Tese apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências no Programa de Engenharia Eletrônica e Computação, Área de Sistemas e Controle

Cleiton Diniz Pereira da Silva e Silva

CONTROLE ÓTIMO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ESTOCÁSTICAS LINEARES EXCITADAS POR MARTINGALES QUADRADO INTEGRÁVEIS

Tese aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:

Prof. Takashi Yoneyama
Orientador

Prof. Celso Massaki Hirata
Pró-Reitor de Pós-Graduação e Pesquisa

Campo Montenegro
São José dos Campos, SP - Brasil
2008

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Divisão de Informação e Documentação

Silva, Cleiton Diniz Pereira da Silva e

Controle Ótimo de Equações Diferenciais Estocásticas Lineares Excitadas por Martingales Quadrado Integráveis / Cleiton Diniz Pereira da Silva e Silva.

São José dos Campos, 2008.

157 f.

Tese de Doutorado – Curso de Engenharia Eletrônica e Computação. Área de Sistemas e Controle – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2008. Orientador: Prof. Takashi Yoneyama. .

1. Controle Ótimo Estocástico. 2. Equações de Riccati. 3. Controle Ótimo Sensível ao Risco. 4. Equação Diferencial Estocástica. 5. Cálculo Estocástico. I. Comando-Geral de Tecnologia Aeroespacial. Divisão de Engenharia Eletrônica. II. Título.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

SILVA, Cleiton Diniz Pereira da Silva e. **Controle Ótimo de Equações Diferenciais Estocásticas Lineares Excitadas por Martingales Quadrado Integráveis**. 2008. 157f. Tese de Doutorado em Sistemas e Controle – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

Cleiton Diniz Pereira da Silva e Silva

Rua Heitor de Andrade, 1321 Apt. 22-B

CEP 12.241-000 – São José dos Campos–SP

CONTROLE ÓTIMO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ESTOCÁSTICAS LINEARES EXCITADAS POR MARTINGALES QUADRADO INTEGRÁVEIS

Cleiton Diniz Pereira da Silva e Silva

Composição da Banca Examinadora:

Prof.	Roberto Kawakami Harrop Galvão	Presidente	-	ITA
Prof.	Takashi Yoneyama	Orientador	-	ITA
Prof.	Marcelo Dutra Fragoso	Membro Externo	-	LNCC
Prof.	Atair Rios Neto	Membro Externo	-	INPE
Prof.	Elder Moreira Hemerly	Membro Interno	-	ITA

ITA

À Aline Farkuh Diniz Pereira, pelo seu amor, companheirismo, paciência e abnegação.

Agradecimentos

À minha esposa Aline Farkuh Diniz Pereira, por seu amor, compreensão e incentivo que me motivaram a prosseguir, mesmo nos momentos mais difíceis. Lindinha, muito obrigado por ter abdicado de diversos momentos de lazer ao meu lado e ter adiado a realização de alguns dos seus sonhos para que eu realizasse um dos meus.

Aos meus pais Wilton Pereira da Silva e Cleide Maria Diniz Pereira da Silva e Silva pelo seu amor incondicional e incentivo. Eles são contínua fonte de inspiração, não apenas para minha vida profissional. Devo tudo o que sou hoje a eles. Para eles nunca existiu nenhuma barreira para que eu tivesse a melhor educação possível.

Aos meus avós paternos Maria Elisena do Nascimento (*in memorian*) e Inácio Pereira da Silva (*in memorian*) e maternos Maria José Diniz Silva e José Florêncio da Silva pelo incentivo.

Aos meus irmãos Diogo e Uilma Diniz Pereira da Silva e Silva pela sua amizade, apoio e incentivo. Em especial, ao meu irmão Diogo pelas diversas conversas estimulantes sobre matemática, nas quais sempre aprendi bastante. Ainda, pelo envio de vários artigos e livros os quais foram muito importantes para a minha pesquisa.

Aos meus sogros Rogério Farkuh e Tereza Cristina Seixas Soares e cunhados Laura Farkuh e Alberto Farkuh Neto por me receberem com verdadeiro filho e irmão, respectivamente.

Aos meus grandes amigos José Eduardo Carta e Celina Faig Lima Carta pelo apoio e incentivo em todos os momentos e, principalmente, pelas diversas reuniões aos sábados nas quais sempre aprendi bastante.

Ao meu amigo Cleverson Maranhão Porto Marinho pelas inúmeras discussões estimulantes sobre ciência bem como pela contínua motivação e inspiração.

Ao professor Takashi Yoneyama, pelo seu incentivo, apoio, compreensão e amizade. Sua dedicação e amor pelo trabalho bem como sua disponibilidade para compartilhar seu enorme conhecimento são contínua fonte de inspiração. Foi uma honra poder contar com sua orientação desde a Iniciação Científica.

A todos os professores do Departamento de Matemática e da Divisão de Eletrônica do ITA , em especial aos professores Sandro da Silva Fernandes, Raymundo Luiz de Alencar, Tânia Nunes Rabello, Célia Mônica Guimarães, Elder Moreira Hemerly, Roberto Kawakami Harrop Galvão, Karl Heinz Kienitz e Marcelo Gomes da Silva Bruno pelos valiosos ensinamentos durantes estes anos de doutorado.

Aos membros da banca examinadora, pela disponibilização de tempo para a avaliação deste trabalho.

A todos os funcionários da Biblioteca Central do ITA, em especial aos bibliotecários Aurélio Marcondes de Carvalho e Maria Cristina Lacerda de Lacerda, pela inestimável ajuda na obtenção de referências para este trabalho.

À EMBRAER, em especial a todos do grupo de Simulação e Controle, pelo excelente ambiente de trabalho.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo pelo apoio financeiro (processo 03/12693-9) no período de Junho/2004–Novembro/ 2006.

“Qu’il est beaucoup plus facile d’avoir quelque vague notion sur tout sujet donné, quelqu’il soit, que d’arriver à la vraie vérité au sujet d’une seule question, peu importe sa simplicité.”

— Rene Descartes (1596-1650)

Resumo

Este trabalho trata do controle ótimo de sistemas descritos por Equações Diferenciais Estocásticas (EDE). Os resultados apresentados podem ser divididos em três partes. A primeira delas aborda um problema de controle ótimo não-linear sendo investigada a possibilidade de considerar como controles admissíveis processos adaptados à σ-álgebra gerada pelo estado $\mathscr{X}_t^u$. As hipóteses de um resultado disponível na literatura são relaxadas e estende-se à classe de problemas para os quais existe um subconjunto de processos de controle $\mathcal{U}_{cl}$, tal que $\forall u \in \mathcal{U}_{cl}$, $\mathscr{X}_t^u$ é igual à σ-álgebra gerada pelo processo de Wiener $\mathscr{W}_t$. Como conseqüência, mostra-se que, dado um $\epsilon > 0$, pode-se construir um controle em malha fechada que é ϵ-ótimo na classe de controles limitados no L^2 e adaptados à $\mathscr{W}_t$. Na segunda parte, estuda-se o problema de otimização Linear Quadrático (LQ) de sistemas excitados aditivamente por martingales quadrado integráveis tanto contínuos quanto descontínuos. Dois casos principais são considerados: sistema sem saltos e com saltos Markovianos nos parâmetros. No primeiro caso, além do distúrbio aditivo considera-se casos de sistemas com distúrbios multiplicativos tanto de Wiener quanto de Poisson. Para os problemas com observações completas o controle ótimo é determinado explicitamente, dependendo da solução de uma equação de Riccati, e para problemas com observações parciais os resultados obtidos são interpretados como uma condição necessária para validade do princípio de equivalência à certeza. A principal contribuição nesta parte do trabalho é mostrar que o caso de sistemas excitados por martingale quadrado integráveis pode ser tratado de maneira similar ao caso clássico sendo apresentadas soluções explícitas. Na terceira parte, é abordado o problema de controle Linear Exponencial Quadrático Gaussiano (LEQG) de sistemas lineares excitados pelo processo de Wiener restrigindo-se os controles admissíveis a processos constantes por partes com observações restritas a apenas certos instantes de tempo fixados *a priori*. São analisados casos com observações sem ruído e observações ruidosas sendo mostrado que ambos os problemas podem ser estudados por métodos diretos.

Abstract

This work deals with the optimal control of systems described by Stochastic Differential Equations. The results presented here can be separated in three parts. In the first one, it is studied, in a nonlinear stochastic optimal control, the viability of considering as the set of admissible controls processes which are adapted to the $\sigma-$algebra generated by the state process $\mathscr{X}_t^u$. The hypothesis of a result available in the literature, which assures the existence of subset $\mathcal{U}_{cl}$, of admissible controls such that $\forall u \in \mathcal{U}_{cl}$ $\mathscr{X}_t^u$ equals the σ-algebra generated by the Wiener process $\mathscr{W}_t$ are relaxed. As a main consequence, it is shown that given an $\epsilon > 0$, it is possible to pick a closed-loop control which is ϵ-optimal in the class of control process limited in the L^2 sense and adapted to $\mathscr{W}_t$. In the second part, the Linear Quadratic stochastic optimal control of systems driven by continuous and discontinuous square integrable martingales is studied. Two main cases are considered: systems without jumps and systems with Markovian jumps in its parameters. In the case of systems without jumps it is considered not only systems with additive disturbances but also systems with Wiener or Poisson multiplicative disturbances. With the assumption of complete observations the optimal control is determined, depending on the solution of a Riccati equation, and in the case of partial observations the results are shown to be equivalent to a necessary condition to a problem satisfy the certainty equivalence principle. The main contribution in this part is to show that systems with general square integrable martingales disturbances can be tackled similarly to the case with Wiener disturbance. In the last part, it is dealt with the Linear Exponential Quadratic Gaussian problem restricting the class of admissible controls to piecewise constant process and assuming that the observations of the state process are available only at certain, fixed *a priori*, instants of time. It is considered the case with noiseless and noisy observations. The main contribution in this part is to show that both problems can be solved using direct methods.

Lista de Abreviaturas e Siglas

EDE	Equação Diferencial Estocástica
LEQG	Linear Exponencial Quadrático Gaussiano
LQ	Linear Quadrático
LQG	Linear Quadrático Gaussiano

Lista de Símbolos

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^+$	Conjunto dos números reais não-negativos
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\alpha \sim \mathcal{N}(m, P)$	A variável aleatória α tem distribuição normal com média m e variância P
$M \geq 0$ $(M > 0)$	A matriz $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ é semidefinida positiva (definida positiva), ou seja, $x^\top Mx \geq 0$ $(x^\top Mx > 0)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$
$\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$	Conjunto das matrizes reais de dimensão $n \times m$
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	Conjunto das matrizes reais quadradas de ordem n
$M^\top$	Transposta da matriz M
$\mathscr{M}_2$	Conjunto dos martingales quadrado integráveis M com $M_0 = 0$
$\mathscr{M}_2^c$	Conjunto dos $M \in \mathscr{M}_2$ com realizações contínuas
$\mathcal{S}^n(\mathbb{R})$	Conjunto das matrizes reais simétricas de ordem n
$\mathcal{S}^{n0}(\mathbb{R})$	Conjunto das matrizes reais simétricas semidefinidas positivas de ordem n
$\mathcal{S}^{n+}(\mathbb{R})$	Conjunto das matrizes simétricas definidas positivas de ordem n
$\mathcal{X}_A$	Função indicadora do conjunto A

Sumário

1 Introdução

“Take time to consider. The smallest point may be the most essential."

–Sherlock Holmes

The Adventure of the Red Circle

Sir Arthur Conan Doyle

A teoria de controle estocástico concerne o estudo de sistemas os quais exibem fenômenos aleatórios, geralmente induzidos por distúrbios relacionados a fatores não inteiramente conhecidos ou desconsiderados no modelo (YONEYAMA, 1983). Por exemplo, uma aeronave em vôo está continuamente sujeita a variações atmosféricas as quais são, em geral, modeladas por processos estocásticos (BEAL, 1993). Ainda, no estudo do movimento de um satélite na atmosfera superior deve-se levar em consideração as rápidas variações do campo magnético terrestre e densidade atmosférica as quais são convenientemente modeladas por processos estocásticos (SARGIROW, 1970 apud ARNOLD, 1974, p.199-201) e (BISWAS, 1998 apud DAMM, 2002, p. 45-47). Outros exemplos de sistemas modelados por processos estocásticos e de interesse no setor aeroespacial podem ser encontrados, por exemplo, em (FARIAS et al., 2000; YONEYAMA et al., 2001; STOICA; YAESH, 2002). Aplicações em finanças são discutidas, por exemplo, em (CAJUEIRO, 2002) e suas referências. Uma discussão sobre o modelamento de sistemas descritos por equações diferenciais estocásticas pode ser encontrada, por exemplo, em (JACOB et al., 2006; JACOB, 2006).

Neste trabalho, em particular, estudam-se alguns aspectos particulares da teoria de controle ótimo de sistemas descritos por equações diferencias estocásticas (FLEMING; RISHEL, 1975; BORKAR, 1988; FLEMING; SONER, 1993; YONG; ZHOU, 1999; BORKAR, 2005; PHAM, 2005; ÅSTRÖM, 2006). Os resultados obtidos podem ser divididos em três partes.

Na primeira parte, considera-se um sistema descrito por uma EDE não-linear excitada por um processo de Wiener e discute-se a otimalidade de controles em malha fechada. Devido à influência do processo de controle no estado do sistema não se pode considerar, pelo menos *a priori*, como controles admissíveis processos adaptados à $\sigma-$álgebra gerada pelo estado $\mathscr{X}_t^u$. As hipóteses de um resultado disponível na literatura (BENSOUSSAN, 1983) são relaxadas e estende-se à classe de problemas para os quais existe um subconjunto de processos de controle $\mathcal{U}_{cl}$, tal que $\forall u \in \mathcal{U}_{cl}$, $\mathscr{X}_t^u$ é igual à σ-álgebra gerada pelo processo de Wiener $\mathscr{W}_t$. Como conseqüência, mostra-se que, dado um $\epsilon > 0$, pode-se construir um controle em malha fechada que é ϵ-ótimo na classe de controles limitados no L^2 e adaptados à $\mathscr{W}_t$.

Na segunda parte, é estudado o problema de otimização linear quadrático (LQ) de sistemas lineares excitados por martingales quadrado integráveis.

Mais recentemente, iniciando, aparentemente, com o trabalho de Chen et al. (1998), a classe de problemas estocásticos LQ voltou a receber grande atenção (CHEN; ZHOU, 2000; RAMI et al., 2000; RAMI; ZHOU, 2000; RAMI et al., 2001; CHEN; YONG, 2001; RAMI et al., 2001; YAO et al., 2001; TANG, 2003; HU; ZHOU, 2003; CHEN; ZHOU, 2004; HU; ZHOU, 2005a; HU; ZHOU, 2005b). Em particular, Hu e Zhou (2005b) estudaram o problema de controle LQ de EDE lineares excitadas por um movimento Browniano. De certa forma inspirado neste trabalho, onde foi considerado o problema LQ assumindo distúrbios diferentes do processo de Wiener, nesta tese considera-se o estudo do problema de controle estocástico de sistemas descritos por EDE excitadas por martingales quadrado integráveis dentre os quais estão incluídos, por exemplo, o processo de Wiener e o processo de Poisson compensado. São considerados tanto sistemas com saltos Markovianos nos parâmetros como sistemas sem saltos. Ao invés de abordar o problema usando o princípio da otimalidade de Bellman ou o princípio do máximo de Pontryagin são empregados resultados da teoria de cálculo estocástico com relação a martingales quadrado integráveis e argumentos de "completar os quadrados" para fatorar a função custo, dependendo da solução de uma equação Riccati, de maneira conveniente para o estudo do problema de controle ótimo.

Finalmente, na terceira parte será abordado o problema de controle Linear Exponencial Quadrático Gaussiano (LEQG). Esta classe de problemas tem recebido grande atenção nos últimos anos (RUNOLFSSON, 1994a; RUNOLFSSON, 1994b; CHARALAMBOUS, 1997; CHARALAMBOUS; ELLIOTT, 1997; CHARALAMBOUS; ELLIOTT, 1998; YONEYAMA, 2001; LIM; ZHOU, 2005). Um dos motivos para este interesse deve-se à conexão de problemas desta classe com certos jogos diferenciais e problemas de controle H_∞ (GLOVER; DOYLE, 1988; GLOVER, 1989; JAMES, 1992). Além disto, problemas desta classe têm se mostrado bastante interessantes em diversas aplicações como, por exemlo, em economia (HOWARD; MATHESON, 1972), no guiamento de mísseis (SPEYER, 1976; LIN; LEE, 1995; LIAW; CHEN, 2004) e no pouso de uma aeronave (LEFEBVRE, 1998). Uma excelente discussão sobre propriedades interessantes de funcionais custo do tipo exponencial de uma integral pode ser encontrada por exemplo em (KUMAR; SCHUPPEN, 1981). No presente trabalho, dois casos particulares do problema LEQG nos quais a classe de controles admissíveis é restringida a processos constantes por partes são estudados usando argumentos análogos aos empregados por (HALYO; CAGLAYAN, 1976; JOHNSON, 1991) no estudo de problema LQG com controles também restritos a processos constantes por partes.

1.1 Contribuições do trabalho

Dentre os resultados apresentados merecem destaque:

- Discussão sobre a possibilidade de se considerar controles admissíveis processos adaptados à $\sigma-$álgebra gerada pelo estado e a extensão de um resultado da literatura envolvendo esta questão;

- Estudo do problema de otimização LQ para sistemas descritos por equações diferenciais estocásticas lineares excitadas por martingales quadrado integráveis tanto contínuos quanto descontínuos. Mostra-se que os problemas considerados podem ser estudados empregando-se resultados da teoria de cálculo estocástico com relação a martingales quadrado integráveis para se fatorar o funcional custo de maneira conveniente. Considera-se tanto o caso com observações completas quanto parciais.

- Parte dos resultados do item anterior são estendidos para o problema de otimização LQ de sistemas descritos por equações diferenciais estocásticas com saltos Markovianos nos parâmetros. Analogamente ao caso sem saltos, mostra-se que os funcionais custo podem ser fatorados de maneira conveniente. Considera-se tanto o caso com observações completas quanto parciais.

- Estudo do problema LEQG admitindo controles admissíveis restritos à classe de processos constantes por partes e assumindo que o controlador recebe informação apenas em certos instantes de tempo fixados *a priori*. Mostra-se que dois problemas particulares desta classe podem, sob certas condições, ser reduzidos a problemas discretos equivalentes sem restrições os quais admitem uma representação fechada para a solução.

Os resultados apresentados nesta tese serão apresentados também em: (SILVA; YONEYAMA, 2008c; SILVA; YONEYAMA, 2008a; SILVA; YONEYAMA, 2008b; SILVA; YONEYAMA, 2008d)

1.2 Organização do trabalho

No Capítulo 2 é apresentado um pequeno resumo dos resultados da teoria de processos estocásticos de importância para o entendimento dos resultados apresentados neste trabalho.

No Capítulo 3 são apresentados os resultados referentes à otimalidade de processos de controle adaptados à $\sigma-$álgebra gerada pelo estado.

Nos Capítulos 4 e 5 apresentam-se, respectivamente, os resultados referentes aos problemas de otimização LQ de sistemas descritos por equações diferenciais estocásticas lineares sem saltos e com saltos Markovianos excitadas por Martingales quadrado integráveis.

O Capítulo 6 apresenta os resultados referentes aos dois problemas LEQG estudados.

Por fim, no Capítulo 7 serão feitos alguns comentários finais e dadas algumas sugestões para trabalhos futuros.

Adicionalmente, no Apêndice A discute-se os conceitos de separação e equivalência à certeza na teoria de controle ótimo de sistemas descritos por EDE.

2 Processos estocásticos e cálculo estocástico

"I hear and I forget. I see and I remember. I do and I understand."

–Confucius

Neste capítulo, apresentam-se as definições e os resultados clássicos que serão utilizados nos capítulos subseqüentes. Ainda, a notação empregada neste trabalho será estabelecida. É importante ressaltar que não serão apresentadas as definições mais gerais nem mesmo as versões mais fortes dos resultados disponíveis na literatura, mas apenas aquelas no nível adequado para o entendimento dos resultados apresentados nos demais capítulos. Maiores detalhes sobre resultados em teoria da medida podem ser obtidos, por exemplo, em (DOOB, 1994; BARTLE, 1995; FERNANDEZ, 2002; VESTRUP, 2003). Detalhes sobre a teoria de probabilidade e processos estocásticos podem ser vistos, por exemplo, em (LIPTSER; SHIRYAYEV, 1977; ELLIOTT, 1982; CHUNG; WILLIAMS, 1990; KARATZAS; SHREVE, 1991; SHIRYAEV, 1995; GIKHMAN; SKOROKHOD, 1996; DUDLEY, 2002; KALLENBERG, 2002; KRYLOV, 2002; BRZEŹNIAK; ZASTAWNIAK, 2003; CAPIŃSKI; KOPP, 2003; AGGOUN; ELLIOTT, 2004) e sobre a teoria de EDE podem ser obtidos, por exemplo, em (SCHUSS, 1980; IKEDA; WATANABE, 1981; SOBCZYK, 1991; KUNITA, 1997; ØKSENDAL, 2000; PROTTER, 2004; FRIEDMAN, 2006).

2.1 Probabilidade e variáveis aleatórias

Seja Ω um conjunto arbitrário e $\mathscr{F}$ uma coleção de subconjuntos de Ω.

Definição 2.1 ($\sigma-$álgebra). *O conjunto $\mathscr{F}$ é dito ser uma **$\sigma-$álgebra** de Ω se, e somente se,*

(a) $\Omega \in \mathscr{F}$,

(b) *para todos $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ tais que $A_n \in \mathscr{F}$, tem-se $\bigcup_n A_n \in \mathscr{F}$,*

(c) *se $A \in \mathscr{F}$, então $A^c := \Omega \backslash A \in \mathscr{F}$.*

Definição 2.2 (Espaço mensurável). *No caso em que $\mathscr{F}$ é uma $\sigma-$álgebra de Ω o par $(\Omega, \mathscr{F})$ é chamado de **espaço mensurável**.*

Definição 2.3 (Evento). *Os elementos de $\mathscr{F}$ são chamados **eventos**.*

Definição 2.4 (Medida de probabilidade). *Diz que P é uma **medida de probabilidade** em $(\Omega, \mathscr{F})$, ou em $\mathscr{F}$, se, e somente se,*

(a) $\mathsf{P}(A) \geq 0, \forall A \in \mathscr{F}$,

(b) $\mathsf{P}(\Omega) = 1$,

(c) *para toda seqüência de conjuntos disjuntos $A_1, \ldots, A_n, \ldots, A_n \in \mathscr{F}$, tem-se que*

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n). \tag{2.1}$$

Definição 2.5 (Espaço de probabilidade). *Um **espaço de probabilidade** é uma tripla $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ formada por um conjunto Ω, uma $\sigma-$álgebra $\mathscr{F}$ de Ω e uma medida de probabilidade P em $\mathscr{F}$.*

Definição 2.6 (Conjunto de medida nula). *Seja $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$. Um conjunto $N \subset \Omega$ é dito de **medida nula** se existe um $\overline{N} \in \mathcal{F}$, $N \subseteq \overline{N}$, tal que $\mathsf{P}\left(\overline{N}\right) = 0$.*

Definição 2.7 (Espaço de probabilidade completo). *Um espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ *é dito* ***completo*** *se, e somente se,* $\mathscr{F}$ *contém todos os conjuntos de medida nula* Ω*.*

Definição 2.8 (Variável aleatória). *Um mapeamento* $\omega \mapsto X(\omega) \in \mathbb{R}^d$*,* $\omega \in \Omega$ *é dito uma* ***variável aleatória*** *em* $(\Omega, \mathscr{F})$ *com valores em* $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ *se, e somente se, o mapeamento* X *for* $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)-$*mensurável.*

Observação 2.1. *Sejam* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ *um espaço de probabilidade e* $X_1, X_2, \ldots$ *uma seqüência de variáveis aleatórias. Assuma que esta seqüência é de Cauchy em medida, ou seja, dado* $\epsilon > 0$ *tem-se* $\lim_{m,n\to\infty} \mathsf{P}\left(\{\omega \in \Omega : \|X_m(\omega) - X_n(\omega)\| > \epsilon\}\right) = 0$*. Caso* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ *não seja um espaço de probabilidade completo não se pode garantir,* a priori, *que existe uma única variável aleatória* X *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\{\omega \in \Omega : \|X_n(\omega) - X(\omega)\| > \epsilon\}\right) = 0. \tag{2.2}$$

Se $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ *for um espaço de probabilidade completo, entretanto, sempre existe* X *satisfazendo a Equação (2.2) e, além disso, se* $\overline{X}$ *for outra variável aleatória satisfazendo (2.2), então* $\mathsf{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : X(\omega) \neq \overline{X}(\omega)\right\}\right) = 0$*. Assim, se* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ *é um espaço de probabilidade completo, o conjunto* $\mathcal{L}^0$ *formado por todas as variáveis aleatórias de* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ *é uma álgebra e contém todos os limites de seqüências de variáveis aleatórias que são de Cauchy em medida.*

Definição 2.9 ($\sigma-$álgebra gerada). *Sejam* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ *um espaço de probabilidade e* X *uma variável aleatória. A menor sub*$-\sigma-$*álgebra de* $\mathscr{F}$ *com relação a qual* X *é mensurável é denotada por* $\sigma(X)$ *e é denominada* ***$\sigma-$álgebra gerada por*** **X***.*

Lema 2.1 (Doob-Dynkin). *Sejam* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ *um espaço de probabilidade e* $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *variáveis aleatórias neste espaço. Então,* Y *é* $\sigma(X)-$*mensurável se, e somente se, existe uma* *função Borel mensurável* $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *tal que*

$$Y = g(X). \tag{2.3}$$

Demonstração. Veja, por exemplo, a proposição 3 na página 8 de (RAO; SWIFT, 2006). □

Definição 2.10 (Distribuição de uma variável aleatória). *Sejam* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ *um espaço de probabilidade e* $X : (\Omega, \mathscr{F}) \to (\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ *uma variável aleatória. A medida de probabilidade* μ_X *em* $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$*, definida por*

$$\mu_X(A) := \mathsf{P}\left(\{\omega \in \Omega \,:\, X(\omega) \in A\}\right), A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \tag{2.4}$$

é chamada ***distribuição de X****.*

Definição 2.11 (Esperança). *Sejam* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ *um espaço de probabilidade e* X *uma variável aleatória Lebesgue integrável. A esperança de* X *com relação à* P *é definida por*

$$\mathsf{E}[X] := \int_\Omega X \, d\mathsf{P}. \tag{2.5}$$

Definição 2.12 (Média e variância). *Sejam* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ *um espaço de probabilidade e* X *uma variável aleatória Lebesgue integrável. Define-se a* ***média*** *de* X *por* $m := \mathsf{E}[X]$*. Se* X *for quadrado integrável, define-se a* ***variância*** *de* X *por* $\mathsf{var}(X) := \mathsf{E}\left[(X-m)(X-m)^\top\right]$.

Definição 2.13 (Variável aleatória Gaussiana). *Sejam* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ *um espaço de probabilidade e* $X \in L^2((\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P}), \mathbb{R}^d)$*. Diz-se que* X *é uma variável aleatória Gaussiana com média* $m \in \mathbb{R}^d$ *e variância* $\Sigma \in \mathcal{S}^{d+}$ *se a sua função densidade de probabilidade é dada por:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det \Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-m)^\top \Sigma^{-1}(x-m)\right), x \in \mathbb{R}^d. \tag{2.6}$$

Definição 2.14 (Variável aleatória de Poisson). *Diz que N é uma variável aleatória de Poisson com média λ se, e somente se, N tem valores em $\mathbb{N}$ e*

$$\mathsf{P}\left(\omega \in \Omega \,|\, N(\omega) = n\right) = \exp\left(-\lambda\right)\frac{\lambda^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Definição 2.15 (Eventos independentes). *Sejam $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ um espaço de probabilidade e $A, B \in \mathscr{F}$. Os eventos A e B são ditos independentes se*

$$\mathsf{P}\left(A \cap B\right) = \mathsf{P}\left(A\right)\mathsf{P}\left(B\right).$$

Definição 2.16 (Esperança condicional). *Sejam $\mathscr{G}$ uma sub-$\sigma-$álgebra de $\mathscr{F}$ e X uma variável aleatória integrável. Define-se a* ***esperança condicional de X dado*** *$\mathscr{G}$ como a variável aletória $\mathrm{E}\left[X \,|\, \mathscr{G}\right]$ tal que:*

(a) $\mathrm{E}\left[X \,|\, \mathscr{G}\right]$ *é $\mathscr{G}-$mensurável;*

(b) *para todo $A \in \mathscr{G}$*

$$\int_A \mathrm{E}\left[X \,|\, \mathscr{G}\right] d\mathsf{P} = \int_A X d\mathsf{P} \tag{2.8}$$

2.2 Processos estocásticos

Definição 2.17 (Processo estocástico). *Sejam $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$ e $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ um espaço de probabilidade. Define-se um* ***processo estocástico*** *em $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ como uma família de variáveis aleatórias $\{X_t,\ t \in \mathcal{T}\}$ definidas em $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ com valores em $\left(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)\right)$.*

Definição 2.18 (Realização). *Para cada $\omega \in \Omega$, o mapeamento (elemento de $(\mathbb{R}^d)^{\mathcal{T}}$) $t \mapsto X(t, \omega)$, $t \in \mathcal{T}$, é chamado* ***realização*** *do processo estocástico $X = \{X_t,\ t \in \mathcal{T}\}$.*

Observação 2.2. *Neste trabalho,* $\mathcal{T} = [0, t_f]$ *com* t_f *fixado* a priori *e, portanto, os processos estocásticos considerados são famílias* ***não-enumeráveis*** *de variáveis aleatórias. Como, por definição,* $\sigma-$*álgebras são fechadas apenas para operações enumeráveis tem-se que, por exemplo, conjuntos* $\{X_t \geq x, t \in \mathcal{T}\} = \cap_{t\in\mathcal{T}} \{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ *não são, pelo menos* a priori, *eventos. Este detalhe técnico é, em diversas situações de interesse, resolvido substituindo-se o conjunto não-enumerável* $\mathcal{T}$ *por um subconjunto* $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ *enuméravel e denso. Geralmente, estes argumentos são baseados na* ***separabilidade*** *do processo estocástico* $X = \{X_t,\ t \in \mathcal{T}\}$*, por exemplo, quando o processo* $X = \{X_t,\ t \in \mathcal{T}\}$ *é quase sempre contínuo.*

Definição 2.19 (Processo estocástico mensurável). *Um processo estocástico* $X = \{X_t,\ t \in \mathcal{T}\}$ *é dito* ***mensurável*** *se, para qualquer* $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$*, o conjunto* $\{(t, \omega) \in \mathcal{T} \times \Omega\ :\ X(t, \omega) \in A\} \in \mathscr{B}(\mathcal{T}) \otimes \mathscr{F}$.

Definição 2.20 (Filtração). *Seja* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ *um espaço de probabilidade completo. Uma filtração* $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ *neste espaço é uma seqüência de sub*$-\sigma-$*álgebras de* $\mathscr{F}$ *que é crescente, ou seja, tal que* $\mathscr{F}_s \subseteq \mathscr{F}_t$*,* $s \leq t$.

Definição 2.21 (Hipóteses usuais). *Um espaço de probabilidade filtrado* $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}\}_{t\geq 0}, \mathsf{P})$ *é dito satisfazer as* ***hipóteses usuais*** *se, e somente se,*

(a) $\mathscr{F}_0$ *contém todos os subconjuntos de medida nula de* Ω*;*

(b) $\mathscr{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s$*, para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Definição 2.22 (Processo estocástico adaptado). *Um processo estocástico* $X = \{X_t,\ t \in \mathcal{T}\}$ *é dito* ***adaptado à filtração*** $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ *se, e somente se, para todo* $t \in \mathcal{T}$ *a variável aleatória* X_t *é* $\mathscr{F}_t-$*mensurável.*

Definição 2.23 (Processo estocástico previsível). *Um processo estocástico* $X = \{X_t,\ t \in \mathcal{T}\}$ *é* *dito* ***previsível*** *se, e somente se, ele for mensurável com relação à* $\sigma-$*álgebra de* $\Omega \times \mathcal{T}$ *gerada por todos os processos contínuos pela esquerda com limites pela direita.*

Definição 2.24 (Processo estocástico opcional). *Um processo estocástico* $X = \{X_t,\ t \in \mathcal{T}\}$ *é dito* ***opcional*** *se, e somente se, ele for mensurável com relação à* $\sigma-$*álgebra de* $\Omega \times \mathcal{T}$ *gerada por todos os processos contínuos pela direita com limites pela esquerda.*

Definição 2.25 (Processo estocástico crescente). *Um processo estocástico mensurável* $X = \{X_t,\ t \in \mathcal{T}\}$ *com valores em* $\mathbb{R}$ *é dito* ***crescente*** *se, e somente se,* $P-$*q.t. realização* $t \mapsto X(t, \omega)$ *é contínua pela direita e crescente.*

Definição 2.26 (Processo càdlàg). *Um processo estocástico X é dito ser um* ***càdlàg*** *(*continue à droite, limite à gauche*) se suas realizações são funções contínuas pela direita com limite pela esquerda.*

Definição 2.27 (Processo de Poisson). *Um* ***processo de Poisson*** *com intensidade* $\lambda > 0$ *é um processo càdlàg, adaptado, com valores em* $\mathbb{N}$, $N = (N_t, \mathscr{F}_t)$ *tal que:*

(a) $N_0 = 0$;

(b) *para* $0 \leq s < t$, $N_t - N_s$ *é independente de* $\mathscr{F}_s$;

(c) *para* $0 \leq s < t$, $N_t - N_s$ *tem distribuição de Poisson com média* $\lambda(t - s)$.

Definição 2.28 (Processo de Poisson compensado). *Seja N um processo de Poisson com intensidade* λ. *Define-se o* ***processo de Poisson compensado*** *associado a N como o processo* $\tilde{N}_t$ *dado por:*

$$\tilde{N}_t := N_t - \lambda t, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

Definição 2.29 (Processo de Wiener em $\mathbb{R}$). *Um processo* $w = (w_t, \mathscr{F}_t)$ *com valores em* $\mathbb{R}$ *e realizações contínuas é dito ser um* ***processo de Wiener*** *unidimensional se, e somente se,*

(a) $w_0 = 0$;

(b) *para* $0 \leq s < t$, $w_t - w_s$ *é independente de* $\mathscr{F}_s$;

(c) *para* $0 \leq s < t$, $w_t - w_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$.

Definição 2.30 (Processo de Wiener em $\mathbb{R}^d$). *Um processo* $w = (w_t, \mathscr{F}_t)$, $w_t = (w_t^1, \ldots, w_t^d)$, *com valores em* $\mathbb{R}^d$ *e realizações contínuas é dito ser um* ***processo de Wiener no*** $\mathbb{R}^d$ *se, e somente se,* $w^i = (w_t^i, \mathscr{F}_t)$, $i = 1, \ldots, d$ *são processos de Wiener unidimensionais independentes.*

Definição 2.31 (Martingale). *Sejam* $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}\}_{t \geq 0}, \mathsf{P})$ *um espaço de probabilidade filtrado e* $M = \{M_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ *um processo estocástico definido neste espaço com valores em* $\mathbb{R}$. *O processo* M *é dito um* $(\mathscr{F}, \mathsf{P})$***−martingale*** *se, e somente se,*

- M *é adaptado à* $\{\mathscr{F}_t\}_{t \geq 0}$;
- $\mathsf{E}\left[|M_t|\right] < \infty$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$;
- $\mathsf{E}\left[M_t \mid \mathscr{F}_s\right] = X_s$, $0 \leq s < t < +\infty$.

Definição 2.32 (Martingale quadrado integrável). *Sejam* $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}\}_{t \geq 0}, \mathsf{P})$ *um espaço de probabilidade filtrado e* $M = \{M_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ *um martingale contínuo pela direita. O martingale* M *é dito quadrado integrável se, e somente se,* $\mathsf{E}\left[M_t^2\right] < \infty$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$.

Notação 2.1. *O conjunto dos martingales quadrado integráveis* M *tal que* $M_0 = 0$ *será denotado por* $\mathscr{M}_2$. *O conjunto dos martingales quadrado integráveis contínuos* M *tal que* $M_0 = 0$ *será denotado por* $\mathscr{M}_2^c$.

Exemplo 2.1. *O processo de Wiener é um exemplo clássico de processo em* $\mathscr{M}_2^c$ *e o processo de Poisson compensado é um exemplo clássico de processo em* $\mathscr{M}_2$. *É importante observar também que o processo de Poisson não é um martingale.*

Proposição 2.1. *Seja $X = (X_t, \mathscr{F}_t)$ um martingale quadrado integrável. Existe um único processo previsível crescente $(\langle X, X\rangle_t, \mathscr{F}_t)$ tal que*

$$X_t^2 = M_t + \langle X, X\rangle_t, \tag{2.10}$$

onde $M = (M_t, \mathscr{F}_t)$ é um martingale contínuo pela direita e $\langle X, X\rangle_0 = X_0^2$.

Demonstração. Ver, por exemplo, (AGGOUN; ELLIOTT, 2004, p.84). □

Definição 2.33. *Seja $X = (X_t, \mathscr{F}_t)$ um martingale quadrado integrável. O processo previsível crescente $(\langle X, X\rangle_t, \mathscr{F}_t)$, cuja existência e unicidade foi estabelecida na Proposição 2.1, é chamado* ***variação quadrática previsível de*** **X**.

Proposição 2.2. *Seja $X = (X_t, \mathscr{F}_t)$ um martingale quadrado integrável. Então, X pode ser decomposto unicamente da seguinte forma*

$$X = X^c + X^d, \tag{2.11}$$

onde X^c é um martingale contínuo e X^d é um martingale descontínuo.

Demonstração. Ver, por exemplo (AGGOUN; ELLIOTT, 2004, p.84). □

Proposição 2.3. *Seja $X = (X_t, \mathscr{F}_t)$ um martingale quadrado integrável e $X^c + X^d$ sua decomposição única dada pela Proposição 2.2. Então,*

$$[X, X]_t := \langle X^c, X^c\rangle_t + \sum_{s\le t}(X_s - X_{s^-})^2, \tag{2.12}$$

é um processo opcional crescente.

Demonstração. Veja, por exemplo, (AGGOUN; ELLIOTT, 2004, p.85). □

Definição 2.34 (Variação quadrática opcional). *Seja $X = (X_t, \mathscr{F}_t)$ um martingale quadrado integrável. O processo opcional crescente da Proposição 2.3 é chamado* ***variação quadrática opcional de* X**.

Exemplo 2.2. *Seja w um processo de Wiener. Então, pode-se mostrar que*

$$\langle w, w\rangle_t = [w, w]_t = t. \tag{2.13}$$

Exemplo 2.3. *Seja N um processo de Poisson com parâmetro λ. Então, pode-se mostrar que:*

$$\langle N, N\rangle_t = \lambda_t, \tag{2.14}$$

$$[N, N]_t = N_t. \tag{2.15}$$

Detalhes podem ser encontrados, por exemplo, em (AGGOUN; ELLIOTT, 2004, p.85).

Definição 2.35. *Sejam $X = (X_t, \mathscr{F}_t)$ e $Y = (Y_t, \mathscr{F}_t)$ dois martingales quadrado integráveis. Define-se, então:*

$$\langle X, Y\rangle_t := \frac{1}{2}\left(\langle X+Y, X+Y\rangle_t - \langle X, X\rangle_t - \langle Y, Y\rangle_t\right), \tag{2.16}$$

$$[X, Y]_t := \frac{1}{2}\left([X+Y, X+Y]_t - [X, X]_t - [Y, Y]_t\right), \tag{2.17}$$

as variações quadráticas cruzadas previsíveis e opcionais, respectivamente.

Proposição 2.4. *As realizações de $[X, X]_t$ são $\mathsf{P}-$q.s. contínuas pela direita com limites pela esquerda e de variação finita em subconjuntos compactos de $\mathcal{T}$. Ainda, $[X, X]_t < +\infty$ $\mathsf{P}-$q.s para cada $t \in \mathcal{T}$.*

Demonstração. Veja, por exemplo, (AGGOUN; ELLIOTT, 2004, p.96). □

Definição 2.36 (Martingales ortogonais). *Sejam X, Y dois martingales quadrado integráveis. Os martingales X e Y são chamados* ***ortogonais*** *quando $\langle X, Y\rangle_t = 0$ $\mathsf{P}-$q.s., para todo $t \in \mathcal{T}$.*

Observação 2.3. *Sejam X, Y dois martingales quadrado integráveis. Os martingales X e Y são ortogonais se, e somente se, XY é um martingale.*

2.3 Cálculo estocástico

2.3.1 Integral de Itô

Seja $w = (w_t, \mathscr{F}_t)$ um processo de Wiener.

