Universidade Federal da Paraíba
Departamento de Física

Dinâmica de uma partícula neutra em mecânica quântica não-comutativa e em um regime de quebra da simetria de Lorentz

Lincoln R. Ribeiro Filho

João Pessoa - PB, novembro de 2008.

Universidade Federal da Paraíba
Departamento de Física

Dinâmica de uma partícula neutra em mecânica quântica não-comutativa e em um regime de quebra da simetria de Lorentz

Dissertação para obtenção do grau de Doutor em Física, apresentada a Coordenação de Pós-graduação do Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba

Lincoln R. Ribeiro Filho

Orientador: Cláudio Furtado

Co-orientador: José Roberto Nascimento

João Pessoa - PB, novembro de 2008.

Tese de doutorado sob o título *"Dinâmica de uma partícula neutra em mecânica quântica não-comutativa e em um regime de quebra da simetria de Lorentz"*, de autoria de Lincoln R. Ribeiro Filho, examinada pela banca examinadora constituída pelos doutores:

Cláudio Furtado
Orientador

José Roberto S. Nascimento
Co-orientador

Dionisio Bazeia
DF - UFPB

Fernando Jorge S. Moraes
DF - UFPB

Adilson J. Silva
IF - USP

Sérgio A. F. Azevedo
UEFS

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Cláudio Furtado pela competência e infinita paciência com que conduziu este trabalho. Aos meus colaboradores Prof. Dr. José Roberto Nascimento, Dr. Eduardo Passos e Knut Bakke Filho. Agradecimentos especiais ao Prof. Dr. Fernando Moraes, a meus familiares, amigos e a todos que de alguma forma contribuíram para minha formação e realização desse trabalho. A agência financiadora CAPES.

João Pessoa, outubro de 2008,
Lincoln R. Ribeiro Filho.

Resumo

Investigamos alguns fenômenos quânticos, como fases topológicas e quantização de Landau, em um contexto não-relativístico da mecânica quântica não-comutativa e em regime de quebra da simetria de Lorentz. Apresentamos esses efeitos como o estudo da mecânica quântica do movimentos de partículas neutras na presença de campos eletromagnéticos. Por isso usamos a denominação “efeitos análogos”. Sob certas condições para configuração dos campos, podemos encontrar níveis de energia quantizados para o sistema formado por partículas neutras acopladas ao campo eletromagnético. Outros efeitos análogos podem ser obtidos através de transformações de dualidade, como as transformações de dualidade de Heaviside por exemplo. No contexto de violação da simetria de Lorentz, encontramos alguns efeitos relacionado ao *background* que controla a quebra da isotropia do vácuo. Contribuições interessantes para a fase de Anandan são obtidas. Nesse mesmo cenário, construímos níveis de energia de Landau para partículas neutras num ambiente de quebra da inariância de Lorentz. Como uma outra maneira de quebra da invariância de Lorentz, estudamos fases topológicas para partículas neutras levando em conta a não-comutatividade das coordenadas do espaço e do espaço de fase. Também analisamos um análogo da quantização de Landau para partículas neutras no cenário não-comutativo. De posse das funções de onda relacionadas aos níveis de Landau, investigamos um análogo da quantização do efeito Hall para partículas neutras na presença de campos eletromagnéticos. Consideramos também um análogo do efeito Hall quântico para uma partícula neutra na presença de um *background* que determina a violação da simetria de Lorentz.

Abstract

We investigate some non-relativistic quantum phenomena, such topological phases and Landau quantization, in a non-commutative quantum mechanics context and in a Lorentz-symmetry violation regime. We present these effects considering the quantum mechanics of neutral particles systems submitted to electromagnetic fields. In this sense we use the term "analog of effect". Under certain conditions to the fields configuration, we can find quantized energy levels to a system of neutral particles coupled to a electromagnetic field. Another analog effects may be obtained if we consider duality transformations, such the Heaviside duality transformations. In the Lorentz-symmetry violation context, we find some effects related to the background that controls the breaking of vacuum isotropy. Thus we obtain interesting contributions to the Anandan phase. In the same context, we realize the Landau quantization to neutral particles in a Lorentz-invariance breaking framework. As another way of Lorentz-symmetry violation, we study topological phases for neutral particles systems taking account the non-commutativity of the coordinates of space and phase space. Also we investigate a analog of Landau quantization to neutral particles in the non-commutativity context. Since we have found the wave functions related to the Landau levels, we construct a analog of the quantum Hall effect to neutral particles submitted to electromagnetic fields. We also consider a analog of quantum Hall effect in a neutral particle system submitted to Lorentz-symmetry breaking background.

Conteúdo

1 Introdução p. 1

2 Fases topológicas p. 6

2.1 Introdução . . . . p. 6

2.2 Efeito Aharonov–Bohm . . . . p. 7

2.3 Efeito Aharonov–Casher . . . . p. 10

2.4 Dualidade e novas fases topológicas . . . . p. 12

2.5 Sumário . . . . p. 14

3 Quantização de Landau p. 16

3.1 Introdução . . . . p. 16

3.2 Níveis de Landau *standard* . . . . p. 17

3.3 Análogos dos níveis de Landau para partículas neutras . . . . p. 18

3.3.1 Níveis de Landau para o dipolo magnético . . . . p. 18

3.3.2 Níveis de Landau para o dipolo elétrico . . . . p. 21

3.4 Quantização de Landau para dipolos elétricos induzidos . . . . p. 23

3.4.1 O dipolo elétrico induzido . . . . p. 25

3.4.2 Análogo dos níveis de Landau . . . . p. 25

3.5 Sumário e observações . . . . p. 28

4 Quebra das simetrias de Lorentz via um *background* eletromagnético p. 30

4.1 Introdução . . . . p. 30

4.2 Acoplamento não-mínimo . . . . p. 31
4.3 A fase geométrica em um *background* que viola as simetrias de Lorentz p. 32
4.3.1 O modelo e o limite não-relativístico . . . . p. 33
4.3.2 Fases geométricas . . . . p. 36
4.4 Violação das simetrias de Lorentz e um análogo dos Níveis de Landau . p. 38
4.4.1 Dinâmica quântica e a quebra das simetrias de Lorentz . . . . . p. 39
4.4.2 Análogo da quantização em níveis de Landau . . . . p. 40
4.4.3 Comentário sobre mecânica quântica supersimétrica . . . . p. 46
4.5 Sumário e observações . . . . p. 47

5 Mecânica quântica não-comutativa p. 49

5.1 Introdução . . . . p. 49
5.2 Campos magnéticos intensos . . . . p. 50
5.3 Mecânica quântica não-comutativa e o produto-$\star$ . . . . p. 52
5.3.1 Espaço não-comutativo . . . . p. 53
5.3.2 Espaço de fase não-comutativo . . . . p. 54
5.4 A fase de Anandan não-comutativa . . . . p. 55
5.4.1 Limite não-relativístico . . . . p. 56
5.4.2 Fases geométricas . . . . p. 59
5.4.3 Fases geométricas no espaço não-comutativo . . . . p. 60
5.4.4 Efeito Aharonov–Casher não-comutativo . . . . p. 63
5.4.5 Efeito He–McKellar–Wilkens não-comutativo . . . . p. 63
5.4.6 Fases geométricas no espaço de fase não-comutativo . . . . p. 64
5.5 Níveis de Landau no espaço não-comutativo . . . . p. 66
5.5.1 Partícula carregada no campo magnético homogêneo . . . . . . p. 67
5.5.2 Análogos dos níveis de Landau para dipolos . . . . p. 68
5.5.3 O dipolo magnético no espaço não-comutativo . . . . p. 71

5.5.4 Dipolo magnético no espaço de fase não-comutativo . . . . p. 74

5.5.5 O dipolo elétrico no espaço não-comutativo . . . . p. 76

5.5.6 Dipolo elétrico no espaço de fase não-comutativo . . . . p. 79

5.6 Sumário e observações . . . . p. 81

6 Efeito Hall quântico p. 84

6.1 Introdução . . . . p. 84

6.2 O efeito Hall clássico . . . . p. 85

6.3 O efeito Hall quântico . . . . p. 86

6.3.1 O fator de preenchimento de Landau . . . . p. 87

6.3.2 A corrente Hall quantizada . . . . p. 87

6.4 Um análogo da condutividade Hall para partículas neutras . . . . p. 89

6.4.1 Niveis de Landau para dipolos magnéticos . . . . p. 89

6.4.2 Condutividade Hall para partículas neutras . . . . p. 91

6.5 Análogo da condutividade Hall e a quebra das simetrias de Lorentz . . p. 92

6.5.1 Analogia dos níveis de Landau . . . . p. 93

6.5.2 A condutividade Hall . . . . p. 96

6.6 Sumário e observações . . . . p. 98

7 Conclusões e comentários finais p. 99

Bibliografia p. 102

1 *Introdução*

Na escala da percepção humana, as leis da física clássica descrevem os fenômenos a nossa volta com boa aproximação, como por exemplo a queda de uma maçã. Porém na escala subatômica, onde o senso comum "forjado" por nossas experiências clássicas nem sempre está de acordo com a realidade, precisamos trocar a física clássica pela física quântica para explicar resultados obtidos em experimentos. Podemos dizer que a teoria quântica generaliza a mecânica clássica e fornece descrições precisas para muitos fenômenos anteriormente não-resolvidos, como a radiação do corpo negro e órbitas eletrônicas estáveis. Os efeitos da mecânica quântica se tornam mais evidentes na escala atômica e subatômica, e geralmente não são observados em escalas macroscópicas. Porém, invocando o princípio da correspondência entre a mecânica clássica e quântica, sabemos que todos os objetos obedecem às leis da mecânica quântica, e que a mecânica clássica é a mecânica quântica de sistemas grandes, *i.e.* no limite estatístico onde o número de partículas pode ser considerado infinito. Assim as leis da mecânica clássica são resultado das leis da mecânica quântica no limite de sistemas grandes ou números quânticos grandes. Contudo, nem sempre os fenômenos quânticos possuem análogo clássico.

Em mecânica quântica, tanto a matéria quanto a energia exibem simultaneamente propriedades de onda e partícula. Como um conceito central em mecânica quântica, essa dualidade coloca os conceitos da mecânica clássica de onda e partícula como inadequados para descrever completamente o comportamento de objetos em escala subatômica. De Broglie em 1924 formulou sua hipótese de que toda matéria, não somente a luz, tem natureza ondulatória; relacionando assim um comprimento de onda ao momento da partícula. De fato, partículas subatômicas como o elétron apresentam comportamento de onda, interferência e difração, em certos experimentos. Podemos então associar um fator de fase, um escalar complexo de valor absoluto 1, à função de onda da partícula. Esse fator de fase não tem, *per si*, qualquer significado físico. Entretanto, diferenças nos fatores de fase de dois estados interagentes podem levar a importantes efeitos físicos. Esses fatores de fase são uma justificativa precisa para fenômenos de interferência com feixes de partículas.

Desse modo, surge então o conceito de fases quânticas, que podem ter diferentes origens. A fase pode ser dinâmica quando depende da velocidade de evolução do sistema quântico, ou geométrica quando depende da geometria do espaço de estados [1]. Pode ser também de origem topológica quando depende da estrutura topológica do espaço de configuração [2]. Nesta tese voltamos nossa atenção para as fases topológicas.

No final da década de 1950, Aharonov e Bohm [2] demonstraram que alguns efeitos físicos podem ser descritos somente pelos potenciais eletromagnéticos, contrariando o eletromagnetismo clássico. Nesse sentido, campos magnéticos afetam o estado quântico da matéria mesmo em regiões do espaço onde o campo é nulo. Logo, não existem forças clássicas atuando sobre partícula; porém lhe é atribuído um fator de fase que torna possível medir esse efeito através de experimentos de interferometria [3, 4]. Esse fator de fase está relacionado à conexidade do espaço, dai a origem o termo fase topológica.

Anos depois, em 1984, Aharonov e Casher [5] propuseram uma certa dualidade entre o sistema eletrônico descrito no efeito Aharonov–Bohm e um outro onde uma partícula neutra, com momento de dipolo magnético permanente, também habita uma região não-simplesmente-conexa do espaço. Mesmo numa configuração onde não atuam forças clássicas sobre a partícula, temos um efeito mensurável que novamente é atribuído a um fator de fase. Esse efeito pode ser observado em interferômetros de partículas neutras [6, 7].

Efeitos de fase topológica não dependem de outro fator senão da topologia do espaço. Logo pode-se construir efeitos similares aos já conhecidos, considerando transformações que preservem a topologia do espaço. Levando em conta as transformações de dualidade de Heaviside [8], sob as quais as equações de Maxwell do eletromagnetismo são invariantes, encontramos dois novos efeitos relacionados às fases Aharonov–Bohm e Aharonov–Casher [9]. O efeito He–McKellar–Wilkens [10, 11] é descrito como o dual do efeito Aharonov–Casher, onde uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico adquire uma fase quântica. Para completar o quadro, temos o efeito Aharonov–Bohm dual [9, 12] que descreve o movimento de um monopolo magnético na presença de um potencial vetor elétrico.

Muitos outros problemas envolvendo partículas, carregadas ou neutras, na presença de campos eletromagnéticos podem ser descritos através da quantização de Landau [13]. Trata-se de um de uma das configurações mais simples possíveis em física quântica, onde uma partícula carregada se move na presença de um campo magnético homogêneo, tendo seu espectro de energia quantizado em termos de uma freqüência ciclotrônica relacionada as órbitas do movimento clássico. A quantização em níveis de Landau levanta um interesse de destaque para a descrição de diversos fenômenos físicos, *e.g.* o efeito Hall quântico [14], superfícies bi-dimensionais [15, 16], excitações anyônicas em condensados de Bose–Einstein girantes [17, 18], entre outros efeitos que envolvem partículas e campos eletromagnéticos, como efeitos análogos para dipolos [19, 20, 21].

Com o desenvolvimento de novas técnicas para simular o comportamento de partículas carregadas em átomos neutros [22, 23, 24, 25], vem a motivação para a realização de sistemas de partículas neutras descritos por níveis de Landau. Ericsson e Sjöqvist [19] construíram um modelo onde partículas neutras, com momento de dipolo magnético, na presença de um campo elétrico externo, sob certas condições para configuração de campo-dipolo apresentam espectro de energia quantizado em níveis de Landau. Essa idéia é baseada na interação descrita no efeito Aharonov–Casher, onde uma partícula neutra interage com um campo elétrico via momento de dipolo magnético. De maneira análoga, construímos níveis de Landau para dipolos elétricos na presença de um campo magnético externo [20]. Nesse caso a interação é do efeito He–McKellar–Wilkens, onde uma partícula neutra interage com um campo magnético via momento de dipolo elétrico. A quantização de Landau para dipolos elétricos apresenta o inconveniente da necessidade de uma configuração de campo gerado por uma densidade de cargas magnéticas. Para solucionar essa questão, usamos o acoplamento descrito por Wei *et al.* [26] e descrevemos a quantização em níveis de Landau para dipolos elétricos induzidos na presença de uma configuração de campos elétrico e magnético cruzados [21].

Outras discussões levantadas nesta tese são a respeito do estudo de problemas de mecânica quântica em um regime onde é violada a simetria de Lorentz da relatividade especial. Estudamos efeitos de fase topológica e quantização de Landau no contexto da violação das simetrias de Lorentz [27, 28], e fazemos algumas considerações acerca da mecânica quântica não-comutativa desses efeitos [29, 30].

A relatividade especial é construída sob a premissa de que as leis da física são as mesmas para todos os observadores inerciais. A teoria prevê vários efeitos conhecidos, entre eles, velocidade da luz constante para todos os observadores, atraso de relógios em movimento, contração dos objetos em movimento, e equivalência entre massa e energia. Esses efeitos foram confirmado em experimentos muito sensíveis, e a relatividade é hoje uma ferramenta indispensável para física experimental e teórica. Entretanto, recentemente alguns físicos, motivados pela possibilidade de uma teoria de unificação, têm investigado a possibilidade de os postulados da teoria da relatividade descreverem a natureza apenas de maneira aproximada [31, 32, 33, 34, 35]. Alguns estudos apontam para a possibilidade da quebra das simetrias de Lorentz através de uma generalização do Modelo Padrão. Essa estrutura promove uma descrição quantitativa da violação das simetrias de Lorentz, controlada por um conjunto de coeficientes a serem determinados pelos experimentos [36, 37, 38, 39]. Como exemplo, apresentamos a extensão da eletrodinâmica quântica que é obtida restringindo o setor fermiônico da Lagrangiana da extensão do modelo padrão. Trabalhamos com uma adaptação do termo de Caroll–Field–Jackiw [40] para o setor fermiônico, onde esse aparece como um acoplamento não-mínimo na equação de Dirac [41]. Esse acoplamento representa a interação de uma partícula neutra com um *background* eletromagnético que viola as simetrias de Lorentz. Nesse contexto, tomando o limite não-relativísticos dessa teoria, estudamos efeitos quânticos como fases geométricas [27], quantização em níveis de Landau [28] e o efeito Hall quântico [42].

Recentemente, um outro mecanismo para quebra da invariância de Lorentz tem despertado certo interesse. A sugestão é de que as coordenadas espaciais sejam não-comutativas. Essa idéia surge da teoria de cordas [43, 44], entretanto apresentamos esse mecanismo num contexto mais familiar de mecânica quântica não-relativística. Estudamos efeitos de fases topológicas e quantização em níveis de Landau levando em conta que as coordenadas não comutam. Verificamos as correções devido a não-comutatividade para os efeitos Aharonov–Casher e He–McKellar–Wilkens [29], onde também consideramos a não-comutatividade do espaço de fase. Em um outro trabalho, investigamos a quantização de Landau para partículas neutras num ambiente onde as coordenadas do espaço, bem como as do espaço de fase, não comutam [30].

A organização dessa tese se dá como segue: No capítulo 2 apresentamos alguns efeitos de fase topológica puramente quânticos experimentados por partículas carregadas ou neutras na presença de campos eletromagnéticos externos. Fazemos uma breve descrição dos bem conhecidos efeitos Aharonov–Bohm, Aharonov–Casher e seus duais. No capítulo 3 construímos modelos análogos à quantização de Landau, porém nesse caso as partículas não possuem carga elétrica ou magnética, mas são polarizadas com momento de dipolo elétrico ou magnético. No capítulo 4 estudamos os efeitos de fase topológica e níveis de Landau para partículas neutras na presença de um *background* eletromagnético que viola as simetrias de Lorentz. Nesse caso trabalhamos no limite não-relativístico da equação de Dirac para férmions de spin meio não-minimamente acoplados com o *background*. No capítulo 5 apresentamos uma simples e breve descrição do cenário da mecânica quântica não-comutativa. Nesse contexto estudamos efeitos de fase topológica para partículas neutras, e também calculamos as contribuições para os análogos dos níveis de Landau para partículas neutras no ambiente não-comutativo. No capítulo 6 apresentamos algumas das mais básicas propriedades do efeito Hall quântico. Construímos modelos análogos da quantização da condutividade Hall para partículas neutras, e investigamos esse efeito no contexto da quebra da invariância de Lorentz devido um *background* eletromagnético. Por fim, no capítulo 7 apresentamos nossas conclusões, observações e comentários finais. A menos que se informe o contrário, em toda extensão deste texto consideramos o sistema natural de unidade $\hbar = c = 1$.

2 Fases topológicas

2.1 Introdução

Os campos eletromagnéticos não fornecem uma descrição completa do eletromagnetismo no contexto da mecânica quântica. Mesmo na ausência de campos, e assim de forças, os potenciais podem dar origem a efeitos quânticos mensuráveis. Em 1949 Ehrenberg e Siday [45] previram a existência de fenômenos de interferência quântica observáveis associados a fluxos magnéticos estacionários, mas os primeiros a descreverem completamente efeitos eletromagnéticos livre de forças foram Aharonov e Bohm em 1959 [2]. Eles consideraram propriedades de interferência de uma partícula carregada em uma superposição dos caminhos que passam por ambos os lados de uma linha de fluxo magnético isolada. Em outras palavras, em mecânica quântica, em uma parte multiplamente-conexa do espaço onde não existem campos, as propriedades físicas do sistema dependem do potencial, em contraste com a física clássica. Após a descoberta, um intenso debate sobre o significado físico do efeito se seguiu [46, 47, 48, 49, 50]. O efeito Aharonov–Bohm é de interesse para o estudo de linhas de fluxo em materiais magnéticos, e sua observação experimental foi dada por Chambers [3], e Peshkin e Tonomura [4].

Após o influente *paper* de Aharonov e Bohm, outras fases geométricas foram descobertas, como por exemplo o efeito Aharonov–Casher [5] onde a função de onda de uma partícula neutra que possui momento de dipolo magnético não-nulo, que se move em uma região não-simplesmente-conexa livre de forças, é afetada por um campo elétrico de maneira similar ao efeito Aharonov–Bohm. No efeito Aharonov–Casher, uma partícula neutra magneticamente polarizada, que se move ao redor de um fio eletricamente carregado, adquire uma fase quântica em sua função de onda. Esse efeito foi observado experimentalmente em um interferômetro de neutrons [6] e em um interferômetro atômico Ramsey [7]. Posteriormente, He e McKellar [10], e Wilkens [11] de maneira independente, previram a existência de uma fase quânica adquirida pela função de onda de uma partícula neutra que possui momento de dipolo elétrico não-nulo, enquanto circula ao redor de uma linha de cargas magnéticas. Uma configuração experimental simples e prática para testar o efeito He–McKellar–Wilkens, sem o inconveniente dos monopolos magnéticos, foi proposta por Wei *et al.* [26]. Nessa configuração, um campo elétrico gerado por um fio carregado induz um momento de dipolo elétrico num partícula neutra, e um campo magnético uniforme é aplicado em um ângulo não-trivial ao campo elétrico. Outros dois esquemas experimentais para o efeito He–McKellar–Wilkens são propostos por Dowling *et al.* [9], bem como uma descrição unificada dos três fenômenos anteriormente citados, além da introdução de um novo efeito conhecido como Aharonov–Bohm dual. A fase de Aharonov–Bohm dual pode ser calculada a partir da dinâmica quântica de um monopolo magnético na presença de um solenóide elétrico [12].

Neste capítulo fazemos uma breve descrição teórica dos efeitos Aharonov–Bohm e Aharonov–Casher. Considerando transformações de dualidade, derivamos duas novas fases topológicas a partir dessas. Apresentamos então a fase Aharonov–Bohm dual a partir de uma transformação de dualidade de Heaviside [8] do efeito Aharonov–Bohm, e a fase He–McKellar–Wilkens como dual do efeito Aharonov–Casher.

2.2 Efeito Aharonov–Bohm

Os primeiros a discutirem fases topológicas em mecânica quântica foram Aharonov e Bohm em 1959 [2]. Eles mostraram que uma partícula quântica com carga q que circula uma linha de fluxo magnético com fluxo Φ_{m} adquire uma fase em sua função de onda

$$\phi_{\mathrm{AB}} = \mathrm{i}q\Phi_{\mathrm{m}} \; . \tag{2.1}$$

A linha de fluxo magnético pode ser gerada por um solenóide delgado ou por uma linha de dipolos magnéticos (ver figura 2.1). Classicamente o efeito é surpreendente, visto que a partícula carregada está numa região livre de forças e é afetada localmente apenas pelo potencial vetor dependente de gauge que não é visto como uma quantidade física. Por essa razão o efeito Aharonov–Bohm é tido como um efeito não-local.

Figura 2.1: Configuração para o efeito Aharonov–Bohm com uma linha de dipolos magnéticos

Para calcular a fase Aharonov–Bohm consideramos a probabilidade de encontrar a partícula carregada em um ponto B partindo de um ponto A e passando pela vizinhança da linha de fluxo, *cf.* figura 2.1, usando integrais de caminho de Feynmann [51], *i.e.* adicionando os fatores de fase de todos os possíveis caminhos entre A e B. A Lagrangiana L_0 de um sistema sem a linha de fluxo adquire um termo adicional na presença do solenóide de acordo com

$$L = L_0 + q\vec{v} \cdot \vec{A} \,, \tag{2.2}$$

onde o último termo é devido ao acoplamento mínimo, $\vec{v}$ é a velocidade da partícula e $\vec{A}$ é o potencial vetor consistente com o campo magnético $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ fora da linha de fluxo. O termo adicional da Lagrangiana modifica a ação de acordo com

$$S = S_0 + \Delta S \,, \tag{2.3}$$

onde ΔS é dado por

$$\Delta S = q \int_A^B \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \,, \tag{2.4}$$

com $\mathrm{d}\vec{\ell}$ sendo o elemento de linha ao longo de um caminho específico indo de A a B. Somando sobre todos os possíveis caminhos que conectam A e B resulta na mesma integral ΔS para os que passam pela esquerda da linha de fluxo e para os que passam pela direita, visto que a integral depende apenas dos extremos pois o campo magnético está confinado. Assim, a diferença de fase para a partícula em uma superposição dos caminhos da esquerda (l) e da direita (r) da linha de fluxo é dado por

$$\phi_{\mathrm{AB}} = \mathrm{i}(\Delta S_{\mathrm{l}} - \Delta S_{\mathrm{r}}) = \mathrm{i}q \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{i}q \iint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \mathrm{i}q\Phi_{\mathrm{m}} \,, \tag{2.5}$$

onde $\vec{B}$ é o campo magnético associado ao fluxo e $\mathrm{d}\vec{s}$ é o elemento de área da superfície $\mathcal{S}$ delimitada pelo circuito $\mathcal{C}$. Esse é um efeito puramente quântico pois em física clássica o movimento de uma partícula carregada é regido pela força de Lorentz que é nula na região onde a partícula habita nesse sistema. Entretanto, podemos ver que o potencial vetor não se anula visto que a integral de $\vec{A}$ junto a qualquer circuito fechado $\mathcal{C}$ que contém a linha de fluxo não se anula.

Uma ilustração geométrica da natureza topológica do efeito Aharonov–Bohm é dada se considerarmos o transporte paralelo de um vetor em um cone (ver figura 2.2). O cone não tem curvatura intrínseca, visto que pode ser construído a partir de um plano através da junção de dois lados retos de um ângulo α, exceto no vértice onde a curvatura é não-nula. Esse é um análogo do efeito Aharonov–Bohm onde o vértice do cone representa a linha de fluxo definida pelo ângulo α e o espaço plano ao redor representa a ausência de campo magnético. Quando um vetor é transportado paralelamente sobre o cone sem circular o vértice nenhuma holonomia é obtida, enquanto quando o vetor circula o vértice ele será girado quando retornar ao ponto de partida, de maneira analoga ao efeito Aharonov–Bohm. A holonomia é independente do caminho ao redor do vértice como ilustra a figura 2.2.

Figura 2.2: Transporte paralelo sobre um cone, onde o cone representa o potencial vetor.

Aharonov e Bohm também descreveram um efeito de fase para uma partícula carregada devido a um campo elétrico, conhecido como efeito Aharonov–Bohm escalar ou efeito Aharonov–Bohm elétrico. Nessa configuração, uma partícula carregada em um interferômetro experimenta um potencial escalar φ homogêneo durante um intervalo de tempo $[0, \tau]$ em um dos feixes fazendo surgir um *shift* de $q\varphi$ na energia potencial. Nenhuma força atua sobre a partícula dentro da região onde o campo escalar é aplicado, visto que $\nabla\varphi = 0$. Porém existe uma diferença de fase entre os feixes dada por

$$\phi_{\mathrm{ABE}} = \mathrm{i}q \int_0^\tau \varphi(t)\mathrm{d}t \; . \tag{2.6}$$

2.3 Efeito Aharonov–Casher

Em 1984, Aharonov e Casher [5] demonstraram que a Lagrangiana para uma partícula com carga q e uma outra eletricamente neutra com momento de dipolo magnético $\vec{\mu}$ dá origem a um potencial vetor $\vec{A}$, conforme

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2} + q\vec{A}(\vec{r} - \vec{R}) \cdot (\vec{v} - \vec{V}) \; , \tag{2.7}$$

onde $\vec{r}$, m e $\vec{v}$ são a posição, massa e velocidade da partícula carregada e $\vec{R}$, M e $\vec{V}$ são as quantidades correspondentes para o dipolo magnético. Os dois primeiros termos na Lagrangiana são a energia cinética para a partícula carregada e para o momento de dipolo, respectivamente. Podemos notar que existe um termo de interação $q\vec{A}(\vec{r} - \vec{R}) \cdot \vec{V}$ para o dipolo magnético embora ele seja eletricamente neutro. Esse termo é necessário na Langrangiana pois de outra forma a partícula carregada experimentaria uma força dependente do *gauge* e do referencial de Galileu na região onde o campo magnético é nulo.

Devemos notar que o termo de interação depende apenas da posição e velocidade relativa das partículas. Então, o efeito é independente de se a partícula carregada se mover ao redor do dipolo magnético ou vice versa. Portanto devemos esperar um efeito "dual" ao efeito Aharonov–Bohm se considerarmos cargas estacionárias. A Lagrangiana para o dipolo magnético $\vec{\mu}$ em $\vec{R}$ e uma partícula carregada fixa em $\vec{r}$ (*i.e.* $\vec{v}=0$) é dada por

$$L = \frac{MV^2}{2} - q\vec{A}(\vec{r}-\vec{R})\cdot\vec{V} \; . \tag{2.8}$$

Da eletrodinâmica sabemos que o potencial vetor em $\vec{r}$ gerado por um momento de dipolo $\vec{\mu}$ em $\vec{R}$ é dado por

$$\vec{A}(\vec{r}-\vec{R}) = \frac{1}{4\pi}\frac{\vec{\mu}\times(\vec{r}-\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|^3} = -\frac{1}{q}\vec{\mu}\times\vec{E}(\vec{r}-\vec{R}) \; , \tag{2.9}$$

onde $\vec{E}$ é o campo elétrico coulombiano em $\vec{R}$ devido a partícula carregada em $\vec{r}$. Assim reescrevemos a Lagrangiana (2.8) na forma

$$L = \frac{MV^2}{2} + \vec{\mu}\times\vec{E}(\vec{r}-\vec{R}) \; , \tag{2.10}$$

que via uma transformação de Legendre define a Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{P}-\vec{\mu}\times\vec{E}\right)^2 \; , \tag{2.11}$$

onde $\vec{P} = \partial L/\partial\vec{V}$ é o momento canônico do dipolo magnético. Dessa forma, podemos identificar o potencial vetor para a partícula neutra como

$$\vec{A}_{\mathrm{AC}} = \vec{\mu}\times\vec{E} \; . \tag{2.12}$$

Se considerarmos uma partícula com momento magnético "anômalo", como uma partícula de spin 1/2, a Hamiltoniana (2.11) é ligeiramente modificada (desprezando os termos $O(\vec{E}^2)$) [52]

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{P}-\vec{\mu}\times\vec{E}\right)^2 - \frac{\mu}{2m}\nabla\cdot\vec{E} \; , \tag{2.13}$$

onde o último termo é devido a não-comutatividade entre $\vec{P}$ e $\vec{E}$. Aqui também obtemos o potencial vetor como em (2.11), porém sua origem é diferente nesse caso; ele vem do termo de acoplamento não-mínimo proporcional ao tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$ [53, 54].

Como conseqüência do potencial vetor definido em (2.12) temos a existência de um *shift* de interferência observável quando momento de dipolo magnético circula uma linha de cargas (ver figura 2.3). Essa fase, conhecida com fase Aharonov–Casher, é dada por

$$\phi_{\mathrm{AC}} = \mathrm{i}\oint \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{i}\oint(\vec{\mu}\times\vec{E})\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{i}\mu\lambda \; , \tag{2.14}$$

onde λ é a carga elétrica por unidade de comprimento. A fim de prevenir a precessão do dipolo magnético devido a presença do campo elétrico na região onde ele habita, *i.e.*

$$\dot{\vec{\mu}} = \vec{\mu} \times (\vec{v} \times \vec{E}) = 0 \ , \tag{2.15}$$

o momento magnético tem de ser paralelo a linha de cargas e ter seu movimento restrito a um plano ao campo elétrico. Se essas condições são satisfeitas o dipolo não sofre a ação de qualquer força e o efeito é topológico no sentido em que depende apenas do número de voltas do caminho ao redor da linha de cargas.

Figura 2.3: Configuração para o efeito Aharonov–Casher com uma linha de cargas.

No caso Aharonov–Casher também pode-se obter um efeito escalar [55]. Nessa configuração um dipolo magnético experimenta um campo magnético homogêneo $\vec{B}$ em um dos feixes, da mesma forma que a partícula carregada experimente um potencial elétrico no efeito Aharonov–Bohm escalar. Isso faz surgir um acréscimo na energia potencial de acordo com $\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ (efeito Zeeman) mas não há forças atuando na partícula visto que $\nabla(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) = 0$. Na intersecção dos feixes a fase Aharonov–Casher escalar é dada por

$$\phi_{\mathrm{ACE}} = \mathrm{i}\mu \int_0^{\tau} B(t)\mathrm{d}t \ , \tag{2.16}$$

para um momento de dipolo paralelo ao campo magnético.

Houveram intensas discussões sobre em que medida o efeito Aharonov–Casher pode ser considerado como um análogo físico para efeito Aharonov–Bohm ou não, *i.e.* um efeito topológico ou não. Em [55] Zeilinger aponta a não-dispersividade como principal característica de um efeito topológico, *i.e.* independência da velocidade da partícula. Essa condição é satisfeita tanto pela fase Aharonov–Bohm quanto pela fase Aharonov–Casher. Uma outra definição muito forte de fase topológica é apresentada em [56]. Nessa referência Peshkin alega que uma fase topológica deve ser associada à regiões multiplamente conexas, o que é o caso dos efeito Aharonov–Bohm e Aharonov–Casher, e também que não deve ser possível localizar o *phase shift* em alguma região específica do interferômetro. Para a fase Aharonov–Bohm apenas a diferença de fase entre dois caminhos circulando a linha de fluxo é invariante de *gauge*, não a fase de um caminho aberto. No efeito Aharonov–Casher existe um campo elétrico na região onde a partícula se move, embora isso não resulte em qualquer força sobre a partícula. A presença desse campo introduz outras interações ou flutuações no momentum angular e o efeito Aharonov–Casher pode ser explicado em termos de uma troca local de momentum angular entre o campo elétrico e a partícula.

Assim a princípio a fase Aharonov–Casher pode ser medida localmente e portanto trata-se de um efeito não-topológico [56].

2.4 Dualidade e novas fases topológicas

A expressão para a fase Aharonov–Casher (2.14) pode ser comparada à da fase Aharonov–Bohm (2.5) onde podemos identificar uma relação de dualidade de acordo com

$$e\Phi_{\mathrm{m}} \longleftrightarrow \mu\lambda \ . \tag{2.17}$$

Essa relação de dualiadade expressa o fato de que o efeito Aharonov–Casher pode ser obtido a partir do efeito Aharonov–Bohm invertendo os papeis da partícula carregada e do momento de dipolo (ver figura 2.4).

Agora consideremos as transformações de dualidade de Heaviside [8] sob as quais as equações de Maxwell são invariantes

$$\begin{aligned} \vec{E} &\to \vec{B} \ , & \vec{B} &\to -\vec{E} \ , \\ \vec{A}_{\mathrm{e}} &\to \vec{A}_{\mathrm{m}} \ , & \vec{A}_{\mathrm{m}} &\to -\vec{A}_{\mathrm{e}} \\ e &\to N \ , & N &\to e \ , \\ \vec{\mu} &\to \vec{d} \ , & \vec{d} &\to \vec{\mu} \ , \end{aligned} \tag{2.18}$$

onde e é a carga elétrica elementar e N é a unidade de carga norte magnética, $\vec{A}_{\mathrm{m}}$ e $\vec{A}_{\mathrm{e}}$ são os potenciais vetores magnético e elétrico, definidos na ausência de monopolos magnéticos e cargas elétricas respectivamente, tal que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}_{\mathrm{m}}$ se $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ e $\vec{E} = \nabla \times \vec{A}_{\mathrm{e}}$ se $\nabla \cdot \vec{E} = 0$; $\vec{d}$ e $\vec{\mu}$ são momentos de dipolo elétrico e magnético respectivamente.

