equações (2.52) a partir da equação (2.70).

A partir do tensor eletromagnético, eq (2.56), podemos obter as duas últimas equações (2.52) na sua formulação covariante

$$\partial_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0, \quad (2.71)$$

¹A expressão para d^3x_{ν} será mostrada explicitamente mais tarde (ver Seção 1 do capítulo 4).

que é equivalente a

$$\partial_\mu F^{*\mu\nu} = 0, \quad (2.72)$$

onde $F^{*\mu\nu}$ é o tensor de Maxwell dual, dado por

$$F^{*\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma}. \quad (2.73)$$

As equações (2.70) e (2.71) são as equações de Maxwell na forma covariante ou forma manifestamente invariante, pois as equações são explicitamente invariante sob transformação de Lorentz.

Da equação (2.70) com auxílio de (2.56) podemos ainda obter a equação de onda para o potencial da maneira como segue

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 4\pi J^\nu, \quad (2.74)$$

$$\square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 4\pi J^\nu, \quad (2.75)$$

onde $\partial_\mu \partial^\mu = \square$ é o operador D'Alembertiano e ∂_μ comuta com ∂^ν . Temos o calibre de Lorentz

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \quad (2.76)$$

Então, obtemos a equação de onda que buscávamos

$$\square A^\nu = 4\pi J^\nu. \quad (2.77)$$

Agora, aplicando o operador D'Alembertiano na equação (2.56) obtemos a equação de onda para os campos.

$$\square F_{\mu\nu} = \partial_\mu \square A_\nu - \partial_\nu \square A_\mu, \quad (2.78)$$

onde usamos o fato que \square comuta com ∂_λ ou seja, $[\square, \partial_\lambda] = 0$, resulta

$$\square F_{\mu\nu} = 4\pi (\partial_\mu J_\nu - \partial_\nu J_\mu), \quad (2.79)$$

que pode ser melhor organizado e escrita como

$$\square F_{\mu\nu} = 8\pi \partial_{[\mu} J_{\nu]}, \quad (2.80)$$

a qual envolve o rotacional covariante de J_ν . Assim, a equação (2.77) é a equação de onda para o potencial e a equação (2.80) é a equação de onda para os campos.

Capítulo 3

Cálculo Espinorial

Consideraremos agora objetos geométricos, ψ_A , chamados “espinores” covariantes, os quais são definidos sobre um espaço complexo bi-dimensional \mathbb{C}^2 - espaço de espin, identificado com o espaço de representação de L_+^\uparrow , que é o espaço onde $SL(2, \mathbb{C})$ opera. Tais objetos obedecem a lei de transformação [9]

$$\psi'_A = s_A^B \psi_B, \quad A, B = 1, 2. \quad (3.1)$$

A matriz de transformação $s_A^B \in SL(2, \mathbb{C})$, tal que a inversa de (3.1) é

$$\psi_A = s_A^{-1B} \psi'_B, \quad (3.2)$$

onde

$$s_A^B s_B^{-1C} = \delta_A^C, \quad (3.3)$$

e δ_A^C é o delta de Kronecker espinorial não-linhado.

3.1 Espinor métrico

Ao introduzirmos uma “métrica” no espaço de espin estabelecemos um mecanismo que nos permite relacionar componentes covariantes de espinores com suas correspondentes componentes contravariantes, ou vice-versa.

Escolhemos um espinor métrico que seja invariante sob transformações de espin unimodulares [10]. Somente espinores antissimétricos são invariantes sob $SL(2, \mathbb{C})$. Então selecionamos um ϵ que seja antissimétrico e invariante. O espinor métrico ϵ_{AB} ou (ϵ^{AB}) atua no espaço de espinores \mathbb{C}^2 . Assim temos o espinor métrico covariante

[10]

$$\begin{aligned}\epsilon'_{AB} &= \epsilon_{AB} \quad (\text{invariante}), \\ \epsilon_{AB} &= -\epsilon_{BA} \quad (\text{antissimétrico}).\end{aligned}\tag{3.4}$$

Temos para o espinor métrico contravariante as mesmas exigências, ou seja, invariância sob $SL(2, \mathbb{C})$ e antissimetria.

$$\begin{aligned}\epsilon'^{AB} &= \epsilon^{AB} \quad (\text{invariante}), \\ \epsilon^{AB} &= -\epsilon^{BA} \quad (\text{antissimétrico}),\end{aligned}\tag{3.5}$$

juntamente com as versões linhadas de (3.4) e (3.5).

As equações (3.4 e 3.5) fornecem-nos dispositivos com os quais podemos levantar e abaixar índices de espinores. Assim, para o espinor métrico covariante temos [13]

$$\xi^{\dots A \dots} \epsilon_{AB} = \xi^{\dots B \dots},\tag{3.6}$$

e

$$\eta^{\dots A' \dots} \epsilon_{A'B'} = \eta^{\dots B' \dots}.\tag{3.7}$$

Alguns exemplos,

$$\xi_B = \xi^A \epsilon_{AB}, \quad \eta_{B'} = \eta^{A'} \epsilon_{A'B'}.\tag{3.8}$$

De modo semelhante para a forma contravariante do espinor métrico, temos [10]

$$\epsilon^{AB} \xi^{\dots B \dots} = \xi^{\dots A \dots},\tag{3.9}$$

e

$$\epsilon^{A'B'} \eta^{\dots B' \dots} = \eta^{\dots A' \dots}.\tag{3.10}$$

Por exemplo,

$$\xi^A = \epsilon^{AB} \xi_B, \quad \eta^{A'} = \epsilon^{A'B'} \eta_{B'}.\tag{3.11}$$

De posse da propriedade de antissimetria do espinor métrico covariante podemos escrever a equação (3.8) como segue

$$\xi_B = -\epsilon_{BA} \xi^A, \quad \eta_{B'} = -\epsilon_{B'A'} \eta^{A'},\tag{3.12}$$

e, de modo semelhante, da antissimetria do espinor métrico contravariante, podemos escrever a equação (3.11) da forma a seguir

$$\xi^A = -\xi_B \epsilon^{BA}, \quad \eta^{A'} = -\eta_{B'} \epsilon^{B'A'}.\tag{3.13}$$

O espinor métrico covariante pode ser representado de forma canônica [3, 13]

$$(\epsilon_{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (\epsilon_{A'B'}), \quad (3.14)$$

e de modo semelhante escrevemos o tensor métrico contravariante na forma canônica

$$(\epsilon^{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (\epsilon^{A'B'}). \quad (3.15)$$

Daqui em diante, denotaremos por S e S^* os espaços de espinores contravariantes e covariantes, respectivamente.

3.2 O produto interno

Ao introduzir o conceito de espinor métrico obtivemos um mecanismo que nos permitiu introduzir o conceito de produto interno de espinores. Define-se o produto interno dos espinores ψ e ζ^* pertencentes respectivamente a S e S^* pela seguinte forma bilinear não-hermitiana

$$\nu(\psi, \zeta^*) = \epsilon^{AB} \psi_B \zeta^C \epsilon_{CA}. \quad (3.16)$$

Usando-se a primeira equação em (3.8) e (3.11) conclui-se que o produto interno é definido por uma aplicação que associa os espinores ψ , ζ^* a um número complexo, isto é [10]

$$\nu(\psi, \zeta^*) = \psi^A \zeta_A, \quad (3.17)$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

a) Invariância sob $SL(2, C)$

$$\nu'(\psi', \zeta'^*) = \nu(\psi, \zeta^*). \quad (3.18)$$

b) Bilinearidade

$$\nu(\psi, \alpha\zeta^* + \beta\xi^*) = \alpha\nu(\psi, \zeta^*) + \beta\nu(\psi, \xi^*), \quad (3.19a)$$

$$\nu(\lambda\psi + \gamma\varphi, \zeta^*) = \lambda\nu(\psi, \zeta^*) + \gamma\nu(\varphi, \zeta^*), \quad (3.19b)$$

sendo α , β , λ , γ números complexos arbitrários.

c)

$$\psi^A \zeta_A = -\epsilon^{AC} \psi_C \epsilon_{AB} \zeta^B = \epsilon^{CA} \epsilon_{AB} \psi_C \zeta^B, \quad (3.20a)$$

$$= -\delta^C_B \psi_C \zeta^B = -\zeta^A \psi_A. \quad (3.20b)$$

Esta última propriedade permite-nos escrever

d)

$$\nu(\psi, \zeta^*) = -\nu(\zeta, \psi^*). \quad (3.21)$$

3.3 Transformações lineares

Assim como tensores, espinores também podem ser escritos em diferentes sistemas de base, realizando transformações lineares de suas componentes, isto é, efetuando-se transformações de espin. A transformação de Lorentz que restitui o referencial minkowskiano original deve ser correspondida por uma transformação de espin que restitui as componentes espinoriais originais. Uma transformação de espin em S induz uma transformação de espin em S^* . A conexão entre duas transformações é feita através da operacionalidade de $SL(2, C)$. Assim,

$$\begin{aligned} \xi'^A &= s^A_B \xi^B, \\ \eta'_A &= \eta_B s^{-1B}_A. \end{aligned} \quad (3.22)$$

O produto interno dos espinores da (3.22) leva-nos a

$$\xi'^A \eta'_A = \xi^A \eta_A. \quad (3.23)$$

3.4 Operações básicas com espinores

Pode-se realizar várias operações com espinores, cujo resultado é um novo espinor. São elas [10]: adição, multiplicação espinorial, substituição indicial, conjugação espinorial, contração e multiplicação de espinores por números complexos.

Adição

A operação de adição envolve espinores de mesma estrutura indicial, cujo resultado é um novo espinor com a mesma estrutura indicial dos espinores somados. Por exemplo,

$$\xi^{AB'CD}_{E'F'G} + \chi^{AB'CD}_{E'F'G} = \zeta^{AB'CD}_{E'F'G}. \quad (3.24)$$

Multiplicação Espinorial

A multiplicação espinorial é definida de modo que o resultado é um espinor cujas componentes possuem estrutura indicial obtida por acoplamento das estruturas indiciais das componentes dos espinores multiplicados. Por exemplo,

$$\zeta_{B'D}^{AC'E} = \xi_{B'}^A \chi_D^{C'E}. \quad (3.25)$$

Substituição Indicial

A operação de substituição indicial entre espinores consiste em substituir alguns (ou todos) dos símbolos indiciais por outros de mesma natureza que sejam diferentes dos símbolos eventualmente remanescentes. Por exemplo,

$$\zeta^{AB'}_{C'D} \longrightarrow \zeta^{LB'}_{M'F}. \quad (3.26)$$

Conjugação Espinorial

Para incorporar vetores-mundo¹, é necessário incluir uma operação de conjugação complexa. Considere um elemento ψ^A de S . Pelo fato de S ser um espaço vetorial sobre um corpo complexo \mathbb{C} não implica que o complexo conjugado de ψ^A é também um elemento de S . Realmente não é [12]. O complexo conjugado de um elemento de S deve pertencer a um espaço vetorial inteiramente novo. A operação de conjugação de espinores é definida pelo seguinte mecanismo para as componentes de um espinor [10]

$$\zeta_{A T'}^{XY U'V'} \longrightarrow \zeta_{T A'}^{UV X'Y'}. \quad (3.27)$$

Podemos observar que o número de índices covariantes não linhadados é igual ao número de índices covariantes linhadados e que o número de índices contravariantes linhadados é igual ao número de índices contravariantes não linhadados. Uma dupla aplicação da conjugação complexa a um espinor restaura a configuração original.

Contração

A operação de contração é realizada quando se iguala um índice contravariante a um índice covariante do mesmo tipo (linhadados ou não-linhadados). O resultado é um espinor de valência diferente da original. Por exemplo no espinor $\zeta^{AB'}_{DE'}$ igualamos os índices E' e B' , assim realizando a operação de contração

$$\zeta^{AB'}_{DB'} = \chi^A_D. \quad (3.28)$$

¹vetores-mundo e tensores-mundo são vetores e tensores que atuam no espaço de Minkowski

Multiplicação de Espinores por Números Complexos

A operação de multiplicação de um dado espinor por um certo número complexo tem, por resultado, um espinor cujas componentes são obtidas multiplicando-se o número complexo pelas correspondentes componentes do espinor dado. Por exemplo

$$\lambda \begin{bmatrix} \chi^0 \\ \chi^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\chi^0 \\ \lambda\chi^1 \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

3.5 Conexões entre tensores-mundo e espinores

Muitas equações tensoriais da relatividade especial possuem uma forma muito simples e elegante se escrita na forma de equações espinoriais, além do fato que complicações, inerentes na manipulação de tensores-mundo, são notavelmente reduzidas.

A conexão entre tensores-mundo e espinores é obtida por meio dos *símbolos de Infeld-van der Waerden* [2, 10, 15], denotados por $\sigma_\mu^{AA'}$. Estes símbolos representam quatro matrizes Hermitianas 2×2 , isto é, as três matrizes espin de Pauli e a matriz unidade além do fator $2^{-\frac{1}{2}}$. Explicitamente [2, 10, 16]

$$\begin{aligned} (\sigma_0^{AA'}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & (\sigma_1^{AA'}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ (\sigma_2^{AA'}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, & (\sigma_3^{AA'}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Podemos notar que $\sigma_\mu^{AA'}$ transforma-se como vetor-mundo sobre o índice μ e como um tensor de espin sobre os índices AA' . Declarar que $\sigma_\mu^{AB'}$ é Hermitiano significa

$$\bar{\sigma}_\mu^{AB'} = \sigma_\mu^{BA'}, \quad (3.31)$$

onde, por definição,

$$\bar{\sigma}_\mu^{AB'} = \sigma_\mu^{A'B}. \quad (3.32)$$

A relação entre os símbolos de Infeld-van der Waerden e o tensor métrico $\eta_{\mu\nu}$ é expressa por

$$\eta_{\mu\nu} = \epsilon_{AB}\epsilon_{A'B'}\sigma_\mu^{AA'}\sigma_\nu^{BB'}, \quad (3.33)$$

tal que, introduzindo as equações

$$\sigma_\mu^{AA'}\sigma^\nu_{AA'} = \delta_\mu^\nu, \quad (3.34)$$

e

$$\sigma^\mu_{AA'} \sigma_\mu^{BB'} = \epsilon_A^B \epsilon_{A'}^{B'}, \quad (3.35)$$

podemos mostrar que a (3.33) é equivalente a

$$\eta_{\mu\nu} \sigma^\mu_{AA'} \sigma^\nu_{BB'} = \epsilon_{AB} \epsilon_{A'B'}. \quad (3.36)$$

Então, as quantidades $\sigma^\mu_{AA'}$ e $\sigma_\nu^{BB'}$ estabelecem a conexão entre as componentes dos objetos correspondentes. Assim, um vetor de componentes x^μ definido no sistema de coordenadas cartesianas retangulares no espaço-tempo minkowskiano corresponde a um espinor de componentes $x^{AA'}$, os quais são relacionados tal como segue

$$x^\mu = \sigma^\mu_{AA'} x^{AA'}. \quad (3.37)$$

A forma covariante da equação (3.37) é dada por

$$x_\mu = \sigma_\mu^{AA'} x_{AA'}. \quad (3.38)$$

As inversas das equações (3.37) e (3.38) são escritas como

$$x^{AA'} = \sigma_\mu^{AA'} x^\mu, \quad x_{AA'} = \sigma_\mu^{AA'} x_\mu. \quad (3.39)$$