Definição 2.37. *Denote por H^2 o conjunto de todos os processos estocásticos $f = (f_t, \mathscr{F}_t)$ mensuráveis tais que:*

$$\mathsf{E}\left[\int_0^t f_s^2 ds\right] < \infty, \forall t \geq 0, \qquad \mathsf{P} - q.c.. \tag{2.18}$$

Ainda, defina a seguinte norma em H^2

$$\|f\|_{H^2} := \mathsf{E}\left[\int_0^t f_s^2 ds\right]. \tag{2.19}$$

Definição 2.38. *Um processo estocástico $f(\omega, t)$ é dito simples no intervalo [0,t] se, e somente se, $f(0, \omega)$ é constante e para $s \in (0, t]$,*

$$f(s, \omega) = \sum_{k=0}^{n-1} g_k(\omega) \mathcal{X}_{(t_k, t_{k+1}]}(s), \tag{2.20}$$

onde $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ é uma partição do intervalo $[0, t]$ independente de ω e cada

$g_k(w)$ é $\mathscr{F}_{t_k}$−mensurável com $\mathsf{E}\left[g_k^2\right] < \infty$.

Definição 2.39. *Denote por $\mathcal{S}^2$ o conjunto de todos os processos estocásticos simples em H^2.*

Definição 2.40 (Integral de Itô para processos em $\mathcal{S}^2$). *Se $f \in \mathcal{S}^2$ a **integral de Itô** de f com relação à w_t é definida por:*

$$I(f) = \int_0^t f_s dw_s := \sum_k f(t_k, \omega)(w_{t_{k+1}} - w_{t_k}). \tag{2.21}$$

Teorema 2.1. *Seja $f \in H^2$. Então, existe uma variável $I(f)$ aleatória limitada no L^2 tal que $I(f) = \lim I(f_n)$, onde o limite é no sentido do L^2 e f_n é uma seqüência de processos em $\mathcal{S}^2$ que converge, no sentido do L^2, para f. Ainda, $I(f)$ é independente da escolha da seqüência f_n.*

Demonstração. Veja, por exemplo, (AGGOUN; ELLIOTT, 2004, p. 93). □

Definição 2.41. *A variável aleatória $I(f)$ do teorema anterior é definida como a **integral de Itô** de f com relação à w_t.*

Observação 2.4. *O caso particular em que o integrando é uma função determinística é chamada de **integral de Wiener**. Maiores detalhes sobre esta integral podem ser encontrados, por exemplo, em (DAVIS, 1977, p.84-89).*

Teorema 2.2 (Condição de Novikov). *Sejam w_t, $t \in [0, t_f]$, um processo de Wiener no $\mathbb{R}^n$, $f := \left(f^1, \ldots, f^n\right) : \Omega \times [0, t_f] \to \mathbb{R}^n$ um processo previsível tal que*

$$\int_0^{t_f} ||f_t||^2 dt < +\infty \qquad \mathsf{P} - q.s. \tag{2.22}$$

e

$$\Lambda_t(f) := \exp\left(\sum_{i=1}^n \int_0^t f_s^i dw_s^i - \frac{1}{2}\int_0^t ||f_s||^2 ds\right). \tag{2.23}$$

Se

$$\mathsf{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{t_f}\|f_s\|^2 dt\right)\right] < +\infty. \tag{2.24}$$

Então,

$$\mathsf{E}\left[\Lambda_{t_f}(f)\right] = 1. \tag{2.25}$$

Demonstração. Veja, por exemplo, (ELLIOTT, 1982, p. 178). □

Teorema 2.3 (Teorema de Girsanov). *Sejam w_t, $t \in [0, t_f]$, um processo de Wiener no $\mathbb{R}^n$ e $f := \left(f^1, \ldots, f^n\right) : \Omega \times [0, t_f] \to \mathbb{R}^n$ um processo previsível satisfazendo (2.22). Se*

$$\mathsf{E}\left[\Lambda_{t_f}(f)\right] = 1, \tag{2.26}$$

onde $\Lambda_t(f)$ é dado pela Equação (2.23), então

$$\overline{\mathsf{P}}(A) := \int_A \Lambda_{t_f}(f) d\mathsf{P}, \qquad \forall A \in \mathscr{F} \tag{2.27}$$

é uma medida de probabilidade em $(\Omega, \mathscr{F})$ e

$$\tilde{w}_t := w_t - \int_0^t f_s ds \tag{2.28}$$

é um processo de Wiener em $(\Omega, \mathscr{F}, \overline{\mathsf{P}})$.

Demonstração. Veja, por exemplo, (ELLIOTT, 1982, p.169). □

2.3.2 Integração estocástica com relação à Martingales quadrado integráveis

Definição 2.42. *Seja $M \in \mathscr{M}_2$. Denote por $L^2(\langle M, M\rangle)$ o conjunto dos processos estocásticos previsíveis f_t tais que:*

$$||f||^2_{\langle M,M\rangle} := \mathsf{E}\left[\int_0^\infty f_s^2 d\langle M, M\rangle_s\right] < \infty. \tag{2.29}$$

Teorema 2.4. *Sejam $M \in \mathscr{M}_2$ e $f \in L^2(\langle M, M\rangle)$. A* ***integral estocástica*** *$I_t := \int_0^t f_s dM_s$ é caracterizada como o único elemento de $\mathscr{M}_2$ tal que para todo $Y \in \mathscr{M}_2$ tem-se*

$$\mathsf{E}\left[I_\infty Y_\infty\right] = \mathsf{E}\left[\int_0^\infty f_s d\langle M, Y\rangle_s\right] = \mathsf{E}\left[\int_0^\infty f_s d[M, Y]_s\right]. \tag{2.30}$$

Demonstração. Veja, por exemplo, (AGGOUN; ELLIOTT, 2004, p.96). □

Proposição 2.5. *Sejam X_t um martingale quadrado integrável previsível e M_t um martingale quadrado integrável com realizações contínuas pela direita. Então,*

$$Y_t := \int_0^t X_t dM_t, \tag{2.31}$$

é um martingale quadrado integrável com média zero o qual possui uma versão com realizações contínuas pela direita.

Demonstração. Veja, por exemplo, o teorema 2.5 na página 38 de (CHUNG; WILLIAMS, 1990).

□

2.3.3 Fórmula de Itô–Doléans-Dade–Meyer

Teorema 2.5 (Itô–Doléans-Dade–Meyer). *Sejam* $Z = (Z_t, \mathscr{F}_t)$, $Z_t = \left[Z_t^1 \dots Z_t^m\right]^\top$ *a soma de um martingale em* $\mathscr{M}_2$ *e um processo de variação limitada e* $\psi(t,x)$ *uma função continuamente diferenciável em t e de classe* C^2 *em x. Então,* $\psi(t, Z_t)$ *satisfaz:*

$$\begin{aligned}\psi(t,Z_t) = \psi(0,Z_0) + \int_0^t \psi_t(s,Z_s)ds +&\\ + \sum_i \int_0^t \psi_{x^i}(s,Z_{s^-})dZ_s^i +&\\ + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\int_0^t \psi_{x^i x^j}(s,Z_{s^-})d\left\langle Z^{i\,c}, Z^{j\,c}\right\rangle_s +&\\ + \sum_{0<s\leq t}\left[\psi(s,Z_s) - \psi(s,Z_{s^-}) - \sum_i \psi_{x^i}(s,Z_{s^-})\Delta Z_s^i\right]&,\end{aligned}$$

onde $\Delta Z_s^i := (Z_s^i - Z_{s^-}^i)$.

Demonstração. Veja, por exemplo, (ELLIOTT, 1982, p. 138) e (KRISHNAN, 2005, p. 184). □

Corolário 2.1. *Seja* $X = (X_t, \mathscr{F}_t)$ *a soma de um martingale em* $\mathscr{M}_2$ *e um processo de variação limitada. Então,*

$$\Lambda_t = 1 + \int_0^t \Lambda_{s^-} dX_s \tag{2.32}$$

tem uma única solução :

$$\Lambda_t = \exp\left(X_t - \frac{1}{2}\langle X^c, X^c\rangle_t\right)\prod_{s\leq t}(1+\Delta X_s)\exp(-\Delta X_s). \tag{2.33}$$

Demonstração. Basta usar o Teorema 2.5. Detalhes podem ser econtrados, por exemplo, em (AGGOUN; ELLIOTT, 2004, p. 105-106). □

Exemplo 2.4. *Sejam* w_t *um processo de Wiener e* N_t*, um processo de Poisson com parâmetro*

λ. Assuma que w_t e N_t são independentes. Considere o processo:

$$X_t = X_0 + \sigma \int_0^t X_{s^-} dw_s + \int_0^t X_{s^-}(dN_s - \lambda ds). \tag{2.34}$$

Aplicando o Corolário 2.1 mostra-se que:

$$X_t = X_{s^-} \exp\left(\sigma(B_t - B_s) - \frac{\sigma}{2}(t-s) - \lambda(t-s)\right) \prod_{s \le r \le t} (1 + \Delta N_r)\,. \tag{2.35}$$

Corolário 2.2. *Sejam X e Y dois martingales quadrado integráveis. Então,*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_{s-} dY_s + \int_0^t Y_{s-} dX_s + \langle X^c, Y^c \rangle_t + \sum_{s \le t} \Delta X_s \Delta Y_s. \tag{2.36}$$

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 2.5. □

2.3.4 Equações diferenciais estocásticas

Teorema 2.6. *Sejam $\mu : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tais que, dados $T, N \in \mathbb{R}$, existe uma constante $K > 0$, dependendo apenas de T e N, de forma que para todo $||x|| \le N$, $||y|| \le N$ e $0 \le t \le T$ tem-se:*

$$||\mu(t,x) - \mu(t,y)|| + ||\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|| < K||x - y||, \tag{2.37}$$

$$||\mu(t,x)|| + ||\sigma(t,x) < K(1 + ||x||). \tag{2.38}$$

Ainda, considere $w = (w_t, \mathscr{F}_t)$ um processo de Wiener independente de α uma variável aleatória limitada no sentido do L^2. Então, existe um único $x = (x_t, \mathscr{F}_t)$, com realizações contínuas, que *é solução de*

$$\begin{cases} dx_t = \mu(t, x_t)dt + \sigma(t, x_t)dw_t, \\ x_0 = \alpha, \end{cases} \tag{2.39}$$

e tal que

$$\mathsf{E}\left[\sup_{0\le t\le T} \|x_t\|^2\right] < C(1 + \mathsf{E}\left[\|\alpha\|^2\right], \tag{2.40}$$

onde C depende apenas de K e T.

Demonstração. Veja, por exempo, (FRIEDMAN, 2006). □

Teorema 2.7. *Sejam Z_t a soma de um martingale em $\mathscr{M}_2$ e um processo de variação limitada e α uma variável aleatória finita $\mathscr{F}_0$−mensurável. Considere $f : \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:*

(a) *para cada $x \in \mathbb{R}$, $(t, \omega) \mapsto f(t, \omega, x)$ é càdlàg e adaptado à $\mathscr{F}_t$;*

(b) *para cada (t, ω), $|f(t, \omega, x) - f(t, \omega, y)| \le K(\omega)|x - y|$ para alguma variável aleatória finita K.*

Então,

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, \cdot, X_{s^-})dZ_s, \tag{2.41}$$

admite uma única solução.

Demonstração. Veja, por exemplo, (PROTTER, 2004, p.249-250). □

Proposição 2.6 (Representação fechada para a solução de EDE linear). *Sejam $A(t), C_j(t) \in L^\infty([0, t_f]; \mathbb{R}^{n\times n})$, $b, \sigma_j \in L^2([0, t_f]; \mathbb{R}^n)$, $\eta \in L^2_{\mathscr{F}_0}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ e x_t solução forte de*

$$\begin{cases} dx_t = [A(t)x_t + b(t)]\,dt + \sum_{j=1}^{m} \left[C_j(t)x_t + \sigma_j(t)\right] dW_t^j, \\ x_0 = \eta. \end{cases} \tag{2.42}$$

Considere ainda $\{\Phi_t\}_{t\geq 0}$ *solução forte de*

$$\begin{cases} d\Phi_t = A(t)\Phi_t dt + \sum_{j=1}^{m} C_j(t)\Phi_t dW_t^j, \\ \\ \Phi_0 = I_{n\times n}. \end{cases} \tag{2.43}$$

Então, $\{\Phi_t^{-1}\}_{t\geq 0}$ *existe, é solução forte de*

$$\begin{cases} d\Phi_t^{-1} = \Phi_t^{-1}\left[-A(t) + \sum_{j=1}^{m} C_j^2(t)\right]dt - \sum_{j=1}^{m_1} \Phi_t^{-1} C_j(t) dW_t^j, \\ \\ \Phi_0^{-1} = I_{n\times n}. \end{cases} \tag{2.44}$$

e

$$x_t = \Phi_t\left\{\eta + \int_0^t \Phi_s^{-1}\left[b(s) - \sum_{j=1}^{m} C_j(s)\sigma_j(s)\right]ds + \sum_{j=1}^{m}\int_0^t \Phi(s)^{-1}\sigma_j(s) dW_s^j\right\}. \tag{2.45}$$

Demonstração. Ver, por exemplo, (KLOEDEN; PLATEN, 1999, p. 110), (YONG; ZHOU, 1999, p. 47) e (LIPTSER; SHIRYAYEV, 1977, p. 144). □

Observação 2.5. *No caso vetorial (*$n > 1$*) a matriz fundamental de soluções, solução forte da Equação* (2.43)*, não pode, em geral, ser obtida explicitamente mesmo quando todas as matrizes são constantes. Se, entretanto, as matrizes* $A, C_1, \dots, C_{m_1}$ *forem constantes e:*

$$AC_i = C_i A \quad e \quad C_i C_j = C_j C_i, \qquad i, j = 1, 2, \dots, m_1, \tag{2.46}$$

então

$$\Phi_{t,t_0} = \exp\left[\left(A - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m_1}(C_i)^2\right)(t - t_0) + \sum_{i=1}^{m_1} C_i(W_t^i - W_{t_0}^i)\right]. \tag{2.47}$$

Para mais detalhes ver, por exemplo, (KLOEDEN; PLATEN, 1999, p.151).

2.4 Cadeia de Markov contínua no tempo

Definição 2.43. *Um processo estocástico contínuo no tempo* $\theta = \{\theta_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$*, com espaço de estados finito* $\mathcal{S} := \{s_1, s_2, \ldots, s_N\}$ *definido em um espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ *é uma* ***cadeia de Markov*** *se para todo* $t, u \in \mathbb{R}^+$ *e* $0 \le r \le u$*,*

$$\mathsf{P}\left(\theta_{t+u} = s_j \,|\, \theta_u = s_i, \theta_r = s_k\right) = \mathsf{P}\left(X_{t+u} = s_j \,|\, \theta_u = s_i\right), \tag{2.48}$$

para quaisquer estados $s_i, s_j, s_k \in \mathcal{S}$*.*

A cadeia de Markov $\theta = \{\theta_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ *é dita* ***homogênea*** *se*

$$\mathsf{P}\left(\theta_{t+u} = s_j \,|\, \theta_u = s_i\right) =: \pi_{ij}(t) \tag{2.49}$$

é independente de u.

A família $\Pi(t) := \left(\pi_{ij}(t)\right)$*,* $t \in \mathbb{R}^+$ *é chamada* ***semi-grupo de transição*** *da cadeia de Markov homogênea* $\theta = \{\theta_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ *e os elementos* $\pi_{i,j}(t)$*,*$i, j = 1, \ldots, N$ *de* $\Pi(t)$ *são chamados* ***probabilidades de transição****.*

Proposição 2.7. *As probabilidades de transição* $\pi_{i,j}(t)$*,*$i, j = 1, \ldots, N$*,* $t \in \mathbb{R}^+$ *satisfazem:*

- $\pi_{ij}(t) \ge 0$*;*
- $\sum_{j=1}^{N} \pi_{ij}(t) = 1$*;*
- $\pi_{ij}(t + s) = \sum_{k=1}^{N} \pi_{ik}(t)\pi_{kj}(s)$*,* $s \in \mathbb{R}^+$*.*

Demonstração. Conseqüência imediata da definição das probabilidades de transição. □

Observação 2.6 (Chapman-Kolmogorov). *Da proposição anterior é fácil ver que* $\Pi(t+s) = \Pi(t)\Pi(s)$. *Mais detalhes, ver por exemplo (STROOCK, 2005).*

Teorema 2.8. *Seja* $\theta = \{\theta_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ *uma cadeia de Markov homogênea com semi-grupo de transição* $\Pi(t) := \left(\pi_{ij}(t)\right)$, $t \in \mathbb{R}^+$ *tal que*

$$\lim_{t\to 0} \pi_{ij}(t) = \pi_{ij}(0) = \begin{cases} 1 & se\ i = j, \\ \\ 0 & se\ i \neq j. \end{cases} \tag{2.50}$$

Então, as probabilidades de transição $\pi_{i,j}(t), i, j = 1, \ldots, N$ *são* ***uniformemente contínuas*** *em* $t \in \mathbb{R}^+$.

Demonstração. Veja, por exemplo, o terema 1 na página 304 e a hipótese (d) na página 303 de (GIKHMAN; SKOROKHOD, 1996). □

Teorema 2.9. *Seja* $\{\Pi(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ *um semigrupo de transição contínuo. Então, os limites*

$$\lambda_{ii} := \lim_{h\to 0} \frac{\pi_{ii}(h) - 1}{h}, \tag{2.51}$$

e

$$\lambda_{ij} := \lim_{h\to 0} \frac{\pi_{ij}(h) - 0}{h}, i \neq j, \tag{2.52}$$

existem e satisfazem $-\infty \leq \lambda_i \leq 0$ *e* $0 \leq \lambda_{ij} < +\infty$.

Demonstração. Veja, por exemplo, os teoremas 2, na página 304, e 4, na página 308, de (GIKHMAN; SKOROKHOD, 1996). □

Observação 2.7.

$$\mathsf{P}\left(\theta_{t+h} = j \,|\, \theta_t = i\right) = \begin{cases} \lambda_{ij}h + o(h), & se\ i \neq j; \\ 1 + \lambda_{ii}h + o(h), & se\ i = j. \end{cases} \tag{2.53}$$

Definição 2.44. *A matriz* $\Lambda := \left(\lambda_{ij}\right)$ *é chamada* ***gerador infinitesimal*** *da cadeia de Markov homogênea* $\theta = \{\theta_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$.

Observação 2.8. *Seja* $\theta = \{\theta_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ *uma cadeia de Markov homogênea com espaço de estados finito. Então, como* $\sum_{j=1}^{N} \pi_{ij}(h) = 1$*, segue, imediatamente, que* λ_{ii} *é finito e* $\lambda_{ii} = -\sum_{j=1, j\neq i}^{N} \lambda_{ij}$

Proposição 2.8 (Equações de Kolmogorov). *Seja* $\theta = \{\theta_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ *uma cadeia de Markov homogênea com espaço de estados finito e semigrupo de transição contínuo* $\Pi(t)$*. Então,* $\Pi(t)$ *satisfaz* $\Pi(0) = I$ *e*

$$\textbf{\textit{(a)}} \quad \frac{d}{dt}\Pi(t) = \Pi(t)\Lambda, \tag{2.54}$$

$$\textbf{\textit{(b)}} \quad \frac{d}{dt}\Pi(t) = \Lambda\Pi(t), \tag{2.55}$$

onde Λ *é o gerador infinitesimal do semigrupo* Π.

Proposição 2.9. *Sejam* $p_i(t) := \mathsf{P}\left(\theta_t = i\right)$*,* $i = 1, \ldots, N$ *e* $\mathbf{p}(t) := [p_1(t) \quad p_2(t) \quad \ldots \quad p_N(t)]^\top \in \mathbb{R}^N$*. Então,*

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{p}}{dt}(t) = \Lambda^\top \mathbf{p}(t), \\ \mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0. \end{cases} \tag{2.56}$$

Ainda,

$$p(t) = \exp\left(\Lambda^\top (t-s)\right) p(s) = \exp\left(\Lambda(t-s)\right)^\top p(s). \tag{2.57}$$

Demonstração. Sejam $t, h \in \mathbb{R}^+$ e $j \in \{1, \ldots, N\}$, então,

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(\theta_{t+h} = j) &= \mathsf{P}(\theta_{t+h} = j, \theta_t = 1, \ldots, \theta_t = N) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(\theta_{t+h} = j, \theta_t = i) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(\theta_{t+h} = j \,|\, \theta_t = i)\, \mathsf{P}(\theta_t = i) \\
&= \sum_{i=1, i\neq j}^{N} (\lambda_{ij} h + o(h)) \mathsf{P}(\theta_t = i) + (1 + \lambda_{jj} h + o(h)) \mathsf{P}(\theta_t = j) \\
&= \mathsf{P}(\theta_t = j) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_{ij} \mathsf{P}(\theta_t = i) + o(h).
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Tomando o limite quando $h \to 0$, e empregando notação vetorial, o resultado segue. $\square$

Definição 2.45. *Defina $\phi_i : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, N$ por*

$$\phi_i(x) := \begin{cases} 1, & se\ x = s_i; \\ 0, & se\ x \neq s_i. \end{cases} \tag{2.59}$$

e defina $\boldsymbol{\phi} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^N$ por

$$\boldsymbol{\phi}(x) := \begin{bmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) & \ldots & \phi_N(x) \end{bmatrix}^\top. \tag{2.60}$$

Lema 2.2. *Sejam $\theta = \{\theta_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ uma cadeia de Markov homogênea, $p_i(t) := \mathsf{P}(\theta_t = i)$, $i = 1, \ldots, N$ e $\mathbf{p}(t) := \begin{bmatrix} p_1(t) & p_2(t) & \ldots & p_N(t) \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^N$. Então,*

$$\mathsf{E}[\boldsymbol{\phi}(\theta_t)] = \boldsymbol{p}(t). \tag{2.61}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left[\boldsymbol{\phi}(\theta_t)\right] &= \boldsymbol{\phi}(s_1)p_1(t) + \ldots + \boldsymbol{\phi}(s_N)p_N(t)\\ &= \boldsymbol{e}_1 p_1(t) + \ldots + \boldsymbol{e}_N p_N(t)\\ &= \boldsymbol{p}(t).\end{aligned}$$

□

Lema 2.3. *Se $t \geq s$, então* $\mathrm{E}\left[\boldsymbol{\phi}(\theta_t) \mid \sigma(\theta_s)\right] = \exp[\Lambda^\top(t-s)]\theta_s$.

Demonstração.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[\boldsymbol{\phi}(\theta_t) \mid \sigma(\theta_s)\right] &= \mathrm{E}\left[\boldsymbol{\phi}(\theta_t) \,|\, \theta_s = \boldsymbol{e}_1\right] \mathcal{X}_{\{\theta_s=\boldsymbol{e}_1\}} + \ldots + \mathrm{E}\left[\boldsymbol{\phi}(\theta_t) \,|\, \theta_s = \boldsymbol{e}_N\right] \mathcal{X}_{\{\theta_s=\boldsymbol{e}_N\}}\\ &= \exp[\Lambda^\top(t-s)]\boldsymbol{e}_1\mathcal{X}_{\{\theta_s=\boldsymbol{e}_1\}} + \ldots + \exp[\Lambda^\top(t-s)]\boldsymbol{e}_N\mathcal{X}_{\{\theta_s=\boldsymbol{e}_N\}}\\ &= \exp[\Lambda^\top(t-s)]\theta_s.\end{aligned}$$

□

Proposição 2.10. *Sejam $t_f \in \mathbb{R}^+$ e $\mathscr{G}_t := \sigma\,(\theta_s\,,\ 0 \leq s \leq t)$. O processo*

$$V_t := \boldsymbol{\phi}(\theta_t) - \boldsymbol{\phi}(\theta_0) - \int_0^t \Lambda^\top \boldsymbol{\phi}(\theta_{u^-})\, du, 0 \leq t \leq t_f, \tag{2.62}$$

é um $(\mathsf{P}, \mathscr{G}_t)$ –martingale quadrado integrável com realizações contínuas pela direita.

Demonstração. Inicialmente, como θ_t tem realizações contínuas pela direita, segue, imediatamente, que V_t também tem realizações contínuas pela direita. Ainda, como $\Lambda^\top$ é uma matriz finita, existe $K \in \mathbb{R}$, tal que $|q_{ij}| < K$, $i, j = 1, \ldots, N$. Assim, cada componente de V_t, $0 \leq t \leq t_f$, é limitada ($|V_t^i| < 2 + Kt_f$) e, portanto, V_t, $0 \leq t \leq t_f$ é limitada o que implica que é quadrado integrável.

Agora, tome $t \geq s$. $V_0 = 0$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[V_t - V_s \,|\, \mathscr{F}_s\right] &= \mathrm{E}\left[\boldsymbol{\phi}(\theta_t) - \boldsymbol{\phi}(\theta_s) - \int_s^t \Lambda^\top \boldsymbol{\phi}(\theta_{u^-})\, du \,|\, \mathscr{F}_s\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\boldsymbol{\phi}(\theta_t) - \boldsymbol{\phi}(\theta_s) - \int_s^t \Lambda^\top \boldsymbol{\phi}(\theta_{u^-})\, du \,|\, \sigma(\theta_s)\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\boldsymbol{\phi}(\theta_t) \,|\, \sigma(\theta_s)\right] - \boldsymbol{\phi}(\theta_s) - \int_s^t \Lambda^\top\, \mathrm{E}\left[\boldsymbol{\phi}(\theta_{u^-}) \,|\, \sigma(\theta_s)\right]\, du \\
&= \exp[\Lambda^\top (t-s)]\theta_s - \boldsymbol{\phi}(\theta_s) - \int_s^t \Lambda^\top \exp[\Lambda^\top (u-s)]\boldsymbol{\phi}(\theta_s)\, du \\
&= \exp[\Lambda^\top (t-s)]\theta_s - \boldsymbol{\phi}(\theta_s) - \int_s^t \frac{d\exp[\Lambda^\top (u-s)]}{du}\, du\, \boldsymbol{\phi}(\theta_s) \\
&= \exp[\Lambda^\top (t-s)]\theta_s - \boldsymbol{\phi}(\theta_s) - \left(\exp[\Lambda^\top (t-s)] - I\right) \boldsymbol{\phi}(\theta_s) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\mathrm{E}\left[V_t \,|\, \mathscr{F}_s\right] = V_s$ e $V = \{V_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ é um martingale. □

Observação 2.9. *O resultado acima pode ser obtido mesmo no caso em que $\Lambda^\top$ é não-constante.*

2.5 Comentários finais

O objetivo deste capítulo foi o de sumarizar os resultados disponíveis na literatura que formam o ferramental matemático básico para os problemas tratados neste trabalho, bem com estabelecer a notação a ser empregada nos capítulos subseqüentes.

3 Otimalidade de controles em malha fechada

“One service mathematics has rendered the human race. It has put common sense back where in belongs, on the topmost shelf next to the dusty canister labelled ‘discarded nonsense‘"

–ERIC TEMPLE BELL

Nesta parte do trabalho discute-se a otimalidade de controles em malha fechada em problemas com observação completa do estado.

3.1 Introdução

Sejam $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}\}_{t\geq 0}, \mathsf{P})$ um espaço de probabilidade filtrado satisfazendo as condições usuais, $w = (w_t, \mathscr{F}_t)$ um processo de Wiener no $\mathbb{R}^{m_1}$ e um sistema descrito por

$$\begin{cases} dx_t = f(t, x_t, u_t)\,dt + \sigma(t, x_t, u_t)\,dw_t \\ x_0 = \xi \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\{x_t\}$ é o processo de estado do sistema, $\{u_t\}$ é o processo de controle, ξ é uma variável aleatória cuja função distribuição de probabilidade é conhecida. Os mapeamentos $f : [0, t_f] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ e $\sigma : [0, t_f] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{n \times m_1}$ são conhecidos *a priori*.

Assuma que a performance do sistema a ser controlado é adequadamente caracterizada por um certo funcional custo:

$$\begin{aligned} J : \mathcal{U} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} L(t, x_t^u, u_t)dt + \Psi(x_{t_f}^u)\right] \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde os mapeamentos $L : [0, t_f] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ e $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são fixados *a priori* e $\mathcal{U}$ é um certo conjunto de processos, também fixado *a priori*, tal que: (1) para cada $u \in \mathcal{U}$ a equação (3.1) admite solução x^u no sentido forte; (2) para cada par (u, x^u) (ou pares, na falta de unicidade) a performance do sistema é admitida ser adequadamente mensurada pelo funcional custo J.

Definição 3.1. *Um conjunto $\mathcal{U}$ é um conjunto de controles admissíveis se, e somente se, para $u \in \mathcal{U}$ as condições (1) e (2) anteriores são satisfeitas.*

Observação 3.1. *Como feito usualmente na literatura, apenas para simplificar a notação, o funcional custo será denotado explicitando apenas a sua dependência com o processo de controle, ficando implícita a sua dependência do processo de estado x^u.*

Definição 3.2 (Controle ótimo em $\mathcal{U}$). *Um* ***processo de controle*** $\{u_t^*\}_{t \in [0, t_f]}$ *é dito ótimo em $\mathcal{U}$ quando $u^* \in \mathcal{U}$ e:*

$$J(u^*) = \inf_{u \in \mathcal{U}} J(u). \tag{3.3}$$

Definição 3.3 (Controle ϵ-ótimo em $\mathcal{U}$). *Dado $\epsilon > 0$, o processo de controle $\{u_t^\epsilon\}_{t \geq 0}$ é chamado*

ϵ-ótimo se

$$J(u^\epsilon) \leq \inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}} J(u) + \epsilon. \tag{3.4}$$

Exemplo 3.1. *Seja $f : [\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$ dada por: $x \mapsto x$. Naturalmente, $f(\pi) = \min_{x \in [\pi, 2\pi]} f(x)$ e $\nexists x^* \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x^*) = \min_{x \in [\pi, 2\pi] \cap \mathbb{Q}} f(x)$. Agora, dado $\epsilon > 0$ tome $q \in [\pi, \pi + \epsilon] \cap \mathbb{Q}$ qualquer (sempre existe pois $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$). Como $f(q) = q \leq \pi + \epsilon = \inf_{x \in [\pi, 2\pi]} f(x) + \epsilon$ tem-se que $q \in \mathbb{Q} \cap [\pi, 2\pi]$ é ϵ-ótimo em $[\pi, 2\pi]$.*

Naturalmente, a escolha da classe de controles admissíveis $\mathcal{U}$ considerado em um problema particular deve refletir pelo menos dois fatores. O primeiro deles deve ser as restrições impostas pelo projetista para implementação do controle, e o segundo são condições matemáticas que garantam que o problema está bem definido.

Sejam U um subconjunto não-vazio do $\mathbb{R}^d$ e $\{\mathscr{G}_t\}_{t \in [0, t_f]}$ uma sub-filtração de $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in [0, t_f]}$ satisfazendo as condições usuais.

Observação 3.2. *Ao assumir $\mathscr{G}_t \subseteq \mathscr{F}_t$ excluem-se os problemas de controle antecipativos, como por exemplo (YONEYAMA, 1983, p. 251-253).*

Considere $\mathbb{I}_i := [t_i, t_{i+1})$, $i = 0, \ldots, N-1$, $I_N = \{t_f\}$, $\mathcal{X}_A$ a função indicadora do conjunto A, e defina os seguintes conjuntos:

$$\mathcal{U}_{OL,\Pi} := \left\{ u = \sum_{i=0}^{N} c_i \mathcal{X}_{\mathbb{I}_i} \,|\, c_i \in U, i = 1, \ldots, N \right\} \tag{3.5}$$

$$\mathcal{U}_{OL} := \left\{ u \,|\, u : [0, t_f] \to U \text{ é mensurável} \right\} \tag{3.6}$$

$$\mathcal{U}_{\mathscr{G},\Pi} := \left\{ u = \sum_{i=0}^{N} g_i \mathcal{X}_{\mathbb{I}_i} \,|\, g_i : \Omega \to U, \mathscr{G}_{t_i}\text{-adaptado}, i = 0, \ldots, N \right\} \tag{3.7}$$

$$\mathcal{U}_{\mathscr{G}} := \left\{ u \,|\, u : [0, t_f] \times \Omega \to U, u \text{ é } \mathscr{G}_t\text{-progressivamente mensurável} \right\} \tag{3.8}$$

No caso particular em que $\Pi = \{t_0, t_0 + T_{ams}, t_1 + T_{ams}, \ldots, t_{N-1} + T_{ams}\}$, será utilizada a seguinte notação: $\mathcal{U}_{OL,T_{ams}}$ (respectivamente, $\mathcal{U}_{\mathscr{G},T_{ams}}$) no lugar de $\mathcal{U}_{OL,\Pi}$ (respectivamente, $\mathcal{U}_{\mathscr{G},\Pi}$).

Observação 3.3. *Quando o controlador não recebe informação alguma durante a operação do sistema, o processo de controle considerado é uma função apenas do tempo, isto é,* $u_t = u(t,\omega) = f(t)$, *onde* $f : \mathbb{T} \to U$ *é* $\mathscr{B}(\mathbb{T})/\mathscr{B}(\mathbb{R})$*-mensurável. Estes controles são geralmente denominados* em malha aberta *(FLEMING; RISHEL, 1975, página 151) e (DAVIS, 1977, página 152). Os conjuntos* $\mathcal{U}_{OL,\Pi}$ *e* $\mathcal{U}_{OL}$ *englobam, respectivamente, os controles em malha aberta discretos e contínuos.*

Notação 3.1. *O conjunto das funções* $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ *Lipschitz contínuas será denotado por* $\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d)$.

Sejam f, σ e ξ definidas ao se estabelecer o problema (3.1). Para cada $\psi \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d)$, seja $\{z_t^\psi\}$ solução forte (existe sob certas hipóteses, ver (LIPTSER; SHIRYAYEV, 1977, p.126-151)) de

$$\begin{cases} dz_t = f(t,z_t,\psi(z_t))\,dt + \sigma(t,z_t,\psi(z_t))\,dW_t \\ z_0 = \xi \end{cases} \tag{3.9}$$

Defina

$$\mathcal{V}_{\mathrm{ME}} := \left\{u \,|\, u_t = \psi(z_t^\psi),\ z^\psi \text{ solução de (3.9)},\ \psi \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d)\right\} \tag{3.10}$$

Nos casos: (1) $\psi : [0,t_f]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ Lipschitz contínua no segundo argumento; (2) $\psi : [0,t_f]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ com $\psi(t,z_t) = K(t)z_t$ para um certo $K : [0,t_f] \to \mathbb{R}^{n\times d}$ de classe C^1; (3) $\psi : [0,t_f]\times C([0,t_f];\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^d$ Lipschitz contínua no segundo argumento (considerando o espaço C com a norma do sup) e $\psi(t,z_{[0,t_f]}) = \psi(t,z_{[0,t]})$; define-se, *mutatis mutandis*, $\mathcal{V}_M$, $\mathcal{V}_{LM}$ e $\mathcal{V}_{Nat}$.

Observação 3.4. *Até o momento foi imposta apenas uma restrição ao conjunto* U*: ele é não-vazio. Em casos de interesse,* U *pode ser, por exemplo, um conjunto finito, compacto ou convexo.*

Observação 3.5. *Em certos problemas de controle ótimo estocástico, as classes de controles descritas anteriormente podem não ser suficientemente "ricas" e o controle ótimo não existir. No caso determinístico, (YOUNG, 1969) introduziu o conceito de controle relaxado, e a contrapartida no caso estocástico foi feita em (FLEMING, 1977). Borkar (2005) define ainda:* precise controls, precise feedback controls, precise Markov controls, precise stationary Markov controls *e* randomized controls.

Nesta parte do trabalho atenção é fixada sobre a possibilidade de se considerar como controles admissíveis processos da classe $\mathcal{U}_{\mathscr{G}}$, com

$$\mathscr{G}_t = \sigma\,(x_s\,,\ 0 \leq s \leq t)\,, \tag{3.11}$$

ou seja, o controlador tem acesso apenas ao estado do sistema e não a toda evolução passada do processo de Wiener como em (YONG; ZHOU, 1999). Ao tentar considerar tal classe de controles admissíveis, entretanto, um problema técnico surge: a σ-álgebra $\mathscr{G}_t$ dada pela Equação (3.11) é uma função do controle admissível aplicado, ou seja, se u_1 e u_2 são dois processos de controle distintos então, pelo menos *a priori*, $\sigma\,(x_s^{u_1}\,,\ 0 \leq s \leq t) \neq \sigma\,(x_s^{u_2}\,,\ 0 \leq s \leq t)$, onde x^{u_1} e x^{u_2} são, respectivamente, as soluções fortes da Equação (3.1) quando os processos de controle u_1 e u_2 são aplicados. Desta forma, a classe $\mathcal{U}_{\mathscr{G}}$ não está bem definida uma vez que o processo u_t deve ser adaptado à σ-álgebra $\sigma\,(x_s\,,\ 0 \leq s \leq t)$, a qual depende do processo u_t para sua definição.

Para uma certa classe de problemas (matriz de difusão sem processo de controle e inversível), Bensoussan (1983) mostrou que existe um conjunto de controles admissíveis $\mathcal{U}_{cl}$, denso em $\mathcal{U}^2_{\mathscr{W}}$ (ver Equação (3.21)) onde se verifica

$$\sigma\left(x_s^{u_1},\ 0 \leq s \leq t\right) = \sigma\left(x_s^{u_2},\ 0 \leq s \leq t\right) = \sigma\left(W_s,\ 0 \leq s \leq t\right), \quad \forall u_1, u_2 \in \mathcal{U}_{cl}, \tag{3.12}$$

$$\inf_{u \in \mathcal{U}^2_{\mathscr{W}}} J(u) = \inf_{u \in \mathcal{U}_{cl}} J(u) \tag{3.13}$$

ou seja, para uma certa classe de problemas basta considerar como controles admissíveis a classe $\mathcal{U}_{cl}$ ao invés de $\mathcal{U}^2_{\mathscr{W}}$ (ou $\mathcal{U}_{\mathscr{G}}$) quando se deseja admitir apenas controles adaptados ao estado do sistema. Tal resultado, entretanto, é aplicável a uma classe restrita de problemas, principalmente por considerar apenas casos em que a matriz de difusão é invertível. Por exemplo, exclui o modelo da dinâmica de um satélite movendo-se em órbita circular sob a influência de variações rápidas na densidade da atmosfera proposto por (SARGIROW, 1970 apud ARNOLD, 1974, p. 199) (neste modelo a matriz de difusão tem dimensão 2×1).

Neste capítulo, mostra-se que a classe de problemas considerada em (BENSOUSSAN, 1983) pode ser estendida (matriz de difusão dependente do processo de controle e com posto igual ao número de colunas) e são destacadas algumas das conseqüências deste resultado (por exemplo, se u^* é ótimo em $\mathcal{U}^2_{\mathscr{W}}$, então dado $\epsilon > 0$ pode-se construir, a partir de u^*, um processo de controle $u^\epsilon \in \mathcal{U}_{cl}$, em malha fechada, que é ϵ-ótimo).

Ainda, algumas alternativas empregadas em outros trabalhos para considerar controles admissíveis adaptados ao estado e contornar a dependência da σ-álgebra gerada pelo estado no processo de controle são discutidas.

O trabalho neste capítulo está organizado na forma descrita a seguir. Na Seção 3.2 é estabelecida a notação e o problema a ser estudado é formulado rigorosamente. Na Seção 3.3 são apresentados os resultados principais. Uma discussão sobre algumas abordagens disponíveis na literatura para contornar o problema técnico descrito nesta seção são discutidas na Seção 3.4.

Alguns comentários finais são feitos na Seção 3.5.

Os resultados apresentados neste capítulo foram submetidos para publicação (SILVA; YONEYAMA, 2008c).

3.2 Notação e formulação do problema

Sejam $\{\mathscr{W}_t\}_{t\in[0,t_f]}$ a filtragem gerada pelo processo de Wiener $\{W_t\}$ completada com os conjuntos de medida nula e $U \subseteq \mathbb{R}^d$ não-vazio. Considere o problema descrito pelas Equações (3.1) e (3.2), $\xi \in \mathbb{R}^n$ (determinístico)[1], os mapeamentos $f : [0,t_f]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ e $\sigma : [0,t_f]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{n\times m_1}$ satisfazendo:

Hipóteses 3.1 (Existência e unicidade de solução forte).