Figura 2.4: Dualidade

Nesse contexto, encontramos duas novas fases através de transformações de dualidade para os efeitos Aharonov–Bohm e Aharonov–Casher. A partir da fase Aharonov–Bohm (2.5), sob as transformações (2.18), encontramos um novo efeito

$$\phi_{\mathrm{ABD}} = -\mathrm{i}N \oint \vec{A}_{\mathrm{e}} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\mathrm{i}N \iint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\mathrm{i}N\Phi_{\mathrm{e}} \ . \tag{2.19}$$

Essa fase proposta por Dowling *et al.* [9] é conhecida como efeito Aharonov–Bohm dual; Furtado e Duarte [12] fizeram um estudo detalhado sobre esse efeito no movimento de um monopolo magnético que circula uma linha de fluxo de campo elétrico. Procedemos da mesma forma para construir o dual eletromagnético para o efeito Aharonov–Casher, a partir da fase (2.14)

$$\phi_{\mathrm{HMW}} = \mathrm{i} \oint (\vec{d} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{i} d \lambda_{\mathrm{m}} \ , \tag{2.20}$$

onde λ_{m} é definido como uma densidade de monopolos magnéticos. Essa fase (2.20) foi proposta por He e McKellar [10], e Wilkens [11] de maneira independente, no estudo do movimento de uma partícula neutra, que possui momento de dipolo elétrico permanente, na presença de um campo magnético gerado por uma linha de cargas magnéticas. Para contornar o inconveniente do campo gerado por uma densidade de monopolos magnéticos, Wei *et al.* [26] derivaram uma fase quântica para o movimento de uma partícula neutra, inicialmente não-polarizada, que se move numa região onde são aplicados simultaneamente um campo elétrico não-uniforme e campo magnético uniforme. Nesse caso, a configuração dos campos induz um momento de dipolo elétrico $\vec{d} = \alpha(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ na partícula neutra que leva a uma fase do tipo

$$\phi = \oint (\vec{B} \times \alpha \vec{E}) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \, , \tag{2.21}$$

onde α é a polarizabilidade elétrica.

2.5 Sumário

Neste capítulo, estudamos alguns efeitos que geram fases topológicas para a função de onda de partículas neutras ou carregadas na presença do campo eletromagnético. Para uma partícula carregada, que circula uma linha de fluxo de campo magnético isolada, encontramos um efeito mensurável mesmo que a partícula habite uma região onde o campo magnético se anule, e assim não temos nenhuma força atuando sobre ela [2]. Esse efeito redefine o papel dos potenciais eletromagnéticos na física quântica, atribuindo a eles uma influência sobre a matéria, mesmo na ausência de campos, o que confronta a física clássica. Se considerarmos uma linha de fluxo de campo magnético como sendo uma linha dipolos magnéticos, observamos uma dualidade entre o efeito Aharonov–Bohm acima descrito e o efeito Aharonov–Casher [5], onde um dipolo magnético circula uma linha de cargas elétricas e sua função de onda também adquire uma fase topológica.

Se consideramos transformações de dualidade de Heaviside, encontramos duas novas fases a partir dos efeito Aharonov–Bohm e Aharonov–Casher. No efeito conhecido como Aharonov–Bohm dual [9, 12], um monopolo magnético circula um solenóide elétrico isolado e adquire uma fase quântica. No efeito He–McKellar–Wilkens, consideramos o movimento de um dipolo elétrico, que circula uma linha de cargas magnéticas, adquirindo assim também uma fase. Com o intuito de contornar o inconveniente de uma distribuição de cargas magnéticas, Wei *et al.* [26] propõem uma configuração de campos elétrico e magnético cruzados, que é mais realista do ponto de vista da realização experimental, que induz um momento de dipolo elétrico na partícula neutra que também adquire uma fase similar a do efeito Aharonov–Bohm.

3 *Quantização de Landau*

3.1 Introdução

O estudo de problemas simples como a dinâmica quântica de partículas carregadas ou neutras na presença de campos eletromagnéticos são responsáveis pelo surgimento de vários efeitos topológicos e geométricos em física [2, 5, 10, 11, 26]. A interação entre o campo eletromagnético e uma partícula eletricamente carregada exerce um importante papel no estudo de fenômenos coletivos, *e.g.* estatística fracionária e o efeito Hall quântico [14]. Talvez um dos problemas mais simples possíveis em física seja a mecânica quântica de uma partícula carregada em duas dimensões sob a influência de um campo magnético constante aplicado perpendicularmente ao plano do movimento. Esse sistema é descrito pela teoria de Landau [13]. Em mecânica quântica, a quantização de Landau é a quantização das órbitas ciclotrônicas de partículas carregadas na presença de campos eletromagnéticos. Como resultado, as partículas carregadas podem ocupar apenas órbitas com valores discretos de energia, denominados níveis de Landau. Os níveis de Landau são degenerados, com o número de elétrons por nível diretamente proporcional a intensidade do campo magnético aplicado.

A quantização de Landau apresenta notável interesse sob muitos pontos de vista. É o modelo mais simples necessário para a descrição do efeito Hall quântico [14], por exemplo. Por outro lado, os níveis de Landau foram estudados para diferentes superfícies bi-dimensionais [15, 57, 16] com interesse em diversas áreas da física. Paredes *et al.* [17, 18], usando uma analogia entre um condensado de Bose–Einstein girante e um sistema de elétrons interagentes em um campo magnético uniforme, provaram a existência de excitações "anyônicas" nesse condensado. Ericsson e Sjöqvist [19], baseados nos resultados de Paredes *et al.*, propuseram uma analogia dos níveis de Landau para dipolos magnéticos, o que seugundo os autores seria o primeiro passo para a realização do efeito Hall quântico para átomos neutros.

Neste capítulo, baseados na idéia de Ericsson e Sjöqvist, construiremos análogos da quantização de Landau para partículas neutras polarizadas, tanto com momento de dipolo magnético como com momento de dipolo elétrico. Apresentamos os níveis de Landau para um sistema onde um dipolo elétrico se move na presença de um campo magnético gerado por uma densidade de monopolos magnéticos [20]. Para contornar o problema do campo gerado por cargas magnéticas, usamos a idéia de Wei *et al.* [26] para fases topológicas e construímos níveis de Landau para partículas neutras com momento de dipolo elétrico induzido por uma configuração de campos elétrico e magnético cruzados [21].

3.2 Níveis de Landau *standard*

Os níveis de Landau [13] são as solução da energia para uma partícula com carga q que tem seu movimento restrito ao plano x-y, onde está na presença de uma campo magnético uniforme $\vec{B}$ aplicado perpendicular ao plano do movimento da partícula. Esse sistema é descrito pela Hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{P}}{2m} = \frac{1}{2m}(-\mathrm{i}\nabla - q\vec{A})^2 \ , \tag{3.1}$$

onde m é a massa da partícula e $\vec{A}$ é o potencial vetor definido por $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. Para encontrar as energias do sistema identificamos as relações de comutação não-nulas por

$$[P_x, P_y] = \mathrm{i}m\omega \ , \tag{3.2}$$

onde

$$\omega = \frac{qB}{m} = \sigma\frac{|qB|}{m} \tag{3.3}$$

é a freqüência ciclotrônica das órbitas clássicas da partícula carregada na presença do campo magnético onde $\sigma = \pm$ rotula a direção de revolução correspondente ao movimento clássico. A unidade de comprimento natural no regime Hall é o comprimento magnético $\ell = |qB|^{-1/2}$. Dessa forma introduzimos os operadores escada

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{1}{\sqrt{2m|\omega|}}(P_x + \mathrm{i}\sigma P_y) \ , \\ \hat{a}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2m|\omega|}}(P_x - \mathrm{i}\sigma P_y) \ , \end{aligned} \tag{3.4}$$

que obedecem a relação de comutação $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Nesses termos, escrevemos o operador Hamiltoniano como

$$\hat{H} = \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)|\omega| + \frac{p_z}{2m} \ . \tag{3.5}$$

Assim o movimento no plano x-y se transformou num oscilador harmônico unidimensional acompanhado de um movimento livre na direção z. Segue que os autovalores de energia são dados por

$$\mathcal{E}_{n,k_z} = \left(n + \frac{1}{2}\right)|\omega| + \frac{k_z}{2m} \ , \tag{3.6}$$

onde $n = 0, 1, 2, \ldots$ e k_z tem valor real. Notamos que esses autovalores são independentes tanto da direção de revolução quanto do centro das órbitas do movimento clássico correspondente. Temos também uma independência da energia em relação ao autovalor k_y da componente p_y do operador momentum, portanto existem degenerescências. Para escrever as funções de onda, devemos lembrar que p_y comuta com a Hamiltoniana. Logo podemos usar o *ansatz*

$$\Psi(x, y) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_y y}\phi_n(x - x_0) \ , \tag{3.7}$$

onde ϕ_n são autofunções do oscilador harmônico e $x_0 = k_y/m\omega$ é o centro da órbita. Em resumo, o estado da partícula é caracterizado por dois números quânticos n e k_y. Cada conjunto de funções de onda para um mesmo n é conhecido como nível de Landau.

3.3 Análogos dos níveis de Landau para partículas neutras

Nesta seção apresentamos a quantização de Landau para partículas neutras polarizadas. Fazemos uso da idéia de Ericsson e Sjöqvist [19], que se basearam na interação do efeito Aharonov–Casher onde uma partícula neutra interage com um campo elétrico via momento de dipolo magnético. Calculamos os níveis de energia e as funções de onda para os sistemas de uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico na presença de um campo magnético.

3.3.1 Níveis de Landau para o dipolo magnético

Consideremos um sistema formado por uma partícula neutra, com momento de dipolo magnético permanente, que se move na presença de um campo elétrico. Podemos obter uma quantização análoga aos níveis de Landau se condições precisas na configuração de campo e dipolo forem obedecidas [19]. Nosso objetivo é encontrar os níveis de energia e explicitar suas degenerescências, bem como escrever as funções de onda. Esse sistema é descrito, no limite não-relativístico [58], pela Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2M}(\vec{p} - \mu\vec{n} \times \vec{E})^2 + \frac{\mu}{2M}\nabla \cdot \vec{E} \ , \tag{3.8}$$

onde μ é a intensidade do momento de dipolo magnético e $\vec{n}$ é um vetor unitário que define a orientação do dipolo, de modo que $\vec{\mu} = \mu\vec{n}$. A Hamiltoniana (3.8) apresenta uma certa analogia ao acoplamento mínimo de uma partícula carregada na presença de um campo magnético. Dessa forma, por analogia, definimos o potencial vetor efetivo

$$\vec{A}_{\mathrm{AC}} = \vec{n} \times \vec{E} \ . \tag{3.9}$$

Por conveniência, escolhemos o *gauge* simétrico

$$\vec{A}_{\mathrm{AC}} = \frac{\rho_{\mathrm{e}}}{2} r \hat{\mathrm{e}}_{\phi} \ , \tag{3.10}$$

onde ρ_{e} é uma densidade volumétrica de cargas elétricas. O campo elétrico, se considerarmos $\vec{n} = \hat{\mathrm{e}}_z$, é dado por

$$\vec{E} = \frac{\rho_{\mathrm{e}}}{2} r \hat{\mathrm{e}}_r \ . \tag{3.11}$$

Definimos então o campo magnético assiciado, dado por

$$\vec{B}_{\mathrm{AC}} = \nabla \times \vec{A}_{\mathrm{AC}} = \rho_{\mathrm{e}} \hat{\mathrm{e}}_z \ . \tag{3.12}$$

Notamos que o campo magnético associado $\vec{B}_{\mathrm{AC}}$ é homogêneo. Essa configuração de campo, com o movimento da partícula restrito ao plano x-y, satisfaz as condições para que ocorra um análogo dos níveis de Landau. Essas condições, demonstradas em [19], são: $\vec{B}_{\mathrm{AC}}$ uniforme, ausência de torque sobre a partícula e regime da eletrostática $\partial_t \vec{E} = 0$ e $\nabla \times \vec{E} = 0$. Assim todas essas condições são satisfeitas.

Usando a configuração de campo (3.10) e (3.11), escrevemos a equação de Schrödinger para o sistema, em coordenadas cilíndricas, na forma

$$-\frac{1}{2M}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2}\right] - \frac{\mathrm{i}\omega}{2}\frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \frac{M\omega^2}{8} r^2 \psi + \frac{\omega}{2}\psi = \mathcal{E}\psi \ , \tag{3.13}$$

onde definimos a freqüência ciclotrônica, dada por

$$\omega = \sigma\omega_{\mathrm{AC}} = \sigma\frac{|\mu\rho_{\mathrm{e}}|}{M} \ , \tag{3.14}$$

com $\sigma = \pm$ rotulando a direção de revolução do movimento clássico. Visto que a equação (3.13) não depende explicitamente de ϕ, usamos o seguinte *ansatz* para a solução

$$\psi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\phi} R(r) \ , \tag{3.15}$$

onde ℓ é um número inteiro. Dessa forma, escrevemos a equação de Schrödinger radial na forma

$$\frac{1}{2M}\left(R'' + \frac{1}{r}R' - \frac{m^2}{r^2}R\right) + \left(\mathcal{E} - \frac{M\omega_{AC}^2}{8}r^2 + \frac{\sigma\ell\omega_{\mathrm{AC}}}{2} - \frac{\sigma\omega_{\mathrm{AC}}}{2}\right)R = 0\ . \tag{3.16}$$

Com o intuito de reescrever a equação (3.16) acima numa forma mais conveniente, realizamos a seguinte mudança de coordenadas

$$\xi = \frac{M\omega_{\mathrm{AC}}}{2}r^2\ . \tag{3.17}$$

Assim, a equação (3.16) é reescrita na forma

$$\xi R'' + R' + \left(-\frac{\xi}{4} + \beta - \frac{\ell^2}{4\xi}\right)R = 0\ , \tag{3.18}$$

onde definimos a quantidade

$$\beta = \frac{\mathcal{E}}{\omega_{\mathrm{AC}}} + \frac{\sigma(\ell - 1)}{2}\ . \tag{3.19}$$

Estudando os limites assintóticos das soluções da equação (3.18), podemos escrever a solução na forma

$$R(\xi) = \mathrm{e}^{-\xi/2}\xi^{|\ell|/2}\zeta(\xi)\ . \tag{3.20}$$

Notemos que (3.18) tem a forma da equação hipergeométrica degenerada, e é satisfeita pela função $\zeta(\xi)$ dada por

$$\zeta = F\left[-\left(\beta - \frac{|\ell| + 1}{2}\right), |\ell| + 1, \xi\right]\ , \tag{3.21}$$

onde F é a função hipergeométrica degenerada. Para que a função (3.21) seja finita, o primeiro parâmetro deve ser um número inteiro não-positivo. Dessa forma chegamos na seguinte expressão para os autovalores de energia:

$$\mathcal{E} = \left(N + \frac{|\ell|}{2} - \frac{\sigma\ell}{2} + \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\right)\omega_{\mathrm{AC}}\ , \tag{3.22}$$

onde $N = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ e os valores de ℓ explicitam as degenerescências dos níveis de Landau. As autofunções radiais são escritas como

$$R_{N,\ell}(r) = \frac{1}{a^{|\ell|+1}}\left[\frac{(|\ell| + N)!}{2^{|\ell|}N!|\ell|!^2}\right]\exp\left(-\frac{r^2}{4a^2}\right)r^{|\ell|}F\left[-N, |\ell| + 1, \frac{r^2}{2a^2}\right]\ , \tag{3.23}$$

onde

$$a = a_{\mathrm{AC}} = \sqrt{\frac{1}{M\omega_{\mathrm{AC}}}}\ , \tag{3.24}$$

é a unidade de comprimento fundamental.

Os níveis de energia são infinitamente degenerados e independem do centro das órbitas, mas dependem da direção de revolução das órbitas clássicas.

3.3.2 Níveis de Landau para o dipolo elétrico

Agora nos concentramos na análise de um análogo dos níveis de Landau para a dinâmica quântica de um dipolo elétrico na presença de um campo magnético externo. A idéia aqui é similar ao *approach* apresentado em [19] e desenvolvido na seção anterior via equação de Schrödinger. Aqui usamos a interação descrita pelo efeito He–McKellar–Wilkens, onde um dipolo elétrico interage com um campo magnético, e descrevemos um novo análogo dos níveis de Landau. Consideramos um sistema formado por uma partícula neutra que possui momento de dipolo elétrico não nulo $\vec{d}$. Essa partícula se move na presença de um campo magnético externo $\vec{B}$. De maneira análoga ao caso do dipolo magnético, sob algumas condições para a configuração campo-dipolo temos uma quantização similar a dos níveis de Landau. Consideremos então um campo magnético não-usual

$$\vec{B} = \frac{\rho_{\mathrm{m}}}{2} r \hat{\mathrm{e}}_r \; , \tag{3.25}$$

onde ρ_{m} é uma densidade de cargas magnéticas. Um arranjo de configuração de campo com um campo magnético cilindricamente radial é muito difícil de realizar experimentalmente, devido o fato, *a priori*, de precisarmos de uma distribuição de cargas magnéticas. Entretanto, alguns autores afirmam que esse tipo de configuração pode ser obtido experimentalmente em arranjos apresentados em [59, 60, 61].

A Hamiltoniana que descreve a dinâmica quântica do dipolo elétrico, na presença de um campo elétrico externo é dada por

$$H = \frac{1}{2M}(\vec{p} + d\vec{n} \times \vec{B})^2 - \frac{d}{2M}\nabla \cdot \vec{B} \; , \tag{3.26}$$

onde d é a magnitude do dipolo elétrico e $\vec{n}$ é a sua orientação, que por conveniência escolhemos paralela ao eixo z com $\vec{n} = \hat{\mathrm{e}}_z$. Definimos então o potencial vetor por $\vec{A}_{\mathrm{HMW}} = \vec{n} \times \vec{B}$. Usando a configuração de campo (3.25), definimos o *gauge* simétrico

$$\vec{A}_{\mathrm{HMW}} = \frac{\rho_{\mathrm{m}}}{2} r \vec{\mathrm{e}}_\phi \; . \tag{3.27}$$

Dessa forma obtemos um campo magnético associado ao potencial vetor (3.27) escrito como

$$\vec{B}_{HMW} = \nabla \times \vec{A}_{\mathrm{HMW}} = \rho_{\mathrm{m}} \hat{\mathrm{e}}_z \; . \tag{3.28}$$

Notamos que d exerce o papel de uma constante de acoplamento [62]. Aqui estabelecemos as mesmas condições, definidas em [19], para existência dos níveis de Landau. A condição para ausência de torque sobre o dipolo é satisfeita, na configuração de campo estabelecida acima, desque que a velocidade da partícula seja nula na direção do eixo z; *i.e.* o movimento está restrito ao plano x-y. As condições para magnetostática e e $\vec{B}_{\mathrm{HMW}}$ uniforme já foram satisfeitas pela escolha do *gauge*. Então escrevemos a equação de Schrödinger para o sistema

$$\frac{1}{2M}(\vec{p} + d\vec{A}_{\mathrm{HMW}})^2\psi - \frac{d}{2M}\nabla \cdot \vec{B}\psi = \mathcal{E}\psi \; . \tag{3.29}$$

Substituindo os campos na equação acima, em coordenadas cilíndricas, temos que

$$-\frac{1}{2M}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right] - \frac{\mathrm{i}\omega}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} + \frac{M\omega^2}{8}r^2\psi - \frac{\omega}{2}\psi = \mathcal{E}\psi \; , \tag{3.30}$$

onde definimos a freqüência ciclotrônica como

$$\omega = \sigma\omega_{\mathrm{HMW}} = \frac{\sigma|d\rho_{\mathrm{m}}|}{M} \; , \tag{3.31}$$

onde $\sigma = \pm$ rotula a direção de revolução do movimento clássico. A equação (3.30) é resolvida usando o seguinte *ansatz*

$$\psi = C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\phi}R(r) \; . \tag{3.32}$$

onde ℓ é um número inteiro e C é uma constante de normalização. Logo, escrevemos a equação de Schrödinger radial na forma

$$\frac{1}{2M}\left(R'' + \frac{1}{r}R' - \frac{\ell^2}{r^2}R\right) + \left(\mathcal{E} - \frac{M\omega_{\mathrm{HMW}}^2}{8}r^2 - \frac{\sigma\ell\omega_{\mathrm{HMW}}}{2} + \frac{\sigma\omega_{\mathrm{HMW}}}{2}\right)R = 0 \; . \tag{3.33}$$

Agora, aplicando uma mudança de variáveis na equação acima de modo que

$$\xi = \frac{M\omega_{\mathrm{HMW}}}{2}r^2 \; , \tag{3.34}$$

a equação (3.33) é reescrita na conveniente forma

$$\xi R'' + R' + \left(-\frac{\xi}{4} + \beta - \frac{\ell^2}{4\xi}\right)R = 0 \; , \tag{3.35}$$

onde definimos

$$\beta = \frac{\mathcal{E}}{\omega_{HMW}} - \frac{\sigma(\ell - 1)}{2} \; . \tag{3.36}$$

Assumindo que as autofunções radiais são da forma

$$R(\xi) = \mathrm{e}^{-\xi/2}\xi^{|\ell|/2}\zeta(\xi) \; ., \tag{3.37}$$

que satisfaz os requerimentos assintóticos usuais e garante a não-divergência na origem para o estado ligado, temos que

$$\xi\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}+[(|\ell|+1)-\xi]\,\frac{d\zeta}{d\xi}-\gamma\zeta=0 \tag{3.38}$$

onde $\gamma=\beta-\frac{|\ell|+1}{2}$. Encontramos então que a solução da equação (3.38) é a função hipergeométrica degenerada definida por

$$\zeta(\xi)=F\left[-\gamma,|\ell|+1,\xi\right]\ . \tag{3.39}$$

A fim de que as autofunções sejam finitas, as series em (3.39) devem ser polinômios de grau N, portanto

$$\gamma=\beta-\frac{|\ell|+1}{2}=N\ . \tag{3.40}$$

Com essa condição, encontramos valores discretos para energia, dados por

$$\mathcal{E}_{N,\ell}=\left(N+\frac{|\ell|}{2}+\frac{\sigma\ell}{2}-\frac{\sigma}{2}+\frac{1}{2}\right)\omega_{\mathrm{HMW}}\ . \tag{3.41}$$

As autofunções radiais são dadas por

$$R_{N,\ell}=\frac{1}{a^{1+|\ell|}}\left[\frac{(|\ell|+N)!}{2^{|\ell|}N!|\ell|!^2}\right]^{1/2}\exp\left(-\frac{r^2}{4a^2}\right)r^{|\ell|}F\left[-N,|\ell|+1,\frac{r^2}{2a^2}\right]\ , \tag{3.42}$$

onde

$$a=\sqrt{\frac{1}{M\omega_{\mathrm{HMW}}}} \tag{3.43}$$

é o comprimento fundamental.

Notamos que os níveis de energia são infinitamente degenerados de maneira similar aos níveis de Landau. Observamos a dependência dos autovalores de energia em relação a direção de revolução σ, de maneira análoga ao que ocorre no caso do dipolo magnético, porém em sentido oposto.

3.4 Quantização de Landau para dipolos elétricos induzidos

Nesta seção, apresentamos o problema da construção de um análogo dos níveis de Landau para dipolos elétricos, onde contornamos o inconveniente da configuração de campo gerado por uma densidade de cargas magnéticas. Para tal, nos baseamos na idéia de Wei *et al.* [26] onde uma partícula neutra tem um momento de dipolo elétrico induzido por uma configuração de campos magnético e elétrico cruzados. Arranjos desse tipo são interessantes para o estudo de sistemas envolvendo átomos frios na presença de campos eletromagnéticos externos.

A dinâmica quântica de átomos frios na presença de um campo eletromagnético promete novas possibilidade para o estudo de propriedades quânticas de sistemas de muitos corpos. Esses sistemas podem ser facilmente controlados e manipulados por campos eletromagnéticos. Os átomos frios são então candidatos ideais para o estudo de fenômenos intrinsecamente quânticos. Nos últimos anos, avanços na tecnologia de átomos frios tornou possível simular diversos efeitos de estado sólido utilizando átomos neutros e técnicas de ótica quântica [63, 64, 22]. Recentemente, foram desenvolvidas técnicas para simular o comportamento de partículas carregadas em átomos neutros [22, 23, 24, 25]. Em resumo, o estudo de sistemas que simulam sistemas fortemente interagentes para átomo frios têm atraído muita atenção em anos recentes [17, 18].

Sistemas onde átomos com momento de dipolo elétrico na presença de configurações de campo eletromagnético apropriadas têm sido utilizados para investigar alguns efeitos físicos [65, 66, 67, 68]. O estudo de fases quânticas na dinâmica de dipolos teve sua origem com o efeito Aharonov–Casher [5] para dipolos magnéticos na presença de um campo elétrico externo. Um dual eletromagnético do efeito Aharonov–Casher foi estudado independentemente por He e McKellar [10] e Wilkens [11], que investigaram a dinâmica quântica de um dipolo elétrico na presença de um campo magnético gerado por uma densidade de monopolos magnéticos. De fato, do estudo da dinâmica de dipolos elétricos podem surgir uma variedade de fenômenos que geram fases geométricas [10, 11, 26, 68, 69, 70] em diferentes configurações dipolo-campos.

Considerando a interação descrita por Wei *et al.* [26], temos que uma partícula neutra com momento de dipolo induzido por uma configuração de campos elétrico e magnético cruzados apresenta um efeito de fase topológica similar ao efeito Aharonov–Bohm [2]. A vantagem dessa configuração, em relação a do efeito He–McKellar–Wilkens, é a possibilidade de sua realização experimental. Nossa proposta aqui é construir um análogo dos níveis de Landau para dipolos elétricos, usando a interação descrita por Wei *et al.*, sem o inconveniente de um campo gerado por uma distribuição de cargas magnéticas [21].

3.4.1 O dipolo elétrico induzido

Aqui consideramos um sistema de átomos frios tratados como dipolos elétricos induzidos. Esse sistema é submetido ao seguinte campo elétrico externo

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2} r \hat{e}_r \ , \tag{3.44}$$

onde ρ é uma densidade uniforme de cargas. O sistema também é submetido a um campo magnético externo

$$\vec{B} = B_0 \hat{e}_z \ . \tag{3.45}$$

A presença dos campos induz um dipolo elétrico na partícula dado por

$$\vec{d} = \alpha(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \ , \tag{3.46}$$

onde α é a polarizabilidade dielétrica da partícula e $\vec{v}$ é a sua velocidade. A Lagrangiana que descreve o dipolo elétrico na presença de uma configuração de campos elétrico e magnético externos é dada por

$$L = \frac{1}{2} M \vec{v}^2 + \frac{1}{2} \vec{d} \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \ . \tag{3.47}$$

Considerando que o momento de dipolo é induzido em átomos frios, usando (3.46) reescrevemos a Lagrangiana do sistema na forma

$$L = \frac{1}{2}(M + \alpha B^2)\vec{v}^2 + \frac{1}{2}\alpha E^2 + \alpha \vec{v} \cdot \vec{B} \times \vec{E} \ . \tag{3.48}$$

O termo $\alpha\vec{v}\cdot\vec{B}\times\vec{E}$ é conhecido como a energia de Rötgen e é responsável pela modificação do momentum canônico do sistema. O estudo desse termo e sua similaridade com o termo de Chern–Simons tem sido largamente estudado [65]. Em um sistema similar, Zhang [66] analisou a possibilidade de se testar a não-comutatividade espacial. O estudo de propriedades de dualidade foi realizado recentemente por Noronha e Wotzasek [71]. A configuração de campo requer que o sistema permaneça confinado em um plano e esse fato é responsável por sua analogia com a teoria Chern–Simons.

3.4.2 Análogo dos níveis de Landau

Aqui construímos um análogo dos níveis de Landau para um dipolo elétrico induzido num configuração de campos elétrico e magnético, como descrito anteriormente. Nesse sentido, escrevemos a Hamiltoniana associada a esse sistema

$$H = \frac{1}{2m^*}\left[\vec{P} + \alpha(\vec{E} \times \vec{B})\right]^2 - \frac{1}{2}\alpha E^2 \ , \tag{3.49}$$

onde redefinimos a massa da partícula

$$m^* = M + \alpha\vec{B}^2 \ . \tag{3.50}$$

Notamos a semelhança de (3.50) com a Hamiltoniana de uma partícula carregada minimamente acoplada com um campo magnético externo. Usando esse fato, o potencial vetor efetivo é definido como

$$\vec{A}_{\text{eff}} = \vec{E} \times \vec{B} \ . \tag{3.51}$$

Fazendo uso da configuração de campo apresentada anteriormente (3.44) e (3.45), obtemos o seguinte potencial vetor efetivo

$$\vec{A}_{\text{eff}} = -\frac{B_0\rho}{2} r\hat{\mathrm{e}}_\phi \ . \tag{3.52}$$

Então definimos o campo magnético efetivo associado ao potencial vetor efetivo

$$\vec{B}_{\text{eff}} = \nabla \times \vec{A}_{\text{eff}} = B_0\rho\hat{\mathrm{e}}_z \ . \tag{3.53}$$

Para construir os níveis de Landau para o nosso sistema, seguimos o *approach* usado em [19] onde condições precisas para o surgimento de níveis de Landau são estabelecidas. Na configuração de campo escolhida, as condições para torque nulo, campos estáticos e campo magnético efetivo uniforme são plenamente satisfeitas se restringirmos o movimento da partícula ao plano x-y. Agora o problema se reduz à resolução da equação de Schrödinger associada à (3.49). Então, escrevemos a equação de Schrödinger para o sistema, em coordenadas cilíndricas, na seguinte forma:

$$-\frac{1}{2m^*}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right] - \frac{\mathrm{i}\omega}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} + \frac{m^*\omega^2}{8}r^2\psi + \frac{m^{*2}\omega^2}{8\alpha B_0^2}r^2\psi = \mathcal{E}\psi \ , \tag{3.54}$$

onde definimos a freqüência ciclotrônica

$$\omega = \frac{\alpha B_0\rho}{m^*} \ . \tag{3.55}$$

Agora, usamos o seguinte *ansatz* para solução da equação de Schrödinger

$$\psi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\phi}R(r) \ , \tag{3.56}$$

onde ℓ é um número inteiro. Dessa forma podemos reescrever a equação (3.54) explicitando as autofunções radiais

$$\frac{1}{2M}\left(R''+\frac{1}{r}R'-\frac{m^2}{r^2}R\right)+\left(\mathcal{E}-\frac{M\omega^2}{8}r^2-\frac{\ell\omega}{2}-\frac{m^{*2}\omega^2}{8\alpha B_0^2}r^2\right)R=0\ . \tag{3.57}$$

Por conveniência, usamos a seguinte mudança de variável

$$\xi=\frac{m^*\omega}{2}r^2\ . \tag{3.58}$$

Temos então que a equação (3.57) é reescrita na forma

$$\xi R''+R'+\left(-\frac{\delta\xi}{4}+\beta-\frac{\ell^2}{4\xi}\right)R=0\ , \tag{3.59}$$

onde definimos as quantidades

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{\mathcal{E}}{\omega}-\frac{m}{2}\ ,\\ \delta &= 1+\frac{m^*}{4\alpha B_0^2}\ .\end{aligned} \tag{3.60}$$

Assumindo que as autofunções radiais são da forma

$$R(\xi)=\mathrm{e}^{-\delta\xi/2}\xi^{|\ell|/2}\zeta(\xi)\ , \tag{3.61}$$

que satisfaz os requerimentos assintóticos usuais e garante que os estados ligados sejam finitos na origem, temos que

$$\xi\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}+\left[(|\ell|+1)-\delta\xi\right]\frac{d\zeta}{d\xi}-\gamma\zeta=0\ , \tag{3.62}$$

onde

$$\gamma=\beta-\frac{\delta(|\ell|+1)}{2}\ . \tag{3.63}$$

A solução para a equação (3.62) é a função hipergeométrica degenerada, dada por

$$\zeta(\xi)=F\left[-\gamma,|\ell|+1,\delta\xi\right]\ . \tag{3.64}$$

A fim de que as funções de onda sejam normalizáveis, as series em (3.64) devem ser polinômios de grau N, portanto

$$\frac{\gamma}{\delta}=\frac{1}{\delta}\beta-\frac{(|\ell|+1)}{2}=N\ , \tag{3.65}$$

onde N é um número inteiro. Dessa condição, obtemos valores discretos para a energia, dados por

$$\mathcal{E}_{N,\ell}=\left(N+\frac{|\ell|}{2}+\frac{1}{2}\right)\omega_\delta+\frac{\ell}{2}\omega\ , \tag{3.66}$$

onde $\omega_\delta = \delta\omega$. No limite $\delta \to 1$ os autovalores são dados por

$$\mathcal{E}_{N,\ell} = \left(N + \frac{|\ell|}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\ell}{2}\right)\omega \ . \tag{3.67}$$

Notamos que esse limite é caracterizado por campos magnéticos intensos. As autofunções radiais são escritas como

$$R_{N,\ell} = \frac{1}{a^{1+|\ell|}}\left[\frac{(|\ell|+N)!}{2^{|\ell|}N!|\ell|!^2}\right]^{1/2}\exp\left(-\frac{\delta r^2}{4a^2}\right)r^{|\ell|}F\left[-N, |\ell|+1, \frac{\delta r^2}{2a^2}\right] \ , \tag{3.68}$$

onde

$$a = \sqrt{\frac{1}{m^*\omega}} \tag{3.69}$$

é a unidade de comprimento fundamental.

3.5 Sumário e observações

Neste capítulo, obtemos os autovalores de energia e autofunções para um sistema formado por uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico na presença de um campo magnético externo. Demonstramos que a interação do efeito He–McKellar–Wilkens é responsável pela quantização dos níveis de energia da partícula, de maneira similar ao que acontece no caso do dipolo magnético na presença de um campo elétrico externo descrito em [19]. De fato, podemos associar o espaçamento entre os níveis de Landau para dipolos elétricos e dipolo magnéticos se considerarmos transformações de dualidade de Heaviside. Usamos a Hamiltoniana apresentada por Anandan [58] para descrever esse sistema e resolvemos a equação de Schrödinger associada. Com os avanços na tecnologia de átomos frios [63, 22], acreditamos que seja possível simular esses efeitos aqui estudados. Átomos de Rydbeg frios podem ser explorados como sistemas para um possível teste para os níveis de Landau para dipolos elétricos em configurações de campo magnético mais realistas.

Com o intuito construir um análogo dos níveis de Landau para dipolos elétricos numa configuração de campo mais realista, propomos o estudo da dinâmica quântica de uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico induzido devido a presença de uma configuração de campos elétrico e magnético cruzados. Essa idéia foi baseada na configuração de campo descrita por Wei *et al.* [26]. No regime de campos magnéticos intensos, os níveis de energia são similares aos níveis de Landau. Baseados nesse fato, a possibilidade de um análogo atômico dos níveis de Landau para o dipolo elétrico é apresentada de maneira similar ao caso do dipolo magnético [19]. Esse estudo pode ser visto como um primeiro *approach* para investigar um análogo atômico para o efeito Hall quântico com dipolos elétricos em átomos frios.

4 *Quebra das simetrias de Lorentz via um* background *eletromagnético*

4.1 Introdução

Recentemente, alguns autores têm investigado a possibilidade da violação das simetrias de Lorentz a partir da generalização do modelo padrão. Essa teoria é conhecida como extensão do modelo padrão, que possui todas as propriedades convencionais porém prevê a quebra das simetrias de Lorentz [31, 32, 33, 72]. Em resumo, essa teoria nos fornece uma descrição quantitativa da violação das simetrias de Lorentz, que é controlada por um conjunto de coeficientes cujos valores devem ser determinados ou vinculados pelos experimentos [36, 37, 38, 39]. Aqui estudamos o setor da eletrodinâmica quântica na extensão mínima do modelo padrão. Obtemos a eletrodinâmica quântica estendida restringindo a extensão mínima do modelo padrão aos setores dos campos fermiônico e de *gauge*. Escrevemos então o setor fermiônico na forma

$$\mathcal{L}_{\rm f} = \frac{\rm i}{2}\bar{\Psi}\Gamma^{\nu}D_{\nu}\Psi - \bar{\Psi}M\Psi \ , \tag{4.1}$$

onde as quantidades Γ^{ν} e M são definidas como

$$\Gamma^{\nu} = \gamma^{\nu} + c^{\mu\nu}\gamma_{\mu} + d^{\mu\nu}\gamma_5\gamma_{\mu} \ , \tag{4.2}$$

e

$$M = m + \not{a} + \gamma_5\not{b} + \frac{1}{2}H^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} \ . \tag{4.3}$$

Os parâmetros a, b, c, d e H são valores esperados fixos de *background* dos campos tensoriais que quebram as simetrias de Lorentz. O setor do campo de gauge é escrito na forma

$$\mathcal{L}_{\rm g} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\upsilon_{\mu}{}^{*}F^{\mu\nu}A_{\nu} + \cdots \ , \tag{4.4}$$

onde ${}^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ é o tensor eletromagnético dual e υ_μ é um campo tensorial de *background*.

