Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Paulo Roberto Ferreira dos Santos Silva

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DA SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO NÃO-LINEAR DO CALOR

Recife
2009

Paulo Roberto Ferreira dos Santos Silva

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DA SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO NÃO-LINEAR DO CALOR

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da UFPE, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Miguel Loayza

Recife

2009

Silva, Paulo Roberto Ferreira dos Santos
Comportamento assintótico da solução de uma equação não-linear do calor / Paulo Roberto Ferreira dos Santos Silva – Recife : O Autor, 2009.
67 folhas : il., fig.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2009.

Inclui bibliografia.

1. Equações diferenciais parciais. I. Titulo.

515.353 CDD (22.ed.) MEI2009-019

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Matemática.

Aprovado: ______________________________

Miguel Fidencio Loayza Lozano, UFPE

Orientador

____

Pablo Gustavo Albuquerque Braz e Silva, UFPE

____

Marivaldo Pereira Matos, UFPB

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DA SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO NÃO-LINEAR DO CALOR

Por

Paulo Roberto Ferreira dos Santos Silva

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Fevereiro – 2009

Aos meus pais, irmãos

e à minha neguinha.

RESUMO

Estudamos o comportamento assintótico da solução positiva da equação não-linear do calor $u_t - \Delta u + u^p = 0$, com dado inicial contínuo, limitado e com decaimento polinomial. O objetivo é mostrar que a solução é assintoticamente autossimilar.

Palavras-chave: equação do calor, comportamento assintótico, solução autossimilar.

ABSTRACT

We study the asymptotic behavior of positive solution for the nonlinear heat equation $u_t - \Delta u + u^p = 0$, with bounded continuous and polynomial decay initial data. The goal is to show that the solution is asymptotically self-similar.

KEYWORD: heat equation, asymptotic behavior, similarity solution.

RESUMO

A Deus, pela coragem e oportunidades que tem me dado.

A meus pais, Lúcia e Manoel, pelo apoio incondicional e incentivo aos estudos.

A meus irmãos, André, Sandro e Tatiane.

A minha esposa Danila.

Aos amigos, André Luis (ALRO), Antônio César (Pong), Vital (Doutoragôgo), Cleyton Alves (Kampler Dats), Edson Goés, Wagner Alexandre.

Ao Prof. Dr. Miguel Loayza, pela proposta de trabalho e orientação.

Aos demais professores, de quem fui aluno, por toda a matemática que me ensinaram, são eles: Aron Simis, Francesco Russo, Fernando Cardoso, Hildeberto Cabral, Lucas Catão e Pedro Hinojosa.

A todos os funcionários da pós-graduação, em especial Tânia e Cláudia.

Aos companheiros de sala Allyson (vovô), Joilson (profeta) e Marcelo (Johnny), pelos conselhos, empréstimos e discussões de mesa de bar.

E demais colegas e amigos: André Ventura (Adventure), André Vinícius (Bebê), Bárbara, Bruno, Éder (Gordo), Giovana (Gigi), Luis (Bula), Renato (Gabarito), Ricardo (Ricatti), Wagner (Waguinho) e Zaqueu (Cacaroto).

A CAPES pelo apoio financeiro.

Introdução

Ao estudarmos uma equação diferencial parcial (EDP), questões como existência e unicidade de soluções são bastante naturais. No caso das equações que tem derivadas parciais em relação a uma variável chamada de tempo, surge ainda outra questão importante: qual o intervalo de tempo para o qual a solução da EDP estudada está definida? Quando esse intervalo de tempo é finito, ou seja, da forma $[0, T_{\max})$, procura-se determinar explicitamente quem é $T_{\max}$ e qual a sua dependência em relação ao dado inicial. Quando $T_{\max} = +\infty$, o objetivo passa a ser estudar o comportamento da solução quando $t \to +\infty$, este é o estudo do *comportamento assintótico* da solução.

No presente texto, nosso objetivo é estudar o comportamento assintótico da solução positiva da equação não-linear do calor

$$(*) \qquad \begin{cases} u_t - \Delta u &= -u^p \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times (0, \infty) \\ u(0) &= \varphi \quad\ \ \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

em que o dado inicial tem as condições a seguir:

$$\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N), \quad 0 \leq \varphi \not\equiv 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{|x| \to +\infty} |x|^\alpha \varphi(x) \to A. \tag{1}$$

Esse problema tem sido estudado por diversos autores, entre os quais citamos, por exemplo: [3], [9], [10], [14], [15], [16] e [17]. Em alguns desses artigos o problema $(*)$ é estudado trocando-se $-u^p$ por $-|u|^{p-1}u$. O problema continua sendo o mesmo. O motivo dessa diferença está na hipótese do dado inicial ser não-negativo no caso $-u^p$ e mudar de sinal no caso $-|u|^{p-1}u$. Dentre os artigos mencionados acima tomamos como referência principal [16].

Para o estudo desse problema a dissertação foi organizada da seguinte forma.

No Capítulo 1 introduzimos algumas das notações usadas no texto, definimos os espaços $L^p(\Omega)$, $L^p(I, X)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$ e enunciamos alguns resultados e propriedades importantes de tais espaços. Na última seção enunciamos alguns resultados que serão úteis no decorrer do trabalho.

No Capítulo 2, deduzimos o núcleo do calor e demonstramos algumas de suas propriedades, como por exemplo, $K(t+s) = K(t) * K(s),\ \forall t, s \geq 0$. Estudamos a equação do calor em $\mathbb{R}^N$ nos casos linear homogêneo e não homogêneo encontrando explicitamente suas soluções em termos do núcleo e provamos algumas propriedades dessas soluções. Enunciamos ainda o *princípio do máximo* em duas versões. A primeira delas válida no $\mathbb{R}^N$ e a segunda, bastante geral, válida em domínios limitados. O capítulo 2 é finalizado com a prova de um resultado geral sobre *existência e unicidade* de *solução integral* em um *intervalo maximal* de tempo para a equação não-linear do calor em $\mathbb{R}^N$.

O capítulo 3 é dedicado ao *estudo do comportamento assintótico da solução positiva do problema* $(*)$. Inicialmente estudamos na Seção 3.1, o comportamento assintótico da solução positiva da seguinte equação linear do calor

$$(**) \qquad \begin{cases} w_t - \Delta w = 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times (0, +\infty) \\ w(x,0) = \varphi(x) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

O resultado obtido é o seguinte:

Teorema 1. *Sejam φ dado por (1), $\alpha < N$ e w a solução do problema $(**)$. Então,*

$$t^{\alpha/2}|w(x,t) - W(x,t)| \xrightarrow{t\to+\infty} 0, \tag{2}$$

uniformemente sobre $E_c = \{(x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,+\infty);\ |x| \leq c\sqrt{t}\}$, $c \geq 0$, em que W é a solução do problema $(**)$ com dado inicial $W(x,0) = A|x|^{-\alpha}$.

Para o problema $(**)$ obtemos, ainda, o seguinte resultado.

Teorema 2. *Se $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $\alpha > N$, então*

$$t^{\frac{N}{2}}|w(x,t) - \lambda_0 K(x,t)| \xrightarrow{t\to+\infty} 0,$$

uniformemente sobre E_c, $c \geq 0$, onde $\lambda_0 = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y)dy$.

Na Seção 3.2, estudamos o problema $(*)$ e estamos interessados no *efeito da absorção de um termo da forma $-u^p$, sobre o comportamento da solução do problema $(**)$, descrito no Teorema 1.* Nessa seção descrevemos o resultado principal desta dissertação.

Teorema 3. *Sejam $2/(p-1) \leq \alpha < N$ e φ satisfazendo (P_1) e (P_2). Então,*

$$t^{\frac{\alpha}{2}}|u(x,t) - U(x,t)| \xrightarrow{t\to+\infty} 0, \tag{3}$$

uniformemente sobre E_c, $c \geq 0$. Além disso, U é a única solução (clássica) positiva do problema

$$\begin{cases} U_t - \Delta U &= -\theta U^p \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times (0,+\infty) \\ \\ U(x,0) &= A|x|^{-\alpha} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

onde

$$\theta = \begin{cases} 0, \ \text{se} \ \ 2/(p-1) < \alpha < N \\ 1, \ \text{se} \ \ 2/(p-1) = \alpha < N, \end{cases}$$

As propriedades (P_1) e (P_2) são provenientes de (1).

Do Teorema 3, observamos que o comportamento de w, descrito em (2), não é afetado pela presença do termo de absorção $-u^p$, quando $2/(p-1) < \alpha < N$.

Nas Seções 3.3 e 3.4 damos uma *descrição informal da forma como o comportamento assintótico*, obtido no teorema anterior, *pode ser estipulado, intuído.* Além disso, *descrevemos em linhas gerais o método* usado por [16] para estabelecer (3).

As Seções 3.6 e 3.7 são dedicadas às provas dos Teoremas 1 e 2. Na Seção 3.8 provamos o Teorema 3 e damos uma outra prova do Teorema 1. Na Seção 3.9 apresentamos uma *generalização* do Teorema 3. Finalizamos nosso trabalho na Seção 3.10, enunciando outros resultados sobre o comportamento assintótico.

Sumário

Capítulo 1

Fundamentos

1.1 Algumas notações usadas no texto

Nesta seção estabelecemos algumas das notações utilizadas nesta dissertação.

Em todo o nosso texto $\mathbb{R}^N$ é o espaço euclidiano real N-dimensional formado por todas as N-uplas $(x_1, x_2, \cdots, x_N)$, onde $x_i \in \mathbb{R}$. O produto interno de $x, y \in \mathbb{R}^N$ é dado por $< x, y >= \sum_{i=1}^N x_i y_i$ e para $x \in \mathbb{R}^N$ sua norma é dada por $|x| =< x, x >^{1/2}$. Todos os espaços que forem definidos terão $\mathbb{R}$ como corpo de escalares.

A um $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ chamamos multi-índice e denotamos $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i,\ \ x^\alpha = x^{\alpha_1} \cdots\ x^{\alpha_N}$. Analogamente, se $D_i = \partial/\partial x_i$ para $i = 1, ..., N$, então $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots\ D_N^{\alpha_N}$ denota o operador diferencial de ordem $|\alpha|$ com $D_i^{\alpha_i} = \partial^{\alpha_i}\ /\ \partial x_i^{\alpha_i}$ e $D^{(0,\ldots,0)} f = f$. Se α e β são dois multi-índices definimos $\alpha \leq \beta$ se $\alpha_i \leq \beta_i,$ para $i = 1, .., N$. Neste caso $\beta - \alpha$ ainda é um multi-índice e $|\beta - \alpha| + |\alpha| = |\beta|$.

Em nosso trabalho estaremos assumindo que o leitor esteja familiarizado com os conceitos de medida, conjuntos e funções mensuráveis, bem como os conceitos de conjuntos e funções borelianas.

Seja Ω uma aberto de $\mathbb{R}^N$. Dizemos que uma propriedade P é válida *quase sempre em* Ω (q.s. em Ω), ou ainda, *para quase todo ponto em* Ω (q.t.p $x \in \Omega$) se o conjunto $E_P = \{x \in \Omega : P \text{ é falsa}\}$ tem medida (de Lebesgue) nula, ou seja, $\mu(E) = 0$.

1.2 Os espaços L^p

1.2.1 Definição e propriedades básicas

Definição 1.1 *Sejam Ω um aberto $\mathbb{R}^N$, $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável e $1 \leq p$. Dizemos que $u \in L^p(\Omega)$ se as quantidades definidas abaixo são finitas.*

Para $1 \leq p < +\infty$,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

Para $p = +\infty$,

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)| = \inf\{C : |u(x)| \leq C \ q.s. \ em \ \Omega\}.$$

Quando não houver risco de confusão denotaremos $L^p(\Omega)$ simplesmente por L^p e $\|u\|_{L^p(\Omega)}$ por $\|u\|_{L^p}$ ou $\|u\|_p$. A notação, $\|\cdot\|_p$, sugere que tal quantidade defina uma norma sobre L^p, o que de fato ocorre e será provado adiante. Sendo $1 \leq p < +\infty$, a função $|x|^p$ é convexa, portanto $|x+y|^p \leq (|x| + |y|)^p \leq 2^{p-1}(|x|^p + |y|^p)$ e assim é fácil ver que os espaços L^p são espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$.

Lema 1.1 *Se $0 \leq a, b$ e $\lambda \in [0,1]$, então*

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda) b. \tag{1.1}$$

Demonstração. Se $b = 0$ ou $\lambda \in \{0,1\}$ o resultado é evidente. Suponhamos $b \neq 0$ e $\lambda \in (0,1)$. Assim, a expressão (1.1) é equivalente a $t^\lambda \leq \lambda t + (1-\lambda)$, onde $t = a/b$. Definindo $f(t) = t^\lambda - \lambda t$ temos que $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ e $f''(1) < 0$, logo $f(t) \leq f(1) = (1-\lambda), \forall t \geq 0$. ■

Observação: Seja p' definido pela relação $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Se no Lema 1.1 substituirmos a, b e λ por a^p, $b^{p'}$ e $1/p$, respectivamente, obtemos a desigualdade

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

conhecida como *Lema de Young*.

Teorema 1.1 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $1 < p < +\infty$ e p' definido pela relação $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Sejam, ainda, $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^{p'}(\Omega)$, então $uv \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}. \tag{1.2}$$

Ou seja, a aplicação $\Psi : L^p \times L^{p'} \longrightarrow L^1$ definida por $\Psi(u,v)(x) = u(x)v(x)$é contínua.

Demonstração. Se $\|u\|_p = 0$ ou $\|v\|_{p'} = 0$, então $u = 0$ ou $v = 0$ *q.s.* em Ω, logo $uv = 0$ q.s. em Ω e portanto $\|uv\|_1 = 0$. Suponhamos, então, $\|u\|_p \neq 0$ e $\|v\|_{p'} \neq 0$. A desigualdade (1.2) segue do Lema 1.1 escolhendo $a = |u|^p/\|u\|_p^p$, $b = |v|^{p'}/\|v\|_{p'}^{p'}$, $\lambda = 1/p$ e integrando em Ω. ∎

A desigualdade de Hölder é evidente para $p = 1$ ou $+\infty$. Além disso, ela pode ser facilmente estendida para

$$\|uv\|_r \leq \|u\|_p \|v\|_q \tag{1.3}$$

onde $u \in L^p, v \in L^q$ e $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. E portanto, a aplicação $\Psi : L^p \times L^q \longrightarrow L^r$, definida por $\Psi(u,v)(x) = u(x)v(x)$ é bilinear contínua. De fato, se $u \in L^p$ e $v \in L^q$, então

$$|u|^r \in L^{\frac{p}{r}}, |v|^r \in L^{\frac{q}{r}} \text{ e } 1 = \frac{1}{p/r} + \frac{1}{q/r}$$

Usando a desigualdade de Hölder (1.2) obtemos

$$\|uv\|_r = \||uv|^r\|_1^{1/r} \leq \||u|^r\|_{p/r}^{1/r} \||v|^r\|_{q/r}^{1/r} = \|u\|_p \|v\|_q.$$

Como consequência da desigualdade de Hölder temos o seguinte resultado.

Teorema 1.2 (Desigualdade de Minkowski) *Se $1 \leq p \leq +\infty$ e $u, v \in L^p(\Omega)$, então*

$$\|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p. \tag{1.4}$$

Demonstração. A prova para os casos $p = 1$ e $p = +\infty$ são evidentes. Suponha $1 < p < +\infty$. Sejam $u, v \in L^p$. Como L^p é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ temos que $u + v \in L^p$. Por outro lado,

$$\|u+v\|_p^p \leq \int_\Omega |u(x)+v(x)|^{p-1}|u(x)|dx + \int_\Omega |u(x)+v(x)|^{p-1}|v(x)|dx. \tag{1.5}$$

Como $p'(p-1) = p$ segue que $|u+v|^{p-1} \in L^{p'}$ e assim, aplicando a desigualdade de Hölder nas duas integrais do lado direito de (1.5) obtemos $\|u+v\|_p^p \leq \|u+v\|_p^{p-1}\|u\|_p + \|u+v\|_p^{p-1}\|v\|_p$. Portanto, $\|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$. ■

Em virtude da desigualdade de Minkowski, $\|\cdot\|_p$ define uma norma no espaço L^p.

1.2.2 Outras propriedades importantes

Além de ser um espaço vetorial normado L^p tem as seguintes propriedades:

Teorema 1.3 (Completitude) *$(L^p, \|\cdot\|_p)$ é completo e portanto um espaço de Banach para $1 \leq p \leq +\infty$ e se $p = 2$, então $(L^2, \|\cdot\|_2)$ é um espaço de Hilbert.*

Teorema 1.4 (Separabilidade) *L^p é separável para $1 \leq p < +\infty$.*

Teorema 1.5 (Reflexividade) *L^p é reflexivo para $1 < p < +\infty$ e o seu dual é o espaço $L^{p'}$, onde p' é definido pela relação $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*

Os resultados mencionados acima podem ser encontrados em [5].