1. *$f \in C([0,T]\times\mathbb{R}^n\times U)$;*

2. *$f(\cdot,\cdot,v) \in C^1([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ para todo $v \in U$;*

3. *$\sigma \in C^1([0,T]\times\mathbb{R}^n)$;*

4. *para alguma constante $C > 0$:*

$$|f_t| + |f_x| \leq C, \quad |\sigma_t| + |\sigma_x| \leq C, \tag{3.14}$$

$$|f(t,x,v)| \leq C(1+|x|+|v|), \tag{3.15}$$

$$|\sigma(t,x,v)| \leq C(1+|x|). \tag{3.16}$$

e os mapeamentos $L : [0,t_f]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ e $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisfazendo

[1] Assume-se $\xi \in \mathbb{R}^n$ determinístico apenas para simplificar a notação. Caso ξ seja uma variável aleatória, limitada no sentido do L^2, basta considerar, em todo este capítulo, $\mathscr{W}_t \bigvee \sigma(\xi)$ no lugar de $\mathscr{W}_t$.

Hipóteses 3.2 (Funcional custo).

1. *$L : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciável com relação a (x,u);*

2. *$\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciável;*

3. *para alguma constante $C > 0$:*

$$|L_x(t,x,u)| \leq C(1 + |x| + |u|), \tag{3.17}$$

$$|L_u(t,x,u)| \leq C(1 + |x| + |u|), \tag{3.18}$$

$$L(t,0,0) \in L^\infty([0,T], \mathscr{B}_{[0,T]}, \lambda) \tag{3.19}$$

$$\Psi_x(x)| \leq C(1 + |x|). \tag{3.20}$$

Ainda, considere o seguinte conjunto

$$\mathcal{U}^2_{\mathscr{W}} := \mathcal{U}_{\mathscr{W}} \bigcap L^2([0,t_f] \times \Omega, \mathscr{B}_{[0,t_f]} \otimes \mathscr{F}, \lambda_1 \otimes \mathsf{P}; \mathbb{R}^d) \tag{3.21}$$

onde λ_1 é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$.

Da teoria de EDE (no sentido de Itô) com coeficientes aleatórios progressivamente mensuráveis, ver por exemplo (ZHOU, 1998, p. 48-50) ou (FLEMING; SONER, 1993, p.397-402), para cada $u \in \mathcal{U}^2_{\mathscr{W}}$, sob as Hipóteses 3.1, a EDE (3.1) admite uma única (no sentido *pathwise*) solução forte x^u_t, a qual tem P-a.s. realizações contínuas.

Ainda, para cada $u \in \mathcal{U}^2_{\mathscr{W}}$, sob as Hipóteses 3.2, o funcional custo (3.2) está bem definido, uma vez que as integrações são possíveis e finitas.

Como para cada $u \in \mathcal{U}^2_{\mathscr{W}}$ a EDE (3.1) admite uma única (no sentido *pathwise*) solução forte e o custo (3.2) está bem definido, tem-se, ver Definição 3.1, que $\mathcal{U}^2_{\mathscr{W}}$ define um conjunto de controles admissíveis para o problema (3.1)-(3.2).

Para cada controle admissível u associe a seguinte filtragem:

$$\mathscr{X}_t^u := \sigma\left(x_s^u\,,\, 0 \le s \le t\right), \quad t \in [0, t_f]. \tag{3.22}$$

O sobrescrito u na equação anterior será mantido para enfatizar que a filtragem depende do controle.

Considere o seguinte subconjunto dos controles admissíveis:

$$\mathcal{U}_{cl} := \{u \in \mathcal{U}^2_{\mathscr{W}} \mid u_t \text{ é } \mathscr{X}_t^u - \text{mensurável}, \ q.t.t\}. \tag{3.23}$$

Hipóteses 3.3.

1. *$\sigma(t, x, u)$ é uniformemente limitada;*

2. *$\sigma(t, x, u)$ admite inversa pela esquerda $E(t, x, u)$, para todo (t, x, u) no domínio de σ;*

3. *$E(t, x, u)$ é uniformemente limitada.*

Finalmente, na Seção 3.3, é demonstrado, sob as hipóteses (3.1-3.3), que:

1. $\mathscr{X}_t^{u_1} = \mathscr{X}_t^{u_2} = \mathscr{W}_t$, $\forall t \in [0, t_f]$ se u_1, u_2 são elementos arbitrários de $\mathcal{U}_{cl}$;

2. $\mathcal{U}_{cl}$ é um subconjunto denso de $\mathcal{U}^2_{\mathscr{W}}$;

3. se u^* é ótimo em $\mathcal{U}^2_{\mathscr{W}}$, dado $\epsilon > 0$ é sempre possível encontrar um $u^\epsilon \in \mathcal{U}_{cl}$ tal que $J(u^*) \le J(u^\epsilon) + \epsilon$.

3.3 A constância da σ-álgebra gerada pelo estado

Lema 3.1. *O conjunto $\mathcal{U}_{cl}$ definido em (3.23) é não-vazio.*

Demonstração. Basta observar que $u(t,\omega) := f(t)$, onde $f \in L^2([0,T], \mathscr{B}_{[0,t]}, \lambda; \mathbb{R}^d)$ e f é contínua, pertence a $\mathcal{U}_{cl}$. □

Proposição 3.1. *Considere o sistema descrito pela Equação (3.1). Se $u \in \mathcal{U}_{cl}$ e as hipóteses 3.1-3.3 forem válidas, então:*

$$\mathscr{X}_t^u = \mathscr{W}_t, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.24}$$

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{U}_{cl}$ arbitrário (existe devido ao lema 3.1).

A inclusão $\mathscr{X}_t^u \subseteq \mathscr{W}_t$ segue da definição de solução forte (ver (LIPTSER; SHIRYAYEV, 1977, definição 8, p.127)) e do fato de u ser controle admissível.

Para demonstrar a igualdade (3.24) basta demonstrar que $\mathscr{W}_t \subseteq \mathscr{X}_t^u, \forall t \in [0,t_f]$.

Para mostrar que $\mathscr{W}_t \subseteq \mathscr{X}_t^u$, defina, inicialmente, $z_t := \sigma(t, x_t^u, u_t)$. Naturalmente, como σ é, por hipótese, contínua e uniformemente limitada segue que z_t é um martingale contínuo adaptado a $\mathscr{X}_t^u \subseteq \mathscr{W}_t$ tal que $\operatorname{tr}(z_s z_s^\top) < \infty$. Logo, $\alpha_t = \int_0^t z_s dw_s$ está bem definido e é um martingale contínuo adaptado a $\mathscr{W}_t$ com processo de variação quadrática

$$\langle \alpha \rangle_t = \int_0^t z_s z_s^\top ds. \tag{3.25}$$

Agora, lembrando que:

$$x_t^u = \xi + \int_0^t f(s, x_s^u, u_s) ds + \int_0^t \sigma(s, x_s^u, u_s) dw_s, \tag{3.26}$$

segue que $\alpha_t = x_t^u - x_0 - \int_0^t f(s, x_s^u, u_s) ds$ e, portanto, α_t é adaptado a $\mathscr{X}_t^u$.

Como α_t é um $\mathscr{X}_t^u$-martingale contínuo quadrado integrável e $E(t,x,u)$ é uniformemente limitada segue que $\beta_t := \int_0^t E(s, x_s^u, u_s) d\alpha_s$ está bem definido e, além disso, β_t é adaptado a $\mathscr{X}_t^u$.

Por outro lado, do corolário 2.20 na página 145 em (KARATZAS; SHREVE, 1991), tem-se que:

$$\beta_t = \int_0^t E(s, x_s^u, u_s)\sigma(s, x_s^u, u_s) dw_s \tag{3.27}$$
$$= \int_0^t I_{m\times m} dw_s = w_t. \tag{3.28}$$

Agora, como $\beta_t = w_t$ e é adaptado a $\mathscr{X}_t^u$ segue que:

$$\mathscr{W}_t \subseteq \mathscr{X}_t^u, \qquad \forall t \in [0, t_f]. \tag{3.29}$$

Lembrando que $u \in \mathcal{U}_{cl}$ foi tomado arbitrário, o resultado segue. □

Observação 3.6. *A igualdade (3.24) é válida apenas para controles $u \in \mathcal{U}_{cl}$. No lema 3.1 foi ressaltado que $\mathcal{U}_{cl} \neq \emptyset$ e, na próxima proposição, mostra-se que o fecho de $\mathcal{U}_{cl}$ coincide com $\mathcal{U}^2_{\mathscr{W}}$.*

Lema 3.2. *Seja $N \in \mathbb{N}$. Defina $k := \frac{t_f}{N}$ e considere o conjunto $\{0, k, 2k, \ldots Nk\}$ (uma partição de $[0, t_f]$). Tome $v \in \mathcal{U}^2_{\mathscr{W}}$ e $c \in U$ quaisquer. Defina*

$$v^k(t,\omega) := \begin{cases} c & \text{se } t \in [0,k) \\ \frac{1}{k}\int_{(n-1)k}^{nk} v(s,\omega) ds & \text{se } t \in [nk,(n+1)k), n \in \{1,2,\ldots,N-1\}. \end{cases} \tag{3.30}$$

Sob estas condições segue que:

1. $v^k \in \mathcal{U}^2_{\mathscr{W}}$;

2. $\int_{[0,T]\times\Omega} \|v^k - v\|^2 d\lambda_1 \otimes \mathsf{P} \to 0$ *as* $N \to \infty$ *(ou seja, $k \to 0$).*

Demonstração. A idéia da demonstração é empregar a técnica usada na demonstração do lema 2.4, página 132 de (KARATZAS; SHREVE, 1991). □

Proposição 3.2. *Assuma que as hipóteses 3.1-3.3 são válidas. Sob estas hipóteses $\mathcal{U}_{cl}$ é um subconjunto denso de $\mathcal{U}^2_{\mathscr{W}}$.*

Demonstração. Sejam $v \in \mathcal{U}^2_{\mathscr{W}}$ e v^k definido no lema 3.2. Como, pelo resultado anterior, $v^k \to v$ no sentido do L^2 (quando $k \to 0$) e $v^k, v \in \mathcal{U}^2_{\mathscr{W}}$, $\forall k$, para concluir a demonstração desta proposição basta mostrar que $v^k \in \mathcal{U}_{cl}$, $\forall k$.

Para isto, denote a solução forte da EDE (3.1) correspondente ao controle v^k por x^k e defina $\mathscr{X}_t^k := \sigma\left(x_s^k,\ 0 \le s \le t\right)$, $t \in [0, t_f]$.

Agora, procedendo como na demonstração da Proposição 3.2 tem-se que os processos $\alpha_t^k := \int_0^t \sigma(s, x_s^k, v_s^k) dW_s$ e $\beta_t^k := \int_0^t E(s, x_s^k, v_s^k) d\alpha_s^k = w_t$ estão bem definidos.

Para concluir a demonstração basta proceder por indução finita. Para $t \in [0, k]$ segue que $v_t^k = c \in \mathbb{R}^d$ (c é determinístico e definido no Lema 3.2) e, portanto, v_t^k é adaptado à $\mathscr{X}_t^k$ e (procedendo como na Proposição 3.1):

$$\mathscr{W}_t = \mathscr{X}_t^k, \quad t \in [0, k]. \tag{3.31}$$

Assume-se que $\mathscr{W}_t = \mathscr{X}_t^k, \quad t \in [(n-1)k, nk]$ e mostra-se que vale para $t \in [nk, (n+1)k]$. De fato, pela hipótese indutiva v_t é adaptado a $\mathscr{W}_t = \mathscr{X}_t^k$, $t \in [(n-1)k, nk]$ e, conseqüentemente, v_t^k é adaptado à $\mathscr{X}_t^k$, $t \in [nk, (n+1)k]$ e, portanto, α_t^k e β_t^k são adaptados à $\mathscr{X}_t^k$, $t \in [nk, (n+1)k]$. Como $\beta_t^k = w_t$ segue que:

$$\mathscr{W}_t = \mathscr{X}_t^k, \quad \forall t \in [0, t_f]. \tag{3.32}$$

Assim, segue que $v^k \in \mathcal{U}_{cl}$ o que termina com a demonstração. □

Lema 3.3. *O funcional custo J da Equação (3.2) sob as hipóteses 3.2 é contínuo no sentido do L^2.*

Demonstração. Segue das hipóteses 3.2, lema de Grönwall e desigualdade de Cauchy-Schwarz. Ver, por exemplo, um esboço na página 6 de (BENSOUSSAN, 1983). □

Proposição 3.3. *Sob as hipótese (3.1-3.3) segue que:*

$$\inf_{u \in \mathcal{U}^2_{\mathscr{W}}} J(u) = \inf_{u \in \mathcal{U}_{cl}} J(u) \tag{3.33}$$

Demonstração. Conseqüência imediata da Proposição 3.2 e do Lema 3.3. □

Observação 3.7. *Naturalmente, o resultado da Proposição 3.3 é válido para qualquer funcional custo contínuo no sentido do L^2.*

3.4 Discussão

Observação 3.8. *A imposição de σ ser uniformemente limitada em $[0, t_f] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$ é bastante restritiva. No caso em que $U \subseteq \mathbb{R}^d$ for compacto, os controles admissíveis forem $U^2_{\mathscr{W}}$ e ξ for L^2 limitada, então pode-se mostrar (usando o lema de Grönwall) que $\mathsf{E}\left[\max_{0 \le s \le t_f} \|x_s\|^2\right] \le K\left(1 + \mathsf{E}\left[\|\xi\|^2\right]\right)$ e, conseqüentemente, $\exists D \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto tal que $x_t \in D$ P-a.s., $\forall t \in [0, t_f]$. Neste caso, considerando-se σ restrita a $[0, t_f] \times D \times U$, esta imposição é trivialmente satisfeita uma vez que a σ é contínua e o seu domínio é compacto.*

Observação 3.9. *Naturalmente, o resultado da Proposição 3.3 não implica que $\exists u^*$ ótimo em $\mathcal{U}_{cl}$ nem que $\exists v_*$ ótimo em $\mathcal{U}^2_{\mathscr{W}}$ (ver Observação 3.1, na página 46, considerando f definida no aberto). De fato, qualquer um dos dois pode existir sem que o outro exista. No caso em que $\exists v_*$, usando a construção no Lema 3.2 constrói-se, a partir de v_*, um controle ϵ-ótimo em $\mathcal{U}_{cl}$.*

Na literatura, existem pelo menos três formulações alternativas que visam a contornar, ao invés de atacar, o problema técnico: a σ-álgebra gerada pelo estado, a qual deseja-se (de forma a tornar o cenário mais realista) que o processo de controle seja adaptado, depende explicitamente do processo de controle. A saber: (1) restringir a classe de controles admissíveis a uma das classes $\mathcal{V}_{ME}, \mathcal{V}_{LM}, \mathcal{V}_M$, ou $\mathcal{V}_{Nat}$; (2) teorema de Girsanov; (3) controles adaptados a σ-álgebra $\mathscr{X}_t = \sigma\,(x_s\,,\, 0 \leq s \leq t-\epsilon)$ onde $\epsilon > 0$ é dado.

A seguir, discute-se brevemente estas três abordagens.

(1) Restrição da classe de controles admissíveis: Considere o problema (3.1)- (3.2) sob as Hipóteses 3.1 e 3.3. Neste caso, uma vez que $\mathcal{V}_{ME} \subseteq \mathcal{V}_M \subseteq \mathcal{V}_{Nat} \subseteq \mathcal{U}^2_{\mathscr{W}}$ tem-se

$$\inf_{u\in\mathcal{V}_{ME}} J(u) \geq \inf_{u\in\mathcal{V}_{M}} J(u) \geq \inf_{u\in\mathcal{V}_{Nat}} J(u) \geq \inf_{u\in\mathcal{U}^2_{\mathscr{W}}} J(u) = \inf_{u\in\mathcal{U}_{cl}} J(u), \tag{3.34}$$

e, portanto, o custo ótimo (o controle ótimo pode nem existir) pode aumentar à medida em que se restringe a classe de controles admissíveis. As desigualdades anteriores podem ser estritas, por exemplo, quando o controle ótimo em $\mathcal{U}_{cl}$ for *bang-bang* (restringindo os controles a funções Lipschitz do estado exclui-se controles *bang-bang*). No problema LQG a igualdade se verifica ao considerar $\mathcal{V}_M, \mathcal{V}_{Nat}$ e $\mathcal{U}^2_{\mathscr{W}}$ como controles admissíveis.

Observação 3.10. *No caso em que $\mathcal{V}_{Nat}$ são os candidatos a controle admissível, EDEs com deriva e difusão, da forma $f : [0,t_f], C([0,t_f];\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ e $\sigma : [0,t_f], C([0,t_f];\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^{n\times m_1}$, respectivamente, precisam ser consideradas. Veja, por exemplo, (YONEYAMA, 1983, p. 44-51).*

(2) Emprego do teorema de Girsanov: Uma outra abordagem consiste em considerar as soluções no sentido de Girsanov. A principal limitação desta abordagem, no entendimento deste autor, é assumir que o estado $\{x_t\}$ e o processo de Wiener $\{W_t\}$ tem a mesma dimensão e que a matriz de difusão e a sua inversa são uniformemente limitadas. No caso em que a dimensão do processo de Wiener é menor ou igual ao estado um possível contorno para esta limitação pode ser considerar

$$\sigma(t,x,u) = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}(t,x,u) & \epsilon I_{j\times j} \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

onde I é a matriz identidade, $\epsilon > 0$ dado e considerar um processo de Wiener com dimensão maior (j componentes a mais).

(3) Controles adaptados a uma informação atrasada: No caso em que o controle é assumido adaptado à $\mathscr{X}_t^\epsilon = \sigma(x_s\,,\, 0 \le s \le t-\epsilon)$, para cada $\epsilon > 0$, se o controle admissível u é adaptado a $\mathscr{X}_t^\epsilon$ e L^p limitado então sob as Hipóteses 3.1 a EDE tem solução forte e gera uma σ-álgebra independente do controle (para demonstrar basta proceder por indução nos intervalos $[n\epsilon, (n+1)\epsilon))$. Esta abordagem elimina, por exemplo as restrições rígidas na matriz de difusão. Por outro lado, introduz, por exemplo, o problema de entender o que acontece quando $\epsilon \to 0$.

3.5 Comentários finais

Esta parte do trabalho investigou a possibilidade de se definir os controles admissíveis como processos adaptados ao estado do sistemas (problemas com observações completas). Neste sentido, as condições de um resultado da literatura foram relaxadas e estende-se a classe de problemas para os quais existe um subconjunto de processos de controle $\mathcal{U}_{cl}$, tal que $\forall u \in \mathcal{U}_{cl}$, $\mathscr{X}_t^u$ é igual a σ-álgebra gerada pelo processo de Wiener $\mathscr{W}_t$.

4 Controle ótimo de sistemas lineares excitados por martingales quadrado integráveis

> *“One often gets the impression that [the algebraic Riccati] equation in fact constitutes the bottleneck of all linear system theory"*
>
> –J. C. WILLEMS

4.1 Introdução

O termo controle ótimo linear quadrático (LQ) refere-se a uma classe de problemas de controle ótimo em que a dinâmica do sistema a ser controlado é linear tanto no estado quanto no controle e o custo a ser minimizado é quadrático nestas duas variáveis. No caso determinístico, ou seja, no caso em que a evolução do estado do sistema é descrito por uma equação diferencial ordinária linear, estudos pioneiros foram apresentados em (BELLMAN et al., 1958; KALMAN, 1960). Extensões para o caso estocástico, em que o estado do sistema é descrito por uma equação diferencial estocástica, foram apresentadas inicialmente em (KUSHNER, 1962; WONHAM, 1968b; McLANE, 1971; BISMUT, 1976). Devido ao esforço combinado de diversos pesquisadores durante os últimos 50 anos foi possível se estabelecer uma teoria extremamente rica para esta classe de problemas, tanto no caso determinístico quanto estocástico. Mais recentemente, inciando, aparentemente, com (CHEN et al., 1998), a classe de problemas estocásticos LQ voltou a receber grande atenção (CHEN; ZHOU, 2000; RAMI et al., 2000; RAMI; ZHOU, 2000; RAMI et al., 2001; CHEN; YONG, 2001; RAMI et al., 2001; YAO et al., 2001; TANG, 2003; HU; ZHOU, 2003; CHEN; ZHOU, 2004; HU; ZHOU, 2005a; HU; ZHOU, 2005b). Entraram em foco os chamados problemas estocásticos LQ indefinidos, nos quais as matrizes peso da função não são necessariamente matrizes definidas[1], e o controle LQ de sistemas lineares excitados pelo movimento Browniano fracionário (HU; ZHOU, 2005b). Uma revisão detalhada do problema LQ estocástico indefinido por ser encontrada, por exemplo, em (PAULO, 2007).

Nesta parte do trabalho, de certa forma inspirado pelo trabalho de (HU; ZHOU, 2005b), estuda-se o problema LQ de sistemas descritos por equações diferenciais estocásticas excitadas por martingales quadrado integráveis tanto contínuos quanto descontínuos. Conforme mencionado no Capítulo 2, tanto o processo de Wiener quanto o processo de Poisson compensado pertencem a esta classe de processos estocásticos, de forma que os resultados apresentados aqui podem ser especializados para estes processos estocásticos.

Para se analisar este problema serão usados os resultados do cálculo estocástico sumarizados no Capítulo 2, em especial as fórmulas de mudança de variáveis, e argumentos de "completar os quadrados" empregados, por exemplo, em (BENSOUSSAN, 2004) e (ÅSTRÖM, 2006, p.286-292) ao estudar o caso clássico de sistemas excitados pelo processo de Wiener. Um fato, de certa forma supreendente, é que embora se estude sistemas com excitações mais gerais que as

[1]Classicamente, é exigido que a matriz peso do estado e do controle na função custo sejam, respectivamente, positiva semidefinida e positiva definida.

comumente encontradas na literatura, o problema de controle ótimo é reduzido, analogamente ao caso clássico, ao estudo da existência de soluções de equações diferenciais de Riccati e, tanto o custo ótimo quanto o controle ótimo são obtidos explicitamente (dependendo da solução da equação de Riccati associada).

No caso com observações completas, são estudados quatro casos particulares: (a) EDE linear excitada aditivamente por um martingale $M \in \mathscr{M}_2^c$ (ver Notação 2.1, na página 27); (b) EDE linear excitada tanto aditivamente por um martingale $M \in \mathscr{M}_2^c$ quanto por processos de Wiener dependentes do estado e do controle; (c) EDE excitada aditivamente por um martingale $\tilde{M} \in \mathscr{M}_2$; (d) EDE linear excitada tanto aditivamente por um martingale $M \in \mathscr{M}_2^c$ quanto por processos de Poisson compensados multiplicados pelo processo de controle e pelo estado.

No caso com observações parciais, ou seja, em que os processos de controle são assumidos adaptados à $\{\mathscr{Y}_t\}_{t\geq 0}$ uma sub-filtração da filtração $\sigma(M_s\,,\, 0 \leq s \leq t)$, $t \geq 0$, mostra-se que o funcional custo também pode ser reescrito de forma conveniente para o estudo do problema de controle ótimo. Este resultado pode ser interpretado como uma condição necessária para a validade do princípio de equivalência à certeza para EDE excitadas aditivamente por $M \in \mathscr{M}_2^c$. Ilustra-se a aplicação deste resultado para o caso clássico de sistemas excitados por um processo de Wiener.

Mais detalhes sobre o problema LQ determinístico pode ser obtido, por exemplo, em (DORATO et al., 1995; ATHANS; FALB, 2006; ANDERSON; MOORE, 2007) e em suas referências. O caso estocástico é estudado, por exemplo, em (FLEMING; RISHEL, 1975; DAVIS, 1977; CHEN et al., 1995; YONG; ZHOU, 1999; BENSOUSSAN, 2004; ÅSTRÖM, 2006).

Um estudo sobre a estabilidade de sistemas lineares excitados por martingales quadrado integráveis pode ser encontrada, por exemplo, em (GRIGORIU, 2001).

Os resultados deste capítulo serão apresentados, também, em (SILVA; YONEYAMA, 2008a).

Este capítulo está organizado da seguinte forma. Na Seção 4.2 serão estudados os casos (a) e (b) descritos acima. Os casos (c) e (d) são estudados na Seção 4.3. Na Seção 4.4 estuda-se o caso com observações parciais para sistemas excitados por martingales contínuos. Além disso, a aplicação deste resultado será ilustrada para o caso clássico de sistemas excitados por processos de Wiener. Finalmente, na Seção 4.5 serão tecidos alguns comentários finais.

4.2 Sistemas excitados por martingales contínuos: observações completas

Lema 4.1. *Sejam* $S \in \mathcal{S}^{n+}$, $v, b \in \mathbb{R}^n$ *e* $c \in \mathbb{R}$. *Então,*

- $v^\top S v + 2b^\top v + c = \left(v + S^{-1}b\right)^\top S \left(v + S^{-1}b\right) + c - b^\top S^{-1} b;$
- $v^\top S v + 2b^\top v + c \geq c - b^\top S^{-1} b, \forall v \in \mathbb{R}^n;$
- $v^\top S v + 2b^\top v + c = c - b^\top S^{-1} b$ *se, e somente se,* $v = -S^{-1}b$.

Demonstração. Imediato. □

4.2.1 Formulação dos problemas

Sejam $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}\}_{t\geq 0}, \mathsf{P})$ um espaço de probabilidade filtrado satisfazendo as condições usuais, ξ uma variável aleatória limitada no sentido do L^2 com média μ_0 e $\mathsf{E}\left[x_0 x_0^\top\right] = P_0$, $w^i = (w^i_t, \mathscr{F}_t)$, $i = 1, \ldots, k$, processos de Wiener unidimensionais, $M = (M_t, \mathscr{F}_t)$, um $(\mathscr{F}_t, \mathsf{P})$-martingale quadrado integrável, $M \in \mathscr{M}^c_2$, e $t_f \in [0, \infty)$ fixado *a priori*.

Problema 4.1. *Considere um sistema descrito por*

$$\begin{cases} dx_t = [A(t)x_t + B(t)u_t + g(t)]\,dt + dM_t, \\ \\ x_0 = \xi, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $A : [0, t_f] \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $B : [0, t_f] \to \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ *e* $g : [0, t_f] \to \mathbb{R}^n$ *são mapeamentos contínuos. Assuma que a performance do sistema possa ser adequadamente mensurada por:*

$$J(u) = \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} x_t^\top Q(t)x_t + u_t^\top R(t)u_t dt + x_{t_f}^\top F x_{t_f}\right]. \tag{4.2}$$

onde $Q : [0, t_f] \to \mathcal{S}^{n0}$, $R : [0, t_f] \to \mathcal{S}^{m+}$ *são mapeamentos contínuos e* $F \in \mathcal{S}^{n0}$.

Denote por $\mathcal{U}_1$ *o conjunto de todos os processos* $\mathscr{F}_t$*–progressivamente mensuráveis tais que para cada* $u \in \mathcal{U}_1$ *a Equação* (4.1) *admite solução* x^u *e o funcional custo dado pela Equação* (4.2)*, calculado no par* (u, x^u)*, esteja bem definido.*

Encontrar, se existir, $u^* \in \mathcal{U}_1$ *tal que:*

$$J(u^*) = \inf_{u\in\mathcal{U}_1} J(u). \tag{4.3}$$

Problema 4.2. *Considere um sistema descrito por*

$$\begin{cases} dx_t = (A(t)x_t + B(t)u_t + g(t))\,dt + \displaystyle\sum_{i=1}^{k} (C_i(t)x_t + D_i(t)u_t + f_i(t))\,dw_t^i + dM_t \\ \\ x_0 = \xi, \end{cases} \tag{4.4}$$

onde $A : [0, t_f] \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $B : [0, t_f] \to \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, $g : [0, t_f] \to \mathbb{R}^n$, $C_i : [0, t_f] \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $D_i : [0, t_f] \to \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, $f_i : [0, t_f] \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, k$*, são mapeamentos contínuos.*

Assuma que $w^i = (w_t^i, \mathscr{F}_t)$, $i = 1, \ldots, k$, $M = (M_t, \mathscr{F}_t)$ *e* ξ *são independentes e que a* *performance do sistema possa ser adequadamente mensurada por:*

$$J(u, x^u) = \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} [x_t^\top Q(t)x_t + u_t^\top R(t)u_t + 2q(t)^\top x_t + 2r(t)^\top u_t]\, dt + x_{t_f}^\top F x_{t_f} + 2h^\top x_{t_f}\right], \quad (4.5)$$

onde $Q : [0, t_f] \to \mathcal{S}^{n0}$, $R : [0, t_f] \to \mathcal{S}^{m+}$, $q : [0, t_f] \to \mathbb{R}^n$, $r : [0, t_f] \to \mathbb{R}^m$ *são mapeamentos contínuos,* $F \in \mathcal{S}^{n0}$ *e* $h \in \mathbb{R}^n$.

Denote por $\mathcal{U}_2$ *o conjunto de todos os processos* $\mathscr{F}_t$*–progressivamente mensuráveis tais que para cada* $u \in \mathcal{U}_2$ *a Equação* (4.4) *admite solução* x^u *e o funcional custo dado pela Equação* (4.5)*, calculado no par* (u, x^u)*, esteja bem definido.*

Encontrar, se existir, $u^* \in \mathcal{U}_2$ *tal que:*

$$J(u^*) = \inf_{u \in \mathcal{U}_2} J(u). \quad (4.6)$$

4.2.2 Estudo do Problema 4.1

Proposição 4.1. *Sejam* $A(t)$, $B(t)$, $R(t)$ *e* $Q(t)$ *nas condições do Problema 4.1. Então, a equação de diferencial de Riccati*

$$\begin{cases} \dot{K}(t) + A(t)^\top K(t) + K(t)A(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^\top(t)K(t) + Q(t) = 0, \\ K(t_f) = F, \end{cases} \quad (4.7)$$

admite uma solução $K : [0, t_f] \to \mathcal{S}^{n0}$.

Demonstração. Veja, por exemplo, (WONHAM, 1968a), (WONHAM, 1970), (DAVIS, 1977, p.161-162). □

Proposição 4.2. *Sejam* $A(t)$, $B(t)$, $R(t)$ *e* $g(t)$ *nas condições do Problema 4.1 e* $K(t)$ *solução da*

Equação (4.7). *Então, a equação diferencial*

$$
\begin{cases}
\dot{k}(t) + \left[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B(t)K(t)\right]^{\top} k(t) + K(t)g(t) = 0, \\
k(t_f) = 0,
\end{cases}
\tag{4.8}
$$

admite uma solução $k : [0, t_f] \to \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Segue da teoria de equações diferenciais ordinárias lineares. □

Teorema 4.1. *Sejam* $u \in \mathcal{U}_1$ *qualquer e* x *a solução da Equação* (4.1) *quando* u *é aplicado. Então, para cada par* (u, x^u) *o custo dado pela Equação* (4.2) *pode ser reescrito como:*

$$
\begin{aligned}
J(u) = {} & \operatorname{tr}(K(0)P_0) + \mu_0^{\top} k(0) + \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} 2g^{\top}(t)k(t)dt\right] + \mathsf{E}\left[\int_0^{t} \operatorname{tr}(K(t)d\langle M, M\rangle_t)\right] - \\
& - \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} k^{\top}(t)B(t)R^{-1}(t)B^{\top}(t)k(t)dt\right] + \\
& + \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} \left[u_t + R^{-1}(t)B^{\top}(t)\left(K(t)x_t + k(t)\right)\right]^{\top} R(t)\left[u_t + R^{-1}(t)B^{\top}(t)\left(K(t)x_t + k(t)\right)\right] dt\right].
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Demonstração. Seja $V(t, x) := x^{\top}K(t)x + 2x^{\top}k(t)$ com K e k soluções de (4.7) e (4.8), respectivamente. Aplicando a fórmula de Itô–Doléans-Dade-Meyer, Teorema 2.5 na página 34, em $V(t, x_t)$ e observando que $\Delta x_t = 0$ P−q.s., obtém-se:

$$
\begin{aligned}
V(t_f, x_{t_f}) = {} & V(0, x_0) + \int_0^{t_f} \left[x_t\dot{K}(t)x_t + 2x_t^{\top}\dot{k}(t)\right] dt + \\
& + \int_0^{t_f} \left[dx_t^{\top}K(t)x_t + x_tK(t)dx_t + 2dx_t^{\top}k(t)\right] + \frac{1}{2}\int_0^{t} \operatorname{tr}\left(2K(t)d\langle M, M\rangle_t\right).
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

Agora, da definição de V e das Equações (4.7) e (4.8), tem-se que $V(t_f, x_{t_f}) = x_{t_f}^{\top}Fx_{t_f}$ e como x

é solução de (4.1) quando u é aplicado segue que:

$$\begin{aligned}
x_{t_f}^\top F x_{t_f} = x_0^\top K(0) x_0 + x_0^\top k(0) + \int_0^{t_f} \left[x_t \dot{K}(t) x_t + 2 x_t^\top \dot{k}(t) \right] dt + \\
+ \int_0^{t_f} \left\{ \left[A(t) x_t dt + B(t) u_t dt + g(t) dt + dM_t \right]^\top K(t) x_t \right\} + \\
+ \int_0^{t_f} \left\{ x_t^\top K(t) \left[A(t) x_t dt + B(t) u_t dt + g(t) dt + dM_t \right] \right\} + \\
+ \int_0^{t_f} \left\{ 2 \left[A(t) x_t dt + B(t) u_t dt + g(t) dt + dM_t \right]^\top k(t) \right\} + \\
+ \int_0^{t} \operatorname{tr} \left(K(t) d\langle M, M \rangle_t \right).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Somando $\int_0^t x_t^\top Q(t) x_t + u_t^\top R(t) u_t dt$ em ambos os lados da equação anterior, lembrando que $K(t)$ é simétrica e reordenando, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\int_0^t x_t^\top Q(t) x_t + u_t^\top R(t) u_t dt + x_{t_f}^\top F x_{t_f} = x_0^\top K(0) x_0 + x_0^\top k(0) + \\
+ \int_0^{t_f} u_t^\top R(t) u_t + 2 \left[B^\top(t) (K(t) x_t + k(t)) \right]^\top u_t dt + \\
+ \int_0^{t_f} x_t^\top \left[\dot{K}(t) + A^\top(t) K(t) + K(t) A(t) + Q(t) \right] x_t dt + \\
+ \int_0^{t_f} 2 x_t^\top \left[\dot{k}(t) + A^\top(t) k(t) + K(t) g(t) \right] dt + \\
+ \int_0^{t_f} 2 g^\top(t) k(t) dt + \int_0^{t_f} \left[dM_t^\top K(t) x_t + x_t^\top K(t) dM_t + 2 dM_t^\top k(t) \right] + \\
+ \int_0^{t} \operatorname{tr} \left(K(t) d\langle M, M \rangle_t \right).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Do Lema 4.1 com $v = u_t$, $S = R(t)$, $b = B^\top(t)(K(t) x_t + k(t))$ e $c = 0$:

$$\begin{aligned}
& u_t^\top R(t) u_t + 2 \left[B^\top(t) (K(t) x_t + k(t)) \right]^\top u_t = \\
& = \left[u_t + R^{-1}(t) B^\top(t) \left(K(t) x_t + k(t) \right) \right]^\top R(t) \left[u_t + R^{-1}(t) B^\top(t) \left(K(t) x_t + k(t) \right) \right] - \\
& - x_t^\top K(t) B(t) R^{-1}(t) B^\top(t) K(t) x_t - 2 x_t^\top \left[B(t) R^{-1}(t) B^\top(t) K(t) \right]^\top k_t - \\
& - k^\top(t) B(t) R^{-1}(t) B^\top(t) k(t),
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Substituindo a Equação (4.13) em (4.12) e reorganizando, obtém-se:

$$
\begin{aligned}
\int_0^t x_t^\top Q(t)x_t + u_t^\top R(t)u_t dt + x_{t_f}^\top F x_{t_f} = x_0^\top K(0)x_0 + x_0^\top k(0) + \\
+ \int_0^{t_f} \left[u_t + R^{-1}(t)B^\top(t)\left(K(t)x_t + k(t)\right)\right]^\top R(t)\left[u_t + R^{-1}(t)B^\top(t)\left(K(t)x_t + k(t)\right)\right] dt + \\
+ \int_0^{t_f} x_t^\top \left[\dot{K}(t) + A^\top(t)K(t) + K(t)A(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^\top(t)K(t) + Q(t)\right] x_t dt + \\
+ \int_0^{t_f} 2x_t^\top \left[\dot{k}(t) + \left(A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^\top(t)K(t)\right)^\top k(t) + K(t)g(t)\right] dt + \\
+ \int_0^{t_f} 2g^\top(t)k(t)dt + \int_0^{t_f} \left[dM_t^\top K(t)x_t + x_t^\top K(t)dM_t + 2dM_t^\top k(t)\right] - \\
- \int_0^t k^\top(t)B(t)R^{-1}(t)B^\top(t)k(t)dt + \int_0^t \operatorname{tr}\left(K(t)d\langle M, M\rangle_t\right).
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Como $K(t)$ e $k(t)$ são soluções de (4.7) e (4.8), respectivamente, tem-se

$$
\begin{aligned}
\int_0^t x_t^\top Q(t)x_t + u_t^\top R(t)u_t dt + x_{t_f}^\top F x_{t_f} = x_0^\top K(0)x_0 + x_0^\top k(0) + \\
+ \int_0^{t_f} \left[u_t + R^{-1}(t)B^\top(t)\left(K(t)x_t + k(t)\right)\right]^\top R(t)\left[u_t + R^{-1}(t)B^\top(t)\left(K(t)x_t + k(t)\right)\right] dt + \\
+ \int_0^{t_f} 2g^\top(t)k(t)dt + \int_0^{t_f} \left[dM_t^\top K(t)x_t + x_t^\top K(t)dM_t + 2dM_t^\top k(t)\right] - \\
- \int_0^t k^\top(t)B(t)R^{-1}(t)B^\top(t)k(t)dt + \int_0^t \operatorname{tr}\left(K(t)d\langle M, M\rangle_t\right).
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

Agora, por hipótese $M \in \mathscr{M}_2^c$ e, portanto, usando a Proposição 2.5 da página 33, tem-se que:

$$
\mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} \left[dM_t^\top K(t)x_t + x_t^\top K(t)dM_t + 2dM_t^\top k(t)\right]\right] = 0. \tag{4.16}
$$

Finalmente, tomando a esperança em (4.15), obtém-se

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left[\int_0^t x_t^\top Q(t)x_t + u_t^\top R(t)u_t dt + x_{t_f}^\top F x_{t_f}\right] &= \mathsf{E}\left[x_0^\top K(0)x_0\right] + \mathsf{E}\left[x_0^\top k(0)\right] + \\ &+ \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} \left[u_t + R^{-1}(t)B^\top(t)\left(K(t)x_t + k(t)\right)\right]^\top R(t)\left[u_t + R^{-1}(t)B^\top(t)\left(K(t)x_t + k(t)\right)\right] dt\right] + \\ &+ \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} 2g^\top(t)k(t)dt\right] + \mathsf{E}\left[\int_0^t \operatorname{tr}\left(K(t)d\langle M, M\rangle_t\right)\right] - \mathsf{E}\left[\int_0^t k^\top(t)B(t)R^{-1}(t)B^\top(t)k(t)dt\right].\end{aligned} \tag{4.17}$$

$\square$

Corolário 4.1. *Sejam $A(t)$, $B(t)$ e $R(t)$ nas condições do Problema 4.1, $K(t)$ e $k(t)$ solução das Equações (4.7) e (4.8), respectivamente. Então,*

$$u_t^* := -R^{-1}(t)B^\top(t)\left(K(t)y_t + k(t)\right), t \in [0, t_f], \tag{4.18}$$

onde

$$\begin{cases} dy_t = \left[\left(A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^\top(t)K(t)\right)y_t - B(t)R^{-1}(t)B^\top(t)k(t) + g(t)\right]dt + dM_t, \\ y_0 = \xi, \end{cases} \tag{4.19}$$

é tal que $u^* \in \mathcal{U}_1$ e

$$J(u^*) \leq J(u), \forall u \in \mathcal{U}_1. \tag{4.20}$$

Ainda,

$$\begin{aligned} J(u^*) = \operatorname{tr}\left(K(0)P_0\right) + \mu_0^\top k(0) + \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} 2g^\top(t)k(t)dt\right] + \mathsf{E}\left[\int_0^t \operatorname{tr}\left(K(t)d\langle M, M\rangle_t\right)\right] - \\ - \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} k^\top(t)B(t)R^{-1}(t)B^\top(t)k(t)dt\right]. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 4.1. $\square$

4.2.3 Estudo do Problema 4.2

Sejam $B(t)$, $R(t)$, $r(t)$, $C_i(t)$, $D_i(t)$, $f_i(t)$, $i = 1, \ldots, k$ dados na definição do Problema 4.2. Defina $\Gamma : [0, t_f] \times \mathcal{S}^{n0} \to \mathcal{M}^{n\times m}(\mathbb{R})$, $\mathcal{R} : [0, t_f] \times \mathcal{S}^{n0} \to \mathcal{M}^{m\times m}(\mathbb{R})$ e $\Upsilon[0, t_f] \times \mathcal{S}^{n0} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dados por

$$
\begin{aligned}
&\Gamma(t, K(t)) := K(t)B(t) + \sum_{i=1}^{k} C_i^\top(t)K(t)D_i(t),\\
&\mathcal{R}(t, K(t)) := R(t) + \sum_{i=1}^{k} D_i^\top(t)K(t)D_i(t),\\
&\Upsilon(t, K(t), k(t)) := \sum_{i=1}^{k} D_i^\top(t)K(t)f_i(t) + B^\top(t)k(t) + r(t).
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

Proposição 4.3. *Sejam $A(t)$, $B(t)$, $C_i(t)$, $D_i(t)$, $i = 1, \ldots, k$ dados na definição do Problema 4.2. Então, a equação diferencial matricial*

$$
\begin{aligned}
&\frac{dK}{dt}(t) + A^\top(t)K(t) + K^\top(t)A(t) + \sum_{i=1}^{k} C_i^\top(t)K(t)C_i(t) + Q(t)-\\
&\qquad - \Gamma(t, K(t)) \cdot \mathcal{R}^{-1}(t, K(t)) \cdot \Gamma^\top(t, K(t)) = 0,
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

admite uma solução $K : [0, t_f] \to \mathcal{S}^{n0}$.