Introduzida por Carroll, Field e Jackiw [40], a extensão da eletrodinâmica quântica (4.4) não quebra a simetria de *gauge* da ação e das equações de movimento, mas modifica as relações de dispersão para diferentes polarizações dos fótons. Nesse contexto, encontramos algumas investigações recentes na literatura, *e.g.* o mecanismo tipo Čerenkov, conhecido como "radiação Čerenkov no vácuo", para testar a simetria de Lorentz [73], mudanças no *redshifts* gravitacional para fótons de Maxwell–Chern–Simons polarizados de maneira diferente [74], evidências da violação das simetrias de Lorentz e CPT na medição da polarização da radiação cósmica de fundo [75], extensões supersimétricas [76], quebra do grupo de Lorentz até o pequeno grupo associado com υ_μ [77], monopolos magnéticos induzindo corrente elétrica [78], e discussões sobre correções radiativas [79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86].

Para complementar o exemplo da extensão da eletrodinâmica quântica, temos novas modificações para o modelo padrão do tipo

$$\mathcal{L}_{\text{new}} = \bar{\Psi} b_\lambda {}^*F^{\lambda\rho}\gamma_\rho \Psi \ . \tag{4.5}$$

Esse acoplamento descreve a dinâmica de uma partícula neutra que se move na presença de um campo eletromagnético e de um parâmetro b_λ constante que controla a violação das simetrias de Lorentz. Observamos que o termo introduzido na expressão (4.5) é análogo a um acoplamento não-mínimo, e representa um *background* que é uma adaptação do termo tipo Chern–Simons (4.4) para a equação de Dirac. Alguns estudos recentes relacionados a esse *background* no contexto não-relativístico são encontrados na literatura, *e.g.* acoplamento não-mínimo e implicações [41], fases geométricas [27], análogos dos níveis de Landau [28], e geração de momento magnético [87].

4.2 Acoplamento não-mínimo

Consideremos a equação de Dirac com a presença do acoplamento introduzido em (4.5)

$$\Big(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ + g b_\lambda {}^*F^{\lambda\rho}\gamma_\rho - m\Big)\Psi = 0 \ . \tag{4.6}$$

Então reescrevemos a equação (4.6) na forma explicita

$$\big(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ + g b_0 \vec{\gamma}\cdot\vec{B} + g\vec{b}\cdot\vec{B}\gamma_0 - g\vec{\gamma}\cdot(\vec{b}\times\vec{E}) - m\big)\Psi = 0 \ . \tag{4.7}$$

Esse sistema descreve o movimento de uma partícula neutra de spin 1/2 na presença de um *background* que determina a quebra das simetrias de Lorentz. Podemos reescrever a equação (4.7) acima numa forma compacta conveniente

$$\mathrm{i}\partial_0\psi = H\Psi = [\vec{\alpha}\cdot\vec{\pi} + g\vec{b}\cdot\vec{B} + \hat{\beta}m]\Psi \ , \tag{4.8}$$

onde definimos

$$\vec{\pi} = -\mathrm{i}\big(\vec{\nabla} + \mathrm{i}g\hat{\beta}(\vec{b}\times\vec{E} - b_0\vec{B})\big) \ . \tag{4.9}$$

Calculamos o limite não-relativístico para a teoria (4.9) acima descrita através da transformação de Foldy–Wouthuysen, onde minimizamos a parte ímpar (ou a parte par) da Hamiltoniana. Segundo as referâncias [27, 28], obtemos a seguinte Hamiltoniana não-relativística de ordem $1/m$:

$$\hat{H} \approx \hat{\beta}\Big[m - \frac{1}{2m}\Big(\vec{\nabla} + \mathrm{i}\vec{A}\Big)^2 + A_0\Big] \ , \tag{4.10}$$

onde definimos o potencial vetor

$$\vec{A} = g\vec{b}\times\vec{E} - gb_0\vec{B} \ , \tag{4.11}$$

e o potencial escalar

$$A_0 = \frac{g\hat{\beta}}{2m}\vec{\Sigma}\cdot\big[\vec{\nabla}\times(\vec{b}\times\vec{E})\big] - \frac{g\hat{\beta}b_0}{2m}\vec{\Sigma}\cdot\big[\vec{\nabla}\times\vec{B}\big] + g\vec{b}\cdot\vec{B} \ , \tag{4.12}$$

onde

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

são as matrizes de Pauli, com $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ e $\mathbb{O}$ é a matriz 2×2 nula.

A Hamiltoniana (4.10) não-relativística descreve o movimento de férmions de quatro componentes, sem carga, sob a influência de um parâmetro constante que controla a violação das simetrias de Lorentz na presença de campos elétricos e magnéticos.

4.3 A fase geométrica em um *background* que viola as simetrias de Lorentz

No estudo da dinâmica quântica de partículas carregadas e neutras, na presença de campos eletromagnéticos, observamos diversos efeitos topológicos e geométricos. Podemos citar o efeito Aharonov–Bohm [2] onde uma partícula carregada, que contorna um longo e delgado solenóide, adquire uma fase quântica topológica em sua função de onda; mesmo movendo-se numa região onde os campos externos são nulos. Esse efeito foi observado experimentalmente conforme consta nas referências [3, 4]. Posteriormente, Aharonov e Casher [5] demonstraram que uma partícula neutra magneticamente polarizada acumula uma fase quântica geométrica em sua função de onda enquanto circula um fio carregado, movendo-se em uma região livre de forças externas. O efeito Aharonov–Casher foi observado em um interferômetro de neutrons [6] e em um interferômetro atômico Ramsey [7]. Um outro efeito geométrico foi proposto por He e McKellar [10], e Wilkens independentemente [11], no qual uma partícula neutra, que possui momento de dipolo elétrico, adquire uma fase geométrica em sua função de onda ao circular em torno de uma linha de monopolos magnéticos. Uma configuração experimental simples e prática para testar o efeito He–McKellar–Wilkens foi proposta por Wei *et al.* [26], sem o inconveniente do campo gerado por monopolos magnéticos.

4.3.1 O modelo e o limite não-relativístico

Estamos interessados em estudar a dinâmica quântica de uma partícula neutra de spin 1/2, que possui momentos de dipolo magnético e elétrico não-nulos, que se move na presença de uma campo magnético externo e de um *background* que viola as simetrias de Lorentz. O sistema que estamos interessados em estudar é descrito pela seguinte equação de Dirac:

$$\Big(\mathrm{i}\gamma_\mu\partial^\mu + \frac{1}{2}\mu\sigma_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{\mathrm{i}}{2}d\sigma_{\alpha\beta}\gamma_5F^{\alpha\beta} + gv_\alpha{}^*F^{\alpha\beta}\gamma_\beta - m\Big)\Psi = 0\ , \qquad (4.14)$$

onde μ é a intensidade do momento dipolo magnético, d é a intensidade do momento de dipolo elétrico, e g é uma constante de acoplamento relacionada ao termo que contêm v_α que é um quadri-vetor constante que determina uma direção preferencial no espaço-tempo. O terceiro termo na equação (4.14) acima é o termo tipo Chern–Simons adaptado para a equação de Dirac que viola explicitamente as simetrias de Lorentz e CPT. No momento, estamos interessados apenas no estudo da influência do parâmetro v_α sobre a fase geométrica, mas epecificamente sobre os efeitos Aharonov–Casher e He–McKellar–Wilkens. Através da introdução de um tensor anti-simétrico de *rank* 2, definimos o tensor intensidade de campo como

$$F^{\mu\nu} = \{\vec{E}, \vec{B}\}\ , \quad F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}\ , \quad F^{0i} = -E^i\ ,$$
$$F^{i0} = E^i\ , \quad F^{ij} = -\epsilon_{ijk}B^k\ ,$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{bmatrix} . \tag{4.15}$$

O tensor intensidade de campo dual ${}^*F^{\mu\nu}$ é obtido através da contração de $F^{\mu\nu}$ com o tensor unitário completamente antisimétrico (o tensor de Levi-Civita) $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$:

$${}^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = F^{\mu\nu}(\vec{E} \to \vec{B}, \vec{B} \to -\vec{E}) . \tag{4.16}$$

As matrizes de Dirac são definidas como segue:

$$\begin{aligned} \sigma_{0i} &= \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma_0\gamma_i - \gamma_i\gamma_0] = \mathrm{i}\gamma_0\gamma_i = -\mathrm{i}\alpha_i \ , \\ \sigma_{ij} &= \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma_i\gamma_j - \gamma_j\gamma_i] = \mathrm{i}\gamma_i\gamma_j = \epsilon_{ijl}\Sigma_l \ , \end{aligned} \tag{4.17}$$

e, por conveniência, escolhemos γ_5, $\hat{\beta}$ e γ^j como

$$\begin{gathered} \gamma_5 = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{O} \end{pmatrix} , \quad \hat{\beta} = \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} , \\ \gamma^j = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \sigma^j \\ -\sigma^j & \mathbb{O} \end{pmatrix} , \end{gathered} \tag{4.18}$$

onde $\mathbb{O}$ e $\mathbb{1}$ designam as matrizes 2×2 nula e identidade respectivamente, e σ^j são as matrizes de Pauli que obedecem a relação $(\sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i) = -2g^{ij}$. Dessa forma, podemos reescrever a equação (4.14) como

$$\begin{aligned} \Big[&\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu + \mu(\mathrm{i}\vec{\alpha}\cdot\vec{E} - \vec{\Sigma}\cdot\vec{B}) - \mathrm{i}d(\mathrm{i}\vec{\alpha}\cdot\vec{E} - \vec{\Sigma}\cdot\vec{B})\gamma_5 \\ &-g\hat{\beta}(\upsilon_0(\vec{\alpha}\cdot\vec{B}) - \vec{\alpha}\cdot(\vec{\upsilon}\times\vec{E}) + \vec{\upsilon}\cdot\vec{B}) - m\Big]\Psi = 0 \ , \end{aligned} \tag{4.19}$$

onde υ_0 e $\vec{\upsilon}$ são respectivamente as componentes *time-like* e *space-like* do quadri-vetor υ_μ. Agora definimos as matrizes de Dirac na representação padrão

$$\begin{gathered} \vec{\alpha} = \hat{\beta}\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & \mathbb{O} \end{pmatrix} , \qquad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \vec{\sigma} \end{pmatrix} , \\ \vec{\Pi} = \hat{\beta}\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\vec{\sigma} \end{pmatrix} . \end{gathered}$$

Assim a equação (4.19) pode ser escrita na forma compacta

$$\mathrm{i}\partial_0\Psi = H\Psi = [\vec{\alpha}\cdot\vec{\pi} + \mu\vec{\Pi}\cdot\vec{B} + d\vec{\Sigma}\cdot\vec{E} + g\vec{\upsilon}\cdot\vec{B} + \hat{\beta}m]\Psi \ , \tag{4.20}$$

onde $\vec{\pi} = -\mathrm{i}(\vec{\nabla} + \hat{\beta}(\mu\vec{E} - d\vec{B}) + \mathrm{i}g(\vec{\upsilon} \times \vec{E} - \upsilon_0\vec{B}))$.

Neste ponto, queremos encontrar uma aproximação não-relativística da nossa teoria. Então, utilizamos a transformação de Foldy–Wouthuysen para o spinor de Dirac [88]. Em acordo com o trabalho [29], obtemos a seguinte Hamiltoniana não-relativistica:

$$\hat{H} \approx \hat{\beta}\Big[m - \frac{1}{2m}\Big(\vec{\nabla} + \mathrm{i}\vec{A}\Big)^2 + A_0\Big] \ , \tag{4.21}$$

onde definimos

$$\vec{A} = (\mu\hat{\beta}\vec{\Sigma} + g\vec{\upsilon}) \times \vec{E} - d\hat{\beta}\vec{\Sigma} \times \vec{B} - g\upsilon_0\vec{B} \ , \tag{4.22}$$

e

$$\begin{aligned} A_0 \ = \ & -\frac{\mu^2}{2m}\vec{E}^2 - \frac{d^2}{2m}\vec{B}^2 - \frac{\mu\hat{\beta}}{2m}\vec{\nabla}\cdot\vec{E} + \frac{d\hat{\beta}}{2m}\vec{\nabla}\cdot\vec{B} + \frac{g\hat{\beta}}{2m}\vec{\Sigma}\cdot\left[\vec{\nabla}\times(\vec{\upsilon}\times\vec{E})\right] \\ & -\frac{g\hat{\beta}\upsilon_0}{2m}\vec{\Sigma}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{B}\right] + \mu\vec{\Pi}\cdot\vec{B} + d\vec{\Sigma}\cdot\vec{E} + g\vec{\upsilon}\cdot\vec{B} \ . \end{aligned} \tag{4.23}$$

A expressão (4.21) é a Hamiltoniana quântica não-relativísitca para férmions de 4 componentes. Entretanto, para diversas aplicações em mecânica quântica, podemos escrever (4.21) para férmions de 2 componentes, na forma

$$H = \frac{1}{2m}\Big(\vec{\nabla} + \mathrm{i}\vec{a}\Big)^2 + a_0 \ , \tag{4.24}$$

que é semelhante na forma a interação de uma partícula carregada com os campos elétrico e magnético minimamente acoplados a um campo de *gauge* não-abeliano com potencial a_μ, onde

$$\begin{aligned} a_0 \ = \ & -\frac{\mu^2}{2m}\vec{E}^2 - \frac{d^2}{2m}\vec{B}^2 - \frac{\mu}{2m}\vec{\nabla}\cdot\vec{E} + \frac{d}{2m}\vec{\nabla}\cdot\vec{B} + \frac{g}{2m}\vec{\sigma}\cdot\left[\vec{\nabla}\times(\vec{\upsilon}\times\vec{E})\right] \\ & -\frac{g\upsilon_0}{2m}\vec{\sigma}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{B}\right] + \mu\vec{\sigma}\cdot\vec{B} + d\vec{\sigma}\cdot\vec{E} + g\vec{\upsilon}\cdot\vec{B} \ , \end{aligned} \tag{4.25}$$

e

$$\vec{a} = \mu\vec{\sigma} \times \vec{E} - d\vec{\sigma} \times \vec{B} + g\vec{\upsilon} \times \vec{E} - g\upsilon_0\vec{B} \ , \tag{4.26}$$

onde $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, σ_i $(i = 1, 2, 3)$ são as matrizes 2×2 de Pauli. A Hamiltoniana (4.24) descreve um sistema formado por uma partícula neutra, que possui momentos dipolo magnético e elétrico permanentes, na presença de campos elétrico e magnético externos e de uma quadri-vetor constante que viola as simetrias de Lorentz. Devemos notar que esse sistema (4.24) é similar na forma a um sistema de uma partícula carregada na presença de um campo magnético externo.

4.3.2 Fases geométricas

Neste Ponto, estudamos a dinâmica quântica não-relativística de uma partícula neutra, polarizada $\mu \neq 0$ e $d \neq 0$, sob influência dos termos que violam as simetrias de Lorentz $v_0 \neq 0$ e $\vec{v} \neq 0$. A equação de Schrödinger para esse problema é escrita, de acordo com (4.24), na forma

$$-\frac{1}{2m}\left(\vec{\nabla} + \mathrm{i}\mu\vec{\sigma} \times \vec{E} - \mathrm{i}d\vec{\sigma} \times \vec{B} + \mathrm{i}g\vec{v} \times \vec{E} - \mathrm{i}gv_0\vec{B}\right)^2 \Psi = \mathcal{E}\Psi \,. \tag{4.27}$$

Para obtermos a fase quântica, usamos o *ansatz* $\Psi = \Psi_0 e^{\phi}$, onde Ψ_0 é a função de onda da partícula livre, e ϕ é a fase que a função de onda da partícula acumula devido a influência dos campos externos e dos parâmetros que violam as simetrias de Lorentz. O *phase shift* é calculado a partir da equação (4.27) como uma variação na ação clássica do sistema, e é dada por

$$\phi = \mathrm{i}\oint [\mu\vec{\sigma} \times \vec{E} - d\vec{\sigma} \times \vec{B} - gv_0\vec{B} + g\vec{v} \times \vec{E}] \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}\,. \tag{4.28}$$

Os dois primeiros termos da integral (4.28) acima representam a fase estudada por Anandan [58], que são os efeitos Aharonov–Casher e He–McKellar–Wilkens respectivamente. Os demais termos em (4.28) são as contribuições dos parâmetros de violação das simetiras de Lorentz para a fase geométrica.

Devemos notar que a fase na expressão (4.28) é escrita em termos das matrizes $\vec{\sigma}$ de Pauli. Entretanto, se considerarmos os campos no plano x-y, restará apenas os termos que contêm σ_3 [89]. Assim, encontramos a forma simplificada

$$\phi = \mathrm{i}\sigma_3 \oint [\mu\vec{k} \times \vec{E} - d\vec{k} \times \vec{B}] + \mathrm{i}\oint [g\vec{v} \times \vec{E} - v_0 g\vec{B}] \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}\,, \tag{4.29}$$

onde $\vec{k}$ é um vetor unitário na direção do eixo z. A presença de σ_3 na fase representa os graus de liberdade de spin; entretanto, nosso interesse aqui é o estudo de algumas aplicações em mecânica quântica não-relativística, e levamos em conta apenas a componente *up* do spinor. Então definimos as quantidades $\vec{\mu} = \mu\vec{k}$, $\vec{d} = d\vec{k}$ e a fase

$$\phi = \mathrm{i}\oint [\vec{\mu} \times \vec{E} - \vec{d} \times \vec{B} + g\vec{v} \times \vec{E} - gv_0\vec{B}] \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}\,. \tag{4.30}$$

Os dois primeiros termos na integral da expressão (4.30) acima estão de acordo com a literatura [5, 10, 11]; os demais termos serão levados em consideração a seguir.

Agora analisaremos alguns casos especiais. Primeiro, consideremos o caso onde temos a ausência de campo magnético externo $\vec{B} = 0$ e ausência de polarização elétrica $d = 0$.

Temos então a fase conhecida como efeito Aharonov–Casher

$$\phi_{\rm AC} = {\rm i}\oint \left[\vec{\mu}\times\vec{E} + g\vec{v}\times\vec{E}\right]\cdot {\rm d}\vec{\ell}\,, \tag{4.31}$$

onde a presença do termo $g\vec{v}\times\vec{E}$ determina a correção para a fase de Aharonov–Casher devido a presença do parâmetro de violação das simetrias de Lorentz. Podemos escrever a expessão (4.31) na seguinte forma:

$$\phi_{\rm AC} = {\rm i}\oint (\vec{\mathcal{M}}\times\vec{E})\cdot {\rm d}\vec{\ell}\,, \tag{4.32}$$

onde $\vec{\mathcal{M}} = [\mu + gv_3]\vec{k}$, se fizermos $\vec{v} = v_3\vec{k}$, é o momento de dipolo magnético modificado pela componente *space-like* do parâmetro de violação das simetrias de Lorentz. Podemos notar que a presença do parâmetro de quebra aumenta o momento de dipolo da partícula, introduzindo uma nova contribuição para a fase de Aharonov–Casher. Essa contribuição poderia ser investigada usando interferometia de partículas neutras com momento de dipolo permanente, e observaria-se o aumento na magnitude da polarizabilidade das partículas. Considerando uma configuração de campo gerada por um fio homogeneamente carregado, paralelo ao eixo z,

$$\vec{E} = \frac{\lambda_{\rm e}}{2\pi r}\hat{\rm e}_r\,, \tag{4.33}$$

onde $\lambda_{\rm e}$ é a densidade linear de carga no fio. Nessas condições calculamos a fase de Aharonov–Casher com as correções devido a presença do *background* que viola as simetrias de Lorentz

$$\phi_{\rm AC} = {\rm i}\oint (\vec{\mathcal{M}}\times\vec{E})\cdot {\rm d}\vec{\ell} = {\rm i}(\mu + gv_3)\lambda_{\rm e}\,. \tag{4.34}$$

O resultado (4.34) acima é similar ao efeito Aharonov–Casher [5] com o acrescimo da correção $gv_3\lambda_{\rm e}$ advinda da parte *space-like* do quadri-vetor v^μ que viola as simetrias de Lorentz.

De maneira equivalente, consideramos o caso onde o campo elétrico é nulo $\vec{E} = 0$, que corresponde a realização do efeito He–McKellar–Wilkens na presença do background que quebra as simetrias de Lorentz. Então, podemos escrever a fase

$$\phi_{\rm HMW} = -{\rm i}\oint \left[\vec{d}\times\vec{B} + gv_0\vec{B}\right]\cdot {\rm d}\vec{\ell}\,, \tag{4.35}$$

onde o primeiro termo na fase (4.35) acima é o efeito He–McKellar–Wilken [10, 11], e a contribuição $gv_0\vec{B}$ é o fator que determina a correção devido a componente *time-like* do parâmentro de violação das simetrias de Lorentz. Podemos reescrever a expressão (4.35) em outro forma usando o teorema de Stokes

$$\phi_{\mathrm{HMW}} = -\mathrm{i} \iint_S \left[\nabla \times (\vec{d} \times \vec{B}) + g v_0 \nabla \times \vec{B}\right] \cdot \mathrm{d}\vec{s} \,, \tag{4.36}$$

onde usando a identidade $\nabla \times (\vec{d} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{d} - (\vec{d} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{d}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{d})$, e devido a configuração campo-diplo, com o dipolo orientado na direção do eixo z e os campos no plano x-y, o primeiro termo na integral da experessão (4.36) resume-se a lei de Gauss $\nabla \cdot \vec{B} = \lambda_{\mathrm{m}}$. Assim, reescrevemos a fase na forma

$$\phi_{\mathrm{HMW}} = -\mathrm{i} \iint_S \left[\vec{d}(\nabla \cdot \vec{B}) + g v_0 \nabla \times \vec{B}\right] \cdot \mathrm{d}\vec{s} \,, \tag{4.37}$$

onde podemos considerar um campo gerado por uma densidade de monopolos magnéticos. O segundo termo na integral da expressão (4.37) representa uma densidade de corrente elétrica estacionária $\nabla \times \vec{B} = \vec{J}$. Portanto, podemos considerar uma configuração onde o campo magnético é gerado por um fio carregado com uma densidade linear de monopolos magnéticos, paralelo ao eixo z, que conduz uma corrente elétrica. Escrevendo o campo magnético na forma

$$\vec{B} = \frac{\lambda_{\mathrm{m}}}{2\pi r} \hat{\mathrm{e}}_r + \frac{j}{2\pi r} \hat{\mathrm{e}}_\phi \,, \tag{4.38}$$

caculamos a fase de He–McKellar–Wilkens com as correções devido ao background que viola as simetrias de Lorentz

$$\phi_{\mathrm{HMW}} = -\mathrm{i} \oint \left[\vec{d} \times \vec{B} + g v_0 \vec{B}\right] \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\mathrm{i}(d\lambda_{\mathrm{m}} + g v_0 j) \,, \tag{4.39}$$

onde λ_{m} é uma densidade linear de carga magnética e j é uma densidade de corrente elétrica. O resultado (4.39) é a fase He–McKellar–Wilkens com o acrescimo da correção $g v_0 j$ advinda da parte *time-like* do quadri-vetor v^μ que controla a quebra das simetrias de Lorentz.

4.4 Violação das simetrias de Lorentz e um análogo dos Níveis de Landau

Estudos recentes direcionados para a análise da dinâmica de partículas fermiônicas carregadas, em um campo eletromagnético externo, dentro do cenário da eletrodinâmica estendida que inclui os termos de quebra das simetrias de Lorentz, foram realizados por diversos autores [90, 27, 28, 41, 76, 91]. Como um novo desenvolvimento desses estudos, pretendemos investigar a dinâmica quântica de uma partícula neutra de spin 1/2 na presença de um campo eletromagnético, levando em conta a influência de um parâmetro constante que controla a violação das simetrias de Lorentz. Baseados na idéia da extensão do modelo padrão, iniciamos com um modelo onde um termo tipo Chern–Simons [40] é adicionado à equação de Dirac, termos esses que caracterizam um *background* que determina uma direção preferencial no espaço-tempo. Em seguida, consideramos a Hamiltoniana não-relativística associada a esse sistema [27], que é obtida através da transformação de Foldy–Wouthuysen [88] para o spinor de Dirac.

Nosso principal objetivo nesta seção é obter uma quantização dos níveis de energia para o sistema descrito acima, que será tratada como um efeito análogo aos níveis de Landau [13], onde uma partícula carregada se move na presença de uma campo magnético homogêneo. Para tal, adaptamos a ideia de Ericsson e Sjöqvist [19] para o nosso sistema e escolhemos uma configuração campos-partícula onde os análogos dos níveis de Landau podem ocorrer. Nosso interesse nesse estudo, vem da possibilidade da formulação dos níveis de Landau descrever muitos problemas como o efeito Hall quântico [14], superfícies bi-dimensionais [15, 16], excitações de anyons em condensados de Bose–Einstein girantes [17, 18], analogos da quantização em níveis de Landau para partículas neutras polarizadas [19, 20, 21], entre outros sistemas.

4.4.1 Dinâmica quântica e a quebra das simetrias de Lorentz

À dinâmica de uma partícula neutra de spin 1/2 que se move na presença de um campo eletromagnético que envolve o parâmetro de quebra das simetrias de Lorentz é descrito pela equação de Dirac, com a adição de um termo tipo Chern–Simons, como segue:

$$\Big(\mathrm{i}\gamma_\mu\partial^\mu + gv_\alpha{}^*F^{\alpha\beta}\gamma_\beta - m\Big)\Psi = 0\ , \tag{4.40}$$

onde g é uma constante de acoplamento, ${}^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ é o tensor intensidade de campo eletromagnético dual, e v^μ é um parâmetro constante que implementa a violação das simetrias de Lorentz dando uma direção preferencial ao espaço-tempo. Por conveniência, separamos o parâmetro v_μ em duas componentes, com v_0 sendo a parte *time-like* e $\vec{v}$ a parte *space-like*. As matrizes de Dirac são dadas por:

$$\hat{\beta} = \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}\ ,\quad \gamma^j = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \sigma^j \\ -\sigma^j & \mathbb{O} \end{pmatrix}\ ,\quad \alpha^i = \hat{\beta}\gamma^i\ , \tag{4.41}$$

onde $\mathbb{O}$ e $\mathbb{1}$ são as matrizes 2×2 nula e unitária respectivamente, e σ_i são as matrizes de Pauli que satisfazem a seguinte álgebra:

$$\begin{aligned}
&[\gamma^0\gamma^i - \gamma^i\gamma^0] = 2\mathrm{i}\sigma^{0i}, \\
&[\gamma^i\gamma^j - \gamma^j\gamma^i] = 2\mathrm{i}\sigma^{ij} = \mathrm{i}\epsilon^{ijk}\Sigma_k, \\
&\{\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i\} = 2\delta^{ij}.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Após essas breves definições, podemos escrever a equação (4.40) na forma

$$\Big[\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - gv_0(\vec{\gamma}\cdot\vec{B}) + g\vec{\gamma}\cdot(\vec{v}\times\vec{E}) + (\vec{v}\cdot\vec{B})\gamma^0 - m\Big]\Psi = 0 \tag{4.43}$$

ou, de maneira equivalente,

$$H\Psi = \big[\vec{\alpha}\cdot\vec{\pi} - g(\vec{v}\cdot\vec{B}) + \hat{\beta}m\big]\Psi = \mathrm{i}\frac{\partial\Psi}{\partial t} \ , \tag{4.44}$$

onde definimos $\vec{\pi} = -\mathrm{i}\big[\vec{\nabla} + g\big((\vec{v}\times\vec{E}) - v_0\vec{B}\big)\big]$. Conforme relatado anteriormente, vamos obter um Hamiltoniano não-relativístico associado à equação (4.44); para tal, utilizamos a aproximação de Foldy–Wouthuysen. De acordo com a referência [27], podemos escrever a Hamiltoniana não-relativística associada na forma

$$H = -\frac{1}{2m}\Big(\vec{\nabla} - \mathrm{i}\vec{a}\Big)^2 + a_0 \ . \tag{4.45}$$

A expressão (4.45) acima é similar à Hamiltoniana que descreve a interação de uma partícula carregada minimamente acoplada com um campo de gauge Abeliano com potencial a_μ. O potencial vetor é escrito como

$$\vec{a} = g\vec{v}\times\vec{E} - gv_0\vec{B} \ , \tag{4.46}$$

e o potencial escalar como

$$a_0 = \frac{g}{2m}\vec{\sigma}\cdot\big[\vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{E})\big] - \frac{gv_0}{2m}\vec{\sigma}\cdot\big[\vec{\nabla}\times\vec{B}\big] + g\vec{v}\cdot\vec{B} \ . \tag{4.47}$$

A expressão (4.45) tem a mesma forma que a Hamiltoniana que descreve o movimento de uma partícula carregada na presença de um campo magnético. Isso sugere a possibilidade da construção de modelos análogos aos níveis de Landau.

4.4.2 Análogo da quantização em níveis de Landau

Neste ponto, usaremos a Hamiltoniana não-relativística (4.45) para a construção de efeitos análogos aos níveis de Landau para partículas neutras, na presença do campo eletromagnético e de um quadri-vetor constante que quebra as simetrias de Lorentz. Notamos que a expressão (4.45) é similar na forma à uma Hamiltoniana que descreve o movimento de uma partícula carregada na presença de um campo magnético externo. Nesse sentido, sob certas condições, podemos construir níveis de energia quantizados de maneira análoga a quantização de Landau [13]. Então, podemos determinar alguns aspectos da natureza do *background* que viola as simetrias de Lorentz investigando as propriedades das constantes de acoplamento. Desprezando os termos de segunda ordem nos campos, podemos escrever (4.45) na forma

$$H = \frac{1}{2m}\left[\vec{p} - g\vec{\upsilon}\times\vec{E} + g\upsilon_0\vec{B}\right]^2 + \frac{g}{2m}\vec{\sigma}\cdot\left[\vec{\nabla}\times(\vec{\upsilon}\times\vec{E})\right] - \frac{g\upsilon_0}{2m}\vec{\sigma}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{B}\right], \tag{4.48}$$

onde $\vec{p} = -\mathrm{i}\nabla$. Por conveniência, podemos assumir que os campos estão definidos no plano x-y, então teremos apenas a component σ_3 da matriz de spin na expressão (4.48) [89]. Entretanto, visto que nosso interesse consiste em estudar alguns aspectos da mecânica quântica não-relativística, restringimos o nosso sistema apenas para a componente *up* do spinor. Então, reescrevemos a Hamiltoniana (4.48) como

$$H = \frac{1}{2m}\left[\vec{p} - g\vec{\upsilon}\times\vec{E} + g\upsilon_0\vec{B}\right]^2 + \frac{g}{2m}\vec{k}\cdot\left[\vec{\nabla}\times(\vec{\upsilon}\times\vec{E})\right] - \frac{g\upsilon_0}{2m}\vec{k}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{B}\right], \tag{4.49}$$

onde definimos $\vec{k} = (0,0,1)$ é um vetor unitário orientado na direção do eixo z.

A partir de agora, analisaremos separadamente as componentes *time-like* e *space-like* do quadri-vetor $\upsilon^\mu = (\upsilon_0, \upsilon^i)$. A seguir construiremos níveis de Landau para ambos os casos.

O caso *time-like*

Se considerarmos apenas os termos *time-like* em (4.49), nos resta o seguinte modelo

$$H = \frac{1}{2m}\left[\vec{p} + g\upsilon_0\vec{B}\right]^2 - \frac{g\upsilon_0}{2m}\vec{k}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{B}\right]. \tag{4.50}$$

Sob certas condições para configuração dos campos, partículas neutras podem apresentar níveis de energia quantizados de maneira similar aos níveis de Landau para particulas carregadas. As condições precisas para configuração do sistema, para que os níveis de Landau ocorram para partículas neutras, foram estabelecidos na referência [19]. Aqui, adaptamos essas condições para um sistema descrito pela expressão (4.50), onde uma partícula neutra se move na presença de um *background* que viola as simetrias de Lorentz. Assim, o torque sobre a partícula deve ser nulo, os campos devem ser estáticos e o "campo magnético efetivo" $\vec{B}^{(\mathrm{t})}_{\mathrm{eff}} = \vec{\nabla} \times \vec{A}^{(\mathrm{t})} = \vec{\nabla} \times \vec{B}$ deve ser uniforme. Com a escolha do *gauge* simétrico, essas condições são satisfeitas se o movimento da partícula estiver restrito ao plano x-y. Então escolhemos a seguinte configuração:

$$\begin{aligned} \vec{k} &= (0,0,1)\ , \\ \vec{A}^{(\mathrm{t})} = \vec{B} &= \frac{j}{2}(-y,x,0)\ , \end{aligned} \tag{4.51}$$

onde j é uma densidade de corrente elétrica. Então, reescrevemos a Hamiltoniana (4.50) na forma

$$\hat{H}^{(\mathrm{t})} = \frac{1}{2m}\left[\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \left(\frac{m|\omega_{\mathrm{t}}|}{2}\right)^2(\hat{x}^2+\hat{y}^2)\right] + \frac{\varsigma|\omega_{\mathrm{t}}|}{2}(\hat{L}_z^{(\mathrm{t})} - 1)\ , \tag{4.52}$$

onde

$$\omega_{\mathrm{t}} = \varsigma|\omega_{\mathrm{t}}| = \frac{\varsigma|g\upsilon_0 j|}{m} \tag{4.53}$$

é a freqüência ciclotrônica, $\varsigma = \pm$ rotula a direção de revolução, e $\hat{L}_z^{(\mathrm{t})} = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$ é o operador momentum angular. Nesse caso, a unidade de comprimento natural é $\ell_{\mathrm{t}} = |g\upsilon_0 j|^{-1/2}$.

Visto que as coordenadas da posição e do momentum obedecem as relações de comutação

$$[\hat{x},\hat{p}_x] = \mathrm{i}\ , \quad [\hat{y},\hat{p}_y] = \mathrm{i}\ , \quad [\hat{x},\hat{p}_y] = [\hat{y},\hat{p}_x] = 0\ , \tag{4.54}$$

construímos os operadores escada

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{m|\omega_{\mathrm{t}}|}}{2}(-\varsigma\hat{x} + \mathrm{i}\hat{y}) + \frac{(-\mathrm{i}\varsigma\hat{p}_x - \hat{p}_y)}{\sqrt{m|\omega_{\mathrm{t}}|}}\right]\ , \\ \hat{a}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{m|\omega_{\mathrm{t}}|}}{2}(-\varsigma\hat{x} - \mathrm{i}\hat{y}) + \frac{(\mathrm{i}\varsigma\hat{p}_x - \hat{p}_y)}{\sqrt{m|\omega_{\mathrm{t}}|}}\right]\ , \end{aligned} \tag{4.55}$$

que satisfazem a relação $[\hat{a},\hat{a}^\dagger] = 1$. Dessa forma, escrevemos a Hamiltoniana (4.52) na forma compacta

$$\hat{H}^{(\mathrm{t})} = |\omega_{\mathrm{t}}|\left[\hat{a}^\dagger a + \frac{1}{2}(1-\varsigma)\right]\ , \tag{4.56}$$

da qual obtemos um análogo do espectro de energia de Landau para o caso *time-like*

$$E_N^{(\mathrm{t})} = \left[N + \frac{1}{2}(1-\varsigma)\right]|\omega_{\mathrm{t}}|\ , \qquad N = 0,1,2,\ldots \tag{4.57}$$

Para obter o espectro degenerado, introduzimos os operadores escada associados

$$\begin{aligned}\hat{b} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{m|\omega_{\rm t}|}}{2}(-\varsigma\hat{x}-{\rm i}\hat{y})+\frac{(-{\rm i}\varsigma\hat{p}_x+\hat{p}_y)}{\sqrt{m|\omega_{\rm t}|}}\right] ,\\ \hat{b}^{\dagger} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{m|\omega_{\rm t}|}}{2}(-\varsigma\hat{x}+{\rm i}\hat{y})+\frac{({\rm i}\varsigma\hat{p}_x+\hat{p}_y)}{\sqrt{m|\omega_{\rm t}|}}\right] ,\end{aligned} \tag{4.58}$$

com $[\hat{b},\hat{b}^{\dagger}]=1$. O operador momentum angular pode ser escrito como

$$\hat{L}_z^{\rm (t)} = \hat{a}^{\dagger}a - b^{\dagger}b \;, \tag{4.59}$$

onde dessa forma temos que

$$m_{\ell} = (N-n) \tag{4.60}$$

é o autovalor do operador $\hat{L}_z^{\rm (t)}$, e n é o autovalor de $b^{\dagger}b$. Então, escrevemos o análogo dos níveis de energia degenerados de Landau

$$E_{n,m_{\ell}}^{\rm (t)} = \left[n+m_{\ell}+\frac{1}{2}(1-\varsigma)\right]|\omega_{\rm t}| \;, \tag{4.61}$$

onde m_{ℓ} explicita as degenerecências dos estados.

