

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Exemplos de Derivações Simples do Anel de
Polinômios $k[x, y]$**

Dissertação de Mestrado

Batista Nunes de Oliveira

Porto Alegre, Outubro de 2006.

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Dissertação submetida por Batista Nunes de Oliveira como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professora Orientadora:

Dr^a. Cydara Cavedon Ripoll

Banca Examinadora:

Dr^a. Ada Maria de Souza Doering

Dr. Antônio Paques

Dr^a. Cydara Cavedon Ripoll

Dr. Yves Lequain

Data Da Defesa: 30 de Outubro de 2006.

AGRADECIMENTOS

À minha família, principalmente a minha mãe, pelo incentivo, amor, compreensão e orações.

Especialmente à professora Ada Doering, que dispensou uma atenção especial, ajuda e apoio nos estudos.

À minha orientadora, Cydara Ripoll, pelo auxílio, dedicação e paciência para que este sonho se realizasse.

Aos colegas e professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFRGS, pela convivência e amizades realizadas.

Aos amigos: “Pelo incentivo e força, os quais guardo no lado esquerdo do peito.”

Agradeço ao programa de Pós-Graduação em Matemática Pura da UFRGS, pela oportunidade que me foi dada.

À Rosane, secretária do Programa de Pós-Graduação, pela presteza em todos os momentos.

A Deus, que sempre está conosco e ilumina nossos caminhos.

E, por fim, a meu filho Renan e a minha esposa Margarete pela paciência e compreensão de alguns momentos, não poder dar toda a atenção e amor que merecem.

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos um algoritmo que nos permite decidir quando derivações de $k[x, y]$, do tipo Shamsuddin (isto é, derivações da forma

$$\partial_x + (a(x)y + b(x))\partial_y,$$

onde $a(x), b(x) \in k[x]$ e k é um corpo de característica zero) são simples.

Provamos também a simplicidade das derivações *do tipo quadráticas*

$$\Delta_p = \partial_x + (y^2 - p(x))\partial_y,$$

quando k é um corpo algebricamente fechado, onde $p(x) \in k[x]$ é um polinômio de grau ímpar.

ABSTRACT

In this work, we present an algorithm that allows us to decide when derivations of $k[x, y]$ of Shamsuddin type (that is, derivations of the form

$$\partial_x + (a(x)y + b(x))\partial_y,$$

where $a(x), b(x) \in k[x]$ and k is a field of characteristic zero) are simple.

We also prove the simplicity of derivations of quadratic type

$$\Delta_p = \partial_x + (y^2 - p(x))\partial_y,$$

where k is an algebraically closed field and $p(x) \in k[x]$ is a polynomial of odd degree.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
2	PRELIMINARES	7
3	EXTENSÃO DE UMA DERIVAÇÃO DE R A $R[t]$ E O TEOREMA DE SHAMSUDDIN	21
4	POLINÔMIOS DE DARBOUX E SOLUÇÕES ALGÉBRICAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	37
5	SOBRE UMA CLASSE DE EQUAÇÕES DE RICCATI	49
6	SIMPLICIDADE DAS k -DERIVAÇÕES $\partial_x + (y^2 - p(x))\partial_y$	65
7	APÊNDICE	75

1 INTRODUÇÃO

Sejam k um corpo de característica zero, x_1, \dots, x_n indeterminadas sobre k e $k[x_1, \dots, x_n]$ o anel de polinômios sobre k . Denotamos por $End_k(k[x_1, \dots, x_n])$ a álgebra dos endomorfismos lineares de $k[x_1, \dots, x_n]$. Exemplos de elementos pertencentes a esta álgebra são os operadores \widehat{x}_i , cuja ação sobre um polinômio de $k[x_1, \dots, x_n]$ é dada pelo produto pela indeterminada x_i . Também são elementos de $End_k(k[x_1, \dots, x_n])$ os operadores $\partial_1, \dots, \partial_n$, definidos por $\partial_i(f) = \partial f / \partial x_i$, para todo $f \in k[x_1, \dots, x_n]$.

A n -ésima Álgebra de Weyl sobre k é definida como sendo a sub-álgebra de $End_k(k[x_1, \dots, x_n])$, gerada pelos operadores lineares $\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_n$ e $\partial_1, \dots, \partial_n$. Denotaremos a mesma por

$$\mathbb{A}_n = k[\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_n] \langle \partial_1, \dots, \partial_n \rangle.$$

Uma *derivação* de $k[x_1, \dots, x_n]$ é uma aplicação

$$d : k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow k[x_1, \dots, x_n]$$

que satisfaz

$$\begin{aligned} (i) \quad & d(a + b) = d(a) + d(b) \\ (ii) \quad & d(ab) = d(a)b + ad(b), \end{aligned}$$

para todos $a, b \in k[x_1, \dots, x_n]$. Prova-se que toda derivação de $k[x_1, \dots, x_n]$ é da forma $\alpha_1 \partial_1 + \alpha_2 \partial_2 + \dots + \alpha_n \partial_n$, com $\alpha_i \in k[x_1, \dots, x_n]$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Uma derivação d de $k[x_1, \dots, x_n]$ é dita *simples* se não existem ideais próprios de $k[x_1, \dots, x_n]$ estáveis por d .

Dado o importante papel das Álgebras de Weyl, é natural tentar conhecer sua estrutura. Sobre ideais maximais cíclicos da álgebra de Weyl conhecem-se já os seguintes resultados:

Teorema 1.1 ([4], **Corollary 3.3**) *Seja $d = \partial_1 + \alpha_2\partial_2 + \dots + \alpha_n\partial_n$ uma derivação de $k[x_1, \dots, x_n]$, com $\alpha_i \in k[x_1, \dots, x_n]$, para todo $i = 2, \dots, n$. Suponha que existe $\gamma \in k[x_1, \dots, x_n]$ tal que $\mathbb{A}_n \cdot (d + \gamma)$ é um ideal maximal à esquerda de \mathbb{A}_n . Então d é uma derivação simples se $\alpha_i \in k[x_1, \dots, x_i]$, para todo $i = 2, \dots, n$.*

Corolário 1.2 *Seja $d = \partial_1 + \alpha_2\partial_2$ uma derivação de $k[x_1, x_2]$, com $\alpha_2 \in k[x_1, x_2]$. Se $\gamma \in k[x_1, x_2]$ é tal que $\mathbb{A}_2 \cdot (d + \gamma)$ é um ideal maximal à esquerda de \mathbb{A}_2 então d é simples.*

O resultado a seguir garante a validade da recíproca do corolário acima:

Teorema 1.3 ([1], **Main Th.**) *Seja $d = \partial_1 + \alpha_2\partial_2$ uma derivação simples de $k[x_1, x_2]$, com $\alpha_2 \in k[x_1, x_2]$. Então existe $\gamma \in k[x_1, x_2]$ tal que $\mathbb{A}_2 \cdot (d + \gamma)$ é um ideal maximal à esquerda de \mathbb{A}_2 .*

Estes resultados nos mostram que o problema de se gerar ideais maximais para $k[x_1, x_2]$ é bastante contemplado se sabemos reconhecer se uma dada derivação é ou não simples. Apesar de saber-se ser simples a maioria das derivações de $k[x_1, x_2]$, o problema de saber-se reconhecer se uma dada derivação é ou não simples não é amplamente resolvido.

O objetivo deste trabalho é:

- provar a simplicidade das derivações *do tipo quadráticas*

$$\Delta_p = \partial_x + (y^2 - p(x))\partial_y,$$

quando k é um corpo algebricamente fechado, onde $p(x) \in k[x]$ é um polinômio de grau ímpar

- apresentar um algoritmo que nos permite decidir quando derivações de $k[x, y]$ do tipo Shamsuddin são simples.

Tais resultados são devidos a A.Maciejewski, J.Moulin-Ollagnier e A.Nowicki, e podem ser encontrados em [5] e em [6].

Esta dissertação estrutura-se então da seguinte forma:

No capítulo 2, introduzimos algumas definições e resultados que são úteis ao desenvolvimento deste trabalho. Em especial, tratamos de algumas extensões de uma derivação.

No capítulo 3, estudamos extensões de uma derivação d de R a $R[t]$ e provamos o Teorema de Shamsuddin, principal resultado deste capítulo, que nos dá condições de decidir se conseguimos manter a simplicidade quando estendemos uma derivação simples de $k[x]$ a $k[x, y]$. Definimos derivações de Shamsuddin e apresentamos um algoritmo que nos permite decidir se uma derivação de $k[x, y]$ do tipo Shamsuddin é ou não simples.

No capítulo 4, definimos polinômio de Darboux para uma derivação de $k[x, y]$ e apresentamos a relação entre simplicidade e existência de polinômios de Darboux, bem como a relação entre existência de polinômios de Darboux e existência de soluções algébricas para certas equações diferenciais de primeira ordem com coeficientes em $k(x)$.

No capítulo 5, considerando ainda a equação de Riccati da forma

$$t' = t^2 - p(x),$$

onde $p = p(x)$ é um polinômio pertencente a $k[x]$, provamos que, no caso de k ser algebricamente fechado, suas soluções em $\overline{k(x)}$ (cuja existência, como será mostrado no capítulo 4, está relacionada com a simplicidade da derivação $\partial_x + (y^2 - p(x))\partial_y$), já são elementos de $k(x)$.

Finalmente no capítulo 6, abordamos a simplicidade das k -derivações de $k[x, y]$, da forma

$$\Delta_p = \partial_x + (y^2 - p(x))\partial_y,$$

onde $p(x) \in k[x]$ e provamos o resultado mais importante deste trabalho: se $p(x)$ é um polinômio não nulo de grau ímpar, então Δ_p é uma derivação simples. Provamos também que nenhuma derivação d de $k[x, y]$ da forma

$$d = \frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - x^{2m} + mx^{m-1}) \frac{\partial}{\partial y}, \quad m \in \mathbb{N}^*.$$

é simples .

Em todo este trabalho, denotamos por

- k um corpo de característica zero (que, a partir do Capítulo 5, passa a ser considerado algebricamente fechado);
- $k[x]$ o anel de polinômios com coeficientes em k a uma variável, considerando *grau* $0 = -\infty$;
- $k[x, y]$ o anel de polinômios com coeficientes em k a duas variáveis;
- $k(x)$ o corpo das funções racionais com coeficientes em k em uma variável x ;
- $\overline{k(x)}$ o fecho algébrico de $k(x)$;
- cfR o corpo de frações de um domínio R ;
- R_P a localização de um domínio R pelo sistema multiplicativo determinado por um ideal primo P de R , isto é,

$$R_P = \left\{ \frac{c}{s} \mid s \in R \setminus P, c \in R \right\};$$

- $\frac{d}{dx}$, o operador derivada em relação à variável x no anel $k[x]$;
- $f' = \frac{df}{dx}$ a derivada de $f \in k[x]$;

- $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$ os operadores derivadas parciais em relação às variáveis x e y , respectivamente (ou ainda, resumidamente, ∂_x e ∂_y) no anel $k[x, y]$.

Finalmente, por facilidade de escrita, denotamos simplesmente por $\sum_{i,j=0}^{n,m}$ o duplo somatório $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m$.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, estabeleceremos vários resultados que serão úteis para os resultados principais. Tomaremos a liberdade de, em alguns deles, omitirmos sua demonstração.

Definição 2.1 *Seja S um anel. Uma aplicação $d : S \rightarrow S$ é dita **derivação de S** , se para todo $a, b \in S$, d satisfaz*

$$\begin{aligned} (i) \quad d(a + b) &= d(a) + d(b) \\ (ii) \quad d(ab) &= d(a)b + ad(b), \end{aligned}$$

Proposição 2.2 *A soma de derivações de um anel S é uma derivação.*

Prova. Sejam d_1, d_2 derivações em S .

É claro que $d_1 + d_2$ preserva a soma. Ainda, para $a, b \in S$, temos

$$\begin{aligned} (d_1 + d_2)(ab) &= d_1(ab) + d_2(ab) \\ &= d_1(a)b + ad_1(b) + d_2(a)b + ad_2(b) \\ &= (d_1 + d_2)(a)b + a(d_1 + d_2)(b), \end{aligned}$$

e portanto $(d_1 + d_2)$ é uma derivação de S . ■

Definição 2.3 *Uma derivação d de $k[x]$ é uma **k -derivação** se $d(r) = 0$, para todo $r \in k$.*

Exemplo 2.4 $\frac{d}{dx}$ é uma k -derivação de $k[x]$.

Proposição 2.5 *Se d é uma derivação de um anel comutativo com unidade R , então para todo $i \in \mathbb{N}^*$, temos $d(a^i) = ia^{i-1}d(a)$ para todo $a \in R$.*

Prova. Mostraremos por indução. Para $i = 1$ temos que $d(a) = 1a^0d(a)$.

Suponhamos que para $i \geq 1$ vale $d(a^i) = ia^{i-1}d(a)$; então

$$\begin{aligned} d(a^{i+1}) &= d(aa^i) = d(a)a^i + ad(a^i) \\ &= d(a)a^i + aia^{i-1}d(a) \\ &= (i+1)a^i d(a), \end{aligned}$$

já que R é comutativo. ■

Proposição 2.6 *Se d é uma k -derivação de $k[x]$, então $d = d(x)\frac{d}{dx}$.*

Prova. Seja $g(x) \in k[x]$, digamos $g(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, com $a_i \in k$. Então

$$\begin{aligned} d(g(x)) &= d\left(\sum_{i=0}^n a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^n d(a_i x^i) \\ &\stackrel{d \text{ é } k\text{-derivação}}{=} \sum_{i=0}^n a_i d(x^i) \\ &\stackrel{\text{Proposição 2.5}}{=} \sum_{i=1}^n a_i i x^{i-1} d(x) \\ &= d(x) \sum_{i=1}^n a_i i x^{i-1} = d(x) \sum_{i=0}^n a_i \frac{d}{dx}(x^i) \\ &\stackrel{d \text{ é } k\text{-derivação}}{=} d(x) \sum_{i=0}^n \frac{d}{dx}(a_i x^i) = d(x) \frac{d}{dx}(g(x)). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposição 2.7 *Se d é uma k -derivação de $k[x, y]$, então*

$$d = d(x)\frac{\partial}{\partial x} + d(y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Prova. Seja $h(x, y) \in k[x, y]$, digamos $h(x, y) = \sum_{i,l=0}^{n,l} a_{ij} x^i y^j$, com $a_{ij} \in k$, para cada i e cada j .

Então

$$\begin{aligned}
d(h(x, y)) &= d\left(\sum_{i,j=0}^{n,l} a_{ij}x^i y^j\right) = \sum_{i,j=0}^{n,l} d(a_{ij}x^i y^j) \\
&\stackrel{d \text{ é } k\text{-derivac\~{a}o}}{=} \sum_{i,j=0}^{n,l} a_{ij}d(x^i y^j) \\
&= \sum_{i,j=0}^{n,l} a_{ij}(d(x^i)y^j + x^i d(y^j)) \\
&\stackrel{\text{Proposi\~{c}o 2.5}}{=} \sum_{i,j=1}^{n,l} a_{ij}(ix^{i-1}d(x)y^j + x^i j y^{j-1}d(y)) \\
&= \sum_{i,j=0}^{n,l} a_{ij}\left(d(x)\frac{\partial}{\partial x}x^i y^j + x^i d(y)\frac{\partial}{\partial y}y^j\right) \\
&= d(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{i,j=0}^{n,l} a_{ij}x^i y^j\right) + d(y)\frac{\partial}{\partial y}\left(\sum_{i,j=0}^{n,l} a_{ij}x^i y^j\right) \\
&= d(x)\frac{\partial}{\partial x}h(x, y) + d(y)\frac{\partial}{\partial y}h(x, y). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Observa\~{c}o 2.8 *O resultado acima pode ser generalizado para $k[x_1, \dots, x_n]$. Maiores detalhes podem ser encontrados em [7].*

Defini\~{c}o 2.9 *Seja d uma deriva\~{c}o de um anel comutativo R . Um ideal I de R \u00e9 um **d -ideal** se $d(I) \subseteq I$. Dizemos que R \u00e9 **d -simples** ou que d \u00e9 uma **deriva\~{c}o simples de R** , se R n\u00e3o cont\u00e9m d -ideais al\u00e9m dos triviais $\{0\}$ e R .*

Proposi\~{c}o 2.10 *Seja I um ideal de um anel comutativo R , gerado pelos elementos g_1, \dots, g_s e seja d uma deriva\~{c}o de R . Ent\u00e3o I \u00e9 um d -ideal se, e somente se, $d(g_i) \in I$, para todo $i = 1, \dots, s$.*

Prova. Se I \u00e9 um d -ideal ent\u00e3o obviamente $d(g_i) \in I$, para todo $i = 1, \dots, s$. Agora suponhamos que $d(g_i) \in I$ para todo i . Da\u00ed, para todo

$g \in I$, digamos $g = \sum_{i=1}^n r_i g_i$, com $r_i \in R$, temos

$$\begin{aligned} d(g) &= d\left(\sum_{i=1}^n r_i g_i\right) = \sum_{i=1}^n d(r_i g_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (d(r_i)g_i + r_i d(g_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n d(r_i)g_i + \sum_{i=1}^n r_i d(g_i) \in I, \end{aligned}$$

pois $d(g_i) \in I$, para todo i , por hipótese. ■

Proposição 2.11 *Seja d uma k -derivação não nula de $k[x]$. Então d é uma k -derivação simples se, e só se, $d(x) \in k^*$. Em outras palavras as únicas k -derivações simples de $k[x]$ são da forma $d = c \frac{d}{dx}$, com $c \in k^*$.*

Prova. (\Rightarrow) Seja d uma k -derivação simples não nula. Pela proposição 2.6 temos que $d = d(x) \frac{d}{dx}$, mas sendo d não nula, temos necessariamente $d(x) \neq 0$ e conseqüentemente $\text{grau } d(x) \geq 0$. Suponhamos por absurdo que $\text{grau } d(x) \geq 1$.

Ora, para todo $h \in k[x]$, $d(h) = d(x) \frac{dh}{dx} \in d(x)k[x]$; então o ideal $I = d(x)k[x]$ gerado por $d(x)$ é um d -ideal de $k[x]$.

Mas $\text{grau } (d(h)) = \text{grau } (d(x) \frac{dh}{dx}) = \text{grau } d(x) + \text{grau } \frac{dh}{dx} \geq 1$, para todo $h \in k[x]$; daí, para todo $r \in k^*$, temos $r \notin I$. Portanto I é um d -ideal próprio de $k[x]$, absurdo.

(\Leftarrow) Sejam $d = c \frac{d}{dx}$, $c \in k^*$ e I um d -ideal não-nulo de $k[x]$. A mostrar $I = k[x]$.

Sendo $k[x]$ um domínio principal, existe $g(x) \in k[x]$, tal que $I = (g(x))$ e como I é não nulo temos $\text{grau } g(x) \geq 0$.

Suponhamos, por absurdo, que $\text{grau } g(x) = n$, $n \geq 1$. Como I é d -ideal temos $d(g(x)) \in I$. Mas ,

$$\text{grau } d(g(x)) = \text{grau } \left(c \frac{dg}{dx} \right) = \text{grau } c + \text{grau } g'(x) = \text{grau } g'(x) = n - 1.$$

Por outro lado, como $d(g(x)) \in I$, existe $h(x) \in k[x]$ tal que $d(g(x)) = g(x)h(x)$, logo $\text{grau } d(g(x)) \geq \text{grau } g(x) = n$, o que é um absurdo.

Portanto $\text{grau } g(x) = 0$ e conseqüentemente $I = (g(x)) = k[x]$, donde concluímos que d é simples. ■

Queremos agora falar sobre extensões de derivações. Para isto, relembremos dois resultados sobre extensões de corpos.

Proposição 2.12 *Seja L uma extensão algébrica do corpo k . Dado $l \in L$, seja*

$$n = \min\{\text{grau } f(x) \mid f(x) \in k[x] \setminus \{0\} \text{ e } f(l) = 0\}.$$

Se $p(x) \in k[x]$ é tal que $p(l) = 0$ então $\text{grau } p(x) = n$ se e somente se $p(x)$ é irredutível.

Proposição 2.13 *Sejam L uma extensão algébrica de k e $l \in L$. Então $k[l]$ é um corpo.*

Notação 2.14 *Se d é uma derivação de k e $f(x) \in k[x]$, então denotaremos por $f^d(x)$ o polinômio obtido aplicando d a todos os coeficientes de f . Ou seja: se $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ então*

$$f^d(x) = d(a_n)x^n + d(a_{n-1})x^{n-1} + \dots + d(a_1)x + d(a_0).$$

Proposição 2.15 *Sejam $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in k[x]$ e $d : k \rightarrow k$, uma derivação de k . Então a aplicação $\Lambda^d : k[x] \rightarrow k[x]$, dada por*

$$\Lambda^d(f(x)) = d(a_n)x^n + d(a_{n-1})x^{n-1} + \dots + d(a_1)x + d(a_0) = f^d(x)$$

é uma derivação de $k[x]$ que estende d .