Demonstração. Basta usar o método de quasi-linearização (BELLMAN, 1955) e aproximações sucessivas como originalmente feito em (WONHAM, 1968a). Ver, também, (WONHAM, 1970, p. 152). □

Proposição 4.4. *Sejam $A(t)$, $B(t)$, $g(t)$, $C_i(t)$, $D_i(t)$, $f_i(t)$, $i = 1, \ldots, k$, $R(t)$, $q(t)$ e $r(t)$ dados na definição do Problema 4.2 e $K(t)$ solução de (4.23). Então, a equação diferencial*

$$
\begin{aligned}
&\frac{dk}{dt}(t) + \left[A^\top(t) - \Gamma(t, K(t))\mathcal{R}^{-1}(t, K(t))B^\top(t)\right] k(t) + q(t) + K(t)g(t)+\\
&\qquad + \sum_{i=1}^{k} C_i^\top(t)K(t)f_i(t) - \Gamma(t, K(t))\mathcal{R}^{-1}(t, K(t)) \cdot \left(r(t) + \sum_{i=1}^{k} D_i^\top(t)K(t)f_i(t)\right) = 0
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

admite uma solução $k : [0, t_f] \to \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Segue da teoria de equações diferenciais ordinárias lineares. □

Teorema 4.2. *Sejam* $u \in \mathcal{U}_2$ *qualquer e* x *a solução da Equação* (4.4) *quando* u *é aplicado. Então, para cada par* (u, x^u) *o custo dado pela Equação* (4.5) *pode ser reescrito como:*

$$
\begin{aligned}
J(u) = \operatorname{tr}(K(0)P_0) + 2\mu_0^\top k(0) + \int_0^{t_f} 2g^\top(t)k(t)dt + \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^{k} f_i^\top(t)K(t)f_i(t)dt- \\
- \int_0^{t_f} \Upsilon^\top(t, K(t), k(t))\mathcal{R}^{-1}(t, K(t)) \cdot \Upsilon(t, K(t), k(t))dt + \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} \operatorname{tr}(K(t)d\langle MM\rangle_t)\right] + \\
+ \int_0^{t_f} \left\{u_t + \mathcal{R}^{-1}(t, K(t))\left[\Gamma^\top(t, K(t))x_t + \Upsilon(t, K(t), k(t))\right]\right\}^\top \cdot \mathcal{R}(t, K(t)) \cdot \\
\cdot \left\{u_t + \mathcal{R}^{-1}(t, K(t))\left[\Gamma^\top(t, K(t))x_t + \Upsilon(t, K(t), k(t))\right]\right\} dt.
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

Demonstração. Defina $\sigma^i : [0, t_f] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, $\widetilde{\sigma} : [0, t_f] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \to \mathcal{M}_{n\times k}(\mathbb{R})$, $\sigma : [0, t_f] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \to \mathcal{M}_{n\times k+n}(\mathbb{R})$ dadas por

$$\sigma^i(t, x, u) := C_i(t)x + D_i(t)u + f_i(t), \tag{4.26}$$

$$\widetilde{\sigma}(t, x, u) := \left[\sigma^1(t, x, u) \ \ \ldots \ \ \sigma^k(t, x, u)\right], \tag{4.27}$$

$$\sigma(t, x, u) := \left[\widetilde{\sigma}(t, x, u) \quad I_{n\times n}\right], \tag{4.28}$$

e, $\tilde{V}_t := \left[w_t^1 \ \ \ldots \ \ w_t^k \quad M_t^\top\right]^\top$. Naturalmente, a Equação (4.4) pode ser reescrita como:

$$dx_t = (A(t)x_t + B(t)u_t + g(t))\,dt + \sigma(t, x_t, u_t)d\tilde{V}_t. \tag{4.29}$$

Considere $V(t, x) = x^\top K(t)x + 2x^\top k(t)$ onde $K(t)$ e $k(t)$ são soluções de (4.23) e (4.24), respectivamente. Da fórmula de Itô–Doléans-Dade–Meyer, observando que $\Delta x_t = 0$:

$$\begin{aligned} V(t_f, x_{t_f}) = V(0, x_0) + &\int_0^{t_f} \left[x_t \dot{K}(t) x_t + 2x_t^\top \dot{k}(t)\right] dt + \\ &+ \int_0^{t_f} [dx_t^\top K(t) x_t + x_t^\top K(t) dx_t + 2dx_t^\top k(t)] + \\ &+ \operatorname{tr}\left(\int_0^{t_f} K(t)\sigma(t, x_t, u_t)\sigma^\top(t, x_t, u_t) d\langle \tilde{V}, \tilde{V}\rangle_t\right). \end{aligned} \tag{4.30}$$

De (4.29) obtém-se

$$\begin{aligned} V(t_f, x_{t_f}) = V(0, x_0) + &\int_0^{t_f} \left[x_t^\top \dot{K}(t) x_t + 2x_t^\top \dot{k}(t)\right] dt + \\ &+ \int_0^{t_f} \left[(A(t)x_t + B(t)u_t + g(t))\, dt + \sigma(t, x_t, u_t) d\tilde{V}_t\right]^\top K(t) x_t + \\ &+ \int_0^{t_f} x_t^\top K(t) \left[(A(t)x_t + B(t)u_t + g(t))\, dt + \sigma(t, x_t, u_t) d\tilde{V}_t\right] + \\ &+ \int_0^{t_f} 2\left[(A(t)x_t + B(t)u_t + g(t))\, dt + \sigma(t, x_t, u_t) d\tilde{V}_t\right]^\top k(t) + \\ &+ \operatorname{tr}\left(\int_0^{t_f} K(t)\sigma(t, x_t, u_t) d\langle \tilde{V}, \tilde{V}\rangle_t \sigma^\top(t, x_t, u_t)\right). \end{aligned} \tag{4.31}$$

Reordenando,

$$\begin{aligned} V(t_f, x_{t_f}) = V(0, x_0) + &\int_0^{t_f} x_t^\top \left[\dot{K}(t) + A^\top(t) K(t) + K(t) A(t)\right] x_t dt + \\ &+ \int_0^{t_f} 2x_t^\top \left[\dot{k}(t) + K(t) g(t) + A^\top(t) k(t)\right] dt + \\ &+ \int_0^{t_f} 2\left[B^\top(t) K(t) x_t + B^\top(t) k(t)\right]^\top u_t dt + \int_0^{t_f} 2g^\top(t) k(t) + \\ &+ \operatorname{tr}\left(\int_0^{t_f} K(t)\sigma(t, x_t, u_t) d\langle \tilde{V}, \tilde{V}\rangle_t\right) \sigma^\top(t, x_t, u_t) + \\ &+ \int_0^{t_f} d\tilde{V}_t^\top \sigma^\top(t, x_t, u_t) K(t) x_t + \int_0^{t_f} x_t^\top K(t)\sigma(t, x_t, u_t) d\tilde{V}_t + \\ &+ \int_0^{t_f} d\tilde{V}_t^\top \sigma^\top(t, x_t, u_t) k(t). \end{aligned} \tag{4.32}$$

Agora, como $\langle w^i, w^j\rangle_t = \delta_{ij}t$, $\langle w^i, M\rangle_t = 0_{1\times n}$, $i, j = 1, \dots k$ tem-se que

$$\langle\tilde{V}, \tilde{V}\rangle_t = \begin{bmatrix} I_{k\times k}t & 0_{k\times n} \\ 0_{n\times k} & \langle M, M\rangle_t \end{bmatrix}, \tag{4.33}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tr}\left(\int_0^{t_f} K(t)\sigma(t, x_t, u_t)d\langle V, V\rangle_t\sigma^\top(t, x_t, u_t)\right) = \\
&= \operatorname{tr}\left(\int_0^{t_f} K(t)\sigma(t, x_t, u_t)\begin{bmatrix} I_{k\times k}dt & 0_{k\times n} \\ 0_{n\times k} & d\langle M, M\rangle_t \end{bmatrix}\sigma^\top(t, x_t, u_t)\right) = \\
&= \operatorname{tr}\left(\int_0^{t_f} K(t)\widetilde{\sigma}(t, x_t, u_t)\widetilde{\sigma}^\top(t, x_t, u_t)dt\right) + \operatorname{tr}\left(\int_0^{t_f} K(t)d\langle M, M\rangle_t\right) = \\
&= \operatorname{tr}\left(\int_0^{t_f} K(t)\sum_{i=1}^k \sigma_i(t, x_t, u_t)\sigma_i^\top(t, x_t, u_t)dt\right) + \operatorname{tr}\left(\int_0^{t_f} K(t)d\langle M, M\rangle_t\right) = \\
&= \sum_{i=1}^k \operatorname{tr}\left(\int_0^{t_f} K(t)\sigma^i(t, x_t, u_t)\sigma_i^\top(t, x_t, u_t)dt\right) + \operatorname{tr}\left(\int_0^{t_f} K(t)d\langle M, M\rangle_t\right) = \\
&= \int_0^{t_f}\sum_{i=1}^k \sigma_i^\top(t, x_t, u_t)K(t)\sigma_i(t, x_t, u_t)dt + \operatorname{tr}\left(\int_0^{t_f} K(t)d\langle M, M\rangle_t\right) = \\
&= \int_0^{t_f}\sum_{i=1}^k (C_i(t)x_t + D_i(t)u_t + f_i(t))^\top K(t)\,(C_i(t)x_t + D_i(t)u_t + f_i(t))\,dt + \\
&\qquad + \operatorname{tr}\left(\int_0^{t_f} K(t)d\langle M, M\rangle_t\right) = \\
&= \int_0^{t_f}\left\{x_t^\top\left[\sum_{i=1}^k C_i(t)K(t)C_i(t)\right]x_t + 2\left[\sum_{i=1}^k D_i^\top(t)K(t)\,(C_i(t)x_t + f_i(t))\right]^\top u_t + \right. \\
&\qquad \left. + 2x_t^\top\left[\sum_{i=1}^k C_i(t)K(t)f_i(t)\right] + u_t^\top\left[\sum_{i=1}^k D_i^\top K(t)D_i(t)\right]u_t + \sum_{i=1}^k [f_i(t)^\top K(t)f_i(t)]\right\} + \\
&\qquad\qquad + \operatorname{tr}\left(\int_0^{t_f} K(t)d\langle M, M\rangle_t\right).
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Substituindo (4.34) na Equação (4.32), somando $\int_0^{t_f} [x_t^\top Q(t)x_t + u_t^\top R(t)u_t + 2q(t)^\top x_t + 2r(t)^\top u_t]\, dt$

em ambos os lados de (4.32) e reeordenando obtém-se:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t_f} [x_t^\top Q(t)x_t + u_t^\top R(t)u_t + 2q(t)^\top x_t + 2r(t)^\top u_t]\,dt + x_{t_f}^\top F x_{t_f} + 2h^\top x_{t_f} = \\
&\quad = V(0,x_0) + \int_0^{t_f} x_t^\top \left[\dot{K}(t) + A^\top(t)K(t) + K(t)A(t) + Q(t) + \sum_{i=1}^{k} C_i(t)K(t)C_i(t)\right] x_t dt + \\
&\quad + \int_0^{t_f} 2x_t^\top \left[\dot{k}(t) + K(t)g(t) + A^\top(t)K(t) + q(t) + \sum_{i=1}^{k} C_i^\top(t)K(t)f_i(t)\right] dt + \\
&\quad + \int_0^{t_f} u_t^\top \mathcal{R}(t,K(t))u_t dt + \\
&\quad + \int_0^{t_f} 2\left[\Gamma^\top(t,K(t))x_t + \Upsilon(t,K(t),k(t)\right]^\top u_t dt + \\
&\quad + \int_0^{t_f} 2g^\top(t)k(t)dt + \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^{k} f_i^\top(t)K(t)f_i(t)dt + \int_0^{t_f} \operatorname{tr}\left(K(t)\,d\langle M,M\rangle_t\right) + \\
&\quad + \int_0^{t_f} d\tilde{V}_t^\top \sigma^\top(t,x_t,u_t)K(t)x_t + \int_0^{t_f} x_t^\top K(t)\sigma(t,x_t,u_t)d\tilde{V}_t + \int_0^{t_f} d\tilde{V}_t^\top \sigma^\top(t,x_t,u_t)k(t).
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Agora, seja

$$I := \int_0^{t_f} \left\{u_t^\top \mathcal{R}(t,K(t))u_t + 2\left[\Gamma^\top(t,K(t))x_t + \Upsilon(t,K(t),k(t)\right]^\top u_t\right\} dt. \tag{4.36}$$

Pelo Lema 4.1

$$\begin{aligned}
I = \int_0^{t_f} &\left\{u_t + \mathcal{R}^{-1}(t,K(t))\left[\Gamma^\top(t,K(t))x_t + \Upsilon(t,K(t),k(t))\right]\right\}^\top \cdot \mathcal{R}(t,K(t)) \cdot \\
&\cdot \left\{u_t + \mathcal{R}^{-1}(t,K(t))\left[\Gamma^\top(t,K(t))x_t + \Upsilon(t,K(t),k(t))\right]\right\} - \\
&- \left[\Gamma^\top(t,K(t))x_t + \Upsilon(t,K(t),k(t))\right]^\top \mathcal{R}^{-1}(t,K(t))\left[\Gamma^\top(t,K(t))x_t + \Upsilon(t,K(t),k(t))\right] dt,
\end{aligned} \tag{4.37}$$

reordenando

$$
\begin{aligned}
I = \int_0^{t_f} & \left\{u_t + \mathcal{R}^{-1}(t, K(t))\left[\Gamma^\top(t, K(t))x_t + \Upsilon(t, K(t), k(t))\right]\right\}^\top \cdot \mathcal{R}(t, K(t)) \cdot \\
& \cdot \left\{u_t + \mathcal{R}^{-1}(t, K(t))\left[\Gamma^\top(t, K(t))x_t + \Upsilon(t, K(t), k(t))\right]\right\} - \\
& - \int_0^{t_f} x_t^\top \Gamma(t, K(t))\mathcal{R}^{-1}(t, K(t))\Gamma^\top(t, K(t))x_t dt - \\
& - \int_0^{t_f} 2x_t^\top \Gamma(t, K(t))\mathcal{R}^{-1}(t, K(t))\Upsilon(t, K(t), k(t))dt - \\
& - \int_0^{t_f} \Upsilon^\top(t, K(t), k(t))\mathcal{R}^{-1}(t, K(t))\Upsilon(t, K(t), k(t))dt.
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

Substituindo (4.38) em (4.35) e reordenando obtém-se:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{t_f} \left[x_t^\top Q(t)x_t + u_t^\top R(t)u_t + 2q(t)^\top x_t + 2r(t)^\top u_t\right] dt + x_{t_f}^\top F x_{t_f} + 2h^\top x_{t_f} = \\
&= V(0, x_0) + \int_0^{t_f} \left\{u_t + \mathcal{R}^{-1}(t, K(t))\left[\Gamma^\top(t, K(t))x_t + \Upsilon(t, K(t), k(t))\right]\right\}^\top \cdot \mathcal{R}(t, K(t)) \cdot \\
&\quad \cdot \left\{u_t + \mathcal{R}^{-1}(t, K(t))\left[\Gamma^\top(t, K(t))x_t + \Upsilon(t, K(t), k(t))\right]\right\} dt + \\
&+ \int_0^{t_f} x_t^\top \left[\dot{K}(t) + A^\top K(t) + K(t)A(t) + Q(t) + \sum_i^k C_i(t)K(t)C_i(t) - \right. \\
&\quad \left. - \Gamma(t, K(t))\mathcal{R}^{-1}(t, K(t))\Gamma^\top(t, K(t))\right] x_t dt + \\
&+ \int_0^{t_f} 2x_t^\top \left[\dot{k}(t) + K(t)g(t) + A^\top(t)k(t) + q(t) + \sum_{i=1}^k C_i^\top(t)K(t)f_i(t) - \right. \\
&\quad \left. - \Gamma(t, K(t))\mathcal{R}^{-1}(t, K(t))\Upsilon(t, K(t), k(t))\right] dt - \\
&- \int_0^{t_f} \Upsilon^\top(t, K(t), k(t))\mathcal{R}^{-1}(t, K(t))\Upsilon(t, K(t), k(t))dt + \int_0^{t_f} 2g^\top(t)k(t)dt + \\
&+ \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^k f_i(t)K(t)f_i(t)dt + \int_0^{t_f} \mathrm{tr}\,(K(t)\langle M, M\rangle_t) + \int_0^{t_f} d\tilde{V}_t^\top \sigma^\top(t, x_t, u_t)K(t)x_t + \\
&+ \int_0^{t_f} x_t^\top K(t)\sigma(t, x_t, u_t)d\tilde{V}_t + \int_0^{t_f} d\tilde{V}_t^\top \sigma^\top(t, x_t, u_t)k(t).
\end{aligned}
\tag{4.39}
$$

Agora, como $K(t)$ e $k(t)$ satisfazem, respectivamente, (4.23) e (4.24),

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} dV_t^\top \sigma^\top(t, x_t, u_t) K(t) x_t\right] &= 0, \\ \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} x_t^\top K(t)\sigma(t, x_t, u_t) dV_t\right] &= 0, \\ \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} dV_t^\top \sigma^\top(t, x_t, u_t) k(t)\right] &= 0, \end{aligned} \tag{4.40}$$

tomando a esperança em (4.39) obtém-se (4.25). □

Corolário 4.2. *Sejam $A(t)$, $B(t)$, $g(t)$, $C_i(t)$, $D_i(t)$, $f_i(t)$, $R(t)$, $Q(t)$, $q(t)$ e $r(t)$ nas condições do Problema 4.2, $K(t)$ e $k(t)$ solução das Equações (4.23) e (4.24), respectivamente, e $\Gamma(t, K(t))$, $\mathcal{R}(t)$ e $\Upsilon(t, K(t), k(t))$ definidos pela Equação (4.22). Então,*

$$u_t^* := -\mathcal{R}^{-1}(t, K(t)) \left[\Gamma^\top(t, K(t)) y_t + \Upsilon(t, K(t), k(t))\right], t \in [0, t_f], \tag{4.41}$$

onde

$$\begin{cases} dy_t = \left[\left(A(t) - B(t)\mathcal{R}^{-1}(t, K(t))\Gamma^\top(t, K(t))\right) y_t - B(t)\mathcal{R}^{-1}(t, K(t))\Upsilon(t, K(t), k(t)) + g(t)\right] dt + \\ \quad + \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \left[\left(C_i(t) - D_i(t)\mathcal{R}^{-1}(t, K(t))\Gamma^\top(t, K(t)\right) y_t - D_i(t)\mathcal{R}^{-1}(t, K(t))\Upsilon(t, K(t), k(t)) + f_i(t)\right] w_t^i + dM_t \\ y_0 = \xi, \end{cases} \tag{4.42}$$

é tal que $u^* \in \mathcal{U}_2$ e

$$J(u^*) \leq J(u), \forall u \in \mathcal{U}_2. \tag{4.43}$$

Ainda,

$$\begin{aligned} J(u^*) = \operatorname{tr}(K(0)P_0) + 2\mu_0^\top k(0) + \int_0^{t_f} 2g^\top(t)k(t)dt + \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^{k} f_i^\top(t) K(t) f_i(t) dt - \\ - \int_0^{t_f} \Upsilon^\top(t, K(t), k(t))\mathcal{R}^{-1}(t, K(t)) \cdot \Upsilon(t, K(t), k(t)) dt + \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} \operatorname{tr}(K(t) d\langle MM\rangle_t)\right]. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 4.2. □

4.3 Sistemas excitados por martingales descontínuos: observações completas

4.3.1 Formulação dos problemas

Sejam $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}\}_{t\geq 0}, \mathsf{P})$, ξ, $M = (M_t, \mathscr{F}_t)$ e $t_f \in [0, \infty)$ como na Seção 4.2. Assuma que em $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}\}_{t\geq 0}, \mathsf{P})$ estejam definidos também $N^i = (N^i_t, \mathscr{F}_t)$, $i = 1, 2, 3$, processos de Poisson unidimensionais com parâmetros λ_i, $i = 1, 2, 3$, e $\tilde{M} = (\tilde{M}_t, \mathscr{F}_t) \in \mathscr{M}_2$.

Denote por $\tilde{N}^i_t$, $i = 1, 2, 3$, os processos de Poisson compensados associados a N^i_t, $i = 1, 2, 3$, ou seja,

$$\tilde{N}^i_t = N^i_t - \lambda_i t, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.45}$$

Problema 4.3. *Considere um sistema descrito por*

$$\begin{cases} dx_t = [A(t)x_t + B(t)u_t + g(t)]\, dt + d\tilde{M}_t, \\ x_0 = \xi, \end{cases} \tag{4.46}$$

onde $A : [0, t_f] \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $B : [0, t_f] \to \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ e $g : [0, t_f] \to \mathbb{R}^n$ são mapeamentos contínuos. Assuma que $\tilde{M}_t$ e ξ são independentes e a performance do sistema possa ser adequadamente mensurada por:

$$J(u) = \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} x_t^\top Q(t)x_t + u_t^\top R(t)u_t dt + x_{t_f}^\top F x_{t_f}\right], \tag{4.47}$$

onde $Q : [0, t_f] \to \mathcal{S}^{n0}$, $R : [0, t_f] \to \mathcal{S}^{m+}$ são mapeamentos contínuos e $F \in \mathcal{S}^{n0}$.

Denote por $\mathcal{U}_3$ o conjunto de todos os processos $\mathscr{F}_t$–progressivamente mensuráveis tais que para cada $u \in \mathcal{U}_3$ a Equação (4.46) admite solução x^u e o funcional custo dado pela Equação (4.47), calculado no par (u, x^u), esteja bem definido.

Encontrar, se existir, $u^* \in \mathcal{U}_3$ tal que:

$$J(u^*) = \inf_{u \in \mathcal{U}_3} J(u). \tag{4.48}$$

Problema 4.4. *Considere um sistema descrito por*

$$\begin{cases} dx_t = (A(t)x_t + B(t)u_t + g(t))\,dt + C(t)x_t d\tilde{N}_t^1 + D(t)u_t d\tilde{N}_t^2 + f(t)d\tilde{N}_t^3 + dM_t \\ x_0 = \xi, \end{cases} \tag{4.49}$$

onde $A : [0, t_f] \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $B : [0, t_f] \to \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, $g : [0, t_f] \to \mathbb{R}^n$, $C : [0, t_f] \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $D : [0, t_f] \to \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, $f : [0, t_f] \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, são mapeamentos contínuos.

Assuma que $\tilde{N}_t^i$, $i = 1, 2, 3$, M_t e ξ são independentes e que a performance do sistema possa ser adequadamente mensurada por:

$$J(u) = \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} [x_t^\top Q(t)x_t + u_t^\top R(t)u_t]\,dt + x_{t_f}^\top F x_{t_f}\right] \tag{4.50}$$

onde $Q : [0, t_f] \to \mathcal{S}^{n0}$ e $R : [0, t_f] \to \mathcal{S}^{m+}$, são mapeamentos contínuos, $F \in \mathcal{S}^{n0}$ e $h \in \mathbb{R}^n$.

Denote por $\mathcal{U}_4$ o conjunto de todos os processos $\mathscr{F}_t$–progressivamente mensuráveis tais que para cada $u \in \mathcal{U}_4$ a Equação (4.49) admite solução x^u e o funcional custo dado pela Equação (4.50), calculado no par (u, x^u), esteja bem definido.

Encontrar, se existir, $u^* \in \mathcal{U}_4$ tal que:

$$J(u^*) = \inf_{u \in \mathcal{U}_4} J(u). \tag{4.51}$$

4.3.2 Estudo do Problema 4.3

Nos problemas desta seção, diferentemente dos problemas da seção anterior, Δx_t não é necessariamente nulo, ou seja, o estado do sistema apresenta saltos.

Lema 4.2. *Sejam $u \in \mathcal{U}_3$ qualquer, x a solução da Equação (4.46) quando u é aplicado, $K(t)$ e $k(t)$ soluções das Equações (4.7) e (4.8), respectivamente. Defina,*

$$J_t := \sum_{s \le t} \left\{ x_s^\top K(s) x_s + 2x_s^\top k(s) - x_{s^-}^\top K(s) x_{s^-} - 2x_{s^-}^\top k(s) - \left(2x_{s^-}^\top K(s) + 2k^\top(s)\right) \Delta x_s \right\}. \tag{4.52}$$

Então,

$$J_t = \sum_{s \le t} (\Delta \tilde{M}_s)^\top K(s) (\Delta \tilde{M}_s). \tag{4.53}$$

Demonstração. Como $x_t = x_{t^-} + \Delta x_t$, da definição do J_t segue que

$$\begin{aligned} J_s = \sum_{s \le t} &\{(x_{s^-} + \Delta x_s)^\top K(s)(x_{s^-} + \Delta x_s) + 2(x_{s^-} + \Delta x_s)^\top k(s) - x_{s^-}^\top K(s) x_{s^-} - 2x_{s^-}^\top k(s) - \\ &-2x_{s^-}^\top K(t) \Delta x_s - 2k^\top(s) \Delta x_s\} \\ = \sum_{s \le t} &\Delta x_s^\top K(s) \Delta x_s. \end{aligned} \tag{4.54}$$

Agora, $\forall t \in [0, t_f]$

$$\Delta x_t = \Delta \tilde{M}_t, \tag{4.55}$$

e, portanto, o resultado segue. ◻

Teorema 4.3. *Sejam $u \in \mathcal{U}_3$ qualquer, x a solução da Equação (4.46) quando u é aplicado, K e k soluções das Equações (4.7) e (4.8), respectivamente. Então, para cada par (u, x^u) o custo dado pela Equação (4.47) pode ser reescrito como:*

$$\begin{aligned} J(u) = \operatorname{tr}(K(0)P_0) + \mu_0^\top k(0) + \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} 2g^\top(t)k(t)dt\right] + \mathsf{E}\left[\int_0^t \operatorname{tr}\left(K(t)d\langle \tilde{M}^c, \tilde{M}^c\rangle_t\right)\right] - \\ - \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} k^\top(t)B(t)R^{-1}(t)B^\top(t)k(t)dt\right] + \mathsf{E}\left[\sum_{s\le t} \Delta\tilde{M}_s^\top K(s)\Delta\tilde{M}_s\right] + \\ + \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} \left[u_t + R^{-1}(t)B^\top(t)\left(K(t)x_t + k(t)\right)\right]^\top R(t)\left[u_t + R^{-1}(t)B^\top(t)\left(K(t)x_t + k(t)\right)\right]dt\right]. \end{aligned} \tag{4.56}$$

Demonstração. Basta proceder como na demonstração do Teorema 4.1 e observar que J_t independe de $u \in \mathcal{U}_3$. □

Corolário 4.3. *Sejam $A(t)$, $B(t)$ e $R(t)$ nas condições do Problema 4.3, $K(t)$ e $k(t)$ solução das Equações (4.7) e (4.8), respectivamente. Então,*

$$u_t^* := -R^{-1}(t)B^\top(t)\left(K(t)y_t + k(t)\right), t \in [0, t_f], \tag{4.57}$$

onde

$$\begin{cases} dy_t = \left[\left(A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^\top(t)K(t)\right)y_t - B(t)R^{-1}(t)B^\top(t)k(t) + g(t)\right]dt + d\tilde{M}_t, \\ y_0 = \xi. \end{cases} \tag{4.58}$$

Ainda,

$$\begin{aligned} J(u^*) = \operatorname{tr}(K(0)P_0) + \mu_0^\top k(0) + \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} 2g^\top(t)k(t)dt\right] + \mathsf{E}\left[\int_0^t \operatorname{tr}\left(K(t)d\langle \tilde{M}^c, \tilde{M}^c\rangle_t\right)\right] - \\ - \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} k^\top(t)B(t)R^{-1}(t)B^\top(t)k(t)dt\right] + \mathsf{E}\left[\sum_{s\le t} \Delta\tilde{M}_s^\top K(s)\Delta\tilde{M}_s\right]. \end{aligned} \tag{4.59}$$

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 4.3. □

4.3.3 Estudo do Problema 4.4

Proposição 4.5. *Sejam $\tilde{N}^i$, $i = 1, 2, 3$ processos de Poisson compensados independentes com parâmetros λ_i, $i = 1, 2, 3$. Então,* $\mathsf{P}-q.s.$

$$\Delta\tilde{N}^i_t \Delta\tilde{N}^j_t = \begin{cases} 0 & se\ i \neq j, \\ \Delta\tilde{N}^i_t & se\ i = j. \end{cases} \tag{4.60}$$

Demonstração. O caso $i = j$ é imediato visto que $\Delta\tilde{N}^i_t$ é sempre 1 ou 0. Considere agora $i \neq j$. Pela regra do produto, Corolário 2.2 na página 35, tem-se:

$$\tilde{N}^i_t \tilde{N}^j_t = \int_0^t \tilde{N}^i_{s^-} d\tilde{N}^j_s + \int_0^t N^j_{s^-} d\tilde{N}^i_t + \sum_{s \leq t} \Delta\tilde{N}^i_t \Delta\tilde{N}^j_t. \tag{4.61}$$

Agora, aplicando o operador esperança na equação acima e lembrando que os processos são independentes e pertencem a $\mathscr{M}_2$, obtém-se:

$$\mathsf{E}\left[\sum_{s \leq t} \Delta\tilde{N}^i_t \Delta\tilde{N}^j_t\right] = 0. \tag{4.62}$$

Finalmente, como $\tilde{N}^i_t \geq 0$ e $\tilde{N}^j_t \geq 0$ o resultado segue. □

Proposição 4.6. *Sejam $A(t)$, $B(t)$, $R(t)$, $D(t)$ e λ_2 como na definição do Problema 4.4. Então, a* *equação diferencial de Riccati generalizada*[2]

$$\begin{cases} \dot{K}(t) + A^\top(t)K(t) + K(t)A(t) + Q(t) + \lambda_1 C^\top(t)K(t)C(t)- \\ \qquad\qquad - K(t)B(t)\left(R(t) + \lambda_2 D^\top(t)K(t)D(t)\right)^{-1} B^\top(t)K(t) = 0, \\ K(t_f) = F, \end{cases} \tag{4.63}$$

admite uma solução $K : [0, t_f] \to \mathcal{S}^{n0}$.

Demonstração. Basta usar o método de quasi-linearização (BELLMAN, 1955) e aproximações sucessivas como originalmente feito em (WONHAM, 1968a). Ver também (WONHAM, 1970, p. 162). □

Proposição 4.7. *Sejam* $A(t)$, $B(t)$, $R(t)$, $D(t)$, λ_2 *e* $g(t)$ *como na definição do Problema 4.4 e* $K(t)$ *solução da Equação (4.63). Então, a equação diferencial*

$$\begin{cases} \dot{k}(t) + \left[A^\top(t) - K(t)B(t)\left(R(t) + \lambda_2 D^\top(t)K(t)D(t)\right]k(t) + K(t)g(t) = 0, \\ k(t_f) = 0, \end{cases} \tag{4.64}$$

admite uma solução $k : [0, t_f] \to \mathbb{R}^n$.

Lema 4.3. *Sejam* $u \in \mathcal{U}_4$ *qualquer,* x *a solução da Equação (4.49) quando* u *é aplicado,* $K(t)$ *e* $k(t)$ *soluções das Equações (4.63) e (4.64), respectivamente. Defina,*

$$J_t := \sum_{s \le t} \left\{x_s^\top K(s)x_s + 2x_s^\top k(s) - x_{s^-}^\top K(s)x_{s^-} - 2x_{s^-}^\top k(s) - \left(2x_{s^-}^\top K(s) + 2k^\top(s)\right)\Delta x_s\right\}, \tag{4.65}$$

[2] Wonham (1970) utiliza a terminologia equação racional.

Então,

$$J_{t_f} = \int_0^{t_f} x_{s^-}^\top C^\top(s)K(s)C(s)x_{s^-}dN_s^1 + \int_0^{t_f} u_{s^-}^\top D^\top(s)K(s)D(s)dN_s^2 + \int_0^{t_f} f^\top(s)K(s)f(s)dN_s^3. \tag{4.66}$$

Demonstração. Da definição do J_t segue que

$$\begin{aligned} J_s &= \sum_{s\leq t}\{(x_{s^-} + \Delta x_s)^\top K(s)(x_{s^-} + \Delta x_s) + 2(x_{s^-} + \Delta x_s)^\top k(s) - x_{s^-}^\top K(s)x_{s^-} - 2x_{s^-}^\top k(s) - \\ &\qquad -2x_{s^-}^\top K(t)\Delta x_s - 2k^\top(s)\Delta x_s\} \qquad (4.67) \\ &= \sum_{s\leq t} \Delta x_s^\top K(s)\Delta x_s. \end{aligned}$$

Agora,

$$\Delta x_s = C(s)x_{s^-}\Delta\tilde{N}_s^1 + D(s)u_{s^-}\Delta\tilde{N}_s^2 + f(s)\Delta\tilde{N}_s^3. \tag{4.68}$$

Substituindo a Equação (4.68) na Equação (4.67) e usando a Proposição 4.5 segue:

$$J_t = \sum_{s\leq t}\left\{x_{s^-}^\top C^\top(s)K(s)C(s)x_{s^-}\Delta\tilde{N}_s^1 + u_{s^-}^\top D^\top(s)K(s)D(s)u_{s-}\Delta\tilde{N}_s^2 + f^\top(s)K(s)f(s)\Delta\tilde{N}_s^3\right\} \tag{4.69}$$

Finalmente, como $\Delta\tilde{N}_t^i = \Delta N_t^i$, $i = 1,2,3$ e N_t^i, $i = 1,2,3$, são puramente descontínuos o resultado segue (observe que $\tilde{N}_t^i$ não são puramente descontínuos). □

Lema 4.4. *Seja J_t definido pela equação 4.65. Então,*

$$\mathsf{E}[J_t] = \int_0^t \{\lambda_1 x_{s^-}^\top C^\top(s)K(s)C(s)x_{s^-} + \lambda_2 u_{s^-}^\top D^\top(s)K(s)D(s)u_{s^-} + \lambda_3 f^\top(s)K(s)f(s)\}\,dt. \tag{4.70}$$

Demonstração. Segue do lema anterior e da Proposição 2.5 na página 33. □

Teorema 4.4. *Sejam $u \in \mathcal{U}_3$ qualquer e x a solução da Equação (4.49) quando u é aplicado.*

Então, para cada par (u, x^u) o custo dado pela Equação (4.50) pode ser reescrito como:

$$
\begin{aligned}
J(u) = \operatorname{tr}(K(0)P_0) + \mu_0^\top k(0) + \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} K(t)d\langle M, M\rangle_t\right] + \\
+ \int_0^{t_f} \left[2g^\top k(t) + 2\lambda_3 f^\top(s)K(s)f(s) - k^\top(t)B(t)\left(R(t) + \lambda_2 D^\top(t)K(t)D(t)\right)B^\top(t)k(t)\right] + \\
+ \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} \left[u_t + \left(R(t) + \lambda_2 D^\top(t)K(t)D(t)\right)^{-1} B^\top(t)\left(K(t)x_t + k(t)\right)\right]^\top \left(R(t) + \lambda_2 D^\top(t)K(t)D(t)\right) \cdot \right. \\
\left. \cdot \left[u_t + \left(R(t) + \lambda_2 D^\top(t)K(t)D(t)\right)^{-1} B^\top(t)\left(K(t)x_t + k(t)\right)\right]\right].
\end{aligned}
\tag{4.71}
$$

Demonstração. Aplicando a fórmula de Itô–Doléans-Dade–Meyer

$$
\begin{aligned}
V(t_f, x_{t_f}) = V(0, x_0) + \int_0^{t_f} \left[x_t^\top \dot{K}(t)x_t + 2x_t^\top \dot{k}(t)\right]dt \int_0^{t_f} \left[dx_t^\top K(t)x_{t^-} + x_t^\top K(t)dx_t + 2dx_t^\top k(t)\right] + \\
+ \operatorname{tr}\left(\int_0^{t_f} K(t)d\langle M, M\rangle_t\right) + J_t.
\end{aligned}
$$

Agora, observando que $\tilde{N}_t^i$, $i = 1, 2, 3$, são martingales quadrado integráveis, usando o Lema 4.4 e procedendo analogamente como na demonstração dos Teoremas 4.1 e 4.2 o resultado segue. □

Corolário 4.4. *Sejam $A(t)$, $B(t)$ e $R(t)$ nas condições do Problema 4.2, $K(t)$ e $k(t)$ soluções das Equações (4.63) e (4.64), respectivamente. Então,*

$$
u_t^* := -\tilde{R}(t)^{-1}B^\top(t)\left(K(t)y_t + k(t)\right), t \in [0, t_f], \tag{4.72}
$$

onde $\tilde{R}(t) := (R(t) + \lambda_2 D^\top(t)K(t)D(t))$ *e* y *satisfaz*

$$\begin{cases} dy_t = \left[\left(A(t) - \tilde{R}(t)^{-1}B^\top(t)K(t)\right)y_t - \tilde{R}(t)^{-1}B^\top(t)k(t) + g(t)\right]dt + \\ \qquad + C(t)y_t d\tilde{N}_t^1 - D(t)\tilde{R}(t)^{-1}B^\top(t)\left(K(t)y_t + k(t)\right)d\tilde{N}_t^2 + f(t)d\tilde{N}_t^3 + dM_t, \\ y_0 = \xi, \end{cases} \tag{4.73}$$

é tal que $u^* \in \mathcal{U}_1$ *e*

$$J(u^*) \leq J(u), \forall u \in \mathcal{U}_1. \tag{4.74}$$

Ainda,

$$\begin{aligned} J(u^*) &= \operatorname{tr}\left(K(0)P_0\right) + \mu_0^\top k(0) + \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} K(t)d\langle M, M\rangle_t\right] + \\ &+ \int_0^{t_f} \left[2g^\top k(t) + 2\lambda_3 f^\top(s)K(s)f(s) - k^\top(t)B(t)\left(R(t) + \lambda_2 D^\top(t)K(t)D(t)\right)B^\top(t)k(t)\right]. \end{aligned} \tag{4.75}$$

Demonstração. Segue diretamente da Teorema 4.4. □

Observação 4.1. *Considere um sistema descrito por*

$$\begin{cases} dx_t = \left(A(t)x_t + B(t)u_t + g(t)\right)dt + C(t)x_t dN_t^1 + D(t)u_t dN_t^2 + f(t)dN_t^3 + dM_t \\ x_0 = \xi, \end{cases} \tag{4.76}$$

onde N^i, $i = 1, 2, 3$, *são processos de Poisson com parâmetro* λ_i, $i = 1, 2, 3$. *Como os* N^i *não são martingales, os resultados desta seção não podem ser aplicados diretamente. Para estudar sistemas excitados por processos de Poisson basta observar que os* N^i *podem ser decompostos como:*

$$N_t^i = \tilde{N}_t^i + \lambda_i t, \tag{4.77}$$

onde $\tilde{N}^i \in \mathscr{M}_2$ *(processos de Poisson compensados) e, então, reescrever* (4.76) *como:*

$$dx_t = \left(\tilde{A}(t)x_t + \tilde{B}(t)u_t + \tilde{g}(t)\right)dt + C(t)x_t d\tilde{N}_t^1 + D(t)u_t d\tilde{N}_t^2 + f(t)d\tilde{N}_t^3 + dM_t, \qquad (4.78)$$

onde

$$\tilde{A}(t) := A(t) + \lambda_1 C(t), \qquad (4.79)$$

$$\tilde{B}(t) := B(t) + \lambda_2 D(t), \qquad (4.80)$$

$$\tilde{g}(t) := g(t) + \lambda_3 f(t). \qquad (4.81)$$

O sistema descrito por (4.78) *pode, então, ser estudado empregando os resultados desta seção.*

Observação 4.2. *Resultados análogos ao desta seção podem ser derivados considerando-se um sistema descrito por:*

$$\begin{cases} dx_t = (A(t)x_t + B(t)u_t + g(t))\,dt + \displaystyle\sum_{i=1}^{k} (C_i(t)x_t + D_i(t)u_t + f_i(t))\,d\tilde{N}_t^i + dM_t \\ x_0 = \xi, \end{cases} \qquad (4.82)$$

onde $\tilde{N}^i$ *são processos de Poisson compensados independentes.*

4.4 Sistemas excitados por martingales contínuos: observações parciais

Sejam $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}\}_{t\geq 0}, \mathsf{P})$, $M = (M_t, \mathscr{F}_t)$ e ξ como na Seção 4.2 e $\{\mathscr{Y}_t\}_{t\geq 0}$ uma sub-filtração de $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$.

