PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

ANDERSON BARROS LUCAS

EQUAÇÕES E FUNÇÕES: DESCONTINUIDADES CONCEITUAIS

MESTRADO ACADÊMICO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo

2009

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

ANDERSON BARROS LUCAS

EQUAÇÕES E FUNÇÕES: DESCONTINUIDADES CONCEITUAIS

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação da **Profª. Drª. SONIA PITTA COELHO.***

São Paulo

2009

Banca Examinadora

“Por que nos torna tão pouco felizes esta maravilhosa ciência aplicada, que economiza trabalho e torna a vida mais fácil? A resposta é simples: porque ainda não aprendemos a nos servir dela com bom senso.”

(Albert Einstein, 1879 – 1955)

AGRADECIMENTOS

Ao Criador, pela vida.

A meus pais e irmãos, por terem me ensinado que o melhor caminho, mas nem sempre o mais simples, é o da paz na consciência.

À minha esposa, por ter perseverado ao meu lado nos momentos que antecederam esta conquista, e por me dar a certeza de que continuará comigo em todos os outros que virão.

À Dra. Sonia Pitta Coelho, que desde as primeiras ideias sempre deu seu valioso apoio e inestimável contribuição, estimulando-me a melhorar cada vez mais.

Às Dras. Barbara Lutaif Bianchini e Leila Zardo Puga, por participarem da banca e gentilmente fazerem observações precisas que mostraram o rumo para a conclusão deste trabalho.

Ao Dr. Gabriel Chalita, que à época em que esteve à frente da Secretaria Estadual de Educação de São Paulo, instituiu o Programa Bolsa Mestrado, sem o qual esta realização não seria possível.

A todos os professores e colegas do Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, pelas lições de profissionalismo e amizade que levarei para toda a vida.

À equipe pedagógica e aos alunos do Colégio Delta, por terem gentilmente aceitado integrar este projeto, contribuindo de forma decisiva e marcante.

A todas as pessoas que tenham contribuído de alguma forma, mas que não há espaço nessas parcas linhas para agradecer.

RESUMO

O problema de pesquisa deste trabalho está relacionado a questões formuladas desde o início de nossa experiência profissional, tendo atingido o *status* de problemática durante o Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, particularmente no grupo de pesquisa TecMEM (Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática). Apesar do grande número de pesquisas sobre o tema “Funções”, sentimos a necessidade de especificar questionamentos acerca das articulações deste tema com o tema “Equações”. Para isso, formulamos a seguinte questão: *Ao se abordar os diferentes tipos de funções no ensino médio, quais são e porque ocorrem descontinuidades conceituais que levam a conclusões errôneas acerca das raízes dessas funções?* Apoiados em pesquisas anteriores sobre os temas, elaboramos um instrumento que foi aplicado a doze alunos do 2º Ano do Ensino Médio para diagnosticar, por exemplo, quais conhecimentos estes sujeitos mobilizam para distinguir uma equação de uma função dada por uma expressão algébrica ou, ainda, em que medida esta distinção influencia na compreensão dos gráficos destas funções. Nosso foco foram as equações de 1º e 2º graus e as funções afins e quadráticas. Para a análise dos protocolos, baseamo-nos na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e na metodologia da análise de conteúdo, identificando as principais descontinuidades presentes nos registros em língua natural. Como um dos resultados mais importantes obtidos em nossa investigação, verificamos que, ao buscar raízes para uma dada função, os sujeitos participantes da pesquisa trataram-na como uma equação, procurando solucioná-la e encontrar um ou mais valores para sua variável independente, que no caso foi tratada como incógnita. Destacamos a necessidade de se incentivar na escola atividades que contemplem conversões entre os registros de representação semiótica requeridos para a compreensão dos conceitos envolvidos, que propiciem aos alunos reconhecer semelhanças e refletir sobre as diferenças entre estes dois objetos matemáticos, que consensualmente integram o rol de ideias centrais a serem ensinadas em Álgebra.

Palavras-Chave: Funções, Equações, Registros de Representação Semiótica, Análise de Conteúdo.

ABSTRACT

The research problem in this work is related to questions raised since the beginning of our professional experience, having reached the status of a research issue during the Postgraduate Studies Program in Mathematics Education of PUC-SP, particularly in the research group named TecMEM (Technologies and Means of Mathematical Expression). Despite the large number of studies on the theme "Functions", we have felt the need to specify the ways in which this issue might be related to the theme "Equations". To accomplish this task, we have proposed the following question: *When addressing the various types of functions taught during High School, which are and why are there conceptual discontinuities that lead to erroneous conclusions about the roots of these functions?* Supported by previous research on the topic, we have developed an instrument that was applied to twelve students in the second year in High School to diagnose, for example, which knowledge these individuals mobilize to distinguish an equation of a function given by an algebraic expression or, also, to what extent this distinction influences the understanding of the graphs produced by these functions. We have focused on 1st and 2nd degree equations and linear and quadratic functions. For the analysis of the protocols, we have based our analysis on the Theory of Semiotic Representation Records by Raymond Duval and on the methodology of content analysis, identifying the main discontinuities in the natural language records. As one of the most important results obtained in our investigation, we verified that, when looking for roots for a given function, the participant subjects of the research treated her as an equation, trying to solve her and to find one or more values for her independent variable, that in the case was treated as unknown. We highlight the need to encourage school activities addressing conversions between the semiotic representation records required for the understanding of the concepts involved, that encourage students to recognize similarities and differences between those two mathematical objects, which consensually belong to the list of central ideas to be taught in Algebra.

Keywords: Functions, Equations, Semiotic Representation Records, Content Analysis.

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO 4

LISTA DE QUADROS

CAPÍTULO 2

LISTA DE TABELAS

CAPÍTULO 2

CAPÍTULO 4

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Segundo **A arte da pesquisa**, (BOOTH, 2000) um problema prático pode converter-se em um problema de pesquisa. Neste sentido, a vivência do pesquisador na área de interesse pode suscitar questões que, devidamente estruturadas e amealhadas, podem integrar o corpo de seu trabalho.

Dentro de nossa experiência profissional, foram vários os momentos em que as reflexões acerca de questões fundamentais no ensino de Álgebra fizeram-se presentes. No início pareciam-nos genéricas, abordando temas corriqueiros do cotidiano escolar, tais como:

- Porque os alunos, de forma geral, apresentam dificuldades técnicas nos manejos algébricos?
- Quais as causas de tantos erros e conceitos falhos em sua formação algébrica?
- O que motiva um aprendizado algébrico efetivo, que permaneça e contribua para a continuidade dos estudos nas demais séries?

Com o passar do tempo e a consequente apuração do senso crítico sobre a própria prática, essas questões deixaram o *status* de meras constatações e passaram a integrar um privilegiado campo de temas que exigiam aprofundamento. É nesse momento profissional que uma série de fatores combinam-se, surgindo a oportunidade de participar do Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática, da PUC-SP.

Aquelas questões, antes informais, agora sustentadas por uma base teórica pertinente, serão os fios condutores sobre os quais se desenvolverá nossa dissertação, que trata dos problemas mais comuns na transição entre resolução de equações e temas relacionados ao conceito de funções.

A seguir, apresentamos um resumo dos capítulos que compõem este trabalho.

No capítulo 1 descrevemos a trajetória que conduz à problemática e à questão de pesquisa propriamente dita, desde pesquisas que contribuíram com resultados sobre funções e equações até recomendações atuais contidas em documentos oficiais no Brasil e no exterior. Também para compor esta parte, trazemos uma descrição do início da disciplinarização do tema função no ensino de Matemática no Brasil.

No capítulo 2 apresentamos o referencial teórico assumido, ou seja, os registros de representação semiótica de Raymond Duval, bem como a operacionalização de algumas ideias desta teoria aplicadas à pesquisa.

No capítulo 3 constam os relatos das aplicações dos instrumentos, tanto piloto como definitivo, acompanhados das justificativas para as escolhas efetuadas.

No capítulo 4 abordamos a metodologia da análise de conteúdo aplicada às questões discursivas presentes no instrumento definitivo, bem como a transcrição e a categorização das respostas obtidas. Em seguida, nos ocuparemos da análise das questões operacionais que integram o instrumento definitivo, assinalando pontos relevantes e relatando motivos que justifiquem suas respostas.

No capítulo 5, nos ocuparemos das conclusões e considerações finais, além de recuperar tópicos fundamentais da pesquisa e levantar questões futuras que poderão ter como ponto de partida os resultados deste trabalho.

CAPÍTULO 1 – PROBLEMÁTICA E QUESTÕES DE PESQUISA

Ao manter contato com os integrantes do grupo G3 – TecMEM (Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática), em particular com a Dra. Sonia Pitta Coelho, tomamos conhecimento de algumas ideias no âmbito da formação de conceitos de função. Essa temática veio ao encontro de nossa intenção inicial, refinando questões que até então pareciam vagas, pois eram fruto da observação do cotidiano, sem embasamento teórico.

A partir de algumas leituras indicadas pela orientadora, formulamos mais claramente o tópico do estudo. Vamos investigar os hiatos de conhecimento que ocorrem na transição entre a resolução de equações de 1º e 2° graus e o estudo das funções afim e quadrática, para descobrir porque ocorrem e quais são suas consequências no processo de formação de conceitos relacionados às raízes das funções citadas. Nossos sujeitos são alunos do 2º ano do Ensino Médio.

Com a definição do tópico da pesquisa e do segmento a ser pesquisado, é conveniente elaborar perguntas que tornarão mais específica a problemática a ser pesquisada. Na elaboração do nosso projeto, tivemos contato com algumas pesquisas que nortearam a seguinte questão:

Ao se abordar os diferentes tipos de funções no ensino médio, quais são e porque ocorrem descontinuidades conceituais que levam a conclusões errôneas acerca das raízes dessas funções?

Após um levantamento feito no Banco de Teses do CEMPEM (Centro de Estudos, Memória e Pesquisa em Educação Matemática), que contempla as produções acadêmicas em Educação Matemática de 1971 a 2001, não nos pareceu haver nenhum estudo sobre o tema de que se ocupa essa dissertação.

Alguns trabalhos correlatos, como MENDES (1994), SCHWARZ (1995), SIMÕES (1995), OLIVEIRA (1997), MACHADO (1998) e MORETTI (1998), contribuem com estudos sobre a aquisição dos conceitos de função, análise das concepções dos alunos ao término do 2º grau ou na transição para o 3° grau.

Não identificamos nenhum trabalho que aborde problemas relacionados à aprendizagem de conceitos sobre raízes de funções.

1.1. Sobre a Relevância de Temas Relacionados às Equações e Funções

Diversos estudos colocam o tema função como central na aprendizagem de ideias matemáticas. Braga (2006) relata como se deu a disciplinarização deste tópico, discorrendo sobre o trabalho do professor Euclides Roxo, que nos anos 30 lecionou no Colégio Pedro II e participou da elaboração de uma proposta de ensino que resultaria na Reforma Francisco Campos, introduzindo a disciplina matemática no ensino secundário brasileiro.

Um dos principais aspectos do trabalho de Braga é relacionar a proposta de Euclides Roxo aos princípios de um movimento modernizador do ensino de matemática que surgira na Alemanha no final do séc. XIX, liderado pelo matemático Felix Klein. Este autor, em sua obra *Matemática Elementar sob um ponto de vista superior*, destaca:

> [...] uma nova tendência que começou a desenhar-se em 1890, consiste em não prescindir das aplicações da Matemática em todos os ramos das Ciências naturais e técnicas, assim como de sua significação na vida real. Em relação com esta ideia, estão as proposições da reforma que tem por base a introdução no ensino secundário do conceito de função, os métodos gráficos e elementos de Cálculo Infinitesimal. (KLEIN, 1927, p. 313-314 *apud* BRAGA, 2006, p. 45)

Braga também relata que esse movimento teve como marco inicial o IV Congresso Internacional de Matemática, realizado em 1908, em Roma, quando da criação da CIEM (*Comission Internationale de l'Enseignement Mathématique*), tendo Felix Klein como presidente.

Acreditamos ser importante esse relato histórico para situar-nos no panorama atual do ensino de conceitos relacionados às funções.

Em 2006, nos EUA, o encontro intitulado *Algebra: Gateway to a Technological Future*[1] reuniu matemáticos e educadores matemáticos e produziu uma série de artigos em que expressavam suas preocupações e sugestões sobre o ensino da disciplina Álgebra ao longo da formação escolar, desde as séries iniciais até o curso universitário. A parte IV deste texto, intitulada *Intermediate Algebra*, faz uma descrição do papel desta disciplina no currículo da *High School*, nível escolar americano que pode ser comparado ao Ensino Médio no Brasil.

Além de exemplificar quais são as principais ideias da Álgebra a serem ensinadas nesta etapa, o artigo propõe também um plano de ação, envolvendo professores e autoridades educacionais, que pretende fomentar políticas voltadas a estas implementações justificadas, entre outros argumentos, pela “necessidade imperativa de manter a competitividade econômica da nação” e pela “expansão da tecnologia” (MCCALLUM et al, 2007, p. 19, tradução nossa).

Entre as ideias da Álgebra apresentadas no artigo, destacamos duas que nos parecem próximas dos temas em que os pesquisadores Duval (1988) e Dubinsky (1992) focam suas pesquisas. Segundo McCallum:

> **A ideia de uma equação:** entender que uma equação é uma afirmação de igualdade entre duas expressões. Por exemplo, quando estudantes tentam resolver $3x + 5 = 2x – 3$ primeiro mudando para $x + 5 = (2/3)x – 3$, eles parecem estar seguindo o lema “fazer a mesma coisa dos dois lados” e desconhecem que é uma soma e uma diferença que são iguais.
>
> **A relação entre forma e função de uma expressão algébrica:** reconhecer que diferentes formas de expressões algébricas e equações revelam diferentes propriedades dos objetos que elas representam (funções, gráficos, soluções). Executar manipulações algébricas como uma escolha estratégica ao invés de obedecer a um comando (simplificar, expandir, fatorar). (MCCALLUM, W. et al, 2007, tradução nossa)

A fim de ilustrar a relevância dos conceitos relacionados às funções e equações para a aprendizagem matemática, trazemos também um texto

[1] Álgebra: Portal para um Futuro Tecnológico (tradução nossa)

elaborado pelo NCTM – *National Council of Teachers of Mathematics*[2], intitulado *Principles and Standards for School Mathematics*[3] (2000). No seu capítulo 7, voltado às séries 9 – 12 (do 9º ano do Ensino Fundamental ao Ensino Médio, no Brasil), o texto relata, entre outros temas, o que os alunos desse nível precisam aprender sobre Álgebra:

> Estudantes do *High School* devem ter substancial experiência em explorar as propriedades de diferentes classes de funções. Por exemplo, devem aprender que a função $f(x) = x^2 - 2x - 3$ é quadrática, que seu gráfico é uma parábola, e que o gráfico abre "para cima" porque o principal coeficiente é positivo. Eles também devem aprender que algumas equações quadráticas não têm raízes reais e que esta característica corresponde ao fato de que seus gráficos não cruzam o eixo x. E eles devem ser hábeis em identificar as raízes complexas de tais quadráticas. (NCTM, 2000, p. 298, tradução nossa)

Nas Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2002), encontramos recomendações sobre o ensino de funções no Ensino Médio Brasileiro. A proposta sistematiza o ensino de matemática neste nível em três eixos ou temas estruturadores:

1. Álgebra: números e funções
2. Geometria e medidas
3. Análise de dados

O documento situa o estudo de funções no primeiro eixo. Destacamos a seguinte citação para ilustrar as orientações relativas ao tema:

> Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções. (BRASIL, 2002, p. 121)

Dentro do mesmo eixo, o documento associa ainda o estudo das equações polinomiais ao dos sistemas lineares ao propor:

> Esses dois conteúdos devem receber um tratamento que enfatize sua importância cultural, isto é, estender os

---

[2] Conselho Nacional de Professores de Matemática, dos EUA.

[3] Princípios e Fundamentos para a Matemática Escolar (tradução nossa)

> conhecimentos que os alunos possuem sobre a resolução de equações de primeiro e segundo graus e sobre a resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas para sistemas lineares 3 por 3, aplicando esse estudo à resolução de problemas simples de outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 2002, p. 122)

A partir do que foi exposto, pode-se concluir que desde a proposta modernizadora de Felix Klein no início do séc. XX até as propostas mais atuais do início do séc. XXI, os conceitos relacionados às equações e funções integram o rol de ideias centrais a serem ensinadas na disciplina Álgebra.

Entendemos a proposta de Klein como sendo mais abrangente, pois coloca o estudo das funções como integrador de outras áreas de interesse da matemática. Nas demais propostas apresentadas aparecem outros temas com a mesma relevância, estruturados de modo a não dar ênfase a nenhum deles em especial. Todas, porém, expressam a preocupação dos matemáticos e educadores matemáticos com o prosseguimento das atividades relacionadas a estes conceitos (ensino e pesquisa) no âmbito escolar.

A respeito das equações, trazemos a tese de Ribeiro (2007) que buscou algumas definições e considerações presentes na literatura. Este autor selecionou livros de fundamentos da Matemática, dicionários matemáticos, artigos científicos na área da Educação Matemática e livros didáticos nacionais e internacionais que tratassem do tema.

Dentre as considerações levantadas pelo autor acima mencionado, julgamos conveniente destacar as colocações relativas a duas obras do matemático português Bento de Jesus Caraça, que ilustram como são tratadas as definições relativas às equações e às soluções de equações, visto ser este um dos temas de que trata nossa pesquisa.

Na obra *Conceitos Fundamentais da Matemática*, Caraça define equação algébrica da seguinte forma:

> Toda igualdade da forma $a_0x^n + a_1x^{n-1} +...+ a_{n-1}x + a_n = 0$; n, número inteiro e positivo, chama-se grau da equação; à variável x chama-se incógnita e aos números a_0, a_1, ... , a_n, coeficientes da equação. (CARAÇA, 2003, p. 144 *apud* RIBEIRO, 2007, p. 91)

Como Ribeiro observa, este texto não chega a ser uma definição para o termo equação, motivo que o leva a dissertar sobre outras obras que tratem do assunto. Mais adiante em seu trabalho, Ribeiro apresenta outra obra de Bento de Jesus Caraça, o livro didático *Lições de Álgebra e Análise vol. II*, destacando dois pontos fundamentais em que o matemático português retoma a "ideia" de equação da obra *Conceitos Fundamentais da Matemática* e relaciona esta ideia com as funções.

A seguir, Ribeiro destaca a seguinte definição dada por Caraça:

> [...] Do mesmo modo, a equação 2x + 3y – 1 = 0, onde x é a mesma variável, faz corresponder a cada x_i um único $y_i = \frac{1-2x_i}{3}$ e, portanto, esta equação define também uma função y(x). (CARAÇA, 1954, p. 58 *apud* RIBEIRO, 2007, p. 104)

E prossegue observando que esta é "uma maneira mais ampla de conceber equação" (RIBEIRO, 2007 p. 104). Com isso, entendemos que Ribeiro procura ilustrar como a relação entre estes dois conceitos matemáticos é intrincada, permitindo-nos levantar conjecturas a respeito da aprendizagem.

Assim, para investigar as descontinuidades conceituais que levam a conclusões errôneas acerca de raízes de funções, abordaremos as seguintes questões:

1) Entre diversas expressões algébricas, os sujeitos sabem discernir quais são funções?

2) Idem, quais são equações?

3) Quais são as concepções dos sujeitos participantes da pesquisa sobre as raízes (ou zeros) de uma função?

4) Que relações estabelecem entre equações e funções?

5) Que relações estabelecem entre a solução de uma equação e a raiz de uma função?

6) Em que medida os sujeitos generalizam estas relações para outras funções (não familiares)?

7) Em que medida estas relações influenciam na discriminação entre gráficos de diferentes funções?

Ao buscar respostas para estas questões, poderemos propor cenários que de alguma forma contribuirão para tornar mais eficiente o ensino destas noções, que consensualmente são parte fundamental na formação matemática escolar.

CAPÍTULO 2 – REFERENCIAL TEÓRICO E ADAPTAÇÃO PARA A PESQUISA

Com o objetivo de fundamentar nosso processo investigativo, apresentamos alguns textos que vão compor a base teórica. De um modo ainda geral, procura-se relacionar conceitos e noções capazes de esboçar ferramentas que servirão para responder à problemática posta.

Instrumentos investigativos, como questionários e análise de erros, utilizados no trabalho de Pereira (2005), baseados nas pesquisas de Bednarz, Kieran e Lee (1996), e desenvolvido junto a alunos ingressantes em um curso de licenciatura em Matemática, para pesquisar os principais erros cometidos por estes em Álgebra, particularmente na resolução de equações, ajudaram a compor nosso instrumento de pesquisa.

As ideias de Duval (1988, 1999, 2003), referentes aos registros de representação semiótica relativos aos gráficos e às equações, nortearão as análises de protocolos. A escolha deste referencial teórico fortaleceu-se principalmente após a leitura do artigo *Função: Diagnosticando Registros de Representação Semiótica* (BIANCHINI e PUGA, 2006) em que as autoras propõem questões sobre as concepções de funções de alunos ingressantes de um curso de Ciência da Computação, analisando os conteúdos das respostas de acordo com a teoria de Duval.

Portanto, considerando nossa problemática, também julgamos conveniente apresentar as principais ideias desta perspectiva teórica.

2.1. Registros de Representação Semiótica

A teoria dos registros de representação semiótica, de autoria do psicólogo e filósofo francês Raymond Duval, tem sido largamente utilizada como modelo para estudos sobre o funcionamento cognitivo do pensamento, em particular sobre a atividade matemática e os problemas de aprendizagem de tal disciplina.

No capítulo 1 do livro *Aprendizagem em Matemática*, o próprio Duval convida o leitor a refletir sobre as seguintes questões:

> Como compreender as dificuldades muitas vezes insuperáveis que muitos alunos têm na compreensão da matemática? Qual é a natureza dessas dificuldades? Onde elas se encontram? (DUVAL, 2003, p. 11)

Segundo o autor, estas questões têm permeado as mais recentes discussões acerca do ensino de matemática, visto que tem crescido a exigência sobre uma formação matemática inicial para todos os alunos, diante dos desafios informáticos e tecnológicos vividos pela sociedade moderna.

D’Ambrosio (2001) endossa o discurso de Duval neste sentido, ao destacar o importante papel da matemática nas questões ambientais, na busca pela paz social, interior e militar, bem como a presença de um instrumental matemático em novas áreas de pesquisa, como a informática, a biotecnologia e a inteligência artificial.

Alerta, no entanto, para que se dê ênfase a conteúdos essenciais, desenvolvidos nas últimas décadas e conectados a essa realidade tecnológica, evitando “insistir no desinteressante, obsoleto e inútil”. (D’AMBROSIO, 2002)

Duval, particularmente interessado em questões relacionadas à aprendizagem matemática, destaca que:

> A originalidade de uma abordagem cognitiva não está em partir dos erros para tentar determinar as “concepções” dos alunos e a origem de suas dificuldades em álgebra, em decimais, neste ou naquele conceito geométrico, etc. (DUVAL, 2003, p. 12)

Nesta citação pode-se notar um posicionamento crítico de Duval diante do que chama de “abordagens didáticas neo ou pós-piagetianas”, descrevendo perspectivas que não consideram a complexidade do funcionamento cognitivo requerido pela atividade matemática, procurando reduzi-la a “modelos gerais de aquisição de conhecimentos centrados sobre a ação, as interações e os desequilíbrios”. (DUVAL, 2003, p. 12)

Considerando a especificidade da atividade cognitiva requerida pela matemática, Duval afirma que duas questões tornam-se primordiais:

> 1. Quais sistemas cognitivos são necessários mobilizar para aceder aos objetos matemáticos e para efetuar as múltiplas transformações que constituem os tratamentos matemáticos?
>
> 2. Esses sistemas cognitivos são os únicos a ser mobilizados por qualquer processo de conhecimento em outros domínios científicos (geologia, astronomia, física, biologia...) e práticos, ou, ao contrário, trata-se de sistemas específicos, cujo desenvolvimento e cuja aquisição são próprios da atividade matemática? (DUVAL, 2003, p. 12)

Atendo-se à segunda questão, Duval enfatiza que a especificidade da atividade matemática, diferentemente de outras áreas do conhecimento, não está nos conceitos envolvidos, mas nas duas características a seguir:

1. *A importância das representações semióticas*, que se deve a duas razões fundamentais: as possibilidades de tratamento matemático dependem do sistema de representação utilizado e os objetos matemáticos não são diretamente perceptíveis.

2. *A grande variedade de representações semióticas requeridas*, pois além de diferentes sistemas de numeração, existem também as figuras geométricas, as escritas algébricas e formais, as representações gráficas e a língua natural.

O quadro a seguir apresenta a organização dos quatro tipos diferentes de registros – isto é, de representações semióticas – que, segundo Duval, caracterizam a atividade matemática:

	Representação Discursiva	**Representação Não Discursiva**
Registros Multifuncionais Os tratamentos não são algoritmizáveis.	**Língua natural** Associações verbais (conceituais). Formas de raciocinar: ■ argumentação a partir de observações, de crenças...; ■ dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	**Figuras geométricas planas ou em perspectivas** (configurações em dimensão 0, 1 , 2 ou 3). ■ apreensão operatória e não somente perceptiva; ■ construção com instrumentos.
Registros Monofuncionais Os tratamentos são principalmente algoritmos.	**Sistemas de escritas** ■ numéricas (binária, decimal, fracionária ...); ■ algébricas; ■ simbólicas (línguas formais). Cálculo	**Gráficos cartesianos** ■ mudanças de sistemas de coordenadas; ■ interpolação, extrapolação.

***Quadro 2.1** – Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividade matemática) (DUVAL, 2003, p. 14)*

A partir desta categorização, Duval afirma que é possível “conjecturar” que a compreensão em matemática requer a coordenação de pelo menos dois tipos de registros de representação semiótica. É sob esta perspectiva que o autor apresenta os dois tipos fundamentais de transformação de representações semióticas: os *tratamentos* e as *conversões*.

Tem-se um *tratamento* quando as transformações ocorrem dentro do mesmo registro. As diferentes etapas que um estudante desenvolve quando está resolvendo uma equação, ou os cálculos efetuados em expressões numéricas, são exemplos de tratamentos, respectivamente, nos registros algébrico e numérico.

Uma *conversão* ocorre quando as transformações exigem mudança de registro, mas conservam a referência ao mesmo objeto. São comuns os problemas de esboço de gráfico de uma função f a partir de sua expressão $f(x)$, ou ainda os de representar números complexos dados na forma algébrica

($a+bi$), no plano de Argand-Gauss (mudanças do registro algébrico para o gráfico).

Dada a natureza da questão norteadora dessa pesquisa – *Ao se abordar os diferentes tipos de funções neste nível, quais são e porque ocorrem descontinuidades conceituais que levam a conclusões errôneas acerca das raízes dessas funções?* – nossa investigação contempla o emprego de 4 tipos de registros pelos sujeitos: algébrico, numérico, gráfico e da língua natural.

Ao apresentar as definições de tratamento e conversão, Duval enfatiza que é preciso observá-las nas análises das produções dos estudantes, sendo estas essenciais para o entendimento da compreensão, sob a perspectiva da abordagem cognitiva.

É ainda no processo de conversão que o autor sugere maior ênfase, destacando que "*do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que aparece como a atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão"*. (DUVAL, 2003, p. 16)

Além disso, Duval discorre sobre a irredutibilidade da conversão a um tratamento, enfatizando que é comum (referindo-se às tarefas escolares propostas) descrever a conversão como uma espécie de "codificação", limitando a análise a uma visão "superficial e enganadora". (DUVAL, 2003, p. 17)

Como exemplo desta visão superficial, Duval cita a tarefa de passar da equação de uma reta no plano à sua representação gráfica usando apenas uma regra que permite associar um par de números a um ponto sobre o plano quadriculado. Vista desta forma, a tarefa não considera adequadamente os aspectos relativos à aprendizagem, nem os aspectos relativos aos conceitos teóricos envolvidos, pois não permite uma "apreensão global e qualitativa" (DUVAL, 2003, p. 17) necessária para a compreensão de conceitos relacionados à representação gráfica.

Para não incorrer na redução mencionada, Duval propõe que se leve em consideração as variáveis visuais próprias desses gráficos (inclinação da reta, intersecção com os eixos, etc.) e as unidades simbólicas correspondentes (os coeficientes angular e linear das equações, se são positivos ou negativos, maiores, menores ou iguais a 1, etc.). De fato:

> Há, por trás da aplicação de uma regra de codificação para passar de uma equação a um gráfico cartesiano, a necessária articulação entre as variáveis cognitivas que são específicas do funcionamento de cada um dos registros. Pois são essas variáveis que permitem determinar quais as unidades de significado pertinentes, que devem ser levadas em consideração, em cada um dos dois registros. A conversão das representações, quaisquer que sejam os registros considerados, é irredutível a um tratamento. (DUVAL, 2003, p.17)

Em seu artigo *Graphiques et equations: L´Articulation de deux registres*[4] (DUVAL, 1988), o autor aborda as variáveis que devem ser levadas em consideração quando se analisa as produções dos estudantes procurando identificar os problemas decorrentes das conversões requeridas neste tópico, especificamente mudanças do registro algébrico para o registro gráfico e vice-versa.

Na introdução do artigo supracitado, Duval afirma:

> A leitura das representações gráficas pressupõe a discriminação das variáveis visuais pertinentes e a percepção das variações correspondentes da escrita algébrica. (DUVAL, 1988, tradução nossa)

Pode-se notar nesta citação a importância que assume a descrição das variáveis visuais na perspectiva de Duval. Eis um dos motivos pelos quais apresentamos a seguir uma adaptação desta ideia a nossa pesquisa.

