PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Alessandro Bandeira Duarte

Lógica e Aritmética na Filosofia da Matemática de Frege

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Filosofia da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Filosofia.

Orientador: Oswaldo Chateaubriand Filho

Rio de Janeiro, Junho de 2009

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Alessandro Bandeira Duarte

Lógica e Aritmética na Filosofia da Matemática de Frege

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-graduação em Filosofia do Departamento de Filosofia do Centro de Teologia e Ciências Humanas da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Oswaldo Chateaubriand Filho
Orientador
Departamento de Filosofia da PUC-Rio

Prof. Luiz Carlos Pinheiro Dias Pereira
Departamento de Filosofia da PUC-Rio

Prof. Danilo Marcondes de Souza Filho
Departamento de Filosofia da PUC-Rio

Prof. Dirk Greimann
Universidade Federal do Ceará

Prof. Marco Caron Ruffino
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Paulo Fernando Carneiro de Andrade
Coordenador Setorial do Centro de
Teologia e Ciências Humanas – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 5 de Junho de 2009

Alessandro Bandeira Duarte

Graduou-se em Bacharel em Filosofia em 2001 e Mestre em Filosofia em 2004. Suas áreas de interesse são Filosofia da Linguagem, Filosofia da Matemática, Ontologia.

Ficha Catalográfica

Duarte, Alessandro Bandeira

Lógica e aritmética na filosofia da matemática de Frege / Alessandro Bandeira Duarte ; orientador: Oswaldo Chateaubriand Filho. – 2009.
2 vs. ; 30 cm

Tese (Doutorado em Filosofia)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.
Inclui bibliografia

1. Filosofia – Teses. 2. Axioma IV. 3. Axioma V. 4. Princípio de Hume. 5. Valores de verdade. 6. Gottlob Frege. I. Chateaubriand Filho, Oswaldo. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Filosofia. III. Título.

CDD: 100

Dedicamos a presente tese ao querido e saudoso amigo
Arno Viero

Agradecimentos

À Eleonora, pela paciência e carinho;

À CAPES e à FAPERJ;

Aos Profs. Luiz Carlos P. D. Pereira, Dirk Greimann e Danilo Marcondes de Souza Filho que se dispuseram a participar da Banca Examinadora;

Ao Prof. Marco Ruffino, pela sua amizade;

Aos Profs. Gregory Landini e Richard Heck pelas discussões sobre o papel do axioma IV na lógica de Frege;

À Prof(a) Andrea Loparic pela sua inestimável ajuda nas provas de independência;

Finalmente, ao meu orientador Prof. Oswaldo Chateaubriand Filho pela sua orientação e paciência.

Resumo

Duarte, Alessandro Bandeira; Chateaubriand, Oswaldo. **Lógica e Aritmética na Filosofia da Matemática de Frege**. Rio de Janeiro, 2009. 351 p. Tese de Doutorado – Departamento de Filosofia, Pontifícia Universidade Católica.

Nos *Fundamentos da Aritmética* (§68), Frege propõe definir explicitamente o operador-abstração 'o número de...' por meio de extensões e, a partir desta definição, provar o Princípio de Hume (**PH**). Contudo, a prova imaginada por Frege depende de uma fórmula (**BB**) não provável no sistema em 1884. Acreditamos que a distinção entre sentido e referência e a introdução dos valores de verdade como objetos foram motivada para justificar a introdução do Axioma IV, a partir do qual um análogo de (**BB**) é provável. Com (**BB**) no sistema, a prova do Princípio de Hume estaria garantida. Concomitantemente, percebemos que uma teoria unificada das extensões só é possível com a distinção entre sentido e referência e a introdução dos valores de verdade como objetos. Caso contrário, Frege teria sido obrigado a introduzir uma série de **Axiomas V** no seu sistema, o que acarretaria problemas com a identidade (Júlio César). Com base nestas considerações, além do fato de que, em 1882, Frege provara as leis básicas da aritmética (carta a Anton Marty), parece-nos perfeitamente plausível que as estas provas foram executadas adicionando-se o **PH** ao sistema lógico de *Begriffsschrift*. Mostramos que, nas provas dos axiomas de Peano a partir de **PH** dentro da conceitografia, nenhum uso é feito de (**BB**). Destarte, não é necessária a introdução do Axioma IV no sistema e, por conseguinte, não são necessárias a distinção entre sentido e referência e a introdução dos valores de verdade como objetos. Disto, podemos concluir que, provavelmente, a introdução das extensões nos *Fundamentos* foi um ato tardio; e que Frege não possuía uma prova formal de **PH** a partir da sua definição explícita. Estes fatos também explicam a demora na publicação das *Leis Básicas da Aritmética* e o descarte de um manuscrito quase pronto (provavelmente, o livro mencionado na carta a Marty).

Palavras-chave

Axioma IV; Axioma V; Princípio de Hume; Valores de Verdade; Gottlob Frege.

Abstract

Duarte, Alessandro Bandeira; Chateaubriand, Oswaldo (Advisor). **Logic and Arithmetic in Frege's Philosophy of Mathematics**. Rio de Janeiro, 2009. 351 p. Doctoral Thesis – Departamento de Filosofia, Pontifícia Universidade Católica.

In The Foundations of Arithmetic (§68), Frege proposes to define explicitly the abstraction operator 'the number of …' by means of extensions and, from this definition, to prove Hume's Principle (HP). Nevertheless, the proof imagined by Frege depends on a formula (BB), which is not provable in the system in 1884. we believe that the distinction between sense and reference as well as the introduction of Truth-Values as objects were motivated in order to justify the introduction of Axiom IV, from which an analogous of (BB) is provable. With (BB) in the system, the proof of HP would be guaranteed. At the same time, we realize that a unified theory of extensions is only possible with the distinction between sense and reference and the introduction of Truth-Values as objects. Otherwise, Frege would have been obliged to introduce a series of **Axioms V** in his system, what cause problems regarding the identity (Julius Caesar). Based on these considerations, besides the fact that in 1882 Frege had proved the basic laws of Arithmetic (letter to Anton Marty), it seems perfectly plausible that these proofs carried out by adding to the *Begriffsschrift*'s logical system. We show that in the proofs of Peano's axioms from **HP** within the *begriffsschrift*, (**BB**) is not used at all. Thus, the introduction of Axiom IV in the system is not necessary and, consequently, neither the distinction between sense and reference nor the introduction of Truth-Values as objects. From these findings we may conclude that probably the introduction of extensions in *The Foundations* was a late act; and that Frege did not hold a formal proof of HP from his explicit definition. These facts also explain the delay in the publication of the *Basic Laws of Arithmetic* and the abandon of a manuscript almost finished (probably the book mentioned in the letter to Marty).

Keywords

Axiom IV; Axiom V; Hume's Principle; Truth-Values; Gottlob Frege.

Sumário

1
Introdução[1]

No século XIX, iniciou-se o movimento que ficou conhecido por aritmetização da Análise. A ideia de alguns matemáticos desse período era tornar esta ciência um campo matemático autônomo. Até então, seus teoremas eram "provados" recorrendo-se às evidências ou às intuições geométricas e, nesse sentido, a análise era dependente da Geometria[2] [3].

Neste processo de aritmetização da Análise, era extremamente importante definir os números reais por meios puramente aritméticos. Além disso, era necessário, a partir desta definição, provar as propriedades pertencentes a estes números sem recorrer à Geometria[4]. No livro *Continuity and Irrational Numbers* (1872),

1 Utilizaremos as seguintes abreviações para os livros de Frege: *Begriffsschrift und andere Aufsätze* (1998) - **BS**; *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884) – **GLA**; *Grundgesetze der Arithmetik I* (1998) – **GGAI**; *Grundgesetze der Arithmetik II* (1998) – **GGAII**; E as seguintes abreviações para as traduções: *Conceptual Notation and Related Articles* (1972) – **CN**; *Foundations of Arithmetic* (1980)- **FA**; e *The Basic Laws of Arithmetic* (1964)- **BLA**.

2 Dedekind (1963, pp. 1-2), por exemplo, escreve: "As professor in the Polytechnic School in Zürich I found myself for the first time obliged to lecture upon the elements of the differential calculus and felt more keenly than ever before the lack of a really scientific foundation for arithmetic. In discussing the notion of the approach of a variable magnitude to a fixed limiting value, and especially in proving the theorem that every magnitude which grows continually, but not beyond all limits, must certainly approach a limiting value, I had recourse to geometric evidences. Even now such resort to geometric intuition in a first presentation of the differential calculus, I regard as exceedingly useful, from the didactic standpoint, and indeed indispensable, if one does not wish to lose too much time. But that this form of introduction into the differential calculus can make no claim to being scientific, no one will deny. For myself this feeling of dissatisfaction was so overpowering that I made the fixed resolve to keep meditating on the question till I should find a purely arithmetical and perfectly rigorous foundation for the principles of infinitesimal analysis. The statement is so frequently made that the differential calculus deals with continuous magnitude, and yet an explanation of this continuity is nowhere given; even the most rigorous expositions of the differential calculus do not base their proofs upon continuity but, with more or less consciousness of the fact, they either appeal to geometric notions or those suggested by geometry, or depend upon theorems which are never established in a purely arithmetic manner. Among these, for example, belongs the above-mentioned theorem, and a more careful investigation convinced me that this theorem, or any one equivalent to it, can be regarded in some way as a sufficient basis for infinitesimal analysis. It then only remained to discover its true origin in the elements of arithmetic and thus at the same time to secure a real definition of the essence of continuity".

3 Uma das primeiras tentativas feitas para mostrar que a análise não dependia de intuições ou conceitos geométricos foi a de Bernard Bolzano quando ele provou, em 1817, de forma puramente analítica, o **Teorema do Valor Intermediário**. De fato, Bolzano era crítico à ideia de Kant de que a matemática era sintética *a priori*, portanto, *a fortiori*, defendia a tese segundo a qual a aritmética não dependia de qualquer tipo de intuição. Ao provar o **Teorema do Valor Intermediário** por meios analíticos a partir de sua definição de continuidade, Bolzano desejava mostrar que a intuição não desempenhava qualquer papel nas provas dos teoremas da análise. Cf. "Kant, Bolzano and the Emergence of Logicism" (1982) de Albert Coffa.

4 A propriedade mais importante é que os números reais formam um conjunto contínuo, sem lacunas. Essa propriedade não é satisfeita pelos números racionais. Estes, como os reais, formam um conjunto denso, ou seja, dados quaisquer dois números racionais a e b, existe sempre um número racional c entre eles, o que implica a existência de infinitos números entre a e b. Contudo, o conjunto dos racionais tem lacunas, "buracos". Por exemplo, $\sqrt{2}$ não corresponde, como

por exemplo, Dedekind assume os números racionais e suas propriedades como já conhecidas e, a partir daí, ele mostra como definir - ou criar, sua palavra preferida - os números irracionais. Não é nosso objetivo entrar aqui nos detalhes do procedimento de Dedekind[5], o que queremos enfatizar é que a aritmetização sugerida por ele neste livro só poderia ser bem-sucedida, se os números racionais pudessem ser definidos e suas propriedades pudessem ser derivadas por meios puramente aritméticos.

Em outras palavras, se a definição dos números racionais e as provas de suas propriedades dependessem da intuição geométrica, o processo de aritmetização da análise estaria fadado ao fracasso. De alguma forma, a Análise dependeria da Geometria e não seria uma ciência autônoma.

Portanto, era também necessário definir os números racionais e provar suas propriedades por meios puramente aritméticos. Há muitos meios de se proceder. Landau, por exemplo, no seu livro *Foundations of Analysis* (1951), assume os axiomas de Dedekind-Peano e prova uma série de fatos sobre os números naturais[6]. Depois, ele define uma fração como um par de números naturais:

$$\frac{x_1}{x_2} =_{def} (x_1, x_2)\text{, onde } x_1 \text{ e } x_2 \text{ são números naturais}^{7}$$

Então, Landau define quando duas frações são equivalentes:

---

já provado há cerca de 2400 anos atrás, a nenhum número racional.

5 Dedekind obtém os números irracionais por meio de cortes de números racionais. Em termos modernos, um corte é um conjunto X de números racionais que deve satisfazer as seguintes condições: (1) X não é vazio e é um subconjunto próprio do conjunto dos números racionais; (2) X é fechado “para baixo”, isto é, se x for um número racional que pertence a X e y for um número racional que é menor que x, então y pertencerá a X; e (3) X não tem maior elemento. O seguinte conjunto representa um corte: o conjunto dos números racionais x tais que x é menor que 0 (racional) – $\{x{:}x<0\}$. Este conjunto não é vazio e é um subconjunto próprio do conjunto dos números racionais. Claramente, este conjunto é fechado “para baixo”. E este conjunto não tem maior elemento. Este último fato é provado, porque os números racionais formam um conjunto denso. Assim, dado um número racional z muito próximo do número racional 0 é possível construir um outro número z' tal que $z<z'<0$. Este corte define o número real 0.

6 Dentre estes, os mais importantes são: as leis comutativas e associativas da adição e da multiplicação, a transitividade da relação de ordenação (*ser maior que*) e a lei distributiva da multiplicação sobre a soma.

7 Landau assume que o primeiro número natural é o 1. Assim, ele não necessita restringir o denominador da fração.

$$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2} =_{def} x_1.y_2 = y_1.x_2$$

É importante mencionar que ‘ $x_1.y_2 = y_1.x_2$ ’ é uma espécie de relação de equivalência[8]:

(**Reflexividade**): $\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{x_1}{x_2}$ se e somente se $x_1.x_2 = x_1.x_2$. Obviamente, $x_1.x_2 = x_1.x_2$.

(**Simetria**): Assuma que $\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}$, ou seja, $x_1.y_2 = y_1.x_2$.Pela lei de identidade, temos $y_1.x_2 = x_1.y_2$. Por meio da definição, isto é: $\frac{y_1}{y_2} \sim \frac{x_1}{x_2}$.

(**Transitividade**): Para provar a transitividade, temos de assumir que $\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}$ e $\frac{y_1}{y_2} \sim \frac{z_1}{z_2}$, ou seja, (1) $x_1.y_2 = y_1.x_2$ e (2) $y_1.z_2 = z_1.y_2$. Na aritmética dos números naturais, temos o seguinte teorema: se $x=y$ e $z=w$, então $x.z=y.w$. Assim, $(x_1.y_2).(y_1.z_2) = (y_1.x_2).(z_1.y_2)$. A partir de aplicações das leis comutativas e associativas da multiplicação, obtemos $(x_1.z_2)(y_1.y_2) = (z_1.x_2)(y_1.y_2)$. E disto, chegamos a $(x_1.z_2) = (z_1.x_2)$, ou seja, $\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{z_1}{z_2}$.

A partir das definições acima e das propriedades dos números naturais, Landau define ordenação[9], adição, multiplicação[10] e diferença[11] em relação às frações.

Por exemplo, a adição entre duas frações $\frac{x_1}{x_2}$ e $\frac{y_1}{y_2}$ é definida por:

---

8 Relações de equivalência são relações que são reflexivas, simétricas e transitivas.

9 Uma fração x_1/x_2 é maior que uma fração y_1/y_2 quando $x_1.y_2 > y_1.x_2$, onde ‘>’ é a relação ‘maior que’ definida para os números naturais. Como x_1, x_2, y_1 e y_2 são números naturais, a relação acima depende da multiplicação dos números naturais e da relação de ordenação entre números naturais.

10 A multiplicação entre frações é definida por meio da multiplicação entre números naturais: $x_1/x_2 \times_f y_1/y_2 =_{def} x_1 \times y_1/x_2 \times y_2$.

11 A definição da diferença entre frações depende do seguinte teorema (teorema 67, pág. 29): dadas duas frações x_1/x_2 e y_1/y_2, se a primeira é maior que a segunda, então existe uma única fração u_1/u_2 cuja soma com y_1/y_2 é equivalente a x_1/x_2. Esta fração u_1/u_2 é chamada a diferença entre x_1/x_2 e y_1/y_2.

$$\frac{x_1}{x_2} +_f \frac{y_1}{y_2} =_{def} \frac{x_1 y_2 + y_1 x_2}{x_2 y_2}$$ [12]

A lei comutativa da adição entre frações, isto é, $\frac{x_1}{x_2} +_f \frac{y_1}{y_2} \sim \frac{y_1}{y_2} +_f \frac{x_1}{x_2}$, depende apenas das propriedades comutativas da soma e da multiplicação entre números naturais. Por exemplo, assuma que $\frac{x_1}{x_2} +_f \frac{y_1}{y_2}$. Pela definição da adição entre frações, temos

$$\frac{x_1 y_2 + y_1 x_2}{x_2 y_2}$$

Pela lei comutativa da adição dos números naturais, isso é equivalente a

$$\frac{y_1 x_2 + x_1 y_2}{x_2 y_2}$$

E pela comutatividade da multiplicação dos números naturais, a fórmula acima é equivalente a

$$\frac{y_1 x_2 + x_1 y_2}{y_2 x_2}$$

Mas, novamente, pela definição da adição entre frações, essa fórmula é equivalente a

$$\frac{y_1}{y_2} +_f \frac{x_1}{x_2}.$$

Em seguida, Landau define um número racional (positivo) como o conjunto de todas as frações equivalentes a alguma dada fração. Dados os números racio-

12 Landau não usa um símbolo diferente para adição entre frações.

nais (positivos), ele define a ordenação, adição e multiplicação entre eles[13]. A adição e multiplicação dos números racionais são comutativas e associativas.

Landau prova o seguinte teorema: se um número racional *X* for maior que um número racional *Y*, então existirá um único número *U* tal que *Y*+*U*=*X*. Este teorema é provado, usando-se o teorema análogo em relação às frações mencionado na nota 9. Com este teorema a sua disposição, Landau define, então, a diferença entre dois números racionais, que é justamente este número racional *U*, obtendo, desse modo, todos os números racionais.

Os números inteiros são definidos por Landau como a classe de todas as frações equivalentes à fração $\frac{x}{1}$, onde *x* é qualquer número natural[14].

Outra maneira de se obter os números racionais aritmeticamente seria definindo a diferença entre naturais como um sendo também um par ordenado:

$$x_1 - x_2 =_{def} (x_1, x_2)$$

E, é claro, seguindo Landau, poderíamos definir quando duas diferenças são equivalentes:

$$\text{(Dif)}\ x_1 - x_2 \sim y_1 - y_2 =_{def} x_1 + y_2 = y_1 + x_2$$

Obviamente, a relação '$x_1 + y_2 = y_1 + x_2$' é uma relação de equivalência. Podemos definir a adição entre duas diferenças por meio da adição entre números naturais:

13 Os números racionais são definidos como classes (de equivalência) de todas as frações equivalentes a uma dada fração. Assim, as definições de ordenação, adição e multiplicação entre números racionais dependeriam apenas da ordenação, adição e multiplicação de apenas uma das frações pertencentes às classes de equivalência. Por exemplo, o número racional (representado por) 2/3 é a classe de todas as frações equivalentes a 2/3: {2/3, 4/6, 6/9, 8/12,...}; o número racional (representado por) 4/7 é a classe de todas as frações equivalentes a 4/7: {4/7, 8/14, 12/21, 16/28,...}. Agora, a ordenação, a soma e a multiplicação destes dois números racionais dependem apenas da ordenação, soma e multiplicação de uma destas frações pertencentes a estas classes de equivalência. Assim, o número racional obtido pela multiplicação entre 2/3 e 4/7 é classe de todas as frações equivalentes, por exemplo, a 8/21: o conjunto {8/21, 16/42, 24/63,...}.

14 Também é provado o teorema que os números racionais formam um conjunto denso (teorema 91). Este teorema é facilmente provado, uma vez que temos uma prova análoga sobre frações (teorema 55): dadas duas frações x_1/x_2 e y_1/y_2, tal que $x_1/x_2 < y_1/y_2$, então existe uma fração z_1/z_2 tal que $x_1/x_2 < z_1/z_2 < y_1/y_2$.

$$x_1 - x_2 +_I y_1 - y_2 =_{def} x_1 + y_1 - x_2 + y_2$$ [15]

Lembremos que '$x_1 - x_2$' representa um par ordenado, portanto' $x_1 + y_1 - x_2 + y_2$ é o par $(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$. Como Landau fez em relação aos racionais, poderíamos definir, de forma análoga, os inteiros como a classe de todas as diferenças equivalentes a uma dada diferença. Assim, por exemplo, o número inteiro 0 seria a classe de todas as diferenças equivalentes à diferença 1-1. Qualquer uma das diferenças da forma *n-n*, onde *n* é um número natural, poderia ser usada. Percebamos que *n-n* é equivalente a 1-1, uma vez que *n*+1=1+*n*.

Os números racionais podem ser definidos a seguir em uma forma muito próxima à de Landau, mas agora assumindo que as frações são pares de números inteiros, e tomando-se o cuidado de se restringir o denominador - o segundo elemento do par ordenado - que não pode ser o número inteiro 0.

A discussão informal acima tem o único propósito de evidenciar que a aritmetização da Análise depende, em última instância, dos números naturais e suas propriedades[16] [17], depende da autonomia da Aritmética dos números naturais. Se os números naturais fossem dados pela intuição geométrica, então a Análise seria dependente, de alguma forma, da Geometria.

O processo de aritmetização não foi, contudo, homogêneo. De um lado, havia matemáticos que estavam satisfeitos com a autonomia da Aritmética e da Análise em relação à Geometria, embora pudessem aceitar que algum outro tipo de in-

---

15 A multiplicação entre diferenças pode ser definida por meio da multiplicação e adição entre naturais da seguinte forma: x_1-x_2 $\times_I$ y_1-y_2 $=_{def}$ $x_1.y_1 + x_2.y_2 - x_2.y_1 + x_1.y_2$. Ou seja, a diferença correspondendo ao par ordenado $(x_1.y_1 + x_2.y_2, x_2.y_1+x_1.y_2)$.

16 O processo de aritmetização tem um forte aspecto reducionista. Os números reais e suas propriedades são reduzidos aos números racionais (conjuntos de racionais) e suas propriedades. Estes são reduzidos aos números naturais e suas propriedades. Portanto, os números reais são reduzidos aos números naturais e suas propriedades. Por exemplo, Dedekind (1872, pág. 10) escreve: "Just as negative and fractional rational numbers are formed by a new creation, and as the laws of operating with these numbers must and can be *reduced* to the laws of operating with positive integers, so we must endeavor completely to define irrational numbers by means of the rational numbers alone. The question only remains how to do this" (Nosso grifo).

17 Na verdade, implicitamente é assumida a existência de outros objetos matemáticos: pares ordenados de números naturais e conjuntos de números racionais. Na teoria de conjuntos, pares ordenados são também reduzidos a certos tipos de conjunto. Os números naturais, inteiros, racionais e reais também são certos tipos de conjuntos. Ou seja, na teoria de conjuntos, a aritmética inteira é reduzida aos conjuntos e suas propriedades.

tuição diferente do geométrico fosse necessário para construir os conceitos aritméticos[18] [19].

Do outro, existia um grupo que desejava extirpar qualquer tipo de intuição da Aritmética, seja geométrica ou não. A este grupo pertenciam, por exemplo, Bolzano, Frege e Dedekind[20].

O empecilho ao processo de aritmetização, pelo menos no sentido do último grupo mencionado acima – extirpar qualquer tipo de intuição da aritmética -, é que, na *Crítica da Razão Pura* (**CRP**, 1997), Kant argumentou a favor da tese segundo a qual a matemática pura é sintética *a priori*[21]. Isto significava que,

---

18 Entre estes matemáticos, poderíamos mencionar Leopold Kronecker (1823-1891) que admitia que os números naturais poderiam ser acessados por meio de uma intuição direta. De acordo com ele, a partir dos números naturais, os demais números poderiam ser construídos. Kronecker é considerado como um precursor do intuicionismo matemático.

19 Os matemáticos formalistas - assim chamados por Frege (por exemplo, **GLA**, §§92-109; **GGAII**, §§86-137) - também poderiam ser considerados como participantes do movimento da aritmetização da Análise. De acordo com eles, os números naturais seriam os próprios numerais. Os demais números são obtidos estendendo o domínio por meio de operações matemáticas. Como é bem conhecido, as operações de adição e multiplicação são fechadas sobre os números naturais. Isto quer dizer que dados quaisquer dois números naturais a e b, $a+b$ e $a.b$ representam também números naturais. Por outro lado, as operações de subtração e divisão não são fechadas sobre os números naturais, ou seja, nem toda subtração e divisão entre quaisquer dois números naturais a e b resultam em um número natural. Por exemplo, assuma que a e b são números naturais e que a é maior que b. A subtração de b por a não representa qualquer número natural. De acordo com isto, o formalista estende o domínio dos números, introduzindo símbolos da forma $-a$, onde a é um número natural. E a união de todos os números naturais com os números da forma $-a$, representa o conjunto dos números inteiros. Da mesma maneira, a operação de divisão não é fechada sobre os números inteiros. Isto significa que dados quaisquer dois números inteiros A e B, nem sempre a divisão entre eles resulta em um número inteiro. Se A e B são números inteiros e A é maior que B, por exemplo, então B dividido por A não representa nenhum número inteiro. Assim, eles estendem o domínio incluindo agora numerais que tem a forma $\frac{B}{A}$, onde A e B são inteiros. A união dos números inteiros com os números da forma $\frac{B}{A}$ constitui o conjunto dos números racionais. E assim por diante. Os reais são obtidos, porque a operação de exponenciação não é fechada sobre os números racionais. Sabemos que não existe nenhum número racional que elevado ao quadrado resulta no número 2. Assim, o domínio é estendido, introduzindo-se, no caso do nosso exemplo, o símbolo $\sqrt{2}$.

20 Dedekind (1963, pág. 31) escreve: "In science nothing capable of proof ought to be accepted without proof. Though this demand seems so reasonable yet I cannot regard it as having been met even in the most recent methods of laying the foundations of the simplest science; viz., that part of logic which deals with the theory of numbers. In speaking of arithmetic (algebra, analysis) as a part of logic *I mean to imply that I consider the number-concept entirely independent of the notions or intuitions of space and time*, that I consider it an immediate result from the laws of thought" (Nosso grifo).

21 Na introdução de **CRP** (A6-10/B10-14), Kant faz a distinção entre juízos analíticos e sintéticos. A principal característica que um juízo sintético tem é a de estender nosso conhecimento, enquanto juízos analíticos seriam meras identidades, a partir das quais nada novo é obtido. Os juízos da matemática, em particular, da aritmética, parecem estender o nosso conhecimento. Este fato exclui, de acordo com Kant, que seus juízos sejam analíticos.

embora esta ciência não dependesse de fatos empíricos para provar suas proposições, ela seria dependente das intuições puras de tempo e de espaço (**CRP**, B 14-16; A 39/ B 55-6; A 716/B 744). Portanto, em particular, a Aritmética dos números naturais dependeria de algum tipo de intuição[22] [23].

Não nos é totalmente claro se, para Kant, a Aritmética dependeria apenas da intuição temporal, ou se esta ciência também seria dependente da intuição espacial. No livro *Prolegomena to Any Future Metaphysics* (1783), há a seguinte passagem:

> Arithmetic accomplishes its concept of number by *the successive addition of units in time*[24] (pág. 32)

Em **CRP** (A 411-/B438), ele escreve:

> Para agora dispormos a tábua das ideias segundo a das categorias, tomamos em primeiro lugar os dois *quanta* originários de toda a nossa intuição, o tempo e o espaço. O tempo é em si uma série (*e a condição formal de todas as séries*[25]) pelo que, em relação a um presente dado, podem distinguir-se nele *a priori* os *antecedentia*, como condição (o passado) dos *consequentia* (o futuro).

A progressão infinita que os números naturais formam dependeria, de algum modo, no entendimento de Kant, da série infinita dada pela intuição pura do tempo.

---

22 Demopoulos (1994, 75) escreve: "There is an understandable tendency to pass over such passages, because of the extreme difficulty of the Kantian concept of an a priori intuition. But I think it is possible to understand Frege's thought without entering into a detailed investigation of this concept. It suffices to recall that for the Kantian mathematical tradition of the period, our a priori intuitions are of space and time, and that the study of space and time falls within the provinces of geometry, kinematics, and perhaps, mechanics. It then follows that the dependence of a basic principle of arithmetic on some a priori intuition would imply that arithmetic lacks the autonomy and generality we associate with it: To establish its basic principles, we would have to appeal to our knowledge of space and time, and then arithmetical principles, like the connectedness of the ancestral and mathematical induction, would ultimately come to depend on our knowledge of spacial and temporal notions for their full justification".

23 Depois de introduzir a sua definição de hereditariedade em *Begriffsschrift* (**BS**), Frege escreve o seguinte que corrobora a nossa afirmação: "This sentence [a definição] is different from those considered previously since symbols occur in it which have not been defined before; it itself gives the definition. It does not say, "The right side of equation has the same content as the left"; but, "They are to have the same content.". This sentence is therefore not a judgement; and consequently, to use the Kantian expression, also *not a synthetic judgement*. I make this remark because Kant holds that all judgements of mathematics are synthetic. Now if (69) were a synthetic judgement, the propositions derived from it would be synthetic also". (pp. 167-8).

24 Nosso grifo.

25 Nosso grifo.

Por outro lado, a intuição espacial parece desempenhar algum papel na formação das unidades a serem contadas. Por exemplo, em **CRP** (A 142-3 / B 182), Kant escreveu:

> A imagem pura de todas as quantidades (*quantorum*) para o sentido externo é *o espaço*, e a de todos os objetos dos sentidos em geral é *o tempo*. O *esquema* puro da quantidade (*quantitatis*), porém, como conceito do entendimento, é o número, que é uma representação que engloba a *adição sucessiva da unidade* à unidade (do homogêneo). Portanto, o número não é mais do que a unidade da síntese que eu opero entre o diverso de uma intuição homogênea em geral, pelo fato de eu produzir o próprio tempo na apreensão da intuição[26] [27].

Não queremos discutir aqui minuciosamente a Filosofia da Matemática de Kant, o que nos levaria muito além do escopo do nosso tema. O que queremos salientar, com as observações acima, é a necessidade dos representantes do segundo grupo supracitado de demonstrar, contra Kant, como a Aritmética dos números naturais não dependeria de qualquer intuição[28].

Em Duarte (2004, pp. 16-17), indicamos dois tipos de resposta a Kant: (**I**) mostrar como obtemos conhecimento das proposições da aritmética dos números naturais sem apelar a qualquer tipo de intuição; ou (**II**) reduzir a aritmética dos números naturais a algo mais básico que não apele implícita ou explicitamente à intuição[29].

26 Todas as traduções de **CRP** são do livro editado pela Fundação Calouste Gulbenkian.

27 Nosso grifo.

28 Na verdade, as afirmações de Kant podem voltar-se contra as posições do outro grupo. Se a afirmação acima estiver correta, de acordo com Kant, a aritmética dos números naturais dependeria de alguma forma da intuição espacial. Portanto, de alguma forma, os números naturais dependeriam da geometria. Assim, por exemplo, Kronecker deveria mostrar que a intuição que ele defende que temos dos números naturais não é (nem depende), de forma alguma, uma intuição geométrica.

29 Acreditamos que Dedekind poderia ter pretendido dar uma resposta como (**II**). Dedekind assume que aritmética é parte da lógica e independente das intuições de tempo e de espaço. Em *The Nature and Meaning of Numbers* (1963, pp. 31-115), ele assume os seguintes conceitos como sendo seus primitivos lógicos: os conceitos de objeto (seção I), de sistema (seção I) e de transformação de um sistema (seção II). Sistema é o que entendemos hoje por conjunto, transformação de um sistema é o que entendemos por função. Implicitamente, Dedekind parece assumir os axiomas da compreensão e extensionalidade (seção I) para conjuntos. Ele define a relação de subconjunto, subconjunto próprio, união arbitrária e interseção arbitrária (seção I). Também é definido o conceito de similaridade de uma transformação (seção III) – em termos mais contemporâneos, o conceito de uma função ser um-para-um. A partir de seus primitivos e das definições precedentes, Dedekind também define o conceito de cadeia (seção IV): um sistema (conjunto) S é uma cadeia em relação a uma transformação ϕ quando é fechada sob ϕ, ou seja, um sistema S é uma cadeia em relação a ϕ quando o resultado da aplicação de ϕ a todos os elementos de S é um elemento de S. Dedekind define o conceito de infinito (seção V): um sistema S é infinito quando ele é similar a um de seus subconjuntos próprios. A definição de infinito é puramente lógica e obtida por meio apenas de seus primitivos lógicos. O grande

Os dois tipos de resposta acima não são equivalentes. É possível argumentar a favor do caráter não-intuitivo da aritmética dos números naturais sem reduzi-la *totalmente* a entidades mais básicas que não dependam da intuição[30]. Em Duarte (2004, pág. 17), sustentamos que o Logicismo de Frege era uma espécie de corolário do processo da aritmetização mencionado acima e argumentamos que Frege pretendia reduzir os conceitos aritméticos a conceitos lógicos, que não dependeriam da intuição, e que, portanto, ele pretendia dar um tipo de resposta como (**II**) a Kant.

Embora o que foi afirmado em Duarte (2004) não esteja incorreto, tentaremos mostrar no capítulo **3** que Frege cogitou também dar um tipo de resposta como (**I**) acima, derivando as leis básicas da Aritmética do **Princípio de Hume**. Estas possíveis derivações são apresentadas, de forma quase completa, no capítulo **4**.

Também no capítulo **3,** analisaremos as razões formais que levaram Frege a fazer a distinção entre sentido e referência. Mostraremos de que maneira a introdução dos valores de verdade como objetos simplifica seu sistema de lógica.

No capítulo **2**, tratamos da teoria lógica de **BS**, a qual será de suma importância no entendimento das questões que serão levantadas em **3** e das provas executadas em **4** e nos apêndices.

---

problema no logicismo de Dedekind encontra-se na prova da existência de, pelo menos, um sistema infinito (teorema 66). O teorema 66 é imprescindível para a prova da existência de um sistema (conjunto) simplesmente infinito, que é definido (na seção VI). Um sistema simplesmente infinito é um conjunto que produz, entre seus elementos, uma progressão infinita unidirecional por meio de uma transformação similar ϕ. Em outras palavras, é um conjunto que satisfaz os axiomas de Dedekind-Peano. Os números naturais são obtidos – ou criados, segundo Dedekind – por meio do processo de abstração sobre o sistema simplesmente infinito.

30 O Neo-Logicismo defendido por Crispin Wright poderia ser considerado como o tipo de resposta (I). Entretanto, a preocupação de Wright não é primariamente Kant, mas sim os argumentos defendidos por Benacerraf no artigo "Mathematical Truth" (1973).

2
Lógica e os fundamentos da Aritmética em BS

Em 1983, Crispin Wright publicou uma pequena monografia intitulada *Frege's Conception of Numbers as Objects* (**FC**), na qual ele defendia uma espécie de logicismo de inspiração Fregeana em relação à Aritmética. Sua tese baseava-se em um **Princípio de Abstração** (**PA**)[31] mencionado por Frege em **GLA**, §63, atualmente chamado **Princípio de Hume** (**PH**)[32] [33].

Wright percebeu que adicionando **PH,** juntamente com as definições Fregeanas de **Zero**, **Predecessor** e **Número Natural**, à lógica de segunda ordem clássica[34], obtemos uma teoria – hoje conhecida por **Aritmética de Frege** (**AF**)– na qual é possível derivar análogos dos axiomas de Dedekind-Peano da aritmética de segunda ordem (**AP2**)[35] [36]. A derivação destes axiomas dentro de **AF** é chamada hoje em dia de **Teorema de Frege** (**TF**)[37].

---

31 Um Princípio de Abstração é um princípio que tem a seguinte forma:
$$\Sigma(\alpha) = \Sigma(\beta) \leftrightarrow \alpha \approx \beta,$$
onde 'Σ...' é o operador-abstração, 'α' e 'β' são entidades do domínio primitivo e '$\approx$' é uma relação de equivalência que ocorre entre as entidades 'α' e 'β'. Estas entidades podem ser objetos, conceitos de primeira ordem, conceitos de segunda ordem, etc.

32 O nome **Princípio de Hume** foi cunhado por Boolos (1986). A justificativa é que antes de apresentar sua segunda definição do conceito de número em **GLA**, Frege cita uma passagem do livro *Tratado da Natureza Humana* (2000, Livro 1, Parte iii, seção I) do filósofo escocês David Hume. Contudo, este nome é enganador, uma vez que Frege não subscreve as teses Humeanas. Em particular, Frege assume a existência do número de um conceito sob o qual caem infinitos objetos que ele chamou de ∞_1 (**GLA**, §84), fato que Hume negaria. Números, na passagem mencionada do *Tratado da Natureza Humana*, são entendidos como sendo uma coleção finita de unidades. Dificilmente Hume aceitaria coleções infinitas de unidades e, consequentemente, números infinitos. Como veremos, o nome mais adequado poderia ser **Princípio de Cantor**.

33 Para os nossos propósitos, podemos apresentar **PH** na seguinte forma:
$$N_x F(x) = N_x G(x) \leftrightarrow F1 - 1G,$$
onde '$N_x ... x ...$' é o operador-abstração 'o número de...', 'F' e 'G' são conceitos de primeira ordem e '1-1' expressa a relação de equivalência de segunda ordem 'ser equinumérico a'.

34 Chamamos a lógica de segunda ordem de clássica quando o esquema de axioma de compreensão para conceitos é impredicativo.

35 **AP2** é obtida quando adicionamos à linguagem da lógica de segunda ordem clássica os primitivos '**0**' (uma constante individual), '**S**' (a constante de função 'sucessor') e '**Número Natural**' (uma constante de predicado) e os axiomas de Dedekind-Peano que regem estes primitivos. Estes axiomas podem ser expressos informalmente da seguinte forma: (1) zero é número natural; (2) o sucessor de um número natural é um número natural; (3) dois números naturais diferentes não têm o mesmo sucessor; (4) zero não é o sucessor de nenhum número natural; e, finalmente, (5) Axioma da Indução: para toda propriedade *F*, se ela se aplica a zero e se ela se aplica ao sucessor de um número natural sempre que ela se aplica a este último, então ela se aplica a todos os números naturais.

36 De fato, no artigo "Frege's Theory of Number" (1964), Charles Parsons já havia observado sobre a possibilidade de derivação dos axiomas de Dedekind-Peano a partir de **PH**.

37 O leitor interessado na derivação de **TF** em **FA** pode ler o apêndice de Duarte (2004). A mesma derivação é apresentada em **FC** (pp. 158-169), Boolos (1987, pp. 191-5), Boolos (1990, pp. 217-9), Tabata (2000) e Boolos; Heck Jr. (1997). Em **4**, mostraremos a derivação de **TF** adicionando o **PH** à lógica de **BS**. Há diferenças entre as nossas provas e as provas de Heck, Boolos

Ainda em **FC**, Wright mostrou que o **Paradoxo de Russell** não era derivável dentro de **AF**[38] e, por isto, ele conjecturou que esta teoria seria consistente[39]. Em sua resenha a **FC**, Burgess (1984, pág. 639) mostrou que existe um modelo no qual **PH** é verdadeiro e, assim, consistente. Tal modelo é dado pelo seguinte domínio de objetos: os números cardinais zero, um, dois,... e Aleph zero[40].

Três anos mais tarde, Boolos (1987) provou um resultado ainda mais forte, a saber, que **AF** é equiconsistente à **AP2**. Isto significa que a derivação de uma contradição em **AF** pode ser transformada em uma derivação de uma contradição em **AP2** e vice-versa[41]. De acordo com Boolos, pelo menos neste artigo, a equiconsistência entre **AF** e **AP2** mostra com certeza quase absoluta que **AF** e, consequentemente, **PH** são consistentes[42].

Wright notou que em **GLA**, logo após introduzir sua definição explícita do operador cardinalidade, Frege imediatamente propõe um esboço de prova de **PH**. A partir daí, nenhum outro uso é feito desta definição (e das extensões) nos esboços das provas dos demais teoremas de **GLA**, sendo todos estes esboços de provas elaborados por meio de **PH**[43] [44].

Este fato levantou a questão se Frege tinha plena consciência de **TF**. Em dois artigos interessantes - "*The Development of Arithmetic in Frege's Grundgesetze der Arithmetik* (1993) e "*Definition by Induction in Frege's Grundgesetze der Arithmetik*" (1995) -, Heck argumenta que apesar de Frege utilizar o **Axioma V** e, consequentemente, extensões de conceitos, em inúmeras provas de teoremas por todo **GGA**, a única prova que faz uso essencial desta lei nas provas dos axio-

e Wright.

38 **FC** (pp. 156-8)

39 **FC** (pág. 158).

40 Em sua resenha ao livro *Frege: Philosophy of Language* (1973) de Dummett, Peter Geach (1976, pp. 446-7) já mencionara que este domínio poderia satisfazer **PH**.

41 **TF** mostra que é possível interpretar **AP2** em **AF**. O que Boolos mostrou foi como interpretar **AF** em **AP2**, ou seja, ele mostrou como derivar dentro de **AP2** uma fórmula que corresponderia ao **PH**. Veja, por exemplo, Boolos (1987, pág. 190). Uma prova formal da equiconsistência entre **AF** e **AP2** é apresentada em Boolos; Heck Jr. (1997, pp. 334-6).

42 Boolos parece ter mudado de opinião posteriormente. Compare Boolos (1987, pág. 191) com Boolos (1997, pág. 313).

43 Na verdade, em **GLA**, §83, há menção de extensões de conceitos: "In order to prove the proposition I. of the last paragraph, we must show that *a* is the Number which belongs to the concept "member of the series of natural numbers ending with *a*, but not identical with *a*". And for this, again, it is necessary to prove that this concept has **an extension identical** with that of the concept "member of the series of natural numbers ending with d" (**FA**, pág. 95, nosso grifo).

44 Veja também Boolos; Heck Jr. (1997).

mas de Dedekind-Peano[45] é exatamente a prova de um análogo de **PH** (**GGAI**, teoremas 32 e 49) e que Frege conhecia tal fato [46].

Em Duarte (2004, pp. 38-39), há uma pequena digressão onde mencionamos uma carta que Frege enviou a Marty na qual ele afirmava que estava próximo de terminar um livro em que provava "os primeiros princípios sobre contar os números" (Frege, 1980, pp. 99-102)[47]. Originalmente, este livro fora escrito na conceitografia[48]. Porém, acatando uma sugestão de Carl Stumpf[49], Frege escreveu **GLA** na linguagem ordinária para servir como uma espécie de prolegômenos ao livro mencionado na carta a Marty. A partir disto, concluímos:

> Assim, apesar de ser uma especulação, parece plausível, dadas as evidências textuais, que Frege já tinha escrito grande parte de *Die Grundlagen der Arithmetik* em 1882 (na sua notação conceitual), não o publicou por receio de que este livro tivesse uma pequena aceitação (como ocorrera com *Begriffsschrift*) e Frege o publicou somente em 1884 depois de re-escrever o seu conteúdo na linguagem ordinária (seguindo a sugestão de Carl Stumpf). Novamente especulando, o livro escrito na notação conceitual em 1882 talvez seja o livro que Frege teve de descartar depois da introdução dos valores de verdade como objetos e da distinção entre sentido e referência (Duarte, 2004, pág. 40).

45 Certamente, há outros usos essenciais da Lei V em **GGA**. Por exemplo, na prova do teorema 1 (**GGAI**, pág. 74) e nas provas dos teoremas 219 (**GGAI**, pág. 185) e 251 (**GGAI,** pág. 195).

46 Heck Jr. (1993, pág. 259) é cuidadoso em afirmar que Frege era consciente de tal derivação dos axiomas de Dedekind-Peano em **GGA** usando apenas **PH** e sem usar extensões de conceitos, mas, posteriormente, ele escreve: "The second-order theory whose sole "non-logical" axiom is Hume's we call Fregean arithmetic: Fregean arithmetic is equiconsistent with second-order arithmetic and is thus almost certainly consistent. Frege's proofs of the axioms of arithmetic, in *Grundgesetze*, can thus be reconstructed as proofs in Fregean arithmetic: *Indeed, it can be argued that Frege knew full well that the axioms of arithmetic are derivable, in second-order logic, from Hume's principle*. That is to say: The main theorem of *Grundgesetze*, which George Boolos has rightly urged us to call Frege's theorem, is that Hume's principle implies the axioms of second-order arithmetic." (Heck Jr., 1995, pp. 296-7, nosso grifo).

47 Existe uma dúvida se esta correspondência foi endereçada a Anton Marty ou a Carl Stumpf (em 1882, ambos lecionavam na Universidade de Praga e eram colegas), ou se Frege enviou uma carta com conteúdos parecidos a ambos, uma vez que Carl Stumpf enviou uma missiva a Frege que parece ser uma resposta à carta enviada a Marty. Veja a introdução do editor (Frege, 1980, pág 99). Não obstante, não há dúvidas sobre veracidade da carta.

48 Na carta, Frege pediu a Marty que resenhasse **BS** em algum jornal especializado, porque isto facilitaria a publicação de outros trabalhos, em particular, de um livro que ele estava terminando de escrever.

49 Carl Stumpf escreve: "With regard to your work, to which I am looking forward with extraordinary interest, please do not take it amiss if I ask you whether it would not be appropriate to explain your line of thought first in ordinary language and then – perhaps separately on another occasion or in the very same book – in conceptual notation: I should think that this would make for a more favourable reception of *both* accounts. But I cannot, of course, judge this from a distance." (Frege, 1980, pág. 172).

Quando escrevemos esta passagem não tínhamos ideia de alguns fatos importantes em relação ao sistema lógico de **BS**, que provavelmente é o sistema no qual Frege provou os axiomas da Aritmética em 1882.

Em seu livro *Logical Forms I* (2001), Chateaubriand menciona o seguinte:

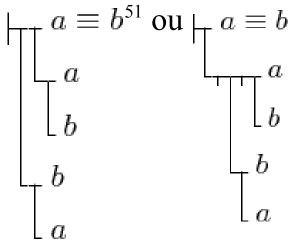
> Moreover, at the end of the preface (p.8) Frege says that he could have combined the two laws of double negation into the single formula
> (5) $\vdash (\neg\neg a \equiv a)$,
> which suggests that identity can also be used to express something like logical equivalence. Given Frege's conventions on the use of variables (p. 25), (5) is a universally quantified formula that is judged true for all conceptual contents. So for each specific sentence *A*, the conceptual contents $\neg\neg A$ and $-A$ are the same. *But, obviously, this does not hold for conditionality in general; i.e. from Frege's characterization of conditionality one cannot infer that if the relation of conditionality holds between the contents (of) A and B in both directions, then* $A \equiv B$. Since Frege does not introduce notions of logical implication and logical equivalence, we also have a question about the relation between identity and biconditionality (pág. 270, nosso grifo)

O mesmo ponto também foi enfatizado por Landini (1996):

> For my part, I consider that the notion of "sameness of conceptual content" Frege intended was simply the notion of replaceability in all contexts of the *Begriffsschrift*. Frege wrote (Frege, *1879*, 21):
> Now let $\vdash A \equiv B$ mean that *the sign A and the sign B have the same conceptual content, so that we can everywhere put B for A and conversely*.
> A version of Leibniz's Law is adopted as an axiom to govern the sign, $\vdash (a \equiv b) \rightarrow (fb \rightarrow fa)$ and this is explained by the meaning assigned to "$a \equiv b$". Now the sign '≡' was replaced by '=' in the *Grundgesetze*. So it is not insignificant that $\vdash \neg((a \rightarrow b) \rightarrow \neg(b \rightarrow a)) \rightarrow ((-a) = (-b))$ is equivalents to be intersubstituted *salva veritate*. Accordingly, we should not expect Frege to rail at what would be the analogue for the *Begriffsschrift*, viz., $\vdash \neg((a \rightarrow b) \rightarrow \neg(b \rightarrow a)) \rightarrow (a \equiv b)$.
> *This is not provable in the Begriffsschrift, to be sure*[50].(pp. 137-8, nosso grifo).

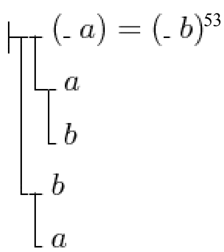
50 Nosso grifo.

Inicialmente, tentamos provar, dentro da conceitografia, a fórmula, a qual chamaremos (**BB**),



mencionada nas passagens de Chateaubriand e Landini acima. Depois de inúmeras tentativas frustradas, convencemo-nos completamente de que (**BB**) não era realmente provável. Neste caso, deveríamos apresentar uma prova de independência de (**BB**) em relação aos axiomas de **BS**[52]. Tal prova encontra-se no apêndice 1 da presente tese.

Em nossa tentativa frustrada de provar (**BB**), voltamos nossa atenção para a prova do teorema (**IVa**) em **GGAI** (pág. 68; **BLA**, pp. 115-7). (**IVa**) é a fórmula:



Em **GGA**, (**IVa**) é provável porque Frege introduziu no sistema um novo axioma que não se encontra em **BS**, o axioma **IV**:

51 Na notação contemporânea: $(a \supset b) \supset ((b \supset a) \supset (a \equiv b))$. Nesta fórmula, '$\equiv$' não deve ser confundido com 'se e somente se' da nossa linguagem. Mais adiante, o significado de '$\equiv$' será explicado.

52 No caso, os axiomas que comporiam o "cálculo proposicional" de Frege.

53 Não é possível traduzir esta fórmula para a linguagem contemporânea, uma vez que o simbolo '—', que designa um conceito, não ocorre nela. A ocorrência deste símbolo no consequente é extremamente importante, porque sem o mesmo o teorema IVa seria falso para algumas instâncias. Em **3**, discutiremos a linguagem de **GGA**.

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} (-\, a) = (-\, b) \\ \llcorner_{\top}\, (-\, a) = (_{\top}\, b) \end{array}$$ [54]

Um análogo desta fórmula

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} a \equiv b \\ \llcorner_{\top}\, a \equiv (_{\top}\, b) \end{array}$$ [55],

a qual chamaremos (**IV***), também não é provável em **BS** (apêndice 1). Assim, os meios de se provar (**BB**) usando (**IV***) de forma análoga aos de **GGA** não estão disponíveis em **BS**[56].

A fórmula

$$\vdash (_{\top\top}\, a \equiv a),$$

a qual chamaremos (**NN**) e que Frege menciona que poderia ser introduzida como um axioma de **BS**[57], também não é provável no sistema (apêndice 1). Em **GGA**, um análogo de (**NN**) é o teorema (**IVb**)

$$\vdash (-\, a) = (_{\top\top}\, a)$$

E, como no caso de (**IVa**), a prova de (**IVb**) depende do axioma **IV**[58]. Se (**BB**) fosse provável no sistema de **BS**, (**NN**) também seria provável, uma vez que em **BS** há os axiomas (**31**) e (**41**).

---

54 Novamente, não é possível expressar esta fórmula na linguagem lógica contemporânea. O uso do símbolo '—' no axioma IV é essencial, caso contrário haveria instâncias que o falsificariam. Uma vez que Frege faz a distinção entre sentido e referência, os símbolos '—*a*', '—*b*' e '$_{\top}\, b$' designam valores de verdade. Assim, o que o axioma IV afirma é que ou '—*a*' e '$_{\top}\, b$' designam o mesmo valor de verdade ou '—*a*' e '—*b*' designam o mesmo valor de verdade.

55 Uma vez que em **BS** não há ainda a distinção entre sentido e referência, esta fórmula afirma que ou '*a*' e '$_{\top}\, b$' expressam o mesmo conteúdo conceitual ou '*a*' e '*b*' expressam o mesmo conteúdo conceitual.

56 Se (**IV***) fosse provável em **BS**, então (**BB**) também o seria.

57 "I noticed only later that formulas (31) and (41) can be combined into the single formula

$$\vdash (_{\top\top}\, a \equiv a)$$

which makes even more simplifications possible" (**CN**, pág. 107).

58 Há, pelo menos, uma outra fórmula de **GGA** que não é provável em **BS**, uma vez que sua prova depende do axioma IV: $\vdash (a = b) = (b = a)$, cuja transcrição para a notação de **BS** seria $\vdash (a \equiv b) \equiv (b \equiv a)$. Com uma pequena modificação na tabela para '≡' dada no apêndice 1, é possível mostrar a independência desta fórmula em relação aos axiomas de **BS**.

O fato mais importante é que a prova de **PH** a partir da definição explícita do operador-abstração 'o número de...' por meio de extensões de conceitos (**GLA**, §73) parece depender implicitamente de (**BB**). Mas, o sistema lógico pressuposto em **GLA** é justamente o sistema lógico de **BS**, no qual (**BB**) não é provável. Poderíamos supor que Frege tivesse introduzido posteriormente (**BB**) ou, até mesmo (**IV***), como um axioma, talvez no livro escrito na conceitografia, o qual Frege tinha mencionado na carta enviada a Marty.

Porém, em nossa visão, a introdução de (**BB**) ou (**IV***) em **BS**, onde a distinção entre sentido e referência ainda não tinha sido feita, resulta em consequências extremamente indesejáveis para Frege[59].

Destarte, fomos levados a supor que a derivação dos primeiros princípios sobre contar os números” (axiomas de Peano) mencionada por Frege na carta a Marty poderia ter sido executada por meio do **PH**, assumindo-o como uma espécie de axioma ou um tipo de definição.

Contudo, observando as provas dos axiomas de Dedekind-Peano em **GGA**, percebemos que há muitos usos do teorema **IVa**. Portanto, se todos os usos de **IVa** (ou, pelo menos, alguns destes) nas provas dos axiomas de Dedekind-Peano em **GGA** fossem essenciais, então certamente as provas mencionadas por Frege em **GLA** dependeriam de (**BB**)[60].

Felizmente, nenhum uso do teorema **IVa** nas provas dos axiomas de Dedekind-Peano em **GGA** é essencial, exceto o uso na prova do **PH** a partir da definição explícita[61]. Assim sendo, é possível provar todos os teoremas mencionados

59 Por outro lado, a introdução de (**NN**) como um axioma em **BS** não parece ter consequências muito nocivas para o sistema.

60 Percebemos que há uma diferença entre as provas dadas em **GLA (**§75**)** e **GGAI** (§§98-9, pp. 128-9) do seguinte teorema: se nada cai sob um conceito *F*, então o número que pertence a ele é zero. Em **GLA**, Frege explicitamente afirma que devemos encontrar uma relação que correlaciona 1-1 os objetos que caem sob *F* (por hipótese nada cai sob ele) e os objetos que caem sob o conceito “ser diferente de si mesmo”. A correlação é trivialmente satisfeita por qualquer relação. Então, Frege propõe correlacionar os conceitos mencionados via identidade, que é uma relação 1-1 (veja em **4**, teorema 4). Em **GGA**, Frege prova esta proposição usando o teorema 96: se dois conceitos *F* e *G* são coextensivos, então os números que pertencem a eles são idênticos. Curiosamente, o teorema 96 é provável em **BS** + **PH** (veja apêndice). Mas, Frege não pode usá-lo para provar o teorema mencionado, dado que ele teria de usar (**BB**) para provar o seguinte: se nada cai sob *F*, então os conceitos *F* e “ser diferente de si mesmo” são coextensivos. E daqui, usando (96), obter: se nada cai sob *F*, então os números que pertencem aos conceitos *F* e “ser diferente de si mesmo” são idênticos. A prova de **GGA** é mais simples que a de **GLA**. Portanto, a diferença nas provas parece sugerir que Frege não tinha (**BB**) em **GLA.**

61 Certamente, há, pelo menos, um outro uso essencial do teorema (**IVa**) em **GGA**, a saber, na prova do teorema 1 (**GGAI**, pág. 74). Contudo, o teorema 1 não desempenha qualquer papel

em **GLA** (§§70-83) sem recorrer a (**BB**) (veja **4** da presente tese). Portanto, acreditamos que Frege conhecia **TF** desde 1882.

Os fatos mencionados acima explicariam também a dificuldade interpretativa que ocorre em **GLA**, relacionada com uma certa tensão que existe entre um dos princípios fundamentais do livro – o princípio do contexto – e o procedimento de Frege em **GLA**, §68, onde ele introduziu as extensões de conceitos e definiu explicitamente o operador-abstração "o número de...".

Em **GLA**, tudo nos leva a crer que Frege irá definir o operador-abstração contextualmente (via **PH**). O princípio do contexto é mencionado um pouco antes da introdução de **PH** (**GLA**, §62), o qual, parece-nos, sustentaria definições contextuais. Mas, de forma abrupta, Frege rejeita este tipo de definição e introduz as extensões de conceitos. Neste caso, porém, o princípio do contexto não parece mais desempenhar qualquer papel na definição do operador-abstração.

O que é mais estranho é que **GLA** foi escrito para ser uma espécie de prolegômeno ao livro mencionado na carta a Marty e, como tal, ele deveria ter argumentos suficientes para mostrar que extensões de conceitos eram "objetos lógicos". Entretanto, nada disso foi feito por Frege. Na famosa nota de rodapé da § 68 de **GLA**, Frege "assume que é conhecido o que é a extensão de um conceito".

Todavia, esta afirmação é totalmente desconfortável para um filósofo que na primeira parte de seu livro critica matemáticos e filósofos que tentaram definir números como aquilo que se aplica a coleções (classes, multiplicidades, conjuntos, etc.) de coisas (ou unidades), porque tais coleções seriam entidades físicas ou mentais e que, neste caso, números não teriam uma aplicação universal. Frege teria de argumentar por que extensões não seriam entidades físicas ou mentais, por que extensões não seriam as mesmas entidades que coleções, classes, multiplicidades, conjuntos, etc..

Certamente, depois de **GLA,** devido à introdução do **Axioma V** em seu sistema lógico, Frege estaria em posição de argumentar que extensões não eram entidades físicas, nem mentais, mas sim lógicas[62]. Portanto, parece plausível que, em

nas provas dos axiomas de Dedekind-Peano quando assumimos **PH** como axioma ou definição.

62 Em **GGA**, o **Axioma V** tem a seguinte forma:

$$z'fz = z'gz = (x)(fx = gx),$$

onde 'z'...z...' é o operador-abstração 'a extensão de...', 'f' e 'g' referem-se a funções de primeira ordem e '$(x)(fx{=}gx)$' é a formula que diz que as funções f e g são coextensivas (elas têm o mesmo resultado para qualquer valor como argumento).

1884, Frege não dispunha ainda de seu **Axioma V**, caso contrário por que ele não o teria mencionado para justificar a introdução das extensões?

Provavelmente, Frege não tinha uma prova formal de **PH** a partir da sua definição explícita do operador-abstração quando publicou **GLA** e a introdução das extensões de conceitos em **GLA** pode ter sido um ato tardio, quando grande parte deste livro já estava pronta[63].

Em um rascunho de um artigo intitulado "Formal Arithmetic Before Grundgesetze", Heck defende esta mesma posição[64]:

> What Boolos observed, however, was that the discussion and resolution of the Caesar objection is *so* independent of everything else that happens in *Die Grundlagen* that the book's intelligibility would suffer *not at all* were sections 66-69 and 73 simply deleted. A handful of minor changes would have to be made elsewhere (that last half section 107 would need deleting, too, for example), but that is all. Boolos was thus inclined to suppose that Frege's intention, when he began writing *Die Grundlagen*, and even for most of the time he was composing it, was to define numbers not explicitly but contextually, in terms of *HP*, and to derive axioms for arithmetic from *HP* in pure second-order logic. But, at some point in the process – perhaps under the influence of the Caesar objection, perhaps for some other reason he does not mention – Frege changed his mind and decided to define numbers explicitly, patching the manuscript with the mentioned material. (Heck Jr. (?), pág. 27)
>
> I thus conclude that, in the early manuscript of *Grundgesetze*, Frege did not define numbers explicitly at all but rather defined them contextually, in terms of *HP*. (Heck Jr(?), pág. 31)[65] [66].

A transcrição do **Axioma V** na notação contemporânea é:

$$z'Fz = z'Gz \leftrightarrow (x)(F(x) \leftrightarrow G(x)).$$

Aqui, '*F*' e '*G*' não se referem a funções de primeira ordem, mas sim conceitos de primeira ordem.

Um análogo do **Axioma V** na linguagem de **BS** seria:

$$z'Fz \equiv z'Gz \equiv (x)(Fx \equiv Gx)$$

63 A seguir, mencionaremos uma nota de Scholz (47) sobre a existência de um manuscrito no qual Frege define o operador-abstração 'o número de...' sem usar extensões. Scholz datou-o como tendo sido escrito depois de 1884, porém acreditamos que há um erro na data. O conteúdo do manuscrito mencionado por Scholz é exatamente o conteúdo existente nas seções §§63-8 de **GLA**. Isto nos leva a crer que este manuscrito seria uma espécie de inserção que Frege fez em **GLA**. Assim, poderíamos datá-lo entre 1883 e 1884. Na nota de Scholz, há uma expressão simbólica de **PH**. Além disso, de acordo com ele, há uma tentativa de Frege de definir extensões de conceitos. Isto fortemente sugere que Frege em 1884 não tinha o **Axioma V** e não sabia direito como tratar das extensões.

64 Em "To Err is Humean" (1999, pp. 254-5), Mark Wilson também sustenta esta hipótese.

65 Quando Heck nos enviou este artigo, ele afirmou que não mais sustentava as suas conclusões finais.

66 O "early manuscript" mencionado por Heck é justamente o livro referido na carta de Frege a Marty.

A nossa descoberta de que para provar **PH** a partir da definição explícita do operador-abstração em **GLA** é necessário (**BB**) também explicaria a demora na publicação de **GGA** e o descarte de um primeiro manuscrito (**BLA**, pp. 5-7), o qual acreditamos ser o livro mencionado na carta a Marty. A prova de **PH** depende completamente da distinção entre sentido e referência, da hipótese de que os valores de verdade são objetos e da introdução do axioma **IV** no sistema, justamente as mudanças que levaram Frege a descartar um manuscrito anteriormente escrito[67].

No seu artigo não-publicado, Heck supõe ser uma objeção a sua posição de que Frege introduziu as extensões tardiamente em **GLA** (e ter provado as leis da aritmética via **PH**) o fato de Frege ter demorado tanto tempo para publicar **GGA** e de ter descartado este primeiro manuscrito. De acordo com Heck,

> I thus conclude that, in the early manuscript of *Grundgesetze*, Frege did not define numbers explicitly at all but rather defined them contextually, in terms of *HP*. One might object that, if that were correct, it would have been no harder for him to patch the early manuscript than was for him to patch *Die Grundlagen*: All he would have had to do is add some material corresponding to section 73 of *Die Grundlagen*, in which *HP* is derived from the explicit definition. But then the early manuscript need not have been discarded (Heck Jr. (?), pág. 31).

Como resposta a esta objeção, Heck afirma:

> But to this objection one can reply in exactly the same way I replied earlier to a similar objection to the Immodest Proposal. It would be a mistake to suppose that the changes that forced Frege to discard his early manuscript had to be so tightly connected to his definition of number. Frege abandoned the earlier manuscript not because of changes in his definition of number but because of "internal changes" to [his] begriffsschrift. As we saw, the development of a sharp distinction between functions and objects was one such change: it required Frege to distinguished first – from second-order quantification and so to change how many of the steps in his formal arguments were justified. There were other changes, too. Together, they required Frege to make such extensive changes to his early manuscript that he decided it was easier just to start over (Heck, Jr.(?), pág. 31).

A objeção mencionada por Heck na passagem acima não nos parece correta. Não é uma simples questão de adicionar algum material correspondendo a § 73 de **GLA**.

A resposta de Heck à objeção também não nos parece correta, visto que, como já mencionamos, a prova de **PH** a partir da definição explícita exige as mu-

67 No capítulo **3**, também veremos que estas mudanças são necessárias para a prova do teorema 1 de **GGA**.

danças mencionadas por Frege em **GGA**. O problema é que Heck tem em mente a prova de **PH** a partir da definição explícita em lógica de segunda ordem clássica, na qual o **Axioma V** é a seguinte formula:

$$z'Fz = z'Gz \leftrightarrow (x)(F(x) \leftrightarrow G(x))$$ [68]

Contudo, a derivação que estamos considerando é quando adicionamos o seguinte análogo do **Axioma V**

$$z'fz \equiv z'gz. \equiv .(x)(fx \equiv gx)$$ [69]

à lógica de **BS**. Neste caso, não seria possível obter **PH**, dentro de **BS**, a partir da definição explícita do operador-abstração sem usar (**BB**)[70].