As autofunções do estado fundamental na representação Cartesiana, $\Psi_{0,0}^{\rm (t)}(x,y) = \langle x,y|0,0\rangle$, podem ser obtidas se considerarmos as seguintes propriedades dos operadores de aniquilação

$$\begin{aligned}\langle x,y|\hat{a}|0,0\rangle &= 0 \;,\\ \langle x,y|\hat{b}|0,0\rangle &= 0 \;.\end{aligned} \tag{4.62}$$

Resolvendo o sistema de equações diferenciais (4.62), obtemos as autofunções normalizadas para o estado fundamental

$$\Psi_{0,0}^{\rm (t)}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ell_{\rm t}}{\rm e}^{-\frac{x^2+y^2}{4\ell_{\rm t}^2}} \;. \tag{4.63}$$

Os estados excitados podem ser calculados com a aplicação dos operadores de criação,

$$\begin{aligned}|N,0\rangle &= (N!)^{-1/2}(\hat{a}^{\dagger})^N|0,0\rangle \;,\\ |N,n\rangle &= (n!)^{-1/2}(\hat{b}^{\dagger})^n|N,0\rangle \;.\end{aligned} \tag{4.64}$$

Visto que $\Psi_{N,n}^{\rm (t)}(x,y) = \langle x,y|N,n\rangle$, escrevemos

$$\Psi_{n,m_{\ell}}^{\rm (t)}(x,y) = \frac{\langle x,y|(\hat{b}^{\dagger})^n(\hat{a}^{\dagger})^{n+m_{\ell}}|0,0\rangle}{\sqrt{(n+m_{\ell})!n!}} \;, \tag{4.65}$$

que é um conjunto de autofunções associadas aos autovalores de energia $E_N^{(t)} = [N + \frac{1}{2}(1 - \varsigma)]|\omega_t|$.

Caso *space-like*

Da mesma forma, considerando apenas os termos *space-like* na Hamiltoniana (4.49) e escolhendo uma direção preferencial no espaço tempo $\vec{v} = v_3\vec{n}$, onde $\vec{n}$ é um vetor unitário, temos a Hamiltoniana para esse caso

$$H = \frac{1}{2m}\left[\vec{p} - gv_3\vec{n}\times\vec{E}\right]^2 + \frac{g}{2m}\vec{k}\cdot\left[\vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{E})\right] . \tag{4.66}$$

De maneira análoga ao caso anterior, adaptamos as condições para a existência da quantização análoga aos níveis de Landau para o caso *space-like*. As condições para torque nulo, campos estáticos e campo magnético efetivo $\vec{B}_{\text{eff}}^{(s)} = \vec{\nabla}\times\vec{A}^{(s)} = \vec{\nabla}\times\vec{n}\times\vec{E}$ uniforme, são satisfeitas com a escolha da configuração

$$\begin{aligned} \vec{n} &= (0,0,1)\ , \\ \vec{A}^{(s)} &= \vec{n}\times\vec{E} = \frac{\rho_e}{2}(-y,x,0)\ , \end{aligned} \tag{4.67}$$

onde ρ_e é uma densidade de carga elétrica, e com o movimento da partícula restrito ao plano x-y. Então, escrevemos a Hamiltoniana (4.66) na forma

$$H^{(s)} = \frac{1}{2m}\left[\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \left(\frac{m|\omega_s|}{2}\right)^2(\hat{x}^2+\hat{y}^2)\right] - \frac{\varsigma|\omega_s|}{2}(\hat{L}_z^{(s)} - 1)\ , \tag{4.68}$$

onde

$$\omega_s = \varsigma|\omega_s| = \frac{\varsigma|gv_3\rho_e|}{m} \tag{4.69}$$

é a frequência ciclotrônica, e

$$\hat{L}_z^{(s)} = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x \tag{4.70}$$

é o operador momentum angular. Aqui o comprimento fundamental é $\ell_s = |gv_1\rho_e|^{-1/2}$. Nesse caso, as coordenadas da posição e do momentum obedecem as relações de comutação

(4.54), assim podemos construir os operadores escada e operadores escada associados

$$\begin{aligned}
\hat{a} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{m|\omega_{\rm s}|}}{2}(\varsigma\hat{x}+{\rm i}\hat{y})+\frac{({\rm i}\varsigma\hat{p}_x-\hat{p}_y)}{\sqrt{m|\omega_{\rm s}|}}\right] , \\
\hat{a}^{\dagger} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{m|\omega_{\rm s}|}}{2}(\varsigma\hat{x}-{\rm i}\hat{y})+\frac{(-{\rm i}\varsigma\hat{p}_x-\hat{p}_y)}{\sqrt{m|\omega_{\rm s}|}}\right] , \\
\hat{b} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{m|\omega_{\rm s}|}}{2}(\varsigma\hat{x}-{\rm i}\hat{y})+\frac{({\rm i}\varsigma\hat{p}_x+\hat{p}_y)}{\sqrt{m|\omega_{\rm s}|}}\right] , \\
\hat{b}^{\dagger} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{m|\omega_{\rm s}|}}{2}(\varsigma\hat{x}+{\rm i}\hat{y})+\frac{(-{\rm i}\varsigma\hat{p}_x+\hat{p}_y)}{\sqrt{m|\omega_{\rm s}|}}\right] ,
\end{aligned} \tag{4.71}$$

que obedecem as relações de comutação $[\hat{a},\hat{a}^{\dagger}] = 1$, $[\hat{b},\hat{b}^{\dagger}] = 1$. Então escrevemos a Hamiltoniana (4.68) na forma compacta

$$\hat{H}^{(\rm s)} = |\omega_{\rm s}|\left[\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+\frac{1}{2}(1+\varsigma)\right] , \tag{4.72}$$

e o operador momentum angula como

$$\hat{L}_z^{(\rm s)} = \hat{b}^{\dagger}\hat{b}-\hat{a}^{\dagger}\hat{a} . \tag{4.73}$$

Assim obtemos o espectro de energia na forma

$$E_N^{(\rm s)} = \left[N+\frac{1}{2}(1+\varsigma)\right]|\omega_{\rm s}| , \tag{4.74}$$

e o espectro do momentum angular

$$m_\ell = n - N . \tag{4.75}$$

Então, como $N = n - m_\ell$, escrevemos explicitamente as degenerecências dos níveis de energia

$$E_{n,m_\ell}^{(\rm s)} = \left[n-m_\ell+\frac{1}{2}(1+\varsigma)\right]|\omega_{\rm s}| . \tag{4.76}$$

As autofunções do estado fundamental podem ser calculadas, da mesma forma que no caso *time-like*, usando as propriedade dos operadores de aniquilação

$$\begin{aligned}
\langle x,y|\hat{a}|0,0\rangle &= 0 , \\
\langle x,y|\hat{b}|0,0\rangle &= 0 .
\end{aligned} \tag{4.77}$$

Resolvendo o sistema de equações diferenciais, encontramos as autofunções normalizadas para o estado fundamental no caso *space-like*

$$\Psi^{(\mathrm{s})}_{0,0}(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ell_{\mathrm{s}}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{4\ell_{\mathrm{s}}^2}}\ , \tag{4.78}$$

e usando as propriedades dos operadores de criação

$$\begin{aligned}|N,0\rangle &= (N!)^{-1/2}(\hat{a}^\dagger)^N|0,0\rangle\ ,\\ |N,n\rangle &= (n!)^{-1/2}(\hat{b}^\dagger)^n|N,0\rangle\ ,\end{aligned} \tag{4.79}$$

encontramos os estados excitados

$$\Psi^{(\mathrm{s})}_{n,m_\ell}(x,y)=\frac{\langle x,y|(\hat{b}^\dagger)^n(\hat{a}^\dagger)^{n+m_\ell}|0,0\rangle}{\sqrt{(n+m_\ell)!n!}}\ , \tag{4.80}$$

que é um conjunto de autoestados associados aos níveis de energia $E^{(\mathrm{s})}_N=[N+\frac{1}{2}(1+\varsigma)]|\omega_{\mathrm{s}}|$.

Como relatado anteriormente, um dos nossos interesses é tentar caracterizar propriedades físicas do *background* que viola as simetrias de Lorentz. Nesse sentido, podemos entender a constante de acoplamento *time-like* gv_0 como uma espécie de "carga" gerada pela presença do *background*. Então, identificando $q=gv_0$, onde q é uma carga elétrica pontual, encontramos um comportamento físico dual aos níveis de Landau original [13] onde uma partícula carregada apresenta níveis de energia quantizados ao mover-se na presença de um campo magnético homogêneo. No caso *space-like*, podemos identificar a constante de acoplamento gv_3 com uma polarização magnética induzida pela presença do *background*. Assim, identificando $\mu=gv_3$, temos um sistema dual aos níveis de Landau–Aharonov–Casher [19, 20] onde uma partícula neutra, que possui momento de dipolo magnético, se move na presença de um campo elétrico externo e apresenta um espectro de energia quantizado.

4.4.3 Comentário sobre mecânica quântica supersimétrica

Mudando totalmente o foco de nossa discussão, aqui fazemos um breve comentário que visa esclarecer uma certa questão. A dependência dos níveis de energia na direção de rotação ciclotrônica pode ser entendida em termos de supersimetria [92]. Sugerimos que o rótulo $\varsigma=\pm$ seja o autovalor de um certo operador $\hat{\tau}$ e introduzimos a supercarga

$$\hat{Q}=\hat{a}\hat{f}^\dagger\ ,\quad \hat{Q}^\dagger=\hat{f}\hat{a}^\dagger\ , \tag{4.81}$$

onde $\hat{f}$ e $\hat{f}^\dagger$ são os operadores de aniquilação e criação fermiônicos, e $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ são os operadores de aniquilação criação bosônicos. Então, $\hat{Q}$ cria um fermion e destroi um boson, e $\hat{Q}^\dagger$ faz a operação inversa. No caso *time-like*, os operadores escada fermiônicos obedecem as relações

$$[\hat{f},\hat{f}^\dagger]=\hat{\tau}\ ,\quad \{\hat{f},\hat{f}^\dagger\}=1\ ,\quad \hat{f}\hat{f}=\hat{f}^\dagger\hat{f}^\dagger=0\ . \tag{4.82}$$

Dessa forma, podemos reescrever a Hamiltoniana (4.56) como

$$\hat{H}^{(\mathrm{t})}=|\omega_{\mathrm{t}}|\left(\hat{Q}\hat{Q}^\dagger+\hat{Q}^\dagger\hat{Q}\right)=|\omega_{\mathrm{t}}|\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{f}^\dagger\hat{f}\right)\ . \tag{4.83}$$

Portanto, definimos os operadores número bosônico e fermiônico como $\hat{a}^\dagger a$ e $\hat{f}^\dagger\hat{f}=\frac{1}{2}(1-\hat{\tau})$, e obtemos os respectivos autovalores $N_{\mathrm{B}}=N$ e $N_{\mathrm{F}}=\frac{1}{2}(1-\varsigma)$. De maneira semelhante, no caso *space-like* definimos os operadores escada fermiônicos que satisfazem as relações

$$[\hat{f},\hat{f}^\dagger]=-\hat{\tau}\ ,\quad \{\hat{f}\ ,\hat{f}^\dagger\}=1,\quad \hat{f}\hat{f}=\hat{f}^\dagger\hat{f}^\dagger=0\ , \tag{4.84}$$

onde novamente $\varsigma=\pm$ é o autovalor do operador $\hat{\tau}$. Da mesma forma, podemos reescrever a Hamiltoniana do caso *space-like* em termo dos operadores número bosônico e fermiônico definidos respectivamente por $\hat{a}^\dagger a$ e $\hat{f}^\dagger\hat{f}=\frac{1}{2}(1-\hat{\tau})$, com seus respectivos autovalores $N_{\mathrm{B}}=N$ e $N_{\mathrm{F}}=\frac{1}{2}(1+\varsigma)$.

4.5 Sumário e observações

Investigamos a possibilidade da violação das simetrias de Lorentz em termos da extensão do modelo padrão. Estudamos alguns sistemas onde uma partícula neutra de spin meio se move na presença de um *background* eletromagnético que viola as simetrias de Lorentz, controlado por um 4-vetor constante. O parâmetro de quebra das simetrias de Lorentz pode ser entendido como um agente que quebra a isotropia do vácuo, em outras palavras, pode ser visto como um tipo de "éter".

Nesse sentido, estudamos o movimento quântico não-relativístico de uma partícula neutra na presença de um campo eletromagnético e de um *background* de natureza eletromagnética que viola as simetrias de Lorentz. Demonstramos que o parâmetro que controla a violação das simetrias de Lorentz modifica os efeitos de fase geométrica. O efeito Aharonov–Casher foi investigado nesse modelo, e demonstramos que a presença do *background* contribui para aumentar magnitude do dipolo magnético, ou simplesmente induzir uma polarização na partícula. O efeito He–Mckellar–Wilkens também foi investigado nesse contexto, e demonstramos o surgimento de uma densidade corrente elétrica estacionária que contribui para a fase.

Impondo algumas condições para configuração dos campos, obtemos um espectro de energia quantizado para os casos *space-like* e *time-like*, de maneira similar a quantização de Landau para partículas carregadas na presença de um campo magnético homogêneo [13]. Para tentar caracterizar a natureza física do *background*, supomos que ele polariza a partícula neutra; e assim, em um experimento hipotético, poderiamos mensurar o *background* analisando mudanças na polarização das partículas.

5 Mecânica quântica não-comutativa

5.1 Introdução

O estudo de teorias no espaço não-comutativo, motivado pela teoria de cordas [43, 44], tem atraido muito interesse em diversas áreas da física [93], como um outro mecanismo para a quebra da invariância de Lorentz. A teoria de campos não-comutativa está relacionada a *M-theory* [94], gravitação quântica [95], e efeito Hall quântico [96, 97, 98]. Em mecânica quântica, um grande número de problemas têm sido investigados no espaço não-comutativo [99]. Alguns resultados importantes estão relacionados à fases geométricas, *e.g.* o efeito Aharonov–Bohm [100, 101, 102, 103], o efeito Aharonov–Casher [89, 104], a fase de Berry quântica [105, 106], os níveis de Landau [107, 108, 109], e outros que envolvem dinâmica de dipolos [110].

Define-se o espaço-tempo não-comutativo substituindo-se as coordenadas x^i do espaço-tempo por operadores Hermitianos (denotados $\hat{x}^i$) que obedecem as seguintes relações de comutação

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = \mathrm{i}\theta^{ij} , \tag{5.1}$$

onde θ^{ij} é um tensor antissimétrico que pode ser constante, uma função somente das coordenadas da posição $\hat{x}^i$, ou uma função tanto das coordenadas da posição $\hat{x}^i$ quanto do momentum $\hat{p}^i$. No primeiro caso, os operadores $\hat{x}^i$ definem essencialmente uma álgebra de Heisenberg. Essa idéia não é nova, remonta aos anos de 1930 e é atribuída ao próprio Heisenberg. A primeira realização fenomenológica dessa idéia foi realizada por Peierls, que a aplicou a sistemas eletrônicos não-relativísticos na presença de campos magnéticos externos; o que ficou conhecido como substituição de Peierls [111]. Porém, o primeiro artigo com uma análise sistemática do assunto só veio com Snyder em 1947 [112].

Um *toy model* dessa realização vem de fazer θ^{ij}, na relação de comutação (5.1), uma constante real. Nesse caso θ^{ij} exerce um papel completamente análogo ao da constante de Planck[1] $\hbar$ na relação de comutação do espaço de fase quântico $[\hat{x}^i, \hat{p}^j] = \mathrm{i}\hbar\delta^{ij}$. Em particular, existe uma relação de incerteza no espaço-tempo

$$\Delta x^i \Delta x^j \geq \frac{1}{2}|\theta^{ij}| \;, \tag{5.2}$$

o que implica que $|\theta^{ij}|$ é a medida da menor porção de área observável no plano-ij. Isto nos dá um limite para a resolução na qual se pode investigar o espaço tempo, e então temos uma compreensão da estrutura de curta-distância do espaço-tempo. O espaço-tempo torna-se "confuso" em pequenas distâncias, e não existe mais qualquer noção definida de ponto.

5.2 Campos magnéticos intensos

Nesta seção descrevemos como noções fundamentais de teoria de campos não-comutativa surgem de um dos problemas mais simples em física, conhecido como a mecânica quântica do movimento em duas dimensões de uma partícula carregada, sob a influência de uma campo magnético constante, aplicado perpendicularmente ao plano do movimento. Denotamos a posição e a velocidade da partícula por

$$\vec{r} = (x, y) \;, \qquad \vec{v} = \dot{\vec{r}} \,, \tag{5.3}$$

e o campo magnético externo constante por $\vec{B} = B_0(0, 0, 1)$. Consideremos então o *gauge* onde o potencial vetor correspondente é escrito na forma

$$\vec{A}(\vec{r}) = B_0(0, x) \;, \tag{5.4}$$

onde $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. A Lagrangiana que governa esse movimento é dada por

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + e\vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}) - V(\vec{r}) \;, \tag{5.5}$$

onde e é a carga e V é a auto-energia da partícula devido sua interação com uma impureza que é introduzida dentro do sistema. Fazemos a quantização canônica desse sistema de maneira usual, como visto no capítulo 3, e obtemos o Hamiltoniano

$$H = \frac{\vec{\Pi}^2}{2m} + V(\vec{r}) \;, \tag{5.6}$$

onde $\vec{\Pi} = m\vec{v} = \vec{p} - e\vec{A}(\vec{r})$ é o momento cinemático invariante de *gauge*, enquanto $\vec{p}$ é o momentum canônico. Na ausência de interações, $V = 0$, os auto-valores de energia do

[1]Devemos lembrar que por convenção fazemos $\hbar = c = 1$ em toda extensão deste texto.

Hamiltoniano (5.6) são os níveis de Landau

$$\mathcal{E} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega \ , \quad n = 0, 1, 2, \dots \ , \tag{5.7}$$

onde

$$\omega = \frac{eB_0}{m} \tag{5.8}$$

é a freqüência ciclotrônica das órbitas clássicas da partícula carregada na presença do campo magnético. O espaçamento entre os níveis de Landau é constante e dado por

$$\Delta = \frac{1}{2}\omega \ . \tag{5.9}$$

Para ver como o espaço de coordenadas não-comutativo surge, consideramos o limite de campo intenso $B_0 \to \infty$, *i.e.* o regime energético onde $B_0 \gg m$, ou de maneira equivalente podemos tomar o limite de massa pequena da partícula $m \to 0$. Nesse limite a Lagrangiana (5.5) se reduz a

$$L \stackrel{m\to 0}{\longrightarrow} L_0 = eB_0 x\dot{y} - V(x, y) \ . \tag{5.10}$$

A Lagrangiana (5.10) acima é da forma $p\dot{q} - H(p, q)$, então as coordenadas $(eB_0 x, y)$ formam um par canônico e temos a seguinte relação de comutação

$$[x, y] = \frac{\mathrm{i}}{eB_0} \ . \tag{5.11}$$

Essa relação também pode ser obtida formalmente a partir da relação de comutação $[\Pi_x, \Pi_y] = \mathrm{i}eB_0$, tomando o limite $B_0 \to \infty$, com a escolha do *gauge* simétrico $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2}B_0(-y, x)$.

Examinemos então o significado preciso do limite tomado acima. Visto que a freqüência ciclotrônica (5.8) diverge no limite $B_0 \to \infty$ (ou $m \to 0$), o espaçamento (5.9) entre os níveis de Landau torna-se infinito e o nível $n = 0$ mais baixo desacopla-se de todos os demais. Então o limite de campo intenso projeta o sistema quântico sobre o nível de Landau mais baixo. Esse limite é de fato um redutor do espaço de fase. Visto que a Lagrangiana reduzida (5.10) é de primeira ordem na derivada temporal, o que efetivamente torna o espaço de coordenadas em um espaço de fase. Em outras palavras, o espaço de fase quadri-dimensional original degenera-se no espaço de configuração bi-dimensional. Portanto, podemos concluir que coordenadas não-comutativas surgem em sistemas eletrônicos forçados a permanecer no nível de Landau mais baixo.

Podemos escrever a relação de comutação (5.11) na forma (5.1) introduzida na seção anterior como

$$\left[x^i, x^j\right] = \mathrm{i}\theta^{ij} \ , \tag{5.12}$$

onde os parâmetros θ^{ij} da não-comutatividade são dados por

$$\theta^{ij} = \frac{1}{eB_0}\epsilon^{ij} \ , \tag{5.13}$$

onde ϵ^{ij} é o tensor antisimétrico. O presente contexto é de fato o mesmo em que a substituição de Peierls foi originalmente realizada em 1933 [111]. Se introduzirmos uma impureza, descrita por uma função potencial V, em um sistema eletrônico como em (5.10), então podemos calcular o *shift* de energia em primeira ordem em teoria de perturbação, devido a impureza, do nível de Landau mais baixo tomando as componentes da posição $\vec{r} = (x, y)$ em $V(\vec{r})$ como variáveis não-comutativas.

5.3 Mecânica quântica não-comutativa e o produto-$\star$

Nesta seção, discutiremos algumas conseqüências da não-comutatividade das coordenadas no contexto da mecânica quântica não-relativística. A idéia aqui é mapear espaço não-comutativo no espaço comutativo usual, alterando a regra de multiplicação desse espaço. Um espaço não-comutativo possui a seguinte estrutura de coordenadas:

$$\begin{aligned} [\hat{x}^i, \hat{x}^j] &= \mathrm{i}\theta^{ij} \ , \\ [\hat{p}^i, \hat{p}^j] &= 0 \ , \\ [\hat{x}^i, \hat{p}^j] &= \mathrm{i}\delta^{ij} \ , \end{aligned} \tag{5.14}$$

como mencionado anteriormente na introdução, onde $\hat{x}$ e $\hat{y}$ são operadores[2]. Entretanto, muitas vezes é preferível trabalhar com o espaço comutativo usual com os efeitos da não-comutatividade implícitos nos cálculos. Felizmente, existe uma maneira muito simples de se realizar isso. Tudo o que precisamos fazer é redefinir a lei de multiplicação das funções das coordenadas do espaço adequadamente. A operação que usaremos é conhecida como produto-$\star$ (*star* ou Moyal), e é definida de acordo com seguinte a expressão:

$$f(\hat{x})g(\hat{y}) \ \longrightarrow \ (f \star g)(x) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\theta^{ij}\partial_{y^i}\partial_{z^j}\right) f(y^i)g(z^j)\Big|_{y^i=z^j=x} \ . \tag{5.15}$$

onde f e g são funções das coordenadas e $\theta^{ij} = \theta\epsilon^{ij}$ é uma matriz antissimétrica invertível. Com respeito a esse produto, um cálculo elementar mostra que as coordenadas do espaço

[2]As coordenadas x^i e p^i continuam obedecendo as relações de comutação $[x^i, x^j] = [p^i, p^j] = 0$ e $[x^i, p^j] = \mathrm{i}\delta^{ij}$

x^i obedecem a relação de comutação (5.14),

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = [x^i, x^j]_\star = x^i \star x^j - x^j \star x^i = \mathrm{i}\theta^{ij} \ . \tag{5.16}$$

Essa relação serve apenas mostrar que o produto-$\star$ é correto, e motivar seu uso nesse formalismo. Para uma derivação do produto Moyal, induzida a partir das relações de comutação (5.14), ver por exemplo a referência [113].

5.3.1 Espaço não-comutativo

Mudando um pouco o enfoque, discutiremos como tratar sistemas de mecânica quântica no espaço não-comutativo. Em mecânica quântica, diversos problemas têm sido investigados no espaço não-comutativo; como por exemplo, resultados relacionados a fases geométricas [100, 101, 102, 114, 103, 104, 89] e outros que envolvem dinâmica quântica de dipolos [110, 29, 30]. Iniciaremos então com um sistema formado por uma partícula, que se move em um plano não-comutativo, sob a influência de um potencial $V(x)$. A idéia é mapear o espaço não-comutativo em um espaço comutativo usual, substituindo-se o produto ordinário pelo produto-$\star$. Logo, a equação de Schrödinger independente do tempo para esse sistema é escrita na forma

$$\left[\frac{\vec{p}^2}{2m} + V(x)\right] \star \Psi(x) = \mathcal{E}\Psi \ . \tag{5.17}$$

É fácil verificar, a partir da relação (5.15), que o termo que contém $\vec{p}$ não se altera sob a operação produto-$\star$. Entretanto, o termo do potencial V se transforma como segue:

$$V(x) \star \Psi(x) = V(x)\Psi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n \partial_{x^1} \cdots \partial_{x^n} V(x) \theta^{i_1 j_1} \cdots \theta^{i_n j_n} \partial_{x^1} \cdots \partial_{x^n} \Psi(x) \ . \tag{5.18}$$

Agora, escrevemos ∂_{x^j} como $\mathrm{i}p_{j_m} = \frac{\partial}{\partial x^{j^m}}$, e tomamos a transformada de Fourier de $V(x)$, então temos que

$$\partial_{x^1} \cdots \partial_{x^n} V(x) \theta^{i_1 j_1} p_{j_1} \cdots \theta^{i_n j_n} p_{j_n} \Psi(x) = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} V(k) (\mathrm{i}\theta^{ij} p_j k)^n \Psi(x) \, \mathrm{d}k \ . \tag{5.19}$$

Somando sobre n em (5.18) obtemos que

$$V(x) \star \Psi(x) = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\theta^{ij} p_j k} V(k) \Psi(x) \, \mathrm{d}k \ . \tag{5.20}$$

Agora usando a relação de comutação $[p_i, x_j] = -\mathrm{i}\delta_{ij}$, obtemos que

$$V(x^i) \star \Psi(x^i) = V\left(x^i - \frac{1}{2}\theta\epsilon^{ij}p_j\right)\Psi(x^i)\ . \tag{5.21}$$

O resultado (5.21) acima nos diz que, em mecânica quântica não-comutativa, o produto-$\star$ pode ser substituído por um *Bopp shifts* [115]; *i.e.* o produto Moyal pode ser substituído pelo produto ordinário apenas com a seguinte mudança de coordenadas

$$x^i \to x^i - \frac{1}{2}\theta\epsilon^{ij}p_j\ . \tag{5.22}$$

Então, podemos mapear um sistema $H(\hat{x}^i, \hat{p}^i)$ no espaço não-comutativo em um $H(x^i, p^i)$ no espaço comutativo usual da seguinte forma

$$H(\hat{x}^i, \hat{p}^i)\ \longrightarrow\ H\left(x^i - \frac{1}{2}\theta\epsilon^{ij}p_j, p^i\right)\ , \tag{5.23}$$

onde x^i e p^i são as coordenadas da posição e do momentum na mecânica quântica usual. Portanto, a relação (5.23) define que o sistema é retratado no espaço comutativo e os efeitos da não-comutatividade podem ser calculados a partir dos termos que contêm o parâmetro θ.

5.3.2 Espaço de fase não-comutativo

Agora, consideremos o caso em que ambas as coordenadas posição-posição e momentum-momentum não comutam. Essa formulação é conhecida como espaço de fase não-comutativo. Podemos citar como exemplo, de sistema quântico que exigem esse tipo de formulação, a estatística de Bose–Einstein na mecânica quântica não-comutativa. Neste caso, os operadores $\hat{x}^i$ e $\hat{p}^i$ obedecem as seguintes relações de comutação

$$\begin{aligned}
[\hat{x}^i, \hat{x}^j] &= \mathrm{i}\theta^{ij}\ ,\\
[\hat{p}^i, \hat{p}^j] &= \mathrm{i}\bar{\theta}^{ij}\ ,\\
[\hat{x}^i, \hat{p}^j] &= \mathrm{i}\delta^{ij}\ ,
\end{aligned} \tag{5.24}$$

onde $\theta^{ij} = \theta\epsilon^{ij}$ e $\bar{\theta}^{ij} = \bar{\theta}\epsilon^{ij}$ são tensores antissimétricos constantes. Aqui, de maneira análoga a do espaço não-comutativo, temos também um *Bopp shifts*

$$H(\hat{x}^i, \hat{p}^i)\ \longrightarrow\ H\left(\lambda x^i - \frac{1}{2\lambda}\theta\epsilon^{ij}p_j, \lambda p^i + \frac{1}{2\lambda}\bar{\theta}\epsilon^{ij}x_j\right)\ , \tag{5.25}$$

onde λ é um fator de escala. Portanto, para mapearmos os espaço de fase não-comutativo no espaço comutativo, fazemos as seguintes substituições:

$$\begin{aligned} \hat{x}^i &\rightarrow \lambda x^i - \frac{1}{2\lambda}\theta\epsilon^{ij}p_j \ , \\ \hat{p}^i &\rightarrow \lambda p^i + \frac{1}{2\lambda}\bar{\theta}\epsilon^{ij}x_j \ . \end{aligned} \tag{5.26}$$

O fator λ está sujeito ao seguinte vínculo [116] para satisfazer as relações de comutação (5.24):

$$\bar{\theta}^{ij}\theta^{ij} = \theta^{ij}\bar{\theta}^{ij} = \theta\bar{\theta}\mathbb{1} = 4\lambda^2(\lambda^2 - 1)\mathbb{1} \ , \tag{5.27}$$

onde $\mathbb{1}$ é a matriz identidade. Se tomarmos os limites $\lambda = 1$ e $\bar{\theta} \rightarrow 0$, recuperamos o caso do espaço não-comutativo. Assim, podemos considerar espaço não-comutativo como um caso particular do espaço de fase não-comutativo.

Nas seções seguintes, faremos algumas aplicações dos conceitos de espaço não-comutativo e espaço de fase não-comutativo em sistemas quânticos como fases geométricas [29] e níveis de Landau [30].

5.4 A fase de Anandan não-comutativa

O estudo de fases geométricas teve início com Aharonov e Bohm, que demonstraram que campos magnéticos alteram o estado da matéria mesmo em regiões onde o campo é nulo, porém com a presença do potencial vetor [2]. Décadas depois, Aharonov e Casher demonstraram que uma partícula neutra, que possui momento de dipolo magnético permanente, ao mover-se na presença de um campo elétrico, acumula uma fase quântica em sua função de onda, mesmo numa região livre de forças externas [5]. He e McKellar [10], e Wilkens [11] de maneira independente, previram a existência de uma fase quântica para o sistema formado por uma partícula neutra, que possui momento de dipolo elétrico permanente, enquanto circula uma linha formada por monopolos magnéticos. Uma proposta simples e prática de um esquema experimental para testar o efeito He–McKellar–Wilkens, sem o inconveniente dos monopolos magnéticos, foi apresentada por Wei *et al.* [26]. Outros dois esquemas experimentais são propostos por Dowling *et al.* [9], bem como uma descrição unificada dos três efeitos acima citados, além da proposta de um novo efeito conhecido como Aharonov–Bohm dual. A fase de Aharonov–Bohm dual pode ser calculada levando-se em consideração a dinâmica quântica de um monopolo magnético na presença de um solenóide elétrico [12].

Um efeito tipo fase geométrica foi proposto por Anandan [58], o qual descreve um tratamento covariante unificado e totalmente relativístico da interação entre uma partícula, que possui ambos momentos de dipolo elétrico e magnético permanentes, e o campo eletromagnético. Esse problema foi investigado, no contexto da mecânica quântica não-relativística, por Anandan [52], e Furtado e de Lima Ribeiro [117].

Nesta seção, analisamos o efeito de fase quântica, proposto por Anandan, para uma partícula neutra permanentemente polarizada, com momentos de dipolo elétrico e magnético, na presença de campos elétricos e magnéticos externos, no espaço não-comutativo e no espaço de fase não-comutativo. Para tal, encontramos o limite não-relativístico dessa teoria, via transformação de Foldy–Wouthuysen [88]. Estudamos também os efeitos Aharonov–Casher e He–McKellar–Wilkens, separadamente, no espaço não-comutativo e espaço de fase não comutativo.

5.4.1 Limite não-relativístico

Agora consideremos a dinâmica quântica relativística de uma partícula neutra de spin-1/2, com momentos de dipolo elétrico e magnético não nulos, que se move na presença de um campo eletromagnético externo. Esse sistema é descrito pela seguinte equação de Dirac

$$\left(\mathrm{i}\gamma_\mu\partial^\mu + \frac{1}{2}\mu\sigma_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{\mathrm{i}}{2}d\sigma_{\alpha\beta}\gamma_5F^{\alpha\beta} - m\right)\Psi = 0 , \tag{5.28}$$

onde μ é a intensidade do momento de dipolo magnético e d a intensidade do momento de dipolo elétrico. O sengundo e o terceiro termo na equação (5.28) acima representam a interação do momento de dipolo magnético e momento de dipolo elétrico, respectivamente, com o campo eletromagnético. Nós usamos as seguintes convenções para o tensor intensidade de campo e matrizes de Dirac [118]

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \{\vec{E},\vec{B}\} , \qquad F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} , \\ F^{i0} &= E^i , \qquad F^{ij} = -\epsilon_{ijk}B^k , \end{aligned} \tag{5.29}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & -B^z & B^y \\ E^y & B^z & 0 & -B^x \\ E^z & -B^y & B^x & 0 \end{bmatrix} , \tag{5.30}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{0i} &= \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma_0\gamma_i - \gamma_i\gamma_0] = \mathrm{i}\gamma_0\gamma_i = -\mathrm{i}\alpha_i \ ,\\ \sigma_{ij} &= \frac{i}{2}[\gamma_i\gamma_j - \gamma_j\gamma_i] = \mathrm{i}\gamma_i\gamma_j = \epsilon_{ijl}\Sigma_l \ ,\end{aligned} \tag{5.31}$$

e por conveniência, escolhemos γ_5 como [119]

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{O} \end{pmatrix} , \tag{5.32}$$

onde $\mathbb{O}$ e $\mathbb{1}$ são as matrizes nula e identidade 2×2, respectivamente. Dessa forma, podemos reescrever a equação (5.28) como segue:

$$\left[\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu + \mu(\mathrm{i}\vec{\alpha}\cdot\vec{E} - \vec{\Sigma}\cdot\vec{B}) - \mathrm{i}d(\mathrm{i}\vec{\alpha}\cdot\vec{E} - \vec{\Sigma}\cdot\vec{B})\gamma_5 - m\right]\Psi = 0 \ , \tag{5.33}$$

com as matrizes de Dirac dadas por

$$\begin{gathered}\hat{\beta} = \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} , \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \sigma^j \\ -\sigma^j & \mathbb{O} \end{pmatrix} , \quad \vec{\alpha} = \hat{\beta}\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & \mathbb{O} \end{pmatrix} ,\\ \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \vec{\sigma} \end{pmatrix} , \quad \vec{\Pi} = \hat{\beta}\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\vec{\sigma} \end{pmatrix} .\end{gathered} \tag{5.34}$$

onde σ^j são as matrizes de Pauli que obedecem as seguintes relações $\sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i = -2g^{ij}$. Então, a equação (5.33) pode ser escrita de maneira mais compacta como segue:

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\Psi = H\Psi = \left[\vec{\pi}\cdot\vec{\alpha} + \mu\,\vec{\Pi}\cdot\vec{B} + d\,\vec{\Pi}\cdot\vec{E} + \hat{\beta}m\right]\Psi \ , \tag{5.35}$$

onde $\vec{\pi} = -\mathrm{i}(\vec{\nabla} + \mu\,\hat{\beta}\vec{E} - d\,\hat{\beta}\vec{B})$.