Se x^μ (ou x_μ) são componentes de um vetor real então $x^{AA'}$ (ou $x_{AA'}$) são componentes de um espinor hermitiano; isto é garantido pelo fato que as matrizes σ^μ , de componentes $\sigma^\mu_{AA'}$ são hermitianas, bem como as matrizes σ_μ de componentes $\sigma_\mu^{AA'}$. A extensão desta regra é estabelecida efetuando-se produtos tensoriais do espaço-tempo de Minkowski. Assim, tem-se a seguinte associação

$$T^{\mu\nu\dots\lambda} = \sigma^\mu_{AA'} \sigma^\nu_{BB'} \dots \sigma^\lambda_{CC'} T^{AA'BB'\dots CC'}, \quad (3.40)$$

cuja forma covariante é dada por

$$U_{\mu\nu\dots\lambda} = \sigma_\mu^{AA'} \sigma_\nu^{BB'} \dots \sigma_\lambda^{CC'} U_{AA'BB'\dots CC'}. \quad (3.41)$$

As inversas das equações (3.40) e (3.41) são escritas como

$$\begin{aligned} T^{AA'BB'\dots CC'} &= \sigma_\mu^{AA'} \sigma_\nu^{BB'} \dots \sigma_\lambda^{CC'} T^{\mu\nu\dots\lambda}, \\ U_{AA'BB'\dots CC'} &= \sigma^\mu_{AA'} \sigma^\nu_{BB'} \dots \sigma^\lambda_{CC'} U_{\mu\nu\dots\lambda}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

O deslocamento de índices tipo espaço-tempo (ou do tipo espinor) é realizado pela atuação do tensor métrico (ou do espinor métrico). Por exemplo

$$\sigma^\mu_{AA'} = \eta^{\mu\nu} \sigma_\nu^{BC'} \epsilon_{BA} \epsilon_{C'A'}, \quad \sigma_\nu^{AA'} = \eta_{\nu\mu} \epsilon^{AB} \epsilon^{A'C'} \sigma^\mu_{BC'}. \quad (3.43)$$

Capítulo 4

Formulação Espinorial da Teoria de Maxwell

4.1 A primeira “metade” como identidades

Deixemos τ ser um subconjunto aberto conectado de \mathbb{M} . Para o bivector eletromagnético (covariante) sobre τ , temos a expressão [2]

$$F_{AA'BB'}(x) = 2\partial_{[AA'}\Phi_{BB']}(x), \quad (4.1)$$

onde $\Phi_{BB'}(x)$ é um potencial eletromagnético hermitiano, $\partial_{AA'}$ denota o operador derivada parcial $\partial/\partial x^{AA'}$ e os colchetes denotam antisimetriação sobre os pares de índices. Sabendo que $F_{\mu\nu}(x)$ é um bivector, ou seja, é um tensor antissimétrico de segunda ordem,

$$F_{\mu\nu}(x) = -F_{\nu\mu}(x), \quad (4.2)$$

e, pela correspondência estabelecida na subsecção 3.6, pode-se escrever

$$F_{AA'BB'}(x) = -F_{BB'AA'}(x). \quad (4.3)$$

Da antissimetria do bivector eletromagnético vem

$$F_{AA'BB'}(x) = \frac{1}{2}[F_{AA'BB'}(x) - F_{BB'AA'}(x)], \quad (4.4)$$

tal que, somando e subtraindo o termo $F_{BA'AB'}$, vem

$$\begin{aligned} F_{AA'BB'}(x) &= \frac{1}{2}[F_{AA'BB'}(x) + F_{BA'AB'}(x) \\ &\quad - F_{BA'AB'}(x) - F_{BB'AA'}(x)], \end{aligned} \quad (4.5)$$

que organizando melhor leva-nos a

$$F_{AA'BB'}(x) = \frac{1}{2}[F_{AA'BB'}(x) - F_{BA'AB'}(x)] + \frac{1}{2}[F_{BA'AB'}(x) - F_{BB'AA'}(x)]. \quad (4.6)$$

Da equação (4.6) podemos ver que a primeira parcela no lado direito é antissimétrica nos índices A e B e simétrica nos índices A' e B' , enquanto que a segunda parcela no lado direito é antissimétrica nos índices A' e B' simétrica nos índices A e B . Agora, usando a relação simbólica [2]

$$\xi_{\mathcal{D}AB} - \xi_{\mathcal{D}BA} = \xi_{\mathcal{D}C}{}^C \gamma_{AB}, \quad (4.7)$$

no lado direito da equação (4.6), obtemos

$$F_{AA'BB'}(x) - F_{BA'AB'}(x) = \epsilon_{AB} F_C{}^C{}_{A'B'}(x), \quad (4.8)$$

e

$$F_{BA'AB'}(x) - F_{BB'AA'}(x) = F_{BAC'}{}^{C'}(x) \epsilon_{A'B'}. \quad (4.9)$$

Substituindo (4.8) e (4.9) em (4.6)

$$F_{AA'BB'}(x) = \frac{1}{2} \epsilon_{AB} F_C{}^C{}_{A'B'}(x) + \frac{1}{2} F_{BAC'}{}^{C'}(x) \epsilon_{A'B'}, \quad (4.10)$$

e definindo

$$\bar{\phi}_{A'B'}(x) = \frac{1}{2} F_C{}^C{}_{A'B'}(x), \quad (4.11)$$

$$\phi_{AB}(x) = \frac{1}{2} F_{BAC'}{}^{C'}(x), \quad (4.12)$$

encontramos

$$F_{AA'BB'}(x) = \phi_{AB}(x) \epsilon_{A'B'} + \epsilon_{AB} \bar{\phi}_{A'B'}(x). \quad (4.13)$$

Os campos espinoriais conjugados que participam em (4.13) são chamados espinores eletromagnéticos [2]. Aqui eles são vistos como dependentes na medida em que os (seis) graus de liberdade levados pela teoria são descritos por um ou outro deles em qualquer $x^a \in \tau$ [17]. A sua simetria produz

$$\phi_A^A(x) = 0 = \bar{\phi}_{A'}^{A'}(x). \quad (4.14)$$

A relação entre os campos e o potencial pode ser imediatamente estabelecida por “transvecting”¹ ambos (4.1) e (4.13) com $\epsilon^{A'B'}$ e ϵ^{AB} . Então aplicando pela direita $\epsilon^{A'B'}$ na (4.13) obtemos

$$F_{AA'BB'}(x)\epsilon^{A'B'} = \epsilon_{A'B'}\phi_{AB}(x)\epsilon^{A'B'} + \epsilon_{AB}\bar{\phi}_{A'B'}(x)\epsilon^{A'B'}. \quad (4.15)$$

Da antissimetria de $\epsilon^{A'B'}$ vem

$$-F_{AA'BB'}(x)\epsilon^{B'A'} = -\epsilon_{A'B'}\epsilon^{B'A'}\phi_{AB}(x) - \epsilon_{AB}\epsilon^{B'A'}\bar{\phi}_{A'B'}(x), \quad (4.16)$$

tal que, contraindo com B' , resulta

$$F_{AA'B}{}^{A'}(x) = \epsilon_{A'}{}^{A'}\phi_{AB}(x) + \epsilon_{AB}\bar{\phi}_{A'}{}^{A'}(x). \quad (4.17)$$

Sabendo que $\epsilon_{A'}{}^{A'} = 2$ e usando a equação (4.14) somos levados à

$$F_{AA'B}{}^{A'}(x) = 2\phi_{AB}(x). \quad (4.18)$$

A equação (4.1) pode ser escrita da seguinte forma

$$F_{AA'BB'}(x) = \partial_{AA'}\Phi_{BB'}(x) - \partial_{BB'}\Phi_{AA'}(x), \quad (4.19)$$

tal que

$$\epsilon^{A'B'}F_{AA'BB'}(x) = \partial_{AA'}\Phi_B^{A'}(x) + \partial_{BA'}\Phi_B^{A'}(x), \quad (4.20)$$

ou

$$F_{AA'B}{}^{A'}(x) = \partial_{AA'}\Phi_B^{A'}(x) + \partial_{BB'}\Phi_A^{B'}(x). \quad (4.21)$$

Agora, no segundo termo à direita na equação (4.21) fazemos a substituição indicial A' por B' , para obter

$$F_{AA'B}{}^{A'}(x) = \partial_{A'A}\Phi_B^{A'}(x) + \partial_{A'B}\Phi_A^{A'}(x). \quad (4.22)$$

Na equação (4.22) podemos notar a simetria nos índices A e B . Então podemos escrever

$$F_{AA'B}{}^{A'}(x) = 2\partial_{A'(A}\Phi_B^{A'}(x). \quad (4.23)$$

Igualando (4.18) e (4.23), obtemos

$$\phi_{AB}(x) = \partial_{A'(A}\Phi_B^{A'}(x). \quad (4.24)$$

¹Transvecting: Acoplar com contrações

Um procedimento semelhante ao que deu origem a (4.24) leva-nos à

$$\bar{\phi}_{A'B'}(x) = \partial_{A(A'}\Phi_{B')}^A(x). \quad (4.25)$$

As identidades (4.24) e (4.25) tomam uma forma simples se adotarmos a seguinte relação de calibre de Lorentz [17]

$$\partial_{A'[A}\Phi_{B]}^{A'}(x) = 0, \quad \partial_{A[A'}\Phi_{B']}^A(x) = 0. \quad (4.26)$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} 2\partial_{A'[A}\Phi_{B]}^{A'}(x) &= \partial_{A'A}\Phi_B^{A'}(x) - \partial_{A'B}\Phi_A^{A'}(x) = 0, \\ \partial_{A'A}\Phi_B^{A'}(x) &= \partial_{A'B}\Phi_A^{A'}(x). \end{aligned} \quad (4.27)$$

De (4.24) podemos escrever

$$\phi_{AB}(x) = \frac{1}{2}\partial_{A'A}\Phi_B^{A'}(x) + \frac{1}{2}\partial_{A'B}\Phi_A^{A'}(x). \quad (4.28)$$

Então, substituindo (4.27) em (4.28) obtemos

$$\phi_{AB}(x) = \partial_{A'A}\Phi_B^{A'}(x), \quad (4.29)$$

e de modo semelhante para

$$\bar{\phi}_{A'B'}(x) = \partial_{AA'}\Phi_{B'}^A(x), \quad (4.30)$$

restituindo as Eqs. (4.24) e (4.25).

A primeira metade da teoria consiste de (4.29) e (4.30) junto com as equações de campo que surgem de um cálculo direto

$$\partial_{[\mu}F_{\nu\gamma]}(x) = \partial_{[\mu}\partial_{\nu}]\Phi_{\gamma]} = \partial_{[[\mu}\partial_{\nu]}\Phi_{\gamma]} = 0. \quad (4.31)$$

O procedimento que nos leva de (4.31) a equação abaixo pode ser encontrado no apêndice A2

$$\partial^{\mu*}F_{\mu\nu}(x) = 0, \quad (4.32)$$

com $*F_{\mu\nu}(x)$ sendo o bivector eletromagnético dual que é representado por [2]

$$*F_{AA'BB'}(x) = i \left[\epsilon_{AB}\bar{\phi}_{A'B'}(x) - \epsilon_{A'B'}\phi_{AB}(x) \right]. \quad (4.33)$$

De (4.32) usando a correspondência estabelecida na seção 3.6 obtemos

$$\partial^{AA'*}F_{AA'BB'}(x) = 0, \quad (4.34)$$

tal que com a substituição de (4.33) fica

$$i\partial^{AA'}[\epsilon_{AB}\bar{\phi}_{A'B'}(x) - \epsilon_{A'B'}\phi_{AB}(x)] = 0, \quad (4.35)$$

$$\partial_B^{A'}\bar{\phi}_{A'B'}(x) = \partial_{B'}^A\phi_{AB}(x), \quad (4.36)$$

e com ϵ^{BC} atuando pela direita, vem

$$\partial_B^{A'}\bar{\phi}_{A'B'}(x)\epsilon^{BC} = \partial_{B'}^A\phi_{AB}(x)\epsilon^{BC}, \quad (4.37)$$

$$\partial_B^{A'}\epsilon^{BC}\bar{\phi}_{A'B'}(x) = \partial_{B'}^A\phi_{AB}(x)\epsilon^{BC}, \quad (4.38)$$

$$\partial^{A'C}\bar{\phi}_{A'B'}(x) = \partial_{B'}^A\phi_A^C(x). \quad (4.39)$$

Agora com $\epsilon^{B'C'}$ atuando pela direita na equação (4.39), temos

$$\partial^{A'C}\bar{\phi}_{A'B'}(x)\epsilon^{B'C'} = \partial_{B'}^A\epsilon^{B'C'}\phi_A^C(x), \quad (4.40)$$

$$\partial^{A'C}\bar{\phi}_{A'}^{C'}(x) = \partial^{AC'}\phi_A^C(x). \quad (4.41)$$

Fazendo a substituição indicial C por B e C' por B' em (4.40) e (4.41), resulta

$$\partial^{A'B}\bar{\phi}_{A'}^{B'}(x) = \partial^{AB'}\phi_A^B(x), \quad (4.42)$$

tal que, após algumas substituições indiciais, encontramos

$$\partial^{A'B}\phi_B^A(x) = \partial^{AB'}\bar{\phi}_{B'}^{A'}(x), \quad (4.43)$$

que é a equação de campo acima referida. Estas (equação 4.43) são as identidades de Bianchi da teoria. Elas formam um sistema de 4 equações diferenciais parciais lineares complexas de primeira ordem.

Princípio variacional

Construiremos agora o princípio variacional o qual produz as equações de movimento para a teoria inteira. Primeiro construiremos a ação para a segunda metade [17].

A forma 2-espinor da densidade Lagrangeana eletromagnética convencional completa é escrita explicitamente como [17]

$$L_M^{II} = \frac{1}{8\pi}[\phi_{AB}(x)\phi^{AB}(x) + \bar{\phi}_{A'B'}(x)\bar{\phi}^{A'B'}(x)] + j^{AA'}(x)\Phi_{AA'}(x). \quad (4.44)$$

Nesta expressão, o 4-vetor $j^{AA'}(x)$ é a densidade de corrente eletromagnética (real) que representa o papel de uma fonte para o campo e potencial. Podemos reescrever (4.44) como

$$L_M^{II} = L_{livre} + L_{int}, \quad (4.45)$$

onde L_{livre} é a parte livre de L_M^{II} que carrega o termo conjugado bilinear envolvendo o campo, e L_{int} representa a parte de interação que aparece simplesmente como o produto interno de $\Phi_\mu(x)$ como $j^\mu(x)$. Agora, usando (4.24) e (4.25) como dado abaixo

$$\phi^{AB} = \partial_{B'}^{(A} \Phi^{B)B'}, \quad \bar{\phi}^{A'B'} = \partial_B^{(A'} \Phi^{B')B}, \quad (4.46)$$

produzimos a expressão

$$L_{livre} = \frac{1}{8\pi} [\partial_{A'(A} \Phi_{B')}^{A'} (\partial_{B'}^{(A} \Phi^{B)B'}) + \partial_{A(A'} \Phi_{B'}^A (\partial_B^{(A'} \Phi^{B')B})]. \quad (4.47)$$

A ação formal para esta segunda “metade” é então

$$S[L_M^{II}] = \int_\tau L_M^{II} d^4x, \quad (4.48)$$

enquanto o princípio dinâmico é

$$\delta S[L_M^{II}] = \delta \int_\tau L_M^{II} d^4x = 0, \quad (4.49)$$

onde $d^4x = \frac{1}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\gamma \wedge dx^\delta$ é um elemento do 4-volume de τ com $\varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta}$ sendo o símbolo de Levi-Civita e o símbolo \wedge denota o *produto exterior*. Para introduzir a densidade Lagrangeana explícita para a primeira metade, é útil definir

$$L_{livre} = L_{esq} + L_{dir}, \quad (4.50)$$

onde L_{esq} e L_{dir} se referem respectivamente às helicidades dos fótons (fótons, girando no sentido convencional de mão esquerda e no sentido de mão direita). Estas quantidade podem ser reescritas como

$$L_{esq} = \frac{1}{8\pi} \epsilon^{AC} \epsilon^{BD} \phi_{AB} \phi_{CD}, \quad (4.51)$$

e

$$L_{dir} = \frac{1}{8\pi} \epsilon^{A'C'} \epsilon^{B'D'} \bar{\phi}_{A'B'} \bar{\phi}_{C'D'}. \quad (4.52)$$

A densidade Lagrangeana para a outra metade é escolhida como

$$L_M^I = i(L_{esq} - L_{dir}), \quad (4.53)$$

com o correspondente princípio variacional sendo

$$\delta S[L_M^I] = \delta \int_{\tau} L_M^I d^4x = 0. \quad (4.54)$$

Assumimos que todas as quantidades ocorrendo nas densidades Lagrangeanas anteriores são contínuas e suaves em $\bar{\tau}$. Quando a declaração variacional é calculada, a densidade de corrente é mantida fixa enquanto variações arbitrárias do potencial são tomadas nulas sobre a fronteira $\partial\tau$ de τ (tal como antes). Quando desenvolvemos os princípios, também assumimos que a δ -variação (local) novamente comuta com o ∂ -operador [17].