Prova. É claro que Λ^d estende d . Sejam $f(x), g(x) \in k[x]$, tais que

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

e

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0,$$

sem que m e n sejam necessariamente seus graus. Assim, podemos supor $n = m$.

É fácil ver que $\Lambda^d(f(x) + g(x)) = f^d(x) + g^d(x)$.

Afirmamos que $\Lambda^d(f(x)g(x)) = \Lambda^d(f(x))g(x) + f(x)\Lambda^d(g(x))$. De fato,

$$\begin{aligned} \Lambda^d(f(x)g(x)) &= \Lambda^d\left(\sum_{i,j=0}^{n,m} a_i b_j x^{i+j}\right) \\ &= \sum_{i,j=0}^{n,m} d(a_i b_j) x^{i+j} \\ &= \sum_{i,j=0}^{n,m} (d(a_i) b_j + a_i d(b_j)) x^{i+j} \\ &= \sum_{i,j=0}^{n,m} d(a_i) b_j x^{i+j} + \sum_{i,j=0}^{n,m} a_i d(b_j) x^{i+j} \\ &= \sum_{i,j=0}^{n,m} d(a_i) x^i b_j x^j + \sum_{i,j=0}^{n,m} a_i x^i d(b_j) x^j \\ &= f^d(x)g(x) + f(x)g^d(x) \\ &= \Lambda^d(f(x))g(x) + f(x)\Lambda^d(g(x)). \end{aligned}$$

Logo, Λ^d é uma derivação de $k[x]$. ■

Teorema 2.16 *Sejam d uma derivação de k e α um elemento algébrico sobre k . Então existe uma única derivação d^* do corpo $k[\alpha]$ que estende d (isto é, tal que $d^*|_k = d$). Tal derivação é induzida por $d^*(\alpha) = -\frac{p^d(\alpha)}{p'(\alpha)}$, onde $p(x)$ é o polinômio mínimo de α em $k[x]$.*

Prova. Suponhamos que *grau* $p(x) = n$, digamos,

$$p(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0.$$

Se existir uma derivação d^* de $k[\alpha]$ tal que $d^*|_k = d$, então deveremos ter, pondo $b_n = 1$ e lembrando que $p(\alpha) = 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= d^*(0) \\ &= d^*\left(\sum_{i=0}^n b_i \alpha^i\right) = \sum_{i=0}^n d^*(b_i \alpha^i) \\ &= \sum_{i=0}^n d^*(b_i) \alpha^i + \sum_{i=0}^n b_i d^*(\alpha^i) \\ &= \sum_{i=0}^n d^*(b_i) \alpha^i + \sum_{i=0}^n b_i i \alpha^{i-1} d^*(\alpha) \\ &\stackrel{d^*|_k=d}{=} \sum_{i=0}^n d(b_i) \alpha^i + d^*(\alpha) \sum_{i=0}^n b_i i \alpha^{i-1} \\ &= p^d(\alpha) + d^*(\alpha) p'(\alpha). \end{aligned}$$

Pelo caráter minimal de n , temos $p'(\alpha) \neq 0$, e conseqüentemente

$$d^*(\alpha) = -\frac{p^d(\alpha)}{p'(\alpha)}. \quad (1)$$

Ou seja: se existir uma derivação de $k[\alpha]$ estendendo d então necessariamente ela deverá ser induzida por (1).

Sendo α algébrico sobre k , sabemos que $\{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$ é base do k -espaço vetorial $k[\alpha]$ e, para todo $\beta \in k[\alpha]$, existe um único $f(x) \in k[x]$, com *grau* $f(x) \leq n-1$ e tal que $\beta = f(\alpha)$.

Definimos então, para tal $\beta \in k[\alpha]$ e tal $f(x) \in k[x]$,

$$d^*(\beta) = f^d(\alpha) + f'(\alpha) d^*(\alpha).$$

Afirmamos d^* é derivação.

Dados $\beta, \gamma \in k[\alpha]$, sejam $f(x), g(x) \in k[x]$, tais que $\text{grau } f < n$, $\text{grau } g < n$, $\beta = f(\alpha)$ e $\gamma = g(\alpha)$.

Daí:

$$\begin{aligned} d^*(\beta + \gamma) &= (f + g)^d(\alpha) + (f + g)'(\alpha)d^*(\alpha) = \\ &= (f^d(\alpha) + g^d(\alpha)) + [f'(\alpha) + g'(\alpha)]d^*(\alpha) \\ &= f^d(\alpha) + f'(\alpha)d^*(\alpha) + g^d(\alpha) + g'(\alpha)d^*(\alpha) = d^*(\beta) + d^*(\gamma). \end{aligned}$$

Falta-nos mostrar que $d^*(\beta\gamma) = d^*(\beta)\gamma + \beta d^*(\gamma)$, e para tal precisamos saber quem é o polinômio de *grau* menor do que n que reproduz $\beta\gamma$ quando avaliado em α . Afirmamos que tal polinômio é o resto da divisão de $f(x)g(x)$ pelo polinômio minimal $p(x)$. De fato, pelo algoritmo da divisão euclidiana em $k[x]$, existem únicos $h(x)$ e $r(x)$ tais que

$$f(x)g(x) = p(x)h(x) + r(x), \quad (2)$$

com $r(x) = 0$ ou $\text{grau } r < \text{grau } p = n$.

Assim temos

$$\beta\gamma = f(\alpha)g(\alpha) = p(\alpha)h(\alpha) + r(\alpha) \stackrel{p(\alpha)=0}{=} r(\alpha),$$

logo $\beta\gamma = r(\alpha)$ e $r(x)$ é o único polinômio de $k[x]$ de *grau* menor que n tal que $\beta\gamma = r(\alpha)$.

Daí:

$$\begin{aligned} &d^*(\beta)\gamma + \beta d^*(\gamma) \\ &= [f^d(\alpha) + f'(\alpha)d^*(\alpha)]g(\alpha) + f(\alpha)[g^d(\alpha) + g'(\alpha)d^*(\alpha)] \\ &= f^d(\alpha)g(\alpha) + f(\alpha)g^d(\alpha) + [f'(\alpha)g(\alpha) + f(\alpha)g'(\alpha)]d^*(\alpha) \\ &\stackrel{\text{Prop. 2.15}}{=} [f(x)g(x)]^d(\alpha) + [f(x)g(x)]'(\alpha)d^*(\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(2)}{=} [p(x)h(x)]^d(\alpha) + r^d(\alpha) + [p(x)h(x)]'(\alpha)d^*(\alpha) + r'(\alpha)d^*(\alpha) \\
&\stackrel{\text{Prop. 2.15}}{=} p^d(\alpha)h(\alpha) + p(\alpha)h^d(\alpha) + p'(\alpha)h(\alpha)d^*(\alpha) + p(\alpha)h'(\alpha)d^*(\alpha) + r^d(\alpha) + r'(\alpha)d^*(\alpha) \\
&\stackrel{p^{(\alpha)=0}}{=} [p^d(\alpha) + p'(\alpha)d^*(\alpha)]h(\alpha) + r^d(\alpha) + r'(\alpha)d^*(\alpha) \\
&= 0 \cdot h(\alpha) + d^*(\beta\gamma) = d^*(\beta\gamma).
\end{aligned}$$

Concluimos então que d^* é uma derivação.

Pela unicidade de $r(x)$ temos que d^* é a única derivação de $k[\alpha]$ tal que $d^*|_k = d$ e é dada por $d^*(\alpha) = -\frac{p^d(\alpha)}{p'(\alpha)}$. ■

Corolário 2.17 *Sejam d uma derivação de k e L uma extensão algébrica de k . Existe uma única extensão de d a uma derivação de L .*

Prova. Vamos aqui aplicar o lema de Zorn à família

$$\mathcal{F} = \{(U, \tilde{d}) \mid U \text{ corpo, } k \subseteq U \subseteq L, \tilde{d} \text{ é uma derivação de } U \text{ que estende } d\}.$$

Pelo teorema anterior, \mathcal{F} é não vazio. Definimos em \mathcal{F} a seguinte ordem parcial: dados (U, \tilde{d}) e $(U_1, \tilde{d}_1) \in \mathcal{F}$,

$$(U, \tilde{d}) \leq (U_1, \tilde{d}_1) \stackrel{\text{def}}{\iff} U \subseteq U_1 \text{ e } \tilde{d}_1|_U = \tilde{d}.$$

Seja \mathcal{F}' um subconjunto totalmente ordenado de \mathcal{F} . Queremos mostrar que existe $(\bar{A}, \bar{d}) \in \mathcal{F}$ tal que $(A', d') \leq (\bar{A}, \bar{d})$, para qualquer $(A', d') \in \mathcal{F}'$.

Seja

$$\bar{A} = \cup_{(A', d') \in \mathcal{F}'} A'.$$

Como \mathcal{F}' é totalmente ordenado, é fácil ver que \bar{A} é corpo. Além disso, $k \subseteq \bar{A} \subseteq L$.

Definimos $\bar{d}: \bar{A} \rightarrow \bar{A}$ da seguinte maneira: pela definição de \bar{A} , dado $\bar{a} \in \bar{A}$, existe $(A', d') \in \mathcal{F}'$ tal que $\bar{a} \in A'$. Então definimos $\bar{d}(\bar{a}) = d'(\bar{a})$.

Notemos que \bar{d} está bem definido, pois se $\bar{a} \in A'$ e $\bar{a} \in A''$, com (A', d') , $(A'', d'') \in \mathcal{F}'$, sendo \mathcal{F}' totalmente ordenado temos $(A', d') \leq (A'', d'')$ ou $(A', d') \geq (A'', d'')$. Em qualquer caso, temos $d'(\bar{a}) = d''(\bar{a})$. Podemos então dizer que $\bar{d}|_{A'} = d'$. Em particular, \bar{d} estende d .

Afirmamos que \bar{d} é uma derivação de \bar{A} que estende d .

De fato, sejam $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{A}$. Como $\bar{A} = \cup_{(A', d') \in \mathcal{F}'} A'$ sabemos que existem (A', d') , $(A'', d'') \in \mathcal{F}'$ tais que $\bar{a} \in A'$ e $\bar{b} \in A''$. Sabemos também que $(A', d') \leq (A'', d'')$ ou $(A', d') \geq (A'', d'')$. Supondo, sem perda de generalidade, que $(A', d') \leq (A'', d'')$, temos que

$$\bar{d}(\bar{a}) = d'(\bar{a}) = d''(\bar{a}) \quad e \quad \bar{d}(\bar{b}) = d''(\bar{b}),$$

Ainda, como $\bar{a} + \bar{b} \in A''$ e $\bar{a}\bar{b} \in A''$, temos que

$$\bar{d}(\bar{a} + \bar{b}) = d''(\bar{a} + \bar{b}) = d''(\bar{a}) + d''(\bar{b}) = \bar{d}(\bar{a}) + \bar{d}(\bar{b})$$

e

$$\bar{d}(\bar{a}\bar{b}) = d''(\bar{a}\bar{b}) = d''(\bar{a})\bar{b} + \bar{a}d''(\bar{b}) = \bar{d}(\bar{a})\bar{b} + \bar{a}\bar{d}(\bar{b})$$

Conseqüentemente temos que $(\bar{A}, \bar{d}) \in \mathcal{F}$. Ainda, como $A' \subseteq \bar{A}$, $\bar{d}|_{A'} = d'$ e $(A', d') \leq (\bar{A}, \bar{d})$ para todo $(A', d') \in \mathcal{F}'$, conclui-se que (\bar{A}, \bar{d}) é cota superior para \mathcal{F}' .

Mostramos assim que \mathcal{F} é um sistema indutivo. Portanto, pelo Lema de Zorn, existe (\bar{U}, \hat{d}) elemento máximo em \mathcal{F} .

Afirmamos que $\bar{U} = L$. Ora, se $\bar{U} \subsetneq L$ então existe $l \in L \setminus \bar{U}$ e $\bar{U}[l]$ é uma extensão algébrica de \bar{U} . Pelo teorema anterior, existe uma derivação \tilde{d}_l de $\bar{U}[l]$ estendendo \hat{d} , tal que $\bar{U} \subset \bar{U}[l]$ e $\tilde{d}_l|_{\bar{U}} = \hat{d}$, o que é um absurdo, pois (\bar{U}, \hat{d}) é elemento máximo de F . Logo, $\bar{U} = L$.

Como \hat{d} é extensão de todas as outras derivações, é fácil ver que é única, e isto completa a prova. ■

Teorema 2.18 *Sejam R um domínio e d uma derivação de R . Então existe uma única extensão de d a uma derivação no corpo de frações de R , a saber: para cada $\frac{u}{v} \in cfR$,*

$$\tilde{d} : cfR \longrightarrow cfR, \quad \tilde{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{d(u)v - ud(v)}{v^2}. \quad (3)$$

Prova. Mostraremos primeiramente que \tilde{d} definida por (3) é uma derivação.

Dados $\frac{x}{y}, \frac{u}{v} \in cfR$, temos que

$$\begin{aligned} \tilde{d}\left(\frac{x}{y} + \frac{u}{v}\right) &= \tilde{d}\left(\frac{xv + yu}{yv}\right) = \frac{d(xv + yu)yv - (xv + yu)d(yv)}{(yv)^2} \\ &= \frac{(d(x)v + xd(v) + d(y)u + yd(u))yv - xvd(yv) - yud(yv)}{y^2v^2} \\ &= \frac{d(x)vyv + xd(v)yv + d(y)yv + yd(u)yv}{y^2v^2} \\ &\quad + \frac{-xvd(y)v - xvyd(v) - yud(y)v - yuyd(v)}{y^2v^2} \\ &= \frac{d(x)v^2y - xv^2d(y) + d(u)y^2v - uy^2d(v)}{y^2v^2} \\ &= \frac{d(x)yv^2 - xv^2d(y)}{y^2v^2} + \frac{d(u)y^2v - uy^2d(v)}{y^2v^2} \\ &= \frac{d(x)y - xd(y)}{y^2} + \frac{d(u)v - ud(v)}{y^2v^2} = \tilde{d}\left(\frac{x}{y}\right) + \tilde{d}\left(\frac{u}{v}\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{d}\left(\frac{xu}{yv}\right) &= \tilde{d}\left(\frac{xu}{yv}\right) = \frac{d(xu)yv - xud(yv)}{(yv)^2} \\ &= \frac{(d(x)u + xd(u))yv - xu(d(y)v - y(d(v)))}{(yv)^2} \\ &= \frac{d(x)uyv + xd(u)yv - xud(y)v - xuy(d(v))}{y^2v^2} \\ &= \frac{(d(x)y - xd(y))uv}{y^2v^2} + \frac{xy(d(u)v - u(d(v)))}{y^2v^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(d(x)y - xd(y))}{y^2} \left(\frac{u}{v}\right) + \left(\frac{x}{y}\right) \frac{(d(u)v - u(d(v)))}{v^2} \\
&= \tilde{d}\left(\frac{x}{y}\right) \frac{u}{v} + \frac{x}{y} \tilde{d}\left(\frac{u}{v}\right).
\end{aligned}$$

Logo, \tilde{d} é derivação.

Agora note que, como $1 \in R$, temos que $\frac{u}{1} = u$, e portanto

$$\tilde{d}\left(\frac{u}{1}\right) = \frac{d(u)1 - ud(1)}{1^2} = \frac{d(u) - u0}{1} = d(u).$$

Assim \tilde{d} é uma derivação que estende d a cfR .

Para mostrar a unicidade, suponhamos que existam derivações \tilde{d} e \bar{d} no corpo de frações de R que estendem d .

Observamos que, para cada $\frac{u}{v} \in cfR$, como \tilde{d} estende d , temos

$$0 = \tilde{d}(1) = \tilde{d}(vv^{-1}) = \tilde{d}(v)v^{-1} + v\tilde{d}(v^{-1}) = d(v)v^{-1} + v\tilde{d}(v^{-1}),$$

daí

$$\tilde{d}(v^{-1}) = \frac{-d(v)}{v^2};$$

analogamente obtemos

$$\bar{d}(v^{-1}) = \frac{-d(v)}{v^2},$$

o que implica

$$\bar{d}(v^{-1}) = \tilde{d}(v^{-1}).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\tilde{d}\left(\frac{u}{v}\right) &= \tilde{d}(u)v^{-1} - u\tilde{d}(v^{-1}) \\
&= d(u)v^{-1} - u\tilde{d}(v^{-1}) \stackrel{\bar{d}(v^{-1}) = \tilde{d}(v^{-1})}{=} \\
&= \bar{d}(u)v^{-1} - u\bar{d}(v^{-1}) = \bar{d}\left(\frac{u}{v}\right),
\end{aligned}$$

portanto $\tilde{d} = \bar{d}$. ■

Corolário 2.19 *Sejam R um domínio e P um ideal primo de R . Se \tilde{d} é a derivação de cfR que estende d , então $\tilde{d}|_{R_P}$ é uma derivação de R_P .*

Prova. Pela proposição acima, temos que, dado $\frac{c}{s} \in R_P$,

$$\tilde{d}\left(\frac{c}{s}\right) = \frac{d(c)s - cd(s)}{s^2} \in R_P,$$

visto que, sendo P ideal primo e $s \in R \setminus P$, tem-se $s^2 \in R \setminus P$. ■

Proposição 2.20 *Seja I um d -ideal de R . Então IR_P é um \tilde{d} -ideal de R_P .*

Prova. Como $IR_P = \left\{ \frac{i}{s} \mid i \in I, s \in R \setminus P \right\}$, temos que

$$\tilde{d}\left(\frac{i}{s}\right) = \frac{d(i)s - id(s)}{s^2}.$$

Mas sendo I um d -ideal de R , obtemos que $d(i)s, id(s) \in I$ e conseqüentemente $d(i)s - id(s) \in I$. Assim, como $s^2 \in R \setminus P$, temos que $\tilde{d}\left(\frac{i}{s}\right) \in IR_P$.

Logo, IR_P é um \tilde{d} -ideal de R_P . ■

Antes de encerrarmos este capítulo, damos a seguir mais alguns exemplos de d -ideais que nos serão úteis neste trabalho.

Teorema 2.21 *Seja R um domínio que contém os racionais e que possui um único ideal maximal M . Se M for radical de algum d -ideal de R então M é um d -ideal.*

Prova. Suponhamos que A é um d -ideal de R tal que $\sqrt{A} = M$.

Dado $x \in M$, afirmamos que $d(x) \in M$. De fato,

$$\begin{aligned} n &= \min\{t \in \mathbb{N}^* \mid x^t \in A\} \Rightarrow \\ x^n &\in A \stackrel{A \text{ é } d\text{-ideal}}{\Rightarrow} \\ nx^{n-1}d(x) &= d(x^n) \in A \end{aligned}$$

Como $R \supseteq \mathbb{Q}$, temos que n é inversível em R , e portanto

$$\begin{aligned} nx^{n-1}d(x) \in A &\Rightarrow \\ x^{n-1}d(x) \in A. \end{aligned}$$

Daí note que, se $d(x) \notin M$, temos que $d(x)$ é inversível em R , visto que M é o único maximal de R ; mas então $x^{n-1} \in A$, o que contraria o caráter minimal de n . Logo, concluímos que $d(x) \in M$. ■

Corolário 2.22 *Sejam R domínio que contém \mathbb{Q} , A um d -ideal de R e P um primo mínimo de A . Então P é d -ideal de R .*

Prova. Como A d -ideal de R então AR_P é \tilde{d} -ideal de R_P pela Proposição 2.20.

Como P é um primo mínimo de A , o único ideal primo de R_P que contém AR_P é PR_P . Logo, $\sqrt{AR_P} = PR_P$, que sabemos ser ideal máximo de R_P . Então, pelo teorema 2.21, PR_P é um \tilde{d} -ideal de R_P .

Note agora que, se $x \in P$, então $\frac{x}{1} \in PR_P$ e $\frac{d(x)}{1} = \tilde{d}\left(\frac{x}{1}\right) \in PR_P$, e conseqüentemente $d(x) \in P$. Logo P é d -ideal. ■

3 EXTENSÃO DE UMA DERIVAÇÃO DE R A $R[t]$ E O TEOREMA DE SHAMSUDDIN

Neste capítulo, abordamos algumas maneiras de estender uma derivação de um domínio ao anel de polinômios. O Teorema de Shamsuddin nos dá condições de decidir se conseguimos manter a simplicidade. Finalmente, definimos derivações de Shamsuddin e apresentamos um critério que nos permite decidir se uma derivação de Shamsuddin é ou não simples. Encerramos então o capítulo com vários exemplos de derivações simples e não seimples.