Agora que escrevemos a Hamiltoniana do sistema de maneira mais conveniente, calcularemos o limite não-relativístico através da transformação de Foldy–Wouthuysen. Esse é um método muito conveniente para descrever a interação de uma partícula relativística com uma campo externo, e para transição para descrição semi-clássica. A representação de Foldy–Wouthuysen promove a melhor opção de transição para o limite clássico da mecânica quântica relativistica [88]. Escrevemos a Hamiltoniana (5.35) na forma

$$\hat{H} = \hat{\beta}(m + \hat{\epsilon}) + \hat{O} \ , \tag{5.36}$$

onde $\hat{\epsilon} = \mu\,\vec{\Pi}\cdot\vec{B} + d\,\vec{\Pi}\cdot\vec{E}$ and $\hat{O} = \vec{\pi}\cdot\vec{\alpha}$ são os termos par e ímpar na Hamiltoniana, que obedecem às relações $\hat{\epsilon}\hat{\beta} = \hat{\beta}\hat{\epsilon}$ e $\hat{O}\hat{\beta} = -\hat{\beta}\hat{O}$. Nosso objetivo é minimizar a parte ímpar, ou até mesmo fazê-la ir para zero. Então, introduzimos a transformação

$$\hat{H}' = e^{\mathrm{i}\hat{S}}(\hat{H} - \mathrm{i}\partial_0)e^{-\mathrm{i}\hat{S}} \ , \tag{5.37}$$

onde $\hat{S}$ é uma matriz Hermitiana. Assim, segue que

$$\hat{H}' = \hat{H} + \mathrm{i}[\hat{S}, \hat{H}] - \frac{1}{2}[\hat{S}, [\hat{S}, \hat{H}]] - \frac{\mathrm{i}}{6}[\hat{S}, [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{H}]]] + \frac{1}{24}[\hat{S}, [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{\beta}m]]] + \ldots .$$

Para partículas não-relativísticas na presença do campo eletromagnético, a transformação de Foldy–Wouthuysen pode ser realizada definindo-se o operador $\hat{S} = -\frac{\mathrm{i}}{2m}\hat{\beta}\hat{O}$, o que nos permite escrever

$$\hat{H}' = \hat{\beta}m + \hat{\epsilon}' + \hat{O}' , \tag{5.38}$$

onde $\hat{O}'$ é da ordem de $\frac{1}{2m}$. Calculamos a transformação de segunda ordem fazendo a escolha $\hat{S}' = -\frac{\mathrm{i}}{2m}\hat{\beta}\hat{O}'$, o que nos leva a

$$\hat{H}'' = \hat{\beta}m + \hat{\epsilon}' + \hat{O}'' , \tag{5.39}$$

onde $\hat{O}''$ é da ordem de $\frac{1}{m^2}$. Agora, a terceira aproximação com $\hat{S}'' = -\frac{\mathrm{i}}{2m}\hat{\beta}\hat{O}''$ anula a parte ímpar da expansão não-relativística. Finalmente, encontramos o resultado usual

$$\hat{H}''' \cong \hat{\beta}m + \hat{\epsilon}' = \hat{\beta}\left(m + \frac{1}{2m}\hat{O}^2 - \frac{1}{8m^3}\hat{O}^4\right) + \hat{\epsilon} - \frac{1}{8m^2}[\hat{O}, [\hat{O}, \hat{\epsilon}]] . \tag{5.40}$$

Depois de substituirmos $\hat{\epsilon}$ e $\hat{O}$ na equação (5.40) acima, considerando apenas os termos até a ordem de $\frac{1}{m}$, obtemos a seguinte Hamiltoniana não-relativística

$$\begin{aligned} \hat{H}''' \approx \hat{\beta}\Bigg[& m - \frac{1}{2m}\left(\vec{\nabla} - \mathrm{i}\mu\hat{\beta}(\vec{\Sigma}\times\vec{E}) + \mathrm{i}d\hat{\beta}(\vec{\Sigma}\times\vec{B})\right)^2 - \frac{\mu^2 E^2}{2m} - \frac{d^2\vec{B}^2}{2m} \\ & -\frac{\mu\hat{\beta}}{2m}\vec{\nabla}\cdot\vec{E} + \frac{d\hat{\beta}}{2m}\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\Bigg] + \mu\vec{\Pi}\cdot\vec{B} + d\vec{\Pi}\cdot\vec{E} . \end{aligned} \tag{5.41}$$

A equação (5.41) acima é a Hamiltoniana não-relativística para férmions de quatro componentes. Entretanto, para diversas aplicações a baixas energias, na mecânica quântica não-relativistica, consideramos apenas o *spinor* de duas componentes. Então, escrevemos (5.41) para férmions de duas componentes na seguinte forma

$$\begin{aligned} \hat{H}''' \approx\ & m - \frac{1}{2m}\left[\vec{\nabla} - \mathrm{i}(\vec{\mu}\times\vec{E}) + \mathrm{i}(\vec{d}\times\vec{B})\right]^2 - \frac{\mu^2 E^2}{2m} - \frac{d^2\vec{B}^2}{2m} \\ & -\frac{\mu}{2m}\vec{\nabla}\cdot\vec{E} + \frac{d}{2m}\vec{\nabla}\cdot\vec{B} + \vec{\mu}\cdot\vec{B} + \vec{d}\cdot\vec{E} , \end{aligned} \tag{5.42}$$

onde $\vec{\mu} = \mu\vec{\sigma}$ e $\vec{d} = d\vec{\sigma}$, e $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$; onde σ_i $(i = 1, 2, 3)$ são as matrizes de Pauli 2×2. A Hamiltoniana (5.42) descreve o sistema formado por uma partícula neutra polarizada de maneira permanente, com momentos de dipolo elétrico e magnético, na presença de campos elétrico e magnético. Diversos efeitos topológicos podem ser investigados nesse contexto variando-se a configuração dipolo-campo [10, 11, 26].

5.4.2 Fases geométricas

Consideremos a dinâmica quântica não-relativística de um sistema de uma partícula descrito pela Hamiltoniana (5.42). Esse sistema pode descrever diversas situações físicas a depender da configuração dipolo-campo; *e.g.* o efeito Aharonov–Casher quando $\mu \neq 0$ e $d = 0$, o efeito He–McKellar–Wilkens quando $\mu = 0$ e $d \neq 0$, e a fase de Anandan no caso geral onde $\mu \neq 0$ e $d \neq 0$. Por conveniência, escolhemos os campos elétrico e magnético, nos quais a partícula está imersa, como sendo radiais em relação a uma linha orientada no eixo z. Para que não existam forças externas atuando na partícula, escolhemos a orientação dos dipolos na direção do eixo z; *i.e.* os dipolos estão orientados perpendicularmente aos campos. Novamente, com a intenção de elucidar algumas características do nosso sistema, reescrevemos a Hamiltoniana (5.42) na forma que segue:

$$H = -\frac{1}{2m}\left(\vec{\nabla} - \mathrm{i}b_i\right)^2 + b_0 \; ; \tag{5.43}$$

aqui, a interação entre a partícula e os campos elétrico e magnético é similar àquela cuja partícula está minimamente acoplada a um campo de *gauge* não-Abeliano, com potencial b_μ dado por

$$\begin{aligned} b_i &= (\vec{\mu} \times \vec{E}) - (\vec{d} \times \vec{B}) \, , \\ b_0 &= -\frac{\mu^2 E^2}{2m} - \frac{d^2 \vec{B}^2}{2m} - \frac{\mu}{2m}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \frac{d}{2m}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} + \vec{\mu} \cdot \vec{B} + \vec{d} \cdot \vec{E} \, . \end{aligned} \tag{5.44}$$

Os dois primeiros termos em b_0 podem ser considerados como potenciais externos, e não contribuem para o estudo de fases geométricas [26]. Devemos observar também, que o potencial b_0 representa uma influência local na função de onda; porém, nosso interesse é o estudo de estados assintóticos. Portanto, não devemos considerar esses termos quadráticos nos campos, pois representam apenas efeitos locais. Outra demonstração de que os termos da ordem de $O(\vec{E}^2)$ e $O(\vec{B}^2)$ podem ser desprezados, para os cálculos de efeitos de fases geométricas, foi realizada por Anandan [52]. Por conveniência, assumimos que o movimento da partícula é restrito ao plano x-y, e que os campos são radiais podendo ser gerados por linhas de cargas elétricas e magnéticas distribuídas ao longo do eixo z.

O ponto principal na discussão sobre fases geométricas é que os termos na parte dinâmica da Hamiltoniana não implicam na ação de nenhuma força sobre a partícula, não gerando assim nenhum efeito no contexto da física clássica. Entretanto, em mecânica quântica esses termos afetam a função de onda da partícula atribuindo a ela uma fase geométrica. Para obter essa fase geométrica, usamos o seguinte *ansatz*

$$\Psi = \Psi_0 \mathrm{e}^{\phi} \,, \tag{5.45}$$

onde Ψ_0 é a solução para equação da partícula livre, e ϕ é a diferença de fase acumulada pela função de onda da partícula, que é definida como uma variação na ação clássica. Realizando o cálculo da fase geométrica para o sistema descrito pela Hamiltoniana (5.43), encontramos

$$\phi = \mathrm{i} \oint [(\vec{\mu} \times \vec{E}) - (\vec{d} \times \vec{B})] \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \,. \tag{5.46}$$

Esse resultado é conhecido como fase de Anandan [58], que é a generalização do efeito Aharonov–Casher para partículas neutras com ambos momentos de dipolo elétrico e magnético. É fácil perceber que o primeiro termo da integral na equação (5.46) é responsável pela fase de Aharonov–Casher, e o segundo termo pela fase de He–McKellar–Wilkens. Podemos recuperar o efeito Aharonov–Casher se considerarmos o caso em que não temos o momento de dipolo elétrico $d = 0$, logo recuperamos o resultado já conhecido

$$\phi_{\mathrm{AC}} = \mathrm{i} \oint (\vec{\mu} \times \vec{E}) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \,. \tag{5.47}$$

Da mesma forma, na ausência de momento de dipolo magnético $\mu = 0$, temos a fase de He–McKellar–Wilkens, com o resultado também conhecido

$$\phi_{\mathrm{HMW}} = -\mathrm{i} \oint (\vec{d} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \,. \tag{5.48}$$

Esses efeitos são usualmente conhecidos como fases topológicas, mas segundo alguns autores [56] o termo mais correto é fase geométrica. No caso comutativo essas fases são não-dispersivas, visto que não dependem explicitamente da velocidade da partícula [120].

5.4.3 Fases geométricas no espaço não-comutativo

Nosso interesse aqui é estudar as conseqüências da não-comutatividade das coordenadas da posição para a fase de Anandan (5.46). Para tal, procederemos de maneira usual, definindo as coordenadas da posição e do momentum como operadores $\hat{x}^i$ e $\hat{p}^i$ que obedecem as relações de comutação (5.14). Nesse contexto, consideraremos a Hamiltoniana composta pelos termos da equação (5.43) que contribuem para o efeito de fase geométrica, conforme discutido anteriormente. Assim, nosso sistema formado por uma partícula neutra, que possui momentos de dipolo elétrico e magnético, na presença de campos elétrico e magnético externos, para o calculo de fase geométrica, é descrito pela Hamiltoniana que segue:

$$H(\hat{x}^i,\hat{p}^i)=\frac{1}{2m}\left[\hat{p}^i-(\vec{\mu}\times\vec{E})(\hat{x}^i)+(\vec{d}\times\vec{B})(\hat{x}^i)\right]^2 \ . \tag{5.49}$$

Podemos mapear o espaço não-comutativo $(\hat{x}^i,\hat{p}^i)$ no espaço comutativo (x^i,p^i), substituindo o produto usual pela operação produto-$\star$ (5.15), onde os efeitos da não-comutatividade das coordenadas podem ser calculados através dos termos que contêm o parâmetro θ^{ij}. Então, escrevemos a equação de Schrödinger independente do tempo na forma

$$H(x^i,p^i)\star\psi=\mathcal{E}\Psi \ , \tag{5.50}$$

onde $\mathcal{E}$ é o autovalor de energia.

Em mecânica quantica não-comutativa, de maneira geral, pode-se substituir o produto-$\star$ (5.15) por um *Bopp shifts* [115]. Logo, escrevemos a equação de Schrödinger na forma

$$H\left(x^i-\frac{1}{2}\theta\epsilon^{ij}p_j,p^i\right)\Psi=\mathcal{E}\Psi \ , \tag{5.51}$$

onde x^i e p^i são as coordenadas da posição e momentum na mecânica quântica usual. Portanto, a equação (5.51) é definida no espaço comutativo usual, com os efeitos devido a não-comutatividade calculados através dos termos que comtêm o parâmetro θ. Note que, em mecânica quântica poderíamos tomar o parâmetro θ como uma pertubação, considerando $\theta\ll 1$; porém, esse não é um dos nossos interesses no momento.

Para o cálculo da fase geométrica não-comutativa, consideremos a equação de Schrödinger para o nosso sistema descrito pela Hamiltoniana (5.49)

$$\frac{1}{2m}\left[\hat{p}^i-(\vec{\mu}\times\vec{E})(\hat{x}^i)+(\vec{d}\times\vec{B})(\hat{x}^i)\right]^2\star\Psi=\mathcal{E}\Psi \ . \tag{5.52}$$

Agora, substituiremos o produto-$\star$ pelo produto usual utilizando um *Bopp shifts* nas coordenadas da posição x^i, *i.e.* faremos a mudança de coordenadas de acordo com a expressão (5.22) discutida anteriormente,

$$x^i\rightarrow x^i-\frac{1}{2}\theta\epsilon^{ij}p_j \ . \tag{5.53}$$

Os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são funções das coordenadas da posição x^i e também se transformam de acordo com a relação (5.22). Assim, os termos que contêm os campos são substituídos como segue:

$$\begin{aligned}(\vec{\mu}\times\vec{E}) \ &\rightarrow \ (\vec{\mu}\times\vec{E})+\frac{\mathrm{i}}{2}\theta^{lm}(\vec{\kappa}-(\vec{\mu}\times\vec{E}))_l\partial_m(\vec{\mu}\times\vec{E}) \ ,\\ (\vec{d}\times\vec{B}) \ &\rightarrow \ (\vec{d}\times\vec{B})+\frac{\mathrm{i}}{2}\theta^{lm}(\vec{\kappa}-(\vec{d}\times\vec{B}))_l\partial_m(\vec{d}\times\vec{B}) \ ,\end{aligned} \tag{5.54}$$

onde κ^i são os autovalores do operador momentum no espaço não-comutativo, e é definido como segue:

$$[p^i - (\vec{\mu}\times\vec{E}) + (\vec{d}\times\vec{B})]\star\Psi = \kappa^i\Psi \ , \tag{5.55}$$

onde $\kappa^i = mv^i$ e v^i é o gradiente oridnário. As relações (5.55) podem ser obtidas na mesma forma através de uma expansão em até primeira ordem em série de Taylor da relação (5.15). Tomemos os caso do dipolo magnético $(\vec{\mu}\times\vec{E})$ como exemplo, aplicando a operação produto-$\star$ temos que

$$\begin{aligned} \Big[(\vec{\mu}\times\vec{E})\star\Psi\Big](x) &= \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\theta^{ij}\partial_{y^i}\partial_{z^j}\right](\vec{\mu}\times\vec{E})(y^i)\Psi(z^j)\Big|_{y=z=x} \\ &\approx (\vec{\mu}\times\vec{E})\Psi + \frac{\mathrm{i}}{2}\theta^{ij}\partial_i(\vec{\mu}\times\vec{E})\partial_j\Psi \ . \end{aligned} \tag{5.56}$$

Da equação (5.55) retiramos a relação

$$\partial_i\Psi = [\kappa - (\vec{\mu}\times\vec{E})]_i\Psi \ , \tag{5.57}$$

que substituída na equação (5.56) nos leva a primeira das relações (5.54). Da mesma forma, podemos obter a relação para o termo do dipolo elétrico.

Com base nas relações (5.54), escrevemos a e equação de Schrödinger (5.52) na forma que segue:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2m}\Big[\vec{\nabla} - \mathrm{i}(\vec{\mu}\times\vec{E}) - \frac{\mathrm{i}}{2}\theta^{lm}(\kappa_l - (\vec{\mu}\times\vec{E})_l)\partial_m(\vec{\mu}\times\vec{E}) + \\ +\mathrm{i}(\vec{d}\times\vec{B}) + \frac{\mathrm{i}}{2}\theta^{lm}(\kappa_l - (\vec{d}\times\vec{B})_l)\partial_m(\vec{d}\times\vec{B})\Big]^2\Psi = \mathcal{E}\Psi \ . \end{aligned} \tag{5.58}$$

Para calcular a fase geométrica no caso não-comutativo, procedemos da maneira usual e usamos o ansatz $\Psi = \Psi_0 e^{\phi}$ como solução da equação (5.58) acima, onde Ψ_0 é a solução para a equação de Schrödinger na ausência de campos e ϕ é a fase geométrica não-comutativa. Explicitemos então a fase de Anandan levando em conta a não-comutatividade das coordenadas espaciais

$$\begin{aligned} \phi &= \mathrm{i}\oint[(\vec{\mu}\times\vec{E}) - (\vec{d}\times\vec{B})]\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \\ &+\frac{\mathrm{i}}{2}\theta^{lm}\oint[(\kappa - (\vec{\mu}\times\vec{E}))_l\partial_m(\vec{\mu}\times\vec{E}) \\ &\qquad -(\kappa - (\vec{d}\times\vec{B}))_l\partial_m(\vec{d}\times\vec{B})]\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \ . \end{aligned} \tag{5.59}$$

A primeira integral da fase (5.59) acima é a fase de Anandan na mecânica quântica comutativa, conforme o resultado (5.46) encontrado anteriormente. Os demais termos são correções devido a não-comutatividade. No espaço comutativo tridimensional, definimos o vetor $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ com $\theta^{ij} = \epsilon^{ijk}\theta_k$. Então, reescrevemos a fase (5.59) na forma

$$\begin{aligned}\phi &= \mathrm{i}\oint[(\vec{\mu}\times\vec{E}) - (\vec{d}\times\vec{B})]\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} + \frac{\mathrm{i}}{2}m\oint\vec{\theta}\cdot[\vec{v}\times\vec{\nabla}(\vec{\mu}\times\vec{E})_i]\,\mathrm{d}\ell \\ &-\frac{\mathrm{i}}{2}m\oint\vec{\theta}\cdot[(\vec{\mu}\times\vec{E})\times\vec{\nabla}(\vec{\mu}\times\vec{E})_i]\,\mathrm{d}\ell - \frac{\mathrm{i}}{2}m\oint\vec{\theta}\cdot[\vec{v}\times\vec{\nabla}(\vec{d}\times\vec{B})_i]\mathrm{d}\ell \\ &+\frac{\mathrm{i}}{2}m\oint\vec{\theta}\cdot[(\vec{d}\times\vec{B})\times\vec{\nabla}(\vec{d}\times\vec{B})_i]\,\mathrm{d}\ell\,. \end{aligned} \tag{5.60}$$

A fase de Anandan não-comutativa na forma (5.60) acima explicita sua dependência na velocidade $\vec{v}$ da partícula. Essa "dispersividade" é introduzida devido aos efeitos da não-comutatividade.

A seguir, analisaremos alguns limites interessantes para a fase de Anandan não comutativa (5.59), *e.g.* o efeito Aharonov–Casher e He–McKellar–Wilkens não-comutativos.

5.4.4 Efeito Aharonov–Casher não-comutativo

Consideremos então o caso, na equação (5.59), no qual a partícula apresenta apenas momento de dipolo magnético $\mu \neq 0$, e $d = 0$. Nesse caso, obtemos a fase de Aharonov–Casher não-comutativa

$$\phi_{\mathrm{AC}} = \mathrm{i}\oint[\vec{\mu}\times\vec{E} + \frac{1}{2}\theta^{lm}(\kappa_l - (\vec{\mu}\times\vec{E})_l)\partial_m(\vec{\mu}\times\vec{E})]\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}\,. \tag{5.61}$$

O primeiro termo da integral (5.61) acima é a fase de Aharonov–Casher usual na mecânica quântica comutativa. O segundo termo da integral é a correção devido a não-comutatividade das coordenadas espaciais. No espaço tri-dimensional comutativo, definimos o vetor $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ com $\theta^{ij} = \epsilon^{ijk}\theta_k$. Então, reescrevemos a fase (5.61) na forma

$$\begin{aligned}\phi_{\mathrm{AC}} &= \mathrm{i}\oint(\vec{\mu}\times\vec{E})\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} + \frac{\mathrm{i}}{2}m\oint\vec{\theta}\cdot[\vec{v}\times\vec{\nabla}(\vec{\mu}\times\vec{E})_i]\mathrm{d}\ell \\ &-\frac{\mathrm{i}}{2}m\oint\vec{\theta}\cdot[(\vec{\mu}\times\vec{E})\times\vec{\nabla}(\vec{\mu}\times\vec{E})_i]\mathrm{d}\ell\,. \end{aligned} \tag{5.62}$$

A fase (5.62) acima é a mesma obtida em [103, 89] no caso relativístico. Note que esta é uma fase geométrica dispersiva, visto que depende da velocidade da partícula [120].

5.4.5 Efeito He–McKellar–Wilkens não-comutativo

Outro efeito interessante é obtido, da equação (5.59), considerando a ausência de dipolo magnético $\mu = 0$, com $d \neq 0$. Esse caso é o efeito He–McKelllar–Wilkens não-comutativo, que escrevemos como segue:

$$\phi_{\mathrm{HMW}} = -\mathrm{i} \oint [(\vec{d} \times \vec{B}) + \frac{1}{2}\theta^{lm}(\kappa_l - (\vec{d} \times \vec{B})_l)\partial_m(\vec{d} \times \vec{B})] \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \,. \tag{5.63}$$

O primeiro termo na integral (5.63) é a fase de He–McKellar–Wilkens usual na mecânica quântica comutativa. O segundo termo na integral é a correção devido a não-comutatividade. Da mesma forma que procedemos no caso da fase Aharonov–Casher não-comutativa, no espaço tri-dimensional comutativo, definimos o vetor $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ com $\theta^{ij} = \epsilon^{ijk}\theta_k$. Reescrevemos a fase (5.63) na forma

$$\begin{aligned} \phi_{\mathrm{HMW}} &= -\mathrm{i} \oint (\vec{d} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} - \frac{\mathrm{i}}{2} m \oint \vec{\theta} \cdot [\vec{v} \times \vec{\nabla}(\vec{d} \times \vec{B})_i] \mathrm{d}\ell \\ &\quad + \frac{\mathrm{i}}{2} m \oint \vec{\theta} \cdot [(\vec{d} \times \vec{B}) \times \vec{\nabla}(\vec{d} \times \vec{B})_i] \mathrm{d}\ell \,. \end{aligned} \tag{5.64}$$

Nessa forma (5.64) explicitamos a dependência da fase de He–McKellar–Wilkens não-comutativa em relação a velocidade da partícula, o que demosntra que a não-comutatividade das coordenadas espaciais torna tal efeito uma fase dispersiva [120].

5.4.6 Fases geométricas no espaço de fase não-comutativo

Neste ponto, discutiremos o problema da fase de Anandan não-comutativa, exposto anteriormente, com o adicional da não-comutatividade dos momenta além das posições. Essa formulação é conhecida espaço de fase não-comutativo. Nesse caso, substituímos as coordenadas da posição x^i e do momentum p^i por operadores Hermitianos $\hat{x}^i$ e $\hat{p}^i$, que obedecem as relações de comutação (5.24) como segue:

$$\begin{aligned} [\hat{x}^i, \hat{x}^j] &= \mathrm{i}\theta^{ij} \,, \\ [\hat{p}^i, \hat{p}^j] &= \mathrm{i}\bar{\theta}^{ij} \,, \\ [\hat{x}^i, \hat{p}^j] &= \mathrm{i}\delta^{ij} \,, \end{aligned} \tag{5.65}$$

onde θ^{ij} e $\bar{\theta}^{ij}$ são matrizes antisimétricas. Então, escrevemos a equação de Schrödinger considerando apenas os termos que geram a fase geométrica

$$-\frac{1}{2m}\left[\nabla - \mathrm{i}(\vec{\mu} \times \vec{E}) + \mathrm{i}(\vec{d} \times \vec{B})\right]^2 \star \Psi = \mathcal{E}\Psi \,. \tag{5.66}$$

No espaço de fase não-comutativo, o produto-$\star$ pode ser substituído por um *Bopp shifts* generalizado [115]. Nesse sentido, em mecânica quântica, podemos mapear o espaço de fase não-comutativo no espaço de fase comutativo usual fazendo a seguinte mudança nas coordenadas

$$\begin{aligned} \hat{x^i} &\rightarrow \lambda x^i - \frac{1}{2\lambda}\theta^{ij}p_j \ , \\ \hat{p^i} &\rightarrow \lambda p^i - \frac{1}{2\lambda}\bar{\theta}^{ij}x_j \ , \end{aligned} \tag{5.67}$$

onde o fator de escala λ é uma parâmetro arbitrário constante. Os campos dependem das coordenadas espaciais e os termos que os contêm também se transformam de acordo com as relações (5.67) acima. Segue então que

$$\begin{aligned} (\vec{\mu}\times\vec{E}) &\rightarrow \lambda(\vec{\mu}\times\vec{E}) + \frac{\mathrm{i}}{2\lambda}\theta^{lm}(\kappa_l - (\vec{\mu}\times\vec{E})_l)\partial_m(\vec{\mu}\times\vec{E}) \ , \\ (\vec{d}\times\vec{B}) &\rightarrow \lambda(\vec{d}\times\vec{B}) + \frac{\mathrm{i}}{2\lambda}\theta^{lm}(\kappa_l - (\vec{d}\times\vec{B})_l)\partial_m(\vec{d}\times\vec{B}) \ . \end{aligned} \tag{5.68}$$

Podemos reescrever a equação de Schrödinger (5.66) na seguinte forma

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2m}\Big[\lambda\vec{\nabla} + \frac{\mathrm{i}}{2\lambda}\bar{\theta}^{ij}x_i - \mathrm{i}\lambda(\vec{\mu}\times\vec{E}) + \frac{1}{2\lambda}\theta^{lm}(\kappa_l - (\vec{\mu}\times\vec{E})_l)\partial_m(\vec{\mu}\times\vec{E}) \\ +\mathrm{i}\lambda(\vec{d}\times\vec{B}) - \frac{1}{2\lambda}\theta^{lm}(\kappa_l - (\vec{d}\times\vec{B})_l)\partial_m(\vec{d}\times\vec{B})\Big]^2\Psi = \mathcal{E}\Psi \ . \end{aligned} \tag{5.69}$$

Redimensionamos a massa da partícula, e reescrevemos a equação (5.69) acima com uma pequena e conveniente mudança, como segue:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2m'}\Big[\vec{\nabla} + \frac{\mathrm{i}}{2\lambda^2}\bar{\theta}^{ij}x_i - \mathrm{i}(\vec{\mu}\times\vec{E}) + \frac{1}{2\lambda^2}\theta^{lm}(\kappa_l - (\vec{\mu}\times\vec{E})_l)\partial_m(\vec{\mu}\times\vec{E}) \\ +\mathrm{i}(\vec{d}\times\vec{B}) - \frac{1}{2\lambda^2}\theta^{lm}(\kappa_l - (\vec{d}\times\vec{B})_l)\partial_m(\vec{d}\times\vec{B})\Big]^2\Psi = \mathcal{E}\Psi \ . \end{aligned} \tag{5.70}$$

onde $m' = m/\lambda$. Da mesma forma que na mecânica quântica comutativa, podemos escrever a solução da equação (5.70) acima na forma

$$\Psi = \Psi_0 \exp(\phi) \ , \tag{5.71}$$

onde Ψ_0 é a solução da equação de Schrödinger para uma partícula de massa m' na ausência de campos externos, e ϕ é a fase geométrica de Anandan no espaço de fase não-comutativo. Encontramos então tal fase, e a escrevemos na forma

$$\begin{aligned} \phi &= \mathrm{i}\oint\Big[\vec{\mu}\times\vec{E} - \frac{1}{2\lambda^2}\theta^{lm}(\kappa_l - (\vec{\mu}\times\vec{E})_l)\partial_m(\vec{\mu}\times\vec{E})\Big]\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \\ &\quad -\mathrm{i}\oint\Big[\vec{d}\times\vec{B} - \frac{1}{2\lambda^2}\theta^{lm}(\kappa_l - (\vec{d}\times\vec{B})_l)\partial_m(\vec{d}\times\vec{B})\Big]\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \\ &\quad -\frac{\mathrm{i}}{2\lambda^2}\oint\bar{\theta}^{ij}x_j\mathrm{d}\ell \ . \end{aligned} \tag{5.72}$$

A expressão (5.72) acima apresenta uma contribuição devido a fase geométrica no espaço comutativo, uma outra devido a correções do espaço não-comutativo, e mais uma devido a correções do espaço de fase não-comutativo. Assim, podemos escrever a expressão acima como

$$\phi = \phi_{\mathrm{A}} + \phi_{\mathrm{ENC}} + \phi_{\mathrm{EFNC}} \,, \tag{5.73}$$

onde ϕ_{A} é a fase de Anandan comutativa (5.46), ϕ_{ENC} é a contribuição devido a não-comutatividade das coordenadas espaciais, conforme a segunda integral da expressão (5.59), e ϕ_{EFNC} é a contribuição devido a não-comutatividade dos momenta. Assim, escrevemos ϕ_{EFNC} na forma

$$\begin{aligned}\phi_{\mathrm{EFNC}} &= -\frac{\mathrm{i}}{2\lambda^2}\oint \bar{\theta}^{ij}x_j \mathrm{d}\ell + \frac{1-\lambda^2}{2\lambda^2}\oint [\theta^{lm}(\kappa_l - (\vec{\mu}\times\vec{E})_l)\partial_m(\vec{\mu}\times\vec{E})]\cdot d\vec{\ell} \\ &\quad -\frac{1-\lambda^2}{2\lambda^2}\oint [\theta^{lm}(\kappa_l - (\vec{d}\times\vec{B})_l)\partial_m(\vec{d}\times\vec{B})]\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}\,. \end{aligned} \tag{5.74}$$

A fase (5.74) acima também depende da velocidade da partícula. O primeiro termo em (5.74) é aparentemente similar ao *spin factor* que aparece na função de partição de uma partícula girante. A conexão entre esse *spin factor* e as fases geométricas foram investigadas por Grundberg *et al.* [121] e Lévay [122]. Essa similaridade com o *spin factor* e suas implicações físicas não são objetos deste trabalho, mas poderão ser tópicos de futuras investigações.

5.5 Níveis de Landau no espaço não-comutativo

Mudando um pouco o foco, estudaremos efeitos análogos aos níveis de Landau para uma partícula neutra, polarizada, na presença de campos elétricos e magnéticos externos, no espaço não-comutativo e espaço de fase não-comutativo.

Um dos *setups* mais simples na física é a mecânica quântica do movimento de uma partícula carregada, em duas dimensões, sob a influência de um campo magnético homogêneo, aplicado perpendicularmente ao plano do movimento [13]. Esse sistema apresenta níveis de energia, conhecidos como níveis de Landau, quantizados no plano perpendicular ao campo magnético. Os níveis de Landau têm um papel fundamental no estudo de diversos problemas em física, *e.g.* o efeito Hall quântico [14], superfícies bi-dimensionais diferentes [15, 57, 16], excitações de anyons em condensados de Bose–Einstein girantes [17, 18], e outros como efeitos análogos usando dipolos [19, 20, 21]. Ericsson e Sjöqvist desenvolveram um análogo da quantização de Landau para partículas neutras na presença de uma campo elétrico externo [19]. A idéia baseia-se no efeito Aharonov–Casher

[5], onde uma partícula neutra pode interagir com um campo elétrico através de um momento de dipolo magnético permanente. Seguindo o mesmo caminho, nós desenvolvemos um análogo dos níveis de Landau para uma partícula neutra, com momento de dipolo elétrico permanente, na presença de um campo magnético gerado por monopolos [20]. Esse modelo é baseado na interação descrita pelo efeito He–McKellar–Wilkens [10, 11], onde uma partícula neutra interage com um campo magnético via momento de dipolo elétrico. Para contornar o inconveniente dos monopolos magnéticos, propusemos o estudo de um análogo da quantização de Landau na dinâmica quântica de uma partícula neutra, com momento de dipolo induzido, na presença de campos magnético e elétrico cruzados [21].

Nosso objetivo aqui é investigar análogos da quantização de Landau para partículas neutras, que possuem momentos de dipolo elétrico e magnético permanentes, na presença de campos magnéticos e elétricos externos, no contexto da mecânica quântica não-comutativa. Calculamos as correções para os níveis de energia devido a não-comutatividade no espaço e no espaço de fase.

5.5.1 Partícula carregada no campo magnético homogêneo

Podemos obter níveis de energia quantizados para uma partícula carregada, com carga $-e$, que se move sobre o plano x-y na presença de um campo magnético homogêneo orientado na direção do eixo z, $\vec{B} = B_0\hat{\mathrm{e}}_z$. Esse sistema é descrito pela Hamiltoniana minimamente acoplada dada por

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2 \ , \tag{5.75}$$

onde $\vec{A}$ é o potencial vetor definido por $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, e $\vec{p}$ é o momento linear definido como $\vec{p} = -\mathrm{i}\nabla$. Escolhemos o *gauge* simétrico dado na forma

$$\vec{A} = \frac{B_0}{2}(-y, x, 0) = \frac{B_0}{2} r\hat{\mathrm{e}}_\phi \ , \tag{5.76}$$

onde, em coordenadas cilíndricas, $r^2 = x^2 + y^2$ e $\hat{e}_\phi$ é um vetor unitário orientado na "direção" ϕ. Então, a partir de (5.75) e (5.76), escrevemos a equação de Schrödinger para o sistema, fazendo uso da simetria cilíndrica do sistema, na forma

$$-\frac{1}{2m}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2}\right] - \frac{\mathrm{i}\omega}{2}\frac{\partial \Psi}{\partial \phi} + \frac{m\omega^2}{8}r^2\Psi = \mathcal{E}\psi \ , \tag{5.77}$$

onde

$$\omega = \frac{eB}{m} \tag{5.78}$$

é a freqüência ciclotrônica das órbitas clássicas da partícula carregada na presença do campo magnético. Resolvendo a equação diferencial (5.77), obtemos os níveis de Landau

$$\mathcal{E} = \left(n + \frac{|\ell| + \ell + 1}{2}\right)\omega\ , \qquad n = 0, 1, 2, \dots\ , \tag{5.79}$$

onde ℓ é um número inteiro relacionado a periodicidade da função de onda, que é escrita na forma

$$\Psi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\phi} R(r)\ , \tag{5.80}$$

e R é a autofunção radial escrita como

$$R_{n,\ell}(r) = \frac{1}{a^{|\ell|+1}} \left[\frac{(|\ell| + n)!}{2^{|\ell|} n! |\ell|!^2}\right] \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4a^2}} r^{|\ell|} F \left[-n, |\ell| + 1, \frac{r^2}{2a^2}\right]\ , \tag{5.81}$$

onde $a = \sqrt{\frac{1}{m\omega}}$ é o comprimento magnético, ou comprimento fundamental. Em (5.81), F é a função hipergeométrica degenerada.

5.5.2 Análogos dos níveis de Landau para dipolos

Consideremos o limite não-relativístico de uma partícula neutral de spin 1/2 com momentos de dipolo elétrico e magnético, na presença de um campo eletromagnético externo [29]. Nesse limite, após desprezarmos os termos da ordem $O(\vec{E}^2)$ e $O(\vec{B}^2)$, o Hamiltoniano de Anandan (5.42) pode ser escrito na forma simplificada

$$H = -\frac{1}{2m} \left[\nabla - \mathrm{i}(\vec{\mu} \times \vec{E}) + \mathrm{i}(\vec{d} \times \vec{B})\right]^2 - \frac{\mu}{2m} \nabla \cdot \vec{E} + \frac{d}{2m} \nabla \cdot \vec{B}\ , \tag{5.82}$$

onde $\vec{\mu}$ e $\vec{d}$ são os momentos de dipolo magnético e elétrico da partícula, e $\vec{B}$ e $\vec{E}$ são os campos magnético e elétrico externos.

Sob certas configurações dipolo-campo, podem-se obter efeitos análogos à quantização de Landau [19]. Nesse sentido, invocamos os efeitos Aharonov–Casher e He–McKellar–Wilkens, nos quais a partícula interage com os campos externos através dos momentos de dipolo. Aqui, separamos o nosso sistema em dois casos distintos; primeiro consideramos o caso Landau–Aharonov–Casher fazendo $d = 0$ e $\mu \neq 0$, e em segundo o caso Landau–He–McKellar–Wilkens onde fazemos $d \neq 0$ e $\mu = 0$ na equação (5.82).