Teorema 4.5. *Considere um sistema descrito pela EDE* (4.1) *com performance adequadamente* *mensurada pelo funcional custo (4.2). Denote por $\mathcal{U}_{\mathscr{Y}}$ o conjunto dos processos estocásticos u_t adaptados à $\mathscr{Y}_t$ progressivamente mensuráveis e limitados no sentido do L^2 e por $\hat{x}_t = \mathrm{E}\,[x_t \,|\, \mathscr{Y}_t]$. Então, o funcional custo (4.2) pode ser reescrito como:*

$$
\begin{aligned}
J(u) = \operatorname{tr}(K(0)P_0) + \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} \left(u_t + R^{-1}(t)B^\top(t)K(t)\hat{x}_t\right)^\top R(t)\left(u_t + R^{-1}(t)B^\top(t)K(t)\hat{x}_t\right)\right] + \\
+ \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} \operatorname{tr}\left(K(t)B(t)R^{-1}(t)B^\top(t)K(t)\,\mathrm{E}\,[(x_t-\hat{x}_t)(x_t-\hat{x}_t)^\top \,|\, \mathscr{Y}_t]\right) dt\right] + \\
+ \operatorname{tr}\left(\int_0^{t_f} K(t)d\langle M, M\rangle_t\right)
\end{aligned}
\tag{4.83}
$$

Demonstração. Basta observar que $\mathrm{E}\,[z_t^\top \alpha(t) z_t \,|\, \mathscr{Y}_t] = \mathrm{E}\,[(z_t - \hat{z}_t)^\top \alpha(t)(z_t - \hat{z}_t) \,|\, \mathscr{Y}_t] - \hat{z}_t^\top \alpha(t)\hat{z}_t$, onde $\hat{z}_t \coloneqq \mathrm{E}\,[z_t \,|\, \mathscr{Y}_t]$, e proceder como na demonstração do Teorema 4.1. □

Observação 4.3. *O resultado do Teorema 4.5 pode ser interpretado como uma condição necessária para a validade do princípio de equivalência à certeza. Basta observar que se*

$$
\mathrm{E}\,[(x_t - \hat{x}_t)(x_t - \hat{x}_t)^\top \,|\, \mathscr{Y}_t] \tag{4.84}
$$

independer do processo de controle, a minimização em (4.83) é análoga ao caso com observações completas considerando-se o estado dado por $\hat{x}_t$.

Exemplo 4.1 (Equivalência à certeza no problema LQG). *Assuma que ξ é uma variável aleatória gaussiana e considere w_t e v_t dois processos de Wiener n e m dimensionais, respectivamente, definidos em $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}\}_{t\geq 0}, \mathsf{P})$ e tais que ξ é independente de w_t e v_t. Defina os* *processos x^0 e y^0 soluções fortes de*

$$\begin{cases} dx_t^0 = A(t)x_t^0 dt + dw_t, \\ x_0^0 = \xi, \end{cases} \tag{4.85}$$

$$\begin{cases} dy_t^0 = C(t)y_t^0 dt + dv_t, \\ y_0^0 = 0. \end{cases} \tag{4.86}$$

Para cada u quadrado integrável considere x^u e y^u soluções pathwise *de*

$$\begin{cases} dx_t^u = (A(t)x_t^u + B(t)u_t)\, dt, \\ x_0^u = 0, \end{cases} \tag{4.87}$$

$$\begin{cases} dy_t^u = C(t)y_t^u dt, \\ y_0^u = 0. \end{cases} \tag{4.88}$$

Considere que, para cada u quadrado integrável, o estado do sistema a ser controlado seja dado por:

$$x_t = x_t^0 + x_t^u, \tag{4.89}$$

o processo de observações seja dado por

$$y_t = y_t^0 + y_t^u, \tag{4.90}$$

e que a performance do sistema seja adequadamente mensurada pelo funcional custo (4.2).

Defina

$$\mathscr{Y}_t^0 := \sigma\left(y_s^0\,,\, 0 \le s \le t\right), \tag{4.91}$$

$$\mathscr{Y}_t^u := \sigma\left(y_s\,,\, 0 \le s \le t\right). \tag{4.92}$$

Agora se u_t é adaptado à $\mathscr{Y}_t^0$ tem-se que y_t^u é adaptado à $\mathscr{Y}_t^0$ e, pela Equação (4.90), tem-se que y_t é adaptado à $\mathscr{Y}_t^0$. Logo, $\mathscr{Y}_t^u \subseteq \mathscr{Y}_t^0$. Analogamente, se v_t é adaptado à $\mathscr{Y}_t^u$ obtém-se que $\mathscr{Y}_t^0 \subseteq \mathscr{Y}_t^u$.

Considere como conjunto de controles admissíveis os processos quadrado integráveis $\mathcal{U}_{ad}$ tais que u_t é adaptado à $\mathscr{Y}_t^0$ e à $\mathscr{Y}_t^u$. Da discussão anterior tem-se que para $u \in \mathcal{U}_{ad}$, $\mathscr{Y}_t^0 = \mathscr{Y}_t^u$. Ainda, para esta classe de controles admissíveis pode-se mostrar, ver detalhes em (BENSOUSSAN, 2004, p. 31), que $\hat{x}_t$ é solução de

$$\begin{cases} d\hat{x}_t = (A(t)\hat{x}_t + B(t)u_t)dt + \Pi(t)C^\top(t)\left(dy_t - C(t)\hat{x}_t dt\right), \\ \hat{x}_0 = \mu_0, \end{cases} \tag{4.93}$$

onde $K(t)$ é solução de:

$$\begin{cases} -\dot{\Pi}(t) + A(t)\Pi(t) + \Pi(t)A^\top(t) - \Pi(t)C^\top(t)C(t)\Pi(t) + I_n = 0, \\ \Pi(0) = P(0). \end{cases} \tag{4.94}$$

Considere

$$u_t^* = -R^{-1}(t)B^\top(t)K(t)z_t, \tag{4.95}$$

onde $K(t)$ é solução de (4.7) e z é dado por:

$$\begin{cases} dz_t = \left[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^{\top}(t)K(t)\right] z_t dt + \Pi(t)C^{\top}(t)\left(d\beta_t - C(t)z_t dt\right), \\ z_0 = \mu_0, \end{cases} \tag{4.96}$$

$$\begin{cases} d\alpha_t = \left[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^{\top}(t)K(t)\right] \alpha_t dt + dw_t, \\ \alpha_0 = \xi, \end{cases} \tag{4.97}$$

$$\begin{cases} d\beta_t = C(t)\alpha_t dt + dv_t, \\ \beta_0 = 0. \end{cases} \tag{4.98}$$

Agora, do Teorema (4.5) e observando que $\mathrm{E}\left[(x_t - \hat{x}_t)(x_t - \hat{x}_t)^{\top} \mid \mathscr{Y}_t^0\right]$ independe de $u \in \mathcal{U}_{ad}$ (direto das Equações (4.93) e (4.94)), pode-se concluir que:

$$J(u^*) \leq J(u), \forall u \in \mathcal{U}_{ad}. \tag{4.99}$$

A validade do princípio de equivalência à certeza para este problema segue observando que quando u^* é aplicado em (4.93) a solução desta equação é, $\forall t \in [0, t_f]$, $\mathsf{P}-$q.s., igual a y (para detalhes ver, por exemplo, (DAVIS, 1977, p.178)).

Observação 4.4. *Uma discussão sobre os princípios de equivalência à certeza e separação é apresenta no Apêndice A, página 152.*

4.5 Comentários finais

Nesta capítulo foram estudados problemas de otimização LQ estocásticos de sistemas excitados por martingales quadrado integráveis tanto contínuos quanto descontínuos. Nos casos em que as excitações dependiam do estado ou do controle estas foram restritas a processos de

Wiener e Poisson. Mostra-se que os problemas podem ser estudados empregando-se a fórmula de Itô–Doléans-Dade–Meyer e soluções de certas equações diferenciais para se reescrever o funcional custo de forma conveniente para o estudo dos problemas de controle ótimo. No caso com observações completas foram obtidas soluções explícitas para os problemas estudados. No caso com observações parciais, observa-se que o funcional custo reescrito pode ser interpretado como uma condição necessária para a validade do princípio de equivalência à certeza. A aplicação desta condição necessária é exemplificada no problema LQG clássico.

5 Controle ótimo de sistemas lineares com saltos Markovianos excitados por martingales quadrado integráveis

"First principles, Clarice. Simplicity. Read Marcus Aurelius. Of each particular thing, ask: What is it, in itself, what is its nature...?"

The Silence of the Lambs

–DR. HANNIBAL LECTER

Neste capítulo será estudado o problema de otimização Linear Quadrátrico para sistemas descritos por Equações Diferenciais Estocásticas lineares com saltos Markovianos nos parâmetros excitadas tanto por Martingales quadrado integráveis contínuos quanto descontínuos. Os resultados apresentados diferem dos trabalho disponíveis na literatura consultada pelo fato de se considerar os sistemas excitados por uma classe mais geral de distúrbios, bem como a utilização da fórmula de Itô–Daleáns-Dade–Meyer para o estudo desta classe de problemas usando argumentos de completar os quadrados, ao invés do princípio da otimalidade de Bell-

man ou do máximo de Pontryagin. Uma observação interessante é que mesmo considerando o sistema submetido a distúrbios não necessariamente iguais a um certo processo de Wiener o problema de otimização LQ em estudo recai, analogamente ao caso clássico, no estudo de certas equações diferencias de Riccati acopladas. Os resultados obtidos são particularizados para o estudo de sistemas excitados por processos de Poisson compensados ou não.

5.1 Introdução

Nesta parte do trabalho atenção será fixada sobre sistemas os quais podem estar sujeitos a variações abruptas nos seus parâmetros devidas, por exemplo, a falhas aleatórias de certos componentes do sistema, distúrbios ambientais abruptos, alterações na conexão entre sistemas, mudanças abruptas e aleatórias no ponto de operação de um certo sistema não-linear, dentre outros. Veja, por exemplo, (MARITON, 1990, p. 1-21), para exemplos de sistemas práticos que se enquadram nesta categoria. Em particular, neste trabalho, consideram-se sistemas descritos por EDE com parâmetros sujeitos a variações abruptas modeladas por uma certa cadeia de Markov.

Desde os trabalhos pioneiros envolvendo esta classe de sistemas (KRASOVSKII; LIDSKII, 1961a; KRASOVSKII; LIDSKII, 1961b; KRASOVSKII; LIDSKII, 1961c; WONHAM, 1970; FRAGOSO, 1986; FRAGOSO; HEMERLY, 1991), diversos aspectos envolvendo sistemas descritos por EDE com saltos Markovianos nos parâmetros foram investigados. Veja, por exemplo, (MARITON, 1990; JI; CHIZECK, 1992; LI; ZHOU, 2002; LI et al., 2003; DRAGAN; MOROZAN, 2004; ROCHA, 2004; FRAGOSO; ROCHA, 2005; LIU et al., 2005; FRAGOSO; COSTA, 2005) e suas referências. Exemplos de aplicações no setor aeroespacial envolvendo sistemas com saltos Markovianos nos parâmetros podem ser encontradas, por exemplo, em (FARIAS et al., 2000;

STOICA; YAESH, 2002).

Em geral, os trabalhos disponíveis na literatura envolvendo sistemas lineares com saltos Markovianos tratam apenas do caso de sistemas excitados por processos de Wiener. Em (MARITON, 1990, p.161-165) é estudado o caso de sistemas excitados por processos de Poisson compensados. Aqui considera-se o sistema excitado aditivamente por um martingale quadrado integrável contínuo ou descontíuo e emprega-se, analogamente ao capítulo anterior, a fórmula de Itô–Doléans-Dade–Meyer para reescrever o funcional custo, dependendo da solução de uma certa equação de Riccati, de forma conveniente para se estudar o problema de controle ótimo. Casos de sistemas excitados por processos de Poisson compensados ou não são estudados como casos particulares dos resultados apresentados.

Uma versão preliminar deste capítulo foi submetida para publicação (SILVA; YONEYAMA, 2008b).

Este capítulo será organizado da seguinte forma. Na Seção 5.2 o caso de sistemas excitados por martingales quadrado integráveis contínuos é estudado. O caso de martingales descontínuos é estudado na Seção 5.3. Na Seção 5.4 o caso com observações parciais será estudado. Finalmente, na Seção 5.5 são tecidos alguns comentários finais.

5.2 Sistemas excitados por Martingales quadrado integráveis contínuos com observações completas

5.2.1 Formulação do problema

Sejam $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}\}_{t\geq 0}, \mathsf{P})$ um espaço de probabilidade filtrado satisfazendo as condições usuais, $\theta = \{\theta_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ uma cadeia de Markov homogênea, com trajetórias contínuas pela direita, espaço de estados finito $\mathcal{S}$, e semigrupo de transição contínuo $\{\Pi(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$. Assuma, sem perda de generalidade, que $\mathcal{S} := \{e_1, e_2, \ldots, e_N\}$, onde e_i, $i = 1, \ldots, N$, são os elementos da base canônica do $\mathbb{R}^N$. Denote por Λ o gerador infinitesimal do semigrupo contínuo $\{\Pi(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$.

Observação 5.1. *Ao considerar $\mathcal{S} = \{e_1, \ldots, e_N\}$ tem-se que $\boldsymbol{\phi}$, Definição 2.45, é tal que $\boldsymbol{\phi}(\theta) = \theta$.*

Pela Proposição 2.10, página 42, tem-se que $\theta = \{\theta_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ satisfaz

$$d\theta_t = \Lambda^\top \theta_{t^-} dt + dN_t, \tag{5.1}$$

onde $\{N_t\}_{t\geq 0} \in \mathscr{M}_2$.

Observação 5.2. *Apenas a distribuição do estado incial θ_0 do sistema descrito pela Equação 5.1 é assumido conhecido* a priori.

Agora, sejam $M = (M_t, \mathscr{F}_t) \in \mathscr{M}_2^c$ e ξ uma certa variável aletória limitada no sentido do L^2. Assuma que N, θ_0, M e ξ são independentes.

Problema 5.1. *Denote por $\mathcal{U}$ o conjunto de todos os processos estocásticos $\mathscr{F}_t$–progressivamente mensuráveis tais que para cada $u \in \mathcal{U}$ o sistema*

$$\begin{cases} dx_t = [A(t,\theta_t)x_t + B(t,\theta_t)u_t + g(t)]\, dt + dM_t \\ x_o = \xi, \end{cases} \tag{5.2}$$

onde $A(t, e_i) : [0, t_f] \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $B(t, e_i) : [0, t_f] \to \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, N$ e $g(t) : [0, t_f] \to \mathbb{R}^n$ são contínuos, admite uma solução x^u limitada no sentido do L^2. Assuma que a performance *do sistema seja adequadamente mensurada pelo funcional:*

$$J(u) = \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} x_t^\top Q(t,\theta_t)x_t + u_t^\top R(t,\theta_t)u_t dt + x_{t_f}^\top F x_{t_f}\right]. \tag{5.3}$$

onde $Q(t,e_i) : [0,t_f] \to \mathcal{S}^{n0}(\mathbb{R})$, $R(t,e_i) : [0,t_f] \to \mathcal{S}^{m+}(\mathbb{R})$, $i = 1,\ldots,N$, *são contínuos e* $F \in \mathcal{S}^{n0}(\mathbb{R})$. *O problema estudado consiste em encontrar um certo* $u^* \in \mathcal{U}$ *tal que:*

$$J(u^*) = \inf_{u\in\mathcal{U}} J(u). \tag{5.4}$$

Observação 5.3. *Como para cada processo de controle admissível* x^u *é processo limitado no sentido do* L^2, *tem-se que o funcional custo da Equação* (5.3) *está bem definido para cada par* (u, x^u). *Conforme feito usualmente na literatura escrever-se-á apenas* $J(u)$.

Na próxima seção, o funcional custo (5.3) será reescrito, empregando a fórmula de Itô–Doleáns-Dade–Meyer e a solução de uma certa equação de Riccati, de forma conveniente para o estudo do Problema 5.1.

5.2.2 Estudo do Problema 5.1

Antes do resultado principal desta seção, Teorema 5.1, ser demostrado, alguns resultados prelimiares e definições relevantes serão apresentadas.

Lema 5.1. *Seja* $u \in \mathcal{U}$ *arbitrário. Denote por* x *a solução de* (5.2) *associada ao controle* u. *Então, para todo* $t \in [0,t_f]$ $\Delta x_t = 0$ $\mathsf{P}-$*q.s., ou seja, quase toda realização de* x *é contínua.*

Demonstração. Segue do fato de M ser contínuo. □

Definição 5.1 (Produto de Kronecker). *Dadas duas matrizes* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *e* $B \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$, *o*

produto de Kronecker *de A por B, denotado por $A \otimes B$, é dado por*

$$A \otimes B := \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{mp\times nq}(\mathbb{R}). \tag{5.5}$$

Proposição 5.1. *Sejam $A, \overline{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B, \overline{B} \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n\times r}(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_{q\times r}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,*

(a) $\left(A + \overline{A}\right) \otimes B = A \otimes B + \overline{A} \otimes B$;

(b) $A \otimes \left(B + \overline{B}\right) = A \otimes B + A \otimes \overline{B}$;

(c) $\alpha\,(A \otimes B) = (\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B)$;

(d) $(AC) \otimes (BD) = (A \otimes B)(C \otimes D)$.

Demonstração. Conseqüência imediata da definição. Ver, por exemplo, (BREWER, 1978) e suas referências. □

Notação 5.1. *Para simplificar a notação, defina*

(a) $\mathcal{A}(t) := [A_1(t)\;\; A_2(t)\;\; \ldots\;\; A_N(t)] \in \mathcal{M}_{n\times nN}(\mathbb{R})$ *onde* $A_i(t) := A(t, e_i)$, $i = 1, \ldots, N$;

(b) $\mathcal{B}(t) := [B_1(t)\;\; B_2(t)\;\; \ldots\;\; B_N(t)] \in \mathcal{M}_{n\times mN}(\mathbb{R})$ *onde* $B_i(t) := B(t, e_i)$, $i = 1, \ldots, N$;

(c) $\mathcal{Q}(t) := [Q_1(t)\;\; Q_2(t)\;\; \ldots\;\; Q_N(t)] \in \mathcal{M}_{n\times nN}(\mathbb{R})$ *onde* $Q_i(t) := Q(t, e_i)$, $i = 1, \ldots, N$;

(d) $\mathcal{R}(t) := [R_1(t)\;\; R_2(t)\;\; \ldots\;\; R_N(t)] \in \mathcal{M}_{m\times mN}(\mathbb{R})$ *onde* $R_i(t) := R(t, e_i)$, $i = 1, \ldots, N$.

Lema 5.2. *A EDE da Equação* (5.2) *pode ser reescrita como*

$$\begin{aligned} dx_t &= \mathcal{A}(t)\,(\theta_t \otimes I_n)\,x_t dt + \\ &\quad + \mathcal{B}(t)\,(\theta_t \otimes I_n)\,u_t dt + g(t)dt + dM_t. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Demonstração. Conseqüência imediata das definições. □

Proposição 5.2 (Equação de Riccati - Existência de solução). *Sejam* $A_i(t)$, $B_i(t)$, $Q_i(t)$, $R_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$ *como na formulação do Problema* 5.1*. Então, existem* $K_i(t) : [0, t_{t_f}] \to \mathcal{S}^{n0}(\mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, N$ *contínuas tais que:*

$$\begin{cases} \dot{K}_i(t) + A_i^\top K_i(t) + K_i(t)A_i(t) - K_i(t)B_i(t)R_i(t)^{-1}B_i^\top(t)K_i(t) + \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij}K_j(t) + Q_i(t) = 0, \\ K_i(t_f) = F, \qquad\qquad i = 1, 2, ..., N. \end{cases} \tag{5.7}$$

Demonstração. Basta usar o método de quasi-linearização (BELLMAN, 1955) e aproximações sucessivas como originalmente feito em (WONHAM, 1968a). Os detalhes podem ser encontrados, por exemplo, em (WONHAM, 1970, p. 193-194). □

Observação 5.4. *É interessante ressaltar que, embora se considere neste trabalho sistemas excitados por martingales quadrado integráveis contínuos quaisquer, a equação de Riccati* (5.7) *associada a este problema é igual à estudada quando se considera sistemas excitados pelo processo de Wiener (FRAGOSO, 1986, p. 57) e (FRAGOSO; HEMERLY, 1991, p. 2557).*

Lema 5.3. *As Equações* (5.7)*,* $i = 1, \ldots N$*, podem ser reescritas como:*

$$\begin{aligned} &\dot{\mathcal{K}}(t)(e_i \otimes I_{n\times n}) + [\mathcal{A}(t)(e_i \otimes I_{n\times n})]^\top [\mathcal{K}(t)(e_i \otimes I_{n\times n})] + [\mathcal{K}(t)(e_i \otimes I_{n\times n})]\,[\mathcal{A}(t)(e_i \otimes I_{n\times n})] - \\ &\quad - [\mathcal{K}(t)(e_i \otimes I_{n\times n})]\,[\mathcal{B}(t)(e_i \otimes I_{m\times m})]\,[\mathcal{R}(t)(e_i \otimes I_{m\times m})]^{-1}\,[\mathcal{B}(t)(e_i \otimes I_{m\times m})]^\top\,[\mathcal{K}(t)(e_i \otimes I_{n\times n})] + \\ &\qquad + \mathcal{K}(t)(\Lambda^\top \otimes I_{n\times n})(e_i \otimes I_{n\times n}) + [Q(t)(e_i \otimes I_{n\times n})] = 0. \end{aligned}$$

Ainda, como $\theta_t \in \{e_1, \dots e_N\}$ *tem-se:*

$$\dot{\mathcal{K}}(t)(\theta_t \otimes I_{n\times n}) + [\mathcal{A}(t)(\theta_t \otimes I_{n\times n})]^\top [\mathcal{K}(t)(\theta_t \otimes I_{n\times n})] + [\mathcal{K}(t)(\theta_t \otimes I_{n\times n})] [\mathcal{A}(t)(\theta_t \otimes I_{n\times n})] -$$
$$- [\mathcal{K}(t)(\theta_t \otimes I_{n\times n})] [\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{n\times n})] [\mathcal{R}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})]^{-1} [\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{n\times n})]^\top [\mathcal{K}(t)(\theta_t \otimes I_{n\times n})] +$$
$$+ \mathcal{K}(t)(\Lambda^\top \otimes I_{n\times n})(\theta_t \otimes I_{n\times n}) + [Q(t)(\theta_t \otimes I_{n\times n})] = 0, t \in [0, t_f].$$

Demonstração. Segue diretamente da definição do produto de Kronecker. □

Proposição 5.3. *Sejam* $A_i(t)$, $B_i(t)$, $R_i(t)$, Λ *e* $g(t)$ *dadas na formulação do Problema 5.1. Então, as equações diferenciais acopladas*

$$\begin{cases} \dot{k}_i(t) + A_i^\top(t)k_i(t) - K_i(t)B_i(t)R_i(t)B_i^\top(t)k_i + \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij}k_j(t) + K_i(t)g(t) = 0, \\ k(t_f) = 0, \qquad\qquad i = 1, \dots, N, \end{cases} \tag{5.8}$$

adimitem soluções $k_i : [0, t_f] \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, N$.

Demonstração. Segue da teoria de equações diferenciais lineares. □

Definição 5.2. *Sejam* $K_i(t)$, $k_i(t)$, $i = 1, \dots, N$ *soluções de* (5.7) *e* (5.8)*, respectivamente. Defina*

(a) $\mathcal{K}(t) := [K_1(t) \dots K_N(t)] \in \mathcal{M}_{n\times nN}(\mathbb{R})$*;*

(b) $k(t) := [k_1(t) \dots k_N(t)] \in \mathcal{M}_{n\times N}(\mathbb{R})$*;*

(c) $V : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$V(t, x, \theta) := x^\top \mathcal{K}(t)(\theta \otimes I_N)x + 2x^\top k(t)\theta. \tag{5.9}$$

Observação 5.5. *Da definição de V, Equação (5.9), e das Equações (5.7) e (5.8):*

$$V(t_f, x_{t_f}, \theta_{t_f}) = x_{t_f}^\top F x_{t_f}. \tag{5.10}$$

Notação 5.2. *Os elementos da base canônica do $\mathbb{R}^n$ serão denotados por $\tilde{e}_i$, $i = 1, \dots, n$.*

Lema 5.4. *Seja $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definido pelas Equações (5.7), (5.8) e (5.9). Então,*

$$\begin{aligned}
V_x(t,x,\theta) &:= \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1}(t,x,\theta) & \frac{\partial V}{\partial x_2}(t,x,\theta) & \dots & \frac{\partial V}{\partial x_n}(t,x,\theta) \end{bmatrix}^\top \\
&= \begin{bmatrix} \tilde{e}_1^\top \mathcal{K}(t)(\theta \otimes I_{n\times n})x + x^\top \mathcal{K}(t)(\theta \otimes I_{n\times n})\tilde{e}_1 + 2\tilde{e}_1^\top k(t)\theta \\ \vdots \\ \tilde{e}_n^\top \mathcal{K}(t)(\theta \otimes I_{n\times n})x + x^\top \mathcal{K}(t)(\theta \otimes I_{n\times n})\tilde{e}_n + 2\tilde{e}_n^\top k(t)\theta \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{xx}(t,x,\theta) &:= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)(x,\theta) & \dots & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)(x,\theta) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_m \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2\tilde{e}_1^\top \mathcal{K}(t)(\theta \otimes I_{n\times n})e_1 & \cdots & 2\tilde{e}_1^\top \mathcal{K}(t)(\theta \otimes I_{n\times n})e_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 2\tilde{e}_n^\top \mathcal{K}(t)(\theta \otimes I_{n\times n})e_1 & \cdots & 2\tilde{e}_n^\top \mathcal{K}(t)(\theta \otimes I_{n\times n})e_n \end{bmatrix} \\
&= \mathcal{K}(t)(\theta \otimes I_{n\times n}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

$$V_\theta(t,x,\theta) := \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial \theta_1}(t,x,\theta) & \frac{\partial V}{\partial \theta_2}(t,x,\theta) & \dots & \frac{\partial V}{\partial \theta_N}(t,x,\theta) \end{bmatrix}^\top$$

$$= \begin{bmatrix} x^\top \mathcal{K}(t)(e_1 \otimes I_{n\times n})x + 2x^\top k(t)e_1 \\ \vdots \\ x^\top \mathcal{K}(t)(e_N \otimes I_{n\times n})x + 2x^\top k(t)e_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{N\times 1}(\mathbb{R}),$$

$$V_{\theta\theta}(t,x,\theta) := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta_1}\right)(t,x,\theta) & \dots & \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta_N}\right)(t,x,\theta) \end{bmatrix}$$

$$= 0_{N\times N} \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{R}).$$

Demonstração. Segue diretamente da definição. □

Lema 5.5. *Seja V definido pelas Equações* (5.7), (5.8) *e* (5.9). *Então,* $\forall t \in [0, t_f]$

$$J_t := V(t,x_t,\theta_t) - V(t,x_{t^-},\theta_{t^-}) - [V_x^\top(t,x_{t^-},\theta_{t^-})(x_t - x_{t^-}) + V_\theta^\top(t,x_{t^-},\theta_{t^-})(\theta_t - \theta_{t^-})] = 0. \quad (5.11)$$

Demonstração. Inicialmente, como x é $\mathsf{P}-$q.s. contínuo, tem-se que para todo $t \in [0, t_f]$ $\Delta x_t = 0$ $\mathsf{P}-$q.s. e, portanto:

$$J_t = V(t,x_t,\theta_t) - V(t,x_{t^-},\theta_{t^-}) - V_\theta^\top(t,x_{t^-},\theta_{t^-})(\theta_t - \theta_{t^-}).$$

Da definição de V e do Lema 5.4:

$$J_t = \{x_t^\top \mathcal{K}(t)(\theta_t \otimes I_{n\times n})x_t + 2x_t^\top k(t)\theta_t\} - \{x_t^\top \mathcal{K}(t)(\theta_{t^-} \otimes I_{n\times n})x_t + 2x_t^\top k(t)\theta_{t^-}\} -$$
$$- \sum_{j=1}^N \left\{x_t^\top \mathcal{K}(t)(e_j \otimes I_{n\times n})x_t(\theta_t^j - \theta_{t^-}^j) + 2x_t^\top k(t)e_j(\theta_t^j - \theta_{t^-}^j)\right\}.$$

Reagrupando e usando as propriedades do produto de Kronecker, Proposição 5.1, obtém-se:

$$
\begin{aligned}
J_t &= x_t^\top \mathcal{K}(t)\left((\theta_t - \theta_{t^-}) \otimes I_{n\times n}\right) x_t - x_t^\top \mathcal{K}(t)\left(\left(\sum_{j=1}^N e_j(\theta_t^j - \theta_{t^-}^j)\right) \otimes I_{n\times n}\right) x_t \\
&= x_t^\top \mathcal{K}(t)\left((\theta_t - \theta_{t^-}) \otimes I_{n\times n}\right) x_t - x_t^\top \mathcal{K}(t)\left((\theta_t - \theta_{t^-}) \otimes I_{n\times n}\right) x_t. \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

□

Teorema 5.1. *Sejam $K_i(t)$, $k_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$ soluções de (5.7) e (5.8), respectivamente. Para cada $u \in \mathcal{U}$ denote por x a solução de (5.2). Então, para cada par (u, x) o funcional custo (5.3) pode ser reescrito como:*

$$
\begin{aligned}
J(u) &= \mathsf{E}\left[x_0^\top \mathcal{K}(0)(\theta_0 \otimes I_{n\times n})x_0\right] + 2\,\mathsf{E}\left[x_0^\top k(0)\theta_0\right] + \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} \mathcal{K}(t)(\theta_t \otimes I_{n\times n})d\langle M, M\rangle_t\right] - \\
&- \mathsf{E}\left[\theta_t^\top k^\top(t)\left[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]\left[\mathcal{R}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^{-1}\left[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^\top k(t)\theta_t\right] + \\
&+ \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} \left\| u_t + \left[\mathcal{R}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^{-1}\left[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^\top \left[\mathcal{K}(t)(\theta_t \otimes I_{n\times n})\right] x_t + \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \left[\mathcal{R}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^{-1}\left[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^\top k(t)\theta_t \right] \right\|_{R(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})}
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

Demonstração. Aplicando a fórmula de Itô–Doléans-Dade–Meyer à função V, dada pela Equação (5.9), obtém-se:

$$
\begin{aligned}
V(t_f, x_{t_f}, \theta_{t_f}) &= V(0, x_0, \theta_0) + \int_0^{t_f} V_t(t, x_t, \theta_{t^-})dt + \\
&+ \int_0^{t_f} V_x^\top(t, x_t, \theta_{t^-})dx_t + \int_0^{t_f} V_\theta^\top(t, x_t, \theta_{t^-})d\theta_t + \\
&+ \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\int_0^{t_f} \begin{pmatrix} V_{xx}(t, x_t, \theta_{t^-}) & V_{x\theta}(t, x_t, \theta_{t^-}) \\ V_{\theta x}(t, x_t, \theta_{t^-}) & V_{\theta\theta}(t, x_t, \theta_t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d\langle M^c, M^c\rangle_t & d\langle M^c, N^c\rangle_t \\ d\langle N^c, M^c\rangle_t & d\langle N^c, N^c\rangle_t \end{pmatrix}\right) + \sum_{0\le s\le t} J_s.
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

Como, por hipótese, $M \in \mathcal{M}_2^c$ tem-se que $M^c = M$ e como M e $N \in \mathcal{M}_2$ são martingales independentes, tem-se que $\langle M^c, N^c\rangle_t = 0_{n\times N}$ e $\langle N^c, M^c\rangle_t = 0_{N\times n}$. Além disso, pelo Lema 5.4, $V_{\theta\theta} = 0_{N\times N}$ e, pelo Lema 5.5, para todo $t \in [0, t_f]$, $J_t = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} V(t_f, x_{t_f}, \theta_{t_f}) = V(0, x_0, \theta_0) + \int_0^{t_f} V_t(t, x_t, \theta_{t^-})dt+ \\ + \int_0^{t_f} V_x^\top(t, x_t, \theta_{t^-})dx_t + \int_0^{t_f} V_\theta^\top(t, x_t, \theta_{t^-})d\theta_t+ \\ + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\int_0^{t_f} V_{xx}(t, x_t, \theta_{t^-})d\langle M, M\rangle_t\right) \end{aligned} \tag{5.14}$$

Usando o Lema 5.4 mais uma vez, obtém-se:

$$\begin{aligned} V(t_f, x_{t_f}, \theta_{t_f}) = V(0, x_0, \theta_0) + \int_0^{t_f} \left[x_t^\top \dot{\mathcal{K}}(t)(\theta_{t^-} \otimes I_{n\times n})x_t + 2x_t^\top \dot{k}(t)\theta_{t^-}\right] dt+ \\ + \sum_{j=1}^{n} \int_0^{t_f} \left[\tilde{e}_j^\top \mathcal{K}(t)(\theta_{t^-} \otimes I_{n\times n})x_t + x_t^\top \mathcal{K}(t)(\theta_{t^-} \otimes I_{n\times n})\tilde{e}_j + 2\tilde{e}_j^\top k(t)\theta_{t^-}\right] dx_t^j+ \\ + \sum_{j=1}^{N} \int_0^{t_f} \left[x_t^\top \mathcal{K}(t)\left(e_j \otimes I_{n\times n}\right) x_t + 2x_t^\top k(t)e_j\right] d\theta_t^j+ \\ + \operatorname{tr}\left(\int_0^{t_f} \mathcal{K}(t)(\theta_{t^-} \otimes I_{n\times n})d\langle M, M\rangle_t\right). \end{aligned} \tag{5.15}$$

Agora, usando as propriedades do produto de Kronecker, Proposição 5.1, obtém-se:

$$\begin{aligned} V(t_f, x_{t_f}, \theta_{t_f}) = V(0, x_0, \theta_{t_0}) + \int_0^{t_f} \left[x_t^\top \dot{\mathcal{K}}(t)(\theta_{t^-} \otimes I_{n\times n})x_t + 2x_t^\top \dot{k}(t)\theta_{t^-}\right] dt+ \\ + \int_0^{t_f} dx_t^\top \mathcal{K}(t)(\theta_{t^-} \otimes I_{n\times n})x_t + \int_{t_0}^{t_f} x_t^\top \mathcal{K}(t)(\theta_{t^-} \otimes I_{n\times n})dx_t + \int_{t_0}^{t_f} 2dx_t^\top k(t)\theta_{t^-}+ \\ + \int_0^{t_f} x_t^\top \mathcal{K}(t)\,(d\theta_t \otimes I_{n\times n})\, x_t + \int_0^{t_f} 2x_t^\top k(t)d\theta_t+ \\ + \operatorname{tr}\left(\int_0^{t_f} \mathcal{K}(t)(\theta_{t^-} \otimes I_{n\times n})d\langle M, M\rangle_t\right) dt. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Das Equações (5.1) e (5.2):

$$
\begin{aligned}
V(t_f, x_{t_f}, \theta_{t_f}) = V(0, x_0, \theta_0) &+ \int_0^{t_f} \left[x_t^\top \dot{\mathcal{K}}(t)(\theta_{t^-} \otimes I_{n\times n})x_t + 2x_t^\top \dot{k}(t)\theta_{t^-} \right] dt + \\
&+ \int_0^{t_f} \left\{ \left[\mathcal{A}(t)\,(\theta_{t^-} \otimes I_n)\, x_t dt + \mathcal{B}(t)\,(\theta_{t^-} \otimes I_n)\, u_t dt + g(t)dt + dM_t\right]^\top \mathcal{K}(t)(\theta_{t^-} \otimes I_{n\times n})x_t \right\} + \\
&+ \int_0^{t_f} \left\{ x_t^\top \mathcal{K}(t)(\theta_{t^-} \otimes I_{n\times n}) \left[\mathcal{A}(t)\,(\theta_{t^-} \otimes I_n)\, x_t dt + \mathcal{B}(t)\,(\theta_{t^-} \otimes I_n)\, u_t dt + g(t)dt + dM_t\right] \right\} + \\
&+ \int_0^{t_f} 2\left[\mathcal{A}(t)\,(\theta_{t^-} \otimes I_n)\, x_t dt + \mathcal{B}(t)\,(\theta_{t^-} \otimes I_n)\, u_t dt + g(t)dt + dM_t\right]^\top k(t)\theta_{t^-} + \\
&+ \int_0^{t_f} x_t^\top \mathcal{K}(t) \left[(\Lambda^\top \theta_{t^-} dt + dN_t) \otimes I_{n\times n}\right] x_t + \\
&+ \int_0^{t_f} 2x_t^\top k(t)\,(\Lambda^\top \theta_{t^-} dt + dN_t) + \\
&+ \operatorname{tr}\left(\int_0^{t_f} \mathcal{K}(t)(\theta_{t^-} \otimes I_{n\times n}) d\langle M, M\rangle_t \right).
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

Novamente, utilizando propriedades do produto de Kronecker, Proposição 5.1, obtém-se:

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_f} x_t^\top \mathcal{K}(t)\,((\Lambda^\top \theta_{t^-} dt + dN_t) \otimes I_{n\times n})\, x_t = \\
&\quad = \int_{t_0}^{t_f} x_t^\top \mathcal{K}(t)\,(\Lambda^\top \theta_{t^-} dt \otimes I_{n\times n})\, x_t + \int_{t_0}^{t_f} x_t^\top \mathcal{K}(t)\,(dN_t \otimes I_{n\times n})\, x_t \\
&\quad = \int_{t_0}^{t_f} x_t^\top \mathcal{K}(t)\,(\Lambda^\top \otimes I_{n\times n})\,(\theta_{t^-} \otimes I_{n\times n})\, x_t dt + \int_{t_0}^{t_f} x_t^\top \mathcal{K}(t)\,(dN_t \otimes I_{n\times n})\, x_t.
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

Substituindo (5.18) em (5.17), somando $\int_0^{t_f} x^\top Q(t, \theta_t)x_t + u_t^\top R(t, \theta_t)u_t dt$ em ambos os membros, aplicando o operador esperança, reorganizando e lembrando que $V(t_f, x_{t_f}, \theta_{t_f}) = x_{t_f}^\top F x_{t_f}$,