2.2. Variáveis Visuais e Unidades Simbólicas Correspondentes

Segundo Duval (1988):

> A interpretação das representações gráficas depende de uma identificação precisa de todos os valores das variáveis visuais pertinentes e do reconhecimento

---

[4] Gráficos e equações: a articulação de dois registros (tradução nossa)

> qualitativo das unidades de escritas simbólicas que lhes são correspondentes. (p. 251, tradução nossa)

Para ilustrar, o autor recorre a uma discriminação das variáveis visuais, dos valores e das unidades simbólicas correspondentes da escrita algébrica de uma função afim, como é mostrado na tabela a seguir:

Variáveis visuais	**Valores**	**Unidades simbólicas correspondentes**	
Sentido de inclinação	Traço crescente Traço decrescente	Coeficiente >0 Coeficiente <0	Ausência do símbolo – Presença do símbolo –
Ângulos com os eixos	Divisão simétrica Ângulo menor Ângulo maior	Coeficiente =1 Coeficiente <1 Coeficiente >1	Sem coeficiente escrito
Posição em relação ao eixo y	Corta acima Corta abaixo Corta na origem	Soma-se uma constante Subtrai-se uma constante Sem correção aditiva	sinal + sinal –

Tabela 2.1 – *Variáveis visuais pertinentes ao funcionamento cognitivo da representação gráfica da reta de equação $y = ax + b$ (DUVAL, 1988, p. 240,* tradução nossa*)*

No caso de nossa pesquisa, estamos interessados especificamente na visualização gráfica das raízes de uma função, relacionadas às soluções da equação correspondente. Com suporte no referencial teórico adotado, apresentamos a seguir uma descrição das variáveis visuais relacionadas ao nosso objeto de investigação, respectivamente associadas aos valores e às unidades simbólicas correspondentes – resultado de uma adaptação da proposta de Duval à nossa pesquisa.

Como nosso estudo se concentrará nos casos das funções afim e quadrática que possuem raízes reais, a adaptação da proposta de Duval ficará restrita a essas funções.

Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes
Sentido de inclinação	Crescente Decrescente	Coeficiente a > 0 ausência do símbolo – Coeficiente a < 0 presença do símbolo –
Intersecção com o eixo horizontal	À esquerda da origem Na origem Á direita da origem	Constante b > 0 presença do símbolo + Constante b = 0 sem constante escrita Constante b < 0 presença do símbolo –

***Tabela 2.2 –** Variáveis visuais pertinentes ao funcionamento cognitivo da representação gráfica das raízes de uma função afim* $f(x) = ax + b$ *(Adaptado de DUVAL, 1988, p. 240)*

Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes
Concavidade	Para cima Para baixo	Coeficiente a > 0 ausência do símbolo – Coeficiente a < 0 presença do símbolo –
Intersecções com o eixo horizontal	À esquerda da origem	Coeficiente b > 0 presença do símbolo + Constante c > 0 presença do símbolo + ou Coeficiente b < 0 presença do símbolo – Constante c < 0 presença do símbolo –
	Uma à esquerda, outra à direita	Coeficiente b > 0 presença do símbolo + Coeficiente b = 0 sem coeficiente escrito Coeficiente b < 0 presença do símbolo – Constante c < 0 presença do símbolo – ou Constante c > 0 presença do símbolo +
	À direita da origem	Coeficiente b < 0 presença do símbolo – Constante c > 0 presença do símbolo + ou Coeficiente b > 0 presença do símbolo + Constante c < 0 presença do símbolo –
	Passando pela origem e à direita	Coeficiente b < 0 presença do símbolo – Constante c = 0 sem constante escrita ou Coeficiente b > 0 presença do símbolo + Constante c = 0 sem constante escrita
	Passando pela origem e à esquerda	Coeficiente b > 0 presença do símbolo + Constante c = 0 sem constante escrita ou Coeficiente b < 0 presença do símbolo – Constante c = 0 sem constante escrita

***Tabela 2.3 –** Variáveis visuais pertinentes ao funcionamento cognitivo da representação gráfica das raízes de uma função quadrática* $f(x) = ax^2 + bx + c$*, sendo* $b^2 > 4ac$ *(Adaptado de DUVAL, 1988, p. 240)*

Nas análises que faremos dos protocolos, procuraremos identificar os modelos descritos acima, nas questões que permitirem tal procedimento.

CAPÍTULO 3 – PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, nos ocuparemos em descrever as sessões de aplicações dos instrumentos elaborados para investigar as questões de pesquisa apresentadas anteriormente. Trata-se da metodologia empregada na investigação, entremeada pelas justificativas dos procedimentos adotados.

Nossa pesquisa apresenta características qualitativas, pois, inspirados pela "apreensão global e qualitativa" (DUVAL, 2003), buscamos respostas que nos permitissem analisar se os sujeitos tinham domínio de conceitos relacionados às soluções de equações e raízes de funções.

Além disso, como destacam Lüdke e André (1986):

> A pesquisa qualitativa ou naturalística, [...] envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes. (LÜDKE E ANDRÉ, 1986, p. 13)

Sendo assim, julgamos adequado ao nosso propósito a descrição de como foram elaboradas as questões investigativas, assim como o ambiente escolar onde ocorreu a investigação, procurando destacar o papel desempenhado pelos sujeitos participantes da pesquisa nesse processo de construção.

3.1. Aplicação do Instrumento Piloto

O instrumento piloto foi aplicado em três sessões, com duração média de quinze minutos cada, realizadas nos dias 16, 19 e 21 de maio de 2008. Os sujeitos participantes desta fase da pesquisa foram quatro alunos do 3º ano do Ensino Médio de um colégio particular voltado às classes B e C, localizado na Zona Norte de São Paulo – SP. Foi-lhes esclarecido o intuito da pesquisa, enfatizando que sua participação era voluntária e que seus diálogos seriam gravados. Na última sessão, dois deles não puderam estar presentes.

Optou-se por organizar os quatro alunos em duas duplas, sendo que cada aluno recebeu uma cópia do material para responder individualmente. O combinado era que os integrantes das duplas poderiam trocar ideias entre si, mas não poderia haver troca de informações entre as duplas, a fim de evitar influências nos resultados.

A opção por aplicar este instrumento piloto foi feita para que as questões propostas passassem por ajustes textuais e procedimentais. Por serem alunos de final de curso que já haviam trabalhado com os temas (equações, funções e gráficos de funções), poderiam auxiliar dando sugestões para aperfeiçoamento dos enunciados.

O instrumento piloto foi dividido em duas etapas. Na primeira etapa, composta de cinco partes, procuramos incentivar respostas conceituais e operacionais a respeito das equações e funções, solicitando procedimentos como classificar, explicar com palavras próprias as definições, resolver equações e determinar as raízes de funções. Os registros foram feitos utilizando-se apenas papel e lápis.

Nas três primeiras partes da segunda etapa, os alunos foram levados ao laboratório de informática da escola, onde lhes foi disponibilizado o *software Graphmatica*, para que respondessem questões relativas aos gráficos de funções, especificamente sobre relações entre resolução de equações e raízes de funções.

A opção pelo uso do *software* foi para minimizar eventuais dificuldades que os alunos pudessem apresentar no esboço dos gráficos solicitados, concentrando-se nas respostas pedidas acerca dos temas. Reitera-se que o uso do *software* pelos alunos era um recurso opcional, visto que nenhum deles mostrou ter conhecimento prévio sobre o programa.

Já durante a aplicação do instrumento piloto, foi possível notar que este não foi um recurso priorizado pelos alunos, pois dois deles registraram no próprio instrumento os esboços pedidos (utilizando-se, portanto, de papel e lápis). No entanto, pode-se considerar que as conclusões atenderam às expectativas, no que tange às considerações feitas acerca de esboços de gráficos de funções e resolução de equações.

As duas últimas partes da segunda etapa, totalizando cinco partes, também baseadas em papel e lápis, foram compostas por questões relacionadas à identificação gráfica de pontos cujas abscissas representam raízes de funções em esboços de gráficos fornecidos no instrumento, além de registros de expressões algébricas de funções que tivessem como raízes valores fornecidos nos enunciados.

De modo geral, os sujeitos que participaram da aplicação do instrumento piloto não relataram dificuldades que prejudicassem o entendimento das solicitações. No entanto, ao analisarmos as respostas dadas em algumas questões que exigiam descrições conceituais, notamos que estas se encontravam muito aquém do esperado, com textos breves e evasivos, o que naturalmente nos levou a repensar a relevância destas questões para a investigação.

Como ilustração, citamos a questão presente na primeira etapa, parte três do instrumento piloto (ANEXO I, p. 113): “Para você, qual o significado do enunciado ‘resolva a equação em R’?”. As respostas obtidas foram:

“O resultado estará dentro dos números reais.”

“Resolva a equação dentro do conjunto dos números reais.”

“Resolver em números reais.”

“Que a equação deve ser resolvida de modo que as incógnitas sejam números reais.”

Nota-se, no exemplo citado, que o uso da expressão “em R”, referindo-se ao conjunto dos números reais como conjunto-universo, influenciou fortemente as respostas, a ponto de desviar o foco do conceito por trás da resolução de equações, que seria algo como: encontrar, utilizando recursos algébricos, um ou mais valores que tornem a sentença verdadeira.

Uma escolha feita por nós desde o início da elaboração das questões investigativas foi procurar manter nos enunciados uma linguagem que fosse familiar aos sujeitos participantes da pesquisa, ou seja, uma linguagem comumente encontrada nos materiais didáticos.

No caso dos sujeitos que participaram da aplicação do instrumento piloto, o principal material é o livro didático *Matemática para o 2° grau, volume 3*, cujos autores são Nelson Gentil, Carlos Alberto Marcondes dos Santos, Antonio Carlos Greco e Sérgio Emílio Greco, Editora Ática, 5ª Edição, 1996.

Nos livros desta coleção, pode-se facilmente encontrar enunciados que enfatizam o conjunto-universo na resolução de equações. Como poderá ser notado na apresentação do instrumento definitivo aplicado na pesquisa, optamos por não usar a questão citada anteriormente. No entanto, a opção pelo uso da expressão “em R” foi mantida nas questões em que os sujeitos deveriam resolver equações.

3.2. Apresentação do Instrumento definitivo

Optamos por manter duas etapas no instrumento definitivo. Cada etapa foi subdividida em cinco partes. Apresentaremos a seguir as questões pertinentes à primeira etapa. Mais adiante dedicaremos um capítulo para a análise dos resultados.

As questões aqui apresentadas constam do ANEXO II, da p. 121 à p. 125.

Na parte I, propomos três questões relacionadas ao entendimento geral de conceitos sobre equações e funções. A primeira questão traz dezesseis itens a serem classificados como função (F), equação (E) ou não sei (N). O objetivo era diagnosticar em que medida os sujeitos participantes da pesquisa se baseavam na forma algébrica apresentada para fazer a distinção pedida.

As duas questões restantes solicitavam aos sujeitos que descrevessem, usando as próprias palavras, o que entendiam por função e por equação. O objetivo era que apresentassem respostas utilizando o registro da língua natural, que posteriormente serviriam como elementos de análise de acordo com a perspectiva teórica assumida.

Na parte II, duas questões foram propostas. A primeira trazia dez equações com uma incógnita cada e pedia que fossem identificadas quais eram do 1º grau e quais eram do 2° grau. Em seguida, na mesma questão, foi pedido aos sujeitos que explicassem, no registro da língua natural, como procederiam para realizar tal distinção.

Optamos por apresentar algumas equações que não estivessem organizadas de forma habitual, utilizando parênteses e outras disposições que não permitissem uma identificação visual direta. O objetivo era que os sujeitos reconhecessem que o grau de uma equação está relacionado ao maior expoente de sua incógnita.

A segunda questão desta parte propunha dez expressões algébricas de funções utilizando a notação f(x), que deveriam ser separadas em funções afins e funções quadráticas. Também mantivemos a opção em não apresentá-las sob a forma habitual, dificultando uma identificação visual direta. Esta questão também trazia a solicitação para que os sujeitos explicitassem, no registro da língua natural, como realizaram a distinção pedida.

O objetivo desta parte era diagnosticar se os sujeitos participantes da pesquisa recorriam às mesmas estratégias para reconhecer o grau de uma equação e o tipo de uma função, ou seja, se neste quesito tratavam estes dois conceitos de forma análoga.

A parte III apresentou uma questão operacional, que solicitava que os sujeitos resolvessem duas equações, sendo uma do 1º grau e outra do 2º grau. Convém observar que foi mantida a expressão “em R” na solicitação para resolver as equações, de acordo com o que foi explicitado anteriormente. Em seguida, optamos por realizar alterações em relação ao que foi pedido no instrumento piloto, visto que as respostas saíram do foco esperado.

Sendo assim, a questão “Para você, qual o significado do enunciado ‘resolva a equação em R’?”, que constava no instrumento piloto (ANEXO I, p. 113), foi substituída por três questões relacionadas às soluções de equações e suas representações algébricas ou gráficas, procurando diagnosticar quais relações os sujeitos participantes da pesquisa estabeleciam entre estes conceitos.

Outro objetivo desta parte foi diagnosticar como os sujeitos tratavam as soluções de equações: de forma mais operacional, baseada em métodos algébricos de resolução, ou de forma mais conceitual, baseada na substituição dos valores dados nas equações para confirmar sua validade.

Na parte IV, apresentamos duas funções, uma afim e uma quadrática, e pedimos que os sujeitos determinassem suas raízes. Optamos por apresentar as expressões algébricas das funções na notação f(x), visto que esta é uma forma usualmente adotada por diversos materiais didáticos.

Também nesta parte optamos pela substituição de uma questão que não atendeu satisfatoriamente nosso objetivo no instrumento piloto. Desta forma, a questão “Para você, qual o significado do enunciado ‘determine a raiz da função’?” (ANEXO I, p. 114) foi substituída por duas questões que forneciam valores numéricos a serem testados como raízes de funções, solicitando que os sujeitos explicitassem qual relação estabeleciam com a representação destes valores nas expressões algébricas e nos gráficos destas funções.

A parte V compunha-se de três questões, sendo que as duas primeiras apresentavam gráficos de funções, uma afim e uma quadrática, e solicitavam que os sujeitos identificassem com círculo os pontos cujas abscissas eram as raízes destas funções. Tratam-se de questões operacionais, objetivando diagnosticar se os sujeitos participantes da pesquisa reconhecem graficamente a representação da raiz de uma função.

Esta parte se encerrou com uma questão mais ampla, de caráter conceitual, que pedia aos sujeitos que explicitassem no registro da língua natural, de acordo com as atividades anteriores, que relações estabeleciam entre soluções de equações e raízes de funções. Implicitamente, procuramos diagnosticar quais significados os sujeitos participantes da pesquisa atribuíam a estes dois conceitos, que podem eventualmente ter relação, mas que desempenham papéis distintos do ponto de vista conceitual.

Encerrada a descrição das questões da primeira etapa do instrumento definitivo, passaremos a descrever as questões da segunda etapa, conforme ANEXO II, da p. 126 à p. 129.

A segunda etapa foi concebida para receber um elemento tecnológico que serviria para minimizar dificuldades com o esboço de gráficos em papel e lápis. Trata-se do *software Graphmatica*, que oferece recursos que permitem o esboço imediato do gráfico de uma função desejada.

No caso de nossa pesquisa, o objetivo era diagnosticar se este recurso auxiliaria nas conclusões dos sujeitos participantes da pesquisa acerca dos conceitos de soluções de equações e raízes de funções, permitindo que estes se concentrassem em descrever estas relações.

Na parte I, foi solicitado que os sujeitos esboçassem, na tela do computador, o gráfico de uma função afim. Em seguida, perguntou-se se era possível, a partir desse esboço, encontrar a solução da equação de 1º grau correspondente a esta função afim. Ao responderem afirmativamente esta pergunta, os sujeitos deveriam explicar qual procedimento seria necessário para a realização desta tarefa. Esta parte se encerrou com um pedido para que os sujeitos resolvessem a equação proposta na questão anterior.

O objetivo destas solicitações foi o de diagnosticar se o esboço de gráficos pode ser um recurso alternativo na resolução de equações, à medida que os sujeitos estabelecem relações sólidas entre soluções de equações e raízes de funções.

As mesmas tarefas compuseram a parte II desta etapa, apenas alterando a função afim para a função quadrática. Na parte III, foi solicitado que os sujeitos explicitassem, em língua natural, que relações notavam entre esboço de gráficos e resolução de equações, a fim de produzir elementos que posteriormente foram utilizados em nossas análises.

Na parte IV fornecemos os gráficos de duas funções não familiares aos sujeitos participantes da pesquisa, uma função de 3º grau e uma de 4° grau, e pedimos que determinassem, a partir dos gráficos, as soluções das equações associadas a estas funções. Nesta parte optamos por uma mudança em relação ao instrumento piloto, que trazia três gráficos de funções não familiares. Esta mudança ocorreu devido ao tempo estimado para a conclusão da sessão.

Esta parte se encerrou com uma questão que fornecia uma função quadrática e solicitava que suas raízes fossem encontradas de duas formas distintas. O objetivo era diagnosticar se os sujeitos apresentavam estratégias diferenciadas, baseadas em recursos alternativos em relação à resolução algébrica. Optou-se por uma função com duas raízes distintas.

A parte V era composta de questões que solicitavam associações entre raízes de funções afins e quadráticas e suas representações algébricas e gráficas, pedindo aos sujeitos que ora escrevessem expressões algébricas de funções que tinham um dado número como raiz, ora desenhassem o gráfico de uma função cuja curva passasse pelo ponto assinalado no plano cartesiano.

O objetivo era diagnosticar como os sujeitos realizam as conversões necessárias, no sentido apontado por Duval (2003), em que um sujeito teria domínio sobre um objeto matemático se realizasse conversões em mais de um sentido. No caso, procuramos estimular conversões do registro numérico para o registro algébrico e do registro gráfico para o registro algébrico.

3.3. Aplicação do instrumento definitivo

O instrumento definitivo foi aplicado em três sessões, realizadas nos dias 13, 14 e 15 de agosto de 2008. Os sujeitos participantes da pesquisa não passaram por qualquer triagem, e foram convidados a participar voluntariamente. Foi-lhes esclarecido que seus diálogos seriam gravados.

A pedido da coordenação do colégio e com a finalidade de motivar a autorização dos pais para que seus filhos participassem, foi elaborado um comunicado (ANEXO III, p. 130) que procurou esclarecer as razões da realização da atividade, enfatizando o papel da Educação Matemática no âmbito escolar, bem como sua relevância como área de pesquisa.

Foram convidados 14 alunos do 2º ano do Ensino Médio de um colégio particular da Zona Norte de São Paulo – SP, que atende a um público concentrado nas classes C e D. O objetivo era formar 7 duplas. No entanto, tendo comparecido 13 alunos, optou-se por formar 5 duplas e um trio, conforme está descrito abaixo.

Todos os sujeitos participantes eram alunos do colégio há pelo menos um ano (portanto, desde o 1º ano do Ensino Médio). Julgamos que esta consideração é relevante, pois o material didático utilizado por estes sujeitos é formado por apostilas seriadas produzidas por um curso pré-vestibular da capital, com início no 1º ano do Ensino Médio.

As sessões foram realizadas após o horário de aulas, num espaço anexo ao colégio, devido à indisponibilidade de salas no horário de aplicação.

Na primeira sessão, um dos alunos não compareceu e foram formadas 6 duplas. Esta sessão teve duração de 1 hora e 30 minutos.

Na segunda sessão, estiveram presentes os 13 alunos que se dispuseram a participar. Assim, optou-se por incorporar o aluno que faltou na 1ª sessão, tendo sido formados, portanto, 5 duplas e um trio. Esta sessão ocorreu no laboratório de informática do colégio, pois foi disponibilizado o *software Graphmatica* para que os sujeitos respondessem às solicitações do instrumento. Foi necessária uma breve explanação sobre os recursos básicos do *software*, visto que seria a primeira vez que os sujeitos iriam utilizá-lo. Esta explanação levou apenas 10 minutos e a sessão de aplicação teve duração de 30 minutos.

A terceira sessão contou com a mesma formação da segunda sessão e teve duração de 1 hora e 20 minutos. Convém relatar que os sujeitos demonstraram sinais de desgaste, visto que neste dia haviam acabado de realizar uma avaliação “surpresa” de Matemática. No entanto, todos participaram e cumpriram as atividades propostas.

CAPÍTULO 4 – ANÁLISE DAS QUESTÕES

4.1. Discursivas

As questões do instrumento definitivo em que os sujeitos usaram o registro da língua natural nas respostas foram classificadas no capítulo 3 como discursivas. Para a análise dessas respostas, empregaremos a metodologia da análise de conteúdo.

Segundo Laville e Dionne (1999), o recurso da análise de conteúdo serve ao propósito do pesquisador em educação, pois

> [...] esse tipo de análise abre porta ao estudo do implícito tanto quanto do explícito e se aplica a todo tipo de material literal, até àquele que não é absolutamente organizado em função da pesquisa, dando assim acesso a minas de informações, de outra forma, difíceis, se não impossíveis, de alcançar. (LAVILLE e DIONE, 1999, p. 228)

No sentido destacado pelos autores é que se situa a aproximação entre a identificação dos registros de representação semiótica e a análise do conteúdo presente nas questões discursivas do instrumento investigativo aplicado nesta pesquisa.

Duval (1999, 2003) afirma que os objetos matemáticos não são acessíveis diretamente, daí a relevância dos registros de representação semiótica em sua perspectiva teórica.

Sendo assim, serão considerados elementos para análise os registros em língua natural presentes em algumas respostas sobre conceitos relacionados às funções e equações, particularmente os que dizem respeito às raízes e soluções.

Para facilidade do leitor, apresentaremos a tabela abaixo, que mostra a posição das questões discursivas no instrumento definitivo, a quantidade e a finalidade delas na pesquisa.

1ª ETAPA: 10 questões (sem o uso do *software*)		
Posição no instrumento	Quantidade	Investigam
PARTE I	2	Concepções acerca de funções e equações
PARTE II	2	Reconhecimento do grau de equações de 1º e 2º graus e de funções afim e quadrática
PARTE III	3	Concepções de soluções de equações e relações com gráficos das funções
PARTE IV	2	Concepções de raízes de funções e relações com gráficos de funções
PARTE V	1	Relações entre soluções de equações e raízes de funções

Tabela 4.1 – *Síntese das questões discursivas presentes na primeira etapa do instrumento definitivo.*

Ressalta-se, ainda, que as categorias foram constituídas seguindo um modelo aberto, conforme descrito em Laville e Dionne (1999). Neste modelo, as categorias não são pré-definidas no início da pesquisa, mas são formadas a partir das unidades selecionadas entre o conteúdo coletado.

Segundo Laville e Dionne (1999), *"as categorias e seus critérios de pertinência constituem a própria grade de análise"*, ou seja, a partir do que os sujeitos responderam, foram selecionadas palavras que estivessem relacionadas às ideias que estes tinham sobre funções, equações e tópicos relacionados. Essas unidades assim selecionadas deram origem às categorias apresentadas em cada tópico.

Destacamos em negrito as unidades que deram origem a cada categoria. Após transcrever as respostas, identificaremos e descreveremos as categorias próprias da análise de conteúdo para cada uma das questões discursivas.

Apresentamos primeiro as análises de conteúdo referentes às cinco questões que investigam especificamente o tema equações. A seguir, as quatro questões relacionadas a funções e finalmente, a questão que investiga relações entre soluções de equações e raízes de funções.

Parte I, Questão 3 – O que você entende por equação?

Convém relatar que aqui não se esperava obter definições formais. O objetivo é diagnosticar, de acordo com a resposta, como um sujeito difere uma equação de uma função, de que forma (e se) mobilizou esta diferenciação na Questão 1 da parte I (ANEXO II, p. 121).

Obtiveram-se respostas em que constavam as seguintes palavras:

DUPLA I – É um termo, composto por **incógnitas** ou números, que se **iguala** a um termo, também composto por **incógnitas** ou números.

DUPLA II – É uma **igualdade**, onde há uma ou mais **incógnitas**. Segue os exemplos:

$x + 2 = 7$ $\qquad$ $x+ y = 3$

$x^2 - 30x + 27 = 0$

DUPLA III – É um **procedimento** aplicado para se encontrar a **incógnita**.

DUPLA IV – A equação serve para **descobrir** a **incógnita**.

DUPLA V – A equação pode ser de 1º grau e de 2º grau, ambas necessitam de uma **incógnita** para serem **resolvidas**. E necessitam ser uma **igualdade**.

DUPLA VI – Numa equação podemos **obter** o valor de uma **incógnita** dada.

Identificando categorias

C1: igualdade, igual, etc. – DUPLAS I, II, V

Nesta categoria figuram os protocolos das duplas que fizeram uso do termo “igualdade” (ou outros que remetem à mesma idéia) em sua descrição de equação. Pode-se afirmar que estes sujeitos aproximaram-se de uma definição formal de uma equação enquanto objeto matemático, distanciando-se, portanto, de uma concepção operacional.

C2: processo, procedimento, descobrir. – DUPLAS III, IV, VI

Aqui, foi possível agrupar as duplas que associaram o termo equação ao seu processo resolutivo, ou seja, a noção de equação, para estes sujeitos, está relacionada aos procedimentos adotados para encontrar sua solução. Pode-se afirmar que se trata de uma concepção mais voltada a questões operacionais, distanciando-se de uma formalização do conceito.

Nota-se ainda que o protocolo da dupla V poderia figurar com igual justiça em ambas as categorias, pois reconheceu que uma equação é uma igualdade, mas baseou-se no processo de resolução para compor sua descrição.

Observa-se também, a partir das transcrições, que todas as duplas utilizaram o termo “incógnita” e três delas usaram o termo “igualdade” ou análogos, que são próprios da terminologia formal do conceito de equação presente nos materiais didáticos, confirmando a influência destes na conceitualização do objeto em questão.

Parte II, Questão 1 – Como você identifica se uma equação é do 1º grau ou do 2º grau? Explique.

Foram mostradas dez equações com uma incógnita “embaralhadas”, sendo cinco de 1º grau e cinco de 2º grau. Destas, quatro foram inseridas em uma notação comum nos materiais didáticos, visualmente mais familiares aos sujeitos participantes da pesquisa. As demais não estavam na forma usual, envolvendo frações e parênteses. O objetivo é que explicitassem como identificam o grau de uma equação.

De modo geral, as duplas fizeram corretamente a identificação, ficando apenas uma ressalva para a dupla III que classificou como sendo do 1º grau a equação $(x - 1)(x + 3) = 0$.

As duplas I e II mencionam algo como observar o grau da incógnita (sem especificar qual) e relacioná-la ao expoente (se for 1 será de 1º grau, se for 2 será de 2º grau). A dupla II ainda reforça que "primeiro deve-se simplificar a equação, para depois analisar os respectivos expoentes".

A dupla III refere-se a valores elevados ao quadrado (descrevendo a equação de 2º grau) e reforça que esta deve apresentar três termos. Sobre a equação de 1º grau, relatam que estas "são de dois termos e não são elevados", referindo-se à ausência do expoente 1 sobre a incógnita.

A dupla IV associou o grau da equação às maneiras conhecidas por eles para resolvê-las. Relataram que a equação de 2º grau "tem potências" (sem qualquer menção ao expoente 2) e citam a "fórmula de Bhaskara" para a resolução.

Sobre as equações de 1º grau, não houve qualquer associação ao expoente de uma incógnita. A dupla IV descreveu a equação de 1º grau como aquela que "para resolver, dividimos em letras de um lado e os números ficam do outro", referindo-se explicitamente ao método de resolução talvez mais utilizado pelos integrantes desta dupla.

Pelo relato da dupla V também pode-se notar que os sujeitos mobilizaram os métodos de resolução para identificar os graus das equações. Escreveram que a equação de 2º grau "precisa-se resolver por Bhaskara" e a de 1º grau "não precisa resolver por Bhaskara".

A dupla VI descreveu a equação de 2º grau pela forma em que ela é apresentada, relatando que tem “o número acompanhado da incógnita ao quadrado, o segundo acompanhado com a incógnita e o terceiro sozinho (apenas o número) ou 2 incógnitas diferentes”. Esta última afirmação parece referir-se aos expoentes das incógnitas. Interessante notar que esta dupla classificou corretamente as equações propostas, sem reorganizá-las segundo a ordem descrita. Sobre a equação de 1º grau, limitou-se a dizer que “só apresenta uma incógnita”, aparentemente associando a quantidade de incógnitas ao grau da equação.

A seguir, a transcrição e a categorização do conteúdo das respostas dadas pelos integrantes das duplas.

DUPLA I – Quando a incógnita está **elevada** a 1ª **potência**, a equação será de 1º grau. Se a **potência** da **incógnita** for dois a equação será do 2º grau.

DUPLA II – Vendo o valor do **expoente** da **incógnita**, sendo o **expoente** igual a 1 é uma equação de 1º grau, igual a 2 uma equação de 2º grau, assim sucessivamente. Mas primeiro deve se simplificar a equação, para depois analisar-se os respectivos **expoentes**.

DUPLA III – Nas equações de 2º grau, temos valores **elevados** ao quadrado e temos **3 termos** na equação. A de 1º são de **2 termos** e não são **elevados**.

DUPLA IV – Toda equação 2º grau tem **potência**, pelo fato de utilizar **BÁSKARA** para **resolver** a equação.
Já as equações de 1º grau, para **resolver**, dividimos em letras de um lado e os números ficam do outro.
DUPLA V – A de 2º grau precisa-se **resolver** através de **Báskara** e achar o x_1 e o x_2.
A de 1º grau o x é isolado e não precisa **resolver** por **Báskara**.

DUPLA VI – 2º grau: tem o número (n) acompanhado da **incógnita elevada** ao quadrado, o segundo só acompanhado com a incógnita e o terceiro sozinho (apenas o número) ou 2 incógnitas diferentes. 1º: só apresenta uma incógnita.