Definição 1.2 *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$. Dizemos que um subconjunto K é* fortemente contido em Ω, *e denotamos $K \subset\subset \Omega$, se $\overline{K} \subset \Omega$ e $\overline{K}$ é compacto.*

Definição 1.3 *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$ e $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Dizemos que $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, se $u \in L^p(K)$ para todo $K \subset\subset \Omega$.*

Além das propriedades já mencionadas sobre os espaços L^p acrescentamos a seguinte:

Proposição 1.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto. Para todo $1 \leq p \leq +\infty$ vale a inclusão $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$.*

***Demonstração*.** Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $K \subset\subset \Omega$. Pela desigualdade de Hölder temos que $\|u\|_{L^1(K)} \leq (\mu(K))^{1/p'}\|u\|_p = C\|u\|_p$. ■

1.2.3 Resultados clássicos para integrais

Convergência de integrais

Teorema 1.6 (Teorema da Convergência Monótona) *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um conjunto mensurável e* $(f_k)_{k\geq 1}$ *uma sequência de funções mensuráveis não-negativas tais que* $f_k \leq f_{k+1}$, $\forall k$ *e* $f(x) = \lim_{k\to+\infty} f_k(x)$ $(= \sup_k f_k(x))$ *para cada* $x \in \Omega$. *Então,* $f \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega f(x)dx = \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega f_k(x)dx.$$

Teorema 1.7 (Lema de Fatou) *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um conjunto mensurável e* $(f_k)_{k\geq 1}$ *uma sequência qualquer de funções mensuráveis não-negativas e integráveis. Então,*

$$\int_\Omega \liminf_{k\to+\infty} f_k(x)dx \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_\Omega f_k(x)dx.$$

Teorema 1.8 (Teorema da Convergência Dominada) *Seja* $(f_k)_{k\geq 1}$ *uma sequência em* $L^1(\Omega)$ *tal que (a)* $f_k \longrightarrow f$ *q.s. em* Ω *(b) Existe* $g \in L^1(\Omega)$ *tal que* $|f_k| \leq g$ *q.s. em* Ω, $\forall k$. *Então,* $f \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega f(x)dx = \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega f_k(x)dx.$$

Integração múltipla

Teorema 1.9 (Tonelli) *Suponhamos que*

$$\int_{\Omega_2} |F(x,y)|dy < +\infty, \quad \text{para quase todo } x \in \Omega_1,$$

e

$$\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} |F(x,y)|dydx < +\infty.$$

Então, $F \in L(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Teorema 1.10 (Fubini) *Suponhamos que* $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. *Então, para quase todo* $x \in \Omega_1$,

$$F(x,\cdot) \in L^1(\Omega_2) \quad e \quad \int_{\Omega_2} F(x,y)dy \in L^1(\Omega_1).$$

Igualmente temos

$$F(\cdot,y) \in L^1(\Omega_1) \quad e \quad \int_{\Omega_1} F(x,y)dx \in L^1(\Omega_2).$$

Além disso se verifica

$$\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} F(x,y)dydx = \int_{\Omega_2}\int_{\Omega_1} F(x,y)dxdy. \tag{1.6}$$

Integração em coordenadas polares

Seja $S^{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N;\ |x| = 1\}$ a esfera unitária em $\mathbb{R}^N$. Para $x \in \mathbb{R}^N - \{0\}$ a coordenada polar de x é o par (r, x') onde $r = |x|$ e $x' = \frac{x}{|x|} \in S^{N-1}$. A aplicação $\Phi(x) = (r, x')$ é uma bijeção contínua de $\mathbb{R}^N - \{0\}$ em $(0, +\infty) \times S^{N-1}$ cuja inversa (contínua) é $\Phi^{-1}(r, x') = rx'$. Denote por μ_* a medida de Borel sobre S^{N-1} induzida por Φ da medida de Lebesgue μ sobre $\mathbb{R}^N$, que é $\mu_*(E) = \mu(\Phi^{-1}(E))$. Mais ainda, definimos a medida $\rho = \rho_N$ sobre $(0, +\infty)$ por $\rho(E) = \int_E r^{N-1} dr$.

O resultado principal é o seguinte.

Teorema 1.11 *Existe uma única medida de Borel $\sigma = \sigma_{N-1}$ sobre S^{N-1} tal que $\mu_* = \rho \times \sigma$. Além disso, se f é uma função Borel mensurável sobre $\mathbb{R}^N$ e $f \geq 0$ (ou $f \in L^1(\Omega)$), então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \int_{S^{N-1}} f(rx')r^{N-1} d\sigma(x')dr. \tag{1.7}$$

Para uma prova veja o Teorema 2.49, pg. 78 em [4]. O resultado continua válido se f é mensurável no sentido de Lebesgue.

Corolário 1.1 *Se f é uma função mensurável sobre $\mathbb{R}^N$, não-negativa (ou integrável), tal que $f(x) = g(|x|)$ para alguma função g sobre $(0, +\infty)$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx = \sigma(S^{N-1}) \int_0^{+\infty} g(r)r^{N-1} dr. \tag{1.8}$$

Demonstração.

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f(rx')r^{N-1} d\sigma(x')dr = \int_{S^{N-1}} d\sigma(x') \int_0^{+\infty} g(|rx'|)r^{N-1} dr$$

$$= \sigma(S^{N-1}) \int_0^{+\infty} g(r)r^{N-1} dr.$$

■

Corolário 1.2 *Sejam λ, C constantes positivas e $B_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < \lambda\}$. Suponha ainda que f é uma função mensurável sobre $\mathbb{R}^N$. Então,*

(a) Se $|f(x)| \leq C|x|^{-\alpha}$ sobre B_λ para algum $\alpha < N$, então $f \in L^1(B_\lambda)$. Além disso, se $|f(x)| \geq C|x|^{-N}$, então $f \notin L^1(B_\lambda)$.

(b) Se $|f(x)| \leq C|x|^{-\alpha}$ sobre B_λ^c para algum $\alpha > N$, então $f \in L^1(B_\lambda^c)$. Além disso, se $|f(x)| \geq C|x|^{-N}$, então $f \notin L^1(B_\lambda^c)$.

Demonstração. Basta aplicar o corolário anterior com $f(x) = |x|^{-\alpha}\chi_{B_\lambda}$ e $f(x) = |x|^{-\alpha}\chi_{B_\lambda^c}$.

■

Proposição 1.2 *Se $a > 0$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-a|x|^2} dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{N/2}.$$

Demonstração. Denote por I_N a integral do lado esquerdo. Para $N = 2$, pelo Corolário 1.1 temos

$$I_2 = \underbrace{2\pi}_{\sigma(S^1)} \int_0^{+\infty} re^{-2r^2} dr = \frac{\pi}{a}.$$

Como $e^{-a|x|^2} = \prod_{i=1}^N e^{ax_i^2}$, segue que $I_N = (I_1)^N$, em particular $I_1 = (I_2)^{1/2}$ e portanto $I_N = (\pi/a)^{n/2}$.

■

A constante $\sigma(S^{N-1})$ pode ser calculada em termos da função gama

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt,$$

como mostraremos na proposição a seguir.

Proposição 1.3 $\sigma(S^{N-1}) = \dfrac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}$.

Demonstração. Pelo Corolário 1.1 a Proposição 1.2 e a substituição $s = r^2$

$$\begin{aligned}
\pi^{N/2} &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|x|^2} dx = \sigma(S^{N-1}) \int_0^{+\infty} r^{N-1}e^{-r^2} dr \\
&= \frac{\sigma(S^{N-1})}{2} \int_0^{+\infty} s^{(N/2)-1}e^{N/2} = \frac{\sigma(S^{N-1})}{2}\Gamma\left(\frac{N}{2}\right).
\end{aligned}$$

■

1.2.4 Convolução de funções

A convolução é uma operação bastante importante entre funções e sua definição segue juntamente com o seguinte teorema.

Teorema 1.12 (Convolução de funções) *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ com $1 \leq p \leq +\infty$. Então,*

a) Para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$, a aplicação $y \longmapsto f(x-y)g(y)$ é integrável. Portanto, faz sentido definir

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y)dy. \tag{1.9}$$

b) Além disso,

$$f * g \in L^1(\mathbb{R}^N) \text{ e } \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_p \tag{1.10}$$

Consequentemente $\Phi : L^1(\mathbb{R}^N) \times L^p(\mathbb{R}^N) \to L^r(\mathbb{R}^N)$ dada por $\Phi(u,v) = u * v$ é uma aplicação bilinear contínua.

A expressão (1.9) é chamada a *convolução de f e g no ponto x* e (1.10) é conhecida como a *desigualdade de Young (para convolução)*. A convolução também pode ser definida tomando-se f em $L^p(\mathbb{R}^N)$; Neste caso teremos $f * g \in L^r(\mathbb{R}^N)$ com r definido pela relação $1 + r^{-1} = p^{-1} + q^{-1}$ e vale a seguinte *desigualdade de Young (generalizada)*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{1.11}$$

Consequentemente $\Phi : L^p(\mathbb{R}^N) \times L^q(\mathbb{R}^N) \to L^r(\mathbb{R}^N)$ dada por $\Phi(u,v) = u * v$ é uma aplicação bilinear contínua.

Seja $\varphi : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável qualquer e defina $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N}\varphi(\varepsilon^{-1}x)$, $\varepsilon > 0$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\varepsilon(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)dx.$$

Proposição 1.4 *Sejam $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < +\infty$ e $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)dx = a$. Então, $\varphi_\varepsilon * f \longrightarrow af$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ quando $\varepsilon \to 0$, ou seja, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \|\varphi_\varepsilon - af\|_p = 0$*

Para uma demonstração veja a Proposição 8.14, pg. 243 em [4].

Definimos em seguida o suporte de uma função. Tal definição é motivada pela seguinte proposição.

Proposição 1.5 (Suporte de uma função) *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$ e $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Considere a família de todos os abertos $(\omega_i)_{i\in I}$, $\omega_i \subset \Omega$ tais que $u = 0$ q.s. em ω_i. Defina $\omega = \bigcup_{i\in I} \omega_i$. Então, $u = 0$ q.s. em ω.*

Para a prova conferir Proposição IV.17, pg. 66 em [5].

Definição 1.4 *Definimos o suporte de u, e denotamos por* $\mathrm{Supp}(u)$, *o conjunto $\Omega \backslash \omega$.*

Observações: (1) Se u é uma função contínua, $\mathrm{Supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$.
(2) $\mathrm{Supp}(u * v) \subset \mathrm{Supp}(u) + \mathrm{Supp}(v)$. Ver Proposição IV.18 em [5].

Definição 1.5 *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$ e m um inteiro positivo. Definimos*

$$C^m(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R};\ D^\alpha u \in C(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

e também

$$C_c^m(\Omega) = \{u \in C^m(\Omega);\ Supp(u) \subset\subset \Omega\}.$$

Escrevemos ainda

$$C_c^\infty(\Omega) = \left\{ u \in \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega);\ Supp(u) \subset\subset \Omega \right\}. \tag{1.12}$$

O espaço $C_c^\infty(\Omega)$ desempenha um papel importante e uma das razões é a seguinte.

Teorema 1.13 *O espaço $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < +\infty$.*

Para uma prova conferir corolário IV.23, pg. 71 em [5].

1.3 O Espaço $L^p(I, X)$

As definições e resultados desta seção podem ser encontrados em [6] ou [18], onde as funções mensuráveis, integráveis e a integral de Bochner são definidas a partir de funções ditas simples.

1.3.1 Funções mensuráveis

Seja X um espaço de Banach e $C_c(I,X)$ o espaço de todas as funções $f : I \longrightarrow X$ que são contínuas e tem suporte compacto.

Definição 1.6 (Função mensurável) *Uma função $f : I \longrightarrow X$ é mensurável se existe uma sequência $(f_k) \subset C_c(I,X)$ tal que $\lim_{k\to+\infty} \|f_k(t) - f(t)\|_X = 0$ em X , $\forall t \in I\backslash N$, onde $N \subset I$ é um conjunto de medida nula.*

Segue da definição que se f é uma função mensurável, então $\|f\|_X$ é mensurável, uma vez que $|\|f_k(t)\| - \|f(t)\|| \leq \|f_k(t) - f(t)\|$. Outras propriedades decorrem da definição:

(i) Se $f : I \longrightarrow X$ é mensurável e se Y é um espaço de Banach tal que $i : X \hookrightarrow Y$, então $i \circ f : I \longrightarrow Y$ é mensurável. De fato, basta ver que $\|i \circ f_k(t) - i \circ f(t)\|_Y = \|f_k(t) - f(t)\|_X$;

(ii) Se (f_k) é uma sequência de funções mensuráveis $I \longrightarrow X$ que converge quase sempre (na topologia de X) para uma função $f : I \longrightarrow X$, então f é mensurável. Isso segue da desigualdade $\|f_{n,k}(t) - f(t)\|_X \leq \|f_k(t) - f(t)\|_X + \|f_{n,k}(t) - f_k(t)\|_X$, onde $(f_{n,k})$ é uma sequência em $C_c(I,X)$ que converge quase sempre para f_k.

(iii) Se $f : I \longrightarrow X$ e $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ são mensuráveis, então $\varphi f : I \longrightarrow X$ é mensurável. Em particular, se $f : I \longrightarrow X$ é mensurável e $J \subset I$ é um sub-intervalo aberto, então $f|_J : J \longrightarrow X$ (x). De fato, sejam $(\varphi_k) \subset C_c(I,\mathbb{R})$ e $(f_k) \subset C_c(I,X)$ sequências tais que $\varphi_k(t) \to \varphi(t)$, $\forall t \in I\backslash N_1$ (em particular $(\varphi_k(t))$ é limitada para cada $t \in I\backslash N_1$) e $f_k(t) \to f(t)$, $\forall t \in I\backslash N_2$. Como $f_k\varphi_k \in C_c(I,X)$ e

$$\begin{aligned} \|f(t)\varphi(t) - f_k(t)\varphi_k(t)\|_X &\leq \|f(t)\varphi(t) - f(t)\varphi_k(t)\|_X + \|f(t)\varphi_k(t) - f_k(t)\varphi_k(t)\|_X \\ &= |\varphi(t) - \varphi_k(t)|\|f(t)\|_X + |\varphi_k(t)|\|f(t) - f_k(t)\|_X \\ &= C(|\varphi(t) - \varphi_k(t)| + \|f(t) - f_k(t)\|_X), \end{aligned}$$

temos que $\varphi_k(t)f_k(t) \to \varphi(t)f(t)$, $\forall t \in I\backslash\{N_1 \cup N_2\}$. Logo, φf é mensurável.

Os resultados a seguir nos fornecem algumas caracterizações e/ou condições necessárias para que funções $f : I \to X$ sejam mensuráveis.

Teorema 1.14 (Teorema de Pettis) *Seja $f : I \longrightarrow X$. Então, f é mensurável se, e somente se, f satisfaz as duas seguintes condições:*

(i) f é fracamente mensurável (ou seja, para todo $x^* \in X^*$ (= o dual de X), a função $< x^*, f(\cdot) >: I \to \mathbb{R}$ é mensurável);

(ii) Existe um subconjunto $N \subset I$ de medida nula tal que $f(I \backslash N)$ é separável.

Corolário 1.3 *Se $f : I \longrightarrow X$ é fracamente contínua (ou seja, para todo $x^* \in X$, a função $< x^*, f(\cdot) >: I \to \mathbb{R}$ é contínua), então f é mensurável.*

1.3.2 Funções integráveis

Definição 1.7 *Uma função mensurável $f : I \longrightarrow X$ é dita integrável, se existe uma sequência $(f_k) \subset C_c(I,X)$ tal que*

$$\lim_{k \to +\infty} \int_I \|f_k(t) - f(t)\|_X dt = 0. \tag{1.13}$$

Lema 1.2 *Se $f : I \longrightarrow X$ é integrável, então $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \int_I f_k(t)dt$ existe e é o mesmo para toda sequência $(f_k) \subset C_c(I,X)$ verificando (1.13). Denotamos tal limite por $I(f)$.*

Demonstração. Mostremos primeiramente a existência do limite. Seja $(f_k) \subset C_c(I,X)$ uma sequência verificando (1.13). Então temos

$$\begin{aligned} \left\| \int_I f_n(t)dt - \int_I f_m(t)dt \right\|_X &\leq \int_I \|f_n(t) - f_m(t)\|_X dt \\ &\leq \int_I \|f_n(t) - f(t)\|_X dt + \int_I \|f_m(t) - f(t)\|_X dt \end{aligned}$$

Daí, $\displaystyle\int_I f_k(t)dt$ é uma sequência de Cauchy em X e que, portanto, converge a um elemento $x \in X$. Mostremos que tal limite independe da sequência escolhida. Seja $(g_k) \subset C_c(I,X)$

uma outra sequência verificando (1.13). Então temos

$$\begin{aligned}\left\|\int_I g_k(t)dt - x\right\|_X &\leq \left\|\int_I [g_k(t)-f(t)]dt\right\|_X + \left\|\int_I [f(t)-f_k(t)]dt\right\|_X + \left\|\int_I f_k(t)dt - x\right\|_X \\ &\leq \int_I \|g_k(t)-f(t)\|_X dt + \int_I \|f(t)-f_k(t)\|_X dt + \left\|\int_I f_k(t)dt - x\right\|_X\end{aligned}$$

Portanto, $\int_I g_k(t)dt$ converge para $x \in X$ quando $n \to +\infty$. ■

Definição 1.8 *O elemento $I(f)$ construido no lema anterior é chamado a integral (de Bochner) de f sobre I e escrevemos*

$$I(f) = \int_I f(t)dt = \int_I f = \int f.$$

Além disso, para $I = (a,b)$ escrevemos

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f.$$

É conveniente definir também

$$\int_a^b f = -\int_b^a f \quad e \quad \int_a^a f = 0,$$

se $b \leq a$.

O teorema a seguir caracteriza as funções mensuráveis que são integráveis.

Teorema 1.15 (Teorema de Bochner) *Se $f : I \longrightarrow X$ uma função mensurável, então f é integrável se, e somente se, $\|f\|_X$ é integrável. Além disso,*

$$\left\|\int_I f(t)dt\right\|_X \leq \int_I \|f(t)\|_X dt,$$

para toda função integrável $f : I \longrightarrow X$.

Para uma demonstração veja [6] ou [18].