Equações de movimento e integrais de carga

No que segue [17], veremos primeiro que a prescrição variacional básica dada antes habilita-nos a expressar a teoria completa como equações de movimento carregando a densidade Lagrangeana (4.45) e (4.53). Mostraremos ainda como nossa prescrição pode tornar-se ainda mais sustentável através de procedimentos para derivar a segunda metade das equações de campo. O procedimento envolvendo a primeira "metade" de fato, parece ser essencialmente o mesmo como o referido acima. Por esta razão, escreveremos abaixo as correspondentes equações de movimento sem trabalhar explicitamente o correspondente princípio (4.54). Subsequentemente as integrais de carga da teoria serão exibidas.

As expressões (4.44) e (4.45) junto com (4.24) e (4.25) sugerem transcrever (4.49) como ²

$$\int_{\tau} \left(\frac{\partial L_{esq}}{\partial \phi_{AB}(x)} \partial_{A'(A} \delta \Phi_{B)}^{A'}(x) + \frac{\partial L_{dir}}{\partial \bar{\phi}_{A'B'}(x)} \partial_{A(A'} \delta \Phi_{B')}^A(x) + \frac{\partial L_{int}}{\partial \Phi_{AA'}(x)} \delta \Phi_{AA'}(x) \right) d^4x = 0. \quad (4.55)$$

Devido a simetria dos campos, podemos abandonar a simetrização em torno dos parênteses de (4.55) sem qualquer perda na generalidade. Então

$$\int_{\tau} \left(\frac{\partial L_{esq}}{\partial \phi_{AB}(x)} \partial_{A'A} \delta \Phi_B^{A'}(x) + \frac{\partial L_{dir}}{\partial \bar{\phi}_{A'B'}(x)} \partial_{AA'} \delta \Phi_{B'}^A(x) + \frac{\partial L_{int}}{\partial \Phi_{AA'}(x)} \delta \Phi_{AA'}(x) \right) d^4x = 0. \quad (4.56)$$

²Tal procedimento pode ser encontrado no apêndice.

Separando a expressão acima em três integrais, escrevemos

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \frac{\partial L_{esq}}{\partial \phi_{AB}(x)} \partial_{A'A} \delta \Phi_B^{A'}(x) d^4x + \int_{\tau} \frac{\partial L_{dir}}{\partial \bar{\phi}_{A'B'}(x)} \partial_{AA'} \delta \Phi_B^A d^4x \\ + \int_{\tau} \frac{\partial L_{int}}{\partial \Phi_{AA'}(x)} \delta \Phi_{AA'}(x) d^4x = 0. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Realizaremos integrações por parte, separadamente, em cada uma das duas primeiras integrais da expressão (4.57). Começaremos pela primeira, a qual denotaremos por I .

$$\begin{aligned} I &= \int_{\tau} \frac{\partial L_{esq}}{\partial \phi_{AB}(x)} \partial_{A'A} \delta \Phi_B^{A'}(x) d^4x \\ &= \int_{\partial\tau} \frac{\partial L_{esq}}{\partial \phi_{AB}(x)} \delta \Phi_B^{A'}(x) d^3x_{A'A} - \int_{\tau} \delta \Phi_B^{A'}(x) \partial_{A'A} \frac{\partial L_{esq}}{\partial \phi_{AB}(x)} d^4x. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Fazendo a substituição $\Phi_B^{A'}(x) = \epsilon^{A'C'} \Phi_{C'B}(x)$ na segunda integral do lado direito de (4.58) produz

$$I = \int_{\partial\tau} \frac{\partial L_{esq}}{\partial \phi_{AB}(x)} \delta \Phi_B^{A'}(x) d^3x_{A'A} - \int_{\tau} \delta \epsilon^{A'C'} \Phi_{C'B}(x) \partial_{A'A} \frac{\partial L_{esq}}{\partial \phi_{AB}(x)} d^4x, \quad (4.59)$$

sabendo que δ comuta com $\epsilon^{A'C'}$ e está atuando somente em $\Phi_{C'B}$ podemos escrever (4.59) com a alteração na segunda integral da maneira como é dado abaixo

$$I = \int_{\partial\tau} \frac{\partial L_{esq}}{\partial \phi_{AB}(x)} \delta \Phi_B^{A'}(x) d^3x_{A'A} - \int_{\tau} \epsilon^{A'C'} \partial_{A'A} \frac{\partial L_{esq}}{\partial \phi_{AB}(x)} \delta \Phi_{C'B}(x) d^4x. \quad (4.60)$$

Da antissimetria do espinor métrico $\epsilon^{A'C'} = -\epsilon^{C'A'}$

$$I = \int_{\partial\tau} \frac{\partial L_{esq}}{\partial \phi_{AB}(x)} \delta \Phi_B^{A'}(x) d^3x_{A'A} + \int_{\tau} \epsilon^{C'A'} \partial_{A'A} \frac{\partial L_{esq}}{\partial \phi_{AB}(x)} \delta \Phi_{C'B}(x) d^4x, \quad (4.61)$$

com $\epsilon^{C'A'}$ atuando aqui em $\partial_{A'A}$ produz

$$I = \int_{\partial\tau} \frac{\partial L_{esq}}{\partial \phi_{AB}(x)} \delta \Phi_B^{A'}(x) d^3x_{A'A} + \int_{\tau} \partial_A^{C'} \frac{\partial L_{esq}}{\partial \phi_{AB}(x)} \delta \Phi_{C'B}(x) d^4x. \quad (4.62)$$

Fazendo a substituição indicial C' por A' na segunda integral do lado direito de (4.62)

$$I = \int_{\partial\tau} \frac{\partial L_{esq}}{\partial \phi_{AB}(x)} \delta \Phi_B^{A'}(x) d^3x_{A'A} + \int_{\tau} \partial_A^{A'} \frac{\partial L_{esq}}{\partial \phi_{AB}(x)} \delta \Phi_{A'B}(x) d^4x. \quad (4.63)$$

Permutando A com B , e lembrando da simetria de $\phi_{AB}(x) = \phi_{BA}(x)$, vem

$$I = \int_{\partial\tau} \frac{\partial L_{esq}}{\partial \phi_{AB}(x)} \delta \Phi_B^{A'}(x) d^3x_{A'A} + \int_{\tau} \partial_B^{A'} \frac{\partial L_{esq}}{\partial \phi_{AB}(x)} \delta \Phi_{AA'}(x) d^4x. \quad (4.64)$$

Um procedimento semelhante ao que foi feito para obter-se (4.64) empregamos para obter a segunda integral da expressão (4.57), a qual denotamos por II, produz a expressão abaixo

$$II = \int_{\partial\tau} \frac{\partial L_{dir}}{\partial \bar{\phi}_{A'B'}(x)} \delta \Phi_{B'}^A(x) d^3 x_{A'A} + \int_{\tau} \delta \Phi_{A'A}(x) \partial_{B'}^A \frac{\partial L_{dir}}{\partial \bar{\phi}_{A'B'}(x)} d^4 x. \quad (4.65)$$

Agora, substituindo (4.64) e (4.65) em (4.57) obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\tau} \frac{\partial L_{esq}}{\partial \phi_{AB}(x)} \delta \Phi_B^{A'}(x) d^3 x_{A'A} + \int_{\tau} \partial_B^{A'} \frac{\partial L_{esq}}{\partial \phi_{AB}(x)} \delta \Phi_{AA'}(x) d^4 x + \\ & \int_{\partial\tau} \frac{\partial L_{dir}}{\partial \bar{\phi}_{A'B'}(x)} \delta \Phi_{B'}^A(x) d^3 x_{A'A} + \int_{\tau} \delta \Phi_{A'A}(x) \partial_{B'}^A \frac{\partial L_{dir}}{\partial \bar{\phi}_{A'B'}(x)} d^4 x + \\ & \int_{\tau} \frac{\partial L_{int}}{\partial \Phi_{AA'}(x)} \delta \Phi_{AA'}(x) d^4 x = 0, \end{aligned} \quad (4.66)$$

que, melhor organizada fica

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\tau} \left(\frac{\partial L_{esq}}{\partial \phi_{AB}(x)} \delta \Phi_B^{A'}(x) + \frac{\partial L_{dir}}{\partial \bar{\phi}_{A'B'}(x)} \delta \Phi_{B'}^A(x) \right) d^3 x_{AA'} + \\ & \int_{\tau} \left(\partial_B^{A'} \frac{\partial L_{esq}}{\partial \phi_{AB}(x)} + \partial_{B'}^A \frac{\partial L_{dir}}{\partial \bar{\phi}_{A'B'}(x)} + \frac{\partial L_{int}}{\partial \Phi_{AA'}(x)} \right) \delta \Phi_{AA'}(x) d^4 x = 0, \end{aligned} \quad (4.67)$$

onde $d^3 x_{AA'}$ é o elemento espinor da 3-hipersuperfície de área de $\partial\tau$ associada com $d^3 x_{\mu}$. A primeira integral que aparece em (4.67) é calculada sobre as superfícies de limitação. Os limites de integração em relação às coordenadas estão no infinito, onde o campo se anula. Para os limites temporais de integração, isto é, para os instantes inicial e final, a variação dos potenciais é nula, pois de acordo com o princípio de ação mínima, os potenciais são conhecidos nesses instantes [3]. Então a primeira integral de (4.67) é nula. Colocando $\delta \Phi_{AA'}$ em evidência na integral que sobra obtemos

$$\int_{\tau} \left(\partial_B^{A'} \frac{\partial L_{esq}}{\partial \phi_{AB}(x)} + \partial_{B'}^A \frac{\partial L_{dir}}{\partial \bar{\phi}_{A'B'}(x)} + \frac{\partial L_{int}}{\partial \Phi_{AA'}(x)} \right) \delta \Phi_{AA'}(x) d^4 x = 0. \quad (4.68)$$

De acordo com o princípio da ação mínima, as variações $\delta \Phi_{AA'}(x)$ são arbitrárias e então os coeficientes dos $\delta \Phi_{AA'}(x)$ devem ser nulos, assim obtemos a equação de movimento

$$\partial_B^{A'} \frac{\partial L_{esq}}{\partial \phi_{AB}(x)} + \partial_{B'}^A \frac{\partial L_{dir}}{\partial \bar{\phi}_{A'B'}(x)} + \frac{\partial L_{int}}{\partial \Phi_{AA'}(x)} = 0. \quad (4.69)$$

Com o uso de (4.51) e (4.52) e também com $L_{int} = J^{AA'}(x) \Phi_{AA'}(x)$ na equação (4.69) obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8\pi} \partial_B^{A'} \frac{\partial}{\partial \phi_{AB}(x)} [\phi_{AB}(x) \phi^{AB}(x)] + \frac{1}{8\pi} \partial_{B'}^A \frac{\partial}{\partial \bar{\phi}_{A'B'}(x)} [\bar{\phi}_{A'B'}(x) \bar{\phi}^{A'B'}(x)] \\ & + \frac{\partial}{\partial \Phi_{AA'}(x)} [J^{AA'}(x) \Phi_{AA'}(x)] = 0. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Por Leibniz encontramos [18]

$$\frac{\partial}{\partial\phi_{CD}(x)}[\phi_{AB}(x)\phi^{AB}(x)] = 2\phi^{CD}(x), \quad (4.71)$$

e de modo semelhante para seu conjugado. Assim, podemos escrever (4.69) como

$$\frac{1}{4\pi}\partial_B^{A'}(2\phi^{AB}(x)) + \frac{1}{4\pi}\partial_{B'}^A(2\bar{\phi}^{A'B'}(x)) + J^{AA'}(x) = 0. \quad (4.72)$$

Com mais alguns cálculos³ chegamos a

$$\partial^{BA'}\phi_B^A(x) + \partial^{AB'}\bar{\phi}_{B'}^{A'}(x) = 4\pi J^{AA'}(x). \quad (4.73)$$

Das identidades de Bianchi (4.43) a expressão (4.73) torna-se

$$\partial^{BA'}\phi_B^A(x) = 2\pi J^{AA'}(x), \quad (4.74)$$

e de maneira semelhante para seu conjugado então obtemos as equações de campo invariantes

$$\partial^{BA'}\phi_B^A(x) = 2\pi J^{AA'}(x) = \partial^{AB'}\bar{\phi}_{B'}^{A'}(x). \quad (4.75)$$

A teoria completa sobre τ consiste das equações que obtivemos pela combinação de (4.43) com (4.73). Na ausência de fontes ($J_\mu(x) = 0$) a propagação dos campos parece, entretanto, ser governada pelas equações de campo livre sem massa para spin ± 1 .

$$\partial^{BA'}\phi_B^A(x) = 0 = \partial^{AB'}\bar{\phi}_{B'}^{A'}(x). \quad (4.76)$$

As equações (4.75) e (4.76) são as equações de Maxwell na forma espinorial.

Deduziremos agora uma expressão 2-espinor para a integral de carga total carregada por $j^\mu(x)$. Para isto consideramos uma hipersuperfície tipo-espaco Σ em \mathbb{M} , dada por

$$\Sigma = \{x^\mu \in \bar{\tau} | f(x) = 0 \quad \text{com} \quad (\partial^\mu f(x))\partial_\mu f(x) > 0\}. \quad (4.77)$$

De fato, não é estritamente necessário assumir aqui que Σ seja a fronteira de $\bar{\tau}$. Em vez disto, o ponto crucial no que diz respeito a nosso propósito imediato é supor mais adiante que a função $f(x)$ e sua derivada primeira sejam contínuas sobre Σ , tal que (4.77) pode ser considerada como uma definição de uma subvariedade não-singular tri-dimensional de \mathbb{M} com uma fronteira bidimensional suave $\partial\Sigma \subset \tau$ [17]. A

³Ver apêndice.

carga total das fontes pode ser expressa em termos da derivada covariante do bivetor eletromagnético por

$$Q[\Sigma] = \frac{1}{24\pi} \int_{\Sigma} \partial_{\mu} F^{\mu\nu}(x) \varepsilon_{\nu\gamma\lambda\sigma} dx^{\gamma} \wedge dx^{\lambda} \wedge dx^{\sigma}. \quad (4.78)$$

Explicitamente,

$$\begin{aligned} Q[\Sigma] &= \frac{1}{4\pi} \left[\int_{\Sigma} \partial_{\mu} F^{\mu 0}(x) \frac{1}{3!} e_{0123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \right. \\ &\quad - \int_{\Sigma} \partial_{\mu} F^{\mu 1}(x) \frac{1}{3!} e_{1230} dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^0 \\ &\quad + \int_{\Sigma} \partial_{\mu} F^{\mu 2}(x) \frac{1}{3!} e_{2301} dx^3 \wedge dx^0 \wedge dx^1 \\ &\quad \left. - \int_{\Sigma} \partial_{\mu} F^{\mu 3}(x) \frac{1}{3!} e_{3012} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Agora executando algumas integrações em cada uma das integrais da expressão (4.79)⁴ e usando a relação do tensor-mundo eletromagnético dual

$${}^*F_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\gamma\lambda} F^{\gamma\lambda}(x), \quad (4.80)$$

chegamos à expressão

$$Q[\Sigma] = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} {}^*F_{\mu\nu}(x) dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}, \quad (4.81)$$

a qual combinamos com (4.33)

$$Q[\Sigma] = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} [\varepsilon_{AB} \bar{\phi}_{A'B'}(x) - \varepsilon_{A'B'} \phi_{AB}(x)] dx^{AA'} \wedge dx^{BB'}, \quad (4.82)$$

e encontramos

$$Q[\Sigma] = \frac{1}{2\pi} \mathfrak{Im} \int_{\partial\Sigma} \phi_A^B(x) dx_B^A \wedge dx_B^{B'}.$$

Usando (4.13) podemos reescrever (4.78) como

$$\begin{aligned} Q[\Sigma] &= \frac{1}{6\pi} \mathfrak{Im} \int_{\Sigma} \partial^{BA'} \phi_B^A(x) dx_D^{C'} \wedge dx_{AC'} \wedge dx_{A'}^D \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathfrak{Re} \int_{\Sigma} \partial^{BA'} \phi_B^A(x) dx_{AA'}^3, \end{aligned} \quad (4.83)$$

onde a segunda igualdade é devido a identidade de Bianchi (4.43)

Equações de onda

⁴maiores detalhes estão no apêndice.