Identificando categorias

C1: resolver, Bhaskara. – DUPLAS IV, V

Nesta categoria encontram-se os protocolos das duplas que relataram reconhecer o grau de uma equação a partir de um processo resolutivo. Pode-se afirmar que este tipo de resposta distancia-se do conceito matemático requerido para o reconhecimento proposto, aproximando-se de uma concepção operacional.

C2: incógnita, potência/expoente/elevado. – DUPLAS I, II, VI

Esta categoria compreende os protocolos das duplas que mais se aproximaram da definição mais adequada do grau de uma equação (aquela que diz respeito ao expoente da incógnita). Uma vez mais, faz-se necessário relevar certas incongruências, mas pode-se considerar que estas respostas encontram-se dentro do esperado para a questão.

C3: quantidade de termos. – DUPLA III

Esta categoria foi criada especialmente para compreender a resposta dada pelos sujeitos da dupla III, que associaram o grau da equação à quantidade de termos que esta apresentava. Trata-se de uma concepção errônea que não encontrou correlato nas respostas dadas por outras duplas.

Parte III, Questão 2 – Os números 1 e 4 são soluções da equação $x^2 - 5x + 4 = 0$? Justifique.

Trata-se de uma equação de 2º grau comum, escolhida de modo que fosse familiar aos sujeitos participantes da pesquisa.

Os números 1 e 4 são realmente as soluções da equação, e o objetivo é diagnosticar quais estratégias os sujeitos mobilizam para justificar este fato, podendo mostrar que significados atribuem às soluções de uma equação.

A dupla I recorreu à técnica de resolução por soma e produto das raízes e concluiu corretamente.

A dupla II substituiu o valor da incógnita da equação pelos números dados, explicitando a conclusão com um “0 = 0” ao final do registro. Ao explicitar este procedimento, a dupla mostrou que tem claro o conceito de solução de uma equação, assumido no sentido de que é o valor que torna a sentença verdadeira.

As duplas III, IV, V e VI fizeram uso da “Fórmula de Bhaskara” para a verificação. Com isto, mostraram estabelecer relação entre “verificar as soluções de uma equação” e “resolver uma equação”. Cabe uma ressalva para a resposta da dupla III que, aplicando a “Fórmula de Bhaskara”, encontrou os valores – 1 e – 4, concluindo que os números propostos não eram soluções da equação dada. Pode-se conjecturar que se a dupla recorresse à outra forma de verificação, poderia evitar a conclusão errônea.

Mesmo o fato de as duplas adotarem a “Fórmula de Bhaskara” como única estratégia de verificação mostra o quão mecanizado está este processo: ao reconhecer o grau da equação, a associação com a fórmula resolutiva é quase instantânea, impedindo-os de utilizar outros recursos.

Ao propor esta questão tanto no instrumento piloto como no definitivo, esperávamos alguma justificativa usando o registro da língua natural. Isto, no entanto, não ocorreu, de modo que não foram constituídas categorias para análise.

Parte III, Questão 3 – Os números – 2, 3 e 6 são soluções da equação $x^3 - 7x^2 + 36 = 0$? Justifique.

O objetivo era diagnosticar quais estratégias seriam utilizadas, já que se trata de uma equação não-familiar aos sujeitos participantes da pesquisa.

As duplas I, IV, V e VI esboçaram uma fatoração do termo em x^3, provavelmente procurando reconhecer uma “parte de 2° grau”, mas esta estratégia foi abandonada antes da conclusão.

As duplas I e III deixaram escrito que não se lembravam. Uma possibilidade de leitura deste fato é que os sujeitos pesquisados ainda não tiveram contato com equações com grau superior a 2. Um fato interessante ocorreu com a dupla III, que organizou uma resolução pela “Fórmula de Bhaskara”, calculando o discriminante da equação antes de escrever “Não nos lembramos”.

A dupla II, que no item anterior usou a estratégia de substituir os números dados na equação para verificar a veracidade, repetiu a ação e obteve êxito na tarefa.

Quanto à categorização, cabe a mesma ressalva da questão anterior, ou seja, a falta de justificativas no registro da língua natural dos procedimentos utilizados não permitiu a categorização das respostas.

Parte III, Questão 4 – Os números 1 e 4 são soluções da equação f(x) = 0, sendo f uma função. O que você pode afirmar sobre o gráfico de f?

DUPLA I

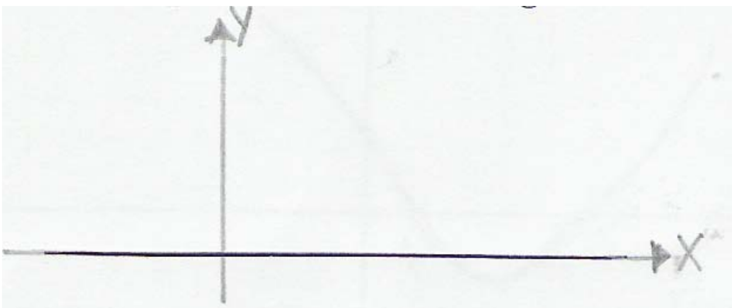


Figura 4.1 – *Gráfico desenhado pela DUPLA I como parte da resposta dada à questão 4, parte III da primeira etapa do instrumento definitivo.*

Podemos afirmar que a solução da função expressa no **gráfico** será o conjunto dos Reais em cima do eixo x.

DUPLA II – 1 e 4 são soluções da função, onde a função é constante.

DUPLA III – f(x) = 0

f(4) =

Não nos lembramos.

DUPLA IV – ?

DUPLA V – Observamos que para qualquer número de x as soluções da equação serão 0.

DUPLA VI – É uma função crescente.

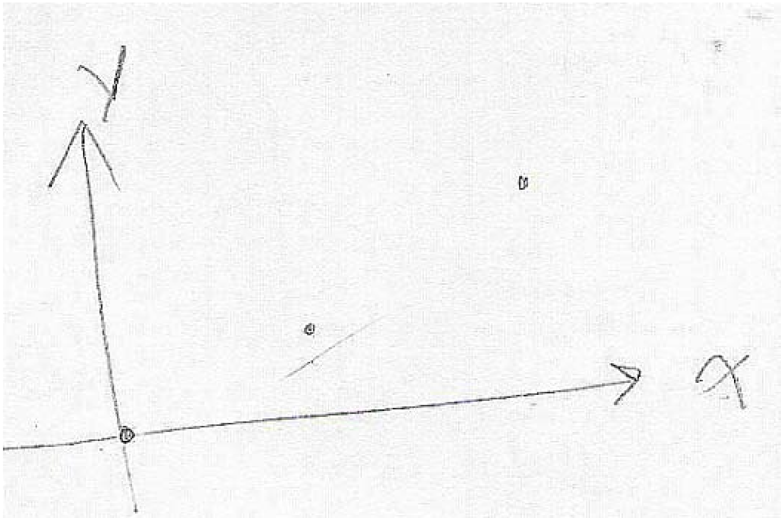


Figura 4.2 – *Gráfico desenhado pela DUPLA VI como parte da resposta dada à questão 4, parte III da primeira etapa do instrumento definitivo.*

Identificando categorias

C1: menção ao gráfico, desenho de gráfico. – DUPLAS I, VI

Nesta categoria, incluímos os protocolos das duplas nos quais os sujeitos utilizaram alguma referência gráfica para expressar seu entendimento relativo às raízes da função proposta. Destaque para o protocolo da dupla I, que atingiu mais adequadamente o objetivo da questão.

C2: não menciona ou desenha o gráfico. – DUPLAS II, V

Esta categoria abarca as duplas cujos sujeitos demonstraram não estabelecer relação entre as soluções da equação e os valores em que a curva intercepta o eixo horizontal no gráfico da função.

C3: não lembra, não respondeu. – DUPLAS III, IV

Esta categoria foi criada apenas para classificar as duplas que, não tendo conseguido estabelecer a relação esperada, deixaram de formular respostas que pudessem ser analisadas.

Como síntese final desta parte, observa-se que todas as concepções de equações descritas pelos sujeitos mencionam o termo “incógnita”, podendo ser divididas em dois tipos: as mais próximas ao conceito considerado formal de equação, e as que associam a noção de equação ao processo resolutivo.

Neste sentido, endossando o observado em nossa pesquisa, trazemos novamente um trecho da tese de Ribeiro (2007) que trata da pesquisa de Attorps (2003), onde se propôs a seguinte questão a um grupo de professores suecos: “O que o conceito de equação significa para você?”. Ao destacar algumas respostas, Ribeiro observa que:

> [...] as concepções dos professores entrevistados reforçam a conjectura levantada inicialmente por mim, sobre a ênfase que é dada no ensino de equações nos procedimentos e técnicas de resolução e o forte apelo ao par equação-resolução. (RIBEIRO, 2007, p. 100)

Quanto aos critérios para decidir sobre o grau das equações, os sujeitos referiram-se ou ao expoente da incógnita – mais próximo ao esperado – ou à forma de resolução (usar ou não a “Fórmula de Bháskara”), ou ainda à quantidade de termos da equação (querendo por “termos” significar parcelas).

Quanto às concepções acerca das soluções de equações, as respostas mostraram forte influência dos procedimentos algébricos nas justificativas, predominando o recurso da “Fórmula de Bháskara”, mesmo em casos em que seu uso não era necessário.

Quanto às relações entre soluções de equações e gráficos de funções, as respostas foram extremamente aquém do esperado. Como ilustração, lembramos que apenas duas mencionam ou apresentam gráfico, sem chegar a uma conclusão a respeito da relação sugerida.

Parte I, Questão 2 – O que você entende por função?[5]

Em nossa investigação, essa questão foi proposta esperando que os sujeitos descrevessem, de acordo com suas noções, o conceito de função compreendido por eles, de modo que pudéssemos perceber, a partir de suas respostas, que elementos utilizam na distinção entre a forma algébrica de uma função e uma equação com uma incógnita.

Assim como em Bianchini e Puga (2006), não era esperada a definição formal de função, comumente encontrada nos materiais didáticos. Ou seja, algo como “Dados dois conjuntos não-vazios A e B, uma função de A em B é uma relação que associa cada elemento de A a um único elemento de B”.

Como no artigo supracitado, também notamos tentativas de descrição através de exemplos usando diagramas de Venn.

No caso de nossa pesquisa, optamos por uma análise do conteúdo das respostas dadas em língua natural, sem, no entanto atentar para as mudanças de registro. Observa-se, contudo, que na transcrição de algumas respostas, outros registros (figural, algébrico) fazem-se presentes.

A seguir, a transcrição e a categorização das respostas dadas pelos sujeitos participantes da pesquisa a esta questão.

---

[5] Convém salientar que esta questão consta também em Bianchini e Puga (2006). No entanto, ressaltamos que só após a termos incluído em nosso instrumento, tomamos ciência desse fato.

DUPLA I – Função é uma relação entre o **domínio** e o **conjunto-imagem**, onde cada **domínio** só pode ter uma **imagem**.

DUPLA II – Função é o cálculo, no qual determina-se um elemento do **grupo-imagem**. Cujo é necessário um elemento do **domínio**. Podemos demonstrar assim:

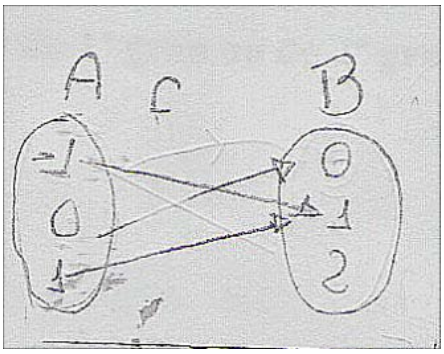


Figura 4.3 – *Figura desenhada pela DUPLA II como parte da resposta dada à questão 2, parte I da primeira etapa do instrumento definitivo.*

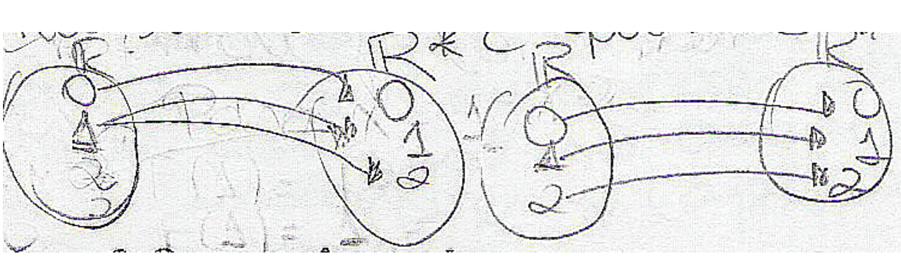
onde, A é o **domínio** e B é **contra-domínio**, sendo os elementos: 0 e 1 do grupo B a **imagem**. Pode ser expressado por: $f(x) = x^2$ sendo x um elemento do **domínio**.

DUPLA III – É um **valor** referente a x.

DUPLA IV - ?

DUPLA V – Função é o termo dependente da **equação**.

DUPLA VI – É um **conjunto** que apresenta elementos diferentes relacionados com outro **conjunto**. Nos exemplos abaixo temos uma não função e uma função.



Não é função. É função.

Figura 4.4 – *Figura desenhada pela DUPLA VI como parte da resposta dada à questão 2, parte I da primeira etapa do instrumento definitivo.*

Identificando categorias

C1: contém os termos conjunto, domínio, imagem – DUPLAS I, II, VI

Nesta categoria, encontram-se os protocolos das duplas cujos sujeitos utilizaram termos ou expressões familiares à definição formal de função encontrada nos livros didáticos. Observa-se que, mesmo não sendo claros alguns textos, há uma aproximação com esta definição formal.

C2: contém o termo equação – DUPLA V

Esta categoria foi criada para conter o protocolo da dupla cujos sujeitos associaram, de alguma forma, o termo função ao termo equação, explicitando uma relação também notada em Bianchini e Puga (2006), ou seja, associando de maneira inadequada estes dois objetos matemáticos.

C3: contém o termo valor – DUPLA III

Esta categoria contém o protocolo da dupla cujos sujeitos associaram o termo função ao cálculo do valor num dado ponto, demonstrando forte influência do registro numérico em sua concepção.

C4: não respondeu – DUPLA IV

Esta categoria foi criada essencialmente para conter o protocolo da dupla que não formulou resposta alguma à questão proposta.

Parte II, Questão 2 – Como você identifica se uma função é afim ou quadrática? Explique.

Foram propostas dez funções, usando a notação f(x) para as expressões algébricas, sendo quatro afins e seis quadráticas. Buscou-se fugir do formato familiar aos sujeitos, usando parênteses e frações, tentando “disfarçar” os graus das variáveis independentes, a fim de que explicitassem as estratégias para reconhecer o tipo de uma função a partir de sua expressão algébrica.

Na identificação, cinco duplas separaram corretamente as funções afins das quadráticas. O destaque neste item ficou por conta da dupla III, que incluiu as funções G, I e J no rol das funções afins. Estas eram expressões de funções quadráticas, porém era necessário observar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para chegar a esta conclusão.

A seguir, apresentamos a transcrição e a categorização das respostas dadas pelos sujeitos das duplas à explicação solicitada.

DUPLA I – Função afim forma uma **reta** e quadrática uma **parábola**.

DUPLA II – Do mesmo modo que se analisa uma **equação** de 1º ou 2º grau.

DUPLA III – As funções quadráticas são **elevadas** ao quadrado; já as afins, os valores não são **elevados**.

DUPLA IV – ?

DUPLA V – Função afim são funções que não precisam-se utilizar **báskara** para a sua **resolução**, e função quadrática são funções que possui termos para se **resolver** por **báskara** (ou seja, x^2, x^3).

DUPLA VI – Quadrática: vai possuir sua incógnita **elevada** ao quadrado.
Afins: vai possuir uma incógnita **elevada** a 1.

Identificando categorias

C1: elevado. – DUPLAS III, VI

Aqui temos os protocolos das duas duplas que mencionaram um termo que remete ao expoente das variáveis das funções, estratégia que parece ter sido utilizada pelos sujeitos para a diferenciação pedida.

C2: reta, parábola. – DUPLA I

Nesta categoria figura o protocolo da dupla cujos sujeitos apoiaram-se no registro gráfico para discernir os tipos das funções, demonstrando uma estratégia próxima ao esperado.

C3: equação. – DUPLA II

O protocolo da dupla que integra esta categoria demonstrou ter associado fortemente a identificação do grau de uma equação à diferenciação do tipo de uma função, demonstrando relacionar as formas algébricas destes dois conceitos matemáticos.

C4: resolução, Bháskara. – DUPLA V

Esta categoria contém a dupla que associou o tipo da função à resolução de uma equação, demonstrando uma relação operacional com o conceito pesquisado.

C5: não respondeu. – DUPLA IV

Esta categoria foi criada para incluir a dupla cujos sujeitos não elaboraram nenhuma resposta à solicitação.

Na descrição de como realizam a identificação do tipo de uma função, a dupla I associou ao gráfico, sem fazer menção ao expoente que se apresentava na forma algébrica das funções dadas.

A associação mais clara entre forma algébrica de uma função (afim ou quadrática) e equação (de 1º ou 2º graus) foi feita pela dupla V em seu relato. Neste sentido, a dupla foi coerente em relação a sua identificação do grau de uma equação, mostrando que na forma em que foram apresentadas, as equações e as expressões algébricas das funções têm o mesmo significado, pelo menos visual, para estes sujeitos.

A dupla VI mostrou que recorreu aos expoentes para fazer a diferenciação. Uma observação importante neste relato cabe em relação ao uso do termo “incógnita” pela dupla, referindo-se à variável independente da função (neste caso, x).

Parte IV, Questão 2 – Os números 2 e 6 são raízes da função $f(x) = x^2 - 6x + 5$? E da função $f(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$? Justifique.

Neste item foram apresentados dois números para que os sujeitos justificassem se eram ou não raízes de uma função quadrática e de uma função do 3º grau. O objetivo era investigar qual seria o procedimento adotado no caso de uma função não familiar. Era esperado que as duplas concluíssem que os números dados não eram raízes da função quadrática nem da função do 3º grau, complementando com alguma justificativa no registro da língua natural.

A dupla I não iniciou nenhum procedimento em busca da conclusão. Limitou-se a escrever um pedido de desculpas.

A dupla II utilizou a “fórmula de Bhaskara” para encontrar as raízes da função quadrática dada e concluir corretamente. No caso da função do 3º grau, chegaram à conclusão de que os números dados não eram raízes, mas justificaram escrevendo “Não, por ser uma equação do 3º grau serão 3 raízes”.

A dupla III não adotou nenhuma estratégia e escreveu “Não nos lembramos”, assim como a dupla IV que registrou um ponto de interrogação como resposta.

A dupla V utilizou a “fórmula de Bhaskara” para encontrar as raízes da função quadrática e concluir corretamente. Na função do 3º grau, fez uma fatoração e encontrou um meio (inadequado) para calcular as raízes. Conseguiu uma equação de 1º grau, onde encontrou o valor 15, e uma equação de 2º grau, calculando o discriminante igual a – 11 e concluindo que não existem raízes.

A dupla VI optou por calcular o discriminante no caso da função quadrática. Ao encontrar o valor 6 (correto), concluiu que os números dados não eram raízes pois 6 “não tem raiz exata”. Na função do 3º grau, esta dupla também realizou uma fatoração, conseguindo uma equação de 2º grau cujo discriminante era – 11 e concluindo que os números dados não eram raízes desta função pois “não existe raiz negativa”.

Após descrever as estratégias utilizadas pelos sujeitos neste item, pode-se notar que nenhuma dupla preocupou-se em substituir os números apresentados nas expressões algébricas das funções, o que poderia contribuir para conclusões adequadas no que tange aos conceitos sobre raízes de funções.

Como não foi atingido satisfatoriamente o objetivo de obter respostas tendo por base o recurso do registro da língua natural, não foram criadas categorias para análise neste item.

Parte IV, Questão 3 – Os números 1 e 5 são raízes da função $f(x) = x^2 - 6x + 5$. O que você pode afirmar sobre o gráfico de f(x)?

Neste item foi proposta uma afirmação a respeito das raízes de uma função quadrática e solicitado que os sujeitos explicitassem alguma conclusão a respeito do gráfico da função, relacionada a estas raízes. Era esperado que estabelecessem alguma relação com os pontos onde a curva intercepta o eixo horizontal, visto que esta é uma das identificações que as raízes apresentam do ponto de vista gráfico.

Reforçamos aqui também que a incongruência na linguagem – gráfico de f(x), quando o correto é gráfico de f – pode ser justificada pela opção em manter uma linguagem familiar aos sujeitos participantes da pesquisa.

DUPLA I

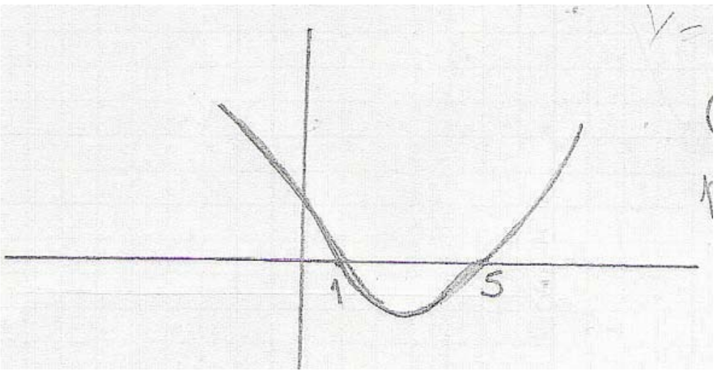


***Figura 4.5 –** Gráfico desenhado pela DUPLA I como parte da resposta dada à questão 3, parte IV da primeira etapa do instrumento definitivo.*

O gráfico será uma parábola, cortando o eixo x em 1 e 5.

f(6) = 36 – 36 + 5

f(6) = 5

f(0) = 0 – 0 + 5

f(0) = 5

DUPLA II

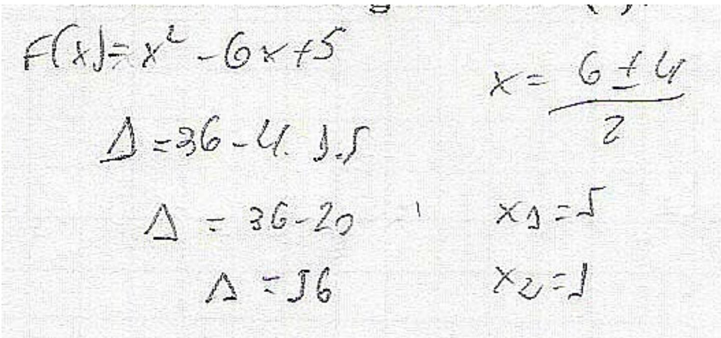


***Figura 4.6 –** Resolução apresentada pela DUPLA II como parte da resposta dada à questão 3, parte IV da primeira etapa do instrumento definitivo.*

Sim, são raízes. O gráfico é uma parábola.

DUPLA III – Não nos lembramos do procedimento.

DUPLA IV – ?

DUPLA V

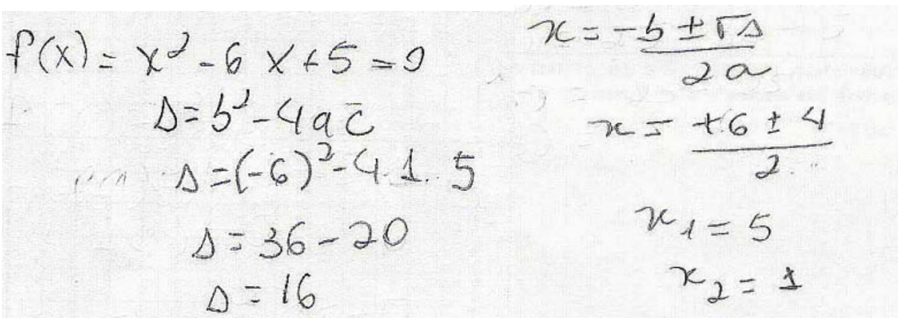


***Figura 4.7 –** Resolução apresentada pela DUPLA V como parte da resposta dada à questão 3, parte IV da primeira etapa do instrumento definitivo.*

A parábola é positiva e para qualquer valor (1 ou 5) a função vai ser 0.

DUPLA VI

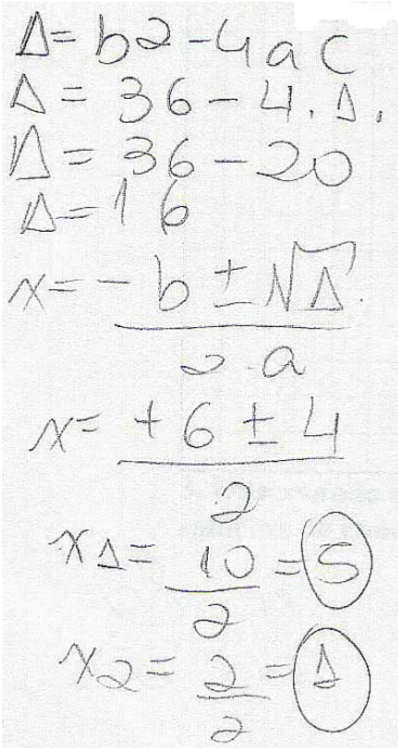


Figura 4.8 – *Resolução apresentada pela DUPLA VI como parte da resposta dada à questão 3, parte IV da primeira etapa do instrumento definitivo.*

Para x = 5

5^2 - 6.5 + 5

25 – 30 + 5

\- 5 + 5 = 0

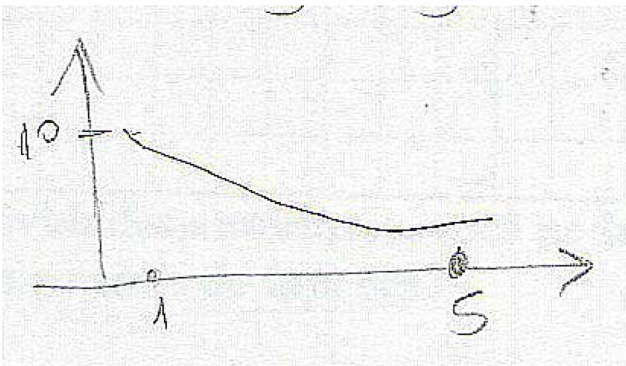


Figura 4.9 – *Gráfico desenhado pela DUPLA VI como parte da resposta dada à questão 3, parte IV da primeira etapa do instrumento definitivo.*

Para x = 1

1^2 - 6.1 + 5

1 – 6 + 5 = 10

Sim, ele é decrescente.

Identificando categorias

C1: menciona/desenha gráfico. – DUPLAS I, VI

Consideramos nesta categoria as duplas que se utilizaram do registro gráfico em suas respostas, mesmo recorrendo a outros recursos nem sempre adequados.

C2: menciona/utiliza Báskara. – DUPLAS II, V

Esta categoria contém as duplas que associaram a representação gráfica das raízes da função quadrática à utilização da fórmula resolutiva, demonstrando um caráter operacional no trato deste conceito.

C3: não lembra, não respondeu. – DUPLAS III, IV

Esta categoria engloba as duplas que não formularam respostas à questão proposta.

Ao sintetizar esta análise, observamos que para definir função, os sujeitos chegam a mobilizar termos consagrados pelo uso, como domínio, imagem, relação entre conjuntos. No entanto, as respostas dadas situam-se distantes do conceito considerado formal, sendo que algumas ainda se baseiam em procedimentos algébricos para expressar sua concepção.

Como complemento, julgamos conveniente trazer um comentário presente no livro *A Matemática do Ensino Médio, Volume 1*, a respeito da definição de função presente nos livros escolares:

> Essa definição apresenta o inconveniente de ser formal, estática e não transmitir a idéia intuitiva de função como correspondência, transformação, dependência (uma grandeza função de outra) ou resultado de um movimento. Quem pensaria numa rotação como um conjunto de pares ordenados? Os matemáticos e (principalmente) os usuários da Matemática olham para uma função como uma correspondência, não como um conjunto de pares ordenados. (LIMA et al, 2006, p. 81)

Os resultados obtidos mostram que os sujeitos, quando questionados sobre o que é uma função, parecem tentar lembrar-se do que está escrito nos materiais didáticos em que estudaram, influenciando fortemente suas respostas.

No reconhecimento do tipo de uma função (se afim ou quadrática), pode-se notar que alguns sujeitos recorreram ao registro gráfico, enquanto outros ficaram restritos ao registro algébrico. Neste último caso, nota-se forte influência do processo resolutivo de uma equação para fazer a diferenciação, mostrando alguma identificação entre equação e forma algébrica de uma função.

Também aqui podemos trazer um comentário a respeito da terminologia inadequada utilizada pelos materiais didáticos para discernir os tipos de funções:

> A maioria dos nossos textos escolares refere-se à função afim como 'função do primeiro grau'. Essa nomenclatura sugere a pergunta: o que é o grau de uma função? Função não tem grau. O que possui grau é um polinômio. (Quando $a \neq 0$, a expressão $f(x) = ax + b$ é um polinômio do primeiro grau.) O mesmo defeito de nomenclatura ocorre também com as funções quadráticas (...). Elas muitas vezes são chamadas, incorretamente, 'funções do segundo grau'. (LIMA et al, 2006, p. 92)

Pode-se conjecturar que o uso desta nomenclatura inadequada tenha influenciado as respostas dadas pelos sujeitos pesquisados.

Nas questões que propunham afirmações sobre raízes de funções, sobressai também o recurso algébrico como justificativa, mostrando pouca ou quase nenhuma associação com a representação gráfica deste conceito.

Parte V, Questão 3 – Observando as atividades anteriores, você poderia estabelecer alguma relação entre soluções de equações e raízes de funções?

Trata-se de uma questão discursiva e de caráter conclusivo, onde se buscam as relações que os sujeitos participantes da pesquisa estabeleceram, ou mesmo que significados atribuem às noções de soluções de equações e raízes de funções.