Neste capítulo supomos que todos os domínios considerados contêm Q .

Proposição 3.1 *Sejam R um anel comutativo com unidade, t uma indeterminada sobre R e d uma derivação de R . Então podemos estender d a uma única derivação \tilde{d} do anel de polinômios $R[t]$ pondo $\tilde{d}(t) = h(t)$, onde $h(t) \in R[t]$.*

Prova. Considere d^* uma derivação de $R[t]$ que estende d e satisfaz $d^*(t) = h(t)$.

Dado $f = \sum_{i=0}^n a_i t^i \in R[t]$, temos

$$\begin{aligned} d^*(f) &= \sum_{i=0}^n d^*(a_i t^i) = \sum_{i=0}^n (d^*(a_i) t^i + a_i i t^{i-1} d^*(t)) \stackrel{d^*|_R=d}{=} \\ &= \sum_{i=0}^n d(a_i) t^i + \sum_{i=1}^n a_i i t^{i-1} d^*(t) = f^d(t) + \frac{df}{dt} h(t). \end{aligned}$$

Decorre daí que se existir uma derivação \tilde{d} de $R[t]$ que estende d e tal que $\tilde{d}(t) = h(t)$, então ela é única e

$$\tilde{d}(f) = f^d(t) + \frac{df}{dt} h(t), \quad (4)$$

para todo $f \in R[t]$.

Resta mostrar que \tilde{d} dada por (4) é de fato uma derivação. Dados $f, g \in R[t]$.

$$\begin{aligned}\tilde{d}(f + g) &= (f + g)^d(t) + \frac{d(f + g)}{dt}h(t) \stackrel{\text{Prop. 2.15}}{=} \\ &= f^d(t) + g^d(t) + \frac{df}{dt}h(t) + \frac{dg}{dt}h(t) = \tilde{d}(f) + \tilde{d}(g)\end{aligned}$$

Além disto

$$\begin{aligned}\tilde{d}(fg) &= (fg)^d(t) + \left(\frac{dfg}{dt}\right)h(t) \\ &= f^d(t)g + fg^d(t) + \frac{df}{dt}h(t)g + f\frac{dg}{dt}h(t) \\ &= \left(f^d(t) + \frac{df}{dt}h(t)\right)g + f\left(g^d(t) + \frac{dg}{dt}h(t)\right) \\ &= \tilde{d}(f)g + f\tilde{d}(g)\end{aligned}$$

Portanto, \tilde{d} dada por (4) é a única derivação do anel de polinômios $R[t]$ que estende d e satisfaz a condição $\tilde{d}(t) = h(t)$ ■

Quando $\text{grau } h(t) \leq 1$ podemos também preservar a simplicidade quando passamos de R a $R[t]$, como mostra o seguinte teorema:

Teorema 3.2 ([6], Teorema de Shamsuddin): *Seja R um anel comutativo contendo \mathbb{Q} e seja d uma derivação simples de R . Dados $a, b \in R$ estenda d a única derivação \tilde{d} do anel de polinômios $R[t]$ tal que $\tilde{d}(t) = at + b$.*

As seguintes condições são equivalentes.

- (i) \tilde{d} não é simples;
- (ii) existe elemento r de R tal que $d(r) = ar + b$.

Prova. (ii) \Rightarrow (i): Afirmamos que o ideal gerado por $(t - r)$ é um \tilde{d} -ideal próprio de $R[t]$, logo \tilde{d} não é simples. De fato,

$$\tilde{d}(t - r) = \tilde{d}(t) - \tilde{d}(r) = at + b - ar - b = a(t - r) \in (t - r)R.$$

Logo, como R é por hipótese comutativo, pela proposição 2.10 temos que o ideal gerado por $t - r$ é um \tilde{d} -ideal. Além disso $(t - r)R$ é \tilde{d} -ideal próprio, visto que $1 \notin (t - r)R$, pois se $1 \in (t - r)R$ então existiria $u \in R[t] \setminus \{0\}$ tal que $1 = (t - r)u$; daí

$$0 = \text{grau } 1 = \text{grau } ((t - r)u) \stackrel{r \in R, u \neq 0}{=} 1 + \text{grau } u \geq 1.$$

Logo, \tilde{d} não é simples.

(i) \Rightarrow (ii): Seja I um \tilde{d} -ideal não trivial de $R[t]$.

Afirmção 1: $I \cap R = (0)$.

Inicialmente note que $I \cap R$ é um d -ideal de R . De fato, tomando $m \in I \cap R$, temos $d(m) \in R$, pois d é derivação em R e como $m \in I \cap R$, e I é \tilde{d} -ideal próprio de $R[t]$, segue que $d(m) = \tilde{d}(m) \in I$, portanto $d(m) \in I \cap R$. Além disso, $I \cap R$ é d -ideal próprio de R , pois como I é próprio, temos $1 \notin I$ e conseqüentemente $I \cap R \neq R$. Sendo d simples concluímos que $I \cap R = (0)$.

Sejam agora

$$n = \min\{\text{grau } f ; f \in I, f \neq 0\}$$

e

$$\sigma(I) = \{0\} \cup \{r \in R; r \text{ é coeficiente líder de } f \text{ e } \text{grau } f = n\}.$$

Afirmção 2: $\sigma(I) \neq \{0\}$, $n \geq 1$ e $\sigma(I)$ é um ideal de R .

Por hipótese, I é ideal próprio; então, para qualquer $f \in I$, com $f \neq 0$ temos que $\text{grau } f \geq 1$ e portanto $n \geq 1$.

Seja $g \in I$ tal que $\text{grau } g = n$ e seja r coeficiente líder de g ; então $r \neq 0$ e $r \in \sigma(I)$, portanto $\sigma(I) \neq \{0\}$.

Além disso $\sigma(I)$ é ideal de R . De fato:

- Dados $r, s \in \sigma(I)$, se r ou s é igual a zero, claramente $r + s \in \sigma(I)$. Se

forem ambos não nulos então existem $f, g \in I$, da forma

$$f = rt^n + \sum_{i=0}^{n-1} r_i t^i \quad \text{e} \quad g = st^n + \sum_{i=0}^{n-1} s_i t^i.$$

Como I é um ideal, segue que $f + g \in I$, mas

$$f + g = (r + s)t^n + \sum_{i=0}^{n-1} (r_i + s_i)t^i.$$

Se $r + s = 0$ então $r + s \in \sigma(I)$. Se $r + s \neq 0$, temos $\text{grau } f + g = n$ e $r + s$ é o coeficiente líder de $f + g$, e portanto $r + s \in \sigma(I)$. Assim, mostramos que, em qualquer caso, se $r, s \in \sigma(I)$ tem-se $r + s \in \sigma(I)$.

- Sejam $s \in R$ e $r \in \sigma(I)$, então existe $f \in I$ da forma

$$f = rt^n + r_{n-1}t^{n-1} + \dots + r_1t + r_0,$$

com $r_i \in R$, para $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$; então

$$sf = srt^n + sr_{n-1}t^{n-1} + \dots + sr_1t + sr_0 \in I.$$

Daí, se $s = 0$, segue que $sr = 0$ e portanto $sr \in \sigma(I)$. Se $s \neq 0$, então $\text{grau } sf = n$ e sr é o coeficiente líder de sf , portanto $sr \in \sigma(I)$. Assim, mostramos que, em qualquer caso, se $s \in R$ e $r \in \sigma(I)$ tem-se $sr \in \sigma(I)$, o que conclui a prova da Afirmação 2.

Afirmação 3: $\sigma(I)$ é um d -ideal de R . Sejam $r \in \sigma(I)$, $f = \sum_{i=0}^n r_i t^i \in I$ tal que $\text{grau } f = n$ e $r_n = r$ e

$$g = \tilde{d}(f) - naf,$$

onde a é tal que $\tilde{d}(t) = at + b$. Como $f \in I$ e I é \tilde{d} -ideal, é claro que $g \in I$.

Além disso

$$\begin{aligned} g &= \tilde{d}(f) - naf = \tilde{d}\left(\sum_{i=0}^n r_i t^i\right) - na \sum_{i=0}^n r_i t^i \\ &= \sum_{i=0}^n \tilde{d}(r_i) t^i + \sum_{i=1}^n r_i \tilde{d}(t^i) - na \sum_{i=0}^n r_i t^i \stackrel{\text{prop. 2.5}}{=} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^n d(r_i)t^i + \sum_{i=1}^n r_i i t^{i-1} \tilde{d}(t) - na \sum_{i=0}^n r_i t^i = \\
&= \sum_{i=0}^n d(r_i)t^i + \sum_{i=1}^n r_i i t^{i-1} (at + b) - na \left(\sum_{i=0}^n r_i t^i \right),
\end{aligned}$$

que tem para os coeficientes de t^n e t^{n-1} as respectivas expressões

$$d(r) + rna - nar = d(r)$$

e

$$d(r_{n-1}) + ar_{n-1}(n-1) + rnb - nar_{n-1} = rnb + d(r_{n-1}) - ar_{n-1}.$$

Se $d(r) \neq 0$, temos que *grau* $g = n$, donde concluímos que $d(r) \in \sigma(I)$ e se $d(r) = 0$ então obviamente $d(r) \in \sigma(I)$. Assim $\sigma(I)$ é um d -ideal de R .

A simplicidade de d e o fato que $\sigma(I) \neq \{0\}$ implicam que $\sigma(I) = R$. Portanto existe um polinômio mônico $p \in I$ tal que *grau* $p = n$, isto é, $p = t^n + r_{n-1}t^{n-1} + \dots + r_1t + r_0$, onde $r_{n-1}, \dots, r_1, r_0 \in R$. Considere o polinômio $h = \tilde{d}(p) - nap$, refazendo os cálculos da afirmação 3, obteremos que $h \in I$ e

$$h = d(1)t^n + [nb + d(r_{n-1}) - ar_{n-1}]t^{n-1} + s_{n-2}t^{n-2} + \dots + s_1t + s_0,$$

onde $s_{n-2}, \dots, s_1, s_0 \in R$. Como $d(1) = 0$ então $h = [nb + d(r_{n-1}) - ar_{n-1}]t^{n-1} + s_{n-2}t^{n-2} + \dots + s_1t + s_0$.

Agora pela minimalidade de n , nós deduzimos que $h = 0$, que implica $nb + d(r_{n-1}) - ar_{n-1} = 0$. Considere $l = -n^{-1}r_{n-1}$. Daí temos $nb + d(-nl) - a(-nl) = 0$. Segue que $nb - (d(n)l + nd(l)) + anl = 0$; como $d(n) = 0$, obtemos $nb - nd(l) + anl = 0$.

Ainda, como $\mathbb{Q} \subset R$, temos que $b - d(l) + al = 0$, ou seja, $d(l) = al + b$.

Assim, provamos que se d não for uma derivação simples, então existe $l \in R$ tal que $d(l) = al + b$.

Pela proposição 3.1 temos a unicidade, o que finaliza a prova. ■

Definição 3.3 Dados $a(x), b(x) \in k[x]$, denotaremos por $D(a, b)$ a k -derivação de $k[x, y]$, definida por:

$$\begin{cases} D(a, b)(x) = 1 \\ D(a, b)(y) = a(x)y + b(x) \end{cases},$$

que é chamada **derivação de Shamsuddin**.

Em outras palavras, uma derivação de Shamsuddin em $k[x, y]$ é uma derivação da forma

$$\partial_x + (a(x)y + b(x))\partial_y,$$

onde $a(x), b(x) \in k[x]$.

Note inicialmente que $D(a, b)|_{k[x]} = \frac{d}{dx}$, ou seja, $D(a, b)$ é uma extensão da derivação $\frac{d}{dx}$ de $k[x]$. Além disso, como $\frac{d}{dx}$ é uma k -derivação simples de $k[x]$, temos, pelo Teorema de Shamsuddin (Teorema 3.2):

Corolário 3.4 Para cada $a, b \in k[x]$, a derivação $D(a, b)$ de $k[x, y]$ é simples se e somente se não existe $f \in k[x]$ tal que

$$f' = af + b.$$

Prova. Basta tomar, no teorema de Shamsuddin, $R = k[x]$, $t = y$, $d = \frac{d}{dx}$ e $\tilde{d} = D(a, b)$. ■

Nos próximos resultados, apresentamos alguns exemplos de derivações $D(a, b)$, as quais sabemos decidir se são ou não simples. Salientamos que de [3], sabe-se que a "grande maioria" das derivações de Shamsuddin são simples.

Proposição 3.5 Dados $a, b \in k[x]$ tem-se:

- (i) $D(a, 0)$ não é simples;
- (ii) $D(0, b)$ não é simples;

- (iii) se $b \neq 0$ e $\text{grau } b < \text{grau } a$, então $D(a, b)$ é simples;
- (iv) se $a \neq 0 \neq b$ e $\text{grau } b = \text{grau } a$, então $D(a, b)$ é simples se e somente se $b \neq \alpha a$, para todo $\alpha \in k^*$.

Prova. (i) Visto que

$$D(a, 0)(y) = ay + 0 = ay \in (y) = yk[x, y],$$

concluimos que o ideal gerado por y é um $D(a, 0)$ -ideal próprio de $k[x, y]$. Logo, $D(a, 0)$ não é uma derivação simples de $k[x, y]$.

(ii) Seja h um polinômio de $k[x]$ tal que $h' = b$. Afirmamos que o ideal gerado por $y - h$ é um $D(0, b)$ -ideal próprio de $k[x, y]$. De fato,

$$D(0, b)(y - h) = D(0, b)(y) - D(0, b)(h) = b - b = 0 \in (y - h).$$

Portanto, $D(0, b)$ não é simples.

(iii) Suponhamos que $b \neq 0$, $\text{grau } b < \text{grau } a$ e que $D(a, b)$ não é simples. Então $a \neq 0$, pois $\text{grau } a > \text{grau } b$. Ainda, sendo $D(a, b)$ não simples, temos, pelo Corolário 3.4, que existe um polinômio $f \in k[x]$ tal que

$$f' = af + b. \tag{5}$$

Se $f = 0$ teríamos $0 = f' = a0 + b = b \neq 0$, absurdo. Portanto, $f \neq 0$; mas novamente neste caso chegamos a uma contradição analisando o grau em (5):

$$\begin{aligned} (\text{grau } f) - 1 &= \text{grau } f' \\ &= \text{grau}(af + b) \stackrel{\text{grau } b < \text{grau } a \text{ e } f \neq 0}{=} \text{grau}(af) \geq \text{grau } f. \end{aligned}$$

(iv) Suponhamos $a \neq 0 \neq b$ e $\text{grau } b = \text{grau } a$.

Se $b = \alpha a$ com $\alpha \in k^*$, então afirmamos que o ideal gerado por $y + \alpha$ é um $D(a, b)$ -ideal próprio de $k[x, y]$. De fato,

$$\begin{aligned} D(a, b)(y + \alpha) &= D(a, b)(y) + D(a, b)(\alpha) \\ &= ay + b + 0 = ay + \alpha a = a(y + \alpha) \in (y + \alpha)k[x, y], \end{aligned}$$

e como $1 \notin (y + \alpha)k[x, y]$, então $(y + \alpha)k[x, y]$ é próprio de $k[x, y]$.

Logo, $D(a, b)$ não é uma derivação simples.

Para mostrar a recíproca, suponhamos que $D(a, b)$ não é simples. Pelo Corolário 3.4, existe $f \in k[x]$ tal que

$$f' = af + b.$$

Inicialmente, afirmamos que $f \in k^*$. De fato, se $\text{grau } f \geq 1$, então obtemos uma contradição analisando o *grau* nesta última igualdade:

$$\begin{aligned} (\text{grau } f) - 1 &= \text{grau } f' = \text{grau } (af + b) \stackrel{\text{grau } b = \text{grau } a \text{ e } \text{grau } f \geq 1}{=} \text{grau } af \\ &= \text{grau } (af) \geq \text{grau } f. \end{aligned}$$

Agora se $f = 0$ então $0 = f' = a \cdot 0 + b = b$, absurdo.

Portanto, $\text{grau } f = 0$, ou seja, $f \in k^*$. Daí $0 = f' = af + b$, isto é, $b = (-f)a$, ou seja, $b = \alpha a$ com $\alpha \in k^*$, a saber, $\alpha = -f$. ■

A partir do conhecimento de derivações não simples, podemos ainda gerar outras derivações não simples:

Proposição 3.6 *Sejam $a, b, b_1, b_2 \in k[x]$ e $\alpha \in k$. Então:*

- (i) *Se $D(a, b_1)$ e $D(a, b_2)$ não são simples então $D(a, b_1 + b_2)$ não é simples*
- (ii) *Se $D(a, b)$ não é simples então $D(a, \alpha b)$ não é simples.*

Prova. Se $D(a, b_1), D(a, b_2)$ e $D(a, b)$ não são simples então, pelo Corolário 3.4, existem f_1, f_2, f polinômios de $k[x]$ tais que

$$f'_1 = af_1 + b_1, \quad f'_2 = af_2 + b_2 \quad \text{e} \quad f' = af + b.$$

Então

$$(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2' = af_1 + b_1 + af_2 + b_2 = a(f_1 + f_2) + (b_1 + b_2)$$

e

$$(\alpha f)' = \alpha f' = \alpha(af + b) = a(\alpha f) + \alpha b.$$

Como $(f_1 + f_2)$, ab , af , $b_1 + b_2 \in k[x]$ concluímos, pelo Corolário 3.4, que $D(a, b_1 + b_2)$ e $D(a, \alpha b)$ não são derivações simples. ■

Imediatamente da Proposição 3.5, obtemos os seguintes exemplos de k -derivações simples de $k[x, y]$.

Exemplo 3.7 *Seja $d = D(x, 1)$, isto é, $d(y) = xy + 1$. Como $1 \neq 0$ e grau $x >$ grau 1 , temos, pela Proposição 3.5 (iii), que d é uma k -derivação simples de $k[x, y]$.*

Exemplo 3.8 *Seja $d = D(x^2 + x, x^2)$, isto é, $d(y) = (x^2 + x)y + x^2$. Sendo grau $(x^2 + x) =$ grau x^2 e $x^2 \neq \alpha(x^2 + x)$, para todo $\alpha \in k^*$, temos, pela Proposição 3.5 (iv), que d é uma k -derivação simples de $k[x, y]$.*

Note que, com a proposição 3.5, sabemos decidir facilmente se a derivação $D(a, b)$ é simples quando grau $a \geq$ grau b .

A próxima proposição trata do caso em que grau $a <$ grau b , e juntamente com a proposição 3.5 nos permitirá decidir quando uma derivação do tipo $D(a, b)$ é ou não simples.

Proposição 3.9 *Sejam $a, b \in k[x]$ com $a \neq 0$ e $b = ca + r$, onde $c, r \in k[x]$ e grau $r <$ grau a . Então*

$D(a, b)$ é simples se e somente se $D(a, c' + r)$ é simples.

Prova. Primeiro observe que, escrevendo $c' = ac + (-ac + c')$, temos, pelo Corolário 3.4, que $D(a, -ac + c')$ não é simples. Assim, se $D(a, b)$ não é simples, então, usando a Proposição 3.6 (i) temos que $D(a, b - ac + c')$ não é simples. Mas

$$b - ac + c' \stackrel{b=ca+r}{=} c' + r.$$

Logo, se $D(a, b)$ não é simples então $D(a, c' + r)$ não é simples.

Ainda, escrevendo $(-c)' = a(-c) + (ac - c')$, temos, pelo Corolário 3.4, que $D(a, ac - c')$ não é simples. Assim, se $D(a, c' + r)$ não é simples então, usando a Proposição 3.6 (i), temos que $D(a, c' + r + ac - c') = D(a, ac + r) = D(a, b)$ não é simples. ■

Observação 3.10 *As Proposições 3.5 e 3.9 nos fornecem um algoritmo eficiente para decidir se uma derivação é ou não simples:*

1) *se grau $b <$ grau a então $D(a, b)$ é simples se e só se $b \neq 0$ (veja Proposição 3.5 (i) e (iii));*

2) *se grau $b =$ grau a , $D(a, b)$ é simples se e só se $b \neq \alpha a$, para todo $\alpha \in k^*$;*

3) *se grau $b >$ grau a , efetua-se a divisão euclidiana de b por a e obtém-se*

$$b = u_1 a + r_1 \text{ com grau } r_1 < \text{grau } a.$$

Como grau $b >$ grau a e grau $r_1 <$ grau a , temos

$$\text{grau } b = \text{grau } (u_1 a) = \text{grau } u_1 + \text{grau } a.$$

Logo grau $u_1 \leq$ grau b ; daí

$$\text{grau } u_1' < \text{grau } u_1 \leq \text{grau } b.$$

Como grau $r_1 <$ grau $a <$ grau b , temos grau $(u_1' + r_1) <$ grau b .