Em um artigo recente, Landini (2006) defendeu a tese segundo a qual Frege poderia ter definido os números cardinais como conceitos de segunda ordem no manuscrito mencionado na carta a Marty e que o mesmo foi descartado devido à introdução dos percursos de valores

> Frege reports that his new notion of course-of-values of functions introduces a departure from the original system which he was "forced" to discard. If we take the notion of extension, value-range, or course-of-value (which seem to be used synonymously) as part of the improvements, it is reasonable to assume that the original system was an account of cardinal numbers as second-level concepts (2006, pág. 208).

Certamente, a introdução dos percursos de valores foi a responsável pelas mudanças no sistema de **GGA**, mas não é óbvia a inferência de Landini de que Frege tinha definido anteriormente números cardinais como conceitos de segunda ordem. Na verdade, depois do **Paradoxo de Russell**, Frege cogitou defini-los desta forma, mas ele rapidamente rejeitou a definição[71].

68 Na verdade, em **GLA**, o operador-abstração parece ser definido como sendo a extensão de um conceito de segunda ordem. Neste caso, deveríamos assumir a seguinte instância do **Axioma V**:

$$Ext_Z\Phi(Z) = Ext_Z\Psi(Z) \leftrightarrow (M)(\Phi(M) \leftrightarrow \Psi(M)),$$

onde '$Ext_Z ...Z...$' é o operador-abstração 'a extensão de...', 'Φ' e 'Ψ' referem-se a conceitos de segunda ordem e '$(M)(\Phi(M) \leftrightarrow \Psi(M))$' expressa a relação de coextensividade entre estes conceitos.

69 O análogo do **Axioma V** para introduzir extensões de conceitos de segunda ordem seria expresso na linguagem de **BS** pela fórmula:

$$Ext_Z\Phi(Z) \equiv Ext_Z\Psi(Z) \equiv (M)(\Phi(M) \equiv \Psi(M)).$$

70 Para evitarmos desentendimentos, é preciso frisar que a teoria obtida quando adicionamos este análogo do **Axioma V** à lógica de **BS** é inconsistente. Neste caso, **PH** é trivialmente derivado no sistema. Obviamente, não é este tipo de derivação que Frege tinha em mente em **GLA**. Então quando dissermos que **PH** não é provável, entenda-se: não é provável na forma imaginada por Frege.

71 Em "*Notes for Ludwig Darmstaeder*" escrito em 1919, Frege escreve: "Since a statement of number based on counting contains an assertion about a concept, in a logically perfect

Frege afirma explicitamente que os números cardinais são objetos em **GLA**, mas poderia ser plausível que antes de 1884 ele tivesse assumido que estes fossem conceitos de segunda ordem.

Todavia, esta hipótese teria obrigado Frege a fazer mudanças substanciais nas definições dadas em **BS**. Logo, acreditamos que, já em **BS**, Frege assume implicitamente que números cardinais devem ser objetos[72].

Depois desta pequena introdução aos assuntos que serão tratados neste capítulo e no próximo capítulo, começaremos nossa análise de **BS**.

---

language a sentence used to make such a statement must contain two parts, first a sign for the concept about which the statement is made, and secondly a sign for a second level concept. These second level concepts form a series and there is a rule in accordance with which, if one of these concepts is given, we can specify the next. *But still we do not have in them the numbers of arithmetic; we do not have objects, but concepts. How can we get from these concepts to the numbers of arithmetic in a way that cannot be faulted? Or are there simply no numbers in arithmetic? Could the numerals help to form signs for these second-level concepts, and yet not be signs in their own right?"* (Frege, 1979, pp. 256-7, nosso grifo). Um pouco antes desta passagem, Frege afirma: "The miracle of number. The adjectival use of number-words is misleading. In arithmetic a number-word makes its appearance in the singular as a proper name of an object of this science; it is not accompanied by the indefinite article, but is saturated. Subsumption: "Two is a prime", not subordination. The combinations 'each two', 'all two' do not occur." (pág. 256).

72 No artigo "Boole's logical Calculus and the Concept-script" escrito entre 1880 e 1881 (Frege, 1979, pp. 9-46), Frege afirma explicitamente que números são objetos: "We may now express

$$2^4 = 16$$

by the sentences '2 is a fourth root of 16' or '**the individual 2 falls under the concept "4th root of 16**" or "belongs to the class of 4th roots of 16". But we may also just well say '4 is a logarithm of 16 to the base 2'. Here the 4 is being treated as replaceable and so we get the concept 'logarithm of 16 to the base 2':

$$2^x = 16.$$

The *x* indicates here the place to be occupied by **the sign for the individual falling under the concept**. We may now also regard the 16 in $x^4 = 16$ as replaceable in its turn, which we may represent, say, by $x^4 = y$. In this way we arrive at the concept of a relation, namely the relation of a number to its 4th power. **And so instead of putting a judgement together out of an individual as subject*** and an already previously formed concept as predicate, we do the opposite and arrive a concept splitting up the judgeable content.

*T**he cases where the subject is not an individual are completely different from these and are left out of consideration.**" (pp. 16-17, nosso grifo). Todavia, devemos ter cautelas com este artigo, uma vez que Frege parece tê-lo modificado em datas posteriores. Por exemplo, na página 17, Frege adicionou uma nota que diz: "***As I have since seen, Wundt makes a similar use of this image in his *Logik*". De acordo com os editores da edição alemã, a passagem da *Logik* de Wundt mencionada na nota foi introduzida apenas na terceira edição datada de 1906. Infelizmente, esta nota dos editores alemães não se encontra na tradução inglesa dos escritos póstumos. Segundo Janssen (2001), os editores alemães cometeram um erro, uma vez que a passagem mencionada por Frege na nota já aparece na segunda edição de *Logik* publicada em 1893: "Frege has a footnote on the last sentence of the citation: 'as I have seen since, Wundt uses in his Logik the same image in a similar way". The authors of the *German* edition of Frege's *Posthumous Writings* inform us that this picture of parts as atoms does *not* occurs in the first edition from 1880 of Wundt's *Logik*, but in the 3rd edition from 1906. This is not quite correct: the picture already occurs in the 2nd edition from 1893" (Janssen, 2001, pág. 126). A questão é que não podemos saber com certeza absoluta se Frege introduziu posteriormente outras possíveis modificações.

2.1.
Begriffsschrift

Em “*Methods of Calculation on an Extension of the Concept of Quantity*”(**MC**), Frege defendeu, pela primeira vez, o caráter não-intuitivo da Aritmética e a sua independência em relação à Geometria. Após afirmar que o conceito de quantidade, antes concebido geometricamente, tornou-se problemático, senão impossível, com a introdução de quantidades negativas e imaginárias, ele escreve:

> All that has remained is certain general properties of addition, which now emerge as the essential characteristic marks of quantity. The concept has thus gradually freed itself from intuition and made itself independent. This is quite unobjectionable, especially since its earlier intuitive character was at bottom mere appearance. (Frege, 1984, pág. 56)

> If a beginner is shown how to add angles, then he knows what they are. And it is clear that a concept as comprehensive and abstract as the concept of quantity cannot be an intuition. There is accordingly a noteworthy difference between geometry and arithmetic in the way in which their fundamental principles are grounded. The elements of all geometry constructions are intuitions, and geometry refers to intuition as the source of its axioms. Since the object of arithmetic does not have an intuitive character, its fundamental propositions cannot stem from intuition either. (Frege, 1984, pp.56-7)

> If, as we have shown, we do not find the concept of quantity in intuition, but create it ourselves, then we are justified in trying to formulate its definitions so as to permit as manifold an application as possible, in order to extend the domain that its subject to arithmetic as far as possible. (Frege, 1984, pág. 57)

Nas três passagens acima, Frege rejeita nitidamente que a intuição, seja temporal, espacial ou de qualquer outro tipo, desempenha algum papel nas definições dos conceitos aritméticos, já que a aritmética trata daquilo que é abstrato, não-intuitivo. Por conseguinte, parece-nos ser correta a afirmação feita na introdução da presente tese de que Frege pertencia ao segundo grupo de matemáticos que desejavam extirpar a intuição desta Aritmética.

Provavelmente, Frege não tinha estabelecido para si mesmo o projeto de fundamentar a Aritmética por meios puramente lógicos em **MC**, ou seja, ele não teria pensado em 1874 no seu projeto logicista[73].

---

73 De acordo com Sluga (1980, pág. 48), em **MC** Frege estaria defendendo o caráter analítico (no sentido Kantiano) das proposições da aritmética, uma vez que as mesmas seriam obtidas por meio do conceito de quantidade (magnitude). Para Sluga, existe uma diferença entre afirmar que as proposições aritméticas são analíticas e afirmar que elas são deriváveis de princípios lógicos apenas: “What Frege had in fact argued in his second dissertation was that arithmetical propositions are analytic in the Kantian sense. Their truth follows from the concepts occurring

Contudo, em **MC**, há uma série de ideias que foram desenvolvidas posteriormente. Por exemplo, o conceito de operação (ou função) desempenha um papel fundamental e, muito provavelmente, foi a partir disto que Frege chegou em sua análise dos conteúdos conceituais em termos de função e argumento. Ele estendeu a noção de função para a análise das sentenças, o que lhe possibilitou, por exemplo, a introdução de conceitos relacionais (relações) na sua lógica.

Em **MC**, de acordo com Frege, os números naturais são um tipo especial de quantidades. Todavia, ele não explica em detalhes como eles seriam definidos[74] [75], indicando apenas que os números 2, 3, 4, ... poderiam ser obtidos a partir de 1 e da repetição de uma mesma operação, a função sucessor[76]. Se designarmos esta função (ou operação) por fx, então temos que $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=4$, etc.. Mas, como $f(1)=2$, então $f(2)=f(f(1))=3$. Uma vez que $f(f(1))=3$, então $f(3)=f(f(f(1)))=4$, e assim por diante[77]. Há uma conexão disto com as definições dos números cardinais finitos individuais que foram dadas em **GLA**[78].

in them; to be more specific, it follows from the concept of magnitude. One must distinguish two different claims here, namely:

(1) Arithmetical propositions are analytic;

(2) Arithmetical propositions are derivable from logical principles

According to Frege's own later characterization (F. pp. 3-4), an analytic truth is one that follows from logical principles and definitions alone. Propositions (2) therefore implies (1); but the reverse is not necessarily the case. It holds only if we assume the the definitions of the arithmetical terms which are needed to derive all arithmetical propositions can ultimately be cast in purely logical terms. In the second dissertation, Frege assumed that arithmetical truths 'followed from the concept of magnitude,' but he did not raise the question whether this concept can be defined in a purely logical vocabulary. Proposition (2) expresses what is known as 'the logicist thesis' – the claim of the reducibility of arithmetic to logic. It seems then that in his second dissertation Frege assumed the analyticity of arithmetical propositions but had not yet raised in his mind the question of the validity of the logicist thesis. In fact, no interest in questions of logic is visible in his first writings".

74 "It would take us too afield to explain in detail how the content of arithmetic is contained in the properties of quantity which we have set out, and how special kinds of quantity, such as natural number and an angle, can also be defined from this standpoint. The only conclusion is we will draw here is that quantity can also be ascribed to operations" (Frege, 1984, pp. 57-8).

75 Na sua arguição de defesa de **MC**, Frege apresentou e defendeu cinco teses, uma das quais era a tese segundo a qual os números não eram dados primitivos, mas definíveis: "Zahl is nicht ein ursprünglich Gegebenes, sondern läßt sich definieren" (Kreiser, 2001, pág. 123).

76 "Every recursive formula teaches us how to obtain the result for 2, 3,… etc from the result for 1 by repetition of the same procedure" (Frege, 1984, pág. 58).

77 A partir da operação fx, a função sucessor, é possível, como o próprio Frege afirma (1984, pág. 58), definir o conceito de adição. Assim, 2+3, significa que aplicamos a 2 a operação fx três vezes, ou seja, $f(f(f(2)))$. Mas, como $2=f(1)$, temos $f(f(f(f(1))))$ que é igual a 5. E a partir do conceito de adição, podemos obter o conceito de multiplicação: 2×3 é a soma de (2+2)+2 ou a soma de 3+3.

78 Mais tarde, Frege assumiu que 0 é um número natural e, com a introdução deste número, ele foi capaz de mostrar que há infinitos números naturais. Isto é interessante, porque não é totalmente correta a afirmação de que Frege obtém uma prova da existência de infinitos números naturais, porque ele introduz estes como objetos. Falta a informação adicional de que ele consi-

Além disso, há uma íntima conexão entre a obtenção dos números naturais a partir de 1 e da operação iterada *fx* e as definições dos ancestrais forte e fraco de uma relação que Frege estabeleceu em **BS**. Provavelmente, foi tentando expressar esta iteração *n* vezes que Frege deve ter pensado na quantificação de segunda ordem. Em lógica de primeira ordem, não é possível definir o ancestral de uma relação sem introduzir as reticências[79]. Isto seria feito da seguinte forma: diríamos que *a* está na relação de ancestralidade forte *R* com *b*- *R**(*a*, *b*) - se e somente se

$$R(a,b) \lor \exists x(R(a,x) \land R(x,b)) \lor \exists x \exists y(R(a,x) \land R(x,y) \land R(y,b)) \lor ...$$ [80] [81]

Diríamos que *a* está na relação de ancestralidade fraca *R* com *b* – *R***(*a*, *b*) – justamente no caso em que

$$R^*(a,b) \lor a = b$$ [82]

As reticências nas definições dos ancestrais forte e fraco acima constituiriam lacunas nas provas que Frege desejava completamente extirpar de seu sistema lógico de **BS**. Neste caso, a quantificação de segunda ordem elimina completamente estas lacunas, permitindo uma definição explícita do ancestral.

No prefácio de **BS**, Frege sustenta que há duas formas de se alcançar a verdade de uma proposição, sendo que a "correta" seria estabelecer explicitamente a

derou o número 0 como sendo um número natural. No século XIX, muitos matemáticos não aceitavam 0 como sendo um número natural. Dedekind (1888), por exemplo, não conta 0 entre os naturais (como mencionado na introdução da presente tese, Landau também não considera 0 um número natural).

79 "The only conclusion we will draw here is that quantity can also be ascribed to operations. If we repeated an operation *f* by constantly resubmitting its result to it, we can regard the repeated applications of operations *f* as new operations. Now it is clear that two or more of the operations obtained in this way, *ff*, *fff*, …, acting in succession on an object, can always be replaced by a single operation consisting likewise in a repetition of *f*". (Frege, 1984, pp. 57-8).

80 Ou seja, *a* está na relação de ancestralidade forte *R* com *b* (ou como Frege diria: *b* vem depois de *a* na relação *R*) justamente quando ou *a* está na relação *R* com *b*, ou quando existe um objeto *x* tal que *a* está na relação *R* com *x* e *x* está na relação *R* com *b* ou quando existe um objeto *x* e existe um objeto *y* tais que *a* está na relação *R* com *x* e *x* está na relação *R* com *y* e *y* está na relação *R* com *b* ou ....

81 A fórmula '$\exists x(R(a,x) \land R(x,b))$' expressa que '*a* encontra-se na relação composta de *R* com *R* com *b*', ou seja: *aR*/*Rb*. Portanto, a fórmula pode ser entendida da seguinte forma: $R(a,b) \lor aR/Rb \lor aR/R/Rb, ...$.

82 Desta fórmula, instanciando *R* para *Pred* (predecessor) e *a* para 1, obteríamos uma definição de número natural, a saber, número natural é todo objeto que se encontra na relação de Pred-ancestralidade com 1 ou é o próprio 1.

partir de quais princípios[83] a proposição em questão é derivada[84]. Portanto, em **BS**, o conceito de prova é fundamental.

Como será observado mais adiante, isto está relacionado com a terceira parte de **BS**, na qual Frege prova, por meios puramente lógicos, uma série de fatos sobre o conceito de 'seguir-em-uma-sequência', que antes poderiam ser considerados fundamentados por meio da intuição, talvez temporal.

Assim, embora possamos considerar que esta intuição desempenharia algum papel na verdade da proposição que afirma a transitividade da relação 'vir depois de em uma sequência *f*'[85], o que Frege mostrou em **BS** é que esta proposição pode ser firmemente estabelecida, isto é, provada, sem qualquer recurso a esta intuição.

Obviamente, assumir a intuição temporal pode ser extremamente útil para darmos a um neófito uma ideia inicial do conceito de transitividade do ancestral. Contudo, ser útil não significa ser necessário e este é um ponto fundamental para Frege.

Em **BS**, Frege divide todas as proposições que necessitam de provas em duas classes distintas: a primeira classe consiste nas proposições que podem ser estabelecidas de modo puramente lógico; a segunda consiste nas proposições que necessitam de algum fato empírico nas suas provas[86].

Como foi mencionado em Duarte (2004), esta divisão de Frege não é exaustiva, porque ela exclui proposições sintéticas *a priori*. Estas proposições não necessitam de fatos empíricos nas provas de sua verdade, tampouco são estabeleci-

83 Estes princípios são os axiomas, regras de inferências e definições de uma determinada teoria.

84 "Thus, on the one hand, we can ask by what path a proposition has been gradually established; or, on the other hand, in what way it is finally most firmly establishable. Perhaps the former question must be answered differently for different people. The latter [question] is more definite, and its answer is connected with the inner nature of propositions under consideration". (**CN**, pág. 103)

85 Como já mencionado, esta relação é definida por meio do ancestral de uma relação. Depois, a partir da sua definição, Frege prova a proposição: se *a* vem depois de *b* em uma sequência *f* e se *b* vem depois de *c* nesta sequência *f*, então *a* vem depois de *c* na sequência *f*. Considerando o termo "vir depois de" temporalmente, parece evidente a verdade da proposição. Não haveria nem a necessidade de prová-la.

86 "The firmest method of proof is obviously the purely logical one, which, disregarding the particular characteristics of things, is based solely upon the laws on which all knowledge rests. Accordingly, we divide all truths which require a proof into two kinds: the proof of the first kind can proceed purely logically, while that of the second kind must be supported by empirical facts." (**CN**, pág. 103).

das por meios puramente lógicos. Este fato torna-se ainda mais obscuro, porque Frege admite intuições *a priori* em **BS**[87].

No seu primeiro livro, o logicismo é apresentado como uma hipótese. De acordo com Frege:

> Now, while considering the question to which of these two kinds [of truths] do judgments of arithmetic belong, I had first to test how far one get in arithmetic by means of logical deductions alone, supported only by the laws of thought, which transcend all particulars. The procedure in this effort was: I sought first to reduce the concept of ordering-in-a-sequence to the notion of logical consequence, in order to advance from here to the concept of number (**CN**, pág. 104).

Com objetivo de expressar sem ambiguidades os conceitos aritméticos fundamentais e de dar provas de teoremas tomando-se a precaução de suprimir lacunas na cadeia de dedução, a fim de eliminar qualquer participação velada de elementos intuitivos, Frege percebeu a necessidade de inventar a sua conceitografia[88].

A linguagem ordinária é ineficiente para cumprir este objetivo, uma vez que as palavras são carregadas de múltiplos significados[89]. Um fato que talvez tenha gerado problemas a Frege foi como expressar a relação de condicionalidade entre duas proposições sem que a noção de causalidade fosse imediatamente pensada. Isto poderia comprometer suas provas, visto que se o condicional fosse pensado causalmente, então suas provas dependeriam da intuição temporal (causa e efeito). Na sua conceitografia, Frege introduziu um símbolo que expressa esta relação e

87 "Besides, we see in this example how pure thought (regardless of any content given through the senses or **even given *a priori* through an intuition**) is able, all by itself, to produce from the content which arises from its own nature judgements which at first glance seem to be possible only on grounds of some intuition" (**CN**, pág. 167, nosso grifo). Depois, em **GLA**, Frege apresenta uma caracterização completa destes conceitos. Uma proposição é analítica se a sua justificação, isto é, prova, depende apenas de leis lógicas (axiomas ou teoremas lógicos) e definições expressas por meios puramente lógicos. Uma proposição é sintética se a sua justificação depende de alguma lei que não tem caráter lógico. Uma proposição é *a priori* se, na sua justificação, nenhum apelo é feito a fatos particulares, ou seja, a justificação depende apenas de leis gerais que nem admitem, nem necessitam de uma prova. Por outro lado, se a justificação da proposição depende de um fato particular, então a verdade desta proposição é *a posteriori*.

88 Esta passagem exemplifica muito bem a necessidade da conceitografia: "I sought first to reduce the concept of ordering-in-a-sequence to the notion of logical consequence, in order to advance from here to the concept of number. So that something intuitive could not squeeze in unnoticed here, it was most important to keep the chain of reasoning free of gaps" (CN, pág. 104).

89 "Language proves to be deficient, however, when it comes to protecting thought from error. It does not even meet the first requirement which we must place upon it in this respect; namely, being unambiguous. The most dangerous cases [of ambiguity] are those in which the meanings of a word are only slightly different, the subtle and yet not unimportant variations" (CN, pág. 84).

cujo significado é estipulado e único. Este mesmo fato vale para os demais símbolos lógicos primitivos de **BS**.

Não discutiremos minuciosamente todas as questões relacionadas a **BS**. Nossa principal tarefa aqui é mostrar alguns aspectos que acreditamos que são fundamentais para as discussões posteriores.

2.1.1.
As noções lógicas primitivas de BS

A notação lógica empregada por Frege em **BS** é totalmente distinta da atual, portanto faz-se necessário explicar o significado dos símbolos que lá ocorrem. Faremos uso do seguinte expediente: introduziremos os símbolos na notação de Frege e traduzi-los-emos para a nossa notação lógica contemporânea. Infelizmente, a conceitografia de Frege tem certas características que não são encontradas na nossa lógica em termos de regras de formação sintática. E alguns problemas que serão discutidos terão mais sentido utilizando-se a notação Fregeana. Portanto, embora seja extremamente trabalhoso, resolvemos empregar os dois tipos de notação. Quando não houver problemas em relação à notação da lógica contemporânea, empregá-la-emos.

BS é dividida em três partes: na primeira, Frege explica[90] as noções lógicas primitivas e a sua regra de inferência[91] e introduz seus respectivos símbolos; na segunda, os axiomas lógicos são apresentados e vários teoremas lógicos são derivados; e na terceira, são introduzidas quatro definições de conceitos aritméticos a partir das quais alguns teoremas matemáticos importantes são inferidos.

2.1.1.1.
As letras itálicas, o traço de conteúdo, o traço de juízo, conteúdo judicável e conteúdo conceitual

No subtítulo de **BS**, lemos: "Uma Linguagem-Fórmula do Puro Pensamento Modelada na Linguagem-Fórmula da Aritmética". Este subtítulo é totalmente

90 Bynum traduz a seção I por "Definition of Symbols". Porém, a palavra 'definição' não nos parece adequada, uma vez que Frege não pode definir o que é logicamente simples. Frege usa a palavra alemã "Erklärung" que pode ser, consistentemente, traduzida por "explicação" ou, até mesmo, por "elucidação".

91 Frege afirma a existência de apenas uma regra de inferência, a regra de *modus ponens*. Todavia, outras regras são implicitamente utilizadas: generalização universal de primeira ordem e de segunda ordem, a regra de substituição para conteúdos conceituais, a regra de substituição para funções e a regra de confinamento do quantificador universal ao consequente.

oportuno, uma vez que muitos dos estratagemas usados na aritmética foram satisfatoriamente adaptados por Frege na construção da sua conceitografia.

Em §1 de **BS**, Frege afirma que na sua linguagem artificial haverá dois tipos de símbolos, a saber: aqueles que terão um significado fixo ou determinado e aqueles que terão um significado "indeterminado", significando várias coisas. Os símbolos que terão significado fixo são os dos primitivos lógicos que serão introduzidos na parte 1 de **BS** e os símbolos que terão o significado "indeterminado" são as letras itálicas que servirão para expressar generalidade sem o uso do quantificador universal e que serão introduzidas na parte 2 de **BS**[92].

A ideia de usar letras itálicas para expressar generalidade ocorreu a Frege observando a maneira pela qual as leis ou proposições gerais são expressas na Aritmética e Álgebra. Por exemplo, a lei comutativa da adição tem a seguinte forma:

$$(a+b)=(b+a) \qquad (1).$$

Na fórmula acima, '*a*' e '*b*' podem ser quaisquer números[93]. Uma instância desta lei é, por exemplo, a fórmula:

$$(1+4)=(4+1) \qquad (2).$$

Para Frege, a fórmula (1) é equivalente à seguinte fórmula:

$$\forall x \forall y((x+y)=(y+x)) \qquad (3).$$

De (3), podemos obter (1), usando o axioma 58 de **BS;** e de (1), obtemos (3), por meio de generalização universal.

Por outro lado, (2) não é equivalente nem à formula (1), nem à formula (3). Embora seja possível obter (2) a partir de (1) ou (3)[94], a inversa não será possível, uma vez que não podemos generalizar universalmente em (2). Este ponto é extremamente importante e, às vezes, ele é negligenciado pela literatura secundária: em

92 Na linguagem da aritmética, os símbolos que têm um significado fixo são aqueles símbolos que nomeiam os números individuais (os numerais) e as constantes de funções e operações. Por exemplo, '√','+'. Frege escreve: "The symbols customarily used in the general theory of magnitudes fall into two kinds. The first consists of the letters, each of which represents either a number left undetermined or a function left undetermined. This indeterminateness makes it possible to use letters for the expression of the general validity of propositions, as in

$$(a+b)c=ac+bc.$$

The other kind consists of such symbols as +, –, √, 0, 1, 2; each of which has its own specific meaning". (**CN**, pág. 111).

93 A lei comutativa da soma vale para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

94 (2) poderá somente ser obtida em **BS**, como entendemos, se os nomes próprios '1' e '4' e a constante de função '+' forem introduzidos no sistema.

BS, não há quaisquer nomes próprios ou constantes de função (não-lógicas[95]). Assim, o símbolo "$F(a)$" pode ser expresso mais acuradamente deste modo: '$\forall x F(x)$', ou melhor,$\forall \mathfrak{F} \forall x(\mathfrak{F}(x))$. O artifício de introduzir letras itálicas é permitir inferências por meio de *modus ponens*, sem que, com isso, haja perda de generalidade.

Na linguagem ordinária, a força assertórica de uma sentença encontra-se implicitamente entendida. Assim, quando dizemos que 'a água é composta de H_2O', não estamos meramente indicando a hipótese de a água ser composta destes elementos químicos na razão 2:1, mas sim estamos afirmando como verdadeiro o fato d'água ser composta de dois átomos de hidrogênio e um átomo de oxigênio.

Ao inventar a sua conceitografia, Frege desejava evitar que quaisquer hipóteses fossem tacitamente assumidas nas cadeias de inferências. Neste sentido, Frege deve ter pensado que era necessário introduzir um símbolo que expressasse explicitamente a asserção de uma proposição. Tal símbolo é introduzido em §2 de **BS**:

$$\vdash$$

Este símbolo é composto de dois outros símbolos: o traço de juízo

'|'

e o traço de conteúdo

'—'.

Inicialmente, Frege não faz qualquer tipo de restrição ao emprego do símbolo complexo '$\vdash$':

> A judgement will always be expressed with the aid of the symbol
>
> $$\vdash$$
>
> which stands to the left of the symbol or combination of symbols giving the content of the judgement (**CN**, pág. 111).

Porém, este símbolo complexo não pode ser aplicado a qualquer tipo de símbolo ou combinação de símbolos, pois há uma restrição na aplicação do traço de conteúdo, a saber,

$$— A$$

95 O quantificador universal é uma constante lógica de função.

somente será bem-formado, se '*A*' expressar um conteúdo judicável[96].

Frege nunca foi totalmente claro sobre o que são conteúdos judicáveis. Qual é a sua natureza? O conteúdo judicável é uma entidade linguística ou não-linguística? E parece não existir um consenso sobre isso na literatura secundária. Por exemplo, de acordo com Guilhermo Haddock:

> A judgeable content is precisely a sequence of signs that can be preceded either by the horizontal line or by the combination of the vertical line and the horizontal line. (2006, pp. 4-5)

Na passagem acima, Haddock parece assumir que conteúdos judicáveis são entes linguísticos: a sequência de sinais que é precedida pelo traço de conteúdo. No entanto, a sua explicação não ajuda a esclarecer o que é um conteúdo judicável. Por que, tomando-se um exemplo de Frege, a ideia de "casa" – ou o símbolo "casa", na visão de Haddock - não pode ser precedida pelo traço de conteúdo?[97] Qual a diferença entre o símbolo "casa" e os símbolos que podem ser precedidos pelo traço de conteúdo?

Por outro lado, há autores que sustentam que conteúdos judicáveis são entidades não-linguísticas: conteúdo judicável é o conteúdo de uma sentença assertórica[98]. Mas, novamente, poderíamos perguntar: o que é o conteúdo de uma sentença assertórica? De acordo com Gideon Makin:

> Judgeable contents resemble Russellian propositions in many aspects (while differing in others): they are the bearers of truth, the entities which enter into inferential relations, and the kind of entity one's relation to which constitute knowledge (1994, pág. 83)[99]

96 "The content stroke serves also to relate any sign to the whole formed by the symbols that follow the stroke. *Whatever follows the content stroke must always have an judgeable content*" (**CN**, pág. 112). Modificamos ligeiramente a tradução de Bynum.

97 "*Not every content* can become a judgement by placing $\vdash$ before its symbols; for example, the idea "house" cannot." (**CN**, pág. 112).

98 Gideon Makin (1994) escreve: "...and the content of a complete indicative sentence is a judgeable content" (pág. 83).

99 Frege é explícito sobre conteúdos judicáveis serem os "carregadores" da verdade. No fragmento póstumo "Logic", ele escreve: "Now whatever can thus be posed in a question, we wish to call a judgeable content. Therefore, the content of any truth is "a judgeable content" (1979, pág. 8). Para manter uma tradução homogênea do termo alemão '*beurtheilbare Inhalte*', mudamos ligeiramente a tradução.

Acreditamos que Makin esteja mais próximo da verdade do que Haddock[100]. Embora Frege não tenha feito ainda a sua distinção entre sentido e referência, dificilmente ele teria considerado o conteúdo judicável como sendo uma expressão linguística (entidade linguística): uma sentença ou uma sequência de sinais[101] [102].

Conteúdos judicáveis podem ser verdadeiros ou falsos, são passíveis de julgamentos. Assim, em sua regra de formação de nomes em **BS**, o traço horizontal pode apenas ser aplicado a conteúdos que podem ser afirmados ou negados, ou melhor, a símbolos que expressam conteúdos que podem ser afirmados ou negados. É neste sentido que o traço de conteúdo não pode ser anexado ao símbolo 'casa', porque este não expressa um conteúdo que é passível de ser verdadeiro ou falso (conteúdo não-judicável). Da mesma forma, admitindo-se que '2' seja um nome próprio que ocorre na conceitografia, o seguinte não é bem-formado em **BS**:

—2

Portanto, não podemos ter

$$\vdash 2$$

Por outro lado, admitindo-se que '2+2=4' seja um nome de um conteúdo judicável pertencente à conceitografia, o seguinte seria bem formado em **BS**.

—2+2=4[103].

E, portanto, poderíamos afirmá-lo como verdadeiro

$$\vdash 2 + 2 = 4$$

100 Bynum (1972) também defende que conteúdos judicáveis podem ser vistos como proposições: "The major units of meaning for Frege's notation are conceptual contents of propositional expressions – "judgeable contents" (beurtheilbare Inhalte). Only such contents can be asserted and thereby become "judgements" (today called "assertions"). Another term for "judgeable content" would be 'propositions' (*Sätze*); and, indeed, Frege sometimes refers to them that way." (pp. 66-7). Novamente, mudamos ligeiramente a tradução de Bynum para manter a uniformidade.

101 Para uma discussão detalhada, veja Rodrigues Filho (2007, capítulo 3).

102 Em uma carta enviada a Husserl (Frege, 1980, pág. 63), Frege afirma que na sua noção de conteúdo judicável estariam misturados o pensamento e seu valor de verdade.

103 De acordo com Frege, '—2+2=4' significa 'a proposição que 2+2=4' ou "a circunstância em que 2+2=4'. Veja (**BS**, §2, pág. 112).

Na §3 de **BS**, há uma passagem bastante enganadora que parece relacionar intimamente a noção de conteúdo judicável com a noção de conteúdo conceitual[104]. De acordo com Frege, na sua conceitografia, a distinção entre sujeito e predicado não ocorre. Para ele, esta distinção acabou levando os lógicos a fazerem classificações não-essenciais de um ponto de vista lógico.

Por exemplo, segundo a lógica tradicional de sua época, as sentenças 'em Platéia, os gregos derrotaram os persas' e 'em Platéia, os persas foram derrotados pelos gregos' expressariam conteúdos judicáveis diferentes, porque ambas as sentenças têm sujeitos e predicados diferentes.

Todavia, Frege sustenta que ambas as sentenças expressam o mesmo conteúdo conceitual. Embora ele não afirme explicitamente o que são conteúdos conceituais, à primeira vista, ele parece apresentar o seguinte critério por meio do qual poderíamos dizer quando duas sentenças expressariam o mesmo conteúdo conceitual:

(**CC**): o conteúdo conceitual expresso pela sentença A é igual ao conteúdo conceitual expresso pela sentença B (se e?) somente se a partir de qualquer conjunto Γ de sentenças (que expressam conteúdos) e de qualquer sentença S* expressando um conteúdo, $\Gamma + \{A\}$ deriva S* se e somente $\Gamma + \{B\}$ deriva S*.

(**CC**) poderia ser reescrita da seguinte forma: as sentenças A e B expressarão o mesmo conteúdo conceitual (se e?) somente se A e B forem logicamente equivalentes[105].

Introduzimos o sinal de interrogação na condição suficiente porque temos dúvidas se este critério captura, de fato, o que Frege realmente teria em mente. Não obstante, em geral, muitos intérpretes de Frege consideram que o critério expressaria tanto a condição necessária quanto a suficiente. Por exemplo, Beaney (2007, pág. 96) escreve:

---

104 Como veremos, a passagem é enganadora porque conteúdos conceituais também são associados aos conteúdos não-judicáveis. Isto é nítido quando Frege introduz o seu símbolo para identidade de conteúdo. Isto quer dizer que a noção de conteúdo conceitual é mais abrangente que a noção de conteúdo judicável.

105 Uma vez que de $\Gamma+\{A\}$, derivamos A e de $\Gamma+\{B\}$, derivamos B, então para que A e B tenham o mesmo conteúdo é necessário em particular que de $\Gamma+\{A\}$, derivemos B e de $\Gamma+\{B\}$, derivemos A. Como partimos de um mesmo conjunto Γ de sentenças, então isso significa que A e B têm o mesmo conteúdo (se e?) somente se de A derivamos B e de B derivamos A.

> But the implication is that the value of a function, in the case of propositions, is what Frege calls the 'conceptual content' ('begrifflicher Inhalt') of the proposition. This notion was introduced in §3 of the Begriffsschrift, where it is characterized as that part of the content of a proposition that influences its possible consequences. On Frege's view, the following propositions have the same conceptual content:
> (GP) At Platea the Greeks defeated the Persians
> (PG) At Platea the Persians were defeated by the Greeks.
> While we might discern "a slight difference of sense" between these two propositions, Frege writes, the content they have in common is what predominates: "I call that part of the content that is the same in both the conceptual content" (1879, p. 3/1997, p. 53). *Essentially, two propositions have the same conceptual content if and only if they are logically equivalent* (nosso grifo).

Mais adiante em seu artigo, Beaney (2007, pág. 100) afirma:

> According to Frege at the time of the *Begriffsschrift*, two propositions have the same conceptual content if and only if they have the same possible consequences (cf. 1879, p. 3/ 1997, p. 54). *To say that two propositions P and Q have the same possible consequences is to say that they are logically equivalent, i. e., that P implies Q, and Q implies P. So Frege's criterion can be formulated thus:*
> *(CC) Two propositions have the same conceptual content iff they are logically equivalent* (nosso grifo)

O problema se encontra na seguinte direção: se *P* e *Q* são logicamente equivalentes, então *P* e *Q* têm o mesmo conteúdo conceitual. Simbolicamente, isto seria expresso dentro da conceitografia pela fórmula (**BB**), a qual não é provável no sistema de **BS**. Os axiomas introduzidos em **BS** que regulamentam o símbolo para identidade de conteúdo apenas dão conta da direção da esquerda para a direita. Quando duas sentenças têm o mesmo conteúdo conceitual, podemos mostrar dentro da conceitografia que elas são logicamente equivalentes.

Rodrigues Filho (2007) também tem sérias dúvidas sobre a direção da esquerda para direita de (**CC**). De acordo com ele, uma vez que todas as sentenças da Aritmética seriam lógicas na visão Frege, elas expressariam o mesmo conteúdo conceitual, porque quaisquer duas sentenças logicamente verdadeiras são logicamente equivalentes entre si[106].

106 Rodrigues Filho escreve: "Na citação [4] acima, Frege fala de correção de inferências. Se tomarmos Frege ao pé da letra, e substituirmos 'juízo' por 'sentença', ele está dizendo que:
(8) duas sentenças A e B têm o mesmo conteúdo conceitual se, e somente se, para todo Γ e α; $\Gamma; A \vdash \alpha$ se, e somente se, $\Gamma; B \vdash \alpha$.
Posto que o lado direito de (8) é equivalente à equivalência lógica entre A e B, nós temos
(9) duas sentenças A e B têm o mesmo conteúdo conceitual se, e somente se, $A \vdash\dashv B$.
Entretanto, podemos estar certos que Frege não tinha em mente exatamente o que entendemos por equivalência lógica. O nosso conceito de equivalência lógica, para Frege, não seria uma

De fato, Rodrigues Filho poderia ter mencionado que este problema surge já em **BS**, porque todas as fórmulas prováveis neste livro expressariam o mesmo conteúdo conceitual, já que são todas logicamente equivalentes.

Se Frege tivesse introduzido (**BB**) – $((a \supset b) \supset ((b \supset a) \supset (a \equiv b)))$ - como um axioma na pretensão de capturar a direção da direita para esquerda de (**CC**), então, uma vez que há o axioma 1 de **BS**[107]

(**1BS**) $(a \supset (b \supset a))$,

dadas quaisquer duas fórmulas P e Q prováveis no sistema, poderíamos obter por meio de *modus ponens*

(i) $P \supset Q$
(ii) $Q \supset P$

E assim, supondo que (**BB**) esteja presente no sistema, obteríamos, aplicando *modus ponens*, a fórmula

(**Id**) $P \equiv Q$.

Em particular, assumindo (**BB**) como um axioma de **BS**, a fórmula que afirma que o ancestral de uma relação é transitivo (Teorema 98) ou a fórmula que afirma a indução matemática (teorema 81) expressaria o mesmo conteúdo conceitual que a simples fórmula $(a \supset a)$.

Na nossa visão, isto é completamente inaceitável. O problema surge porque consideramos conteúdos conceituais expressos por sentenças como algo próximo às proposições (ou, até mesmo, pensamentos) e consideramos a identidade de conteúdo como sendo, de fato, uma espécie de identidade entre estas entidades[108]. Neste caso, dificilmente as fórmulas que afirmam a transitividade do ancestral, o princípio de indução e $(a \supset a)$ expressariam a mesma proposição (ou o mesmo pensamento).

---

condição suficiente para identidade de conteúdo conceitual. Em primeiro lugar, se os teoremas da aritmética são verdades lógicas, como Frege sustentava, de (9) poder-se-ia concluir que todos os teoremas da aritmética têm o mesmo conteúdo. Frege certamente não concordaria com isso" (Rodrigues Filho, 2007, pp. 81-2). Para este mesmo ponto, veja Haddock (1986, pp. 38-41; 2006, pág. 6).

107 Gostaríamos de agradecer a Abílio Rodrigues Filho que nos indicou o uso do axioma 1 simplificando nossa prova inicial.

108 Frege sustenta que a identidade de conteúdos não relaciona os próprios conteúdos conceituais, mas sim nomes para estes conteúdos. Esta visão é completamente surpreendente, porque, neste caso, parece claro que quaisquer fórmulas prováveis em **BS** não expressarão o mesmo conteúdo conceitual, uma vez que seus nomes são completamente diferentes.

Alguns autores sustentam que a identidade de conteúdo conceitual poderia ser considerada como uma espécie de equivalência (ou bicondicional), quando sentenças ocorrem nela. Por exemplo, já citamos uma passagem de Chateaubriand (2001, pág. 270) na qual ele sugere justamente esta interpretação[109].

De fato, ela parece ser natural. Não obstante, em nossa nossa visão, ela é problemática, por causa do seguinte motivo:

(**1**) teríamos um mesmo símbolo com dois significados diferentes em **BS**. Quando os termos que ocorrem junto com o símbolo para identidade de conteúdos forem variáveis objectuais (ou nomes próprios), então '$\equiv$' expressará a identidade. Por outro lado, quando os termos forem sentenças, então '$\equiv$' expressará a equivalência.

Este ponto é interessante, porque uma das críticas de Frege a Boole é exatamente que os símbolos usados na lógica deste último têm múltiplos significados:

> MacColl explains the expressions for secondary propositions independently of the *primary* ones. In this way, the intermingling of time is certainly avoided; but as a result, every interconnection is severed between the two parts which, according to Boole, compose logic. We proceed, then, either in *primary propositions* and use the formulas in the sense stipulated by Boole; or else, we proceed in *secondary propositions* and use the interpretations of MacColl. Any [logical] transition from one kind of judgement to the other – which, to be sure, often occurs in actual thinking – is blocked; *for we can not use the same symbols with a double meaning in the same context* (CN, pág. 92, nosso grifo).

Em seus dois livros publicados sobre lógica - *The Mathematical Analysis of Logic* (1847) e *The Laws of Thought* (1854) – Boole dividiu as proposições em duas categorias: à primeira, pertencem as proposições primárias; e, à segunda, as proposições secundárias. As proposições primárias estabelecem relações entre classes, enquanto as secundárias estabelecem relações entre proposições.

No que diz respeito às proposições primárias, Boole introduz na sua linguagem lógica os símbolos *x*, *y*, *z*,... que são variáveis objectuais que percorrem as classes[110]. Além disso, Boole introduziu, em sua linguagem, os símbolos (constan-

109 Landini (1996, pág. 138) também sugere isto. Ele escreve: "But Frege's willingness to have $\vdash (_{\top\top}\ a \equiv a)$ as a logical principle suggests that the replacement of signs (including logical equivalents) is what he was after with the sign '≡'. When flanked by propositional contents, Frege's "$a \equiv b$" simply amounts to a biconditional".

110 "Let us employ the letters X, Y, Z, to represent the individual members of classes, X applying to every member of one class, as members of that particular class, and Y to every member of another class as members of such class, and so on, according to the received language of treatises on Logic.

tes lógicas) '0' (representando a classe nula), '1' (representando a classe universal ou o universo de discurso), '+' (representando a união entre classes), '-' (representando o complemento de uma classe em relação à outra), '*v*' (representando a classe indeterminada) e '.' (representando a interseção entre classes)[111].

Na sua linguagem, Boole representa simbolicamente sentenças da forma "Todo X é Y" assim:

$$x.(1-y)=0$$

Esta fórmula afirma que a interseção entre a classe das coisas que pertencem a *x* e a classe das coisas que não pertencem a *y* é vazia. Ou seja, não existe nada que pertença a *x* que não pertença a *y*.

A sentença "Nenhum X é Y" é representada simbolicamente pela fórmula:

$$x.y=0$$

Esta fórmula afirma que a interseção entre as classes *x* e *y* é vazia, isto é, não há nada que pertença a *x* e pertença a *y*.

A sentença "Algum X é Y" é representada simbolicamente pela fórmula:

$$x.y=v$$

Ou seja, existe algo que pertence à classe *x* e pertence à classe *y*, sendo este "algo" representado pelo símbolo *v*, a classe indeterminada[112].

A sentença "Algum X não é Y" é simbolizada no sistema de Boole da seguinte forma:

$$x.(1-y)=v$$

Isto quer dizer que há algo (representado pelo símbolo *v*) que pertence à classe *x* e à classe não-*y*.

Further let us conceive a class of symbols *x*, *y*, *z*, possessed of the following character.
The symbol *x* operating upon any subject comprehending individuals or classes, shall be supposed to select from that subject all the *Xs* which it contains. In like manner the symbol *y, operating upon any subject, shall be supposed to select from it all individuals of the class Y which are comprised in it, and so on"* (Boole, 1847, pág. 15).

111 Boole não introduz um símbolo para expressar a negação, sendo esta interpretada da seguinte forma: $1-x$. Uma vez que '1' representa a classe universal, '$1-x$' representa a classe de todas as coisas, exceto aquelas que pertencem à classe *x*, ou seja, '$1-x$' tem o mesmo significado que não-*x*.

112 A classe indeterminada é bastante controversa, embora, como tentamos mostrar em Duarte (2006, não publicado), ela seja extremamente importante para uniformizar a linguagem lógica de Boole. A sentença "Algum X é Y" poderia ser satisfatoriamente representada pela seguinte fórmula: $x.y \neq 0$ (ou seja, a interseção entre as classes *x* e *y* não é vazia). Contudo, isto acarretaria problemas no sistema de dedução de Boole.

Por outro lado, quando voltamos nossa atenção para as proposições secundárias, os símbolos mencionados acima mudam de interpretação. Agora, '*x*', '*y*', '*z*',... não são mais variáveis objectuais que percorrem classes, e sim variáveis proposicionais que percorrem proposições[113].

As constantes lógicas também mudam sua interpretação. '1' é interpretado ora como sendo a classe de todas as possibilidades ou circunstâncias em que uma proposição é verdadeira, ora como designando o "Verdadeiro"[114]. Da mesma forma, '0' é interpretado ora como sendo a classe nula de possibilidades de uma proposição ser verdadeira, ora é interpretado como sendo o "Falso"[115].

Os símbolos '+' e '.' são interpretados, respectivamente, como sendo a disjunção e a conjunção. O símbolo '-' é usado como um auxiliar para expressar a negação de uma proposição. Por exemplo, sendo x uma variável para uma proposição, podemos expressar não-x da seguinte forma: $1 - x$.

Com este aparato, é totalmente possível expressar leis lógicas. Por exemplo, a lei da não-contradição é dada pela fórmula:

$$x.(1 - x) = 0$$

Não existe a possibilidade das proposições x e não-x serem ambas verdadeiras ao mesmo tempo[116].

---

113 "We may, in fact, represent the Propositions *A* is *B*, *C* is *D*, by the arbitrary symbols X and Y respectively, and express our syllogism in such forms as the following:

If X is true, then Y is true,
But X is true, therefore Y is true.

Thus, what we have to consider is not objects and classes of objects, but the truths of Propositions, namely, of those elementary Propositions which are embodied in terms of our hypothetical premises.
To the symbols X, Y, Z, representative of Propositions, we may appropriate the elective symbols *x*, *y*, *z*, in the following sense.
The hypothetical Universe, 1, shall comprehend all conceivable cases and conjectures of circumstances.
The elective symbol *x* attached to any subject expressive of such cases shall select those cases in which the Proposition X is true, and similar for Y and Z". (Boole, 1847, pp. 48-9).

114 Em Boole (1847, pág. 51), há a seguinte passagem: "To express that a given Proposition X is true.
The symbol 1-*x* selects those cases in which the Proposition X is false. But if the Proposition is true, there are no such cases in its hypothetical Universe, therefore

$$1 - x = 0,$$

or

$$x = 1\text{", (25).}$$

115 Em Boole (1847, pág. 51), lemos: "The elective symbol *x* selects all those cases in which the Proposition is true, and therefore if the Proposition is false,

$$x = 0, \text{(26)".}$$

116 Na interpretação primária, esta fórmula afirma que a interseção entre as classes *x* e não-*x* é vazia.

A lei do terceiro excluído é representada pela fórmula:

$$x + 1 - x = 1$$

Ou seja, ou *x* ou não-*x* é verdadeira[117].

Boole apresenta uma proto-tabela de verdade, uma vez que ele afirma que dadas duas proposições quaisquer *X* e *Y*, há exatamente quatro possibilidades de combinação, a saber:

(1) *X* é verdadeira e *Y* é verdadeira
(2) *X* é verdadeira e *Y* é falsa
(3) *X* é falsa e *Y* é verdadeira
(4) *X* é falsa e *Y* é falsa

Cada uma destas possibilidades sendo representadas na linguagem Booleana pelas fórmulas

(1') $x.y$
(2') $x(1 - y)$
(3') $(1 - x).y$
(4') $(1 - x).(1 - y)$[118]

Na linguagem Booleana, "P implica materialmente Q" é representada pela fórmula

$$x.(1 - y) = 0$$

Isto quer dizer que a possibilidade da proposição *x* ser verdadeira e *y* ser falsa não ocorre. Boole pode representar a regra de *modus ponens* no seu sistema da seguinte forma:

De *X* implica materialmente *Y*: $x.(1 - y) = 0$
e *X* é verdadeiro: $x = 1$,
inferir que *Y* é verdadeiro: $y = 1$[119].

Depois desta breve exposição da linguagem lógica de Boole, podemos entender as críticas de Frege. Em primeiro lugar, Boole utiliza os símbolos – '0', '1','=', '+', '.', '-' - cujo significado já estava bem estabelecido na Matemática. De acordo com Frege, o uso destes mesmos símbolos para expressar juízos da lógica deveria ser evitado.

---

117 Na interpretação primária, esta fórmula afirma que a união entre as classes *x* e não-*x* resulta no conjunto universal.
118 Boole (1847, pág. 50).
119 Basta substituir '*x*' por '1' na fórmula $x.(1 - y) = 0$, obtendo $1 - y = 0$. Logo, *y*=1.

E, no caso de Frege, que desejava fundamentar logicamente a aritmética, o uso destes símbolos para expressar relações lógicas introduziria enormes ambiguidades dentro do sistema. Por exemplo, em uma sentença tal como "ou 1+1 é igual 2 ou 1+1 não é igual a 2", teríamos '+' representando a adição entre números e '+' representando a disjunção entre estas sentenças[120].

Ademais, os símbolos introduzidos por Boole mudam de significado dependendo de se estamos tratando de proposições primárias ou secundárias. '0' pode designar a classe vazia ou a classe nula de possibilidades ou ainda o "Falso"; '1' pode designar a classe universal ou classe de todas as possibilidades ou ainda o "Verdadeiro". O mesmo vale para os símbolos '+' e '.'[121] [122] [123].

De acordo com Frege, um e o mesmo símbolo deve manter o seu significado fixo. Portanto, parece-nos plausível que a identidade de conteúdo deva ser en-

---

120 "Anyone demanding the closest possible agreement between the relations of the signs and relations of the things themselves will always feel it to be back to front when logic, whose concern is correct thinking and which is also the foundation of arithmetic, borrows its sign from arithmetic. To such a person it will seem more appropriate to develop for logic its own signs, derived from the nature of logic itself; we can then go on to use them throughout the other sciences wherever it is a question of preserving the formal validity of a chain of inference" (Frege, 1979, pág. 12). Em outra passagem, Frege afirma: "What we have to do now, in order to produce a more adequate solution, is to supplement the signs of mathematics with a formal element, since it would be inappropriate to leave the signs we already have unused. But on this score alone Boole's logic is already completely unsuited to the task of making this supplementation, since it employs the signs +, 0 and 1 in a sense which diverges from their arithmetical ones. It would lead to great inconvenience if the same signs were to occur in one formula with different meanings. This is not an objection to Boole, since such an application of his formulae obviously lay completely outside his intentions. Thus, the problem arises of devising signs for logical relations that are suitable for incorporation into the formula-language of mathematics, and in this way of forming – at least for a certain domain – a complete concept-script. This is where my booklet comes in" (Frege, 1979, pp. 13-14).

121 Além disso, as variáveis '*x*', '*y*', '*z*',..., percorrem domínios diferentes dependendo de se estamos tratando de proposições primárias ou secundárias. Isto também ocorre na conceitografia, como será observado mais adiante.

122 Frege escreve: "The full incongruity of the introduction here of the idea of time instants stands out most clearly if you think of eternal truths such as those of mathematics. Schröder seems to avoid the artificiality this involves, since, in company with Hugh McColl, he explains expressions like $A = 0$, $A + B = 1$ etc. — whose sense, on the Boolean conception, is self-explanatory when taken in conjunction with the stipulations of the first part — all over again without referring back. But in this way the last weak link between the two parts is also snapped, and the signs 0, 1, = receive yet a third meaning in addition to their Boolean and arithmetical ones. According to Boole, 0 means the extension of the concept under which nothing falls, as for example the extension of the concept 'whole number whose square is 2'. By 1, Boole understands the extension of his *universe of discourse*. These meanings hold for the first as much as the second part. If one now ruptures this connection, then strictly speaking 0 has not longer an independent meaning in the second part; combined with the identity it means a denial expressed as judgement, while '=1' designates an affirmation, which I express by the judgement-stroke" (Frege, 1979, pág. 15).

123 Veja também, (Frege, 1979, pp. 47-52).

tendida, de fato, como uma espécie de identidade quando nomes para conteúdos judicáveis ocorrem nela, e não como uma espécie de equivalência.

Também é possível conjecturar a razão de Frege introduzir o símbolo '$\equiv$' para expressar a identidade de conteúdo e não o símbolo '='. Na nossa visão, o símbolo '=' já tinha alcançado um determinado significado dentro da Matemática – identidade numérica. Porém, Frege não tinha certeza, pelo menos em **BS**, se este significado era o mesmo que ele queria propor, a saber, o de identidade lógica [124] [125].

Outro fato que podemos mencionar a nosso favor é que, em **BS,** Frege introduziu os seguintes axiomas que regem a identidade de conteúdo conceitual:

(Axioma 52) $\vdash ((c \equiv d) \supset (f(c) \supset f(d)))$

(Axioma 54) $\vdash c \equiv c$[126]

Na linguagem lógica contemporânea, estes axiomas são justamente encontrados em sistemas de lógica de primeira ordem com identidade.

As únicas ocasiões nas quais o símbolo para identidade de conteúdo ocorre junto com nomes que expressam conteúdos judicáveis em **BS** são exatamente nas definições de conceitos aritméticos. Toda definição em **BS** tem a seguinte forma:

(Def) $\Vdash A \equiv B$[127],

onde '*A*' é o *definiens* e 'B', o *definiendum*. Usando o axioma 52 acima e o teorema 57

124 Em GGA1, Frege escreve: “The primitive signs used in *Begriffsschrift* occur here also, with one exception. Instead of the three parallel lines I have adopted the ordinary sign of equality, since I have persuaded myself that it has in arithmetic precisely the meaning that I wish to symbolize. That is, I use the word “equal” to mean the same as “coinciding with” or “identical with”; and the sign of equality is actually used in arithmetic in this way”. (**BLA**, pág 6). Em uma carta enviada a Hugo Dingler (em 1917), Frege escreve: “I am thinking of sending you: *Revue de métaphysique et de morale* (1895, No. 1); Review of H. Cohen, *The Principle of the Infinitesimal Method and its History*; 'On the Formal Theories of Arithmetic'; and 'Applications of the Conceptual Notation'. This lecture still represents the position of my *Conceptual Notation*. Instead of '$\equiv$' I would now write '='; for I see that the equals sign is used in mathematics as a sign of identity. In geometry, too, the sign '=' can at least be understood in the same way if 'AB' is taken to mean not the length but the measure of the length, or the number we get when we measure the length” (Frege, 1980, pp. 27-8). Em **BS**, a tripla barra designa a identidade, a dúvida de Frege era se a identidade numérica '=' era uma identidade no sentido estrito

125 Em **GLA** §63, Frege chama a atenção do leitor para o fato de que **PH** não define a identidade numérica, mas, ao contrário, fazendo uso da identidade lógica, ele introduziria novos termos, os números cardinais.

126 Entretanto, como será visto, há problemas com estes axiomas e a interpretação de Frege para a identidade de conteúdo.

127 O símbolo $\Vdash$ significa que o que se segue está sendo estipulado. Assim, '$\Vdash A \equiv B$' deve ser entendido da seguinte forma: É estipulado que os símbolos *A* e *B* expressam o mesmo conteúdo conceitual; o símbolo *A* deve expressar o mesmo conteúdo conceitual que o símbolo *B*.

(Teorema 57): $\vdash ((c \equiv d) \supset (f(d) \supset f(c)))$,

Frege obtém as fórmulas (i) $\vdash A \supset B$ e (ii) $\vdash B \supset A$. Estas fórmulas são derivadas substituindo-se no axioma 52 ou teorema 57, '*c*' por '*A*', '*d*', por '*B*' e a função ' $f\Gamma$' por 'Γ'[128], obtendo assim as fórmulas:

(52*) $\vdash ((A \equiv B) \supset (A \supset B))$

(57*) $\vdash ((A \equiv B) \supset (B \supset A))$

Embora uma definição seja uma estipulação e, portanto, não é verdadeira, nem falsa, ela é convertida, de acordo com Frege, em um juízo[129]. Portanto, uma vez que é estipulado que os símbolos '*A*' e '*B*' devem expressar o mesmo conteúdo conceitual, isto é convertido na seguinte verdade: o símbolo *A* expressa o mesmo conteúdo conceitual que o símbolo *B*:

(Prop) $\vdash A \equiv B$

E aplicando *modus ponens* entre (52*) ou (57*) e (Prop), obtemos (i) e (ii)[130].

Parece plausível e consistente supor que as definições em **BS** estipulam que o *definiens* e o *definiendum* expressam a mesma proposição (ou um mesmo pensamento)[131]. De fato, poderíamos supor que as fórmulas '$A \supset B$' e '$B \supset A$' obtidas por intermédio de uma definição expressariam o mesmo conteúdo que fórmula $'A \supset A'$. E, na verdade, podemos eliminar completamente as definições de **BS** assumindo justamente esta fórmula ou o axioma 58.

Entretanto, como já mencionado, no prefácio de **BS**, Frege sugere que ele poderia ter introduzido (**NN**) como um axioma

---

128 Ou seja, Frege considera, neste caso, a função 'Γ' como sendo uma espécie de função identidade, que resulta no próprio argumento. Depois, em **GGA**, quando Frege introduziu o horizontal como um conceito, substituímos '$f\xi$' por '$-\xi$'. Em **BS**, o traço de conteúdo não desempenha um papel semântico, apenas sintático, portanto ele não é uma função e não pode substituir '*f*Γ''.

129 "This sentence [a definição dada em §24] is different from those considered previously since symbols occur in it which have not been defined before; it itself gives the definition. It does not say, "The right side of the equation has the same content as the left side."; but, "They are to have the same content". This sentence is therefore not a judgement... Although originally (69) is not a judgement, still it is readily converted into one; for once the meaning of the new symbol is specified, it remains fixed from then on; and therefore formula (69) holds also as judgement, but as analytic one, since we can only get out what was put into the new symbols" (**CN**, pp. 167-8).

130 Em algumas provas, Frege usa, ao invés do teorema 57, o teorema 68

$$((\forall x f(x) \equiv b) \supset (b \supset f(c)))$$

Esta fórmula é uma consequência do teorema 57.

131 Posteriormente, de acordo com Frege, devido à distinção entre sentido e referência, nas definições estipulamos que o *definiens* e o *definiendum* têm o mesmo sentido e a mesma referência. Veja, por exemplo, (**GGA**, §27).

(**NN**): $\vdash (\neg\neg a \equiv a)$

e, com isso, simplificar o seu sistema axiomático. Acreditamos que Frege tinha em mente a derivação dos axiomas (31) e (41) de **BS**

(31) $\neg\neg a \supset a$
(41) $a \supset \neg\neg a$

por meio de (**NN**), (52*), (57*) e *modus ponens*. Frege também poderia provar o axioma 54 de **BS** a partir de (**NN**). Bastaria substituir em (52), '*c*' por '$\neg\neg a$', '*d*' por '*a*' e a função '$f\Gamma$' por '$\Gamma \equiv a$', obtendo assim:

(52') $\vdash ((\neg\neg a \equiv a) \supset ((\neg\neg a \equiv a) \supset a \equiv a)))$

Agora, é suficiente aplicar *modus ponens* duas vezes entre (**NN**) e (52') para obter (54)[132].

(**NN**) parece minar o nosso argumento de que conteúdos conceituais expressos por sentenças são proposições (ou pensamentos). Em geral, esperar-se-ia que as sentenças '$\neg\neg a$' e '*a*' não expressassem a mesma proposição (ou pensamento); e, portanto, que Frege não teria em mente em **BS** que '$\equiv$' designasse um tipo de identidade quando tal símbolo ocorre junto com sentenças.

Como argumentamos acima, se isto fosse o caso, então as próprias críticas de Frege a Boole voltar-se-iam contra ele, já que a identidade de conteúdo teria um duplo significado.

Embora Frege nunca tenha sido totalmente explícito sobre um critério de identidade para pensamentos, há uma passagem em uma carta enviada a Husserl (1906), na qual ele escreve:

> It seems to me an objective criterion is necessary for recognizing a thought again as the same, for without it logical analysis is impossible. Now it seems to me that the only possible means of deciding whether sentences *A* expresses the same thought as sentence *B* is the following, and here I assume that neither of two sentences contains a logically self-evident component part in its sense. If *both* the assumption that the content of *A* is false and that of *B* true and the assumption that the content of *A* is true and that of *B* false lead to a logical contradiction, and *if this can be established without knowing whether the content of A or B is true or false, and without requiring other than purely logical laws for this purpose, then nothing can belongs to the content of A as far as it is capable of being judged true or false, which does not also belong to the content of B*" (Frege, 1980, pág. 70, nosso grifo).

132 Esta prova foi-nos mencionada por Landini. Não obstante, não temos certeza se Frege tinha isto em mente. Parece-nos razoável que ele desejava derivar apenas (31) e (41) a partir de (**NN**).

De acordo com o critério mencionado acima, duas sentenças A e B expressam o mesmo pensamento, se elas forem logicamente equivalentes, mas, além disso, isto pode ser estabelecido sem que saibamos qual é o valor de verdade de A e B. Agora, quaisquer duas sentenças A e $\neg\neg A$ parecem satisfazer este critério. Não precisamos saber o valor de verdade de A para sabermos que A e $\neg\neg A$ devem ter o mesmo valor de verdade[133].

Por outro lado, '$a \supset a$' e a fórmula que expressa a transitividade do ancestral forte (fórmula 98 de **BS**) não parecem satisfazer este critério, porque embora seja provável no sistema de **BS** que ambas as sentenças são logicamente equivalentes, não podemos afirmar isto sem saber o valor de verdade destas sentenças[134].

No seu último artigo publicado - "Compound Thoughts" (1923-6) -, Frege explicitamente afirma que as sentenças 'a' e '$\neg\neg a$' expressam o mesmo pensamento:

> Let us now consider cases where a thought is compounded with itself rather than with some different thought. For any 'A' that is a sentence proper, 'A and A' expresses the same thought as 'A'; the former says no more and no less than the latter. It follows that 'not (A and A)' express the same as 'not A'.
> Equally, '(not A) and (not A)' also expresses the same as 'not A'; and consequently 'not[(not A) and (not A)] also express the same as 'not (not A)', or 'A'. Now, 'not[(not A) and (not A)] expresses a compound of the fourth kind and instead of this we can say 'A or A'. Accordingly, not only 'A and A', but also 'A or A' has the same sense as 'A' (Frege, 1980, pp.. 404-5)[135].

Certamente, esta passagem não pode ser considerada como uma forte evidência de que, em **BS, (BB)** afirma que as sentenças 'a' e '$\neg\neg a$' expressariam a mesma proposição (ou pensamento), porque foi escrita 44 anos depois da publicação do primeiro livro de Frege.

Contudo, esta passagem, junto com as nossas observações anteriores, e com as observações que serão feitas a seguir, fornecerão, acreditamos, uma evidência de que Frege entende os conteúdos conceituais expressos por sentenças como algo próximo a proposições e que o símbolo para identidade de conteúdo quando ocorre junto com sentenças expressa também a identidade.