A seguir, a transcrição das respostas e a categorização das palavras em negrito.

DUPLA I – A solução das equações será onde a **reta** ou a **parábola** corta o **eixo x**.
DUPLA II – Pode-se estabelecer a relação, de que o resultado das equações de 2º grau são as raízes no **gráfico**.

DUPLA III – A relação existe, porém não conseguimos compará-las aos exercícios anteriores.

DUPLA IV – ?

DUPLA V – Sim, pois precisa-se **resolver** uma equação para se achar uma função.

DUPLA VI – Sim, com a solução das equações sabemos se ela é **crescente** ou **decrescente**.

Identificando categorias

C1: reta, parábola, gráfico. – DUPLAS I, II

Desconsiderando algumas incongruências textuais, incluímos nesta categoria as duplas cujos sujeitos mencionam a representação gráfica em seus registros, demonstrando estabelecer algum reconhecimento da relação entre esboço de gráficos e soluções de equações.

C2: resolver. – DUPLA V

Nesta categoria encontra-se a dupla que manteve uma relação operacional com o conceito de raiz de uma função, associando à resolução de uma equação.

C3: crescente/decrescente. – DUPLA VI

A dupla presente nesta categoria menciona uma relação de crescimento/decrescimento associada às raízes de uma função, embora descrita de forma vaga.

C4: não respondeu. – DUPLAS III, IV

Nesta categoria enquadra-se a única dupla da qual não foi possível conseguir uma resposta neste item.

A título de comentários adicionais a esta análise, observa-se que duas respostas apontam para o uso do registro gráfico para estabelecer a relação solicitada: uma faz uma relação próxima ao esperado no contexto das funções afins e quadráticas, e a outra se restringe às funções quadráticas e equações do 2º grau, mas menciona "raízes do gráfico". Outra resposta estabelece uma relação entre equação e função através da ação de "resolver a equação". As demais não chegam a explicitar alguma relação.

A tabela a seguir apresenta, de forma sintética, a localização e a quantidade destas questões no instrumento definitivo, bem como sua relação com o tema pesquisado:

2ª ETAPA: 3 questões (com o uso do *software*)		
Posição no instrumento	Quantidade	Investiga
PARTE I	1	Solução de equação de 1º grau a partir do gráfico
PARTE II	1	Solução de equação de 2º grau a partir do gráfico
PARTE III	1	Relação entre esboço de gráficos e solução de equações

Tabela 4.2 – *Síntese das questões discursivas presentes na segunda etapa do instrumento definitivo.*

Na sequência, apresentamos a transcrição e a categorização das respostas dadas pelos sujeitos pesquisados às questões mostradas na tabela.

Parte I da segunda etapa, Questão 2 – É possível encontrar a solução da equação 2x – 6 = 0 a partir do gráfico? Em caso afirmativo, explique o procedimento para obter a solução.

DUPLA I – Sim, pois onde a **reta** corta o **eixo x** é a solução da equação. Nesse caso é 3.

DUPLA II – É possível, analisando o **gráfico**, onde o y é igual a zero.

DUPLA III – Sim

2x – 6 = 0

2x = 6

$x = \frac{6}{2}$ x = 3

DUPLA IV –

2x – 6 = 0

2x = 6

x = 3

Sim, dá para encontrar o ponto 3 no **eixo x**, porém não será função, pelo fato de não ter ponto no eixo y.

DUPLA V – Sim, pois pode-se achar a raiz da função no **gráfico** formando-se uma linha reta conseqüentemente a solução da equação.

DUPLA VI – Sim. Quando f(0) = 2.0 – 6 = - 6

f(1) = 2.1 – 6 = - 4

f(2) = 2.2 – 6 = - 2

Assim sucessivamente, como demonstra o **gráfico** realizado.

Identificando categorias

C1: menciona reta ou gráfico. – DUPLAS I, II, V, VI

Nesta categoria, incluímos as duplas cujos sujeitos mencionam em seu registro que o recurso gráfico pode ser utilizado na resolução de uma equação, demonstrando estabelecer relação entre os conceitos de raiz de função e solução de equação.

C2: usa procedimento algébrico. – DUPLAS III, IV

Esta categoria contém as duplas que mesmo tendo reconhecido que um procedimento baseado na representação gráfica pode ser utilizado para determinar a solução de uma equação, fez uso do procedimento algébrico. Consideramos, portanto, que este seria o recurso mais conveniente para estes sujeitos diante da solicitação.

Parte II da segunda etapa, Questão 2 – É possível encontrar a solução da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ a partir do gráfico? Em caso afirmativo, explique o procedimento para obter a solução.

DUPLA I – Sim, as raízes da equação são iguais aos pontos que a **parábola** corta o eixo x. Nesse caso suas raízes são 2 e 3.

DUPLA II – É possível, analisando o **gráfico**, onde y é igual a zero.

DUPLA III – Sim.

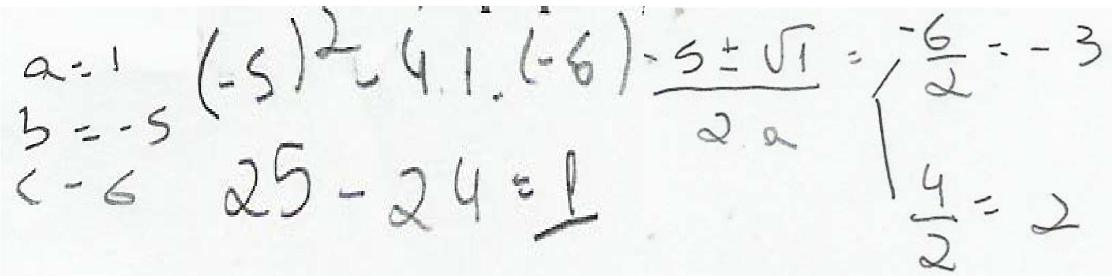


Figura 4.10 – *Resolução apresentada pela DUPLA III como parte da resposta dada à questão 2, parte II da segunda etapa do instrumento definitivo.*

DUPLA IV – Sim, podemos encontrar os dois pontos 3 e 2 no **eixo x**, porém as retas ficaram paralelas ao eixo y.

DUPLA V – Sim, pois passa-se nos pontos 2 e 3 do **gráfico** formando uma **parábola**.

DUPLA VI – Sim, pois as raízes formam uma **parábola** que se encontram no **eixo de x**.

Identificando categorias

C1: menciona parábola ou gráfico – DUPLAS I, II, V, VI

Esta categoria contém as duplas que mencionam um procedimento baseado no recurso gráfico como válido na obtenção das soluções de uma equação do 2º grau.

C2: forte apoio no gráfico produzido no *Graphmatica* – DUPLA IV

Nesta categoria destacamos a dupla que descreveu o que ocorre quando se insere uma equação no *software*. Desta maneira, demonstrou não ter reconhecido como válido o uso de um procedimento baseado no recurso gráfico para a realização da tarefa proposta.

C3: Bhaskara – DUPLA III

Aqui encontramos a dupla que recorreu diretamente à fórmula resolutiva, mantendo-se no registro algébrico, sem fazer menção alguma ao uso do gráfico.

Parte III da segunda etapa – A partir das atividades acima, você vê alguma relação entre esboço de gráficos e soluções de equações? Em caso afirmativo, descreva essa relação.

DUPLA I – Sim, pois as soluções das equações são os números onde a reta corta o **eixo das abscissas**.

DUPLA II – Sim, o resultado da equação é dado quando a função corta o **eixo de x**.

DUPLA III – Sim, os resultados das **equações** têm seu valor correspondente no **gráfico**.

DUPLA IV – Soluções de equações são pontos encontrados ou no **eixo x** ou no y, mas nunca os dois na mesma **equação**.

Esboço de **gráficos** são pontos encontrados tanto nos pontos x e y, assim podendo fazer uma reta ou reta-curva.

DUPLA V – Sim, pois não há possibilidade de se fazer um **gráfico** sem as raízes a serem marcadas, que são encontradas através da resolução da **equação**.

DUPLA VI – Sim, as retas do **gráfico** representam as soluções das **equações**, interceptas no **eixo de x**.

Identificando categorias

C1: menciona eixo x ou eixo das abscissas – DUPLAS I, II, IV, VI

Desconsiderando-se algumas formulações não muito claras, procuramos reunir nesta categoria as duplas cujos sujeitos demonstraram terem reconhecido a representação gráfica das raízes de uma função, bem como seu significado associado a uma equação.

C2: menciona equação e gráfico, com associações pobres – DUPLAS III, V

Nesta categoria encontram-se as duplas que descrevem em seus registros alguma relação entre esboço de gráficos e solução de equações, mas sem uma precisão adequada, que permitisse reconhecer que estabeleceram uma relação sólida.

4.2. Operacionais

Dedicaremos esta seção à análise das questões do instrumento definitivo classificadas como operacionais, ou seja, que envolviam procedimentos não-baseados no registro da língua natural, como classificar ou calcular.

PRIMEIRA ETAPA

Parte I, Questão 1 – Classifique os itens a seguir como função (F), equação (E) ou (N) não sei.

Funções dadas em notação f(x) – 4 respostas (F)

Equações com uma incógnita – 6 respostas (E)

Expressões algébricas (sem o sinal de =) – 2 respostas (N)

Funções dadas como dependência de duas variáveis x e y – 4 respostas (F)

Portanto, era esperado que os alunos dessem:

8 respostas (F)

6 respostas (E)

2 respostas (N)

A tabela a seguir mostra a distribuição das respostas dadas pelas duplas participantes da pesquisa.

	Nº de ocorrências					
Ação	I	II	III	IV	V	VI
Respondeu (F) função nos 8 itens que apareciam sob a notação “f(x)” ou que mostravam expressões de funções como dependência entre as variáveis x e y	4	4	4	4	5	8
Respondeu (E) equação nos 2 itens em que não aparecia o sinal “=”	2	-	2	1	2	2
Respondeu (E) equação nos 6 itens que efetivamente mostravam equações com uma incógnita	6	6	6	5	6	6
Respondeu (E) equação nos 4 itens que mostravam expressões de funções como dependência entre as variáveis x e y	4	4	4	-	3	-
Respondeu (N) não sei nos 2 itens em que não aparecia o sinal “=”	-	2	-	1	-	-
Respondeu (N) não sei em outros itens	-	-	-	5	-	-
TOTAL	16	16	16	16	16	16

Tabela 4.3 – *Respostas dadas à questão 1, parte I da primeira etapa do instrumento definitivo.*

Para ilustrar como foi construída esta tabela, comentaremos a trajetória da dupla I. Nos oito itens em que esperávamos que os sujeitos reconhecessem funções na forma algébrica, os integrantes desta dupla reconheceram apenas quatro. Isto indica que houve associação inadequada com equação, já que responderam com a letra E os outros quatro itens. Notar que a dupla foi bem sucedida no reconhecimento das equações com uma incógnita, mas respondeu com a letra E os dois itens que não apresentavam o sinal de igualdade, o que indica que não houve associação adequada entre o conceito de equação e sua representação algébrica.

Parte III, Questão 1 – A seguir você tem duas equações. Resolva-as em R.

O enunciado pedia que as equações dadas (uma de 1º grau e outra de 2º grau, ambas com uma incógnita) fossem resolvidas em R, referindo-se ao conjunto dos números reais. O objetivo era manter questões familiares aos sujeitos participantes da pesquisa, e por esse motivo incluímos “em R” no enunciado, uma vez que é comum encontrar nos materiais didáticos estes dizeres. Observa-se, no entanto, que esta escolha provocou resultados inesperados, conforme as descrições a seguir.

Faz-se necessário observar também que os graus das equações não estavam explícitos, ou seja, os sujeitos precisaram reorganizar cada equação (eliminando parênteses, trocando termos de membros) para que se tornassem familiares.

A análise não se aterá à exatidão das resoluções, visto que se procura interpretar os significados atribuídos às formas de apresentação das equações. No entanto, cabe observar que quatro duplas deram a resposta em forma de conjunto-solução, recorrendo à notação geralmente utilizada em inequações, como $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| ... \right\}$. Pode-se levantar a hipótese que o uso da expressão “em R” no enunciado da questão tenha influenciado esta ação, que pode ser compreendida como excesso de zelo no registro da resposta.

As mesmas equações foram propostas às seis duplas. Apenas a dupla I recorreu à estratégia da soma e do produto das raízes de uma equação de 2º grau. Cabe notar que, em meio à resolução, a dupla escreve uma expressão $x^2 - 5x – 6$ sem igualar a zero, mostrando assim que “esqueceram” o sinal da igualdade, mas isto não interferiu no significado atribuído ao objeto matemático em questão.

De modo geral, pode-se notar estratégias mecanizadas de resolução de equações, visto que na equação de 1º grau todas as duplas procederam com “letra para um lado, número para o outro” e, na equação de 2º grau, todos (exceto a dupla I) organizaram a sentença de modo a aplicar a “Fórmula de Bhaskara”.

Parte IV, Questão 1 – A seguir você tem duas funções. Determine suas raízes.

Neste item, foram apresentadas duas expressões algébricas de funções, uma afim e uma quadrática, solicitando que os sujeitos determinassem as raízes destas funções. O esperado era que igualassem as expressões das funções dadas a zero e resolvessem a equação resultante deste procedimento. Para a função afim, a raiz é – 6 e as raízes da função quadrática são 2 e 4.

A dupla I realizou o procedimento esperado e determinou corretamente as raízes. Explicitou a “igualdade a zero” necessária para a determinação das raízes de uma função algebricamente. Destaque para o fato de a dupla não ter utilizado a “fórmula de Bhaskara” no cálculo das raízes da função quadrática: utilizou a relação entre coeficientes e raízes para concluir a questão com êxito.

A dupla II escreveu “Não há raízes” em sua conclusão sobre a função afim. É possível que os sujeitos tenham associado a palavra “raiz” ao expoente da variável da função, ou seja, os sujeitos podem ter associado o grau 2 à raiz quadrada. O fato de que na função afim o expoente da variável é 1 (mas não aparece), pode ter sido um dos motivos que influenciaram esta resposta. Na função quadrática, não explicitaram a “igualdade a zero”, mas utilizaram a “fórmula de Bhaskara”, como se estivessem resolvendo uma equação, concluindo corretamente a respeito das raízes.

A dupla III iniciou o que pareceu ser um procedimento de investigação: “escolheram” x = 2 na função afim e chegaram à conclusão que f(2) = 16. No entanto, não há conclusão alguma a respeito da raiz esperada. Na função quadrática, limitou-se a escrever “Não nos lembramos”, e, portanto não concluiu a tarefa.

O aparente procedimento de investigação, procurando o valor de x para o qual f(x) = 0, também foi a estratégia adotada pela dupla IV. Observa-se em seus registros tentativas utilizando os números naturais 1, 2, 3, 4 e 5. Como constatou o aumento dos valores das ordenadas, abandonou a questão sem concluir, deixando reticências (...) após os cálculos, provavelmente para comunicar a continuidade da tarefa.

Esta estratégia também foi adotada na função quadrática. A dupla calculou f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6) e f(7). Talvez como o espaço disponível havia se esgotado, não deram continuidade. Interessante observar que a dupla calculou f(2) = 16 e f(4) = 20, ou seja, ao cometer erros de cálculos, não percebeu que já havia encontrado as raízes. Devido a este fato, não é possível conjecturar se o procedimento escolhido seria validado caso a dupla chegasse à conclusão esperada.

A dupla V explicitou a “igualdade a zero” no caso da função afim e concluiu adequadamente sobre a raiz. No caso da função quadrática, aproveitou a expressão algébrica que estava dada no instrumento e escreveu “=0” na frente, desenvolvendo o cálculo correto a partir da “fórmula de Bhaskara”.

A dupla VI também foi atribuindo valores para x em suas tentativas de encontrar a raiz da função afim. Calcularam f(0), f(1) e f(2), não chegando a conclusão alguma com este procedimento. No caso da função quadrática, iniciou imediatamente o cálculo correto a partir da “fórmula de Bhaskara”, sem explicitar a “igualdade a zero”. Utilizando-se de uma seta, esta dupla apresentou um procedimento alternativo: calculou os valores corretos de f para x = 4 e x = 2, talvez procurando validar o procedimento adotado no primeiro momento.

Uma conjectura possível, a partir dos registros das duplas que iniciaram imediatamente a resolução pela “fórmula de Bhaskara”, é que estas identificaram a expressão algébrica da função quadrática com a equação do 2º grau, visto que este foi um procedimento comum na parte III.

Parte V, Questão 1 – Abaixo, temos o esboço do gráfico de uma função. Identifique com um círculo as raízes no gráfico.

A questão trazia o gráfico de uma função afim, esboçado com utilização do *software Graphmatica*. Foi pedido para que os sujeitos identificassem com um círculo o ponto cuja abscissa representa a raiz da função. Embora o enunciado apresente uma imprecisão – usa o termo raiz para se referir ao ponto em questão – optamos por mantê-la, sempre a favor da linguagem familiar aos sujeitos, presente nos materiais didáticos.

No entanto, a função não estava identificada, ou seja, o enunciado não trazia qualquer referência à função plotada no plano cartesiano. Era esperado que os sujeitos circulassem o ponto em que a curva intercepta o eixo das abscissas.

O objetivo era diagnosticar em que medida os sujeitos associavam o termo “raiz” com a abscissa do referido ponto (neste caso, $\left(-\frac{3}{2},0\right)$)

Apenas a dupla I respondeu satisfatoriamente a questão, assinalando o ponto corretamente, conforme mostra a figura a seguir.

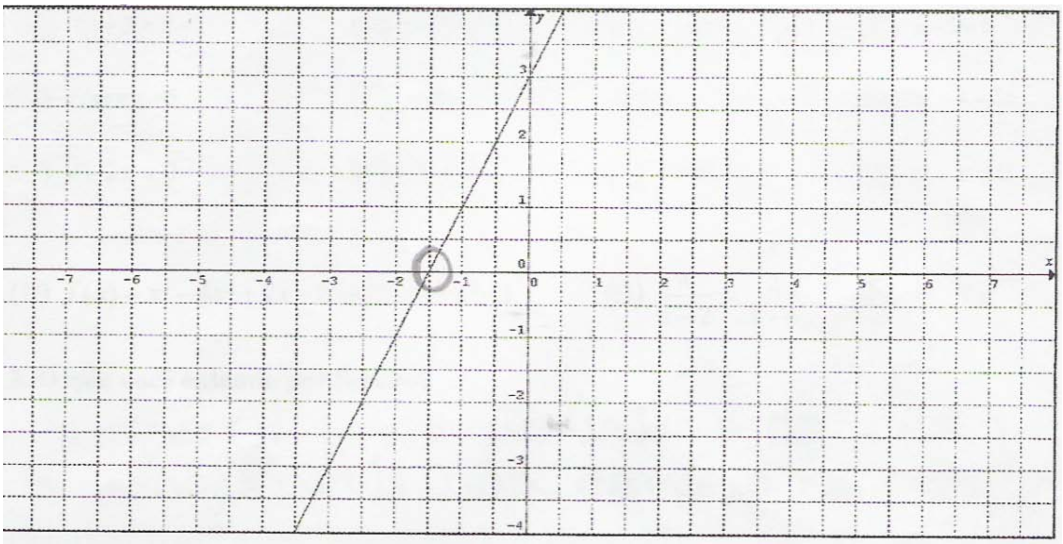


Figura 4.11 – *Resposta dada pela DUPLA I à questão 1, parte V da primeira etapa do instrumento definitivo.*

A dupla II não assinalou ponto algum, escrevendo ao lado do gráfico dado “Não tem raízes”.

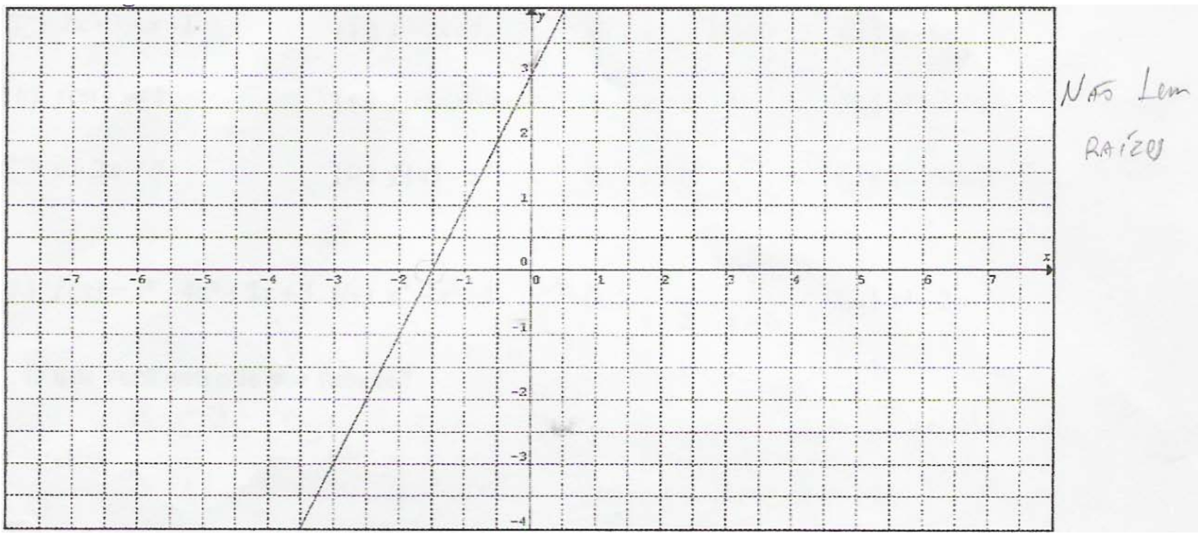


***Figura 4.12** – Resposta dada pela DUPLA II à questão 1, parte V da primeira etapa do instrumento definitivo.*

A dupla III assinalou 4 pontos pertencentes à reta, a saber: $\left(-\frac{3}{2},0\right)$, $(-1,1)$, $\left(-\frac{1}{2},2\right)$ e $(0,3)$. No entanto, não demonstrou ter reconhecido que entre estes pontos estava aquele cuja abscissa é a raiz da função.

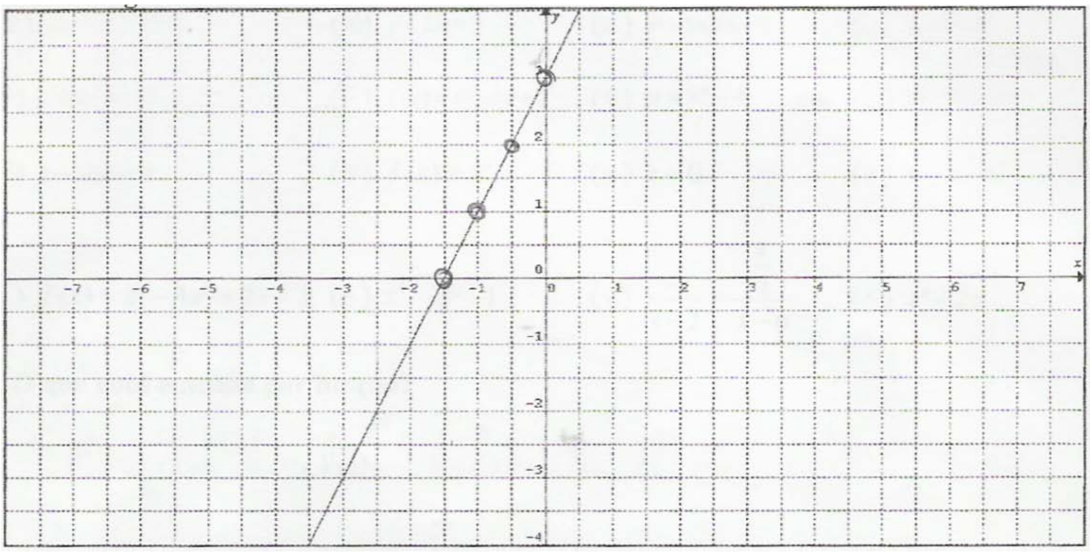


***Figura 4.13** – Resposta dada pela DUPLA III à questão 1, parte V da primeira etapa do instrumento definitivo.*

A dupla IV assinalou dois pontos: $\left(-\frac{3}{2},0\right)$ e $(0,3)$. Registrou, ainda, ao lado do gráfico, a seguinte inscrição “Raízes: [-1,5; 3]”. Aqui, pode-se conjecturar que, como a palavra “raízes” apareceu no enunciado, os sujeitos podem ter sido influenciados a procurar por mais de um ponto. Destaca-se o fato de os sujeitos desta dupla não terem reconhecido que se tratava de um gráfico de função afim, o que poderia levá-los a concluir que a intersecção com o eixo horizontal se daria num único ponto. Além disso, observa-se um problema de notação na comunicação do par ordenado que representou a resposta: foram utilizados colchetes no lugar dos parênteses.

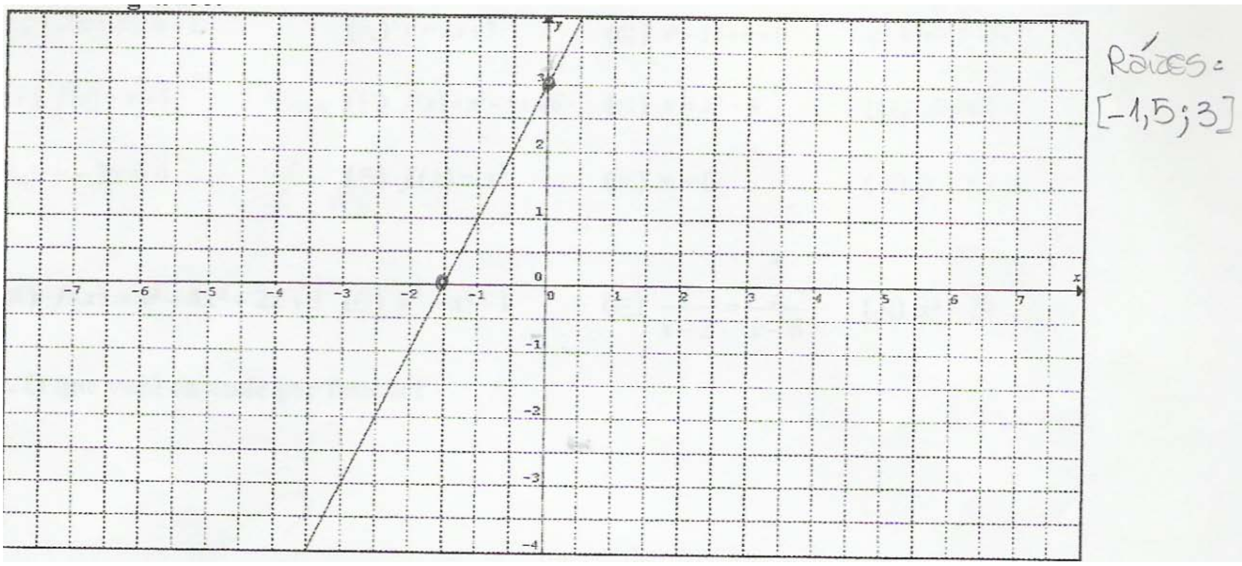


Figura 4.14 – *Resposta dada pela DUPLA IV à questão 1, parte V da primeira etapa do instrumento definitivo.*

A dupla V fez círculos em volta de sete pontos pertencentes ao gráfico da função, a saber: $(-3,-3)$, $\left(-\frac{5}{2},-2\right),(-2,-1),\left(-\frac{3}{2},0\right),(-1,1),\left(-\frac{1}{2},2\right)$ e $(0,3)$. Assim como a dupla III, não fez referência alguma ao fato de um destes pontos ter como abscissa a raiz da função.

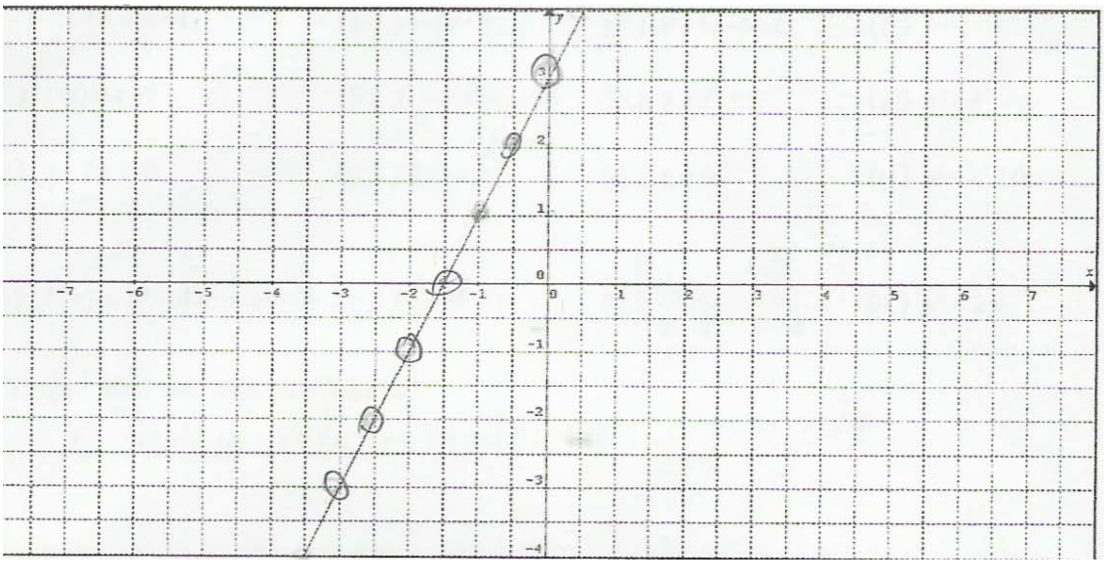


Figura 4.15 – *Resposta dada pela DUPLA V à questão 1, parte V da primeira etapa do instrumento definitivo.*

A dupla VI, da mesma forma que a dupla IV, assinalou os dois pontos de intersecção da curva com os eixos ortogonais, sem, no entanto, registrar qualquer outra informação adicional.