Se grau $(u'_1 + r_1) > \text{grau } a$, efetua-se novamente a divisão euclidiana e obtém-se

$$u'_1 + r_1 = u_2a + r_2 \text{ com grau } r_2 < \text{grau } a;$$

como anteriormente, obtemos

$$\text{grau}(u'_2 + r_2) < \text{grau}(u'_1 + r_1) < \text{grau } b.$$

Desta maneira existirá um natural n tal que

$$\text{grau}(u'_n + r_n) > \text{grau } a \text{ e } u'_n + r_n = u_{n+1}a + r_{n+1},$$

com grau $(u'_{n+1} + r_{n+1}) \leq \text{grau } a$. Aplicando a Proposição 3.9 sucessiva vezes obtemos

$D(a, b)$ é simples $\iff D(a, u'_1 + r_1)$ é simples $\iff \dots \iff D(a, u'_n + r_n)$ é simples $\iff D(a, u'_{n+1} + r_{n+1})$ é simples.

Como grau $(u'_{n+1} + r_{n+1}) \leq \text{grau } a$, sabemos decidir por 1) ou 2) se $D(a, u'_{n+1} + r_{n+1})$ é ou não simples, portanto sabemos decidir se $D(a, b)$ é ou não simples.

Exemplo 3.11 Vamos aplicar o algoritmo acima para decidir se $D(a, b)$ onde $a = x^3 + 1$ e $b = x^8 + 3x^5 + 1$ é ou não simples. Efetuando a divisão euclidiana temos:

$$b = (x^3 + 1)(x^5 + 2x^2) - 2x^2 + 1,$$

de modo que,

$$u_1 = x^5 + 2x^2 \text{ e } r_1 = -2x^2 + 1.$$

Como $u'_1 + r_1 = 5x^4 - 2x^2 + 4x + 1$ tem grau maior que $a = x^3 + 1$, efetua-se a divisão euclidiana de $u'_1 + r_1$ por a , encontrando

$$u_2 = 5x \text{ e } r_2 = -2x^2 - x + 1.$$

Como $u'_2 + r_2 = -2x^2 - x + 6$ tem grau menor que grau a , o processo pára e temos

$$D(x^3 + 1, x^8 + 3x^5 + 1) \text{ é simples} \iff D(x^3 + 1, -2x^2 - x + 6) \text{ é simples.}$$

Como grau $(-2x^2 - x + 6) = 2 < \text{grau}(x^3 + 1)$ e $-2x^2 - x + 6 \neq 0$, concluímos que $D(x^3 + 1, -2x^2 - x + 6)$ é simples, e portanto $D(x^3 + 1, x^8 + 3x^5 + 1)$ é simples.

Exemplo 3.12 Apliquemos novamente o algoritmo para decidir se a derivação $D(x, x^3 + 1)$ é ou não simples.

Aplicando a divisão euclidiana temos

$$x^3 + 1 = xx^2 + 1,$$

de modo que

$$u_1 = x^2 er_1 = 1.$$

Como $u'_1 + r_1 = 2x + 1$ e grau $(2x + 1) = \text{grau } a$, o processo pára e temos

$$D(x, x^3 + 1) \text{ é simples} \iff D(x, 2x + 1) \text{ é simples.}$$

Pela Proposição 3.5 (iii) $D(x, 2x + 1)$ é simples, pois $2x + 1 \neq \alpha x$, para todo $\alpha \in k^*$, e conseqüentemente $D(x, x^3 + 1)$ é simples.

A próxima proposição decorre diretamente do algoritmo explicitado na Observação 3.10:

Proposição 3.13 Seja $n \in \mathbb{N}$. A derivação $D(x, x^n)$ é simples se e somente se n é par.

Prova. Aplicando a $D(x, x^n)$ o algoritmo descrito na Observação 3.10, obtemos

$$\begin{aligned}x^n &= xx^{n-1} + 0 \\(n-1)x^{n-2} &= x((n-1)x^{n-3}) + 0 \\(n-3)(n-1)x^{n-4} &= x((n-3)(n-1)x^{n-5}) + 0 \\&\dots\end{aligned}$$

Observe que os polinômios que estão à esquerda de cada igualdade terão graus pares, se n for par e terão graus ímpares se n for ímpar.

Pelo algoritmo, devemos efetuar a divisão euclidiana até obter pela primeira vez à esquerda da igualdade, um polinômio $t(x)$ tal que $\text{grau}(t(x)) \leq \text{grau } x = 1$. Sabemos que $D(x, x^n)$ é simples se e somente se $D(x, t(x))$ é simples. Daí:

(\Leftarrow) Se $n = 2p$, a primeira vez que teremos $\text{grau}(t(x)) \leq 1$ no lado esquerdo da igualdade será na $(p+1)$ -ésima igualdade, quando teremos $\text{grau}(t(x)) = 0$ e

$$t(x) = (2p - (2p - 1)) \dots (2p - 3)(2p - 1)x^{2p-2p} = 1.3.5 \dots (2p - 1).$$

Como $1.3.5 \dots (2p-1) \neq 0$, pela Proposição 3.5 (iii), $D(x, 1.3.5 \dots (2p-1))$ é simples. Logo, $D(x, x^n)$ é simples.

(\Rightarrow) Se $n = 2p + 1$ a primeira vez que teremos $t(x)$ tal que $\text{grau}(t(x)) \leq \text{grau } x = 1$, no lado esquerdo da igualdade, ocorrerá na $(p+1)$ -ésima igualdade, quando teremos $\text{grau}(t(x)) = 1$ e

$$t(x) = (2p + 1 - (2p - 1)) \dots (2p + 1 - 3)(2p + 1 - 1)x = 2.4.6 \dots (2p)x.$$

Pela Proposição 3.5 (iv), $D(x, 2.4 \dots (2p)x)$ não é simples, logo $D(x, x^n)$ não é simples. ■

Proposição 3.14 *Seja $a \in k[x], a \neq 0$. Então para todo $b \in k[x]$, existe um único $r \in k[x]$ com grau $r < \text{grau } a$ e tal que $D(a, b - r)$ não é simples.*

Prova. Se grau $b < \text{grau } a$ então a resposta já está dada pela Proposição 3.5 (iii): $D(a, b - r)$ não é simples se e só se $r = b$.

Se grau $b = \text{grau } a$ pela divisão euclidiana temos

$$b = u_1 a + r,$$

com grau $r < \text{grau } a$ e $u_1 \in k^*$. Segue que $b - r = u_1 a$, logo pela Proposição 3.5 (iv), $D(a, b - r)$ não é simples.

Se grau $b > \text{grau } a$, sendo $a \neq 0$, temos a seguinte seqüência de igualdades, provenientes da divisão euclidiana por a :

$$\left\{ \begin{array}{l} b = u_1 a + r_1 \\ u'_1 + r_1 = u_2 a + r_2 \\ u'_2 + r_2 = u_3 a + r_3 \\ \dots \end{array} \right. \quad (6)$$

Como já foi observado grau $b > \text{grau}(u'_1 + r_1) > \text{grau}(u'_2 + r_2) > \dots$, portanto existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que grau $(u'_n + r_n) < \text{grau } a$, quando então

$$u'_n + r_n = 0 \cdot a + r_{n+1}.$$

Somando as $n + 1$ igualdades em (6) termo a termo, obtemos

$$b + (u_1 + u_2 + \dots + u_n)' + r_1 + r_2 + \dots + r_n = a(u_1 + u_2 + \dots + u_n) + r_1 + r_2 + \dots + r_{n+1},$$

ou ainda, denotando r_{n+1} por r e $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ por u ,

$$b + u' = au + r,$$

donde

$$b - r = au - u'.$$

Logo, $D(a, b - r) = D(a, au - u')$.

Note agora que $-u \in k[x]$ e

$$\begin{aligned}(-u)' &= b - r - au \\ &= a(-u) + (au - u').\end{aligned}$$

Então $D(a, au - u')$ não é simples, pelo Corolário 3.4. Mas então $D(a, b - r) = D(a, au - u')$ também não é simples.

Mostraremos agora a unicidade do polinômio r . Sejam $s_1, s_2 \in k[x]$ tais que $\text{grau } s_1 < \text{grau } a$, $\text{grau } s_2 < \text{grau } a$ e que $D(a, b - s_1)$ e $D(a, b - s_2)$ não são simples. Como $D(a, b - s_1)$ não é simples então $D(a, -b + s_1)$ não é simples, pela Proposição 3.6 (ii). Segue da Proposição 3.6 (i) que $D(a, -b + s_1 + b - s_2) = D(a, s_1 - s_2)$ não é simples. Mas $\text{grau } (s_1 - s_2) < \text{grau } a$; deste modo, pela Proposição 3.5 (iii), $s_1 - s_2 = 0$, isto é, $s_1 = s_2$. ■

4 POLINÔMIOS DE DARBOUX E SOLUÇÕES ALGÉBRICAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

O objetivo deste capítulo é definir polinômios de Darboux de derivações de $k[x, y]$ e relacioná-los com soluções algébricas de certas equações diferenciais parciais de primeira ordem com coeficientes em $k(x)$.

Definição 4.1 *Um polinômio $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ é dito um polinômio de Darboux de uma derivação d de $k[x_1, \dots, x_n]$ se $f \notin k$ e $d(f) = \lambda f$, para algum $\lambda \in k[x_1, \dots, x_n]$.*

Proposição 4.2 *Um polinômio $f \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ é um polinômio de Darboux de uma derivação d de $k[x_1, \dots, x_n]$ se e só se $f k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ é um d -ideal próprio de $k[x_1, \dots, x_n]$.*

Prova. Observe que $f \notin k$, se e só se $\{0\} \neq f k[x_1, \dots, x_n] \neq k[x_1, \dots, x_n]$.

O restante da prova é imediata, a partir da Proposição 2.10 e da definição acima. ■

Corolário 4.3 *Nenhuma derivação simples de $k[x, y]$ admite polinômio de Darboux.*

Antes de analisarmos a recíproca deste corolário, salientamos a seguinte propriedade dos polinômios de Darboux:

Proposição 4.4 *Seja f um polinômio de Darboux de uma derivação d de $k[x, y]$.*

i) Se $f = gh$, com $g, h \in k[x, y] \setminus k$ e $\text{mdc}(g, h) = 1$, então g e h são polinômios de Darboux para d .

ii) Se $f = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_t^{r_t}$, onde $r_i \in \mathbb{N}^*$ e p_i é irredutível para todo $i \in \{1, \dots, t\}$, então

a) cada $p_i^{r_i}$ é polinômio de Darboux para d ;

b) cada p_i é um polinômio de Darboux para d .

Prova. i) Seja $\lambda \in k[x, y]$ tal que $d(f) = \lambda f$. Então

$$\lambda gh = \lambda f = d(f) = d(gh) = d(g)h + gd(h),$$

donde

$$\begin{aligned} d(g)h &= \lambda gh - gd(h) \\ &= g(\lambda h - d(h)). \end{aligned}$$

Daí decorre que g divide $d(g)h$. Como $\text{mdc}(g, h) = 1$, concluímos que g divide $d(g)$, ou seja, $d(g) = \xi g$, com $\xi \in k[x, y]$. Logo g é também um polinômio de Darboux para d .

Analogamente, prova-se que h é um polinômio de Darboux de d .

ii) A parte (a) é imediata a partir de (i); para a parte (b), vemos, a partir de (a), que basta considerar o caso $f = h^n$, com $n \in \mathbb{N}^*$ e h irredutível.

Como h^n é polinômio de Darboux para d , existe $\lambda \in k[x, y]$ tal que $d(h^n) = \lambda h^n$; daí,

$$\lambda h^n = d(h^n) = nh^{n-1}d(h)$$

assim temos

$$nd(h) = \lambda h$$

donde

$$d(h) = n^{-1}\lambda h,$$

e portanto h é polinômio de Darboux para d . ■

O lema a seguir é provado em [5] apenas para um corpo algebricamente fechado. No entanto, o resultado vale para qualquer corpo de característica zero. Incluímos aqui então uma outra demonstração para o mesmo, que pode ser encontrada em [4] e que vale também para n variáveis. Aqui trataremos apenas o caso $n = 2$.

Lema 4.5 *Seja $d = \partial_x + \alpha_2 \partial_y$ uma derivação de $k[x, y]$, onde $\alpha_2 \in k[x, y]$, e seja $p \in k[x, y] \setminus k[x]$ tal que*

$$\mu d(p) = \eta p,$$

para algum $\mu \in k[x] \setminus \{0\}$ e $\eta \in k[x, y]$. Então, existem $\tilde{p} \in k[x, y] \setminus k[x]$ e $\lambda \in k[x, y]$ tais que $d(\tilde{p}) = \lambda \tilde{p}$.

Prova. Escrevamos p na forma

$$\sum_{i=0}^N p_i y^i, \text{ onde } p_i \in k[x], \text{ para todo } i, N \geq 1, P_N \neq 0$$

Denotando por $\alpha_0 \in k[x] \setminus \{0\}$ o conteúdo¹ de p , podemos escrever

$$p = \alpha_0 \tilde{p},$$

onde $\tilde{p} \in k[x, y] \setminus k[x]$ é primitivo em $k[x][y]$.

Por hipótese,

$$\mu d(\alpha_0 \tilde{p}) = \mu d(p) = \eta p = \eta \alpha_0 \tilde{p}, \quad (7)$$

¹Dados um domínio fatorial D e $f(x) \in D[x]$, digamos, $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, denominamos *conteúdo de f* o máximo divisor comum dos coeficientes de f , e o denotamos por $cont(f)$.

Dizemos que $f(x) \in D[x]$ é *primitivo em $D[x]$* se $cont(f)$ é invertível em D .

Lema de Gauss: Sejam D um domínio fatorial. Então

$$cont(fg) = cont(f)cont(g),$$

para quaisquer $f(x), g(x) \in D[x]$.

onde $\mu \in k[x] \setminus \{0\}$. Daí, como também $\alpha_0 \in k[x]$, temos

$$\begin{aligned} \mu \text{cont}(d(\alpha_0 \tilde{p})) &= \text{cont}(\mu d(\alpha_0 \tilde{p})) = \text{cont}(\eta \alpha_0 \tilde{p}) \\ &\stackrel{\text{Lema de Gauss}}{=} \alpha_0 \text{cont}(\eta) \text{cont}(\tilde{p}) \stackrel{\tilde{p} \text{ é primitivo}}{=} \alpha_0 \text{cont}(\eta). \end{aligned}$$

Logo, μ divide $\eta \alpha_0$, digamos,

$$\eta \alpha_0 = \mu \zeta,$$

para algum $\zeta \in k[x, y]$.

Daí

$$\mu d(\alpha_0 \tilde{p}) \stackrel{(7)}{=} \eta \alpha_0 \tilde{p} = \mu \zeta \tilde{p}.$$

Ainda, como $\mu \neq 0$, obtemos

$$d(\alpha_0 \tilde{p}) = \zeta \tilde{p}.$$

Daí, como d é uma derivação,

$$\zeta \tilde{p} = d(\alpha_0 \tilde{p}) = \alpha_0 d(\tilde{p}) + d(\alpha_0) \tilde{p};$$

pondo $\lambda := \zeta - d(\alpha_0) \in k[x, y]$, obtemos

$$\alpha_0 d(\tilde{p}) = \lambda \tilde{p}. \tag{8}$$

Repetimos então o argumento: como $\alpha_0 \in k[x]$ e \tilde{p} é primitivo, temos

$$\begin{aligned} \alpha_0 \text{cont}(d(\tilde{p})) &= \text{cont}(\alpha_0 d(\tilde{p})) \\ &= \text{cont}(\lambda \tilde{p}) \stackrel{\text{Lema de Gauss}}{=} \text{cont}(\lambda) \text{cont}(\tilde{p}) = \text{cont}(\lambda), \end{aligned}$$

e portanto α_0 divide λ em $k[x, y]$, digamos,

$$\lambda = \alpha_0 \tilde{\eta},$$

para algum $\tilde{\eta} \in k[x, y]$. Daí (8) se reescreve

$$\alpha_0 d(\tilde{p}) = \alpha_0 \tilde{\eta} \tilde{p},$$

e como $\alpha_0 \neq 0$, obtemos

$$d(\tilde{p}) = \tilde{\eta} \tilde{p},$$

o que completa a prova. ■

Teorema 4.6 *Seja $d = \partial_x + \alpha_2 \partial_y$ uma k -derivada de $k[x, y]$ onde $\alpha_2 \in k[x, y]$. Então*

a) as seguintes condições são equivalentes:

i) d não é simples;

ii) d tem um polinômio de Darboux;

iii) d tem um polinômio de Darboux irreduzível.

b) Se d não é simples então

i) todo polinômio de Darboux f de d satisfaz $\text{grau}_y f \geq 1$;

ii) existe, a menos de multiplicação por um elemento de k^ , um único polinômio de Darboux irreduzível e mônico de d .*

Prova. *a) (i) \implies (ii):* Se $k[x, y]$ não é d -simples então existe I um d -ideal próprio de $k[x, y]$. Seja $p(x, y) = \sum_{i=0}^N p_i y^i$, $p \neq 0$ onde $p_i \in k[x]$, um polinômio não nulo pertencente a I e com o menor grau em y .

1º caso: $N > 0$. Pela divisão euclidiana (aplicada a $d(p)$ e p considerados como elementos em $k(x)[y]$), temos que existe $g \in k[x] \setminus \{0\}$ tal que

$$gd(p) = hp + r,$$

para certos $h, r \in k[x, y]$ satisfazendo

$$\text{grau}_y(r) < \text{grau}_y(p) \text{ ou } r = 0.$$

Sendo I um d -ideal, temos que $r \in I$, mas isto implica, pelo caráter minimal de p , que $r = 0$. Portanto,

$$gd(p) = hp.$$

Como $g \in k[x]$, o Lema 4.5 nos garante que existem $\lambda \in k[x, y]$ e $\tilde{p} \in k[x, y] \setminus k[x]$ tais que

$$d(\tilde{p}) = \lambda\tilde{p}.$$

Assim \tilde{p} é um polinômio de Darboux de d .

2º caso: $N = 0$, ou seja, $p \in I \cap k[x] \setminus \{0\}$. Daí temos

$$p \in I \cap k[x] \text{ e } d(p) \in I \text{ e } d(p) = \partial_x(p) \in k[x] \Rightarrow$$

$$p \in I \cap k[x] \text{ e } \partial_x(p) \in I \cap k[x] \Rightarrow$$

$$p \text{ gera um } \partial_x\text{-ideal não trivial de } k[x],$$

absurdo, pois ∂_x é uma derivação simples de $k[x]$.

(ii) \implies (iii) Decorre da proposição 4.4.

(iii) \implies (i) é imediata pelo Corolário 4.3.

b) i) Para cada $f \in k[x]$, digamos,

$$f = \sum_{i=0}^n a_i x^i,$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $a_i \in k$, $a_n \neq 0$, temos

$$d(f) = \sum_{i=0}^n d(a_i x^i) \stackrel{d \text{ é } k\text{-derivação}}{=} \sum_{i=1}^n a_i i x^{i-1} d(x) \stackrel{d|_{k[x]} = \partial_x}{=} \sum_{i=1}^n a_i i x^{i-1},$$

e portanto $\text{grau}_x d(f) = n - 1 < n = \text{grau}_x f$. Assim, não existe $\lambda \in k[x, y]$ tal que $d(f) = \lambda f$, ou seja, nenhum polinômio $f \in k[x]$ pode ser um polinômio de Darboux de d . Em outras palavras, todo polinômio de Darboux f de d satisfaz $\text{grau}_y f \geq 1$.

Provamos agora o ítem (ii) para o caso em que k é um corpo algebricamente fechado (que é o caso em que vamos utilizá-lo), mas a afirmação vale para qualquer corpo de característica zero.