133 Veja Levine (2006).

134 Não estamos afirmando que este critério de Frege é razoável. Por exemplo, as sentenças A e $\neg\neg\neg\neg\neg\neg A$ satisfariam o critério? Poderíamos afirmar que elas expressam o mesmo pensamento?

135 Em (Frege, 1984, pág. 399): "Thus from '(not A) and B' we obtain '(not (not B)) and (not A)'. But since 'not (not B)' has the same sense as 'B', we have here 'B and (not A)', which expresses the same as '(not A) and B'".

Em uma carta enviada a Husserl datada de 1891, ao mencionar as doutrinas de **GLA**, Frege escreve:

> I have drawn the last step from concept to object horizontally in order to indicate that it takes place on the same level, that concept and concepts have the same objectivity (see my Foundations, sect. 47). In literary use it is sufficient if everything has a sense; in scientific use there must also be meanings. In the Foundations I did not yet draw the distinction between sense and meaning. In sec. 97 I should now prefer to speak of 'having a meaning' instead of 'having a sense'. Elsewhere, too, e.g., in sects 100, 101, 102, I would now often replace 'sense' by meaning'. What I used to call judgeable content is now divided into thought and truth value. Judgement in the narrower sense could be characterized as a transition from thought to a truth value. (Frege, 1980, pág. 63).

In **GGA**, Frege afirma:

> The old signs that appear here outwardly unchanged, and whose algorithm has also hardly changed, are nonetheless provided with different explanations. The former 'content-stroke' reappears as the 'horizontal'. These are consequences of a thoroughgoing development of my logical views. Formerly I distinguished two components in that whose external form is a declarative sentence: (1) the acknowledgment of truth, (2) the content that is acknowledged to be true. *The content I called a 'judgeable content'. This last now split for me into what I call 'thought' and 'truth-value', as a consequence of distinguishing between sense and meaning of a sign*[136] (**BLA**, pp. 6-7, nosso grifo).

Estas duas passagens sugerem que o pensamento é parte da concepção de conteúdo judicável e, portanto, parte da noção de conteúdo conceitual expresso por uma sentença.

No artigo “On Mr. Peano's Conceptual Notation and My Own” (1897), há a seguinte passagem na qual Frege justifica a sua distinção entre sentido e referência e a introdução dos valores de verdade como objetos:

> According to this, '$2 > 3$', '$7^2 = 0$' and '$\wedge$' are signs for the same thing, i.e., the meanings of these signs coincide. Now since Mr. Peano also allows the sign of equality to occur between any two true sentences, he apparently subscribes to my above-stated doctrine. If he nevertheless nowhere (so far as I can see) expressly states it, then that is probably because he has been deterred by the strangeness of my tenet. Nay, I am not even sure whether he grants this inference from his premises. The agreement with my doctrine is on this account no less remarkable, since it happens to hold in spite of this repugnance. *The natural objection to this would be that true sentences can express different thoughts. According to Mr. Peano the sentences '2.2=4' and '3>2' can be connected by the sign of equality: '(2.2=4)=(3>2)'; and yet anyone would agree that they by no means signify the*

136 Alteramos ligeiramente a passagem.

same thing. Without my distinction between sense and meaning this difficulty would be insuperable. Hence this distinction gains indirect confirmation from what is maintained by my doctrine of the True and the False" (Frege, 1984, pp. 240-1)[137].

Acreditamos que a objeção mencionada na passagem, a saber, de que sentenças verdadeiras podem expressar pensamentos diferentes, aplicar-se-ia à teoria lógica de **BS**, caso Frege tivesse introduzido (**BB**) como axioma no seu sistema. E, de fato, parece-nos que foi a necessidade de introduzir algo como (**BB**) que motivou, em parte, a distinção entre sentido e referência e a introdução dos valores de verdade como objetos[138].

Se nossa interpretação estiver correta, a introdução de (**BB**) em **BS** levaria ao seguinte dilema: ou todas as fórmulas prováveis no sistema expressariam a mesma proposição (ou pensamento), ou existiriam instâncias que falsificariam (**BB**) e, neste caso, ele não poderia ser considerado um axioma[139].

A introdução de (**IV***) em **BS** levaria ao mesmo dilema. Relembrando, (**IV***) seria a fórmula

$$\vdash \neg(a \equiv \neg b) \supset (a \equiv b)$$

137 Em "*On Sense and Meaning*" (Frege, 1984, pág. 162), há a seguinte passagem: "So far we have considered the sense and meaning only of such expressions, words, or signs as we have called proper names. We now inquire concerning the sense and meaning of an entire assertoric sentence. Such a sentence contains a thought. Is this thought, now, to be regarded as its sense or its meaning? Let us assume for the time being that the sentence does mean something. If we now replace one word of the sentence by another having the same meaning, but a different sense, this can have no effect upon the meaning of the sentence. Yet we can see that in such a case the thought changes; since, e.g., the thought in the sentence 'The morning star is a body illuminated by the Sun" differs from that in the sentence 'The evening star is a body illuminated by the Sun'. Anybody who did not know that the evening star is the morning star might hold the one thought to be true, the other false. The thought, accordingly, cannot be what is meant by the sentence, but must rather be considered as its sense".

138 Frege precisa que a identidade ocorra entre sentenças e, portanto, é necessário que elas tenham uma referência e que esta seja tal que duas sentenças verdadeiras designem a mesma coisa. Daí a necessidade de introduzir os objetos o Verdadeiro e o Falso. A justificação desta nossa afirmação encontra-se em **2** e **3**.

139 Chateaubriand afirma o seguinte: "So when Frege distinguishes clearly between sign, sense, and denotation, it is not only the problem of identity for objects that has to be straightened out; there are problems with the formulation of his concept script in general. And in particular there is a very pressing problem about what to do with sentential signs. Do they denote? What is the denotation of a sentence? Given the formulations in *Begriffsschrift*, the most natural solution would have been to take conceptual contents (now thoughts) as their denotation. And many later logicians have indeed taken something like propositions as the denotation of sentences. But this wouldn't do, because although it may take care of the propositional logic, it doesn't give a solution to other problems that Frege was facing. The problem of identity, for instance. Given his solution to this problem, the substitutivity arguments with which he eliminates thoughts as the denotation of sentences is inevitable. So Frege concluded that thoughts (the old conceptual contents) are the senses of sentences. But it now became imperative that he should find denotations for sentences. Why? For several reason, mostly connected to the development of his views on truth" (2001, pág. 270).

que afirma que dadas duas sentenças *a* e *b*, ou *a* expressa o mesmo conteúdo conceitual que $\neg b$, ou *a* expressa o mesmo conteúdo conceitual que *b*. Certamente, esta fórmula, se introduzida em **BS**, implicará que todas as sentenças logicamente equivalentes expressam o mesmo conteúdo conceitual, uma vez que é demonstrável em **BS** a seguinte fórmula:

(**A**) $\vdash (a \supset b) \supset ((b \supset a) \supset \neg(a \equiv \neg b))$[140]

Como já mencionamos, dadas duas fórmulas *A* e *B* prováveis em **BS**, temos que (i) $A \supset B$ e (ii) $B \supset A$. Assim, usando (**A**), (i) e (ii), por meio de *modus ponens*, obtemos

(**B**) $\vdash \neg(A \equiv \neg B)$.

Ora, uma vez que (**IV***) estaria presente no sistema, derivaríamos, por *modus ponens* entre (**B**) e (**IV***), a fórmula

$$\vdash (A \equiv B)$$

Obviamente, se (**IV***) fosse um axioma no sistema, (**BB**) seria provável. Além disso, (**NN**) também seria provável em **BS**, aplicando *modus ponens* entre as fórmulas (31), (41) e (**BB**). E, de fato, poderíamos eliminar os axiomas (31) e (41) do sistema, porque a seguinte fórmula é provável em **BS**:

(**C**) $\vdash \neg(a \equiv \neg a)$[141]

Destarte, da seguinte instância de (**IV***)

(**D**) $\vdash \neg(a \equiv \neg\neg a) \supset (a \equiv \neg a)$,

obtemos, por contraposição, a fórmula

(**E**) $\vdash \neg(a \equiv \neg a) \supset (a \equiv \neg\neg a)$.

Ora, aplicando *modus ponens* entre (**C**) e (**E**), derivaríamos (**NN**)[142]. E a partir de (**NN**), obteríamos os "axiomas" (31) e (41) na forma já indicada acima[143].

Frege nunca introduziu um símbolo para bi-implicação no seu sistema lógico, mas para auxiliar nosso argumento, vamos supor que '$a \leftrightarrow b$' seja uma abreviação para a fórmula

(**F**) $\neg((a \supset b) \supset \neg(b \supset a))$.

---

140 Dadas quaisquer duas sentenças *A* e *B*, se elas se implicam mutuamente, então *A* não expressa o mesmo conteúdo conceitual que $\neg B$. Veja a prova no apêndice 4.

141 Veja a prova no apêndice 4.

142 Na verdade, (**NN**) é a fórmula '$(\neg\neg a \equiv a)$'. Mas a seguinte fórmula é provável em **BS**: $\vdash (a \equiv b) \supset (b \equiv a)$. Assim, obteríamos (**NN**) a partir de $\vdash (a \equiv \neg\neg a)$.

143 Quase todas as provas são análogas as de **GGAI** (pp. 67-69; **BLA**, pp. 114-8).

O sistema lógico de **BS** é completo em relação aos operadores sentenciais '$\neg$' e '$\supset$', portanto, neste caso, a seguinte fórmula é provável no sistema

(**BB**$\leftrightarrow$) $((a \supset b) \supset ((b \supset a) \supset (a \leftrightarrow b)))$

Assim, dado (**BB**$\leftrightarrow$), a seguinte fórmula é provável no sistema a partir dos axiomas (31) e (41)

(**NN**$\leftrightarrow$) $\neg\neg a \leftrightarrow a.$

Ademais, são prováveis no sistema as fórmulas

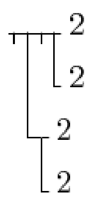
(52*$\leftrightarrow$) $(a \leftrightarrow b). \supset (a \supset b)$

(57*$\leftrightarrow$) $(a \leftrightarrow b). \supset (b \supset a)$

(54 $\leftrightarrow$) $(a \leftrightarrow a)$[144]

É interessante que as leis lógicas acima comumente aceitas, embora prováveis, não são provadas em **BS**. Frege preferiu assumir os axiomas (52) e (54), a partir dos quais é possível derivar o teorema (57), a ter de provar (52*$\leftrightarrow$), (54*$\leftrightarrow$) e (57*$\leftrightarrow$). Além disso, ao invés de provar (**NN**$\leftrightarrow$), ele cogitou introduzir (**NN**) como axioma. Isto é significativo.

Se introduzirmos a equivalência em **BS** por meio da abreviação acima, perceberemos que '$\equiv$' e '$\leftrightarrow$' não têm o mesmo significado. Por exemplo, se admitirmos que '2' é um nome da conceitografia,'2 $\equiv$ 2' será bem formado, mas '2 $\leftrightarrow$ 2' não o será, porque, na notação Fregeana, isto equivale a:



Embora ainda não tenhamos explicado todos os símbolos presentes na fórmula supracitada, podemos ver a ocorrência do símbolo do traço de conteúdo anexado ao símbolo '2' que expressa um conteúdo não-judicável. Mas, como já afirmamos, '—2' é mal-formado em **BS** e, portanto, este símbolo inteiro é mal-formado[145].

144 O teorema 55 - $(a \equiv b) \supset (b \equiv a)$ - também tem a sua contrapartida: $(a \leftrightarrow b) \supset (b \leftrightarrow a)$. Além disso, a fórmula $(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow (b \leftrightarrow a)$ é provável, embora sua contrapartida não o seja em **BS**.

145 Em **GGA**, '2 $\leftrightarrow$ 2' é bem formado no sistema, mas ainda assim, a equivalência e a identidade não designam a mesma função. Por exemplo, assumindo que '2' e '3' sejam nomes de **GGA**, '2=3' é falso, mas '2 $\leftrightarrow$ 3' é verdadeiro.

Acreditamos que a identidade de conteúdo ocorrendo entre sentenças foi permitida para tentar uniformizar, na medida do possível, o sistema lógico de **BS**[146]. E para evitar ambiguidades no seu sistema, Frege foi obrigado a interpretar o símbolo '$\equiv$' como uma identidade em todos os casos. As sentenças deveriam expressar algo, que foi chamado conteúdo judicável (o conteúdo conceitual de sentenças).

Em nossa visão, em §3, Frege não está comprometido em fornecer um critério de identidade para conteúdos conceituais. Segundo nosso entendimento, ele pretendia refutar a visão tradicional que considerava a estrutura gramatical da sentença como pertinente à estrutura lógica[147]. Temos de ter em mente ao lermos a passagem mencionada em §3 que, para Frege, os conteúdos conceituais podem ser analisados de várias formas, cada uma das quais, embora diferentes, resultam no mesmo conteúdo conceitual[148] [149].

2.1.1.2.
O condicional e o *modus ponens*

Na §5 de **BS**, Frege introduz e explica o seu símbolo que designa o condicional. De acordo com ele, se admitirmos que *A* e *B* expressam conteúdos judicáveis[150], então há as seguintes quatro possibilidades de combinação: (1) ambos *A* e *B* são afirmados; (2) *A* é afirmado e *B* é negado; (3) *A* é negado e *B* é afirmado; e (4) *A* e *B* são ambos negados. O símbolo

146 Contudo, Frege não foi completamente bem-sucedido.

147 Frege também critica as distinções entre juízos bastante comuns na lógica tradicional. Veja **BS**, §4.

148 Frege remete o leitor justamente a §9 de **BS**, onde ele explica sua análise de sentenças como sendo de função e argumento.

149 Em (Baker & Hacker, 2003, pág. 277), há a seguinte passagem: "Different sentences in natural language will be equivalent to a single formula of the concept-script if their conceptual content is identical. In particular a passive transform of an action-statement has the same content as the original active form (Frege, 1879, §3). Or, more generally, pairs of sentences exploiting expressions for relations and their inverses are equivalent in content, e. g., "heavier" and "lighter", "give" and "receive" (Frege, 1879, §9:¶ 9)".

150 "If *A* and *B* stand for *judgeable contents* (§2), there are the following four possibilities..." (**CN**, pág. 114).

exclui a terceira possibilidade acima. O traço vertical

que une

—A

e

—B[151]

é o traço de condicionalidade.

O que o símbolo

(**Con**)

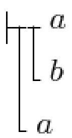
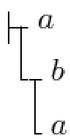
expressa pode ser traduzido na notação lógica contemporânea por:'$B \supset A$'.

Portanto, a leitura das fórmulas de Frege é feita de baixo para cima. Chamaremos *B* que ocorre em (**Con**) o antecedente e *A*, o consequente.

Deve ser observada a importância do traço de conteúdo para a determinação do escopo do condicional. Na notação lógica contemporânea, este escopo é dado pelo uso dos parênteses. Por exemplo, as fórmulas

(I) $(a \supset (b \supset a))$ e (II) $((a \supset b) \supset a)$

têm significados diferentes: (I) é uma tautologia, ou seja, verdadeira em todas interpretações dadas a *a* e *b*; por outro lado, (II) não é uma tautologia, sendo falsa quando *a* é falso. Estas fórmulas são simbolizadas na conceitografia do seguinte modo:

(I’)  e (II’) 

Sem o traço de conteúdo, não poderíamos expressar dentro da conceitografia as fórmulas (I) e (II). Teríamos apenas

151 Como o traço de condicionalidade une '—A' e '—B', se 'A' e 'B' não forem conteúdos judicáveis, então '—A' e '—B' não serão bem-formadas e, por sua vez, o símbolo inteiro não o será. É importante salientar que a estipulação do significado do traço de condicionalidade é condicional. Portanto, não parece coincidência que quando Frege chegou a rejeitar definições condicionais, ele tenha substituído o traço de conteúdo pelo horizontal, que agora denota uma função total de objetos a valores de verdade. Desta forma, a estipulação do traço de condicionalidade deixa de ser condicional.

$$\begin{array}{c} a \\ | \\ b \\ | \\ a \end{array}$$

Logo, o traço de conteúdo desempenha um papel sintático central na formação e distinção das fórmulas bem-formadas dentro da conceitografia.

Frege estipula e determina um único significado que deve ser entendido pelo traço de condicionalidade. Ele tenta explicar que este símbolo poderia ser traduzido na linguagem ordinária por meio da conjunção 'se'. Assim, poderíamos traduzir

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top A \\ \quad\llcorner B \end{array}$$

por "se *B*, [então] *A*". Contudo, por vezes, a conjunção 'se' é carregada de aspectos causais, enquanto, na visão de Frege, o traço de conteúdo expressa a implicação material.

Intimamente relacionada com o condicional está a regra de inferência conhecida por *modus ponens*. Na notação contemporânea, esta regra é representada da seguinte forma: $a, a \supset b \vdash b$

Na notação conceitual, a regra de *modus ponens* é simbolizada assim

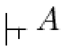
$$\begin{array}{l} (P_1) \vdash\!\!\top A \\ \qquad\quad\;\llcorner B \\ \\ (P_2) \vdash B \\ \hline \qquad\vdash A \end{array}$$

(P_1) exclui a possibilidade de *B* ser afirmado e *A*, negado, a possibilidade (3) mencionada acima; por outro lado, (P_2) exclui a possibilidade de *B* ser negado, portanto, exclui as possibilidades (2) e (4) supracitadas. Portanto, temos como única opção, com a conjunção de (P_1) e (P_2), a primeira possibilidade, a saber, *A* ser afirmado e *B* ser afirmado. Logo, podemos e, de fato, devemos inferir que *A* é afirmado.

Frege (**CN**, §6, pág. 120) menciona que esta é a sua única regra de inferência, contudo, isso não é verdadeiro. Um ponto interessante é que Frege (**BS**, §6, pág. 120) admite transformar as leis lógicas provadas na segunda parte de **BS** em regras de inferência. Em **GGA**, ele explicitamente assume este procedimento. No momento certo, também admitiremos, em nossas deduções no capítulo **4**, regras de inferência baseadas nas leis que foram provadas na parte 2 de **BS**.

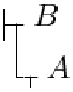
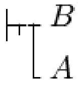
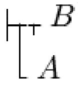
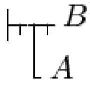
2.1.1.3.
A negação

Em §7 de **BS**, Frege introduz e explica o seu símbolo que designa a negação. De acordo com ele, a fórmula



significa: "*A* não ocorre". A negação é o pequeno traço – o traço de negação - anexado ao traço de conteúdo de *A*. Na notação contemporânea, a negação de *A* é geralmente simbolizada por: $\neg A$.

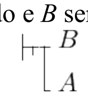
Observamos novamente o papel fundamental do traço de conteúdo para expressar o escopo da negação. Na notação lógica atual, este escopo é designado também pelo uso dos parênteses. Assim, as fórmulas (1) $((\neg A) \supset B)$, (2) $\neg(A \supset B)$, (3) $(A \supset (\neg B))$ e (4) $\neg(A \supset (\neg B))$ expressam coisas diferentes. Na conceitografia, estas fórmulas seriam traduzidas pelas seguintes fórmulas, respectivamente:

(1')  [152], (2')  [153], (3')  [154] e (4')  [155]

152 Isto significa que o caso no qual *A* é negado e B é negado não ocorre, permanecendo apenas as possibilidades (1), (2) e (3), ou seja, A é afirmado ou B é afirmado (ou ambos).

153 A fórmula

afirma que a possibilidade de *A* ser afirmado e *B* ser negado não ocorre. Portanto, a fórmula



afirma que a possibilidade de *A* ser afirmado e *B*, negado ocorre.

154 A fórmula

afirma que a possibilidade de *A* ser afirmado e não-*B* ser afirmado não ocorre, Ou seja, *A* e *B* não podem ser ambos afirmados, restando as possibilidades (2), (3) ou (4).

155 Uma vez que a fórmula

(1’) e (4’) podem ser traduzidas na linguagem ordinária, respectivamente, por: ‘*A* ou *B*’ (‘ou’ no sentido inclusivo) e ‘*A* e *B*’; (2´) pode ser traduzida por: ‘*A* e não-*B*’; e (3´) por: ‘não-*A* ou não-*B*’ (‘ou’ inclusivo).

Como no caso do traço de condicionalidade, o símbolo ‘$_{\top} A$’ apenas será bem-formado, se ‘*A*’ designar um conteúdo judicável. Portanto, se admitirmos que ‘2’ é um nome que ocorre na conceitografia, então

$$_{\top} 2$$

não é bem-formado, uma vez que

$$\text{—}2$$

também não o é.

2.1.1.4.
A identidade de conteúdo conceitual, função, argumento e generalidade

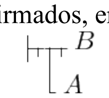
Em §8 de **BS**, Frege introduz e explica o símbolo que designa a identidade de conteúdo conceitual que é simbolizada por:

$$\equiv$$

O símbolo ‘$\equiv$’ é distinto do traço de condicionalidade e do traço de negação, porque ele relaciona não os próprios conteúdos, mas nomes que designam os conteúdos:

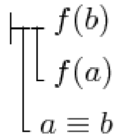
> Identity of content differs from conditionality and negation by relating to names, not to contents. Although symbols are usually only representatives of their contents – so that each combination [of symbols usually] expresses only a relation between their contents – they at once appear *in propria persona* as soon as they are combined by the symbol for identity of content, for this signifies the circumstance that two names have the same content. Thus, with the introduction of a symbol for identity of content, a bifurcation is necessarily introduced into the meaning of every symbol, the same symbols at times standing for their contents, at times for themselves (**CN**, pág. 124)

afirma que *A* e *B* não podem ser ambos afirmados, então



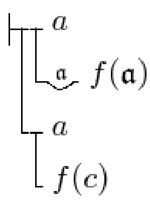
afirma a possibilidade de *A* e *B* serem ambos afirmados.

Esta passagem parece pôr em xeque a nossa argumentação anterior segundo a qual Frege não pode interpretar '$\equiv$' como sendo uma espécie de equivalência porque isto introduziria ambiguidades no sistema. Embora ela seja problemática, percebamos que os símbolos que terão um duplo significado não são as constantes lógicas de **BS**, mas as letras latinas. Por exemplo, o axioma 52 é representado na conceitografia pela fórmula



Em '$a \equiv b$', 'a' e 'b' designam os próprios símbolos, enquanto que em '$f(a)$' e '$f(b)$', 'a' e 'b' devem expressar conteúdos conceituais[156] [157]. Contudo, os primitivos lógicos devem manter o seu significado fixo.

Há outros casos de ambiguidade em **BS** que estão relacionados com as letras latinas. Por exemplo, Frege prova o seguinte teorema:

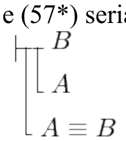
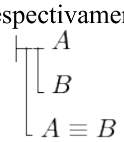
 [158]

Apesar do símbolo '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile} f(\mathfrak{a})$' ainda não ter sido explicado, o importante é percebermos que na fórmula acima 'a' tem de expressar um conteúdo judicável, caso contrário, ela seria mal-formada. Não obstante, 'c' não precisa ser necessariamente um conteúdo judicável, embora '$f(c)$' tenha de ser.

Por outro lado, Frege introduziu o seguinte axioma no sistema

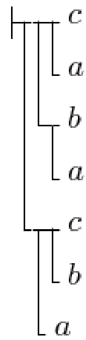
156 Não é necessário que 'a' e 'b' expressem conteúdos judicáveis. Veja mais adiante.

157 Na conceitografia, (52*) e (57*) seriam representadas, respectivamente, pelas fórmulas:

 , 

Neste caso, 'A' e 'B' ocorrendo em '$A \equiv B$' designariam os próprios nomes de conteúdos judicáveis, enquanto que em '—A' e '—B', designariam conteúdos judicáveis.

158 Teorema 61 de **BS**. Na notação contemporânea: $(f(c) \supset a) \supset (\forall x f(x) \supset a)$



Neste caso, '*a*', '*b*' e '*c*' devem expressar necessariamente conteúdos judicáveis. Frege não faz distinções entre as letras latinas. Elas podem percorrer tanto conteúdos judicáveis, quanto conteúdos conceituais em geral. No primeiro caso, as letras latinas "funcionariam" como variáveis proposicionais; no segundo como variáveis objectuais[159] [160] [161].

A interpretação do símbolo para identidade de conteúdo conceitual é surpreendente. De fato, ela gera outro problema, já mencionado por Dummett[162]. De acordo com Frege, uma relação *R* é funcional justamente quando

$$\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(x,z) \supset y \equiv z)$$

Em '$R(x,y)$' e '$R(x,z)$' quantificamos sobre conteúdos conceituais (objetos), porém em '$y \equiv z$' estamos quantificando sobre nomes de conteúdos.

Portanto, embora oficialmente Frege estipule que a identidade de conteúdos relacione símbolos para os conteúdos, na prática, parece-nos, que '$\equiv$' relaciona os conteúdos conceituais que são expressos pelos símbolos.

Isto é confirmado no fim de § 8, quando Frege escreve:

> Now, let
> $$\vdash (A \equiv B)$$
> mean: *the symbol A and the symbol B have the same conceptual content, so that we can always replace A by B and vice versa* (**CN**, 126).

---

159 É interessante que na linguagem de Boole, dependendo de se estramos lidando com proposições primárias ou secundárias, as variáveis mudam o seu domínio. Mas Frege é silencioso sobre este fato. Provavelmente, nada é mencionado porque ele sabia que na sua linguagem o mesmo ocorria.

160 Em **BS**, Frege parece usar as letras '*x*', '*y*', '*z*',... como percorrendo conteúdos conceituais.

161 Veja também as fórmulas 119 e 120.

162 "In *Begriffsschrift* Frege held that identity was a relation between names and not between things. His motive for this view was to give an explanation of the informativeness of a true identity-statement: but it makes nonsense of the use of bound variables on either side of the sign of identity" (Dummett, 1973, p. 544).

Estritamente falando, se '$\equiv$' relacionasse nomes, Frege deveria dizer que o símbolo '*A*' é idêntico ao símbolo '*B*' e que o símbolo '*A*' pode ser substituído pelo símbolo '*B*' e vice-versa[163].

Frege parece confundir uso e menção. Assim, por exemplo, ele acredita que, nas expressões '—*A*' e '—*B*', o traço de conteúdo é anexado aos conteúdos judicáveis *A* e *B*. Mas, como fizemos na nossa exposição acima, a leitura mais plausível seria supor que o traço de conteúdo é anexado aos símbolos '*A*' e '*B*' que expressam conteúdos judicáveis.

Frege não é totalmente claro sobre as suas razões de estipular a identidade de conteúdo como relacionando nomes e não os próprios conteúdos conceituais. Não obstante, a seguinte passagem de "*On Sense and Meaning*" ilumina a questão:

> Equality gives rise to challenging questions which are not altogether easy to answer. Is it a relation? A relation between objects, or between names or signs of objects? In my *Begriffsschrift* I assumed the latter. The reasons which seem to favour this are the following: *a*=*a* and *a*=*b* are obviously statements of differing cognitive value: *a*=*a* holds *a priori* and, according to Kant, is to be labeled analytic, while statements of the form *a*=*b* often contain valuable extension of our knowledge and cannot always be established *a priori*…. Now if we were to regard equality as a relation between that which the names '*a*' and '*b*' designate, it would seem that *a*=*b* could not differ from *a*=*a* (i.e. provided *a*=*b* is true). A relation would thereby be expressed of a thing to itself, and indeed one in which each thing stands to itself but to no other thing.

De acordo com alguns autores, Frege desejava evitar o que ficou mais tarde conhecido por "Paradoxo da Identidade de Frege" (ou, simplesmente, "Paradoxo da Identidade")[164]. Conforme Frege, na sentença

Pelé ≡ Edson Arantes do Nascimento

---

163 $\vdash$'*A*' ≡ '*B*'.

164 Mendelsohn (2005, pág 28): "Identity statements differ in "cognitive value" [Erkenntniswerth]. Here is a simple example. 'Mark Twain = Mark Twain' is a mere truism, but 'Mark Twain = Samuel Clemens' says something of considerable historical significance. How does this fact challenge the standard view, on which $\alpha = \beta$ is understood to express that the relation being one and the same thing as holds between the objects designated by α and β? Since the relation is supposed to hold between the objects themselves, all that $\alpha = \beta$ expresses –the cognitive content of the sentence – is that the objects stand in the given relation. $\alpha = \beta$ and $\gamma = \delta$ (α, β, γ , δ not necessarily distinct) all say the same thing – have the same cognitive content – if α, β, γ , δ all stand for the same object. For the same relation is said to hold between the same objects. So, ironically, on the view that $\alpha = \beta$ is about the objects designated by α and β, the identity, if true, appears less a significant remark about the designated objects(s) than a trivial rehearsal of the Law of Identity. This is Frege's Paradox of Identity".

se a identidade fosse entendida como uma relação entre os conteúdos expressos por ‘Pelé’ e ‘Edson Arantes do Nascimento’, então não haveria diferença cognitiva entre as sentenças

(q) Pelé ≡ Pelé e (q´) Pelé ≡ Edson Arantes do Nascimento.

se, de fato, (q') fosse verdadeira.

Não obstante, alguém que não soubesse que ‘Pelé’ é um apelido de Edson Arantes do Nascimento, não teria conhecimento de (q’). E, portanto, quando lhe fosse informado que (q´) é verdadeiro, ele obteria um novo conhecimento

Em **BS**, a solução encontrada por Frege foi estipular que ‘≡’ relaciona nomes e que cada nome designa um modo de determinação do conteúdo, de forma que, embora os nomes designam o mesmo conteúdo, eles designam, em geral, de modo diferente, obtendo-se assim um novo conhecimento[165 166].

O que nos é importante sobre a identidade de conteúdo conceitual é que este primitivo lógico não relaciona apenas nomes que expressam conteúdos judicáveis, mas também nomes que expressam conteúdos não-judicáveis. A primeira razão para esta interpretação é que quando Frege explica (ou elucida) o significado deste primitivo lógico, ele apresenta um exemplo da geometria, no qual um mesmo ponto geométrico é nomeado de duas formas diferentes (veja, **CN**, pp. 124-5). Mas, ponto geométrico é um objeto, um conteúdo não-judicável.

Contra esta interpretação, poderia ser oferecida a seguinte objeção: embora, Frege use um exemplo da geometria na sua elucidação do símbolo em questão, isto é feito apenas para facilitar o entendimento, não significando que, em **BS**, ele esteja comprometido com conteúdos não-judicáveis.

Mas, esta objeção não nos parece satisfatória por dois motivos:

165 “A separate name corresponds to each of these two modes of determination. Thus, the need of a symbol for identity of content rests the following fact: the same content can be fully determined in different ways; but, that the *same content*, in a particular case, is actually given by *two {different}* modes of determination is the content of a *judgement*. Before this {judgement] can be made, we must supply two different names , corresponding to the two [different] modes of determination, for the thing thus determined. But the judgement requires for its expression a symbol for identity of content to combine two names. It follows from this that different names for the same content are not always merely an indifferent matter of form; but rather, if they are associated with different modes of determination, they concern the very heart of the matter. In this case, the judgement as to identity of content is, in Kant’s sense synthetic.” (**CN**, pp. 125-6).

166 Como já mencionamos, estritamente falando, a sentença de nosso exemplo teria de relacionar, então, os nomes 'Pelé' e 'Edson Arantes do Nascimento': 'Pelé' ≡ 'Edson Arantes do Nascimento'.

(**1**): em §8, Frege é bastante cuidadoso em usar apenas as palavras 'conteúdo' e 'conteúdo conceitual' na caracterização da identidade de conteúdo. Se observarmos as seções anteriores de **BS**, por exemplo §5 (**CN**, pág. 114), veremos que ele é explícito sobre o traço de condicionalidade relacionar conteúdos judicáveis[167] [168].

Embora Frege não seja explícito, poderíamos dizer que para cada conteúdo judicável existe um conteúdo conceitual correspondente, mas que nem todo conteúdo conceitual corresponde a um conteúdo judicável. Por exemplo, Frege escreve:

> "*If, in an expression* (***whose content need not be judgeable***), *a simple or a complex symbol occurs in one or more places and we imagine it as replaceable by another* [symbol] (*but the same one each time*) *at all or some of these places, then we call the part of the expression that shows itself invariant* [under such replacement] *a function and the replaceable part its argument*" (**CN**, pág. 127, nosso grifo).

Na passagem acima, Frege admite que expressões cujos conteúdos são não-judicáveis podem ocorrer na conceitografia. Para exemplificar, poderíamos mencionar a expressão: '*sucessor de 0*' (que designa um conteúdo não-judicável). Se excluirmos '0' desta expressão, obtemos a expressão funcional *sucessor de ( ).* Ao introduzirmos no lugar de '0', '1', obtemos a expressão '*sucessor de 1*' que exprime um conteúdo não-judicável.

Por outro lado, se na expressão '$2^2 = 4$', que designa um conteúdo judicável, excluirmos '4', obtemos a expressão funcional: '$2^2 = ()$'[169]. E se, no lugar "vazio", introduzirmos '5', obtemos um novo conteúdo judicável: '$2^2 = 5$'. Este conteúdo judicável é falso. Portanto, podemos negá-lo e, em seguida, afirmar o conteúdo negado como verdadeiro: $\vdash\!\!\lnot\, 2^2 = 5$.

Há em **BS** uma proto-distinção entre conceitos e funções. Expressões funcionais que, quando "complementadas", resultam em um conteúdo judicável exprimiriam conceitos. Na carta a Marty, Frege claramente afirma isto:

167 Cf. (**CN**, pp. 94-5).

168 Beaney (2007, pág. 100) escreve: "But it is not just propositions that are regarded as having conceptual content. In §8 of the *Begriffsschrift*, in explaining his symbol for identity of content ('$\equiv$'), Frege makes clear that names have content, too, the content of a name being the object denoted. This suggests the following criterion in the case of names:
(CCn) Two names have the same (conceptual) content iff they denote the same object".

169 O conceito designado por esta expressão sendo: 'ser um quadrado de 2'.

> A concept is unsaturated in that it requires something to fall under it; hence it cannot exist on its own. *That an individual falls under it is a judgeable content*, and here the concept appears as a predicate and is always predicative. (Frege, 1980, pág. 101, nosso grifo).

Embora Frege não seja explícito sobre isto, toda e qualquer expressão que, quando "complementada", resulta em um conteúdo conceitual exprimiria uma função. '*sucessor de ( )*' expressaria uma função, mas não um conceito. Por outro lado, '$2^2 = ()$' expressaria um conceito[170].

(**2**): nas definições de ancestral fraco e função (parte 3 de **BS**), a identidade de conteúdo parece relacionar (nomes de) conteúdos não-judicáveis. De fato, Frege usará o ancestral fraco para definir o conceito de número natural. Há razões para acreditar que Frege já havia vislumbrado esta definição em 1879, ano de publicação de **BS**.

Em §9 de **BS**, Frege inicia sua discussão sobre a análise dos conteúdos conceituais em termos de função e argumento. Ele escreve:

> Let us suppose that the circumstance that hydrogen is lighter than carbon dioxide is expressed in our formula language. Then, in place of the symbol for hydrogen, we can insert the symbol for oxygen or for nitrogen. By this means, the sense is altered in such a way that "oxygen" or "nitrogen" enters into the relations in which "hydrogen" stood before. If we think of an expression as variable in this way, it divides into [1] a constant component which represents the totality of the relations and [2] the symbol which is regarded as replaceable by others and which denotes the object which stands in these relations. I call the first component a function, the second its argument. This distinction has nothing to do with the conceptual content, but only with our way of viewing it. Although, in the mode of consideration just indicated, "hydrogen" was the argument and "being lighter than carbon dioxide" the function, we can also apprehend the same conceptual content in such a way that "carbon dioxide" becomes the argument and "being heavier than hydrogen" the function. In this case we need only think of "carbon dioxide" as replaceable by other ideas like "hydrogen chloride gas" or "ammonia"(**CN**, pág. 126).

Explicaremos a passagem acima, usando um exemplo mais simples. Suponhamos que a seguinte sentença ocorra na conceitografia: "Platão foi discípulo de Sócrates". Esta sentença expressa um determinado conteúdo conceitual. Agora, se substituirmos o símbolo para Platão pelo símbolo para Aristóteles, por exemplo, obteremos a nova sentença: "Aristóteles foi discípulo de Sócrates". As duas sen-

170 Em outras palavras, conceitos são funções de conteúdos judicáveis. Em "*Function and Concept*" (Frege, 1984, pp. 137-156), conceitos são transformados em funções de verdade.

tenças mencionadas acima não podem expressar um mesmo conteúdo conceitual, uma vez que a primeira é verdadeira e a segunda é falsa[171].

Conforme Frege, podemos eliminar o símbolo para Platão na sentença supracitada, obtendo desta forma a expressão “( ) foi mestre de Sócrates”, que é o componente constante mencionado na passagem; o símbolo para Platão é o termo substituível na sentença. O componente constante foi chamado de função, o termo substituível, de argumento. No nosso exemplo acima, a função é aquilo que é expresso por “( ) foi mestre de Sócrates”; o argumento é aquilo que é expresso pelo símbolo para Platão[172].

Ainda na passagem, Frege sugere que o mesmo conteúdo conceitual pode ser analisado diferentemente. Ao invés de excluirmos o símbolo para Platão, poderíamos considerar como componente substituível o símbolo para Sócrates. Neste caso, obteríamos os seguintes componentes: “Platão foi discípulo de ( )”, “Sócrates”. O primeiro expressa a função, o segundo, é o argumento.

Segundo Frege, estas duas análises embora diferentes sempre resultam no mesmo conteúdo conceitual. Assumamos que a sentença acima é simbolizada por:

$$R(a, b)$$

Na primeira análise, obtemos: $R(\Gamma, b)$[173] e a; na segunda: $R(a, \Gamma)$ e b[174]. Contudo, ao complementarmos as respectivas funções com seus respectivos argumentos, obtemos novamente: $R(a, b)$.

É possível, segundo Frege, considerar a e b como substituíveis na sentença $R(a, b)$. Desta forma, chegamos à seguinte análise: $R(\Gamma, \Delta)$ (função); a e b (os argumentos).

---

171 Como afirmamos, se duas sentenças expressam o mesmo conteúdo conceitual, então elas devem ser logicamente equivalentes.

172 Há uma grande controvérsia em relação a **BS** sobre se Frege considerava funções como entidades linguísticas ou não. Filósofos como Dummett (1973; 1981; 1991b), Geach (1967) e Kenny (1995) sustentaram esta interpretação. Por outro lado, Baker e Hacker (2003) argumentaram contra esta posição. Embora muitas das noções de **BS** sejam problemáticas incluindo a de função, acreditamos que Baker & Hacker estejam mais próximos da verdade que Dummett, Geach e Kenny. Entretanto, não discutiremos esta questão em detalhes aqui.

173 'Γ' representa o lugar do argumento.

174 No seu exemplo, Frege utiliza a relação inversa. Assim, a função expressa por “hidrogênio é mais leve que ( )” é transformada na inversa “( ) é mais pesado que o hidrogênio”. Embora Frege não defina a relação inversa em **BS**, ele está implicitamente assumindo que para qualquer relação $R(x, y)$ sua inversa é: $\hat{R}(y, x)$. Expresso na conceitografia, esta definição seria: $\Vdash (\hat{R}(y, x) \equiv R(x, y))$. Por definição, uma relação R e sua inversa expressam o mesmo conteúdo conceitual.

A ordem de ocorrência dos argumentos é importante, porque, nem sempre, $R(a,b)$ expressa o mesmo conteúdo conceitual que $R(b,a)$. No nosso exemplo, "Platão foi discípulo de Sócrates" expressa um conteúdo judicável verdadeiro. Por outro lado, "Sócrates foi discípulo de Platão" expressa um conteúdo judicável falso[175].

Se admitirmos que a sentença "Platão é filósofo" ocorre na conceitografia, e se considerarmos que o símbolo para Platão é substituível na mesma, obteremos desta forma os seguintes componentes: "( ) é filósofo" (expressando a função), "Platão" (expressando o argumento). Simbolicamente, isto pode ser representado por: $F(a)$. Para cada argumento diferente do símbolo para Platão, a sentença resultante expressará conteúdos conceituais distintos.

Há outras formas de se analisar as sentenças de nossos exemplos[176]. Por exemplo, poderíamos imaginar que, na sentença "Platão foi discípulo de Sócrates", o componente substituível seja a expressão "( ) foi discípulo de ( )" e que o componente fixo seja "Platão ( ) Sócrates". Esta expressão representa uma função de segunda ordem que pode ser parafraseada da seguinte forma: "ser uma relação que ocorre entre Platão e Sócrates (necessariamente nesta ordem)". Sob esta função caem relações de primeira ordem[177]. Simbolicamente, podemos expressar isto da seguinte forma: $\Upsilon(a,b)$ (função); $R(\Gamma,\Delta)$ (argumento)[178].

E como anteriormente, para cada relação de primeira ordem (argumento), obtemos sentenças que expressam conteúdos conceituais diferentes. Por exemplo,

175 Se a relação for simétrica, a ordem dos argumentos não importará.

176 Em Chateaubriand (2001), principalmente capítulos 1-6, há uma discussão detalhada sobre isto.

177 Em **BS**, não há uma clara distinção das entidades, como ocorreu posteriormente no trabalho de Frege. De acordo com ele, as entidades são divididas em objetos e funções. Os objetos pertencem ao nível mais baixo da hierarquia. As funções são divididas em níveis: funções de primeira ordem são aquelas cujos argumentos significativos são objetos; funções de segunda ordem são aquelas cujos argumentos significativos são funções de primeira ordem e assim sucessivamente. Além disso, em cada nível, as funções são distinguidas pelo número de argumentos que elas permitem. Assim, há funções de primeira ordem unárias; funções de primeira ordem binárias, etc.; funções de segunda ordem unárias, funções de segunda ordem binárias, etc..

178 "Since the symbol Φ occurs at a place in the expression

$$\Phi(A)$$

and since we can think of it as replaced by the other symbols [such as] Ψ, X - which then express other functions of argument A – we can consider $\Phi(A)$ as function of the argument Φ. This shows quite clearly that the concept of function in analysis, which I have in general followed, is far more restricted than the one developed here" (**CN**, pág. 129).

se o argumento for "( ) foi pai de ( )", obteremos a sentença: "Platão foi pai de Sócrates". Certamente, esta sentença expressa um conteúdo conceitual diferente que o da sentença "Platão foi discípulo de Sócrates".

O mesmo tipo de análise é valido para a sentença "Platão é filósofo". Podemos considerar que o componente substituível seja a expressão "( ) é filósofo". Portanto, o elemento fixo seria "Platão ( )". Esta última expressão pode ser parafraseada do seguinte modo: "ser uma propriedade que pertença a Platão". Simbolicamente, isto pode ser expresso assim: $\Upsilon(a)$ (função); $F(\Gamma)$ (argumento).

E, novamente, para cada função de primeira ordem (argumento), obtemos sentenças que expressam conteúdos conceituais distintos. Por exemplo, se o argumento for "( ) é brasileiro", obtemos a sentença "Platão é brasileiro". Esta sentença expressa um conteúdo diferente que o expresso pela sentença "Platão é filósofo".

O que é mais importante em tudo isso, é, por exemplo, que a análise da sentença "Platão é filósofo" em termos de "Platão ( )" (função) e "( ) é filósofo" produz o mesmo conteúdo conceitual que o da sentença em termos de "( ) é filósofo" (função) e "Platão" (argumento). O mesmo vale para a análise da sentença "Platão foi discípulo de Sócrates" em termos de "Platão ( ) Sócrates" (função) e "( ) foi discípulo de ( )" (argumento); e em termos de "( ) foi discípulo de ( )"(função) e "Platão" e "Sócrates" (argumentos).

Um dos objetivos de §9 de **BS** é articular o argumento iniciado em §3, segundo o qual a distinção entre sujeito e predicado não ocorre na sua conceitografia. É possível analisar os conteúdos conceituais de inúmeras formas, contudo todas estas análises em termos de função e argumento resultarão no mesmo conteúdo conceitual, embora, gramaticalmente, elas expressem sentenças distintas.

Outro objetivo de Frege é introduzir dentro da conceitografia modos de expressão para funções unárias e binárias. Isto é de grande importância porque, caso contrário, ele não poderia definir de forma totalmente nítida os conceitos de ancestral forte, fraco e função.

Em §10 de **BS**, Frege introduziu os símbolos

$$\Phi(A) \text{ e } \Psi(A, B)$$

O primeiro símbolo representa uma função unária cujo argumento é A; o segundo, uma função binária cujos argumentos são A e B.

Ademais, podemos aplicar o traço de conteúdo aos símbolos $\Phi(A)$ e $\Psi(A, B)$

(a) $-\!\!-\Phi(A)$
(b) $-\!\!-\Psi(A, B)$

Implicitamente, é assumido que $\Phi(A)$ e $\Psi(A, B)$ expressam conteúdos judicáveis, caso contrário (**a**) e (**b**) seriam mal-formados. Em outras palavras, $\Phi(\Gamma)$ e $\Psi(\Gamma, \Delta)$ devem expressar, respectivamente, um conceito e uma relação.

O símbolo

$$\vdash \Phi(A)$$

expressa o juízo que *A* tem a propriedade Φ; e o símbolo

$$\vdash \Psi(A, B),$$

que *A* encontra-se na relação **Ψ** com *B*.

Agora, junto com os demais primitivos do sistema, é possível formar conteúdos mais complexos. Por exemplo, expressaríamos na conceitografia o conteúdo da sentença "se *A* tem a propriedade ***Φ*** e se *A* está na relação **Ψ** com *B*, então *B* tem a propriedade ***Φ***" por meio da fórmula:

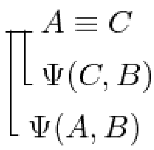
$$\begin{array}{l} \top\!\!\top\!\!-\Phi(B) \\ \;\;\llcorner\, \Psi(A, B) \\ \llcorner\, \Phi(A) \end{array}$$ [179]

Conceitograficamente, o conteúdo da sentença "se *A* está na relação **Ψ** com *B* e se *A* está na relação **Ψ** com *C*, então *B* e *C* expressam o mesmo conteúdo conceitual" seria representado por meio da fórmula:

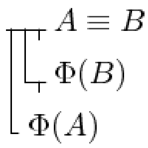
$$\begin{array}{l} \top\!\!\top\!\!-B \equiv C \\ \;\;\llcorner\, \Psi(A, C) \\ \llcorner\, \Psi(A, B) \end{array}$$ [180]

O conteúdo da sentença "se *A* está na relação **Ψ** com *B* e se *C* está na relação **Ψ** com *B*, então *A* e *C* expressam o mesmo conteúdo conceitual" é dado na conceitografia pela fórmula:

179 A partir deste conteúdo, Frege define quando uma propriedade *F* é hereditária em uma relação *f*.
180 Com este conteúdo, definimos o conceito de uma relação *f* ser funcional.

 [181]

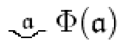
O conteúdo da sentença “Se *A* tem a propriedade *Φ* e se *B* não tem a propriedade *Φ* , então *A* e *B* não expressam o mesmo conteúdo conceitual” é representado na conceitografia pela fórmula:



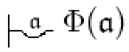
Outra inovação de Frege foi a introdução de um símbolo que expressa a generalidade:

 [182]

Na regra de formação, a letra gótica deve aparecer sempre acima da concavidade e em alguma expressão que sucede ao símbolo acima. Por exemplo



De acordo com Frege, se anexarmos o traço de juízo à fórmula acima



isto afirma “the judgment that the function is a fact whatever we may take as its argument” (**CN**, pág. 130)[183].

Em **BS**, há seguinte passagem

> The meaning of a German letter is subject only to the obvious restrictions that [1] the assertibility (§2) of a combination of symbol following stroke must remain

181 Com este conteúdo, podemos definir quando uma relação *f* é um-para-muitos.

182 A introdução da generalidade está intimamente ligada com a análise dos conteúdos conceituais em termos de função e argumento. Na lógica tradicional, sentença “Todo A é B” era analisada em termos de sujeito e predicado. Gramaticalmente, o sujeito da sentença é “Todo A”, que formava uma unidade, e o predicado é “B”. Boole analisou “todo A” e “B” em termos de classe. Assim, “Todo A é B” afirma que todos os objetos que pertencem à classe A são idênticos a alguns objetos que pertencem à classe B. Na visão de Frege, “Todo A é B” expressa uma relação de subordinação entre os conceitos A e B. E esta relação é determinada da seguinte forma: para todo objeto *x*, se *x* cai sob A, então *x* cai sob B. A sua ideia foi justamente introduzir um símbolo que expressasse “para todo *x*” (**CN**, pp. 127-8).

183 De acordo com Chateaubriand, esta leitura indica que o quantificador deveria ser interpretado substitucionalmente: “Given Frege's characterization of argument and function, it seems that the quantifier should not be interpreted objectually but substitutionally – whatever substitution-instance we take, the content is a fact. If the predicate 'is a fact' is distinguished from the judgement sign, then Frege's formula indicates the judgement that every substitution-instance is a fact, or is true, or is the case” (2001, pág. 264).

intact, and [2] if the German letter appears as a function symbol, this circumstance must be taken into account (**CN**, pág. 130).

Isto indica que a generalidade só pode ser aplicada a conteúdos judicáveis. Por exemplo, supondo que '$\Gamma + 2$' seja um nome de uma função na conceitografia, então

$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \mathfrak{a} + 2$$

não é bem-formado, porque para algumas substituições em '$\Gamma + 2$', nem sempre obtemos um conteúdo judicável: supondo que '2' seja um nome da conceitografia, '2+2' não expressa um conteúdo judicável.

Por outro lado, supondo que '$\Gamma + 2 \equiv \Gamma.2$' seja um nome de função em **BS**, a seguinte fórmula é bem-formada:

$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ (\mathfrak{a} + 2 \equiv \mathfrak{a}.2)$$

Percebamos que para todas substituições relevantes[184], '$\Gamma + 2 \equiv \Gamma.2$' sempre expressará um conteúdo judicável. Por exemplo, para o argumento '3', obtemos

$$3 + 2 \equiv 3.2$$

que é falso. Para o argumento '2', obtemos

$$2 + 2 \equiv 2.2$$

que é verdadeiro. Portanto, '$\Gamma + 2 \equiv \Gamma.2$' não é um fato para todo argumento. Assim, expressamos isto pela fórmula

$$\neg\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ (\mathfrak{a} + 2 \equiv \mathfrak{a}.2)$$

E, consequentemente, podemos afirmá-la

$$\vdash\neg\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ (\mathfrak{a} + 2 \equiv \mathfrak{a}.2)$$

Este fato é importante, porque o seguinte análogo do **Axioma V**

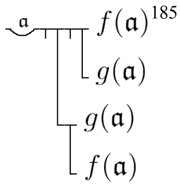
$$\epsilon' f(\epsilon) \equiv \epsilon' g(\epsilon) \equiv \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ (f(\mathfrak{a}) \equiv g(\mathfrak{a}))$$

parece ser bem-formado na linguagem de **BS**, independentemente de se '$f\Gamma$' e '$g\Gamma$' são conceitos ou não (no nosso sentido explicado). Por outro lado, o seguinte análogo do **Axioma V**

$$\epsilon' f(\epsilon) \equiv \epsilon' g(\epsilon) \equiv \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ (f(\mathfrak{a}) \leftrightarrow g(\mathfrak{a}))$$

184 No caso, deveríamos substituir por números. Em **BS**, Frege ainda não havia assumido a tese, segundo a qual a definição de uma função deve ser total, ou seja, deve ser determinado para todos os argumentos apropriados qual é o valor da função. No caso em questão, a função é de primeira ordem, portanto deveria ser determinado para todos os objetos qual é o seu valor. Em particular, deveria ser determinado qual seria o valor dessa função para o argumento "Sol".

não é bem-formado para qualquer função, já que o lado direito da fórmula acima equivale à fórmula



Neste caso, '$f\Gamma$' e '$g\Gamma$' têm de ser conceitos para produzir uma fórmula bem-formada.

Em **BS**, temos o Axioma 54

(54BS): $\vdash c \equiv c$

Frege permite a regra de substituição para conteúdos conceituais. Assim, no lugar de 'c', poderíamos introduzir '$f(a)$', obtendo

(54BS*) $\vdash f(a) \equiv f(a)$, onde '$f\Gamma$' não precisa expressar necessariamente um conceito.

Mas, disto, por meio de generalização universal, obtemos

(54BS**) $\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, (f(\mathfrak{a}) \equiv f(\mathfrak{a}))$[186]

Mas, se

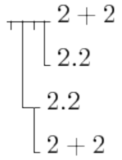
$$\epsilon' f(\epsilon) \equiv \epsilon' g(\epsilon) \equiv \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, (f(\mathfrak{a}) \equiv g(\mathfrak{a}))$$

estiver no sistema, podemos obter a fórmula

$$\epsilon' f(\epsilon) \equiv \epsilon' f(\epsilon).$$

E daqui facilmente derivamos que existem extensões de conceitos[187] [188].

185 Se '$f\Gamma$' e '$g\Gamma$' forem, respectivamente, as funções expressas pelas fórmulas '$\Gamma + 2$' e '$\Gamma.2$' (assumindo que são expressões da conceitografia), então logo percebemos que o seguinte é mal-formado:



186 Parece-nos que esta fórmula é um possível teorema de **BS**.

187 Novamente, a teoria obtida com a adição do **Axioma V** a **BS** é inconsistente, portanto não se trata de uma prova no sentido estrito.

188 Em **BS**, há uma prova trivial da existência de extensões, se introduzirmos no sistema nomes próprios para as mesmas, porque, devido ao axioma 54, o seguinte é provável no sistema: $\exists x(x \equiv c)$.

Como afirmamos no início, Frege usa as letras latinas para expressar generalidade. Portanto, qual seria a necessidade de um símbolo para expressar a generalidade? De acordo com ele:

> It is sometimes necessary to confine the generality to a part of the judgement. Then I make use of German instead of italic letters, as in
>
> $$\vdash\!\!\top \begin{array}{l} x = 0 \\ \llcorner \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \top\, \mathfrak{a} = x \\ \qquad \llcorner\, \mathfrak{a}^2 = x \end{array}$$
>
> in words: if each square root of x is x itself, then x=0. Here the concavity with the $\mathfrak{a}$ signifies that the generality expressed by $\mathfrak{a}$ should be confined to the content of
>
> $$\top \begin{array}{l} \mathfrak{a} = x \\ \llcorner\, \mathfrak{a}^2 = x \end{array}$$
>
> I consider this mode of notation one of the most important components of my "conceptual notation", through which it also has, as a mere presentation of logical forms, a considerable advantage over Boole's mode of notation (**CN**, pág. 99)[189].

Ou seja, embora as letras latinas expressem a generalidade, devemos considerar o escopo inteiro do juízo como sendo generalizado. Portanto, a fórmula

$$\top \begin{array}{l} x = 0 \\ \llcorner \top\, a = x \\ \quad \llcorner\, a^2 = x \end{array}$$

é equivalente a

$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\overset{\mathfrak{d}}{\smile}\top \begin{array}{l} \mathfrak{d} = 0 \\ \llcorner \top\, \mathfrak{a} = \mathfrak{d} \\ \quad \llcorner\, \mathfrak{a}^2 = \mathfrak{d} \end{array}$$

Porém, isto expressa um conteúdo conceitual diferente da fórmula

$$\overset{\mathfrak{d}}{\smile}\top \begin{array}{l} \mathfrak{d} = 0 \\ \llcorner \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \top\, \mathfrak{a} = \mathfrak{d} \\ \qquad \llcorner\, \mathfrak{a}^2 = \mathfrak{d} \end{array}$$

A primeira é falsa, porque se instanciarmos $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ para 1, obtemos a fórmula

$$\top \begin{array}{l} 1 = 0 \\ \llcorner \top\, 1 = 1 \\ \quad \llcorner\, 1^2 = 1 \end{array}$$

cujo antecedente é verdadeiro, mas o consequente é falso. Por outro lado,

$$\overset{\mathfrak{d}}{\smile}\top \begin{array}{l} \mathfrak{d} = 0 \\ \llcorner \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \top\, \mathfrak{a} = \mathfrak{d} \\ \qquad \llcorner\, \mathfrak{a}^2 = \mathfrak{d} \end{array}$$

189 Veja também (**CN**, pp. 130-1).

expressa um conteúdo judicável verdadeiro[190 191].

Frege também permite quantificação sobre funções. Isto é observado nas definições do ancestral forte e fraco e nas provas decorrentes destes conceitos. Mas, há uma passagem em §11 que Frege já sugere este procedimento:

> Since a letter which is used as a function symbol, like Φ in $\Phi(a)$, can itself be considered as the argument of a function, it can be replaced by a German letter in the manner just specified.

Em uma passagem anterior, mencionamos a regra de generalização universal, que é uma regra de inferência assumida por Frege[192]. Se $\vdash \Phi(a)$ for um teorema de **BS**, poderemos derivar

$$\vdash\!\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\ \Phi(\mathfrak{a})$$

Esta regra também é assumida para funções. Portanto, se $\vdash f(a)$ é um teorema, podemos inferir

$$\vdash\!\!\smile^{\mathfrak{f}}\!\!-\ \mathfrak{f}(a)$$ [193]

Além disso, Frege assume a regra de inferência que chamamos de "regra de confinamento da generalidade ao consequente". De acordo com Frege

> It is also obvious that from
>
> $$\begin{array}{l}\vdash\!\!\top\ \Phi(a)\\ \ \ \ \llcorner\ A\end{array}$$
>
> we can derive
>
> $$\begin{array}{l}\vdash\!\!\top\!\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\ \Phi(\mathfrak{a})\\ \ \ \ \llcorner\ A\end{array}$$
>
> if A is an expression in which a does not occur and a stands only in argument places of $\Phi(a)$. If $\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\ \Phi(\mathfrak{a})$ is denied, then we must be able to specify a meaning for a such that $\Phi(a)$ is denied. Thus, if $\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\ \Phi(\mathfrak{a})$ were denied and A affirmed, then we should be able to specify a meaning for a such that A would be affirmed and $\Phi(a)$ denied. But because of
>
> $$\begin{array}{l}\vdash\!\!\top\ \Phi(a)\\ \ \ \ \llcorner\ A\end{array}$$

---

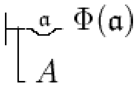
190 O antecedente é falso, uma vez que nem toda raiz de um número é idêntica ao próprio número.

191 Às vezes, queremos expressar a negação de uma generalidade e não a generalidade de uma negação e, portanto, é necessário o símbolo para quantificação. Por exemplo, a fórmula $\top\ \Phi(a)$ é equivalente à fórmula $\smile^{\mathfrak{a}}\!\!\top\ \Phi(\mathfrak{a})$. Mas isto não é equivalente à fórmula: $\top\!\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\ \Phi(\mathfrak{a})$. Na primeira, temos a generalidade de uma negação; na segunda, a negação de uma generalidade.

192 (**CN**, pág. 132).

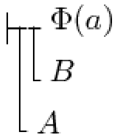
193 (**CN**, pp. 182, 184).

we cannot do this; for this [formula] means that, whatever *a* may be, the case in which $\Phi(a)$ would be denied and *A* affirmed is excluded.
Thus, we cannot deny $\smile^{\mathfrak{a}}\,\Phi(\mathfrak{a})$ and affirm A; that is:

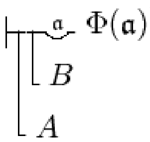


(**CN**, pp. 132-3).

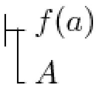
Esta regra pode ser generalizada para vários antecedentes. Assim, se a fórmula



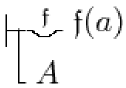
é um teorema de **BS** e se '*a*' não ocorre em *A* e *B*, então podemos inferir

[194]

Na parte 3 de **BS**, Frege usa esta regra para funções. Portanto, se a fórmula

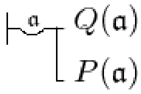


é um teorema de **BS**, podemos derivar

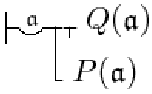


E, na verdade, nas provas da parte 3 de **BS**, Frege utiliza uma generalização da inferência acima em fórmulas com mais de um antecedente[195].

Como anteriormente, é possível mesclar a generalidade com os demais primitivos lógicos e obter conteúdos mais complexos. Assim, podemos expressar na conceitografia a sentença "Todo P é Q" da seguinte forma:

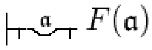
[196]

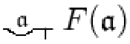
A sentença "Nenhum P é Q" é representada na conceitografia pela fórmula

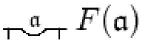
[197]

194 Veja (**CN**, pág. 133).
195 Veja (**CN**, pp. 182 e 184).
196 Para todo *x*, se *x* cai sob *P*, então *x* cai sob *Q*.
197 Para todo *x*, se *x* cai sob *P*, então *x* não cai sob *Q*.

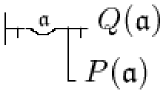
O quantificador existencial não foi definido por Frege, mas há uma fórmula da conceitografia que tem este significado. Assim, “existem *F*s” é representado por



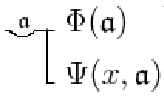
A fórmula  indica a circunstância que tudo não é *F*. Portanto, a fórmula

 indica a circunstância que nem tudo não é *F*, ou seja, algo é *F*.

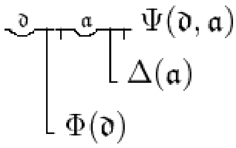
“Alguns P são Q” na conceitografia é

 [198]

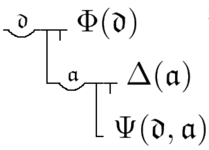
Na conceitografia, expressamos “para todo *a*, se *x* está na relação Ψ com *a*, então *a* tem a propriedade Φ” da seguinte forma:

 [199]

“Para todo *d*, se *d* é Φ, então existe *a* tal que *a* é Δ e *d* está na relação Ψ com *a*” é formulado na conceitografia assim:



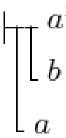
Esta fórmula é equivalente a

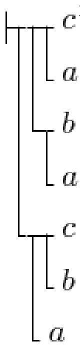
 [200]

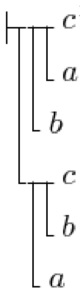
2.1.2
As leis do pensamento, definições e derivações

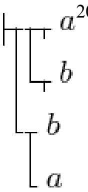
Na parte 2 de **BS**, Frege introduz seus nove axiomas lógicos, formulados por meio das letras latinas. Na conceitografia, estes axiomas são as fórmulas:

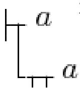
198 Nem tudo que é P não é Q.
199 Esta fórmula será usada na definição do ancestral.
200 No capítulo **3**, usamos esta fórmula na definição do conceito de correlação entre dois conceitos via uma relação. Ela afirma que para todo *a*, se para todo *b*, *a* está na relação Ψ com *b*, então *b* não é Δ, então *a* não é Φ.