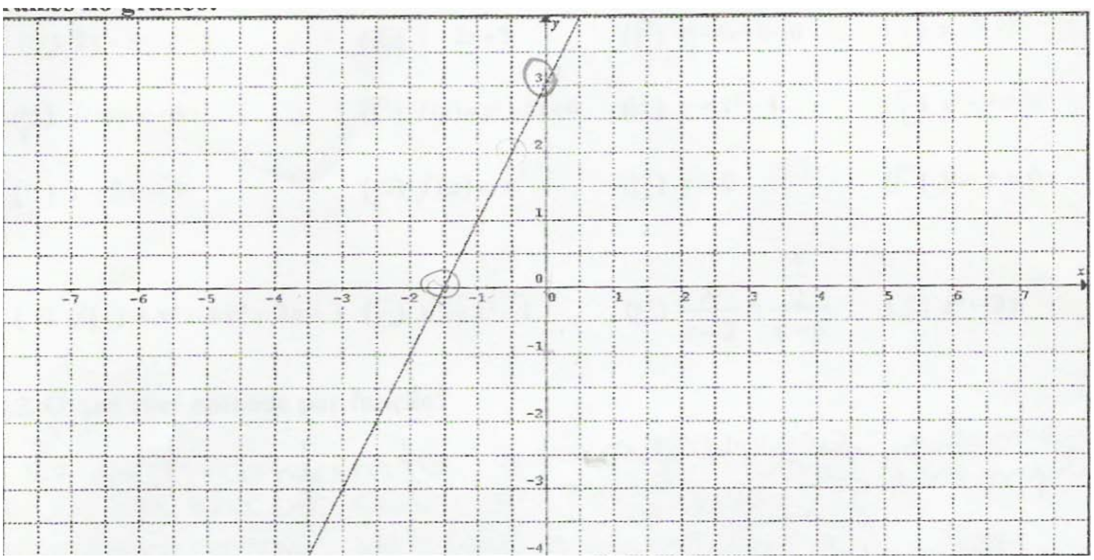


Figura 4.16 – *Resposta dada pela DUPLA VI à questão 1, parte V da primeira etapa do instrumento definitivo.*

Parte V, Questão 2 – Abaixo, temos o esboço do gráfico de uma função. Identifique com círculos as raízes no gráfico.

Este item apresentava o gráfico de uma função quadrática e solicitava, assim como no item anterior, que os sujeitos identificassem com um círculo cada um dos pontos cujas abscissas representavam as raízes da função. Era esperado, portanto, que fizessem círculos ao redor dos valores 2 e 3 no eixo horizontal.

As duplas I, II, IV e VI identificaram corretamente as raízes. Um destaque fica por conta de uma anotação ao lado da questão feita pela dupla IV: “Raízes = [2; 3]”, novamente utilizando uma notação inadequada – utilizando colchetes – para escrever o resultado.

DUPLA I

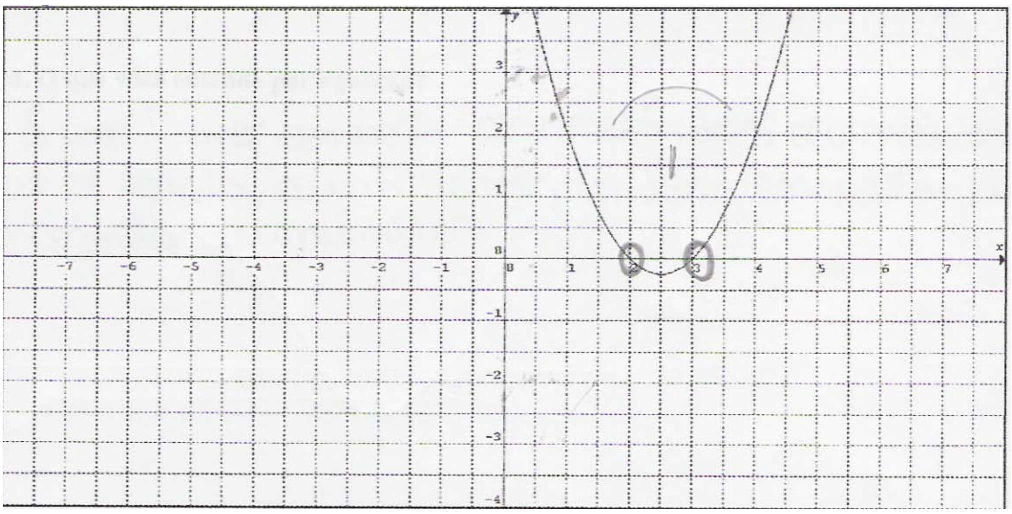


Figura 4.17 – *Resposta dada pela DUPLA I à questão 2, parte V da primeira etapa do instrumento definitivo.*

DUPLA II

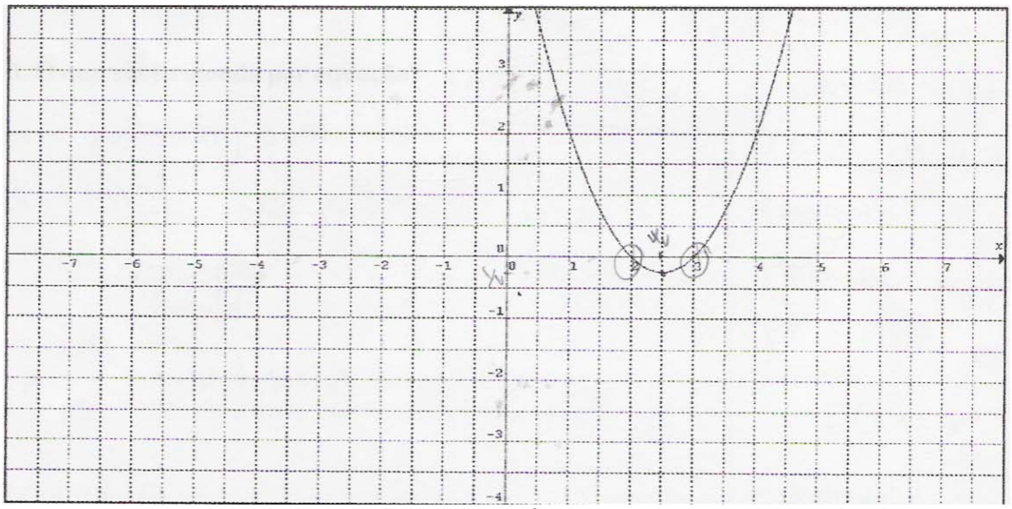


Figura 4.18 – *Resposta dada pela DUPLA II à questão 2, parte V da primeira etapa do instrumento definitivo.*

DUPLA IV

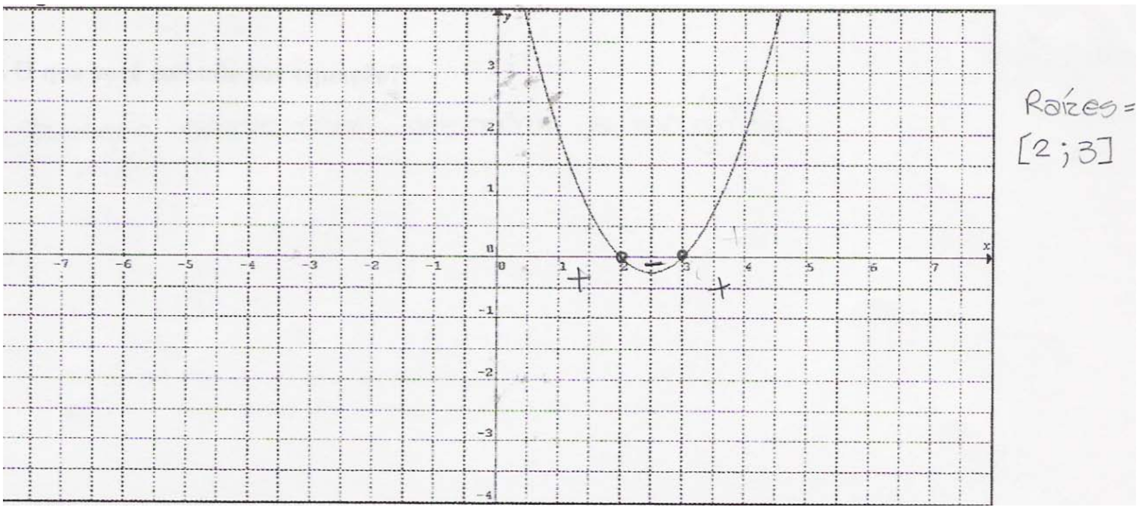


Figura 4.19 – *Resposta dada pela DUPLA IV à questão 2, parte V da primeira etapa do instrumento definitivo.*

DUPLA VI

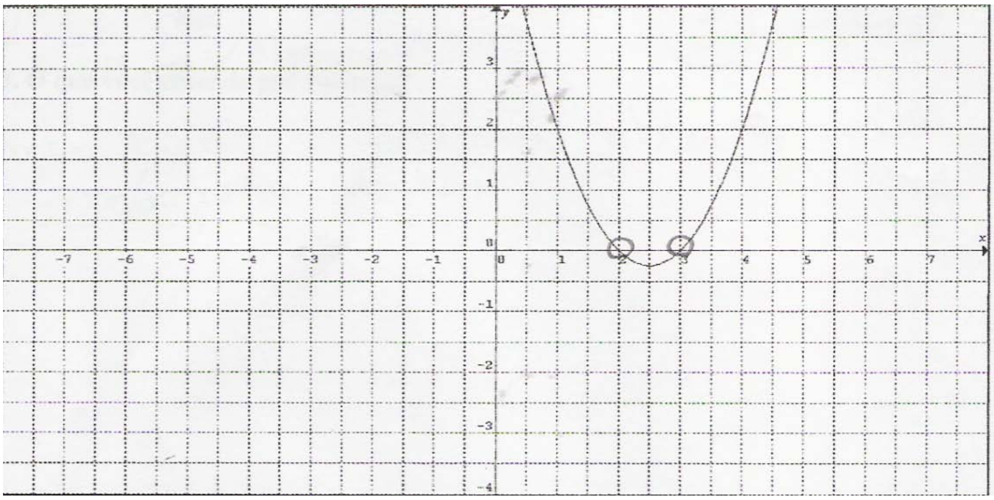


Figura 4.20 – *Resposta dada pela DUPLA VI à questão 2, parte V da primeira etapa do instrumento definitivo.*

Esta forma de escrever pode estar relacionada com o fato destes sujeitos não terem associado, neste item, as raízes de uma função às abscissas dos pontos onde a curva intercepta o eixo horizontal. Não foi pedido no enunciado que fossem escritos os pares ordenados desta forma, mas a identificação adequada seria (2, 0) e (3, 0).

A dupla III assinalou os dois pontos pedidos, mas assinalou um terceiro ponto (1, 2), o que coloca sua resposta fora do esperado.

DUPLA III

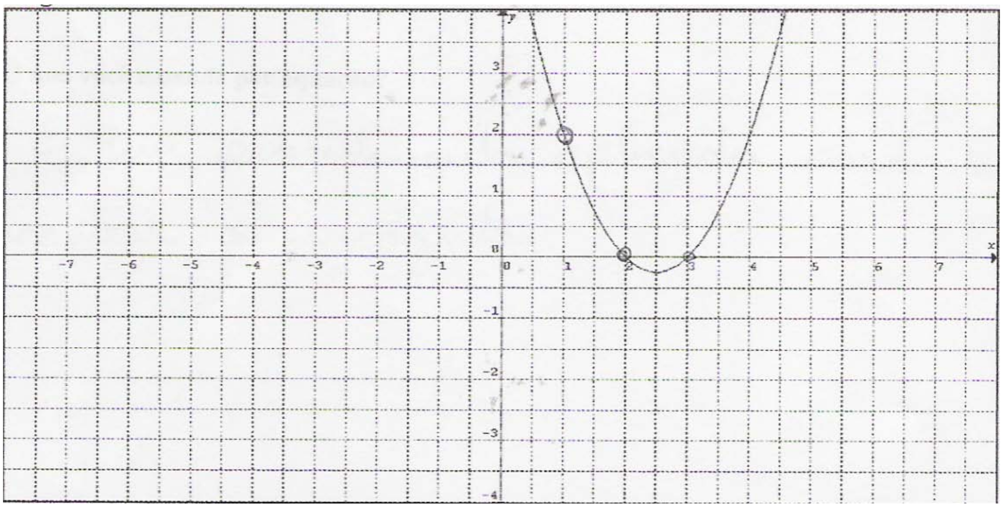


***Figura 4.21** – Resposta dada pela DUPLA III à questão 2, parte V da primeira etapa do instrumento definitivo.*

A dupla V assinalou os pontos (1, 2) e (4, 2), que pertencem à curva, mas que não representam os pares ordenados cujas abscissas são as raízes da função.

DUPLA V

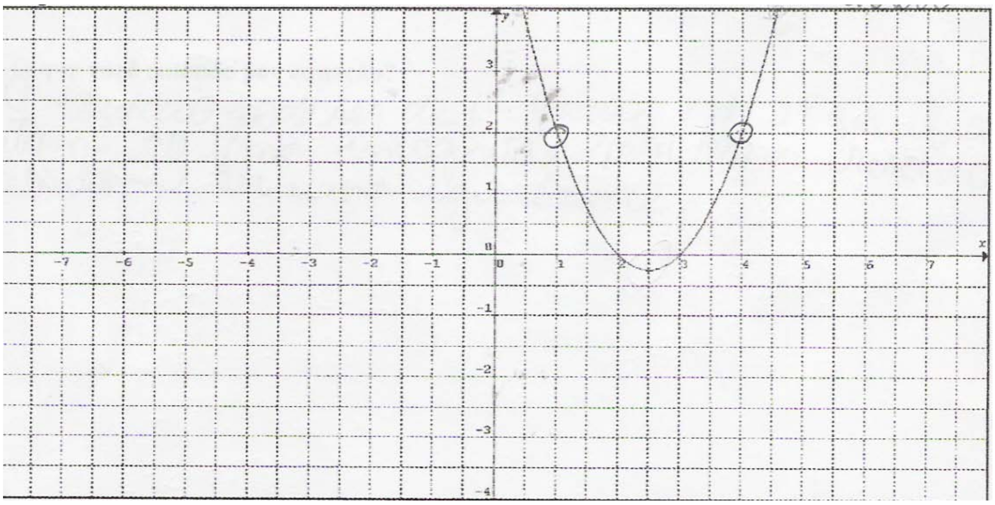


***Figura 4.22** – Resposta dada pela DUPLA V à questão 2, parte V da primeira etapa do instrumento definitivo.*

SEGUNDA ETAPA

Nesta etapa, os sujeitos foram reunidos no laboratório de informática da escola, onde foi disponibilizado o *software Graphmatica*. A inserção deste elemento tecnológico teve como objetivo facilitar a conversão entre os registros algébricos e gráficos das funções propostas nas questões do instrumento definitivo.

Antes das atividades, foi necessária uma explanação sobre a utilização dos recursos básicos do *software*, visto que os sujeitos não o conheciam.

Ocorreu uma mudança em relação à etapa anterior: um dos sujeitos que havia faltado foi incorporado à dupla II, que se tornou o único trio da sessão[6].

Parte I, Questão 3 – Resolva a equação $2x - 6 = 0$.

Como no item anterior – parte I, questão 2 (ANEXO II, p. 126) – foi proposta uma associação entre o gráfico da função f dada por $f(x) = 2x - 6$ e a solução da equação $2x - 6 = 0$, era esperado que o recurso do *software* fosse citado, ou seja, que as duplas que haviam feito o reconhecimento adequado não utilizassem procedimento algébrico para concluir a questão.

No entanto, todas as duplas recorreram à resolução tradicional, mesmo aquelas que haviam reconhecido a solução da equação no gráfico da função (feito com o auxílio do *software Graphmatica*). Um indício desta unanimidade é a redação do enunciado, muito comum nos materiais didáticos utilizados em sala de aula. Provavelmente, os sujeitos se depararam com um pedido familiar, e não “arriscaram” um procedimento alternativo: recorreram àquele que lhes parecia mais seguro.

Na parte II, manteve-se a mesma tônica da parte anterior, somente mudando a função afim para a função quadrática f, dada por $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Novamente, era esperado que os sujeitos reconhecessem no gráfico esboçado na tela do computador as raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ (os números reais 2 e 3), expressassem no registro da língua natural como se deu este

[6] No entanto, foi mantido o nome “DUPLA II” em nossos relatos, visto que o desempenho destes sujeitos na primeira etapa é relativamente autônomo, dado o caráter investigativo da etapa em questão.

reconhecimento e utilizassem este procedimento alternativo na resolução da equação.

O objetivo das questões propostas na parte IV foi o de diagnosticar como ocorre, entre os sujeitos participantes da pesquisa, o reconhecimento das soluções de equações não familiares a partir dos gráficos das funções. Implicitamente, também se procurava investigar se o recurso gráfico poderia ser uma alternativa para resolver equações quando o procedimento algébrico não é acessível.

Parte IV, Questão 1 – Abaixo, têm-se dois gráficos das funções G(x) e H(x). Quais são as soluções das equações G(x) = 0 e H(x) = 0?

Neste item foram propostos dois gráficos de funções não familiares aos sujeitos (funções polinomiais do 4º grau, $G(x) = x^4 – 5x^2 + 4$ e $H(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$), esboçados com o auxílio do *software Graphmatica*. Esperava-se que as respostas fossem {-2, -1, 1, 2} para G(x) = 0 e {-3, -1, 1, 2} para H(x) = 0.

Novamente, destacamos que a incongruência no enunciado – funções G(x) e H(x), quando o correto é funções G e H – corresponde a uma adequação à linguagem familiar aos sujeitos participantes da pesquisa.

A dupla I respondeu adequadamente a questão, inclusive escrevendo os resultados entre chaves. No protocolo desta dupla, nota-se que os sujeitos marcaram no gráfico os pontos cujas abscissas correspondem às raízes. A adequação da resposta foi consequência da devida associação entre as raízes das funções e as soluções das equações propostas.

O trio (Dupla II) obteve o mesmo êxito da dupla I, também recorrendo à notação de conjunto-solução para comunicar os resultados.

Pode-se conjecturar que, para estes sujeitos, o recurso gráfico constituiu uma estratégia alternativa de resolução de equações, já que lidaram com funções e equações não familiares e encontraram corretamente os resultados.

A dupla III não registrou no gráfico os valores correspondentes às raízes das funções. Nota-se somente registrado acima de cada gráfico as inscrições "G(1) = 0" e "H(1) = 0".

Faz-se necessário observar que as duas curvas interceptavam o eixo horizontal no ponto (1, 0), o que pode ter influenciado a resposta dada pelos sujeitos desta dupla. No entanto, devido aos objetivos anteriormente descritos, esta resposta foi julgada inadequada, já que não foi expresso o reconhecimento das raízes.

A dupla IV marcou nos gráficos os pontos cujas abscissas correspondem às raízes de cada função, porém não foi capaz de expressar os resultados. Na parte superior da folha há a inscrição "Obs: Nós não recordamos funções."

Destaca-se que os sujeitos da dupla reconheceram graficamente os pontos de intersecção da curva com o eixo horizontal nos dois casos, mas não fizeram a devida associação com as soluções das equações.

A dupla V identificou os valores do eixo vertical, registrando acima de cada gráfico as respostas "Im = [-2, 3]" (acima do gráfico de G) e "Im =]-3, 3[" (acima do gráfico de H). Esta resposta foi considerada inadequada diante da proposta da questão.

A dupla VI marcou adequadamente os pontos cujas abscissas correspondem às raízes das funções no eixo horizontal de cada gráfico.

No primeiro caso, comunicou os resultados com o registro "G(x) = 1, 2, -1, -2". Apesar desta notação inadequada, a resposta atende à solicitação da questão proposta. No segundo caso, o registro foi

“H(x) = 1, 2, -1, -4”, tendo ocorrido erro apenas no valor – 4, provavelmente devido a alguma confusão com a escala do gráfico.

Os resultados apresentados por esta dupla, neste item, também estão inseridos no que se considera adequado diante da proposta: os sujeitos estabeleceram relação entre as raízes das funções e as soluções das equações correspondentes.

Parte IV, Questão 2 – Considere a função $f(x) = x^2 + x - 6$. Encontre as raízes de $f(x) = 0$ de duas formas distintas.

Um dos objetivos era diagnosticar se o procedimento algébrico ainda continuava sendo o recurso principal, mesmo após terem sido realizadas diversas atividades que permitiam associar o gráfico da função às soluções de uma equação. Destaca-se ainda que o recurso algébrico seria considerado adequado como um dos procedimentos apresentados.

A dupla I registrou como primeiro procedimento a técnica envolvendo as relações de soma e o produto das raízes e como segundo procedimento a resolução pela “Fórmula de Bhaskara”. Nos dois casos, chegaram aos resultados corretos (-3 e 2). Nota-se que a dupla manteve-se no registro algébrico, não efetuando, portanto, nenhuma conversão, no sentido apontado por Duval (2003).

O trio (dupla II) registrou como primeiro procedimento a resolução pela “Fórmula de Bhaskara”, explicitando os valores corretos. Como segundo procedimento, escreveu o texto: *“Substitua valores de x, para encontrar y = 0. Achados os valores essas são as raízes.”* Trata-se de um procedimento válido no caso da função apresentada. No entanto, ainda é um tratamento algébrico, de difícil realização.

A dupla III registrou apenas o cálculo a seguir:

$f(2) = 2^2 + 2 - 6$

$f(2) = 4 + 2 - 6$

f(2) = 0

Apesar de o número 2 ser uma das raízes da função, a dupla não deixou claro que estabeleceu esta relação, ou seja, que tenha reconhecido que o valor 2 anula a ordenada. Além disso, não apresentou a outra raiz nem outra forma de responder à questão.

A dupla IV registrou duas respostas inadequadas. O primeiro registro foi:

$f(x) = x^2 + x - 6$

$f(0) = 0^2 + 0 - 6$

$f(0) = -6$

Nota-se que os sujeitos da dupla confundiram f(0) com f(x) = 0. No segundo registro, a dupla igualou a expressão algébrica da função a 0 e aplicou a "fórmula de Bhaskara" para resolver. No entanto, cometeram um erro no cálculo do discriminante, concluindo erroneamente a respeito das raízes pedidas.

A dupla V utilizou dois procedimentos algébricos diferentes para responder à questão corretamente. No primeiro, recorreu à "Fórmula de Bhaskara". Nota-se que a dupla não registrou a "igualdade a zero", repetindo a expressão algébrica da função e iniciando imediatamente o cálculo do discriminante. No segundo procedimento, a dupla calculou corretamente f(2) e f(-3), demonstrando serem esses valores as raízes da função.

A dupla VI registrou apenas uma forma, recorrendo à "Fórmula de Bhaskara" para concluir corretamente sobre as raízes da função.

Chama a atenção a presença, em todas as respostas, do procedimento baseado na "Fórmula de Bhaskara", o que era esperado, pois a questão envolvia uma função quadrática. Com isso, é possível concluir que, em se tratando de raízes de funções e soluções de equações, os sujeitos pesquisados não discerniram um objeto matemático do outro, tratando-os da mesma forma, ou ainda, fazendo tratamentos no mesmo registro de representação semiótica (neste caso, o registro algébrico).

Nenhuma das duplas investigadas sequer mencionou que seria possível obter as raízes da função f (e, consequentemente, as soluções da equação f(x) = 0) a partir do esboço do gráfico, o que significaria uma tentativa de conversão do registro algébrico para o registro gráfico.

Nas questões da parte V procura-se incentivar conversões do registro numérico para o algébrico e também do registro gráfico para o algébrico, no que tange às raízes de funções afins e quadráticas.

Parte V, Questão 1 – Escreva a expressão algébrica de uma função que tenha como raiz o número – 3.

Era esperado que as duplas respondessem com funções afins, pelo fato de ter sido apresentado um único valor numérico para a raiz.

A dupla I apresentou duas respostas satisfatórias, tendo escrito f(x) = 9x + 27 e, ao lado, f(x) = 2x + 6.

O trio (dupla II) apresentou a expressão $x^2 + x - 6$, que responde parcialmente à solicitação feita, pois nota-se a ausência da notação “f(x)” na comunicação da resposta. Além disso, a função f dada por esta expressão apresenta também o número 2 como raiz.

A dupla III escreveu a resposta “$f(x) = 2x - \sqrt{x}$”, que no domínio real torna-se inadequada. Ainda que não tenha sido especificado o domínio da função solicitada, a presença do radical é inesperada diante da proposta da investigação. A dupla IV registrou um ponto de interrogação como resposta.

A dupla V registrou a resposta como segue:

f(x) = $x^2 - x - 9$

$f(x) = 3^2 - 3 – 9$

$f(x) = 9 – 3 – 9$

$f(x) = - 3$

Observa-se que a dupla substituiu o número – 3 na variável independente de uma função f dada por $f(x) = x^2 - x - 9$, não discernindo entre as ideias de raiz da função e valor da função num dado ponto. Nota-se ainda que esta função f não possui raízes racionais, pois o discriminante é igual a 37.

A dupla VI escreveu a seguinte resposta:

$f(1) = x^2 - 4$

$1^2 - 4 = - 3$

Mesmo que fosse a função quadrática f dada por $f(x) = x^2 - 4$, a resposta seria inadequada para a solicitação da questão.

De modo geral, nota-se que as duplas, com exceção da dupla I, não estabeleceram relação entre o tipo da função polinomial e a quantidade de raízes. Este era um dos propósitos desta atividade, que se pôde notar com a análise dos registros.

Parte V, Questão 2 – Escreva a expressão algébrica de uma função que tenha como raízes os números 4 e 5.

Era esperado que cada dupla respondesse com uma função quadrática, associando a quantidade de raízes ao tipo da função polinomial.

A dupla I deu como resposta as funções $f(x) = x^2 - 9x + 20$ e $f(x) = 2x^2 - 18x + 40$, que atendem plenamente à proposta.

O trio (dupla II) registrou a resposta $x^2 - 9x + 20$, que também é parcialmente adequada à solicitação. Uma observação fica apenas por conta da ausência da notação f(x) na resposta destes sujeitos.

A dupla III escreveu a resposta: $f(x)=\frac{16}{25}$. Pode-se notar que os sujeitos elevaram as raízes fornecidas ao quadrado, provavelmente uma associação com o expoente da incógnita de uma função quadrática. Destaque para o uso da notação f(x), associado ao termo imagem de uma função presente no enunciado, apesar da ausência da variável independente (x) na comunicação da resposta.

A dupla IV não deu resposta alguma, registrando um ponto de interrogação.

A dupla V registrou suas respostas como segue:

f(x) = 5² - 5 – 15	*f(x) = 4² - 4 – 8*
f(x) = 25 – 5 – 15	*f(x) = 16 – 4 – 8*
f(x) = 5	*f(x) = 4*

Os sujeitos demonstraram certa confusão entre o cálculo do valor de uma função num dado ponto com o cálculo das raízes de uma função. Não conseguiram, portanto, responder satisfatoriamente a questão proposta.

A dupla VI respondeu com a função $f(x)=\left|x^2+x-20\right|$, que não atende à solicitação, pois apresenta como raízes os números 4 e – 5. Observar o uso desnecessário do módulo, levando-se em conta o caráter da atividade.

Parte V, Questão 3

Esta questão está dividida em duas partes e tem como objetivo favorecer a conversão entre os registros gráfico e algébrico, relativos à raiz de uma função afim.

Para cada dupla foi apresentado um gráfico com um ponto assinalado, e pedido que: desenhasse o gráfico de uma função que passasse pelo ponto assinalado (item A); escrevesse a expressão algébrica da função cujo gráfico havia sido desenhado no item A (item B).

Para a dupla I, foi assinalado o ponto (3, 0). A dupla traçou uma reta passando por este ponto, associando a uma função afim, e escreveu a função f(x) = x – 3, atendendo satisfatoriamente à solicitação.

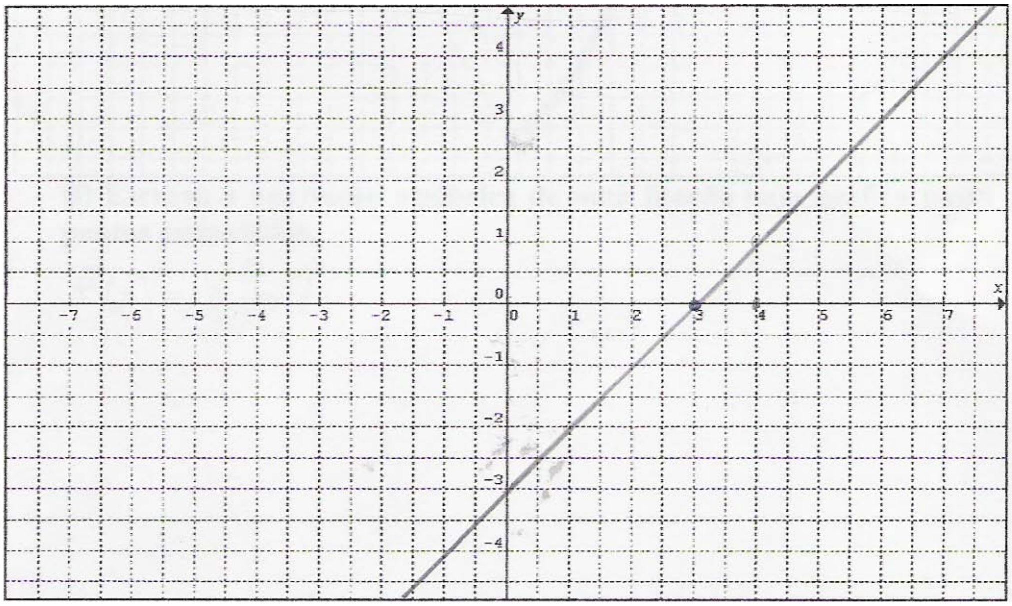


***Figura 4.23** – Resposta dada pela DUPLA I à questão 3, parte V da segunda etapa do instrumento definitivo.*

Para o trio (dupla II), foi assinalado o ponto (1, 0). A dupla traçou uma reta passando por este ponto, associando a uma função afim, e escreveu a função f(x) = x – 1, também atendendo adequadamente às solicitações.