Consideremos a Hamiltoniana (5.82) no caso em que não temos momento de dipolo elétrico, $d = 0$ e $\mu \neq 0$. Segue que

$$H = \frac{1}{2m}\left[\vec{p} - \mu\vec{A}_{\rm AC}\right]^2 - \frac{\mu}{2m}\nabla\cdot\vec{E} \ , \tag{5.83}$$

onde o potencial vetor efetivo é dado por

$$\vec{A}_{\rm AC} = \vec{n}\times\vec{E} \ , \qquad \vec{n} = \frac{\vec{\mu}}{|\vec{\mu}|} \ , \tag{5.84}$$

e $\vec{n}$ é um vetor unitário orientado na direção do dipolo, assim $\vec{\mu} = \mu\vec{n}$. Note, que (5.83) é similar na forma a Hamiltoniana (5.75) de uma partícula carregada na presença de uma campo magnético homogêneo. Podemos definir a intensidade de campo associada como

$$\vec{B}_{\rm AC} = \nabla\times\vec{A}_{\rm AC} \ . \tag{5.85}$$

As condições exatas, para a configuração dipolo-campo, para as quais ocorrem os níveis de Landau–Aharonov–Casher foram demonstradas por Ericsson e Sjöqvist [19]. Essas condições são torque nulo sobre o dipolo, eletrostática $\partial_t\vec{E}$ e $\nabla\times\vec{E}$, e $\vec{B}_{\rm AC}$ uniforme. Fazendo a escolha $\vec{n}$ paralelo ao eixo z, $\vec{n} = \hat{\rm e}_z$, temos as duas primeiras condições satisfeitas se o campo $\vec{E}$ é suave e atua apenas no plano x-y, $E_z = 0$, e o movimento da partícula está restrito ao plano x-y. Assim, a terceira condição resume-se a lei de Gauss $\nabla\cdot\vec{E} = \rho_{\rm e}$ e $\vec{B}_{\rm AC} = \rho_{\rm e}\hat{\rm e}_z$, onde $\rho_{\rm e}$ é uma densidade volumétrica uniforme de carga.

Agora escolhemos uma configuração de campo para o *gauge* simétrico como

$$\vec{E} = \frac{\rho_{\rm e}}{2}r\hat{\rm e}_r \ , \tag{5.86}$$

e obtemos o seguinte potencial vetor

$$\vec{A}_{\rm AC} = \frac{\rho_{\rm e}}{2}r\hat{\rm e}_\phi \ . \tag{5.87}$$

Reescrevemos a Hamiltoniana (5.83), aproveitando a simetria cilíndrica, na forma

$$H = \frac{1}{2m}\left[\vec{p} - \frac{m\omega}{2}r\hat{\rm e}_\phi\right]^2 - \frac{\omega}{2} \ , \tag{5.88}$$

onde

$$\omega = \omega_{\rm AC} = \frac{\mu\rho_{\rm e}}{m} \tag{5.89}$$

é a freqüência ciclotrônica. Portanto, os níveis de Landau–Aharonov–Casher [19, 20] são escritos na forma

$$\mathcal{E} = \left(n + \frac{|\ell| - \ell + 1}{2} - \frac{1}{2}\right)\omega_{\rm AC} \ , \tag{5.90}$$

onde $n = 0, 1, 2, \ldots$. Então, encontramos níveis de energia para uma partícula neutra, magneticamente polarizada, que se move na presença de uma campo elétrico, de maneira similar a uma partícula carregada no campo magnético homogêneo da quantização de Landau.

Agora, procederemos de maneira análoga ao exposto acima, e consideraremos o caso no qual $\mu = 0$ na Hamiltoniana (5.82) para obter um outro efeito análogo aos níveis de Landau. Então, escrevemos a Hamiltoniana para o efeito Landau–He–McKellar–Wilkens como

$$H = \frac{1}{2m}\left[\vec{p} + d\vec{A}_{\text{HMW}}\right]^2 + \frac{d}{2m}\nabla \cdot \vec{B} \; , \tag{5.91}$$

onde definimos

$$\vec{A}_{\text{HMW}} = \vec{n} \times \vec{B} \; , \qquad \vec{n} = \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} \; , \tag{5.92}$$

e $\vec{n}$ é um vetor unitário orientado na direção do dipolo, assim $\vec{d} = d\vec{n}$. Podemos definir a intensidade de campo associada como

$$\vec{B}_{\text{HMW}} = \nabla \times \vec{A}_{\text{HMW}} \; . \tag{5.93}$$

Nesse caso também podemos determinar a configuração na qual o efeito Landau–He–McKellar–Wilkens ocorre. De maneira similar ao caso Landau–Aharonov–Casher, o torque sobre o dipolo deve ser nulo, o campo magnético deve ser estático $\partial_t \vec{B} = 0$, $\vec{B}$ deve ser suave, e $\vec{B}_{\text{HMW}}$ deve ser uniforme. Então, se fizermos $\vec{n} = \hat{e}_z$, $B_z = 0$ e limitarmos o movimento da partícula ao plano x-y, as duas primeiras condições para que ocorra uma quantização análoga aos níveis de Landau são satisfeitas. A terceira condição é satisfeita com a escolha $\nabla \cdot \vec{B} = \rho_{\text{m}}$, onde ρ_{m} é uma densidade volumétrica uniforme de monopolos magnéticos, e $\vec{B}_{\text{HMW}} = \rho_{\text{m}} \hat{e}_z$.

Novamente escolhemos o *gauge* simétrico como

$$\vec{B} = \frac{\rho_{\text{m}}}{2} r \hat{e}_r \; , \tag{5.94}$$

obtemos o potencial vetor efetivo

$$\vec{A}_{\text{HMW}} = \frac{\rho_{\text{m}}}{2} r \hat{e}_\phi \; , \tag{5.95}$$

e reescrevemos (5.91) na forma

$$H = \frac{1}{2m}\left[\vec{p} + \frac{m\omega}{2} r \hat{e}_\phi\right]^2 + \frac{\omega}{2} \; , \tag{5.96}$$

onde

$$\omega = \omega_{\text{HMW}} = \frac{d\rho_{\text{m}}}{m} \tag{5.97}$$

é a freqüência ciclotrônica. Portanto, os níveis de energia de Landau–He–McKellar–Wilkens [20] são escritos na forma

$$\mathcal{E} = \left(n + \frac{|\ell| + \ell - 1}{2} + \frac{1}{2}\right)\omega_{\mathrm{HMW}} \;, \tag{5.98}$$

onde $n = 0, 1, 2, \ldots$. Assim, encontramos níveis de energia para uma partícula neutra, eletricamente polarizada, de maneira análoga à quantização de Landau para partículas carregadas no campo magnético homogêneo.

5.5.3 O dipolo magnético no espaço não-comutativo

Neste ponto, analisamos os níveis de Landau–Aharonov–Casher, conforme exposto anteriormente, do ponto de vista da mecânica quântica não-comutativa. Nesse caso, onde temos a ausência de polarização elétrica, fazemos $d = 0$ em (5.82), para um momento de dipolo magnético na presença de um campo elétrico externo, escrevemos a Hamiltoniana desse sistema na forma

$$H = -\frac{1}{2m}\left[\nabla - \mathrm{i}\mu\vec{A}_{\mathrm{AC}}\right]^2 - \frac{\mu}{2m}\vec{\nabla}\cdot\vec{E} \;, \tag{5.99}$$

onde definimos

$$\vec{A}_{\mathrm{AC}} = \vec{n}\times\vec{E} \;, \qquad \vec{n} = \frac{\vec{\mu}}{|\vec{\mu}|} \;, \tag{5.100}$$

e $\vec{n}$ é um vetor unitário orientado na direção do dipolo.

Para que possamos construir um efeito análogo aos níveis de Landau para o sistema acima descrito, devemos obedecer algumas condições para configuração dipolo-campo [19]. Por simplicidade, escolhemos a orientação do dipolo ao longo do eixo z, $\vec{n} = (0, 0, 1)$, e o campo elétrico no plano x-y como segue:

$$\vec{E} = \frac{\rho_{\mathrm{e}}}{2}(x, y, 0) \;. \tag{5.101}$$

Assim, obtemos o potencial vetor efetivo

$$\vec{A}_{\mathrm{AC}} = \frac{\rho_{\mathrm{e}}}{2}(-y, x, 0) \;. \tag{5.102}$$

Dessa forma, reescrevemos (5.99) explicitando as coordenadas espaciais, como segue:

$$H = \frac{1}{2m}\left[\left(p_x + \frac{\mu\rho_{\mathrm{e}}}{2}y\right)^2 + \left(p_y - \frac{\mu\rho_{\mathrm{e}}}{2}x\right)^2\right] - \frac{\mu\rho_{\mathrm{e}}}{2m} \;. \tag{5.103}$$

Nosso interesse é estudar o problema descrito acima no contexto da mecânica quântica não-comutativa. Para tal, devemos substituir as coordenadas x^i e p^i por operadores hermitianos $\hat{x}^i$ e $\hat{p}^i$ que obedecem as relações de comutação (5.14)

$$\begin{aligned} [\hat{x}^i, \hat{x}^j] &= \mathrm{i}\theta^{ij} , \\ [\hat{p}^i, \hat{p}^j] &= 0 , \\ [\hat{x}^i, \hat{p}^j] &= \mathrm{i}\delta^{ij} . \end{aligned} \tag{5.104}$$

No entanto, podemos mapear o espaço não-comutativo no espaço comutativo substituindo o produto usual pela operação produto-$\star$ definido em (5.15). Porém, em mecânica quântica não-comutativa podemos substituir o produto-$\star$ por um *Bopp shifts* [115]; assim fazemos a seguinte mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x - \frac{\theta}{2}p_y , \\ y &\rightarrow y + \frac{\theta}{2}p_x , \end{aligned} \tag{5.105}$$

e a Hamiltoniana (5.103) toma a forma

$$H = \frac{1}{2m}\left[\left(\left(1+\frac{\mu\rho_{\mathrm{e}}\theta}{4}\right)p_x + \frac{\mu\rho_{\mathrm{e}}}{2}y\right)^2 + \left(\left(1+\frac{\mu\rho_{\mathrm{e}}\theta}{4}\right)p_y - \frac{\mu\rho_{\mathrm{e}}}{2}x\right)^2\right] - \frac{\mu\rho_{\mathrm{e}}}{2m} . \tag{5.106}$$

Então, redefinimos a massa e a freqüência ciclotrônica, e reescrevemos a Hamiltoniana (5.106) acima como segue:

$$H = \frac{1}{2\tilde{m}}\left[\left(p_x + \frac{\tilde{m}\tilde{\omega}}{2}y\right)^2 + \left(p_y - \frac{\tilde{m}\tilde{\omega}}{2}x\right)^2\right] - \frac{\tilde{\omega}}{2}\left(1+\frac{\mu\rho_{\mathrm{e}}\theta}{4}\right)^{-1} , \tag{5.107}$$

onde redefinimos

$$\tilde{m} = \frac{m}{\left(1+\dfrac{\mu\rho_{\mathrm{e}}\theta}{4}\right)^2} , \qquad \tilde{\omega} = \frac{\mu\rho_{\mathrm{e}}}{\tilde{m}\left(1+\dfrac{\mu\rho_{\mathrm{e}}\theta}{4}\right)} . \tag{5.108}$$

Portanto, as contribuições devido a não-comutatividade das coordenadas espaciais modificam a massa e a freqüência ciclotrônica da partícula.

Para calcularmos os níveis de energia e as autofunções, precisamos resolver a equação de Schrödinger $H\Psi = \mathcal{E}\Psi$ relacionada a Hamiltoniana (5.107). Fazemos uso da simetria cilíndrica do problema e reescrevemos a Hamiltoniana (5.107) na forma compacta

$$H = \frac{1}{2\tilde{m}}\left[\vec{p} - \frac{\tilde{m}\tilde{\omega}}{2}r\hat{\mathrm{e}}_\phi\right]^2 - \frac{\tilde{\omega}}{2}\left(1+\frac{\mu\rho_{\mathrm{e}}\theta}{4}\right)^{-1} . \tag{5.109}$$

Lembrando que $\vec{p} = -\mathrm{i}\nabla$, e escrevendo o Laplaciano em coordenadas cilíndricas, a equação de Schrödinger para o sistema (5.109) acima descrito é escrita como segue:

$$-\frac{1}{2\tilde{m}}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2}\right]-\frac{\mathrm{i}\tilde{\omega}}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial\phi}+\frac{\tilde{m}\tilde{\omega}^2}{8}r^2\Psi-\frac{\tilde{\omega}}{2}\left(1+\frac{\mu\rho_{\mathrm{e}}\theta}{4}\right)^{-1}\Psi=\mathcal{E}\Psi\ . \tag{5.110}$$

Analisando as simetrias do sistema (5.110) acima descrito, usamos o seguinte *ansatz* para solução da equação de Schrödinger:

$$\Psi=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\phi}R(r)\ , \tag{5.111}$$

onde ℓ é um número inteiro relacionado a periodicidade da função de onda com relação a ϕ. Então, podemos escrever a equação de Schrödinger radial

$$\frac{1}{2\tilde{m}}\left(R''+\frac{1}{r}R'-\frac{\tilde{m}^2}{r^2}R\right)+\left(\mathcal{E}-\frac{\tilde{m}\tilde{\omega}^2}{8}r^2+\frac{\ell\tilde{\omega}}{2}+\frac{\tilde{\omega}}{2}\left(1+\frac{\mu\rho_{\mathrm{e}}\theta}{4}\right)^{-1}\right)R=0\ , \tag{5.112}$$

e usando a seguinte mudança de variáveis:

$$\xi=\frac{\tilde{m}\tilde{\omega}}{2}r^2\ , \tag{5.113}$$

podemos escrever a equação de Schrödinger radial numa forma mais conveniente

$$\xi R''+R'+\left(-\frac{\xi}{4}+\beta-\frac{\ell^2}{4\xi}\right)R=0\ , \tag{5.114}$$

onde

$$\beta=\frac{\mathcal{E}}{\tilde{\omega}}+\frac{\ell}{2}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{\mu\rho_{\mathrm{e}}\theta}{4}\right)^{-1}\ . \tag{5.115}$$

Tomando os limites assintóticos das soluções da equação (5.114), escrevemos as soluções radiais na forma

$$R(\xi)=\mathrm{e}^{-\xi/2}\xi^{|\ell|/2}\zeta(\xi)\ , \tag{5.116}$$

onde a equação hipergeométrica é satisfeita pela função ζ dada por

$$\zeta=F\left[-\left(\beta-\frac{|\ell|+1}{2}\right),|\ell|+1,\xi\right]\ . \tag{5.117}$$

A condição para que a função ζ, definida pela relação (5.117) acima, seja finita é que o primeiro argumento da hipergeométrica seja um número inteiro não-positivo. Dessa forma, encontramos uma relação para os níveis de energia do efeito Landau–Aharonov–Casher na mecânica quântica não comutativa, conforme segue:

$$\mathcal{E}=\left(n+\frac{|\ell|-\ell+1}{2}\right)\tilde{\omega}-\frac{1}{2}\left(\frac{1+\mu\rho_{\mathrm{e}}\theta}{4}\right)^{-1}\tilde{\omega}\ , \tag{5.118}$$

onde $n = 0, 1, 2, \ldots$. Escrevemos também as autofunções radiais na forma

$$R_{n,\ell}(r) = \frac{1}{\tilde{a}^{|\ell|+1}} \left[\frac{(|\ell| + n)!}{2^{|\ell|} n! |\ell|!^2} \right] \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4\tilde{a}^2}} r^{|\ell|} F \left[-n, |\ell| + 1, \frac{r^2}{2\tilde{a}^2} \right] , \tag{5.119}$$

onde

$$\tilde{a} = \sqrt{\frac{1}{\tilde{m}\tilde{\omega}}} \tag{5.120}$$

é o novo comprimento fundamental, redefinido devido a não-comutatividade das coordenadas espaciais.

Se tomarmos os limite $\theta \to 0$ em (5.118), recuperamos o resultado original em (5.90). É fácil ver que as correções não-comutativas deslocam os níveis de energia e reduzem o comprimento fundamental.

5.5.4 Dipolo magnético no espaço de fase não-comutativo

Neste ponto, analisamos o problema Landau–Aharonov–Casher no espaço de fase não-comutativo, usando o formalismo discutido anteriormente. Podemos mapear o espaço de fase não-comutativo no espaço comutativo usando o seguinte *Bopp shifts*:

$$\begin{aligned} x &\to \lambda x - \frac{\theta}{2\lambda} p_y , \qquad & p_x &\to \lambda p_x + \frac{\bar{\theta}}{2\lambda} y , \\ y &\to \lambda y + \frac{\theta}{2\lambda} p_x , \qquad & p_y &\to \lambda p_y - \frac{\bar{\theta}}{2\lambda} x , \end{aligned} \tag{5.121}$$

onde o fator de escala λ é um parâmetro constante arbitrário. Assim, a Hamiltoniana (5.103) torna-se

$$\begin{aligned} H \;=\; & \frac{1}{2m} \left[\left(\left(\lambda + \frac{\mu\rho_{\mathrm{e}}\theta}{4\lambda} \right) p_x + \frac{1}{2} \left(\mu\rho_{\mathrm{e}}\lambda + \frac{\bar{\theta}}{\lambda} \right) y \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\left(\lambda + \frac{\mu\rho_{\mathrm{e}}\theta}{4\lambda} \right) p_y - \frac{1}{2} \left(\mu\rho_{\mathrm{e}}\lambda + \frac{\bar{\theta}}{\lambda} \right) x \right)^2 \right] - \frac{\mu\rho_{\mathrm{e}}}{2m} . \end{aligned} \tag{5.122}$$

Redefinindo a massa e a freqüência ciclotrônica, reescrevemos

$$\begin{aligned} H \;=\; & \frac{1}{2\tilde{m}} \left[\left(p_x + \frac{\tilde{m}\tilde{\omega}}{2} y \right)^2 + \left(p_y - \frac{\tilde{m}\tilde{\omega}}{2} x \right)^2 \right] \\ & - \frac{\tilde{\omega}}{2\lambda} \left(\lambda + \frac{\mu\rho_{\mathrm{e}}\theta}{4\lambda} \right)^{-1} + \frac{\bar{\theta}}{2\tilde{m}\lambda^2} \left(\lambda + \frac{\mu\rho_{\mathrm{e}}\theta}{4\lambda} \right)^{-2} , \end{aligned} \tag{5.123}$$

onde

$$\tilde{m} = \frac{m}{\left(\lambda + \frac{\mu\rho_{\mathrm{e}}\theta}{4\lambda}\right)^2} , \qquad \tilde{\omega} = \frac{\left(\mu\rho_{\mathrm{e}}\lambda + \frac{\bar{\theta}}{\lambda}\right)}{\tilde{m}\left(\lambda + \frac{\mu\rho_{\mathrm{e}}\theta}{4\lambda}\right)} . \tag{5.124}$$

Aqui redefinimos a massa e a freqüência ciclotrônica em termos dos parâmetros da não-comutatividade, θ e $\bar{\theta}$. Aproveitando a simetria do sistema, escrevemos a Hamiltoniana (5.123) na forma

$$H = \frac{1}{2\tilde{m}}\left[\vec{p} - \frac{\tilde{m}\tilde{\omega}}{2} r\hat{\mathrm{e}}_\phi\right]^2 - \frac{\tilde{\omega}}{2\lambda}\left(\lambda + \frac{\mu\rho_{\mathrm{e}}\theta}{4\lambda}\right)^{-1} + \frac{\bar{\theta}}{2\tilde{m}\lambda^2}\left(\lambda + \frac{\mu\rho_{\mathrm{e}}\theta}{4\lambda}\right)^{-2} . \tag{5.125}$$

A equação de Schrödinger é portanto escrita como

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2\tilde{m}}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2}\right] - \frac{\mathrm{i}\tilde{\omega}}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial\phi} + \frac{\tilde{m}\tilde{\omega}^2}{8}r^2\Psi \\ &-\frac{\tilde{\omega}}{2\lambda}\left(\lambda + \frac{\mu\rho_{\mathrm{e}}\theta}{4\lambda}\right)^{-1}\Psi + \frac{\bar{\theta}}{2\tilde{m}\lambda^2}\left(\lambda + \frac{\mu\rho_{\mathrm{e}}\theta}{4\lambda}\right)^{-2}\Psi = \mathcal{E}\Psi . \end{aligned} \tag{5.126}$$

Novamente usamos o seguinte *ansatz* para solução da equação (5.126) acima:

$$\Psi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\phi}R(r) , \tag{5.127}$$

e escrevemos a equação de Schrödinger radial como

$$\xi R'' + R' + \left(-\frac{\xi}{4} + \beta - \frac{\ell^2}{4\xi}\right)R = 0 , \tag{5.128}$$

onde fazemos a mudança de variáveis

$$\xi = \frac{\tilde{m}\tilde{\omega}}{2}r^2 , \tag{5.129}$$

e definimos

$$\beta = \frac{\mathcal{E}}{\tilde{\omega}} + \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2\lambda}\left(\lambda + \frac{\mu\rho_{\mathrm{e}}\theta}{4\lambda}\right)^{-1} - \frac{\bar{\theta}}{2\tilde{m}\tilde{\omega}\lambda^2}\left(\lambda + \frac{\mu\rho_{\mathrm{e}}\theta}{4\lambda}\right)^{-2} . \tag{5.130}$$

Estudando o limite assintótico das soluções em (5.128), podemos escrever as soluções radiais na forma

$$R(\xi) = \mathrm{e}^{-\xi/2}\xi^{|\ell|/2}\zeta(\xi) . \tag{5.131}$$

Assim a equação hipergeométrica é satisfeita pela função ζ que é dada por

$$\zeta = F\left[-\left(\beta - \frac{|\ell|+1}{2}\right), |\ell+1|, \xi\right] . \tag{5.132}$$

A condição para que a função (5.132) acima seja finita é que o primeiro argumento seja um número inteiro não-positivo. Então, os níveis de energia de Landau–Aharonov–Casher no espaço de fase não-comutativo são dados por

$$\mathcal{E} = \left(n + \frac{|\ell| - \ell + 1}{2}\right)\tilde{\omega} - \frac{1}{2\lambda}\left(\lambda + \frac{\mu\rho_{\mathrm{e}}\theta}{4\lambda}\right)^{-1}\tilde{\omega} + \frac{\bar{\theta}}{2\tilde{m}\lambda^2}\left(\lambda + \frac{\mu\rho_{\mathrm{e}}\theta}{4\lambda}\right)^{-2}, \tag{5.133}$$

onde $n = 1, 2, \ldots$. Devemos notar que, devido a relação (5.27), podemos expressar os níveis de energia (5.133), bem como $\tilde{m}$ e $\tilde{\omega}$, em termos dos parâmetros θ e $\bar{\theta}$. Então, segue que

$$\begin{aligned}\mathcal{E} \ &= \ \left(n + \frac{|\ell| - \ell + 1}{2}\right)\tilde{\omega} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + \theta\bar{\theta}} + \frac{\mu\rho_{\mathrm{e}}\theta}{4}\right)^{-1}\tilde{\omega} \\ &\quad + \frac{\bar{\theta}}{2\tilde{m}}\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + \theta\bar{\theta}} + \frac{\mu\rho_{\mathrm{e}}\theta}{4}\right)^{-2}, \end{aligned} \tag{5.134}$$

visto que $\lambda^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + \theta\bar{\theta}}$.

As autofunções radiais são escritas na forma

$$R_{n,\ell}(r) = \frac{1}{\tilde{a}^{|\ell|+1}}\left[\frac{(|\ell| + n)!}{2^{|\ell|}n!|\ell|!^2}\right]\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4\tilde{a}^2}} r^{|\ell|} F\left[-n, |\ell| + 1, \frac{r^2}{2\tilde{a}^2}\right], \tag{5.135}$$

onde

$$\tilde{a} = \sqrt{\frac{1}{\tilde{m}\tilde{\omega}}} \tag{5.136}$$

é o comprimento fundamental modificado. É fácil demonstrar que recuperamos o caso do espaço não-comutativo, como caso particular do caso do espaço de fase não-comutativo, tomando $\lambda = 1$ e $\bar{\theta} \to 0$. Também recuperamos o efeito original se fazemos $\lambda = 1$, com ambos os parâmetros da não-comutatividade θ e $\bar{\theta}$ nulos.

5.5.5 O dipolo elétrico no espaço não-comutativo

Aqui procedemos da mesma maneira que no caso dos níveis de Landau para o dipolo magnético, porém aqui fazemos $\mu = 0$ em (5.82), e escrevemos a Hamiltoniana para uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico na presença de um campo magnético externo. Logo, segue que

$$H = -\frac{1}{2m}\left[\nabla + \mathrm{i}d\vec{A}_{\mathrm{HMW}}\right]^2 + \frac{d}{2m}\vec{\nabla} \cdot \vec{B}, \tag{5.137}$$

onde

$$\vec{A}_{\mathrm{HMW}} = \vec{n} \times \vec{B}, \qquad \vec{n} = \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|}, \tag{5.138}$$

e $\vec{n}$ é um vetor unitário orientado na direção do dipolo.

Por simplicidade, escolhemos a orientação do dipolo na direção do eixo z, $\vec{n} = (0,0,1)$, e o campo magnético segundo o *gauge* simétrico

$$\vec{B} = \frac{\rho_{\rm m}}{2}(x, y, 0) \; , \tag{5.139}$$

e obtemos o potencial vetor efetivo

$$\vec{A}_{\rm HMW} = \frac{\rho_{\rm m}}{2}(-y, x, 0) \; , \tag{5.140}$$

onde $\rho_{\rm m}$ é uma densidade de monopolos magnéticos. Com essas escolhas, reescrevemos (5.137) na forma

$$H = \frac{1}{2m}\left[\left(p_x - \frac{d\rho_{\rm m}}{2}y\right)^2 + \left(p_y + \frac{d\rho_{\rm m}}{2}x\right)^2\right] + \frac{d\rho_{\rm m}}{2m} \; . \tag{5.141}$$

Agora, estudaremos o sistema acima descrito no contexto da mecânica quântica não-comutativa. Para tal, podemos mapear o espaço não-comutativo no espaço comutativo via *Bopp shifts*, onde fazemos a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x - \frac{\theta}{2}p_y \; , \\ y &\rightarrow y + \frac{\theta}{2}p_x \; , \end{aligned} \tag{5.142}$$

e a Hamiltoniana (5.141) toma a forma

$$H = \frac{1}{2m}\left[\left(\left(1 + \frac{d\rho_{\rm m}\theta}{4}\right)p_x - \frac{d\rho_{\rm m}}{2}y\right)^2 + \left(\left(1 + \frac{d\rho_{\rm m}\theta}{4}\right)p_y + \frac{d\rho_{\rm m}}{2}x\right)^2\right] + \frac{d\rho_{\rm m}}{2m} \; . \tag{5.143}$$

Redimensionamos a massa e a freqüência ciclotrônica, e obtemos

$$H = \frac{1}{2\tilde{m}}\left[\left(p_x - \frac{\tilde{m}\tilde{\omega}}{2}y\right)^2 + \left(p_y + \frac{\tilde{m}\tilde{\omega}}{2}x\right)^2\right] + \frac{\tilde{\omega}}{2}\left(1 + \frac{d\rho_{\rm m}\theta}{4}\right)^{-1} \; , \tag{5.144}$$

onde redefinimos

$$\tilde{m} = \frac{m}{\left(1 + \frac{d\rho_{\rm m}\theta}{4}\right)^2} \; , \qquad \tilde{\omega} = \frac{d\rho_{\rm m}}{\tilde{m}\left(1 + \frac{d\rho_{\rm m}\theta}{4}\right)} \; . \tag{5.145}$$

Portanto, as contribuições da não-comutatividade modificam a massa e a freqüência ciclotrônica da partícula.

Antes de prosseguir, reescrevemos a Hamiltoniana (5.144) numa forma mais conveniente, aproveitando a simetria do problema. Segue então

$$H = \frac{1}{2\tilde{m}}\left[\vec{p} + \frac{\tilde{m}\tilde{\omega}}{2} r\hat{e}_\phi\right]^2 + \frac{\tilde{\omega}}{2}\left(1 + \frac{d\rho_{\mathrm{m}}\theta}{4}\right)^{-1} . \tag{5.146}$$

Então escrevemos a equação de Schrödinger em coordenadas cilíndricas

$$-\frac{1}{2\tilde{m}}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2}\right] - \frac{\mathrm{i}\tilde{\omega}}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial\phi} + \frac{\tilde{m}\tilde{\omega}^2}{8} r^2\Psi + \frac{\tilde{\omega}}{2}\left(1 + \frac{d\rho_{\mathrm{m}}\theta}{4}\right)^{-1}\Psi = \mathcal{E}\Psi . \tag{5.147}$$

Devido a simetria do problema, usamos o seguinte *ansatz* para solução da equação (5.147):

$$\Psi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\phi} R(r) , \tag{5.148}$$

onde ℓ é um número inteiro relacionado a periodicidade da função de onda. Então escrevemos as equação de Schrödinger radial

$$\frac{1}{2\tilde{m}}\left(R'' + \frac{1}{r}R' - \frac{\tilde{m}^2}{r^2}R\right) + \left(\mathcal{E} - \frac{\tilde{m}\tilde{\omega}^2}{8}r^2 + \frac{\ell\tilde{\omega}}{2} - \frac{\tilde{\omega}}{2}\left(1 + \frac{d\rho_{\mathrm{m}}\theta}{4}\right)^{-1}\right) R = 0 , \tag{5.149}$$

e usando a seguinte mudança de variáveis:

$$\xi = \frac{\tilde{m}\tilde{\omega}}{2} r^2 , \tag{5.150}$$

escrevemos a equação de Schrödinger radial na forma conveniente

$$\xi R'' + R' + \left(-\frac{\xi}{4} + \beta - \frac{\ell^2}{4\xi}\right) R = 0 , \tag{5.151}$$

onde

$$\beta = \frac{\mathcal{E}}{\tilde{\omega}} + \frac{\ell}{2} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{d\rho_{\mathrm{m}}\theta}{4}\right)^{-1} . \tag{5.152}$$

Analisando os limites assintóticos das soluções da equação (5.151), podemos escrever as soluções radiais como

$$R(\xi) = \mathrm{e}^{-\xi/2}\xi^{|\ell|/2}\zeta(\xi) . \tag{5.153}$$

Assim a equação hipergeométrica é satisfeita pela função ζ, escrita na forma

$$\zeta = F\left[-\left(\beta - \frac{|\ell| + 1}{2}\right), |\ell| + 1, \xi\right] . \tag{5.154}$$

A condição para que a função hipergeométrica F seja finita é que o primeiro argumento seja um número inteiro não-positivo. Então, os níveis de energia de Landau–He–McKellar–Wilkens são dados por

$$\mathcal{E} = \left(n + \frac{|\ell| + \ell - 1}{2}\right)\tilde{\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{1 + d\rho_{\mathrm{m}}\theta}{4}\right)^{-1}\tilde{\omega} , \tag{5.155}$$

onde $n = 0, 1, 2, \ldots$. As funções de onda radiais são dadas por

$$R_{n,\ell}(r) = \frac{1}{\tilde{a}^{|\ell|+1}} \left[\frac{(|\ell|+n)!}{2^{|\ell|} n! |\ell|!^2}\right] \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4\tilde{a}^2}} r^{|\ell|} F\left[-n, |\ell|+1, \frac{r^2}{2\tilde{a}^2}\right] , \tag{5.156}$$

onde

$$\tilde{a} = \sqrt{\frac{1}{\tilde{m}\tilde{\omega}}} \tag{5.157}$$

é o comprimento fundamental modificado pelos efeitos da não-comutatividade das coordenadas espaciais.

Fazendo o parâmetro θ se anular em (5.155), recuperamos o resultado original dado em (5.98). É fácil verificar que as correções devido a não-comutatividade deslocam os níveis de energia e reduzem o comprimento fundamental.

5.5.6 Dipolo elétrico no espaço de fase não-comutativo

Consideremos o caso onde as coordenadas dos momenta não-comutam entre si. Podemos mapear o espaço de fase não-comutativo no espaço de fase comutativo usando o seguinte *Bopp shifts*:

$$\begin{aligned} x &\to \lambda x - \frac{\theta}{2\lambda} p_y , \qquad & p_x &\to \lambda p_x + \frac{\bar{\theta}}{2\lambda} y , \\ y &\to \lambda y + \frac{\theta}{2\lambda} p_x , \qquad & p_y &\to \lambda p_y - \frac{\bar{\theta}}{2\lambda} x , \end{aligned} \tag{5.158}$$

onde o fator de escala λ é um parâmetro arbitrário constante. Assim, a Hamiltoniana (5.141) torna-se

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m}\left[\left(\left(\lambda + \frac{d\rho_{\mathrm{m}}\theta}{4\lambda}\right) p_x - \frac{1}{2}\left(d\rho_{\mathrm{m}}\lambda + \frac{\bar{\theta}}{\lambda}\right) y\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\left(\lambda + \frac{d\rho_{\mathrm{m}}\theta}{4\lambda}\right) p_y + \frac{1}{2}\left(d\rho_{\mathrm{m}}\lambda + \frac{\bar{\theta}}{\lambda}\right) x\right)^2\right] - \frac{d\rho_{\mathrm{m}}}{2m} \end{aligned} \tag{5.159}$$

Redefinindo a massa e a freqüência ciclotrônica da partícula, chegamos em

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2\tilde{m}}\left[\left(p_x - \frac{\tilde{m}\tilde{\omega}}{2} y\right)^2 + \left(p_y + \frac{\tilde{m}\tilde{\omega}}{2} x\right)^2\right] \\ &\quad + \frac{\tilde{\omega}}{2\lambda}\left(\lambda + \frac{d\rho_{\mathrm{m}}\theta}{4\lambda}\right)^{-1} - \frac{\bar{\theta}}{2\tilde{m}\lambda^2}\left(\lambda + \frac{d\rho_{\mathrm{m}}\theta}{4\lambda}\right)^{-2} , \end{aligned} \tag{5.160}$$

onde

$$\tilde{m} = \frac{m}{\left(\lambda + \frac{d\rho_{\mathrm{m}}\theta}{4\lambda}\right)^2} \; , \qquad \tilde{\omega} = \frac{\left(d\rho_{\mathrm{m}}\lambda + \frac{\bar{\theta}}{\lambda}\right)}{\tilde{m}\left(\lambda + \frac{d\rho_{\mathrm{m}}\theta}{4\lambda}\right)} \tag{5.161}$$

são a massa e a freqüência ciclotrônica modificadas pela não-comutatividade no espaço de fase.

Fazendo uso a simetria cilíndrica do sistema, reescrevemos a Hamiltoniana (5.160) na forma

$$H = \frac{1}{2\tilde{m}}\left[\vec{p} + \frac{\tilde{m}\tilde{\omega}}{2} r\hat{\mathrm{e}}_\phi\right]^2 + \frac{\tilde{\omega}}{2\lambda}\left(\lambda + \frac{d\rho_{\mathrm{m}}\theta}{4\lambda}\right)^{-1} - \frac{\bar{\theta}}{2\tilde{m}\lambda^2}\left(\lambda + \frac{d\rho_{\mathrm{m}}\theta}{4\lambda}\right)^{-2} . \tag{5.162}$$

A equação de Schrödinger é dada por

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\tilde{m}}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2}\right] - \frac{\mathrm{i}\tilde{\omega}}{2}\frac{\partial \Psi}{\partial \phi} + \frac{\tilde{m}\tilde{\omega}^2}{8} r^2 \Psi \\ + \frac{\tilde{\omega}}{2\lambda}\left(\lambda + \frac{d\rho_{\mathrm{m}}\theta}{4\lambda}\right)^{-1}\Psi - \frac{\bar{\theta}}{2\tilde{m}\lambda^2}\left(\lambda + \frac{d\rho_{\mathrm{m}}\theta}{4\lambda}\right)^{-2}\Psi = \mathcal{E}\Psi \; . \end{aligned} \tag{5.163}$$

Devido a simetria do sistema, usamos o seguinte *ansatz* para a solução da equação (5.163):

$$\Psi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\phi} R(r) \; , \tag{5.164}$$

onde ℓ é um número inteiro relacionado a peridiocidade da função de onda. Escrevemos a equação de Schrödinger radial

$$\xi R'' + R' + \left(-\frac{\xi}{4} + \beta - \frac{\ell^2}{4\xi}\right) R = 0 \; , \tag{5.165}$$

onde fizemos a seguinte mudança de coordenadas:

$$\xi = \frac{\tilde{m}\tilde{\omega}}{2} r^2 \; , \tag{5.166}$$

e definimos

$$\beta = \frac{\mathcal{E}}{\tilde{\omega}} + \frac{\ell}{2} - \frac{1}{2\lambda}\left(\lambda + \frac{d\rho_{\mathrm{m}}\theta}{4\lambda}\right)^{-1} + \frac{\bar{\theta}}{2\tilde{m}\tilde{\omega}\lambda^2}\left(\lambda + \frac{d\rho_{\mathrm{m}}\theta}{4\lambda}\right)^{-2} . \tag{5.167}$$

Estudando os limites assintóticos das soluções da equação (5.165), podemos escrever as soluções radiais na forma

$$R(\xi) = \mathrm{e}^{-\xi/2}\xi^{|\ell|/2}\zeta(\xi) \; . \tag{5.168}$$

Assim, a equação hipergeométrica é satisfeita pela função ζ dada por

$$\zeta = F\left[-\left(\beta - \frac{|\ell|+1}{2}\right), |\ell|+1, \xi\right] . \tag{5.169}$$

A condição para que a função hipergeométrica degenerada acima seja finita é que o primeiro argumento seja um número inteiro não-positivo. Assim encontramos os níveis de energia de Landau–He–McKellar–Wilkens no espaço de fase não comutativo, como segue:

$$\mathcal{E} = \left(n + \frac{|\ell|+\ell-1}{2}\right)\tilde{\omega} + \frac{1}{2\lambda}\left(\lambda + \frac{d\rho_{\mathrm{m}}\theta}{4\lambda}\right)^{-1}\tilde{\omega} - \frac{\bar{\theta}}{2\tilde{m}\lambda^2}\left(\lambda + \frac{d\rho_{\mathrm{m}}\theta}{4\lambda}\right)^{-2} , \tag{5.170}$$

onde $n = 0, 1, 2, \ldots$. Baseados na relação (5.27), podemos expressar os níveis de energia (5.170), bem como $\tilde{m}$ e $\tilde{\omega}$, em termos dos parâmetros θ e $\bar{\theta}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \left(n + \frac{|\ell|+\ell-1}{2}\right)\tilde{\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+\theta\bar{\theta}} + \frac{d\rho_{\mathrm{m}}\theta}{4}\right)^{-1}\tilde{\omega} \\ &\quad - \frac{\bar{\theta}}{2\tilde{m}}\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+\theta\bar{\theta}} + \frac{d\rho_{\mathrm{m}}\theta}{4}\right)^{-2} , \end{aligned} \tag{5.171}$$

visto que $\lambda^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+\theta\bar{\theta}}$.