A teoria eletromagnética, como anteriormente formulada, dá origem a um sistema de equações de onda em τ . Quatro destas equações envolvem $\Phi_{AA'}(x)$ com $j_{AA'}(x)$ e são consideradas como equivalentes a segunda “metade” da teoria. Realmente, eles constituem a equação de onda convencional para o potencial que pode em particular tomar a condição de calibre de Lorentz [17]. As outras equações envolvem os campos junto com uma derivada da densidade de corrente. Será visto que o enunciado explícito da conservação da carga volta a ser uma consequência imediata do último conjunto de equações sempre que as propriedades de simetria dos campos forem efetivamente levadas em conta.

Vamos considerar a equação (4.24) com $\partial_{C'}^A$ operando em ambos os lados

$$\partial_{C'}^A \phi_{AB}(x) = \partial_{C'}^A \partial_{A'(A} \Phi_{B)}^{A'}(x). \quad (4.84)$$

Fazendo uso da relação

$$\partial_{A'A} \Phi_B^{A'}(x) = \partial_{A'(A} \Phi_{B)}^{A'}(x) + \frac{1}{2} \epsilon_{AB} \Lambda(x), \quad (4.85)$$

obtemos

$$\partial_{C'}^A \phi_{AB}(x) = \partial_{C'}^A \partial_{A'A} \Phi_B^{A'}(x) - \frac{1}{2} \partial_{C'}^A \epsilon_{AB} \Lambda(x), \quad (4.86)$$

ou ainda

$$\partial_{C'}^A \phi_{AB}(x) = \partial_{C'}^A \partial_{A'A} \Phi_B^{A'}(x) - \frac{1}{2} \partial_{C'B} \Lambda(x). \quad (4.87)$$

Usando o desdobramento [17]

$$\partial_{C'}^A \partial_{AA'} = \partial_{(A'}^A \partial_{C')A} + \partial_{[C'}^A \partial_{A']A} = \frac{1}{2} \epsilon_{A'C'} \square, \quad (4.88)$$

obtemos

$$\partial_{C'}^A \phi_{AB}(x) = \frac{1}{2} \epsilon_{A'C'} \square \Phi_B^{A'}(x) - \frac{1}{2} \partial_{C'B} \Lambda(x), \quad (4.89)$$

tal que, com $\Phi_{BC'}(x) = \Phi_B^{A'}(x) \epsilon_{A'C'}$ na equação acima, vem

$$2\partial_{C'}^A \phi_{AB}(x) = \square \Phi_{BC'}(x) - \partial_{C'B} \Lambda(x), \quad (4.90)$$

onde $\square = \partial_\mu \partial^\mu$, e $\Lambda(x) = \partial_\gamma \Phi^\gamma(x) = 0$. Usando (4.75) somos levados a

$$\square \Phi_{AA'}(x) = 4\pi J_{AA'}(x) + \partial_{AA'} \Lambda(x), \quad (4.91)$$

de onde, na ausência de fontes, $\Phi_{AA'}(x)$ satisfaz a equação de onda $\square \Phi_{AA'}(x) = \partial_{AA'} \Lambda(x)$.

Para deduzir a equação de onda envolvendo campos, adotaremos um procedimento similar ao que produziu (4.91)⁵, mas fazendo uso de qualquer uma das equações (4.75). Neste caso trabalharemos com o lado esquerdo da equação de campo. Com efeito

$$\partial^{BA'} \phi_B^A(x) = 2\pi J^{AA'}(x), \quad (4.92)$$

com $\partial_{A'C}$ operando na equação acima

$$\partial_{A'C} \left(\partial^{BA'} \phi_B^A(x) \right) = \partial_{A'C} \left(2\pi J^{AA'}(x) \right). \quad (4.93)$$

Substituindo $\phi_B^A(x) = \epsilon_{BD} \phi^{DA}(x)$, vem

$$\partial_{A'C} \left(\partial^{BA'} \epsilon_{BD} \phi^{DA}(x) \right) = \partial_{A'C} \left(2\pi J^{AA'}(x) \right), \quad (4.94)$$

tal que, lembrando que ϕ^{AB} é simétrico, obtemos

$$\partial_{A'C} \left(\partial_D^{A'} \phi^{AD}(x) \right) = \partial_{A'C} \left(2\pi J^{AA'}(x) \right), \quad (4.95)$$

e

$$\partial_{A'C} \partial_B^{A'} \phi^{AB}(x) = 2\pi \partial_{A'C} J^{AA'}(x), \quad (4.96)$$

onde efetuamos algumas substituições indiciais. A partir das expressões acima (4.88), obtemos

$$\frac{1}{2} \epsilon_{CB} \square \phi^{AB}(x) = 2\pi \partial_{A'C} J^{AA'}(x), \quad (4.97)$$

$$\epsilon_{CB} \square \phi^{AB}(x) = 4\pi \partial_{A'C} J^{AA'}(x). \quad (4.98)$$

Agora, na Eq. (4.98), escrevemos $J^{AA'}(x) = \epsilon^{A'B'} J_{B'}^A(x)$

$$\epsilon_{CB} \square \phi^{AB}(x) = 4\pi \partial_{A'C} \left(\epsilon^{A'B'} j_{B'}^A(x) \right), \quad (4.99)$$

$$\epsilon_{CB} \square \phi^{AB}(x) = 4\pi \partial_C^{B'} J_{B'}^A(x), \quad (4.100)$$

$$\square \phi_C^A(x) = 4\pi \partial_C^{B'} J_{B'}^A(x), \quad (4.101)$$

tal que, com uma substituição indicial adequada e algumas manipulações, obtemos

$$\square \phi_C^A(x) = 4\pi \partial_{C'}^A J_{C'}^C(x). \quad (4.102)$$

Aplicando, pela direira, ϵ_{AD} nos dois lados da expressão acima, vem

$$\square \phi_{DC}(x) = 4\pi \partial_{DC'} J_{C'}^C(x). \quad (4.103)$$

⁵ver apêndice.

Finalmente, com algumas substituições indiciais adequadas obtemos

$$\square\phi_{AB}(x) = 4\pi\partial_{AA'}J_B^{A'}(x). \quad (4.104)$$

Em adição, através de um procedimento semelhante ao que foi empregado para obter (4.104), encontramos

$$\square\bar{\phi}_{A'B'}(x) = 4\pi\partial_{AA'}J_B^A(x). \quad (4.105)$$

As equações (4.104) e (4.105) são as equações de onda para os campos.

Uma consequência importante da teoria é o fato que ela dá origem a conservação da carga. Podemos ver isso fazendo uso da equação (4.14). Assim, com ϵ^{BA} atuando pela direita nos dois lados de (4.104)

$$\square\phi_{AB}(x)\epsilon^{BA} = 4\pi\partial_{AA'}j_B^{A'}(x)\epsilon^{BA}, \quad (4.106)$$

$$\square\phi_A^A(x) = 4\pi\partial_{AA'}j^{AA'}(x), \quad (4.107)$$

e de maneira semelhante para (4.105), de modo que

$$\square\phi_A^A(x) = \square\bar{\phi}_{A'}^{A'}(x) = 0 = 4\pi\partial_{AA'}j^{AA'}(x), \quad (4.108)$$

que envolve a equação que acima nos referimos.

A divergencia nula de $j^\mu(x)$ é equivalente a qualquer uma das equações

$$\partial_{A'[A}j_{B]}^{A'}(x) = 0, \quad \partial_{A[A'}j_{B']}^A(x) = 0. \quad (4.109)$$

Sabendo que $\partial_{M'A}\partial_B^{M'} = \partial_{M'(A}\partial_B^{M'} + \partial_{M'[A}\partial_{B]}^{M'}$ e considerando as equações (4.109), conclui-se que as equações (4.104) e (4.105) podem ser reescritas como

$$\square\phi_{AB}(x) = 4\pi\partial_{A'(A}j_{B)}^{A'}(x), \quad \square\bar{\phi}_{A'B'}(x) = 4\pi\partial_{A(A'}j_{B')}^A(x). \quad (4.110)$$

O enunciado do princípio de conservação de carga envolvida em (4.108) também pode ser estabelecido como identidades triviais carregando os seguintes operadores diferenciais conjugados anti-simétricos

$$\blacksquare_{AB} = \partial_{A'[A}\partial_{B]}^{A'} = \frac{1}{2}\epsilon_{AB}\square, \quad (4.111a)$$

$$\blacksquare_{A'B'} = \partial_{A[A'}\partial_{B']}^A = \frac{1}{2}\epsilon_{A'B'}\square. \quad (4.111b)$$

Com efeito, de (4.108) com algumas substituições indiciais, temos

$$\square\epsilon_{AB}\phi^{BA}(x) = \square\epsilon_{A'B'}\bar{\phi}^{B'A'}(x) = 4\pi\partial_{AA'}j^{AA'}(x), \quad (4.112)$$

$$\epsilon_{AB}\square\phi^{BA}(x) = \epsilon_{A'B'}\square\bar{\phi}^{B'A'}(x) = 4\pi\partial_{AA'}j^{AA'}(x), \quad (4.113)$$

tal que usando as equações (4.111a e 4.111b), vem

$$2\nblacksquare_{AB}\phi^{AB}(x) = 2\nblacksquare_{AB}\bar{\phi}^{A'B'}(x) = 4\pi\partial_\mu j^\mu(x), \quad (4.114)$$

$$\blacksquare_{AB}\phi^{AB}(x) = \blacksquare_{AB}\bar{\phi}^{A'B'}(x) = 2\pi\partial_\mu j^\mu(x), \quad (4.115)$$

onde $\partial_\mu j^\mu(x) = \partial_{AA'}j^{AA'}(x)$. Na ausência de fontes as equações (4.110) ficam

$$\square\phi_{AB}(x) = 0, \quad \square\bar{\phi}_{A'B'}(x) = 0. \quad (4.116)$$

Sob estas circunstâncias (ausência de fonte) cada componente dos campos satisfaz as equações de onda homogêneas ordinárias. Este resultado é equivalente ao fato de que os campos livres satisfazem as equações (4.76).

4.2 O tensor momento-energia eletromagnético

Derivaremos agora a expressão de Penrose [2] para o tensor momento-energia eletromagnética [17]. A idéia aqui é começar com uma expressão definida 2-espinor para o tensor ao invés de transcrever sua forma convencional em termos de 2-espinores. A construção das integrais para o momento angular dos campos será realizada de uma maneira direta pelo uso da expressão para $T_{\mu\nu}(x)$.

A expressão de Penrose

Nossa relação inicial para algum $x^a \in \tau$ é escrita como

$$T_{AA'BB'}(x) = \epsilon_{AB}\epsilon_{A'B'}L_{livre} - 2\partial_{[AA'}\Phi_{CC']}(x)\frac{\partial L_{livre}}{\partial[\partial^{BB'}\Phi_{CC'}(x)]}, \quad (4.117)$$

tal que, com o uso de (4.1) e (4.13), podemos reescrever (4.117) como

$$T_{AA'BB'} = \epsilon_{AB}\epsilon_{A'B'}L_{livre} - (\epsilon_{A'C'}\phi_{AC} + \epsilon_{AC}\bar{\phi}_{A'C'})\frac{\partial L_{livre}}{\partial[\partial^{BB'}\Phi_{CC'}]}. \quad (4.118)$$

Na expressão acima, trabalharemos melhor o termo envolvendo a derivada de L_{livre} . Para isso, faremos uso da expressão (4.47). Assim, obtemos

$$\frac{\partial L_{livre}}{\partial[\partial^{BB'}\Phi_{CC'}(x)]} = \frac{1}{4\pi} \left(\epsilon_{B'}{}^{C'}\phi_B^C(x) + \epsilon_B{}^C\phi_{B'}^{C'}(x) \right). \quad (4.119)$$

Substituindo (4.119) em (4.118) leva-nos a

$$T_{AA'BB'} = \epsilon_{AB}\epsilon_{A'B'}L_{livre} - \frac{1}{4\pi} \left[(\epsilon_{A'C'}\phi_{AC} + \epsilon_{AC}\bar{\phi}_{A'C'}) (\epsilon_{B'}{}^{C'}\phi_B^C(x) + \epsilon_B^C\phi_{B'}^{C'}(x)) \right]. \quad (4.120)$$

Trabalhando melhor os termos dentro dos colchetes

$$T_{AA'BB'}(x) = \epsilon_{AB}\epsilon_{A'B'}L_{livre} - \frac{1}{4\pi} \left[\epsilon_{A'C'}\phi_{AC}(x)\epsilon_{B'}{}^{C'}\phi_B^C(x) + \epsilon_{AC}\bar{\phi}_{A'C'}(x)\epsilon_{B'}{}^{C'}\phi_B^C(x) + \epsilon_{A'C'}\phi_{AC}(x)\epsilon_B^C\bar{\phi}_{B'}^{C'}(x) + \epsilon_{AC}\bar{\phi}_{A'C'}(x)\epsilon_B^C\phi_B^C(x) \right]. \quad (4.121)$$

Observando que no lado direito dentro do colchetes da equação acima, o primeiro termo pode ser escrito como $\epsilon_{A'B'}\phi_{AC}\phi_B^C$ e o segundo termo como $-\phi_B^C\epsilon_{CA}$, e de modo semelhante para o terceiro e quarto termos, após algumas manipulações obtemos

$$T_{AA'BB'}(x) = \epsilon_{AB}\epsilon_{A'B'}L_{livre} + \frac{1}{4\pi} \left[2\phi_{AB}(x)\bar{\phi}_{A'B'}(x) - \epsilon_{A'B'}\phi_{AC}(x)\phi_B^C(x) - \epsilon_{AB}\bar{\phi}_{A'C'}(x)\bar{\phi}_{B'}^{C'}(x) \right]. \quad (4.122)$$

A equação (4.50) junto com (4.51) e (4.52), quando substituída na equação acima, leva-nos a

$$T_{AA'BB'}(x) = \frac{1}{8\pi}\epsilon_{AB}\epsilon_{A'B'} \left[\phi^{CD}(x)\phi_{CD}(x) + \bar{\phi}^{C'D'}(x)\bar{\phi}_{C'D'}(x) \right] + \frac{1}{4\pi} \left[2\phi_{AB}\bar{\phi}_{A'B'} - \epsilon_{A'B'}\phi_{AC}\phi_B^C - \epsilon_{AB}\bar{\phi}_{A'C'}\bar{\phi}_{B'}^{C'} \right]. \quad (4.123)$$

De modo mais explícito

$$T_{AA'BB'}(x) = \frac{1}{8\pi} \left[\epsilon_{AB}\epsilon_{A'B'}\phi_{CD}(x)\phi^{CD}(x) + \epsilon_{AB}\epsilon_{A'B'}\bar{\phi}_{C'D'}(x)\bar{\phi}^{C'D'}(x) \right] + \frac{1}{4\pi} \left[2\phi_{AB}\bar{\phi}_{A'B'} - \epsilon_{A'B'}\phi_{AC}\phi_B^C - \epsilon_{AB}\bar{\phi}_{A'C'}\bar{\phi}_{B'}^{C'} \right]. \quad (4.124)$$

Agora usando a relação [17]

$$\epsilon_{AB}\phi_{CD}(x)\phi^{CD}(x) = 2\phi_{C[A}(x)\phi_{B]}^C(x) = 2\phi_{AC}(x)\phi_B^C(x), \quad (4.125)$$

e seu conjugado obtemos

$$\begin{aligned}
T_{AA'BB'}(x) &= \frac{1}{8\pi} \epsilon_{A'B'} (2\phi_{AC}(x)\phi_B^C(x)) \\
&+ \frac{1}{8\pi} \epsilon_{AB} \left(2\bar{\phi}_{A'C'}(x)\bar{\phi}_{B'}^{C'}(x) \right) + \frac{1}{2\pi} \phi_{AB}(x)\bar{\phi}_{A'B'}(x) \\
&- \frac{1}{4\pi} \epsilon_{A'B'} \phi_{AC}(x)\phi_B^C(x) - \frac{1}{4\pi} \epsilon_{AB} \bar{\phi}_{A'C'}(x)\bar{\phi}_{B'}^{C'}(x), \tag{4.126}
\end{aligned}$$

o primeiro e o quarto termos a direita em (4.126) se cancelam, bem como o segundo e quinto termos, restando apenas o terceiro termo, que consequentemente produz

$$T_{AA'BB'}(x) = \frac{1}{2\pi} \phi_{AB}(x)\bar{\phi}_{A'B'}(x). \tag{4.127}$$

A equação (4.127) é a versão de Penrose de $T_{\mu\nu}(x)$.