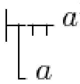
(1BS)  [201];

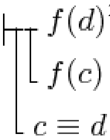
(2BS)  [202];

(8BS)  [203]

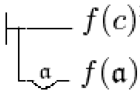
(28BS)  [204];

(31BS)  [205];

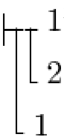
(41BS)  [206]

(52BS)  [207];

(54BS) $\vdash c \equiv c$;

(58BS)  [208]

Nos seis primeiros axiomas, as letras latinas '*a*', '*b*', '*c*',… devem percorrer conteúdos judicáveis, caso contrário, eles seriam mal-formados. Assumindo que '1' e '2' sejam nomes da conceitografia, o seguinte, por exemplo, não seria uma fórmula bem-formada:

 [209]

Por outro lado, nos três últimos axiomas, as letras latinas *a*, *b*, *c*, *d*... não precisam necessariamente percorrer conteúdos judicáveis. Se '2' for um nome da conceitografia, o seguinte será bem-formado:

201 Na notação contemporânea: $(a \supset (b \supset a))$.
202 Na notação contemporânea: $(a \supset (b \supset (c)) \supset ((a \supset b) \supset (a \supset c))$.
203 Na notação contemporânea: $(a \supset (b \supset c)) \supset (b \supset (a \supset c))$. Este axioma não é independente dos demais axiomas de **BS**.
204 Na notação contemporânea: $(a \supset b) \supset (\neg b \supset \neg a)$.
205 Na notação contemporânea: $(\neg\neg a \supset a)$.
206 Na notação contemporânea: $(a \supset \neg\neg a)$.
207 Na notação contemporânea: $(c \equiv d) \supset (f(c) \supset f(d))$.
208 Na notação contemporânea: $\forall x f(x) \supset f(c)$.
209 Certamente, Frege introduzirá nomes que designem os números individuais (veja, **GLA**, §§ 75-7; **GGA** §§ 41-2). Em **GGA**, devido ao horizontal, esta fórmula seria bem-formada e verdadeira.

$$\vdash (2 \equiv 2).$$

No caso dos axiomas 52BS e 58BS, o que é exigido é que '$f(a)$', '$f(b)$' e '$f(c)$' expressem conteúdos judicáveis[210]. Ou seja, '$f\Gamma$' deve ser necessariamente um conceito, se '*a*', '*b*', '*c*', '*d*',...forem conteúdos não-judicáveis. Caso contrário, teríamos fórmulas mal-formadas[211].

Nesta segunda parte de **BS**, implicitamente Frege argumenta que seus axiomas são analíticos no sentido Kantiano. Em **CRP**, Kant formula os seguintes critérios por meio dos quais poderíamos julgar se um juízo é analítico:

> Em todos os juízos, nos quais se pensa a relação entre um sujeito e um predicado (apenas considero os juízos afirmativos, porque é fácil depois a aplicação aos negativos), esta relação é possível de dois modos. Ou o predicado B pertence ao sujeito A como algo que está contido (implicitamente) nesse conceito A, ou B está totalmente fora do conceito A, embora em ligação com ele. No primeiro caso chamo *analítico* ao juízo, no segundo *sintético*. Portanto, os juízos (os afirmativos) são analíticos, quando a ligação do sujeito com o predicado é pensada por identidade; aqueles, porém, em que essa ligação é pensada sem identidade, deverão chamar-se juízos sintéticos. Os primeiros poderiam igualmente denominar-se juízos explicativos; os segundos, juízos extensivos; porque naqueles o predicado nada acrescenta ao conceito do sujeito e apenas pela análise o decompõe nos conceitos parciais, que jé nele estavam pensados (embora confusamente) (**CRP**, A 6-7; B 10-11)

> Ora a proposição: A coisa alguma convém um predicado que o contradiga, denomina-se princípio de contradição e é um critério universal, embora apenas negativo, de toda a verdade; mas pertence unicamente à lógica, porque vale só para conhecimentos considerados simplesmente como conhecimentos em geral, independentemente do seu conteúdo, e afirma que a contradição os destrói totalmente.

210 Existe uma diferença entre a lógica de **BS** (e de **GGA**) e a lógica de predicados contemporânea. Nesta última, '*fx*', '*fy*', etc. seriam fórmulas (sentenças abertas), porque '*x*', '*y*' seriam variáveis livres. Em **BS** e **GGA**, '*fx*', '*fy*', etc. são termos designando (de fato, em **GGA**, Frege usa o termo indicar), respectivamente, conteúdos conceituais (e dependendo da fórmula, eles designam conteúdos judicáveis) e objetos.

211 O seguinte seria mal-formado, substituindo-se, '*c*' por '2', '*d*' por '3' e '*f*Γ' por 'Γ+1' em 52BS:

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\top\; 3+1 \\ \quad\;\;\llcorner\; 2+1 \\ \quad\llcorner\; 2 \equiv 3 \end{array}$$

Por outro lado, se substituíssemos '*f*Γ' por ''Γ é par' ('*P*Γ'), obteríamos uma fórmula bem-formada:

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\top\; P(3) \\ \quad\;\;\llcorner\; P(2) \\ \quad\llcorner\; 2 \equiv 3 \end{array}$$

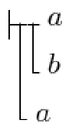
E, certamente, poderíamos mostrar que $\vdash\!\!\top\, (2 \equiv 3)$, porque 2 é par, mas 3 não é.

> Contudo, este critério pode também servir para um uso positivo, isto é, não só para banir a falsidade e o erro (na medida em que assentam na contradição), mas ainda para reconhecer a verdade. Porque, se o juízo é *analítico*, quer seja negativo ou afirmativo, a sua verdade deverá sempre poder ser suficientemente reconhecida pelo princípio de contradição. Com efeito, o contrário do que se encontra já como conceito e que é pensado no conhecimento do objeto, é sempre negado com razão, enquanto o próprio conceito terá de ser necessariamente afirmado, porquanto o seu contrário estaria em contradição com o objeto (**CRP**, A 151-2; B 190-1).

Na doutrina Kantiana, os dois critérios acima têm uma íntima ligação, já que um juízo analítico no primeiro sentido expressa que uma identidade ocorre entre o conceito do sujeito e o de predicado. Portanto, negar um juízo analítico no primeiro sentido é o mesmo que afirmar que uma coisa é e não é ao mesmo tempo, isto é, cometer uma contradição.

Contudo, no sistema lógico de Frege, não é claro como aplicar o primeiro critério de Kant, porque a distinção entre sujeito e predicado não desempenha qualquer papel[212].

Não obstante, o segundo critério parece ser bastante adequado. E, de fato, quando Frege argumenta a favor da verdade de seus axiomas, ele menciona implicitamente que os negar implicaria em uma contradição. Por exemplo, sobre 1BS, é escrito o seguinte:

> §14
>
> 
>
> says: "The case in which *a* is denied, *b* is affirmed and *a* is affirmed is excluded". This is obvious since *a* cannot be denied and affirmed at the same time (**CN**, pág. 137)[213]

212 "Kant obviously -as a result, no doubt, of defining them too narrowly – underestimated the value of analytic judgements, though it seems that he did have some inkling of the wider sense in which I have used the term*. On the basis of his definition, the division of judgements into analytic and synthetic is not exhaustive. What he is thinking of is the universal affirmative judgement; there, we can speak of a subject concept and ask – as his definition requires – whether the predicate is contained in it or not. But how can we do this, if the subject is an individual object? Or if the judgement is an existential one? In these cases there can simply be no question of a subject concept in Kant's sense.
*On p. 43 [B14] he says that a synthetic proposition can only be seen to be true by the law of contradiction, if another synthetic proposition is presupposed" (**FA**, pp. 99-100).

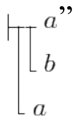
213 Em **GGA**, a justificativa de seus axiomas (exceto o **Axioma V**) é similar a de **BS**: "Now we shall set up, in Roman letters, some general laws that we shall require later. By §12,

Os nove axiomas seriam, na visão de Frege, analíticos (no sentido Kantiano). Ademais, para Frege, suas regras de inferência (explícitas e implícitas), a saber, *modus ponens*, regra de substituição para conteúdos conceituais[214] e para funções[215], generalização universal e confinamento da generalidade ao consequente, preservariam a propriedade de "ser analítico". Disto se seguiria que todos os teoremas prováveis na parte 2 de **BS** seriam analíticos.

Não obstante, há problemas relacionados com os axiomas 52 e 58 e com o teorema 57. Primeiro, iremos tratar de 52BS e de 57BS. Como mencionamos anteriormente, estas fórmulas são usadas para se obter das definições Fregeanas que têm a forma

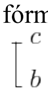
---

could be the False only if both Γ and Δ were the True while Γ was not the True. This is impossible; therefore

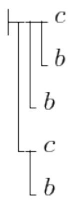


(**BLA**, pág. 69)

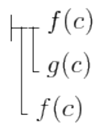
214 Qualquer substituição de letras latinas (ou fórmulas contendo letras latinas) que se faça nos axiomas ou teoremas provados, as fórmulas obtidas continuam sendo sempre verdadeiras. Por exemplo, podemos substituir em 1BS '*a*' pela fórmula



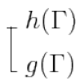
E, assim, obteríamos a fórmula:



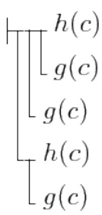
que é verdadeira (e analítica). Poderíamos substituir também '*a*' por '*f*(*c*)' e '*b*' por '*g*(*c*)' em 1BS, obtendo a fórmula



215 A regra de substituição para funções é provavelmente equivalente ao axioma de compreensão para funções. Na última fórmula da nota anterior, poderíamos substituir a função '*f*Γ' pela função



obtendo, portanto, a fórmula



$$\Vdash (A \equiv B),$$

as fórmulas condicionalizadas

$$\vdash\!\begin{array}{l} B \\ A \end{array}$$

e

$$\vdash\!\begin{array}{l} A \\ B \end{array}$$

A atitude de Frege com relação às definições é axiomática, elas não são meros estratagemas metalinguísticos. Embora ele não seja claro em **BS** do porquê desta atitude em relação às definições, em **GLA** Frege sustenta a tese segundo a qual definições devem ser frutíferas. Por isto, devemos entender que as definições têm de participar do processo de provas[216] [217] [218].

Todavia, nas provas Fregeanas, apenas juízos (proposições ou pensamentos verdadeiros) participam. Logo, é necessário "transformar" a definição em um juízo, que acaba por se "tornar" um axioma do sistema[219]. Portanto, a partir da definição, obtemos o "axioma"

$$\vdash (A \equiv B)$$[220]

216 "Definitions show their worth by proving fruitful. Those that could just as well be omitted and leave no link missing in the chain of our proofs should be rejected as completely worthless" (**FA**, pág. 81).

217 Além disso, as definições de Frege são extremamente complexas e delas obtemos resultados inesperados. Nesse sentido, elas também seriam frutíferas: "He [Kant] seems to think of concepts as defined by giving a simple list of characteristics in no special order; but all ways of forming concepts, that is one of the least fruitful. If we look through the definitions given in the course of this book, we shall scarcely find one that is of this description. The same is true of the really fruitful definitions in mathematics, such as that of the continuity. What we find in these is not a simple list of characteristics; every element in the definitions is intimately, I mighty say organically, connected with the others" (**FA**, pág. 100). Veja também Ruffino (1991).

218 Em **GLA**, Frege critica definições que não desempenham papel algum nas provas. Um exemplo é a definição de ponto nos "Elementos" de Euclides. De acordo com a definição, ponto é aquilo que não tem partes. Esta definição não desempenha qualquer papel nas provas dos teoremas geométricos. Frege diria que isto não é uma definição no sentido estrito, mas uma elucidação. Para Frege, a noção de ponto é um primitivo geométrico, regido por determinados axiomas que explicariam ou determinariam o seu significado. Da mesma forma, Frege é enfático que as explicações que ele tenta dar sobre as noções de função e objeto não podem ser consideradas como definições, justamente porque elas são primitivas.

219 Em **BS**, todos os juízos são ou axiomas lógicos ou "axiomas" obtidos das definições ou teoremas lógicos obtidos dos axiomas ou das definições (junto com outros teoremas lógicos).

220 De acordo com Frege, a fórmula obtida por meio da definição é analítica: "Although originally (69) is not a judgement still it is readily converted into one; for once the meaning of the new symbol is specified, it remains fixed from then on; and therefore formula (69) holds also as a judgement, but as an analytic one, since we can only get out what was put into the

Para chegar às formas condicionalizadas acima a partir da definição, Frege substitui nas fórmulas

$$\text{(52BS)} \vdash \begin{array}{l} f(d) \\ f(c) \\ c \equiv d \end{array} \qquad\qquad \text{(57BS)} \vdash \begin{array}{l} f(c) \\ f(d) \\ c \equiv d \end{array}$$

'c' por '*A*', '*d*' por '*B*', e '*f*Γ' por 'Γ', obtendo assim

$$\text{(52BS*)} \vdash \begin{array}{l} B \\ A \\ A \equiv B \end{array} \qquad\qquad \text{(57BS*)} \vdash \begin{array}{l} A \\ B \\ A \equiv B \end{array}$$

Ora, uma vez que temos $\vdash (A \equiv B)$, obtemos as fórmulas desejadas por meio de *modus ponens*.

Até onde podemos ver, há uma questão com a substituição da função '*f*Γ' por 'Γ'. Estritamente falando, o que Frege deseja com esta substituição é eliminar '*f*' das fórmulas 52BS e 57BS. Contudo, este tipo de substituição não pode ser universalmente aplicada. Se substituirmos '*c*' e '*d*', respectivamente, por conteúdos conceituais não-judicáveis '*x*' e '*y*' (variáveis objectuais ou nomes próprios) e fizermos a substituição funcional acima, obteremos fórmulas mal-formadas no sistema

$$\text{(52BS**)} \vdash \begin{array}{l} y \\ x \\ x \equiv y \end{array} \qquad\qquad \text{(57BS**)} \vdash \begin{array}{l} x \\ y \\ x \equiv y \end{array}$$

Isto é relevante, porque, em **GLA**, Frege define os números cardinais individuais 0 e 1 (objetos), e este tipo de substituição funcional não poderá ser permitida de forma completamente geral[221] [222].

new symbols [in the first place]” (**CN**, pág. 168).

221 Em **GLA**, Frege define, por exemplo, o número zero como sendo o número que pertence ao conceito *ser diferente de si mesmo*. Em símbolos:

$$\Vdash (\sharp_x(_{\top}\, x \equiv x) \equiv 0)$$

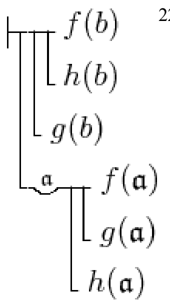
As substituições mencionadas resultariam nas seguintes fórmulas mal-formadas

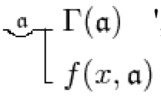
$$\vdash \begin{array}{l} 0 \\ \sharp_x(_{\top}\, x \equiv x) \\ (\sharp_x(_{\top}\, x \equiv x) \equiv 0) \end{array} \qquad\qquad \vdash \begin{array}{l} \sharp_x(_{\top}\, x \equiv x) \\ 0 \\ (\sharp_x(_{\top}\, x \equiv x) \equiv 0) \end{array}$$

222 Pode ser conjecturado que, em parte, a introdução do horizontal como um conceito foi motivada por isto. De fato, não é claro que tipo de função 'Γ' representa. Em **GGA**, a

Com relação ao axioma 58, existe a seguinte questão, a saber, Frege parece supor que, através de substituições relevantes das letras latinas e góticas, podemos obter versões de segunda ordem de 58BS. Por exemplo, Frege prova o seguinte teorema usando 58BS:

(60BS)

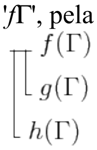
 [223]

Para provar, por exemplo, 93BS, as seguintes substituições são feitas em 60BS: '𝔞' é substituído por '𝔉', '*f*Γ', por 'Γ(*y*)', '*g*Γ', por $Her_{\alpha,\beta}(\Gamma(\beta), f(\alpha,\beta))$[224], '*b*' por '𝔉' e, finalmente '*h*Γ', por '', obtendo a seguinte fórmula

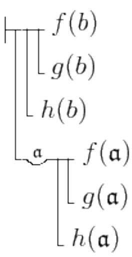
---

substituição funcional nos axiomas IIIa (52BS) e IIIc (57BS), com respeito às definições e ao **Axioma V**, é geralmente '*f*ξ' por '—ξ'.

223 Em notação contemporânea: $(\forall x(h(x) \supset ((g(x) \supset f(x)). \supset .(g(b) \supset (h(b) \supset f(b))))$. 60BS é obtido substituindo-se em 58BS a função '*f*Γ', pela função

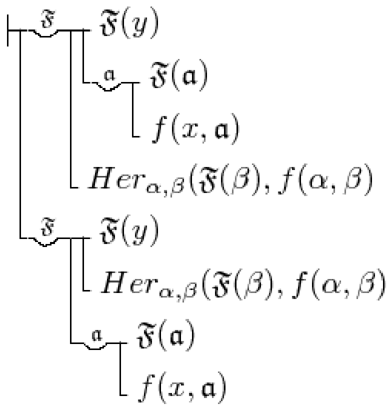


e '*c*' por '*b*', obtendo-se a fórmula



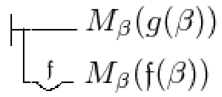
E, por meio de lógica proposicional, o teorema desejado é derivado.

224 O significado deste símbolo será explicado mais adiante.

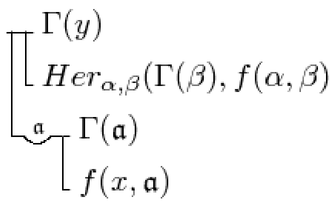


Há algumas coisas extraordinárias sendo feitas aqui. Em primeiro lugar, Frege substitui funções de primeira ordem por funções de segunda ordem. Em segundo, ele generaliza universalmente (segunda ordem), substituindo '*b*' por '$\mathfrak{F}$', enquanto a substituição normal deveria ser '*b*' por '$\mathfrak{a}$'. Além de substituir '$\mathfrak{a}$' por '$\mathfrak{F}$'[225].

Em **GGA**, Frege explicitamente assume o axioma IIb

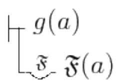


Aqui, '$M_\beta(T(\beta))$'[226] poderá ser substituída por qualquer função de segunda ordem. Em particular, para produzirmos a fórmula em questão, teríamos de tomar o seguinte conceito de segunda ordem

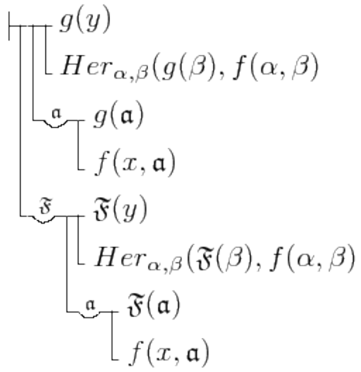


Assim, obteríamos a fórmula

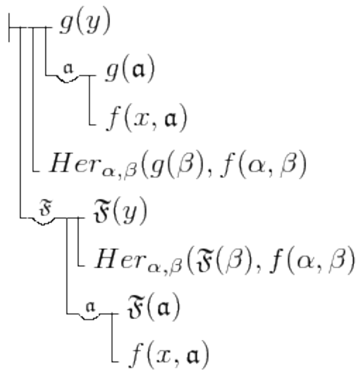
225 Um exemplo mais simples seria substituir '*f*Γ' por 'Γ(*a*)', '$\mathfrak{a}$' por '$\mathfrak{F}$ e '*c*' por '*g*' no axioma 58, obtendo



226 'T' representa o lugar do argumento.



Depois, por lógica proposicional, derivaríamos



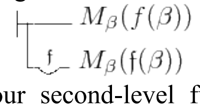
E, desta fórmula, generalizando universalmente sobre '*g*' e confinando a generalidade ao consequente, chegaríamos à fórmula desejada.

Portanto, há uma certa ambiguidade em **BS** no tratamento de funções de primeira ordem e de segunda e no tratamento de funções e objetos[227]. Entretanto, parece que Frege logo percebeu este problema, porque na carta a Marty, ele escreveu o seguinte:

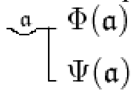
> But I wanted to tell you something about my conceptual notation. You emphasize the division between the function of judgement and the matter judged. The distinction between individual and concept seems to me even more important. In the language the two merge into each other. The proper name 'sun' becomes a concept name when one speaks of suns, and a concept name with a demonstrative serves to designate an individual. In logic, too, this distinction has not always been observed (for Boole only concepts really exist). The relation of subordination of a

---

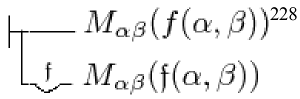
227 Embora, em **GGA**, Frege não confunda funções de primeira ordem com funções de segunda e tenha conhecimento de que não é possível obter instâncias de segunda ordem do axioma 58BS (IIa de **GGA**), ao explicar o axioma IIb, ele escreve o seguinte: “We avail ourselves of this expression of generality in the following Basic Law:



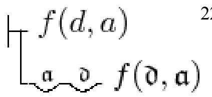
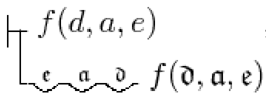
Obviously this Basic Law is for our second-level functions what (IIa) is for first-level functions. “M_β” here corresponds to the letter “*f*” in (IIa); “*f*” here corresponds to the “*a*” in (IIa); and “$\mathfrak{f}$” here corresponds to “$\mathfrak{a}$” in (IIa)” (BLA, pág. 80).

> concept under a concept is quite different from that of an individual falling under a concept.... In general I represent the falling of an individual under a concept by *F*(*x*), where *x* is the subject (argument) and *F*( ) the predicate (function), and where the empty place in the parentheses after *F* indicates non-saturation. The subordination of a concept *Ψ*( ) under a concept *Φ*( ) is expressed by
>
> 
>
> which makes obvious the difference between subordination and an individual falling under a concept. Without the strict distinction between individual and concept it is impossible to express particular and existential judgements accurately and in such a way as to make their close relationship obvious (Frege, 1980, pp. 101-2).

Provavelmente, já em 1882, quando ele enviou a carta, Frege poderia ter o axioma IIb no sistema. De fato, se estiver correta a nossa hipótese de que, no livro mencionado a Marty, os axiomas de Peano poderiam ter sido provados a partir de **PH**, Frege precisaria também do seguinte axioma que nomearemos de IIb*

[228]

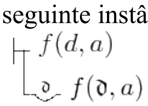
Existe outra diferença fundamental entre 58BS e IIb, já que do primeiro podemos obter as seguintes fórmulas

[229], , etc..

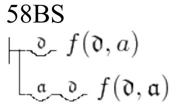
Por outro lado, a partir de IIb, não podemos obter IIb*, porque o primeiro é um axioma que é válido para conceitos de primeira ordem, enquanto o segundo é

228 Veja em **3** o uso deste axioma.

229 A prova é bastante simples: considere a seguinte instância de 58BS



Considere agora a seguinte instância de 58BS

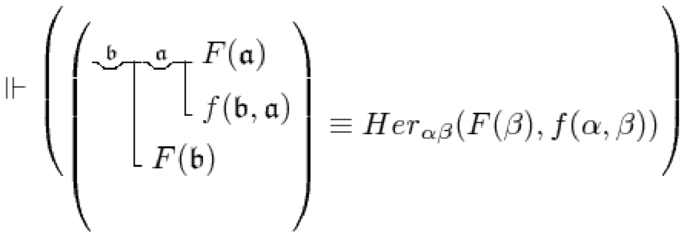


Por lógica proposicional (transitividade do condicional), obtemos a fórmula desejada.

válido para relações binárias de primeira ordem[230]. Em geral, para qualquer relação eneária, seria necessário introduzir um novo axioma IIb[231].

Como já mencionado, na parte 3 de **BS** são introduzidas quatro definições de conceitos aritméticos, sendo estes

(**a**) Conceito de uma propriedade *F* ser hereditária em uma sequência *f* (fórmula **69** de BS)


[232] [233]

O conceito de hereditariedade é um conceito de segunda ordem sob o qual caem propriedades (unárias) e relações (binárias) de primeira ordem. Se considerarmos 'Φ' e 'Ψ' como lugares de argumento, o conceito de hereditariedade é

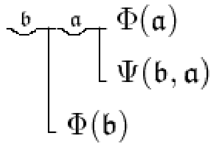
---

230 Em **GGA**, Frege escreveu: “Further, those argument-places that may admit names of first-level functions of two arguments. Accordingly, we distinguish:
arguments of type 1: objects;
arguments of type 2: first-level functions of one argument;
arguments of type 3: first-level functions of two arguments.
In the same way we distinguished:
argument-places of type 1, which are appropriate to admit proper names;
argument-places of type 2, which are appropriate to admit names of first-level functions of one argument;
argument-place of type 3, which are appropriate to admit names of first-level functions of two arguments.
Proper names and object-letters are *fitting* for the argument-place of type 1; names of first-level functions of one argument are *fitting* for the argument-places of type 2; names of first-level functions of two arguments are *fitting* for the argument-places of type 3” (BLA, pp. 77-8). Logo após esta passagem, Frege escreveu: “We have herewith introduced two third-level functions, whose names may be written thus:
“$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, \mu_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$” and “$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, \mu_{\beta\gamma}(\mathfrak{f}(\beta,\gamma))$”
in which we render the argument-places recognizable here with “μ_β” and “$\mu_{\beta\gamma}$”, just as we render the argument-places of types 2 and 3 recognizable with “ϕ” and “ψ”, and of type 1 with “ξ” and “ζ”” (**BLA**, pp. 78-9).

231 Com as mudanças feitas na conceitografia a partir da introdução dos valores de verdade como objetos e da identidade, Frege pode provar o seu teorema 1 de **GGA**. Com isso, Frege pode descartar todos estes axiomas IIb, exceto aquele válido para conceitos, pois ele é necessário para provar o próprio teorema 1.

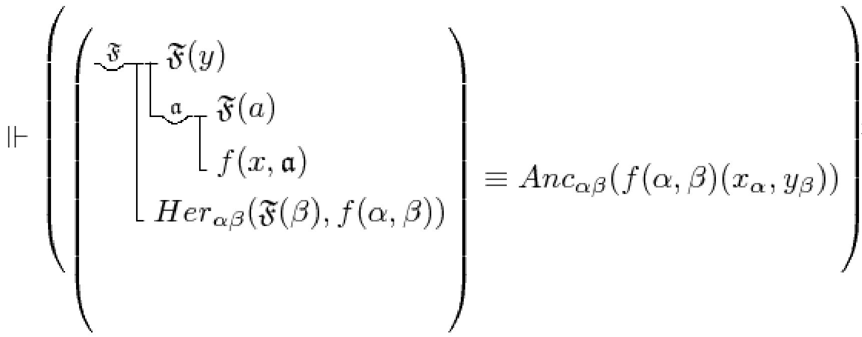
232 Na notação contemporânea: $Her_{\alpha\beta}(F(\beta), f(\alpha,\beta)) \equiv_{def} \forall x(Fx \supset (\forall y(f(x,y) \supset Fy)))$

233 Devido à complexidade do símbolo utilizado por Frege, preferimos usar:
“$Her_{\alpha\beta}(F(\beta), f(\alpha,\beta))$”



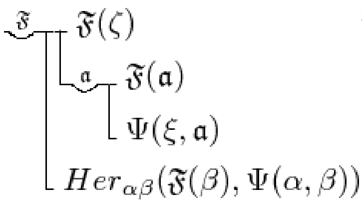
O conceito de hereditariedade será usado na definição do próximo conceito, a saber

(**b**) Conceito do ancestral forte de uma relação (fórmula 76)



[234] [235]

O ancestral forte é um conceito de segunda ordem sob o qual caem relações binárias de primeira ordem e objetos. Se admitirmos que 'ξ', 'ζ' e 'Ψ' como lugares do argumento, então este conceito é



[236]

234 Novamente, modificamos ligeiramente a definição. Em **4**, na definição do ancestral forte, usamos o símbolo 'S*(a,b)' para facilitar a escrita.

235 Na notação contemporânea:
$Anc_{\alpha\beta}(f(\alpha,\beta))(x,y) \equiv_{def} \forall F\{Her_{\alpha\beta}(F(\beta), f(\alpha,\beta)) \supset (\forall z(f(x,z) \supset Fz) \supset F(y))\}$
ou equivalentemente
$Anc_{\alpha\beta}(f(\alpha,\beta))(x,y) \equiv_{def} \forall F\{[Her_{\alpha\beta}(F(\beta), f(\alpha,\beta)) \wedge \forall z(f(x,z) \supset F(z))] \supset F(y)\}$

236 Em GGA, Frege chama este tipo de conceito de "*unequal-leveled function*": "In order to have an example from analysis, let us consider the first derivative of a function. We regard the function as argument. If we take a particular function, for example ξ^2, as argument, then we obtain first another first-level function $2.\xi$; and only if we take an object as argument of this function – for example, the number 3 – do obtain as value an object: the number 6. The first derivative is accordingly to be regarded as a function of two arguments, the first of which must be a first-level function of one argument, the second of which must be an object. On this account we may call it an *unequal-leveled* function of two arguments. From it we obtain a second-level function of one argument if we saturate it with an object-argument, for example, the number 3, I. e., if we determine that the first derivative is to be formed for the argument 3". Em **GGA**, este conceito é "transformado" em um conceito de primeira ordem.

De acordo com Frege, o ancestral forte de uma relação *f* pode ser referido pela expressão "*y* segue-se após *x* na relação *f*"[237]. Embora, a expressão 'seguir-se após na relação *f*" pareça depender da noção de tempo e, portanto, da intuição temporal, ela é totalmente definível por meio dos primitivos lógicos de **BS**.

A partir da definição ancestral forte, Frege prova o teorema 81 de **BS** que expressa uma indução matemática geral, a partir da qual é possível obter a indução matemática para os números naturais[238 239]:

$$\begin{array}{l} \vdash F(y) \\ \quad\quad Anc_{\alpha\beta}(f(\alpha,\beta)(x_\alpha, y_\beta)) \\ \quad\; Her_{\alpha\beta}(F(\beta), f(\alpha,\beta)) \\ \;\; F(x) \end{array}$$

Outro teorema importante de **BS** é o que afirma a transitividade do ancestral forte de uma relação (teorema 98)[240]:

$$\begin{array}{l} \vdash Anc_{\alpha\beta}(f(\alpha,\beta)(x_\alpha, z_\beta)) \\ \quad\; Anc_{\alpha\beta}(f(\alpha,\beta)(y_\alpha, z_\beta)) \\ \;\; Anc_{\alpha\beta}(f(\alpha,\beta)(x_\alpha, y_\beta)) \end{array}$$[241]

237 "Accordingly, in words (76) can be expressed something like this:
"If from the two proposiitions, that every result of an application of the procedure f to x has the property F, and that the property F is hereditary in the f-sequence, it can be inferred, whatever F may be, that y has the property F;
then I say:
'*y follows x in the f-sequence*' *or* '*x precedes y in the f-sequence*' '"' (**CN**, pág. 174).

238 A indução matemática era considerada como uma inferência puramente matemática, mas, para Frege, sua derivação dentro da conceitografia mostraria seu caráter lógico: "Only by means of this definition of following in a series it is possible to reduce the argument from *n* to (*n*+1), which on face of it is peculiar to mathematics, to the general laws of logic" (**FA**, pág. 93).

239 É necessário instanciar '*x*' para '0' e '*f*' para 'Pred'. Ou seja, Frege precisa dar definições lógicas de '0' e 'Pred'.

240 Além disso, Frege prova a seguinte fórmula (teorema 91):

$$\begin{array}{l} \vdash Anc_{\alpha\beta}(f(\alpha,\beta)(x_\alpha, y_\beta)). \\ \;\; f(x,y) \end{array}$$

Ou seja, se *x* encontra-se na relação *f* com *y*, então *y* segue-se após *x* na relação *f*.

241 Na notação contemporânea, o esboço de prova seria assumir que *b* segue-se após *a* na relação *f* e *c* segue-se após *b* na relação *f*, ou seja, para qualquer *F* arbitrária, temos
(1) $(\forall x \forall y(F(x) \wedge f(x,y) \supset F(y)) \wedge \forall x(f(a,x) \supset F(x))) \supset F(b)$
(2) $(\forall x \forall y(F(x) \wedge f(x,y) \supset F(y)) \wedge \forall x(f(b,x) \supset F(x))) \supset F(c)$
Além disso, devemos assumir por hipótese que
(3) $\forall x \forall y(F(x) \wedge f(x,y) \supset F(y)) \wedge \forall x(f(a,x) \supset F(x))$
E devemos mostrar que *F*(*c*). De (1) e (3), derivamos (4) *F*(*b*). De (3), obtemos
(5) $\forall x \forall y(F(x) \wedge f(x,y) \supset F(y))$
Instanciando, obtemos

Na definição do ancestral forte, se instanciarmos a relação *f* para a relação de sucessor (entre os números naturais), obtemos o conceito de 'ser maior que' (entre naturais) para o qual a transitividade vale[242].

Com auxílio do ancestral forte, Frege foi capaz de definir

(**c**) Conceito do ancestral fraco de uma relação (fórmula 99)

$$\Vdash \left(\begin{array}{l} \top\, y \equiv x \\ \llcorner_{\top}\, Anc_{\alpha\beta}(f(\alpha,\beta)(x_{\alpha}, y_{\beta})) \end{array} \right) \equiv Anc^{=}_{\alpha\beta}(f(\alpha,\beta)(x_{\alpha}, y_{\beta}))$$

O ancestral fraco também é um conceito de segunda ordem sob o qual caem relações binárias de primeira ordem e objetos. Assumindo que 'ξ', 'ζ' e 'Ψ são lugares de argumento, o conceito é

$$\begin{array}{l} \top\, \zeta \equiv \xi \\ \llcorner_{\top}\, Anc_{\alpha\beta}(\Psi(\alpha,\beta)(\xi_{\alpha}, \zeta_{\beta})) \end{array}$$ [243]

De acordo com Frege, podemos traduzir o ancestral fraco na linguagem natural por "*y* pertence à série *f* iniciada por *x*"[244]

---

(6) $F(b) \wedge f(b,y). \supset .F(y)$

Mas, uma vez que temos *F*(*b*), então de (4) e (6), obtemos

(7) $f(b,y). \supset .F(y)$

Generalizando universalmente, obtemos

(8) $\forall x(f(b,x). \supset .F(x))$

De (5), (8) e (2), derivamos *F*(*c*).

242 Dados quaisquer três números naturais *x*, *y* e *z*, temos que se *x*<*y* e *y*<*z*, então *x*<*z*.

243 Sem abreviação, isto seria

$$\begin{array}{l} \top\, \zeta \equiv \xi \\ \llcorner_{\top} \smile^{\mathfrak{F}} \top\, \mathfrak{F}(\zeta) \\ \qquad\quad \llcorner \smile^{\mathfrak{a}} \top\, \mathfrak{F}(a) \\ \qquad\qquad\qquad \llcorner\, f(\xi, \mathfrak{a}) \\ \qquad\quad \llcorner\, Her_{\alpha\beta}(\mathfrak{F}(\beta), \Psi(\alpha,\beta)) \end{array}$$

De fato, eliminando '$Her_{\alpha\beta}(F(\beta), f(\alpha,\beta))$', o conceito é

$$\begin{array}{l} \top\, \zeta \equiv \xi \\ \llcorner_{\top} \smile^{\mathfrak{F}} \top\, \mathfrak{F}(\zeta) \\ \qquad\quad \llcorner \smile^{\mathfrak{a}} \top\, \mathfrak{F}(a) \\ \qquad\qquad\qquad \llcorner\, \Psi(\xi, \mathfrak{a}) \\ \qquad\quad \llcorner \smile^{\mathfrak{b}} \smile^{\mathfrak{a}} \top\, \mathfrak{F}(\mathfrak{a}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \llcorner\, \Psi(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) \\ \qquad\qquad\quad \llcorner\, \mathfrak{F}(\mathfrak{b}) \end{array}$$

244 Ou, então, poderíamos dizer que "ou *y* segue-se após *x* na relação *f* ou *y* é igual a *x*".

O ancestral fraco é extremamente importante, pois é a partir deste conceito que Frege irá definir o conceito de número natural. Um objeto *x* qualquer será um número natural se ele pertencer a Pred-série iniciada por 0.

De fato, há indícios que, já em 1879, Frege tinha em mente definir os naturais desta forma. Por exemplo, no artigo "*Applications of the Conceptual Notation*" (1879), ele escreveu:

> By
> $$Anc^{=}_{\gamma\beta}(f(\gamma,\beta)(x_{\gamma},y_{\beta}))$$[245]
> I signify that *y* belongs to the *f*-sequence beginning with *x*. According to the more general conception of function that I took as a basis [for my "conceptual notation"], we can read
> $$u+1=v$$
> as a function of *u* and *v* and can therefore view it as a particular case of *f*(*u*,*v*). Accordingly
> $$Anc^{=}_{\gamma\beta}(0_{\gamma}+1=a_{\beta})$$
> means that *a* belongs to the sequence which begins with 0 and arises from a constant increase by 1, namely
> 0,1,2,3,4,....
> Hence, *a* is a positive whole number.
> $$Anc^{=}_{\gamma\beta}(0_{\gamma}+1=a_{\beta})$$
> is therefore the expression for the circumstance that *a* is a positive whole number (**CN**, pp. 204-5)[246].

Como mencionamos, há uma relação entre **MC** e **BS**. A passagem acima confirma isto. Não obstante, Frege não poderia ser bem-sucedido no seu projeto se ele não pudesse mostrar que '0' e '*x*+1=*y*' são definidos sem recurso a intuição (de forma lógica).

Ademais, o pensamento de Frege sofreu mudanças entre 1874 e 1879. Se Frege tivesse seguido o seu projeto inicial, os números naturais seriam todos os objetos que pertenceriam à Pred-série iniciada pelo número 1. Contudo, neste caso, Frege seria incapaz de provar o teorema que todo número natural tem um sucessor[247]. A mudança na definição é significativa.

Finalmente, Frege define

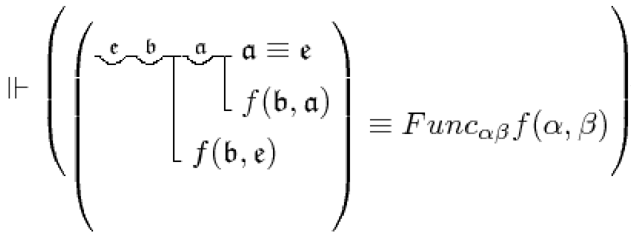
(**d**) o conceito de uma relação ser funcional ou muitos-para-um (fórmula 115)

---

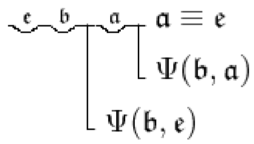
245 Modificamos o símbolo de Frege aqui.

246 Em Frege (1979, pág. 22), há a seguinte passagem: "4 is a positive whole number (including 0). That is, 4 belongs to the series beginning with 0, in which the immediate successor of any member is obtained by adding 1*.
$$\vdash Anc^{=}_{\gamma\beta}(0_{\gamma}+1=4_{\beta})$$"

247 Na verdade, Frege teria problemas em encontrar um conceito puramente lógico a partir do qual 1 seria o número deste conceito. Certamente, ele teria problemas para definir a relação de sucessor também.

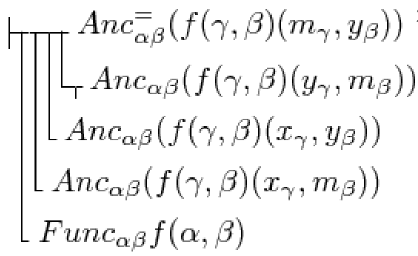
[248]

O conceito de ser funcional é de segunda ordem, sob o qual caem relações binárias de primeira ordem. Sendo 'Ψ' o lugar do argumento, o conceito é



Este conceito é importante, porque Frege deseja provar que a relação “sucessor” é funcional, isto que dizer que dado um número natural qualquer *a*, ele terá um e somente um sucessor[249].

A partir do conceito de ser funcional (junto com os demais conceitos), Frege prova em **BS**, por exemplo, a seguinte fórmula (133), que inicialmente poderia ser pensada como dependente da intuição

[250]

248 Fórmula 115.

249 O conceito de de uma relação ser funcional e também o conceito de uma função ser um-para-muitos desempenham um papel fundamental na prova que todo número natural tem um sucessor a partir de **PH** (veja **4**).

250 “It is impossible, therefore, for any premiss to creep into a proof without being noticed. In this way I have, without borrowing any axiom from intuition, given a proof of a proposition* which at sight be taken for synthetic, which I shall here formulate as follows:
If the relation of every member of a series to its successor is (one- or) many-one, and if *m* and *y* follows in that series after *x*, then either *y* comes in that series before *m*, or it coincides with *m*, or it follows after *m*” (**FA**, pág. 103).

Se '*f*' for instanciada para a relação '*sucessor*', poderemos eliminar (*modus ponens*) o último antecedente, obtendo o seguinte: se *m* e *y* forem maiores que *x*, então *y* será maior que *m* ou *y* será igual a *m* ou *m* será maior *y*.

Há um último ponto que gostaríamos de mencionar. Em **BS**, Frege não tem uma teoria formal de definição[251], mas todas as definições de **BS** são explícitas e satisfazem os critérios de eliminabilidade[252] e não-criatividade[253]. Frege parecia ter consciência deste fato:

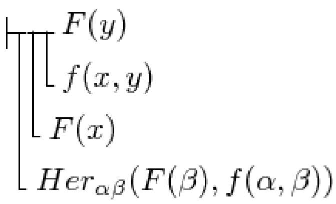
> Now if (69) were a synthetic judgement, the propositions derived from it would be synthetic. But we can do without the symbols introduced by the sentences, and thus the sentence itself as their definition: nothing follows from it which could not also be inferred without it. The only aim of such definitions is to bring about extrinsic simplification by the establishment of an abbreviation (**CN**, pág. 168).

O símbolo introduzido pela definição não deve conter símbolos cujos significados já sejam conhecidos:

> This sentence is different from those considered previously since symbols occur in it which have not been define before (**CN**, pág. 167).

Como mencionado, as definições de **BS** podem ser completamente eliminadas por meio de 58BS ou 27BS. Por exemplo, Frege prova a seguinte fórmula

(72BS)



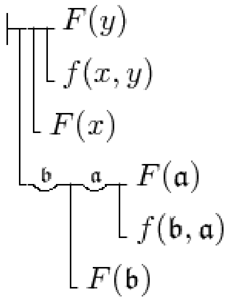
Eliminando o símbolo definido, isto é equivalente a (72BS*)

---

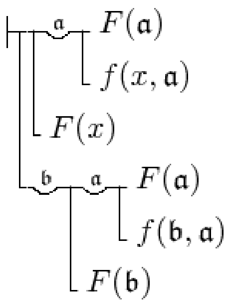
251 Cf. **BLA**, §§26-33.

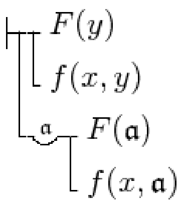
252 <u>Critério da Eliminabilidade</u>: Uma fórmula **P** que introduz um novo símbolo em uma teoria satisfaz o critério de eliminabilidade se e somente se sempre que $\mathbf{P_1}$ é uma fórmula na qual o novo símbolo ocorre, então há uma fórmula $\mathbf{P_2}$ na qual o novo símbolo não ocorre tal que $\mathbf{P \rightarrow (P_1 \leftrightarrow P_2)}$ é derivável dos axiomas e definições que já existiam na teoria

253 <u>Critério da não-Criatividade</u>: Uma fórmula **P** que introduz um novo símbolo em uma teoria satisfaz o critério de não-criatividade se e somente se não existe nenhuma fórmula **S** na qual o novo símbolo não ocorra tal que $\mathbf{P \rightarrow S}$ é derivável dos axiomas e definições dadas, mas **S** não é derivável.



Por meio das seguintes instâncias de 58BS

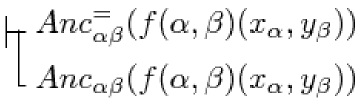




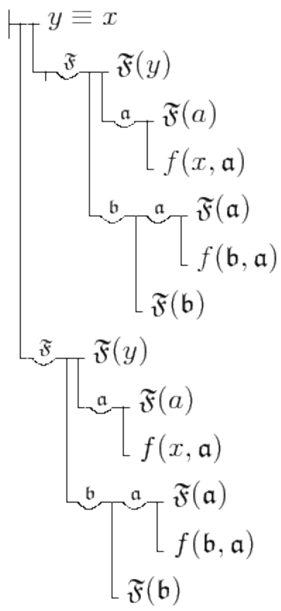
e transitividade do condicional, obtemos (72BS*).

27BS pode ser usado para eliminar os símbolos definidos na fórmula (106) de **BS**

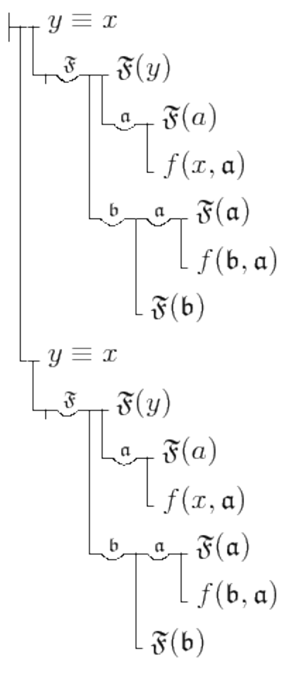
(106)



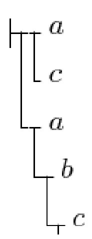
Eliminando os símbolos definidos, esta fórmula é equivalente a(106*)



Usando a seguinte instância de 27BS



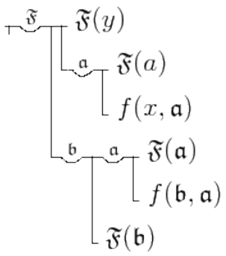
e a seguinte fórmula (37BS),



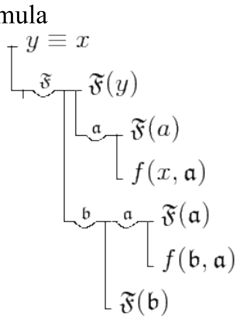
obtemos (106*)[254].

Esta pequena apresentação do caráter das definições de **BS** foi necessária, porque Frege parece considerar em **GLA** a possibilidade de introduzir definições que não são meramente estipulativas, que é o caso do **PH**[255]. E, se nossa hipótese estiver correta, este foi o procedimento de Frege no livro mencionado na carta a Marty.

254 Substitua '*c*' pela fórmula



'*b*' pela fórmula '$y \equiv x$' e '*a*' pela fórmula



255 No escrito póstumo "*Logic*", há um sumário sobres os temas que seriam discutidos. Um destes é sobre a definição de objetos: "E. Definition of objects.
Indirect by means of concepts. *Direct. Judgements in which something is recognized as the same again*
Improper existential judgements" (Frege, 1979, pág. 1). A definição de objetos a partir de juízos nos quais algo é reconhecido como o mesmo novamente é o tipo de definição do qual **PH** é uma instância.

3
Lógica e Aritmética em GLA e GGA

3.1.
GLA, Princípio de Hume e Axioma V

Nosso principal objetivo nesta seção é discutir questões formais em relação a **GLA**, partindo de duas hipóteses básicas: (1) **GLA** foi escrito para ser uma introdução ao livro mencionado na carta a Marty; (2) o sistema lógico subjacente ao suposto livro escrito na conceitografia em 1882 é justamente o sistema de **BS**, provavelmente com a adição dos axiomas IIb, IIb*[256].

Argumentaremos que a derivação de **PH** a partir da definição explícita do operador-cardinalidade e do **Axioma V** depende de (**BB**), o qual não é provável em **BS**.

Isto significa que Frege não poderia ter uma teoria das extensões de conceito em 1884 e, portanto, também em 1882. Consequentemente, podemos inferir que a introdução destes objetos em **GLA** foi um ato tardio cujo objetivo era evitar o problema de Júlio César[257] [258] e que a demora na publicação de **GGA** foi devido à busca de uma solução aos problemas que serão apresentados mais adiante.

No fim do prefácio a **BS**, Frege escreveu:

> Arithmetic, as I said at the beginning, was the starting point of the train of thought which led me to my "conceptual notation". I intend, therefore, to apply it to this science first, trying to analyse its concepts further and provide a deeper foundation

256 Ademais, como tentaremos argumentar, Frege deve ter introduzido **PH** para derivar os axiomas de Peano. Com operador-cardinalidade, ele foi capaz de definir os conceitos de *Sucessor*, *Número Natural*, *Zero*, *Um.* Frege também introduziu definições dos conceitos *Relação 1-1* e *Correlação entre dois conceitos por meio de uma relação*.

257 Argumentaremos, porém, que o problema não é evitado.

258 Ruffino (1996, 2000 e 2003) acredita que a introdução das extensões de conceitos em **GLA** não está relacionada com a solução ao Problema de Júlio César, mas sim relacionada com a redução dos números a objetos lógicos, que seriam as extensões. Por exemplo, ele escreve: "The main goal Frege's philosophical enterprise up to 1903 is to show that arithmetic is reducible to the basic laws of logic. Hence, since numbers are objects for Frege, a central part of his logicism consists in showing that numbers are reducible to – or composed of -primitive logical objects... Hence, coherently with this view, he should pursue a reduction of numbers to extensions of concepts, and this is exactly what he does in *GLA* §68 (from 1884) and later in *GGA* (from 1893). His definition of numbers as extensions both in *GLA* and in *GGA* is hence not motivated solely by the technical convenience of doing so, or, as some scholars tend to think, by the pressure coming from the so-called Julius Caesar problem. But why do extensions of concept have such a special status for Frege? As I argued elsewhere, the leading role of extension as logical objects is due to the primacy of concepts in Frege's conception of logic. Since concepts are the most basic subject of logic, and since extensions are the objects that are most closely tied with concepts (and are indeed forced into existence by the existence of concepts according to Frege's view at least before 1903), it follows – or at least Frege thought so – that extensions are the most basic kind of logical objects, and all other kinds of logical objects like numbers and truth-values have to be reduced to extensions" (Ruffino, 1998, pp. 73-4).

> for its theorems. For the present, I have presented in the third chapter some things which move in that direction. Further pursuit of the suggested course – the elucidation of the concepts of number, magnitude , and so forth – is to be the subject of further investigations which I shall produce immediately after this book (**CN**, pág. 107).

Esta passagem sugere que Frege tinha um plano de execução em mente. De fato, como mencionamos, parte do plano já estava traçado desde 1874 culminando nas definições dos ancestrais forte e fraco em 1879. a partir das quais seria possível definir o conceito de número natural[259].

Contudo, **GLA** foi publicado cinco anos depois da aparição de **BS**. De acordo com Bynum, isto foi devido à pequena recepção que o primeiro livro de Frege recebeu, o que acarretou uma mudança no planejamento de autor:

> The poor reception of the *Conceptual Notation* altered Frege's plans. In the preface of his book it is clear that he had hoped to proceed immediately from *Conceptual Notation* to the definition of number and other basic mathematical concepts...[260]
> Instead of proceeding as planned, Frege rallied to the defence of his symbolic language and spent most of the next three years answering his critics. He did maintain an active interest in geometry and physics, publishing a review of Hoppe's *Textbook of analytical Geometry* and lecturing to the *Jenaische Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaft* once on geometry and once on physics; but most of his efforts went into the defence of the *Conceptual Notation* (**CN**, pp. 20-1).

A avaliação de Bynum não parece ser completamente correta. A carta a Marty sugere que Frege manteve o seu plano inicial

> Dear Colleague,
> Your friendly postcard gave me much pleasure, the more so as I have found only very little agreement up to now. Allow me to give you some more information about my *Conceptual Notation*, in the hope that you will perhaps have occasion to call attention to it in a journal; it would make it easier for me to publish further works. *I have now nearly completed a book in which I treat the concept of number* [Anzahl] and demonstrate that the first principles of computation which up to now have generally been regarded as unprovable axioms can be proved from definitions by means of logical laws alone, so that they may have to be regarded as analytic judgements in Kant's sense (Frege, 1980, pp. 99-100, meu grifo)[261].

---

259 Como já foi afirmado anteriormente, Frege já tinha em 1879 a ideia da sua possível definição.

260 Depois desta passagem, Bynum cita exatamente a passagem de Frege do prefácio, que acabamos de mencionar.

261 No original alemão, parte desta passagem é: "es wurde mir die Veröffentlichung weiterer Arbeiten erleichtern. Ich habe jetzt ein Buch nahezu vollendet, in welchem ich den Begriff der Anzahl behandle und nachweise, dass die ersten Sätze über das Zählen der Zahl, die man bisher als unbeweisbare Axiome anzusehen geneigt war, sich nur mittels der logischen Gesetze aus Definitionen beweisen lassen, sodass sie in Kantischen Sinne wohl als analytische Urteile zu betrachten sind" (Frege, 1976, pág. 163). A expressão "die ersten Sätze über das Zählen der Zahl" foi traduzida por "the first principles of computation", mas, talvez, uma melhor tradução

Por outro lado, Frege tinha receio de publicar o livro mencionado na missiva, porque ele acreditava que este teria a mesma sorte de **BS**. Isto fortemente sugere que Frege o escreveu na conceitografia:

> I find it difficult to gain entry into the philosophical journals[262]. Please excuse this letter as springing from my unsatisfied need for communication. *I find myself in a vicious circle: before people pay attention to my conceptual notation, they want to see what it can do, and I in turn cannot show this without presupposing familiarity with it. So it seems that I can hardly count any readers for the book I mentioned at the beginning*. If you would be so good as to answer me, I would ask you to communicate your doubts. I should like to find out what you think of the scientific value of the demonstration I am planning, supposing it succeeds and is carried out with the most painstaking precision (Frege, 1980, pág. 102).

Há indícios nesta carta que Frege já tinha chegado no resultado que ele admite ser o mais importante, a saber, o conteúdo de uma atribuição numérica consiste em predicar algo de um conceito[263 264]:

> I regard it as one of Kant's great merits to have recognized the propositions of geometry as synthetic judgements, but I cannot allow him the same in the case of arithmetic. The two cases are anyway quite different. The field of geometry is the field of possible spacial intuition; arithmetic recognizes no such limitation. Everything is enumerable, not just what is juxtaposed in space, not just what is successive in time, not just external phenomena, but also inner mental processes and events and even concepts, which stand neither in temporal nor in spacial but only in logical relations to one another. *The only barrier to enumerability is to be found in the imperfection of concepts*. *Bald people for example cannot be enumerated as long as the concept of baldness is not defined so precisely that any individual there can be no doubt whether he falls under it*. Thus the area of the enumerable is as wide as that of conceptual thought, and a source of knowledge

fosse "os primeiros princípios sobre contar os números". Com efeito, a prova que todo número natural tem um sucessor depende dos fatos seguintes fatos: de que podemos contar números naturais (objetos) e de que 0 é um número natural. Assim, se contarmos os números de 0 até *n*, perceberemos que há *n*+1 objetos. Portanto, o número que pertence ao conceito '*n* pertence à Pred-série iniciada por 0' é *n*+1. Parece plausível que em 1882 Frege já considerava os números como objetos.

262 Frege submeteu, pelo menos, dois artigos onde ele explicava a sua conceitografia e as diferenças que há entre ela e a lógica de Boole, entretanto ambos foram recusados.

263 "With this book I carry out a design that I had in view as early as my *Begriffsschrift* of 1879 and announced in my *Grundlagen der Arithmetik* of 1884. I wish here to substantiate in actual practice the view of Number that I expounded in the latter book. *The most fundamental of my results I expressed there, in §46, by saying that a statement of number expresses an assertion about a concept*; and the present account rests upon this" (**BLA**, pág. 5).

264 No artigo "*Frege on the Statement of Number*" (1990), Sullivan afirma que Frege foi influenciado pelo trabalho de Herbart, que sustentava uma posição semelhante sobre atribuições numéricas. Certamente, Frege conhecia o trabalho de Herbart, uma vez que este é citado em **GLA** (**FA**, pág. III). Além disso, Herbart é mencionado nas notas 50 e 113 de Scholz. Cf. "*Geschichte des wissenschaftlichen Nachlasses Gottlob Frege und seiner Edition. Mit einem Katalog des ursprünglichen Bestands der nachgelassenen Schriften Freges*" (1976, pp. 96 e 103).

> more restricted in scope, like spatial intuition or sense perception, would not suffice to guarantee the general validity of arithmetical propositions. And to enable to rely on intuition for support, it does not help at all to let something spatial represent something non-spatial in enumeration; for one would have to justify the admissibility of such a representation (Frege, 1980, pág. 100).

Ademais, na passagem acima, ocorre o mesmo argumento de **GLA** para justificar que números têm uma aplicação universal e que, portanto, a sua natureza deveria ser lógica. Compare com a seguinte passagem:

> The fact that this is possible shows that the axioms of geometry are independent of one another and of the primitive laws of logic, and consequently are synthetic. Can the same be said of the fundamental propositions of the science of number? Here, we have only to try denying any one of them, and complete confusion ensues. Even to think at all seems no longer possible. The basis of arithmetic lies deeper , it seems, than that of any of empirical sciences, and even than that of geometry. The truths of arithmetic govern all that is numerable. This is the widest domain of all; for to it belongs not only the actual, not only the intuitable, but everything thinkable. Should not the laws of number, then, be connected very intimately with the laws of thought? (**FA**, pág. 21)[265].

Interessante é que este tipo de justificação é bastante adequado a **PH**. Frege menciona que negar uma proposição da aritmética implica uma contradição[266]. Isto ocorreria caso negássemos uma proposição provada por meio de **PH**, que na conceitografia seria a fórmula:

$$\vdash \left((\sharp_x P(x) \equiv \sharp_x Q(x)) \equiv \;\overset{\mathfrak{R}}{\smile}\; \begin{array}{l} Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(P\alpha, Q\beta) \\ Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta) \\ UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta) \end{array} \right)$$ [267]

Desta fórmula, obtemos (capítulo **4**):

---

265 Este mesmo ponto é reafirmado no artigo "*On Formal Theories of Arithmetic*": "As a matter of fact, we can count just about everything that can be an object of thought: the ideal as well as the real, concepts as well as objects, temporal as well as spatial entities, events as well as bodies, methods as well as theorems; even numbers can in their turn be counted. What is required is really no more than a certain sharpness of delimitation, a certain logical completeness. From this we may undoubtedly gather at least this much, that the basic propositions on which arithmetic is based cannot apply merely to a limited area whose peculiarities they express in the way in which the axiom of geometry express the peculiarities of what is spacial; rather, these basic propositions must extend to everything that can be thought. And surely we are justified in ascribing such extremely general propositions to logic" (Frege, 1984, pág. 112).

266 "Here, we have only to try denying any one of them, and complete confusion ensues".

267 Ou seja, o número de P é igual ao número de Q se e somente se existe uma relação R que correlaciona 1-1 os Ps e os Qs. Veja capítulo **4**.

(T)

$$\vdash \begin{array}{l} Corr_{\alpha\beta}(S\alpha\beta)(P\alpha, Q\beta) \\ Func_{\alpha\beta}S(\alpha, \beta) \\ UpM_{\alpha\beta}S(\alpha, \beta) \\ \neg\, \sharp_x P(x) \equiv \sharp_x Q(x) \end{array}$$ [268]

É provável dentro da conceitografia a partir de **PH** junto com as definições de 0 e 1 o seguinte:

(Pred)

$$\vdash Pred(0, 1)$$

Assumamos, por contradição, que $\neg\, Pred(0,1)$[269] . No capítulo **4**, mostramos que o seguinte é provável a partir da definição da relação "predecessor"

$$\begin{array}{l} \sharp_x P(x) \equiv n \\ P(a) \\ \sharp_x \left(\neg \begin{array}{l} x \equiv a \\ P(x) \end{array} \right) \equiv m \\ \neg\, Pred(m, n) \end{array}$$ [270]

Instanciando '*m*' para '0', '*n*' para '1', '$P\xi$' para '$\xi = 0$' e '*a*' para '0', então obtemos a fórmula

$$\begin{array}{l} \sharp_x (x \equiv 0) \equiv 1 \\ 0 \equiv 0 \\ \sharp_x \left(\neg \begin{array}{l} x \equiv 0 \\ x \equiv 0 \end{array} \right) \equiv 0 \\ \neg\, Pred(0, 1) \end{array}$$

Mas, por hipótese, temos $\neg\, Pred(0,1)$. Assim, aplicando *modus ponens*, derivamos a fórmula

$$\begin{array}{l} \sharp_x (x \equiv 0) \equiv 1 \\ 0 \equiv 0 \\ \sharp_x \left(\neg \begin{array}{l} x \equiv 0 \\ x \equiv 0 \end{array} \right) \equiv 0 \end{array}$$

---

268 PH5 no capítulo **4**.

269 A partir de agora, excluiremos o traço de juízo.

270 Veja (F4).

Por lógica proposicional (contraposição), obtemos a fórmula

$$\begin{array}{l} \top\!\!\top\!\!\top \sharp_x \left(\begin{array}{l} \top\!\!\top\; x \equiv 0 \\ \quad\; x \equiv 0 \end{array} \right) \equiv 0 \\ \quad 0 \equiv 0 \\ \quad \sharp_x(x \equiv 0) \equiv 1 \end{array}$$

Os dois antecedentes podem ser eliminados (*modus ponens*)[271]. Assim, chegamos à fórmula

$$\top\, \sharp_x \left(\begin{array}{l} \top\!\!\top\; x \equiv 0 \\ \quad\; x \equiv 0 \end{array} \right) \equiv 0$$

Mas, pela definição do número zero[272], esta fórmula é equivalente a

$$\top\, \sharp_x \left(\begin{array}{l} \top\!\!\top\; x \equiv 0 \\ \quad\; x \equiv 0 \end{array} \right) \equiv \sharp_x(\top\, x \equiv x)$$

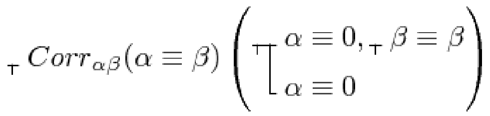
Em **T**, se instanciarmos '$P\xi$' para '$\begin{array}{l} \top\!\!\top\; \xi \equiv 0 \\ \quad\; \xi \equiv 0 \end{array}$', '$Q\xi$', para '$\top\, \xi \equiv \xi$' e '$R(\xi, \zeta)$' para '$\xi \equiv \zeta$', obteremos a fórmula

$$\begin{array}{l} \top\!\!\top\!\!\top\!\!\top\, Corr_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta) \left(\begin{array}{l} \top\!\!\top\; \alpha \equiv 0, \top\, \beta \equiv \beta \\ \quad\; \alpha \equiv 0 \end{array} \right) \\ \quad Func_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta) \\ \quad UpM_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta) \\ \quad \top\, \sharp_x \left(\begin{array}{l} \top\!\!\top\; x \equiv 0 \\ \quad\; x \equiv 0 \end{array} \right) \equiv 0 \end{array}$$

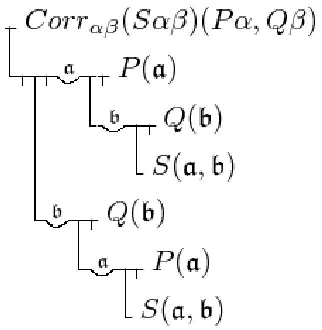
Mas, como $\top\, \sharp_x \left(\begin{array}{l} \top\!\!\top\; x \equiv 0 \\ \quad\; x \equiv 0 \end{array} \right) \equiv 0$, $Func_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta)$[273] e $UpM_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta)$[274], obtemos (*modus ponens*)

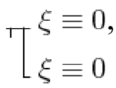
---

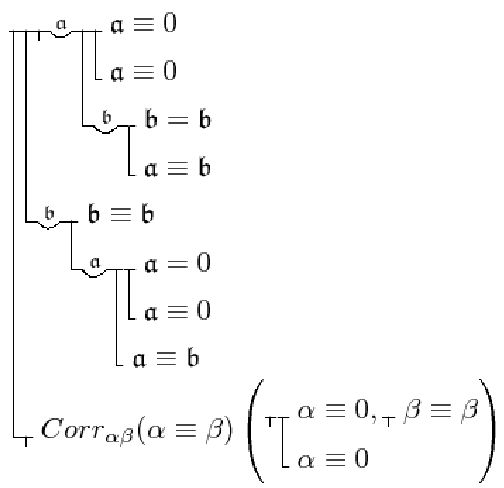
271 '$0 \equiv 0$' é uma instância de 54BS e '$\sharp_x(x \equiv 0) \equiv 1$' é exatamente a definição do número 1.
272 Zero é o número que pertence ao conceito *ser diferente de si mesmo*.
273 Teorema 1 do capítulo **4**.
274 Teorema 2 do capítulo **4**.