1.3.3 O espaço $L^p(I,X)$.

Definição 1.9 *Seja $p \in [1,+\infty]$. Denotamos por $L^p(I,X)$ o conjunto de todas as (classes de) funções mensuráveis $f : I \longrightarrow X$ tais que a função $t \longrightarrow \|f(t)\|_X$ pertence a $L^p(I)$. Para $f \in L^p(I,X)$, definimos*

$$\|f\|_{L^p(I,X)} = \left(\int_I \|f(t)\|_X^p dt\right)^{1/p}, \quad se \quad p < +\infty,$$

$$\|f\|_{L^p(I,X)} = ess\sup_{t\in I} \|f(t)\|_X, \quad se\ p = +\infty$$

Como no caso dos espaços L^p, denotamos por $L^p_{loc}(I,X)$ o conjunto de todas as funções mensuráveis $f : I \longrightarrow X$ tais que $f|_J \in L^p(J,X)$ para todo sub-intervalo limitado V de I. O espaço $L^p(I,X)$ herda a maioria das propriedades do espaço $L^p(I) = L^p(I,\mathbb{R})$, com provas análogas ou aplicando-se os resultados clássicos à função $F(t) = \|f(t)\|_X$. Em particular, obtem-se os seguintes resultados.

1. **(Completitude)** $\|\cdot\|_{L^p(I,X)}$ é uma norma sobre o espaço $L^p(I,X)$ e equipado com esta norma é Banach.

2. **(Densidade)** Se $p \in [1,+\infty)$, então $C_c^\infty(I,X)$ é denso em $L^p(I,X)$.

3. **(Desigualdade de Hölder)** Se $f \in L^p(I,X)$ e $\varphi \in L^q(I)$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \leq 1$, então $\varphi f \in L^r(I,X)$ e $\|\varphi f\|_{L^r(I,X)} \leq \|\varphi\|_{L^q(I)}\|f\|_{L^p(I,X)}$. Em particular, $L^p(I,X) \subset L^p_{loc}(I,X)$.

4. **(Teorema da Convergência Dominada)** Sejam $(f_k) \subset L^p(I,X)$, $g \in L^p(I)$ e $p \in [1,+\infty)$. Se $\|f_k(t)\|_X \leq g(t)$ para quase todo $t \in I$, $\forall k \in \mathbb{N}$ e $\lim_{k\to+\infty} f_k(t)$ existe para quase todo $t \in I$, então $f(t) := \lim_{k\to+\infty} f_k(t) \in L^p(I,X)$ e $\lim_{k\to+\infty} \|f_k(t) - f(t)\|_{L^p(I,X)} = 0$.

5. **(Lema de Du Bois-Raymond)** Se $f \in L^1_{loc}(I,X)$ é tal que
$$\int_I f(t)\varphi(t)dt = 0, \ \forall \varphi \in C_c(I).$$
Então, $f = 0$ quase sempre em I.

6. **(Teorema Fundamental do Cálculo)** Seja $g \in L^1_{loc}(I,X)$, $t_0 \in I$ e $f \in C(I,X)$ definida por $f(t) = \displaystyle\int_{t_0}^t g(t)dt$, para $t \in I$. Então, f é diferanciável quase sempre e $f' = g$ quase sempre.

1.4 Distribuições ou funções generalizadas

Seja $C_c^\infty(\Omega)$ como definido em (1.12). Considere neste espaço uma topologia localmente convexa de modo a valer o seguinte teorema.

Teorema 1.16 *Uma sequência (φ_j) converge para zero em $C_c^\infty(\Omega)$ se, e somente se, existe um subconjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que: (1) $\forall j = 1, 2, ...$ Supp(φ_j) $\subset K$ e (2) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N$ a sequência $(D^\alpha \varphi_j)$ converge uniformemente para zero sobre K.*

Os detalhes da construção de uma tal topologia podem ser encontrados em [7], capítulos 1 e 2.

Definição 1.10 (Funções teste) *O espaço $C_c^\infty(\Omega)$ munido como essa topologia é chamado o* espaço das funções testes *e será denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Definição 1.11 (Distribuição) *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$. Uma distribuição sobre Ω é um funcional linear contínuo sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. O espaço de todas as distribuições será denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Alguns resultados são bastante úteis para saber se um certo funcional linear é ou não uma distribuição. Vejamos alguns deles. Antes disso introduzimos a seguinte notação: $C_c^\infty(\Omega; K) = \{u \in C_c^\infty(\Omega);\ \text{Supp}(u) \subset K\}$.

Teorema 1.17 *Um funcional linear T é uma distribuição se, e somente se, para todo compacto $K \subset \Omega$ existe $C > 0$ e um inteiro $m \geq 0$ tais que*

$$|T(\varphi)| \leq C \sup_{\substack{x\in\Omega \\ |\alpha|\leq m}} |D^\alpha \varphi(x)|,\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega; K). \tag{1.14}$$

Para a prova veja o Teorema 2.12. pg. 47 em [7].

Teorema 1.18 *Um funcional linear T é uma distribuição se, e somente se, para toda sequência (φ_j) convergindo a zero em $\mathcal{D}(\Omega)$ a sequência $(T(\varphi_j))$ converge para zero.*

Para uma prova veja o Teorema 2.13. pg. 48 em [7].

Proposição 1.6 *Se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, então a aplicação $T_u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx \tag{1.15}$$

define uma distribuição.

Demonstração. Suponha que $u \not\equiv 0$ e observe inicialmente que T_u está bem definida, pois,

$$\int_\Omega |u(x)\varphi(x)|dx = \int_K |u(x)||\varphi(x)|dx \leq \sup_{x\in K} |\varphi(x)| \int_K |u(x)|dx < +\infty,$$

onde $K = \text{Supp}(\varphi)$. Obviamente T_u é linear. Mostremos que T_u é contínua em $\mathcal{D}(\Omega)$. Seja (φ_j) uma sequência que converge para zero em $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $j_0 \in \mathbb{N}$ e $K \subset\subset \Omega$ tal que $\text{Supp}(\varphi_j) \subset K, \forall j$ e

$$\sup_{\substack{x\in K\\ |\alpha|\leq m}} |D^\alpha \varphi_j(x)| < \varepsilon \left(\int_K |u(x)|dx \right)^{-1}, \ \forall\ j \geq j_0 \ \text{ e } \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N.$$

Daí $|T_u(\varphi_j)| < \varepsilon$, $\forall$ $j \geq j_0$ e o resultado segue pela Teorema 1.18. ■

Note que na demonstração anterior supomos $u \not\equiv 0$, pois, se $u \equiv 0$, então $T_u \equiv 0$. A pergunta natural é: se $T_u \equiv 0$, então $u \equiv 0$? A resposta é dada a seguir.

Proposição 1.7 (Lema de Du Bois-Raymond) *Se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ é tal que*

$$T_u(\varphi) = \langle u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0, \ \forall \varphi \in C_c(\Omega),$$

então $u = 0$ q.s. em Ω.

Para uma prova veja o Lema IV.2, pg. 61 em [5].

Definição 1.12 (Convergência em $\mathcal{D}'(\Omega)$) *Sejam $(T_j)_{j=1,2,...}$ uma sequência em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Dizemos que $T_j \to 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se, e somente se, $T_j(\varphi) \to 0$, $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Além disso, dizemos que $T_j \to T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se, e somente se, $T_j - T \to 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Introduzimos, agora, o conceito de *derivada fraca* ou *derivada no sentido de distribuição.*

Definição 1.13 (Derivada em $\mathcal{D}'(\Omega)$ ou derivada fraca) *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e T um elemento de $\mathcal{D}'(\Omega)$. A α-ésima derivada de T é definida pela fórmula*

$$(D^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi), \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \ \ e \ \ \alpha \in \mathbb{N}^N. \tag{1.16}$$

Observação: Note que da fórmula (1.16) que se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, então $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e T tem derivadas de todas as ordens. Também é fácil verificar que

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Definição 1.14 (Solução fundamental) *Seja*

$$P = P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$$

um operador diferencial com coeficientes constantes. Dizemos que uma distribuição $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *é* solução fundamental *do operador diferencial* P *se* $P(D)E = \delta_0$*, onde* δ_0 *é o delta Dirac em zero.*

Em relação a definição 1.14 existe um teorema famoso conhecido por *Teorema de Malgrange* provado em 1954 afirmando que todo operador diferencial com coeficientes constantes tem solução fundamental, o que motivará, mais adiante, a procura de uma solução fundamental para a equação do calor em $\mathbb{R}^N$. Para detalhes veja o Teorema 7.3. pg. 205 em [7].

1.5 Outros resultados

1.5.1 A transformada de Fourier

Definição da transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^N)$. Seja $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Definimos a *transformada de Fourier* de u por

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i<x,\xi>} u(x) dx \tag{1.17}$$

e sua *transformada de Fourier inversa* por

$$\check{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i<x,\xi>} u(x) dx. \tag{1.18}$$

As transformações acima estão bem definidas pois, como $|e^{\pm i<x,\xi>}| = 1$ e $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$, segue que $|\hat{u}(\xi)|, |\check{u}(\xi)| < +\infty$ para cada $\xi \in \mathbb{R}^N$.

As transformadas definidas acima podem ser estendidas a $L^2(\mathbb{R}^N)$ fazendo uso do seguinte teorema.

Teorema 1.19 (Teorema de Plancherel) *Seja* $u \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$. *Então,* $\hat{u}, \check{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ *e*

$$\|\hat{u}\|_2 = \|\check{u}\|_2 = \|u\|_2. \tag{1.19}$$

Para a prova conferir Teorema 1, pg. 183 em [8] ou Teorema 8.29, pág. 152 em [4].

Definição da Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Seja $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $(u_k) \subset L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ uma sequência convergente (e portanto uma sequência de Cauchy) em $L^2(\mathbb{R}^N)$, ou seja,

$$u_k \longrightarrow u \quad \text{em} \quad L^2(\mathbb{R}^N) \text{ quando } k \to +\infty.$$

Por 1.19 temos que $\|\hat{u}_k - \hat{u}_r\|_2 = \|\widehat{u_k - u_r}\|_2 = \|u_k - u_r\|_2$, logo $(\hat{u}_k)$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e portanto existe $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tal que $\hat{u}_k \longrightarrow v$. Defina $\hat{u} = v$. Para que $\hat{u}$ esteja bem definida é preciso mostrar que a definição independe da sequência (u_k). Seja, então, $(w_k) \subset L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ uma outra sequência que converge para u. Como antes, $\hat{w}_k \longrightarrow v'$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Mostremos que $\hat{u} = v = v'$. De fato, basta notar que

$$\|v - v'\|_2 \leq \|v - \hat{u}_k\|_2 + \|v' - \hat{w}_k\|_2 + \|u_k - u\|_2 + \|w_k - u\|_2.$$

Exatamente o mesmo argumento possibilita definir $\check{u}$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 1.20 (propriedades da transformada de Fourier) *Sejam* $u, v \in L^2(\mathbb{R}^N)$. *Então,*

(i) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\bar{v}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \bar{u}(x)v(x)dx.$

(ii) $\widehat{D^\alpha u} = (iy)^\alpha \hat{u}$ *para cada* $\alpha \in \mathbb{N}^N$ *tal que* $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

(iii) Se $u, v \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$, *então* $\widehat{(u * v)} = (2\pi)^{N/2}\hat{u}\hat{v}$.

(iv) Além disso, $u = (\hat{u})\check{} = \widehat{(\check{u}\,)}$.

Para a prova conferir Teorema 2, pg. 184 em [8].

1.5.2 Teorema do ponto fixo de Banach

Definição 1.15 (Contração) *Seja (X, d) um espaço métrico. Uma aplicação $F : X \to X$ é dita uma contração em X, se existe $\alpha \in [0, 1)$ tal que*

$$d(F(x), F(y)) \leq \alpha d(x, y), \ \forall x, y \in X.$$

Definição 1.16 (Ponto fixo) *Seja $F : X \to X$ uma aplicação qualquer. Dizemos que um elemento $x \in X$ é um ponto fixo de F, se $F(x) = x$.*

Teorema 1.21 (Ponto fixo de Banach) *Seja $X = (X, d) \neq \varnothing$ um espaço métrico completo com respeito a sua métrica d. Se $F : X \to X$ é uma contração, então F tem único ponto fixo em X.*

Demonstração. ***Existência***. Seja $x_0 \in X$ e considere a sequência $(x_n) \subset X$ onde $x_n = F^n(x_0) = F(F^{n-1}(x_0))$. Sendo F uma contração é fácil ver que $d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x_0, x_1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, para $n, p \in \mathbb{N}$ quaisquer

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq [\alpha^n + \alpha^{n+1} + ... + \alpha^{n+p-1}] d(x_0, x_1) \\ &= \alpha^n [1 + \alpha + ... + \alpha^{p-1}] d(x_0, x_1) = \\ &= \alpha^n \left(\frac{1 - \alpha^p}{1 - \alpha} \right) d(x_0, x_1) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha^n = 0$, pois $\alpha \in [0, 1)$, segue que (x_n) é uma sequência de Cauchy em X. Daí existe $x \in X$ tal que $d(x_n, x) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Para mostrar que x é ponto fixo de F basta notar que $d(x, F(x)) \leq d(x, x_{n+1}) + d(F(x), x_{n+1}) \leq d(x, x_{n+1}) + \alpha d(x, x_n) \longrightarrow 0$, quando $n \to +\infty$. Logo, $d(x, F(x)) = 0$ e portanto $F(x) = x$, ou seja x é ponto fixo de F em X.
Unicidade. Sejam x e x' dois pontos fixos de F em X, ou seja, $F(x) = x$ e $F(x') = x'$. Daí, $d(x, x') = d(F(x), F(x')) \leq \alpha d(x, x')$ e assim $d(x, x') = 0$. Portanto, $x = x'$. ■

1.5.3 Ascoli-Arzelá

Teorema 1.22 *Seja $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto. Toda sequência equicontínua e pontualmente limitada de funções contínuas $f_n : K \longrightarrow \mathbb{R}$, possui uma subsequência uniformemente convergente.*

1.5.4 Lema de Gronwall

Teorema 1.23 *Sejam $T > 0$, $A \geq 0$ e $f \in L^1(0,T)$ uma função não-negativa. Se $\varphi \in C[(0,T)]$ é uma função não-negativa tal que*

$$\varphi(t) \leq A + \int_0^t f(s)\varphi(s)ds,$$

para cada $t \in [0,T]$, então,

$$\varphi(t) \leq A \exp\left(\int_0^t f(s)ds\right),$$

para cada $t \in [0,T]$. Em particular, se $A = 0$, então $\varphi = 0$.

Para uma prova conferir Teorema A.5.4. em [8].

1.5.5 Identidades de Green

Teorema 1.24 *Suponhamos que Ω seja um subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave. Sejam $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$. Então, se ν é a normal unitária externa a Ω e $\frac{\partial}{\partial \nu}$ é a derivada direcional na direção de ν, temos*

(i) $\displaystyle\int_\Omega \nabla v \nabla u dx + \int_\Omega u \Delta v dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} u dS,$

(ii) $\displaystyle\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)dx = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) dx.$

Para uma prova veja Teorema A.C.3 em [8].

Capítulo 2

Equação do calor em $\mathbb{R}^N$

2.1 Equação do calor linear em $\mathbb{R}^N$

Nesta seção estudaremos a equação do calor em $\mathbb{R}^N$ e algumas propriedades importantes.

O núcleo do calor

Considere inicialmente a seguinte equação:

$$u_t - \Delta u = 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \times (0, +\infty). \tag{2.1}$$

Aplicando a transformada de Fourier na variável x em (2.1) e usando o Teorema 1.20 obtemos

$$\hat{u}_t + |\xi|^2 \hat{u} = 0, \ t > 0. \tag{2.2}$$

Resolvendo (2.2) em relação a t, determinamos uma família de soluções $\hat{u}(\xi) = Ae^{-t|\xi|^2}$, $A \in \mathbb{R}$. Daí, aplicando a transformada de Fourier inversa obtemos $u(x) = A(2t)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$. Pela Proposição 1.2 temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} A(2t)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx = A(2\pi)^{N/2}, \tag{2.3}$$

escolhendo $A = (2\pi)^{-N/2}$, temos que

$$K(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}. \tag{2.4}$$

A função K, definida acima, é chamada de *núcleo do calor*. Na figura 2.1 temos o núcleo do calor em três instantes de tempo diferentes.

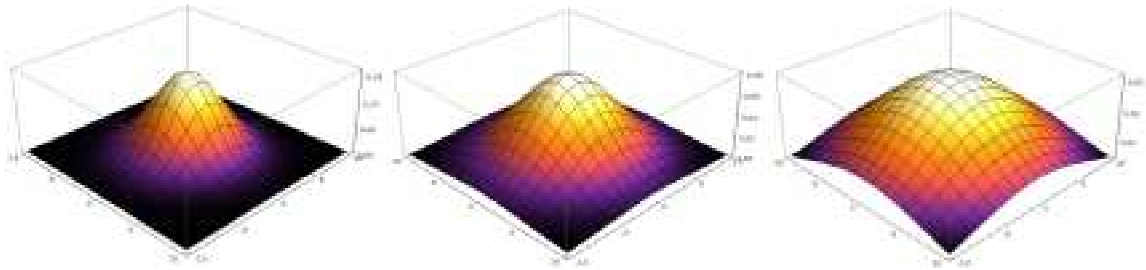

Fig. 2.1: $K(x, y, t_0)$; $(x, y) \in [-10, 10]^2 \subset \mathbb{R}^2$ e $t_0 = 5, 10, 15$

Teorema 2.1 (Núcleo do calor) *O núcleo do calor tem as seguintes propriedades:*

(i) $K(x,t)$ *satisfaz a equação (2.1);*

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} K(x,t)dx = 1,\ \forall t > 0$;

(iii) $\|K(t)\|_r = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}\left(1-\frac{1}{r}\right)} r^{-\frac{N}{2r}} \leq (4\pi t)^{-\frac{N}{2}\left(1-\frac{1}{r}\right)}$ *com* $r \in [1, +\infty]$;

(iv) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} K(t,x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^N$;

(v) $K(t+s) = K(t) * K(s),\ \forall t, s > 0$;

(vi) $K(0) := \displaystyle\lim_{t\to 0} K(t) = \delta_0$ *(onde* δ_0 *é o delta de Dirac) no sentido que dado* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < +\infty$, *temos que* $\displaystyle\lim_{t\to 0} \|K(t) * f - f\|_p = 0$.