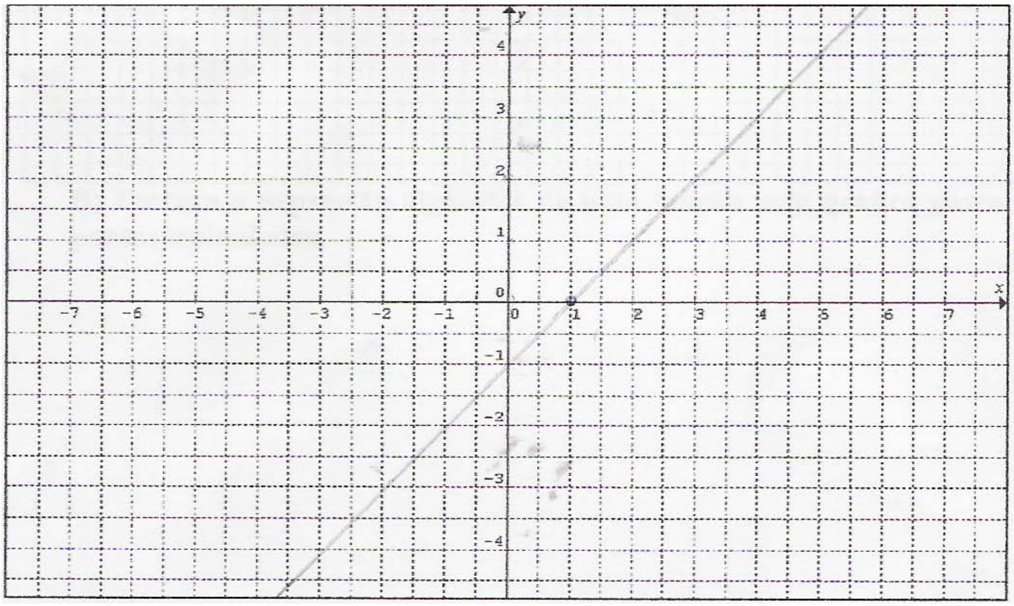


***Figura 4.24** – Resposta dada pela DUPLA II à questão 3, parte V da segunda etapa do instrumento definitivo.*

Para a dupla III, foi assinalado o ponto (0, 0). A dupla traçou a curva mostrada na figura a seguir, inadequada diante do esperado. No item B, registrou a seguinte resposta:

f(x) = x + 2

f(0) = 0 + 2

f(0) = 2

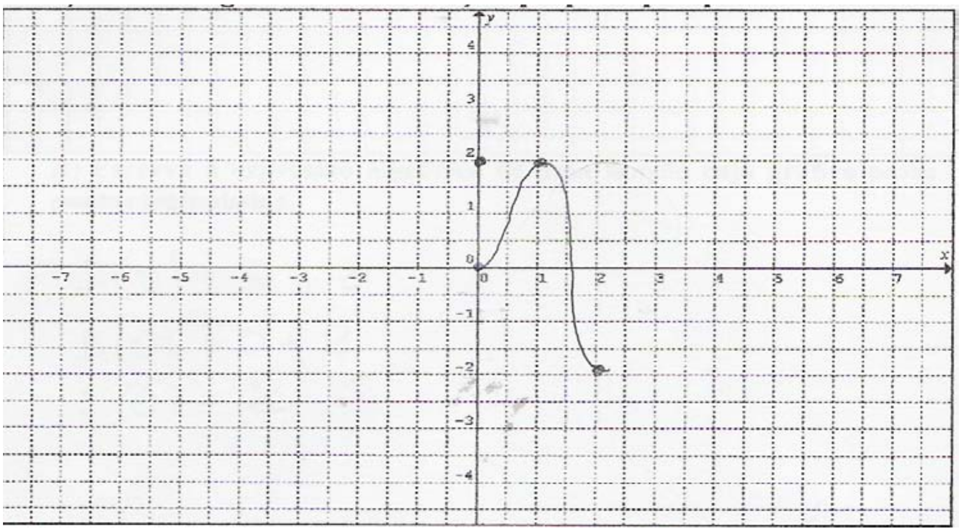


Figura 4.25 – *Resposta dada pela DUPLA III à questão 3, parte V da segunda etapa do instrumento definitivo.*

Para a dupla IV, foi assinalado o ponto (- 2, 0). No item A, a dupla traçou uma reta paralela ao eixo vertical passando por este ponto, resposta que não atende às expectativas. No item B, a dupla registrou um ponto de interrogação como resposta.

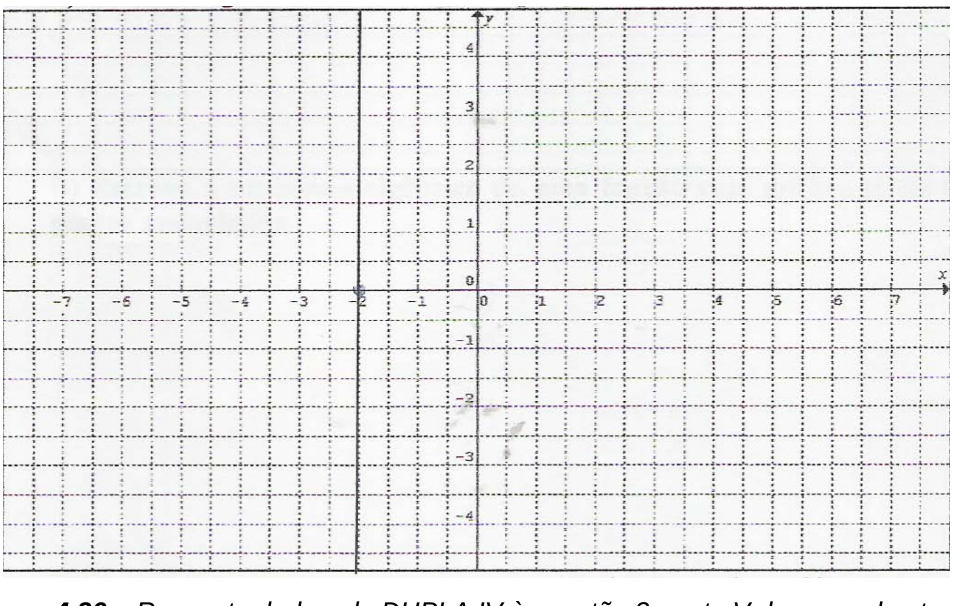


Figura 4.26 – *Resposta dada pela DUPLA IV à questão 3, parte V da segunda etapa do instrumento definitivo.*

Para a dupla V, foi assinalado o ponto (- 3, 0). O item A foi respondido de forma adequada, com uma reta passando pelo ponto assinalado. Já no item B, os sujeitos registraram a seguinte resposta:

f(x) = x² - x – 9

f(x) = 3² - 3 – 9

f(x) = 9 – 3 – 9

f(x) = - 3

considerada inesperada diante da solicitação pois, mesmo considerando a função quadrática, não houve associação do gráfico desenhado corretamente no item A com a função apresentada no item B, ou seja, não houve conversão do registro gráfico para o registro algébrico.

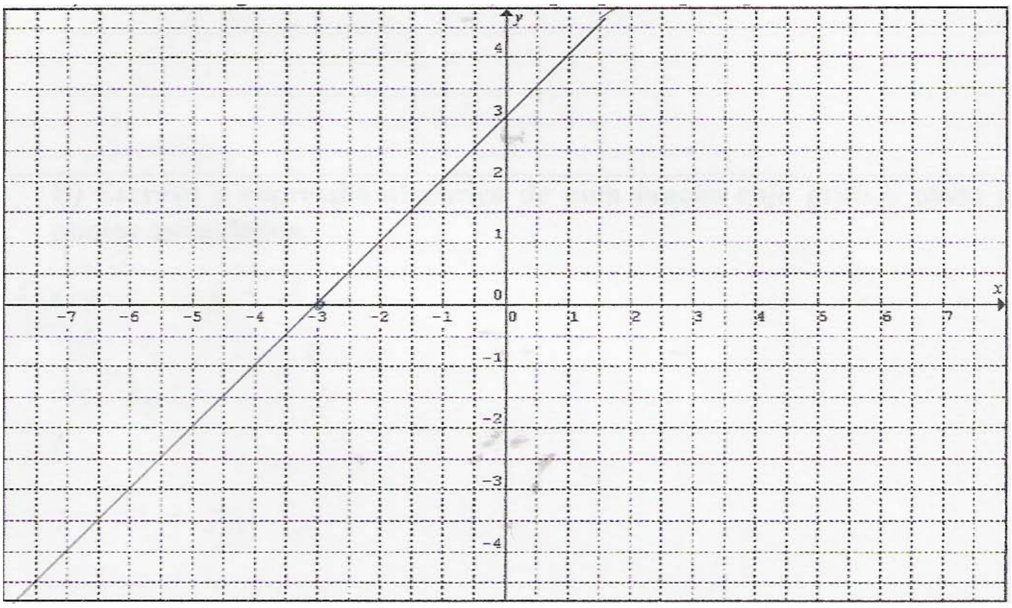


Figura 4.27 – *Resposta dada pela DUPLA V à questão 3, parte V da segunda etapa do instrumento definitivo.*

Para a dupla VI, foi assinalado o ponto (1,5; 0). O item A foi respondido dentro do esperado, com uma reta passando pelo ponto indicado. No item B, a dupla registrou as seguintes respostas: $y = \frac{x}{2}$ e $f(x) = \frac{x}{2}$. Observa-se que não houve, neste caso, coerência entre as respostas dadas nos itens A e B, visto que o gráfico da função não passa pelo ponto assinalado. Pode-se considerar que a questão foi respondida parcialmente com êxito pela dupla, pois apesar de algumas inadequações, houve certa associação com a função afim.

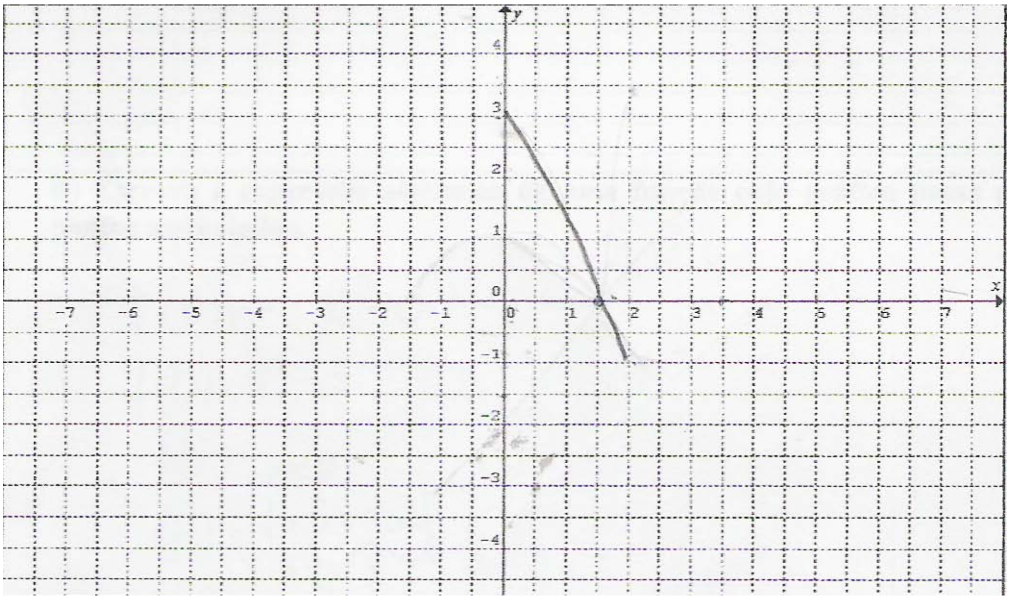


__Figura 4.28 –__ Resposta dada pela DUPLA VI à questão 3, parte V da segunda etapa do instrumento definitivo.

Parte V, Questão 4

Nesta questão, as solicitações foram muito semelhantes às da questão anterior, apenas mudando-se para o caso da função quadrática: foram assinalados dois pontos em cada gráfico, esperando-se que cada dupla respondesse com o esboço de uma parábola e com a expressão algébrica de uma função associada a esta figura.

Para a dupla I, foram assinalados os pontos (-2, 0) e (2, 0). Os sujeitos desenharam uma parábola passando por estes pontos no item A e responderam com a função $f(x) = x^2 - 4$ no item B, resultados considerados adequados às propostas.

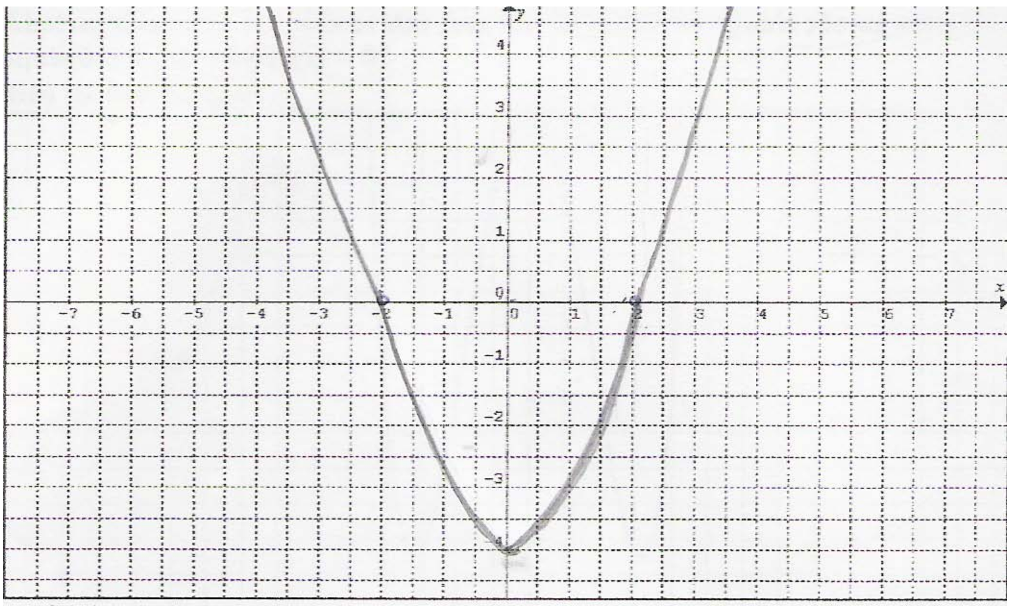


***Figura 4.29** – Resposta dada pela DUPLA I à questão 4, parte V da segunda etapa do instrumento definitivo.*

Para o trio (dupla II), foram assinalados os pontos (1, 0) e (4, 0). Os sujeitos desenharam adequadamente uma parábola passando por estes pontos no item A e responderam com a expressão $x^2 - 5x + 4$ no item B. Observa-se apenas a ausência da notação f(x) na comunicação da expressão algébrica da função, o que não invalida o resultado da dupla.

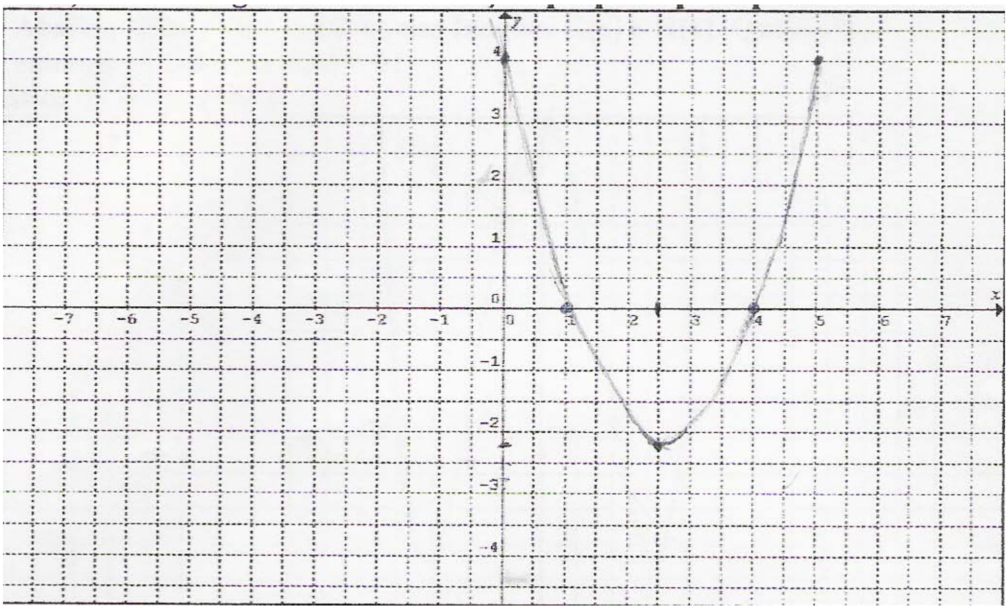


***Figura 4.30** – Resposta dada pela DUPLA II à questão 4, parte V da segunda etapa do instrumento definitivo.*

Para a dupla III, foram assinalados os pontos (0, 0) e (2, 0). Curiosamente, a dupla repetiu a mesma resposta nos itens A e B que havia sido inadequadamente dada na questão 3.

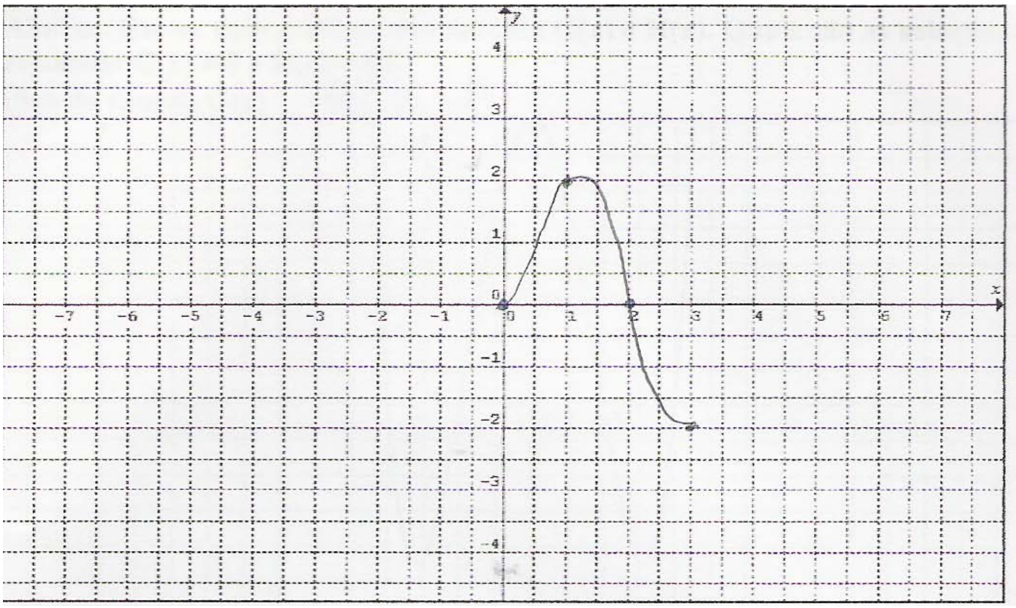


Figura 4.31 – *Resposta dada pela DUPLA III à questão 4, parte V da segunda etapa do instrumento definitivo.*

Para a dupla IV, foram assinalados os pontos (-3, 0) e (0, 0). No item A, a dupla esboçou satisfatoriamente uma parábola passando pelos pontos, mas no item B registrou apenas um ponto de interrogação, demonstrando não ter compreendido o pedido. Pode-se conjecturar que os sujeitos conseguiram tratar o tema no registro gráfico, mas não efetuaram a conversão para o registro algébrico.

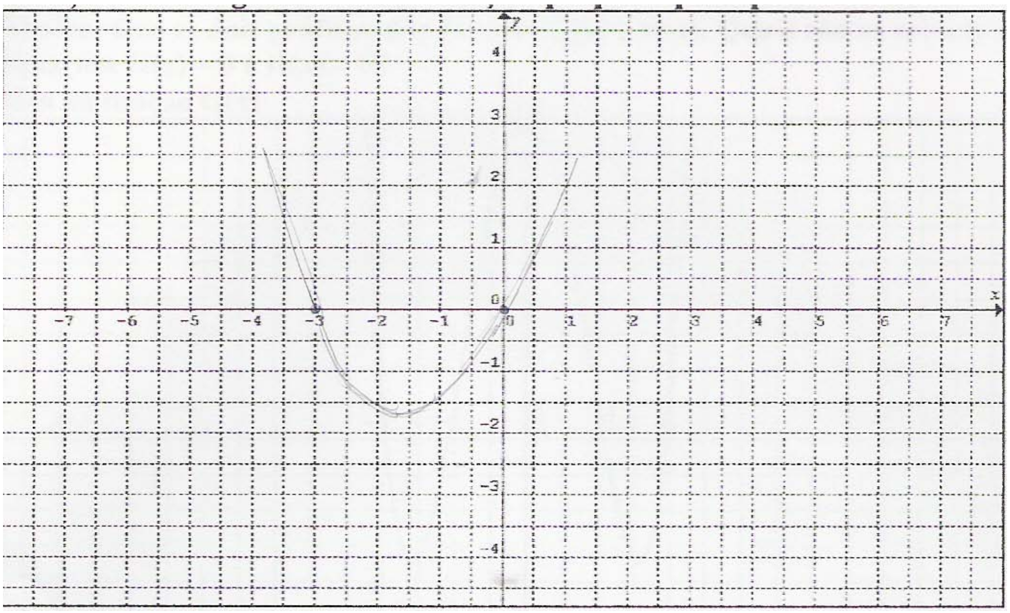


Figura 4.32 – *Resposta dada pela DUPLA IV à questão 4, parte V da segunda etapa do instrumento definitivo.*

Para a dupla V, foram assinalados os pontos (-4, 0) e (-1, 0). A dupla registrou a seguinte resposta no item A:

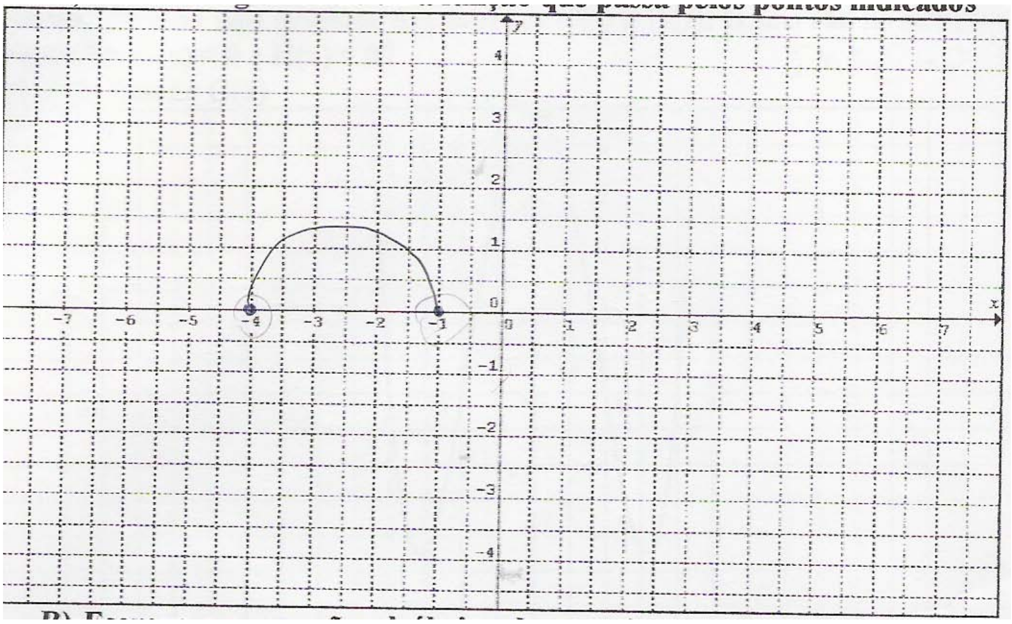


Figura 4.33 – *Resposta dada pela DUPLA V à questão 4, parte V da segunda etapa do instrumento definitivo.*

No item B, a dupla iniciou sua resposta com a função f(x) = x^2 - 4x + 3, que não atende adequadamente à solicitação, já que não corresponde à parábola desenhada no item A. Importante notar o encaminhamento dado pela dupla para concluir este item: em seguida, há um cálculo correto das raízes da função utilizando a “Fórmula de Bhaskara”, mostrando novamente a associação direta da expressão algébrica da função quadrática com a equação do 2º grau feita por estes sujeitos.

Para a dupla VI, foram assinalados os pontos (-3, 0) e (1, 0). No item A, a dupla esboçou a curva mostrada a seguir:

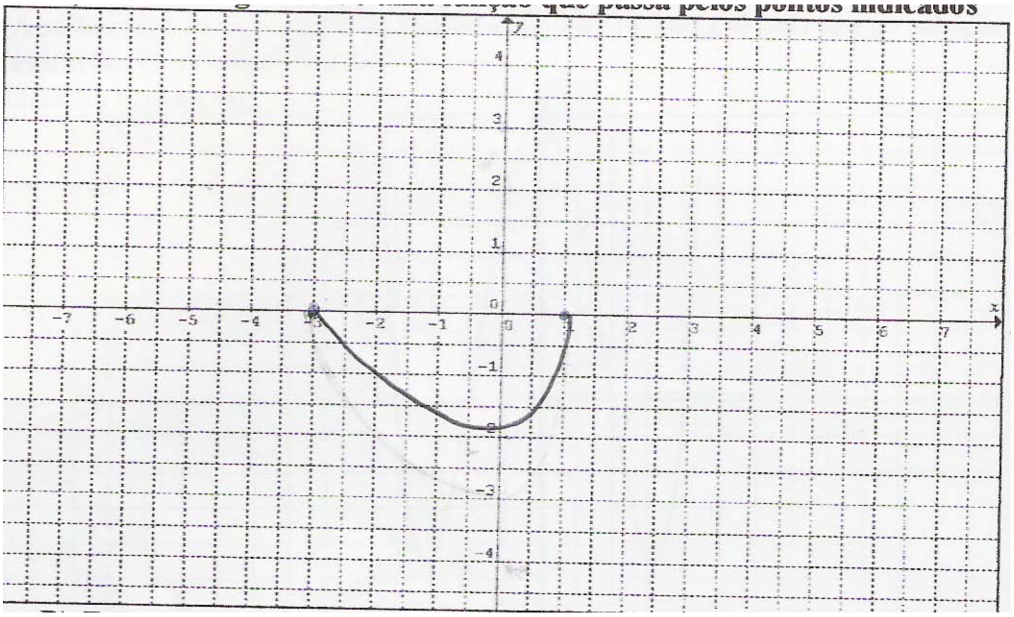


Figura 4.34 – *Resposta dada pela DUPLA VI à questão 4, parte V da segunda etapa do instrumento definitivo.*

No item B, a dupla iniciou com a função f(x) = x^2 - 3, que não está associada com a curva dada como resposta no item A. Além disso, a dupla prosseguiu registrando os cálculos a seguir:

f(0) = 0 – 3

f(0) = - 3

f(1) = 1 – 3 = - 2

f(2) = 2^2 - 3

f(2) = 4 – 3 = 1

Pode-se conjecturar que estes cálculos representam uma tentativa de justificar as respostas, pois apresentam como resultados os valores – 3 e 1. No entanto, escapa aos propósitos da questão, uma vez que não demonstra que os sujeitos associaram devidamente a noção de raiz da função ao gráfico, ou seja, não efetuaram satisfatoriamente, dentro da perspectiva teórica assumida, a conversão entre o registro gráfico e o registro algébrico.

Como comentário adicional a esta última parte, reitera-se que a opção de fornecer pontos diferentes a cada dupla nos gráficos foi para evitar influências de eventuais trocas de informações entre as duplas durante a aplicação do instrumento definitivo.

CAPÍTULO 5 – CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS FINAIS

5.1. Conclusões

Após apresentarmos nossa questão de pesquisa (p. 18), julgamos conveniente complementar com questões (p. 23) que especificavam os tópicos de nosso interesse, sempre dentro do tema investigado.

Neste tópico, após terem sido apresentados os resultados obtidos, exporemos nossas conclusões.

Para investigar as questões "Entre diversas expressões algébricas, os sujeitos sabem discernir quais são funções?" e "Idem, quais são equações?" (p. 23), recorremos a dois tipos de questionamentos: um operacional e outro discursivo. No operacional, ao classificarem várias expressões algébricas como funções ou equações, a maioria dos sujeitos que participaram da pesquisa (quatro das seis duplas) mostrou reconhecer uma função através da notação f(x), sendo que apenas uma das duplas reconheceu função sob outras formas.

Neste sentido, podemos confirmar a conjectura de Duval acerca da importância dos registros de representação semiótica na compreensão de um conceito matemático: para os sujeitos que associaram o conceito de função à expressão algébrica dada na notação f(x), podemos dizer que não houve articulação entre a forma em que a função foi apresentada (expressão algébrica) e o conceito de função. Estes sujeitos reconheceram função apenas pela presença da "notação f(x)" na expressão algébrica.

Outro ponto relevante presente nos resultados por nós obtidos em questões discursivas está na forma como os sujeitos descreveram as noções de equação e função no registro da língua natural. Na análise do discurso das questões propostas para este fim, notamos equilíbrio entre uma concepção mais próxima de uma definição formal e outra concepção relacionada aos processos resolutivos (no caso das equações). De modo geral, os sujeitos participantes da pesquisa que se aproximaram de uma descrição adequada utilizaram termos consagrados pelo uso da comunidade acadêmica para expressarem os significados de funções e equações.