No capítulo **4**, provamos a fórmula (χ1)

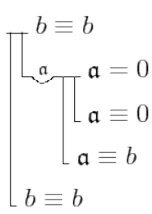


Por lógica proposicional e instanciando '$P\xi$' para , '$Q\xi$', para $\top\, \xi \equiv \xi$ e $R(\xi, \zeta)$' para '$\xi \equiv \zeta$', chegamos à fórmula



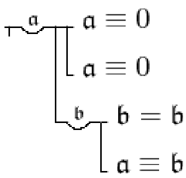
Os dois antecedentes podem ser eliminados por *modus ponens*[275] e, assim, obtemos a fórmula

275 O seguinte é uma instância de 1BS:



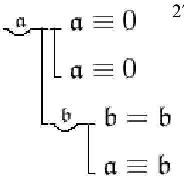
Eliminando o último antecedente (*modus ponens*) e quantificando universalmente, obtemos a fórmula desejada.

(**T1**)

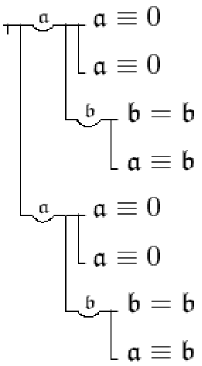


Não obstante, a seguinte fórmula é provável na conceitografia (junto com **PH**)

(**T2**)

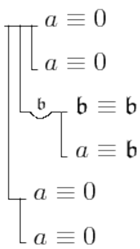
 [276]

Usando IfGGA (capítulo **4**), **T1** e **T2** (*modus ponens*), derivamos a fórmula

 [277]

,

276 O seguinte é uma instância de 1BS:



O último antecedente é uma instância de 27BS, portanto pode ser eliminado (*modus ponens*). Assim, basta generalizar universalmente para obter a fórmula desejada.

277 No artigo "*Frege, Kant and the Logic in Logicism*" (2002, pág. 39), MacFarlane afirma: "To see how "complete confusion ensues" when one tries to think without being governed by the norms provided by basic laws of arithmetic, suppose one judges that 1=0. Then one can derive any claim of the forms "there are Fs" by reductio *ad absurdum*. For suppose there are no *Fs.* Then, by the usual principles governing the application of arithmetic , the number of *Fs*=0. Since 1=0, it follows that the number of *Fs*=1, which in turn implies that there are *Fs*, contradicting the hypothesis. By *reductio*, then, there are *Fs*. In particular (since '*F*' is schematic), there are circles that are not circles. But this is a contradiction. Thus, if we contradict a basic truth of arithmetic like '$1 \neq 0$', we will be committed to contradictions in areas that have nothing to do with arithmetic. Our standards for reasoning will have become incoherent. (Contrast what happens when we deny a geometrical axiom, according to Frege:

que é uma contradição[278].

Há um ponto histórico que raramente é mencionado nas discussões sobre **GLA**, a saber, que seis anos antes da publicação deste livro, Georg Cantor, no artigo “Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre” (1878), já havia feito uso, com bastante sucesso, de um princípio que tem uma íntima relação com **PH**:

(**Princípio de Cantor**): dois conjuntos *A* e *B* têm a mesma potência (ou número cardinal) se (e somente se) existe uma correspondência 1-1 entre os elementos que pertencem a *A* e os que pertencem a *B*.

A partir de seu princípio, Cantor mostrou que os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais tinham a mesma potência (ou número cardinal). Além disso, ele mostrou que os números reais tinham uma potência maior que a dos naturais[279].

Em **GLA**, ao introduzir o **PH** (§63), Frege cita uma passagem do *Tratado da Natureza Humana* de Hume, mas, logo depois, em uma nota, ele menciona o

---

we are led to conflicts with spatial intuition and experience, but not to any real contradictions)”.

278 Hoje em dia, esta prova não seria considerada puramente lógica, porque ela depende das constantes não-lógicas '0' e '*Pred*'. Mas, uma vez que **PH** poderia ser uma espécie de definição, então ele seria analítico. Mas, como '0' e 'Pred' são definidos usando-se apenas símbolos da conceitografia e o operador-cardinalidade introduzido por **PH**, Frege poderia considerá-los como lógicos.

279 Hallett escreve: “The problem of powers in its most general form is to find a calculus of absolute size (power) adequate for describing the sizes of arbitrary infinite sets. This problem has its origin in Cantor's two striking papers [1874] and [1878]. The former demonstrated that the continuum is markedly different from the sequence of natural numbers since no denumerable sequence of real numbers can contain all real numbers. (For a description of the proof, see §2.3(a).) Since both the natural and the real numbers are infinite collections, this result showed that there are different kinds of infinity and thus raises the question: in what way precisely are they different? By 1878 Cantor had clearly taken the view that what is shown is that the real-number continuum is a *larger* infinity than the natural numbers. That is to say, he had adopted the principle of using one-one correspondences to measure the *relative* sizes of sets, a principle which Bolzano ([1851], p. 98), for example, had earlier rejected. The term power is used in a correspondingly relative sense. Thus, Cantor asserted that '*A* and *B*' have the same power if there is a one-one correspondence between the sets (or 'manifolds') *A* and *B*, or '*A* has smaller power than *B*' if there is one-one correspondence between *A* and a subset (or 'component') of *B*, but not between *A* and the whole of *B* (see Cantor [1878], p. 119)” (Hallett, 1984, pp. 1-2).

artigo "*Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*" de Cantor[280]. Não é implausível supor que Frege conhecia o artigo de Cantor publicado em 1878[281].

A discussão na primeira parte de **GLA** (até § 45) poderia ser vista como uma tentativa de justificar a transformação do **Princípio de Cantor** – em termos de conjuntos – no **Princípio de Hume** – em termos de conceitos.

"Conjuntos", "classes", "multiplicidades" estavam carregados de significados fisicalistas, psicologistas, ou ambos, que acarretariam a incursão de elementos físicos, psicológicos e intuitivos nas provas das leis da aritmética, ocasionando a dependência desta ciência à intuição[282] [283].

---

280 "Hume long ago mentioned such a means: "When two numbers are so combined as that the one has always an unit answering to every unit of the other, we pronounce them equal". This opinion that numerical equality or identity must be defined in terms of one-one correlation, seems in recent years to have gained widespread acceptance among mathematicians*. But it raises at once certain logical doubts and difficulties, which ought not to be passed over without examination
* Cf. E. Schröder, op. Cit., pp. 7-8; E Kossak, Die Elemente der Arithmetik, Programm des Friedrich-Werder'schen Gymnasiums, Berlin 1872, p. 16; G. Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*, Leipzig 1883" (**FA**, pp. 73-4).

281 Frege tinha um péssimo hábito de não mencionar as suas fontes de inspiração. Já foi dito que a ideia de que uma atribuição numérica é uma predicação de um conceito pode ter sido inspirada pelo trabalho de Herbart. Outro exemplo, ocorre em **GGAI**. Neste livro, Frege prova teoremas análogos aos teoremas da recursão e da categoricidade provados por Dedekind (1888), contudo ele não faz nenhuma referência a este autor. Além disso, em **GGAII** (§164), Frege afirma o teorema de Cantor – que o conjunto potência de *A* tem uma cardinalidade maior que a de *A* - sem fornecer qualquer referências.

282 "It might well be supposed that numerical formulae would be synthetic or analytic, a posteriori or a priori, according as the general laws on which their proofs depend are so. John Stuart Mill, however, is of the opposite opinion. At first, indeed, he seems to mean to base the science, like Leibniz, on definitions, since he defines the individual numbers in the same way as Leibniz; but this spark of sound sense is no sooner lit than extinguished, thanks to his preconception that all knowledge is empirical. He informs us, in fact, that these definitions are not definitions in the logical sense; not only do they fix the meaning of a term, but they also assert along with it an observed matter of fact. But what in the world can be the observed fact, or the physical fact (to use another of Mill's expressions), which is asserted in the definition of the number 777864? Of all the whole wealth of physical facts in his apocalypse, Mill names for us only a solitary one, the one which he holds is asserted in the definition of the number 3. It consist, according to him, in this, that collections of objects exist, which while they impress the sense thus, ○○○, may be separated into two parts, thus, ○○ ○." (**FA**, pág. 9).

283 "Some writers define Number as a set or multitude or plurality. All these views suffer from the drawback that the concept will not then cover the numbers 0 and 1. Moreover, these terms are utterly vague: sometimes they approximate in meaning to "heap" or "group" or "agglomeration", referring to a juxtaposition in space, sometimes they are so used as to be practically equivalent to "Number", only vaguer. No analysis of the concept of Number, therefore, is to be found in a definition of this kind. Thomae requires for the formation of number that item-sets which differ be given different names. By this he evidently means to refer to a process of bringing out more sharply the characteristics of the sets in question, of which the giving of names is only the external sign" (FA, pág. 38).

Se os números cardinais e, consequentemente, os números naturais, fossem entidades que se aplicariam a conjuntos ou fossem eles próprios conjuntos[284], então a aritmética seria uma ciência *a posteriori* e/ou um campo da psicologia.

Se eles fossem conjuntos ou entidades associadas a conjuntos, então o campo de aplicação da aritmética seria bastante restrito. Não poderíamos contar qualquer tipo de entidade[285] [286].

Ademais, se números fossem conjuntos ou entidades associadas a conjuntos, então tornar-se-ia difícil explicar (e definir) os números 0 e 1. O que seria uma coleção de zero coisas ou uma coleção de uma coisa?

Frege criticou especialmente os autores que buscavam definir números como sendo conjuntos de unidades puras, sendo estes obtidos de coleções de objetos dos quais abstraímos de suas características particulares.

Para Frege, este tipo de definição apresentaria quatro categorias de problemas. Primeiro, a coleção de objetos parece ser algo físico, como já foi mencionado; segundo, o processo de abstração parece ser psicológico; terceiro, por meio deste processo, não obtemos os números, mas sim um conceito sob o qual caem os objetos em questão[287], e finalmente, mas não menos importante, para se obter a noção de número por abstração, teríamos de assumir que as unidades puras do conjunto devem ter duas características contraditórias: elas devem ser indistinguíveis entre si, porém devem ser distinguidas uma da outra[288].

284 Veja (**GLA**, §§29-44).

285 "Do such things really exist as agglomerations of proofs of a theorem, or agglomerations of events? And yet these too can be numbered" (**FA**, pág. 30).

286 Outro problema relacionado é que a uma mesma coleção de coisas podem ser atribuídos diferentes números: "I am able to think of the Iliad either as one poem, or as 24 Books, or as some large Number of verses" (**FA**, pág. 28).

287 "For suppose that we do, as Thomae demands, "abstract from the peculiarities of the individual members of a set of items", or "disregard, in considering separate things, those characteristic which serve to distinguish them". In that event we are not left, as LIPSCHITZ maintains, with "the concept of the Number of the things considered"; what we get is rather a general concept under which the things in question fall. The things themselves do not in the process lose any of their special characteristics." (**FA**, pág. 45).

288 Para se obter números, é necessário existir pluralidade. Contudo, uma vez que os números são conjuntos de unidades puras obtidos por abstração das características individuais dos elementos dos conjuntos iniciais, então parece que não há diversidade e, portanto, não podemos ter os números. Na verdade, teríamos apenas o número um: "We are faced, therefore, with the following difficulty:

If we try to produce the number by putting together different distinct objects, the result is an agglomeration in which the objects contained remain still in possession of precisely those properties which serve to distinguish them from one another; and that is not the number. But if we try to do it the other way, by putting together identicals, the result runs perpetually together into one and we never reach a plurality" (**FA**, pág. 50).

Para solucionar todas estas dificuldades, Frege reivindicou que uma atribuição numérica é, na verdade, uma predicação de um conceito. Sob conceitos, podem cair objetos físicos, mentais, abstratos. Portanto, uma vez que números estão associados a conceitos, eles herdarão esta aplicação universal[289] [290].

Além disso, as explicações (definições) dos números 0 e 1 não incorrem em quaisquer dificuldades, pois existem conceitos sob os quais nada cai e existem conceitos sob os quais cai um único objeto.

O problema da atribuição de números diferentes a uma mesma coleção de objetos também é resolvido. O que ocorre é que este aglomerado de coisas ora é visto sob um determinado conceito, resultando em um determinado número, ora é entendido sob um outro conceito, ao qual atribuímos outro número.

De acordo com Frege, os conceitos para serem enumerados deveriam ter um critério de aplicação nítido. Este critério seria o "responsável" pela escolha das "unidades" que estaríamos considerando a serem contadas. Por outro lado, conceitos "enumeráveis" deveriam ter um critério de identidade a partir do qual seria possível distinguir os objetos que caem sob eles[291]. Este critério de identidade seria responsável pela "diversidade" dos objetos que caem sob o conceito. Nem todos os conceitos satisfazem estes critérios: em uma nota, já citamos uma passagem de Frege na qual ele afirma que o conceito *ser calvo* não poderia ser enumerado, pois ele não tem um critério de aplicação nítido; por outro lado, o conceito *ser vermelho* não tem um critério de identidade ocorrendo entre

---

"If we call the things to be counted units, then the assertion that units are identical is, if made without qualification, false That they are identical in this respect or that is true enough but of no interest. It is actually necessary that the things to be counted should be different if number is to get beyond 1.

We were thus forced, it seemed, to ascribe to units two contradictory qualities, namely identity and distinguishability" (**FA**, pág. 58).

289 "The wide range of applicability of number also now becomes explicable. Not without reason do we feel it puzzling that we should be able to assert the same predicate of physical and mental phenomena alike, of the spatial and temporal and of the non-spacial and non-temporal. But then, this simply is not what occurs with statements of number any more than elsewhere; numbers are assigned only to the concepts, under which are brought both the physical and mental alike, both the spatial and temporal and the non-spatial and non-temporal" (**FA**, pp. 61-2).

290 Um dos argumentos de Ruffino (1996, 1998) é que extensões são objetos lógicos, porque são objetos intimamente ligados a conceitos. Mas, este mesmo argumento pode ser atribuído aos números, porque eles também são associados a conceitos.

291 Estes conceitos também são chamados de sortais.

as coisas que caem sob ele, embora ele tenha um critério de aplicação razoável[292] [293].

De acordo com a nossa hipótese, **GLA** foi escrito para ser uma introdução ao livro de 1882. Neste caso, acreditamos, se Frege tivesse introduzido as extensões de conceito neste último livro por intermédio do **Axioma V**, ele deveria argumentar sobre o caráter lógico destas entidades, já indicando, na primeira parte de **GLA**, a possível construção da definição do conceito de número cardinal que seria feita na segunda parte (de §46 em diante).

Em inúmeros passagens da primeira parte, depois de criticar uma posição, Frege menciona a sua própria. Por exemplo, em §6, Frege discute as definições Leibnizianas dos números naturais individuais por meio de 1 e do aumento por 1 e as provas a partir destas definições. De acordo com Leibniz, temos

(1) $2 =_{def} 1 + 1$
(2) $3 =_{def} 2 + 1$
(4) $4 =_{def} 3 + 1$

Além disso, Leibniz assume o seguinte axioma

(Axioma) se iguais são substituídos por iguais, a igualdade permanece

E disto ele prova que 2+2=4 da seguinte forma:

Assuma 2+2. Pela definição 1, temos que 2+2=2+1+1. Mas pela definição 3, temos que 2+1+1=3+1. Portanto, pelo axioma, obtemos 2+2=3+1, que, pela definição 3, é equivalente a 2+2=4.

Frege critica esta prova porque ela faz uso tácito da lei associativa da soma, a qual não se sabe ainda se é lógica. Não obstante, Frege não descarta as definições de Leibniz, mas sugere a necessidade de se fazer ajustes:

> On turning now to consider the primary objects of arithmetic, we must distinguish between the individual numbers 3, 4 and so on, and the general concept of Number.

292 “The concept “letters in the word three” isolates the *t* from *h*, the *h* from *r* and so on. The concept “syllables in the word three” picks out the word as whole, and as indivisible in the sense that no part of it falls any longer under that same concept. Not all concepts possess this quality. We can, for example, divide up something falling under the concept “red” into parts in a variety of ways, without the parts thereby ceasing to fall under the same concept “red”. To a concept of this kind no finite number will belong. The proposition asserting that units are isolated and indivisible can, accordingly, be formulated as follows:
Only a concept which isolates what falls under it in a definite manner, and which does not permit any arbitrary division of it into parts, can be a unit relative to a finite Number” (**FA**, pág. 66).

293 As questões sobre conceitos sortais e critério de identidade não estão fechadas. Há uma discussão e bibliografia sobre este ponto em Hale; Wright (2001a). Veja também a discussão em Chateaubriand (2001, cap. 10).

> Now we have already decided in favour of the view that the individual numbers are best derived, in the way proposed by Leibniz, Mill, H. Grassmann and others, from the number one together with increase by one, but that these definitions remain incomplete so long as the number one and increase by one are themselves undefined. And we have seen that we have need of general propositions if we are to derive the numerical formulae from these definitions. Such laws cannot, just because of their generality, follow from definitions of the individual numbers, but only from the general concept of Number[294] [295](**FA**, pág. 25).

O silêncio de Frege sobre as extensões de conceitos na primeira parte de **GLA** é, no mínimo, estranho. O mais surpreendente é o fato de Frege não ter muito a dizer sobre estas entidades na segunda parte, resumindo a discussão a §69. Na verdade, um dos pontos discutidos nesta seção é bastante trivial. Frege escreve:

> But now the proposition:
> the extension of the concept "equal to the concept *F*" is identical with the extension of the concept "equal to the concept *G*"
> is true if and only if the proposition
> "the same number belongs to the concept F as to the concept *G*
> is true. So that here there is complete agreement (**FA**, pág. 80)

Frege definiu o "número que pertence ao conceito *F*" como a extensão do conceito "ser equinumérico ao conceito *F*". Assim, o que foi dito acima é obtido por meio da definição junto com as leis da identidade – axiomas 52 e 54 de **BS**.

Frege chega a mencionar que o nosso pensamento sobre extensões abarca a questão da identidade entre elas, mas não há nada mais além disso[296] [297]. Agora,

294 Estranhamente, Frege afirma que os números individuais serão obtidos pelo número 1 e o acréscimo de 1, os quais deveriam receber uma definição. Mas o procedimento de Frege em **GLA** é obter os números naturais por meio de 0 (o número do conceito *ser diferente de si mesmo*) e do acréscimo de 1 (a relação *sucessor*). Provavelmente, Frege cometeu um engano aqui.

295 Frege também já avança nesta primeira parte de **GLA** as posições que os números são objetos (**FA**, pág. 49) e que uma atribuição numérica é uma predicação de um conceito (**FA**, pág. 29).

296 "That this definition is correct will perhaps be hardly evident at first. For do we not think of the extensions of concepts as something quite different from numbers? How we do think of them emerges clearly from the basic assertions we make about them. These are as follows:
1. that they are identical
2. that one is wider than the other" (**FA**, pág. 80)

297 Outra discussão sem muita relevância é sobre uma extensão de conceito ser mais ampla que outra: "Certainly we do not say that one number is wider than another, in the sense in which the extension of one concept is wider than that of another; but then it is also quite impossible for a case to occur where
the extension of the concept "equal to the concept *F*"
would be wider than
the extension of the concept "equal to the concept *G*"
For on the contrary, when all concepts equal to *G* are also equal to *F*, then conversely also all concepts equal to *F* are equal to *G*. "Wider" as used here must not, of course, be confused with

sendo **GLA** uma introdução ao livro de 1882, se neste livro Frege tivesse introduzido o **Axioma V** e as extensões de conceito, então claramente **GLA** não cumpriu seu papel. A verdade é que Frege parece estar bastante confuso em relação às extensões de conceitos[298].

Por outro lado, Frege explicitamente rejeitou definições por abstração em **GLA** e, portanto, ele rejeitou **PH** como uma possível definição do operador-cardinalidade. Decerto, isto é um grande obstáculo à visão que desejamos defender aqui. Mas, como veremos, há passagens em **GLA**, que são incoerentes com o procedimento de Frege em §68.

Na introdução deste livro, Frege menciona três princípios que deveriam ser mantidos em mente por todo livro:

> In the enquiry that follows, I have kept to three fundamental principles:
> always to separate sharply the psychological from the logical, the subjetive from the objetive;
> never ask for the meaning of a word in isolation, but only in the context of a propositions;
> never to lose sight of the distinction between concept and object (**FA**, pág. X)

Nosso maior interesse é com o segundo princípio, hoje conhecido por Princípio do Contexto. Tentaremos argumentar que o Princípio do Contexto foi introduzido para justificar as definições por abstração.

Depois de chegar ao resultado que uma atribuição numérica é uma predicação de um conceito, Frege começa a sua análise positiva com a seção denominada: IV: **The concept of Number**.

"greater" as used of numbers.
Another type of case is, I admit, conceivable, where the extension of the concept "equal to the concept *F*" might be wider or less wide than the extension of some other concept, which then could not, on our definition, be a Number; and it is not usual to speak of a Number as wider or less wide than the extension of a concept; but neither is there anything to prevent us speaking in this way, if such a case ever occur" (**FA**, pág. 80-1). Assumindo que *F* e *G* são equinuméricos, então, de acordo com Frege, os conceitos "ser equinumérico a *F*" e "ser equinumérico a *G*" têm a mesma extensão e, assim, não é possível falar de um conceito ser mais amplo que o outro. Mas, assumamos que *F* e *G* não são equinuméricos. Então, os conceitos "ser equinumérico a *F*" e "ser equinumérico a *G*" não teriam a mesma extensão, porque *F* não cairia sob o segundo e *G,* sob o primeiro. Mas, neste caso, é possível falar que a extensão do primeiro é mais ampla que a do segundo ou vice-versa? E, neste caso, eles não seriam números?

298 Em Burge (1984), há uma discussão minuciosa sobre a noção de extensão de Frege até 1903, não obstante ele falha em perceber que **GLA** foi escrito para ser uma introdução ao livro de 1882.

Logo a seguir, na subseção denominada **Every individual number is a self-subsistent object**, Frege propõe sua primeira tentativa de definir o conceito de número cardinal como conceitos numéricos (§55):

(D1) $N_x^0 F(x) \equiv_{def} \forall x \neg F(x)$[299]

(D2) $N_x^1 F(x) \equiv_{def} \exists x Fx \wedge \forall x \forall y (Fx \wedge Fy \supset x = y)$[300]

(D3) $N_x^{n+1} Fx \equiv_{def} \exists x (F(x) \wedge N_y^n (F(y) \wedge x \neq y))$[301]

Isto é estranho, porque o título da subseção sugere que números são objetos, mas as definições acima pressupõem que eles sejam conceitos de segunda ordem. Mais adiante, entretanto, Frege irá criticar estas definições. Portanto, talvez, o seu objetivo fosse a tentativa de dissipar uma possível confusão que poderia surgir, já que ele havia afirmado que "o número 1" é um objeto auto-subsistente[302], mas também que uma atribuição numérica é uma predicação de um conceito. Ou seja, isto poderia dar a impressão que os números individuais fossem pensados ora como objetos, ora como conceitos, o que iria contra o seu terceiro princípio mencionado acima[303].

A primeira dúvida levantada por Frege sobre estas definições é que em (D3) ocorre um símbolo no *definiens* - $N_x^n ...x...$ - cujo significado não foi previamente

299 "The number 0 belongs to a concept, if the proposition that *a* does not fall under that concept is true universally, whatever *a* may be" (**FA**, pág.67).

300 "the number 1 belongs to a concept *F*, if the proposition that *a* does not fall under *F* is not true universally, whatever *a* may be, and if from the propositions
"*a* falls under *F*" and "*b* falls under *F*"
it follows universally that *a* and *b* are the same" (**FA**, pág 67).

301 "the number (x+1) belongs to a concept *F*, if there is an object *a* falling under *F* and such that the number *n* belongs to the concept "falling under *F*, but not *a*" (**FA**, pág. 67).

302 "When we speak of "the number one", we indicate by means of the definite article a definite and unique object of scientific study. There are not divers numbers one, but only one. In 1 we have a proper name, which as such does not admit of plural any more than "Frederick the Great" or "the chemical element gold" (**FA**, pág. 49).

303 "These definitions suggest themselves so spontaneously in the light of our previous results, that we shall have to go into the reasons why they cannot be reckoned satisfactory" (**FA**, pág. 68).
Depois de rejeitar a sua primeira tentativa de definição, Frege escreve: "It is time to get a clearer view of what we mean by our expression "the content of a statement of number is an assertion about a concept". In the proposition "the number 0 belongs to the concept *F*", 0 is only an element in the predicate (taking the concept *F* to be a real subject). For this reason I have avoided calling a number such as 0 or 1 or 2 a *property* of a concept. Precisely because it forms only an element in what is a self-subsistent object. I have already drawn attention above to the fact that we speak of "the number 1", where the definite article serves to class it as an object. In arithmetic this self-subsistence comes out at every turn, as for example, in the identity 1+1=2" (**FA**, pp. 68-9).

estabelecido. Isto significa que estaríamos definindo uma expressão desconhecida por outra desconhecida. Por outro lado, (D1) e (D2) são definições no sentido estrito, porque seus *definienda* podem ser estabelecidos usando-se apenas os símbolos da conceitografia, cujos significados já tinham sido determinados[304] [305].

Frege admite que é possível definir as expressões "o número 1+1 pertence ao conceito *F*", "o número 1+1+1 pertence ao conceito *F*", etc. a partir de (D2) e (D3)[306]. E, de fato, poderíamos definir estas expressões usando (D1) e (D3). Assim, teríamos

(D4) $N^1_x F(x) \equiv_{def} \exists x(Fx. \wedge .N^0_y(Fy \wedge x \neq y))$

(D5) $N^{1+1}_x F(x) \equiv_{def} \exists x(Fx. \wedge .N^1_y(Fy \wedge x \neq y))$

(D6) $N^{1+1+1}_x F(x) \equiv_{def} \exists x(Fx. \wedge .N^{1+1}_y(Fy \wedge x \neq y))$

Agora, todas as expressões ocorrendo nos *definienda* de (D4)-(D6) já têm o seu significado previamente estabelecido. Não obstante, esta forma de definição é problemática, porque há infinitos números naturais, e portanto, deveríamos dar infinitas tais definições dos conceitos numéricos[307].

Outro problema é que embora estes conceitos possam ser definidos de forma puramente lógica (usando-se apenas símbolos da conceitografia e símbolos previamente definidos), não é uma necessidade lógica que eles sejam satisfeitos.

---

304 "The most likely to cause misgiving is the last; for strictly speaking we do not know the sense of the expression "the number *n* belongs to the concept *G*" any more than we do that of the expression "the number (*n*+1) belongs to the concept *F*" (**FA**, pp. 67-8).

305 Se consideramos '$N^0_x F(x)$' e '$N^1_x F(x)$' como símbolos simples, (D1) e (D2) são definições explícitas.

306 "We can, of course, by using the last two definitions together, say what is meant by

"number 1+1 belongs to the concept *F*"

and then, using this, give the sense of the expression

"the number 1+1+1 belongs to the concept *F*"

and so on" (FA, pág. 68).

307 Em **GLA**, como já afirmado, Frege define o conceito de número natural usando as definições de número 0 e de ancestral fraco da relação *sucessor*. Uma possibilidade seria definir a relação *sucessor* (em terceira ordem) e o ancestral forte e fraco (em quarta ordem) para os conceitos numéricos. E a partir destas definições, definir os naturais. É evidente que este não é ponto de Frege em §55. De fato, não é claro se Frege pensou na fundamentação da aritmética desta forma. Quando Frege fala nas notas a Darmstaedter que dado um conceito numérico é possível obter o próximo por meio de uma regra, ele poderia estar pensando justamente no procedimento acima. Portanto, temos sérias dúvidas sobre a aritmética não-oficial de Frege. Veja, por exemplo, "*Frege's Unofficial Arithmetic*" (2002) de Rayo, "*Logicism and the Ontological Commitments of Arithmetic*" (1984) e "*Where do Natural Numbers come from*?" (1990) de Hodes e Landini (2006, pp. 209-18).

E, na verdade, se Frege tivesse tomado este caminho, ele teria de assumir um axioma do infinito, afirmando a existência de infinitos objetos[308].

Estranhamente, a objeção de Frege é:

> We can, of course, by using the last two definitions together, say what is meant by
> "the number 1+1 belongs to the concept *F*"
> and then, using this, give the sense of the expression
> "the number 1+1+1 belongs to the concept *F*"
> and so on; but we can never – to take a crude example – decide by means of our definitions whether any concept has the number JULIUS CAESAR belonging to it, or whether that same familiar conqueror of Gaul is a number or is not (**FA**, pág. 68)

Esta objeção apenas fará sentido se Frege não estiver considerando as expressões '0', '1', '1+1', '1+1+1' como sincategoremáticas. Neste caso, $N_x^0 F(x)$, $N_x^1 F(x)$, $N_x^{1+1} F(x)$, etc. não formariam um único símbolo a ser definido.

Faz-se mister perceber que se Frege quisesse definir os números cardinais individuais como os conceitos numéricos (conceitos de segunda ordem), a questão se Júlio César é um número ou não seria respondida, porque este conquistador romano não é um conceito.

A primeira tentativa de definição de Frege não funciona, pois ela não dá conta do caráter ontológico dos números cardinais. Estes são objetos, mas as definições propostas os tratam como conceitos. Isto torna-se claro quando ele escreve:

> Moreover, we cannot by aid of our suggested definitions prove that, if the number *a* belongs to the concept *F* and the number *b* belongs the same concept, then necessarily *a*=*b*. Thus we should be unable to justify the expression "*the* number which belongs to the concept *F*", and therefore should find it impossible in general to prove a numerical identity, since we should be quite unable to achieve a determinate number. It is only illusion that we have defined 0 and 1; in reality we have only fixed the sense of the phrases
> "the number 0 belongs to"
> "the number 1 belongs to"
> but we have no authority to pick out the 0 and 1 here as self-subsistent objects that can be recognized as the same (**FA**, pág. 68)[309]

---

308 Por exemplo, assumamos que existem apenas dois objetos. Então, nenhum conceito de primeira ordem cairá sob o conceito numérico designado por .$N_x^{1+1+1}\Phi(x)$

309 Greimann (2003, pág. 263) escreve: "Frege is well aware of the fact that it is not clear which terms are supposed to be the *definienda* of (2). For, (2) can be regarded as a definition of the number words '0', '1', '1+1', '1+1+1', etc., as well as a definition of the second order predicates 'the number 0 belongs to the concept of being an *x* such that ϕ(x)', 'the number 1+1 belongs to the concept of being an *x* such that ϕ(x)', etc. In the first case, (2) is a contextual definition of the number words, and in the second case an explicit definition of the second order predicates.

Acreditamos que (D1)-(D2), embora insatisfatórias como definições, desempenham um papel fundamental na explicação da aplicação da aritmética. Uma definição "correta" do número cardinal 0 seria aquela a partir da qual pudéssemos mostrar as seguintes proposições: (1) se o número de um conceito *F* é igual a 0, então nada cai sob *F*; (2) se nada cai sob *F*, então o número de *F* é igual a 0. Estas proposições são mencionadas em **GLA** (§75) e são prováveis a partir do **PH** dentro da conceitografia[310] [311].

Além disso, (D3) indica o caminho para a definição da relação sucessor. Como afirmamos, o problema de (D3) é que a expressão '$N_x^n ... x ...$' não tem um significado previamente estabelecido. Frege transformará (D3) na seguinte definição da relação *sucessor*:

$$Pred(a, b) \equiv_{def} \exists F \exists y (\sharp_x F(x) = b \wedge Fy \wedge \sharp_x (Fx \wedge x \neq y) = a)$$

Diferentemente do caso de (D3), a expressão '$\sharp_x ... x ...$' terá seu significado dado por **PH** (e, de fato, em **GLA**, supostamente pela definição explícita)[312] [313].

Em §§57-61, Frege busca justificar a sua posição de que os números cardinais são objetos. Como mencionado em uma nota, ele sustenta que na linguagem cotidiana falamos "do número 0", "do número 1" e não "dos números 0" e "dos números 1". Também não usamos as expressões "um número 0" e "um número 1". Ademais, na aritmética, grande parte das fórmulas são apresentadas como identidades[314].

Regarded as an attempt to define these predicates, the definitional clauses of (2) are acceptable for Frege. However, since Frege aims to construe the numbers as objects, i. e., as referents of singular terms, he must consider the number words as the *definienda* of (2). For, when the numbers are constructed as the denotations of second order predicates, they must be considered as second order functions, not as objects". Este mesmo ponto é afirmado em Ricketts (pág. 1997, pág. 190)

310 Veja capítulo **4**.

311 Wright (1998, pp. 330-2) mostrou que em **AF** é possível provar o princípio Nq:

$$\sharp_x F(x) = n \leftrightarrow N_x^n F(x)$$

A prova é dada por indução matemática, provando a caso base $\sharp_x F(x) = 0 \leftrightarrow N_x^0 F(x)$. E depois assumindo a hipótese indutiva

$$\sharp_x F(x) = n \leftrightarrow N_x^n F(x),$$

provar

$$\sharp_x F(x) = n + 1 \leftrightarrow N_x^{n+1} F(x).$$

312 Parece-nos que se **PH** foi usado em 1882, então Frege admitiu que no *definiens* da definição de *Pred* (*a*, *b*) havia ocorrência apenas de símbolos cujos significados já eram previamente conhecidos.

313 Schirn (1996b, pp. 145-7) defende uma posição que corrabora a nossa.

314 A aritmética trata os números como sendo objetos.

Por outro lado, Frege admite também que na linguagem ordinária há usos atributivos dos números, como por exemplo, na sentença "Júpiter têm quatro luas". Não obstante, Frege acreditava que esta sentença poderia ser convertida em uma outra na qual o número 4 ocorreria como objeto, a saber, "o número que pertence ao conceito "lua de Júpiter" é igual a 4"[315].

Embora haja muitas questões a serem discutidas sobre este ponto, nosso maior interesse nestas seções é sobre o uso do Princípio do Contexto[316]. Uma vez que foi defendido que números são objetos, Frege aventa a seguinte possível objeção:

> A possible criticism is, that we are not able to form of this object which we are calling Four or the Number of Jupiter's moons any sort of idea at all which would make it something self-subsistent (FA, pág. 69).

Para Frege, números não são entidades que se encontram no tempo-espaço, tampouco são entidades mentais. Não obstante, era lugar comum na sua época, ou pelo menos assim Frege acreditava, o fato de que todo objeto auto-subsistente teria de ser dado na sensibilidade.

Porém, segundo Frege, os números seriam um contra-exemplo a esta visão:

> We can form no idea of the number either as a self-subsistent object or as a property in an external thing, because it is not in fact either anything sensible or a property of an external thing. But the point is clearest in the case of the number 0; we shall try in vain to form an idea of 0 visible stars (FA, pág. 70)

Se números fossem entidades sensíveis ou dados na intuição ou se eles fossem ideias presentes nas nossas mentes, então certamente o projeto logicista de Frege estaria em sério risco[317].

Os argumentos de Frege caminham para a primeira aplicação do Princípio do Contexto. Ele escreve:

> That we can form no idea of its content is therefore no reason for denying all meaning to a word, or for excluding it from our vocabulary. We are indeed only imposed on by the opposite view because we will, when asking for the meaning of the word, consider it in isolation, which leads us to accept an idea as the meaning. Accordingly, any word for which we can find no corresponding mental picture appears to have no content. But we ought always to keep before our eyes a

315 Esta conversão é permitida pelo princípio Nq.
316 Veja Dummett (1991, cap. 9).
317 Veja MacFarlane (2002).

> complete proposition. Only in a proposition have the words really a meaning. It may be that mental pictures float before us all the while, but these need not correspond to the logical elements in the judgement. It is enough if the proposition taken as whole has a sense; it is this that confers on its parts also their content (**FA**, pág. 71)

O Princípio do Contexto é problemático, porque é formulado ainda em uma linguagem anterior à distinção entre sentido e referência. Assim, não sabemos ao certo se ele é um princípio que rege a "referência" ou o "sentido" das expressões. A melhor opção, é claro, é que ele seja um princípio sobre as referências das partes de uma sentença significativa. Neste caso, o princípio poderia ser visto como:

(**PC**) É suficiente que uma sentença como um todo tenha um sentido, para que sejam conferidas referências às suas partes

Aqui, "sentido" poderia ser concebido como "conteúdo judicável", ou seja, uma proposição que é verdadeira ou falsa[318]. Portanto, a reivindicação de Frege é que dada uma sentença verdadeira

$$Fa,$$

as expressões 'a' e '$F\xi$' deveriam ter um conteúdo (ou referência). Além disso, o Princípio do Contexto tem uma aplicação heurística, dependendo da contribuição da expressão na designação do valor de verdade da sentença, podemos saber a que tipo de entidade ela se refere. Destarte, se 'a' em 'Fa' for um termo singular ou uma descrição definida, então a referência de 'a' será um objeto. E, neste caso, '$F\xi$' designará um conceito de primeira ordem.

O objetivo do Princípio do Contexto é evitar visões psicologistas de objetos abstratos. Além disso, ele justifica nosso uso de termos singulares abstratos[319], principalmente os da aritmética. Frege pretende evitar também a objeção que números *qua* objetos não podem existir, porque eles não são objetos espaço-temporais[320].

318 Se "sentido" fosse concebido na forma em que é concebido pós-distinção entre sentido e referência, não é suficiente uma sentença expressar um sentido para que sejam conferidas referências as suas partes. Sentenças como "Pegasus é um cavalo alado", "Odisseu foi deixado dormindo na paria de Ítaca" são sentenças que expressam sentidos, mas os nomes "Pegasus" e "Odisseu" não se referem a nenhum objeto.

319 Termos singulares cujos referentes são objetos abstratos.

320 "But, it will perhaps be objected, even if the Earth is really not imaginable, it is at any rate an external thing, occupying a definite place; but where is the number 4? It is neither outside us nor within us. And, taking those words in their spatial sense, that is quite correct. To give

Na seção §62, intitulada *To obtain the concept of Number, we must fix the sense of a numerical identity*, Frege questiona como números são dados a nós se não podemos ter quaisquer ideias ou intuições deles. Logo a seguir, Frege evoca o Princípio do Contexto e afirma a necessidade de definir o sentido de uma sentença na qual numerais ocorrem. Esta sentença deve ser tal que manifeste a natureza ontológica dos números (objetos)[321].

De acordo com Frege, o tipo proeminente de sentenças nas quais numerais ocorrem designando objetos são aquelas que expressam identidades, aquelas que expressam nosso reconhecimento de um número como sendo o mesmo novamente. Assim, Frege propõe definir o sentido da sentença

o número do conceito F é o mesmo que o número do conceito G

Em símbolos, a expressão acima é:

$$\sharp_x F(x) \equiv \sharp_x G(x)$$ [322]

Na definição, por razões óbvias, o *definiens* não pode conter a expressão "o número do conceito *F*":

> In our present case, we have to define the sense of the proposition
> "the Number which belongs to the concept *F* is the same as that which belongs to the concept G";
> *that is to say, we must reproduce the content of this proposition in other terms, avoiding the use of the expressions*
> "the Number which belongs to the concept *F*" (**FA,** pág, 73, nosso grifo)

E, assim, Frege propõe definir o sentido da proposição acima por meio da sentença que expressa a existência de uma relação *R* que correlaciona um-para-um os objetos que caem sob *F* e os objetos que caem sob *G*.

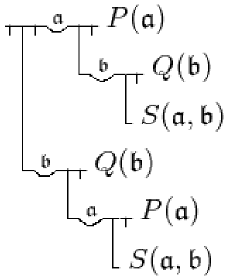
Agora, o conceito de correlação um-para-um pode ser definido usando-se apenas os símbolos da conceitografia: Dois conceitos *F* e *G* são correlacionados por meio de uma relação *S*, justamente quando para todo objeto *x* que cai sob *F*, existe um objeto *y* que cai sob *G* e *x* encontra-se na relação *S* com *y* e para todo

spatial co-ordinates for the number 4 makes no sense; but the only conclusion to be drawn from that is, that 4 is not a spatial object, not that is not an object at all. Not every object has a place" (**FA**, pág. 72)

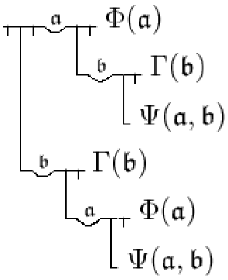
321 "But we have already settled that number words are to be understood as standing for self-subsistent objects" (**FA**, pág. 73)

322 A seguir, argumentaremos porque usamos a tripla barra.

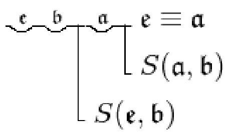
objeto *y* que cai sob *G*, existe um objeto *x* que cai sob *F* e *x* encontra-se na relação *S* com *y*. Na conceitografia, isto é formulado assim



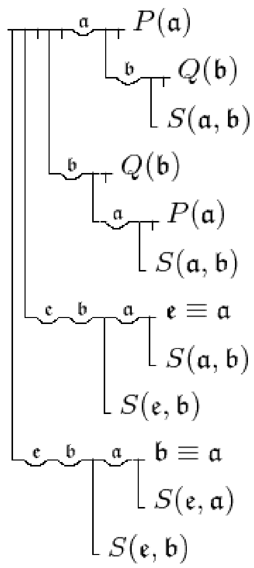
O conceito de *correlação* é de segunda ordem. Se admitirmos que 'Φ', 'Γ'e 'Ψ' representam lugares do argumento, o conceito será expresso por:



A correlação será um-para-um justamente quando a relação *S* for funcional (no sentido já explicado no capítulo **2**) e um-para-muitos, que pode ser definida da seguinte forma: uma relação *S* é um-para-muitos justamente quando para todos objetos *x, y* e *z*, se *x* está na relação *S* com *y* e *z* está na relação *S* com *y*, então *x*=*z*. Conceitograficamente, isto é

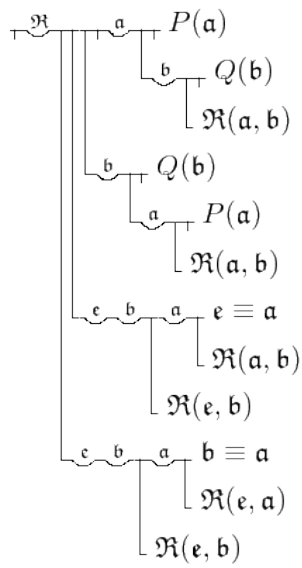


Assim, correlação um-para-um é dada por



E, portanto, introduzimos a quantificação existencial

(**Q**)



Sendo uma definição, **PH** tem de expressar uma identidade (por meio da tripla barra de **BS**) entre o conteúdo judicável expresso pela sentença afirmando a identidade entre os números cardinais dos conceitos *F* e *G* e o da sentença afirmando a existência de uma relação *R* que correlaciona um-para-um os conceitos *F* e *G*[323].

323 Em **GLA**, Frege afirma a identidade de conteúdo judicável entre a proposição que expressa o paralelismo entre retas e a proposição que expressa a identidade de direção destas retas: "Now in order to get, for example, from parallelism to the concept of direction, let us try the following definition: The propositions

"line *a* is parallel to line *b*"

is to mean the same as [sei gleichbedeutend mit]

"the direction of line *a* is identical with the direction of line *b*" (**FA**, pág. 76)

Podemos notar que na definição de correlação 1-1 não há ocorrência do operador cardinalidade. Se adicionarmos abreviações para as fórmulas que ocorrem em **Q**, **PH** é a fórmula:

(**Q1**)

$$\Vdash \left(\begin{array}{l} (\sharp_x P(x) \equiv \sharp_x Q(x)) \equiv {}_{\top}\!\!\smile^{\mathfrak{R}}\!\!\top\!\top\, Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(P\alpha, Q\beta) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \llcorner Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha,\beta) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \llcorner UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha,\beta) \end{array} \right)$$ [324]

Usando 52BS e 57BS, Frege obtém as fórmulas condicionalizadas, sendo estas suficientes para provar os axiomas de Peano.

Embora, à primeira vista, **PH** defina o operador-cardinalidade e pareça ser uma definição no sentido estrito, ele não o é e Frege estava ciente disso:

> It is not only among numbers that the relationship of identity is found. From which it seems to follow that we ought not to define it specially for the case of numbers. We should expect the concept of identity to have been fixed first, and that then, from it together with the concept of Number, it must be possible to deduce when Numbers are identical with one another, without there being need for this purpose of a special definition of numerical identity as well.
> As against this, it must be noted that for us the concept of Number has not yet been fixed, but is only due to be determined in the light of our definition of numerical identity. Our aim is to construct the content of a judgement which can be taken as an identity such that each side of it is a number. *We are therefore proposing not to define identity specially for this case, but to use the concept of identity, taken as already known, as a means for arriving at that which is to be regarded as being identical* (**FA**, pág. 74, meu grifo).

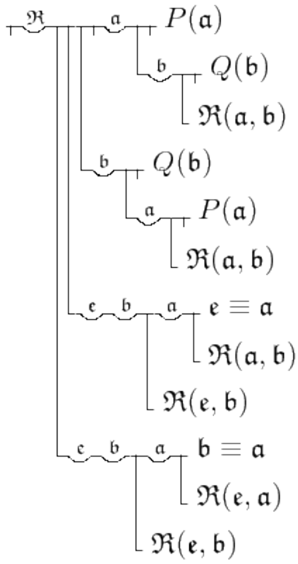
Em **BS**, como já foi afirmado, o *definiendum* das definições introduzidas contém apenas símbolos desconhecidos, ou seja, os símbolos introduzidos devem ser simples. Contudo, na passagem acima, Frege admite que a definição do operador-cardinalidade faz uso da identidade já tomada como conhecida. Isto quer dizer que Frege não está propondo que o símbolo

(**A**) $$\sharp_x F(x) \equiv \sharp_x G(x)$$

seja uma mera abreviação para o símbolo mais complexo

324 Veja capítulo **4**.

(B)



Em **GLA**, §65, Frege volta ao mesmo ponto. Depois de propor a definição da identidade de direções de retas por meio da relação de paralelismo, ele escreve:

> This definition departs to some extent from normal practice, in that it serves ostensibly to adapt the relation of identity, taken as already known, to a special case, whereas in reality it is designed to introduce the expression "the direction of line *a*", which only comes into it incidentally. (**FA**, pág. 76)

Então Frege levanta a seguinte dúvida:

> It is this that gives rise to a second doubt – are we not liable, through using such methods, to become involved in conflict with the well-known laws of identity? Let us see what these are. As analytic truths they should be capable of being derived from the concept itself alone. Now Leibniz's definition is as follows:
> "Things are the same as each other, of which one can be substituted for the other without loss of truth".
> This I proposed to adopt as my own definition [explanation] of identity (**FA**, pág. 76).

As conhecidas leis da identidade são aquelas estabelecidas por 52BS e 54BS. E a definição Leibniziana da identidade supracitada equivale, dentro na conceitografia, às fórmulas 52BS e 57BS. Assim, quando Frege diz que ele toma a definição de Leibniz como sendo a sua própria explicação da identidade, ele está sugerindo que a identidade entre as direções é estabelecida por meio da tripla barra. O mesmo pode ser afirmado em relação a **PH**.

Há uma discussão com relação a esta passagem, ou seja, sobre se Frege pretendia definir a relação de identidade[325]. Acreditamos que isto é pouco provável. Em primeiro lugar, a tradução de Austin parece ser problemática. Em alemão, lemos: Diese Erklärung eigne ich mir für die Gleichheit an. (**GLA**, pág. 73)

A palavra "*Erklärung*" pode ser traduzida por "definição", mas também pode ser traduzida por "explicação". Portanto, o que Frege poderia estar dizendo é que o significado da relação de identidade é explicado por meio de 52BS, 54BS e 57BS.

Além disso, como já foi mencionado, Frege não pode definir a identidade (tripla barra), porque ela é um primitivo lógico que é usado também nas definições. Lembremos que as definições em **BS** têm seguinte forma:

$$\Vdash (A \equiv B)$$

Assim, a possível definição da relação de identidade dentro da conceitografia seria

$$\Vdash \left(\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!\!\top\, \mathfrak{f}(b) \\ \qquad \llcorner\, \mathfrak{f}(a) \end{array} \right) \equiv (a \equiv b)$$

Mas, neste caso, estaríamos definindo a identidade (tripla barra) por meio dela mesma[326].

325 Dummett (1991, pág. 112)

326 Em sua resenha ao livro *Philosophie der Arithmetik I* de Husserl, Frege escreve: "It should be noted in this connection that I am using the word 'equal' or 'identical' without further addition in the sense of 'not different', 'coinciding', 'same'. As psychological logicians lack any understanding of definition, they lack any understanding of identity. This relation cannot but remain perfectly mysterious to them; for if words designated ideas throughout, one could never say '*a* is the same as *b*'; for to able to say this, one would first have to distinguish *a* from *b*, and they would then just be different ideas. *All the same, I agree with the author that Leibniz' explanation* [Erklärung] *that 'two things are the same when one can be substituted for the other without loss of truth' does not deserve to be called a definition, even if my reasons are different from his. Since any definition is an identification, identity itself cannot be defined. Leibniz's explanation could be called a principle that brings out the nature of the relation of identity, and as such it is of fundamental importance*" (Frege, 1984, pág. 200, nosso grifo). Em uma carta de Frege a Peano, há a seguinte passagem: "The last point I should not like to admit. To begin with, I doubt whether you can really designate all the purely logical forms you use by those three signs. I have my doubts even about identity. In Formulary I, sect. 1, 3, we find a definition of the sign = in the form

$$a = b \cdot = \cdot a \supset b \cdot b \supset a$$

But this evidently pressupposes the meaning of the definiendum. For in the Preface, p. iv, you say: 'Every definition is expressed by an equation; the first term is the sign that is being defined.' Here the left side of the definitional equation is 'a=b', the right side '$a \supset b \cdot b \supset a$', and between the two occurs the sign of identity whose meaning must therefore be already known if the definition is to be understood. For this reason alone there can be no question of a

Há uma passagem no artigo "*Boole's logical Calculus and the Concept-script*" que dá origem a uma dificuldade interpretativa. Frege escreve:

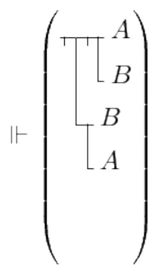
> The first thing one notices is that Boole uses a greater number of signs. Indeed I too have an identity sign, but I use it between judgeable contents almost exclusively to stipulate the sense of a new designation. Furthermore I now no longer regard it as a primitive sign but would define it by means of others (Frege, 1979, pág. 36)

Mas, reiterando, Frege não pode definir a tripla barra, porque ela é usada nas definições. Talvez, Frege tivesse introduzido um novo símbolo primitivo para ser usado nas definições. Mas, neste caso, ele seria obrigado a introduzir novos axiomas que explicassem o significado deste novo símbolo[327]. E isto não representaria nenhum ganho em simplicidade do sistema.

Aqui há apenas duas possibilidades plausíveis. A primeira seria que Frege mudou a forma de suas definições. Por exemplo, elas poderiam ser feitas por meio da conjunção de implicações. Ou seja, a forma da definição seria:

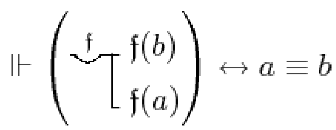
$$\Vdash A \leftrightarrow B$$

Lembrando que esta fórmula seria uma abreviação para



As formas condicionalizadas seriam obtidas usando IbGGA (veja capítulo **4**). A identidade seria definida pela fórmula

(**C**)

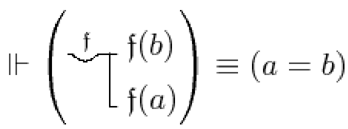


reduction of identity to the meanings of the three primitive signs" (Frege, 1980, pág. 113, nosso grifo).

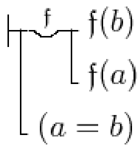
327 "The more primitive signs you introduce, the more axioms you need. But it is a basic principle of science to reduce the number of axioms to the fewest possible" (Frege, 1979, pág, 36).

A segunda possibilidade poderia ser que Frege estivesse propondo a distinção entre os símbolos '$\equiv$' e '=' e que ele desejava definir este último da seguinte forma:

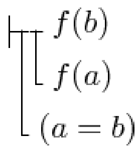
(D)



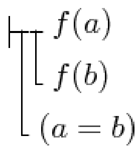
A tripla barra seria usada entre sentenças e '=', entre objetos. Isto implicaria a seguinte situação: teríamos leis similares tanto para '$\equiv$' quanto para '='. Frege ainda teria de ter no seu sistema lógico 52BS e 54BS, a partir dos quais ele provaria 57BS. Por outro lado, a partir (**D**) e 52BS, ele provaria



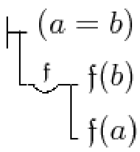
Usando IIb (capítulos **2** e **4**), derivaríamos a fórmula



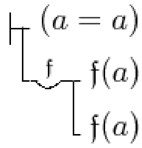
E desta formula, obteríamos



Além disso, usando 57BS, é possível inferir de (**D**), a fórmula



Substituindo-se '*b*' por '*a*' na fórmula acima, teríamos



Como o antecedente é provável em **BS**, por *modus ponens*, inferiríamos

$$\vdash a = a$$

(**D**) complicaria muito o sistema lógico de Frege. Teríamos leis para a tripla barra e para a identidade, que seriam uma o espelho da outra[328].

(**C**) acima não complica muito o sistema de Frege, contudo ela não parece justificar a expressão "*gleichbedeutend*", mesmidade de conteúdo judicável usadas nas definições. Por isso, preferimos manter a tripla barra ao expressar **PH**.

Uma vez que '≡' já tem seu significado estabelecido, **PH** não define a identidade por meio dela mesma. Ao contrário, fazendo uso da identidade, **PH** define (ou introduz) o operador-cardinalidade.

Uma das preocupações de Frege em **GLA**, §65 é se seria possível substituir a expressão 'o número do conceito *Q*' em todos os lugares em que ocorre a expressão "o número do conceito *P*" e vice-versa, quando os conceitos *P* e *Q* estão correlacionados 1-1[329].

---

328 O mesmo tipo de espelhamento que ocorre entre as proposições primárias e secundárias que Frege tinha criticado em relação à lógica de Boole.

329 Em GLA, este ponto é argumentado em termos de direção, mas na nota 47 de Scholz, Frege sustenta-o em termos do operador cardinalidade: "In order, therefore, to justify our proposed definition of the direction of line, we should have to show that it is possible, if line *a* is parallel to line *b*, to substitute

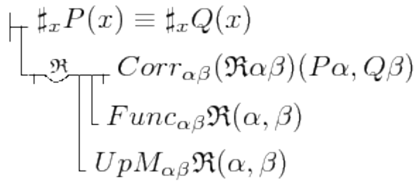
"the direction of *b*"

everywhere for

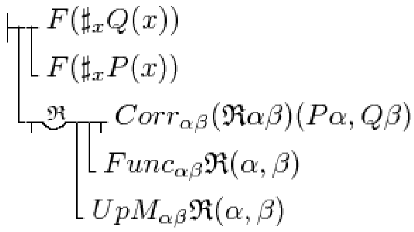
"the direction of *a*"

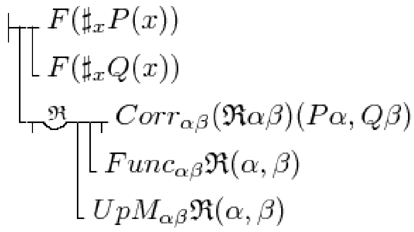
This task is made simpler by the fact that we are being taken initially to know of nothing that can be asserted about the direction of line except the one thing, that is coincides with the direction of some other line. We should thus have to show only that substitution was possible in an identity of this one type, or in judgeable contents containing such identities as constituent elements" (**FA**, pág, 77)

Isto é possível, porque a partir de **PH**, usando 52BS, derivamos as fórmulas

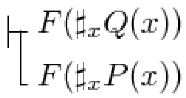


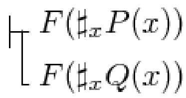
E, usando 52BS e 57BS, derivamos, respectivamente, as fórmulas





Mas, por hipótese, assumimos que existe uma relação *R* que correlaciona os conceitos *P* e *Q*, podemos eliminar os antecedentes das fórmulas acima (*modus ponens*), obtendo





PH é uma instância de uma definição por abstração e este tipo de definição sempre teve um uso corrente dentro da Matemática[330] [331]. Para Frege, as definições por abstração teriam a seguinte forma:

$$\Sigma(\alpha) \equiv \Sigma(\beta) \equiv \alpha \approx \beta$$

À direita da fórmula acima, a expressão '$\alpha \approx \beta$' afirma que há uma relação de equivalência entre as entidades denotadas por 'α' e 'β'. Isto significa que as

330 Em uma seção intitulada “Definitions by Abstraction”, Peano (1921, pág. 243) escreve o seguinte: “Sometimes we define a function *f*(*a*) not by a nominal definition of the form *f*(*a*) = expression composed of preceding signs, but defining the equality *f*(*a*)=*f*(*b*). For example, Definition 5 of Euclid is translated: (the ratio of size of *a* to the homogeneous entity *b* = the ratio of *c* to *d*)=(for arbitrary natural numbers *m* and *n*, if *m.a* is less than or equal to or greater than *nb*, the *m.c* is less than or equal to or grater than *n.d*)”. Em outro artigo, denominado “Le Definizioni per Astrazione” (1915), Peano descreve uma série de definições por abstração que existe na Matemática. Dentre estas, ele menciona **PH** (ou algo análogo) e a definição de ponto no infinito (ou direção).

331 O próprio Frege era consciente deste fato, porque ele escreve: “Admittedly, this seems to be a very odd kind of definition, to which logicians have not yet paid enough attention; but that it is not altogether unheard of, may be shown by a few examples” (**FA**, pág. 74). Os exemplos de Frege têm origem na geometria.

entidades α e β têm algo em comum, são idênticas sob algum aspecto. À direita, a expressão '$\Sigma(\alpha) \equiv \Sigma(\beta)$' indica que aquilo que é comum entre as entidades α e β pode ser dado por meio de uma identidade:

> The judgement "line *a* is parallel to line *b*", or, using symbols,
> $$a//b,$$
> can be taken as an identity. If we do this, we obtain the concept of direction, and say: "the direction of the line *a* is identical with the direction of line *b*". Thus we replace the symbol // by the more generic symbol =, through removing what is specific in the content of the former and dividing it between *a* and *b*. We carve up the content in a way different from the original, and this yields us a new concept" (**FA**, pág. 75).[332]

Infelizmente, o exemplo acima de Frege não deixa claro o tipo de análise que ele deseja dar. O ponto é que Frege está considerando estes três tipos de sentenças:

(a1) a direção da reta *a* é igual à direção da reta *b*
(a2) a reta *a* tem a mesma direção que a reta *b* ou a reta a e a reta *b* são idênticas em direção[333]
(a3) a reta *a* é paralela à reta *b*

O "*carve up*" indicado na passagem é em relação às sentenças (a1) e (a2). Ou seja, aquilo que ocorre como sendo comum às retas *a* e *b* é dividido entre elas formando as expressões "a direção da reta *a*" e "a direção da reta *b*". Depois, a relação expressa por (a2) seria definida em termos de (a3).

Destarte, a análise de Frege seria que (a1) e (a2) expressam o mesmo conteúdo judicável, embora, gramaticalmente falando, as sentenças sejam diferentes. Por outro lado, (a2) seria definido por (a3). Portanto, teríamos que (a1) expressaria o mesmo conteúdo que (a3).

A análise acima da mesmidade de conteúdo judicável entre (a1) e (a2) é sugerida pela seguinte passagem de GLA:

332 Aqui teríamos a seguinte definição por abstração introduzindo as direções: $D(a) \equiv D(b) \equiv a//b$.

333 Em termos mais gerais, de acordo com Frege, as sentenças "α e β são idênticos em φ" e "o φ de α e o φ de β são idênticos" expressam o mesmo conteúdo.

> We obtain in a similar way from the parallelism of planes a concept corresponding to that of direction in the case of straight lines; I have seen the name "orientation" used for this. From geometrical similarity is derived the concept of shape, *so that of "the two triangles are similar" we say "the two triangles are of identical shape" or "the shape of the one is identical with that of the other"*. (**FA**, pág. 75)[334]

No caso de **PH**, as três sentenças seguintes expressariam o mesmo conteúdo judicável:

(**PH1**) o número do conceito *F* é igual ao número do conceito *G*
(**PH2**) os conceitos *F* e *G* são iguais em número[335]
(**PH3**) existe uma relação *R* que correlaciona um-para-um o conceito *F* e o conceito *G*

(**PH2**) é definida em termos de (**PH3**)[336]. (**PH1**) teria o mesmo conteúdo que (**PH2**) seguindo a análise sugerida em GLA, §64. Disto, obteríamos a identidade de conteúdo entre (**PH1**) e (**PH3**).

O que devemos ter em mente é que na conceitografia (provavelmente no livro de 1882), **PH** seria introduzido como uma definição:

$$\Vdash \left(\begin{array}{l} (\sharp_x P(x) \equiv \sharp_x Q(x)) \equiv {}_{\top}\!\overset{\mathfrak{R}}{\smile}\!{}_{\top\top}\, Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(P\alpha, Q\beta) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \llcorner\, Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha,\beta) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \llcorner\, UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha,\beta) \\ \end{array} \right)$$

Como afirmamos, uma definição Fregeana estipula que os símbolos que ocorrem no lado direito e no lado esquerdo da tripla barra expressam o mesmo

---

334 "This I propose to adopt as my own definition of identity. Whether we use "the same", as Leibniz does, or "identical", is not of any importance. "The same" may indeed be thought to refer to complete agreement in all respects, "identical" only to agreement in this respect or that; but we can adopt a form of expression such that this distinction vanishes. For example, instead of "the segments are identical in length" we can say "the length of the segments is identical" or "the same", and instead of "the surfaces are identical in colour", "the colour of the surfaces is identical". And this is the way in which the word has been used in the examples above". (**FA**, pág. 76)

335 Austin traduz o termo "gleichzahlig" por "equal". Com isso, acabamos perdendo de vista este tipo de análise.

336 "The expression
"The concept *F* is equal [in number] (gleichzalig) to the concept *G*"
is to mean the same as (sei gleichbedeutend mit) the expressions
"there exists a relation ϕ which correlates one to one the objects falling under the concept *F* with the objects falling under the concept *G*"" (**FA**, pág 85).

conteúdo conceitual. E, depois, esta definição é transformada em um “axioma” do sistema:

$$\vdash \left((\sharp_x P(x) \equiv \sharp_x Q(x)) \equiv \overset{\mathfrak{R}}{\smile} \begin{array}{l} Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(P\alpha, Q\beta) \\ Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta) \\ UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta) \end{array} \right)$$

Assim, o objetivo de **GLA**, §64 parecia ser a justificação deste tipo de definição, a qual Frege já tinha feito uso em 1882. E, de fato, usando uma instância da geometria, seria mais fácil avançar seu ponto.

Algumas críticas ao procedimento de Frege em **GLA**, §64 estão relacionadas com a não-observação da manobra intermediária que apontamos. Uma questão é que as implicações “ontológicas” de cada lado de uma definição por abstração são diferentes. Por exemplo, assumamos o Princípio de direção:

(**PD**)

$$\Vdash D(a) \equiv D(b) \equiv a//b$$

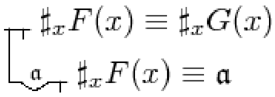
Da identidade “$D(a)$=$D(b)$” podemos obter a existência da direção de uma reta a. Por outro lado, da relação de paralelismo “$a//b$”, podemos obter somente que há uma reta que é paralela a reta a. Ou seja, isto significa que os conjuntos de consequências de “$D(a)$=$D(b)$” e “$a//b$” são diferentes. E, neste caso, estas sentenças não seriam equivalentes.

O mesmo fato ocorre com **PH**. Da identidade entre os números dos conceitos F e G, obtemos a existência do número de F. Por outro lado, da existência de uma relação 1-1 entre F e G, obtemos a existência de um conceito que se encontra nesta relação com F.

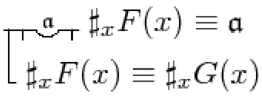
Conceitograficamente, assumamos, por hipótese que

$$\sharp_x F(x) = \sharp_x G(x)$$

Da seguinte instância de 58BS, temos



Por contraposição, chegamos à fórmula

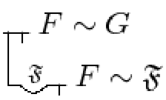


Como assumimos o antecedente da fórmula acima, obtemos a existência do número do conceito *F*.