Da expressão de Penrose (4.127), com $\partial^{AA'}$ atuando pela esquerda,

$$\partial^{AA'} T_{AA'BB'} = \frac{1}{2\pi} \partial^{AA'} (\phi_{AB} \bar{\phi}_{A'B'}), \tag{4.128}$$

se usarmos a regra de Leibniz [18]

$$\begin{aligned}
\partial^{AA'} T_{AA'BB'}(x) &= \frac{1}{2\pi} \left[\partial^{AA'} \phi_{AB}(x) \bar{\phi}_{A'B'}(x) \right. \\
&\quad \left. + \phi_{AB} \partial^{AA'} \bar{\phi}_{A'B'}(x) \right], \tag{4.129}
\end{aligned}$$

e escrevermos

$$\phi_{AB} = \epsilon_{AC} \phi_B^C \quad \text{e} \quad \bar{\phi}_{A'B'} = \epsilon_{A'C'} \bar{\phi}_{B'}^{C'}, \tag{4.130}$$

$$\begin{aligned}
\partial^{AA'} T_{AA'BB'}(x) &= \frac{1}{2\pi} \left[\partial^{AA'} (\epsilon_{AC} \phi_B^C(x)) \bar{\phi}_{A'B'}(x) \right. \\
&\quad \left. + \phi_{AB} \partial^{AA'} (\epsilon_{A'C'} \bar{\phi}_{B'}^{C'}(x)) \right], \tag{4.131}
\end{aligned}$$

no primeiro termo no lado direito permutando A com C e no segundo termo a direita permutando A' com C'

$$\begin{aligned}
\partial^{AA'} T_{AA'BB'}(x) &= \frac{1}{2\pi} \left[\partial^{CA'} \epsilon_{CA} \phi_B^A(x) \bar{\phi}_{A'B'}(x) \right. \\
&\quad \left. + \phi_{AB}(x) \partial^{AC'} \epsilon_{C'A'} \bar{\phi}_{B'}^{A'}(x) \right], \tag{4.132}
\end{aligned}$$

obtemos

$$\partial^{AA'} T_{AA'BB'}(x) = \frac{1}{2\pi} \left[\partial_A^{A'} \phi_B^A(x) \bar{\phi}_{A'B'}(x) + \phi_{AB}(x) \partial_{A'}^A \bar{\phi}_{B'}^{A'}(x) \right]. \tag{4.133}$$

Agora, escrevendo

$$\partial_A^{A'} = \partial^{A'B} \epsilon_{BA} , \quad \partial_{A'}^A = \partial^{AB'} \epsilon_{B'A'} , \quad (4.134)$$

$$\begin{aligned} \partial^{AA'} T_{AA'BB'}(x) &= \frac{1}{2\pi} \left[\partial^{A'B} \epsilon_{BA} \phi_B^A(x) \bar{\phi}_{A'B'}(x) \right. \\ &\quad \left. + \phi_{AB}(x) \partial^{AB'} \epsilon_{B'A'} \bar{\phi}_{B'}^{A'}(x) \right] , \end{aligned} \quad (4.135)$$

e usando a equação de campo (4.75) na expressão acima

$$\partial^{AA'} T_{AA'BB'}(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\epsilon_{AB} 2\pi j^{AA'}(x) \bar{\phi}_{A'B'}(x) + \phi_{AB}(x) \epsilon_{A'B'} 2\pi j^{AA'}(x) \right) , \quad (4.136)$$

com algumas manipulações

$$\partial^{AA'} T_{AA'BB'}(x) = j_B^{A'}(x) \bar{\phi}_{A'B'}(x) + j_{B'}^A(x) \phi_{AB}(x) , \quad (4.137)$$

e com um arbitrário, mas hermitiano $\xi^{BB'} \in \tau$ operando em ambos os lados da equação acima, obtemos

$$\xi^{BB'} \partial^{AA'} T_{AA'BB'}(x) = \xi^{BB'} j_B^{A'}(x) \bar{\phi}_{A'B'}(x) + \xi^{BB'} j_{B'}^A(x) \phi_{AB}(x) . \quad (4.138)$$

Lembrando que

$$2\Re e(z) = z + \bar{z} , \quad (4.139)$$

com isso

$$\xi^{BB'} \partial^{AA'} T_{AA'BB'}(x) = 2\Re e \left(\xi^{BB'} j_{B'}^A(x) \phi_{AB}(x) \right) , \quad (4.140)$$

e na ausência de fontes a equação (4.137) produz a equação da divergência

$$\partial^{AA'} T_{AA'BB'}(x) = 0 , \quad (4.141)$$

que parece concordar com o fato que nossa expressão para $T_{\mu\nu}(x)$ não envolve fontes.

Expressão para a energia eletromagnética

Antes de introduzirmos as integrais explícitas para a energia dos campos, realizaremos a computação da expressão 2-espinor associada com $T^{00}(x)$. Esta última quantidade parece ser idêntica a densidade de energia carregada pelo campo. Faremos uso das matrizes espin que estabelece a correspondência entre tensores em \mathbb{M} e espinores em \mathbb{C}^2 , conforme apresentado na seção (3.6).

A densidade de energia dos campos é definida sobre τ por

$$\begin{aligned} T^{00}(x) &= T_{00}(x) = \sigma_0^{AA'} \sigma_0^{BB'} T_{AA'BB'}(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sigma_0^{AA'} \sigma_0^{BB'} \phi_{AB}(x) \bar{\phi}_{A'B'}(x), \end{aligned} \quad (4.142)$$

usando $(\sigma_0^{AA'})$ tal como dado na seção 3.6, vem

$$\begin{aligned} T^{00}(x) &= T_{00}(x) = \frac{1}{2\pi} \left[\sigma_0^{00'} \sigma_0^{00'} \phi_{00}(x) \bar{\phi}_{0'0'}(x) + \sigma_0^{00'} \sigma_0^{11'} \phi_{01}(x) \bar{\phi}_{0'1'}(x) \right. \\ &\quad \left. + \sigma_0^{11'} \sigma_0^{00'} \phi_{10}(x) \bar{\phi}_{1'0'}(x) + \sigma_0^{11'} \sigma_0^{11'} \phi_{11}(x) \bar{\phi}_{1'1'}(x) \right], \end{aligned} \quad (4.143)$$

onde os termos para $\sigma_0^{AA'}$ e $\sigma_0^{BB'}$ com $A \neq A'$ e $B \neq B'$ anularam-se. Calculando com $\sigma_0^{10'}$, resulta

$$T^{00}(x) = T_{00}(x) = \frac{1}{4\pi} \left[|\phi_{00}(x)|^2 + |\phi_{11}(x)|^2 + 2|\phi_{01}(x)|^2 \right], \quad (4.144)$$

a qual é positivo-definida sobre τ .

Para ver que a equação (4.144) é idêntica a expressão elementar para a densidade de energia eletromagnética, é conveniente assumir que $\tau \cong \mathbb{T} \times \mathbb{V}$, com \mathbb{T} sendo um subespaço uni-dimensional de \mathbb{R} e \mathbb{V} uma subvariedade tridimensional de \mathbb{R}^3 . Neste estágio, o fecho de \mathbb{V} é ainda tomado como compacto tanto quanto para garantir a correspondência com um adequado volume no \mathbb{R}^3 com uma fronteira $\partial\mathbb{V}$ suave. Podemos então calcular as relações relevantes pelo uso do campo complexo 3-vetor de Penrose (com $x^0 = t$) [17]

$$\vec{C}(t, \vec{x}) = \vec{E}(t, \vec{x}) - i\vec{B}(t, \vec{x}), \quad t \in \mathbb{T}, \quad \vec{x} \in \mathbb{V}, \quad (4.145)$$

onde $\vec{E}(t, \vec{x})$ e $\vec{B}(t, \vec{x})$ são os campos elétrico e magnético respectivamente [2]. Deve ser observado que as componentes dentro de $\mathbb{M} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ devem ser desconectadas de tal modo que a componente \mathbb{R}^3 agora carrega a usual assinatura métrica (+ + +) ao invés de (- - -). As relações explícitas entre as (três) componentes independentes de $\phi_{AB}(x)$ e as de $\vec{C}(t, \vec{x})$, são assim supridas por [17]

$$\left. \begin{aligned} \phi_{00}(x) &= \frac{1}{2}[C_1(t, \vec{x}) - iC_2(t, \vec{x})], \\ \phi_{01}(x) &= -\frac{1}{2}C_3(t, \vec{x}) = \phi_{10}(x), \\ \phi_{11}(x) &= \frac{1}{2}[C_1(t, \vec{x}) + iC_2(t, \vec{x})]. \end{aligned} \right\} \quad (4.146)$$

De acordo com $|\xi|^2 = \xi\bar{\xi}$, a equação (4.146) pode ser escrita como segue

$$T_{00}(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \left(\phi_{00}(x) \bar{\phi}_{0'0'}(x) + \phi_{11}(x) \bar{\phi}_{1'1'}(x) + \phi_{01}(x) \bar{\phi}_{0'1'}(x) \right). \quad (4.147)$$

Novamente, de (4.143) podemos expressar, também (4.48), como dado abaixo

$$\left. \begin{aligned} |\phi_{00}(x)|^2 &= \phi_{00}(x)\bar{\phi}_{0'0'}(x) = \frac{1}{4}[C_1^2(t, \vec{x}) + C_2^2(t, \vec{x})], \\ |\phi_{01}(x)|^2 &= \phi_{01}(x)\bar{\phi}_{0'1'}(x) = \frac{1}{4}C_3^2(t, \vec{x}) = |\phi_{10}(x)|^2, \\ |\phi_{11}(x)|^2 &= \phi_{11}(x)\bar{\phi}_{1'1'}(x) = \frac{1}{4}[C_1^2(t, \vec{x}) + C_2^2(t, \vec{x})]. \end{aligned} \right\} \quad (4.148)$$

Substituindo (4.148) em (4.147) leva-nos a

$$T_{00}(t, \vec{x}) = \frac{1}{8\pi} (C_1^2 + C_2^2 + C_3^2). \quad (4.149)$$

Agora substituímos (4.145) em (4.149), e com o uso de (4.143) finalmente obtemos a expressão para a densidade de energia eletromagnética

$$T_{00}(t, \vec{x}) = \frac{1}{8\pi} [E^2(t, \vec{x}) + B^2(t, \vec{x})], \quad (4.150)$$

onde

$$\begin{aligned} E^2(t, \vec{x}) &= E_1^2(t, \vec{x}) + E_2^2(t, \vec{x}) + E_3^2(t, \vec{x}), \\ B^2(t, \vec{x}) &= B_1^2(t, \vec{x}) + B_2^2(t, \vec{x}) + B_3^2(t, \vec{x}). \end{aligned} \quad (4.151)$$

Portanto a energia eletromagnética em \mathbb{T} , armazenada em \mathbb{V} , é dada por

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{V}} [|\phi_{00}(x)|^2 + |\phi_{11}(x)|^2 + 2|\phi_{01}(x)|^2] d^3x, \quad (4.152)$$

a qual envolve o 3-volume sobre \mathbb{V}

$$d^3x = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \quad (4.153)$$

A integral de energia (4.152) não é covariante. Para escrever uma expressão manifestamente covariante, devemos supor que $\Sigma \subset \bar{\tau}$ (ver (4.77)). A integral para a energia eletromagnética na sua forma covariante é então dada por

$$\varepsilon[\Sigma] = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \sigma_0^{BB'} \phi_B^A(x) \bar{\phi}_{B'}^{A'}(x) d^3x_{AA'}, \quad (4.154)$$

onde $d^3x_{AA'}$ é o elemento espinorial da 3-hipersuperfície área de Σ (ver (4.67)). No integrando de (4.154), as componentes podem ser escritas explicitamente de modo a produzir a expressão

$$\begin{aligned} \varepsilon[\Sigma] &= \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \int_{\Sigma} \left\{ [|\phi_{01}(x)|^2 + |\phi_{11}(x)|^2] d^3x_{00'} \right. \\ &\quad + [|\phi_{00}(x)|^2 + |\phi_{01}(x)|^2] d^3x_{11'} \\ &\quad \left. - 2\Re e [\phi_{00}(x)\bar{\phi}_{0'1'}(x) + \phi_{01}(x)\bar{\phi}_{1'1'}(x)] d^3x_{10'} \right\}, \end{aligned} \quad (4.155)$$

a qual é, com $x^0 = \text{const}$, reduzida a (4.154) quando tomamos $\Sigma \cong \mathbb{V}$. Para estabelecer isto, realizamos as computações explicitamente. De (4.154) e usando alguns resultados obtidos na seção (3.6) tais como

$$\sigma_\mu^{AA'} = \eta_{\mu\nu} \sigma^{\nu AA'}, \quad (4.156a)$$

$$\sigma_\mu^{AA'} = \eta_{\mu\nu} \epsilon^{AB} \epsilon^{A'B'} \sigma_{BB'}^\nu, \quad (4.156b)$$

e ainda com $d^3 x_{AA'} = \sigma_{AA'}^\mu d^3 x_\mu$, obtemos

$$\varepsilon[\Sigma] = \frac{1}{12\pi} \int_\Sigma \sigma_0^{BB'} \phi_B^A(x) \bar{\phi}_{B'}^{A'}(x) \sigma_{AA'}^\mu e_{\mu\nu\lambda\gamma} dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\gamma. \quad (4.157)$$