Demonstração. Calculando diretamente obtemos

$$\frac{\partial K(x,t)}{\partial t} = K(x,t)\left[\left(\frac{|x|}{2t}\right)^2 - \frac{N}{2t}\right] = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} K(x,t) = \Delta K(x,t).$$

E portanto, (i) vale. O item (ii) segue de (2.3) e da escolha de A. Para a prova de (iii) suponha primeiro $r \in [1, +\infty)$. Daí,

$$\|K(t)\|_r^r = \int_{\mathbb{R}^N} (4\pi t)^{-\frac{Nr}{2}} e^{-\frac{|x|^2 r}{4t}} dx = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}(r-1)} r^{-\frac{N}{2}}.$$

E para $r = +\infty$,

$$\|K(t)\|_{+\infty} = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} \|e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}}\|_{+\infty} = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}}.$$

O item (iv) é uma consequência imediata de (iii). A prova de (v) consiste em fazer primeiro a mudança $y = \left(\frac{s}{t+s}\right)^{1/2} z$, depois, completar quadrado em relação a z e finalmente fazer a mudança $w = 2\left(\frac{s}{t+s}\right)^{1/2} x - z$, nesta ordem, e portanto

$$\begin{aligned}
K(t) * K(s) &= (4\pi t)^{-\frac{N}{2}}(4\pi s)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} e^{-\frac{|y|^2}{4s}} dy \\
&= (4\pi t)^{-\frac{N}{2}}(4\pi(t+s))^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{1}{4t}\left|x-\left(\frac{s}{t+s}\right)^{1/2} z\right|^2 - \frac{|z|^2}{(t+s)}} dz \\
&= (4\pi t)^{-\frac{N}{2}}(4\pi(t+s))^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x|^2}{(t+s)} - \frac{1}{4t}\left|2\left(\frac{s}{t+s}\right)^{1/2} x - z\right|^2} dz \\
&= K(t+s) \underbrace{(4\pi t)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|w|^2}{4t}} dw}_{=1} = K(t+s).
\end{aligned}$$

Em (vi) basta aplicar a Proposição 1.4 escrevendo $K(t,x) = \varphi_\varepsilon(x)$ com $\varepsilon = 2\sqrt{t}$, onde $\varphi(x) = \pi^{-\frac{N}{2}} e^{-|x|^2}$. ■

O problema homogêneo com dado inicial.

Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \times (0, +\infty) \\ u(x,0) = g(x) & \text{em } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{2.5}$$

Teorema 2.2 *Seja $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $p \in [1, +\infty)$ e defina $u(t) = K(t) * g$. Então,*

(i) u verifica a equação $u_t - \Delta u = 0$;

(ii) $u(0) := \lim_{t \to 0^+} u(t) = g$;

(iii) $\|u(t)\|_q \leq (4\pi t)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \|g\|_p$, $q \in [1, +\infty]$;

(iv) $u \in C([0, +\infty); L^p(\mathbb{R}^N)) \cap L^p(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty))$;

(v) $\|\, |\nabla u(t)|\, \|_p \leq C t^{-1/2} \|g\|_p$.

Demonstração. A prova do item (i) consiste em mostrar que $u_t - \Delta u = (K_t - \Delta K) * g = 0$. O item (ii) segue do Teorema 2.1, item (vi). Em (iii) é só aplicar a desigualdade de Young (para convoluções) e o item (ii) do Teorema 2.1 para obtermos

$$\|u(t)\|_q \le \|K(t)\|_r \|g\|_p \le (4\pi t)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|g\|_p, \text{ onde } 1+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+\frac{1}{p}.$$

Para a prova de (iv) note que $\|u(t)\|_p \le \|g\|_p$ e

$$\|u(x,t+h)-u(x,t)\|_p = \|K(t)*(K(h)*g-g)\|_p \le \|K(h)*g-g\|_p \to 0$$

quando $h \to 0$.

Como

$$\begin{aligned} |\nabla u(t)| &\le t^{-1/2}(4\pi t)^{-N/2}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\left(\frac{|x-y|^2}{4t}\right)^{1/2}|g(y)|dy \\ &= t^{-1/2}E(t)*|g|, \end{aligned}$$

onde $E(x,t)=(4\pi t)^{-N/2}e^{\frac{|x|^2}{4t}}\frac{|x|}{2\sqrt{t}}$. É fácil ver que $E(x,t)\in L^1(\mathbb{R}^N),\ \forall t>0$. Daí,

$$\|\ |\nabla u(t)|\ \|_p \le t^{-1/2}\|E(t)*g\|_p \le t^{-1/2}\|E(t)\|_1\|g\|_p,$$

provando o item (v). ■

Teorema 2.3 *Se $g\in L^\infty(\mathbb{R}^N)\cap C(\mathbb{R}^N)$ no problema (2.5), então $u\in C^\infty(\mathbb{R}^N\times(0,+\infty))$.*

Para a demonstração veja o Teorema 1, pg. 47 em [8].

Corolário 2.1 *Se $g\in L^p(\mathbb{R}^N)$, $p\in[1,+\infty)$, então $u\in C^\infty(\mathbb{R}^N\times(0,+\infty))$.*

Demonstração. Mostremos primeiramente que $u(t_0)\in L^\infty(\mathbb{R}^N)\cap C(\mathbb{R}^N)$, para cada t_0 positivo fixado. De fato, dado $t_0>0$, segue do item (iii), Teorema 2.2 que $\|u(t_0)\|_\infty \le (4\pi t_0)^{-\frac{N}{2p}}\|g\|_p$ e portanto $u(t_0)\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Seja $y\in\mathbb{R}^N$ com $|y|=1$ e $\varepsilon>0$. Daí,

$$\begin{aligned} |u(x_0+\varepsilon^{-1}y,t_0)-u(x_0,t_0)| &\le (4\pi t_0)^{-\frac{N}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}\left|e^{-\frac{|x_0-z|^2}{4t_0}}-e^{-\frac{|x_0+\varepsilon^{-1}y-z|^2}{4t_0}}\right||g(z)|dz \\ &\le (4\pi t_0)^{-\frac{N}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}\underbrace{\left|e^{-\frac{2\varepsilon^{-1}<y,x_0-z>+\varepsilon^{-2}}{4t_0}}-1\right|e^{-\frac{|x_0-z|^2}{4t_0}}|g(z)|}_{(*)}\,dz. \end{aligned}$$

Como a expressão em $(*)$ converge pontualmente para 0 (zero), quando $\varepsilon\to+\infty$, e é dominada por $\psi(z)=2e^{-\frac{|x_0-z|^2}{4t_0}}|g(z)|\in L^1(\mathbb{R}^N)$, segue do Teorema da Convergência Dominada que

$$|u(x_0,t_0)-u(x_0+\varepsilon^{-1}y,t_0)| \longrightarrow 0, \quad \text{quando } \varepsilon\to+\infty.$$

Portanto, $u(t_0) \in C(\mathbb{R}^N)$ para cada $t_0 > 0$. Assim, definindo $v(t) = K(t) * u(t_0)$ segue do teorema anterior que $v \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times (0,+\infty))$. Por outro lado $v(t) = K(t) * u(t_0) = K(t) * K(t_0) * g = K(t+t_0) * g = u(t+t_0)$. Portanto, $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times (0,+\infty))$. ∎

Proposição 2.1 (Positividade de u(x,t)) *Se $p \in [1,+\infty]$, $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ é não-negativa e $g \neq 0$ em uma pequena bola, então $u(t) = K(t) * g > 0$ em $\mathbb{R}^N \times (0,+\infty)$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor que a bola está centrada na origem e que existem $\varepsilon, \delta > 0$ tal que $g(y) \geq \varepsilon$ para quase todo $y \in B_\delta = \{y \in \mathbb{R}^N : |y| \leq \delta\}$. Observando, ainda, que $-|x-y|^2 \geq -(|x|+|y|)^2 \geq -2(|x|^2+|y|^2)$ temos

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)dy \geq \varepsilon(4\pi t)^{-\frac{N}{2}} \int_{B_\delta} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \\ &\geq \varepsilon(4\pi t)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2t}} \int_{B_\delta} e^{-\frac{|y|^2}{2t}} dy \geq C t^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2t}} > 0, \ \forall t \in (0,+\infty). \end{aligned}$$

∎

O problema não-homogêneo com dado inicial nulo.

Consideremos, agora, o seguinte problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{em } \mathbb{R}^N \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{2.6}$$

Teorema 2.4 *No problema (2.6) acima considere $f \in C_c^{1,2}(\mathbb{R}^N \times [0,+\infty))$ e defina*

$$u(t) = \int_0^t K(t-s) * f(s)ds.$$

Então,

(i) $u \in C^{1,2}(\mathbb{R}^N \times (0,+\infty))$;

(ii) u satisfaz a equação $u_t - \Delta u = f$ *em* $\mathbb{R}^N \times (0,+\infty)$;

(iii) $u(0) := \lim_{t \to 0^+} u(x,t) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^N$.

Demonstração. Para a prova dos ítens (i) e (ii) veja o Teorema 2, pg. 50 em [8]. E para o item (iii) basta notar que $\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq t\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N \times [0,+\infty))}$.

O problema não-homogêneo com dado inicial não-nulo.

Consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f \qquad \text{em} \ \ \mathbb{R}^N \times (0,+\infty) \\ u(x,0) &= g(x) \quad \text{em} \ \ \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{2.7}$$

Combinando o Corolário 2.1 e o Teorema 2.4 obtemos o seguinte resultado

Teorema 2.5 *Sejam $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, com $p \in [1,+\infty)$, e $f \in C_c^{2,1}(\mathbb{R}^N \times [0,+\infty))$. Defina*

$$u(t) = K(t) * g + \int_0^t K(t-s) * f(s)ds.$$

Então,

(i) $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^N \times (0,+\infty))$;

(ii) *u satisfaz a equação* $u_t - \Delta u = f$ *em* $\mathbb{R}^N \times (0,+\infty)$.

2.2 Princípio do máximo

Teorema 2.6 (Princípio do Máximo em $\mathbb{R}^N$) *Suponha que*

$$u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^N \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^N \times [0,T])$$

seja solução de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= 0 \qquad \text{em} \ \ \mathbb{R}^N \times (0,T) \\ u(x,0) &= g(x) \quad \text{em} \ \ \mathbb{R}^N \end{cases}$$

e satisfaz a estiva

$$u(x,t) \leq Ae^{a|x|^2}, \ \forall x \in \mathbb{R}^N \quad e \quad 0 \leq t \leq T. \tag{2.8}$$

para constantes positivas $A, a > 0$. Então,

$$\sup_{\mathbb{R}^N \times [0,T]} u = \sup_{\mathbb{R}^N} g. \tag{2.9}$$

Para uma demonstração veja o Teorema 6, pg. 57 em [8].

Observações: 1) Como consequência do Teorema 2.6 obtemos a unicidade de soluções para os problemas (2.5), (2.6) e (2.7). Para ver isso, basta considerar duas soluções u, v e fazer $w_\pm = \pm(u - v)$. Assim, $w_\pm$ é solução de

$$\begin{cases} (w_\pm)_t - \Delta(w_\pm) &= 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times (0, \infty) \\ w_\pm(x, 0) &= 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Como é fácil ver que as soluções $u, v \in L^\infty(\mathbb{R}^N \times (0, +\infty))$ em cada um dos problemas mencionados anteriormente, segue que u, v verificam a estimativa (2.8) e portanto w também. Podemos aplicar o Teorema 2.6 e obter $w_\pm \leq 0$, logo $u = v$.

Embora este capítulo tenha sido dedicado a equação do calor em $\mathbb{R}^N$, vamos enunciar um resultado válido para equações parabólicas mais gerais em domínios limitados.

Seja L o operador diferencial definido por

$$Lu(x, t) = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x, t) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x, t)u(x, t) + cu(x, t), \tag{2.10}$$

onde os coeficientes $a_{i,j}$, b_i e c são contínuos. Sejam $U \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e denote $U_T = U \times (0, T]$ e $\Gamma_T = \bar{U}_T - U_T$. Sejam ainda $u^+ = \max\{0, u\}$ e $u^- = \min\{0, u\}$.

Teorema 2.7 (Principio do máximo fraco) *Assuma que* $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$. *Para* $c = 0$ *em* U_T *temos que*

(i) Se $u_t + Lu \leq 0$ *em* U_T, *então* $\max_{\bar{U}_T} u = \max_{\Gamma_T} u.$

(ii) Se $u_t + Lu \geq 0$ *em* U_T, *então* $\min_{\bar{U}_T} u = \min_{\Gamma_T} u.$

Para $c \geq 0$ *em* U_T *obtemos*

(iii) Se $u_t + Lu \leq 0$ *em* U_T, *então* $\max_{\bar{U}_T} u \leq \max_{\Gamma_T} u^+.$

(iv) Se $u_t + Lu \leq 0$ *em* U_T, *então* $\max_{\bar{U}_T} u \geq -\min_{\Gamma_T} u^-.$

Para uma prova veja os Teoremas 8 e 9, páginas 368 e 369 em [8].

2.3 Equação do calor não-linear em $\mathbb{R}^N$

Vamos considerar, agora, o seguinte problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= g(u) \quad \text{em} \;\; \mathbb{R}^N \times (0,T) \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad \text{em} \;\; \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{2.11}$$

onde $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é *localmente lipschitziana*, ou seja, dado $M > 0$ existe $L_M > 0$ tal que $|g(x) - g(y)| \leq L_M|x - y|$ se $|x|, |y| \leq M$. O resultado principal é o seguinte.

Teorema 2.8 *Sejam $p \in [1, +\infty)$, $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$ e g localmente lipschitziana, com $g(0) = 0$. Existe uma única* **solução integral** *u de (2.11) definida num intervalo maximal $[0, T_{\max})$, isto é, $u \in E = L^\infty(\mathbb{R}^N \times (0,T)) \cap L^\infty((0,T); L^p(\mathbb{R}^N))$ para todo $T \in (0, T_{\max})$ e*

$$u(t) = K(t) * u_0 + \int_0^t K(t-s) * g(u(s))ds \tag{2.12}$$

para todo $t \in [0, T_{\max})$. Além disso, vale uma das seguintes alternativas:

(i) $T_{\max} = +\infty$;

(ii) ou $T_{\max} < +\infty$ e $\lim_{t \uparrow T_{\max}} \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = +\infty$ (**Blow up**).

No primeiro caso dizemos que **u é solução global** *e, no segundo, que* **u explode num tempo finito**.

Demonstração. ***Unicidade:*** Sejam u e v duas soluções integrais do problema (2.11). Escolhendo $M = \max\{\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N \times (0,T))}, \|u\|_{L^\infty((0,T);L^p(\mathbb{R}^N))}, \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N \times (0,T))}, \|v\|_{L^\infty((0,T);L^p(\mathbb{R}^N))}\}$ segue que

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq L_M \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} ds.$$

Basta, agora, aplicar o Lema de Gronwall com $\psi(t) = \|u(t) - v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$.

Existência: Considere inicialmente o caso em que g é *globalmente lipschitziana*, ou seja, existe uma constante positiva L tal que $|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. A demonstração consiste em introduzir um espaço de Banach conveniente e usar o argumento do ponto fixo. Considere, então, o seguinte espaço

$$X = \left\{ u : [0, +\infty) \to L^\infty \cap L^p : \; \max\left\{ \sup_{0 \leq t} e^{-\gamma t}\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \; \sup_{0 \leq t} e^{-\gamma t}\|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \right\} < +\infty \right\},$$

onde γ é uma constante positiva a ser determinada. É fácil ver que a quantidade $\|\cdot\|_X$ definida por

$$\|u\|_X = \max\left\{\sup_{0\le t} e^{-\gamma t}\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)},\ \sup_{0\le t} e^{-\gamma t}\|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\right\}$$

é uma norma sobre X e que, com esta norma, X é um espaço de Banach.

Defina em X a aplicação

$$\Phi(u(t)) = K(t) * u_0 + \int_0^t K(t-s) * g(u(s))ds.$$

Como

$$\sup_{0\le t} e^{-\gamma t}\|\Phi(u(t))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \le \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \frac{L}{\gamma}\sup_{0\le t} e^{-\gamma t}\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$$

e

$$\sup_{0\le t} e^{-\gamma t}\|\Phi(u(t))\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \frac{L}{\gamma}\sup_{0\le t} e^{-\gamma t}\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

segue que $\Phi(X) \subset X$. Além disso, dados $u, v \in X$ temos

$$\sup_{0\le t} e^{-\gamma t}\|\Phi(u(t)-v(t))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \le \frac{L}{\gamma}\sup_{0\le t} e^{-\gamma t}\|u(t)-v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$$

e

$$\sup_{0\le t} e^{-\gamma t}\|\Phi(u(t)-v(t))\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le \frac{L}{\gamma}\sup_{0\le t} e^{-\gamma t}\|u(t)-v(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Portanto,

$$\|\Phi(u-v)\|_X \le \frac{L}{\gamma}\|u-v\|_X.$$

Escolhendo $\gamma > L$, Φ é uma contração e portanto existe $u \in X$ tal que

$$u(t) = \Phi(u(t)) = K(t) * u_0 + \int_0^t K(t-s) * g(u(s))ds.$$

Para o caso em que g é localmente lipschitziana, seja $M = \max\{\|u_0\|\} + 1$ e defina

$$\widetilde{g}(u) = \begin{cases} g(M) & \text{se } u > M \\ g(u) & \text{se } |u| \le M \\ g(-M) & \text{se } u < -M. \end{cases}$$

Note que $\widetilde{g}$ é globalmente lipschitziana e assim existe $\widetilde{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^N \times (0,T)) \cap L^p(\mathbb{R}^N \times (0,T))$ tal que

$$\widetilde{u}(t) = K(t) * u_0 + \int_0^t K(t-s) * \widetilde{g}(\widetilde{u}(s))ds.$$

Como

$$\|\widetilde{u}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \int_0^t \|\widetilde{g}(\widetilde{u}(s))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} ds \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + K_M T$$

onde $K_M = \|\widetilde{g}\|_{L^\infty(-M,M)} = \|g\|_{L^\infty(-M,M)}$. Daí, escolhendo T tal que $K_M T \leq 1$ temos $\|\widetilde{u}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M$ para todo $t \in [0,T]$ e satisfaz (2.12) sobre $[0,T]$. Denotando $\widetilde{u}$ por u temos que u é solução de (2.12) em $[0,T]$.