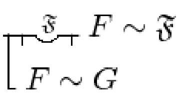
Por outro lado, assumamos que os conceitos *F* e *G* são equinuméricos, fato que expressaremos pela fórmula:

$$F \sim G$$

Seja a seguinte instância de IIb



Por contraposição, temos



Novamente, como assumimos o antecedente da fórmula acima, obtemos a existência de algum conceito que está correlacionado 1-1 com o conceito *F*.

Esta diferença no conjunto de consequências parece mostrar que os lados direito e esquerdo de uma definição por abstração não podem expressar o mesmo conteúdo. Este ponto é enfatizado por Beaney:

> What all these considerations suggest is that there is a real problem in specifying what the conceptual content of a proposition involves, a problem that arises just because Frege allows alternative analyses. As the cases of (Da) and D(b), and N(a) and N(b), shows, the propositions that reflect these analyses can look very different, even though they are regarded as having the same content. Such propositions can seem to have different ontological commitments. (Da) seems to refer to lines and parallelism, for example, while (Db) seems to refer to a direction and the relation of identity. Frege thinks that directions and numbers are genuine, albeit abstract, objects. So are both lines *a* and *b*, their direction, and the relations of parallelism and identity all involved in the content of (Da) and (Db)? (Beaney, 2007, pág. 107).

(Da) e (Db), na análise de Beaney, são os nossos (a1) e (a3) acima. Beaney falha em perceber que há o passo designado em (a2), o que torna a análise de Frege mais plausível[337] . Notemos que (a2) trata de retas, direções e identidade (ou igualdade). Portanto, parece que (a1) e (a2) estão comprometidas com as mesmas entidades.

O que acontece é que (a2) é definida em termos de (ou reduzida a) paralelismo entre retas. Não estamos dizendo que o procedimento de Frege não é problemático, ao contrário – o **Paradoxo de Russell** é apenas um sintoma -, mas talvez, para ele, isto fosse suficiente para justificar a introdução de **PH** como uma definição.

De fato, a introdução de **PH** como uma definição à conceitografia teria efeitos estranhos, porque embora os conjuntos de consequências de cada lado de **PH** sejam diferentes, as leis lógicas do seu sistema garantiriam a equivalência deles[338] [339].

O ponto central de §64 consiste em que podemos obter conhecimento de objetos não-intuitivos por meio de relações intuitivas ou lógicas. Frege escreve:

337 Veja, por exemplo, (Dummett, 1991, pp. 167-179), (Hale, 1997, pp. 91-116).

338 Equivalência está sendo pensada aqui como cada lado de **PH** implicar o outro.

339 O mesmo ocorre com o Axioma V. Do fato de que duas funções *f* e *g* são coextensivas, podemos provar que existe uma função que é coextensiva a *f*. E do fato de que a extensão de *f* é idêntica à extensão de *g*, podemos provar que existe a extensão de *f*. Por outro lado, em **GGA**, devido a seus axiomas, podemos provar a equivalência entre os dois lados do **Axioma V**.

> Often, of course, we conceive of the matter the other way round, and many authorities define parallel lines as lines whose directions are identical. The proposition that straight lines parallel to the same straight line are parallel to one another" can than be very conveniently proved by invoking the analogous proposition about things identical with the same things. Only the trouble is, that this is to reverse the true order of things. *For surely everything geometrical must be given originally in intuition. But now I ask whether anyone has an intuition of the direction of a straight line. Of a straight line, certainly;* but do we distinguish in our intuition between this straight line and something else, its direction? That is hardly plausible. *The concept of direction is only discovered at all as a result of a process of intellectual activity which takes its start from the intuition. On the other hand, we do have an idea of parallel straight lines. Our convenient proof is only made possible by surreptitiously assuming, in our use of the word "direction", what was to be proved; for if it were false that "straight lines parallel to the same line are parallel to one another" , then we could not transform a//b into an identity*" (**FA**, pág. 75, nosso grifo).

Esta passagem tem relação com algumas questões epistemológicas latentes que Frege discutiu na sua tese de doutorado intitulada "*On a geometrical Representation of Imaginary Forms in the Plane*". Esta tese é puramente matemática, mas Frege está preocupado com a questão epistemológica do tratamento dispensado às figuras imaginárias como sendo entidades próprias (na geometria projetiva). Porém, não temos quaisquer intuições destes objetos projetivos. E isto se torna um problema, porque Frege acreditava que os axiomas da geometria derivam sua validade da intuição[340]

A sugestão de Frege para tratar do problema em questão é mostrar que podemos nos referir às entidades imaginárias e às suas relações, indiretamente, por meio de entidades e relações intuitivas:

340 "When we consider that the whole of geometry rests ultimately on axioms which derive their validity from the nature of out intuitive faculty, we seem well justified in questioning the sense of imaginary forms, since we attribute to them properties which not infrequently contradict all our intuitions". (Frege, 1984, pág.1).

> *As in the consideration of points at infinity, there now arises the need, not only for treating these improper elements in the same way as the proper ones, but also for having them before our eyes*. This is easily achieved for points at infinity in the plane by projecting the plane on a sphere from a point on the sphere which is neither the nearest nor the furthest. In that case there is no difference in projection between proper points and points in infinity. In what follows we shall attempt to do the same for imaginary forms. By a geometrical representation of imaginary forms in the plane we understand accordingly a kind of correlation in virtue of which every real or imaginary element of the plane has a real, intuitive element corresponding to it. The first advantage to be gained by this is one common to all cases where there is a one-one relation between two domains of elements: *that we can arrive at new truths by merely carrying over known propositions*. But there is another advantage peculiar to this case: *that the non-intuitive relations between imaginary forms are replaced by intuitive ones. The meaning of imaginary forms comes out equally whether they are considered metrically or projectively*.(Frege, 1984, pp. 2-3).

Considerando esta análise de Frege em termos de **PH**, poderíamos supor que ele desejaria sustentar que nosso conhecimento da verdade da sentença que expressa a identidade entre o número do conceito F e o número do conceito G dependeria apenas do nosso conhecimento da verdade da sentença que expressa a existência de uma correlação um-para-um entre estes conceitos. E diferentemente da relação de paralelismo, aquela relação é dada por meios puramente lógicos.

Isto é, o nosso conhecimento da verdade da sentença que expressa a identidade entre o número do conceito F e o número do conceito G seria puramente lógico. **PH** poderia ser uma explicação natural do nosso conhecimento dos números cardinais sem recorrer à intuição. O mais importante é que adicionado à conceitografia, **PH** implica, junto com as demais definições, os axiomas de Peano.

O Princípio do Contexto serviria como um guia para buscar a definição correta de números cardinais (como objetos). Mas, ele também garantiria o conteúdo (referência) das expressões da forma '$\sharp_x ... x ...$'.

Notemos que é uma verdade da lógica de segunda ordem que todo conceito F é equinumérico a si mesmo:

(E)

$$\vdash F \sim F$$

Portanto, será uma verdade “lógica” que o número de F é igual ao número de F

(**I**)

$$\vdash \sharp_x F(x) \equiv \sharp_x F(x)$$

E, portanto, o termo '$\sharp_x F(x)$' terá um conteúdo, via o Princípio do Contexto. Há uma prova trivial dentro da conceitografia da existência de quaisquer objetos, cujos nomes são introduzidos no sistema. Como já foi afirmado, o seguinte é provável em **BS**:

$$\vdash\!\!\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\, (\mathfrak{a} = a)$$

Se introduzirmos o nome “Pegasus” no sistema, teremos, então

$$\vdash\!\!\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\, (\mathfrak{a} = Pegasus)$$

Acreditamos que não é este tipo de prova de existência de números que Frege pretendia dar em 1882. A prova dependeria de (**I**), cuja verdade dependeria de (**E**).

Na nossa visão, esta seria a abordagem “logicista” de Frege no livro mencionado a Marty. Números seriam entidades ligadas a conceitos. A existência dos números dependeria da existência de conceitos e das relações que ocorrem entre conceitos. O nosso conhecimento destes objetos seria não-intuitivo e, de fato, lógico.

Por algum motivo entre 1882 e 1884, Frege mudou de ideia. Com efeito, acreditamos que isto ocorreu quando grande parte de **GLA** já estava escrita, porque há uma série de elementos neste livro sugerindo que o conceito de número cardinal seria definido por abstração[341].

---

341 Na introdução de **GLA**, Frege implicitamente escreve que irá definir o conceito de número cardinal por meio de **PH**: “With numbers of all these types, as with the positive whole numbers, it is a matter of fixing the sense of an identity” (**FA**, pág. X). O mesmo ponto é feito no título da seção 62: “To obtain the concept of Number, we must fix the sense of a numerical identity”. Uma vez que Frege rejeitou a definição por abstração, então não há justificação de manter o título em §62 e a passagem na introdução. Além disso, a ausência das extensões na primeira parte de **GLA** é algo surpreendente. Ainda, a falta de clareza em §69 é outro sintoma. E no fim de GLA, Frege escreve: “Now we, from our previous treatment of the positive whole numbers, have seen that it is possible to avoid all importation of external things and geometrical intuitions into arithmetic, without, for that all, falling into the error of the formalist. Here, just as there, *it is a matter of fixing the content of a recognition-judgement*” (**FA**, pág. 119).

Em **GLA**, §66, Frege levanta o que seria a objeção fatal às definições contextuais e, em particular, a **PD** e **PH**. De acordo com ele, este tipo de definição apenas decide os valores de verdade de sentenças do tipo

$$\Sigma(\alpha) \equiv \Sigma(\beta)$$

Em particular, **PD** só decide o valor de verdade de sentenças do tipo

$$D(a) \equiv D(b),$$

e **PH** apenas decide o valor de verdade de sentenças do tipo

$$\sharp_x F(x) \equiv \sharp_x G(x),$$

Estritamente falando, **PD** e **PH** deveriam decidir o valor de verdade de sentenças que expressam identidades em todos os casos possíveis[342].

Este problema ficou conhecido na literatura secundária pelo nome de "Problema de Júlio César". Não nos é totalmente claro exatamente qual é o significado do "Problema de Júlio César" e por que ele surgiu quando Frege escrevia **GLA**.

A possibilidade que aventamos está ligada ao Princípio do Contexto[343] [344]. Usaremos **PH**, porque tornará nosso exemplo mais claro. Se introduzirmos na conceitografia o nome "Júlio César", então, via **PH**, a sentença

$$\#_x F(x) \equiv \text{Júlio César}$$

342 "But there is still a third doubt which may make us suspicious of our proposed definition. In the proposition

"the direction of *a* is identical with the direction of *b*

the direction of *a* plays the part of an object, and our definition affords us a means of recognizing this object as the same again, in the case it should happen to crop up in some other guise, say as the direction of *b*. But this means does not provide for all cases. It will not, for instance, decide for us whether England is the same as the direction of the Earth' axis – if I may be forgiven an example which looks nonsensical. Naturally no one is going to confuse England with the direction of the Earth's axis; but that is no thanks to our definition of direction. That says nothing as to whether the proposition

"the direction of *a* is identical with *q*"

should be affirmed or denied, except for the one case where *q* is given in the form of "the direction of *b*". What we lack is the concept of direction" (**FA**, pág. 77-8).

343 O problema de Júlio César foi bastante estudado na literatura secundária. Veja, por exemplo, (Greimann, 2003), (Kemp, 2005), (Heck Jr., 1997b, 2005), (Tappenden, 2005), (Wright, 1983) e (Hale; Wright, 2001b)

344 Landini (2006) acredita que a rejeição de Frege de **PH** é porque ele não dá uma definição explícita do operador-cardinalidade e que o problema de Júlio César é um sintoma. De fato, ele afirma que o problema mencionado por Frege é o mesmo que aquele mencionado por Russell (1996, cap XI). Mas, desde o início, Frege tinha plena consciência de que **PH** não definia explicitamente o operador-cardinalidade e, portanto, ele já o deveria ter sido descartado.

expressará o mesmo conteúdo judicável que a sentença que afirma a existência de uma correlação 1-1 entre conceito F e Júlio César. Mas esta última sentença não tem sentido[345]. E, assim, a sentença

$$\#_x F(x) \equiv \text{Júlio César}$$

também não terá sentido. Por conseguinte, não poderíamos atribuir conteúdos às partes da sentença[346].

A falsidade da sentença acima poderia ser decidida da seguinte forma: Júlio César não é um número cardinal e, portanto, ele não pode ser idêntico ao número cardinal de F. Contudo, Frege define o conceito de número cardinal por meio do operador cardinalidade:

$$\Vdash [(\smile^{\mathfrak{F}} \sharp_x \mathfrak{F}(x) \equiv n) \equiv Card(n)]$$ [347] [348]

Ou seja, Júlio César será um número cardinal se existir algum conceito F do qual ele é número, o que é equivalente a perguntar se Júlio César é igual ao número do conceito F.

Com dissemos no capítulo **2**, não há nomes próprios em **BS**. Em 1882, os únicos nomes próprios introduzidos na teoria seriam nomes do tipo '$\sharp_x ... x ...$'. Agora, em que sentido teríamos o problema de Júlio César? Em **GLA**, Frege menciona a prova do seguinte teorema: nenhum objeto precede ao 0

345 O conceito de correspondência 1-1 é de segunda ordem, sob o qual caem conceitos de primeira ordem. A questão se um objeto cai ou não sob um conceito de segunda ordem não pode ser respondida nem afirmativa, nem negativamente, porque ela simplesmente não faz sentido. Da mesma forma, perguntar se algo cai sob um objeto é sem sentido: "It is to concepts of just this kind (for example, satellite of the Earth) that the number 1 belongs, which is a number in the same sense as 2 and 3. With a concept the question is always whether anything, and if so what, falls under it. *With a proper name such questions makes no sense*" (**FA**, pág. 64).

346 "One doubt, however, still remained, which was this. A recognition-statement must always have a sense. But now if we treat the possibility of correlating one to one the objects falling under the concept F with the objects falling under the concept G by putting: "the Number which belongs to the concept F is identical with the number which belongs to the concept G", thus introducing the expression "the Number which belongs to the concept F", this gives us a sense for identity only if both sides of it are of the form just mentioned" (**FA**, pág. 117).

347 "The expression

"*n* is a Number"

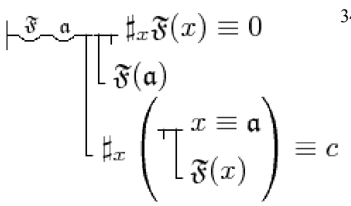
is to mean the same as the expression (sei gleichbedeutend mit)

"there is a concept such that *n* is the Number which belongs to it" (**FA**, pág. 85).

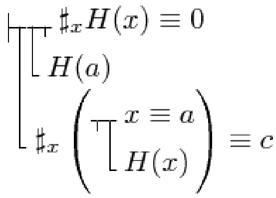
348 Capítulo **4**.

$$\vdash Pred(c, 0)$$

Isto é equivalente à fórmula

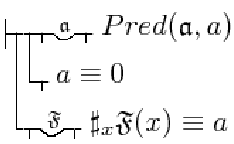
 [349]

Usando IIb e 58BS, disto obteríamos



Se 'Julio César' fosse um nome do sistema, e se ele substituísse '*c*' na fórmula acima, então ela não teria sentido, porque o último antecedente não teria também, porque afirmaria a existência de relação que correlaciona 1-1 o conceito *cair sob F, mas ser diferente de a* e Júlio César.

Mas, na teoria de 1882, poderíamos substituir '*c*' apenas por nomes do tipo $\sharp_x ... x ...$. Isto não acarretaria o problema de Júlio César. Há outros teoremas prováveis no sistema de 1882 que seriam problemáticos, se novos nomes fossem introduzidos no sistema. Por exemplo, Frege prova o teorema que todo número cardinal diferente de 0 é o sucessor de algum número



Se instanciarmos '*a*' para '2', '3', '4', cujas definições seriam dadas por meio do operador-cardinalidade, poderíamos provar que todos estes números são sucessores de algum número. Por outro lado, se 'Júlio César' fosse um nome do

349 Ibid.

sistema, então esta sentença não teria sentido, no caso de instanciarmos '*a*' por 'Júlio César'.

Talvez o problema tenha ocorrido na mente de Frege quando ele começou as suas investigações para obter os demais números a partir dos naturais. O procedimento poderia ser aquele que mencionamos na introdução da presente tese[350]. Frege necessitaria introduzir novas definições por abstração e introduzir novos operadores-abstração. De fato, a seguinte passagem dá uma boa indicação a favor do nosso ponto:

> In the same way with the definitions of fractions, complex numbers and the rest, *everything will in the end come down to the search for a judgeable content which can be transformed into an identity whose sides precisely are the new numbers. In other words, what we must do is fix the sense of a recognition-judgement for the case of these numbers*" (**FA**, pág. 114-5, nosso grifo).

Assim, Frege teria de introduzir uma série de condições de identidade para os demais números, cada uma das quais dadas pelas respectivas definições por abstração[351]. Em particular, se Frege introduzisse o número inteiro **1**, não poderíamos decidir se o número natural 1 é igual ou não ao número inteiro **1**. Nem **PH,** nem (**Int**) decidiriam a questão – se, é claro, Frege tivesse introduzido inteiros desta forma[352].

A manobra de Frege em **GLA** (§68) foi identificar os números cardinais a certas extensões de conceitos (definição explícita), a saber,

o número do conceito *F* é a extensão do conceito *ser equinumérico ao conceito F*

e assumir que é conhecido o que é uma extensão de conceitos.

350 Sem considerar as classes de equivalências. Ou seja, introduziríamos os pares ordenados pelo princípio do par:
(**Par**) $< a, b > \equiv < c, d > \cdot \equiv \cdot a \equiv c \wedge b \equiv d$
Depois, os números inteiros seriam introduzidos como entidades relacionadas a pares de números naturais (estes introduzidos por **PH**), satisfazendo a seguinte condição
(**Int**) $I < x, y > \equiv I < w, z > \cdot \equiv \cdot x + z \equiv y + w$, onde *x*, *y*, *w* e *z* percorrem naturais e '+' seria definível.
As frações seriam obtidas como entidades relacionadas a pares de inteiros que satisfazem uma certa condição (introdução).

351 Veja o artigo "*Abstraction and Identity*" (2005) de Cook e Ebert, principalmente as páginas 132-3.

352 Todas as questões levantadas anteriormente sobre Júlio César ocorreriam com relação a **1**. **1** precederia ou não o número cardinal (natural) 0?

Da mesma forma, depois da passagem supracitada de **GLA**, Frege propõe identificar os demais números como sendo certas extensões de conceitos:

> In doing so, we must not forget the doubts raised by such transformations, which we discussed in §§ 63-68. If we follow the same procedure as we did there, then the new numbers are given to us as extensions of concepts (**FA**, pág. 115)

O problema da definição explícita proposta é que o Princípio do Contexto perde seu papel, qual seja, evitar a intrusão de elementos psicologistas na definição de número cardinal. Extensões de conceitos são objetos abstratos dos quais não podemos ter relações causais. Mas, então, o que é uma extensão? É uma ideia? Voltamos ao ponto inicial das discussões ocorridas nas §§57-61 de **GLA.** Existe uma tensão entre a aplicação do Princípio do Contexto para justificar os conteúdos dos termos singulares abstratos e definições por abstração e a identificação direta dos números cardinais como sendo certas extensões do conceito[353] [354].

Somos céticos sobre a possibilidade de Frege ter em 1884 o seu Axioma V e uma prova formal de **PH** a partir da sua definição explícita. Em primeiro lugar, é uma falha grave de Frege não mencionar a introdução de um novo axioma no seu sistema, principalmente porque estamos assumindo a hipótese de que **GLA** foi escrito para ser uma introdução ao livro de 1882.

---

353 Sluga (1980, pp. 127-8) menciona o mesmo fato: “But there is something surprising and disturbing about the definition of numbers in terms of extensions of concepts in the general context of Frege's thought. He had originally reasoned that numbers as logical objects had to be defined contextually. It was presumably for this reason that he titled the relevant section of the book: “To obtain the concept of Number, we must fix the sense of a numerical identity' (F, p. 73). But the conclusion of that section was that the attempt definition which fulfilled that condition could not legitimately be adopted. A definition of numbers as objects had been achieved, but the question remained whether that definition revealed numbers to be logical objects. The notion of the extension of a concept which is used in the definition appears out of nowhere on page 79 in the *Foundations of Arithmetic*. How is it to be understood? Is it a logical notion and why? In the Foundations Frege writes somewhat lamely: 'I assume that it is known what the extension of a concept' (ibid. 80). And he suggests that after all the notion might not be essential to the construction: 'I attach no decisive significance even to bringing in the extensions of concepts at all (*ibid.*, p. 117; cf. Also p. 80)”.

354 Não concordamos com a interpretação de Dummett (1991, cap. 16) de que o Princípio do Contexto serviria como um guia para a definição correta do conceito de número cardinal: “Thus, as before, the derivability of the original equivalence – the criterion of identity for numbers – becomes a condition for the correctness of a definition of the cardinality operator. What the context principle teaches us is to be *satisfied* with a definition from which the original equivalence can be derived, or, more exactly, with any definition fulfilling our two conditions” (**FA**, pág. 201-2).

Além disso, há uma questão sobre que tipo de extensões de conceitos os números são. Pela definição em §68, eles parecem ser extensões de conceitos de segunda ordem. De fato, o conceito *ser equinumérico ao conceito F* é expresso por

$$\begin{array}{l} \top\!\smile^{\mathfrak{R}}\!\!-\!\!\top\!\!\top\!\!\top\; Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(F\alpha, \Phi\beta) \\ \qquad\quad\ \llcorner\, Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta) \\ \qquad\ \ \llcorner\, UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta) \end{array}$$

onde 'Φ' indica o lugar de argumento. Portanto, Frege teria de introduzir o seguinte **Axioma V***:

$$Ext_Z M(Z) \equiv Ext_Z N(Z) \equiv \underset{\smile}{\mathfrak{f}}\ (M_\alpha \mathfrak{f}(\alpha) \equiv N_\alpha \mathfrak{f}(\alpha))$$ [355] [356]

O problema é que teríamos de supor que funções de primeira ordem também têm extensões. Mas, neste caso, Frege teria de introduzir a seguinte instância do **Axioma V:**

$$\varepsilon' f(\varepsilon) \equiv \varepsilon' g(\varepsilon) \equiv \underset{\smile}{\mathfrak{a}}\ (f(\mathfrak{a}) \equiv g(\mathfrak{a}))$$

Todavia, teríamos o seguinte Problema de Júlio César, a saber, qual é o valor de verdade da identidade

$$\varepsilon' f(\varepsilon) \equiv Ext_Z M(Z)?$$

Ele não é decidido nem por **Axioma V***, nem por **Axioma V**. Blanchette também atenta para este fato:

---

355 Blanchette (1994, pág. 92) escreve: "In fact, it appears that Frege himself proposes two distinct reductions of the numbers to extensions. In the *Grundlagen*, the numerals refer to the extensions of second-order concepts, while in the *Grundgesetze* they refer to extensions of first-level concepts. This would seems to clinch the case in favour of Frege's tolerance of multiple reductions". Veja também (Schirn 2003, pág. 211).

356 Boolos (1986/7, pág. 173) assume que os números cardinais são definidos em **GLA** como extensões de conceitos de segunda-ordem e mostra que esta instância do **Axioma V** também é inconsistente.

> But here again there are difficulties. For there are no clear criteria by means of which to conclude that the relevant first-level and second-level extension are in fact distinct (Blanchette, 1994, pág. 92)[357]

Levando em conta a posição de Blanchette, Landini (2006, pág. 227) menciona que se o operador-extensionalidade fosse considerado como uma função de terceira ordem que se aplica a conceitos de segunda, então Frege não poderia definir a relação de pertinência (**GGA** §34) e teria de introduzir infinitos operadores-extensionalidade (um para cada nível de funções) e infinitos **Axiomas V** (um para cada operador-extensionalidade)[358]. De acordo com Landini, isto seria catastrófico. Então ele escreve:

> Such untoward consequences are to be avoided by a principle of interpretative charity if possible. Charity is possible. In Frege's response to Benno Kerry's review of the *Grundlagen*, he notes that readers should grant him a “pinch of salt”when understanding his expression “the concept *f*.”. He explains that often when the phrase occurs in subject position he intended to be referring to an object (an extension) correlated with the concept *f*. This intent is corroborated by a footnote in the *Grundlagen* itself. Frege remarks that the phrase “the concept *f*” can often be replaced by the phrase “the extension of the concept *f*”. This strongly suggests that Frege intended that the notion of extension of the *Grundlagen* provides for the *multiple* correlations that enable one to correlate a function of any level with a unique object. *The Grundlagen* defines equinumerosity as a relation between second-order functions [erro?]. It defines cardinal number of *f* as the extension of the concept *equinumerous with the concept f*. But once Frege allows an extension function (from first-level functions to objects), correlations of functions of level *n* with functions of level *n*-1, and eventually to objects, result. The second-level concept *equinumerous with the concept f* will be correlated with a first-level relation between objects. Thus, the account of cardinal numbers as objects in *Grundlagen* agrees with that of the *Grundgesetze* (2006, pp. 227-8)

---

357 Schirn (2003, pág. 212) parece fazer o mesmo ponto: “Thus, by virtue of (ED) [definição explícita], Frege succeeds in extending the range of applicability of the originally proposed criterion of identity for cardinal numbers. Nevertheless, the criterion so extended lacks the required unrestricted generality. Take, for example, the two equations “$N_x(x \neq x) = \sharp x(x \neq x)$” and “$N_x(x \neq x) =$Julius Caesar”. The first cannot be transformed into an equation of type (1), since $\sharp_x(x \neq x)$, unlike “$\sharp\varphi(E_x(\varphi(x), x \neq x))$”, denotes the extension of a *first-level* concept. Hence, *HP is powerless to decide whether* “$N_x(x \neq x) = \sharp x(x \neq x)$” *is true or false.* Although does not comment on such a case, he seems to assume that (ED) removes the referential indeterminacy of the cardinality operator once and for all. If we really do know what the extension of a concept in general is – and Frege takes that for granted, albeit without any justification – then we ought to be able to distinguish the extension of a first-level concept from the extension of a second-level concept, and the latter from Julius Caesar”.

358 Landini defende a tese da correlação, ou seja, cada conceito de ordem n+1 está correlacionado a um conceito de ordem n. Por fim, conceitos de primeira ordem estão relacionados a extensões.

Na passagem acima, Landini sustenta a tese da identificação das expressões '*o conceito f*' e "*a extensão do conceito f*"[359]. E, apoiando-se na famosa passagem da nota de §68, sustenta a seguinte transformação:

(**Def1**) o número que pertence ao conceito *F* é a extensão do conceito *ser equinumérico ao conceito F*

(**Def2**) o número que pertence à extensão do conceito *F* é a extensão do conceito *ser equinumérico à extensão do conceito F*

Porém, o ponto de Landini é fraco. Esta transformação não depende apenas de questões linguísticas. Frege teria de ter meios dentro da conceitografia para transformar o conceito de segunda ordem de equinumerosidade em um conceito de primeira ordem.

Isto é feito em **GGA** por meio da definição da relação '∩', que seria uma espécie de relação de pertinência. Não há qualquer indicação em **GLA** de que Frege tinha esta relação em mente. Como veremos, ela depende da introdução de uma outra função '\' que funciona como o artigo definido. Mas, a introdução desta função obrigaria Frege a introduzir outro axioma, um análogo do axioma VI de **GGA**, que rege a função '\'[360]. O mais importante é que Frege teria de ter o axioma IV* no sistema, a partir do qual ele provaria o teorema **BB**[361]**.** E deste último, ele poderia chegar a um análogo do teorema 1 de **GGA**

(**T1**) $f(a) \equiv a \cap \varepsilon' f(\varepsilon)$

E a partir de (**T1**) poderia ser provado um análogo do teorema 2 de **GGA**.

(**T2**) $f(a, b) \equiv a \cap (b \cap \alpha' \varepsilon' f(\varepsilon, \alpha))$.

Nenhuma destas provas está aberta a Frege pela falta de IV* ou (**BB**) no seu sistema.

---

359 Esta tese é mencionada por Resnik (1967), defendida por Ruffino (1996, 1998, 2000) e negada por Schirn (1990, 1996b).

360 Na notação de **BS**, o axioma VI seria:

$$\vdash a = \backslash \epsilon'(a = \epsilon)$$

361 Ou introduzir BB como axioma. Mas, como já mencionamos, isto acarretaria problemas no sistema.

Assumamos que o **Axioma V** tem a seguinte forma:

(**Axioma V**)

$$\vdash \varepsilon' f(\varepsilon) \equiv \varepsilon' g(\varepsilon) \equiv \underset{\mathfrak{a}}{\smile} \left(f(\mathfrak{a}) \equiv g(\mathfrak{a})\right),$$

Além disso, suponhamos que a relação de pertinência foi definida da seguinte forma:

(**Pert**)

$$\Vdash \left(a \cap b \equiv \overset{\mathfrak{g}}{\smile} \begin{array}{l} g(a) \\ \llcorner\, b \equiv \varepsilon' g(\varepsilon) \end{array} \right)$$ [362] [363]

Do **Axioma V**, derivaríamos as fórmulas condicionalizadas (usando 52BS, 57BS):

(Va) $$\vdash \begin{array}{l} \varepsilon' f(\varepsilon) \equiv \varepsilon' g(\varepsilon) \\ \llcorner \underset{\mathfrak{a}}{\smile} \left(f(\mathfrak{a}) \equiv g(\mathfrak{a})\right) \end{array}$$

(Vb) $$\vdash \begin{array}{l} f(a) \equiv g(a) \\ \llcorner\, \varepsilon' f(\varepsilon) \equiv \varepsilon' g(\varepsilon) \end{array}$$

A partir de **Pert**, obteríamos também as seguintes fórmulas condicionalizadas

(**P1**) $$\vdash \begin{array}{l} \overset{\mathfrak{g}}{\smile} \begin{array}{l} g(a) \\ \llcorner\, b \equiv \varepsilon' g(\varepsilon) \end{array} \\ \llcorner\, a \cap b \end{array}$$

(**P2**) $$\vdash \begin{array}{l} a \cap b \\ \llcorner \overset{\mathfrak{g}}{\smile} \begin{array}{l} g(a) \\ \llcorner\, b \equiv \varepsilon' g(\varepsilon) \end{array} \end{array}$$

De (**Va**), poderíamos obter a fórmula

$$\vdash \begin{array}{l} f(a) \\ \llcorner\, g(a) \\ \llcorner\, \varepsilon' f(\varepsilon) \equiv \varepsilon' g(\varepsilon) \end{array}$$ [364]

362 Na notação contemporânea: $a \in b \equiv_{def} \exists g(b = \varepsilon' g(\varepsilon) \wedge g(a))$.

363 Esta definição é diferente daquela dada em **GGA**. Como veremos, pela definição de **GGA**, Frege precisa de IVa para provar seu teorema 1, então esta definição não nos serve aqui, uma vez que em **GLA** não há **BB**.

364 Aqui temos um primeiro problema, a saber, '$f(a) \equiv g(a)$' é bem-formada ainda que '$f\Gamma$' e '$g\Gamma$' não sejam conceitos. Porém, para provar esta fórmula, devemos pressupor que '$f\Gamma$' e '$g\Gamma$' sejam conceitos, caso contrário, teríamos fórmulas mal-formadas.

Por contraposição, chegaríamos a

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\!\top\; g(a) \\ \quad\;\; \llcorner\; \varepsilon' f(\varepsilon) \equiv \varepsilon' g(\varepsilon) \\ \;\llcorner\!\!\top\; f(a) \end{array}$$

Generalizando universalmente, inferiríamos

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\top\!\!\top\; \mathfrak{g}(a) \\ \qquad\quad \llcorner\; \varepsilon' f(\varepsilon) \equiv \varepsilon' \mathfrak{g}(\varepsilon) \\ \;\llcorner\!\!\top\; f(a) \end{array}$$

E, novamente, por contraposição, derivaríamos

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\; f(a) \\ \;\llcorner\!\!\top\!\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\top\!\!\top\; \mathfrak{g}(a) \\ \qquad\quad \llcorner\; \varepsilon' f(\varepsilon) \equiv \varepsilon' \mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array}$$

Notemos que o antecedente da fórmula acima corresponde ao fato de que *a* pertence à extensão do conceito *F*. Usando (**P1**) acima, chegaríamos à fórmula

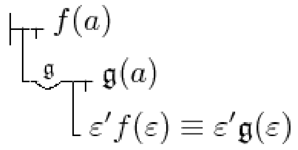
(**x1**)

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\; f(a) \\ \;\llcorner\; a \cap \varepsilon' f(\varepsilon) \end{array}$$

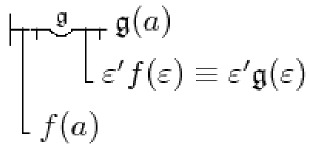
Por outro lado, teríamos a seguinte instância de IIb

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\!\top\; f(a) \\ \quad\;\; \llcorner\; \varepsilon' f(\varepsilon) \equiv \varepsilon' f(\varepsilon) \\ \;\llcorner\!\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\top\!\!\top\; \mathfrak{g}(a) \\ \qquad\quad \llcorner\; \varepsilon' f(\varepsilon) \equiv \varepsilon' \mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array}$$

A fórmula '$\varepsilon' f(\varepsilon) \equiv \varepsilon' f(\varepsilon)$' seria provável do **Axioma V** (ou poderia ser considerada uma instância do axioma 54BS). Portanto, poderíamos eliminá-la, obtendo

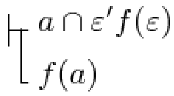


Por contraposição, chegaríamos à fórmula



Notemos que o consequente da fórmula acima corresponde ao fato de que *a* pertence à extensão do conceito *f*. Usando (P2), obteríamos a fómula

(**x2**)



De (**x1**) e (**x2**), Frege poderia derivar apenas a fórmula

(**x3**)

$$\vdash f(a) \leftrightarrow a \cap \varepsilon' f(\varepsilon)$$ [365] [366]

Todavia, desta fórmula, Frege não poderia obter a fórmula

$$\vdash f(a, b) \leftrightarrow a \cap (b \cap (\alpha' \varepsilon' f(\varepsilon, \alpha))$$ [367] [368]

Frege teria de introduzir a seguinte instância do **Axioma V** para relações binárias

365 O símbolo '$\leftrightarrow$' já foi explicado.

366 Não se trata de uma prova no sentido próprio, porque a teoria é inconsistente.

367 Em **GGA**, Frege precisa provar $f(a) = a \cap \varepsilon' f(\varepsilon)$. Como esta fórmula é dada por uma identidade, ele pode utilizar a substituição de idênticos (teorema IIIc de GGA ou 52BS) e provar a fórmula $f(a, b) = a \cap (b \cap \alpha' \varepsilon' f(\varepsilon, \alpha))$. E desta, por substituição de idênticos, ele pode provar $f(a, b, c) = c \cap (a \cap (b \cap \gamma' \alpha' \varepsilon' f(\varepsilon, \alpha, \gamma)))$. E assim por diante.

368 Esta fórmula é necessária para transformar o conceito de número cardinal de **GLA** no conceito de **GGA**.

(V**)

$$\vdash \alpha'\varepsilon' f(\varepsilon, \alpha) \equiv \alpha'\varepsilon' g(\varepsilon, \alpha) \equiv \overset{\mathfrak{b}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile} (f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \equiv g(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))$$ [369]

Um problema que surge neste caso é que não é claro como Frege poderia definir a relação de pertinência para extensões de relações. Deveria ser algo como

$$\Vdash \left(\begin{array}{l} < a, b > \cap c \equiv \top\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\top\!\top\; g(a, b) \\ \qquad\qquad\qquad\quad\; \llcorner\; c \equiv \alpha'\varepsilon' g(\varepsilon, \alpha) \end{array} \right) ?$$ [370]

A teoria das extensões em 1884 seria extremamente problemática. Frege não poderia dar a mesma definição do operador numérico que foi dada em **GGA** em **GLA**[371].

Além disso, independentemente de como operador-cardinalidade é definido, se por meio de extensões de conceitos de segunda ordem ou por meio de extensões de conceitos de primeira ordem, **PH** não pareceria ser provável em **GLA**.

É importante notar que nos respectivos lados direitos de **Axioma V*** e **Axioma V** ocorre a tripla barra:

(Axioma V*) $Ext_Z M(Z) \equiv Ext_Z N(Z) \equiv \overset{\mathfrak{f}}{\smile} (M_\alpha \mathfrak{f}(\alpha) \equiv N_\alpha \mathfrak{f}(\alpha))$

(Axioma V) $\vdash \varepsilon' f(\varepsilon) \equiv \varepsilon' g(\varepsilon) \equiv \overset{\mathfrak{a}}{\smile} (f(\mathfrak{a}) \equiv g(\mathfrak{a}))$

Destes axiomas, obteríamos as fórmulas

(Va*) $\begin{array}{l} \vdash\!\top\; Ext_Z M(Z) \equiv Ext_Z N(Z) \\ \;\;\llcorner \overset{\mathfrak{f}}{\smile} (M_\alpha \mathfrak{f}(\alpha) \equiv N_\alpha \mathfrak{f}(\alpha)) \end{array}$

(Va) $\begin{array}{l} \vdash\!\top\; \varepsilon' f(\varepsilon) \equiv \varepsilon' g(\varepsilon) \\ \;\;\llcorner \overset{\mathfrak{a}}{\smile} (f(\mathfrak{a}) \equiv g(\mathfrak{a})) \end{array}$

---

369 Para cada relação eneária, Frege seria obrigado a introduzir um **Axioma V** correspondente.

370 Landini nos sugeriu a definição da seguinte relação ternária:

$$\Vdash \left(\begin{array}{l} a \cap (b \cap c) \equiv \top\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\top\!\top\; g(a, b) \\ \qquad\qquad\qquad\quad\; \llcorner\; c \equiv \alpha'\varepsilon' g(\varepsilon, \alpha) \end{array} \right)$$

Aqui, a substituição de '*c*' por uma extensão de conceito (unário) seria problemática.

371 Parece existir também um problema com a seguinte identidade: $\varepsilon' f(\varepsilon) \equiv \alpha'\varepsilon' g(\varepsilon, \alpha)$.

Mas, os antecedentes destas fórmulas nem sempre seriam prováveis, devido à falta de **BB** no sistema. É provável em **BS**, como dissemos, a seguinte fórmula: $\vdash\!\smile^{\!\mathfrak{a}}\!- (f(\mathfrak{a}) \equiv f(\mathfrak{a}))$. Disto podemos inferir: $\vdash \varepsilon' f(\varepsilon) \equiv \varepsilon' f(\varepsilon)$

Provavelmente, o seguinte seria um teorema de **BS**: $\vdash M_\alpha f(\alpha) \equiv M_\alpha f(\alpha)$. Quantificando universalmente (segunda ordem), obtemos: $\vdash\!\smile^{\!\mathfrak{f}}\!- (M_\alpha \mathfrak{f}(\alpha) \equiv M_\alpha \mathfrak{f}(\alpha))$. E usando **(Va*)**, inferiríamos: $\vdash Ext_Z M(Z) \equiv Ext_Z M(Z)$.

Mas, se observamos o que Frege escreve em **GLA** (§73), percebemos que a prova sugerida por ele não se seguiria:

> On our definition [of "the Number which belongs to the concept *F*"], what has to be shown is that the extension of the concept "equal to the concept *F*" is the same as the extension of the concept "equal to the concept *G*", if the concept *F* is equal to the concept *G*. In other words: it is to be proved that, for *F* equal *G*, the following two propositions hold good universally:
> if the concept *H* is equal to the concept *F*,
> then it is also equal to the concept *G*;
> and
> if the concept *H* is equal to the concept *G*,
> then it is also equal to the concept *F* (**FA,** pág. 85-6)

Na passagem acima, a partir da hipótese de que os conceitos *F* e *G* são equinuméricos - $F \sim G$ -, Frege sugere que as seguintes fórmulas são prováveis:

$$\vdash\begin{array}{l} H \sim G \\ H \sim F \\ F \sim G \end{array} \qquad\qquad \vdash\begin{array}{l} H \sim F \\ H \sim G \\ F \sim G \end{array}$$[372]

Mas, destas fórmulas, ele não poderia obter a fórmula:

(F)

$$\vdash\begin{array}{l} H \sim F \equiv H \sim G \\ F \sim G \end{array}$$

372 Aqui, estamos pensando na prova de **PH** assumindo que o operador-cardinalidade é definido por meios de extensões de segunda ordem. Se o operador-cardinalidade for definido por meio de extensão de conceitos de primeira ordem, as fórmulas a serem provadas seriam (veja, **GGA**, §64):

$$\vdash\begin{array}{l} a \sim \varepsilon' g(\varepsilon) \\ a \sim \varepsilon' f(\varepsilon) \\ \varepsilon' f(\varepsilon) \sim \varepsilon' g(\varepsilon) \end{array} \qquad\qquad \vdash\begin{array}{l} a \sim \varepsilon' f(\varepsilon) \\ a \sim \varepsilon' g(\varepsilon) \\ \varepsilon' f(\varepsilon) \sim \varepsilon' g(\varepsilon) \end{array}$$

Não obstante, o argumento é o mesmo.

Frege teria de ter (**BB**) na forma:

$$\begin{array}{l} \vdash H \sim F \equiv H \sim G \\ \quad\quad H \sim F \\ \quad\quad H \sim G \\ \quad H \sim G \\ \quad H \sim F \end{array}$$

Mas, (**BB**) não é provável em **BS**, que possivelmente é o sistema lógico de **GLA** e do livro mencionado na carta a Marty. Portanto, Frege não poderia provar a fórmula:

(**F1**)

$$\begin{array}{l} \vdash \overset{\mathfrak{f}}{\smile} (\mathfrak{f} \sim F \equiv \mathfrak{f} \sim G) \\ \quad F \sim G \end{array}$$

O consequente de (**F1**) é uma instância do antecedente de (**Va***). Se (**F1**) fosse provável, então obteríamos a fórmula

(**F3**)

$$\begin{array}{l} \vdash Ext_P(P \sim F) \equiv Ext_P(P \sim G) \\ \quad F \sim G \end{array}$$

Mas, '$Ext_P(P \sim F)$' e '$Ext_P(P \sim G)$' são, respectivamente, os operadores-cardinalidade 'o número que pertence ao conceito F' e o 'o número que pertence ao conceito G'[373].

Outra possibilidade seria a seguinte[374]. Ao invés de ter o **Axioma V**, Frege teria introduzido a relação '$\cap$' como um primitivo lógico regido pelo axioma:

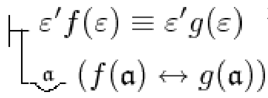
373 Frege poderia ter introduzido o **Axioma V** ou o **Axioma V*** com uma bi-implicação:
(**Axioma V***): $Ext_Z M(Z) \equiv Ext_Z N(Z) \equiv \overset{\mathfrak{f}}{\smile} (M_\alpha \mathfrak{f}(\alpha) \leftrightarrow N_\alpha \mathfrak{f}(\alpha))$
(**Axioma V**): $\vdash \varepsilon' f(\varepsilon) \equiv \varepsilon' g(\varepsilon) \equiv \overset{\mathfrak{a}}{\smile} (f(\mathfrak{a}) \leftrightarrow g(\mathfrak{a}))$
Mas, nenhum destes dois axiomas produziria uma teoria das extensões como a de **GGA**. Todos os problemas já mencionados ocorreriam, exceto que **PH** seria provável. Não acreditamos que isto seja um ponto fraco da nossa interpretação, porque se este tivesse sido o caminho tomado por Frege, ele poderia ter publicado o livro de 1882, logo após a publicação de **GLA**. Frege demorou nove anos para publicar **GGA**, o que fortemente sugere que ele não tinha adicionado nem o **Axioma V**, nem **Axioma V***.

374 Sugerida por Landini.

(**CC**) $\vdash f(a) \equiv a \cap \varepsilon' f(\varepsilon)$[375]

Além disso, seria necessário adicionar o seguinte axioma:

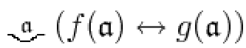
(**Ext**)

 [376]

Inicialmente, Landini acreditava que **BS** + (**CC**) + (**Ext**) provaria **PH** e evitaria os problemas mencionados – como, por exemplo, adição de uma série de Axiomas V para cada relação eneária. De acordo com ele, a partir de (**CC**), Frege poderia provar, de forma análoga a **GGA**, a seguinte fórmula:

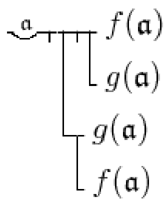
(**CC2**) $f(a, b) \equiv a \cap (b \cap \alpha' \varepsilon' f(\varepsilon, \alpha))$[377]

Landini não tem razão quando afirma que de (**CC**) é possível provar (**CC2**) de forma análoga a **GGA**, porque o antecedente de (**Ext**) exige que '*f*' e '*g*' sejam conceitos, caso contrário, a fórmula



é mal-formada.

Lembremos novamente que esta fórmula é equivalente a



Mas, então, devemos considerar '*f*' em (**CC**) como sendo um conceito também, caso contrário, haveria uma estranha assimetria entre os axiomas[378]. Todavia, neste caso, a prova de (**CC2**) falha. Assumamos, (**CC**). Seguindo a prova de **GGA**, temos a seguinte instância de 52BS:

375 À primeira vista, esta fórmula é bem formada, mesmo se '*f*' for uma função, mas não um conceito.

376 Se o antecedente fosse formulado com a tripla barra, então o **PH** não seria provável.

377 E fato, ele acreditava que poderiam ser provadas todas as fórmulas (**CC**) para cada relação eneária.

378 Landini nos concedeu este ponto.

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\top\; f(a,b) \equiv a \cap (b \cap \grave{\alpha}\grave{\varepsilon} f(\varepsilon,\alpha))^{379} \\ \quad\;\; \llcorner\; f(a,b) \equiv a \cap \grave{\varepsilon} f(\varepsilon, b) \\ \quad \llcorner\; \grave{\varepsilon} f(\varepsilon,b) \equiv b \cap \grave{\alpha}\grave{\varepsilon} f(\varepsilon,\alpha) \end{array}$$

A fórmula '$f(a,b) \equiv a \cap \grave{\varepsilon} f(\varepsilon,b)$' seria uma instância de (**CC**) e, portanto, poderia ser eliminada por meio de *modus ponens*. Contudo, a fórmula

$$\grave{\varepsilon} f(\varepsilon,b) \equiv b \cap \grave{\alpha}\grave{\varepsilon} f(\varepsilon,\alpha)$$

não é uma instância de (**CC**), porque '$\grave{\varepsilon} f(\varepsilon,\xi)$' não é um conceito. Assim, a prova de (**CC2**) análoga a de **GGA** não está aberta. Ou seja, Frege teria de introduzir axiomas (**CC**) para cada relação eneária. O problema não é contornado.

Ademais, Frege não poderia provar a partir de (**Ext**) a seguinte fórmula:

(**Ext2**)

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\; \grave{\alpha}\grave{\varepsilon} f(\varepsilon,\alpha) \equiv \grave{\alpha}\grave{\varepsilon} g(\varepsilon,\alpha) \\ \quad \llcorner\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\; (f(\mathfrak{b},\mathfrak{a}) \leftrightarrow g(\mathfrak{b},\mathfrak{a})) \end{array}$$

Da seguinte instância de (**Ext**)

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\; \grave{\varepsilon} f(\varepsilon,a) \equiv \grave{\varepsilon} g(\varepsilon,a) \\ \quad \llcorner\!\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\; (f(\mathfrak{b},a) \leftrightarrow g(\mathfrak{b},a)) \end{array}$$

e da seguinte instância de 58BS

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\; (f(\mathfrak{b},a) \leftrightarrow g(\mathfrak{b},a)) \\ \quad \llcorner\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\; (f(\mathfrak{b},\mathfrak{a}) \leftrightarrow g(\mathfrak{b},\mathfrak{a})) \end{array}$$

obteríamos (transitividade do condicional) a fórmula

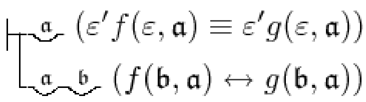
(**L**)

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\; \grave{\varepsilon} f(\varepsilon,a) \equiv \grave{\varepsilon} g(\varepsilon,a) \\ \quad \llcorner\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\; (f(\mathfrak{b},\mathfrak{a}) \leftrightarrow g(\mathfrak{b},\mathfrak{a})) \end{array}$$

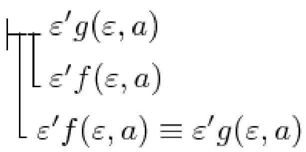
Poderíamos aplicar a regra de confinamento da generalidade ao consequente em (**L**), obtendo a fórmula

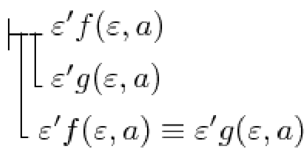
379 Tome a propriedade que ocorre em 52BS como: '$f(a,b) \equiv a \cap \xi$'.

(**M**)



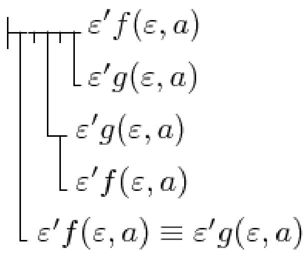
Todavia, o consequente de (**M**) não é uma instância do antecedente de (**Ext**). Além disso, em (**L**), '$\varepsilon' f(\varepsilon, a)$' e '$\varepsilon' g(\varepsilon, a)$' são objetos e, portanto, não poderíamos usar 52BS e 57BS para derivar as fórmulas





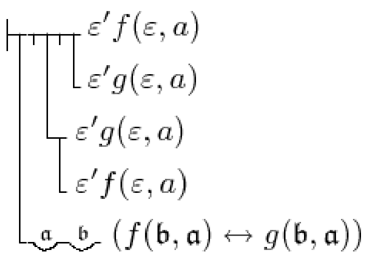
porque elas seriam mal-formadas[380]. Logo, não poderíamos obter

(**N**)



Por conseguinte, não poderíamos chegar à fórmula (usando **M** e **N**)

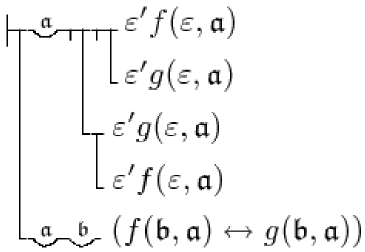
(**O**)



380 Lembremos que o traço de conteúdo deve ser anexado a conteúdos judicáveis.

E, assim, não poderíamos usar (**O**) para obter a fórmula (generalização universal)

(**P**)



Assim, não poderíamos usar (**P**) e (**Ext**) para obter (**Ext2**)[381]. Consequentemente, Frege seria obrigado a introduzir muitos axiomas (**Ext**), um para cada relação eneária. Dada a complexidade dos problemas que surgem com a introdução das extensões de conceitos no sistema lógica de **BS** (o suposto sistema de **GLA** e do livro de 1882), somo levados a acreditar que Frege não tinha nenhuma prova formalizada usando extensões de conceitos em 1884.

Ao tentar dar as provas, principalmente a de **PH** a partir da sua definição explícita**,** ele deve ter percebido todas estas questões. As modificações introduzidas posteriormente no seu sistema foram feitas para adequar a sua teoria das extensões de conceitos. Esta foi a razão pela qual Frege não publicou o livro mencionado em 1882.

Por outro lado, a introdução do **PH** ao sistema lógico de **BS**, não introduz dificuldades formais, no que diz respeito às provas das leis básicas da aritmética (veja capítulo **4**). Nossa hipótese é, portanto, que no livro de 1882 Frege usou este princípio ou como um tipo de definição (mais provável dadas as discussões de **GLA**) ou como um axioma.

Como uma última evidência a favor do nosso ponto, gostaríamos de citar a nota 47 de Scholz que menciona um manuscrito de Frege no qual ele define o operador numérico sem usar extensões de conceitos:

381 O consequente de (**P**) seria, se bem-formado, uma instância do antecedente de (**Ext**). Se isto fosse o caso, obteríamos (**Ext2**) por meio da transitividade do condicional.

N 47 (Kritische Fragen zu „Grundlagen“ §§63-69)
a) „Ist es nötig, die Zahlengleichheit als strenge Identität zu fassen?“ b) „Ist es möglich, einem beurteilbaren Inhalt, der $N_\tau F(\tau)$* enthält, dadurch zu definieren, dass man sagt, er dürfe sich nicht ändern, wenn F durch G ersetzt wird, sobald $F(\varrho) \asymp_\varrho G(\varrho)$[382] gilt? <c) (Die Schwierigkeit der Definition eines Gegenstandes durch ein Wiedererkennungsurteil).> 6. Spalten Quart. Nach 1884 (Rückseite (1)) b) enthält Ausfüt[unen üb. d. Def. Von Gegenständen u. Eine frühe Ausführg. Der Def. Eines Begriffsumfanges
[Hierzu gehörte folgende Anmerkung:] 1) <$N_\tau F(\tau)$ ist eine frühe symbolische Darstellung von Kardinalzahl von F.>

N.47 (Questões críticas sobre “Fundamentos §§63-9)
a) “É necessário conceber a identidade numérica como uma identidade estrita?” b) É possível definir um conteúdo judicável que contém $N_\tau F(\tau)$, dizendo que ele não muda se substituirmos F por G, na medida em que $F(\varrho) \asymp_\varrho G(\varrho)$ vale? c)(A dificuldade da definição de um objeto por meio de um juízo de reconhecimento)

Scholz datou este manuscrito como sendo posterior a **GLA** (depois de 1884). Temos sérias dúvidas sobre esta data, porque, como a nota indica, as discussões presentes nele equivalem às §§ 62-8 de **GLA**[383]. Por que Frege retomaria estas discussões? Ou melhor, de acordo com a nota, Frege parece estar preocupado em responder questões que já tinham sido respondidas em **GLA**. Isto é, no mínimo, estranho.

Burge menciona esta nota e escreve:

> It seems reasonable then to conjecture that in the lost post-*Foundations* manuscript Frege was reconsidering the whole question of whether numbers were objects – whether numerals and expressions like 'the number of Fs' were primitive singular terms in arithmetic and in counting. He seems to have been contemplating a contextual definition of such singular terms (roughly in the spirit of Russell's “no class” theory). Perhaps he also considered an account of the equals sign as indicating not identity but numerical equivalence among concepts (Burge, 1984, pp. 13-4).

Tendo por base a carta a Marty, a hipótese mais plausível é que este manuscrito é de 1883 ou 1884. Provavelmente ele seja uma espécie de inserção a **GLA**. As seções tratadas são exatamente aquelas que poderiam ser excluídas deste livro sem causar qualquer dano para sua compreensão total. De fato, Frege contempla uma definição por abstração (contextual), porque, se nossa hipótese estiver correta, as leis da aritmética foram provadas a partir de **PH** em 1882.

382 Modificamos levemente o símbolo usado.
383 a) equivale à discussão em §63 de **GLA**; b) equivale à discussão §65 deste livro. Lá, elas foram discutidas em termos de direções e **PD**, mas na nota a discussão se dá em termos do operador-cardinalidade e **PH**; c) equivale à discussão em §66.

3.2.
Valores de verdade, Axioma IV e Axioma V

Neste subcapítulo, estaremos preocupados com questões formais relacionadas com a distinção entre sentido e referência, a introdução dos valores de verdade, o **Axioma IV** e a introdução do **Axioma V**[384 385].

Na introdução a **GGAI**, Frege escreve:

> I have justified this more thoroughly in my essay on sense and denotation, mentioned above; here it may merely be mentioned that only in this way can indirect discourse be correctly understood. That is, the thought, which otherwise is the sense of a sentence, in indirect discourse becomes its denotation. How much simpler and sharper everything becomes by the introduction of truth-values, only detailed acquaintance with this book can show. These advantages alone put a great weight in the balance in favor of my own conception, which indeed may seem strange at first sight (**BLA**, pág. 7).

Na seção anterior, apontamos algumas complicações que poderiam ocorrer em um sistema sem os valores de verdade e o Axioma IV (**BB**). Como mostramos, Frege teria de introduzir uma série de **Axiomas V** para obter as extensões de quaisquer relações eneárias.

Além disso, Frege precisa "reduzir" ou correlacionar os conceitos de segunda ordem, que são necessários para provar os axiomas de Peano, a conceitos de primeira ordem, caso contrário, ele teria de adicionar um **Axioma V** para conceitos de segunda ordem.

Em **GGA**, há um único **Axioma V**, o que fortemente sugere que as modificações elaboradas por Frege foram bem-sucedidas em resolver todos os pontos que mencionados anteriormente.

---

384 Talvez o tema mais discutido na Filosofia de Frege tenha sido a distinção entre sentido e referência, mas raramente tais debates são relacionadas com as provas formais em **GGA**. Ruffino (1996, 1997) foi um dos primeiros que atentou para estas relações formais.

385 Há outras questões formais bastantes discutidas sobre a introdução dos valores de verdade que não serão, porém, o principal foco aqui. Com a distinção entre sentido e referência e a introdução dos valores de verdade, Frege pôde caracterizar de forma nítida a diferença entre função e conceito. Além disso, ele pôde distinguir com mais clareza funções de primeira ordem das funções de segunda. A distinção entre conceito e objeto também se torna mais cristalina. Veja, por exemplo, (Ruffino, 1996, cap. V) e (Beaney, 2007).

Em termos de notação simbólica dos primitivos lógicos, o sistema lógico de **GGA** não se diferencia drasticamente de **BS**. Uma primeira mudança é a introdução do símbolo de identidade '=' no lugar da tripla barra '≡'[386]. Outra diferença é a introdução do operador-extensionalidade que é regido pelo **Axioma V**. Frege também introduz um novo símbolo de função '\' que funciona como o artigo definido da linguagem natural. Esta função primitiva é regida por um novo axioma introduzido por Frege em **GGA**.

Por outro lado, semanticamente, os símbolos de Frege mudam drasticamente. A causa disso é a nova interpretação que o traço de conteúdo, agora chamado de horizontal, recebe em **GGA**. Lembremos que no primeiro capítulo foi afirmado que este símbolo desempenhava um papel meramente sintático, sendo aplicado apenas a símbolos que expressam conteúdos judicáveis, a fim de determinar o escopo de atuação dos demais primitivos lógicos.

Esta interpretação do traço de conteúdo em **BS** forçou estipulações condicionais dos demais primitivos de **BS**. Por exemplo, o traço de negação e o traço de condicionalidade só poderiam ser anexados a símbolos que expressassem conteúdos judicáveis também.

Mas, em **GGA**, o horizontal é interpretado como uma função total, estipulada para todos os objetos. Na verdade, o horizontal é um conceito[387]. A estipulação do horizontal é como se segue:

$$—\Delta$$

será o Verdadeiro, se Δ for o verdadeiro; e ele será o Falso, se Δ não for o Verdadeiro[388] [389].

Com esta estipulação, o horizontal será bem-formado com qualquer nome da conceitografia. Em **BS**, como mostramos, se assumíssemos '2' como um nome da conceitografia, o seguinte seria sintaticamente mal-formado

$$—2,$$

porque '2' não expressaria um conteúdo judicável. Porém, em **GGA**,

386 Em nossa visão, esta mudança não é essencial, porque Frege poderia sustentar todos os seus pontos e ainda usar a tripla barra.

387 Conceitos são funções cujos resultados são sempre valores de verdade. Por exemplo, '$\xi + 3 = 5$' é um conceito.

388 Ao invés de denotar conteúdos judicáveis, as sentenças agora referem-se a um dos dois valores de verdade: o Verdadeiro ou o Falso.

389 **GGA**, §5.

—2,

é sintaticamente bem-formado e é o Falso, porque 2 não é o verdadeiro.

Se assumirmos que '2+2=4' é um nome da conceitografia, então

—2+2=4

é o Verdadeiro, porque 2+2=4 é o Verdadeiro. Portanto, podemos afirmá-lo

$$\vdash 2+2=4$$

Por outro lado, sendo '2+2=5' um nome da conceitografia, então

—2+2=5

é o Falso, porque 2+2=5 não é o verdadeiro. O horizontal funcionará como uma espécie de função identidade quando o argumento for um valor de verdade, ou seja, se Δ for um dos dois valores de verdade, então

— Δ= Δ

será o Verdadeiro. Percebamos que

— 2= 2

será o Falso, porque — 2 é o Falso, o qual é diferente de 2.

Esta propriedade do horizontal será importante para a expressão do Axioma IV de **GGA**.

Devido ao horizontal, o traço de negação também é transformado em uma função total (conceito). A estipulação do traço de negação em **GGA** é como se segue:

$$\top \Delta$$

será o Verdadeiro, se —Δ for o Falso. Por outro lado, ele será o Falso, se —Δ for o Verdadeiro. Em última análise,

$$\top \Delta$$

será o Verdadeiro, se Δ não for o Verdadeiro; e ele será o Falso, se Δ for o Verdadeiro[390]. Diferentemente de **BS**, onde o símbolo

$$\top 2$$

era mal-formado, em **GGA**, este símbolo é bem-formado e será o Verdadeiro. Portanto, podemos afirmá-lo

$$\vdash\!\top 2$$ [391]

390 **GGA**, §6.

391 Isto pode ser interpretado como "2 não é o Verdadeiro".

Por outro lado, se '2+2=4' for um nome da conceitografia, então

$$\BGnot\ 2+2=4$$

será o Falso, porque 2+2=4 é o Verdadeiro. Se '2+2=5' for um nome da conceitografia, então

$$\BGnot\ 2+2=5$$

será o Verdadeiro, já que 2+2=5 é o Falso.

O traço de condicionalidade também é transformado em uma função (relação[392]) total por causa do horizontal. A estipulação do traço de condicionalidade é como se segue:

$$\BGconditional{\Delta}{\Gamma}$$

será o Falso, se Δ for o verdadeiro e Γ não for o Verdadeiro. Em todos os outros casos,

$$\BGconditional{\Delta}{\Gamma}$$

será o Verdadeiro[393].

Em **BS**, o seguinte símbolo

$$\BGconditional{2}{3}$$

é mal-formado, contudo em **GGA**, devido ao horizontal, ele é bem-formado e é o Verdadeiro, porque 2 não é o verdadeiro. Portanto, podemos afirmá-lo

(i)

$$\BGassert\BGconditional{2}{3}$$

Notemos também que o seguinte denota o verdadeiro

$$\BGconditional{3}{2}$$

392 Relações são funções binárias cujos resultados são sempre valores de verdade para quaisquer argumentos. Por exemplo: $\xi < \zeta$.

393 **GGA**, 12.

E, assim, também podemos afirmá-lo

(ii)

$$\vdash\!\!\!\begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array}$$

Em §7 de **GGA**, Frege estipula o significado da identidade. De acordo com ele,

“$\Gamma = \Delta$”

denotará o Verdadeiro, se Γ é a mesma coisa que Δ. Em todos os outros casos, ele denotará o Falso[394]. Assim,

“2=1+1”

denotará o verdadeiro, porque “2” e “1+1” referem-se ao mesmo objeto, o número 2. Por outro lado,

“2=4”

denotará o Falso, porque “2” e “4” referem-se a objetos diferentes, o primeiro referindo-se ao número 2, o segundo, ao número 4.

Em **BS** (e **GLA**), não é totalmente claro se identidades do tipo

“2=(2+2=4)”

são bem-formadas, mas, em **GGA**, elas são e, no caso em questão, ela denota o Falso, porque “2” denota o número 2 e “2+2=4” denota o Verdadeiro.

Devido ao horizontal, o quantificador universal pode ser aplicado a qualquer tipo de expressão, sem incorrer na formação de fórmulas mal-formadas no sistema. Lembremos que o seguinte é mal-formado em **BS**

“$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{a} + 2$“

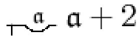
Isto é bem-formado em **GGA** e denota o Falso, pois Frege estipula a generalidade como se segue:

> “$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \Phi(\mathfrak{a})$” is to denote the True if for every argument the value of the function $\Phi(\xi)$ is the True, and otherwise is to denote the False (**BLA**, pág. 42)[395]

394 A identidade é uma relação, ou seja, uma função binária que sempre resulta em um valor de verdade quando saturada.

395 Como em **BS**, o seguinte continua sendo mal-formado: $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, P$. A letra gótica deve sempre ocorrer em alguma fórmula que se segue depois da generalidade.