No entanto, mesmo esta descrição próxima do que consideramos adequada, não foi decisiva no reconhecimento de uma equação ou de uma função pelos sujeitos participantes da pesquisa. Portanto, concluímos que mesmo descrevendo, no registro da língua natural, diferenças conceituais entre equações e funções, os sujeitos não realizaram de forma adequada esta distinção ao lidarem com estes objetos no registro algébrico.

Em relação à questão “Quais são as concepções dos sujeitos participantes da pesquisa sobre as raízes (ou zeros) de uma função?” (p. 23), concluímos que as duplas aproximaram-se de uma concepção operacional, utilizando-se do recurso algébrico sempre que solicitados a afirmar algo sobre as raízes de uma função.

Neste sentido, é imprescindível destacarmos que houve clara associação entre a expressão algébrica de uma função (afim ou quadrática) e uma equação (de 1° ou 2° graus), mostrando que para encontrar a raiz (ou as raízes) de uma função, os sujeitos recorreram quase que exclusivamente ao tratamento no registro algébrico. Mesmo quando solicitados a verificar se valores numéricos fornecidos eram ou não raízes de funções não-familiares (por exemplo, de 3° ou de 4° graus), o recurso algébrico foi predominante.

Por isso, pode-se concluir que, ao buscar raízes para uma dada função, os sujeitos participantes da pesquisa trataram-na como uma equação, procurando solucioná-la e encontrar um ou mais valores para sua variável independente, que no caso foi tratada como incógnita. Esta é, portanto, uma relação entre funções e equações detectada em nossa pesquisa, motivada pela questão “Que relações estabelecem entre equações e funções?” (p. 23).

Outra associação imediata entre equações e funções foi detectada quando questionamos os sujeitos acerca do reconhecimento do grau de uma equação e do tipo de uma função. Neste caso, ganha destaque a concentração das duplas em torno da associação com o expoente e com o processo de resolução de uma equação, mostrando que equações e funções dadas por expressões algébricas assumem o mesmo significado, ao menos na escrita, na concepção destes sujeitos. Apenas uma dupla registrou que essa diferenciação pode ser feita através do registro gráfico.

Referente à questão “Que relações estabelecem entre a solução de uma equação e a raiz de uma função?” (p. 23), concluímos que apenas duas duplas mencionam o registro gráfico para expressar uma relação adequada, demonstrando reconhecer a articulação entre estes conceitos, mesmo quando representados em diferentes registros. Tivemos uma dupla onde os sujeitos mantiveram uma postura operacional ao descrever como viam as relações entre solução de uma equação e raiz de uma função. Nos registros em língua natural desta dupla, pôde-se notar que o recurso de resolver a equação para encontrar a raiz da função esteve presente quando solicitados a fazer a descrição das relações estabelecidas.

É importante ressaltar que, mesmo tendo à disposição o recurso tecnológico representado pelo *software Graphmatica* (segunda etapa da aplicação do instrumento definitivo), o que poderia motivar outras estratégias para encontrar as soluções das equações propostas, houve predominância do recurso algébrico. Mesmo assim, tivemos quatro duplas que, através de seu relato em língua natural, reconheceram que a representação gráfica das raízes de uma função tem relação com as soluções de uma equação associada.

Com isso, podemos detectar uma descontinuidade na forma com que os sujeitos participantes da pesquisa estabeleceram relações entre as raízes de uma função e as soluções de uma equação: apesar de reconhecerem a presença das soluções da equação na representação gráfica da função, optaram pelo tratamento algébrico quando solicitados a determinar as soluções das equações propostas. Assim, deixaram de efetuar a esperada conversão entre os registros algébrico e gráfico.

Apontamos uma razão para esta não-efetivação: a familiaridade dos sujeitos participantes da pesquisa com as equações propostas. Como estas eram de 1º ou de 2º graus, optaram pelo procedimento algébrico, visto que este era de fácil execução e de domínio dos sujeitos envolvidos na pesquisa.

Para a pergunta “Em que medida os sujeitos generalizam estas relações para outras funções (não familiares)?” (p. 23), as respostas dadas a duas questões revelaram associações equivocadas entre os conceitos envolvidos, também baseadas na não-efetivação da conversão entre os registros de representação semiótica requeridos. A primeira fornecia valores numéricos para serem “testados” como soluções de uma equação de 3º grau. Apenas uma dupla optou pelo recurso da substituição destes valores no lugar da incógnita da equação dada, demonstrando conhecer o significado do conceito de solução de equação de forma mais generalizada. Tivemos quatro duplas que procuraram manter-se no registro algébrico, inviabilizando qualquer conclusão.

Nesse sentido, a segunda questão apresentava dois gráficos de funções cujas curvas interceptavam o eixo horizontal em quatro pontos distintos, cada uma. Três duplas (entre elas, a mesma que obteve êxito na questão anterior, como descrito no parágrafo acima) reconheceram que os pontos de intersecção estavam relacionados às soluções das equações, comunicando corretamente suas conclusões. As demais duplas ou não reconheceram a relação ou não comunicaram adequadamente suas conclusões, o que nos permite conjecturar que estes sujeitos não realizaram conversões entre os registros numérico, algébrico ou gráfico, necessárias a uma apreensão global do conceito de solução de uma equação a partir do gráfico de uma função.

Sobre a questão “Em que medida estas relações influenciam na discriminação entre gráficos de diferentes funções?” (p. 23), concluímos que, entre as duplas que responderam às questões presentes no instrumento definitivo, ocorreram algumas descontinuidades relevantes. Como exemplo, citamos uma das questões em que era solicitado que os sujeitos apresentassem a expressão algébrica de uma função que tivesse como raiz um valor numérico fornecido. Apenas duas duplas tiveram êxito nesta tarefa, associando a quantidade de raízes ao tipo da função (no caso, uma função afim). Conjecturamos que apenas estas duas duplas efetuaram a conversão do registro numérico para o registro algébrico.

Outra questão presente no instrumento definitivo e relacionada a esta questão de pesquisa mostrou que apenas duas duplas (as mesmas que tiveram êxito na tarefa anterior) responderam adequadamente à solicitação de escrever a expressão algébrica de uma função afim a partir de um ponto do gráfico assinalado sobre o eixo horizontal do plano cartesiano. As demais duplas demonstraram não terem efetuado adequadamente a conversão do registro gráfico para o registro algébrico, pois não associaram corretamente o gráfico desenhado à expressão algébrica escrita como resposta.

Chega-se praticamente às mesmas conclusões ao se analisar as respostas dadas às questões relacionadas à função quadrática, em que as mesmas duas duplas já citadas responderam satisfatoriamente. Neste caso, destacamos duas respostas inadequadas, mas que apontam descontinuidades relevantes sobre o tema do qual trata esta pesquisa.

Trata-se da resposta dada pela dupla III à pergunta “Escreva a expressão algébrica de uma função que tenha como raízes os números 4 e 5.” (Anexo II, p. 128). Retomando o que descrevemos no capítulo 5 (p. 89), os sujeitos escreveram a função $f(x) = \frac{16}{25}$, utilizando respectivamente os quadrados de 4 e 5 para compor sua resposta. Pode-se conjecturar que estes sujeitos tenham confundido “raiz de uma função” com “raiz quadrada”, já que 4 e 5 são as raízes quadradas de 16 e 25. Concluímos que, para estes sujeitos, a palavra “raiz” está diretamente associada à operação de radiciação.

Outra resposta à mesma pergunta que apontou uma descontinuidade importante foi a registrada pela dupla V, que substituiu os valores dados (4 e 5) respectivamente nas funções $f(x) = x^2 - x - 15$ e $f(x) = x^2 - x - 8$, como descrito no capítulo 5 (p. 90). Neste caso, a descontinuidade está relacionada com uma confusão entre obter o valor de uma função num dado ponto e obter a raiz da função. Reiteramos que a raiz é um valor específico do domínio da função, onde a imagem é nula. Portanto, era necessário que os sujeitos tivessem domínio sobre esta noção para que respondessem satisfatoriamente à questão.

Concluímos que para estes sujeitos não houve associação entre as variáveis visuais e as unidades simbólicas correspondentes (DUVAL, 1988), impedindo-os de responder coerentemente.

5.2. Comentários finais

Mesmo cientes de que o tema “Funções” foi amplamente explorado por diversos pesquisadores em Educação Matemática, optamos por enveredar por um caminho ainda sem muita iluminação, especificando questionamentos acerca do entendimento de alguns alunos a respeito do assunto “raiz de uma função”.

Nossas questões de pesquisa refletiram preocupações de ordem prática presentes na sala de aula, visto que a maioria dos currículos de Matemática adotados no Ensino Médio propõe ainda o estudo das funções logo após o estudo de equações realizado nas últimas séries do Ensino Fundamental.

Por ser esta uma pesquisa financiada pelo Programa Bolsa Mestrado, mantido pela Secretaria Estadual de Educação de São Paulo, julgamos conveniente endossar estes comentários finais trazendo um trecho do livro *A Escola e o Conhecimento*, de autoria do filósofo Mario Sergio Cortella, que trata de uma urgente “reorientação curricular” com vistas a ampliar a qualidade da escola pública para que esta cumpra, efetivamente, sua função social. Segundo Cortella (2000):

> Portanto, não é uma escola pública na qual o trabalhador simplesmente aprenda o que iria utilizar no dia ou semana seguinte no seu cotidiano (em uma dimensão utilitária e redutora), mas aquela que selecione e apresente conteúdos que possibilitem aos alunos uma compreensão de sua própria realidade e seu fortalecimento como cidadãos, de modo a serem capazes de transformá-la na direção dos interesses da maioria social.
>
> Uma *nova qualidade social*, por sua vez, exige uma **reorientação curricular** que preveja o *levar em conta* a realidade do aluno. Levar em conta não significa *aceitar* essa realidade mas *dela partir*; partir do universo do aluno

> para que ele consiga compreendê-lo e modificá-lo. (CORTELLA, 2000, grifos do autor)

Neste sentido, uma questão que nossa pesquisa mostrou que exige aprofundamento é qual a medida da influência que esta ordem presente nos currículos exerce sobre a aprendizagem de conceitos relacionados às raízes de funções e soluções de equações.

Nossa pesquisa expõe resultados que mostram alguma interação na aprendizagem destes dois tópicos. Ao questionarmos sujeitos que se encontram em uma fase intermediária do nível médio de ensino (2º Ano), pudemos notar que muitos associam equação ou função à forma algébrica em que estes objetos se apresentam.

De acordo com os pressupostos teóricos assumidos, estes sujeitos demonstraram permanência no registro algébrico, mesmo em questões que incentivavam conversão para outros registros (como por exemplo, numérico ou gráfico).

Na perspectiva de Duval (2003), para que um conceito matemático seja compreendido, faz-se necessária a articulação de pelo menos dois registros de representação semiótica. Neste sentido, alguns de nossos resultados mostram que em relação às soluções de equações e raízes de funções, esta articulação não ocorreu, ou seja, os sujeitos reconheciam estes conceitos no registro algébrico, mas demonstraram dificuldades em lidar com eles em outros registros.

Podem ser levantadas inúmeras conjecturas a respeito deste fato. No entanto, destacamos uma que nos parece a mais inquietante: a maneira como a Escola trata destes conceitos atualmente não favorece a articulação entre os registros necessária à compreensão das relações entre raízes de funções e soluções de equações.

Ao dar ênfase às estratégias tradicionais, acaba por limitar estratégias diferenciadas que permitiriam articulação entre ideias comuns às noções de equação e função, criando obstáculos para que os alunos estabeleçam semelhanças e concluam sobre diferenças entre estes dois conceitos.

Em muitos momentos, em nossa pesquisa, nos deparamos com situações em que os sujeitos participantes demonstraram não saber estabelecer relações entre encontrar a solução de uma equação e identificar a raiz de uma função associada a esta equação.

Apesar do entroncamento conceitual destas noções, explorado no trabalho de Ribeiro (2007), não nos parece aceitável que alunos nesta etapa da formação básica não conheçam recursos alternativos para encontrar soluções de equações. Esta limitação de recursos passa pela ausência de conexão entre o que significa resolver uma equação (algebricamente) e encontrar a solução de uma equação (que pode ser com o auxílio do gráfico de uma função associada). Como demonstrou Evariste Galois no século XIX, nem sempre o recurso algébrico será possível. Diante disto, é necessário que o aluno conheça alternativas "não- algébricas" e, portanto, o domínio dos conceitos envolvidos é fundamental.

Outro ponto relevante em nossa pesquisa é que os sujeitos demonstram saber o que fazer quando solicitados a resolver uma equação de 1º ou de 2º graus. Desconsiderando alguns erros comuns surgidos durante a resolução (os quais outras pesquisas já trataram), a maioria iniciou procedimentos algébricos para responder às solicitações, com predominância da fórmula resolutiva (ou "fórmula de Bháskara") no caso da equação de 2º grau.

No entanto, quando questionados se determinados números são soluções de equações, muitos sujeitos demonstraram não saber que procedimento adotar, o que nos remete à "estratégia de mão única" reforçada pela "matemática escolar": ao saber apenas resolver equações – portanto, no interior do registro algébrico – os sujeitos não atribuem significado algum às soluções destas, impossibilitando-os de efetuar conversões desse registro ao numérico, por exemplo.

REFERÊNCIAS

BIANCHINI, Barbara L.; PUGA, Leila Z. **Função: Diagnosticando Registros de Representação Semiótica.** In: REREMAT – Revista Eletrônica de Republicação em Educação Matemática. UFSC, p. 5 – 16, 2006.

BOOTH, W.C. et al. **A arte da pesquisa**. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

BEDNARZ, Nadine; KIERAN, Carolyn; LEE, Lesley. **Approaches to algebra: perspectives for research and teaching**. Netherlands: Mathematics Education Lybrary, 1996.

BRAGA, C. **Função: a alma do ensino da matemática**. São Paulo: Annablume; Fapesp, 2006.

BRASIL, **PCN + Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Secretaria de Educação Média e Tecnológica – Brasília : MEC ; 2002.

CORTELLA, M. S. **A Escola e o Conhecimento: Fundamentos Epistemológicos e Políticos**. 3 ed. São Paulo, Cortez: Instituto Paulo Freire, 2000. (Coleção Prospectiva; 5)

D'AMBROSIO, U. **Desafios da Educação Matemática no novo milênio**. In: Educação Matemática em Revista. Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, São Paulo, ano 8, n. 11, p. 14-17, dez. 2001.

______________. **A matemática nas escolas.** In: Educação Matemática em Revista. Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, São Paulo, ano 9, n. 11A, p. 29-33, abr. 2002. Edição especial.

DUVAL, R. **Graphiques et équations: l'articulation de deux registres**. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 1, IREM de Strasbourg, 1988.

_________. **Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning**. In: Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, México, 1999.

_________. **Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática**. In: Machado, S. D. A. (org.) *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação semiótica*. Campinas, SP: Papirus, 2003 (Coleção Papirus Educação), pp. 11-33.

DUBINSKY, E. et al. **The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy**. MAA Notes: Mathematical Association of America, 1992.

LAVILLE, C.; DIONNE, J. **A construção do saber**. Porto Alegre, RS: Artmed Ed. UFMG, 1999.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio Volume 1**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006 (Nona Edição).

LÜDKE, M.; ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas**. Temas Básicos de Educação e Ensino. São Paulo: EPU, 1986.

MACHADO, Airton Carrião. **Aquisição do conceito de função: perfil das imagens produzidas pelos alunos.** Dissertação de Mestrado. Belo Horizonte: UFMG, 1998.

McCALLUM, W. et al. **Intermediate Algebra**. In: Katz, V.J. (ed.) *Gateway to a Technological Future*. The Matematical Association of America, 2007.

MENDES, Maria Helena Monteiro. **O Conceito De Função: Aspectos Históricos e Dificuldades Apresentadas por Alunos na Transição do Segundo para o Terceiro Grau**. Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro: PUC-RJ/Matemática, 1994.

MORETTI, Vanessa Dias. **O conceito de função: os conhecimentos prévios e as interações sociais como desencadeadoras da aprendizagem.** Dissertação de mestrado. São Paulo: FE-USP. 1998.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). **Principles and Standards for School Mathematics**, 2000. Disponível em: http://standardstrial.nctm.org. Acesso em: 29/04/2008.

OLIVEIRA, N. **Conceito de função: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem**. Dissertação de Mestrado. São Paulo: PUC-SP, 1997.

PEREIRA, M. D. **Um estudo sobre equações: Identificando conhecimentos de alunos de um curso de formação de professores de Matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

RIBEIRO, A. J. **Equação e seus multisignificados no ensino de Matemática: contribuições de um estudo epistemológico**. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

SCHWARZ, Osmar. **Sobre as concepções de função dos alunos ao término do 2o grau**. Dissertação de Mestrado. Fac. Matemática: PUC-SP, 1995.

SIMÕES, Maria Helena Pinedo. **Uma sequência para o ensino/aprendizagem de função do 2o grau**. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Matemática: PUC-SP, 1995.

ANEXO I – Instrumento Piloto

PARTE I

1. Classifique os itens a seguir como função (F), equação (E) ou (N) não sei.

( ) $2x+3=x-1$	( ) $y=2x+3$	( ) $x^2-5x+6=0$	( ) $x-5=0$
( ) $f(x)=x-5$	( ) $f(x)=x^2-5x+6$	( ) $y=x^2-4$	( ) $x^2-4=5x$
( ) $y^2=x^2$	( ) $f(x)=x^2$	( ) $x=0$	( ) $y=x$
( ) $0=2x+3$	( ) $x^2=0$	( ) $x^2-4=0$	( ) $f(x)=x$

2. O que você entende por função?

3. O que você entende por equação?

PARTE II

1. **Abaixo você tem várias equações.**

A) $2x+5=3$	**F)** $x^2-5x+6=0$
B) $2(x-1)=10$	**G)** $x(x+2)-3x=12$
C) $5(2x-3)+7=18$	**H)** $(x-1)(x+3)=0$
D) $y^2-7y-30=0$	**I)** $(2x-3)(3x-1)=4$
E) $x-2(x^2+3x)-9=0$	**J)** $-\frac{x^2}{3}+\frac{(x-2)}{5}=20$

Entre elas, quais são do 1º grau?
Entre elas quais são do 2º grau?

COMO VOCÊ IDENTIFICA SE UMA EQUAÇÃO É DO 1º OU DO 2º GRAU? EXPLIQUE.

2. **Abaixo você tem várias funções.**

A) $f(x)=3x$	**F)** $f(x)=5x+12$
B) $f(x)=-\frac{5}{3}x+\frac{1}{9}$	**G)** $f(x)=(x-1)(x-7)$
C) $f(x)=x^2+1$	**H)** $f(x)=2(3x-5)$
D) $f(x)=4x^2+5x-1$	**I)** $f(x)=x(x+10)$
E) $f(x)=x-2x^2$	**J)** $f(x)=2x(3x-2)+3$

Entre elas, quais são funções afins?
Entre elas, quais são funções quadráticas?

COMO VOCÊ IDENTIFICA SE UMA FUNÇÃO É AFIM OU QUADRÁTICA? EXPLIQUE.

PARTE III

1. **A seguir você tem duas equações. Resolva-as em R.**

$2(x-7)-(3x+5)+12=3x-4$

$2(x^2-3x)-x^2+12=-6-x$

2. **Para você, qual o significado do enunciado “resolva a equação em R”?**

PARTE IV

1. **A seguir você tem duas funções. Determine suas raízes.**

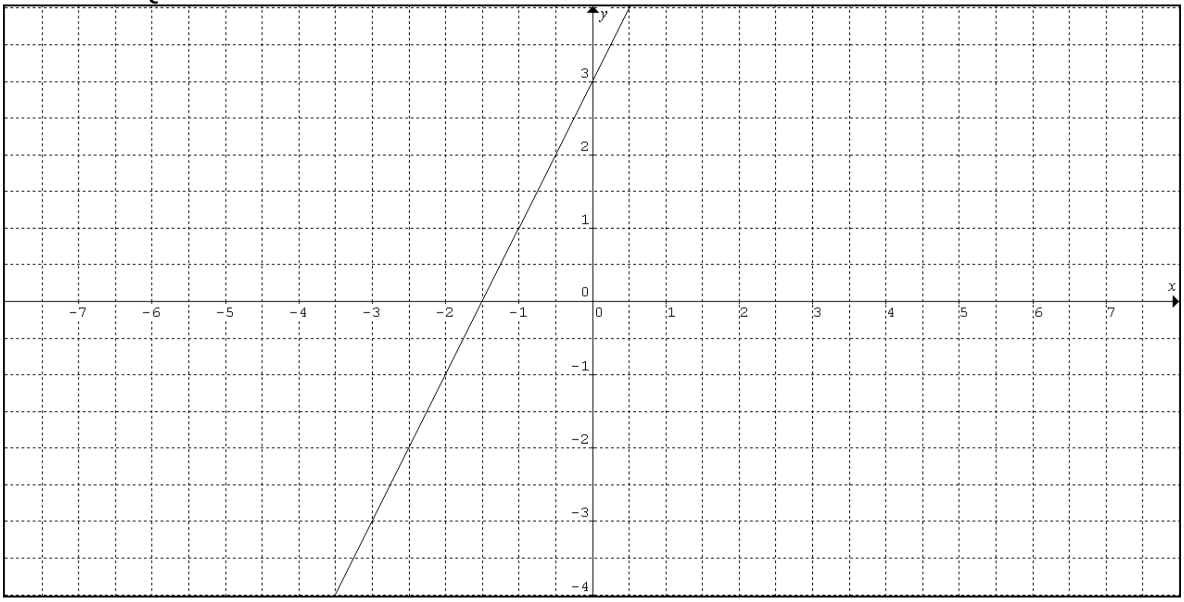
$f(x) = 2x + 12$

$f(x) = x^2 - 6x + 8$

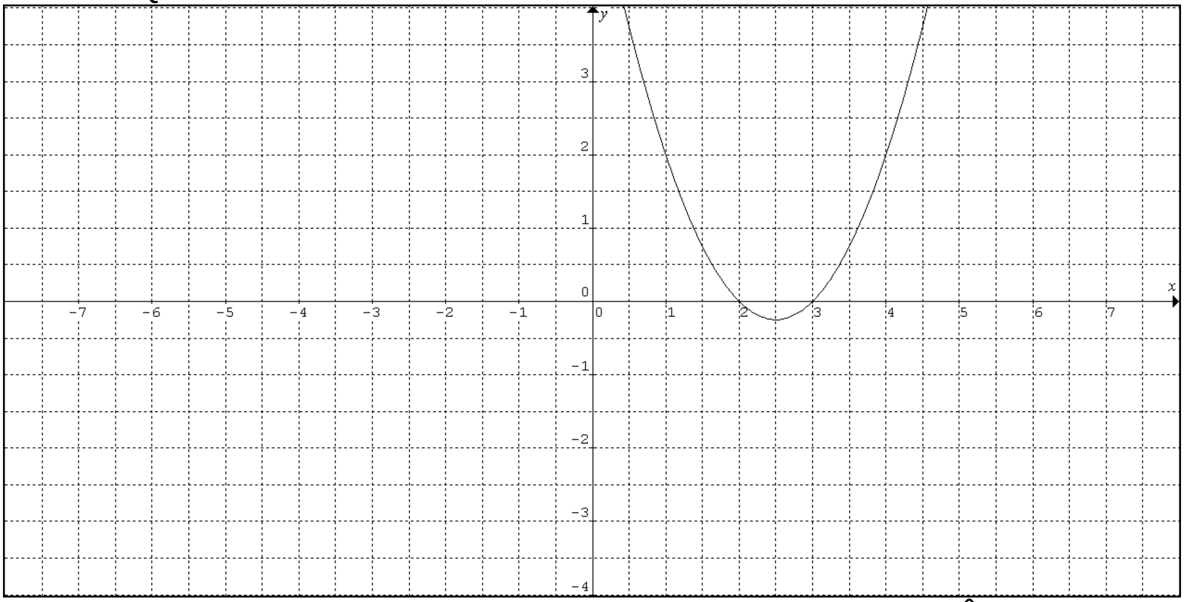
2. **Para você, qual o significado do enunciado “determine a raiz da função”?**

PARTE V

1. ABAIXO, VOCÊ VÊ O ESBOÇO DO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO. IDENTIFIQUE COM CÍRCULOS AS RAÍZES NO GRÁFICO.



2. ABAIXO, VOCÊ VÊ O ESBOÇO DO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO. IDENTIFIQUE COM CÍRCULOS AS RAÍZES NO GRÁFICO.



3. OBSERVANDO AS ATIVIDADES ANTERIORES, VOCÊ PODERIA ESTABELECER ALGUMA RELAÇÃO ENTRE SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES E RAÍZES DE FUNÇÕES?

SEGUNDA ETAPA **: Com auxílio do software Graphmatica, responder às questões propostas.**

PARTE I

1. **Esboce o gráfico da função $f(x) = 2x - 6$**
2. **É possível encontrar a solução da equação $2x - 6 = 0$ a partir do gráfico?**
3. **RESOLVA A EQUAÇÃO $2x - 6=0$**

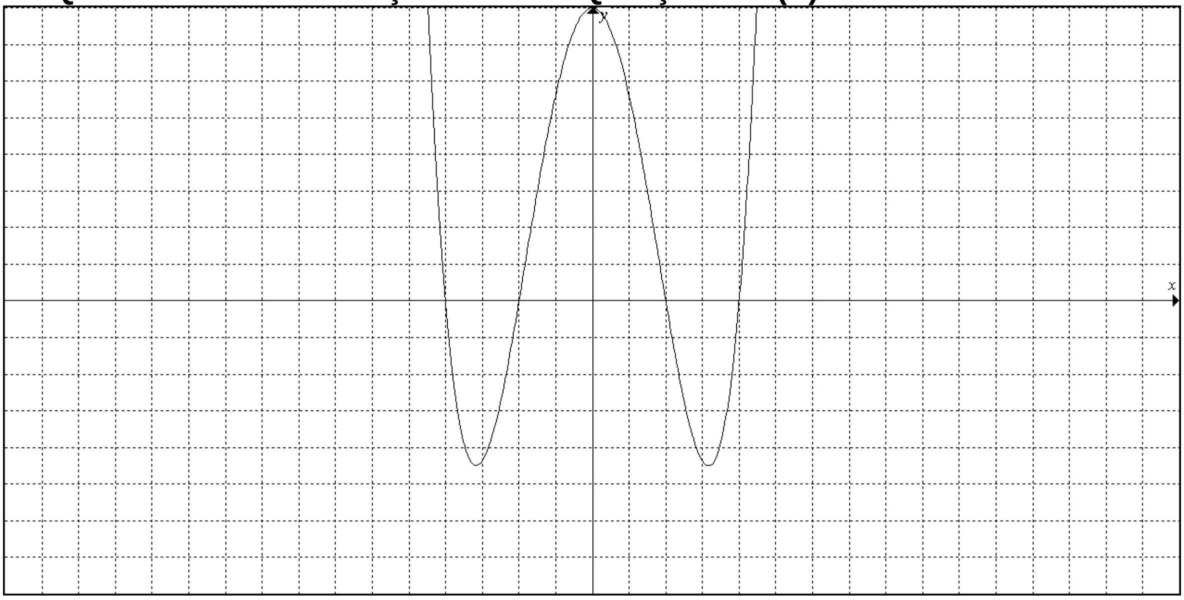
PARTE II

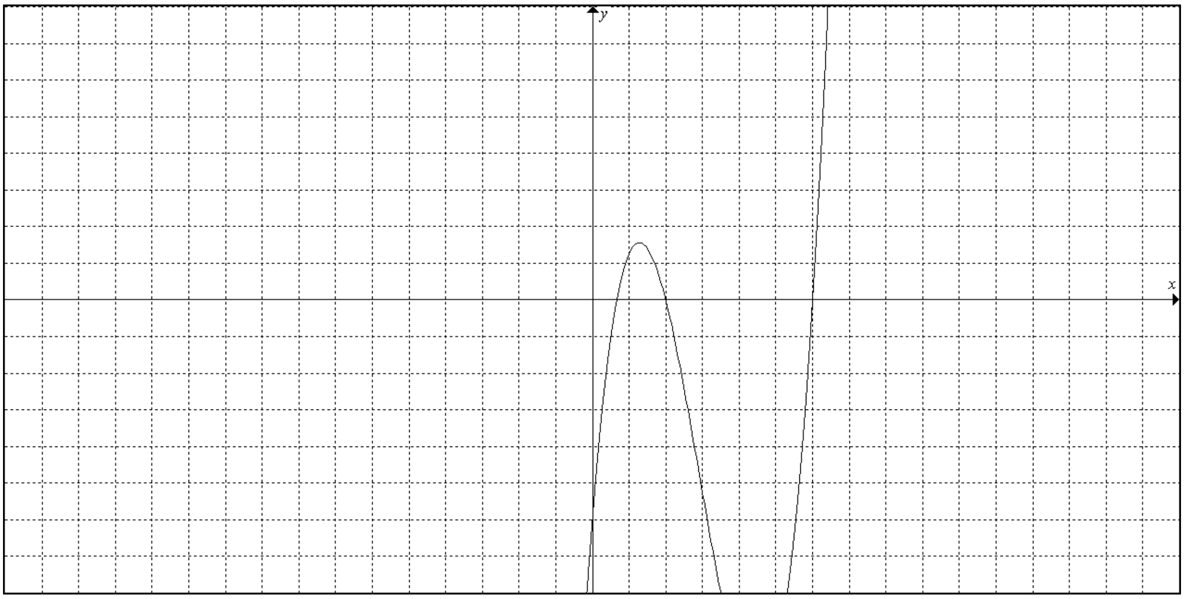
1. **Esboce o gráfico da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$**
2. **É possível encontrar a solução da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ a partir do gráfico?**
3. **RESOLVA A EQUAÇÃO $x^2 - 5x + 6=0$**

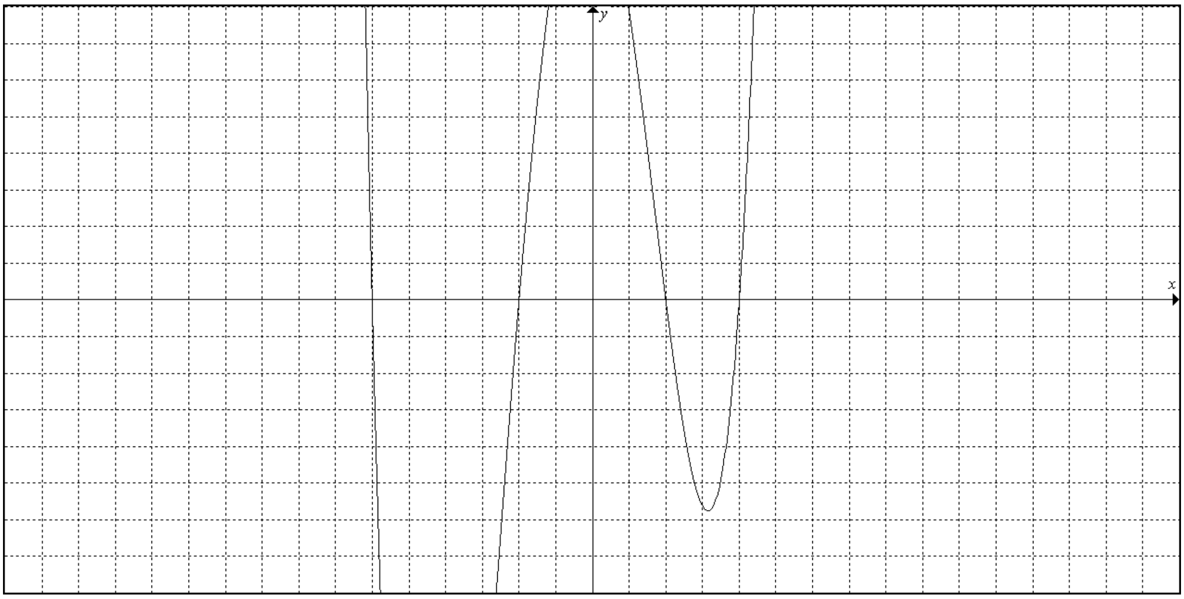
PARTE III – A PARTIR DAS ATIVIDADES ACIMA, VOCE VÊ ALGUMA RELAÇÃO ENTRE ESBOÇO DE GRÁFICOS E SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES? EM CASO AFIRMATIVO, DESCREVA ESSA RELAÇÃO.