Existência do intervalo maximal: Sejam u_1 e u_2 soluções de (2.12) definidas sobre $[0,T_1)$ e $[0,T_2)$, respectivamente e suponha que $T_1 < T_2$. Como u_2 ainda está definida sobre $[0,T_1)$ segue, por unicidade, que $u_1 = u_2$ sobre $[0,T_1)$. Considere, agora, a família $(u_i)_{i\in I}$ de todas as soluções de (2.12) definidas sobre algum intervalo $[0,T_i)$. Escolha $T_{\max} = \sup_{i\in I} T_i$ e note que podemos ter $T_{\max} = +\infty$. Defina a função $v(t) = u_i(t), \forall t \in [0,T_i)$ e $i \in I$. Essa função está bem definida pela propriedade de unicidade mencionada anteriormente e v é solução de (2.12) em $[0,T_{\max})$. A solução v definida dessa forma é chamada de *solução maximal* de (2.12).

Blow up: Seja u a solução maximal de (2.12) e suponhamos que

$$T_{\max} < +\infty \quad \text{e} \quad \liminf_{t\to T_{\max}} \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < +\infty.$$

Então, existe uma sequência (t_j) com $t_j \uparrow T_{\max}$ e $\|u(t_j)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M$. Da demonstração da existência pode-se observar que existe $T > 0$, dependendo somente de M, tal que v_j é solução de (2.12) e é definida em $[0,T]$ para cada dado inicial $u(t_j)$. Assim, u poderia ser estendida a $[0, T + t_j]$ porém, para j suficientemente grande temos que $T_{\max} < T + t_j$, o que é impossível visto que u é a solução maximal. ■

Observações: 1) O resultado anterior continua válido se $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$. Esta hipótese garante que $K(0) * u_0 := \lim_{t\to 0} K(t) * u_0 = u_0$.

2) Se $g(0) \neq 0$, precisamos supor que $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$ com $p \in [1, N/(N-2)]$ e $N \geq 3$. Esta restrição aparece no momento de verificar que $\Phi(K) \subset K$, ou mais precisamente que

$$\sup_{0\leq t} e^{-\gamma t} \|\Phi(u(t) - v(t))\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq +\infty.$$

Para $N = 1$ e 2 basta continuar tomando $p \in [1, +\infty)$.

3) A equação integral (2.12) é equivalente a

$$u(t) = K(t-\tau) * u(\tau) + \int_\tau^t K(t-s) * g(u(s)) ds, \text{ para } t \geq \tau \geq 0. \tag{2.13}$$

A equivalência entre (2.12) e (2.13) pode ser encontrada em [6].

2.4 Princíprio de comparação

Definição 2.1 *Seja* $\overline{u} \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N \times (0,T)) \cap C^{2,1}(\mathbb{R}^N \times (0,T))$ *tal que* $\lim\limits_{|x|\to+\infty} |\overline{u}(x,t)| = 0$, *para cada* $t \in (0,T)$. *Dizemos que* $\overline{u}$ *é uma* supersolução *de (2.11) se verifica*

$$\begin{cases} \overline{u}_t - \Delta\overline{u} & \geq & g(\overline{u}) & em & \mathbb{R}^N \times (0,T) \\ \overline{u}(x,0) & \geq & u_0(x) & em & \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{2.14}$$

Uma subsolução $\underline{u}$ *é definida de maneira análoga trocando* $\geq$ *por* $\leq$ *em (2.14).*

Teorema 2.9 (Princípio de Comparação) *Se* $\overline{u}$ *é supersolução,* $\underline{u}$ *é subsolução e* g *localmente lipchitz, então* $\underline{u} \leq \overline{u}$.

Demonstração. Segue da definição de supersolução e subsolução que

$$(\underline{u} - \overline{u})_t - \Delta(\underline{u} - \overline{u}) \leq g(\underline{u}) - g(\overline{u}). \tag{2.15}$$

Seja $M = \max\{\|\underline{u}\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^N \times (0,T))}, \|\overline{u}\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^N \times (0,T))}\}$. Multiplicando a desigualdade (2.15) por $(\underline{u} - \overline{u})^+$ e integrando temos que

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} (\underline{u} - \overline{u})_t (\underline{u} - \overline{u})^+ - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Delta(\underline{u} - \overline{u})(\underline{u} - \overline{u})^+ \leq L_M \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} (\underline{u} - \overline{u})^{+2}.$$

Do teorema fundamental do cálculo e integração por partes obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} (\underline{u} - \overline{u})^{+2} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\underline{u} - \overline{u})|^2 \leq L_M \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} (\underline{u} - \overline{u})^{+2}.$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} (\underline{u} - \overline{u})^{+2} \leq L_M \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} (\underline{u} - \overline{u})^{+2}.$$

Segue do Lema de Gronwall que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\underline{u} - \overline{u})^{+2} = 0.$$

Daí, $(\underline{u} - \overline{u})^+ = 0$ e portanto $\underline{u} \leq \overline{u}$. ∎

Capítulo 3

Comportamento Assintótico

3.1 Comportamento assintótico no caso LINEAR

Considere o seguinte problema

$$(I) \qquad \begin{cases} w_t - \Delta w = 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times (0, +\infty) \\ w(x,0) = \varphi(x) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

onde $0 \leq \varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \not\equiv 0$. Suponha, ainda, que φ satisfaz a seguinte condição

$$\lim_{|x| \to +\infty} |x|^\alpha \varphi(x) = A. \tag{3.1}$$

A existência de uma solução (clássica) para o problema (I) é assegurada pelo Teorema 2.3 e é dada explicitamente por

$$w(t) = K(t) * \varphi. \tag{3.2}$$

A unicidade de solução segue do Teorema 2.6. Da Proposição 2.1, segue que a solução w de (I) é positiva.

Nosso objetivo é mostrar que a solução positiva w do problema (I), *assintoticamente*, tem o mesmo comportamento da solução positiva W do problema

$$(II) \qquad \begin{cases} W_t - \Delta W = 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times (0, +\infty) \\ W(x,0) = A|x|^{-\alpha} & \text{em} \quad \mathbb{R}^N \backslash \{0\}, \end{cases}$$

em que $0 < \alpha < N$ e A é uma constante positiva. A restrição $\alpha < N$ garante que $W(\cdot, 0) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e a existência e unicidade de solução clássica é assegurada pela proposição a seguir.

Proposição 3.1 *Se $\alpha < N$ e $0 < A$, então o problema (II) tem uma única solução positiva W e que é dada explicitamente por*

$$W(t) = K(t) * (A|\cdot|^{-\alpha}). \tag{3.3}$$

Mais precisamente temos o seguinte resultado.

Teorema 3.1 *Suponha que φ satisfaz (3.1). Sejam w e W as soluções de (I) e (II), respectivamente. Então,*

$$t^{\alpha/2}|w(x,t) - W(x,t)| \xrightarrow{t\to+\infty} 0, \tag{3.4}$$

uniformemente sobre $E_c = \{(x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,+\infty);\ |x| \le c\sqrt{t}\}$, $c \ge 0$.

A solução de (II) tem uma característica importante que merece destaque em nossa discussão. Note que W é invariante pela transformação autossimilar

$$W_k(x,t) = k^\alpha W(kx, k^2 t),$$

ou seja, W_k também é solução de (II). Segue da unicidade na Proposição 3.1 que

$$W(x,t) = k^\alpha W(kx, k^2 t),\ \forall k > 0.$$

Dizemos neste caso que W é uma solução *autossimilar* do problema (II). Assim, o Teorema 3.1 afirma que a solução w do problema (I) é *assintoticamente autossimilar.*

Como W é uma solução radial de (II), definindo $k^2 t = 1$, podemos escrever

$$W(x,t) = t^{-\frac{\alpha}{2}} W\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right) = t^{-\frac{\alpha}{2}} f\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right). \tag{3.5}$$

Daí, substituindo (3.5) no problema (II) e notando que $W(x,0)$ verifica a condição (3.1), temos que a função f é a solução positiva do problema

$$(III) \qquad \begin{cases} f'' + \left(\dfrac{N-1}{\eta} + \dfrac{\eta}{2}\right) f' + \dfrac{\alpha}{2} f \ = 0,\ \eta > 0 \\ \\ f'(0) = 0 \quad \text{e} \quad \displaystyle\lim_{\eta\to+\infty} \eta^\alpha f(\eta) = A, \end{cases}$$

onde $' = \frac{d}{d\eta}$ e $\eta = \frac{|x|}{\sqrt{t}}$. Dessa forma, o Teorema 3.1 pode ser reescrito como segue.

Teorema 3.1' *Se φ satisfaz (3.1) e w é a solução positiva do problema (I), então*

$$|t^{\frac{\alpha}{2}} w(x,t) - f(|x|/\sqrt{t})| \xrightarrow{t \to +\infty} 0,$$

uniformemente sobre E_c, $c \geq 0$, onde f é a solução positiva do problema (III).

Encerramos esta subseção descrevendo o comportamento assintótico da solução do problema (I), com $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Incluimos tal resultado para exemplificar o fato do comportamento assintótico depender do espaço em que se encontra a condição inicial.

Teorema 3.2 *Se, no problema (I), $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$, então*

$$t^{\frac{N}{2}} |u(x,t) - \lambda_0 K(x,t)| \xrightarrow{t \to +\infty} 0, \tag{3.6}$$

uniformemente sobre E_c, $c \geq 0$, onde $\lambda_0 = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y) dy$.

Observação 3.1. Se $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$ satisfaz (3.1) e $\alpha > N$, então $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$. De fato, escolhendo $\epsilon = A$ na definição do limite (3.1), existe $R > 0$ tal que

$$\varphi(y) \leq 2A|y|^{-\alpha}, \quad \text{se } |y| \geq R,$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(y)| dy &\leq 2A \int_{|y| \geq R} |y|^{-\alpha} dy + \mu(B_R) \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\ &= \frac{2A\sigma(S^{N-1})}{\alpha - N} R^{N-\alpha} + \mu(B_R) \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < +\infty. \end{aligned}$$

Em particular, o Teorema 3.2 descreve o comportamento assintótico da solução do problema (I), com $\alpha > N$.

3.2 Comportamento assintótico no caso NÃO-LINEAR

No caso não-linear, estamos interessados no efeito da absorção de um termo da forma $-u^p$, sobre o comportamento descrito no Teorema 3.1. Estudaremos, assim, o comportamento assintótico da solução positiva do seguinte problema

$$(IV) \qquad \begin{cases} u_t - \Delta u = -u^p & \text{em } \mathbb{R}^N \times (0, +\infty) \\ u(x,0) = \varphi(x) & \text{em } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

onde $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$, $0 \leq \varphi \not\equiv 0$ e satisfaz (3.1). Supomos, ainda, que p, α e N satisfazem a relação

$$2/(p-1) \leq \alpha < N. \tag{3.7}$$

A hipótese (3.7) é bastante natural e a razão disso será melhor esclarecida na seção 3.3, onde descrevemos, de maneira informal, como se pode "intuir" o comportamento assintótico para a solução do problema (IV).

Observação 3.2. Note que se φ satisfaz (3.1) e $\alpha < N$, temos os seguintes fatos:

a) Existe $B > 0$ tal que

$$(P_1) \qquad |x|^\alpha \varphi(x) \leq B, \ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

De fato, supondo que φ satisfaz (3.1), por definição de limite, tomando $\epsilon = A$, existe $R > 0$ tal que

$$0 < |x|^\alpha \varphi(x) < 2A, \quad \text{se } |x| \geq R.$$

Para $|x| \leq R$, temos que

$$|x|^\alpha \varphi(x) \leq R^\alpha \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \quad \text{se } |x| \leq R.$$

Escolhendo $B = \max\{2A, R^\alpha \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\}$, temos

$$|x|^\alpha \varphi(x) \leq B, \ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

b) Como consequência de (3.1) e do item *a*), obtemos

$$(P_2) \qquad |x|^\alpha \varphi_k(x) \xrightarrow{k \to +\infty} A \ \text{ em } \ \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N),$$

ou seja,

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |kx|^\alpha \varphi(kx) \psi(x) dx = A \int_{\mathbb{R}^N} \psi(x) dx, \ \forall \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{3.8}$$

De fato, seja $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. De (3.1) temos que $|kx|^\alpha \varphi(kx)\psi(x) \to A\psi(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}^N$, quando $k \to +\infty$. Por outro lado, $||kx|^\alpha \varphi(kx)\psi(x)| \leq B|\psi(x)| \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Obtemos (3.8) aplicando o Teorema da Convergência Dominada.

Observação 3.3. Suponha $p = 1$ no problema (IV) e $0 \leq \varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $(\varphi \not\equiv 0)$. Fazendo a mudança $v(x,t) = e^t u(x,t)$, temos que v é solução do problema (I), cuja solução é dada explicitamente por $v(t) = K(t) * \varphi$ e assim $u(t) = e^{-t}K(t) * \varphi$. O comportamento assintótico para este caso é dado por

$$\lim_{t\to+\infty} e^t t^{N/2} u(x,t) = (4\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y)dy. \tag{3.9}$$

uniformemente sobre E_c, $c \geq 0$. De fato,

$$e^t t^{\frac{N}{2}} u(x,t) \;\; = \;\; (4\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \varphi(y)dy$$

Como $e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\varphi(y) \xrightarrow{t\to+\infty} \varphi(y)$ pontualmente e $|e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\varphi(y)| \leq e^{\frac{c^2}{4}}|\varphi(y)| \in L^1(\mathbb{R}^N)$ o resultado segue do Teorema da Convergência Dominada.

Em vista da Observação 3.1 com $\alpha > N$, segue que (3.9) continua válido para $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo (3.1). O comportamento descrito em (3.9) pode ser encontrado em [9], pg. 256.

No caso geral, em que $p > 1$, o resultado obtido (e o principal desta dissertação) é o seguinte

Teorema 3.3 *Sejam* $2/(p-1) \leq \alpha < N$ *e* φ *satisfazendo* (P_1) *e* (P_2). *Então,*

$$t^{\frac{\alpha}{2}}|u(x,t) - U(x,t)| \xrightarrow{t\to+\infty} 0,$$

uniformemente sobre E_c, $c \geq 0$. *Além disso,* U *é a única solução (clássica) positiva do problema*

$$(V) \qquad \begin{cases} U_t - \Delta U &= -\theta U^p \quad em \quad \mathbb{R}^N \times (0,+\infty) \\ U(x,0) &= A|x|^{-\alpha} \quad em \quad \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

onde

$$\theta = \begin{cases} 0, \; se \;\; 2/(p-1) < \alpha < N \\ 1, \; se \;\; 2/(p-1) = \alpha < N. \end{cases} \tag{3.10}$$

Podemos observar do Teorema 3.3 que, no caso $2/(p-1) < \alpha < N$, o *comportamento assintótico* da solução do problema (I) não é afetado pela presença do termo de absorção

$-u^p$. Já no caso $2/(p-1) = \alpha < N$, o comportamento sofre uma alteração, porém, ele ainda é assintoticamente autossimilar, em vista da autossimilaridade da solução do problema (V). Procedendo de maneira análoga ao que fizemos nos Teoremas 3.1 e 3.1$'$ podemos reescrever o Teorema 3.3 da seguinte forma.

Teorema 3.3' *Sejam* $2/(p-1) \leq \alpha < N$ *e* φ *satisfazendo* (P_1) *e* (P_2)*. Então,*

$$|t^{\frac{\alpha}{2}} u(x,t) - f_\theta(x,t)| \xrightarrow{t \to +\infty} 0,$$

uniformemente sobre conjuntos da forma E_c*, onde* f_θ *é a solução positiva do problema*

$$(VI) \qquad \begin{cases} f'' + \left(\dfrac{N-1}{\eta} + \dfrac{\eta}{2} \right) f' + \dfrac{\alpha}{2} f - \theta f^p = 0, \; \eta > 0 \\ \\ f'(0) = 0 \qquad e \qquad \lim\limits_{\eta \to +\infty} \eta^\alpha f(\eta) = A, \end{cases}$$

onde θ *é dado por (3.10).*

3.3 Descrição informal do comportamento assintótico

Nesta seção, descreveremos *informalmente* como chegar à conclusão que o comportamento assintótico esperado para a solução do problema (IV) seja dado pela solução do problema (V). Além disso, objetivamos dar uma justificativa razoável para o fato de trabalharmos sob a restrição $2/(p-1) \leq \alpha < N$.