Suponhamos que existam f_1 e $f_2 \in k[x, y]$, polinômios de Darboux de d irredutíveis e tais que $f_1 \neq cf_2$, qualquer que seja $c \in k^*$. Então os ideais $f_1k[x, y]$ e $f_2k[x, y]$ são distintos e, um vez sendo f_1 e f_2 irredutíveis, são também ideais primos de altura 1. Pela Proposição 2.10 o ideal de $k[x, y]$ gerado por f_1 e f_2 é um d -ideal. Seja P um primo mínimo de (f_1, f_2) . Pela Proposição 2.22 P é um d -ideal. Como $(f_1) \subset (f_1, f_2) \subseteq P$ e (f_1) é um ideal primo, então P é um ideal máximo de $k[x, y]$. Sendo k algebricamente fechado $P = (x - \alpha, y - \beta)$ com $\alpha, \beta \in k$ (Teorema 32 em [2]). Por outro lado $x - \alpha \in P$ e $d(x - \alpha) = d(x) - d(\alpha) = d(x) = 1 \notin P$, o que contradiz o fato de P ser um d -ideal. Portanto existe um único polinômio irredutível de Darboux, a menos de multiplicação por um fator de k^* . ■

Nos próximos resultados, dado $r \in \overline{k(x)}$, continuaremos a utilizar a notação r' para a derivada de r com respeito à única extensão da derivação $\partial/\partial x : k(x) \rightarrow k(x)$ para o fecho algébrico $\overline{k(x)}$ (veja Capítulo 2).

Teorema 4.7 *Seja d uma k -derivação de $k[x, y]$ com $d(x) = p(x, y)$ e $d(y) = q(x, y)$, e seja $f \in k[x, y]$ um polinômio de Darboux para d . Se f é irredutível então existe $r \in \overline{k(x)}$ tal que*

$$p(x, r)r' = q(x, r) \text{ e } f(x, r) = 0,$$

a saber, qualquer raiz em $\overline{k(x)}$ da equação $f(x, y) = 0$ (com coeficientes em $k(x)$).

Prova. Observe inicialmente que se existe um polinômio de Darboux f para d então, pelo Teorema 4.6, d não é simples e $\text{grau}_y f \geq 1$. Escrevemos

então

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^n g_i(x) y^i,$$

onde $n \geq 1$ e $g_i(x) \in k[x]$, para todo $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Olhando f como um elemento de $k(x)[y]$ e sendo $n = \text{grau}_y f \geq 1$, temos que f tem uma raiz em $\overline{k(x)}$, que vamos denotar por r :

$$0 = f(x, r) = \sum_{i=0}^n g_i(x) r^i.$$

Daí, aplicando a derivação $()'$ à igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\sum_{i=0}^n g_i(x) r^i \right)' \\ &= \sum_{i=0}^n (g_i(x) r^i)' \\ &= \sum_{i=0}^n g_i'(x) r^i + \sum_{i=0}^n i g_i(x) r^{i-1} r' \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, r) + r' \frac{\partial f}{\partial y}(x, r), \end{aligned} \tag{9}$$

Por outro lado, pela Proposição 2.7, sabemos que, sendo d uma k -derivação de $k[x, y]$, temos

$$\begin{aligned} d(f) &= d(x) \frac{\partial f}{\partial x} + d(y) \frac{\partial f}{\partial y} \\ &= p(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + q(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

Agora, como f é um polinômio de Darboux para d , digamos,

$$d(f) = \lambda f,$$

com $\lambda \in k[x, y] \setminus k$, temos

$$p(x, y) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + q(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = d(f) = \lambda(x, y) f(x, y),$$

e, escrevendo esta igualdade para $y = r$, temos (lembrando que $f(x, r) = 0$)

$$p(x, r) \frac{\partial f}{\partial x}(x, r) + q(x, r) \frac{\partial f}{\partial y}(x, r) = 0. \tag{10}$$

Como f é por hipótese irredutível em $k[x, y] = k[x][y]$ e como $f(x, r) = 0$, então f é o polinômio mínimo de r sobre $k(x)$. Ainda, como $\text{grau}_y f(x, y) \geq 1$ temos $\text{grau}_y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \geq 0$, e portanto $\frac{\partial f}{\partial y}(x, r) \neq 0$. Daí, de (10) obtemos

$$q(x, r) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, r)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, r)}p(x, r) \stackrel{(9)}{=} r'p(x, r). \quad \blacksquare$$

Teorema 4.8 *Seja d uma k -derivação de $k[x, y]$ com $d(x) = p(x, y)$ e $d(y) = q(x, y)$. Se $r \in \overline{k(x)}$ é uma solução da equação diferencial*

$$p(x, r)r' = q(x, r), \quad (11)$$

então seu polinômio minimal primitivo f em $k[x, y]$ é um polinômio de Darboux de d irredutível.

Prova. Como $f(x, y)$ é o polinômio minimal primitivo de r em $k[x, y]$, então $\text{grau}_y f \geq 1$. Defina $h \in k[x, y]$ por

$$h(x, y) = d(f(x, y)).$$

Afirmamos que $h(x, r) = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} h(x, r) &= d(f(x, y))(r) \\ &= p(x, r)\frac{\partial f}{\partial x}(x, r) + q(x, r)\frac{\partial f}{\partial y}(x, r) \stackrel{(11)}{=} \\ &= p(x, r)\frac{\partial f}{\partial x}(x, r) + p(x, r)r'\frac{\partial f}{\partial y}(x, r) \\ &= p(x, r) \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, r) + r'\frac{\partial f}{\partial y}(x, r) \right] \end{aligned}$$

Mas

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, r) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, r).r' = \frac{\partial}{\partial x} (f(x, r)) = \frac{\partial}{\partial x}(0) = 0,$$

e portanto

$$h(x, r) = p(x, r).0 = 0.$$

Como $f(x, y)$ é um polinômio minimal primitivo para r em $k[x, y]$ e $h(x, r) = 0$ concluímos que $h(x, y)$ deve ser um múltiplo de f em $k(x)[y]$:

$$d(f) = h = \Lambda f.$$

para algum $\Lambda = \Lambda(x, y) \in k(x)[y]$. Afirmamos que $\Lambda \in k[x][y]$, e portanto f é um polinômio de Darboux para d .

De fato, escrevendo Λ na forma

$$\Lambda = \frac{l(x)t(x, y)}{g(x)}, \quad (12)$$

onde $l(x), g(x) \in k[x]$ e $t(x, y) \in k[x, y]$, com $t(x, y)$ primitivo como polinômio na variável y , temos

$$l(x)t(x, y)f(x, y) = g(x)\Lambda(x, y)f(x, y) = g(x).d(f).$$

Como $t(x, y)$ e $f(x, y)$ são primitivos como polinômios em y , temos, pelo Lema de Gauss, que $t(x, y)f(x, y)$ também é primitivo e, como $l(x), g(x) \in k[x]$, obtemos

$$\begin{aligned} l(x) \stackrel{t(x,y)f(x,y) \text{ é primitivo}}{=} \text{cont}[l(x)t(x, y)f(x, y)] \\ = \text{cont}[g(x)d(f)] = g(x)\text{cont}(d(f)). \end{aligned}$$

Daí obtemos

$$\frac{l(x)}{g(x)} = \text{cont}(d(f)) \in k[x],$$

donde, por (12),

$$\Lambda = \frac{l(x)t(x, y)}{g(x)} \in k[x, y],$$

o que completa a prova. ■

Decorrem dos teoremas 4.7 e 4.8, os seguintes corolários:

Corolário 4.9 *Seja d uma k -derivadação de $k[x, y]$ com $d(x) = p(x, y)$ e $d(y) = q(x, y)$, isto é,*

$$d = p(x, y)\partial_x + q(x, y)\partial_y.$$

Então as seguintes condições são equivalentes:

- (i) Existe um polinômio de Darboux $f \in k[x, y]$ para d com $\text{grau}_y f \geq 1$.*
- (ii) Existe uma função racional $r \in \overline{k(x)}$ tal que $p(x, r)r' = q(x, r)$.*

Para os próximos capítulos, será útil destacarmos o próximo corolário:

Corolário 4.10 *Seja $d = \partial_x + q(x, y)\partial_y$ uma k -derivadação de $k[x, y]$, onde $q(x, y) \in k[x, y]$, então*

a) as seguintes condições são equivalentes:

- i) d não é simples em $k[x, y]$;*
- ii) Existe f polinômio irredutível de Darboux de d em $k[x, y]$*
- iii) Existe $r \in \overline{k(x)}$ tal que $r' = q(x, r)$.*

b) Se d não é simples então todo polinômio de Darboux f de d satisfaz $\text{grau}_y f \geq 1$ e existe um único polinômio de Darboux de d que é irredutível e mônico.

c) As soluções em $\overline{k(x)}$ da equação diferencial $z' = q(x, z)$ são exatamente as soluções (em $\overline{k(x)}$) da equação $f(x, z) = 0$.

Prova. Decorre dos Teoremas 4.6, 4.7 e 4.8. ■

5 SOBRE UMA CLASSE DE EQUAÇÕES DE RICCATI

Neste capítulo, consideramos uma equação diferencial de Riccati da forma

$$t' = t^2 - p(x), \quad (13)$$

onde $p = p(x)$ é um polinômio de $k[x]$. Nosso objetivo é saber decidir sobre a simplicidade das k -derivações $\partial_x + (y^2 - p(x))\partial_y$, onde $p(x) \in k[x]$ e que denotaremos por Δ_p :

$$\Delta_p = \partial_x + (y^2 - p(x))\partial_y,$$

ou ainda: para cada $p = p(x) \in k[x]$, Δ_p denotará a k -derivação de $k[x, y]$ induzida por

$$\begin{cases} \Delta_p(x) = 1 \\ \Delta_p(y) = y^2 - p(x) \end{cases}$$

Uma importante simplificação acontece no caso em que k é algebricamente fechado, a saber, as soluções algébricas são na verdade racionais.

Teorema 5.1 ([5], **Theorem 5.1**) *Se k é algebricamente fechado então, para cada $p(x) \in k[x]$, a equação (13) não admite solução em $\overline{k(x)} \setminus k(x)$. Em outras palavras, as soluções algébricas de (13), se existirem, são todas racionais.*

Prova. Suponha que existe $t \in \overline{k(x)} \setminus k(x)$ que é solução de (13).

Seja $f \in k(x)[y]$ o polinômio minimal para t sobre $k(x)$. Como $t \notin k(x)$, temos $\text{grau}_y f \geq 2$.

Seja K um corpo de fatoração de f sobre $k(x)$ e sejam t_1, \dots, t_n as n raízes de f em K . Como a característica de k é zero e f é irredutível em $k(x)[y]$,

temos que $t = t_1, \dots, t_n$ são todas distintas e

$$f = f(x, y) = y^n - \sigma_1 y^{n-1} + \sigma_2 y^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n, \quad (14)$$

onde $n \geq 2$ e σ_i denotam os polinômios simétricos em t_1, \dots, t_n .

Ainda, como a extensão $k(x) \subset K$ é algébrica, a derivação $\frac{d}{dx}$ de $k(x)$ pode ser estendida de maneira única a uma derivação de K (veja Teorema 2.16) que poderíamos continuar denotando por $()'$ ou por $\partial/\partial x$, mas que aqui, para simplificação de escrita, vamos denotar por d . Assim, a equação (13) se reescreve

$$d(t) = t^2 - p(x) \quad (15)$$

Afirmção 1: Se σ é um $k(x)$ -automorfismo de K , então $\sigma d \sigma^{-1}$ é uma derivação de K . De fato, dados $a, b \in K$, é claro que

$$(\sigma d \sigma^{-1})(a + b) = \sigma d \sigma^{-1}(a) + \sigma d \sigma^{-1}(b).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} (\sigma d \sigma^{-1})(ab) &= (\sigma d)(\sigma^{-1}(a)\sigma^{-1}(b)) \\ &= \sigma [d(\sigma^{-1}(a))\sigma^{-1}(b) + \sigma^{-1}(a)d(\sigma^{-1}(b))] \\ &= (\sigma d \sigma^{-1})(a)b + a(\sigma d \sigma^{-1})(b). \end{aligned}$$

Afirmção 2: Se σ é um $k(x)$ -automorfismo de K , então $\sigma d \sigma^{-1}|_{k(x)} = d|_{k(x)} = \partial/\partial x$, e portanto, pela unicidade da extensão de $\partial/\partial x$ a uma extensão algébrica, temos que $\sigma d \sigma^{-1} = d$, ou ainda, $\sigma d = d \sigma$.

De fato, dado $m \in k(x)$, temos, uma vez que σ é um $k(x)$ -automorfismo,

$$\sigma d \sigma^{-1}(m) = \sigma d(m) \stackrel{m \in k(x)}{=} \sigma \frac{\partial}{\partial x}(m) = \frac{\partial}{\partial x}(m).$$

Afirmção 3: Toda raiz t_i de f ($i = 1, \dots, n$) é também solução de (15).

De fato, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $t_i = \sigma(t)$ para algum $\sigma \in \text{Aut}_{k(x)}(K)$.

Daí,

$$\begin{aligned} d(t_i) &= d(\sigma(t)) \stackrel{\sigma d = d\sigma}{=} \sigma d(t) \stackrel{(15)}{=} \\ &= \sigma(t^2 - p(x)) = \sigma(t)^2 - \sigma(p(x)) \stackrel{\substack{\sigma|_{k(x)} = \text{identidade} \\ \sigma(t) = t_i}}{=} t_i^2 - p(x). \end{aligned}$$

Considere agora o discriminante de f , que denotamos por Δ . Como $f(x, y) = \prod_{i=1}^n (y - t_i)$, temos

$$\Delta = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i \neq j} (t_i - t_j) \in k(x)$$

Afirmação 4: $d(\Delta) = (-1)^{n(n-1)/2} \sum_{i \neq j} d(t_i - t_j) \prod_{m \neq k, (m,k) \neq (i,j)} (t_m - t_k)$.

A prova desta afirmação é feita por indução sobre n , e encontra-se no Apêndice (veja seção 7.1).

Afirmação 5: O coeficiente σ_1 de f (veja (14)) pode também ser dado por

$$\sigma_1 = \frac{d(\Delta)}{2(n-1)\Delta}.$$

De fato, a partir da Afirmação 4 podemos calcular a *derivada logarítmica* de Δ :

$$\begin{aligned} \frac{d(\Delta)}{\Delta} &\stackrel{\text{Afirm.4}}{=} \frac{(-1)^{n(n-1)/2} \sum_{i \neq j} d(t_i - t_j) \prod_{m \neq k, (m,k) \neq (i,j)} (t_m - t_k)}{(-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i \neq j} (t_i - t_j)} \\ &= \sum_{i \neq j} \frac{d(t_i - t_j)}{t_i - t_j} = \sum_{i \neq j} \frac{d(t_i) - d(t_j)}{t_i - t_j} \stackrel{\text{Afirm.3}}{=} \\ &= \sum_{i \neq j} \frac{t_i^2 - p(x) - t_j^2 + p(x)}{t_i - t_j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i \neq j} \frac{t_i^2 - t_j^2}{t_i - t_j} = \sum_{i \neq j} \frac{(t_i - t_j)(t_i + t_j)}{t_i - t_j} = \sum_{i \neq j} (t_i + t_j) \\
&= 2(n-1)(t_1 + t_2 + \dots + t_n) \stackrel{(14)}{=} 2(n-1)\sigma_1,
\end{aligned}$$

donde se obtém a expressão desejada.

Afirmiação 6: Como $\Delta \in k(x)$, podemos escrever $\Delta = \frac{h}{g}$, com $h, g \in k[x]$ e $\text{mdc}(h, g) = 1$. Daí segue que

$$\frac{d(\Delta)}{\Delta} = \frac{h'g - hg'}{hg}.$$

De fato,

$$d(\Delta) = \frac{h'g - hg'}{g^2},$$

e conseqüentemente,

$$\frac{d(\Delta)}{\Delta} = \frac{h'g - hg'}{g^2} \cdot \frac{g}{h} = \frac{h'g - hg'}{hg}.$$

Afirmiação 7: Sendo k algebricamente fechado, temos

$$h = m \prod_{i=1}^u (x - l_i)^{r_i} \quad \text{e} \quad g = b \prod_{i=1}^v (x - \xi_i)^{s_i}, \quad (16)$$

onde $m, b \in k^*$, $l_1, \dots, l_u, \xi_1, \dots, \xi_v \in k$. Afirmamos que

$$\sigma_1 = \sum_{\alpha \in R} \frac{\lambda_\alpha}{x - \alpha}, \quad (17)$$

onde $\lambda_\alpha \in \mathbb{Q}$ e $R = \{l_1, \dots, l_u, \xi_1, \dots, \xi_v\}$.

De fato, de 16 obtemos

$$h' = m \sum_{i=1}^u r_i (x - l_i)^{r_i-1} \prod_{j \in \{1, \dots, u\}, j \neq i} (x - l_j)^{r_j}$$

$$\begin{aligned}
&= m \sum_{i=1}^u r_i \frac{\prod_{j=1}^u (x - l_j)^{r_j}}{x - l_i} \\
&= m \prod_{j=1}^u (x - l_j)^{r_j} \sum_{i=1}^u r_i \frac{1}{x - l_i} \\
&= mh \sum_{i=1}^u r_i \frac{1}{x - l_i},
\end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{h'}{h} = \sum_{i=1}^u \frac{r_i}{x - l_i},$$

com $r_i \in \mathbb{N}^*$. Analogamente temos que

$$\frac{g'}{g} = \sum_{i=1}^v \frac{s_i}{(x - \xi_i)},$$

com $s_i \in \mathbb{N}^*$. Como

$$\begin{aligned}
\frac{d(\Delta)}{\Delta} &= \frac{h'g - hg'}{hg} = \frac{h'}{h} - \frac{g'}{g} \\
&= \sum_{i=1}^u \frac{r_i}{(x - l_i)} - \sum_{i=1}^v \frac{s_i}{(x - \xi_i)}
\end{aligned}$$

podemos escrever

$$\frac{d(\Delta)}{\Delta} = \sum_{\alpha \in R} \frac{\gamma_\alpha}{x - \alpha}$$

onde $R = \{l_1, \dots, l_u, \xi_1, \dots, \xi_v\}$ e $\gamma_\alpha \in \mathbb{Z}^*$.

Logo,

$$\sigma_1 \stackrel{\text{Afirm.5}}{=} \frac{d(\Delta)}{2(n-1)\Delta} \stackrel{\text{Afirm.6}}{=} \frac{1}{2(n-1)} \frac{h'g - hg'}{hg} = \sum_{\alpha \in R} \frac{\lambda_\alpha}{x - \alpha},$$

onde $\lambda_\alpha = \gamma_\alpha/2(n-1) \in \mathbb{Q}^*$, para cada $\alpha \in R$.

Afirmação 8: f é um polinômio de Darboux para a derivação

$$\Delta_p = \frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - p) \frac{\partial}{\partial y},$$

olhada como derivação de $k(x)[y]$.

De fato, como $f(x, y) \in k(x)[y]$, existem $m(x), n(x) \in k[x]$ e $f_1(x, y) \in k[x, y]$ primitivo tais que $f(x, y) = \frac{n(x)}{m(x)} f_1(x, y)$.

Como f é polinômio mínimo de t sobre $k(x)$, f_1 é polinômio minimal primitivo de t . Logo pela Proposição 4.8, f_1 é polinômio de Darboux de Δ_p , e portanto existe $\lambda \in k[x, y]$ tal que $\Delta_p(f_1) = \lambda f_1$. Decorre daí que

$$\begin{aligned} \Delta_p(f) &= \Delta_p\left(\frac{n}{m} f_1\right) = \Delta_p\left(\frac{n}{m}\right) f_1 + \frac{n}{m} \Delta_p(f_1) \\ &= \Delta_p\left(\frac{n}{m}\right) \left[\frac{m}{n} \left(\frac{n}{m} f_1\right)\right] + \frac{n}{m} \lambda f_1 \\ &= \left[\Delta_p\left(\frac{n}{m}\right) \frac{m}{n} + \lambda\right] \frac{n}{m} f_1 = \left[\Delta_p\left(\frac{n}{m}\right) \frac{m}{n} + \lambda\right] f. \end{aligned}$$

Logo f é um polinômio de Darboux para a derivação Δ_p .

Afirmção 9: Seja $\beta \in k(x)[y]$ tal que

$$\Delta_p(f) = \beta f. \quad (18)$$

Afirmamos que $\text{grau}_y \beta = 1$ e o coeficiente do seu termo em y é n .

De fato, da igualdade

$$\beta f = \Delta_p(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + (y^2 - p) \frac{\partial f}{\partial y},$$

e do fato que $\text{grau}_y \left(\frac{\partial f}{\partial x} + (y^2 - p) \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 1 + \text{grau}_y f$, concluímos que $\text{grau}_y \beta = 1$.