As autofunções radiais são dadas por

$$R_{n,\ell}(r) = \frac{1}{\tilde{a}^{|\ell|+1}}\left[\frac{(|\ell|+n)!}{2^{|\ell|}n!|\ell|!^2}\right] \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4\tilde{a}^2}} r^{|\ell|} F\left[-n, |\ell|+1, \frac{r^2}{2\tilde{a}^2}\right] , \tag{5.172}$$

onde

$$\tilde{a} = \sqrt{\frac{1}{\tilde{m}\tilde{\omega}}} \tag{5.173}$$

é o comprimento fundamental modificado pela não-comutatividade do espaço de fase. É fácil demonstrar que recuperamos o caso do espaço não-comutativo, como um caso especial do caso do espaço de fase não-comutativo, tomando $\lambda = 1$ e $\bar{\theta} \to 0$. Também recuperamos o efeito original no espaço comutativo tomando $\lambda = 1$ e anulando os parâmetros da não-comutatividade θ e $\bar{\theta}$.

5.6 Sumário e observações

Estudamos a dinâmica quântica não-relativística de uma partícula neutra, que possui momentos de dipolo elétrico e magnético permanentes, na presença de campos magnéticos elétricos externos. Usamos a expansão de Foldy–Wouthuysen para realizar a transição do limite clássico da mecânica quântica relativística para a não-relativística. Nesse limite, investigamos os efeitos Aharonov–Casher e He–McKellar–Wilkens no espaço de coordenadas não-comutativo. Substituímos o produto-$\star$ pelo *Bopp shifts* [115] nos termos que envolvem os campos, e obtemos a fase quântica de Anandan com as devidas correções provenientes da não-comutatividade. Demonstramos que a fase de Anandan não-comutativa é uma fase geométrica dispersiva. Usualmente, a fase geométrica é um efeito local, enquanto a fase topológica é não-local. Peshkin e Lipkin [56] demonstraram que o efeito Aharonov–Bohm [2] é não-local, porque seu valor depende de quantidades físicas numa região fora do trajetória da partícula. Logo esse é um efeito topológico. A fase de Aharonov–Bohm é proporcional ao número de revoluções no caminho fechado ao redor da linha de fluxo. Essa é um invariante topológico, e essa fase depende da topologia e não da distância; logo deve ser não-local. Portanto não há campo magnético junto ao caminho da partícula e nem há mudanças nas quantidades físicas. Porém, observa-se que no caso do efeito Aharonov–Casher [5] existem campos junto ao caminho dos feixes de partículas; assim conclui-se que o efeito Aharonov–Casher é local devido a interações locais, e é não-topológico porque o *phase shift* depende de campos locais junto ao caminho das partículas. Em contraste com a fase topológica, a fase geométrica em geral é um efeito local, pois depende da geometria e da topologia do espaço de parâmetros, mas não depende da topologia do espaço-tempo. Aqui, as fases quânticas não-comutativas dependem dos campos e da velocidade das partículas. Esse fato caracteriza a fase de Anandan não-comutativa como uma fase geométrica devido a sua dependência dos campos, e dispersiva devido sua dependencia da velocidade [120]. O efeito Aharonov–Casher não-comutativo foi encontrado como caso limite de (5.60), e está de acordo com os resultados na literatura [89, 104]. A versão não-comutativa do efeito He–McKellar–Wilkens é obtida, e também é uma fase geométrica dispersiva. Calculamos também a fase de Anandan no espaço de fase não-comutativo, e novamente concluímos que um dos efeitos da não-comutatividade é inserir uma dispersividade na fase geométrica.

Em outro contexto, estudamos efeitos análogos aos níveis de Landau para partículas neutras, que possuem momentos de dipolo elétrico e magnético não-nulos, na presença de campos elétricos e magnéticos externos, no contexto da mecânica quântica não-comutativa. Calculamos as quantizações de Landau–Aharonov–Casher e Landau–He–McKellar–Wilkens para dipolos magnéticos e elétricos, respectivamente. Em ambos os casos, calculamos as correções para os níveis de energia que surgem devido a não-comutatividade das coordenadas do espaço e do espaço de fase. Também calculamos as correções para a massa e para a freqüência ciclotrônica no espaço e espaço de fase não-comutativos, bem como a influencia da não-comutatividade no níveis de energia, nas funções de onda radiais e no comprimento fundamental. Verificamos que no limite $\theta \to 0$, no caso não-comutativo, recuperamos os resultados do caso comutativo. Verificamos também que o caso não-comutativo pode ser entendido como um caso especial do caso do espaço de fase não-comutativo que recuperamos se fizermos $\lambda = 1$ e $\bar{\theta} \rightarrow 0$.

6 *Efeito Hall quântico*

6.1 Introdução

A descoberta do efeito Hall quântico foi um conquista extraordinária na física da matéria condensada. Esse efeito é observado em elétrons bi-dimensionais a temperaturas muito baixas e campos magnéticos intensos. Essa descoberta tem fundamental importância como uma manifestação da mecânica quântica em escalas macroscópicas [123, 124, 125]. A observação experimental básica é que a dissipação tende a zero $\sigma_{xx} \to 0$, e que ocorre a quantização da condutância Hall $\sigma_{xy} = \nu e^2$ de um dispositivo transistor-*like* contendo um gás de elétrons bi-dimensional submetido a um campo magnético intenso. Essa quantização é universal e independe de todos os detalhes microscópicos como o tipo de material semi-condutor, a pureza da amostra, o valor exato do campo magnético, e assim por diante. Como resultado, esse efeito é usado atualmente para manter a resistência elétrica padrão por laboratórios de metrologia ao redor do mundo. Além disso, desde que a velocidade da luz esteja definida, uma medida de e^2 é equivalente a uma medida da constante de estrutura fina que é de fundamental importância para a eletrodinâmica quântica.

No efeito conhecido como efeito Hall quântico inteiro descoberto por von Klitzing em 1980 [123], o número quântico ν é um número inteiro com uma precisão de 10^{-10} e uma exatidão absoluta de 10^{-8}. Em 1982, Tsui, Störmer and Gossard [126] descobriram que em certos dispositivos com desordem reduzida, o número quântico ν assume valores fracionários racionais. Nesse efeito conhecido como efeito Hall quântico fracionário, as partículas se condensam em estados quânticos especiais cujas excitações têm a propriedade de serem descritas por números quânticos fracionários, incluindo carga fracionária e estatística fracionária que é um meio termo entre as estatística ordinárias de Bose e de Fermi.

As propriedades e aplicações do efeito Hall quântico são amplamente estudadas em sistemas eletrônicos em campos magnéticos intensos. Entretanto, o nosso interesse é construir um efeito análogo para partículas neutras. Partimos da quantização de Landau para dipolos elétricos e magnéticos [19, 20] na presença configurações de campos elétricos e magnéticos externos. Assim, de posse das funções de onda do estado fundamental, calculamos o valor médio da corrente no plano de movimento das partículas, bem como a condutividade Hall associada.

6.2 O efeito Hall clássico

O efeito Hall clássico, descoberto por E.H. Hall em 1879 [127], se refere a diferença de potencial, que surge entre lados opostos de um condutor pelo qual passa uma corrente elétrica, criada por um campo magnético aplicado perpendicularmente à corrente. Elétrons com carga $-e$, que se movem com velocidade $\vec{v}$ no plano x-y na presença de um campo magnético $\vec{B}$, obedecem à equação de movimento

$$m\dot{\vec{v}} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \; . \tag{6.1}$$

O que implica em $\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$ para uma corrente estática, *i.e.* $\dot{\vec{v}} = 0$. A densidade de corrente é $\vec{J} = -e\rho_0\vec{v}$ em um gás de elétrons homogêneo com densidade de partículas ρ_0, ou

$$J_x = -\frac{e\rho_0}{B_z}E_y \; , \qquad J_y = \frac{e\rho_0}{B_z}E_x \; , \tag{6.2}$$

onde B_z é a componente do campo magnético perpendicular ao plano condutor. Da força de Lorentz $e\vec{v} \times \vec{B}$, temos que a corrente flui em uma direção perpendicular ao campo elétrico $\vec{E}$.

Tomamos o campo elétrico na direção do eixo y, *i.e.* $E_x = 0$ e $E_y \neq 0$. Segue da relação (6.2) que a resistividade Hall R_{xy} é

$$R_{xy} \equiv \frac{E_y}{J_x} = -\frac{B_z}{e\rho_0} \; , \tag{6.3}$$

enquanto a resistividade diagonal R_{xx} é

$$R_{xx} \equiv \frac{E_x}{J_x} = 0 \; . \tag{6.4}$$

A resistividade Hall (6.3) é classicalmente uma função linear da componente perpendicular do campo magnético B_z para valores fixos da densidade ρ_0. É de conhecimento geral que a resistividade depende sensivelmente de detalhes da amostra como sua composição, geometria e impurezas.

6.3 O efeito Hall quântico

A quantização do efeito Hall foi descoberta por von Klitzing [123] em 1980, um século depois da descoberta do efeito Hall clássico [127]. A descoberta foi precedida por uma sugestão teórica devido a Ando [128] e uma indicação experimental dada por Kawaji [129], mas nenhum aparentemente antecipou a exata quantização da condutividade Hall. Da expressão (6.3) temos que

$$R_{xy} = -\frac{B_z}{e\rho_0} = -\frac{1}{\nu}\frac{2\pi}{e^2} \ , \tag{6.5}$$

onde definimos o fator de preenchimento de Landau ν como

$$\nu = \frac{2\pi\rho_0}{eB_z} \tag{6.6}$$

No caso do efeito Hall quântico inteiro descoberto por von Klitzing [123], ν assume valores inteiros. O efeito Hall quântico fracionário, onde $\nu = p/q$ com p inteiro e q inteiro impar, foi descoberto por Tsui, Störmer e Gossard [126] em 1982. A quantização exata da condutividade Hall foi explicada baseado em um raciocínio topológico combinado com uma teoria de resposta linear [130, 131, 132, 133, 134, 135, 136].

A resistividade Hall é dada por (6.5), ou

$$R_{xy} = \frac{R_{\mathrm{K}}}{\nu} \ , \tag{6.7}$$

onde

$$R_{\mathrm{K}} \equiv \frac{2\pi\hbar}{e^2} \simeq 25812.807\Omega \tag{6.8}$$

em unidades SI. Devido a precisão em sua medida, desde 1990 R_{K}, conhecido como constante von Klitzing, tem sido usado como a resistência padrão.

Uma medida da resistividade Hall é também usada para fins de uma determinação precisa da constante de estrutura fina $\alpha = e^2/4\pi$. Um resultado preciso é obtido em [137]

$$\alpha^{-1} = 137.0360037(27) \quad (0.020 \text{ ppm}) \ . \tag{6.9}$$

A constante de estrutura fina é uma das constantes fundamentais da natureza caracterizando toda extensão da física, caracterizando a "força" da interação eletromagnética. O resultado (6.9) é comparável aos obtidos em outros experimentos como o efeito Josephson [138, 139], o comprimento de onda de Broglie do neutron [140] e o momento magnético anômalo do elétron [141]. O valor recomendado pela CODATA (Commitee of Data for

Science and Technology - 1998) para uso internacional é [139]

$$\alpha^{-1} = 137.03599976(50) \quad (3.7 \text{ ppb}) \ . \tag{6.10}$$

Se a completa consistência de α não é confirmada, é possível indicar o aparecimento de nova física.

6.3.1 O fator de preenchimento de Landau

Aqui discutimos o significado físico do parâmetro ν da relação (6.6). Devido o princípio de exclusão de Pauli, somente um elétron pode ocupar cada estado quântico, o qual denominamos sítio de Landau, cuja área é $\Delta S = 2\pi\ell^2$ onde $\ell = (eB_z)^{-1/2}$ é o comprimento magnético. Em cada nível de energia a densidade de estados é

$$\rho_\Phi = \frac{1}{2\pi} = \frac{B_z}{\Phi_\mathrm{D}} \tag{6.11}$$

onde $\Phi_\mathrm{D} \equiv 2\pi/e$ é o quantum de fluxo de Dirac. O fator de preenchimento do nível de energia é definido por

$$\nu = \frac{\text{Número de elétrons}}{\text{Número de estados}} = \frac{\rho_0}{\rho_\Phi} = 2\pi\ell^2\rho_0 = \frac{2\pi\rho_0}{eB_z} = \frac{\rho_0\Phi_\mathrm{D}}{B_z} \ . \tag{6.12}$$

Para $\nu = 1/m$ existem m quanta de fluxo por elétron, $B_z/\rho_0 = m\Phi_\mathrm{D}$.

A posição do elétron é descrita somente pelo centro do movimento ciclotrônico $\vec{C} = (X, Y)$ em cada nível de Landau. Suas coordenadas X e Y são não-comutativas,

$$[X, Y] = \frac{\mathrm{i}}{eB_z} = \mathrm{i}\ell^2 \ . \tag{6.13}$$

Devido o princípio da incerteza de Heisenberg, a posição do elétron não pode ser determinada com precisão maior que a área $\Delta S = 2\pi\ell^2$. O que coincide com a área de um sítio de Landau.

6.3.2 A corrente Hall quantizada

Analisamos o problema de Landau [13] na presença de um campo elétrico orientado na direção do eixo y, $\vec{E} = E_0\hat{\mathrm{e}}_y$. Considerando o *gauge* de Landau

$$\vec{A} = B_z(y, 0, 0) \ , \tag{6.14}$$

a Hamiltoniana é dada por

$$H = \frac{1}{2m}\left[(p_x + eB_z)^2 + p_y^2\right] + eyE_0 \; . \tag{6.15}$$

Tomamos um autoestado do momento canônico $p_x = -\mathrm{i}\partial_x$, tal que

$$p_x|k\rangle = k|k\rangle \; . \tag{6.16}$$

Assim reescrevemos a Hamiltoniana (6.15) como

$$H = \frac{1}{2m}\left[(k + eB_z)^2 + p_y^2\right] + eyE_0 \; , \tag{6.17}$$

onde $p_y = -\mathrm{i}\partial_y$. Considerando o centro da órbita clássica deslocado de modo que

$$y_k \equiv -k\ell^2 - \frac{eE_0}{\omega}\ell^2 \; , \tag{6.18}$$

temos que

$$H = \frac{1}{2m}\left[p_y^2 + \frac{1}{\ell^4}(y - y_k)^2\right] + ey_kE_0 + \frac{(eE_0\ell)^2}{2\omega} \; . \tag{6.19}$$

A freqüência ciclotrônica é definida como

$$\omega = \frac{eB_0}{m} \; . \tag{6.20}$$

O sistema (6.19) é solúvel exatamente. A função de onda para o estado fundamental é

$$\Psi_0(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi^{1/2}\ell}} \exp\left(\mathrm{i}kx\right) \exp\left[-\frac{1}{2\ell^2}(y - y_k)^2\right] . \tag{6.21}$$

Em um cenário de teoria quântica de campos, onde introduzimos o operador $c_0(k)$ que destrói um elétron em um sítio de Landau $|k\rangle$ que satisfaz a relação de anticomutação

$$\{c_0(k), c_0^\dagger(l)\} = \delta(k - l) \; , \tag{6.22}$$

definimos o operador de campo como

$$\psi_0(x, y) \equiv \int \frac{1}{2\pi} c_0(k)\Psi_0(x, y)\mathrm{d}k \; . \tag{6.23}$$

Nesse caso, temos

$$\psi_0(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi^{1/2}\ell}} \int \frac{c_0(k)}{2\pi} \exp\left(\mathrm{i}kx\right) \exp\left[-\frac{1}{2\ell^2}\left(y + k\ell^2 + \frac{eE_0}{\omega}\ell^2\right)^2\right]\mathrm{d}k \; . \tag{6.24}$$

Então definimos a nossa densidade de corrente elétrica

$$\langle J_k(x,y)\rangle = -\frac{\mathrm{i}e\rho_0}{2m}\left[\psi_0(\nabla_k\psi_0) - (\nabla_k\psi_0)^\dagger\psi_0\right] , \tag{6.25}$$

que é a corrente de Nöther. Para uma densidade ρ_0 homogênea, reescrevemos a corrente como

$$\langle J_k\rangle = \frac{e\rho_0}{m}\psi_0^\dagger(\vec{p} - e\vec{A})\psi_0 . \tag{6.26}$$

Usando (6.24) obtemos as componentes da corrente no plano x-y

$$\begin{aligned} \langle J_x\rangle &= -e^2\ell^2 E_0\rho_0 , \\ \langle J_y\rangle &= 0 . \end{aligned} \tag{6.27}$$

Definimos assim a corrente Hall, dada por

$$J_{\mathrm{H}} = \langle J_x\rangle = \nu\frac{e^2}{2\pi}E_0 , \tag{6.28}$$

visto que a densidade é homogênea, $\rho_0 = \nu/(2\pi\ell^2)$ no fator de preenchimento ν.

6.4 Um análogo da condutividade Hall para partículas neutras

Consideramos um sistema onde uma partícula neutra, permanentemente polarizada com momento de dipolo magnético $\vec{\mu} = \mu\vec{z}$, na presença de uma configuração de campos elétrico e magnético externos. Como visto anteriormente, esse sistema pode ser descrito pela Hamiltoniana não-relativística

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \mu\vec{z}\times\vec{E}\right)^2 - \frac{\mu}{2m}\nabla\cdot\vec{E} + \mu\vec{z}\cdot\vec{B} . \tag{6.29}$$

A seguir calcularemos os níveis de Landau e a condutividade Hall para esse sistema.

6.4.1 Niveis de Landau para dipolos magnéticos

Esse sistema pode ser quantizado de maneira análoga aos níveis de Landau, se satisfeitas algumas condições para a configuração de campos-dipolo [19]. Essas condições são torque nulo, campos estáticos e e campo magnético efetivo uniforme. Restringindo o movimento das partículas ao plano x-y, essas condições são satisfeitas com a seguinte escolha

$$\begin{aligned} \vec{z} &= (0,0,1) \ , \\ \vec{E} &= \rho(x,0,0) \ , \quad \nabla\cdot\vec{E} = \rho \ , \\ \vec{B} &= B_0(0,0,x) \ , \end{aligned} \tag{6.30}$$

onde ρ é uma densidade de carga e B_0 é uma constante. Dessa forma, definimos as quantidades efetivas

$$\begin{aligned} \vec{A}_{\text{eff}} &= \vec{z}\times\vec{E} = \rho(0,x,0) \ , \\ \vec{B}_{\text{eff}} &= \nabla\times\vec{A}_{\text{eff}} = \rho\vec{z} \ . \end{aligned} \tag{6.31}$$

Notamos que B_{eff} é uniforme e satisfaz uma das condições para que ocorra o análogo dos níveis de Landau. O termo $\mu\vec{z}\cdot\vec{B}$ pode ser entendido como um potencial escalar efetivo

$$V(x) = \mu\vec{z}\cdot\vec{B} = \mu B_0 x \ , \tag{6.32}$$

que está relacionado ao campo elétrico efetivo

$$\vec{E}_{\text{eff}} = -\nabla V(x) = -\mu B_0(1,0,0) \ , \tag{6.33}$$

que é um campo constante paralelo ao plano do movimento das partículas. Dessa forma podemos reescrever a Hamiltoniana (6.29) como

$$H = \frac{1}{2m}\left[p_x^2 + (p_y - \mu\rho x)^2\right] - \frac{\mu\rho}{2m} + \mu B_0 x \ , \tag{6.34}$$

ou explicitando a forma da Hamiltoniana do oscilador harmônico

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left[x - \left(p_y\ell^2 - \frac{\mu B_0}{m\omega^2}\right)\right]^2 - \frac{\omega}{2} + \mu B_0\left(p_y\ell^2 - \frac{\mu B_0}{m\omega^2}\right) \ . \tag{6.35}$$

Definimos a freqüência ciclotrônica

$$\omega = \frac{\mu\rho}{m} \ , \tag{6.36}$$

e o comprimento fundamental

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{\mu\rho}} \ . \tag{6.37}$$

Visto que a Hamiltoniana (6.35) não depende explicitamente de y, podemos usar o *ansatz* $\Psi(x,y) = \exp(\mathrm{i}ky)\Phi(x)$ para a função de onda, onde k é o autovalor de p_y. Definimos o centro da órbita clássica como

$$X_k = \left(k\ell^2 - \frac{\mu B_0}{m\omega^2}\right) \ , \tag{6.38}$$

e reescrevemos a Hamiltoniana (6.35) na forma

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x - X_k\right)^2 - \frac{\omega}{2} + \mu B_0 X_k + \frac{1}{2}mv_{\mathrm{D}}^2\ , \tag{6.39}$$

onde

$$v_{\mathrm{D}} = \frac{B_0}{\rho} \tag{6.40}$$

está relacionado a velocidade de *drift* clássica $\frac{\vec{E}_{\mathrm{eff}} \times \vec{B}_{\mathrm{eff}}}{|\vec{B}_{\mathrm{eff}}|^2} = \mu\frac{B_0}{\rho}\vec{y}$. Dessa forma, encontramos os níveis de energia quantizados para o oscilador harmônico

$$\mathcal{E}_{nk} = \left[n + \frac{1-\varsigma}{2}\right]|\omega| + \mu B_0 X_k + \frac{1}{2}mv_{\mathrm{D}}^2\ , \tag{6.41}$$

onde $\varsigma = \pm$ rotula a direção de revolução das órbitas clássicas, tal que $\omega = \varsigma|\omega|$. As funções de onda para o estado fundamental do oscilador são dadas por

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell\sqrt{\pi}}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\ell^2}(x-X_k)^2}\ . \tag{6.42}$$

Os estados excitados do oscilador harmônico são descritos pelas funções de Hermite, mas apenas o estado fundamental é necessário para o nosso objetivo.

6.4.2 Condutividade Hall para partículas neutras

Se considerarmos o limite de campos intensos, o espaçamento entre os níveis de Landau se torna infinito, e o nível de Landau mais baixo desacopla de todos os outros. Portanto, esse limite projeta o sistema quântico no nível de Landau mais baixo. Considerado o sistema onde uma partícula neutra, que possui momento de dipolo magnético não-nulo, e na presença de campos elétrico e magnético externos, calculamos o valor esperado da corrente no plano do movimento

$$\langle\vec{J}\rangle = -\frac{\mu\varrho}{m}\langle\Psi_0|\vec{p} - \mu\vec{A}_{\mathrm{eff}}|\Psi_0\rangle\ , \tag{6.43}$$

cuja componente x se anula

$$\langle J_x\rangle = -\frac{\mu\varrho}{m}\langle\Psi_0|p_x|\Psi_0\rangle = 0\ , \tag{6.44}$$

porém a componente y resulta

$$\begin{aligned} \langle J_y \rangle &= -\frac{\mu\varrho}{m}\langle\Psi_0|p_y - \mu\rho x|\Psi_0\rangle \\ &= -\frac{\mu\varrho}{m}\frac{1}{\ell\sqrt{\pi}}\int \mathrm{e}^{-\frac{1}{\ell^2}(x-X_k)^2}(k-\mu\rho x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\mu\varrho}{m}(k-\mu\rho X_k) = -\mu\varrho\frac{B_0}{\rho} \\ &= -\mu\varrho v_{\mathrm{D}} \ , \end{aligned} \tag{6.45}$$

onde ρ é a densidade de partículas. Agora, podemos encontrar a condutividade

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} , \tag{6.46}$$

onde σ_{ij} é a matriz formada pelos elementos do tensor de condutividade no plano do movimento. Como o campo elétrico efetivo $\vec{E}_{\mathrm{eff}} = (E_x, E_y)$, logo $E_x = -\mu B_0$ e $E_y = 0$. Assim, a condutividade Hall $\sigma_{\mathrm{H}} = \sigma_{xy}$ é encontrada

$$\sigma_{\mathrm{H}} = -\nu\mu \ , \qquad \nu = \frac{\varrho\phi_0}{\rho} \ , \tag{6.47}$$

onde $\phi_0 = \mu^{-1}$ é o quantum de fluxo. O fator de preenchimento de Landau

$$\nu = \frac{\varrho}{(\rho/\phi_0)} \tag{6.48}$$

é definido como a razão entre a densidade ς e a densidade de fluxo efetiva ρ/ϕ_0. Dessa forma ν pode ter valor p/q, onde p e q são números inteiros. Logo ν pode assumir valores inteiros ou fracionários racionais.

6.5 Análogo da condutividade Hall e a quebra das simetrias de Lorentz

Aqui consideramos o movimento de uma partícula neutra não-relativística sujeita a um *background* eletromagnético que viola as simetrias de Lorentz. Como apresentado em anteriormente, a Hamiltoniana não-relativísitca para esse sistema é similar na forma à Hamiltoniana que descreve a interação de uma partícula carregada minimamente acoplada com um campo magnético, como segue:

$$H = -\frac{1}{2m}\left(\vec{\nabla} + \mathrm{i}\vec{a}\right)^2 + a_0 \ , \tag{6.49}$$

onde definimos o potencial de *gauge* não-Abeliano a_μ como

$$a_0 = \frac{g}{2m}\vec{\sigma}\cdot\left[\vec{\nabla}\times(\vec{b}\times\vec{E})\right] - \frac{gb_0}{2m}\vec{z}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{B}\right] + g\vec{b}\cdot\vec{B}\ , \tag{6.50}$$

e

$$\vec{a} = g\vec{b}\times\vec{E} - gb_0\vec{B}\ , \tag{6.51}$$

onde $b_\mu = (b_0, \vec{b})$ é um quadi-vetor constante que controla a quebra das simetrias de Lorentz e g é uma constante. Notamos que a Hamiltoniana (6.49) descreve o movimento de uma partícula neutra minimamente acoplada com os campos elétrico e magnético externos através de constantes que envolvem o quadri-vetor de quebra das simetrias de Lorentz.

6.5.1 Analogia dos níveis de Landau

Investigamos um análogo da quantização de Landau para um sistema onde uma partícula neutra está na presença de um *background* que viola as simetrias de Lorentz. Consideramos essa configuração no *gauge* de Landau, e separamos o problema em dois casos, *space-like* e *time-like* como segue.

Caso ***space-like***

Consideramos apenas os termos que contêm a parte *space-like* do quadri-vetor b_μ na Hamiltoniana (6.49), temos a seguinte Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2m}\left[\vec{p} - g(\vec{b}\times\vec{E})\right]^2 + \frac{g}{2m}\vec{z}\cdot\left[\vec{\nabla}\times(\vec{b}\times\vec{E})\right] + g\vec{b}\cdot\vec{B}\ . \tag{6.52}$$

Sob determinadas condições para configuração dos campos, podemos obter um análogo da quantização de Landau para esse sistema [19, 28]. Essas condição são a ausência de torque sobre a partícula, campos estáticos, e campo magnético efetivo uniforme. Com o movimento da partícula restrito ao plano x-y, essas condições são satisfeitas pela seguinte configuração de campo:

$$\begin{aligned} \vec{z} &= (0,0,1)\ , \\ \vec{E} &= E_0(x,0,0)\ , \\ \vec{B} &= B_0(0,0,x)\ , \end{aligned} \tag{6.53}$$

onde E_0 e B_0 são constantes. Então definimos as seguintes quantidade efetivas

$$\begin{aligned} \vec{A}_{\text{eff}} &= \vec{z} \times \vec{E} = E_0(0, x, 0) \,, \\ \vec{B}_{\text{eff}} &= \nabla \times \vec{A}_{\text{eff}} = E_0 \vec{z} \,. \end{aligned} \tag{6.54}$$

Notamos que $\vec{B}_{\text{eff}}$ é uniforme e satisfaz uma das condições para que para que ocorra um análogo da quantização de Landau. O termo $g\vec{b}\cdot\vec{B}$ pode ser entendido como um potencial escalar efetivo, pois assumindo que $\vec{b} = b_3\vec{z}$ temos que

$$V(x) = gb_3\vec{z} \cdot \vec{B} = gb_3B_0x \,, \tag{6.55}$$

que é associado a um campo elétrico efetivo

$$\vec{E}_{\text{eff}} = -\nabla V(x) = -gb_3B_0(1, 0, 0) \,, \tag{6.56}$$

que é um campo constante paralelo ao plano do movimento das partículas e perpendicular ao campo magnético efetivo. Nessa configuração, podemos reescrever a Hamiltoniana (6.52) na forma

$$H = \frac{1}{2m}\left[p_x^2 + (p_y - gb_3E_0x)^2\right] - \frac{gb_3E_0}{2m} + gb_3B_0x, \tag{6.57}$$

ou

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left[x - \left(p_y\ell^2 - \frac{gb_3B_0}{m\omega^2}\right)\right]^2 - \frac{\omega}{2} + gb_3B_0\left(p_y\ell^2 - \frac{gb_3B_0}{m\omega^2}\right) \,, \tag{6.58}$$

onde definimos a freqüência ciclotrônica

$$\omega = \frac{gb_3E_0}{m} \,, \tag{6.59}$$

e o comprimento fundamental

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{gb_3E_0}} \,. \tag{6.60}$$

Visto que a Hamiltoniana (6.58) não depende explicitamente de y, podemos usar o *ansatz* $\Psi = \exp(iky)\Phi(x)$ para a função de onda, onde k é o autovalor da componente p_y do momentum. Definimos o centro da órbita clássica do oscilador harmônico descrito por (6.58) como

$$X_k = \left(k\ell^2 - \frac{gb_3B_0}{m\omega^2}\right) \,, \tag{6.61}$$

e reescrevemos a Hamiltoniana na forma

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\,(x - X_k)^2 - \frac{\omega}{2} + gb_3B_0X_k + \frac{1}{2}mv_{\text{D}}^2 \,, \tag{6.62}$$

onde
$$v_{\mathrm{D}} = \frac{B_0}{E_0} \tag{6.63}$$
está relacionado a velocidade de *drift* $\dfrac{\vec{E}_{\text{eff}} \times \vec{B}_{\text{eff}}}{|\vec{B}_{\text{eff}}|^2} = gb_3 \dfrac{B_0}{E_0} \vec{y}$ do movimento clássico. Encontramos os autovalores de energia do oscilador harmônico
$$\mathcal{E}_{nk} = \left[n + \frac{1-\varsigma}{2} \right] |\omega| + gb_3 B_0 X_k + \frac{1}{2} m v_{\mathrm{D}}^2 \ , \tag{6.64}$$
onde $\varsigma = \pm$ rotula a direção de revolução da freqüência ciclotrônica $\omega = \varsigma|\omega|$. Resolvendo a equação de Schrödinger relacionada ao Hamiltoniana (6.62), ou usando as propriedades dos operadores escada para o estado fundamental, encontramos a autofunção para o nível de Landau mais baixo
$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell\sqrt{\pi}}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\ell^2}(x - X_k)^2} \ . \tag{6.65}$$
Estado excitados estão relacionados às funções de Hermite, porém essa descrição não é importante para os nossos objetivos.

O caso *time-like*

Da mesma maneira que ocorre no caso *space-like*, se considerarmos apenas a parte *time-like* da Hamiltoniana (6.49) temos
$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} + gb_0 \vec{B} \right)^2 - \frac{gb_0}{2m} \, \vec{z} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \vec{B} \right] \ . \tag{6.66}$$
Da mesma forma podemos escolher uma configuração de campo na qual o análogo da quantização de Landau ocorra,
$$\begin{aligned} \vec{z} &= (0,0,1) \ , \\ \vec{A}_{\text{eff}} &= \vec{B} = B_0(0,x,0) \ , \\ \vec{B}_{\text{eff}} &= \nabla \times \vec{A}_{\text{eff}} = B_0 \vec{z} \ , \end{aligned} \tag{6.67}$$
onde B_0 é uma constante. Então, reescrevemos a Hamiltoniana (6.66) na forma
$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \left(x - k\ell^2 \right)^2 + \frac{\omega}{2} \ , \tag{6.68}$$
onde usamos o *ansatz* $\Psi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\Phi(x)$, k é o autovalor de p_y e $\ell = (gb_0 B_0)^{-1/2}$ é o comprimento fundamental. Aqui
$$\omega = \frac{gb_0 B_0}{m} \tag{6.69}$$

é a freqüência ciclotrônica com $\omega = \varsigma|\omega|$ onde $\varsigma = \pm$ rotula o sinal da direção de revolução. A Hamiltoniana (6.68) descreve o movimento de um oscilador harônico, e tem níveis de energia quantizados

$$\mathcal{E}_n = \left[n + \frac{1+\varsigma}{2}\right]|\omega| \ . \tag{6.70}$$

Calculamos também o nível de Landau mais baixo

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell\sqrt{\pi}}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\ell^2}(x-k\ell^2)^2} \ . \tag{6.71}$$

De posse das autofunções para o estado fundamental, a seguir calculamos um análogo da condutividade Hall para esses sistemas.

6.5.2 A condutividade Hall

Visto que temos os níveis de Landau mais baixos para os nossos sistemas, podemos calcular o valor médio da corrente de partículas no plano x-y, e encontrar um análogo da condutividade Hall. Se considerarmos o limite de campos intensos, o espaçamento entre os níveis de Landau se torna infinito, e o nível de Landau mais baixo desacopla de todos os demais. Assim, esse limite projeta o sistema quântico no nível de Landau mais baixo. Considerando o sistema onde uma partícula neutra está na presença de um *background* eletromagnético que viola as simetrias de Lorentz, analisamos os casos *space-like* e *time-like* como segue.