Seja u a solução (clássica) positiva do problema (IV). A partir dela, defina a seguinte família de funções por meio da transformação autossimilar

$$u_k(x,t) = k^\alpha u(kx, k^2 t), \tag{3.11}$$

onde k é um número real positivo. Como u é solução do problema (IV), então, substituindo (3.11) em (IV), segue que as funções u_k são soluções dos problemas

$$(IV_k) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_k}{\partial t} - \Delta u_k &= -k^{-\nu} u_k^p \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times (0, +\infty) \\ u_k(x,0) &= \varphi_k(x) \qquad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

onde $\nu = \alpha(p-1) - 2$ e $\varphi_k(x) = k^\alpha \varphi(kx)$. Consideremos os dois seguintes casos:

1. Se $2/(p-1) \ < \ \alpha$, então $\nu > 0$;

2. Se $2/(p-1) \ = \ \alpha$, então $\nu = 0$.

O que se espera no primeiro caso é que, de alguma forma, tenhamos

$$u_k \longrightarrow U \quad \text{e} \quad \frac{\partial u_k}{\partial_t} - \Delta u_k = \underbrace{-k^{-\nu}}_{\to\ 0} u_k^p \xrightarrow{k\to+\infty} U_t - \Delta U = 0.$$

Já no segundo caso, a solução da equação $U_t - \Delta U = -U^p$ é invariante pela transformação autossimilar (3.11). Segue desses dois casos que é natural a suspeita de u_k convergir, de alguma forma, para solução da equação $U_t - \Delta U = -\theta U^p$, onde θ é dado por (3.10).

A hipótese $\alpha < N$ está relacionada ao fato da função $x \mapsto |x|^{-\alpha}$ ser localmente integrável em $\mathbb{R}^N$ (ver Corolário 1.2) definindo uma distribuição. Além disso, de (P_2) temos que

$$\varphi_k(x) \xrightarrow{k\to+\infty} A|x|^{-\alpha} \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N).$$

3.4 Descrição do método

O método consiste em estudar, primeiramente, o comportamento da família (u_k) de soluções dos problemas (IV_k), quando $k \to +\infty$. Prova-se que essa família, vista como uma sequência, converge para a solução U do problema (V), ou seja,

$$u_k(x,t) = k^\alpha u(kx, k^2 t) \xrightarrow{k\to+\infty} U(x,t).$$

Em particular,

$$u_k(x,1) = k^\alpha u(kx, k^2) \xrightarrow{k\to+\infty} U(x,1).$$

Depois de estabelecido esse resultado, escrevemos

$$k^2 = t' \quad \text{e} \quad x = x'/\sqrt{t'},$$

e obtemos

$$t'^{\frac{\alpha}{2}} u(x',t') \xrightarrow{t'\to+\infty} U(x'/\sqrt{t'},1) = f_\theta(|x'|/\sqrt{t'}) = t'^{\frac{\alpha}{2}} U(x',t').$$

O método que acabamos de descrever é o mesmo usado em [9], [14], [15] e [17].

3.5 Demonstração da Proposição 3.1

Observamos inicialmente que fixando $t_0 > 0$ temos que $W(x,t_0) = K(t_0) * A|x|^{-\alpha}$ está bem definida, ou seja, $W(x,t_0) < \infty$. De fato, dado $R > 0$

$$\begin{aligned} W(x,t_0) &= (4\pi t_0)^{-\frac{N}{2}} \int_{|y|\leq R} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t_0}} |y|^{-\alpha} dy + (4\pi t_0)^{-\frac{N}{2}} \int_{|y|\geq R} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t_0}} |y|^{-\alpha} dy \\ &\leq (4\pi t_0)^{-\frac{N}{2}} \int_{|y|\leq R} |y|^{-\alpha} dy + R^{-\alpha} (4\pi t_0)^{-\frac{N}{2}} \int_{|y|\geq R} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t_0}} dy \\ &\leq \frac{1}{R^\alpha} \left[\left(\frac{(4\pi t_0)^{-\frac{N}{2}} \sigma(S^{N-1})}{N-\alpha} \right) R^N + 1 \right] = C(R, t_0, \alpha, N) < \infty \end{aligned}$$

Procedendo como na prova do Corolário 2.1 temos que $W(x,t_0) \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$ e portanto $W(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times (0,+\infty))$. Além disso, W satisfaz a equação $W_t - \Delta W = 0$ e usando o Teorema da Convergência Dominada podemos mostrar que $W(x,0) := \lim_{t\to 0} W(x,t)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$. A unicidade segue do princípio do máximo (Teorema 2.6). ∎

3.6 Demonstração do Teorema 3.1

Notemos que

$$\begin{aligned} t^{\alpha/2} |w(x,t) - W(x,t)| &\leq Ct^{-\frac{N-\alpha}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |\varphi(y) - A|y|^{-\alpha}| dy \\ &= Ct^{-\frac{N-\alpha}{2}} \left(\int_{|y|\leq R} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |\varphi(y) - A|y|^{-\alpha}| dy + \int_{|y|\geq R} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |y|^{-\alpha} ||y|^\alpha \varphi(y) - A| dy \right) \\ &= Ct^{-\frac{N-\alpha}{2}} (L_1 + L_2). \end{aligned}$$

Para L_1, obtemos

$$\begin{aligned} L_1 &\leq \int_{|y|\leq R} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |\varphi(y)| dy + \int_{|y|\leq R} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |y|^{-\alpha} dy \\ &\leq \mu(B_R) \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \int_{|y|\leq R} |y|^{-\alpha} dy \\ &\leq \mu(B_R) \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \sigma(S^{N-1}) \int_0^R r^{N-\alpha-1} dr \end{aligned}$$

$$= \mu(B_R)\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \frac{\sigma(S^{N-1})}{N-\alpha}R^{N-\alpha}$$

$$= C_1\mu(B_R) + C_2R^{N-\alpha}.$$

Para L_2, observe inicialmente que tomando R suficientemente grande,

$$||y|^\alpha\varphi(y) - A| < \varepsilon,$$

visto que φ satisfaz (3.1). Logo,

$$\begin{aligned}
L_2 &\leq \varepsilon \int_{|y|\geq R} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}|y|^{-\alpha}dy \;\leq\; \varepsilon \int_{|y|\geq R} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t} + \frac{|x|}{\sqrt{t}}\frac{|y|}{2\sqrt{t}} - \frac{|y|^2}{4t}\right)|y|^{-\alpha}dy \\
&\leq \varepsilon \int_{|y|\geq R} \exp\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\frac{|y|}{2\sqrt{t}} - \frac{|y|^2}{4t}\right)|y|^{-\alpha}dy \\
&\leq \varepsilon 2^{N-\alpha}t^{\frac{N-\alpha}{2}} \int_{|z|\geq \frac{R}{2\sqrt{t}}} \exp\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}|z| - |z|^2\right)|z|^{-\alpha}dz \\
&= \varepsilon 2^{N-\alpha}t^{\frac{N-\alpha}{2}}\sigma(S^{N-1}) \int_{\frac{R}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} \exp\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}r - r^2\right)r^{N-\alpha-1}dr, \quad \text{sendo} \quad \frac{|x|}{\sqrt{t}} \leq c \quad \text{temos} \\
&\leq \varepsilon 2^{N-\alpha}t^{\frac{N-\alpha}{2}}\sigma(S^{N-1}) \int_{\frac{R}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} \exp\left(cr - r^2\right)r^{N-\alpha-1}dr \\
&\leq \varepsilon 2^{N-\alpha}t^{\frac{N-\alpha}{2}}\sigma(S^{N-1}) \int_{0}^{+\infty} \exp\left(cr - r^2\right)r^{N-\alpha-1}dr \\
&= \varepsilon 2^{N-\alpha}t^{\frac{N-\alpha}{2}}\sigma(S^{N-1})e^{\frac{c^2}{4}} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2}\left(\lambda + \frac{c}{2}\right)^{N-\alpha-1}dr}_{<\,+\infty} \\
&\leq \varepsilon C_3 t^{\frac{N-\alpha}{2}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$t^{\alpha/2}|w(x,t) - W(x,t)| \leq t^{-\frac{N-\alpha}{2}}(C_1\mu(B_R) + C_2R^{N-\alpha}) + \varepsilon C_3.$$

Daí, quando $t \to +\infty$, temos

$$t^{\alpha/2}|w(x,t) - W(x,t)| \ \leq \ \varepsilon C_3, \ \forall \varepsilon > 0.$$

■

3.7 Demonstração do Teorema 3.2

O Teorema 3.2 pode ser demonstrado pelo o mesmo método usado em [15]. Porém, faremos uma prova direta, o que, aliás, foi sugerido como "exercício" pelos próprios autores de [15]. Observamos anteriormente a solução (clássica) u do problema (I) é dada explicitamente por

$$w(t) = K(t) * \varphi,$$

onde K é o núcleo do calor e $*$ é a convolução. Assim, temos

$$\begin{aligned} t^{\frac{N}{2}}|w(x,t) - \lambda_0 K(x,t)| \ &\leq \ (4\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \left| e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} - e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \right| |\varphi(y)| dy \\ &\leq \ (4\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \left| e^{\frac{2\langle x,y\rangle - |y|^2}{4t}} - 1 \right| |\varphi(y)| dy \end{aligned}$$

Note que, pontualmente, temos $|e^{\frac{2\langle x,y\rangle - |y|^2}{4t}} - 1||\varphi(y)| \longrightarrow 0$, quando $t \longrightarrow +\infty$. Por outro lado, como $|x| \leq c\sqrt{t}$, $c \geq 0$ e $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$, então

$$|e^{\frac{2\langle x,y\rangle - |y|^2}{4t}} - 1||\varphi(y)| \leq (e^{\frac{c^2}{4}} + 1)|\varphi(y)| \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Do Teorema da Convergência Dominada, segue que

$$(4\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \left| e^{\frac{2\langle x,y\rangle - |y|^2}{4t}} - 1 \right| |\varphi(y)| dy \longrightarrow 0, \quad \text{quando } t \to +\infty.$$

■

3.8 O resultado principal

3.8.1 Resultados auxiliares

Para demonstrar o Teorema 3.3 precisamos de alguns resultados preliminares.

Sejam $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, $S = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$, e para cada $T > 0$ seja $S_T = \mathbb{R}^N \times (0, T]$. Assuma que $p > (N+2)/N$ e que $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \geq 0$ ($\not\equiv 0$).

Lema 3.1 *Se φ satisfaz (P_1), então existe $a > 0$ tal que para todo $k > 0$*

$$u_k(x,t) \leq aW\left(x, t + \frac{1}{k^2}\right), \quad (x,t) \in \bar{S}.$$

Demonstração. Observamos inicialmente que se $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$ e satisfaz (P_1), então existe uma constante $a > 0$ tal que

$$\varphi(x) \leq af(|x|) = aW(x,1), \ x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.12}$$

onde f é a solução positiva do problema (III). Para $t = 1$, temos

$$\lim_{|x| \to +\infty} |x|^\alpha f(|x|) = A,$$

ou seja, dado $\varepsilon > 0$ (em particular $\varepsilon < A$), $\exists \delta > 0$ tal que, se $|x| \geq \delta$, então

$$(A - \varepsilon)|x|^{-\alpha} < f(|x|) < (A + \varepsilon)|x|^{-\alpha}.$$

Portanto,

$$\varphi(x) \leq B|x|^{-\alpha} < \left(\frac{B}{A - \varepsilon}\right) f(|x|), \quad \text{para} \quad |x| \geq \delta. \tag{3.13}$$

Para $x \in \bar{B}_\delta$, isto é, $|x| \leq \delta$, seja $M = \inf\limits_{x \in \bar{B}_\delta} f(|x|)$. Como f é contínua e positiva,

$$M = \min_{x \in B_\delta} f(|x|) > 0.$$

Escolhendo $C \geq M^{-1} \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$, obtemos

$$\varphi(x) \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq CM \leq Cf(|x|), \ \forall x \in B_\delta. \tag{3.14}$$

Tomando, finalmente, $a = \max\left\{C, \frac{B}{A-\varepsilon}\right\}$ de (3.13) e (3.14) obtemos (3.12).

Segue de (3.12) que

$$\varphi_k(x) = k^\alpha \varphi(kx) \leq ak^\alpha f(|kx|) = ak^\alpha W(kx, 1), \ x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.15}$$

Definindo $z(x,t) = ak^\alpha W(x, k^2 t + 1)$, temos que z é uma solução da equação do calor ($z_t = \Delta z$) e por (3.15)

$$z(x,0) = ak^\alpha W(kx, 1) \geq \varphi_k(x).$$

Portanto, pelo Princípio de Comparação,

$$u_k(x,t) \leq z(x,t) = ak^\alpha W\left(kx, k^2\left(t+\frac{1}{k^2}\right)\right) = aW\left(x, t+\frac{1}{k^2}\right)$$

em $\bar{S}$. ■

Como consequência do lema anterior temos o seguinte

Corolário 3.1 *Se φ satisfaz (P_1), então existe $M > 0$ tal que, para todo $k > 0$,*

$$u_k(x,t) \leq M\tau^{-\alpha/2}, \qquad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq \tau > 0. \tag{3.16}$$

Demonstração. Pelo Lema 3.1 e a identidade (3.5)

$$u_k(x,t) \leq a\left(t+\frac{1}{k^2}\right)^{-\alpha/2} \sup\{f(\eta) : \eta \geq 0\} \leq M\tau^{-\alpha/2} = C_0(\tau),$$

onde $M = a\sup\{f(\eta) : \eta \geq 0\} < +\infty$. ■

Lema 3.2 *Suponha que φ satisfaz (P_1). Então, para cada $\tau > 0$, a família de funções $\{u_k(x,t) : k > 0\}$ é uniformemente Hölder contínua com expoentes 1 em x e $\frac{1}{2}$ em t, para cada compacto de $S \setminus S_\tau$.*

Demonstração. Vamor mostrar inicialmente que existe $C_1' = C_1'(\tau)$ tal que

$$|\nabla u_k| \leq C_1'(\tau), \ \forall t \geq 2\tau. \tag{3.17}$$

Para isso, note primeiramente que, se u_k é solução clássica de (IV_k), então u_k é solução da seguinte equação integral

$$u_k(t) = K(t-\tau) * u_k(\tau) - k^{-\nu}\int_\tau^t K(t-s) * u_k^p(s)ds.$$

Daí,

$$\nabla u_k \;\; = \;\; \nabla K(t-\tau) * u_k(\tau) - k^{-\nu}\int_\tau^t \nabla K(t-s) * u_k^p(s)ds.$$

Assim, do Teorema 2.2 item (v) e o Corolário 3.1 temos que

$$\begin{aligned}|\nabla u_k(t)| &\leq M_1(t-\tau)^{-1/2}\|u(\tau)\|_\infty + M_2k^{-\nu}\int_\tau^t (t-s)^{-1/2}\|u_k(s)\|_\infty^p ds \\ &\leq M_1(t-\tau)^{-1/2}\tau^{-\alpha/2} + M_2\tau^{-\alpha p/2}\int_\tau^t (t-s)^{-1/2}ds \ \leq \ C_1'(\tau).\end{aligned}$$

Segue de (3.17) que

$$|u_k(x,t) - u_k(y,t)| \leq C_1(\tau)|x-y|, \ \forall t \geq 2\tau.$$

Pelo Teorema 1 em [2], existem $C_2 = C_2(\tau)$ e $\delta = \delta(\tau)$ tais que

$$|u_k(x,t) - u_k(x,s)| \leq C_2(\tau)|t-s|^{1/2}, \quad t \geq \tau, \quad \forall x \in S,$$

desde que $|t-s| < \delta(\tau)$. ■

Observação: A prova do Teorema 1 em [2] é bastante técnica e a descreveremos em linhas gerais a seguir. Defina

$$v^{\pm}(x,t) = \mu\{1 + 2s\rho^{-2}(1+\rho)\}(t-t_0) + s\rho^{-2}|x-x_0|^2 + C_1(\tau)\rho \pm \{u(x,t) - u(x_0,t_0)\},$$

sobre $B_\rho(x_0) \times (t_0, t_1]$, onde $0 < \tau \leq t_0$, $\mu \geq |u^p|$ e

$$s = \sup_{t_0 \leq t \leq t_1} |u(x_0,t) - u(x_0,t_0)|.$$

Em seguida, usando o princípio do máximo verificamos que $v^{\pm}(x,t) \geq 0$. Daí,

$$s \leq C_1(\tau)\rho + \mu(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}\{4\mu\rho^{-2}(1+\rho)(t_1-t_0)\}.$$

Escolha $\rho > 0$ de tal forma que $4\mu\rho^{-2}(1+\rho)(t_1-t_0) = 1$. Assim, para $|t_1 - t_0| \leq \delta(\tau)$, temos que

$$s \leq M(t_1 - t_0)^{1/2}.$$

E portanto, $|u(x,t_1) - u(x,t_0)| \leq C_2(\tau)|t_1 - t_0|^{1/2}$, para $|t_1 - t_0| \leq \delta(\tau)$ e $x \in \mathbb{R}^N$.

Notação: Denotaremos por $C^{(1,\frac{1}{2})}(\Omega)$, o conjunto de todas as funções que são Hölder contínuas de expoentes 1 na variável x e 1/2 na variável t.