Além disso, comparando coeficientes e tendo em vista que $\text{grau}_y \frac{\partial f}{\partial x} \leq \text{grau}_y f$, temos que o coeficiente do termo líder em y de β é n . Portanto

$$\beta = ny + a, \text{ para algum } a \in k(x). \quad (19)$$

Passamos agora a estudar em detalhe o “termo constante” $a \in k(x)$ de (19)

De (14), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &\stackrel{\sigma_0=1}{=} \sum_{i=1}^n (-1)^i \sigma'_i y^{n-i}, \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (n-i) \sigma_i y^{n-i-1} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (n-i+1) \sigma_{i-1} y^{n-i}, \\
y^2 \frac{\partial f}{\partial y} &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (n-i+1) \sigma_{i-1} y^{n-i+2} = \sum_{i=-1}^{n-2} (-1)^{i+1} (n-i-1) \sigma_{i+1} y^{n-i} \\
-p \frac{\partial f}{\partial y} &= \sum_{i=1}^n (-1)^i (n-i+1) p \sigma_{i-1} y^{n-i}
\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} + (y^2 - p) \frac{\partial f}{\partial y} &= \sum_{i=1}^n (-1)^i \sigma'_i y^{n-i} + \sum_{i=-1}^{n-2} (-1)^{i+1} (n-i-1) \sigma_{i+1} y^{n-i} \\
&\quad + \sum_{i=1}^n (-1)^i (n-i+1) p \sigma_{i-1} y^{n-i} \\
&= ny^{n+1} - (n-1) \sigma_1 y^n \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^i [\sigma'_i - (n-i-1) \sigma_{i+1} + (n-i+1) p \sigma_{i-1}] y^{n-i} \\
&\quad + (-1)^{n-1} (\sigma'_{n-1} + 2p \sigma_{n-2}) y + (-1)^n (\sigma'_n + p \sigma_{n-1}) \quad (20)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\beta f &= (ny + a) f = (ny + a) \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_i y^{n-i} = \\
&= ny^{n+1} + (n(-1)^1 \sigma_1 + a(-1)^0 \sigma_0) y^n \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-1} ((-1)^{i+1} n \sigma_{i+1} + (-1)^i a \sigma_i) y^{n-i} + (-1)^n a \sigma_n \\
&= ny^{n+1} + (a - n \sigma_1) y^n \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (-n \sigma_{i+1} + a \sigma_i) y^{n-i} + (-1)^n a \sigma_n. \quad (21)
\end{aligned}$$

Comparando os coeficientes de y^i nas igualdades (20) e (21) deduzimos que

$$-(n-1)\sigma_1 = (a - n\sigma_1),$$

ou seja,

$$\sigma_1 = a;$$

para $1 \leq i \leq n-1$, deduzimos que

$$(-1)^i(\sigma'_i - (n-i-1)\sigma_{i+1} + (n-i+1)p\sigma_{i-1}) = (-1)^i(-n\sigma_{i+1} + a\sigma_i),$$

ou ainda,

$$-(n-i-1-n)\sigma_{i+1} = -\sigma'_i - (n-i+1)p\sigma_{i-1} + a\sigma_i,$$

o que nos leva a

$$(i+1)\sigma_{i+1} = a\sigma_i - \sigma'_i - (n-i+1)p\sigma_{i-1}.$$

Já para $i = n$, obtemos

$$(-1)^n(\sigma'_n + p\sigma_{n-1}) = (-1)^n a\sigma_n,$$

o que nos leva a

$$\sigma'_n + p\sigma_{n-1} = a\sigma_n,$$

e assim obtemos o seguinte sistema de $n+1$ equações:

$$(\Sigma) \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = a \\ 2\sigma_2 = a\sigma_1 - \sigma'_1 - np \\ 3\sigma_3 = a\sigma_2 - \sigma'_2 - (n-1)p\sigma_1 \\ \dots \\ i\sigma_i = a\sigma_{i-1} - \sigma'_{i-1} - (n+2-i)p\sigma_{i-2} \\ \dots \\ n\sigma_n = a\sigma_{n-1} - \sigma'_{n-1} - 2p\sigma_{n-2} \\ 0 = a\sigma_n - \sigma'_n - p\sigma_{n-1} \end{array} \right. \quad (22)$$

Note que os coeficientes σ_i de f podem ser também pensados como uma seqüência de funções racionais $(\sigma_i)_{i \in \mathbb{N}}$, definidas indutivamente por

$$\sigma_0 = 1, \quad \sigma_1 = a$$

e, para $2 \leq i \leq n$,

$$i\sigma_i = a\sigma_{i-1} - \sigma'_{i-1} - (n+2-i)p\sigma_{i-2} \quad (23)$$

e

$$\sigma_i = 0,$$

para $i > n$. Daí, após feitas todas as substituições, a última equação de (Σ) se torna uma equação diferencial para a .

Afirmção 10: Seja α um dos pólos de $a = \sigma_1$ (veja (17)). Como $p(x) \in k[x]$, obviamente α não é pólo de $p(x)$. Afirmamos no entanto que, para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

i) α é um pólo de σ_i com ordem no máximo i ;

ii) se denotarmos por $\bar{\sigma}_i$ a parte de σ_i que envolve o pólo α de ordem i então

$$i!\bar{\sigma}_i = \frac{\lambda_\alpha(\lambda_\alpha + 1)\dots(\lambda_\alpha + i - 1)}{(x - \alpha)^i}, \quad (24)$$

A prova desta afirmação é feita por indução sobre i , e encontra-se no Apêndice (veja seção 7.2).

Afirmção 11: Para cada pólo α de σ_1 , o racional λ_α definido em (17) satisfaz

$$\lambda_\alpha \in \{-1, -2, \dots, -n\},$$

e portanto a fórmula (24) vale também para $i > n$.

De fato, da última equação de (22) temos que

$$\sigma_{n+1} = 0 = a\sigma_n - \sigma'_n - p\sigma_{n-1}.$$

Pela prova da Afirmação 10, α é um pólo de $a\sigma_n = \sigma_1\sigma_n$ e de $-\sigma'_n$ de ordem no máximo $n + 1$ e é de ordem no máximo $n - 1$ como pólo de σ_{n-1} ; daí concluímos que, ainda denotando por $\overline{\sigma_{n+1}}$ a parte de σ_{n+1} que envolve o pólo α de ordem $n + 1$, obtemos

$$0 = \overline{\sigma_{n+1}} = \overline{a\sigma_n} - \overline{\sigma'_n}.$$

De (24) obtemos

$$\overline{\sigma'_n} = -\frac{1}{n!} \frac{n\lambda_\alpha(\lambda_\alpha + 1)\dots(\lambda_\alpha + n - 1)}{(x - \alpha)^{n+1}},$$

e portanto

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{a\sigma_n} - \overline{\sigma'_n} \\ &= \frac{\lambda_\alpha}{x - \alpha} \frac{1}{n!} \frac{\lambda_\alpha(\lambda_\alpha + 1)\dots(\lambda_\alpha + n - 1)}{(x - \alpha)^n} + \frac{1}{n!} \frac{n(\lambda_\alpha(\lambda_\alpha + 1)\dots(\lambda_\alpha + n - 1))}{(x - \alpha)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{n!} \frac{\lambda_\alpha(\lambda_\alpha + 1)\dots(\lambda_\alpha + n - 1)(\lambda_\alpha + n)}{(x - \alpha)^{n+1}}; \end{aligned}$$

com isso, obtemos a seguinte equação para cada λ_α :

$$\lambda_\alpha(\lambda_\alpha + 1)\dots(\lambda_\alpha + n) = 0,$$

o que nos dá $\lambda_\alpha \in \{0, -1, -2, \dots, -n\}$; ainda, como α é um pólo σ_1 temos $\lambda_\alpha \neq 0$. Isto completa prova da Afirmação 11.

Dividimos agora a prova em dois casos:

1° caso: $p \neq 0$.

Neste caso, *grau* $p \geq 0$. Queremos estimar os graus e certos coeficientes das funções racionais $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. (Por *grau* de uma função racional queremos significar a diferença

$$(\textit{grau do numerador}) - (\textit{grau do denominador}).)$$

Nesta etapa, p está fortemente envolvido, conforme nos mostra a afirmação seguir:

Afirmação 12: Se $\delta = \text{grau}(p)$ então, para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \text{grau}(\sigma_{2i}) &= i\delta \quad \text{enquanto } 2i \leq n \\ \text{grau}(\sigma_{2i+1}) &\leq i\delta - 1. \end{aligned}$$

Esta afirmação está provada no Apêndice (veja seção 7.3).

Denotemos por \widehat{p} o coeficiente líder de p e, para cada i , por $\widehat{\sigma}_{2i}$ o coeficiente em σ_{2i} do termo de grau $i\delta$, e por $\widehat{\sigma}_{2i+1}$ o coeficiente em σ_{2i+1} do termo de grau $i\delta - 1$ (que pode ser nulo, pela Afirmção 12). É claro que $\widehat{\sigma}_j = 0$ se $j > n$.

Seja Λ o inteiro não negativo dado por

$$\Lambda = - \sum_{\alpha \in R} \lambda_\alpha.$$

Obtemos então as seguintes relações envolvendo os $\widehat{\sigma}_i$:

$$\widehat{\sigma}_1 = -\Lambda, \tag{25}$$

pois $\sigma_1 = \sum_{\alpha \in R} \frac{\lambda_\alpha}{x - \alpha}$. Ainda, por (23), obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\widehat{\sigma}_2 = -n\widehat{p}, \\ 3\widehat{\sigma}_3 = \widehat{a}\widehat{\sigma}_2 - \widehat{\sigma}'_2 - (n-1)\widehat{p}\widehat{\sigma}_1, \\ \dots \\ (2i)\widehat{\sigma}_{2i} = -(n+2-2i)\widehat{p}\widehat{\sigma}_{2i-2}, \text{ enquanto } 2i \leq n \\ (2i+1)\widehat{\sigma}_{2i+1} = \widehat{a}\widehat{\sigma}_{2i} - \widehat{\sigma}'_{2i} - (n-2i+1)\widehat{p}\widehat{\sigma}_{2i-1}, \\ \text{enquanto } 2i+1 \leq n \\ \dots \end{array} \right. \tag{26}$$

Observação: As fórmulas acima valem também para $\widehat{\sigma}_{n+1}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} (n+1)\widehat{\sigma}_{n+1} = -\widehat{p}\widehat{\sigma}_{n-1}, \text{ se } n \text{ for ímpar} \\ (n+1)\widehat{\sigma}_{n+1} = \widehat{a}\widehat{\sigma}_n - \widehat{\sigma}'_n - \widehat{p}\widehat{\sigma}_{n-1}, \text{ se } n \text{ for par} \end{array} \right. \tag{27}$$

De fato:

- se n é par, digamos, $n = 2s$, então

$$\widehat{\sigma}_{2s+1} = \widehat{\sigma}_{n+1} = 0 \stackrel{(22)}{=} a\widehat{\sigma}_{2s} - \widehat{\sigma}'_{2s} - \widehat{p}\widehat{\sigma}_{2s-1},$$

e portanto vale, para $n = 2s$,

$$(n+1)\widehat{\sigma}_{n+1} = a\widehat{\sigma}_n - \widehat{\sigma}'_n - \widehat{p}\widehat{\sigma}_{n-1};$$

- se n é ímpar, digamos, $n = 2s + 1$, então

$$\widehat{\sigma}_{2s+2} = \widehat{\sigma}_{n+1} = 0 \stackrel{(22)}{=} -\widehat{p}\widehat{\sigma}_{2s},$$

e portanto vale também para $n = 2s + 1$,

$$(n+1)\widehat{\sigma}_{n+1} = -\widehat{p}\widehat{\sigma}_{n-1}.$$

Afirmção 13: Para todo $s \in \mathbb{N}$ tem-se

$$\widehat{\sigma}_{2s} = (-1)^s \widehat{p}^s M_{2s}, \quad \text{enquanto } 2s \leq n+1 \quad (28)$$

e

$$\widehat{\sigma}_{2s+1} = (-1)^{s+1} \widehat{p}^s M_{2s+1}, \quad \text{enquanto } 2s+1 \leq n+1, \quad (29)$$

onde M_i são racionais definidos indutivamente por:

$$M_0 = 1, \quad M_1 = \Lambda \quad (30)$$

e, para $s \geq 1$,

$$M_{2s} = \frac{n+2-2s}{2s} M_{2(s-1)}, \quad (31)$$

e

$$M_{2s+1} = \frac{1}{2s+1} [(\Lambda + s\delta)M_{2s} + (n+1-2s)M_{2s-1}]. \quad (32)$$

(Note que os racionais M_{2s} são não negativos enquanto $2s \leq n+2$ e os M_{2s+1} são não negativos enquanto $2s \leq n+1$).

A prova desta afirmação encontra-se no Apêndice (veja seção 7.4).

Afirmção 14: n é par.

Se n é ímpar, digamos, $n = 2s + 1$, temos:

$$0 = \widehat{\sigma}_{n+1} = \widehat{\sigma}_{2s+2} = \widehat{\sigma}_{2(s+1)} \stackrel{(28)}{=} (-1)^{s+1} \widehat{p}^{s+1} M_{2(s+1)} = (-1)^{s+1} \widehat{p}^{s+1} M_{n+1},$$

portanto $M_{2(s+1)} = M_{n+1} = 0$. Daí segue que

$$0 = M_{2(s+1)} \stackrel{(31)}{=} \frac{n+2-2(s+1)}{2(s+1)} M_{2s},$$

o que implica

$$M_{2s} = 0,$$

e conseqüentemente,

$$\widehat{\sigma}_{2s} \stackrel{(28)}{=} (-1)^s \widehat{p}^s M_{2s} = 0,$$

o que é um absurdo, pois $p \neq 0$ e, pela Afirmação 12, $\text{grau } \sigma_{2s} = s \times \text{grau}(p)$, portanto $\widehat{\sigma}_{2s} \neq 0$.

Escrevamos então $n = 2s$; como $\sigma_{n+1} = 0$, temos, por (29)

$$0 = M_{n+1} = M_{2s+1}.$$

Deste modo,

$$0 = M_{2s+1} \stackrel{(32)}{=} \frac{1}{2s+1} [(\Lambda + s\delta)M_{2s} + (n+1-2s)M_{2s-1}],$$

como $n = 2s$

$$(\Lambda + s\delta)M_n + M_{n-1} = 0.$$

Como $M_i \geq 0$, para todo $i \leq n+1$ e $M_n \neq 0$, temos que $(\Lambda + s\delta)M_n + M_{n-1} = 0$ implica $\Lambda + s\delta = 0$ e $M_{n-1} = 0$.

Mas $\Lambda \geq 0$, $s > 0$ e $\delta \geq 0$, portanto $\Lambda = \delta = 0$.

Concluimos: se a equação diferencial (13) tem solução $t \in \overline{k(x)} \setminus k(x)$ e $p \neq 0$ então devemos ter, por (17),

$$\sigma_1 = \Lambda = 0 \quad (33)$$

e

$$\text{grau } p = \delta = 0, \quad (34)$$

ou seja, p é um polinômio constante e o coeficiente σ_1 de f é igual a zero. Além disso f teria grau par $n = 2s$.

Afirmção 15: Para todo $i \in \mathbb{N}$,

$$\sigma_{2i+1} = 0 \quad \text{e, enquanto } 2i \leq n, \quad \sigma_{2i} = (-1)^i \binom{s}{i} p^i;$$

em particular σ_{2i} é constante, pois p é constante.

Esta afirmação está provada no Apêndice (veja seção 7.5).

Logo

$$f = y^{2s} + (-1)^1 \binom{s}{1} p^1 y^{2(s-1)} + \dots + (-1)^{s-1} \binom{s}{s-1} p^{s-1} y^2 + (-1)^s \binom{s}{s} p^s = (y^2 - p)^s.$$

Como f foi suposto irredutível, devemos ter $s = 1$, ou seja,

$$f = y^2 - p \in k[y].$$

Mas $p \in k$ e k é por hipótese algebricamente fechado, então f não tem grau 2, absurdo.

Portanto, acabamos de provar que a equação diferencial (13), quando o polinômio p é não nulo, não admite solução algébrica que não seja função racional.

2º caso: $p = 0$.

Aqui reescrevemos

$$\sigma_1 = \sum_{\alpha \in R} \frac{\lambda_\alpha}{(x - \alpha)},$$

na forma

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^m \frac{-1}{(x - \alpha_i)},$$

levando em conta que o conjunto R é finito e que $\lambda_\alpha \in \{-1, -2, \dots, -n\}$, para cada α , onde $m = -\sum_{i \in j} \lambda_{\alpha_i}$ (podendo acontecer $\alpha_i = \alpha_j$ com $i \neq j$).

Afirmiação 16: Para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, tem-se

$$\sigma_j = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq m} \frac{(-1)^j}{(x - \alpha_{i_1})(x - \alpha_{i_2}) \dots (x - \alpha_{i_j})}$$

A prova desta afirmação encontra-se no Apêndice (veja seção 7.6).

Definimos agora

$$g(x, y) = ((x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_m)) f(x, y).$$

Como $f = f(x, y) = y^n - \sigma_1 y^{n-1} + \sigma_2 y^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n$, pela Afirmação 16, é claro que $g(x, y) \in k[x, y]$.

Como $t \in \overline{k(x)} \setminus k(x)$ é tal que $f(x, t) = 0$, temos

$$g(x, t) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_m) f(x, t) = 0$$

Como $g(x, y) \in k[x, y] \subseteq k(y)[x]$ e $g(x, y) \neq 0$, então g tem somente um número finito de raízes em $k(y)$, em particular um número finito em k . Sendo k infinito, existe $\alpha \in k$ tal que $g(\alpha, y) \neq 0$. Por outro lado, $g(x, t) = 0$, implica que $g(\alpha, t) = 0$, logo t é raiz de um polinômio não nulo $g(\alpha, y)$ de $k[y]$, portanto t é algébrico sobre k . Sendo k algebricamente fechado temos que $t \in k$, o que é um absurdo, pois por hipótese $t \in \overline{k(x)} \setminus k(x)$.

Isto completa a prova do teorema. ■

6 SIMPLICIDADE DAS k -DERIVAÇÕES

$$\partial_x + (y^2 - p(x))\partial_y$$

Neste capítulo, discutiremos a simplicidade das k -derivações de $k[x, y]$

$$\Delta_p = \partial_x + (y^2 - p(x))\partial_y$$

definidas no capítulo anterior. *Estaremos em todo o capítulo supondo que k é algebricamente fechado, apesar de os resultados serem também válidos para quaisquer corpos de característica zero.*

Nas próximas duas proposições analisamos os polinômios de Darboux de Δ_p que satisfazem $\text{grau}_y f = 1$. Antes observamos que, como os fatores irredutíveis de um polinômio de Darboux são também polinômios de Darboux (veja Proposição 4.4), podemos supor f irredutível em $k[x, y]$.

Proposição 6.1 *Seja f um polinômio de Darboux irredutível de Δ_p . Suponhamos que $\text{grau}_y f = 1$, digamos, $f = uy + v$, onde $u, v \in k[x]$, $u \neq 0$ e $\text{mdc}(u, v) = 1$. Seja $\lambda \in k[x, y]$ tal que*

$$\Delta_p(f) = \lambda f,$$

então

- a) $\lambda = y + s$ para algum $s \in k[x]$;
- b) $\text{grau } p = 2 \text{ grau } s$ (talvez ambos iguais a $-\infty$).

Prova. a) Desenvolvendo a igualdade $\lambda f = \Delta_p(f)$ temos

$$\begin{aligned} \lambda.(uy + v) &= \Delta_p(uy + v) = \Delta_p(uy) + \Delta_p(v) \\ &= \Delta_p(u)y + u\Delta_p(y) + \Delta_p(v) \stackrel{u, v \in k[x]}{=} \\ &= u'y + u(y^2 - p) + v' \\ &= uy^2 + u'y + v' - pu, \end{aligned} \tag{35}$$

o que implica, comparando os graus em y , que $\lambda = y + s$ para algum $s \in k[x]$.

b) Observe que sendo $\lambda = y + s$, temos

$$\lambda f = (y + s)(uy + v) = uy^2 + (su + v)y + sv. \quad (36)$$

Comparando coeficientes em y de (35) e (36) obtemos

$$su = u' - v \quad \text{e} \quad sv = v' - pu. \quad (37)$$

Isolando v na primeira igualdade em (37) e substituindo na segunda igualdade, obtemos

$$\begin{aligned} v &= u' - su \Rightarrow \\ 0 &= v' - pu - sv \\ 0 &= (u' - su)' - pu - s(u' - su) \\ 0 &= u'' - s'u - su' - pu - su' + s^2u. \end{aligned} \quad (38)$$

Das igualdades em (37), notamos que $p = 0$ se e só se $s = 0$, e portanto vale, neste caso, da igualdade em (38) obtemos

$$\text{grau } p = 2 \text{ grau } s.$$

Agora suponhamos que $p \neq 0$ e $s \neq 0$. Então, de (37)

$$su + v = u' \Rightarrow \text{grau } v = \text{grau } s + \text{grau } u$$

e

$$sv = v' - pu \Rightarrow \text{grau } s + \text{grau } v = \text{grau } p + \text{grau } u.$$

Das duas implicações acima obtemos

$$\text{grau } s + \text{grau } s + \text{grau } u = \text{grau } p + \text{grau } u.$$

Como $u \neq 0$, obtemos

$$\text{grau } p = 2 \text{ grau } s,$$

o que completa a prova. ■

Proposição 6.2 *Seja f um polinômio irreduzível em $k[x, y]$ tal que $\text{grau}_y f = 1$, digamos, $f = uy + v \in k[x, y]$, com $u, v \in k[x]$, $u \neq 0$ e $\text{mdc}(u, v) = 1$. Seja $r = -v/u \in k(x)$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) f é um polinômio de Darboux para Δ_p ;
- (ii) $r' = r^2 - p(x)$.