Após algumas manipulações, vem

$$\begin{aligned} \varepsilon[\Sigma] = & \frac{1}{2\pi} \int_\Sigma \sigma_0^{BB'} \phi_B^A(x) \bar{\phi}_{B'}^{A'}(x) [\sigma_{AA'}^0 e_{0123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ & + \sigma_{AA'}^1 e_{1230} dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \sigma_{AA'}^2 e_{2301} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\ & + \sigma_{AA'}^3 e_{3012} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2], \end{aligned} \quad (4.158)$$

a qual torna-se

$$\begin{aligned} \varepsilon[\Sigma] = & \frac{1}{2\pi} \int_\Sigma \sigma_0^{BB'} \phi_B^A(x) \bar{\phi}_{B'}^{A'}(x) [\sigma_{AA'}^0 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ & - \sigma_{AA'}^1 dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \sigma_{AA'}^2 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\ & - \sigma_{AA'}^3 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2]. \end{aligned} \quad (4.159)$$

Então, com $x^0 = \text{constante}$, e usando equação (4.142), conclui-se a equação (4.154) é reduzida a

$$\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{V}} T_{00}(x) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \quad (4.160)$$

Integrais cinemáticas covariantes

Veremos nesta subseção que a integral envolvida na expressão (4.154) pode ser identificada com a componente temporal do quadri-vetor momento-energia da teoria. Assim, buscaremos uma expressão covariante para o quadri-vetor momento-energia eletromagnético. Para isso faremos uso da expressão [8]

$$p^\mu = \int_\Sigma T^{\mu\lambda} d^3 x_\lambda. \quad (4.161)$$

Novamente usando os objetos conectores da seção (3.6), podemos escrever a equação acima como segue

$$\sigma_{AA'}^\mu p^{AA'}[\Sigma] = \int_\Sigma \sigma_{AA'}^\mu \sigma_{BB'}^\lambda T^{AA'BB'} \sigma_\lambda^{CC'} d^3 x_{CC'}, \quad (4.162)$$

tal que lembrando ainda que $\sigma_{BB'}^\lambda \sigma_\lambda^{CC'} = \delta^C_B \delta^{C'}_{B'}$, obtemos

$$p^{AA'}[\Sigma] = \int_{\Sigma} T^{AA'BB'} d^3 x_{BB'}. \quad (4.163)$$

Abaixando índices da equação (4.163), após substituir $d^3 x_{BB'} = \epsilon_{BD} \epsilon_{B'D'} d^3 x^{DD'}$ e fazer algumas manipulações, obtemos

$$p_{AA'}[\Sigma] = \int_{\Sigma} T_{AA'BB'} d^3 x^{BB'}. \quad (4.164)$$

Assim, usando a expressão de Penrose (4.127), resulta

$$p_{AA'}[\Sigma] = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \phi_{AB}(x) \bar{\phi}_{A'B'}(x) d^3 x^{BB'}, \quad (4.165)$$

tal que após efetuar-se alguns movimentos indiciais, vem

$$p_{AA'}[\Sigma] = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \phi_A^C(x) \bar{\phi}_{A'}^{C'}(x) d^3 x_{CC'}. \quad (4.166)$$

Agora, com as substituições indiciais C por B e C' por B' finalmente obtemos a expressão covariante para o quadri-vetor momento-energia eletromagnético

$$p_{AA'}[\Sigma] = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \phi_A^B(x) \bar{\phi}_{A'}^{B'}(x) d^3 x_{BB'}. \quad (4.167)$$

A componente temporal $p_0[\Sigma] = \sigma_0^{AA'} p_{AA'}[\Sigma] = p^0[\Sigma]$ identifica-se com (4.154), enquanto que as componentes espaciais $p^k[\Sigma] = -p_k[\Sigma]$, são expressas como

$$p^k[\Sigma] = \sigma_{AA'}^k p^{AA'}[\Sigma], \quad (4.169a)$$

$$p^k[\Sigma] = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \sigma_{AA'}^k \phi^{AB}(x) \bar{\phi}^{A'B'}(x) d^3 x_{BB'}. \quad (4.169b)$$

Sempre que Σ é "identificado" com \mathbb{V} (ver (4.160)), a covariância do integrando de (4.169b) é perdida. Sob estas circunstâncias podemos proceder a derivação explícita de $p^k[\Sigma]$ utilizando-se da expressão acima, tal que

$$\begin{aligned} p^k[\Sigma] &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \sigma_{AA'}^k \phi^{AB}(x) \bar{\phi}^{A'B'}(x) \sigma_{BB'}^\mu d^3 x_\mu \\ &= \frac{1}{12\pi} \int_{\Sigma} \sigma_{AA'}^k \phi^{AB}(x) \bar{\phi}^{A'B'}(x) [\sigma_{BB'}^\mu e_{\mu\nu\lambda\gamma} dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\gamma]. \end{aligned} \quad (4.170)$$

Pondo (4.170) de modo explícito e lembrando que $x^0 = \text{constante}$, obtemos

$$p^k[t] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{V}} \sigma_{AA'}^k \phi^{AB}(x) \bar{\phi}^{A'B'}(x) [\sigma_{BB'}^0 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3]. \quad (4.171)$$

Tendo em vista a escolha métrica que fizemos (2.1), a substituição $\phi^{AB}(x) = -\phi_C^A \epsilon^{CB}$ e seu conjugado complexo, fornece

$$p^k[t] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{V}} \sigma_{AA'}^k \sigma_0^{CC'} \phi_C^A(x) \bar{\phi}_{C'}^{A'}(x) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \quad (4.172)$$

tal que permutando A com C , A' com C' e em seguida fazendo-se a substituição indicial de C por B e C' por B' , vem

$$p^k[t] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{V}} \sigma_0^{AA'} \sigma_{BB'}^k \phi_A^B(x) \bar{\phi}_{A'}^{B'}(x) d^3x. \quad (4.173)$$

Finalmente, obtemos

$$p^k(t) = \int_{\mathbb{V}} T_0^k(x) d^3x, \quad (4.174)$$

onde

$$T_0^k(x) = \frac{1}{2\pi} \sigma_0^{AA'} \sigma_{BB'}^k \phi_A^B(x) \bar{\phi}_{A'}^{B'}(x), \quad (4.175)$$

a qual é a expressão convencional (não-covariante) definida para o momento linear carregado pelo campo.

Procederemos agora a derivação das expressões 2-espinoriais para as densidades $T^{0k}(x)$. Para isso, escrevemos a expressão (4.177) de modo explícito com auxílio de (3.30)

$$\begin{aligned} T_0^k(x) &= \frac{1}{2\pi} \sigma_{BB'}^k [\sigma_0^{00'} \phi_0^B(x) \bar{\phi}_{0'}^{B'}(x) + \sigma_0^{11'} \phi_1^B(x) \bar{\phi}_{1'}^{B'}(x)] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \sigma_{BB'}^k [\phi_0^B(x) \bar{\phi}_{0'}^{B'}(x) + \phi_1^B(x) \bar{\phi}_{1'}^{B'}(x)]. \end{aligned} \quad (4.176)$$

Para $k = 1$, tem-se

$$T_0^1(x) = \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \sigma_{BB'}^1 [\phi_0^B(x) \bar{\phi}_{0'}^{B'}(x) + \phi_1^B(x) \bar{\phi}_{1'}^{B'}(x)], \quad (4.177)$$

tal que, aplicando η_{11} em ambos os lados, resulta

$$\begin{aligned} T_0^1(x) \eta_{11} &= \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \sigma_{BB'}^1 \eta_{11} [\phi_0^B(x) \bar{\phi}_{0'}^{B'}(x) + \phi_1^B(x) \bar{\phi}_{1'}^{B'}(x)], \\ T_{01}(x) &= \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \sigma_{1BB'} [\phi_0^B(x) \bar{\phi}_{0'}^{B'}(x) + \phi_1^B(x) \bar{\phi}_{1'}^{B'}(x)]. \end{aligned} \quad (4.178)$$

Agora substituindo $\sigma_{1BB'} = \epsilon_{BC} \epsilon_{B'C'} \sigma_1^{CC'}$

$$T_{01}(x) = \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \epsilon_{BC} \epsilon_{B'C'} \sigma_1^{CC'} [\phi_0^B(x) \bar{\phi}_{0'}^{B'}(x) + \phi_1^B(x) \bar{\phi}_{1'}^{B'}(x)], \quad (4.179)$$

e atuando com ϵ_{BC} e seu complexo conjugado nos termos dentro do colchetes da equação (4.179), leva-nos a

$$T_{01}(x) = \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \sigma_1^{CC'} [\phi_{C0}(x) \bar{\phi}_{C'0'}(x) + \phi_{C1}(x) \bar{\phi}_{C'1'}(x)]. \quad (4.180)$$

De modo explícito, lembrando que de acordo com (3.30) os termos para $C = C'$ se anulam, sobrando apenas

$$T_{01}(x) = \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \left[\sigma_1^{01'} \left(\phi_{00}(x) \bar{\phi}_{1'0'}(x) + \phi_{01}(x) \bar{\phi}_{1'1'}(x) \right) + \sigma_1^{10'} \left(\phi_{10}(x) \bar{\phi}_{0'0'}(x) + \phi_{11}(x) \bar{\phi}_{0'1'}(x) \right) \right]. \quad (4.181)$$

Com mais algumas manipulações somos levados a

$$T_{01}(x) = \frac{1}{4\pi} \left[\phi_{01}(x) (\bar{\phi}_{0'0'}(x) + \bar{\phi}_{1'1'}(x)) + \bar{\phi}_{0'1'}(x) (\phi_{00}(x) + \phi_{11}(x)) \right], \quad (4.182)$$

tal que lembrando de (4.139), podemos reescrever a expressão 4.182 como

$$T_{01}(x) = \frac{1}{2\pi} \Re e \left[\phi_{01}(x) (\bar{\phi}_{0'0'}(x) + \bar{\phi}_{1'1'}(x)) \right]. \quad (4.183)$$

Em adição, procedendo de modo semelhante com $k = 2$ e $k = 3$, obtem-se

$$\begin{aligned} T_{01}(x) &= -T_0^1(x) = \frac{1}{2\pi} \Re e \{ \phi_{01}(x) [\bar{\phi}_{0'0'}(x) + \bar{\phi}_{1'1'}(x)] \}, \\ T_{02}(x) &= -T_0^2(x) = \frac{1}{2\pi} \Im m \{ \bar{\phi}_{0'1'}(x) [\phi_{11}(x) - \phi_{00}(x)] \}, \\ T_{03}(x) &= -T_0^3(x) = \frac{1}{4\pi} \{ |\phi_{00}(x)|^2 - |\phi_{11}(x)|^2 \}. \end{aligned} \quad (4.184)$$

As expressões para $T_0^k(x)$ como dadas explicitamente acima podem ser vistas como as componentes no \mathbb{R}^3 do vetor de Poynting $P^k(t, \vec{x})$. Isto pode ser prontamente estabelecido substituindo (4.148) em (4.184)⁶. Assim

$$\vec{P}(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \vec{E}(t, \vec{x}) \times \vec{B}(t, \vec{x}). \quad (4.185)$$

Conseqüentemente, obtemos a seguinte integral para a potência eletromagnética atravessando $\partial\mathbb{V}$ em um $t \in \mathbb{T}$ [17]:

$$\Pi(t) = \int_{\partial\mathbb{V}} P^k(t, \vec{x}) dS_k = \int_{\mathbb{V}} \nabla_k p^k(t, \vec{x}) d^3x, \quad (4.186)$$

onde dS_k é um elemento de superfície bidimensional de $\partial\mathbb{V}$ em um \vec{x} .

⁶ver apêndice.

Para construirmos a estrutura covariante do momento angular, temos que fazer uso de algumas expressões encontradas em [8]

$$L_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu. \quad (4.187)$$

Com efeito, substituindo em (4.187) a expressão

$$p_\mu[\Sigma] \equiv \int_\Sigma T_{\mu\nu} d^3 x^\nu, \quad (4.188)$$

obtemos

$$L_{\mu\nu}[\Sigma] = \int_\Sigma x_\mu T_{\nu\lambda} d^3 x^\lambda - \int_\Sigma x_\nu T_{\mu\lambda} d^3 x^\lambda, \quad (4.189)$$

a qual pode ser reescrita como

$$L_{\mu\nu}[\Sigma] = 2 \int_\Sigma x_{[\mu} T_{\nu]\lambda} d^3 x^\lambda. \quad (4.190)$$

Aplicando (3.30) em ambos os lados da expressão acima

$$\sigma_{AA'}^\mu \sigma_{BB'}^\nu L_{\mu\nu}[\Sigma] = 2 \int_\Sigma \sigma_{AA'}^\mu \sigma_{BB'}^\nu x_{[\mu} T_{\nu]\lambda} d^3 x^\lambda, \quad (4.191)$$

e substituindo $d^3 x^\lambda = \sigma_{CC'}^\lambda d^3 x^{CC'}$ dentro de

$$\sigma_{AA'}^\mu \sigma_{BB'}^\nu L_{\mu\nu}[\Sigma] = 2 \int_\Sigma \sigma_{AA'}^\mu \sigma_{BB'}^\nu x_{[\mu} T_{\nu]\lambda} \sigma_{CC'}^\lambda d^3 x^{CC'}, \quad (4.192)$$

encontramos

$$L_{AA'BB'}[\Sigma] = 2 \int_\Sigma x_{[AA'} T_{BB']CC'} d^3 x^{CC'}, \quad (4.193)$$

onde os colchetes denotam antisimetriação sobre os pares de índices, tal como antes.

Sabendo que o tensor momento angular $L_{\mu\nu}$ é um bivetor, podemos escrever

$$L_{AA'BB'}[\Sigma] = \frac{1}{2} \left(L_{AA'BB'}[\Sigma] - L_{BB'AA'}[\Sigma] \right). \quad (4.194)$$

Então, somando e subtraindo $L_{ABB'A'}[\Sigma]$

$$L_{AA'BB'}[\Sigma] = \frac{1}{2} \left(L_{AA'BB'}[\Sigma] + L_{ABB'A'}[\Sigma] - L_{ABB'A'}[\Sigma] - L_{BB'AA'}[\Sigma] \right), \quad (4.195)$$

e rearranjando termos, vem

$$L_{AA'BB'}[\Sigma] = \frac{1}{2} \left(L_{AA'BB'}[\Sigma] - L_{ABB'A'}[\Sigma] \right) + \frac{1}{2} \left(L_{ABB'A'}[\Sigma] - L_{BB'AA'}[\Sigma] \right). \quad (4.196)$$

Podemos ver que o primeiro termo no lado direito de (4.198) é simétrico nos índices A, B e antissimétrico nos índices A', B' , enquanto que o segundo termo é simétrico nos índices A', B' e antissimétrico nos índices A, B . Usando a relação [2]

$$2\Psi_{[AB]} = \Psi_{AB} - \Psi_{BA} = \epsilon_{AB}\Psi_C^C, \quad (4.197)$$

obtemos

$$L_{AA'BB'}[\Sigma] = \alpha_{AB}\epsilon_{A'B'} + \bar{\alpha}_{A'B'}\epsilon_{AB}. \quad (4.198)$$

onde

$$\alpha_{AB} = \frac{1}{2}L_{ABM'}^{M'}, \quad \bar{\alpha}_{A'B'} = \frac{1}{2}L_{B'A'M}^M. \quad (4.199)$$

Então, podemos escrever a expressão (4.199) na forma integral, conforme dado abaixo

$$L_{AA'BB'}[\Sigma] = \int_{\Sigma} (\epsilon_{A'B'}\mu_{ABCC'}(x) + \epsilon_{AB}\bar{\mu}_{A'B'CC'}(x)) d^3x^{CC'}. \quad (4.200)$$

Podemos ainda obter a densidade de momento angular conjugada através de um procedimento semelhante ao que deu origem às expressões (4.24) e (4.25). Para isso, aplicaremos $\epsilon^{A'B'}$ na expressão (4.193), tal que

$$L_{AA'BB'}[\Sigma]\epsilon^{A'B'} = \left[\int_{\Sigma} x_{AA'}T_{BB'CC'}d^3x^{CC'} - \int_{\Sigma} x_{BB'}T_{AA'CC'}d^3x^{CC'} \right] \epsilon^{A'B'}. \quad (4.201)$$