Proposição 3.2 *Se φ satisfaz (P_1), então existe $C_1 > 0$, que não depende de k, tal que*

$$\int_0^\tau \int_{B_1} u_k(x,t)dxdt \leq C_1\tau, \quad \tau > 0.$$

Demonstração. Mostremos primeiramente que se φ satisfaz (P_1), então

$$\int_0^\tau \int_{B_1} u_k(x,t)dxdt \leq a\sigma(S^{N-1}) \int_\varepsilon^{\tau+\varepsilon} s^{(N-\alpha)/2} \left(\int_0^{s^{-1/2}} f(r) r^{N-1} dr \right) ds, \tag{3.18}$$

onde $\varepsilon = 1/k^2$ e $s = t + \varepsilon$. A prova segue usando o Lema 3.1, a identidade (3.5), fazendo as mudanças de variáveis $\varepsilon = \frac{1}{k^2}$ e $s = t + \varepsilon$ depois $x = s^{1/2} z$ e finalmente coordenadas polares obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\tau \int_{B_1} u_k dxdt &\leq a \int_0^\tau \int_{B_1} W\left(x, t + \frac{1}{k^2}\right) dxdt \\
&= a \int_0^\tau \int_{B_1} \left(t + \frac{1}{k^2}\right)^{-\alpha/2} f\left(\frac{|x|}{(t + \frac{1}{k^2})^{1/2}}\right) dxdt \\
&= a \int_\varepsilon^{\tau+\varepsilon} \int_{B_1} s^{-\alpha/2} f\left(\frac{|x|}{s^{1/2}}\right) dxds \\
&= a \int_\varepsilon^{\tau+\varepsilon} s^{(N-\alpha)/2} \int_{B_{s^{-1/2}}} f(|z|) dzds \\
&= a\sigma(S^{N-1}) \int_\varepsilon^{\tau+\varepsilon} s^{(N-\alpha)/2} \underbrace{\left(\int_0^{s^{-1/2}} f(r) r^{N-1} dr \right)}_{(*)} ds.
\end{aligned}$$

Mostraremos, agora, que se f é solução do problema (III), então

$$\int_0^{s^{-1/2}} f(r) r^{N-1} dr \leq C^* s^{(\alpha-N)/2}, \quad s > 0, \tag{3.19}$$

para alguma constante positiva C^*. De fato, sendo f solução do problema (III), então $r^\alpha f(r) \xrightarrow{r \to +\infty} A$, ou seja, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, r_0 > 0$ tal que $|r^\alpha f(r) - A| < \varepsilon$, se $r \in [r_0, +\infty)$. Assim,

$$(A - \varepsilon) r^{-\alpha} < f(r) < (A + \varepsilon) r^{-\alpha}, \quad \text{se } r \in [r_0, +\infty).$$

Para $r \in [0, r_0]$, seja $M = \max\limits_{r \in [0, r_0]} f(r) > 0$. Como $r_0^{-\alpha} \leq r^{-\alpha}$ em $[0, r_0]$, escolha $\kappa \geq M r_0^\alpha$. Daí,

$$f(r) \leq M \leq \kappa r_0^{-\alpha} \leq \kappa r^{-\alpha}, \ \forall r \in [0, r_0].$$

Escolhendo, finalmente, $\widetilde{C} = \max\{\kappa, A + \varepsilon\}$ segue que

$$f(r) \leq \widetilde{C} r^{-\alpha}, \ \forall r \geq 0. \tag{3.20}$$

Substituindo (3.20) em $(*)$ obtemos

$$\int_0^{s^{-1/2}} f(r) r^{N-1} dr \leq \int_0^{s^{-1/2}} \widetilde{C} r^{N-\alpha-1} dr = C^* s^{\frac{(\alpha-N)}{2}}.$$

Portanto, substituindo (3.19) em (3.18) obtemos

$$\int_0^{\tau} \int_{B_1} u_k(x,t) dx dt \leq C_1 \tau.$$

■

A próxima proposição nos dá outra estimativa importante e análoga a anterior.

Proposição 3.3 *Se φ satisfaz (P_1), então existe $C_2 > 0$, que não depende de k, tal que*

$$\int_0^{\tau} \int_{B_1} u_k^p(x,t) dx dt \leq C_2 \begin{cases} \tau & se \;\; \gamma > 2 \\ \tau + (\tau + k^{-2})^{1/2} & se \;\; \gamma = 2 \\ (\tau + k^{-2})^{\gamma/2} & se \;\; 0 < \gamma < 2 \\ \log(k^2 \tau + 1) & se \;\; \gamma = 0 \\ k^{-\gamma} & se \;\; \gamma < 0, \end{cases}$$

onde $\gamma = N - \alpha p + 2$.

Demonstração. Procedendo como na prova de 3.18, obtemos

$$\int_0^{\tau} \int_{B_1} u_k^p(x,t) dx dt \leq a^p \sigma(S^{N-1}) \int_{\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} s^{(N-\alpha p)/2} \underbrace{\left(\int_0^{s^{-1/2}} f^p(r) r^{N-1} dr \right)}_{(**)} ds. \tag{3.21}$$

Diferentemente de $(*)$, na proposição anterior, em $(**)$ temos alguns casos a analisar.

<u>PRIMEIRO CASO:</u> $N - \alpha p > 0$ $(\gamma > 2)$. De (3.20) temos $f^p(r) \leq C r^{-\alpha p}$ e assim

$$\int_0^{s^{-1/2}} f^p(r) r^{N-1} dr \leq \widetilde{C}^p \int_0^{s^{-1/2}} r^{N-\alpha p-1} d\eta = C s^{-(N-\alpha p)/2}. \tag{3.22}$$

Substituindo (3.22) em (3.21) obtemos

$$\int_0^{\tau} \int_{B_1} u_k(x,t) dx dt \leq M_1 \tau. \tag{3.23}$$

<u>SEGUNDO CASO:</u> $N - \alpha p = 0$. Seja $q_0 \in \; (0, \lambda_0)$ onde

$$\lambda_0 = \begin{cases} (\tau+1)^{-1/2} & \text{se} \quad k \geq 1 \\ \tau^{-1/2} & \text{se} \quad 0 < k < 1 \end{cases} \;\leq\; s^{-1/2}.$$

Podemos, então, escrever

$$\int_0^{s^{-1/2}} f^p(r)r^{N-1}dr = \int_{q_0}^{s^{-1/2}} f^p(r)r^{N-1}dr + \int_0^{q_0} f^p(r)r^{N-1}dr. \tag{3.24}$$

Como f é contínua em $[0, q_0]$, seja $M = \max_{r\in[0,q_0]} f(r) > 0$. Logo, de (3.20) e (3.24) obtemos

$$\int_0^{s^{-1/2}} f^p(r)r^{N-1}dr \leq \widetilde{C}_1 \log\left(\frac{s^{-1/2}}{q_0}\right) + \widetilde{C}_2 \leq \widetilde{C}_3 s^{-1/2} + \widetilde{C}_4. \tag{3.25}$$

Substituindo (3.25) em (3.21) concluimos que

$$\int_0^\tau \int_{B_1} u_k^p(x,t)dxdt \leq M_2(\tau + (\tau + k^{-2})^{1/2}) \tag{3.26}$$

<u>Terceiro caso:</u> $N - \alpha p < 0$. De (3.24) e (3.20) segue que

$$\int_0^{s^{-1/2}} f^p(\eta)\eta^{N-1}d\eta \leq C^* < +\infty \tag{3.27}$$

Assim, substituindo (3.27) em (3.21) obtemos

$$\int_0^\tau \int_{B_1} u_k^p(x,t)dxdt \leq M_3 \int_\varepsilon^{\tau+\varepsilon} s^{(N-\alpha p)/2} ds$$

Temos agora, mais três casos a considerar: (i) $2 > N - \alpha p + 2 > 0$, (ii) $N - \alpha p + 2 = 0$ e (iii) $N - \alpha p + 2 < 0$. Para estes, obtemos, respectivamente,

$$\int_0^\tau \int_{B_1} u_k^p(x,t)dxdt \leq M_4 \log(k^2\tau + 1)$$

$$\int_0^\tau \int_{B_1} u_k^p(x,t)dxdt \leq M_5(\tau + k^{-2})^{\gamma/2} \tag{3.28}$$

$$\int_0^\tau \int_{B_1} u_k^p(x,t)dxdt \leq M_6 k^{-\gamma}$$

Finalmente, escolha $C_2 = \max\{M_i;\ i = 1, ..., 6\}$. ■

3.8.2 Demonstração do Teorema 3.3

Na demonstração do Teorema 3.3 faremos uso da seguinte noção de solução fraca para o problema (IV).

Definição 3.1 (Solução fraca) *Uma solução u do problema (IV) sobre $[0,T]$ é uma função não-negativa $u \in L^\infty(S_T) \cap C(S_T)$ que satisfaz a identidade*

$$\iint_{S_T} [(\zeta_t + \Delta\zeta)u - \zeta u^p]dxdt + \int_{\mathbb{R}} \zeta(x,0)\varphi(x)dx = 0$$

para toda $\zeta \in C^{2,1}(\bar{S_T})$ que se anula para $|x|$ grande e $t = T$.

A existência e unicidade de tal solução foi bem estabelecida em [12] e por regularidade parabólica (veja [1]) pode-se mostrar que $u \in C^{2,1}(S_T)$.

Antes de iniciarmos a demonstração enunciamos novamente o teorema.

Teorema: *Sejam $2/(p-1) \leq \alpha < N$ e φ satisfazendo (P_1) e (P_2). Então,*

$$t^{\frac{\alpha}{2}}|u(x,t) - U(x,t)| \xrightarrow{t\to+\infty} 0,$$

uniformemente sobre E_c, $c \geq 0$. Além disso, U é a única solução (clássica) positiva do problema

$$(V) \qquad \begin{cases} U_t - \Delta U = -\theta U^p & \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times (0,+\infty) \\ \\ U(x,0) = A|x|^{-\alpha} & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

onde

$$\theta = \begin{cases} 0, & se \quad 2/(p-1) < \alpha < N \\ \\ 1, & se \quad 2/(p-1) = \alpha < N. \end{cases}$$

A demonstração é um pouco longa e bastante técnica por isso faremos em alguns passos:
Primeiro passo: Seja $T > 0$ e $\tau \in (0,T)$, defina os conjuntos $S_T^\tau = S_T \setminus S_\tau$, $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$ e $Q_T[l] = \overline{B_l} \times [1/l, T]$, $l = 1, 2, \ldots$ Defina ainda $u_k^{(l)} = u_{k|_{Q_T[l]}}$.

Pelo corolário do Lema 3.1 existe uma constante $C_1(l)$ tal que $u_k^{(l)}(x,t) \leq C_1(l)$, $\forall(x,t) \in Q_T[l]$, isto é, $\{u_k^{(l)}\}$ é *uniformemente limitada* em $Q_T[l]$ e do Lema 3.2 temos $u_k^{(l)} \in C^{(1,\frac{1}{2})}(Q_T[l])$ e assim $\{u_k^{(l)}\}$ é *uniformemente equicontínuo*. Pelo Teorema de Ascoli-Arzelá, para cada $l \geq 1$, existe uma subsequência, a qual continuaremos denotando por $\{u_k^{(l)}\}$, e que *converge uniformemente* para uma função U_l definida em $Q_T[l]$.

Observação: Notemos que $U_l \in C^{(1,\frac{1}{2})}(Q_T[l])$, $\forall l = 1, 2, ...$ De fato, observe inicialmente que $\forall \varepsilon > 0, \exists\ \kappa = \kappa(\varepsilon)$ tal que, se $k \geq \kappa$, então

$$|u_k^{(l)}(x,t) - U_l(x,t)| < \varepsilon/2,\ \forall (x,t) \in Q_T[l].$$

Daí,

$$\begin{aligned} |U_l(x,t) - U_l(y,t)| &\leq \underbrace{|U_l(x,t) - u_k^{(l)}(x,t)|}_{\leq\ \varepsilon/2} + \underbrace{|u_k^{(l)}(x,t) - u_k^{(l)}(y,t)|}_{\leq\ C_1(l)|x-y|} + \underbrace{|U_l(x,t) - u_k^{(l)}(y,t)|}_{\leq\ \varepsilon/2} \\ &< C_1|x-y| + \varepsilon\ . \end{aligned}$$

Como ε é arbitrário temos $|U_l(x,t) - U_l(y,t)| \leq C_1(l)|x-y|$. Analogamente, prova-se que $|U_l(x,t) - U_l(x,s)| \leq C_2(l)|t-s|^{1/2}$.

Tomando uma subsequência diagonal obtemos uma sequência $u_{k'}$ e uma função $U \in C(S_T)$ tal que

$$u_{k'} \xrightarrow{k \to +\infty} U, \quad \text{em } C(K) \tag{3.29}$$

para todo subconjunto compacto $K \subseteq S_T$:

Note que, pelo Lema 3.1, para todo $\delta > 0$,

$$\sup\{U(x,t) : (x,t) \in \bar{S_T},\ t \geq \delta\} < +\infty. \tag{3.30}$$

Segundo passo: Mostremos que U é uma solução clássica de (V).

Lema 3.3 *Se φ satisfaz (P_1) e (P_2), então U é solução clássica de (V).*

Demonstração. Vamos provar inicialmente que U é solução fraca de (V) no sentido da Definição 3.1. Pela definição de u_k e usando integração por partes, para todo $\tau \in (0,T)$, e toda função teste $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\left(\iint_{S_\tau} + \iint_{S_T^\tau}\right) \left[(\zeta_t + \Delta\zeta)\, u_k - k^{-\nu}\zeta u_k^p\right] dxdt + \int_{\mathbb{R}^N} \zeta(x,0)\varphi(x)dx = 0. \tag{3.31}$$

Seja $\varepsilon > 0$. Segue das Proposições 3.2 e 3.3 que existem $\tau > 0$ e $k_0 > 0$ tais que, para todo $k > k_0$ temos

$$\iint_{S_\tau} \left[(\zeta_t + \Delta)\, u_k - k^{-\nu}\zeta u_k^p\right] dxdt < \frac{1}{2}\varepsilon, \tag{3.32}$$

e, como $U \leq aW$ pelo Lema 3.1 e as Proposições 3.2 e 3.3,

$$\iint_{S_\tau} \left[(\zeta_t + \Delta\zeta)\, U - k^{-\nu}\zeta U^p\right] dxdt < \frac{1}{2}\varepsilon \tag{3.33}$$

Por (3.29) temos,

$$\iint_{S_T^\tau} \left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \Delta\zeta\right) u_k - k^{-\nu}\zeta u_k^p\right] dxdt \xrightarrow{k'\to+\infty} \iint_{S_T^\tau} \left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \Delta\zeta\right) U - \theta\zeta U^p\right] dxdt \tag{3.34}$$

Por $(P1)$ e (3.8),

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \zeta(x,0)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \zeta(x,0)A|x|^{-\alpha}dx. \tag{3.35}$$

Das equações (3.31)-(3.35) obtemos

$$\left| \iint_{S_T} \left[(\zeta_t + \Delta\zeta)\, U - \theta\zeta U^p\right] dxdt + \int_{\mathbb{R}^N} \zeta(x,0)A|x|^{-\alpha}dx \right| \leq \varepsilon$$

Como ε pode ser escolhido arbitrariamente pequeno, segue que

$$\iint_{S_T} \left[(\zeta_t + \Delta\zeta)\, U - \theta\zeta U^p\right] dxdt + \int_{\mathbb{R}^N} \zeta(x,0)A|x|^{-\alpha}dx = 0,$$

e assim, como ζ foi uma função teste arbitrária, U é uma solução fraca do problema (V) no sentido da definição 3.1, com a única diferença que $U(x,0) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Em vista do Lema 3.2, e a convergência (localmente) uniforme de u_k para U, quando $k' \longrightarrow +\infty$ em S_T, $U \in C^{(1,\frac{1}{2})}(K)$, para todo subconjunto compacto $K \subseteq S_T$. Assim, por regularidade parabólica, como em [1], $U \in C^{2,1}(S_T)$, e portanto satisfaz a equação no sentido clássico. ■

Terceiro passo: Iremos mostrar, agora, que a sequência inteira u_k converge para U. Isso seguirá da unicidade de U, e que será estabelecida no Lema a seguir.

Lema 3.4 (Unicidade) *Sejam U_1 e U_2 soluções do problema (V), em que $\alpha < N$, e satisfazem (3.30) para algum $\delta > 0$, então $U_1 = U_2$ em S_T.*

Demonstração. Para $\theta = 0$, o Lema 3.4 é bem conhecido. Considere, então, o caso $\theta = 1$.

Sejam $R > 0$ e $\zeta \in C^{2,1}(B_R \times (0,T])$ uma função que se anula em $t = T$ e sobre $\partial B_R \times (0,T]$. Então, multiplicando a equação $U_t - \Delta U = -U^p$ por ζ e usando as identidades de Green, temos que U_1 e U_2 satisfazem a equação integral

$$\int_0^T \int_{B_R} \left[(\zeta_t + \Delta\zeta)\, U - \zeta U^p\right] dxdt + \int_{B_R} \zeta(x,0)A|x|^{-\alpha}dx = \int_0^T \int_{\partial B_R} \frac{\partial\zeta}{\partial\nu} U dSdt.$$

Dai, $V = U_1 - U_2$ satisfaz a identidade

$$\int_0^T \int_{B_R} (\zeta_t + \Delta\zeta - c\zeta) V dxdt = \int_0^T \int_{\partial B_R} \frac{\partial \zeta}{\partial \nu} V dSdt,$$

em que

$$c = \begin{cases} \dfrac{U_1^p - U_2^p}{U_1 - U_2}, & \text{se} \quad U_1 \neq U_2 \\ \\ pU_1^{p-1}, & \text{se} \quad U_1 = U_2. \end{cases}$$

Note que c é uma função positiva suave e limitada em $S_T \setminus S_\tau$ para cada $\tau \in (0,T)$.

Seja $F \in C_c^\infty(S_T)$, e escolha ζ como solução do problema

$$\begin{cases} \zeta_t + \Delta\zeta - c\zeta &= F \quad \text{em} \quad B_R \times (0,T] \\ \zeta(x,t) &= 0 \quad \text{em} \quad \partial B_R \times (0,T] \\ \zeta(x,T) &= 0 \quad \text{em} \quad B_R. \end{cases} \tag{3.36}$$

Como c e F são funções suaves, a existência e unicidade de ζ é assegurada. Para ver isso tome $\zeta(x,t) = \bar{\zeta}(x, T-t)$ onde $\bar{\zeta}$ é única solução do problema

$$\begin{cases} \bar{\zeta}_t - \Delta\bar{\zeta} + c\bar{\zeta} &= -F \quad \text{em} \quad B_R \times (0,T] \\ \bar{\zeta}(x,t) &= 0 \quad \text{em} \quad \partial B_R \times (0,T] \\ \bar{\zeta}(x,0) &= 0 \quad \text{em} \quad B_R. \end{cases} \tag{3.37}$$

A existência e unicidade de solução para (3.37) segue do Teorema 7, pg. 367 em [8].