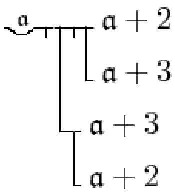
Para o argumento '2', obtemos “2+2”. Isto não denota o Verdadeiro, mas sim o número 4. Portanto, $\smile^{\mathfrak{a}}\; \mathfrak{a}+2$ é o Falso. Assim,



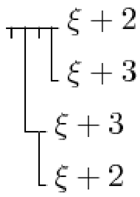
é o verdadeiro e, por conseguinte, podemos afirmá-lo

O seguinte

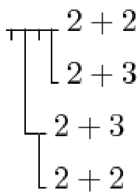
(iii)



é o Verdadeiro, porque para qualquer argumento, a função

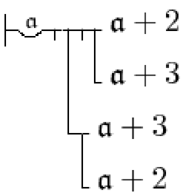


sempre resultará no Verdadeiro, quando saturada. Por exemplo,



é o Verdadeiro. Portanto, podemos afirmar (iii)

(iv)



(iv) implica a não possibilidade de introduzir o **Axioma V** pela fórmula

(V)

$$\vdash \varepsilon' f(\varepsilon) = \varepsilon' g(\varepsilon) = \underset{\smile}{\mathfrak{a}}\ (f(\mathfrak{a}) \leftrightarrow g(\mathfrak{a})),$$

porque, neste caso, todas as funções, que não fossem conceitos, teriam de ter o mesmo percurso de valores. Notemos que (iv) é uma instância do lado direito de (**V**). De (**V**) e (iv), obteríamos

$$\varepsilon'(\varepsilon + 2) = \varepsilon'(\varepsilon + 3)$$ [396]

A introdução do horizontal apenas é insuficiente para produzir uma teoria coerente das extensões (percurso de valores).

Em §11 de **GGA**, Frege introduz a função \ que desempenha um papel central na teoria das extensões de conceitos de Frege, sem a qual alguns dos problemas mencionados na seção anterior ocorreriam. De acordo com Frege, \ substitui o artigo definido da linguagem natural. Se anexarmos o artigo definido 'o' a um predicado *F* que se refere a um conceito sob o qual cai um e apenas um objeto, então a expressão 'o *F*' denotará este objeto. Por exemplo, anexando o artigo definido ao predicado *satélite natural da Terra*, que expressa um conceito sob o qual cai um e apenas um objeto, obtemos a *o satélite natural da Terra*, que denota este objeto, isto é, a Lua.

Nem sempre a anexação do artigo definido a um predicado produz uma expressão (descrição definida) referencial. O exemplo clássico é anexar o artigo definido ao predicado *atual rei da França*, que expressa um conceito sob o qual nada cai, porque não exite mais nenhum rei na França. A descrição definida *o atual rei da França* não denota nenhum objeto. O mesmo ocorre se o predicado expressa um conceito sob o qual cai mais de um objeto. Por exemplo, *o autor do Principia Mathematica* não denota, porque há dois autores: Russell e Whitehead.

Tendo isto em mente, Frege faz a seguinte estipulação da função \ξ

396 Os gráficos das funções '$\xi + 2$' e '$\xi + 3$' são matematicamente diferentes. (**V**) implicaria a identidade de seus gráficos.

> Now of course this not possible, because that equation could be sustained in its general form, but we can serve our purpose by introducing the function
>
> \ξ
>
> with the stipulation that two cases are to be distinguished:
> 1. If to the argument there corresponds an object Δ such that the argument is $\varepsilon'(\Delta = \varepsilon)$, then let the value of the function \ξ be itself;
> 2. If to the argument there does not correspond an object Δ such that the argument is $\varepsilon'(\Delta = \varepsilon)$, then let the value of the function be the argument itself.
> Accordingly \\$\varepsilon'(\Delta = \varepsilon)$=Δ is the True, and "\\$\varepsilon'\Phi(\varepsilon)$" denotes the object falling under concept $\Phi(\xi)$ if $\Phi(\xi)$ is a concept under which falls one and only one object; in all other cases "\\$\varepsilon'\Phi(\varepsilon)$" denotes the same as "$\varepsilon'\Phi(\varepsilon)$". (BLA, pág. 50).

Sob o conceito $\xi + 2 = 5$ cai um objeto que resulta no verdadeiro, o número 3. Se tomarmos a extensão deste conceito, isto é, $\varepsilon'(\varepsilon + 2 = 5)$ e "anexarmos" a função \ a esta extensão, então "\\$\varepsilon'(\varepsilon + 2 = 5)$" denotará este único objeto que cai sob o conceito $\xi + 2 = 5$. Portanto, $\varepsilon'(\varepsilon + 2 = 5)$=3 é o Verdadeiro.

Por outro lado, sob a função $\xi + 2$ caem infinitos objetos, os números naturais. Assim, tomando-se a extensão deste conceito, a saber, $\varepsilon'(\varepsilon + 2)$ e "anexando" a função \ a este percurso de valores, a estipulação de Frege implica que \\$\varepsilon'(\varepsilon + 2) = \varepsilon'(\varepsilon + 2)$.

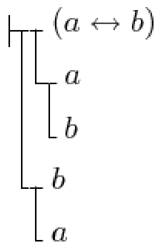
O objetivo de Frege com (2) acima é evitar a formação de nomes sem denotação no sistema. Como afirmamos, na linguagem ordinária, descrições definidas como "o atual rei da França", "o autor do Principia Mathematica", "a raiz quadrada de 2" não denotam. Porém, em **GGA**, todos os termos devem denotar e a estipulação da função \ força esta denotação[397].

397 "Here there is a logical danger. For if we wanted to form from the words "square root of 2" the proper name "the square root of 2" we should commit a logical error, because this proper name, in the absence of further stipulation, would be ambiguous, hence even devoid of denotation. If there were no irrational numbers – as has indeed been maintained – then even the proper name "the positive square root of 2" would be without a denotation, at least by the straight forward sense of the words, without special stipulation. And if we to give this proper name a denotation expressly, the object denoted would have no connection with the formation of the name, and we should not be entitled to infer that was positive square root of 2, while yet we should be only too inclined to conclude just that. This danger about the definite article is here completely circumvented, since "\\$\varepsilon'\Phi(\varepsilon)$" always has denotation, whether the function $\Phi(\xi)$ be not a concept, or a concept under falls no object or more than one, or an concept under which falls exactly one object" (**BLA**, pp. 50-1).

Como mencionamos anteriormente, a introdução das extensões de conceitos e, portanto, do **Axioma V**, forçou as modificações no sistema de **GGA**. A grande questão é como expressar a relação de coextensionalidade que ocorre no lado direito desta lei, evitando a necessidade da introdução de outros Axiomas V.

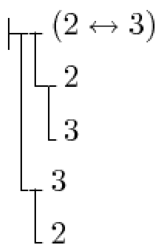
Se a relação de coextensividade fosse dada pela conjunção de implicações, Frege precisaria apenas da fórmula

(**U**)



que é provável em **GGA**. De fato, como apontamos, esta fórmula é provável em **BS**, mas as regras de formação implicam que as letras latinas expressem conteúdos judicáveis. Em **GGA**, devido ao horizontal, esta limitação não existe. O seguinte é bem-formado e verdadeiro no sistema :

(iii)



Mas os antecedentes de (iii) são as fórmulas verdadeiras (i) e (ii). Logo, por *modus ponens*, obtemos

$$\vdash 2 \leftrightarrow 3$$

Se provarmos dentro da conceitografia que as seguintes fórmulas

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} g(a) \\ f(a) \end{array} \qquad\qquad\qquad\qquad \vdash\!\!\begin{array}{l} f(a) \\ g(a) \end{array}$$

então, por meio de instâncias adequadas de **U**, obtemos a fórmula (*modus ponens*)
(iv)

$$\vdash f(a) \leftrightarrow g(a)$$

Generalizando universalmente, chegamos a
(v)

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, f(\mathfrak{a}) \leftrightarrow g(\mathfrak{a}),$$

que é uma instância do lado direito (**V**) acima. De (v) e (**V**), derivaríamos a fórmula

$$\varepsilon' f(\varepsilon) = \varepsilon' g(\varepsilon)$$

Mas, como já indicamos, caso $f\xi$ e $g\xi$ não sejam conceitos, (**V**) implicará que as extensões destas funções são idênticas, resultado não-desejado. Além disso, (**V**) não produzirá o teorema 1 de GGA[398]:

$$f(a) = a \cap \varepsilon' f(\varepsilon),$$

mas apenas

$$f(a) \leftrightarrow a \cap \varepsilon' f(\varepsilon)$$

Mas, deste último, Frege não pode obter o seguinte:

$$f(a, b) \leftrightarrow a \cap (b \cap \alpha' \varepsilon' f(\varepsilon, \alpha)).$$

398 Novamente, o sistema é inconsistente, logo esta afirmação não é correta. Deve-se ter em mente que **V** não produzirá o teorema 1 na forma que Frege imaginava.

Para produzir este teorema seria necessário introduzir um novo **Axioma V**, regendo as extensões de relações e a introdução de uma nova definição de pertinência.

Em **GGA**, do teorema 1, Frege prova, usando as leis da identidade, o teorema 2

$$f(a, b) = a \cap (b \cap \alpha'\varepsilon' f(\alpha, \varepsilon)).$$

E disto, ele poderia provar o Axioma V para relações (veja apêndice 3).

Portanto, expressar a relação de coextensionalidade por meio da conjunção de implicações não produziria a teoria das extensões de conceitos que Frege desejava. Por outro lado, como tentamos mostrar no capítulo **2**, Frege não dispõe de meios para obter uma equivalência por meio da identidade, quando provamos

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top g(a) \\ \quad\llcorner f(a) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \vdash\!\!\top f(a) \\ \quad\llcorner g(a) \end{array}$$

O sistema lógico de **BS** não lhe permite produzir a fórmula

$$\vdash f(a) \equiv g(a)$$

Como tentamos argumentar, Frege não poderia introduzir nem **IV***, nem **BB** no sistema sem causar problemas. Em nossa visão, o principal objetivo da distinção entre sentido e referência foi motivada para justificar a introdução do Axioma IV em **GGA**. Em "*Über Sinn und Bedeutung*" (1892), Frege exclui o pensamento como sendo a referência das sentenças, porque, se isto fosse o caso, existiriam inúmeras sentenças que falsificariam tanto o Axioma IV, quanto o teorema IVa de **GGA**[399].

399 As outras possíveis referências, tais como estado de coisas e as próprias sentenças, também falsificariam o Axioma IV e o teorema IVa. Intuitivamente, 2+2=4 e 3+3=6 e ~3+3=6 não parecem designar os mesmos estados de coisas ou sentenças. Isto falsificaria o Axioma IV.

Descartados os pensamentos, Frege teria de encontrar algo que fosse a referência de sentenças, caso contrário, ele não poderia ter a equivalência na forma de identidade. Esta referência devia ter a propriedade de não falsificar o seu axioma IV e o teorema IVa[400]. Em nossa visão, a única possibilidade reside nos valores de verdade.

Toda sentença significativa terá um valor de verdade associado a ela[401]. E, classicamente, há apenas dois valores de verdade: o Verdadeiro e o Falso. Dadas duas sentenças significativas *P* e *Q*, apenas uma das duas possibilidades ocorre: ou *P* e *Q* têm o mesmo valor de verdade ou *P* e *Q* não têm o mesmo valor de verdade. Isto é justamente a expressão do axioma IV de **GGA**:

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\, (-\, a) = (-\, b) \\ \quad\llcorner\!\top\, (-\, a) = (\top\, b) \end{array}$$

O horizontal se faz necessário na expressão do Axioma IV, porque, caso contrário, haveria instâncias que o falsificariam. Ou seja, se o axioma IV fosse

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\, a = b \\ \quad\llcorner\!\top\, a = \top\, b \end{array}$$

então, assumindo que '2' e '3' sejam nomes da conceitografia, a seguinte instância é falsa

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\, 2 = 3 \\ \quad\llcorner\!\top\, 2 = \top\, 3 \end{array}$$

pois, seria provável em **GGA** a fórmula

$$\vdash\!\top\, 2 = \top\, 3,$$

uma vez que 2 não é o Falso. Logo, por *modus ponens*, obteríamos

$$\vdash 2 = 3.$$

400 Em nossa visão, o objetivo de Frege era ter IVa ou na forma de um axioma ou na forma de um teorema. A introdução do axioma IV como axioma foi simplificar o sistema.

401 Entendemos uma sentença significativa aquela que não tem nenhum termo não-referencial ocorrendo nela.

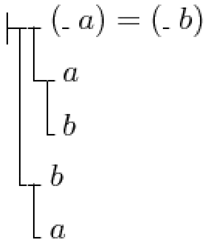
Porém, 2=3 é o Falso. Com o horizontal na expressão de IV, isto não ocorre. O antecedente continuaria sendo provável

$$\vdash\!\!\top\ (\text{-}\ 2) = (\top\ 3)$$

já que (-2) é o Falso e $\top\ 3$ é o Verdadeiro. Não obstante, agora, o consequente é verdadeiro, porque (-2) é o Falso e (-3) é o Falso.

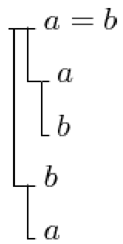
A partir do axioma IV, Frege obtém o teorema IVa[402]

(IVa)

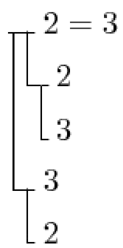


A seguinte fórmula

(vi)



não é provável em **GGA**, sendo falsa para algumas instâncias. Considere a fórmula



---

402 A prova segue a mesma linha das provas dadas no apêndice IV, faltando apenas o último passo que é a aplicação do axioma IV.

Ora, os antecedentes são as fórmulas (i) e (ii). Portanto, por *modus ponens*, obteríamos: 2=3, que é o Falso.

Se, dentro da conceitografia, são prováveis as seguinte fórmulas

$$\begin{array}{l}\vdash\!\!\top\, g(a)\\ \quad\llcorner\, f(a)\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l}\vdash\!\!\top\, f(a)\\ \quad\llcorner\, g(a)\end{array}$$

então, usando IVa, obtemos a fórmula

$$\vdash f(a) = g(a)$$

E, quantificando universalmente, derivamos

$$\vdash\!\underset{\smile}{\mathfrak{a}}\, f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})$$

Por causa da introdução dos valores de verdade como objetos, Frege tem a equivalência na forma de identidade. E, por conseguinte, ele pode expressar a **Axioma V** na forma da identidade

(AV)

$$\vdash \grave{\varepsilon} f(\varepsilon) = \grave{\varepsilon} g(\varepsilon) = \underset{\smile}{\mathfrak{a}}\, f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})$$

A partir de (**AV**), usando IIIa (57BS) e IIIc (52BS)[403], Frege obtém as fórmulas condicionalizadas

$$\textbf{(AVa)}\ \begin{array}{l}\vdash\!\!\top\, \grave{\varepsilon} f(\varepsilon) = \grave{\varepsilon} g(\varepsilon)\\ \quad\llcorner\underset{\smile}{\mathfrak{a}}\, f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})\end{array} \qquad\qquad \textbf{(AVb)}\ \begin{array}{l}\vdash\!\!\top\, f(a) = g(a)\\ \quad\llcorner\, \grave{\varepsilon} f(\varepsilon) = \grave{\varepsilon} g(\varepsilon)\end{array}$$

O próximo passo de Frege é "reduzir" o conceito de segunda ordem de equinumerosidade a um conceito de primeira ordem, caso contrário, ele teria de introduzir extensões de conceitos de segunda ordem e um Axioma V regendo este operador-extensionalidade. Esta redução é feita por meio da definição da relação $\xi \cap \zeta$. De acordo com Frege:

403 A diferença entre IIIa e 57BS é que no primeiro temos o símbolo '=' e no último a tripla barra. O mesmo vale para IIIc e 52BS. Continuaremos usando 52BS e 57BS para nos referir a IIIc e IIIa, respectivamente.

It has already been suggested, in §25, that in further developments, instead of second-level functions, we may employ first-level functions. This will now be show. As was indicated then, this is made possible through the functions that appear as arguments of second-level functions being represented by their courses-of-value – though of course not in such a way that they simply give up their places to them, for that is impossible.
In the first instance it is a matter only of designating the value of the function $\Phi(\xi)$ for the argument Δ, I. e., $\Phi(\Delta)$, by means of "Δ" and "$\varepsilon'\Phi(\varepsilon)$". I do so in this way:

"$\Delta \cap \varepsilon'\Phi(\varepsilon)$",

which is to mean the same as [was gleichbedeutend mit] "$\Phi(\Delta)$" (**BLA**, pág. 92).

A definição de Frege é dada pela fórmula

$$\Vdash \backslash\alpha'\left(\begin{array}{l} \top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\, g(a) = \alpha \\ \quad\;\llcorner\, u = \varepsilon' g(\varepsilon) \end{array}\right) = a \cap u$$

A função \ é determinada para todos os seus argumentos, portanto, a definição da relação $\xi \cap \zeta$ também será determinada para todos os argumentos. A relação é expressa pelo seguinte:

$$\backslash\alpha'\left(\begin{array}{l} \top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\, g(\zeta) = \alpha \\ \quad\;\llcorner\, \xi = \varepsilon' g(\varepsilon) \end{array}\right)$$

$\cap$ é uma relação que ocorre entre dois objetos. Além disso, a fórmula

$$\backslash\alpha'\left(\begin{array}{l} \top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\, g(a) = \alpha \\ \quad\;\llcorner\, u = \varepsilon' g(\varepsilon) \end{array}\right)$$

tem a forma "$\backslash\alpha'\Phi(\alpha)$" que, por estipulação, denota "$\alpha'\Phi(\alpha)$" se nenhum ou mais de um objeto caem sob $\Phi(\xi)$ e que denota "Δ", se Δ é o *único* objeto que cai sob $\Phi(\xi)$.

Se existir um objeto Δ tal que

$$\smile^{\mathfrak{g}}\!\!\begin{array}{l} g(\Theta) = \Delta \\ \Gamma = \varepsilon' g(\varepsilon) \end{array}$$ [404]

é o Verdadeiro, mas para todos os demais argumentos o valor da função

$$\smile^{\mathfrak{g}}\!\!\begin{array}{l} g(\Theta) = \xi \\ \Gamma = \varepsilon' g(\varepsilon) \end{array}$$

é sempre o falso, então

$$\backslash\alpha' \left(\smile^{\mathfrak{g}}\!\!\begin{array}{l} g(\Theta) = \alpha \\ \Gamma = \varepsilon' g(\varepsilon) \end{array} \right)$$

é o próprio Δ.

Mas,

$$\smile^{\mathfrak{g}}\!\!\begin{array}{l} g(\Theta) = \Delta \\ \Gamma = \varepsilon' g(\varepsilon) \end{array}$$

será o Verdadeiro, se existir alguma função *g* cuja extensão é Γ e cujo valor para o argumento Θ for o objeto Δ. Agora, assuma que Γ é a extensão da função $f\xi$, isto é, $\varepsilon' f(\varepsilon)$ e Θ é *a:*

$$\smile^{\mathfrak{g}}\!\!\begin{array}{l} g(a) = \Delta \\ \varepsilon' f(\varepsilon) = \varepsilon' g(\varepsilon) \end{array}$$

A definição de Frege junto com **AV** (e com os demais os axiomas do sistema) implicará que Δ somente é *f*(*a*). E, assim,

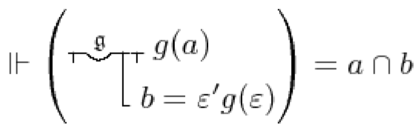
$$\backslash\alpha' \left(\smile^{\mathfrak{g}}\!\!\begin{array}{l} g(a) = \alpha \\ \varepsilon' f(\varepsilon) = \varepsilon' g(\varepsilon) \end{array} \right)$$

é $f(a)$[405].

404 Aqui 'Γ' e 'Θ' designam objetos arbitrários.

Nas discussões sobre a filosofia de Frege, em geral a definição de '$\cap$' é transcrita para a definição contemporânea de $\in$: $a \in b =_{def} \exists g(b = z'g(z) \wedge g(a))$. Mas isto é equivalente na conceitografia à seguinte expressão

(Pert1)

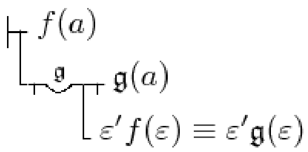


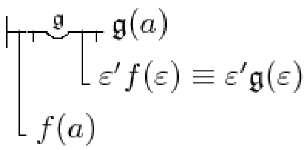
O problema é que desta definição junto com o (**AV**) e com os demais axiomas e teoremas do sistema Frege não poderia obter o teorema 1 de **GGA**. Frege pode apenas obter:

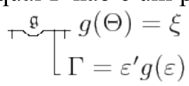
(Z) $(- f(a)) = a \cap \varepsilon' f(\varepsilon)$

(Z1) $f(a) \leftrightarrow \varepsilon' f(\varepsilon)$

Mostraremos a prova de (**Z**) e onde ela falha em produzir o teorema 1. Já indicamos na seção anterior que (**Pert 1**) produzirá as fórmulas:





405 Frege também estipula o caso no qual Γ não é um percurso de valores: "I, however, Γ is not a course-of-values, then the function  has the False as value for every argument, and in that case our stipulation is to be drawn upon, that "$\backslash\Lambda$" is to denote "Λ" itself if there exists no object Δ such that Λ is the course-of-values $\varepsilon'(\Delta = \varepsilon)$. Accordingly, if Γ is not a course-of-values, "$\Theta \cap \Gamma$" denotes the course-of-values of a function whose value for every argument is the False: thus, $\varepsilon'(_{\top}\ \varepsilon = \varepsilon)$.

Temos a seguinte instância do teorema IVa

$$
\begin{array}{l}
\vdash\!\top\!\top\; (-\, f(a)) = \left(\top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\!\top\; \begin{array}{l} \mathfrak{g}(a) \\ \varepsilon' f(\varepsilon) \equiv \varepsilon' \mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array} \right) \\
\quad f(a) \\
\quad \top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\!\top\; \begin{array}{l} \mathfrak{g}(a) \\ \varepsilon' f(\varepsilon) \equiv \varepsilon' \mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array} \\
\quad \top\!\top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\!\top\; \begin{array}{l} \mathfrak{g}(a) \\ \varepsilon' f(\varepsilon) \equiv \varepsilon' \mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array} \\
\quad f(a)
\end{array}
$$

Por *modus ponens*, obtemos

(Z')

$$
\vdash (-\, f(a)) = \left(\top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\!\top\; \begin{array}{l} \mathfrak{g}(a) \\ \varepsilon' f(\varepsilon) \equiv \varepsilon' \mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array} \right)
$$

As regras de **GGA** não permitem, em geral, eliminar o horizontal de -*f*(*a*). O horizontal funcionará como uma identidade, somente se o argumento for um valor de verdade. Assim, o seguinte não é um teorema de **GGA**

$$\vdash a = -a.$$

Mas, se $f\xi$ for uma função, mas não um conceito, então temos que

$$\vdash\!\top\; f(a) = (-\, f(a))$$

Portanto, usando substituição de idênticos o máximo que podemos obter de (Z') é a fórmula:

$$\vdash (-\, f(a)) = a \cap \varepsilon' f(\varepsilon)$$

Por outro lado, a seguinte fórmula é um teorema de **GGA**

$$\vdash (-\,(a=b) = (a=b))$$ [406]

Este teorema diz que o valor de verdade de $-(a=b)$ é idêntico ao valor de verdade de $(a=b)$. A definição da relação de "pertinência" de **GGA** foi produzida para permitir a aplicação deste teorema acima. Para a prova do teorema 1 precisamos introduzir o axioma IV

(VI)

$$\vdash a = \backslash\varepsilon'(a=\varepsilon)$$ [407]

Deste axioma, usando (**AVa**), (57BS), Frege obtém a fórmula

$$\vdash \begin{array}{l} a = \backslash\varepsilon' f(\varepsilon) \\ \smile^{\mathfrak{a}}\; f(\mathfrak{a}) = (a = \mathfrak{a}) \end{array}$$

A prova do teorema 1 é como se segue:

Da seguinte instância de (**AVb**)

$$\vdash \begin{array}{l} f(a) = g(a) \\ \varepsilon' f(\varepsilon) = \varepsilon' g(\varepsilon) \end{array}$$

e da seguinte instância de 52 BS

$$\vdash \begin{array}{l} \neg\, g(a) = b \\ \quad \neg\, f(a) = b \\ f(a) = g(a) \end{array}$$

obtemos, por meio da transitividade do condicional, a fórmula

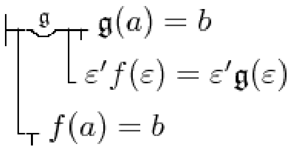
$$\vdash \begin{array}{l} \neg\, g(a) = b \\ \quad \varepsilon' f(\varepsilon) = \varepsilon' g(\varepsilon) \\ \neg\, f(a) = b \end{array}$$ [408]

406 Teorema IIIi de **GGA**.

407 A estipulação da função \ garante a verdade deste axioma.

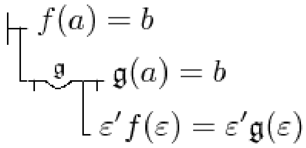
408 Aplicamos aqui a permutação dos antecedentes (veja capítulo 4).

Aplicando o confinamento da generalidade ao condicional, derivamos a fórmula

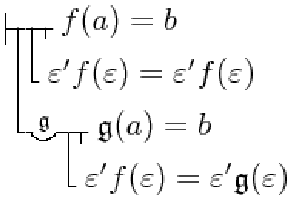


Por contraposição, obtemos

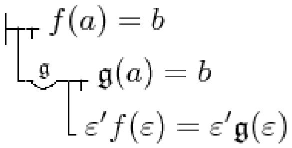
(A)



Por outro lado, do axioma IIb, temos a seguinte instância

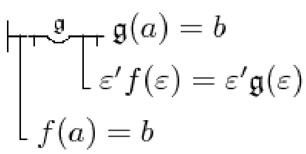


Mas, como temos $\vdash \varepsilon' f(\varepsilon) = \varepsilon' f(\varepsilon)$ (consequência de **AVa**)[409], podemos eliminá-lo (*modus ponens*). Assim, obtemos



Por contraposição, derivamos a fórmula

(B)



409 Frege afirma que este teorema é uma instância do teorema IIIe: *a*=*a*

De (**A**) e (**B**) e teorema IVa, inferimos

$$\vdash \left(\begin{array}{l} \top\!\smile^{\mathfrak{g}}\!\top\; \mathfrak{g}(a) = b \\ \qquad \llcorner\; \varepsilon' f(\varepsilon) = \varepsilon' \mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array} \right) = (-\,(f(a) = b))$$ [410]

Usando o axioma substituição de idênticos (57BS) e o teorema IIIi, Frege elimina o horizontal de "-(*f*(*a*)=*b*)", obtendo a fórmula

$$\vdash \left(\begin{array}{l} \top\!\smile^{\mathfrak{g}}\!\top\; \mathfrak{g}(a) = b \\ \qquad \llcorner\; \varepsilon' f(\varepsilon) = \varepsilon' \mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array} \right) = (f(a) = b)$$

Quantificando universalmente, obtemos

(**C**)

$$\vdash\!\smile^{\mathfrak{a}}\!- \left(\begin{array}{l} \top\!\smile^{\mathfrak{g}}\!\top\; \mathfrak{g}(a) = \mathfrak{a} \\ \qquad \llcorner\; \varepsilon' f(\varepsilon) = \varepsilon' \mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array} \right) = (f(a) = \mathfrak{a})$$

(**C**) é uma instância do consequente do teorema VIa. Assim, por meio das substituições relevantes das letras latinas e *modus ponens*, obtemos a fórmula

$$\vdash f(a) = \backslash\alpha' \left(\begin{array}{l} \top\!\smile^{\mathfrak{g}}\!\top\; \mathfrak{g}(a) = \alpha \\ \qquad \llcorner\; \varepsilon' f(\varepsilon) = \varepsilon' \mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array} \right)$$

Entretanto, o lado direito desta fórmula é equivalente à formula $a \cap \varepsilon' f(\varepsilon)$. Por substituição de idênticos (57BS) e *modus ponens*, obtemos o teorema 1:

(T1)

$$\vdash f(a) = a \cap \varepsilon' f(\varepsilon)$$

410 Isto é, o teorema IVa é fundamental para a prova do teorema 1.

Com o **T1** a sua disposição, Frege prova o teorema 2 de **GGA d**a seguinte forma: seja a seguinte instância de 52BS

$$
\begin{array}{l}
\vdash\!\!\top\!\!\top f(a,b) = a \cap (b \cap \alpha'\varepsilon' f(\varepsilon,\alpha)) \\
\quad \llcorner f(a,b) = a \cap \varepsilon' f(\varepsilon,b) \\
\llcorner \varepsilon' f(\varepsilon,b) = b \cap \alpha'\varepsilon' f(\varepsilon,\alpha)
\end{array}
$$

Os dois antecedentes da fórmula são instâncias de **T1.** Portanto, podemos eliminá-las por meio de *modus ponens*. Assim, derivamos

(T2)

$$\vdash f(a,b) = a \cap (b \cap \alpha'\varepsilon' f(\varepsilon,\alpha))$$

Por meio de substituição de idênticos (57BS) e **T2**, Frege poderia provar o seguinte:

(T3)

$$\vdash f(a,b,c) = a \cap (b \cap (c \cap \gamma'\alpha'\varepsilon' f(\varepsilon,\alpha,\gamma)))$$

Frege poderia provar teoremas análogos para todas as relações. Além disso, por causa destes teoremas, Axiomas V poderiam ser derivados no sistema para todas as relações[411].

Dispondo de **T1** e **T2**, Frege pôde justificar a sua redução de funções de segunda ordem a funções de primeira ordem. Mostramos no capítulo **2**, por exemplo, que o conceito de uma relação *f* ser funcional é de segunda ordem, dada pela fórmula:

$$
\begin{array}{l}
\smile^{\mathfrak{e}}\smile^{\mathfrak{b}}\!\top\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\top \mathfrak{a} \equiv \mathfrak{e} \\
\qquad\qquad\quad \llcorner f(\mathfrak{b},\mathfrak{a}) \\
\qquad\quad \llcorner f(\mathfrak{b},\mathfrak{e})
\end{array}
$$

Em **GGA**, o conceito de *ser funcional* é de primeira ordem. De acordo com Frege, a expressão *q é funcional* é definida pela fórmula:

---

411 Veja o apêndice 3 para a prova do Axioma V para relações binárias.

$$\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\begin{array}{l} \mathfrak{a} \equiv \mathfrak{e} \\ \quad \mathfrak{b} \cap (\mathfrak{a} \cap q) \\ \mathfrak{b} \cap (\mathfrak{e} \cap q) \end{array}$$ [412]

Dada a definição de ser funcional em **GGA**, teorema IVa e **T2**, poderíamos mostrar que

(K)

$$\vdash \left(\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\begin{array}{l} \mathfrak{a} \equiv \mathfrak{e} \\ \quad f(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) \\ f(\mathfrak{b}, \mathfrak{e}) \end{array} \right) = \left(\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\begin{array}{l} \mathfrak{a} \equiv \mathfrak{e} \\ \quad \mathfrak{b} \cap (\mathfrak{a} \cap \alpha'\varepsilon' f(\varepsilon, \alpha)) \\ \mathfrak{b} \cap (\mathfrak{e} \cap \alpha'\varepsilon' f(\varepsilon, \alpha)) \end{array} \right)$$

De acordo com Landini, resultados deste tipo seguir-se-iam dos teoremas **T1**, **T2**, etc. por meio da substituição de idênticos:

> With Basic Law V, Frege arrives at the theorem
> $\vdash \forall f \forall x (x \cap z' fz. = .fx)$
> The following correlation is immediate by substitution of identicals:
> $\vdash \forall f (M_x fx. = .M_x (x \cap z' fz))$ (Landini, 2006, pág. 223).

No entanto, este resultado não seria provável por substituição de idênticos, porque $M_x \Phi(x)$ é uma função de segunda ordem. Mas, a substituição de idênticos exige substituições por meio de funções de primeira ordem. Ou seja, se $a = b$, então qualquer propriedade de primeira ordem que *a* tiver, *b* terá e vice-versa[413]. Uma instância da fórmula mencionada por Landini é:

(L)

$$\vdash (\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, f(\mathfrak{a})) = \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, (\mathfrak{a} \cap \varepsilon' f(\varepsilon))$$

Esta fórmula seria provável em **GGA**, mas não completamente por substituição de idênticos. O teorema IVa desempenha um papel fundamental. A prova seria como se segue:

412 Para quaisquer objetos *a*, *b* e *c* se *b* e *a* (nesta ordem) pertencem à extensão *q* e *b* e *c* (nesta ordem) pertencem à extensão *q*, então *a=c*.

413 O teorema em que Landini deveria estar pensado é o teorema IIIh: $a = b \supset f(a) = f(b)$

De 58Bs, temos

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} f(a) \\ \llcorner\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile} f(\mathfrak{a}) \end{array}$$

Através de **T1** e substituição de idênticos, obtemos

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} a \cap \varepsilon f(\varepsilon) \\ \llcorner\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile} f(\mathfrak{a}) \end{array}$$

Generalizando universalmente, obtemos

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\begin{array}{l} \mathfrak{a} \cap \varepsilon f(\varepsilon) \\ \llcorner\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile} f(\mathfrak{a}) \end{array}$$

Por outro lado, da seguinte instância de 58BS, temos

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} a \cap \varepsilon f(\varepsilon) \\ \llcorner\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile} \mathfrak{a} \cap \varepsilon f(\varepsilon) \end{array}$$

De **T1** e substituição de idênticos, derivamos

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} f(a) \\ \llcorner\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile} \mathfrak{a} \cap \varepsilon f(\varepsilon) \end{array}$$

Generalizando universalmente, inferimos

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\begin{array}{l} f(\mathfrak{a}) \\ \llcorner\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile} \mathfrak{a} \cap \varepsilon f(\varepsilon) \end{array}$$

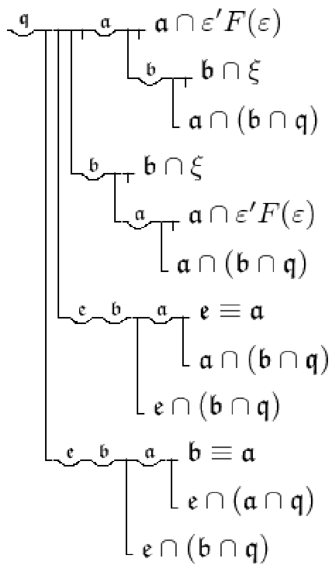
Usando o teorema IVa, chegamos ao resultado desejado. A prova da fórmula (K) acima seguiria o mesmo caminho.

Com a relação '$\cap$' introduzida no sistema[414], todos os conceitos de segunda ordem mencionados no capítulo 2 são reduzidos a conceitos de primeira ordem. Em particular, o conceito *ser equinumérico ao conceito F* é transformado no conceito *ser equinumérico à extensão do conceito F*:

---

414 Junto com T1 e T2 como critério de correção da definição.

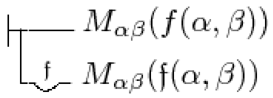
(Q)



Portanto, em **GGA**, o operador-cardinalidade é definido em termos de extensões de conceitos de primeira ordem.

T2 também possibilitou a eliminação do axioma IIb para relações

(IIb*)



Este axioma é necessário para provar alguns teoremas a partir do **PH** (capítulo **4**). Porém, em **GGA**, ele não é afirmado, embora tenha sido implicitamente mencionado. O fato é que com o **T2** a sua disposição, Frege pode transformar $\Phi(a, b)$ em $a \cap (b \cap q)$. Assim, ao invés de quantificar sobre funções binárias, ele quantifica sobre objetos. Anteriormente, expressamos o conceito *ser equinumérico ao conceito F* por meio de uma quantificação de segunda ordem. Na fórmula (**Q**) acima, temos uma quantificação de primeira ordem. Todos os teoremas **T** para cada relação eneária permitiriam a eliminação de todos estes axiomas IIb para relações eneárias.

O único uso necessário da quantificação de segunda ordem em **GGA** é na definição da relação '∩' e na prova do teorema 1. Estranhamente, Frege não elimina a quantificação de segunda ordem na sua definição do ancestral, embora ela seja eliminável e ele parece ser consciente disso[415] [416].

A simplicidade do sistema de **GGA** foi possibilitada pela introdução dos valores de verdade como objetos, o que permitiu justificar a introdução do axioma IV no sistema e deste provar o teorema IVa, que desempenha um papel fundamental na prova do teorema 1 de **GGA**. Com o teorema 1, Frege poderia provar teoremas análogos para relações eneárias. Em particular, ele provou o teorema 2 de **GGA**.

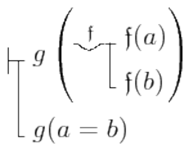
Com isso, ele pôde transformar os conceitos de segunda ordem usados em **BS** e **GLA** em conceitos de primeira ordem. Como tentamos mostrar, nada disto estava aberto a Frege em 1884, quando ele publicou **GLA**. Nossa suposição é que **PH** foi usado nas provas dos axiomas de Peano no livro mencionado na carta a Marty[417].

---

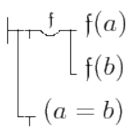
415 Veja **GGA**, §25.

416 Na definição de Predecessor, Frege eliminou a quantificação de segunda ordem em favor da quantificação de primeira ordem (**GGA**, §43).

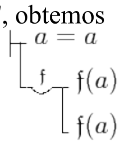
417 A introdução dos valores de verdade como objetos permitiu a eliminação da fórmula $a = a$ como axioma. Frege introduz o seguinte axioma no seu sistema:



Este axioma só parece ser justificado por causa da introdução dos valores de verdade. Em termos de conteúdos conceituais, ele é duvidoso. Substituindo '$g\xi$' por '$\top\ \xi$', obtemos a fórmula:



Por contraposição e substituindo '*b*' por '*a*', obtemos



O antecedente é provável e, portanto, eliminado por modus ponens.

4
Provas a partir do Princípio de Hume sem usar IVa

Nosso objetivo aqui é mostrar que é totalmente possível provar os teoremas mencionados por Frege em **GLA**, inclusive o teorema referido na § 83 que é primordial para a prova do teorema de que todo número natural tem um sucessor, a partir da teoria obtida com a introdução do **Princípio de Hume** (mais definições dos conceitos aritméticos) ao sistema lógico de BS sem usar o Teorema IVa de **GGA**. Seguimos as provas dadas em **GGA**, tomando-se, obviamente, o cuidado de excluir qualquer menção às extensões de conceitos e todo uso do Teorema IVa[418].

Este capítulo está dividido em três partes. Na primeira, apresentamos os axiomas de **BS**, as regras de inferência e os teoremas lógicos que usamos nas provas formais das proposições mencionadas em **GLA**. Em relação às regras de inferência, seguimos o procedimento de Frege em **GGA**, permitindo mais regras de inferência que em **BS**. Em particular, poderíamos excluir o Axioma 28 de **BS**, uma vez que adicionamos uma regra de inferência correspondente, a Regra de Contraposição.

Na segunda parte, introduzimos as definições dos conceitos aritméticos fundamentais. Aqui, preferimos seguir as definições de **GLA** ao invés de **GGA**. As principais diferenças são que não definimos a inversa de uma relação S – como é feito em **GGA** – e definimos quando uma relação S é Um-para-Muitos. Além disso, diferente de **GGA**, onde é definido o mapeamento de um conceito *P* em um conceito *Q* por meio de uma relação *S*, preferimos definir o conceito de correlação entre dois conceitos *P* e *Q* via uma relação *S*[419].

Na terceira parte, provamos os teoremas mencionados nas §§ 75-83 de **GLA**. Observamos que, em **GGA**, as provas de alguns destes teoremas fazem uso do Teorema IVa. O que mostramos é que muitos usos deste teorema em **GGA** são

---

418 Certamente, há diferenças entre as nossas provas e as de **GGA**. Em parte, porque usamos as definições de **GLA** que são ligeiramente diferentes de **GGA**, em parte porque, sem o **Teorema IVa**, não podemos usar alguns expedientes de Frege, em particular, usar o **Teorema 96** de **GGA**: $\forall x(F(x) \equiv G(x)) \supset \sharp_x F(x) = \sharp_x Gx$, onde '$\sharp_x ... x ...$' é o operador-abstração 'o número de...'. O teorema 96 diz que se dois conceitos são coextensivos, então eles têm o mesmo número. O teorema 96 é provável na teoria proposta aqui, mas isto não tem qualquer serventia, uma vez que não é provável na presente teoria o antecedente do **Teorema 96**, porque não temos o **Teorema IVa**.

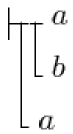
419 Uma relação S mapeia um conceito *P* em um conceito *Q* justamente quando *S* é funcional e todo objeto que cai sob *P* encontra-se na relação *S* com algum objeto que cai sob *Q*.

totalmente dispensáveis, embora ele seja essencial à prova do **Princípio de Hume** a partir da definição explícita em termos de extensões de conceitos[420]. Uma vez que IVa não é provável em **BS** e que Frege já tinha provado as leis básicas da aritmética em 1882, tudo nos leva a crer que estas leis foram provadas a partir do **Princípio de Hume**, adicionado-o como uma espécie de definição (ou como um axioma) a **BS**.

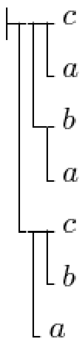
4.1.
Axiomas de Begriffsschrift, regras de inferência e teoremas importantes

4.1.1.
Axiomas de Begriffsschrift

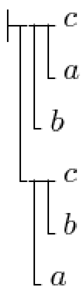
Axioma 1 de BS (§ 14) – (1BS)



Axioma 2 de BS (§ 14) – (2BS)

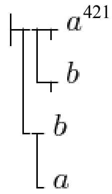


Axioma 8 de BS (§ 16) – (8BS)

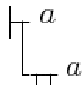


Axioma 28 de BS (§ 17) – (28BS)

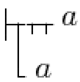
420 Existe um paralelo entre o uso do **Teorema IVa** e o uso das extensões em **GGA**, que não parece ser uma mera coincidência. Como Heck (1993) mostrou, o único uso essencial das extensões de conceitos em **GGA** é na prova do **Princípio de Hume**. O que estamos mostrando aqui é que o único uso essencial do **Teorema IVa** em **GGA1** é justamente na prova do **Princípio de Hume** também. Todos os outros usos são totalmente dispensáveis.

[421]

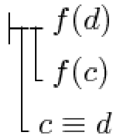
Axioma 31 de BS (§ 18) – (31BS)



Axioma 41 de BS (§ 19) – (41BS)



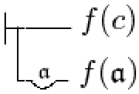
Axioma 52 de BS (§ 20) – (52BS)



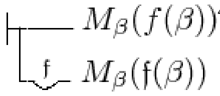
Axioma 54 de BS (§ 21) – (54BS)

$$\vdash c \equiv c$$

Axioma 58 de BS (§ 22) – (58BS1)



Implicitamente, em BS, Frege assume uma instância de segunda-ordem do Axioma 58, cuja forma seria (58BS2)[422]:

[423]

.

Também usaremos a seguinte versão de segunda ordem do Axioma 58 que chamaremos indiscriminadamente de 58BS2:

---

421 Este axioma também é dispensável, porque introduziremos mais adiante uma regra de inferência que corresponde exatamente a este axioma.

422 Veja as provas dos teoremas 77 e 93 de **BS**, por exemplo.

423 Na notação contemporânea: $\forall f M_\beta(f(\beta)) \supset M_\beta(g(\beta))$.

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \text{——}\; M_{\alpha\beta}(f(\alpha,\beta)) \\ \llcorner\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\text{—}\; M_{\alpha\beta}(\mathfrak{f}(\alpha,\beta)) \end{array}$$ [424] [425]

.

4.1.2.

Regras de inferência

Modus Ponens (MP)

De

$$\vdash a$$

e

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} b \\ \llcorner\, a \end{array},$$

inferir

$$\vdash b.$$ [426]

Seguindo Frege, aplicamos uma forma generalizada de MP. Por exemplo, das fórmulas

$$\vdash c$$

e

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} d \\ \llcorner\, c \\ \llcorner\, b \\ \llcorner\, a \end{array},$$

podemos inferir

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} d \\ \llcorner\, b \\ \llcorner\, a \end{array}.$$

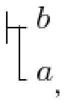
Contraposição (CP)

De

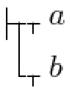
424 Em **GGA**, Frege não faz uso dessa versão de **58BS2**, uma vez que, com a introdução dos percursos de valores, ele é capaz de representar funções de segunda-ordem por meio de funções de primeira ordem. Mas parece razoável assumir que ele tenha feito uso de algo similar a esta lei em 1882, principalmente porque ela é necessária na prova de (**PH6**) e dos teoremas 5 e 6. Veja, por exemplo, o uso de **58BS2** na prova da fórmula 29 abaixo.

425 A propósito, na §25 de **GGA**, Frege reivindica que é feito apenas um único uso de **58BS2** (lei básica IIb), mas isto é incorreto. Ela é usada na prova do teorema 1 (**GGA**, pág. 74) e na prova do teorema 123 (**GGA**, pág. 138), que é um análogo de (**G3**) abaixo.

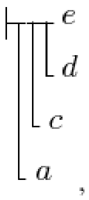
426 Na notação contemporânea: $a, a \supset b \vdash b$.



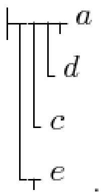
inferir

 [427] [428]

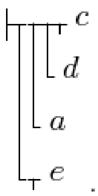
Novamente, seguindo Frege, utilizaremos uma versão generalizada de CP. Por exemplo, da fórmula



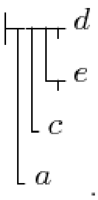
podemos inferir



Ou, então, podemos inferir

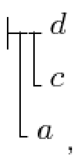


E ainda podemos inferir



Permutação dos Antecedentes (P)

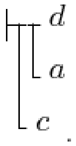
De



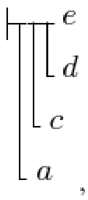
inferir

427 Na notação contemporânea: $a \supset b \vdash \neg b \supset \neg a$.

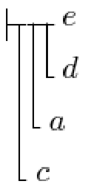
428 Como já mencionamos esta regra corresponde ao **Axioma 28** de BS.

 [429] [430]

Essa regra pode ser generalizada também. Assim, a partir da fórmula

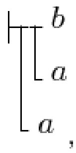


podemos inferir, por exemplo,

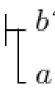
 [431]

Amalgamação de Antecedentes Idênticos (AmI)

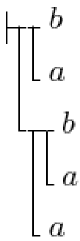
De



inferir

 [432]

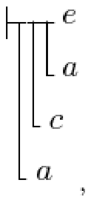
Frege não provou o teorema



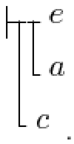
correspondente a esta regra em **BS**, embora o mesmo seja provável.

Como nos casos anteriores, é possível generalizar (AmI). Assim, por exemplo, da fórmula

429 Na notação contemporânea: $(a \supset (c \supset d)) \vdash (c \supset (a \supset d))$.
430 Como já mencionamos, esta regra corresponde ao **Axioma 8** de BS.
431 Veja os **Teoremas 12-17** de **BS**.
432 Na notação contemporânea: $(a \supset (a \supset b)) \vdash (a \supset b)$.

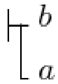


podemos inferir

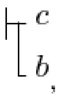


Transitividade do Condicional (TR)

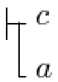
De



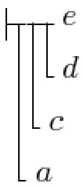
e



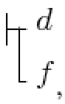
inferir


[433] [434]

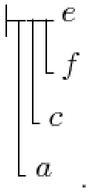
Como anteriormente, generalizações desta regra serão utilizadas nas provas. Por exemplo, de



e



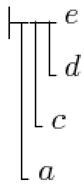
podemos inferir



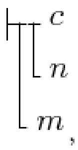
Mais um exemplo: de

433 Na notação contemporânea: $a \supset b, b \supset c \vdash a \supset c$.

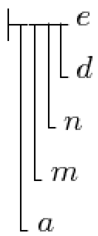
434 Esta regra corresponde ao **Teorema 5** de **BS**.



e



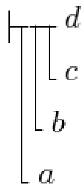
podemos inferir



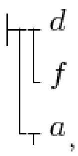
.

Terceiro Método de Inferência de GGA - (TMI)

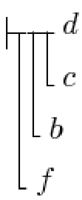
De



e



podemos inferir


[435]

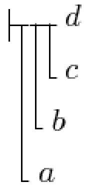
.

Esta regra é um pouco mais complicada que as demais. Quando duas fórmulas têm consequentes idênticos e um dos antecedentes de uma fórmula ocorre com uma negação na outra, podemos juntar em uma única fórmula todos os demais antecedentes que implicam o consequente comum, excluindo o antecedente que é

435 Na notação contemporânea: $(a \supset (b \supset (c \supset d))), (\neg a \supset (f \supset d)) \vdash (f \supset (b \supset (c \supset d)))$.

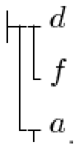
afirmado em uma e negado na outra. No exemplo acima, este antecedente, que é afirmado em uma fórmula, mas negado na outra, é o '*a*'. Para entendermos melhor esta regra, basta ter em mente como ela pode ser derivada das demais acima. Assumamos

(I)



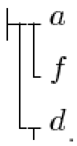
e

(II)



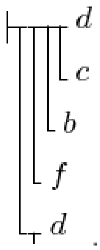
De (II), por meio de (CP), obtemos

(III)



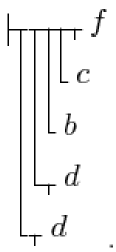
De (I) e (III), por meio de (TR), inferimos

(IV)



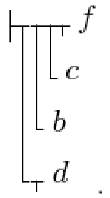
De (IV), por (CP), derivamos

(V)



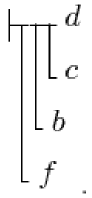
De (V), usando (AmI), obtemos

(VI)



E, finalmente, de (VI), por meio de (CP), obtemos

(VII)



Generalização universal I e II - (GU1, GU2)

(GUI)

De

$$\vdash f(a),$$

inferir

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, f(\mathfrak{a})$$

(GU2)

De

$$\vdash M_{\beta} f(\beta),$$

inferir

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, M_{\beta}\mathfrak{f}(\beta)$$ [436].

E também de

$$\vdash M_{\alpha\beta} f(\alpha, \beta),$$

inferir

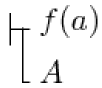
$$\vdash\!\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, M_{\alpha\beta}\mathfrak{f}(\alpha, \beta).$$

436 Confira as provas dos teoremas 91 e 93 de **BS**.

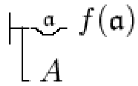
Confinamento da Generalidade ao Consequente I e II– (CGC1, CGC2)

(CGC1)

De

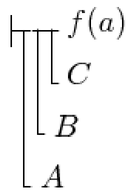
,

podemos inferir

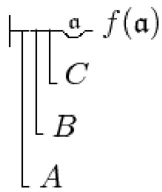
[437],

onde '*a*' não ocorre livre em A[438].

Uma versão generalizada de **CGC1** será aplicada também. Assim, por exemplo, de

,

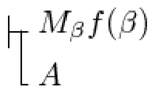
podemos inferir

,

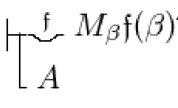
onde '*a*' não ocorre livre nem em A, nem em B e nem C.

(CGC2)

De

,

podemos inferir

[439],

437 Na notação moderna: $A \supset f(a) \vdash A \supset \forall x f(x)$

438 Veja §11 de **BS**.

439 Na notação contemporânea: $A \supset M_\beta(g(\beta)) \vdash A \supset \forall f M_\beta(f(\beta))$.

onde 'f' não ocorre livre em 'A'[440].

Também usaremos a seguinte versão de (CGC2):

De

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} M_{\alpha\beta}f(\alpha,\beta) \\ A \end{array}$$
,

inferir

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!\begin{array}{l} M_{\alpha\beta}\mathfrak{f}(\alpha,\beta) \\ A \end{array}$$
[441]

.

4.1.3.

Teoremas importantes

Teorema 55 de BS - (55BS)

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} d \equiv c \\ c \equiv d \end{array}$$
[442]

Teorema 57 de BS - (57BS)

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} f(c) \\ f(d) \\ c \equiv d \end{array}$$
[443]

Teorema Ie de GGA - (IeGGA)

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} b \\ a \\ b \\ a \end{array}$$
[444]

Frege não provou este teorema em **BS**, embora o mesmo seja provável. Em **BS**, temos o Teorema 27 (27BS)

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} c \\ c \end{array}$$
.

Substituindo-se 'c' por

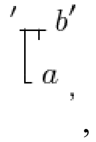
440 Para um exemplo de **CGC2** em **BS**, veja a prova do teorema 91.

441 Versões generalizadas de **CGC2** também serão usadas.

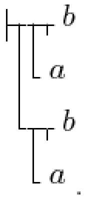
442 Na notação contemporânea: $(c \equiv d) \supset (d \equiv c)$.

443 Na notação contemporânea: $((c \equiv d) \supset (f(d) \supset f(c)))$.

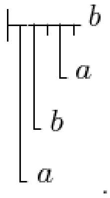
444 Na notação contemporânea: $(a \supset (b \supset \neg(a \supset \neg b)))$.



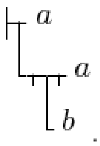
obtemos



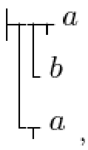
Desta fórmula, por (CP) e (P) , inferimos



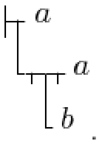
Teorema Ib de GGA - (IbGGA)

 [445]

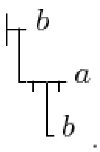
Este teorema também não foi provado em **BS**, não obstante é provável no sistema. Da seguinte instância do 1BS



e (CP), derivamos

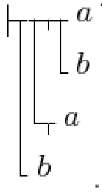


Também é provável em **BS** o seguinte teorema que chamaremos indiscriminadamente de (IbGGA):

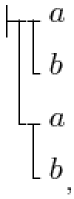
 [446]

445 Na notação contemporânea: $(\neg(b \supset \neg a) \supset a)$.
446 A prova deste teorema em **BS** é usando o **Teorema 38** de **BS** e contraposição.

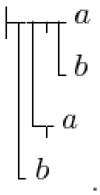
Teorema If de GGA - (IfGGA)

 [447]

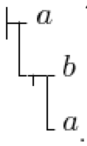
Novamente, este teorema não foi provado em **BS**, contudo é provável no sistema. Da seguinte instância de (27BS)



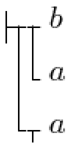
(CP) e (P), inferimos



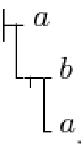
Teorema Id de GGA – (IdGGA)

 [448]

Outro teorema que não foi provado por Frege em **BS**, mas que é provável no sistema. A partir do Teorema 38 de **BS** (38BS)



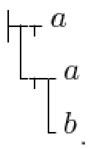
e (**CP**), obtemos



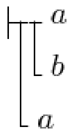
447 Na notação contemporânea: $(b \supset (\neg a \supset \neg(a \supset b)))$.

448 Na notação contemporânea: $(\neg(a \supset b) \supset a)$.

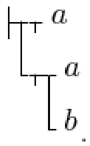
Teorema Ic de GGA - (IcGGA)

 [449]

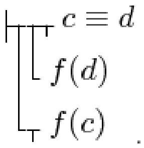
Este teorema também é provável em **BS**. A partir de 1BS



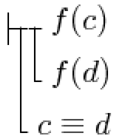
e CP, derivamos



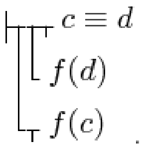
Teorema IIIb de GGA – (IIIbGGA)

 [450]

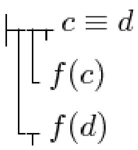
Este teorema também é provável em **BS**. A partir de 57BS



e (**CP**), inferimos

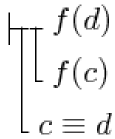


Teorema IIId de GGA - (IIIdGGA)

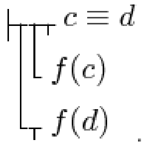
 [451]

Este teorema também é provável em **BS**. A partir de 52BS

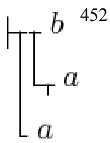
449 Na notação contemporânea: $(\neg(b \supset a) \supset \neg a)$.
450 Na notação contemporânea: $(\neg f(c) \supset (f(d) \supset \neg(c \equiv d)))$.
451 Na notação contemporânea: $(\neg f(d) \supset (f(c) \supset \neg(c \equiv d)))$.



e (CP), derivamos

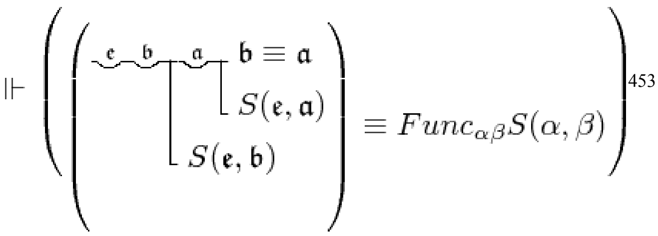


Teorema 36 de BS – (36BS)



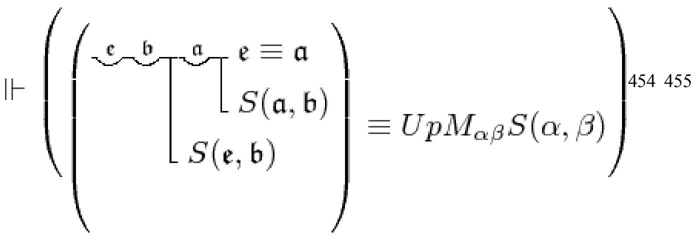
4.2.
Definições dos conceitos aritméticos fundamentais

Definição de uma Relação S ser Funcional ou Muitos-para-Um (BS, §31, GLA, §72):



(A)

Definição de uma Relação S ser Um-para-Muitos (GLA, §72)



(B)

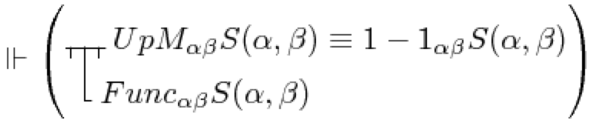
452 Na notação contemporânea: $(a \supset (\neg a \supset b))$.

453 Na notação contemporânea: $Func_{\alpha\beta}S(\alpha,\beta) \equiv_{def} \forall x \forall y \forall z(S(x,y) \wedge S(x,z) \supset y = z)$.

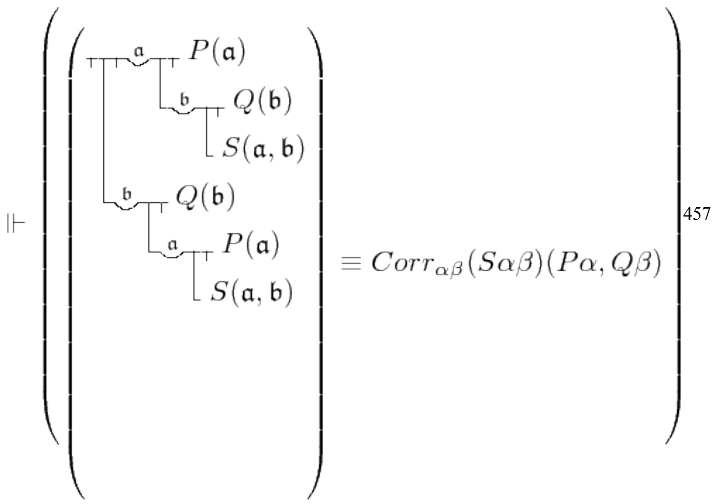
454 Aqui, seguimos a nomenclatura de Russell (1919, pág. 47): “One-many relations may be defined as relations such that, if x has the relation in question to y, there is no other term x' which also has the relation to y”.

455 Na notação contemporânea: $UpM_{\alpha\beta}S(\alpha,\beta) \equiv_{def} \forall x \forall y \forall z(S(x,y) \wedge S(z,y) \supset x = z)$.

A conjunção de (A) e (B) define quando uma relação S é 1-1. Ou seja, uma relação S é 1-1 justamente no caso em que ela é funcional (Muitos-para-Um) e Um-para-Muitos[456]. Em notação Fregeana:



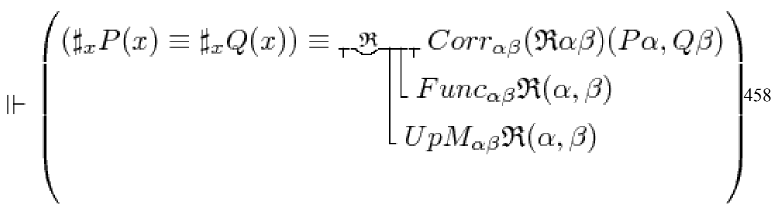
Definição de uma Correlação entre os Conceitos P e Q via uma Relação S (GLA, §71):



[457]

(C)

Princípio de Hume (GLA, §63 e §72):



[458]

---

456 Em **GLA** (§ 72), Frege define: "We have thus seen when the objects falling under the concepts *F* and *G* are correlated with each other by the relation ϕ. But now in our case, this correlation has to be one-one. By this I understand that the following propositions both hold good:
I. If *d* stands in the relation ϕ to *a*, and if *d* stands in the relation ϕ to *e*, then generally, whatever *d*, *a* and *e* may be, *a* is the same as *e*.
II. If *d* stands in the relation ϕ to *a*, and if *b* stands in the relation ϕ to *a*, then generally, whatever *d*, *b* and *a* may be, *d* is the same as *b*.".

457 Dois conceitos *P* e *Q* são correlacionados por uma relação *S* justamente quando para todo objeto *x* que cai sob *P* existe um objeto *y* que cai sob *Q* e *S*(*x*,*y*) e para todo objeto *y* que cai sob *Q* existe um objeto *x* que é *P* e *S*(*x*, *y*). Na notação contemporânea:
$Corr_{\alpha\beta}(S\alpha\beta)(P\alpha, Q\beta) \equiv_{def} [\forall x(P(x)\rightarrow\exists y\ (Q(y)\ \&\ S(x, y))\ \&\ \forall y(Q(y)\rightarrow\exists x(P(x)\ \&\ (S(x, y))]$.

458 Relembrando: o número que pertence ao conceito *P* é igual ao número que pertence ao conceito *Q* justamente quando existe um relação *R* tal que *R* é funcional e Um-para-Muitos e *R* correlaciona os *P*s e os *Q*s.

(PH).

Definição do Número Zero (GLA, §74):

$\Vdash (\sharp_x(\neg\, x \equiv x) \equiv 0)$[459]

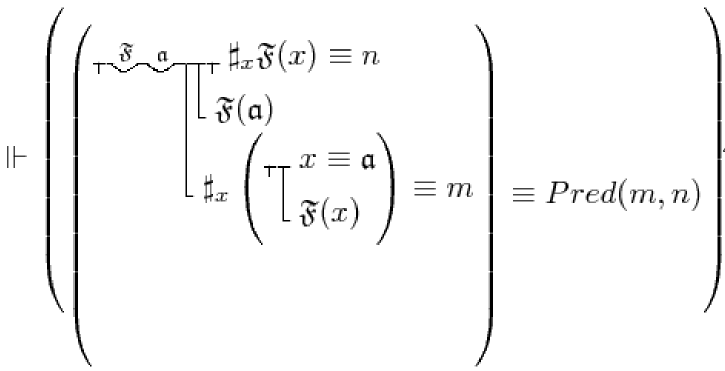
(D)

Definição do Número Um (GLA, §77)

$\Vdash (\sharp_x(x \equiv 0) \equiv 1)$[460]

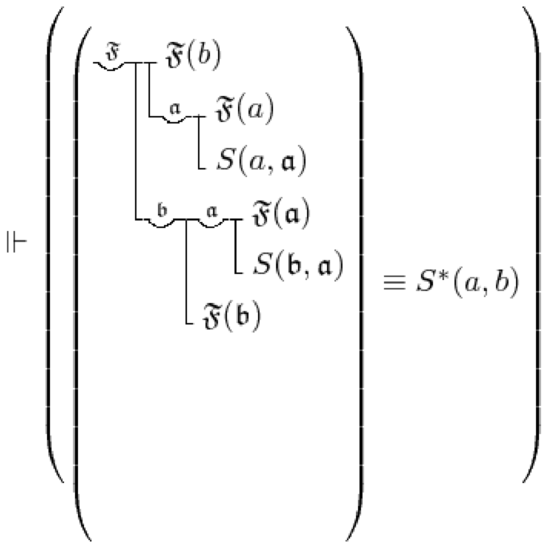
(E)

Definição da Relação 'Sucessor' (GLA, §76):


[461]

(F)

Definição do Ancestral Forte de uma Relação S (BS, §26, GLA, §79):


[462] [463]

(G)

459 Ou seja, 0 é o número que pertence ao conceito 'ser diferente de si mesmo'.

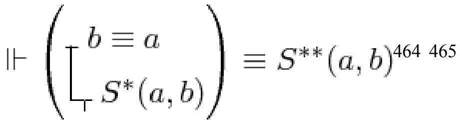
460 Ou seja, 1 é o número que pertence ao conceito 'ser idêntico a 0'.