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left[\int_0^{t_f}(dM_t^\top(t)\mathcal{K}(t)(\theta_{t^-}\otimes I_{n\times n})x_t)\right]=0,\\
&\mathsf{E}\left[\int_0^{t_f}(x_t^\top\mathcal{K}(t)(\theta_{t^-}\otimes I_{n\times n})dM_t)\right]=0,\\
&\mathsf{E}\left[\int_0^{t_f}dM_t^\top k(t)\theta_{t^-}\right]=0,\\
&\mathsf{E}\left[\int_0^{t_f}x_t^\top\mathcal{K}(t)\,(dN_t\otimes I_{n\times n})\,x_t\right]=0,\\
&\mathsf{E}\left[\int_0^{t_f}2x_t^\top k(t)dN_t\right]=0,
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

obtém-se:

$$
\begin{aligned}
J(u)=\;&\mathsf{E}\left[V(0,x_0,\theta_0)\right]+\\
&+\mathsf{E}\left[\int_0^{t_f}x_t^\top\left[\dot{\mathcal{K}}(t)(\theta_{t^-}\otimes I_{n\times n})+[\mathcal{A}(t)(\theta_{t^-}\otimes I_{n\times n})]^\top[\mathcal{K}(t)(\theta_{t^-}\otimes I_{n\times n})]+\right.\right.\\
&\quad+\;[\mathcal{K}(t)(\theta_{t^-}\otimes I_{n\times n})]\,[\mathcal{A}(t)(\theta_{t^-}\otimes I_{n\times n})]+\\
&\quad\quad\left.\left.+\mathcal{K}(t)\,(\Lambda^\top\otimes I_{n\times n})\,(\theta_{t^-}\otimes I_{n\times n})+\mathcal{Q}(t)(\theta_t\otimes I_{n\times n})\right]x_tdt\right]+\\
&+\mathsf{E}\left[\int_{t_0}^{t_f}2x_t^\top\left[\dot{k}(t)\theta_t+[\mathcal{A}(t)(\theta_t\otimes I_{n\times n})]^\top k(t)\theta_t+[\mathcal{K}(t)(\theta_t\otimes I_{n\times n})]\,g(t)+\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+k(t)\Lambda^\top\theta_tdt\right]\right]+\\
&+\mathsf{E}\left[\int_{t_0}^{t_f}u_t^\top\mathcal{R}(t)(\theta_t\otimes I_{m\times m})u_t\right]+\\
&+\mathsf{E}\left[\int_{t_0}^{t_f}2\left\{[\mathcal{B}(t)(\theta_{t^-}\otimes I_{m\times m})]^\top(\mathcal{K}(t)(\theta_{t^-}\otimes I_{n\times n})x_t+k(t)\theta_t)\right\}^\top u_t\right]+\\
&+\mathsf{E}\left[\mathrm{tr}\left(\int_0^{t_f}\mathcal{K}(t)(\theta_{t^-}\otimes I_{n\times n})d\langle M,M\rangle_t\right)\right]+\mathsf{E}\left[\int_0^{t_f}2g^\top(t)k(t)\theta_{t^-}dt\right].
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

Agora usando o Lema 4.1:

$$
\begin{aligned}
&u_t^\top \left[\mathcal{R}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right] u_t + 2\left\{\left[\mathcal{B}(t)(\theta_{t^-} \otimes I_{m\times m})\right]^\top (\mathcal{K}(t)(\theta_{t^-} \otimes I_{n\times n})x_t + k(t)\theta_t)\right\}^\top u_t = \\
&\quad = \Big\| u_t + \left[\mathcal{R}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^{-1} \left[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^\top \left[\mathcal{K}(t)(\theta_t \otimes I_{n\times n})\right] x_t + \\
&\qquad + \left[\mathcal{R}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^{-1} \left[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^\top k(t)\theta_t \Big\|_{R(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})} - \\
&\quad - x_t^\top \left[\mathcal{K}(t)(\theta_t \otimes I_{n\times n})\right] \left[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right] \left[\mathcal{R}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^{-1} \left[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^\top \left[\mathcal{K}(t)(\theta_t \otimes I_{n\times n})\right] x_t - \\
&\quad - 2x_t^\top \left[\mathcal{K}(t)(\theta_t \otimes I_{n\times n})\right] \left[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right] \left[\mathcal{R}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^{-1} \left[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^\top k(t)\theta_t - \\
&\quad - \theta_t^\top k^\top(t) \left[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right] \left[\mathcal{R}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^{-1} \left[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^\top k(t)\theta_t.
\end{aligned}
\tag{5.21}
$$

Substituindo a Equação (5.21) na Equação (5.20) e lembrando que $K_i(t)$, $k_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$ são soluções de (5.7) e (5.8), respectivamente, o resultado segue. □

Corolário 5.1. *Sejam $A_i(t)$, $B_i(t)$, $g(t)$ e $R_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$ nas condições do Problema 5.1, $K_i(t)$ e $k_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$, soluções das Equações (5.7) e (5.8), respectivamente. Então,*

$$
u_t^* := -\left[\mathcal{R}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^{-1} \left[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^\top \left\{\left[\mathcal{K}(t)(\theta_t \otimes I_{n\times n})\right] y_t + k(t)\theta_t\right\}, t \in [0, t_f], \tag{5.22}
$$

onde

$$
\begin{cases}
dy_t = \Big[\Big(A(t) - \left[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right] \left[\mathcal{R}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^{-1} \left[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^\top \left[\mathcal{K}(t)(\theta_t \otimes I_{n\times n})\right]\Big) y_t - \\
\qquad - \left[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right] \left[\mathcal{R}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^{-1} \left[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^\top k(t)\theta_t + g(t)\Big] dt + d\tilde{M}_t, \\
y_0 = \xi,
\end{cases}
\tag{5.23}
$$

é tal que $u^* \in \mathcal{U}$ e

$$
J(u^*) \leq J(u), \forall u \in \mathcal{U}. \tag{5.24}
$$

Ainda,

$$
\begin{aligned}
J(u) &= \mathsf{E}\left[x_0^\top \mathcal{K}(0)(\theta_0 \otimes I_{n\times n})x_0\right] + 2\,\mathsf{E}\left[x_0^\top k(0)\theta_0\right] + \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} \mathcal{K}(t)(\theta_t \otimes I_{n\times n})d\langle M, M\rangle_t\right] - \\
&- \mathsf{E}\left[\theta_t^\top k^\top(t)\left[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]\left[\mathcal{R}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^{-1}\left[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^\top k(t)\theta_t\right]
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 5.1. □

5.3 Sistemas excitados por Martingales quadrado integráveis descontínuos com observações completas

5.3.1 Formulação do problema

Sejam $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}\}_{t\geq 0}, \mathsf{P})$, $\theta = \{\theta_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ e ξ como na Seção 5.2, $\tilde{M} = (\tilde{M}_t, \mathscr{F}_t) \in \mathscr{M}_2$ e

$$\mathcal{T} := \{t \in [0, t_f]\,|\,\Delta\theta_t \neq 0,\ \text{para algum } i = 1, \ldots, N\} \tag{5.26}$$

$$\mathcal{T}' := \{t \in [0, t_f]\,|\,\Delta\tilde{M}_t \neq 0,\ \text{para algum } i = 1, \ldots, N\}. \tag{5.27}$$

Assuma que $\mathcal{T} \bigcap \mathcal{T}' = \emptyset$.

Problema 5.2. *Considere um sistema descrito por:*

$$
\begin{cases}
dx_t = [A(t,\theta_t)x_t + B(t,\theta_t)u_t + g(t)]\,dt + d\tilde{M}_t \\
x_o = \xi,
\end{cases}
\tag{5.28}
$$

onde $A(t, e_i) : [0, t_f] \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $B(t, e_i) : [0, t_f] \to \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, N$ e $g(t) : [0, t_f] \to \mathbb{R}^n$ são contínuos. Assuma que a performance do sistema seja adequadamente mensurada pelo *funcional:*

$$J(u) = \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} x_t^\top Q(t,\theta_t)x_t + u_t^\top R(t,\theta_t)u_t dt + x_{t_f}^\top F x_{t_f}\right]. \tag{5.29}$$

onde $Q(t,e_i) : [0,t_f] \to \mathcal{S}^{n0}(\mathbb{R})$, $R(t,e_i) : [0,t_f] \to \mathcal{S}^{m+}(\mathbb{R})$, $i = 1,\dots,N$, *são contínuos e* $F \in \mathcal{S}^{n0}(\mathbb{R})$.

Denote por $\mathcal{U}$ *o conjunto de todos os processos* $\mathscr{F}_t$*–progressivamente mensuráveis limitados no* L^2. *Encontrar, se existir, um certo* $u^* \in \mathcal{U}$ *tal que:*

$$J(u^*) = \inf_{u\in\mathcal{U}} J(u). \tag{5.30}$$

5.3.2 Estudo do Problema 5.2

Lema 5.6. *Sejam* $u \in \mathcal{U}$ *arbitrário,* V *dada por* (5.7), (5.8) *e* (5.9), θ_t *solução de* (5.1) *e* x_t *solução de* (5.42) *quando* u *é aplicado.*

$$J_{t_f} := \sum_{s\le t_f} \left(V(t,x_t,\theta_t) - V(t,x_{t^-},\theta_{t^-}) - V_x(t,x_{t^-},\theta_{t^-})\Delta x_t - V_\theta(t,x_{t^-},\theta_{t^-})\Delta\theta_t\right). \tag{5.31}$$

Então,

$$J_{t_f} = \sum_{\mathcal{T}'} \Delta\tilde{M}_s^\top \left[\mathcal{K}(s)(\theta_s \otimes I_{n\times n})\right]\Delta\tilde{M}_s. \tag{5.32}$$

Demonstração. Análoga a demonstração dos Lemas 4.2 e 5.5. □

Proposição 5.4. *Sejam* $K_i(t)$, $k_i(t)$, $i = 1,\dots,N$ *soluções de* (5.7) *e* (5.8), *respectivamente. Para cada* $u \in \mathcal{U}$ *denote por* x *a solução de* (5.42) *quando* u *é aplicado. Então, para cada par* (u,x)

o funcional custo (5.3) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} J(u) &= \mathsf{E}\left[x_0^\top \mathcal{K}(0)(\theta_0 \otimes I_{n\times n})x_0\right] + 2\,\mathsf{E}\left[x_0^\top k(0)\theta_0\right] + \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} \mathcal{K}(t)(\theta_t \otimes I_{n\times n})d\langle \tilde{M}^c, \tilde{M}^c\rangle_t\right] + \\ &+ \mathsf{E}\left[\sum_{\mathcal{T}'} \Delta\tilde{M}_s^\top K(s)\Delta\tilde{M}_s\right] - \\ &- \mathsf{E}\left[\theta_t^\top k^\top(t)\left[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]\left[\mathcal{R}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^{-1}\left[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^\top k(t)\theta_t\right] + \\ &+ \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} \left\|u_t + \left[\mathcal{R}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^{-1}\left[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^\top\left[\mathcal{K}(t)(\theta_t \otimes I_{n\times n})\right]x_t + \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + \left[\mathcal{R}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^{-1}\left[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^\top k(t)\theta_t\right]\right\|_{R(t)(\theta_t\otimes I_{m\times m})}. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Demonstração. Basta observar que $\Delta x_t = \Delta\tilde{M}_t$ e proceder como na demonstração dos Teoremas 5.1. □

Corolário 5.2. *Sejam $A_i(t)$, $B_i(t)$ e $R_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$ nas condições do Problema 5.2, $K_i(t)$ e $k_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$, soluções das Equações (5.7) e (5.8), respectivamente. Então,*

$$u_t^* := -\left[\mathcal{R}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^{-1}\left[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^\top\left\{\left[\mathcal{K}(t)(\theta_t \otimes I_{n\times n})\right]y_t + k(t)\theta_t\right\}, t \in [0, t_f], \tag{5.34}$$

onde

$$\begin{cases} dy_t = \Big[\Big(A(t) - \left[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]\left[\mathcal{R}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^{-1}\left[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^\top\left[\mathcal{K}(t)(\theta_t \otimes I_{n\times n})\right]\Big)y_t - \\ \qquad - \left[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]\left[\mathcal{R}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^{-1}\left[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^\top k(t)\theta_t + g(t)\Big]dt + d\tilde{M}_t, \\ y_0 = \xi, \end{cases} \tag{5.35}$$

é tal que $u^* \in \mathcal{U}$ e

$$J(u^*) \leq J(u), \forall u \in \mathcal{U}, \tag{5.36}$$

Ainda,

$$\begin{aligned} J(u) &= \mathsf{E}\left[x_0^\top \mathcal{K}(0)(\theta_0 \otimes I_{n\times n})x_0\right] + 2\,\mathsf{E}\left[x_0^\top k(0)\theta_0\right] + \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} \mathcal{K}(t)(\theta_t \otimes I_{n\times n})d\langle \tilde{M}^c, \tilde{M}^c\rangle_t\right] + \\ &+ \mathsf{E}\left[\sum_{\mathcal{T}'} \Delta\tilde{M}_s^\top K(s)\Delta\tilde{M}_s\right] - \\ &- \mathsf{E}\left[\theta_t^\top k^\top(t)\left[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]\left[\mathcal{R}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^{-1}\left[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^\top k(t)\theta_t\right]. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 5.1. □

Exemplo 5.1 (Sistema excitado por um processo de Poisson compensado). *Considere o Problema 5.1 com $\tilde{M} = \sigma(t)\tilde{N}$, onde $\tilde{N}$ é um processo de Poisson compensado unidimensional com parâmetro λ e $\sigma : [0 : t_f] \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ contínua. Neste caso,*

$$\langle \tilde{M}^c, \tilde{M}^c\rangle = 0, \tag{5.38}$$

$$\mathsf{E}\left[\sum_{\mathcal{T}'} \Delta\tilde{M}_s^\top K(s)\Delta\tilde{M}_s\right] = \int_0^{t_f} \lambda\sigma^\top(t)K(t)\sigma(t)dt. \tag{5.39}$$

Assim, o controle ótimo é dado por (5.34)-(5.35) e o custo ótimo é:

$$\begin{aligned} J(u) &= \mathsf{E}\left[x_0^\top \mathcal{K}(0)(\theta_0 \otimes I_{n\times n})x_0\right] + 2\,\mathsf{E}\left[x_0^\top k(0)\theta_0\right] + \int_0^{t_f} \lambda\sigma^\top(t)K(t)\sigma(t)dt - \\ &- \mathsf{E}\left[\theta_t^\top k^\top(t)\left[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]\left[\mathcal{R}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^{-1}\left[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})\right]^\top k(t)\theta_t\right]. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Exemplo 5.2 (Sistema excitado por um processo de Poisson). *Considere o Problema 5.1 com $\tilde{M} = \sigma(t)N^1$, onde N^1 é um processo de Poisson unidimensional com parâmetro λ e $\sigma : [0 : t_f] \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ contínua. Como N^1 não é um martingale, o resultado desta seção não pode ser aplicado diretamente. Para aplicar o resultado basta observar que N^1 pode ser decomposto como:*

$$N_t^1 = \tilde{N}_t^1 + \lambda t, \tag{5.41}$$

onde $\tilde{N}^1 \in \mathscr{M}_2$ (processo de Poisson compensado), de forma que (5.42) *com $\tilde{M} = \sigma(t)N^1$ pode ser reescrito como:*

$$\begin{cases} dx_t = [A(t,\theta_t)x_t + B(t,\theta_t)u_t + \tilde{g}(t)]\,dt + \sigma(t)d\tilde{N}^1_t, \\ x_o = \xi, \end{cases} \tag{5.42}$$

onde $\tilde{g}(t) = g(t) + \lambda\sigma(t)$. Como $\tilde{N}^1 \in \mathscr{M}_2$ o resultado desta seção pode ser aplicado como feito no exemplo anterior.

5.4 Sistemas excitados por Martingales quadrado integráveis com observações parciais

Sejam $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}\}_{t\geq 0}, \mathsf{P})$, $M = (M_t, \mathscr{F}_t) \in \mathscr{M}_2^c$ e ξ como na Seção 4.2 e $\{\mathscr{G}_t\}_{t\geq 0}$ uma sub-filtração de $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ tal que $\sigma(\theta_s\,,\ 0 \leq s \leq t) \subseteq \mathscr{G}_t$, $\forall t \in [0, t_f]$.

Lema 5.7. *Sejam* $\mathrm{z} = (\mathrm{z}_t, \mathscr{F}_t)$ *e* $\alpha = (\alpha_t, \mathscr{F}_t)$ *processos estocásticos definidos em* $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}\}_{t\geq 0}, \mathsf{P})$ *e* $\hat{\mathrm{z}}_t := \mathrm{E}[\mathrm{z}\,|\,\mathscr{G}_t]$. *Assuma que α_t é adaptado à $\mathscr{G}_t$. Então,*

$$\mathsf{E}[\mathrm{z}_t^\top \alpha_t \mathrm{z}_t] = \mathsf{E}[\mathrm{tr}(\alpha_t\,\mathrm{E}[(\mathrm{z}_t - \hat{\mathrm{z}}_t)(\mathrm{z}_t - \hat{\mathrm{z}}_t)^\top\,|\,\mathscr{G}_t])] + \mathsf{E}[\hat{\mathrm{z}}_t^\top \alpha_t \hat{\mathrm{z}}_t] \tag{5.43}$$

Demonstração. Segue diretamente das propriedadas da esperança condicional. □

Teorema 5.2. *Considere um sistema descrito pela EDE* (5.2) *com $g = 0$* [1] *e performance adequadamente mensurada pelo funcional custo* (5.3)*. Denote por $\mathcal{U}_{\mathscr{G}}$ o conjunto dos processos estocásticos u_t adaptados à $\mathscr{G}_t$, progressivamente mensuaráveis limitados no sentido do L^2, e*

[1] Apenas para simplificar a notação.

por $\hat{x}_t := \mathsf{E}\,[x_t]\,\mathscr{G}_t$*. Então o funcional custo* (5.3) *pode ser reescrito como:*

$$
\begin{aligned}
J(u) = {} & \mathsf{E}\,[x_0^\top \mathcal{K}(0)(\theta_0 \otimes I_{n\times n})x_0] + 2\,\mathsf{E}\,[x_0^\top k(0)\theta_0] + \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} \mathcal{K}(t)(\theta_t \otimes I_{n\times n})d\langle M, M\rangle_t\right] + \\
& + \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} \operatorname{tr}\Big([\mathcal{K}(t)(\theta_t \otimes I_{n\times n})]\,[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{n\times n})]\,[\mathcal{R}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})]^{-1}\,[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{n\times n})]^\top \cdot\right.\\
& \quad \cdot [\mathcal{K}(t)(\theta_t \otimes I_{n\times n})]\,\mathsf{E}\,[(x_t - \hat{x}_t)(x_t - \hat{x}_t)^\top \,|\, \mathscr{G}_t]\,dt)\Big] + \\
& + \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} \left\| u_t + [\mathcal{R}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})]^{-1}\,[\mathcal{B}(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})]^\top\,[\mathcal{K}(t)(\theta_t \otimes I_{n\times n})]\,\hat{x}_t\right]\right\|_{R(t)(\theta_t \otimes I_{m\times m})},
\end{aligned}
\tag{5.44}
$$

onde $K_i(t)$*,* $i = 1, \dots, N$ *são soluções de* (5.7)*.*

Demonstração. Basta usar o Lema 5.7 e proceder como na demonstração do Teorema 5.1. □

Observação 5.6. *O resultado do Teorema 5.2, analogamente ao Teorema 4.5, pode ser interpretado como uma condição necessária para a validade do princípio de equivalência à certeza. Basta observar que se*

$$
\mathsf{E}\,[(x_t - \hat{x}_t)(x_t - \hat{x}_t)^\top \,|\, \mathscr{G}_t] \tag{5.45}
$$

independer do processo de controle a minimização em (5.44) *é análoga ao caso com observações completas considerando-se o estado dado por* $\hat{x}_t$*.*

Observação 5.7. *O princípio de equivalência à certeza para o caso clássico de sistema excitado pelo processo de Wiener, sob a hipótese de observação da variável de saltos, pode ser derivada usando o Teorema 5.2 procedendo analogamente ao Exemplo 4.1. As equações do filtro de Kalman para esta classe de sistemas pode ser encontrada, por exemplo, em (MARITON, 1990, p. 151-155).*

5.5 Comentários finais

Neste capítulo foram estudados três problemas de otimização LQ de sistemas lineares com saltos Markovianos nos parâmetros e excitados por Martingales quadrado integráveis tanto contínuos quanto descontínuos. Ao invés de se abordar os problemas demonstrando-se a validade do princípio da otimalidade de Bellman ou do máximo de Pontryagin, mostrou-se que empregando a fórmula de Itô–Doléans-Dade–Meyer e soluções de certas equações diferenciais, os funcionais custo podiam ser reescritos de maneira conveniente para o estudo dos problemas de controle ótimo. Nos dois casos com observações completas, tanto do estado quanto das variáveis de salto, soluções explícitas para os problemas de controle foram obtidas. Um fato interessante é que, mesmo considerando sistemas excitados por martingales quadrado integráveis, os quais não possuem necessariamente incrementos independentes ou são processos de Markov como os processos de Wiener ou Poisson compensados, os processos de controle ótimo são iguais àqueles dos casos clássicos. No caso com observações parciais, destaca-se que o funcional custo reescrito pode ser interpretado como uma condição necessária para a validade do princípio de equivalência à certeza.

É importante ressaltar que o problema mais geral de um sistema descrito por

$$\begin{cases} dx_t = [A(t,\theta_t)x_t + B(t,\theta_t)u_t + g(t)]\,dt + \displaystyle\sum_{i=1}^{k} [C_i(t,\theta_{t^-})x_t + D_i(t,\theta_{t^-})u_t + f_i(t,\theta_{t^-})]\,dn_t^i + \\ \qquad\qquad\qquad + \sigma(t,\theta_{t^-})dM_t \\ x_o = \xi, \end{cases}$$

onde n_t^i é um processo de Wiener ou de Poisson não necessariamente compensado, com performance mensurada por

$$J(u) = \mathsf{E}\left[\int_0^{t_f} x_t^\top Q(t,\theta_t)x_t + u_t^\top R(t,\theta_t)u_t + 2k^\top(t,\theta_t)x_t + 2r^\top(t,\theta_t)u_t dt + x_{t_f}^\top F x_{t_f} + 2h^\top x_{t_f}\right],$$

pode ser estudado como feito neste capítulo.

6 Problema LEQG com observações restritas a certos instantes de tempo e controles constantes por partes

> *"...It is argued that the choice of the performance index to be optimized is arbitrary and subjective, perhaps only a matter of taste... These are naive objections and cannot be accepted from the scientific point of view."*
>
> – Rudolf Emil Kalman

Neste capítulo estuda-se o controle ótimo de sistemas descritos por EDE lineares excitadas por um processo de Wiener com funcional custo a exponencial de um função quadrática. Dois casos com observações parciais são estudados: (1) o estado do sistema é observado sem ruído apenas em certos instantes de tempo fixados a priori*; (2) o controlador recebe informações ruidosas do estado do sistema apenas em certos instantes de tempo fixados* a priori*. Em ambos os casos os controles admissíveis são restritos à classe de funções constantes por partes adaptados a uma certa $\sigma-$álgebra. A contribuição desta parte do trabalho é mostrar que os* *problemas originais em tempo contínuo com restrições podiam ser convertidos a problemas discretos equivalentes sem restrições os quais admitem solução fechada.*

6.1 Introdução

Uma classe de problemas na teoria de controle estocástico que tem recebido bastante atenção nos últimos anos é aquela em que o funcional custo é a exponencial de uma integral (*exponential-of-integral performance index*) (RUNOLFSSON, 1994a; RUNOLFSSON, 1994b; CHARALAMBOUS, 1997; CHARALAMBOUS; ELLIOTT, 1997; CHARALAMBOUS; ELLIOTT, 1998; LIM; ZHOU, 2005). Um dos motivos para este interesse deve-se à conexão de problemas desta classe com certos jogos diferenciais e problemas de controle H_∞ (GLOVER; DOYLE, 1988; GLOVER, 1989; JAMES, 1992). Além disto, problemas desta classe têm se mostrado bastante interessantes em diversas aplicações, como por exemlo, em economia (HOWARD; MATHESON, 1972), no guiamento de mísseis (SPEYER, 1976; LIN; LEE, 1995; LIAW; CHEN, 2004) e no pouso de uma aeronave (LEFEBVRE, 1998). Uma excelente discussão sobre propriedades interessantes de funcionais custo do tipo exponencial de uma integral pode ser encontrada, por exemplo, em (KUMAR; SCHUPPEN, 1981).

Problemas desta classe foram inicialmente formulados e resolvidos por Jacobson (1973) para o caso de sistemas lineares com custo a exponencial da integral de uma função quadrática, o chamado problema Linear Exponencial Quadrático Gaussiano (LEQG) tanto para o caso contínuo quanto discreto. Ainda em (JACOBSON, 1973), foi demostrada a equivalência entre a solução dos problemas LEQG discreto e contínuo com a de jogos (diferenciais) lineares quadráticos cooperativos e não-cooperativos.

Casos particulares do problema LEQG com observações parciais, tanto para o problema contínuo quanto discreto, foram estudados inicialmente por (SPEYER et al., 1974). No caso contínuo o problema foi estudado ainda por (SPEYER, 1976) e (KUMAR; SCHUPPEN, 1981). Ainda em (SPEYER et al., 1974) foi demonstrado que o princípio da equivalência à certeza não é mais válido para problemas LEQG mas o princípio da separação ainda o é. Em (JACOBSON, 1977) os resultados para os problemas LEQG com observações completas e parciais, contínuos e discretos, conhecidos até então foram sumarizados.

Um problema LEQG discreto com observações parciais bastante geral foi inicialmente formulado e resolvido em (WHITTLE, 1981; WHITTLE, 1990). A extensão destes resultados para o tempo contínuo foi esboçada inicialmente em (BENSOUSSAN; VAN SCHUPPEN, 1984) sendo os detalhes apresentados em (BENSOUSSAN; VAN SCHUPPEN, 1985; BENSOUSSAN, 2004).

Dentre os trabalhos mais recentes envolvendo o problema LEQG podem ser citados ainda (WHITTLE, 1990; ELLIOTT et al., 1995; COLLINGS, 1995; COLLINGS et al., 1996; CHARALAMBOUS; HIBEY, 1996; WHITTLE, 1996; YONEYAMA, 2001).

Nesta parte do trabalho, é discutido o problema de controle ótimo estocástico LEQG no qual o estado do sistema a ser controlado é descrito por uma EDE excitada por um processo de Wiener e o funcional custo é do tipo exponencial quadrático terminal como em (SPEYER, 1976). Ainda, os controles admissíveis são restritos a processos constantes por partes.

A contribuição desta parte do trabalho consiste na solução de dois problemas LEQG com observações parciais, para os quais mostra-se que é possível empregar argumentos diretos como em (HALYO; CAGLAYAN, 1976; JOHNSON, 1991): mostra-se que o problema original contínuo no tempo com restrições nos controles admissíveis pode ser convertido em um problema de controle ótimo discreto equivalente o qual admite solução fechada.

Problemas da classe estudada nesta parte do trabalho foram estudados ainda em (YONEYAMA,

2001) empregando métodos diferentes.

Os resultados apresentados aqui serão apresentados também em (SILVA; YONEYAMA, 2008d).

Este capítulo está organizado na forma apresentada a seguir. Na Seção 6.2 os problemas a serem estudados serão formulados. Na Seção 6.3 alguns resultados preliminares serão derivados. Nas Seções 6.4 e 6.5 as soluções para os problemas propostos são apresentadas. Por fim, na Seção 6.6 são tecidos alguns comentários finais.

6.2 Formulação dos problemas

Sejam $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}\}_{t\geq 0}, \mathsf{P})$ um espaço de probabilidade filtrado satisfazendo as condições usuais, $t_f \in [0, +\infty)$, ξ uma variável aleatória Gaussiana com média m_0 e variância $P_0 \in \mathcal{S}^{n+}$, $w = (w_t, \mathscr{F}_t)$ e $v = (v_t, \mathscr{F}_t)$ processos de Wiener de dimensão q_1 e q_2 respectivamente. Assuma que w, v e ξ são independentes.

Considere um sistema descrito por:

$$\begin{cases} dx_t = (A(t)x_t + B(t)u_t)dt + \sigma(t)dw_t \\ x_0 = \xi, \end{cases} \tag{6.1}$$

onde $A : [0, t_f] \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $B : [0, t_f] \to \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ e $\sigma : [0, t_f] \to \mathcal{M}_{n\times q_1}$ são mapeamentos contínuos por partes e $\sigma(t)\sigma^\top(t) \in \mathcal{S}^{n+}$, $\forall t \in [0, t_f]$.

Assuma que a performance do sistema a ser controlado seja adequadamente mensurada por:

$$J_{LEQG}(u) := \mathsf{E}\left[\mu \exp\left(\frac{\mu}{2}\left[\int_0^{t_f} u_t^\top R(t)u_t dt + x_{t_f}^\top F x_{t_f}\right]\right)\right], \qquad \mu \in \mathbb{R}, \tag{6.2}$$

onde $R : [0, t_f] \to \mathcal{S}^{n+}$ é um mapeamento contínuo por partes e $F \in \mathcal{S}^{n0}$.

Observação 6.1. *Considere uma função* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \mu \exp\left(\frac{\mu}{2}x\right)$. *Observe que se* $\mu > 0$*:*

$$0 < \mu \leq f(x) \leq +\infty \tag{6.3}$$

e se $\mu < 0$*:*

$$\mu \leq f(x) < 0. \tag{6.4}$$

Assim, para $\mu \in \mathbb{R}$ *o funcional custo* (6.2) *é tal que* $J_{LEQG}(u) > -\infty$ *(problema bem posto).*

Seja $\Pi := \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$, com $t_0 = 0$ e $t_N = t_f$ uma partição de $[0, t_f]$.

Lema 6.1. *O conjunto* $\mathcal{U}_{\mathcal{G},\Pi}$ *dado por*

$$\mathcal{U}_{\mathcal{G},\Pi} := \left\{ u = \sum_{k=0}^{N-1} g_k \mathcal{X}_{[t_k, t_{k+1})} \,|\, g_k : \Omega \to U, \mathcal{G}_{t_k}\text{-adaptado}, k = 0, \ldots, N-1 \right\}, \tag{6.5}$$

$$\mathcal{G}_t := \sigma\left([x_0, \ldots, x_{t_k}]\right), t \in [t_k, t_{k+1}), k = 0, \ldots, N-1, \tag{6.6}$$

está bem definido.

Demonstração. Proceder por indução finita para mostrar que $\mathcal{G}_t$ independe de u, se $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{G},\Pi}$.

□

Problema 6.1 (Observações sem ruído). *Considere um sistema descrito pela Equação* (6.1). *Assuma que a performance do sistema é adequadamente mensurada pelo funcional custo* (6.2). *Encontrar, se existir,* $u^* \in \mathcal{U}_{\mathcal{G},\Pi}$, *onde* $\mathcal{U}_{\mathcal{G},\Pi}$ *é definido pelas Equações* (6.5) *e* (6.6), *tal que:*

$$J_{LEQG}(u^*) = \inf_{u \in \mathcal{U}_{\mathcal{G},\Pi}} J_{LEQG}(u). \tag{6.7}$$

Considere agora que estão disponíveis apenas observações do tipo

$$y(t_k) = C(k)x_{t_k} + v_{t_k}, \qquad k = 0, \ldots N. \tag{6.8}$$

onde $\{v_{t_k}\}_{k=0}^{N}$ é uma seqüência i.i.d de variáveis aleatórias Gaussianas com média zero e variância $V(k) > 0$.

Lema 6.2. *O conjunto $\mathcal{U}_{\mathscr{Y},\Pi}$ dado por*

$$\mathcal{U}_{\mathscr{Y},\Pi} := \left\{ u = \sum_{k=0}^{N-1} g_k \,\mathcal{X}_{[t_k,t_{k+1})} \,|\, g_k : \Omega \to U, \mathscr{Y}_{t_k}\text{-adaptado}, k = 0, \ldots, N-1 \right\}, \tag{6.9}$$

$$\mathscr{Y}_t := \sigma\left([y_0, \ldots, y_{t_k}]\right), t \in [t_k, t_{k+1}), k = 0, \ldots, N-1, \tag{6.10}$$

está bem definido.

Demonstração. Proceder por indução finita para mostrar que $\mathscr{Y}_t$ independe de u, se $u \in \mathcal{U}_{\mathscr{Y},\Pi}$.

□

Problema 6.2 (Observações ruidosas). *Considere um sistema descrito pela Equação (6.1). Assuma que a performance do sistema é adequadamente mensurada pelo funcional custo (6.2). Encontrar, se existir, $u^* \in \mathcal{U}_{\mathscr{Y},\Pi}$, onde $\mathcal{U}_{\mathscr{Y},\Pi}$ é definido pelas Equações (6.9) e (6.10), tal que:*

$$J_{LEQG}(u^*) = \inf_{u \in \mathcal{U}_{\mathscr{Y},\Pi}} J_{LEQG}(u). \tag{6.11}$$

6.3 Resultados Preliminares

6.3.1 Problema LEQG discreto com observações completas

Nesta seção, alguns dos resultados de (JACOBSON, 1973) e (JACOBSON, 1977, p. 9-18) de interesse para o estudo dos problemas considerados neste capítulo serão detalhados visando a esclarecer sob que hipóteses os resultados da Seção 6.4 são válidos.

Considere um sistema descrito por

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_d(k)x_k + B_d(k)u_k + \sigma_d(k)w_k, \\ x_0 = \xi \end{cases} \tag{6.12}$$

onde $A_d : \{0,\dots,N-1\} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $B_d : \{0,\dots,N-1\} \to \mathcal{M}_{n\times d}(\mathbb{R})$, $\sigma_d : \{0,\dots,N-1\} \to \mathcal{M}_{n\times q}(\mathbb{R})$, $\{w_k\}_{k=0}^N$ é uma seqüência de variáveis aleatórias independentes tal que $w_k \sim \mathcal{N}(0, W(k))$, $W(k) \in \mathcal{S}^{q+}$, $\forall k \in \{0,\dots,N-1\}$, e ξ é uma variável aleatória independente de $\{w_k\}_{k=0}^N$ com distribuição π_ξ fixada.

Assuma que a performance do sistema a ser controlado seja adequadamente mensurada por

$$J_{LEQG}(u) := \mu\,\mathsf{E}\left[\exp\left(\frac{\mu}{2}\left[\sum_{k=0}^{N-1}(x_k^\top Q_d(k)x_k + u_k^\top R_d(k)u_k) + x_N^\top F_d x_N\right]\right)\right] \tag{6.13}$$

onde $\mu \in \mathbb{R}$, $Q_d(k), F_d \in \mathcal{S}^{n0}(\mathbb{R})$, $R_d(k) \in \mathcal{S}^{n+}(\mathbb{R})$, $\forall k \in \{0,\dots,N-1\}$.

O problema considerado nesta seção consiste em determinar uma seqüência de controles $u_0^*,\dots,u_N^*$ tal que u_k^* é adaptado à $\sigma(x_i\,,\ i = 0,\dots,k)$ que minimiza o funcional custo (6.13) (dentre todas as seqüências de controle adaptadas).

Teorema 6.1. *Se $V(0,x), V(1,x), \ldots, V(N,x)$ satisfazem:*

$$
\begin{aligned}
V(k,x) &= \inf_{v\in\mathbb{R}^d}\left[\exp\left(\frac{\mu}{2}\left(x^\top Q_d(k)x + v^\top R_d(k)v\right)\right)\cdot \mathrm{E}\left[V(k+1, A_d(k)x + B_d(k)v + \sigma_d(k)w_k)\right]\right],\\
V(N,x) &= \mu\exp\left(\frac{\mu}{2}x^\top F_d(N)x\right), \qquad \forall x\in\mathbb{R}^n,
\end{aligned}
\tag{6.14}
$$

e o ínfimo é atingido por $v(k,x)$, $k = 0,\ldots,N-1$, então u_k^*, $k = 0,\ldots,N-1$ dada por $u_k^* = v(k,z_k)$ onde

$$
\begin{cases}
z_{k+1} = A_d(k)z_k + B_d(k)v(k,z_k) + \sigma_d(k)w_k,\\
z_0 = \xi,
\end{cases}
\tag{6.15}
$$

minimiza o funcional custo (6.13) e é tal que u_k^*, é adaptado à $\sigma(x_i\,,\ i = 0,\ldots,k)$, $k = 0,\ldots,N-1$. Além disso, o custo ótimo é dado por $V(0,x_0)$.

Demonstração. Uma demonstração formal segue os argumentos de (ELLIOTT et al., 1995, p.265-289). □

Proposição 6.1. *Sejam $\alpha : \{0,1,\ldots,N\} \to \mathbb{R}$ e $S : \{0,1,\ldots,N\} \to \mathcal{S}^{n+}(\mathbb{R})$ soluções de*

$$
\begin{cases}
\alpha(k) = \alpha(k+1)\left(\sqrt{\det\left(I_q - \mu W(k)\sigma_d^\top(k)S(k+1)\sigma_d(k)\right)}\right)^{-1}, k = 0,\ldots,N-1\\
\alpha(N) = 1,
\end{cases}
\tag{6.16}
$$

e

$$
\begin{cases}
S(k) = Q_d(k) + A_d^\top(k)\left(\widetilde{S}(k+1) - \widetilde{S}(k+1)B_d(k)\tilde{R}_d^{-1}(k)B_d^\top(k)\widetilde{S}(k+1)\right)A_d(k),\\
S(N) = F_d,
\end{cases}
\tag{6.17}
$$

onde, $\tilde{R}_d(k) := \left(R_d(k) + B_d^\top(k)\widetilde{S}(k+1)B_d(k)\right)$ e

$$
\widetilde{S}(k+1) := S(k+1) + \mu S(k+1)\sigma_d(k)\left(W^{-1}(k) - \mu\sigma_d^\top(k)S(k+1)\sigma_d(k)\right)^{-1}\sigma_d^\top(k)S(k+1). \tag{6.18}
$$

Então,

$$V(k, x) = \mu\alpha(k) \exp\left(\frac{\mu}{2} x^\top S(k)x\right) \tag{6.19}$$

é solução de (6.14)*. Ainda, para cada par* (k, x)*,* $k = 0, 1, \ldots, N-1$*,* $x \in \mathbb{R}^n$*, o ínfimo em* (6.14) *é alcançado por*

$$v^*(k, x) = -M(k)x, \tag{6.20}$$

onde

$$M(k) = \left(R_d(k) + B_d^\top(k)\widetilde{S}(k+1)B_d(k)\right)^{-1} B_d^\top(k)\widetilde{S}(k+1)A_d(k), k = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{6.21}$$

Observação 6.2. *Ao assumir que existe* $S : \{0, 1, \ldots, N\} \to \mathcal{S}^{n+}(\mathbb{R})$ *na Proposição* 6.1 *está sendo assumido que*

$$\widetilde{W}(k) := \left(W^{-1}(k) - \mu\sigma_d^\top(k)S(k+1)\sigma_d(k)\right) > 0, \tag{6.22}$$

$$\widetilde{R}(k) := R_d(k) + B_d^\top(k)\widetilde{S}(k+1)B_d(k) > 0. \tag{6.23}$$

No caso $\mu < 0$ *é fácil provar por indução que* $\widetilde{W}(k) \in \mathcal{S}^{n+}$*,* $k = 0, \ldots, N-1$*. No caso* $\mu > 0$*, dependendo dos autovalores de* $W(k)$*, matriz de covariância do ruído do estado, pode ser que* $\widetilde{W}(k)$ *não seja invertível. Aqui, assume-se que os ruídos possuem intensidade suficientemente "pequenas" para garantir que* $\widetilde{W}(k) \in \mathcal{S}^{n+}$*,* $k = 0, \ldots, N-1$*.*

Antes da demonstração da Proposição (6.1) serão demonstrados alguns lemas.

Lema 6.3. *Seja* $V(k, x)$ *dado pela Equação* (6.19)*. Então,*

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}\left[V(k+1, A_d(k)x + B_d(k)v + \sigma_d(k)w_k)\right] = \\ &= \mu\alpha(k) \cdot \exp\left(\frac{\mu}{2}\left(A_d(k)x + B_d(k)v\right)^\top \widetilde{S}(k)\left(A_d(k)x + B_d(k)v\right)\right), k = 0, \ldots, N-1, \end{aligned} \tag{6.24}$$

onde $\widetilde{S}(k)$ é dado pela Equação (6.18).