Então, substituindo a expressão de Penrose (4.127) na expressão acima, vem

$$\begin{aligned} \epsilon^{A'B'}L_{AA'BB'}[\Sigma] &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\Sigma} x_{AA'}\phi_{BC}(x)\bar{\phi}_{B'C'}(x)\epsilon^{A'B'}d^3x^{CC'} \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Sigma} x_{BB'}\phi_{AC}(x)\bar{\phi}_{A'C'}(x)\epsilon^{A'B'}d^3x^{CC'} \right), \end{aligned} \quad (4.202)$$

a qual, após algumas manipulações, nos leva a

$$L_{AA'BB'}[\Sigma]\epsilon^{A'B'} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \left[x_{M'A}\phi_{BC}(x)\bar{\phi}_{C'}^{M'}(x) + x_{M'B}\phi_{AC}(x)\bar{\phi}_{C'}^{M'}(x) \right] d^3x^{CC'}. \quad (4.203)$$

Notando a simetria nos índices A e B , podemos reescrever a expressão acima

$$L_{AA'BB'}[\Sigma]\epsilon^{A'B'} = -\frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} x_{M'(A}\phi_{B)C}(x)\bar{\phi}_{C'}^{M'}(x)d^3x^{CC'}. \quad (4.204)$$

Agora, fazemos $\epsilon_{A'B'}$ atuar na expressão

$$L_{AA'BB'}[\Sigma]\epsilon^{A'B'} = \int_{\Sigma} \left[\epsilon_{A'B'}\mu_{ABCC'}(x)\epsilon^{A'B'} + \epsilon_{AB}\bar{\mu}_{A'B'CC'}(x)\epsilon^{A'B'} \right] d^3x^{CC'}, \quad (4.205)$$

tal que

$$L_{AA'BB'}[\Sigma]\epsilon^{A'B'} = - \int_{\Sigma} \left[\epsilon_{A'}^{A'} \mu_{ABCC'}(x) - \epsilon_{AB} \mu_{A'CC'}^{A'} \right] d^3 x^{CC'}. \quad (4.206)$$

Pelas condições de simetria $\mu_{A'CC'}^{A'} = 0$, e também devido a $\epsilon_{A'}^{A'} = 2$, encontramos

$$L_{AA'BB'}[\Sigma]\epsilon^{A'B'} = -2 \int_{\Sigma} \mu_{ABCC'}(x) d^3 x^{CC'}. \quad (4.207)$$

Por fim, igualando (4.26) e (4.207)

$$-2 \int_{\Sigma} \mu_{ABCC'}(x) d^3 x^{CC'} = -\frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} x_{M'(A} \phi_{B)C}(x) \bar{\phi}_{C'}^{M'}(x) d^3 x^{CC'}, \quad (4.208)$$

e aplicando $d^3 x^{CC'}$ em ambos os lados, finalmente obtemos

$$\mu_{ABCC'}(x) = \frac{1}{2\pi} x_{M'(A} \phi_{B)C}(x) \bar{\phi}_{C'}^{M'}(x) = \mu_{(AB)CC'}(x). \quad (4.209)$$

Adotando um procedimento semelhante, obtemos

$$\bar{\mu}_{A'B'CC'}(x) = \frac{1}{2\pi} x_{M(A'} \bar{\phi}_{B')C'}(x) \phi_C^M(x) = \bar{\mu}_{(A'B')CC'}(x). \quad (4.210)$$

As propriedades de simetria destas densidades μ podem ser consideradas como equivalentes às relações de traço ε -espinor. Assim, temos

$$\begin{aligned} \mu_{ACC'}^A &= \epsilon^{AB} \mu_{BACC'} \\ &= \epsilon^{00} \mu_{00CC'} + \epsilon^{01} \mu_{10CC'} + \epsilon^{10} \mu_{01CC'} + \epsilon^{11} \mu_{11CC'} \\ &= \mu_{10CC'} - \mu_{01CC'} = 0. \end{aligned} \quad (4.211)$$

De maneira semelhante, obtemos

$$\mu_{ACC'}^A(x) = 0 = \bar{\mu}_{A'CC'}^{A'}(x), \quad (4.212)$$

a qual realmente parece ser equivalente a propriedade de bivector

$$M_{AA'}^{AA'}[\Sigma] = 0. \quad (4.213)$$

Capítulo 5

Conclusões

As equações que descrevem fenômenos naturais devem ser independentes de sistemas de referência. A teoria eletromagnética clássica, na sua formulação tradicional (na forma vetorial), é dependente de um sistema de referência, daí a necessidade da formulação covariante da teoria eletromagnética clássica em termos do potencial A_μ e do campo $F_{\mu\nu}$. Esta formulação, em termos de tensores, é "livre" de sistemas de referência. O mesmo ocorre na formulação espinorial.

A representação espinorial do grupo de Lorentz, em termos de espinores de duas componentes, é mais fundamental no sentido que as representações vetoriais e tensoriais podem ser construídas pela combinação destes objetos. É aí que repousa a importância da representação da teoria eletromagnética em termos de espinores de duas componentes.

Um dos grandes triunfos da formulação espinorial da teoria eletromagnética é o fato de que funções de onda para fótons surgem naturalmente. A estética envolvida na representação espinorial das equações de campo, bem como o conforto computacional e a abrangência de tratamento são outros pontos relevantes do formalismo. Porém, continuamos com oito equações numéricas de Maxwell, lembrando que na formulação vetorial da teoria temos duas equações numéricas mais duas vetoriais, as quais totalizam as oito equações mencionadas.

Apêndice

Aqui, mostramos com mais detalhes alguns dos cálculos apresentados ao longo da dissertação.

Apêndice A1

Mostraremos aqui, que as duas primeiras equações (2.52) podem ser obtidas a partir da formulação covariante

Temos equação (2.70) escrita da maneira como segue

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 4\pi J_\nu. \quad (5.1)$$

Com $\mu = 0, 1, 2, 3$ obtemos

$$\partial^0 F_{0\nu} + \partial^1 F_{1\nu} + \partial^2 F_{2\nu} + \partial^3 F_{3\nu} = 4\pi J_\nu. \quad (5.2)$$

Para a primeira equação (2.52) tomamos $\nu = 0$

$$\partial^0 F_{00} + \partial^1 F_{10} + \partial^2 F_{20} + \partial^3 F_{30} = 4\pi J_0. \quad (5.3)$$

De acordo com (2.55) e com $J^\mu = (\rho, \vec{J})$ podemos escrever a equação acima como segue

$$\partial^1 E_1 + \partial^2 E_2 + \partial^3 E_3 = 4\pi\rho, \quad (5.4)$$

que pode ser escrito como

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho, \quad (5.5)$$

lembrando que $\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}$, então a equação acima fica

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho. \quad (5.6)$$

Agora, para a segunda equação (2.52) partimos de (5.2) começando com $\nu = 1$ obtemos

$$\partial^0 F_{01} + \partial^1 F_{11} + \partial^2 F_{21} + \partial^3 F_{31} = 4\pi J_1. \quad (5.7)$$

Um raciocínio semelhante ao que deu origem a equação (5.4) leva-nos a equação abaixo

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial z} = 4\pi J_x, \quad (5.8)$$

de maneira semelhante para $\nu = 2$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} = 4\pi J_y, \quad (5.9)$$

e $\nu = 3$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} - \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = 4\pi J_z. \quad (5.10)$$

Agora, somamos as equações (5.8), (5.9) e (5.10) e encontramos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(E_x + E_y + E_z) + \left(-\frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) + \\ & \left(-\frac{\partial B_y}{\partial x} + \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = 4\pi(J_x + J_y + J_z), \end{aligned} \quad (5.11)$$

que com o auxílio do rotacional

$$\vec{\nabla} \times \vec{G} = \left(\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y} \right) \hat{k}, \quad (5.12)$$

pode ser melhor organizada e escrita como dado abaixo

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 4\pi \vec{J}. \quad (5.13)$$

Apêndice A2

Prova da equação (4.32)

Temos a equação (4.31)

$$\partial_{[\mu} F_{\nu\gamma]} = \partial_{[\mu} \partial_{\nu} \Phi_{\gamma]} = \partial_{[[\mu} \partial_{\nu]} \Phi_{\gamma]} = 0, \quad (5.14)$$

abrindo as contas

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} F_{\nu\gamma} + \partial_{\nu} F_{\gamma\mu} + \partial_{\gamma} F_{\mu\nu} &= (\partial_{[\mu} \partial_{\nu} \Phi_{\gamma]} - \partial_{[\nu} \partial_{\mu} \Phi_{\gamma]}) + \\ & (\partial_{[\nu} \partial_{\gamma} \Phi_{\mu]} - \partial_{[\gamma} \partial_{\nu} \Phi_{\mu]}) + \\ & (\partial_{[\gamma} \partial_{\mu} \Phi_{\nu]} - \partial_{[\mu} \partial_{\gamma} \Phi_{\nu]}), \end{aligned} \quad (5.15)$$

usando a comutatividade dos ∂ 's obtemos e trabalhando com cada uma das partes do lado direito da equação (5.15)

$$\partial_{[[\mu\partial_\nu]\Phi_\gamma]} = \partial_{[\mu\partial_\nu]\Phi_\gamma} - \partial_{[\nu\partial_\mu]\Phi_\gamma}, \quad (5.16)$$

$$\partial_{[[\nu\partial_\gamma]\Phi_\mu]} = \partial_{[\nu\partial_\gamma]\Phi_\mu} - \partial_{[\gamma\partial_\nu]\Phi_\mu}, \quad (5.17)$$

$$\partial_{[[\gamma\partial_\mu]\Phi_\nu]} = \partial_{[\gamma\partial_\mu]\Phi_\nu} - \partial_{[\mu\partial_\gamma]\Phi_\nu}. \quad (5.18)$$

Agora, fazemos (5.16)+(5.17)+(5.18)

$$\begin{aligned} \partial_{[[\mu\partial_\nu]\Phi_\gamma]} + \partial_{[[\nu\partial_\gamma]\Phi_\mu]} + \partial_{[[\gamma\partial_\mu]\Phi_\nu]} &= \partial_\mu\partial_\nu\Phi_\gamma - \partial_\nu\partial_\mu\Phi_\gamma - \partial_\nu\partial_\gamma\Phi_\mu - \partial_\gamma\partial_\mu\Phi_\nu + \\ &\partial_\nu\partial_\gamma\Phi_\mu - \partial_\gamma\partial_\nu\Phi_\mu - \partial_\gamma\partial_\mu\Phi_\nu - \partial_\mu\partial_\nu\Phi_\gamma + \\ &\partial_\gamma\partial_\mu\Phi_\nu - \partial_\mu\partial_\gamma\Phi_\nu - \partial_\mu\partial_\nu\Phi_\gamma - \partial_\nu\partial_\gamma\Phi_\mu. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Então, de (5.15) e (5.19) chegamos a

$$\partial_\mu F_{\nu\gamma} + \partial_\nu F_{\gamma\mu} + \partial_\gamma F_{\mu\nu} = 0, \quad (5.20)$$

$$\partial_{[\mu} F_{\nu\gamma]} = 0, \quad (5.21)$$

onde usamos a comutatividade dos ∂ 's. Estas relações evidentemente equivalem a mesma coisa como declarado

$$\partial^{\mu*} F_{\mu\nu} = 0. \quad (5.22)$$

Apêndice A3

Prova da equação 4.55

De (4.49) junto com (4.45) obtemos

$$\delta S[L_M^{II}] = \delta \int_\tau (L_{free} + L_{int}) d^4x = 0. \quad (5.23)$$

Na equação acima, fazendo a substituição $L_{free} = L_{lh} + L_{rh}$ e lembrando que δ comuta com \int , obtemos

$$\int_\tau [\delta L_{lh} + \delta L_{rh} + \delta L_{int}] d^4x = 0. \quad (5.24)$$

Agora, de acordo com [21], um deslocamento virtual arbitrário $\delta \vec{r}_i$ pode ser conectado com o deslocamento virtual δq_i por $\delta \vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$ Para a nossa situação

$$\delta L_{lh} = \frac{\partial L_{lh}}{\partial \phi_{AB}} \delta \phi_{AB}. \quad (5.25)$$

Então, fazendo uso da expressão (5.25) na equação (5.24), obtemos

$$\int_{\tau} \left[\frac{\partial L_{lh}}{\partial \phi_{AB}(x)} \delta \phi_{AB}(x) + \frac{\partial L_{rh}}{\partial \bar{\phi}_{A'B'}(x)} \delta \bar{\phi}_{A'B'}(x) + \frac{\partial L_{int}}{\partial \Phi_{AA'}(x)} \delta \Phi_{AA'}(x) \right] d^4x = 0, \quad (5.26)$$

lembrando das expressões $\phi_{AB}(x) = \partial_{A'(A} \Phi_{B)}^{A'}(x)$ e $\bar{\phi}_{AB}(x) = \partial_{A'(A} \Phi_{B)}^A(x)$ e sabendo que δ comuta com ∂ , então, estas toma a forma sob atuação de δ

$$\delta \phi_{AB}(x) = \partial_{A'(A} \delta \Phi_{B)}^{A'}(x) \quad \text{e} \quad \delta \bar{\phi}_{A'B'}(x) = \partial_{A(A'} \delta \Phi_{B')}^A(x). \quad (5.27)$$

Finalmente, substituindo (5.27) em (5.26)

$$\int_{\tau} \left[\frac{\partial L_{lh}}{\partial \phi_{AB}(x)} \partial_{A'(A} \delta \Phi_{B)}^{A'}(x) + \frac{\partial L_{rh}}{\partial \bar{\phi}_{A'B'}(x)} \partial_{A(A'} \delta \Phi_{B')}^A(x) + \frac{\partial L_{int}}{\partial \Phi_{AA'}(x)} \delta \Phi_{AA'}(x) \right] d^4x = 0. \quad (5.28)$$

Apêndice A4

Prova da equação 4.73

Trabalhando, separadamente, com cada uma das partes da equação (4.69)

$$\begin{aligned} \partial_B^{A'} \frac{\partial L_{lh}}{\partial \phi_{AB}(x)} &= \frac{1}{8\pi} \partial_B^{A'} \frac{\partial}{\partial \phi_{AB}(x)} (\phi_{AB} \phi^{AB}) \\ \partial_B^{A'} \frac{\partial L_{lh}}{\partial \phi_{AB}(x)} &= \frac{1}{8\pi} \partial_B^{A'} \left[\left(\frac{\partial \phi_{AB}}{\partial \phi_{AB}(x)} \right) \phi^{AB} + \phi_{AB} \left(\frac{\partial \phi^{AB}}{\partial \phi_{AB}(x)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Sabendo que

$$\begin{aligned} \delta (\phi_{AB}(x) \phi^{AB}(x)) &= (\delta \phi_{AB}(x)) \phi^{AB}(x) + \phi_{AB}(x) (\delta \phi^{AB}(x)) \\ &= 2\phi^{AB}(x) \delta \phi_{AB}(x). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Então,

$$\partial_B^{A'} \frac{\partial L_{lh}}{\partial \phi_{AB}(x)} = \frac{1}{8\pi} \partial_B^{A'} 2 (\phi^{AB}(x)), \quad (5.31)$$

$$\partial_B^{A'} \frac{\partial L_{lh}}{\partial \phi_{AB}(x)} = \frac{1}{4\pi} \partial_B^{A'} \phi^{AB}(x). \quad (5.32)$$