Prova. (i) \Rightarrow (ii) Decorre do Corolário 4.10.

(ii) \Rightarrow (i) É imediato do Teorema 4.8 e da unicidade do polinômio irreduzível de Darboux de Δ_p (Teorema 4.6). ■

O teorema a seguir nos auxiliará no principal resultado deste trabalho, que é o teorema 6.4.

Teorema 6.3 *Se a derivação Δ_p não é simples sobre $k[x, y]$, então existe um único polinômio irreduzível de Darboux $f \in k[x, y]$ de Δ_p . Além disso $\text{grau}_y f = 1$.*

Prova. Por hipótese Δ_p não é simples. Pelo Teorema 4.6 existe e é único $f(x, y) \in k[x, y]$ polinômio irreduzível de Darboux de Δ_p . Além disso $\text{grau}_y f \geq 1$. Seja $r \in \overline{k(x)}$ uma raiz de $f(x, y) \in \overline{k(x)}[y]$. Pelo Corolário 4.10 temos

$$r' = r^2 - p.$$

Sendo assim, r é uma solução algébrica da equação diferencial

$$r' = r^2 - p.$$

Pelo Teorema 5.1, esta solução é racional, isto é, $r \in k(x)$.

Como $r \in k(x)$ e é raiz do polinômio irreduzível $f(x, y)$, então $\text{grau}_y f = 1$. Se $r = 0$ então $p = 0$; daí Δ_p não é simples, pois $f = y$ é polinômio de Darboux de Δ_p . Se $r \neq 0$, existem $u, v \in k[x]$, $u \neq 0$ e $\text{mdc}(u, v) = 1$ tais que $r = -\frac{v}{u}$, pela Proposição 6.2 temos $f(x, y) = uy + v$ é um polinômio de Darboux de Δ_p . ■

Teorema 6.4 *Se p é um polinômio não nulo e de grau ímpar, então Δ_p é uma derivação simples.*

Prova. Suponhamos que Δ_p não seja simples. Pelo Teorema 6.3, existe um polinômio de Darboux f para Δ_p tal que $\text{grau}_y f = 1$.

Pela Proposição 6.1, se λ denota o autovalor de f então

$$\lambda = y + s,$$

para algum $s \in k[x]$ e $\text{grau}(p) = 2 \text{grau}(s)$. Então $\text{grau}(p)$ é um número par, o que completa a prova. ■

No entanto algumas derivações Δ_p com $\text{grau}(p)$ par são também simples:

Proposição 6.5 *Toda derivação $d : k[x, y] \rightarrow k[x, y]$ da forma*

$$d = \frac{\partial}{\partial x} + (y^2 \pm x^n) \frac{\partial}{\partial y}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

é simples.

Prova. Se n é ímpar então d é simples, pelo teorema acima.

Suponhamos então que $n = 2m$, com $m \in \mathbb{N}^*$, e que d não é simples. Então pelo Teorema 6.3 existe f um polinômio de Darboux de d da forma

$$f = uy + v,$$

onde $u, v \in k[x]$ e $u \neq 0$. Pela Proposição 6.1 temos que se λ denota o autovalor de f então $\lambda = y + s$ para algum $s \in k[x]$. Além disso, necessariamente $n = 2\text{grau } s$ e por (38) temos

$$0 = u'' - s'u - 2su' + s^2u - pu = u'' - s'u - 2su' + (s^2 - p)u. \quad (39)$$

Como $p = \pm x^{2m}$, temos que $\text{grau } s = m$. É fácil ver que $\text{grau } u''$, $\text{grau } s'u$, $\text{grau } 2su'$ são todos estritamente menores do que $\text{grau } s + \text{grau } u = m + \text{grau } u$; concluímos então que os graus maiores ou iguais do que $m + \text{grau } u$ estão todos envolvidos exclusivamente na parcela $(s^2 - p)u$ e devem então se anular. Ou ainda, como $u \neq 0$, que os coeficientes de grau maior ou igual do que m em $s^2 - p$ devem todos se anular.

Como $s \neq 0$, pois $2 \text{ grau } s = n \geq 1$, podemos escrever

$$s = s_mx^m + \dots + s_1x + s_0 = \sum_{k=0}^m s_kx^k,$$

onde $s_0, \dots, s_m \in k$ e $s_m \neq 0$, temos

$$s^2 - p = \left(\sum_{k=0}^{2m} \sum_{i+j=k} s_i s_j x^k \right) \mp x^{2m}.$$

Como os coeficientes dos termos de grau maior ou igual do que m , de $s^2 - p$ são nulos obtemos

$$s_m^2 \mp 1 = 0 \quad (40)$$

e, para $k \in \{m, m+1, \dots, 2m-1\}$,

$$\sum_{i+j=k} s_i s_j = 0,$$

Como k é algebricamente fechado, um tal s_m existe e é não nulo. Por indução decrescente vamos obter

$$s_{m-1} = s_{m-2} = \dots = s_1 = s_0 = 0.$$

Segue daí que $s = s_m x^m$ e (39) se reescreve neste caso na forma

$$\begin{aligned} 0 &= u'' - m s_m x^{m-1} u - 2 s_m x^m u' + (s_m^2 x^{2m} \mp x^{2m}) u \\ &\stackrel{(40)}{=} u'' - m s_m x^{m-1} u - 2 s_m x^m u'. \end{aligned} \quad (41)$$

Sejam l coeficiente líder de u e $t = \text{grau } u$. Como $u \neq 0$, temos $t \geq 1$. Se $t = 0$ então $u \in k$ e em (41) temos

$$0 = -m s_m x^{m-1} u,$$

mas m, s_m, u não são nulos, absurdo. Segue então

$$\text{grau } u'' < \text{grau}(m s_m x^{m-1} u) = \text{grau}(2 s_m x^m u'),$$

portanto o coeficiente do termo de maior grau em (41) é

$$-m s_m l - 2 s_m l t = -s_m l (m + 2t),$$

que deve então se anular. Como $s_m \neq 0$ e $l \neq 0$, segue que

$$m + 2t = 0,$$

que é uma contradição, pois $t \geq 0$ e $m > 0$.

Portanto, não existe polinômio de Darboux para d , ou seja, d é simples, como queríamos demonstrar. ■

Proposição 6.6 *Toda derivação d de $k[x, y]$ da forma*

$$d = \frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - x^{2m} + m x^{m-1}) \frac{\partial}{\partial y}, \quad m \in \mathbb{N}^*.$$

não é simples e seu polinômio irredutível de Darboux é $y - x^m$.

Prova. Note que

$$\begin{aligned} d(y - x^m) &= \frac{\partial}{\partial x}(y - x^m) + (y^2 - x^{2m} + m x^{m-1}) \frac{\partial}{\partial y}(y - x^m) \\ &= -m x^{m-1} + y^2 - x^{2m} + m x^{m-1} \\ &= y^2 - x^{2m} = (y + x^m)(y - x^m), \end{aligned}$$

e portanto $f = y - x^m$ é polinômio de Darboux de d e $y + x^m$ é seu autovalor. ■

Observação 6.7 *Na demonstração acima, chegamos ao polinômio de Darboux $y - x^m$ com o seguinte raciocínio: pelo Teorema 6.3, se d não for simples então existe um polinômio de Darboux de grau 1 em y . Ainda, se isto acontecer, pela Proposição 6.1, temos que se λ denota o autovalor de f então $\lambda = y + s$ para algum $s \in k[x]$.*

Inicialmente supondo que existe um polinômio $f = uy + v$, com $u, v \in k[x]$, $u \neq 0$ tal que $d(f) = \lambda f$. Como na prova da Proposição 6.5, chegaremos a

$$u'' - s'u - 2su' + s^2u - (x^{2m} - mx^{m-1})u = 0. \quad (42)$$

Seguindo com a mesma idéia da prova proposição 6.5, obteremos $m =$ grau s , digamos,

$$s = \sum_{k=0}^m s_k x^k,$$

donde

$$s^2 = \sum_{k=0}^{2m} \sum_{i+j=k} s_i s_j x^k,$$

e substituindo na expressão (42), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= u'' - s'u - 2su' + u \sum_{k=0}^{2m} \sum_{i+j=k} s_i s_j x^k - (x^{2m} - mx^{m-1})u \\ &= u'' - s'u - 2su' \\ &\quad + u \left[(s_m^2 - 1)x^{2m} + \sum_{k=m}^{2m-1} \sum_{i+j=k} s_i s_j x^k + \left(m + \sum_{i+j=m-1} s_i s_j \right) x^{m-1} + \sum_{k=0}^{m-2} \sum_{i+j=k} s_i s_j x^k \right] \end{aligned}$$

Como grau u'' , grau $s'u$, grau $2su'$ são todos estritamente menores do que $m +$ grau u , concluímos que os coeficientes dos termos de grau maior ou igual a $m +$ grau u são todos provenientes exclusivamente da expressão entre colchetes.

Assim, obteremos

$$s_m^2 = 1,$$

$$\sum_{i+j=k} s_i s_j = 0, \text{ para } k \in \{m, \dots, 2m-1\},$$

o que nos dá

$$s_m = \pm 1,$$

e, por indução decrescente, vamos obter

$$s_{m-1} = s_{m-2} = \dots = s_1 = s_0 = 0.$$

Portanto $s = \pm x^m$ e (42) fica

$$\begin{aligned} 0 &= u'' - s_m m x^{m-1} u - 2s_m x^m u' + x^{2m} u - x^{2m} u + m x^{m-1} u \\ &= u'' - s_m m x^{m-1} u - 2s_m x^m u' + m x^{m-1} u \\ &= u'' + (-s_m m + m) x^{m-1} u - 2s_m x^m u' \end{aligned}$$

Claramente a expressão acima envolve termos de grau no máximo igual a $m-1 + \text{grau } u$ (lembre que $u \neq 0$). Assim, se l denota o coeficiente líder de u e $t = \text{grau } u$ então, olhando o coeficiente do termo de grau $m-1 + \text{grau } u$, obtemos

$$(-s_m m + m)l - 2s_m t l = 0,$$

e como $l \neq 0$, chegamos a

$$-s_m m + m - 2s_m t = 0. \tag{43}$$

Daí, se $s_m = -1$, obtemos

$$m + m + 2t = 0,$$

o que é um absurdo, pois $m > 0$ e $t \geq 0$. Concluimos então que $s_m = 1$, $s = x^m$ e, de (43) que

$$0 = -m + m - 2t = -2t,$$

o que implica $t = 0$ e conseqüentemente u é constante.

Agora por (37) temos $v = -us$, portanto,

$$f = uy + v = uy - ux^m$$

com $u \in k^*$. Logo, módulo produto por um elemento de k^* , $y - x^m$ é o polinômio irredutível de Darboux de Δ_p de $k[x, y]$. Pela Proposição 6.1 a) seu autovalor é $\lambda = y + s$, isto é, $y + x^m$.

7 APÊNDICE

7.1 Prova da Afirmação 4 do Teorema 5.1:

Se $f(x, y) = \prod_{i=1}^n (y - t_i)$ então seu discriminante

$$\Delta = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i \neq j} (t_i - t_j) \in k(x)$$

satisfaz a igualdade

$$d(\Delta) = (-1)^{n(n-1)/2} \sum_{i \neq j} d(t_i - t_j) \prod_{m \neq k, (m,k) \neq (i,j)} (t_m - t_k).$$

Prova. Como $d(\Delta) = (-1)^{n(n-1)/2} d\left(\prod_{i \neq j} (t_i - t_j)\right)$, não precisamos nos preocupar com o fator $(-1)^{n(n-1)/2}$. Provaremos por indução sobre n que

$$d\left(\prod_{i \neq j} (t_i - t_j)\right) = \sum_{i \neq j} d(t_i - t_j) \prod_{m \neq k, (m,k) \neq (i,j)} (t_m - t_k).$$

Para $n = 2$ temos:

$$\begin{aligned} d\left(\prod_{i,j \in \{1,2\}, i \neq j} (t_i - t_j)\right) &= d[(t_1 - t_2)(t_2 - t_1)] \\ &= d(t_1 - t_2)(t_2 - t_1) + (t_1 - t_2)d(t_2 - t_1) \\ &= \sum_{i,j \in \{1,2\}, i \neq j} d(t_i - t_j) \prod_{m \neq k, (m,k) \neq (i,j)} (t_m - t_k) \end{aligned}$$

Suponhamos que para $n \geq 2$ vale

$$d\left(\prod_{i,j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j} (t_i - t_j)\right) = \sum_{i,j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j} d(t_i - t_j) \prod_{m,k \in \{1, \dots, n\}, m \neq k, (m,k) \neq (i,j)} (t_m - t_k).$$

Daí:

$$\begin{aligned}
& d \left(\prod_{i,j \in \{1, \dots, n, n+1\}, i \neq j} (t_i - t_j) \right) \\
&= d \left(\prod_{i,j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j} (t_i - t_j) \prod_{r \in \{1, \dots, n\}} (t_{n+1} - t_r) \prod_{s \in \{1, \dots, n\}} (t_s - t_{n+1}) \right) \\
&= d \left(\prod_{i,j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j} (t_i - t_j) \right) \prod_{r \in \{1, \dots, n\}} (t_{n+1} - t_r) \prod_{s \in \{1, \dots, n\}} (t_s - t_{n+1}) \\
&+ \prod_{i,j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j} (t_i - t_j) d \left(\prod_{r \in \{1, \dots, n\}} (t_{n+1} - t_r) \right) \prod_{s \in \{1, \dots, n\}} (t_s - t_{n+1}) \\
&+ \prod_{i,j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j} (t_i - t_j) \prod_{r \in \{1, \dots, n\}} (t_{n+1} - t_r) d \left(\prod_{s \in \{1, \dots, n\}} (t_s - t_{n+1}) \right) \\
&\stackrel{HI}{=} \sum_{i,j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j} d(t_i - t_j) \prod_{\substack{m, k \in \{1, \dots, n\}, \\ m \neq k, (m, k) \neq (i, j)}} (t_m - t_k) \prod_{r \in \{1, \dots, n\}} (t_{n+1} - t_r) \prod_{s \in \{1, \dots, n\}} (t_s - t_{n+1}) \\
&+ \sum_{r \in \{1, \dots, n\}} d(t_{n+1} - t_r) \prod_{m \in \{1, \dots, n\}, m \neq r} (t_{n+1} - t_m) \prod_{i,j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j} (t_i - t_j) \prod_{s \in \{1, \dots, n\}} (t_s - t_{n+1}) \\
&+ \sum_{s \in \{1, \dots, n\}} d(t_s - t_{n+1}) \prod_{k \in \{1, \dots, n\}, k \neq s} (t_k - t_{n+1}) \prod_{i,j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j} (t_i - t_j) \prod_{r \in \{1, \dots, n\}} (t_{n+1} - t_r) \\
&= \sum_{i,j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j} d(t_i - t_j) \prod_{m, k \in \{1, \dots, n+1\}, m \neq k, (m, k) \neq (i, j)} (t_m - t_k) \\
&+ \sum_{r \in \{1, \dots, n\}} d(t_{n+1} - t_r) \prod_{m, k \in \{1, \dots, n+1\}, m \neq k, (m, k) \neq (n+1, r)} (t_m - t_k) \\
&+ \sum_{s \in \{1, \dots, n\}} d(t_s - t_{n+1}) \prod_{m, k \in \{1, \dots, n+1\}, m \neq k, (m, k) \neq (s, n+1)} (t_m - t_k) \\
&= \sum_{i,j \in \{1, \dots, n+1\}, i \neq j} d(t_i - t_j) \prod_{m, k \in \{1, \dots, n+1\}, m \neq k, (m, k) \neq (i, j)} (t_m - t_k)
\end{aligned}$$

■

7.2 Prova da Afirmação 10 do Teorema 5.1:

Seja α um dos pólos de $a = \sigma_1$ (veja (17)). Então, para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,

i) α é um pólo de σ_i com ordem no máximo i ;

ii) se denotarmos por $\bar{\sigma}_i$ a parte de σ_i que envolve o pólo α de ordem i então

$$i! \bar{\sigma}_i = \frac{\lambda_\alpha (\lambda_\alpha + 1) \dots (\lambda_\alpha + i - 1)}{(x - \alpha)^i}, \quad (44)$$

Prova. A prova é por indução sobre i . Por (17),

$$\sigma_1 = \sum_{\alpha \in R} \frac{\lambda_\alpha}{x - \alpha}, \quad (45)$$

e então é claro que α é um pólo de σ_1 com ordem 1. Além disso,

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{\lambda_\alpha}{(x - \alpha)},$$

portanto (44) é satisfeita para $i = 1$.

Para $i = 2$ temos (veja (22))

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(a\sigma_1 - \sigma_1' - np).$$

Como

$$a\sigma_1 = \sigma_1\sigma_1 = \sum_{\alpha \in R} \frac{\lambda_\alpha^2}{(x - \alpha)^2} + \sum_{\alpha, \beta \in R, \beta \neq \alpha} \frac{\lambda_\alpha \lambda_\beta}{(x - \beta)(x - \alpha)}$$

e

$$-\sigma_1' = -\left(\sum_{\alpha \in R} \frac{\lambda_\alpha}{x - \alpha}\right)' = \sum_{\alpha \in R} \frac{\lambda_\alpha}{(x - \alpha)^2},$$

temos

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha \in R} \frac{\lambda_\alpha^2}{(x - \alpha)^2} + \sum_{\alpha, \beta \in R, \beta \neq \alpha} \frac{\lambda_\alpha \lambda_\beta}{(x - \beta)(x - \alpha)} + \sum_{\alpha \in R} \frac{\lambda_\alpha}{(x - \alpha)^2} - np \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha \in R} \frac{\lambda_\alpha^2 + \lambda_\alpha}{(x - \alpha)^2} + \sum_{\alpha, \beta \in R, \beta \neq \alpha} \frac{\lambda_\alpha \lambda_\beta}{(x - \beta)(x - \alpha)} - np \right). \end{aligned}$$

Assim, vemos que α é pólo de σ_2 de ordem no máximo 2.

Além disso,

$$\overline{\sigma_2} = \frac{1}{2} \frac{\lambda_\alpha^2 + \lambda_\alpha}{(x - \alpha)^2},$$

donde

$$2! \overline{\sigma_2} = \frac{\lambda_\alpha(\lambda_\alpha + 1)}{(x - \alpha)^2}.$$

Deste modo, *ii)* vale para $i = 2$.

Suponhamos que *i)* e *ii)* valem para $i \in \{2, \dots, n - 1\}$.