Temos assim que

$$\int_0^T \int_{B_R} FVdxdt = \int_0^T \int_{\partial B_R} \frac{\partial \zeta}{\partial \nu} VdSdt. \tag{3.38}$$

Mostremos que o lado direito de (3.38) é nulo. Para isso, seja ξ a solução do seguinte problema

$$\begin{cases} \xi_t + \Delta\xi &= -|F| \quad \text{em} \quad B_R \times (0,T) \\ \xi(x,t) &= 0 \quad \text{em} \quad \partial B_R \times (0,T) \\ \xi(x,T) &= 0 \quad \text{em} \quad B_R. \end{cases} \tag{3.39}$$

A existência e unicidade de solução para (3.39) é obtida de maneira análoga a (3.36).

Como $c > 0$, segue facilmente do Princípio do Máximo (Teorema 2.7) que $\xi \geq 0$ e

$$|\zeta| \leq \xi \text{ em } \bar{B_R} \times [0,T],$$

e consequentemente
$$\left|\frac{\partial \zeta}{\partial \nu}\right| \leq \left|\frac{\partial \xi}{\partial \nu}\right|, \text{ sobre } \partial B_R \times [0,T].$$

Como $R^{N-1}|\partial\xi/\partial\nu| \to 0$, quando $R \to +\infty$, e $|V|$ é limitado temos que
$$\lim_{R\to+\infty}\left|\int_0^T\int_{\partial B_R}\frac{\partial\zeta}{\partial\nu}VdSdt\right| \leq \lim_{R\to+\infty}\int_0^T\int_{\partial B_R}\left|\frac{\partial\xi}{\partial\nu}\right||V|dSdt = 0.$$

E portanto,
$$\iint_{S_T} FVdxdt = 0.$$

Como F foi uma função arbitrária em $C_c^\infty(S_T)$ e V é contínua em S_T, conluímos do Lema de Du Bois-Raimond que $V = U_1 - U_2 = 0$ em S_T. ■

Fim da prova do teorema: Tendo determinado o limite da sequência (u_k) quando $k \to +\infty$, e caracterizada a função limite U, passemos agora à descrição do comportamento assintótico da solução u do problema (IV), quando $k \to +\infty$.

Suponha, primeiro, que $\alpha = 2/(p-1)$, logo se $U(x,t)$ é uma solução do problema (V) em S, com $\theta = 0$, então assim é a função $k^{2/(p-1)}U(kx, k^2t)$, para todo $k > 0$. Sendo U limitada para $|x|$ grande e $t \geq 0$, segue da unicidade provada no Lema 3.4 que
$$U(x,t) = k^{2/(p-1)}U(kx, k^2t), \text{ para todo } k > 0, \text{ em } S.$$

Portanto, U pode ser escrita na forma
$$U(x,t) = t^{-1/(p-1)}f_1(|x|/\sqrt{t}).$$

Suponha, agora, que $2/(p-1) < \alpha < N$. Temos provado que
$$u_k(x',t') = k^{\alpha/2}u(kx', k^2t') \xrightarrow{k\to+\infty} U(x',t'),$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^N$. Daí, se escrevermos $t' = 1$, $kx' = x$ e $k^2 = t$, obtemos
$$t^{\alpha/2}u(x,t) \xrightarrow{k\to+\infty} U(x/\sqrt{t}, 1) = f_0(|x|/\sqrt{t}) = t^{\alpha/2}U(x,t),$$

uniformemente sobre E_c, $c \geq 0$. ■

3.8.3 Outra prova do Teorema 3.1

Defina a função $w_k(x,t) = k^{\alpha} w(kx, k^2 t)$ e $z_k = u_k - w_k$. Então, para todo $T > 0$, z_k satisfaz a identidade integral

$$\iint_{S_T} \left[(\zeta_t + \Delta\zeta)\, z_k - k^{-\nu} \zeta u_k^p \right] dxdt = 0.$$

Segue das proriedades de u_k e w_k que existe uma subsequência $\{z_{k'}\}$ e uma função $Z \in C(S_T)$ tal que $z_{k'} \to Z$, quando $k' \to +\infty$, uniformemente sobre qualquer subconjunto compacto de S_T. Da mesma forma que Lema 3.3 obtemos

$$\iint_{S_T} (\zeta_t + \Delta\zeta)\, Z dxdt = 0.$$

Como Z satisfaz (3.30) segue do Lema 3.4 que $Z(x,t) = 0$, para todo $(x,t) \in S_T$. Daí, a sequência inteira z_k converge para $Z = 0$.

Portanto, se $2/(p-1) < \alpha < N$, o comportamento assintótico da solução u da equação não-linear (IV) é o mesmo da equação linear (I).

3.9 Uma Generalização.

Na generalização que faremos, iremos supor que o limite de $|x|^{\alpha}\varphi(x)$, quando $|x| \to +\infty$, não é necessariamente o mesmo ao longo de todo raio, como estava implícito na condição de decaimento (3.1). O que iremos assumir, agora, é que esse limite possa variar com a direção que se tome. Considere, então, a seguinte.

Definição 3.2 *Dizemos que φ tem a Propriedade $(P_2)^*$, se para cada $\omega \in \mathbb{R}^N$, com $|\omega| = 1$,*

$$(P_2)^* \qquad \lim_{|x|\to+\infty} |x|^{\alpha} \varphi(|x|\omega) = A(\omega).$$

em que $A(\omega) \geq 0$ ($A(\omega) \not\equiv 0$).

Procedendo como na prova do Teorema 3.3, obtemos.

Teorema 3.4 *Sejam $2/(p-1) \leq \alpha < N$ e u a solução positiva do problema (IV), em que φ tem a propriedade (P_1) e $(P_2)^*$. Então,*

$$\left| t^{\alpha/2} u(x,t) - h(x/\sqrt{t}) \right| \longrightarrow 0, \quad \text{quando } t \to +\infty, \tag{3.40}$$

uniformemente sobre conjuntos E_c, $c \geq 0$, onde $h(\xi)$ é a solução positiva do problema

$$(VII) \qquad \begin{cases} \Delta h + \dfrac{1}{2}\xi \cdot \nabla h + \dfrac{\alpha}{2} h - \theta h^p = 0, \qquad \xi \in \mathbb{R}^N \\ \\ \displaystyle\lim_{|\xi| \to +\infty} |\xi|^\alpha h(|\xi|\omega) = A(\omega), \end{cases}$$

onde

$$\theta = \begin{cases} 0, \ \ se \ \ 2/(p-1) < \alpha < N \\ 1, \ \ se \ \ 2/(p-1) = \alpha < N. \end{cases}$$

A existência e unicidade de uma solução positiva do problema (VII) é assegurada pela prova do Teorema 3.4.

Exemplo. Sejam, $N = 1, \ p = 5$ e $\alpha = \frac{1}{2}\ (2/(p-1))$. Assim temos o seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^5 \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Suponha também que

$$|x|^{\frac{1}{2}} \varphi(x) \longrightarrow \begin{cases} 0, \text{ se } x \to -\infty \\ 1, \text{ se } x \to +\infty. \end{cases}$$

Pelo Teorema 3.4 temos que

$$\left| t^{\frac{1}{2}} u(x,t) - h(x/t^{\frac{1}{2}}) \right| \to 0 \text{ quando } t \to +\infty,$$

onde h é a solução positiva do problema

$$\begin{cases} h'' + \dfrac{1}{2}\xi h' + \dfrac{1}{4} h - h^5 = 0, \quad \xi \in \mathbb{R} \\ \\ \displaystyle\lim_{|\xi| \to +\infty} |\xi|^{\frac{1}{2}} h(\xi) = \begin{cases} 0, \text{ se } \xi \to +\infty \\ 1, \text{ se } \xi \to -\infty. \end{cases} \end{cases}$$

Note que a função $h(\xi)$ não é simétrica.

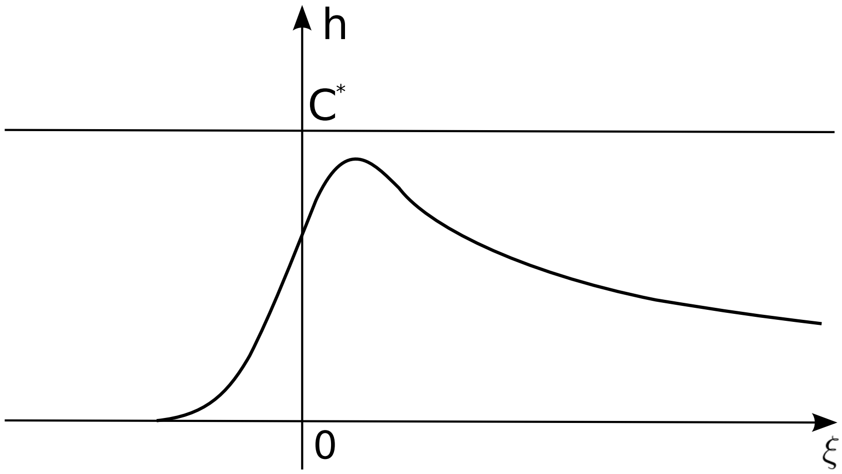

Fig. 3.9: A função h do exemplo anterior.

3.10 Outros resultados sobre comportamento assintótico

Os resultados que vamos descrever nessa seção são referentes aos casos em que (p, α) pertencem às regiões indicadas na figura 3.10, veja [17, pg. 130]. Por exemplo, os teoremas que estudamos até então são referentes aos casos $(p, \alpha) \in II$ e $(p, \alpha) \in III$, ou seja, $2/(p-1) = \alpha$ e $2/(p-1) < \alpha < N$, respectivamente.

Na descrição que faremos, informamos: $a)$ a referência do artigo em que o resultado pode ser encontrado; $b)$ o comportamento assintótico; $c)$ o conjunto sobre o qual a convergência é uniforme e $d)$ as hipóteses sobre o dado inicial.

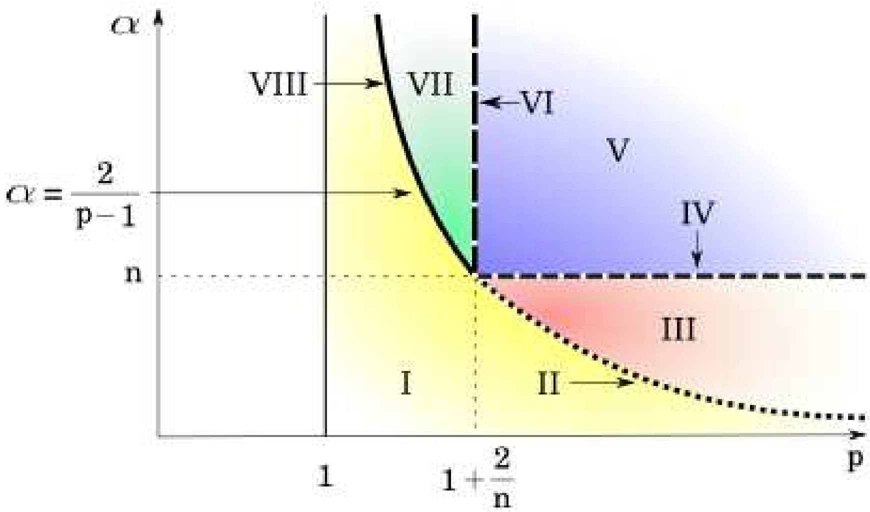

Fig. 3.10: Regiões que descrevem os diversos casos para p e α.

- $(p,\alpha) \in I$, [9]:

$$\left| t^{\frac{1}{p-1}} u(x,t) - (1/(p-1))^{\frac{1}{p-1}} \right| \longrightarrow 0, \quad \text{quando } t \to +\infty,$$

uniformemente sobre $E_c,\ c \geq 0$, em que $0 \leq u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$ ou $u_0 \in L^q(\mathbb{R}^N)$, $(1 \leq q < +\infty)$, e u_0 satisfaz a condição

$$\lim_{|x| \to +\infty} |x|^{\frac{2}{p-1}} u_0(x) = +\infty.$$

- $(p,\alpha) \in II$, [16]:

$$t^{\frac{\alpha}{2}} |u(x,t) - U(x,t)| \longrightarrow 0, \quad \text{quando } t \to +\infty,$$

uniformemente sobre $E_c,\ c \geq 0$, em que w é a solução do problema

$$\begin{cases} U_t - \Delta U &= -U^p & \text{em} & \mathbb{R}^N \times (0,+\infty) \\ \\ U(x,0) &= A|x|^{-\alpha} & \text{em} & \mathbb{R}^N \backslash \{0\}, \end{cases}$$

e $0 \leq u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$ satisfaz a condição

$$\lim_{|x| \to +\infty} |x|^\alpha u_0(x) = A > 0.$$

- $(p,\alpha) \in III$, [16]:

$$t^{\frac{\alpha}{2}} |u(x,t) - w(x,t)| \longrightarrow 0, \quad \text{quando } t \to +\infty,$$

uniformemente sobre $E_c,\ c \geq 0$, em que w é a solução do problema

$$\begin{cases} w_t - \Delta w &= 0 & \text{em} & \mathbb{R}^N \times (0,+\infty) \\ \\ w(x,0) &= u_0(x) & \text{em} & \mathbb{R}^N \backslash \{0\}, \end{cases}$$

e $0 \leq u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$ satisfaz a condição

$$\lim_{|x| \to +\infty} |x|^\alpha u_0(x) = A > 0.$$

- $(p, \alpha) \in V$, [9]:

$$t^{\frac{N}{2}} |u(x,t) - c_0 K(x,t)| \longrightarrow 0, \quad \text{quando } t \to +\infty,$$

uniformemente sobre E_c, $c \geq 0$, em que K é o núcleo do calor, $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e

$$c_0 = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)dx - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |u(x,t)|^{p-1} u(x,t) dxdt \;=\; constante.$$

- $(p, \alpha) \in VI$, [9]:

$$t^{\frac{N}{2}} |u(x,t)| \longrightarrow 0, \quad \text{quando } t \to +\infty,$$

uniformemente sobre E_c, $c \geq 0$, em que $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

- $(p, \alpha) \in VII$, [3]:

$$|t^{\frac{1}{p-1}} u(x,t) - \omega(x,t)| \longrightarrow 0, \quad \text{quando } t \to +\infty,$$

uniformemente sobre $\mathbb{R}^N$, em que $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $u(x, t_0) \leq Ae^{-a|x|^2}$ para algum $t \geq 0$, $A > 0$, $a > 0$, e $\omega(x,t) = t^{-\frac{1}{p-1}} f(x/\sqrt{t})$, com $f \in C^{+\infty}(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo

$$\begin{cases} -\Delta f - \dfrac{1}{2} x \cdot \nabla f + f^p - \dfrac{1}{p-1} f = 0 \\ \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f(x)|^2 e^{|x|^2/4} dx < +\infty \\ \\ 0 < f(x) < Ce^{-a_0|x|^2}, \text{ para algum } C > 0 \text{ e } 0 < a_0 < 1/4. \end{cases}$$

Referências Bibliográficas

[1] A. Friedman, *Partial differential equations of parabolic type,* Printice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1964.

[2] B. H. Gilding, *Hölder Continuity of solutions of parabolic equations*, J. London Math. Soc., Vol. 13 (1976), pg. 103-106.

[3] Escobedo, M. e Kavian, O. *Asymptotic behaviour of positive solutions of a nonlinear heat equation.* Houston J. Math. Vol. 14 (1988), No. 1, pg. 39-50.

[4] G. B. Folland, *Real analysis*, Modern techniquer and their applications. 2ª ed, Wiley-Interscience, 1999.

[5] H. Brézis, *Análisis Fuctional*, teoría y aplicaciones, Alianza, Madrid, 1984.

[6] H. Brézis e T. Cazenave, *Nonlinear evolution equation* (em preparação), 1994.

[7] J. Barros-Neto, *An introduction to the theory of distributions.* Marcel Dekker, New York, 1973.

[8] L. C. Evans, *Partial Differential Equation*, American Mathematical Society, 1998.

[9] L. Gmira - L. Veron, *Large time behaviour of the solutions of a semilinear parabolic equation in* $\mathbb{R}^n$, J. Diff. Equ., Vol. 53 (1984), pg. 258-276.

[10] L. Herraiz. *Asymptotic behaviour of solutions of some semilinear parabolic problems.* Anales de L'I.H.P., Section C, Vol. 16 (1999), No. 1, pg. 49-105.

[11] N. D. Alikakos - R. Rostamian, *On the uniformization of the solution of the porous medium equation in* $\mathbb{R}^n$. Israel J. Math., Vol. 47 (1984), pg. 270-290.

[12] O. A. Oleinik - S. N. Kruzhkov, *Quasilinear second order parabolic equations many indenpendent variables*, Russian Math., Surveys, 16 (1961), pg. 105-146.

[13] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic press, New York, 1975.

[14] S. Kamin (Kamenomostkaya), *The aymptotic behaviour of the solution of the filtration equation*, Israel J. Math, Vol. 14 (1973), pg. 76-87.

[15] S. Kamin e A. Friedman, The asymptotic behaviour of gas in an n-dimensional porous medium, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 262 (1980), pg. 551-563.

[16] S. Kamin e L. A. Peletier, *Large time behaviour of solutions of the heat equation with absorption.*, Annali Scuola Normale Sup. di Pisa, Vol. 12 (1985), No. 3, pg. 393-408.

[17] S. Kamin e L. A. Peletier, *Large time behaviour of solutions of the porous media equation with absorption.*, Israel J. Math, Vol. 55 (1986), No. 2, pg. 129-146.

[18] Š. Schwabik e Y. Guoju. *Topics in banach space integration*, World Scientific Publishing, New Jersey, 2005.

[19] V. A. Galaktionov - S. P. Kurdjumov - A. A. Samarskii, *On asymptotic «Eigenfunctions» of the Cauchy problem for a nonlinear parabolic equation*, Mat. Sbornik, Vol. 126 (1985), No. 4, pg. 435-472.