Substituindo $\phi^{AB}(x) = \epsilon^{AC} \epsilon^{BD} \phi_{CD}(x)$ na equação acima

$$\partial_B^{A'} \frac{\partial L_{lh}}{\partial \phi_{AB}(x)} = \frac{1}{4\pi} \partial_B^{A'} (\epsilon^{AC} \epsilon^{BD} \phi_{CD}(x)), \quad (5.33)$$

$$\partial_B^{A'} \frac{\partial L_{lh}}{\partial \phi_{AB}(x)} = \frac{1}{4\pi} (-\epsilon^{DB}) \partial_B^{A'} \epsilon^{AC} \phi_{CD}(x), \quad (5.34)$$

$$\partial_B^{A'} \frac{\partial L_{lh}}{\partial \phi_{AB}(x)} = -\frac{1}{4\pi} \partial^{DA'} \phi_D^A(x). \quad (5.35)$$

Trocando D por B no lado direito da equação (5.49)

$$\partial_B^{A'} \frac{\partial L_{lh}}{\partial \phi_{AB}(x)} = -\frac{1}{4\pi} \partial^{BA'} \phi_B^A(x). \quad (5.36)$$

Um procedimento semelhante ao que deu origem a equação (5.36) pode ser empregado na segunda soma do lado esquerdo da equação (4.69) para obtermos

$$\partial_{B'}^A \frac{\partial L_{rh}}{\partial \bar{\phi}_{A'B'}(x)} = -\frac{1}{4\pi} \partial^{AB'} \bar{\phi}_{B'}^{A'}(x). \quad (5.37)$$

E, por último temos também

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{int}}{\partial \Phi_{AA'}(x)} &= \frac{\partial}{\partial \Phi_{AA'}(x)} \left(j^{AA'}(x) \Phi_{AA'}(x) \right), \\ \frac{\partial L_{int}}{\partial \Phi_{AA'}(x)} &= j^{AA'}(x). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Substituindo (5.36), (5.37) e (5.38) em (4.69) encontramos

$$-\frac{1}{4\pi} \partial^{BA'} \phi_B^A(x) - \frac{1}{4\pi} \partial^{AB'} \bar{\phi}_{B'}^{A'}(x) + j^{AA'}(x) = 0, \quad (5.39)$$

$$\partial^{BA'} \phi_B^A(x) + \partial^{AB'} \bar{\phi}_{B'}^{A'}(x) = 4\pi j^{AA'}(x), \quad (5.40)$$

que é a equação (4.73)

Com auxílio de (5.36), (5.37) e (5.38) podemos expressar (4.69) como

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \left[j^{AA'}(x) - \frac{1}{4\pi} \partial^{BA'} \phi_B^A(x) - \frac{1}{4\pi} \partial^{AB'} \bar{\phi}_{B'}^{A'}(x) \right] \delta \Phi_{AA'}(x) d^4x + \\ \int_{\partial\tau} \left[\frac{\partial L_{lh}}{\partial \phi_{AB}(x)} \delta \Phi_B^{A'}(x) + \frac{\partial L_{rh}}{\partial \bar{\phi}_{A'B'}(x)} \delta \Phi_{B'}^A(x) \right] d^3x_{AA'}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Mas, sabemos que

$$\frac{\partial L_{lh}}{\partial \phi_{AB}(x)} = \frac{\partial}{\partial \phi_{AB}(x)} \left(\frac{1}{8\pi} \phi_{AB}(x) \phi^{AB}(x) \right). \quad (5.42)$$

Conforme usado em (4.69), a expressão (5.42) fica

$$\frac{\partial L_{lh}}{\partial \phi_{AB}(x)} = \frac{1}{8\pi} 2\phi^{AB}(x) \frac{\partial \phi_{AB}(x)}{\partial \phi_{AB}(x)}, \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial L_{lh}}{\partial \phi_{AB}(x)} = \frac{1}{4\pi} \phi^{AB}(x). \quad (5.44)$$

Um procedimento semelhante ao que foi usado para obter (5.44) pode ser empregado para encontrar

$$\frac{\partial L_{rh}}{\partial \bar{\phi}^{A'B'}(x)} = \frac{1}{4\pi} \bar{\phi}^{A'B'}(x). \quad (5.45)$$

Substituindo (5.44) e (5.45) em (5.41) produz

$$\begin{aligned} & \int_{\tau} \left[j^{AA'}(x) - \frac{1}{4\pi} \partial^{BA'} \phi_B^A(x) - \frac{1}{4\pi} \partial^{AB'} \bar{\phi}_{B'}^{A'}(x) \right] \delta \Phi_{AA'}(x) d^4x + \\ & \int_{\partial\tau} \left[\frac{1}{4\pi} \phi^{AB}(x) \delta \Phi_B^{A'}(x) + \frac{1}{4\pi} \bar{\phi}^{A'B'}(x) \delta \Phi_{B'}^A(x) \right] d^3x_{AA'} = 0. \end{aligned} \quad (5.46)$$

que, multiplicada por 4π

$$\begin{aligned} & \int_{\tau} \left[4\pi j^{AA'}(x) - \partial^{BA'} \phi_B^A(x) - \partial^{AB'} \bar{\phi}_{B'}^{A'}(x) \right] \delta \Phi_{AA'}(x) d^4x + \\ & \int_{\partial\tau} \left[\phi^{AB}(x) \delta \Phi_B^{A'}(x) + \bar{\phi}^{A'B'}(x) \delta \Phi_{B'}^A(x) \right] d^3x_{AA'} = 0, \end{aligned} \quad (5.47)$$

que evidentemente produz (4.75). Em virtude de (4.24), a equação (4.75) toma a forma

$$\partial_B^{A'} \frac{\partial L_{lh}}{\partial [\partial_{B'(A} \Phi_{B)}^{B'}(x)]} + \partial_{B'}^A \frac{\partial L_{rh}}{\partial [\partial_{B(A'} \Phi_{B')}^B(x)]} + \frac{\partial L_{int}}{\partial \Phi_{AA'}(x)} = 0. \quad (5.48)$$

Agora, um procedimento similar ao que de origem a (4.71) produz as equações de movimento invariante da primeira "metade"

$$\partial_B^{A'} \frac{\partial L_{lh}}{\partial \phi_{AB}(x)} - \partial_{B'}^A \frac{\partial L_{rh}}{\partial \bar{\phi}^{A'B'}(x)} = 0, \quad (5.49)$$

que efetivamente reestabelece a identidade de Bianchi (4.43).

Apêndice A5

Integral de Carga

Trabalharemos separadamente com cada uma das quatro integrais (4.79)

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} \partial_{\mu} F^{\mu 0}(x) \frac{1}{3!} e_{0123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \int_{\Sigma} \partial_0 F^{00}(x) \frac{1}{3!} e_{0123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \\ & \int_{\Sigma} \partial_1 F^{10}(x) \frac{1}{3!} e_{0123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \\ & \int_{\Sigma} \partial_2 F^{20}(x) \frac{1}{3!} e_{0123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \int_{\Sigma} \partial_3 F^{30}(x) \frac{1}{3!} e_{0123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \end{aligned} \quad (5.50)$$

sabendo que $F^{00} = F^{11} = F^{22} = F^{33} = 0$ e organizando melhor obtemos

$$\int_{\Sigma} \partial_{\mu} F^{\mu 0}(x) \frac{1}{3!} e_{0123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \int_{\Sigma} \partial_1 F^{10}(x) \frac{1}{3!} e_{0123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - \int_{\Sigma} \partial_2 F^{20}(x) \frac{1}{3!} e_{0123} dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^3 + \int_{\Sigma} \partial_3 F^{30}(x) \frac{1}{3!} e_{0123} dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2. \quad (5.51)$$

Integrando

$$\int_{\Sigma} \partial_{\mu} F^{\mu 0}(x) \frac{1}{3!} e_{0123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \int_{\partial\Sigma} F^{10}(x) \frac{1}{3!} e_{0123} dx^2 \wedge dx^3 - \int_{\partial\Sigma} F^{20}(x) \frac{1}{3!} e_{0123} dx^1 \wedge dx^3 + \int_{\partial\Sigma} F^{30}(x) \frac{1}{3!} e_{0123} dx^1 \wedge dx^2, \quad (5.52)$$

e de maneira semelhante para cada uma das outras partes. Então podemos escrever a equação abaixo

$$Q[\Sigma] = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{\partial\Sigma} F^{10}(x) \frac{1}{3!} e_{0123} dx^2 \wedge dx^3 - \int_{\partial\Sigma} F^{20}(x) \frac{1}{3!} e_{0123} dx^1 \wedge dx^3 + \int_{\partial\Sigma} F^{30}(x) \frac{1}{3!} e_{0123} dx^1 \wedge dx^2 - \int_{\partial\Sigma} F^{01}(x) \frac{1}{3!} e_{1230} dx^2 \wedge dx^3 - \int_{\partial\Sigma} F^{21}(x) \frac{1}{3!} e_{1230} dx^3 \wedge dx^0 + \int_{\partial\Sigma} F^{31}(x) \frac{1}{3!} e_{1230} dx^2 \wedge dx^0 - \int_{\partial\Sigma} F^{02}(x) \frac{1}{3!} e_{2301} dx^3 \wedge dx^1 + \int_{\partial\Sigma} F^{12}(x) \frac{1}{3!} e_{2301} dx^3 \wedge dx^0 + \int_{\partial\Sigma} F^{32}(x) \frac{1}{3!} e_{2301} dx^0 \wedge dx^1 - \int_{\partial\Sigma} F^{03}(x) \frac{1}{3!} e_{3012} dx^1 \wedge dx^2 + \int_{\partial\Sigma} F^{13}(x) \frac{1}{3!} e_{3012} dx^0 \wedge dx^2 - \int_{\partial\Sigma} F^{23}(x) \frac{1}{3!} e_{3012} dx^0 \wedge dx^1 \right\}. \quad (5.53)$$

Apêndice A6

Mostraremos agora a equação (4.91)

Partindo da equação abaixo

$$2\partial_{C'}^A \phi_{AB}(x) = \square\Phi_{BC'}(x) - \partial_{C'B}\Lambda(x), \quad (5.54)$$

usando $\partial_{C'}^A = \epsilon_{C'D'} \partial^{AD'} = \epsilon_{C'D'} \partial^{D'A} = -\partial^{AD'} \epsilon_{D'C'}$ e também $\phi_{AB}(x) = \epsilon_{BD} \phi_A^D(x) = -\phi_A^D \epsilon_{DB}$ na eq acima

$$2[-\partial^{AD'} \epsilon_{D'C'}] [-\phi_A^D(x) \epsilon_{DB}] = \square\Phi_{BC'}(x) - \partial_{C'B}\Lambda(x), \quad (5.55)$$

$$2\partial^{AD'}\phi_A^D(x)\epsilon_{C'D'}\epsilon_{BD} = \square\Phi_{BC'}(x) - \partial_{C'B}\Lambda(x), \quad (5.56)$$

chamando a equação (4.75)

$$\partial^{AD'}\phi_A^D(x) = 2\pi j^{DD'}(x). \quad (5.57)$$

Substituindo (5.57) em (5.56)

$$2\left[2\pi j^{DD'}(x)\right]\epsilon_{C'D'}\epsilon_{BD} = \square\Phi_{BC'}(x) - \partial_{C'B}\Lambda(x), \quad (5.58)$$

$$4\pi j^{DD'}(x)\epsilon_{C'D'}\epsilon_{BD} = \square\Phi_{BC'}(x) - \partial_{C'B}\Lambda(x), \quad (5.59)$$

$$4\pi j_{BC'}(x) = \square\Phi_{BC'}(x) - \partial_{C'B}\Lambda(x). \quad (5.60)$$

Fazendo a substituição indicial: B por A e C' por A' na equação (5.60)

$$4\pi j_{AA'}(x) = \square\Phi_{AA'}(x) - \partial_{AA'}\Lambda(x), \quad (5.61)$$

$$\square\Phi_{AA'}(x) = 4\pi j_{AA'}(x) + \partial_{AA'}\Lambda(x). \quad (5.62)$$

Apêndice A7

Prova da equação (4.185)

Na primeira das equações (4.184), substituímos (4.146), com isso obtemos

$$T_{01}(x) = \frac{1}{8\pi}i(C_2(t, \vec{x})\bar{C}_3(t, \vec{x}) - C_3(t, \vec{x})\bar{C}_2(t, \vec{x})), \quad (5.63)$$

e, através de um procedimento semelhante encontramos,

$$T_{02}(x) = \frac{1}{8\pi}i(\bar{C}_3(t, \vec{x})C_1(t, \vec{x}) - C_3(t, \vec{x})\bar{C}_1(t, \vec{x})), \quad (5.64)$$

$$T_{03}(x) = \frac{1}{8\pi}i(C_1(t, \vec{x})\bar{C}_2(t, \vec{x}) - C_2(t, \vec{x})\bar{C}_1(t, \vec{x})). \quad (5.65)$$

Agora fazendo uso de () nas equações (5.63), (5.64) e (5.65) fornece

$$T_{01}(x) = \frac{1}{4\pi}[E_z B_z - E_y B_x], \quad (5.66)$$

$$T_{02}(x) = \frac{1}{4\pi}[E_z B_x - E_x B_z], \quad (5.67)$$

$$T_{03}(x) = \frac{1}{4\pi}[E_y B_x - E_x B_y]. \quad (5.68)$$

As equações acima podem ser identificadas como componentes do produto vetorial de $\vec{E}(t, \vec{x})$ e $\vec{B}(t, \vec{x})$, de modo que obtemos a equação que buscavamos.

Referências Bibliográficas

- [1] da Rocha Jr; R, Sobre os espinores e a estrutura do espaço-tempo, (Universidade Estadual de Campinas).
- [2] Penrose; R., Rindler; W., Spinors and Space-Time. vol 1, (Cambridge University Press, Cambridge, 1984).
- [3] Landau; L., Lifchitz; E., The Classical Theory of Fields, (Butterworth Heine-
mann, Oxford, 2003).
- [4] Pauli; W., Relativity Theory, (Dover Publication Inc, New York, 1981).
- [5] Carroll; S. M., Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity,
(Addison Wesley, 2003).
- [6] Weinberg; S., Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of Gen-
eral Theory of Relativity, (John Wiley & Sons, Inc, New York)
- [7] Synge; J. L., Schild; A., Tensor Calculus, (Dover Publications Inc, New York)
- [8] Barut; A. O., Electrodynamics and Classical Theory of Fields & Particles,
(Dover Publications Inc, New York, 1980).
- [9] Corson; E. M, Introduction to Tensors, Spinors, and Relativistic Wave-
Equations, (Blackie & Son Limited, London, 1954).
- [10] Cardoso; J. G., Dissertação de Mestrado, (Universidade de Brasília, Brasília,
1979).
- [11] Gomes; M. O. C., Teoria Quântica do Campo, (Editora da Universidade de São
Paulo, São Paulo, 2002).

- [12] O'Donnell; P., Introduction to 2-Spinors in General Relativity, (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2003).
- [13] Rindler; W., Relativity Special, General, and Cosmological, 2 ed., (Oxford University Press Inc, New York, 2006).
- [14] Jackson; J., Classical Eletrodynamics, 5a Ed., (Addison-Wesley 1975).
- [15] Bade; W. L., Jehle; H., An Introduction to Spinors, Reviews of Modern Physics, vol 25, No 3 (1953) (714-728).
- [16] Witten; L., Invariants of General Relativity and the Classification of Spaces, Physical Review, vol 113, No 1 (1959) (357-362).
- [17] Cardoso; J. G., Two-Component Spinor Formulation of the Maxwell Theory, Acta Polonica B, vol 23 No 9 (1992).
- [18] Flemming; D. M.,Gonçalves; M. B., Cálculo A, (Editora da Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 5 ed, 1992).
- [19] Thankappan; V. K., Quantum Mechanics, (New Age International, 2 ed, 1993).
- [20] Ryder; L. H., Quantum Field Theory, (Cambridge University Press, Cambridge, 2 ed, 1999).
- [21] Goldstein; H., Classical Mechanics, 2 ed., (Addison-Wesley, 1981).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)