Por (23), temos que

$$\sigma_{i+1} = \frac{1}{i+1} (a\sigma_i - \sigma'_i - (n - i + 1)) p\sigma_{i-1}.$$

Mas

$$a\sigma_i = \sigma_1 \sigma_i \stackrel{HI(ii)}{(45)} \sum_{\alpha \in R} \frac{\lambda_\alpha}{x - \alpha} \frac{1}{i!} \frac{\lambda_\alpha(\lambda_\alpha + 1) \dots (\lambda_\alpha + i - 1)}{(x - \alpha)^i}$$

+ parcelas envolvendo o pólo α com ordem $\leq i$

$$= \sum_{\alpha \in R} \frac{1}{i!} \frac{\lambda_\alpha(\lambda_\alpha + 1) \dots (\lambda_\alpha + i - 1)}{(x - \alpha)^{i+1}} + \text{parcelas envolvendo } \alpha \text{ com ordem } \leq i;$$

por outro lado,

$$\begin{aligned} \sigma'_i &\stackrel{HI(ii)}{=} \left(\frac{1}{i!} \frac{\lambda_\alpha(\lambda_\alpha + 1) \dots (\lambda_\alpha + i - 1)}{(x - \alpha)^i} + \text{parcelas envolvendo } \alpha \text{ com ordem } \leq i - 1 \right)' \\ &= -\frac{1}{i!} \frac{i \cdot \lambda_\alpha(\lambda_\alpha + 1) \dots (\lambda_\alpha + i - 1)}{(x - \alpha)^{i+1}} + \text{parcelas envolvendo } \alpha \text{ com ordem } \leq i; \end{aligned}$$

ainda, por hipótese, a ordem do pólo α em σ_{i-1} é no máximo $i - 1$. Concluimos

então que α é um pólo de σ_{i+1} com ordem no máximo $i + 1$. Além disso,

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_{i+1}} &= \frac{1}{i+1} \frac{1}{i!} \frac{\lambda_\alpha(\lambda_\alpha + 1) \dots (\lambda_\alpha + i - 1)}{(x - \alpha)^{i+1}} + \\ &\quad + \frac{1}{i+1} \frac{1}{i!} \frac{i(\lambda_\alpha(\lambda_\alpha + 1) \dots (\lambda_\alpha + i - 1))}{(x - \alpha)^{i+1}} \\ &= \frac{1}{(i+1)!} \frac{\lambda_\alpha(\lambda_\alpha + 1) \dots (\lambda_\alpha + i - 1)(\lambda_\alpha + i)}{(x - \alpha)^{i+1}}, \end{aligned}$$

e portanto, *(ii)* é também satisfeita por σ_{i+1} . ■

7.3 Prova da Afirmação 12 do Teorema 5.1:

Se $\delta = \text{grau}(p)$ então, para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \text{grau}(\sigma_{2i}) &= i\delta \quad \text{enquanto } 2i \leq n \\ \text{grau}(\sigma_{2i+1}) &\leq i\delta - 1. \end{aligned}$$

Prova. A prova é feita por indução sobre i .

Inicialmente observemos que se $f(x), g(x) \in k[x]$ então

$$\text{grau} \left(\frac{f}{g} \right)' \leq \text{grau } f - \text{grau } g - 1 = \text{grau} \left(\frac{f}{g} \right) - 1,$$

uma vez que

$$\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Sendo $\sigma_0 = 1$ temos que $\text{grau}(\sigma_0) = 0 = 0\delta$, e da Afirmação 5,

$$\sigma_{2 \times 0 + 1} = \sigma_1 = \frac{d(\Delta)}{2(n-1)\Delta},$$

onde $\Delta \in k(x)$; então $\text{grau } \sigma_1 \leq 0\delta - 1 = -1$.

Seja $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ e suponhamos que

$$\text{grau}(\sigma_{2i}) = i\delta \quad \text{e} \quad \text{grau}(\sigma_{2j+1}) \leq j\delta - 1,$$

enquanto $2i \leq k$ e $2j+1 \leq k$. Daí:

- se k for ímpar então, como $k+1 \leq n$ e pondo $k+1 = 2(i+1)$, temos

$$\begin{aligned} \sigma_{k+1} &= \sigma_{2(i+1)} \stackrel{(23)}{=} \frac{1}{2(i+1)} (a\sigma_{2i+2-1} - \sigma'_{2i+2-1} - (n+2-2i-2)p\sigma_{2i+2-2}) \\ &= \frac{1}{2i+2} (a\sigma_{2i+1} - \sigma'_{2i+1} - (n-2i)p\sigma_{2i}); \end{aligned}$$

daí, pela hipótese de indução, temos:

$$\begin{aligned} \text{grau} (a\sigma_{2i+1}) &= \text{grau} (\sigma_1 \sigma_{2i+1}) \leq -1 + i\delta - 1 = i\delta - 2, \\ \text{grau } \sigma'_{2i+1} &\leq \text{grau } \sigma_{2i+1} - 1 \stackrel{HI}{\leq} i\delta - 1 - 1 = i\delta - 2 \end{aligned}$$

$$\text{grau } p\sigma_{2i} \stackrel{HI}{=} \delta + i\delta = (i+1)\delta,$$

de modo que, neste caso, obtemos

$$\text{grau } \sigma_{k+1} = \text{grau}(\sigma_{2(i+1)}) = (i+1)\delta.$$

- se k for par então, como $k+1 \leq n$ e pondo $k+1 = 2i$, temos

$$\begin{aligned} \sigma_{k+1} &= \sigma_{2i+1} \stackrel{(23)}{=} \frac{1}{2i+1} (a\sigma_{2i+1-1} - \sigma'_{2i+1-1} - (n+2-2i-1)p\sigma_{2i+1-2}) \\ &= \frac{1}{2i+1} (a\sigma_{2i} - \sigma'_{2i} - (n-2i+1)p\sigma_{2i-1}); \end{aligned}$$

daí, pela hipótese de indução, temos:

$$\text{grau } (a\sigma_{2i}) = \text{grau } (\sigma_1\sigma_{2i}) = -1 + i\delta = i\delta - 1,$$

$$\text{grau } \sigma'_{2i} \stackrel{HI}{\leq} i\delta - 1$$

$$\text{grau } p\sigma_{2i-1} = \text{grau } p\sigma_{2(i-1)+1} \stackrel{HI}{\leq} \delta + (i-1)\delta - 1 = i\delta - 1,$$

de modo que, neste caso, obtemos

$$\text{grau } \sigma_{k+1} = \text{grau}(\sigma_{2i+1}) \leq i\delta - 1.$$

Logo $\text{grau}(\sigma_{2i}) = i\delta$ enquanto $2i \leq n$ e $\text{grau}(\sigma_{2i+1}) \leq i\delta - 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$. ■

7.4 Prova da Afirmação 13 do Teorema 5.1:

Dado $s \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\widehat{\sigma}_{2s} = (-1)^s \widehat{p}^s M_{2s}, \quad \text{enquanto } 2s \leq n + 1$$

e

$$\widehat{\sigma}_{2s+1} = (-1)^{s+1} \widehat{p}^s M_{2s+1}, \quad \text{enquanto } 2s + 1 \leq n + 1,$$

onde M_i são racionais definidos indutivamente por:

$$M_0 = 1, \quad M_1 = \Lambda$$

e, para $s \geq 1$,

$$M_{2s} = \frac{n + 2 - 2s}{2s} M_{2(s-1)}$$

e

$$M_{2s+1} = \frac{1}{2s + 1} [(\Lambda + s\delta)M_{2s} + (n + 1 - 2s)M_{2s-1}].$$

Prova. A prova é por indução sobre s .

Para $s = 0$ temos

$$\widehat{\sigma}_0 = 1 = (-1)^0 \widehat{p}^0 M_{2 \times 0}$$

e

$$\widehat{\sigma}_1 \stackrel{(25)}{=} -\Lambda = (-1)^1 \widehat{p}^0 M_1$$

Suponhamos que, dado $i \in \mathbb{N}$ tal que $2(i + 1) \leq n + 1$, tenhamos

$$\widehat{\sigma}_{2i} = (-1)^i \widehat{p}^i M_{2i}$$

Daí, como $2(i+1) \leq n+1$, podemos aplicar (26) e (27) e obter

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma_{2(i+1)}} &= \\
&= -\frac{1}{2(i+1)}(n+2-2(i+1))p\widehat{\sigma_{2(i+1)-2}} \\
&= -\frac{1}{2(i+1)}(n-2i)\widehat{p}\widehat{\sigma_{2i}} \stackrel{HI}{=} \\
&= -\frac{1}{2(i+1)}(n-2i)\widehat{p}(-1)^i\widehat{p}^i M_{2i} \\
&= \frac{(n-2i)}{2(i+1)}(-1)^{i+1}\widehat{p}^{i+1} M_{2i}.
\end{aligned}$$

Note ainda que

$$\begin{aligned}
M_{2(i+1)} &= \frac{(n+2-2(i+1))}{2(i+1)} M_{2i} \\
&= \frac{(n-2i)}{2(i+1)} M_{2i}
\end{aligned}$$

e portanto

$$\widehat{\sigma_{2(i+1)}} = (-1)^{i+1}\widehat{p}^{i+1} M_{2(i+1)}, \quad (46)$$

enquanto $2(i+1) \leq n+1$.

Suponhamos agora que dado $i \in \mathbb{N}$ tal que $2(i+1)+1 \leq n+1$ tenhamos

$$\widehat{\sigma_{2i}} = (-1)^i\widehat{p}^i M_{2i} \quad \text{e} \quad \widehat{\sigma_{2i+1}} = (-1)^{i+1}\widehat{p}^i M_{2i+1}.$$

Então vale (46). Ainda, como $\sigma'_{2(i+1)}$ tem grau $\leq (i+1)\delta - 1$, temos, por (46),

$$\widehat{\sigma'_{2(i+1)}} = (i+1)\delta(-1)^{i+1}\widehat{p}^{i+1} M_{2(i+1)}, \quad (47)$$

de modo que, como $2(i+1) + 1 \leq n + 1$, podemos aplicar (26) e (27) e obter

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma_{2(i+1)+1}} &= \\
&= \frac{1}{2(i+1)+1} \left[a\widehat{\sigma_{2(i+1)}} - \widehat{\sigma'_{2(i+1)}} - (n-2(i+1)+1)p\widehat{\sigma_{2(i+1)-1}} \right] \stackrel{(47),(25)}{=} \stackrel{(46)}{=} \\
&= \frac{1}{2(i+1)+1} \left[-\Lambda(-1)^{i+1}\widehat{p}^{i+1}M_{2(i+1)} - (i+1)\delta(-1)^{i+1}\widehat{p}^{i+1}M_{2(i+1)} - (n-2i-1)\widehat{p}\widehat{\sigma_{2i+1}} \right] = \\
&= \frac{1}{2(i+1)+1} \left[\Lambda(-1)^i\widehat{p}^{i+1}M_{2(i+1)} + (i+1)\delta(-1)^i\widehat{p}^{i+1}M_{2(i+1)} - (n-2i-1)\widehat{p}\widehat{\sigma_{2i+1}} \right] \stackrel{HI}{=} \\
&= \frac{1}{2(i+1)+1} \left[\Lambda(-1)^i\widehat{p}^{i+1}M_{2(i+1)} + (i+1)\delta(-1)^i\widehat{p}^{i+1}M_{2(i+1)} - (n-2i-1)\widehat{p}(-1)^{i+1}\widehat{p}^iM_{2i+1} \right] \\
&= \frac{1}{2(i+1)+1} \left[\Lambda(-1)^i\widehat{p}^{i+1}M_{2(i+1)} + (i+1)\delta(-1)^i\widehat{p}^{i+1}M_{2(i+1)} + (n-2i-1)(-1)^i\widehat{p}^{i+1}M_{2i+1} \right] \\
&= \frac{1}{2(i+1)+1} (-1)^i\widehat{p}^{i+1} \left[M_{2(i+1)}(\Lambda + (i+1)\delta) + (n-2i-1)M_{2i+1} \right].
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
M_{2(i+1)+1} &= \frac{1}{2(i+1)+1} \left[(\Lambda + (i+1)\delta)M_{2(i+1)} + (n+1-2(i+1))M_{2(i+1)-1} \right] \\
&= \frac{1}{2(i+1)+1} \left[M_{2(i+1)}(\Lambda + (i+1)\delta) + (n-2i-1)M_{2i+1} \right],
\end{aligned}$$

e portanto

$$\widehat{\sigma_{2(i+1)+1}} = (-1)^i\widehat{p}^{i+1}M_{2(i+1)+1} = (-1)^{i+2}\widehat{p}^{i+1}M_{2(i+1)+1},$$

enquanto $2(i+1) + 1 \leq n$. ■

7.5 Prova da Afirmação 15 do Teorema 5.1:

Para todo $i \in \mathbb{N}$,

$$\sigma_{2i+1} = 0$$

e, enquanto $2i \leq n$,

$$\sigma_{2i} = (-1)^i \binom{s}{i} p^i.$$

Prova. A prova é por indução sobre i .

Inicialmente observamos $p \neq 0$ e p constante implica que $\hat{p} = p$.

Daí, para $i = 0$ temos

$$\sigma_0 = 1 = (-1)^0 \binom{s}{0} p^0 \quad \text{e} \quad \sigma_1 \stackrel{(33)}{=} 0.$$

Seja $i \geq 0$ e suponhamos que, por indução, tenhamos

$$\sigma_{2i+1} = 0 \quad \text{e} \quad \sigma_{2i} = (-1)^i \binom{s}{i} p^i \text{ se } 2i < n.$$

Então se $2(i+1) \leq n$ temos

$$\begin{aligned} \sigma_{2(i+1)} &\stackrel{(22)}{=} \frac{1}{2(i+1)} [a\sigma_{2(i+1)-1} - \sigma'_{2(i+1)-1} - (n+2-2(i+1))p\sigma_{2(i+1)-2}] \\ &= \frac{1}{2(i+1)} [a\sigma_{2i+1} - \sigma'_{2i+1} - (n-2i)p\sigma_{2i}] \stackrel{HI:\sigma_{2i+1}=0, \text{ portanto } \sigma'_{2i+1}=0}{=} \\ &= -\frac{n-2i}{2(i+1)} p\sigma_{2i} \stackrel{HI}{=} \\ &= -\frac{n-2i}{2(i+1)} p(-1)^i \binom{s}{i} p^i \stackrel{n=2s}{=} \\ &= (-1)^{i+1} p^{i+1} \frac{2(s-i)}{2(i+1)} \frac{s!}{i!(s-i)!} \\ &= (-1)^{i+1} p^{i+1} \frac{s!}{(i+1)!(s-i-1)!} \\ &= (-1)^{i+1} \binom{s}{i+1} p^{i+1} \end{aligned}$$

Também se $2(i + 1) + 1 \leq n$, temos

$$\begin{aligned} \sigma_{2(i+1)+1} &\stackrel{(22)}{=} \frac{1}{2(i+1)+1} [a\sigma_{2(i+1)+1-1} - \sigma'_{2(i+1)+1-1} - (n+2 - (2(i+1)+1))p\sigma_{2(i+1)+1-2}] \\ &= \frac{1}{2i+3} [a\sigma_{2(i+1)} - \sigma'_{2(i+1)} - (n-2i-1)p\sigma_{2i+1}] \stackrel{a=0}{=} 0, \end{aligned}$$

HI: $\sigma_{2i+1}=0$, portanto $\sigma'_{2i+1}=0$

o que completa a prova. ■

7.6 Prova da Afirmação 16 do Teorema 5.1:

Para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, tem-se

$$\sigma_j = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq m} \frac{(-1)^j}{(x - \alpha_{i_1})(x - \alpha_{i_2}) \dots (x - \alpha_{i_j})}.$$

Prova. A prova é por indução sobre j . Relembremos que reescrevemos

$$\sigma_1 = \sum_{\alpha \in R} \frac{\lambda_\alpha}{(x - \alpha)}$$

na forma

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^m \frac{-1}{(x - \alpha_i)},$$

levando em conta que o conjunto R é finito e que $\lambda_\alpha \in \{-1, -2, \dots, -n\}$,

onde $m = -\sum_{\alpha \in R} \lambda_\alpha$

Lembrando que $a = \sigma_1$, temos

$$a\sigma_1 = \sigma_1^2 = \sum_{i=1}^m \frac{+1}{(x - \alpha_i)^2} + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} \frac{2}{(x - \alpha_{i_1})(x - \alpha_{i_2})}$$

e

$$\sigma_1' = \sum_{i=1}^m \frac{1}{(x - \alpha_i)^2};$$

daí, lembrando que $p = 0$, segue que

$$\sigma_2 \stackrel{(22)}{=} \frac{a\sigma_1 - \sigma_1'}{2} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} \frac{1}{(x - \alpha_{i_1})(x - \alpha_{i_2})},$$

e portanto a afirmação vale para $j = 2$.

Suponhamos que para $j \in \{2, \dots, n-1\}$ vale

$$\sigma_j = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq m} \frac{(-1)^j}{(x - \alpha_{i_1})(x - \alpha_{i_2}) \dots (x - \alpha_{i_j})}.$$

Por (22) obtemos

$$\sigma_{j+1} = \frac{a\sigma_j - \sigma_j'}{j+1}$$

Mas

$$\begin{aligned}
a\sigma_j &\stackrel{HI}{=} \\
&= \left(\sum_{i=1}^m \frac{-1}{(x - \alpha_i)} \right) \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq m} \frac{(-1)^j}{(x - \alpha_{i_1})(x - \alpha_{i_2}) \dots (x - \alpha_{i_j})} \right) \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq m} \frac{(-1)^{j+1}}{(x - \alpha_i)(x - \alpha_{i_1})(x - \alpha_{i_2}) \dots (x - \alpha_{i_j})} \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq m} \frac{(-1)^{j+1}}{(x - \alpha_{i_1})^2(x - \alpha_{i_2}) \dots (x - \alpha_{i_j})} \\
&+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq m} \frac{(-1)^{j+1}}{(x - \alpha_{i_1})(x - \alpha_{i_2})^2 \dots (x - \alpha_{i_j})} \\
&+ \dots \\
&+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq m} \frac{(-1)^{j+1}}{(x - \alpha_{i_1})(x - \alpha_{i_2}) \dots (x - \alpha_{i_j})^2} \\
&+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq m} \sum_{i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_1, \dots, i_j\}} \frac{(-1)^{j+1}}{(x - \alpha_i)(x - \alpha_{i_1})(x - \alpha_{i_2}) \dots (x - \alpha_{i_j})} \\
&e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma'_j &= \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq m} \frac{(-1)^j}{(x - \alpha_{i_1})(x - \alpha_{i_2}) \dots (x - \alpha_{i_j})} \right)' \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq m} \frac{-((x - \alpha_{i_1})(x - \alpha_{i_2}) \dots (x - \alpha_{i_j}))' (-1)^j}{((x - \alpha_{i_1})(x - \alpha_{i_2}) \dots (x - \alpha_{i_j}))^2} \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq m} \frac{(-1)^{j+1}}{(x - \alpha_{i_1})^2(x - \alpha_{i_2}) \dots (x - \alpha_{i_j})} \\
&+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq m} \frac{(-1)^{j+1}}{(x - \alpha_{i_1})(x - \alpha_{i_2})^2 \dots (x - \alpha_{i_j})} \\
&\dots \\
&+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq m} \frac{(-1)^{j+1}}{(x - \alpha_{i_1})(x - \alpha_{i_2}) \dots (x - \alpha_{i_j})^2};
\end{aligned}$$

então, depois dos cancelamentos obtemos

$$\begin{aligned}
\sigma_{j+1} &= \frac{1}{j+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq m} \sum_{i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_1, \dots, i_j\}} \frac{(-1)^{j+1}}{(x - \alpha_i)(x - \alpha_{i_1})(x - \alpha_{i_2}) \dots (x - \alpha_{i_j})} \\
&= \frac{1}{j+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j < i_{j+1} \leq m} \frac{(j+1)(-1)^{j+1}}{(x - \alpha_{i_1})(x - \alpha_{i_2}) \dots (x - \alpha_{i_j})(x - \alpha_{i_{j+1}})} \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j < i_{j+1} \leq m} \frac{(-1)^{j+1}}{(x - \alpha_{i_1})(x - \alpha_{i_2}) \dots (x - \alpha_{i_j})(x - \alpha_{i_{j+1}})}.
\end{aligned}$$

■

Referências

- [1] A.M.S. Doering - Y. Lequain - C.C. Ripoll, *Differential simplicity and cyclic maximal ideals of the Weyl algebra $A_2(K)$* , Glasgow Math. J. 48 (2006), 269-274.
- [2] I. Kaplansky, *Commutative Rings*, The University of Chicago Press, 1974.
- [3] Lequain, Y. *Simple Shamsuddin derivations of $K[X_1, \dots, X_n]$ and cyclic maximal left ideals of the Weyl algebra $\mathbb{A}_n[K]$* , preprint.
- [4] Y. Lequain, D. Levcovitz, J.C. Souza Jr., *d -simple rings and principal maximal ideals of the Weyl algebra*, Glasgow Math. J. 47 (2005), 269-285.
- [5] A. Maciejewski, J. Moulin-Ollagnier, A. Nowicki, *Simple quadratic derivations in two variables*, Comm. Algebra 29 (2001), 5095-5113.
- [6] A. Nowicki, *Polynomial derivations and their rings of constants*, Nicholas Copernicus University Press, Torun, 1994.
- [7] Werle, E., *Derivações de Shamsuddin simples de $K[X_1, \dots, X_n]$ e ideais maximais cíclicos à esquerda da Álgebra de Weyl $\mathbb{A}_n(K)$* . Dissertação de Mestrado - Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Porto Alegre, 2005.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)