PARTE IV

1. **A SEGUIR, TÊM-SE OS GRÁFICOS DE ALGUMAS FUNÇÕES G(X). QUAIS SÃO AS SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES G(X) = 0?**







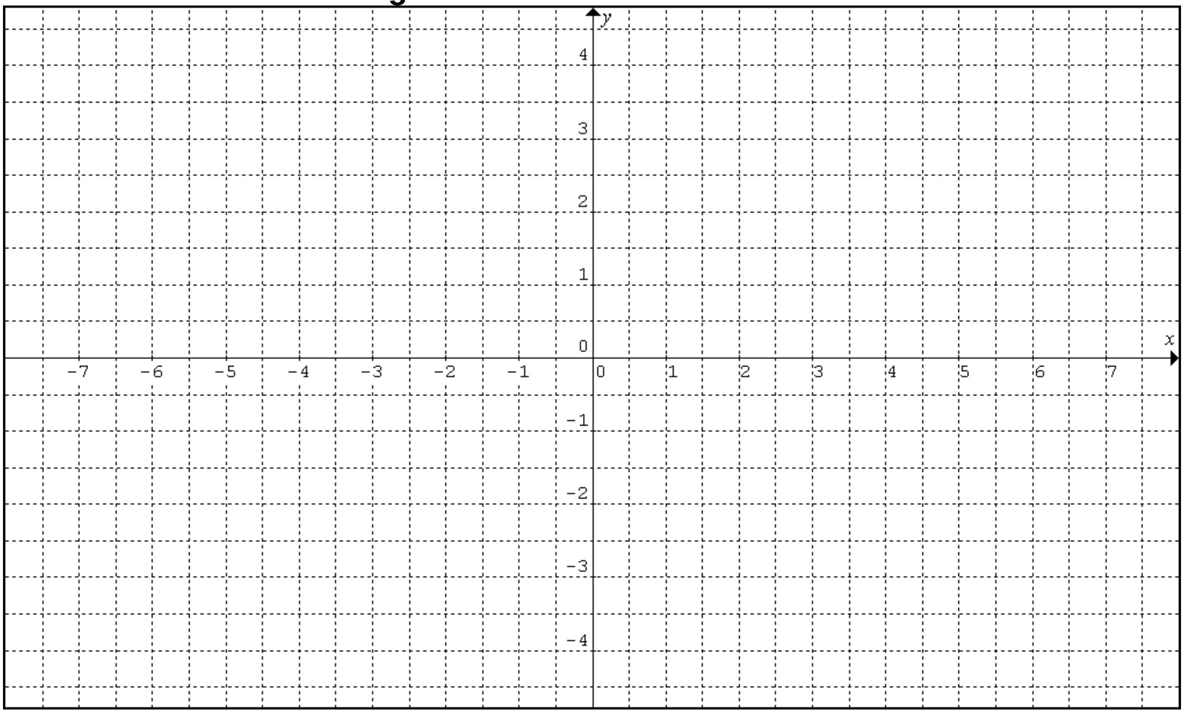
2. **CONSIDERE A FUNÇÃO** $f(x) = x^2 + x - 6$. **ENCONTRE AS RAÍZES DE** $f(x) = 0$ **DE DUAS FORMAS DISTINTAS.**

PARTE V

1. **Escreva a expressão algébrica de uma função que tenha como raiz o número -3**

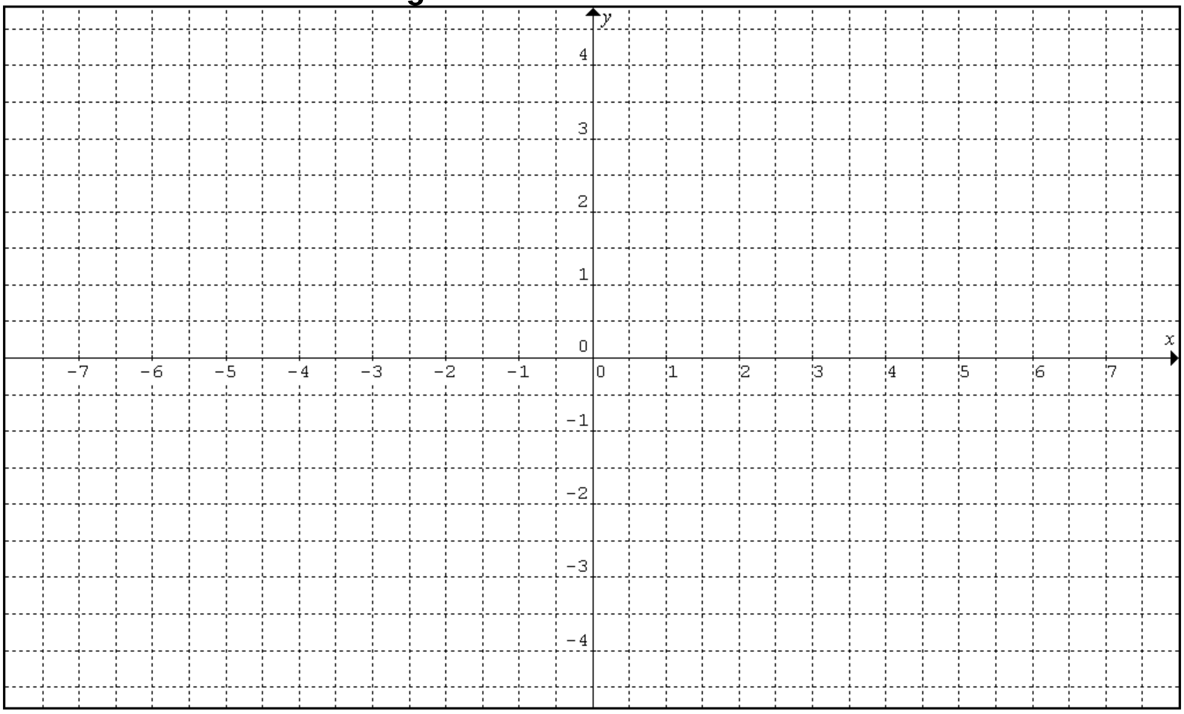
2. **Escreva a expressão algébrica de uma função que tenha como raízes os números 4 e 5.**

3. **A) Desenhe o gráfico de uma função que passa pelo ponto assinalado na figura abaixo.**



B) Escreva a expressão algébrica de uma função cujo gráfico passa pelo ponto assinalado na figura acima.

4. **A) Desenhe o gráfico de uma função que passa pelos pontos assinalados na figura abaixo.**



B) Escreva a expressão algébrica de uma função cujo gráfico passa pelos pontos assinalados na figura acima.

ANEXO II – Instrumento definitivo

PARTE I

1. Classifique os itens a seguir como função (F), equação (E) ou (N) não sei.

( ) $2x+3=x-1$	( ) $y=2x+3$	( ) $x^2-5x+6=0$	( ) $x-5=0$
( ) $f(x)=x-5$	( ) $f(x)=x^2-5x+6$	( ) $y=x^2-4$	( ) $x^2-4=5x$
( ) $y-2x=0$	( ) $f(x)=x^2$	( ) $x=0$	( ) $y-x=0$
( ) $f(x)=x^3-4x^2+2x+3$	( ) x^4-x^2-1	( ) $\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{\frac{x}{2}}{x-6}$	( ) x^3-2y

2. O que você entende por função?

3. O que você entende por equação?

PARTE II

1. **Abaixo você tem várias equações.**

A) $2x+5=3$	**F)** $x^2-5x+6=0$
B) $(x-1)(x+3)=0$	**G)** $2(x+2)-3x=12$
C) $5(2x-3)+7=18$	**H)** $2(x-1)=10$
D) $2x-3=4$	**I)** $y^2-7y-30=0$
E) $x-2(x^2+3x)-9=0$	**J)** $-\frac{x^2}{3}+\frac{(x-2)}{5}=20$

Entre elas, quais são do 1º grau?
Entre elas, quais são do 2º grau?

Como você identifica se uma equação é do 1º grau ou do 2º grau? Explique.

2. **Abaixo você tem várias funções.**

A) $f(x)=3x$	**F)** $f(x)=5x+12$
B) $f(x)=-\frac{5}{3}x+\frac{1}{9}$	**G)** $f(x)=(x-1)(x-7)$
C) $f(x)=x^2+1$	**H)** $f(x)=2(3x-5)$
D) $f(x)=4x^2+5x-1$	**I)** $f(x)=x(x+10)$
E) $f(x)=x-2x^2$	**J)** $f(x)=2x(3x-2)+3$

Entre elas, quais são funções afins?
Entre elas, quais são funções quadráticas?

Como você identifica se uma função é afim ou quadrática? Explique.

PARTE III

1. **A seguir você tem duas equações. Resolva-as em R.**

$$2(x-7)-(3x+5)+12=3x-4 \qquad\qquad 2(x^2-3x)-x^2+12=6-x$$

2. **Os números 1 e 4 são soluções da equação $x^2 - 5x + 4 = 0$? Justifique.**

3. **Os números -2, 3 e 6 são soluções da equação $x^3 - 7x^2 + 36 = 0$? Justifique.**

4. **Os números 1 e 4 são soluções da equação $f(x) = 0$, sendo f uma função. O que você pode afirmar sobre o gráfico de f?**

PARTE IV

1. **A seguir você tem duas funções. Determine suas raízes.**

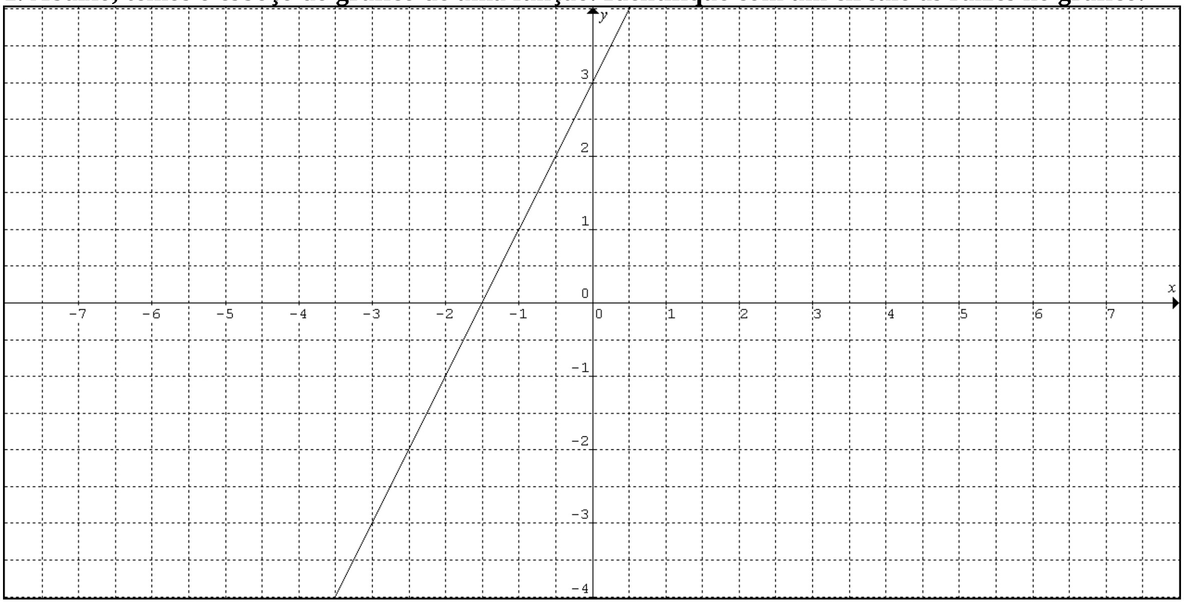
$f(x) = 2x + 12$ $\qquad$ $f(x) = x^2 - 6x + 8$

2. **Os números 2 e 6 são raízes da função $f(x) = x^2 - 6x + 5$? E da função $f(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$?Justifique.**

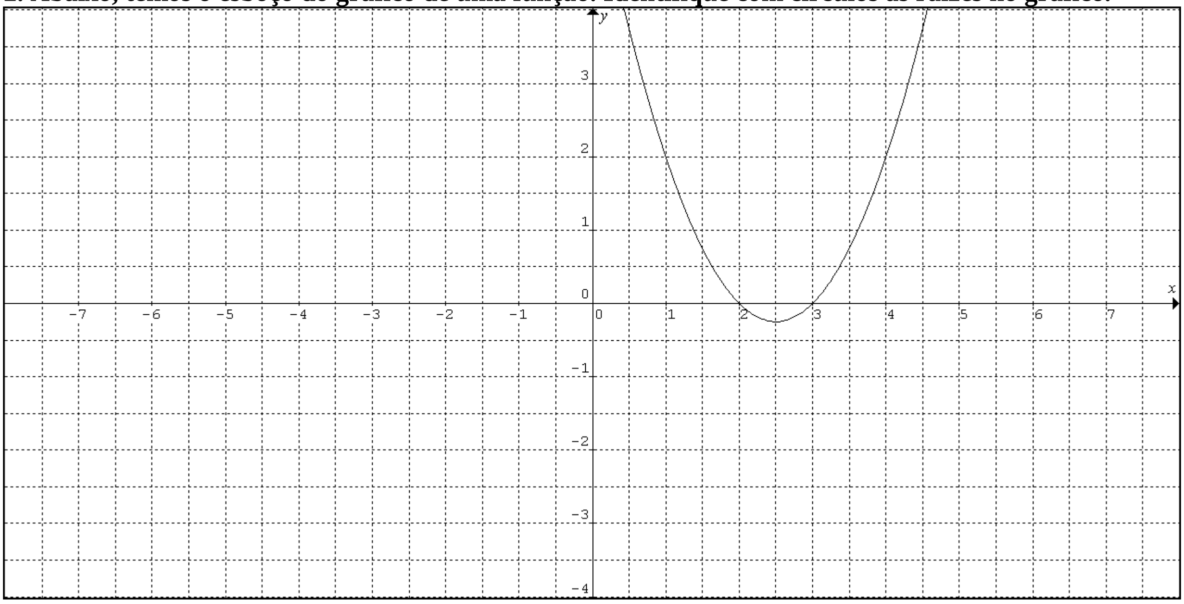
3. **Os números 1 e 5 são raízes da função $f(x) = x^2 - 6x + 5$. O que você pode afirmar sobre o gráfico de $f(x)$?**

PARTE V

1. Abaixo, temos o esboço do gráfico de uma função. Identifique com um círculo as raízes no gráfico.



2. Abaixo, temos o esboço do gráfico de uma função. Identifique com círculos as raízes no gráfico.



3. Observando as atividades anteriores, você poderia estabelecer alguma relação entre soluções de equações e raízes de funções?

SEGUNDA ETAPA

Com auxílio do software Graphmatica, responder às seguintes questões:

PARTE I

1. **Esboce e imprima o gráfico da função $f(x) = 2x - 6$**
2. **É possível encontrar a solução da equação $2x - 6 = 0$ a partir do gráfico? Em caso afirmativo, explique o procedimento para obter a solução.**

3. **Resolva a equação $2x - 6=0$**

PARTE II

1. **Esboce e imprima o gráfico da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$**
2. **É possível encontrar a solução da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ a partir do gráfico? Em caso afirmativo, explique o procedimento para obter a solução.**

3. **Resolva a equação $x^2 - 5x + 6=0$**

PARTE III - A partir das atividades acima, você vê alguma relação entre esboço de gráficos e soluções de equações? Em caso afirmativo, descreva essa relação.

PARTE IV

1. **Abaixo, têm-se dois gráficos das funções G(x) e H(x). Quais são as soluções das equações G(x) = 0 e H(x) = 0?**

Gráfico da função G(x)

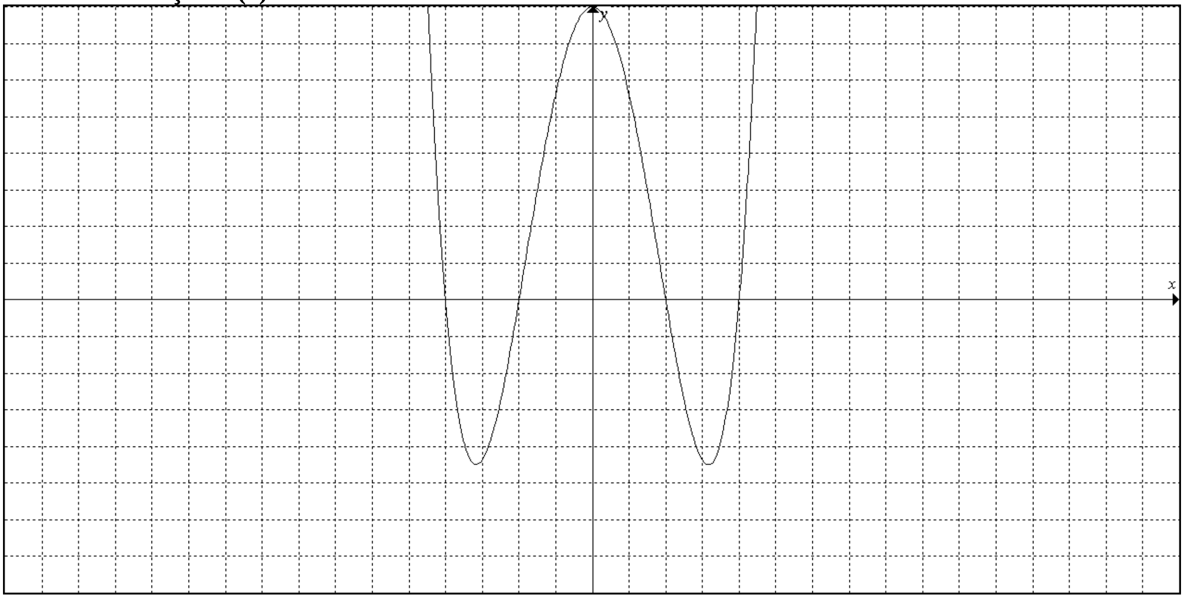
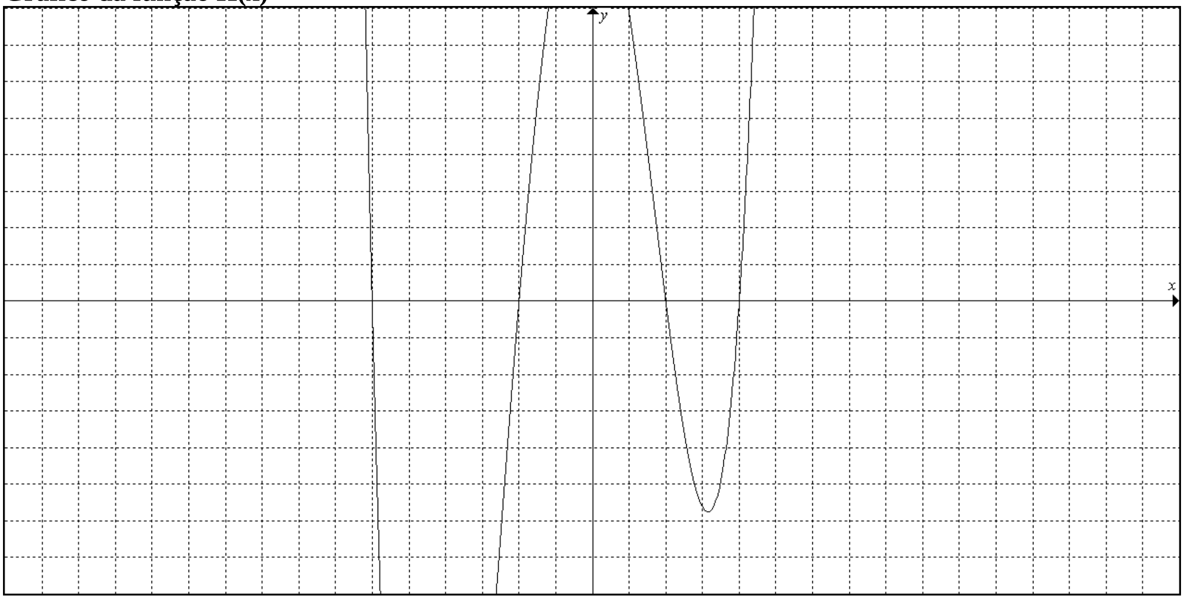


Gráfico da função H(x)



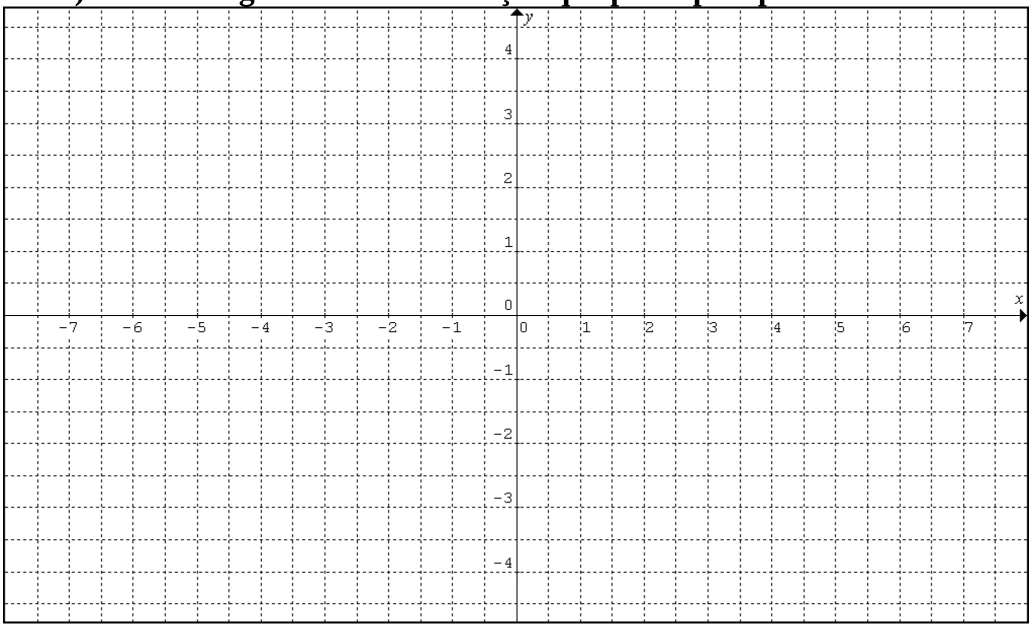
2. **Considere a função** $f(x) = x^2 + x - 6$**. Encontre as raízes de** $f(x) = 0$ **de duas formas distintas.**

PARTE V

1. **Escreva a expressão algébrica de uma função que tenha como raiz o número -3**

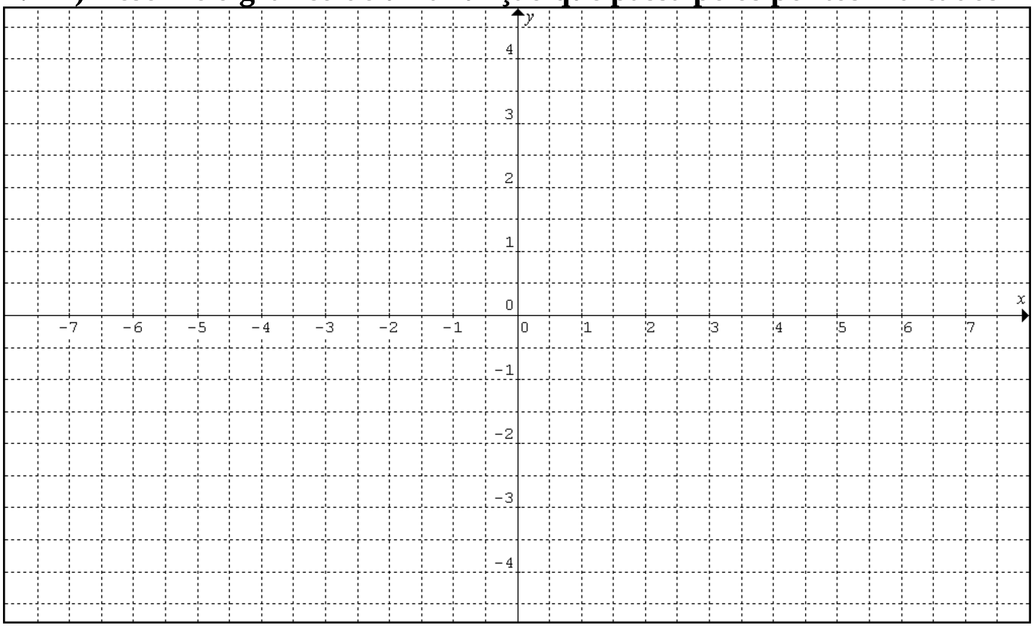
2. **Escreva a expressão algébrica de uma função que tenha como raízes os números 4 e 5.**

3. **A) Desenhe o gráfico de uma função que passa pelo ponto assinalado**



B) Escreva a expressão algébrica de uma função cujo gráfico passa pelo ponto assinalado.

4. A) Desenhe o gráfico de uma função que passa pelos pontos indicados



B) Escreva a expressão algébrica de uma função cujo gráfico passa pelos pontos assinalados.

ANEXO III – Comunicado encaminhado pela escola aos pais dos sujeitos participantes da pesquisa

INFANTIL, FUNDAMENTAL E MÉDIO

Sistema Anglo de Ensino

Rua Emb. João Neves da Fontoura, 150 - Santana – CEP: 02013-040 - **Tel: 6971.3322**
Rua Carlos Escobar, 62 - Santana – CEP: 02013-050 - **Tel: 6976.1755 (DELTINHA)**
wwwv.colegiodelta.com

AQUI SE APRENDE

Comunicado aos Srs. Pais:

Nos últimos anos, vem se consolidando no Brasil uma clara preocupação com o aperfeiçoamento da qualidade de ensino em todas as áreas. Com isso, novas áreas de estudo ganham impulso. Uma destas áreas é a Educação Matemática, que concentra esforços para analisar e avaliar novas maneiras de melhorar o rendimento nesta disciplina em todo o mundo.

Atento a essa necessidade, o Colégio Delta abre suas portas para participar de uma pesquisa desenvolvida junto à PUC-SP, que procura identificar dificuldades encontradas pelos alunos de diferentes níveis escolares.

Comunico que seu (sua) filho(a) foi convidado(a) a participar, voluntariamente, desta pesquisa que se baseia em responder um questionário sobre conteúdos específicos em Matemática, geralmente abordados na 1ª série do Ensino Médio.

A aplicação do questionário dar-se-á em três encontros de aproximadamente 30 minutos cada, nos dias 13/8, 14/8 e 15/8, no período pós-aula e na sede do Centro Britânico, à Rua Embaixador João Neves da Fontoura, 221.

Aos participantes, será conferido certificado de participação.

Conto com sua colaboração, autorizando a participação do(a) aluno(a). Coloco-me à disposição para o esclarecimento de quaisquer dúvidas.

Atenciosamente,

Prof. Anderson B. Lucas – aluno do Mestrado em Educação Matemática da PUC-SP.

Autorizo (   ) o (a) aluno (a) ____
ano (série) ______
a participar da pesquisa de que trata o comunicado.

Não autorizo (   ).
Data: ___/___/___   Assinatura do responsável:
____