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left[V(k+1, A_d(k)x + B_d(k)v + \sigma_d(k)w_k)\right] = \\
&\quad = \mathsf{E}\left[\mu\alpha(k+1)\exp\left(\frac{\mu}{2}\left(A_d(k)x + B_d(k)v + \sigma_d(k)w_k\right)^{\top} S(k+1)\left(A_d(k)x + B_d(k)v + \sigma_d(k)w_k\right)\right)\right] \\
&\quad = \mu\alpha(k+1)\exp\left(\frac{\mu}{2}\left(A_d(k)x + B_d(k)v\right)^{\top} S(k+1)\left(A_d(k)x + B_d(k)v\right)\right)\cdot \\
&\qquad \cdot \mathsf{E}\left[\exp\left(\frac{\mu}{2}\left(w_k^{\top}\sigma_d^{\top}(k)S(k+1)\sigma_d(k)w_k + 2\left(A_d(k)x + B_d(k)v\right)^{\top} S(k+1)\sigma_d(k)w_k\right)\right)\right].
\end{aligned}
$$

Agora, como $w_k \sim \mathcal{N}(0, W(k))$ tem-se

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left[V(k+1, A_d(k)x + B_d(k)v + \sigma_d(k)w_k)\right] = \\
&\quad = \mu\alpha(k+1)\exp\left(\frac{\mu}{2}\left(A_d(k)x + B_d(k)v\right)^{\top} S(k+1)\left(A_d(k)x + B_d(k)v\right)\right)\cdot \\
&\qquad \cdot \int_{\mathbb{R}^q} \exp\left(\frac{\mu}{2}\left(w_k^{\top}\sigma_d^{\top}(k)S(k+1)\sigma_d(k)w_k + 2\left(A_d(k)x + B_d(k)v\right)^{\top} S(k+1)\sigma_d(k)w_k\right)\right)\cdot \\
&\qquad \cdot \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^q \det(W(k))}}\exp\left(-\frac{1}{2}w_k^{\top}W^{-1}(k)w_k\right)dw_k \\
&\quad = \frac{\mu\alpha(k+1)}{\sqrt{(2\pi)^q \det(W(k))}}\exp\left(\frac{\mu}{2}\left(A_d(k)x + B_d(k)v\right)^{\top} S(k+1)\left(A_d(k)x + B_d(k)v\right)\right)\cdot \\
&\qquad \cdot \int_{\mathbb{R}^q} \exp\left(\frac{\mu}{2}\left(w_k^{\top}\sigma_d^{\top}(k)S(k+1)\sigma_d(k)w_k + 2\left(A_d(k)x + B_d(k)v\right)^{\top} S(k+1)\sigma_d(k)w_k\right)\right)\cdot \\
&\qquad \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}w_k^{\top}W^{-1}(k)w_k\right)dw_k \\
&\quad = \frac{\mu\alpha(k+1)}{\sqrt{(2\pi)^q \det(W(k))}}\exp\left(\frac{\mu}{2}\left(A_d(k)x + B_d(k)v\right)^{\top} S(k+1)\left(A_d(k)x + B_d(k)v\right)\right)\cdot \\
&\qquad \cdot \int_{\mathbb{R}^q} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(w_k^{\top}\tilde{W}(k)w_k + 2\overline{W}^{\top}(k)w_k\right)\right)dw_k,
\end{aligned}
$$

onde $\tilde{W}(k)$ é dado pela Equação (6.22) e $\overline{W}(k) := -\mu\sigma_d^{\top}(k)S(k+1)\left(A_d(k)x + B_d(k)v\right)$.

Usando o Lema 4.1, para completar os quadrados, lembrando que, por hipótese, ver Observação 6.2, $\widetilde{W}(k) \in \mathcal{S}^{d+}$ está bem definido, tem-se

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left[V(k+1, A_d(k)x + B_d(k)v + \sigma_d(k)w_k)\right] = \\
&= \mu\alpha(k+1)\frac{\sqrt{(2\pi)^q \det\left(\widetilde{W}^{-1}(k)\right)}}{\sqrt{(2\pi)^q \det\left(W(k)\right)}} \exp\left(\frac{\mu}{2}\left(A_d(k)x + B_d(k)v\right)^\top S\left(k+1\right)\left(A_d(k)x + B_d(k)v\right)\right)\cdot \\
&\quad \cdot \int_{\mathbb{R}^q} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^q \det\left(\widetilde{W}^{-1}(k)\right)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\left(w_k + \widetilde{W}^{-1}(k)\overline{W}(k)\right)^\top \widetilde{W}(k)\left(w_k + \widetilde{W}^{-1}(k)\overline{W}(k)\right)\right)\right) dw_k \\
&\quad \cdot \exp\left(\frac{1}{2}\overline{W}^\top(k)\widetilde{W}^{-1}(k)\overline{W}(k)\right).
\end{aligned}$$

Agora, como a integral na equação anterior é igual a 1,

$$\begin{aligned}
\det \widetilde{W}^{-1}(k) &= \det\left[\left(W^{-1}(k) - \mu\sigma_d^\top(k)S\left(k+1\right)\sigma_d(k)\right)^{-1}\right] \\
&= \det\left[\left(I_q - \mu W(k)\sigma_d^\top(k)S\left(k+1\right)\sigma_d(k)\right)^{-1} W(k)\right] \\
&= \det\left(W(k)\right)\left[\det\left(I_q - \mu W(k)\sigma_d^\top(k)S\left(k+1\right)\sigma_d(k)\right)\right]^{-1},
\end{aligned}$$

e, da definição de $\alpha(k)$, segue

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left[V(k+1, A_d(k)x + B_d(k)v + \sigma_d(k)w_k)\right] = \\
&\quad = \mu\alpha(k)\exp\left(\frac{\mu}{2}\left(A_d(k)x + B_d(k)v\right)^\top S\left(k+1\right)\left(A_d(k)x + B_d(k)v\right)\right)\cdot \\
&\qquad \cdot \exp\left(\frac{1}{2}\overline{W}^\top(k)\widetilde{W}^{-1}(k)\overline{W}(k)\right).
\end{aligned}$$

O resultado segue da equação anterior e da definição de $\overline{W}(k)$ de $\widetilde{S}(k+1)$, Equação (6.18). □

Lema 6.4. *Seja V dado pela Equação* (6.19). *Então,*

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\frac{\mu}{2}\left(x^\top Q_d(k)x + v^\top R_d(k)v\right)\right)\cdot \mathsf{E}\left[V(k+1, A_d(k)x + B_d(k)v + \sigma_d(k)w_k)\right] = \\
&\quad = \mu\cdot\alpha(k)\cdot\exp\left(\frac{\mu}{2}\left(v + M(k)x\right)^\top\left(R_d(k) + B_d^\top\widetilde{S}(k+1)B_d(k)\right)^{-1}\left(v + M(k)x\right)\right)\cdot \\
&\qquad \cdot \exp\frac{\mu}{2}x^\top S\left(k\right)x,
\end{aligned} \tag{6.25}$$

onde $S(k)$ é dada pela Equação (6.17).

Demonstração. Usando o resultado do Lema 6.3, tem-se

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\frac{\mu}{2}\left(x^\top Q_d(k)x + v^\top R_d(k)v\right)\right)\cdot \mathsf{E}\left[V(k+1, A_d(k)x + B_d(k)v + \sigma_d(k)w_k)\right] = \\
&\quad = \exp\left(\frac{\mu}{2}\left(x^\top Q_d(k)x + v^\top R_d(k)v\right)\right)\cdot \mu\alpha(k)\exp\left(\frac{\mu}{2}\left(A_d(k)x + B_d(k)v\right)^\top \widetilde{S}(k+1)\left(A_d(k)x + B_d(k)v\right)\right) \\
&\quad = \mu\alpha(k)\exp\left(\frac{\mu}{2}\left(x^\top Q_d(k)x + v^\top R_d(k)v\right)\right)\cdot \\
&\qquad \cdot\exp\left(\frac{\mu}{2}\left(x^\top A_d^\top(k)\widetilde{S}(k+1)A_d(k)x + 2x^\top A_d^\top(k)\widetilde{S}(k+1)B_d(k)v + v^\top B_d^\top(k)\widetilde{S}(k)B_d(k)v\right)\right) \\
&\quad = \mu\alpha(k)\exp\left(\frac{\mu}{2}\left(v^\top\left(R_d(k) + B_d^\top(k)\widetilde{S}(k+1)B_d(k)\right)v + 2x^\top A_d^\top(k)\widetilde{S}(k+1)B_d(k)v\right)\right)\cdot \\
&\qquad \cdot\exp\left(\frac{\mu}{2}x^\top\left(Q_d(k) + A_d^\top(k)\widetilde{S}(k+1)A_d(k)\right)x\right).
\end{aligned}$$

Do Lema 4.1, Observação 6.2 e da Equação (6.21):

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\frac{\mu}{2}\left(x^\top Q_d(k)x + v^\top R_d(k)v\right)\right)\cdot \mathsf{E}\left[V(k+1, A_d(k)x + B_d(k)v + \sigma_d(k)w_k)\right] = \\
&\quad = \mu\alpha(k)\exp\left(\frac{\mu}{2}\left(v + M(k)x\right)^\top\left(R_d(k) + B_d^\top\widetilde{S}(k+1)B_d(k)\right)^{-1}\left(v + M(k)x\right)\right)\cdot \\
&\qquad \cdot\exp\left[-\frac{\mu}{2}\left(x^\top A_d^\top(k)\widetilde{S}(k+1)B_d(k)\left(R_d(k) + B_d^\top\widetilde{S}(k+1)B_d(k)\right)^{-1}B_d^\top(k)\widetilde{S}(k+1)A_d^\top(k)x\right)\right]\cdot \\
&\qquad \cdot\exp\left(\frac{\mu}{2}x^\top\left(Q_d(k) + A_d^\top(k)\widetilde{S}(k+1)A_d(k)\right)x\right).
\end{aligned}$$

Usando a Equação (6.17), definição de $S(k)$, $k = 0, \ldots, N$, obtém-se

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\frac{\mu}{2}\left(x^\top Q_d(k)x + v^\top R_d(k)v\right)\right)\cdot \mathsf{E}\left[V(k+1, A_d(k)x + B_d(k)v + \sigma_d(k)w_k)\right] = \\
&\quad = \mu\alpha(k)\exp\left(\frac{\mu}{2}\left(v + M(k)x\right)^\top\left(R_d(k) + B_d^\top\widetilde{S}(k+1)B_d(k)\right)^{-1}\left(v + M(k)x\right)\right)\cdot \\
&\qquad \cdot\exp\frac{\mu}{2}x^\top S(k)x.
\end{aligned}$$

$\square$

Lema 6.5. *Seja V dada pela Equação (6.19). Então,*

$$\inf_{v \in \mathbb{R}^d} \left[\exp\left(\frac{\mu}{2}\left(x^\top Q_d(k)x + v^\top R_d(k)v\right)\right) \cdot \mathsf{E}\left[V(k+1, A_d(k)x + B_d(k)v + \sigma_d(k)w_k)\right]\right] = \exp\left(\frac{\mu}{2} x^\top S(k)x\right). \tag{6.26}$$

Demonstração. Segue diretamente do Lema 6.4. □

Demonstração da Proposição (6.1). Proceder por indução finita em k e usar os resultados dos lemas anteriores. □

Observação 6.3. *Observe que nas demostrações das proposições anteriores foi explicitamente empregado a natureza exponencial da distribuição Gaussiana de w_k. Observe também que ξ não foi suposta ser necessariamente Gaussiana.*

6.3.2 Problema LEQG discreto com observações parciais

Nesta seção, analogamente à seção anterior, detalhes de alguns dos resultados de (SPEYER et al., 1974) e (JACOBSON, 1977, p. 24-32) serão apresentados visando a esclarecer sob que hipóteses os resultados da Seção 6.5 são válidos.

Considere o sistema descrito por (6.12), agora impondo $\xi \sim \mathcal{N}(0, Y_0)$. Assuma o seguinte processo de observações

$$y_k = C_d(k)x_k + v_k, \tag{6.27}$$

onde $C_d : \{0, \ldots, N\} \to \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $\{v_k\}_{k=0}^N$ é uma seqüência de variáveis aleatórias independentes tal que $v_k \sim \mathcal{N}(0, V(k))$, $V(k) > 0$. Assuma ainda que as seqüências $\{v_k\}_{k=0}^N$, $\{w_k\}_{k=0}^N$ e ξ são independentes. O problema considerado nesta seção consiste em minimizar o funcional custo (6.13), assumindo $Q_d(k) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, e que cada u_k é adaptado à

$\sigma(y_i\,,\ i = 0, \ldots, k)$.

Antes de ser apresentado o resultado principal desta seção, Teorema 6.3, serão apresentados alguns resultados preliminares.

Teorema 6.2 (Kalman-Bucy, 1961). *Sejam x_k e y_k dados por* (6.12) *e* (6.27), *respectivamente, com u_k adaptado à $\mathscr{Y}_k$, onde*

$$\mathscr{Y}_k := \sigma(y_i\,,\ i = 0, \ldots, k)\,, \quad k = 0, 1, \ldots, N. \tag{6.28}$$

Defina

$$\hat{x}_{i|j} := \mathrm{E}\left[x_i \,|\, \mathscr{Y}_j\right], \tag{6.29}$$

$$P(i, j) := \mathsf{E}\left[\left(x_i - \hat{x}_{i|j}\right)\left(x_i - \hat{x}_{i|j}\right)^\top\right], k = 0, 1, \ldots, N. \tag{6.30}$$

Então, $P(0, 0) = \mathsf{var}(x_0)$ e, para $k = 1, \ldots, N$,

$$\begin{cases} P(k,k) = P(k,k-1)\left(I_n - C_d(k)^\top \left(C_d(k)P(k,k-1)C_d^\top(k) + V(k)\right)^{-1} C_d(k)P(k,k-1)\right), \\ P(k,k-1) = A_d(k-1)P(k-1,k-1)A_d^\top(k-1) + \sigma_d(k)W(k-1)\sigma_d^\top(k). \end{cases} \tag{6.31}$$

Ainda,

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K(k)\gamma_k, \tag{6.32}$$

$$\hat{x}_{k|k-1} = A_d(k-1)\hat{x}_{k-1|k-1} + B(k-1)u_{k-1}, \tag{6.33}$$

onde

$$\gamma_k := y_k - \mathrm{E}\left[y_k \mid \mathscr{Y}_{k-1}\right] = y_k - \hat{y}_{k|k-1}, \tag{6.34}$$

$$\gamma_k = y_k - C_d(k)\hat{x}_{k|k-1}, \tag{6.35}$$

e

$$K(k) = P(k,k)C_d^\top(k)V^{-1}(k). \tag{6.36}$$

Demonstração. Veja, por exemplo, (GONÇALVES, 2005). □

Notação 6.1. *Empregar-se-á a seguinte notação*

$$\hat{x}_k := \hat{x}_{k|k}, \qquad k = 0, \ldots N, \tag{6.37}$$

$$P(k) := P(k,k), k = 0, \qquad \ldots, N. \tag{6.38}$$

Lema 6.6. *O processo $e_k := x_k - \hat{x}_{k|k}$ é independente de $\mathscr{Y}_k$.*

Demonstração. Veja, por exemplo, (GONÇALVES, 2005). □

Lema 6.7. $\{\gamma_k\}_{k=0}^N$ *é uma seqüência de variáveis aleatórias Gaussianas com média zero e variância*

$$\Gamma(k) := \mathsf{E}\left[\gamma_k\gamma_k^\top\right] = C_d(k)P(k,k-1)C_d^\top(k) + V(k) \tag{6.39}$$

tal que γ_k é independente de $\mathscr{Y}_{k-1}$.

Demonstração. Veja, por exemplo, (GONÇALVES, 2005). □

Lema 6.8. *Sejam x_k e y_k dados por* (6.12) *e* (6.27)*, respectivamente, com u_k adaptado à $\mathscr{Y}_k$ (ver*

Equação (6.28)*). Então,*

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\left[\exp\left(\frac{\mu}{2}x_N^\top F_d x_N\right) \mid \mathscr{Y}_N\right] = \\ &= \left[\det\left(I_n - \mu P(N)F_d\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\mu}{2}\hat{x}_N^\top \left[F_d(I_n - \mu P(N)F_d)^{-1}\right]\hat{x}_N^\top\right). \end{aligned} \tag{6.40}$$

Demonstração. Como, pelo Teorema 6.2, a distribuição de x_N dado $\mathscr{Y}_N$ é $\mathcal{N}(\hat{x}_N, P(N))$ tem-se:

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\left[\exp\left(\frac{\mu}{2}x_N^\top F_d x_N\right) \mid \mathscr{Y}_N\right] = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{\mu}{2}x^\top F_d x\right)\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det P(N)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\hat{x}_N)^\top P^{-1}(N)(x-\hat{x}_N)\right)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det P(N)}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(-\mu x^\top F_d x + (x-\hat{x}_N)^\top P^{-1}(N)(x-\hat{x}_N)\right)\right)dx. \end{aligned} \tag{6.41}$$

Agora, pelo Lema 4.1,

$$\begin{aligned} &-\mu x^\top F_d x + (x-\hat{x}_N)^\top P^{-1}(N)(x-\hat{x}_N) = \\ &\quad = x^\top\left(P^{-1}(N) - \mu F_d\right)x - 2\hat{x}_N^\top P^{-1}(N)x + \hat{x}_N^\top P^{-1}\hat{x}_N = \\ &\quad = \left(x - \left(P^{-1}(N)-\mu F_d\right)^{-1}P^{-1}(N)\hat{x}_N\right)^\top\left(P^{-1}(N)-\mu F_d\right)\left(x - \left(P^{-1}(N)-\mu F_d\right)^{-1}P^{-1}(N)\hat{x}_N\right) + \\ &\qquad + \hat{x}_N^\top\left(P^{-1}(N) - P^{-1}(N)\left(P^{-1}(N)-\mu F_d\right)^{-1}P^{-1}(N)\right)\hat{x}_N. \end{aligned} \tag{6.42}$$

Ainda,

$$\begin{aligned} &P^{-1}(N) - P^{-1}(N)\left(P^{-1}(N)-\mu F_d\right)^{-1}P^{-1}(N) = \\ &= P^{-1}(N) - P^{-1}(N)\left(I - \mu P(N)F_d\right)^{-1} = \\ &= P^{-1}(N)\left[I_n - (I_n - \mu P(N)F_d)^{-1}\right] = \\ &= P^{-1}(N)\left\{\left[(I_n - \mu P(N)F_d) - I_n\right](I_n - \mu P(N)F_d)^{-1}\right\} = \\ &= -\mu F_d(1 - \mu P(N)F_d)^{-1}. \end{aligned} \tag{6.43}$$

Agora, substituindo (6.42) e (6.43) em (6.41) obtém-se:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[\exp\left(\frac{\mu}{2}x_N^\top F_d x_N\right) \mid \mathcal{Y}_N\right] = \\
&= \frac{\sqrt{(2\pi)^n \det\left(P^{-1}(N) - \mu F_d\right)^{-1}}}{\sqrt{(2\pi)^n \det P(N)}} \exp\left(\frac{\mu}{2}\hat{x}_N^\top F_d (1 - \mu P(N) F_d)^{-1}\hat{x}_N\right) \cdot \\
&\quad \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det\left(P^{-1}(N) - \mu F_d\right)^{-1}}} \exp\,(x - \tilde{x})^\top \left(P^{-1}(N) - \mu F_d\right)(x - \tilde{x}) dx,
\end{aligned} \tag{6.44}$$

onde $\tilde{x} := \left(P^{-1}(N) - \mu F_d\right)^{-1} P^{-1}(N)\hat{x}_N$. Observando que a integral na equação anterior é igual a 1 e que:

$$\frac{\sqrt{(2\pi)^n \det\left(P^{-1}(N) - \mu F_d\right)^{-1}}}{\sqrt{(2\pi)^n \det P(N)}} = \left(\det\left(I_n - \mu P(N) F_d\right)\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{6.45}$$

o resultado segue. □

Lema 6.9. *Sejam x_k e y_k dados por* (6.12) *e* (6.27)*, respectivamente, com u_k adaptado à $\mathcal{Y}_k$ (ver Equação* (6.28)*). Considere ainda, $i \in \{1, \dots, N\}$, $\Gamma(i)$ dado por* (6.39)*, $K(i)$ dado por* (6.36) *e $\widetilde{M} \in \mathcal{S}^{n+}$ tal que:*

$$\widetilde{\Gamma}(i) := \Gamma^{-1}(i) - \mu K^\top(i)\widetilde{M}K(i) > 0. \tag{6.46}$$

Então,

$$\mathrm{E}\left[\exp\left(\frac{\mu}{2}\hat{x}_i^\top \widetilde{M}\hat{x}_i\right) \mid \mathcal{Y}_{i-1}\right] = \frac{1}{\sqrt{\det\left(I - \mu K^\top(i)\widetilde{M}K(i)\Gamma(i)\right)}} \exp\left(\frac{\mu}{2}\hat{x}_{i|i-1}^\top \overline{M}\hat{x}_{i|i-1}\right), \tag{6.47}$$

onde $\hat{x}_{i|i-1}$ é dado por (6.33) *e*

$$\overline{M} := \widetilde{M} + \mu\widetilde{M}K(i)\left(\Gamma^{-1}(i) - \mu K^\top(i)\widetilde{M}K(i)\right)^{-1} K^\top(i)\widetilde{M}. \tag{6.48}$$

Demonstração. Inicialmente, usando (6.32), segue que

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[\exp\left(\frac{\mu}{2}\hat{x}_i^\top \widetilde{M}\hat{x}_i\right) \mid \mathscr{Y}_{i-1}\right] = \\
&\quad = \mathrm{E}\left[\exp\frac{\mu}{2}\left(\hat{x}_{i|i-1} + K(i)\gamma_i\right)^\top \widetilde{M}\left(\hat{x}_{i|i-1} + K(i)\gamma_i\right) \mid \mathscr{Y}_{i-1}\right] \\
&\quad = \exp\left(\frac{\mu}{2}\hat{x}_{i|i-1}^\top \widetilde{M}\hat{x}_{i|i-1}\right)\cdot \mathrm{E}\left[\exp\left(\frac{\mu}{2}\left(\gamma_i^\top K^\top(i)\widetilde{M}K(i)\gamma_i + 2\hat{x}_{i|i-1}^\top \widetilde{M}K(i)\gamma_i\right)\right) \mid \mathscr{Y}_{i-1}\right],
\end{aligned} \tag{6.49}$$

pois $\hat{x}_{i|i-1}$ é $\mathscr{Y}_{i-1}$-mensurável. Como γ_i é independente de $\mathscr{Y}_{i-1}$, tem-se que

$$\mathrm{E}\left[\exp\left(\frac{\mu}{2}\hat{x}_i^\top \widetilde{M}\hat{x}_i\right) \mid \mathscr{Y}_{i-1}\right] = \exp\left(\frac{\mu}{2}\hat{x}_{i|i-1}^\top \widetilde{M}\hat{x}_{i|i-1}\right)\cdot \Psi(\hat{x}_{i|i-1}), \tag{6.50}$$

onde

$$\Psi(\overline{x}) := \mathsf{E}\left[\exp\left(\frac{\mu}{2}\left(\gamma_i^\top K^\top(i)\widetilde{M}K(i)\gamma_i + 2\overline{x}^\top \widetilde{M}K(i)\gamma_i\right)\right)\right]. \tag{6.51}$$

Agora, como $\gamma_i \sim \mathcal{N}(0, \Gamma(i))$ (ver Lema 6.7) pode-se calcular explicitamente a esperança na definição de $\Psi(\overline{x})$:

$$\begin{aligned}
\Psi(\overline{x}) &= \int_{\mathbb{R}^m} \exp\left(\frac{\mu}{2}\left(\gamma^\top K^\top(i)\widetilde{M}K(i)\gamma + 2\overline{x}^\top \widetilde{M}K(i)\gamma\right)\right)\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\gamma^\top\Gamma^{-1}(i)\gamma\right)}{\sqrt{(2\pi)^m \det\Gamma(i)}}d\gamma \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det\Gamma(i)}}\int_{\mathbb{R}^m} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\gamma^\top\left(\Gamma^{-1}(i) - \mu K^\top(i)\widetilde{M}K(i)\right)\gamma - 2\mu\overline{x}^\top \widetilde{M}K(i)\gamma\right)\right)d\gamma \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det\Gamma(i)}}\int_{\mathbb{R}^m} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\gamma^\top\widetilde{\Gamma}(i)\gamma - 2\mu\overline{x}^\top \widetilde{M}K(i)\gamma\right)\right)d\gamma,
\end{aligned} \tag{6.52}$$

onde $\widetilde{\Gamma}(i)$ é dado por (6.46).

Do Lema 4.1, tem-se que

$$\begin{aligned}
&\gamma^\top\widetilde{\Gamma}(i)\gamma - 2\mu\overline{x}^\top \widetilde{M}K(i)\gamma = \\
&\quad = \left(\gamma - \mu\widetilde{\Gamma}^{-1}(i)K^\top(i)\widetilde{M}\overline{x}\right)^\top \widetilde{\Gamma}(i)\left(\gamma - \mu\widetilde{\Gamma}^{-1}(i)K^\top(i)\widetilde{M}\overline{x}\right) - \mu^2\overline{x}^\top \widetilde{M}K(i)\widetilde{\Gamma}^{-1}(i)K^\top(i)\widetilde{M}\overline{x}.
\end{aligned} \tag{6.53}$$

Substituindo (6.53) em (6.52), obtém-se:

$$\Psi(\overline{x}) = \sqrt{\frac{\det \widetilde{\Gamma}^{-1}(i)}{\det \Gamma(i)}} \exp\left(\frac{\mu^2}{2}\overline{x}^\top \widetilde{M}K(i)\widetilde{\Gamma}^{-1}(i)K^\top(i)\widetilde{M}\overline{x}\right) \cdot \\ \cdot \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det \widetilde{\Gamma}^{-1}(i)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\gamma - \mu\widetilde{\Gamma}^{-1}(i)K^\top(i)\widetilde{M}\overline{x}\right)^\top \widetilde{\Gamma}(i)\left(\gamma - \mu\widetilde{\Gamma}^{-1}(i)K^\top(i)\widetilde{M}\overline{x}\right)\right)d\gamma$$

Agora,

$$\int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det \widetilde{\Gamma}^{-1}(i)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\gamma - \mu\widetilde{\Gamma}^{-1}(i)K^\top(i)\widetilde{M}\overline{x}\right)^\top \widetilde{\Gamma}(i)\left(\gamma - \mu\widetilde{\Gamma}^{-1}(i)K^\top(i)\widetilde{M}\overline{x}\right)\right)d\gamma = 1$$

$$\sqrt{\frac{\det \widetilde{\Gamma}^{-1}(i)}{\det \Gamma(i)}} = \frac{1}{\sqrt{\det\left(\widetilde{\Gamma}(i)\Gamma(i)\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\det\left(I - \mu K^\top(i)\widetilde{M}K(i)\Gamma(i)\right)}}$$

Portanto,

$$\Psi(\overline{x}) = \frac{1}{\sqrt{\det\left(I - \mu K^\top(i)\widetilde{M}K(i)\Gamma(i)\right)}} \exp\left(\frac{\mu^2}{2}\overline{x}^\top \widetilde{M}K(i)\widetilde{\Gamma}^{-1}(i)K^\top(i)\widetilde{M}\overline{x}\right) \tag{6.54}$$

Substituindo a Equação (6.54) na Equação (6.50):

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[\exp\left(\frac{\mu}{2}\hat{x}_i^\top \widetilde{M}\hat{x}_i\right) | \mathscr{Y}_{i-1}\right] &= \exp\left(\frac{\mu}{2}\hat{x}_{i|i-1}^\top \widetilde{M}\hat{x}_{i|i-1}\right) \cdot \frac{\exp\left(\frac{\mu^2}{2}\hat{x}_{i|i-1}^\top \widetilde{M}K(i)\widetilde{\Gamma}^{-1}(i)K^\top(i)\widetilde{M}\hat{x}_{i|i-1}\right)}{\sqrt{\det\left(I - \mu K^\top(i)\widetilde{M}K(i)\Gamma(i)\right)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det\left(I - \mu K^\top(i)\widetilde{M}K(i)\Gamma(i)\right)}} \exp\left(\frac{\mu}{2}\hat{x}_{i|i-1}^\top \overline{M}\hat{x}_{i|i-1}\right) \end{aligned} \tag{6.55}$$

□

Lema 6.10. *Sejam x_k e y_k dados por* (6.12) *e* (6.27)*, respectivamente, com u_k adaptado à $\mathscr{Y}_k$ (ver Equação* (6.28)*). Considere ainda, $i \in \{1, \ldots, N\}$, $\Gamma(i)$ dado por* (6.39)*, $K(i)$ dado por*

(6.36) *e* $\widetilde{M} \in \mathcal{S}^{n+}$ *satisfazendo* (6.46). *Então,*

$$\mathrm{E}\left[\mu \exp\left(\frac{\mu}{2}\left(\sum_{k=0}^{i-1} u_k^\top R_d(k) u_k + \hat{x}_i^\top \widetilde{M} \hat{x}_i\right)\right) \mid \mathscr{Y}_{i-1}\right] = \frac{\exp\left(\frac{\mu}{2}\sum_{k=0}^{i-2} u_k^\top R_d(k) u_k\right)\Phi(\hat{x}_{i-1}, u_{i-1})}{\sqrt{\det\left(I - \mu K^\top(i)\widetilde{M}K(i)\Gamma(i)\right)}}, \tag{6.56}$$

onde $\overline{M}$ *é dado por* (6.48) *e*

$$\begin{aligned}\Phi(x,u) := \mu \exp\left(\frac{\mu}{2}\left(u^\top\left(R_d(i-1) + B_d^\top(i-1)\overline{M}B_d(i-1)\right)u + 2x^\top A_d^\top(i-1)\overline{M}B_d(i-1)u\right)\right)\cdot \\ \cdot \exp\left(\frac{\mu}{2}x^\top A_d^\top(i-1)\overline{M}A_d(i-1)x\right).\end{aligned} \tag{6.57}$$

Demonstração. Basta usar os Lemas 4.1 e 6.9. □

Lema 6.11. *Seja* $\Phi(x,u)$ *dado por* (6.57). *Assuma que*

$$\overline{R}^{-1} := \left(R_d(i-1) + B_d^\top(i-1)\overline{M}B_d(i-1)\right) > 0, \tag{6.58}$$

e defina

$$u^* = -\overline{R}^{-1} B_d^\top(i-1)\overline{M}A_d(i-1)x. \tag{6.59}$$

Então,

$$\Phi(x,u^*) = \inf_{v\in\mathbb{R}^d} \Phi(x,v), \tag{6.60}$$

e

$$\Phi(x,u^*) = \mu \exp\left[\frac{\mu}{2}x^\top A_d^\top(i-1)\left(\overline{M} - \overline{M}B_d(i-1)\widetilde{R}_d^{-1}(i-1)B_d^\top(i-1)\overline{M}\right)A_d(i-1)x\right] \tag{6.61}$$

Demonstração. Basta usar o Lema 4.1. □

Teorema 6.3. *Sejam* x_k *e* y_k *dados por* (6.12) *e* (6.27), *respectivamente, com* u_k *adaptado à* $\mathscr{Y}_k$

(ver Equação (6.28)). Considere ainda, $P(k)$, $K(k)$ e $\Gamma(k)$, $k \in \{1,\ldots,N\}$, dadas, respectivamente, por (6.31) (ver Notação 6.1), (6.36) e (6.39). Se para todo $k \in \{0,\ldots,N-1\}$

$$\widetilde{R}_d(k) := R_d(k) + B_d^\top(k)\overline{Q}(k+1)B_d(k) > 0,$$

$$\widetilde{\Gamma}_d(k) := \Gamma^{-1}(k) - \mu K^\top(k)\widetilde{Q}(k)K(k) > 0,$$

onde $\widetilde{Q}(k)$ e $\overline{Q}(k)$, $k = N,\ldots,0$ são dados por

$$\begin{cases} \widetilde{Q}(N) = F_d\,(I - \mu P(N)F_d)^{-1} \\ \overline{Q}(N) = \widetilde{Q}(N) + \mu\widetilde{Q}(N)K(N)\widetilde{\Gamma}_d^{-1}(N)K^\top(N)\widetilde{Q}(N), \\ \widetilde{Q}(k-1) = A_d^\top(k-1)\overline{Q}(k)\left(I - B_d(k-1)\widetilde{R}_d^{-1}(k-1)B_d^\top(k-1)\overline{Q}(k)\right)A_d(k-1), \\ \overline{Q}(k-1) = \widetilde{Q}(k-1) + \mu\widetilde{Q}(k-1)K(k-1)\widetilde{\Gamma}_d^{-1}(k-1)K^\top(k-1)\widetilde{Q}(k-1), \end{cases} \tag{6.62}$$

então

$$\inf_{u\in\mathcal{U}} J_{LEQG} = \mu\alpha(0)\exp\left(\frac{1}{2}m_0^\top\overline{Q}(0)m_0\right), \tag{6.63}$$

onde $m_0 := \mathsf{E}[x_0]$ e $\alpha(0)$ é obtido por

$$\begin{cases} \alpha(N) = (\det(I - \mu P(N)F_d))^{-1/2} \\ \alpha(k-1) = \alpha(k)\left(\det\left(I - \mu K^\top(k)\widetilde{Q}(k)K(k)\Gamma(k)\right)\right)^{-1/2}. \end{cases} \tag{6.64}$$

Ainda, a seqüência de controles ótimos é dada por:

$$u_k^* = -M(k)\hat{x}_k, k = 0,1,\ldots,N-1, \tag{6.65}$$

onde

$$M(k) := \left(R_d(k) + B_d^\top(k)\overline{Q}(k+1)B_d(k)\right)^{-1} B_d^\top(k)\overline{Q}(k+1)A_d(k) \tag{6.66}$$

e $\hat{x}_k$ é dado por (6.32) *(ver Teorema 6.2).*

Demonstração. Segue do teorema fundamental em (MEIER et al., 1971, p.769), do Teorema 6.2 e dos Lemas 6.8, 6.9, 6.10 e 6.11. □

6.4 Problema LEQG contínuo com controles baseados em observações discretas sem ruído

Proposição 6.2. *Sejam $A(t)$, $B(t)$, $\sigma(t)$, $R(t)$, F, ξ e w_t como na definição do Problema 6.1. Denote por $\Phi(t,s)$ a matriz de transição associada à $A(t)$. Se existem $\alpha : \{0,\dots,N\} \to \mathbb{R}$ e $S : \{0,\dots,N\} \to \mathcal{S}^{n+}$ dadas por* (6.16), (6.17) *e* (6.18) *quando*

$$A_d(k) = \Phi(t_{k+1}, t_k), \tag{6.67}$$

$$B_d(k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, s)B(s)ds, \tag{6.68}$$

$$\sigma_d(k) = I_n, \tag{6.69}$$

$$W(k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, s)\sigma(s)\sigma^\top(s)\Phi(t_{k+1}, s)ds, \tag{6.70}$$

$$Q_d(k) = 0, \tag{6.71}$$

$$R_d(k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} R(t)dt, \tag{6.72}$$

$$F_d = F, \tag{6.73}$$

então,

$$u_t^* = \sum_{k=0}^{N} M(k)x_{t_k}\mathcal{X}_{[t_k,t_{k+1})}, \tag{6.74}$$

onde $M(k)$ é dado por (6.21)*, é tal que $u^* \in \mathcal{U}_{\mathcal{G},\Pi}$ e u^* minimiza o funcional custo* (6.2) *em $\mathcal{U}_{\mathcal{G},\Pi}$.*

Demonstração. Basta observar que para cada $u \in \mathcal{U}_{\mathscr{G},\Pi}$ e $t \in [t_k, t_{k+1})$, a Equação (6.1) pode ser reescrita como:

$$x(t) = \Phi(t, t_k)x_{t_k} + \Gamma(t, t_k)u_{t_k} + \xi(t, t_k), \tag{6.75}$$

onde, $\Gamma(t, t_k) := \int_{t_k}^{t} \Phi(t, s)B(s)ds$ e $\xi(t, t_k) := \int_{t_k}^{t} \Phi(t, s)\sigma(s)dW_s$. Ainda, usando propriedades da integral de Wiener pode-se mostrar que $\{\xi_{t_k}\}_{k=0}^{N}$, onde $\xi_{t_k} := \xi(t_{k+1}, t_k)$, é uma seqüência de variáveis aleatórias Gaussianas i.i.d com média zero e variância

$$\mathsf{var}(\xi_{t_k}) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, s)\sigma(s)\sigma^{\top}(s)\Phi^{\top}(t_{k+1}, s)ds. \tag{6.76}$$

Além disso, usando (6.79), para cada $u \in \mathcal{U}_{\mathscr{G},\Pi}$ o custo (6.2) pode ser reescrito como:

$$J_{LEQG}(u) = \mu \exp\left(\frac{\mu}{2}\left[\sum_{k=0}^{N-1} u_{t_k}^{\top} R_d(k) u_{t_k} + x_{t_f}^{\top} F x_{t_f}\right]\right), \tag{6.77}$$

onde,

$$R_d(k) := \int_{t_k}^{t_{k+1}} R(t)dt. \tag{6.78}$$

Como $R(t) \in \mathcal{S}^{n+}$ segue que $R_d(k) \in \mathcal{S}^{n+}$. Observe ainda que, por hipótese $\sigma(t)\sigma^{\top}(t) \in \mathcal{S}^{n+}$, e assim $W(k) > 0$. Agora, a demonstração segue procedendo como na Seção 6.3.1 assumindo um sistema descrito por

$$x_{t_{k+1}} = \Phi(t_{k+1}, t_k)x_{t_k} + \Gamma(t_{k+1}, t_k)u_{t_k} + \xi(t_{k+1}, t_k), \tag{6.79}$$

onde, $\Gamma(t_{k+1}, t_k) := \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, s)B(s)ds$ e $\xi(t_{k+1}, t_k) := \int_{t_k}^{t} \Phi(t_{k+1}, s)\sigma(s)dW_s$, e funcional custo (6.77). □

6.5 Problema LEQG contínuo com controles baseados em observações discretas ruidosas

Proposição 6.3. *Sejam $A(t)$, $B(t)$, $\sigma(t)$, $R(t)$, F, ξ, $C(t_k)$, w_t e v_{t_k} como na definição do Problema 6.2. Denote por $\Phi(t,s)$ a matriz de transição associada à $A(t)$. Se existem $P(k)$, $K(k)$, $\Gamma(k)$, $\overline{Q}(k)$ e $\alpha(k)$ $k \in \{1,\ldots,N\}$, dadas, respectivamente, por (6.31) (ver Notação 6.1), (6.36),(6.39), (6.62) e (6.64) quando $A_d(k)$, $B_d(k)$, $W(k)$, $Q_d(k)$, $R_d(k)$ e F_d são dadas como na Proposição 6.2 e, $C_d(k) = C(t_k)$ e $v_k = v_{t_k}$ então,*

$$u_t^* = \sum_{k=0}^{N} M(k)\hat{x}_{t_k}\mathcal{X}_{[t_k,t_{k+1})}, \tag{6.80}$$

onde $M(k)$ é dado por (6.66).

Demonstração. Basta proceder como na Proposição 6.2 e Seção 6.3.2. □

Observação 6.4. *Observe que assim como em (HALYO; CAGLAYAN, 1976) a separação continua válida mesmo ao se considerar os controles admissíveis restritos a processos constantes por partes.*

6.6 Comentários finais

O controle de sistemas descritos por EDE e observações discretas no tempo constitui, do ponto de vista de aplicações, uma importante classe de problemas de controle estocástico com observações parciais. Para esta classe, entretanto, mesmo no caso onde o estado do sistema é observado sem incertezas (mas em instante discretos) uma representação fechada para a solução, de fácil implementação em computadores digitais, não pode, em geral, ser obtida.

A contribuição desta parte do trabalho consistiu em mostrar que dois problemas do tipo LEQG com controles restritos a processos constantes por partes poderiam, assim como em (HALYO; CAGLAYAN, 1976) (JOHNSON, 1991), ser resolvidos convertendo os problemas originais com restrições à problemas discretos equivalentes.

7 Conclusão

“Learn from yesterday, live for today,
hope for tomorrow. The important thing
is not to stop questioning"

–ALBERT EINSTEIN

Esta tese tratou, principalmente, do problema de otimização LQ para sistemas descritos por Equações Diferenciais Estocásticas, com e sem saltos Markovianos nos parâmetros, excitadas por martingales quadrado integráveis. Mostrou-se que problemas desta classe podem ser estudados empregando-se a formula de Itô–Doléans-Dade–Meyer para fatorar os funcionais custos de forma conveniente para a solução dos problemas de controle ótimo. Um fato interessante é que embora sejam consideradas excitações mais gerais, as quais não são necessariamente Markovianas ou possuem incrementos independentes e estacionários como os processos de Wiener ou de Poisson, os problemas considerados recaem no estudo da existência de solução de certas equações diferenciais de Riccati. Ainda, observa-se que como a variação quadrática previsível do processo de Wiener e do processo Poisson com parâmetro λ (compensados ou não) são, respectivamente, t e λt, ou seja, funções lineares do tempo, sistemas excitados por Processos de Wiener ou de Poisson dependentes do estado ou do processo de controle podem ser tratados de forma análoga. Nos casos com observações parciais, destaca-se que o custo fatorado pode ser interpretado como uma condição necessária para a validade do princípio de equivalência à certeza.

Além disto, foi considerado um sistema não-linear excitado por um processo de Wiener, e discutiu-se a possibilidade de se considerar como controles admissíveis processos adaptados à $\sigma-$álgebra gerada pelo estado. A contribuição desta parte do trabalho, consistiu em aprensentar uma extensão de um resultado da literatura envolvendo esta questão. Ainda, como contribuição deste trabalho, foi mostrado que dois problemas do tipo LEQG com controles admissíveis restritos à classe de processos constantes por partes e assumindo que o controlador recebe informação apenas em certos instantes de tempo fixados *a priori* podiam ser estudados diretamente como feito em (HALYO; CAGLAYAN, 1976; JOHNSON, 1991) para problemas LQG.