O caso *space-like*

Supondo que o campo magnético efetivo é muito intenso para podermos desprezar os níveis de Landau mais altos, tomamos apenas as autofunções (6.65). Então, calculamos o valor esperado da corrente

$$\langle \vec{J} \rangle = -\frac{gb_3\varrho}{m}\langle \Psi_0|\vec{p} - gb_3\vec{A}_{\text{eff}}|\Psi_0\rangle \ , \tag{6.72}$$

que se anula para componente x

$$\langle J_x \rangle = -\frac{gb_3\varrho}{m}\langle \Psi_0|p_x|\Psi_0\rangle = 0 \ , \tag{6.73}$$

e para a componente y resulta em

$$\begin{aligned}
\langle J_y\rangle &= -\frac{gb_3\varrho}{m}\langle\Psi_0|p_y - gb_3E_0x|\Psi_0\rangle \\
&= -\frac{gb_3\varrho}{m}\frac{1}{\ell\sqrt{\pi}}\int \mathrm{e}^{-\frac{1}{\ell^2}(x-X_k)^2}(k - gb_3E_0x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{gb_3\varrho}{m}(k - gb_3E_0X_k) = -gb_3\varrho\frac{B_0}{E_0} \\
&= -gb_3\varrho v_{\mathrm{D}}\ ,
\end{aligned} \tag{6.74}$$

onde ϱ é a densidade de partículas. Agora podemos encontrar a condutividade

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}\ , \tag{6.75}$$

onde σ_{ij} é uma matriz formada pelos elementos do tensor de condutividade no plano x-y; e como definimos anteriormente $\vec{E}_{\mathrm{eff}} = (E_x, E_y)$, assim $E_x = -gb_3B_0$ e $E_y = 0$. Então, a condutividade Hall $\sigma_{\mathrm{H}} = \sigma_{xy}$ é

$$\sigma_{\mathrm{H}} = -\nu gb_3\ , \qquad \nu = \frac{\varrho\phi_0}{E_0}\ , \tag{6.76}$$

onde $\phi_0 = (gb_3)^{-1}$ é o quantum de fluxo. O fator de preenchimento definido como

$$\nu = \frac{\varrho}{(E_0/\phi_0)} \tag{6.77}$$

é a razão entre a densidade de partículas ϱ e a densidade de fluxo magnético efetiva E_0/ϕ_0; assim o valor de ν p/q (p e q são números inteiros) e pode ser um número inteiro ou fracionário racional.

O caso *time-like*

Novamente supondo que o campo magnético efetivo é muito intenso, consideramos apenas o nível de Landau mais baixo (6.71). Assim, calculamos o valor esperado da corrente no plano x-y. Novamente, a componente x da corrente se anula

$$\langle J_x\rangle = -\frac{gb_0\varrho}{m}\langle\Psi_0|p_x|\Psi_0\rangle = 0\ , \tag{6.78}$$

bem como a componente y

$$
\begin{aligned}
\langle J_y \rangle &= -\frac{gb_0\varrho}{m}\langle \Psi_0|p_y - gb_0B_0x|\Psi_0\rangle \\
&= -\frac{gb_0\varrho}{m}\frac{1}{\ell\sqrt{\pi}}\int \mathrm{e}^{-\frac{1}{\ell^2}(x-k\ell^2)^2}(k - gb_0B_0x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{gb_0\varrho}{m}(k - gb_0B_0k\ell^2) = 0\ .
\end{aligned} \tag{6.79}
$$

Devido a ausência do campo elétrico efetivo, a densidade de corrente, na integral acima, é perfeitamente antissimétrica em relação ao pico da gaussiana e então a corrente total se anula. Portanto não temos condutividade Hall para o caso *time-like*.

6.6 Sumário e observações

Aqui fazemos uma breve descrição das propriedades mais básicas do efeito Hall quântico. Apresentamos a versão clássica desse efeito, e enfatizamos a importância de sua quantização para a metrologia, principalmente como uma forma precisa de medir a constante de estrutura fina. Para calcular o valor da corrente Hall quantizada num sistema eletrônico bi-dimensional, encontramos as autofunções referentes aos níveis de Landau e por fim calculamos o valor médio da densidade de corrente, bem como a corrente Hall.

Nosso principal objetivo foi construir um análogo do efeito Hall quântico para partículas neutras. Partimos da Hamiltoniana não-relativística para um momento de dipolo magnético na presença de um configuração de campos elétrico e magnético externos. Como feito anteriormente, encontramos um análogo dos níveis de Landau para esse sistema, e em seqüência construímos um análogo da da condutividade Hall quantizada.

Outro problema por nós estudado foi o efeito Hall quântico em um sistema formado por uma partícula neutra na presença de um *background* eletromagnético que viola as simetrias de Lorentz. No limite não-relativístico, o problema consiste no movimento de uma partícula neutra acoplanda com campos elétrico e magnético externos, onde um quadrivetor constante que controla as a quebras das simetrias de Lorentz atua na constante de acoplamento. Novamente construímos um análogo dos níveis de Landau onde dividimos o problema em dois casos: O caso *space-like* e o *time-like*. Calculamos um análogo da condutividade Hall para o caso *space-like*, e concluímos que não ocorre esse efeito para o caso *time-like* devido a ausência de um termo que gere a velocidade de *drift*.

7 Conclusões e comentários finais

Investigamos alguns efeitos puramente quânticos, como fases topológicas por exemplo, onde uma partícula carregada ou neutra sofre a influência do campo eletromagnético mesmo em regiões onde a força clássica é nula sobre a partícula. Apresentamos o efeito Aharonov–Bohm [2], onde uma partícula carregada acumula uma fase em sua função de onda devido o movimento que realiza, numa região livre de campos, ao redor de uma linha de fluxo magnético isolada. Um efeito similar é apresentado; o efeito Aharonov–Casher [5] onde uma partícula neutra com momento de dipolo magnético permanente adquire uma fase, semelhante a do efeito Aharonov–Bohm, ao circular uma linha de cargas elétricas. Esses efeitos são atribuídos à conexidade do espaço, e dessa forma são chamados de fases topológicas. Através de transformações de dualidade de Heaviside encontramos mais duas fases topológicas [9]. A fase He–McKellar–Wilkens é construída como o dual da fase Aharonov–Casher, onde uma prtícula neutra com momento de dipolo elétrico acumula uma fase topológica em sua função de onda ao se mover numa região livre de forças, não-simplesmente-conexa, do espaço. Para completar o quadro, temos a fase Aharonov–Bohm dual [9, 12], estudado através do movimento de um monopolo magnético que circula um solenóide elétrico. Houveram intensas discussões sobre o uso do termo "fase topológica" para os efeitos Aharnov–Casher e He–McKellar–Wilkens [55, 56]. Isso se deve a presença de campos, embora não haja forças, na região onde a partícula habita. Contudo, entendemos que o uso correto do termo dependerá de condições estabelecidas preestabelecidas pela definição do mesmo.

Um outro problema que envolve a mecânica quântica de partículas carregadas ou neutras na presença do campo eletromagnético é a quantização em níveis de Landau. Considerando sistemas formados por partículas neutras, com momento de dipolo magnético ou elétrico, na presença de campos elétricos e magnéticos externos, obtemos os autovalores de energia e as autofunções associadas [20]. Com o intuito de construir um análogo da quantização de Landau para dipolos elétrico, numa configuração de campo mais realista, propomos o estudo do movimento de uma partícula neutra com momento de dipolo induzido por uma configuração de campos magnético e elétrico cruzados [21]. Esse acoplamento foi proposto por Wei *et al.* [26] no estudo do efeito He–McKellar–Wilkens para dipolos elétricos induzidos sem a necessidade de uma densidade de cargas magnéticas. No regime de campos magnéticos intensos, os níveis de energia são muito semelhantes aos níveis de Landau [13]. Com os avanços na tecnologia de átomos frios [63, 22], acreditamos que seja possível simular esses efeitos experimentalmente. Esse estudo pode ser visto como um primeiro passo para a descrição do efeito Hall quântico para partículas neutras.

Investigamos o comportamento de alguns efeitos quânticos, fases geométricas e níveis de Landau, considerando a possibilidade de as simetrias de Lorentz não serem exatas. Usamos o termo de Carroll–Field-Jackiw [40], que restringe o setor de *gauge* da eletrodinâmica quântica extendida, para o setor fermiônico. Esse termo entra na equação de Dirac como um acoplamento não-mínimo, e pode ser interpretado como a interação de uma partícula neutra com um *background* eletromagnético que viola as simetrias de Lorentz. Estabelecido o conteúdo relativístico dessa formulação, desenvolvemos nossos trabalhos tomando o limite não-relativístico. Demonstramos que o parâmetro que controla a quebra das simetrias de Lorentz modifica as fases topológicas de Aharonov–Casher e He–McKellar–Wilkens, hora contribuindo como uma polarização (caso *space-like*), hora como uma densidade de corrente elétrica (caso *time-like*). Um outro resultado surge desse estudo. Considerando algumas condições para a configuração dos campos, obtemos o espectro de energia quantizado em níveis de Landau. Esses resultados são interessantes para direcionar investigações acerca da natureza física do *background* que quebra a invariância de Lorentz. Supondo que o *background* polariza a partícula neutra, num experimento hipotético poderíamos mensurar a violação das simetrias de Lorentz analisando variações no momento de dipolo das partículas.

Uma outra forma de quebra da invariância de Lorentz vem de considerar a não-comutatividade das coordenadas espaciais. Nesse sentido, investigamos as contribuições dessa formulação para sistemas quânticos como fases topológicas e quantização de Landau. Para tal, tomamos o limite não-relativístico da equação de Dirac que descreve a interação de dipolos elétricos e magnéticos neutros com o campo eletromagnético. Nesse limite, substituímos as coordenadas espaciais por operadores que não comutam, e o produto usual pela operação produto-$\star$. Essa operação mapeia o espaço não-comutativo no espaço comutativo usual, onde as correções devido a não-comutatividade aparecem nos termos que contêm o parâmetro θ. Em mecânica quântica não-comutativa, podemos mapear o espaço não-comutativo no espaço comutativo através de um *Bopp shifts* [115] nos termos que envolvem as coordenadas, bem como os campos. No estudo da fase de Anandan não-comutativa [29], demonstramos que a não-comutatividade torna dispersivas as fases topológicas Aharonov–Casher e He–McKellar–Wilkens, visto que faz surgir uma dependência da velocidade da partícula, *i.e.* dependente da energia do feixe de partículas. Da mesma forma, estudamos essas fases no espaço de fase não-comutativo. Demonstramos que nos limites $\theta \to 0$, $\bar{\theta} \to 0$ e $\lambda \to 1$ recuperamos a fase de Anandan original [58]. Ainda no contexto da não-comutatividade das coordenadas espaciais, investigamos as implicações para a quantização de Landau em sistemas de partículas neutras, com momento de dipolo elétrico e magnético, na presença de campos elétricos e magnéticos externos [30]. Calculamos as correções para os níveis de energia, massa e freqüência ciclotrônica devido a não-comutatividade das coordenadas espaciais, como também considerando a não-comutatividade do espaço de fase. Verificamos que no limite $\theta \to 0$, $\bar{\theta} \to 0$ e $\lambda \to 1$ recuperamos os resultados originais [20].

Os últimos resultados produzidos durante esse trabalho vêm do estudo de algumas propriedades do efeito Hall quântico, considerando uma analogia feita para partículas neutras. Partindo da Hamiltoniana não-relativística para o movimento de uma partícula neutra, com momento de dipolo magnético, na presença de um campo elétrico externo, construímos os níveis de Landau para esse sistema. De posse das autofunções associadas aos níveis de Landau, calculamos o valor esperado para a corrente Hall e encontramos um análogo da condutividade Hall para o sistema de partículas neutras. No mesmo sentido, utilizamos os estudos sobre níveis de Landau num cenário de quebra das simetrias de Lorentz e calculamos a condutividade Hall para esse sistema. Destacamos a importância desses estudos, visto a relevância da quantização do efeito Hall para a metrologia. Por hora, conseguimos atingir objetivos apenas de interesse acadêmico com esses estudos. Entretanto, em trabalhos futuros pretendemos estabelecer *bounds* para verificação experimental desses efeitos, bem como ampliar o nosso repertório teórico.

Bibliografia

[1] Y. Aharonov and J. Anandan. *Phase change during a cyclic quantum evolution. Phys. Rev. Lett.*, **58**, p. 1593, (1987).

[2] Y. Aharonov and D. Bohm. *Significance of Eletromagnetic Potentials in the Quantum Theory. Phys. Rev.*, **115**, p. 485, (1959).

[3] R.G. Chambers. *Shift of an Electron Interference Pattern by Enclosed Magnetic Flux. Phys. Rev. Lett.*, **5**, p. 3, (1960).

[4] M. Peshkin and A. Tonomura. *The Aharonov–Bohm Effect.* [S.l.]: Springer-Verlag, (1989).

[5] Y. Aharonov and A. Casher. *Topological Quantum Effects for Neutral Particles. Phys. Rev. Lett.*, **53**, p. 319, (1984).

[6] A. Cimmino, G.I. Opat, A.G. Klein, H. Kaiser, S.A. Werner, M. Arif, and R. Clothier. *Observation of the topological Aharonov-Casher phase shift by neutron interferometry. Phys. Rev. Lett.*, **63**, p. 380, (1989).

[7] K. Sangster, E.A. Hinds, S.M. Barnett and E. Riis. *Measurement of the Aharonov–Casher phase in an atomic system. Phys. Rev. Lett.*, **71**, p. 3641, (1993).

[8] O. Heaviside. *Electromagnetic Theory (London 1893); Electrical Papers, London, 1 (1892);. Phyl. Trans. Roy. Soc. A*, **183**, p. 423, (1893).

[9] J.P. Dowling, C.P. Williams, and J.D. Franson. *Maxwell Duality, Lorentz Invariance, and Topological Phase. Phys. Rev. Lett.*, **83**, p. 2486, (1999).

[10] Xiao-Gang He and B.H.J. McKellar. *Topological phase due to eletric dipole moment and magnetic monopole interaction. Phys. Rev. A*, **47**, p. 3424, (1993).

[11] M. Wilkens. *Quantum Phase of a Moving Dipole. Phys. Rev. Lett.*, **72**, p. 5, (1994).

[12] C. Furtado and G. Duarte. *Dual Aharonov–Bohm Effect. Phys. Scr.*, **71**, p. 7, (2005).

[13] L.D. Landau. *Diamagnetismus der Metalle. Z. Phys.*, **64**, p. 629, (1930).

[14] R.E. Prange and S.M. Girvin. *The Quantum Hall Effect (Graduate Texts in Contemporary Physics).* 2nd. ed. [S.l.]: Springer-Verlag, New York, (1990).

[15] A. Comtet. *On the Landau levels on the hyperbolic plane. Ann. Phys.*, **173**, p. 185, (1987).

[16] G.V. Dunne. *Hilbert space for charged particles in perpendicular magnetic fields. Ann. Phys.*, **215**, p. 233, (1992).

[17] B. Paredes, P. Fedichev, J.I. Cirac, and P. Zoller. *1/2-Anyons in Small Atomic Bose-Einstein Condensates*. *Phys. Rev. Lett.*, **87**, p. 010402, (2001).

[18] B. Paredes, P. Zoller, J. I. Cirac. *Fractional quantum Hall regime of a gas of ultracold atoms*. *Solid State Commun.*, **127**, p. 155, (2003).

[19] M. Ericsson and E. Sjöqvist. *Towards a quantum Hall effect for atoms using eletric fields*. *Phys. Rev. A*, **65**, p. 013607, (2001).

[20] L.R. Ribeiro, C. Furtado, and J.R. Nascimento. *Landau levels analog to electric dipole*. *Phys. Lett. A*, **348**, p. 135, (2006).

[21] C. Furtado, J.R. Nascimento, L.R. Ribeiro. *Landau quantization of neutral particles in an external field*. *Phys. Lett. A*, **358**, p. 336, (2006).

[22] L.M. Duan, E. Demler, and M.D. Lukin. *Controlling Spin Exchange Interactions of Ultracold Atoms in Optical Lattices*. *Phys. Rev. Lett.*, **91**, p. 090402, (2003).

[23] D. Jaksch, C. Bruder, J.I. Cirac, C.W. Gardiner, and P. Zoller. *Cold bosonic atoms in optical lattices*. *Phys. Rev. Lett.*, **81**, p. 3108, (1998).

[24] D. Jaksch and P. Zoller. *Creation of effective magnetic fields in optical lattices: the Hofstadter butterfly for cold neutral atoms*. *New J. Phys.*, **5**, p. 56, (2003).

[25] W.V. Liu, F. Wilczek, and P. Zoller. *Spin-dependent Hubbard model and a quantum phase transition in cold atoms*. *Phys. Rev. A*, **70**, p. 033603, (2004).

[26] H. Wei, R. Han, and X. Wei. *Quantum Phase of Induced Dipoles Moving in a Magnetic Field*. *Phys. Rev. Lett.*, **75**, p. 2071, (1995).

[27] L. R. Ribeiro, E. Passos, C. Furtado, J.R. Nascimento. *The geometric phases in a background with Lorentz-symmetry violation*. *e-print arXiv:0710.5858v2 [hep-th]*.

[28] E. Passos, L.R. Ribeiro, C Furtado, J.R. Nascimento. *Lorentz-symmetry violation and Landau analog levels*. *e-print arXiv:0802.2817v1 [hep-th]*.

[29] E. Passos, L.R. Ribeiro, C. Furtado, and J. R. Nascimento. *Noncommutative Anandan quantum phase*. *Phys. Rev. A*, **76**, p. 012113, (2007).

[30] L.R. Ribeiro, E. Passos, C. Furtado, J.R. Nascimento. *Landau Analog Levels for Dipoles in the Noncommutative Space and Phase Space*. *e-print arXiv:0711.1773v2 [hep-th], aceito para o Euro. Phys. J. C*.

[31] D. Colladay and V.A. Kostelecký. *CPT violation and the standard model*. *Phys. Rev. D*, **55**, p. 6760, (1997).

[32] D. Colladay and V.A. Kostelecký. *Lorentz-violating extension of the standard model*. *Phys. Rev. D*, **58**, p. 116002, (1998).

[33] D. Colladay and V.A. Kostelecký. *Cross sections and Lorentz violation*. *Phys. Lett. B*, **511**, p. 209, (2001).

[34] S. Coleman and S.L. Glashow. *Cosmic ray and neutrino tests of special relativity*. *Phys. Lett. B*, **405**, p. 249, (1997).

[35] S. Coleman and S.L. Glashow. *High-energy tests of Lorentz invariance. Phys. Rev. D*, **59**, p. 116008, (1999).

[36] L.B. Auerbach et. al. *Tests of Lorentz violation in $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ oscillations. Phys. Rev. D*, **72**, p. 076004, (1993).

[37] Y.B. Hsiung. *An observation of Direct-CP violation - ϵ'/ϵ Result From KTeV. Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)*, **86**, p. 312, (2000).

[38] H. Dehmelt, R. Mittleman, R.S. Van Dyck, and P. Schwinberg. *Past electron-positron $g-2$ experiments yielded sharpest bound on CPT violation for point particles. Phys. Rev. Lett.*, **83**, p. 4694, (1999).

[39] B.R. Heckel, C.E. Cramer, T.S. Cook, E.G. Adelberger, S. Schlamminger, and U. Schmidt. *New CP-violation and preferred-frame tests with polarized electrons. Phys. Rev. Lett.*, **97**, p. 021603, (2006).

[40] S.M. Carroll, G.B. Field, and R. Jackiw. *Limits on a Lorentz- and parity-violating modification of electrodynamics. Phys. Rev. D*, **41**, p. 1231, (1990).

[41] H. Belich, T. Costa-Soares, M.M. Ferreira Jr., and J.A. Helayël-Neto. *Non-minimal coupling to a Lorentz-violating background and topological implications. Eur. J. Phys. C*, **41**, p. 421, (2005).

[42] E. Passos, L.R. Ribeiro, C. Furtado, and J. R. Nascimento. *Analog of Quantum Hall effect and Lorentz-symmetry violation. Em preparação.*

[43] N. Seiberg and E. Witten. *String theory and noncommutative geometry. J. High Energy Phys.*, **9909**, p. 032, (1999).

[44] N. Seiberg, L. Susskind and N. Toumbas. *Space/time non-commutativity and causality. J. High Energy Phys.*, **0006**, p. 044, (2000).

[45] W. Ehrenberg and R.E. Siday. *The refractive index in electron optics and the principal of dynamics. Proc. Phys. Soc. London Sect. B*, **62**, p. 8, (1949).

[46] T.T. Wu and C.N. Yang. *Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields. Phys. Rev. D*, **12**, p. 3845, (1975).

[47] S. Olariu and I. Iovitzu Popescu. *The quantum effects of electromagnetic fluxes. Rev. Mod. Phys.*, **57**, p. 339, (1985).

[48] M.P. Silverman. *More Than One Mystery, Explorations in Quantum Interference.* [S.l.]: Springer-Verlag, (1994).

[49] G.N. Afanasiev. *Static and nonstatic electrical solenoids. J. Phys. A*, **26**, p. 731, (1993).

[50] G. N. Afanasiev. *Topological Effects in quantum Mechanics.* [S.l.]: Kluwer Academic Publisher, (1999).

[51] R.P. Feynman. *Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. Rev. Mod. Phys.*, **20**, p. 367, (1948).

[52] J. Anandan. *Electromagnetic effects in the quantum interference of dipoles. Phys. Lett. A*, **138**, p. 347, (1989).

[53] W. Pauli. *Relativistic field theories of elementary particles. Rev. Mod. Phys.*, **13**, p. 203, (1941).

[54] L.L. Foldy. *The electromagnetic properties of Dirac particles. Phys. Rev.*, **87**, p. 688, (1952).

[55] A. Zeilinger. *Generalized Aharonov-Bohm experiments with neutrons, in "Fundamental Aspects of quantum theory". eds. V. Gorini and A. Frigerio, NATO ASI Series B, Plenum Press*, **144**, p. 311, (1986).

[56] M. Peshkin and H.J. Lipkin . *Topology, Locality, and Aharonov–Bohm Effect with Neutrons. Phys. Rev. Lett.*, **74**, p. 2847, (1995).

[57] C. Grosche. *The path integral on the Poincaré upper half-plane with a magnetic field and for the Morse potential. Ann. Phys.*, **187**, p. 110, (1988).

[58] J. Anandan. *Classical and Quantum Interaction of the Dipole. Phys. Rev. Lett.*, **85**, p. 1354, (2000).

[59] W.H. Heiser and J.A. Shercliff. *A simple demonstration of the Hartmann layer. J. Fluid Mech.*, **22**, p. 701, (1965).

[60] S.Y. Molokov and J.E. Allen. *On the theory of the Heiser and Shercliff experiment. I. MHD flow in an open channel in a strong uniform magnetic field. J. Phys. D: Appl. Phys.*, **25**, p. 393, (1992).

[61] S.Y. Molokov and J.E. Allen. *On the theory of the Heiser and Shercliff experiment. II. MHD flow between two cylinders in a strong radial magnetic field. J. Phys. D: Appl. Phys.*, **25**, p. 933, (1992).

[62] Tae-Yeon Lee. *Quantum phases of electric and magnetic dipoles as special cases of the Aharonov-Bohm phase. Phys. Rev. A*, **64**, p. 032107, (2001).

[63] A.B. Kuklov and B.V. Svistunov. *Counterflow superfluidity of two-species ultracold atoms in a commensurate optical lattice. Phys. Rev. Lett.*, **90**, p. 100401, (2003).

[64] J.K. Pachos and E. Rico. *Effective three-body interactions in triangular optical lattices. Phys. Rev. A*, **70**, p. 053620, (2004).

[65] C. Baxter. *Cold Rydberg atoms as realizable analogs of Chern-Simons theory. Phys. Rev. Lett.*, **74**, p. 514, (1995).

[66] J. Zhang. *Testing spatial noncommutativity via Rydberg atoms. Phys. Rev. Lett.*, **93**, p. 043002, (2004).

[67] J. Zhang. *Angular momentum of supersymmetric cold rydberg atoms. Phys. Rev. Lett.*, **77**, p. 44, (1996).

[68] J.K. Pachos. *Quantum phases of electric dipole ensembles in atom chips. Phys. Lett. A*, **344**, p. 441, (2005).

[69] C.A. Lima Ribeiro, C. Furtado, and F. Moraes. *Solid-state analog for the He–McKellar–Wilkens quantum phase. Europhys. Lett.*, **62**, p. 306, (2003).

[70] G. Spavieri. *Quantum effect of the Aharonov-Bohm type for particles with an electric dipole moment. Phys. Rev. Lett.*, **82**, p. 3932, (1999).

[71] J.L. Noronha, C. Wotzasek. *Testing quantum duality using cold Rydberg atoms. Phys. Lett. B*, **602**, p. 144, (2004).

[72] V.A. Kostelecký and R. Lehnert. *Stability, causality, and Lorentz and CPT violation. Phys. Rev. D*, **63**, p. 065008, (2001).

[73] R. Lehnert and R. Potting. *Vacuum Čerenkov Radiation. Phys. Rev. Lett.*, **93**, p. 110402, (2004).

[74] E. Kant and F.R. Klinkhamer. *Maxwell–Chern–Simons theory for curved spacetime backgrounds. Nucl. Phys. B*, **731**, p. 125, (2005).

[75] Bo Feng, Mingzhe Li, Jun-Qing Xia, Xuelei Chen, and Xinmin Zhang. *Searching for CPT violation with cosmic microwave background data from WMAP and BOOMERANG. Phys. Rev. Lett.*, **96**, p. 221302, (2006).

[76] H. Belich, J.L. Boldo, L.P. Colatto, J.A. Helayël-Neto, and A.L.M.A. Nogueira. *Supersymmetric extension of the Lorentz- and CPT-violating Maxwell–Chern–Simons model. Phys. Rev. D*, **68**, p. 065030, (2003).

[77] A.J. Hariton and R. Lehnert. *Spacetime symmetries of the Lorentz-violating Maxwell–Chern–Simons model. Phys. Lett. A*, **367**, p. 11, (2007).

[78] N.M. Barraz Jr., J.M. Fonseca, W.A. Moura-Melo, and J.A. Helayël-Neto. *Dirac-like monopoles in a Lorentz- and CPT-violating electrodynamics. Phys. Rev. D*, **76**, p. 027701, (2007).

[79] R. Jackiw and V.A. Kostelecký. *Radiatively induced Lorentz and CPT violation in electrodynamics. Phys. Rev. Lett.*, **82**, p. 3572, (1999).

[80] M. Pérez-Victoria. *Exact calculation of the radiatively induced Lorentz and CPT violation in QED. Phys. Rev. Lett.*, **83**, p. 2518, (1999).

[81] J.M. Chung. *Lorentz- and CPT-violating Chern–Simons term in the functional integral formalism. Phys. Rev. D*, **60**, p. 127901, (1999).

[82] J.M. Chung. *Radiatively-induced Lorentz and CPT violating Chern–Simons term in QED. Phys. Lett. B*, **461**, p. 138, (1999).

[83] A.A. Andrianov, P. Giacconi, and R. Soldati. *Lorentz and CPT violations from Chern–Simons modifications of QED. J. High Energy Phys.*, **0202**, p. 030, (2002).

[84] T. Mariz, J.R. Nascimento, E. Passos, R.F. Ribeiro, and F.A. Brito. *A remark on Lorentz violation at finite temperature. J. High Energy Phys.*, **0510**, p. 019, (2005).

[85] J.R. Nascimento, E. Passos, A.Yu. Petrov, and F.A. Brito. *Lorentz-CPT violation, radiative corrections and finite temperature. J. High Energy Phys.*, **0706**, p. 016, (2007).

[86] F.A. Brito, J.R. Nascimento, E. Passos, A.Yu. Petrov. *The ambiguity-free four-dimensional Lorentz-breaking Chern–Simons action. Phys. Lett. B*, **664**, p. 112, (2008).

[87] H. Belich, L.P. Colatto, T. Costa-Soares, J.A. Helayël-Neto, M.T.D. Orlando. *Magnetic Moment Generation from non-minimal couplings in a scenario with Lorentz-Symmetry Violation. e-print arXiv:0806.1253v1 [hep-th].*

[88] L.L. Foldy and S.A. Wouthuysen. *On the Dirac Theory of Spin 1/2 Particles and Its Non-Relativistic Limit. Phys. Rev.*, **78**, p. 29, (1950).

[89] B. Mirza and M. Zarei. *Noncommutative quantum mechanics and the Aharonov–Casher effect. Eur. Phys. J. C*, **32**, p. 583, (2004).

[90] V.A. Kostelecký and C.D. Lane. *Nonrelativistic quantum Hamiltonian for Lorentz violation. J. Math. Phys.*, **40**, p. 6245, (1999).

[91] A. Kobakhidze and B.H.J. McKellar. *Particle interference as a test of Lorentz-violating electrodynamics. Phys. Rev. D*, **76**, p. 093004, (2007).

[92] B. Roy. *The ground state of a spin-1/2 neutral particle with anomalous magnetic moment in a two-dimensional electrostatic field. J. Phys. A*, **26**, p. 5631, (1993).

[93] M.R. Douglas and N.A. Nekrasov. *Noncommutative field theory. Rev. Mod. Phys.*, **73**, p. 977, (2001).

[94] A. Connes, M.R. Douglas and A. Schwarz. *Noncommutative geometry and Matrix theory. J. High Energy Phys.*, **9802**, p. 003, (1998).

[95] J.W. Moffat. *Perturbative noncommutative quantum gravity. Phys. Lett. B*, **493**, p. 142, (2000).

[96] L. Susskind. *The Quantum Hall Fluid and Non-Commutative Chern–Simons Theory. e-print arXiv:hep-th/0101029.*

[97] O.F. Dayi and A. Jellal. *Hall effect in noncommutative coordinates. J. Math. Phys.*, **43**, p. 4592, (2002).

[98] B. Basu and S. Ghosh. *Quantum Hall effect in bilayer systems and the noncommutative plane: A toy model approach. Phys. Lett. A*, **346**, p. 133, (2005).

[99] C. Duval, P.A. Horváthy. *The exotic Galilei group and the "Peierls substitution". Phys. Lett. B*, **479**, p. 284, (2000).

[100] M. Chaichian, M.M. Sheikh-Jabbari, and A. Tureanu. *Hydrogen Atom Spectrum and the Lamb Shift in Noncommutative QED. Phys. Rev. Lett.*, **86**, p. 2716, (2001).

[101] M. Chaichian, A. Demichev, P. Prešnajder, M.M. Sheikh-Jabbari, and A. Tureanu. *Quantum theories on noncommutative spaces with nontrivial topology: Aharonov–Bohm and Casimir effects. Nucl. Phys. B*, **611**, p. 383, (2001).

[102] M. Chaichian, P. Prešnajder, M.M. Sheikh-Jabbari, and A. Tureanu. *Aharonov–Bohm effect in noncommutative spaces. Phys. Lett. B*, **527**, p. 149, (2002).

[103] K. Li and S. Dulat. *The Aharonov-Bohm effect in noncommutative quantum mechanics. Eur. Phys. J. C*, **46**, p. 825, (2006).

[104] K. Li and J. Wang. *The topological AC effect on non-commutative phase space. Eur. Phys. J. C*, **50**, p. 1007, (2007).

[105] S.A. Alavi. *Berry's Phase in Noncommutative Spaces. Phys. Scr.*, **67**, p. 366, (2003).

[106] B. Basu, S. Dhar, and S. Ghosh. *Noncommutative geometry and geometric phases. Europhys. Lett.*, **76**, p. 395, (2006).

[107] P.A. Horváthy. *The Non-commutative Landau Problem. Ann. Phys.*, **299**, p. 128, (2002).

[108] P.A. Horváthy, M.S. Plyushchay. *Nonrelativistic anyons in external electromagnetic field. Nucl. Phys. B*, **714**, p. 269, (2005).

[109] J. Gamboa, F. Méndez, M. Loewe, and J.C. Rojas. *The Landau problem in the noncommutative quantum mechanics. Mod. Phys. Lett. A*, **16**, p. 2075, (2001).

[110] X. Calmet and M. Selvaggi. *Noncommutative geometry and geometric phases. Phys. Rev. D*, **74**, p. 037901, (2006).

[111] R. Peierls. *Zur Theorie des Diamagnetismus von Leitungselektronen. Z. Phys.*, **80**, p. 763, (1933).

[112] H.S. Snyder. *Quantized Space-Time. Phys. Rev.*, **71**, p. 38, (1947).

[113] R.J. Szabo. *Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces. Phys. Rep.*, **378**, p. 207, (2003).

[114] H. Falomir, J. Gamboa, M. Loewe, F. Méndez, and J.C. Rojas. *Testing spatial noncommutativity via the Aharonov–Bohm effect. Phys. Rev. D*, **66**, p. 045018, (2002).

[115] T. Curtright, D. Fairlie, and C. Zachos. *Features of time-independent Wigner functions. Phys. Rev. D*, **58**, p. 025002, (1998).

[116] M. Rosenbaum and J.D. Vergara. *The $\star$-value equation and Wigner distributions in noncommutative Heisenberg algebras. Gen. Relativ. Gravit.*, **38**, p. 607, (2006).

[117] C. Furtado and C.A. de Lima Ribeiro. *Quantum dynamics of magnetic and electric dipoles and the geometric phase. Phys. Rev. A*, **69**, p. 064104, (2004).

[118] Franz Gross. *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory.* [S.l.]: Wiley Classics, New York.

[119] A. Ya. Silenko. *Quantum-Mechanical Description of the Electromagnetic Interaction of Relativistic Particles with Electric and Magnetic Dipole Moments. Russ. Phys. J*, **48**, p. 788, (2005).

[120] G. Badurek, H. Weinfurter, R. Gähler, A. Kollmar, S. Wehinger, and A. Zeilinger. *Nondispersive phase of the Aharonov-Bohm effect. Phys. Rev. Lett.*, **71**, p. 307, (1993).

[121] J. Grundberg, T.H. Hansson, and A. Karlhede. *Geometrical phases from spinning particles. Phys. Rev. D*, **41**, p. 2642, (1990).

[122] P. Lévay. *Quaternionic gauge fields and the geometric phase. J. Math. Phys.*, **32**, p. 2347, (1991).

[123] K. von Klitzing, G. Dorda and M. Pepper. *New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance. Phys. Rev. Lett.*, **45**, p. 494, (1980).

[124] R. Willett, J.P. Eisenstein, H.L. Störmer, D.C. Tsui, A.C. Gossard, and J.H. English. *Observation of an even-denominator quantum number in the fractional quantum Hall effect. Phys. Rev. Lett.*, **59**, p. 1776, (1987).

[125] R.B. Laughlin. *Anomalous Quantum Hall Effect: An Incompressible Quantum Fluid with Fractionally Charged Excitations. Phys. Rev. Lett.*, **50**, p. 1395, (1983).

[126] D.C. Tsui, H.L. Stormer, and A.C. Gossard. *Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit. Phys. Rev. Lett.*, **48**, p. 1559, (1982).

[127] E.H. Hall. *On a new action of the magnet on electric currents. Am. J. Math.*, **2**, p. 287, (1879).

[128] T. Ando, Y. Matsumoto and Y. Uemura. *Theory of Hall Effect in a Two-Dimensional Electron System. J. Phys. Soc. Jpn.*, **39**, p. 274, (1975).

[129] S. Kawaji, J. Wakabayashi. *Quantum galvanomagnetic properties of n-type inversion layers on Si(100) MOSFET. Surface Science*, **58**, p. 238, (1976).

[130] R.B. Laughlin. *Quantized Hall conductivity in two dimensions. Phys. Rev. B*, **23**, p. 5632, (1981).

[131] D.J. Thouless, M. Kohmoto, M.P. Nightingale, and M. den Nijs. *Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential. Phys. Rev. Lett.*, **49**, p. 405, (1982).

[132] Qian Niu, D.J. Thouless, and Yong-Shi Wu. *Quantized Hall conductance as a topological invariant. Phys. Rev. B*, **31**, p. 3372, (1985).

[133] Mahito Kohmoto. *Topological invariant and the quantization of the Hall conductance. Ann. Phys.*, **160**, p. 343, (1985).

[134] J.E. Avron and R. Seiler. *Quantization of the Hall Conductance for General, Multiparticle Schrödinger Hamiltonians. Phys. Rev. Lett.*, **54**, p. 259, (1985).

[135] Qian Niu, D.J. Thouless. *Quantum Hall effect with realistic boundary conditions. Phys. Rev. B*, **35**, p. 2188, (1987).

[136] D.P. Arovas, R.N. Bhatt, F.D.M. Haldane, P.B. Littlewood, and R. Rammal. *Localization, wave-function topology, and the integer quantized Hall effect. Phys. Rev. Lett.*, **60**, p. 619, (1988).

[137] A. Jeffery et al. *1996 Conf. On precision electromagnetic measurement. (17-20 June, 1996, Braunschweig, Germany).*

[138] B.D. Josephson. *The discovery of tunnelling supercurrents. Rev. Mod. Phys.*, **46**, p. 251, (1974).

[139] P.J. Mohr and B.N. Taylor. *CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2002. Rev. Mod. Phys.*, **77**, p. 1, (2005).

[140] E. Krüger, W. Nistler, and W. Weirauch. *Re-evaluation of a precise measurement of $h/m(n)$. Metrologia*, **36**, p. 147, (1999).

[141] V.W. Hughes and T. Kinoshita. *Anomalous g values of the electron and muon. Rev. Mod. Phys.*, **71**, p. S133, (1999).