Uma discussão sobre os princípios de separação e equivalência à certeza, bem como uma breve revisão da literatura envolvendo este princípios, para sistemas descritos por (EDE), foi apresentada no Apêndice A.

7.1 Sugestões para trabalhos futuros

Naturalmente, diversos aspectos dos problemas investigados neste trabalho ainda podem ser estudados. A seguir, indica-se uma pequena amostra de trabalhos que podem, futuramente, dar continuidade ao presente estudo.

- Estudar o problema do Capítulo 3 para sistemas excitados por martingales quadrado integráveis diferentes do processo de Wiener;
- Investigar o problema de controle de sistemas lineares com saltos Markovianos excitados por movimentos Brownianos fracionários;
- Estudar o problema de controle estocástico H_∞ estudado em (HINRICHSEN; PRITCHARD,

1998; BOUHTOURI et al., 1999) considerando sistemas excitados por processos de Poisson;

- Considerar os problemas do Capítulo 6 com horizontes infinitos;

- Aplicações numéricas empregando os resultados derivados no Capítulo 6 para o problema de guiamento do míssel estudado em (SPEYER, 1976).

Referências Bibliográficas

AGGOUN, L.; ELLIOTT, R. **Measure Theory and Filtering**. Cambridge: Cambridge University, 2004.

ANDERSON, B. D. O.; MOORE, J. B. **Optimal Control: Linear Quadratic Methods**. Mineola, NY: Dover Publications, Inc., 2007.

ARNOLD, L. **Stochastic Differential Equations: Theory and Applications**. New York: John Wiley & Sons, 1974.

ÅSTRÖM, K. J. **Introduction to Stochastic Control Theory**. Mineola, NY: Dover Publications, Inc., 2006.

ATHANS, M.; FALB, P. L. **Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Applications**. Mineola, NY: Dover Publications, 2006.

BALAKRISHNAN, A. V. Stochastic control: A function space approach. **SIAM Journal on Control**, v. 10, n. 2, p. 285–297, 1972.

BAR-SHALOM, Y.; TSE, E. Dual effect, certainty equivalence, and separation in stochastic control. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 19, n. 5, p. 494–499, 1974.

BARTLE, R. G. **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**. New York: John Wiley & Sons, 1995.

BEAL, T. R. Digital simulation of atmospheric turbulence for Dryden and von Karman models. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 16, n. 1, p. 132–138, 1993.

BELLMAN, R. Functional equations in the theory of dynamic programming. v. positivity and quasi-linearity. **Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America**, v. 41, n. 10, p. 743–746, 1955.

BELLMAN, R. E.; GLICKSBERG, I. L.; GROSS, O. A. **Some aspects of the mathematical theory of control processes**. Santa Monica, California, 1958.

BENSOUSSAN, A. Lectures on stochastic control. In: MITTER, S. K.; MORO, A. (Ed.). **Nonlinear Filtering and Stochastic Control**. Berlin: Springer-Verlag, 1983, (Lecture Notes in Mathematics, v. 972). p. 1–62.

BENSOUSSAN, A. **Stochastic Control of Partially Observable Systems**. 1st. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

BENSOUSSAN, A.; VAN SCHUPPEN, J. H. Stochastic control of a partially observed linear stochastic system with an exponential-of-integral performance index. In: CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 13., Las Vegas, 1984. **Proceedings...** Las Vegas, NV: [s.n.], 1984.

BENSOUSSAN, A.; VAN SCHUPPEN, J. H. Optimal control of partially observable stochastic systems with an exponential-of-integral performance index. **SIAM Jounal on Control and Optimization**, v. 23, n. 4, p. 599–613, 1985.

BISMUT, J.-M. Linear quadratic optimal stochastic control with random coefficients. **SIAM Journal on Control and Optimization**, v. 14, n. 3, p. 419–444, 1976.

BISWAS, S. K. Robust stabilization of linear systems in the presence of gaussian perturbation of parameters. **Optimal Control Applications and Methods**, v. 19, n. 4, p. 271–286, 1998.

BORKAR, V. S. The probabilistic structure of controlled diffusion processes. **Acta Applicandae Mathematicae**, v. 11, n. 1, p. 19–48, 1988.

BORKAR, V. S. Controlled diffusion processes. **Probability Surveys**, v. 2, p. 213–244, 2005.

BOUHTOURI, A. E.; HINRICHSEN, D.; PRITCHARD, A. J. On the disturbance attenuation problem for a wide class of time invariant linear stochastic systems. **Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes**, v. 65, n. 3 & 4, p. 255 – 297, 1999.

BREWER, J. W. Kronecker products and matrix calculus in system theory. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, v. 25, n. 9, p. 772–781, 1978.

BROOKS, R. A. Linear stochastic control: An extended separation principle. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 38, n. 3, p. 569–5877, 1972.

BRZEŹNIAK, Z.; ZASTAWNIAK, T. **Basic Stochastic Processes**. 1st. ed. (5th printing) London: Springer-Verlag, 2003.

CAJUEIRO, D. O. **Stochastic Optimal Control of Jumping Markov Parameter Processes with Applications to Finance**. Tese (Doutorado) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2002.

CAPIŃSKI, M.; KOPP, E. **Measure, integral and probability**. London: Springer, 2003.

CHARALAMBOUS, C. D. Partially observable nonlinear risk-sensitive control problems: dynamic programming and verification theorems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 42, n. 8, p. 1130–1138, 1997.

CHARALAMBOUS, C. D. Lie algebraic methods in optimal control of stochastic systems with exponential-of-integral cost. **Systems and Control Letters**, v. 37, n. 2, p. 93–105, 1999.

CHARALAMBOUS, C. D.; ELLIOTT, R. J. Certain nonlinear partially observable stochastic optimal control problems with explicit control laws equivalent toLEQG/LQG problems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 42, n. 4, p. 482–497, 1997.

CHARALAMBOUS, C. D.; ELLIOTT, R. J. Classes on nonlinear partially observable stochastic optimal control problems with explicit optimal control laws. **SIAM Journal on Control and Optimization**, v. 36, n. 2, p. 542–578, 1998.

CHARALAMBOUS, C. D.; ELLIOTT, R. J. Information states in stochastic control and filtering: A lie algebraic theoretic approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 45, n. 4, p. 653–674, 2000.

CHARALAMBOUS, C. D.; HIBEY, J. L. On the application of minimum principle for solving partially observable risk-sensitive control problems. **Systems & Control Letters**, v. 27, n. 3, p. 169–179, 1996.

CHEN, G.; CHEN, G.; HSU, S.-H. **Linear Stochastic Control Systems**. Boca Raton: CRC Press, 1995.

CHEN, S.; LI, X.; ZHOU, X. Y. Stochastic linear quadratic regulators with indefinite control weight costs. **SIAM Journal on Control and Optimization**, v. 36, n. 5, p. 1685–1702, 1998.

CHEN, S.; YONG, J. Stochastic linear quadratic optimal control problems. **Applied Mathematics and Optimization**, v. 43, n. 1, p. 21–45, 2001.

CHEN, S.; ZHOU, X. Y. Stochastic linear quadratic regulators with indefinite control weight costs. ii. **SIAM Journal on Control and Optimization**, v. 39, n. 4, p. 1065–1081, 2000.

CHEN, X.; ZHOU, X. Stochastic lq control with conic control constraints on an infinite time horizon. **SIAM Journal on Control and Optimization**, v. 43, n. 3, p. 1120–1150, 2004.

CHUNG, K. L.; WILLIAMS, R. J. **Introduction to Stochastic Integration**. 2nd. ed. Boston: Birkhäuser, 1990.

COLLINGS, I. B. **Hidden Markov Model Signal Processing and Control**. Tese (Doctor of Philosophy) — The Australian National University, Canberra, January 1995.

COLLINGS, I. B.; JAMES, M. R.; MOORE, J. B. An information-state approach to risk-sensitive tracking problems. **Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control**, v. 6, n. 3, p. 1–24, 1996.

DAMM, T. **Rational Matrix Equations in Stochastic Control**. Tese (Doktors der Naturwissenschaften) — Universität Bremen, Bremen, April 2002.

DAVIS, M. H. A. The separation principle in stochastic control via girsanov solutions. **SIAM Journal on Control and Optimization**, v. 14, n. 1, p. 176–188, 1976.

DAVIS, M. H. A. **Linear estimation and stochastic control**. London: Chapman and Hall, 1977.

DOOB, J. L. **Measure theory**. New York: Springer, 1994.

DORATO, P.; ABDALLAH, C.; CERONE, V. **Linear-Quadratic Control: An Introduction**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1995.

DRAGAN, V.; MOROZAN, T. The linear quadratic optimization problems for a class of linear stochastic systems with multiplicative white noise and markovian jumping. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 49, n. 5, p. 665–675, 2004.

DUDLEY, R. M. **Real analysis and probability**. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

ELLIOTT, R. J. **Stochastic Calculus and Applications**. New York: Springer-Verlag, 1982.

ELLIOTT, R. J.; MOORE, J. B.; AGGOUN, L. **Hidden Markov Models: Estimation and Control**. New York: Springer-Verlag, 1995.

FARIAS, D. P. de et al. Output feedback control of markov jump linear systems in continuous time. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 45, n. 5, p. 944–949, 2000.

FERNANDEZ, P. J. **Medida e Integração**. 2a. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2002. (Projeto Euclides).

FLEMING, W.; RISHEL, R. **Deterministic and Stochastic Optimal Control**. New York: Springer-Verlag, 1975.

FLEMING, W. H. Generalized solutions in optimal stochastic control. In: ROXIN, E.; LIU, P. T.; STERNBERG, R. (Ed.). **Differential Games and Control Theory II**. New York: Marcel Dekker, 1977, (Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, v. 30). p. 147–165.

FLEMING, W. H.; SONER, H. M. **Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions**. 1st. ed. New York: Springer-Verlag, 1993.

FRAGOSO, M. D. **The Control of Noisy Linear Systems with Jumping Parameters**. Tese (Ph.D.) — University of London, London, Novembro 1986.

FRAGOSO, M. D.; COSTA, O. L. V. A unified approach for stochastic and mean square stability of continuous-time linear systems with markovian jumping parameters and additive disturbances. **SIAM Journal on Control and Optimization**, v. 44, n. 4, p. 1165–1191, 2005.

FRAGOSO, M. D.; HEMERLY, E. M. Optimal control for a class of noisy linear systems with markovian jumping parameters and quadratic cost. **International Journal of Systems Sciences**, v. 22, n. 12, p. 2553–2561, 1991.

FRAGOSO, M. D.; ROCHA, N. C. dos S. Stationary filter for continuous-time markovian jump linear systems. **SIAM Journal on Control and Optimization**, v. 44, n. 3, p. 801–815, 2005.

FRIEDMAN, A. **Stochastic Differential Equations and Applications**. Mineola: Dover Publications, 2006.

GIKHMAN, I. I.; SKOROKHOD, A. V. **Introduction to the Theory of Random Processes**. Mineola: Dover, 1996.

GLOVER, K. Minimum entropy and risk-sensitive control: the continuous time case. In: CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL,28., Tampa, 1989. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1989. v. 1, n. 13-15, p. 388 – 391.

GLOVER, K.; DOYLE, J. C. State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an H_∞–norm bound and relations to risk sensitivity. **Systems & Control Letters**, v. 11, n. 3, p. 167–172, 1988.

GONÇALVES, D. J. **Aspectos Matemáticos do Filtro de Kalman Discreto**. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, Fevereiro 2005. 54f.

GRIGORIU, M. Linear systems driven by martingale noise. **Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 16, n. 2, p. 159–168, 2001.

HALYO, N.; CAGLAYAN, A. K. A separation theorem for the stochastic sample-data LQG problem. **International Journal of Control**, v. 23, n. 2, p. 237–244, 1976.

HINRICHSEN, D.; PRITCHARD, A. J. Stochastic H_∞. **SIAM Journal on Control and Optimization**, v. 36, n. 5, p. 1504 – 1538, 1998.

HOWARD, R. A.; MATHESON, J. A. Risk-sensitive markov decision processes. **Management Science**, v. 18, n. 7, p. 356–369, 1972.

HU, Y.; ZHOU, X. Indefinite stochastic riccati equations. **SIAM Journal on Control and Optimization**, v. 42, n. 1, p. 123–137, 2003.

HU, Y.; ZHOU, X. Constrained stochastic lq control with random coefficients, and application to mean–variance portfolio selection. **SIAM Journal on Control and Optimization**, v. 44, n. 2, p. 444 – 466, 2005.

HU, Y.; ZHOU, X. Stochastic control for linear systems driven by fractional noises. **SIAM Journal on Control and Optimization**, v. 43, n. 6, p. 2245 – 2277, 2005.

IKEDA, N.; WATANABE, S. **Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes**. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1981.

JACOB, A. M. **Monte Carlo Methods in Nonlinear Filtering Theory**. 2006. 212f. Tese (Doutorado) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, São Paulo, 2006.

JACOB, A. M.; SILVA, C. D. P. S.; YONEYAMA, T. Some issues on continuous-time stochastic modeling. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA,16., Salvador, 2006. **Anais...** Salvador: SBA, 2006. p. 1–6.

JACOBSON, D. H. Optimal stochastic linear systems with exponential performance criteria and their relation to deterministic differential games. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 18, n. 2, p. 124–131, 1973.

JACOBSON, D. H. **Extensions of Linear-Quadratic Control, Optimization and Matrix Theory**. London: Academic Press, 1977.

JAMES, M. R. Asymptotic analysis of nonlinear stochastic risk-sensitive control and differential games. **Mathematics of Control, Signals, and Systems**, v. 5, n. 4, p. 401–417, 1992.

JI, Y.; CHIZECK, H. J. Jump linear quadratic gaussian control in continuous time. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 1992.

JOHNSON, A. Discrete and sampled-data stochastic control problems with complete and incomplete state information. **Applied Mathematics and Optimization**, v. 24, n. 1, p. 289–316, 1991.

KALLENBERG, O. **Foundations of Modern Probability**. 2nd. ed. New York: Springer-Verlag, 2002.

KALMAN, R. E. Contributions to the theory of optimal control. **Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana**, v. 5, p. 102–119, 1960.

KARATZAS, I.; SHREVE, S. E. **Brownian Motion and Stochastic Calculus**. 2nd. ed. New York: Springer-Verlag, 1991.

KLOEDEN, P. E.; PLATEN, E. **Numerical Solution of Stochastic Differential Equations**. Corrected third printing. Berlin: Springer-Verlag, 1999.

KRASOVSKII, N. N.; LIDSKII, E. A. Analytical design of controllers in systems with random attributes i. **Automation and Remote Control**, v. 22, p. 1021–1025, 1961.

KRASOVSKII, N. N.; LIDSKII, E. A. Analytical design of controllers in systems with random attributes ii. **Automation and Remote Control**, v. 22, p. 1141–1146, 1961.

KRASOVSKII, N. N.; LIDSKII, E. A. Analytical design of controllers in systems with random attributes iii. **Automation and Remote Control**, v. 22, p. 1289–1294, 1961.

KRISHNAN, V. **Nonlinear Filtering and Smoothing - An Introduction to Martingales, Stochastic Integrals and Estimation**. Mineola: Dover Plublications, 2005.

KRYLOV, N. V. **Introduction to the theory of random processes**. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2002.

KUMAR, P. R.; SCHUPPEN, J. H. van. On the optimal control of stochastic systems with an exponential-of-integral performance index. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 80, n. 2, p. 312–332, 1981.

KUMAR, P. R.; VARAIYA, P. **Stochastic Systems: Estimation, Identification and Adaptive Control**. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1986.

KUNITA, H. **Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations**. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

KUSHNER, H. Optimal stochastic control. **IRE Transactions on Automatic Control**, v. 7, n. 5, p. 120–122, 1962.

LEFEBVRE, M. A bidimensional optimal landing problem. **Automatica**, v. 34, n. 5, p. 655–657, 1998.

LI, X.; ZHOU, X.; RAMI, M. A. Indefinite stochastic linear quadratic control with markovian jumps in infinte time horizon. **Journal of Global Optimization**, v. 27, n. 2-3, p. 149–175, 2003.

LI, X.; ZHOU, X. Y. Indefinite stochastic lq controls with markovian jumps in a finite time horizon. **Communications in Information and Systems**, v. 2, n. 3, p. 265–282, 2002.

LIAW, D.-C.; CHEN, C.-H. A novel scheme for atbm guidance design. In: IEEE. IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON NETWORKING, SENSING & CONTROL, 2004, Taipei, Taiwan. **Proceedings...** Taipei, Taiwan, 2004. v. 1, p. 451–455.

LIM, A. B. E.; ZHOU, X. Y. A new risk-sensitive maximum principle. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 50, n. 7, p. 958 – 966, 2005.

LIM, A. E.; MOORE, J. B. A quasi-separation theorem for LQG optimal control with IQ constraints. **Systems & Control Letters**, v. 32, n. 1, p. 21–33, 1997.

LIN, J.-M.; LEE, S.-W. Bank-to-turn optimal guidance with linear exponential quadratic gaussian performance criterion. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 18, n. 5, p. 951–958, 1995.

LINDQUIST, A. An innovations approach to optimal control of linear stochastic systems with time delay. **Information Sciences**, v. 1, p. 279–295, July 1969.

LINDQUIST, A. On feedback control of linear stochastic systems. **SIAM Journal on Control**, v. 11, n. 2, p. 323–343, 1973.

LINDQUIST, A. Comments on “a simple proof of the separation theorem for linear stochastic systems with time delays”. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 25, n. 2, p. 274–275, 1980.

LIPTSER, R. S.; SHIRYAYEV, A. N. **Statistics of random processes I: general theory**. New York: Springer-Verlag, 1977.

LIU, Y.; YIN, G.; ZHOU, X. Near-optimal controls of random-switching lq problems with indefinite control weight costs. **Automatica**, v. 41, n. 6, p. 1063–1070, 2005.

MARITON, M. **Jump Linear Systems in Automatic Control**. New York: Marcel Dekker, 1990.

McLANE, P. J. Optimal stochastic control of linear systems with state and control dependent disturbances. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 16, n. 6, p. 793– 798, 1971.

MEIER, L.; LARSON, R. E.; TETHER, A. J. Dynamic programming for stochastic control of discrete systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 16, n. 6, p. 767–775, 1971.

ØKSENDAL, B. **Stochastic Differential Equations: An introduction with applications**. 5th. ed. Berlin: Springer-Verlag, 2000.

PATCHELL, J. W.; JACOBS, O. L. R. Separability, neutrality and certainty equivalence. **Internetional Journal of Control**, v. 13, n. 2, p. 337–342, 1971.

PAULO, W. L. de. **Controle Ótimo de Sistemas com Saltos Markovianos e Ruído Multiplicativo com Custos Linear e Quadrático Indefinido**. 2004. 104 f. Tese (Doutor em Engenharia Elétrica) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

PHAM, H. On some recent aspects of stochastic control and their applications. **Probability Surveys**, v. 2, p. 506–549, 2005.

POTTER, J. E. A guidance-navigation separation theorem. In: AMERICAN INSTITUTE OF AERONAUTICS AND ASTRONAUTICS, AND INSTITUTE OF NAVIGATION, ASTRODYNAMICS GUIDANCE AND CONTROL CONFERENCE, Los Angeles, 1964. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1964. p. 1–16.

PROTTER, P. E. **Stochastic Integration and Differential Equations**. 2nd edition. ed. Berlin: Springer-Verlag, 2004.

RAMI, M. A.; MOORE, J. B.; ZHOU, X. Y. Indefinite stochastic linear quadratic control and generalized differential riccati equation. **SIAM Journal on Control and Optimization**, v. 40, n. 4, p. 1296–1311, 2001.

RAMI, M. A.; ZHOU, X. Y. Linear matrix inequalities, riccati equations, and indefinitestochastic linear quadratic controls. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 45, n. 6, p. 1131 – 1143, 2000.

RAMI, M. A.; ZHOU, X. Y.; MOORE, J. B. Well-posedness and attainability of indefinite stochastic linear quadratic control in infinite time horizon. **Systems & Control Letters**, v. 41, n. 9, p. 123–133, 2000.

RAO, M. M.; SWIFT, R. J. **Probability Theory with Applications** . 2nd. ed. New York: Springer, 2006.

RISHEL, R. A strong separation principle for stochastic control systems driven by a hidden markov model. **SIAM Journal on Control and Optimization**, v. 32, n. 4, p. 1008–1020, 1994.

ROCHA, N. C. dos S. **Filtragem para Sistemas Lineares com Saltos Markovianos nos Parâmetros**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

RUNOLFSSON, T. The equivalence between infinite-horizon optimal control of stochastic systems with exponential-of-integral performance index and stochastic differential games. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 39, n. 8, p. 1551–1563, 1994.

RUNOLFSSON, T. Optimal control of a stochastic system with an exponential-of-integral performance criterion. **Systems & Control Letters**, v. 22, n. 6, p. 451 – 456, 1994.

SARGIROW, P. *Stochastic Methods in the Dynamics of Satellites*. Udine: CISM International Centre for Mechanical Sciences, 1970. (CISM Lecture Notes, v. 57).

SCHMOTZER, R. E.; BLANKENSHIP, G. L. A simple proof of the separation theorem for linear stochastic systems with time delays. **IEEE Transaction on Automatic Control**, v. 23, n. 4, p. 734–735, 1978.

SCHUSS, Z. **Theory and Applications of Stochastic Differential Equations**. New York: John Wiley & Sons, 1980.

SHIRYAEV, A. N. **Probability**. 2nd. ed. New York: Springer-Verlag, 1995.

SILVA, C. D. P. S.; YONEYAMA, T. On the linear quadratic optimization problem of stochastic differential equations driven by square integrable martingales. *a ser submetido*, 2008.

SILVA, C. D. P. S.; YONEYAMA, T. On the optimal control of continuous-time markovian jump linear systems with quadratic cost. *a ser submetido*, 2008.

SILVA, C. D. P. S.; YONEYAMA, T. Optimality of stochastic controls adapted to the state process. *a ser submetido*, 2008.

SILVA, C. D. P. S. e; YONEYAMA, T. On the LEQG problem with piecewise constant control processes. *a ser submetido*, 2008.

SOBCZYK, K. **Stochastic Differential Equations with Applications to Physics and Engineering**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

SPEYER, J. L. An adaptive terminal guidance scheme based on an exponential cost criterion with application to homing missile guidance. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 21, n. 3, p. 371–375, 1976.

SPEYER, J. L.; DEYST, J.; JACOBSON, D. H. Optimization of stochastic linear systems with additive measurement and process noise using exponential performance criteria. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 19, n. 4, p. 358–366, 1974.

STOICA, A.; YAESH, I. Jump markovian-based control of wing deployment for an uncrewed air vehicle. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 25, n. 2, p. 407–411, 2002.

STROOCK, D. W. **An Introduction to Markov Processes**. Berlin: Springer-Verlag, 2005.

TANG, S. General linear quadratic optimal stochastic control problems with random coefficients: Linear stochastic hamilton systems and backward stochastic riccati equations. **SIAM Journal on Control and Optimization**, v. 42, n. 1, p. 53–75, 2003.

TSE, E. On the optimal control of stochastic linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 16, n. 6, p. 776–785, 1971.

UCHIDA, K. On optimal control of stochastic systems with delayed controls and delayed measurements. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 75, n. 2, p. 454–464, 1980.

UCHIDA, K. Structural properties of the linear-quadratic-stochastic control problem. **SIAM Journal on Control and Optimization**, v. 21, n. 5, p. 677–685, 1983.

UCHIDA, K.; SHIMEMURA, E. On certainty equivalence in linear-quadratic control problems with nonlinear measurements. **Information and Control**, v. 41, n. 2, p. 119–135, 1979.

VESTRUP, E. M. **The Theory of Measures and Integration**. 1st. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2003.

WHITTLE, P. Risk sensitive linear/quadratic/gaussian control. **Advances in Applied Probability**, v. 13, n. 4, p. 764–777, 1981.

WHITTLE, P. **Risk-sensitive Optimal Control**. Chichester: John Wiley & Sons, 1990.

WHITTLE, P. **Optimal Control: Basics and Beyond**. Chichester: John Wiley & Sons, 1996.

WITSENHAUSEN, H. S. A counterexample in stochastic optimum control. **SIAM Journal on Control**, v. 6, n. 1, p. 131–147, 1968.

WITSENHAUSEN, H. S. Separation of estimation and control for discrete time systems. **Proceedings of the IEEE**, v. 59, n. 11, p. 1557–1566, 1971.

WONHAM, W. M. On a matrix riccati equation of stochastic control. **SIAM Journal on Control**, v. 6, n. 4, p. 681–697, 1968.

WONHAM, W. M. On the separation theorem of stochastic control. **SIAM Journal on Control**, v. 6, n. 2, p. 312–326, 1968.

WONHAM, W. M. Random differential equations in control theory. In: BHARUCHA-REID, A. T. (Ed.). **Probabilistic Methods in Applied Mathematics**. New York: Academic Press, 1970. v. 2.

YAO, D. D.; ZHANG, S.; ZHOU, X. Y. Stochastic lq control via semidefinite programming. **SIAM Journal on Control and Optimization**, v. 40, n. 3, p. 801–823, 2001.

YONEYAMA, J. Risk-sensitive optimal control for jump systems with application to sampled-data systems. **International Journal of Systems Science**, v. 32, n. 8, p. 1021–1040, 2001.

YONEYAMA, J.; TANAKA, M.; ICHIKAWA, A. Stochastic optimal control for jump systems with application to sampled-data systems. **Stochastic Analysis and Applications**, v. 19, n. 4, p. 643–676, 2001.

YONEYAMA, T. **Optimality Conditions for Control of Continuous Time Stochastic Systems**. Tese (Ph.D.) — Imperial College of Science and Technology, London, May 1983.

YONG, J.; ZHOU, X. Y. **Stochastic Controls: Hamiltonian Systems and HJB Equations**. New York: Springer-Verlag, 1999.

YOUNG, L. C. **Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory**. Philadelphia: W. B. Saunders, 1969.

ZHOU, X. Y. Stochastic near-optimal controls: Necessary and sufficient conditions for near-optimality. **SIAM Journal on Control and Optimization**, v. 36, n. 3, p. 929–947, 1998.

Apêndice A - Teoremas da separação e a propriedade de equivalência à certeza na teoria de controle estocástico

Neste Apêndice apresenta-se uma revisão dos conceitos separação e de equivalência à certeza disponíveis na literatura e são ressaltadas algumas dificuldades técnicas que devem ser enfrentadas ao se tentar estabelecer um teorema da separação ou de equivalência à certeza.

A.1 Introdução

Problemas de controle estocástico ótimo com observações parciais são, em geral, de difícil solução uma vez que os problemas de filtragem e de controle ótimo precisam ser resolvidos simultaneamente. Existem, entretanto, classes de problemas, aquelas onde o princípio da separação ou o de equivalência à certeza são válidos, para os quais os problemas de filtragem e controle ótimo podem ser resolvidos separadamente.

Nesta parte do trabalho, atenção é fixada nos princípios da separação e de equivalência à certeza para problemas de controle estocástico ótimo.

Este apêndice está organizado na forma descrita a seguir. Na Seção A.2 serão apresentados os princípios da separação e de equivalência à certeza para os problemas de interesse. Ainda nesta seção, alguns resultados disponíveis na literatura úteis para ilustrar alguns detalhes da teoria são destacados (por exemplo, a validade do princípio da separação depende da classe de controles admissíveis considerada). Em seguida, na Seção A.3, será feita uma breve revisão dos **teoremas da separação** e de **equivalência à certeza** disponíveis na literatura. Não se deseja apresentar uma listagem exaustiva, o que seria, acredita-se, impossível, mas apenas destacar alguns resultados disponíveis na literatura.

A.2 Revisão dos princípios da separação e de equivalência à certeza

Nesta seção, os conceitos de separação e equivalência à certeza serão revisados. As definições explícitas apresentadas nesta seção[1] foram formuladas baseadas nas discussões feitas em (PATCHELL; JACOBS, 1971) e (BAR-SHALOM; TSE, 1974) para sistemas discretos; (BENSOUSSAN, 2004, p.51-52, 222-267) e (DAVIS, 1977, p.182) para sistemas contínuos.

Considere um sistema descrito por (3.1) com observações

$$\begin{cases} dy_t = h(t, x_{t-\delta_c})\,dt + \sigma_y(t)dV_t, & t > \delta_c, \\ y_s = 0, & 0 \leq s \leq \delta_c, \end{cases} \tag{A.1}$$

onde $\delta_c \geq 0$ é fixado e os mapeamentos $h : [0, t_f] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$, $\sigma_y : [0, t_f] \to \mathbb{R}^{l \times m_2}$ são conhecidos *a priori*.

[1]Naturalmente outras formulações precisas podem ser dadas para os princípios da separação e de equivalência à certeza.

Definição A.1. *O problema de controle estocástico* (3.1)-(3.2)-(A.1) *é dito satisfazer o* ***princípio da separação*** *em uma classe de controles admissíveis* $\mathcal{U}$ *se, e somente se, o controle ótimo* u^* *em* $\mathcal{U}$ *for da forma* $u_t^* = \Phi_S(t, \mathrm{E}[x_t \,|\, \mathscr{Y}_t])$ *onde* $\Phi_S : [0, t_f] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ *é mensurável.*

Definição A.2. *Define-se o problema de controle ótimo determinístico associado ao problema* (3.1)-(3.2)-(A.1) *como o problema:*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)), \quad x(0) \in \mathbb{R}^n \tag{A.2}$$

$$\inf_{u \in \tilde{\mathcal{U}}} \left[\int_0^{t_f} L(s, x(s), u(s))ds + \Psi(x(t_f)) \right], \tag{A.3}$$

onde $\tilde{\mathcal{U}}$ *é o maior subconjunto de* $\mathcal{U}$ *formado por processos que não dependem de* $\omega \in \Omega$ *e que constituem controles admissíveis para o problema determinístico* (A.2)-(A.3).

Definição A.3. *O problema de controle estocástico* (3.1)-(3.2)-(A.1) *é dito satisfazer o* ***princípio de equivalência à certeza*** *em uma classe de controles admissíveis* $\mathcal{U}$ *se, e somente se, o controle ótimo* $u_d^*(t)$ *para o problema determinístico associado for da forma* $u_d^*(t) = \Phi_{CE}(t, x(t))$*, onde* $\Phi_{CE} : [0, t_f] \times \mathbb{R}^d$ *é mensurável, e* $u_t^* = \Phi_{CE}(t, \mathrm{E}[x_t \,|\, \mathscr{Y}_t])$ *for o controle ótimo em* $\mathcal{U}$ *para o problema estocástico original.*

Observação A.1. *Nas definições A.1 e A.3 é importante enfatizar que é assumido que* $\mathscr{Y}_t$ *independente do processo de controle* $u \in \mathcal{U}$.

Observação A.2. *Para um mesmo problema* (3.1)-(3.2)-(A.1)*, a possibilidade de se demonstrar um teorema da separação ou de equivalência à certeza depende da classe de controles admissíveis consideradas. Witsenhausen (1968) apresenta um problema LQG no qual o princípio da separação não é válido ao se considerar controles admissíveis funções mensuráveis apenas da saída mais recente, ou seja,* $u_k = \gamma(y_k)$.

Observação A.3. *Segue das definições anteriores que satisfazer o princípio da separação $\mathcal{U}$ é uma condição necessária, mas não suficiente, para um problema* (3.1)-(3.2)-(A.1) *satisfazer o princípio de equivalência à certeza $\mathcal{U}$. Um exemplo de problema que satisfaz o princípio da separação mas não o de equivalência à certeza é apresentado em (SPEYER et al., 1974).*

Observação A.4. *Um exemplo de problema onde o princípio da separação não é válido, entretanto, o controlador ótimo é uma função linear do estado infomativo*[2]*, o qual tem mesma dimensão do estado do sistema mas não é o primeiro momento condicional (a melhor estimativa, no sentido dos mínimos quadrados, do estado), é apresentado em (BENSOUSSAN; VAN SCHUPPEN, 1985) e (BENSOUSSAN, 2004, p.53-71). Neste problema, a dinâmica do sistema é linear, as observações são lineares, os ruídos são gaussianos, mas o custo é não-quadrático (é a exponencial de uma função quadrática) e não satisfaz as hipóteses de (WONHAM, 1968b).*

Observação A.5. *A identificação de outras classes de problemas nas quais o estado informativo tem dimensão finita, mas não coincide com o primeiro momento condicional, está sendo conduzida, por exemplo, em (CHARALAMBOUS; ELLIOTT, 1997), (CHARALAMBOUS; ELLIOTT, 1998), (CHARALAMBOUS, 1999) e (CHARALAMBOUS; ELLIOTT, 2000). Embora para estes problemas o princípio da separação clássico não seja válido, do ponto de vista computacional, os resultados são tão importantes quanto estabelecer a separação.*

Observação A.6. *Nas definições anteriores, assim como em (BENSOUSSAN, 2004), o problema de filtragem ótima resolvido é o mínimos quadrados. Definições semelhantes poderiam ser dadas assumido-se que os filtros admissíveis são apenas os lineares. Ver (KUMAR; VARAIYA, 1986, p. 119) para um exemplo de separação quando se considera apenas os filtros lineares.*

[2] Do inglês, *information state*.

A.3 Teoremas da separação e de equivalência à certeza na literatura

Apenas o caso de sistemas descritos por EDE será abordado. Para o caso discreto um possível ponto de partida para um estudo semelhante é (WITSENHAUSEN, 1971).

Uma breve listagem de alguns resultados disponíveis na literatura, envolvendo o problema (3.1)-(3.2)-(A.1), é apresentada a seguir.

- (POTTER, 1964) Teorema da separação para o problema LQG clássico;
- (WONHAM, 1968b) Demonstra a separação para um sistema descrito por uma EDE linear no estado e não-linear no controle, observações lineares (e de mesma dimensão do estado - restrição artificial do ponto de vista das aplicações), custo não-quadrático (forma de Lagrange), horizonte finito fixado *a priori* e controles admissíveis o conjunto $\mathcal{U}_{Nat,y}$ com U um conjunto compacto. Este resultado exclui o caso da separação para LQG clássico;
- (LINDQUIST, 1969) Considera o problema LQG incluindo atrasos apenas na função custo. A classe de controles admissíveis considerada é $\mathcal{U}_{\mathscr{Y}}$;
- (TSE, 1971) Demonstração rigorosa da equivalência à certeza para o problema LQG clássico usando a técnica de (WONHAM, 1968b);
- (BALAKRISHNAN, 1972) O problema LQG com ruídos do estado e de observações correlacionados é estudado empregando ferramentas de análise funcional. Devido à correlação entre os ruídos o resultado demonstrado é a separação;
- (BROOKS, 1972) A dinâmica do sistema é estendida para considerar casos mais gerais que o de uma EDE linear;
- (LINDQUIST, 1973): Considera a dinâmica de forma mais geral que o de uma solução de uma EDE linear. A partir do resultado geral obtém a equivalência à certeza para o problema LQG clássico e demonstra a separação para o caso de ruído de observação colorido. Considera também sistemas com atrasos no controle. Os controles admissíveis são $\mathcal{U}_{nat,y}$;
- (DAVIS, 1976) Considera o problema estudado por Wonham (1968b) empregando o conceito de soluções fracas. O objetivo é relaxar a restrição das observações e o processo de estado terem a mesma dimensão;
- (HALYO; CAGLAYAN, 1976) Mostra que a separação continua válida para o problema LQG clássico quando se considera observações discretas e controles constantes por partes;

- (SCHMOTZER; BLANKENSHIP, 1978) Propõem uma demonstração mais simples para o caso em que a EDE tem atraso no estado. Lindquist (1980) aponta um erro na demonstração (despreza a dependência do controle na σ-álgebra gerada pelo estado);

- (UCHIDA; SHIMEMURA, 1979) Demonstram a separação para problemas com dinâmica linear, e processo de observação não-linear, e ruídos não-gaussianos;

- (UCHIDA, 1980) Demonstra um teorema da separação para sistemas com atrasos nos controles e nas observações;

- (UCHIDA, 1983) Demonstra a equivalência à certeza para problemas LQ sem ruído no estado, e controles limitados;

- (RISHEL, 1994) Considera sistemas lineares, custo quadrático e ruído a soma de um processo de Wiener e um processo de Markov (não-observado). É demonstrado um teorema de equivalência à certeza para esta classe de problemas.

Observação A.7. *Em Fleming e Rishel (1975, p. 187-195) e Bensoussan (2004, p. 222-267) alguns outros trabalhos que tratam da separação e de equivalência à certeza são revisados.*

Observação A.8. *Neste apêndice foram discutidos apenas os conceitos de separação e de equivalência à certeza, os conceitos de* quase-separação *ou separação aproximada, podem ser encontrados, por exemplo, em: (LIM; MOORE, 1997) e (BENSOUSSAN, 2004, p.261-267).*

Observação A.9. *O problema LQG clássico foi estudado ainda em (DAVIS, 1977, p.173-182), onde foi definida uma certa classe de controles admissíveis que envolviam apenas funcionais lineares das observações.*

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO	2. DATA	3. DOCUMENTO Nº	4. Nº DE PÁGINAS
TD	17 de março de 2009	CTA/ITA/TD-024/2008	157

5. TÍTULO E SUBTÍTULO:

Controle Ótimo de Equações Diferenciais Estocásticas Lineares Excitadas por Martingales Quadrado Integráveis

6. AUTOR(ES):

Cleiton Diniz Pereira da Silva e Silva

7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES):

Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA

8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR:

Controle ótimo estocástico; Equações de Riccati; Controle ótimo sensível ao risco; Equação diferencial estocástica; Cálculo estocástico

9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO:

Controle ótimo; Processos estocásticos ; Equação de Riccati; Equações diferenciais; Controle linear quadrático gaussiano; Controle

10. APRESENTAÇÃO: (X) **Nacional** ( ) **Internacional**

ITA, São José dos Campos. Curso de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica e Computação. Área de Sistemas e Controle. Orientador: Takashi Yoneyama. Defesa em 06/06/2008. Publicada em 2008.

11. RESUMO:

Este trabalho trata do controle ótimo de sistemas descritos por Equações Diferenciais Estocásticas (EDE). Os resultados apresentados podem ser divididos em três partes. A primeira delas aborda um problema de controle ótimo não-linear sendo investigada a possibilidade de considerar como controles admissíveis processos adaptados à σ-álgebra gerada pelo estado $\mathscr{X}_t^u$. As hipóteses de um resultado disponível na literatura são relaxadas e estende-se à classe de problemas para os quais existe um subconjunto de processos de controle $\mathcal{U}_{cl}$, tal que $\forall u \in \mathcal{U}_{cl}$, $\mathscr{X}_t^u$ é igual à σ-álgebra gerada pelo processo de Wiener $\mathscr{W}_t$. Como conseqüência, mostra-se que, dado um $\epsilon > 0$, pode-se construir um controle em malha fechada que é ϵ-ótimo na classe de controles limitados no L^2 e adaptados à $\mathscr{W}_t$. Na segunda parte, estuda-se o problema de otimização Linear Quadrático (LQ) de sistemas excitados aditivamente por martingales quadrado integráveis tanto contínuos quanto descontínuos. Dois casos principais são considerados: sistema sem saltos e com saltos Markovianos nos parâmetros. No primeiro caso, além do distúrbio aditivo considera-se casos de sistemas com distúrbios multiplicativos tanto de Wiener quanto de Poisson. Para os problemas com observações completas o controle ótimo é determinado explicitamente, dependendo da solução de uma equação de Riccati, e para problemas com observações parciais os resultados obtidos são interpretados como uma condição necessária para validade do princípio de equivalência à certeza. A principal contribuição nesta parte do trabalho é mostrar que o caso de sistemas excitados por martingale quadrado integráveis pode ser tratado de maneira similar ao caso clássico sendo apresentadas soluções explícitas. Na terceira parte, é abordado o problema de controle Linear Exponencial Quadrático Gaussiano (LEQG) de sistemas lineares excitados pelo processo de Wiener restrigindo-se os controles admissíveis a processos constantes por partes com observações restritas a apenas certos instantes de tempo fixados *a priori*. São analisados casos com observações sem ruído e observações ruidosas sendo mostrado que ambos os problemas podem ser estudados por métodos diretos.

12. GRAU DE SIGILO:

(X) **OSTENSIVO** ( ) **RESERVADO** ( ) **CONFIDENCIAL** ( ) **SECRETO**