461 Isto é, *n* é o sucessor de *m* (ou *m* é o predecessor de *n*) justamente quando existem um *conceito F* e um objeto *y* tal que o número que pertence ao conceito *F* é *n* e *y* cai sob o conceito *F* e o número que pertence ao conceito ' cair sob F mas diferente de *y*' é *m.*

462 Na notação contemporânea:
$S^*(a,b) \equiv_{def} \forall F\{[\forall x \forall y(F(x) \wedge S(x,y) \supset F(y)) \wedge \forall x(S(a,x) \supset F(x))] \supset F(b)\}$

463 De acordo com Frege, esta fórmula define o conceito de "*b* vir depois *de a* na relação *f*".

Definição do Ancestral Fraco de uma Relação S **(BS, §29, GLA, §81)**



(H)

Definições de Número Cardinal (GLA, §72) e Número Natural (GLA, §83)

$\Vdash [(\overset{\mathfrak{F}}{\smile}\ \sharp_x\mathfrak{F}(x) \equiv n) \equiv Card(n)]$[466]

(I)

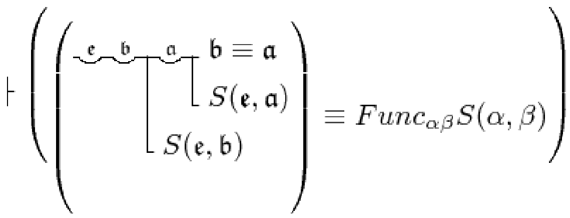
$\Vdash [Pred^{**}(0, n) \equiv Nat(n)]$[467]

(J)

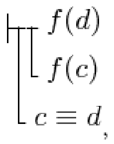
4.3 - Provas

Derivações a partir das Definições

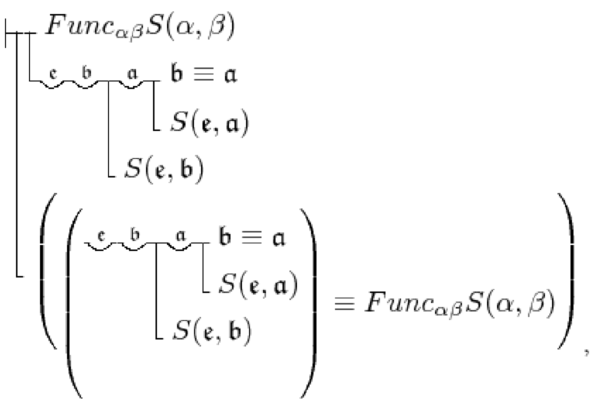
(A)



Usando o 52BS



obtemos



(α1),

464 Na notação contemporânea: $S^{**}(a,b) \equiv_{def} S^{*}(a,b) \vee b = a$

465 Segundo Frege, esta fórmula define o conceito de "*b* pertencer à *f*-série iniciada por *a*" ou "*a* pertencer a *f*-série terminada por *b*".

466 Na notação contemporânea: $Card(n) \equiv_{def} \exists F(\sharp_x F(x) = n)$.

467 Número natural é todo objeto que pertence Pred-série iniciada por 0.

substituindo-se ‘c’ por

“
$$\begin{array}{l}
\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \mathfrak{b}\equiv\mathfrak{a}\\
\qquad\qquad S(\mathfrak{e},\mathfrak{a})\\
\qquad S(\mathfrak{e},\mathfrak{b})
\end{array}$$
”,

‘d’ por ‘$Func_{\alpha\beta}S(\alpha,\beta)$’ e ‘$f\xi$’ por ‘ξ’.

Aplicando MP entre (A) e (α1), derivamos

$$\begin{array}{l}
\vdash Func_{\alpha\beta}S(\alpha,\beta)\\
\quad \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \mathfrak{b}\equiv\mathfrak{a}\\
\qquad\qquad S(\mathfrak{e},\mathfrak{a})\\
\qquad S(\mathfrak{e},\mathfrak{b})
\end{array}$$

(A1).

Usando 57BS:

$$\begin{array}{l}
\vdash f(c)\\
\quad f(d)\\
\quad c\equiv d)
\end{array}$$,

obtemos

$$\begin{array}{l}
\vdash \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \mathfrak{b}\equiv\mathfrak{a}\\
\qquad\qquad S(\mathfrak{e},\mathfrak{a})\\
\qquad S(\mathfrak{e},\mathfrak{b})\\
\quad Func_{\alpha\beta}S(\alpha,\beta)\\
\quad \left(\left(\begin{array}{l}\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \mathfrak{b}\equiv\mathfrak{a}\\ \qquad\qquad S(\mathfrak{e},\mathfrak{a})\\ \qquad S(\mathfrak{e},\mathfrak{b})\end{array}\right)\equiv Func_{\alpha\beta}S(\alpha,\beta)\right)
\end{array}$$

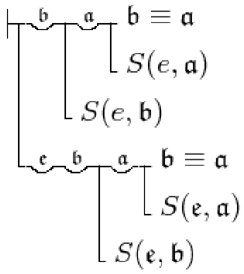
(α2).

De (A) e (α2), aplicando MP, chegamos a

$$\begin{array}{l}
\vdash \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \mathfrak{b}\equiv\mathfrak{a}\\
\qquad\qquad S(\mathfrak{e},\mathfrak{a})\\
\qquad S(\mathfrak{e},\mathfrak{b})\\
\quad Func_{\alpha\beta}S(\alpha,\beta)
\end{array}$$

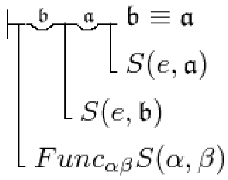
(α3).

Usando a seguinte instância de 58BS1



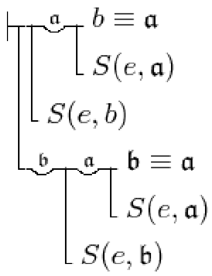
(IIa),

obtemos



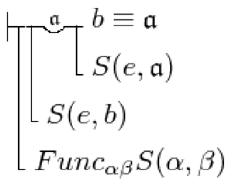
(α4),

por meio de TR entre (IIa) e (α3). Novamente, considerando a seguinte instância de 58BS1



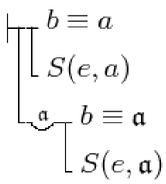
(IIa'),

obtemos



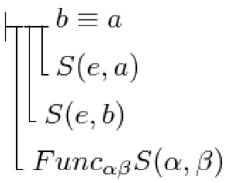
(α5),

por meio de TR entre (IIa') e (α4). Finalmente, da seguinte instância de 58BS1



(IIa''),

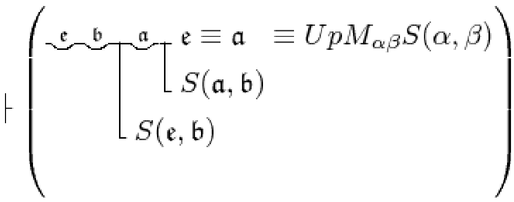
derivamos



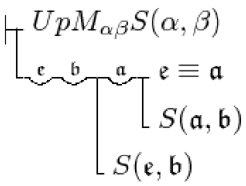
(A2)

por meio de TR entre as fórmulas (IIa") e (α5).

(B)

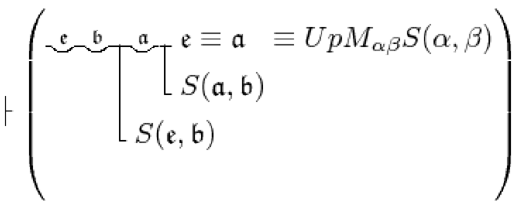


(52BS): ———————————[468]

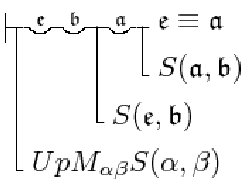


(B1).

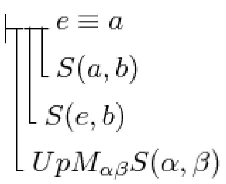
(B)



(57BS): ———————————



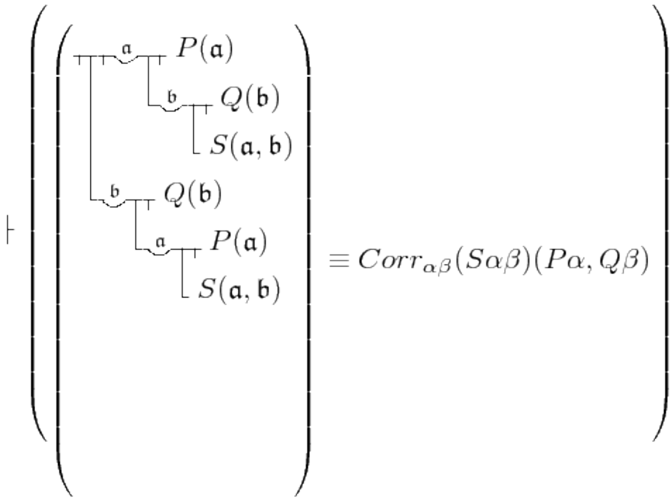
Aplicando 58BS1 (3x), obtemos



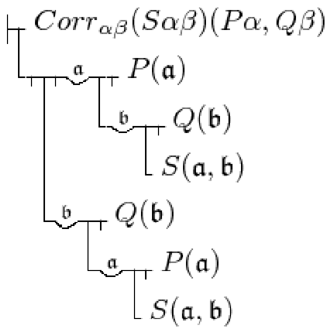
(B2).

468 Este traço indica que aplicamos **MP**.

(C)

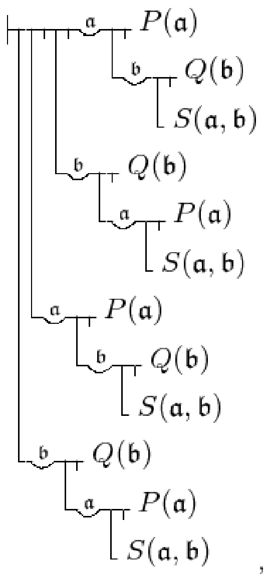


(52BS):



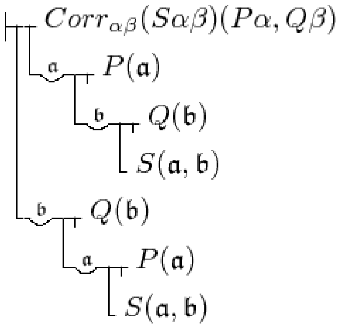
(χ1).

A partir da seguinte instância do teorema IeGGA



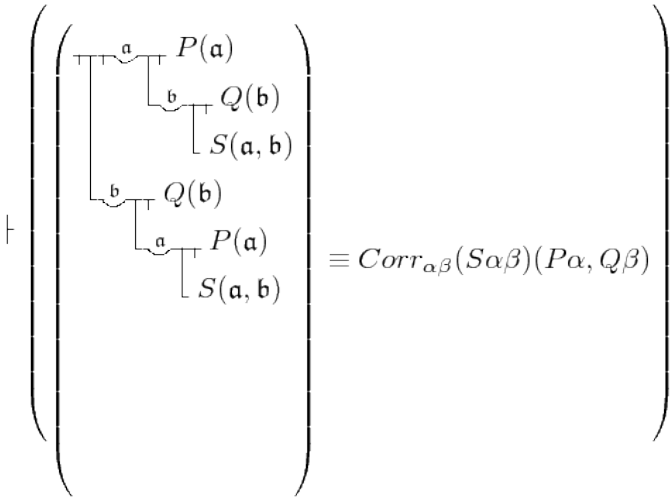
,

(χ1) e TR, derivamos

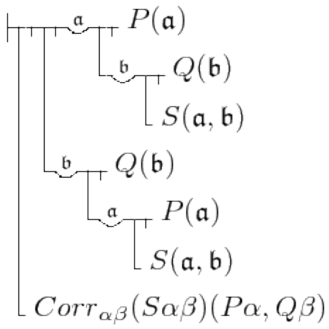


(C1).

(C)

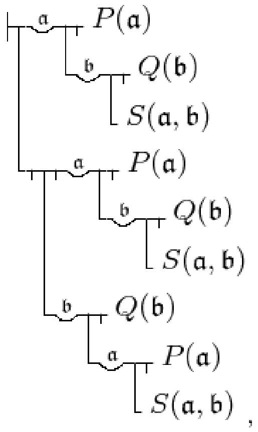


(57BS): ————————

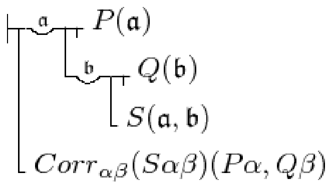


(C2).

A partir da seguinte instância do teorema IbGGA

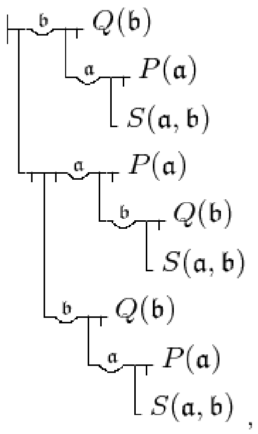


(C2) e TR, temos

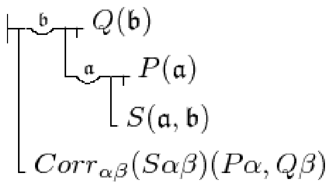


(C3).

A partir de (C2) e da seguinte instância de IbGGA



por meio de TR, obtemos



(C4).

Da seguinte instância de 58BS1

$$\BGassert\BGconditional{\BGquant{\mathfrak{a}}\BGconditional{\BGquant{\mathfrak{b}}\BGconditional{S(\mathfrak{a},\mathfrak{b})}{Q(\mathfrak{b})}}{P(\mathfrak{a})}}{\BGconditional{\BGquant{\mathfrak{b}}\BGconditional{S(a,\mathfrak{b})}{Q(\mathfrak{b})}}{P(a)}}$$

,

(C3) e TR, derivamos

$$\BGassert\BGconditional{Corr_{\alpha\beta}(S\alpha\beta)(P\alpha,Q\beta)}{\BGconditional{\BGquant{\mathfrak{b}}\BGconditional{S(a,\mathfrak{b})}{Q(\mathfrak{b})}}{P(a)}}$$

(C5).

Da seguinte instância de 58BS1

$$\BGassert\BGconditional{\BGquant{\mathfrak{b}}\BGconditional{\BGquant{\mathfrak{a}}\BGconditional{S(\mathfrak{a},\mathfrak{b})}{P(\mathfrak{a})}}{Q(\mathfrak{b})}}{\BGconditional{\BGquant{\mathfrak{a}}\BGconditional{S(\mathfrak{a},b)}{P(\mathfrak{a})}}{Q(b)}},$$

(C4) e TR, obtemos

$$\BGassert\BGconditional{Corr_{\alpha\beta}(S\alpha\beta)(P\alpha,Q\beta)}{\BGconditional{\BGquant{\mathfrak{a}}\BGconditional{S(\mathfrak{a},b)}{P(\mathfrak{a})}}{Q(b)}}$$

(C6).

(PH)

$$\vdash \left((\sharp_x P(x) \equiv \sharp_x Q(x)) \equiv \BGnot\BGquant{\mathfrak{R}}\BGconditional{UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha,\beta)}{\BGconditional{Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha,\beta)}{\BGnot Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(P\alpha,Q\beta)}} \right)$$

(52BS): ————————

$$\BGassert\BGconditional{\sharp_x P(x) \equiv \sharp_x Q(x)}{\BGnot\BGquant{\mathfrak{R}}\BGconditional{UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha,\beta)}{\BGconditional{Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha,\beta)}{\BGnot Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(P\alpha,Q\beta)}}}$$

(PH1).

(PH)

$$\vdash \left((\natural_x P(x) \equiv \natural_x Q(x)) \equiv \overset{\mathfrak{R}}{\smile} \begin{array}{l} Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(P\alpha, Q\beta) \\ Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta) \\ UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta) \end{array} \right)$$

(57BS): ―――――――――――

$$\vdash \begin{array}{l} \natural_x P(x) \equiv \natural_x Q(x) \\ \overset{\mathfrak{R}}{\smile} \begin{array}{l} Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(P\alpha, Q\beta) \\ Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta) \\ UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta) \end{array} \end{array}$$

(PH2).

A partir de (PH1) e CP, chegamos a

$$\vdash \begin{array}{l} \natural_x P(x) \equiv \natural_x Q(x) \\ \overset{\mathfrak{R}}{\smile} \begin{array}{l} Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(P\alpha, Q\beta) \\ Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta) \\ UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta) \end{array} \end{array}$$

(PH3).

A partir de (PH2) e CP, obtemos

$$\vdash \begin{array}{l} \overset{\mathfrak{R}}{\smile} \begin{array}{l} Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(P\alpha, Q\beta) \\ Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta) \\ UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta) \end{array} \\ \natural_x P(x) \equiv \natural_x Q(x) \end{array}$$

(PH4).

Com a seguinte instância de 58BS2

$$\vdash \begin{array}{l} Corr_{\alpha\beta}(S\alpha\beta)(P\alpha, Q\beta) \\ Func_{\alpha\beta}S(\alpha, \beta) \\ UpM_{\alpha\beta}S(\alpha, \beta) \\ \overset{\mathfrak{R}}{\smile} \begin{array}{l} Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(P\alpha, Q\beta) \\ Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta) \\ UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta) \end{array} \end{array} ,$$

(PH4) e TR, derivamos

$$\vdash \begin{array}{l} Corr_{\alpha\beta}(S\alpha\beta)(P\alpha, Q\beta) \\ Func_{\alpha\beta}S(\alpha, \beta) \\ UpM_{\alpha\beta}S(\alpha, \beta) \\ \natural_x P(x) \equiv \natural_x Q(x) \end{array}$$

(PH5).

De (PH5) e CP, obtemos

$\vdash \sharp_x P(x) \equiv \sharp_x Q(x)$
$\quad Func_{\alpha\beta} S(\alpha, \beta)$
$\quad UpM_{\alpha\beta} S(\alpha, \beta)$
$\quad Corr_{\alpha\beta}(S\alpha\beta)(P\alpha, Q\beta)$

(PH6).

(D)

$\vdash (\sharp_x(_{\top}\, x \equiv x) \equiv 0)$

(52BS): ________________

$\vdash F(0)$
$\quad F(\sharp_x(_{\top}\, x \equiv x))$

(D1).

(D)

$\vdash (\sharp_x(_{\top}\, x \equiv x) \equiv 0)$

(57BS): ________________

$\vdash F(\sharp_x(_{\top}\, x \equiv x))$
$\quad F(0)$

(D2).

(E)

$\vdash (\sharp_x(x \equiv 0) \equiv 1)$

(52BS): ________________

$\vdash F(1)$
$\quad F(\sharp_x(x \equiv 0)$

(E1).

(E)

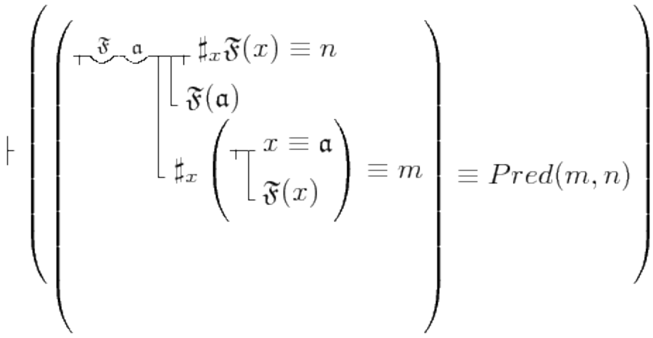
$\vdash (\sharp_x(x \equiv 0) \equiv 1)$

(57BS): ________________

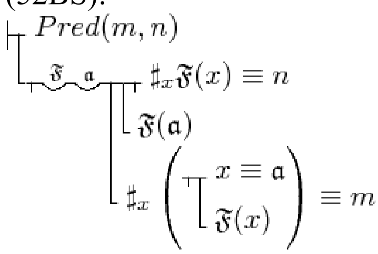
$\vdash F(\sharp_x(x \equiv 0)$
$\quad F(1)$

(E2).

(F)

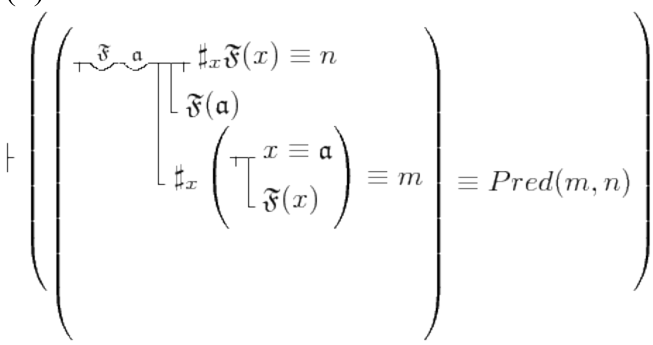


(52BS): ———

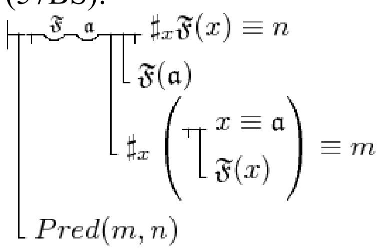


(F1).

(F)

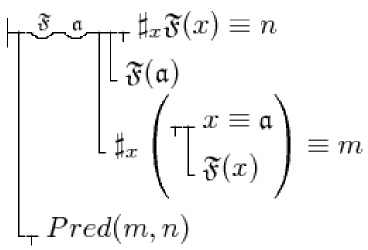


(57BS): ———



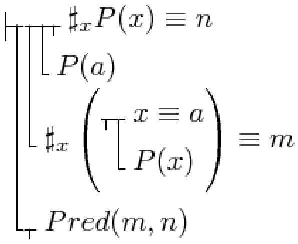
(F2).

A partir de (F1) e CP, temos



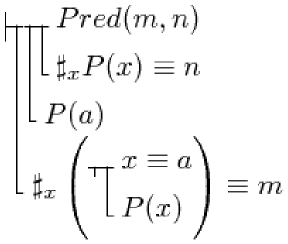
(F3).

Usando instâncias de 58BS2, 58BS1, F3 e TR, obtemos



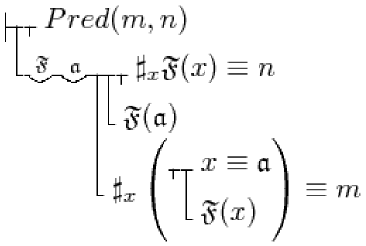
(F4).

A partir de (F4) e CP, obtemos



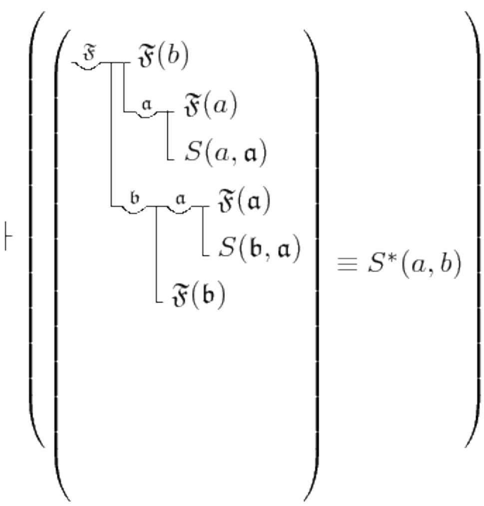
(F5).

A partir de (F2) e CP, temos

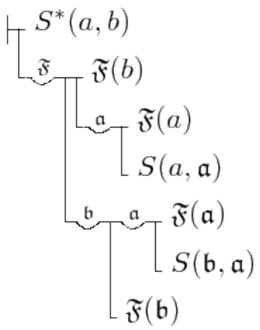


(F6).

(G)

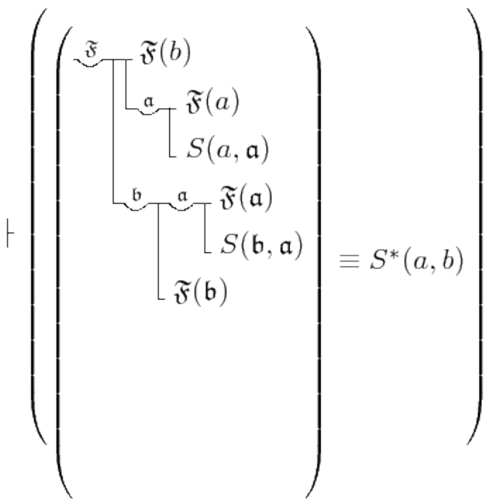


(52BS): ———————

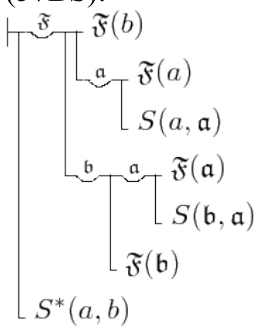


(G1).

(G)

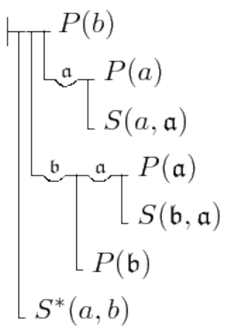


(57BS):



(G2).

Usando uma instância do axioma 58BS2, G2 e TR, obtemos:



(G3).

(H)

$$\vdash \left(\begin{array}{l} \neg\, b \equiv a \\ \quad \neg\, S^*(a,b) \end{array} \right) \equiv S^{**}(a,b)$$

(52BS): ——————————

$$\vdash \begin{array}{l} \neg\, S^{**}(a,b) \\ \quad \neg\, b \equiv a \\ \qquad \neg\, S^*(a,b) \end{array}$$

(H1).

(H)

$$\vdash \left(\begin{array}{l} \neg\, b \equiv a \\ \quad \neg\, S^*(a,b) \end{array} \right) \equiv S^{**}(a,b)$$

(57BS): ——————————

$$\vdash \begin{array}{l} \neg\, b \equiv a \\ \quad \neg\, S^*(a,b) \\ S^{**}(a,b) \end{array}$$

(H2).

(J)

$$\vdash [Pred^{**}(0,n) \equiv Nat(n)]$$

(52BS): ——————————

$$\vdash \begin{array}{l} Nat(n) \\ Pred^{**}(0,n) \end{array}$$

(J1)

(J)

$$\vdash [Pred^{**}(0,n) \equiv Nat(n)]$$

(57): ——————————

$$\vdash \begin{array}{l} Pred^{**}(0,n) \\ Nat(n) \end{array}$$

(J2).

Teoremas [469]

Teorema 1

$$\vdash Func_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta)$$ [470] [471]

469 Nas provas que se seguirão, aplicaremos **P** e **AmI** sem qualquer menção.

470 O teorema 1 afirma que a relação de identidade é funcional.

471 Os teoremas 1 e 2 (a seguir) são enunciados por Frege em **GLA** (§75): “In view of what has been said above [(§71)] on the meaning of these expressions, it follows, on our assumption [that no object falls under either concept], that these conditions are satisfied by every relation whatsoever, and therefore among others by identity, which is moreover a *one-one relation*” (meu grifo).

De 52BS, temos a seguinte instância

$$\vdash \begin{array}{l} b \equiv a^{472} \\ e \equiv a \\ e \equiv b \end{array}$$

.

Por meio de GU1, obtemos

$$\vdash \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\!\!-\!\!\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \begin{array}{l} \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{a} \\ \mathfrak{e} \equiv \mathfrak{a} \end{array} \\ \mathfrak{e} \equiv \mathfrak{b} \end{array}$$

(a1).

De (a1), (A1) e MP, derivamos

$$\vdash Func_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta)$$

(Teor. 1).

Teorema 2

$$\vdash UpM_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta)^{473}$$

De 57BS, temos a seguinte instância

$$\vdash \begin{array}{l} e \equiv a^{474} \\ b \equiv a \\ e \equiv b \end{array}$$

(a2).

Da seguinte instância de 55BS

$$\vdash \begin{array}{l} b \equiv a \\ a \equiv b \end{array}$$

,

(a2) e TR, derivamos

$$\vdash \begin{array}{l} e \equiv a \\ a \equiv b \\ e \equiv b \end{array}$$

(b2).

Por meio de GU1, obtemos

$$\vdash \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\!\!-\!\!\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \begin{array}{l} \mathfrak{e} \equiv \mathfrak{a} \\ \mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b} \end{array} \\ \mathfrak{e} \equiv \mathfrak{b} \end{array}$$

(c2).

De (c2), (B1) e MP, derivamos

$$\vdash UpM_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta)$$

(Teor.2).

---

472 Aqui, substituímos '$f\xi$' por '$\xi \equiv a$'.

473 O teorema 2 afirma que a relação de identidade é Um-para-Muitos.

474 Aqui, também substituímos '$f\xi$' por '$\xi \equiv a$'.

Teorema 3

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\stackrel{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, G(\mathfrak{a}) \\ \llcorner\, \sharp_x G(x) \equiv 0 \end{array}$$ [475]

De (D2), substituindo-se ‘$F\xi$’ por ‘$\sharp_x G(x) \equiv \xi$’, temos

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\, \sharp_x G(x) \equiv \sharp_x({}_{\top}\, x \equiv x) \\ \llcorner\, \sharp_x G(x) \equiv 0 \end{array}$$

(a3).

De (a3), (PH1) e TR, obtemos:

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\!\stackrel{\mathfrak{R}}{\smile}\!\top\!\top\, Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(G\alpha, {}_{\top}\, \beta \equiv \beta) \\ \quad\quad \llcorner\, Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta) \\ \quad\; \llcorner\, UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta) \\ \llcorner\, \sharp_x G(x) \equiv 0 \end{array}$$

(b3).

De 1BS, temos a seguinte instância:

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\!\top\, b \equiv b \\ \quad \llcorner\, R(a, b) \\ \llcorner\, b \equiv b \end{array}$$

(c3).

De 54BS

$$\vdash b \equiv b,$$

(c3) e MP, derivamos

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\, b \equiv b \\ \llcorner\, R(a, b) \end{array}$$

(d3).

Por GU1, temos

$$\begin{array}{l} \vdash\!\stackrel{\mathfrak{b}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{b} \\ \quad\;\; \llcorner\, R(a, \mathfrak{b}) \end{array}$$

(e3).

Da seguinte instância de (C5)

475 Frege (**GLA**, § 75): “Now it must be possible to prove, by means of what has already been laid down, that every concept under which no object falls is equal (*gleichzahlig*) to every other concept under which no object falls, and to them alone; from which it follows that 0 is the Number which belongs to any such concept, and that no object falls under any concept if the number which belongs to that concept is 0”.

$$G(a)$$
$$\mathfrak{b} \quad \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{b}$$
$$R(a, \mathfrak{b})$$
$$Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(G\alpha, {}_{\top}\, \beta \equiv \beta),$$

(e3) e MP, obtemos

$$G(a)$$
$$Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(G\alpha, {}_{\top}\, \beta \equiv \beta)$$

(f3).

De (f3) e CP, temos

$$Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(G\alpha, {}_{\top}\, \beta \equiv \beta)$$
$$G(a)$$

(g3).

Da seguinte instância de 36BS

$$Func_{\alpha\beta}R(\alpha\beta)$$
$$UpM_{\alpha\beta}R(\alpha\beta)$$
$$Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(G\alpha, {}_{\top}\, \beta \equiv \beta)$$
$$G(a)$$
$$Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(G\alpha, {}_{\top}\, \beta \equiv \beta)$$
$$G(a)$$

,

(h3)

e CP, obtemos

$$Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(G\alpha, {}_{\top}\, \beta \equiv \beta)$$
$$G(a)$$
$$Func_{\alpha\beta}R(\alpha\beta)$$
$$UpM_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)$$
$$Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(G\alpha, {}_{\top}\, \beta \equiv \beta)$$
$$G(a)$$

(i3)

De (g3), (i3) e MP, derivamos

$$Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(G\alpha, {}_{\top}\, \beta \equiv \beta)$$
$$Func_{\alpha\beta}R(\alpha\beta)$$
$$UpM_{\alpha\beta}R(\alpha\beta)$$
$$G(a)$$

(j3).

Por CGC2, obtemos

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\!\overset{\mathfrak{R}}{\smile}\!\!\top\!\top\!\top\; Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(G\alpha,\,{}_{\top}\;\beta\equiv\beta) \\
\quad\;\; \lfloor\; Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha\beta) \\
\quad\; \lfloor\; UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha\beta) \\
\lfloor\; G(a)
\end{array}$$
[476]

(k3).

De (k3) e contraposição, temos

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\top\; G(a) \\
\;\lfloor\!\top\!\!\overset{\mathfrak{R}}{\smile}\!\!\top\!\top\; Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(G\alpha,\,{}_{\top}\;\beta\equiv\beta) \\
\quad\;\;\; \lfloor\; Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha\beta) \\
\quad\;\; \lfloor\; UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha\beta)
\end{array}$$

(l3).

De (b3), (l3) e TR, obtemos

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\top\; G(a) \\
\;\lfloor\; \sharp_x G(x)\equiv 0
\end{array}$$

(m3).

Por CGC1, derivamos

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\; G(\mathfrak{a}) \\
\;\lfloor\; \sharp_x G(x)\equiv 0
\end{array}$$

(Teor.3).

Teorema 4[477]

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\top\; \sharp_x G(x)\equiv 0 \\
\;\lfloor\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\; G(\mathfrak{a})
\end{array}$$
[478]

Na seguinte instância de (PH6)

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\top\!\top\!\top\; \sharp_x G(x)\equiv\sharp_x({}_{\top}\;x\equiv x) \\
\quad\;\; \lfloor\; Func_{\alpha\beta}S(\alpha,\beta) \\
\quad\; \lfloor\; UpM_{\alpha\beta}S(\alpha,\beta) \\
\lfloor\; Corr_{\alpha\beta}(S\alpha\beta)(G\alpha,{}_{\top}\;\beta\equiv\beta)
\end{array}$$

(a4),

substitua ‘*S*(ξ,ζ)’ por ‘ξ=ζ’, assim temos

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\top\!\top\!\top\; \sharp_x G(x)\equiv\sharp_x({}_{\top}\;x\equiv x) \\
\quad\;\; \lfloor\; Func_{\alpha\beta}(\alpha\equiv\beta) \\
\quad\; \lfloor\; UpM_{\alpha\beta}(\alpha\equiv\beta) \\
\lfloor\; Corr_{\alpha\beta}(\alpha\equiv\beta)(G\alpha,{}_{\top}\;\beta\equiv\beta)
\end{array}$$

(b4).

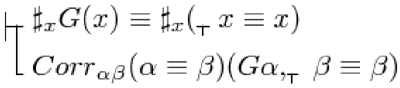
---

476 Se *a* cai sob o conceito *G*, então não existe uma relação *R* que correlaciona os conceitos *G* e “ser diferente de si mesmo” e que seja Funcional e Um-para-Muitos.

477 Em **GGA**, é feito uso do teorema IVa na prova desta proposição.

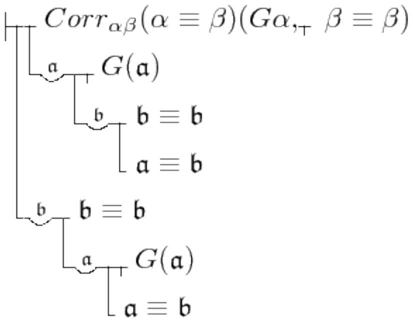
478 Se nada cai sob um conceito *G*, o número que pertence a ele é igual a 0.

De (Teor.1), (Teor.2) e MP, derivamos



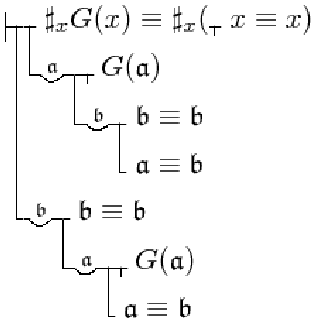
(c4).

Da seguinte instância de (C1)



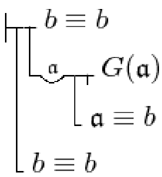
,

(c4) e TR, obtemos



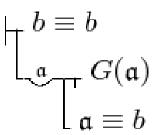
(d4).

De 1BS



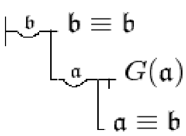
,

54BS e MP, derivamos



(e4).

Por GU1, obtemos



(f4).

De (d4), (f4) e MP, inferimos

$$\begin{array}{l} \vdash \sharp_x G(x) \equiv \sharp_x(\top\, x \equiv x) \\ \quad \smile^{\mathfrak{a}} \top\, G(\mathfrak{a}) \\ \qquad\quad \smile^{\mathfrak{b}}\, \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{b} \\ \qquad\qquad\quad \mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b} \end{array}$$

(g4).

Da seguinte instância do Axioma I

$$\begin{array}{l} \vdash\top\, G(a) \\ \quad \smile^{\mathfrak{b}}\, \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{b} \\ \qquad\quad a \equiv \mathfrak{b} \\ \quad \top\, G(a) \end{array},$$

e da seguinte instância de 58BS1

$$\begin{array}{l} \vdash\top\, G(a) \\ \quad \smile^{\mathfrak{a}} \top\, G(\mathfrak{a}) \end{array},$$

por meio de TR, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash\top\, G(a) \\ \quad \smile^{\mathfrak{b}}\, \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{b} \\ \qquad\quad a \equiv \mathfrak{b} \\ \quad \smile^{\mathfrak{a}} \top\, G(\mathfrak{a}) \end{array}$$

(h4).

Por CGC1, inferimos

$$\begin{array}{l} \vdash \smile^{\mathfrak{a}} \top\, G(\mathfrak{a}) \\ \qquad\quad \smile^{\mathfrak{b}}\, \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{b} \\ \qquad\qquad\quad \mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b} \\ \quad \smile^{\mathfrak{a}} \top\, G(\mathfrak{a}) \end{array}$$

(i4).

De (g4), (i4) e TR, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash \sharp_x G(x) \equiv \sharp_x(\top\, x \equiv x) \\ \quad \smile^{\mathfrak{a}} \top\, G(\mathfrak{a}) \end{array}$$

(j4).

Da seguinte instância de (D1)

$$\begin{array}{l} \vdash \sharp_x G(x) \equiv 0 \\ \quad \sharp_x G(x) \equiv \sharp_x(\top\, x \equiv x) \end{array}$$ [479]

(j4) e TR, inferimos

$$\begin{array}{l} \vdash \sharp_x G(x) \equiv 0 \\ \quad \smile^{\mathfrak{a}} \top\, G(\mathfrak{a}) \end{array}$$

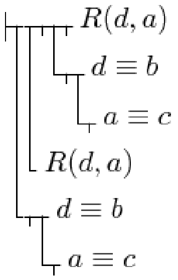
(Teor.4).

479 Substitua '$P\xi$' por '$\sharp_x G(x) \equiv \xi$'.

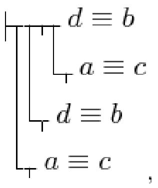
Teorema 5[480]

$$\vdash Func_{\alpha\beta}Pred(\alpha, \beta)$$ [481]

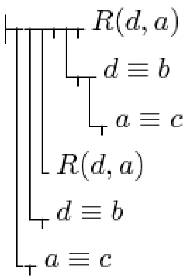
Da seguinte instância do teorema IeGGA



e da seguinte instância do teorema IfGGA

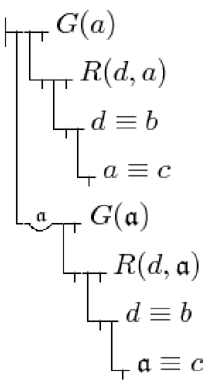


aplicando-se TR, obtemos



(1).

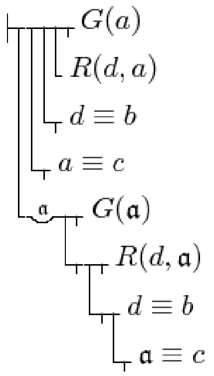
Da seguinte instância de 58BS1



e de (1) por meio de TR, temos

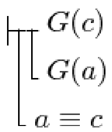
480 Em **GGA** (pp 87- 113), Frege faz alguns usos do teorema IVa (e usa uma vez IVb).

481 A relação de predecessão é funcional. Esta proposição é mencionada em 78.5 (**GLA**, §78). Lá, Frege afirma que '*Pred*' é 1-1 (*beiderseits eindeutige*), o que significa que ela é funcional e Um-para-Muitos. O teorema 5 é o primeiro membro da conjunção. No teorema 6, provamos o segundo membro.

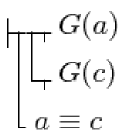


(2).

Da seguinte instância de 52BS

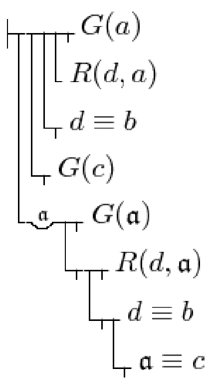


e CP, inferimos



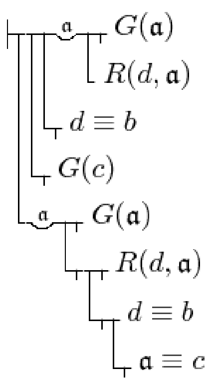
(57BSa).

De (2) e (57BSa),por meio de TMI, obtemos



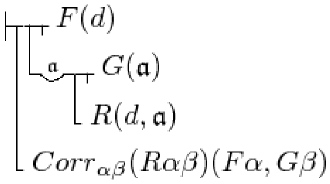
(3).

Aplicando CGC1, derivamos

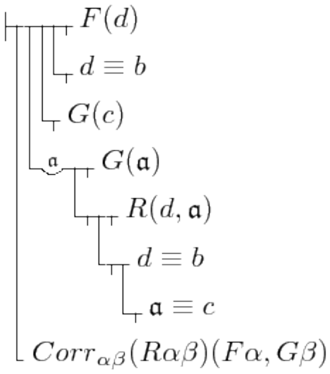


(4).

Da seguinte instância de (C5)

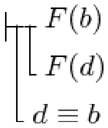


e (4) por meio de TR, obtemos

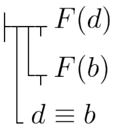


(5).

Da seguinte instância de 52BS

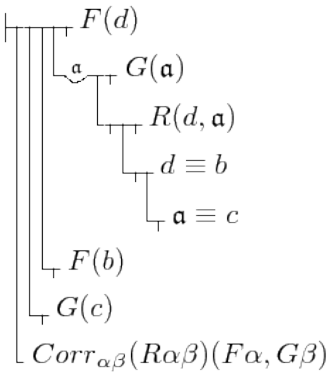


e CP, inferimos



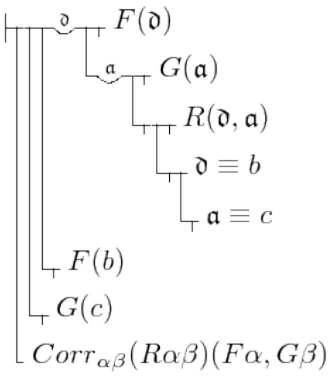
(57BSb).

De (5) e (57BSb), por meio de TMI, obtemos



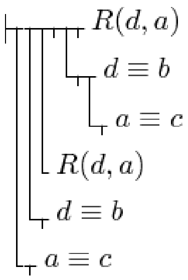
(6).

Aplicando CGC1, temos

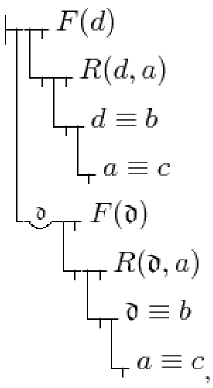


(7).

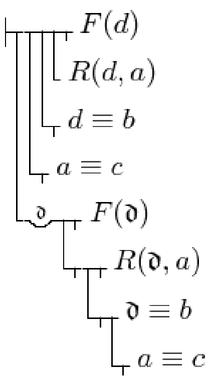
De (1)



e da seguinte instância de 58BS1

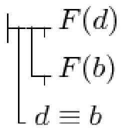


por meio de TR, obtemos

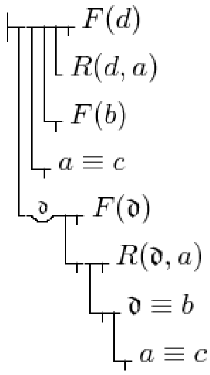


(8).

De (57BSb)

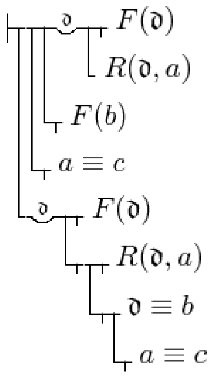


e (8), por meio de TMI, derivamos



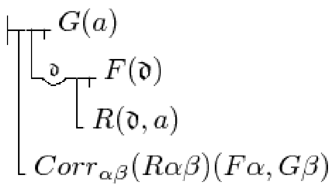
(9)

Aplicando CGC1, temos

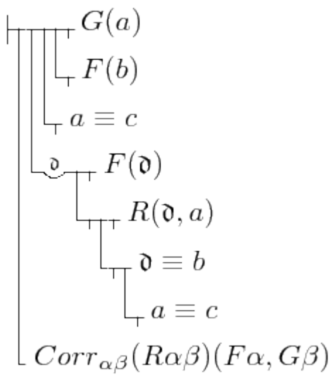


(10).

Da seguinte instância de (C6)



e (10), por meio de TR, obtemos



(11).

De (57BSa)

$$\BGassert\BGconditional{a \equiv c}{\BGconditional{\BGnot G(c)}{\BGnot G(a)}}$$

e (11), por meio de TMI, derivamos

$$\BGassert\BGconditional{Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(F\alpha, G\beta)}{\BGconditional{\BGnot G(c)}{\BGconditional{\BGnot F(b)}{\BGconditional{\BGquant{\mathfrak{d}}\BGconditional{\BGnot\BGconditional{\BGnot\BGconditional{\BGnot a \equiv c}{\mathfrak{d} \equiv b}}{\BGnot R(\mathfrak{d}, a)}}{\BGnot F(\mathfrak{d})}}{\BGnot G(a)}}}}$$

(12).

Aplicando CGC1, obtemos

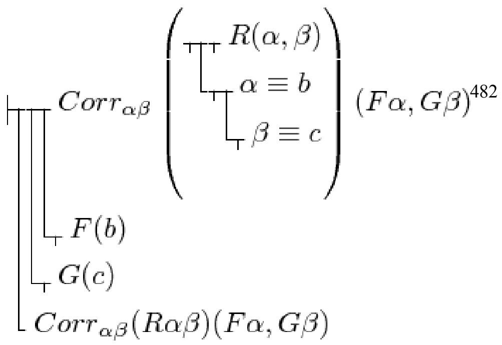
$$\BGassert\BGconditional{Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(F\alpha, G\beta)}{\BGconditional{\BGnot G(c)}{\BGconditional{\BGnot F(b)}{\BGquant{\mathfrak{a}}\BGconditional{\BGquant{\mathfrak{d}}\BGconditional{\BGnot\BGconditional{\BGnot\BGconditional{\BGnot \mathfrak{a} \equiv c}{\mathfrak{d} \equiv b}}{\BGnot R(\mathfrak{d}, \mathfrak{a})}}{\BGnot F(\mathfrak{d})}}{\BGnot G(\mathfrak{a})}}}}$$

(13).

Da seguinte instância de (C1)

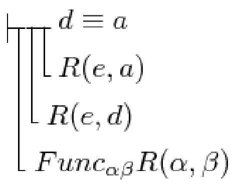
$$\BGassert\BGconditional{\BGquant{\mathfrak{a}}\BGconditional{\BGquant{\mathfrak{d}}\BGconditional{\BGnot\BGconditional{\BGnot\BGconditional{\BGnot \mathfrak{a} \equiv c}{\mathfrak{d} \equiv b}}{\BGnot R(\mathfrak{d}, \mathfrak{a})}}{\BGnot F(\mathfrak{d})}}{\BGnot G(\mathfrak{a})}}{\BGconditional{\BGquant{\mathfrak{d}}\BGconditional{\BGquant{\mathfrak{a}}\BGconditional{\BGnot\BGconditional{\BGnot\BGconditional{\BGnot \mathfrak{a} \equiv c}{\mathfrak{d} \equiv b}}{\BGnot R(\mathfrak{d}, \mathfrak{a})}}{\BGnot G(\mathfrak{a})}}{\BGnot F(\mathfrak{d})}}{Corr_{\alpha\beta}\left(\BGnot\BGconditional{\BGnot\BGconditional{\BGnot \beta \equiv c}{\alpha \equiv b}}{\BGnot R(\alpha, \beta)}\right)(F\alpha, G\beta)}}$$

(7) e (13), por meio de TR, obtemos

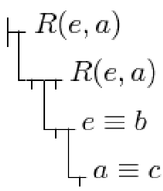


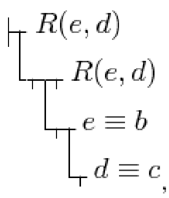
(14).

Da seguinte instância de (A2)

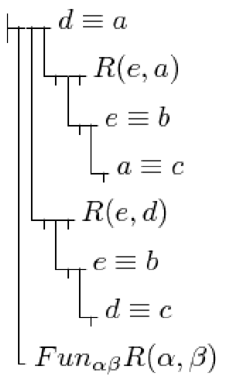


e das seguintes instâncias do IbGGA

 (a)

 (b)

por meio de TR, obtemos

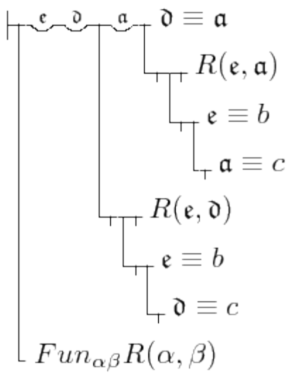


(15).

Aplicando CGC1, temos

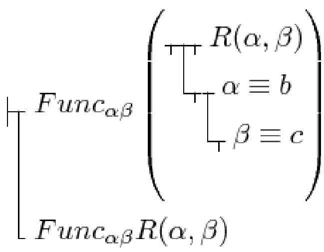
---

482 Esta proposição afirma que se $R(x,y)$ correlaciona os conceitos F e G e se b não cai sob F e se c não cai sob G, então a relação 'x encontra-se na relação R com y, mas x é diferente de b e y é diferente de c' correlaciona os conceitos F e G.



(16).

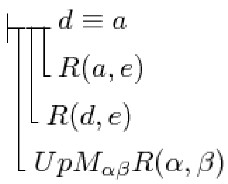
De (16), (A1) e TR, derivamos



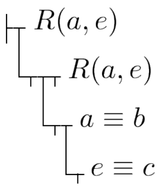
[483]

(17).

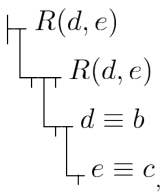
Da seguinte instância de (B2)



e das seguintes instâncias de IbGGA

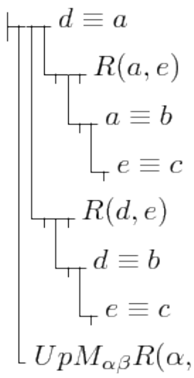


(c),



(d)

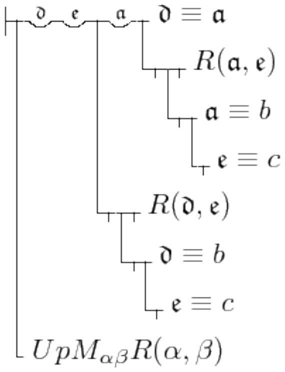
por meio de TR, obtemos



(18).

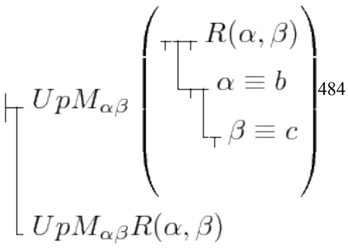
483 Esta proposição afirma que se $R(x,y)$ é funcional, então a relação 'x encontra-se na relação R com y, mas x é diferente de b e y é diferente de c' também é funcional.

Aplicando CGC1, temos



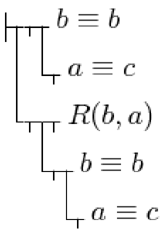
(19).

De (19), (B1) e TR, derivamos

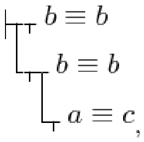


(20).

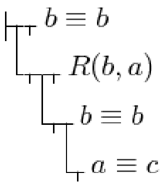
Da seguinte instância de IdGGA



e da seguinte instância de IcGGA



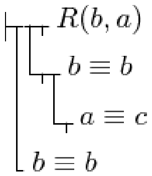
por meio de TR, obtemos



(21).

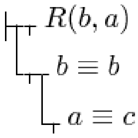
De (21) e CP, obtemos

484 Esta proposição afirma que se $R(x,y)$ é Um-para-Muitos, então a relação 'x encontra-se na relação R com y, mas x é diferente de b e y é diferente de c' também é Um-para-Muitos.



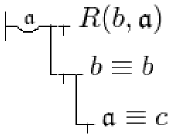
(22).

De (22), 54BS e MP, derivamos



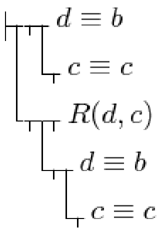
(23).

Aplicando GU1, temos

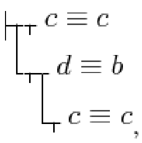


(24).

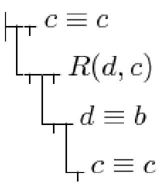
A partir da seguinte instância de IdGGA



e da seguinte instância de IdGGA

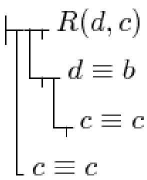


por meio de TR, obtemos



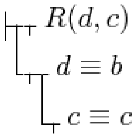
(25).

De (25) e CP, temos



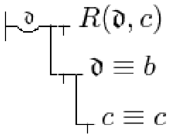
(26).

De (26), 54BS e MP, derivamos



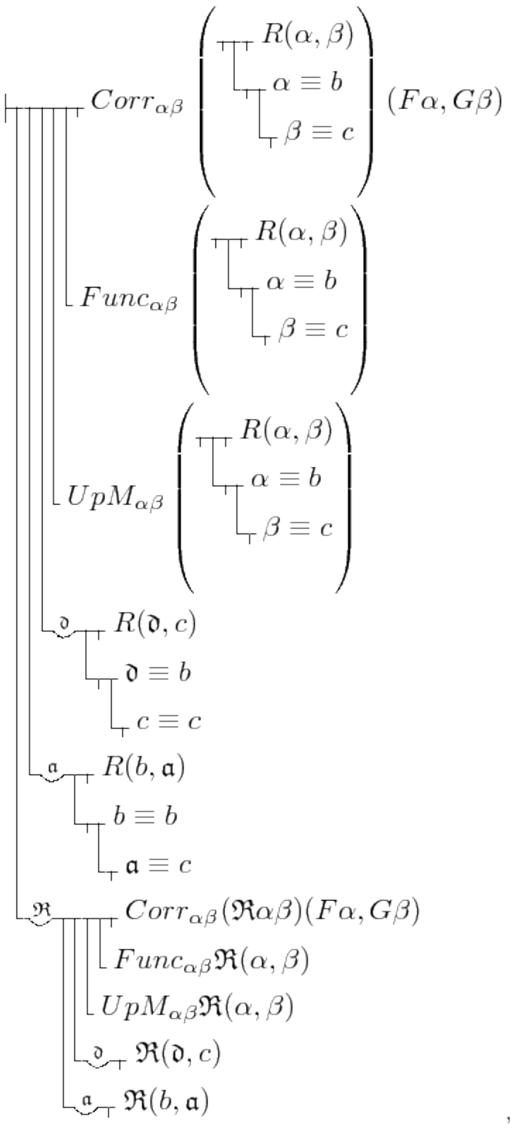
(27).

Aplicando GU1, obtemos

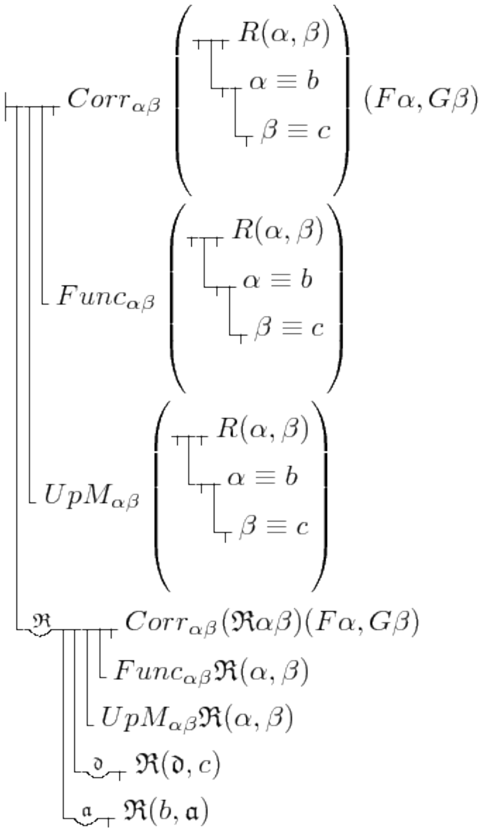


(28).

Da seguinte instância de 58BS2

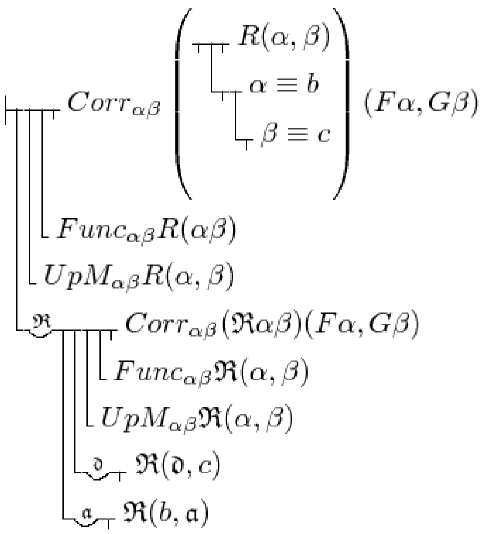


(24), (28) e MP, derivamos



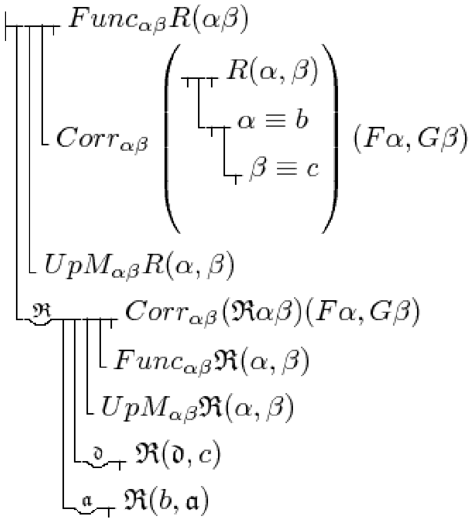
(29).

De (29), (20), (17) e TR, temos



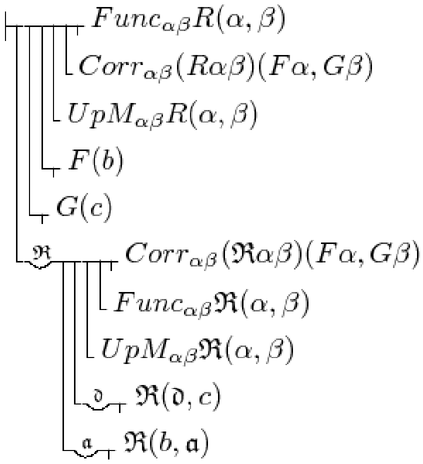
(30).

De (30) e CP, temos



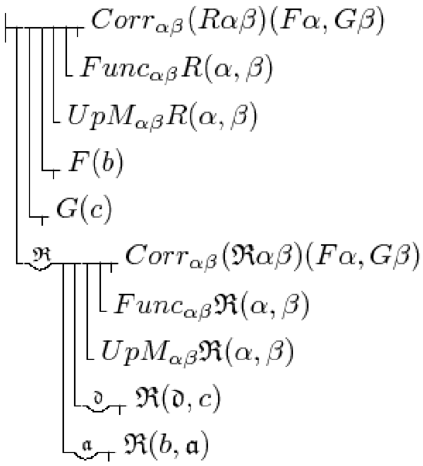
(31).

De (31), (14) e TR, obtemos



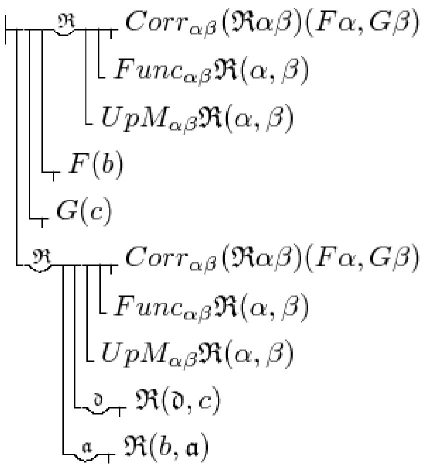
(32).

De (32) e contraposição, derivamos



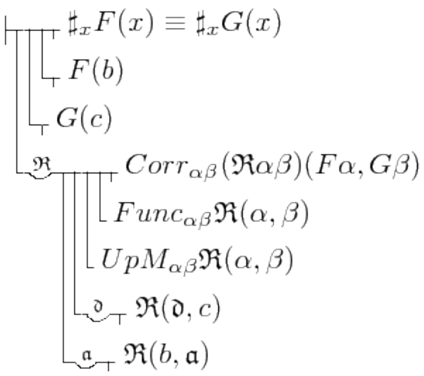
(33).

Aplicando CGC2, obtemos



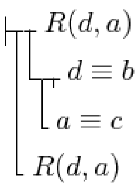
(34).

De (34), e de uma instância de (PH3) e TR, derivamos

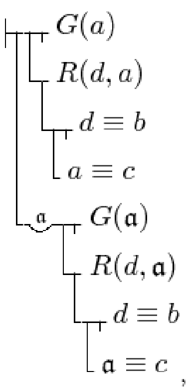


(35).

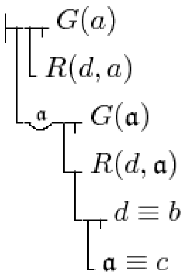
Da seguinte instância do 1BS



e da seguinte instância de 58BS1

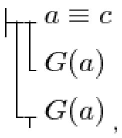


por meio de TR, temos

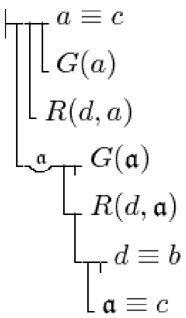


(36).

Da seguinte instância do Teorema 38BS

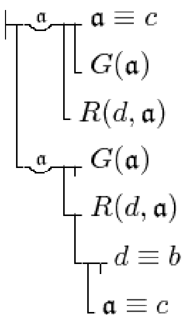


(36) e TR, obtemos



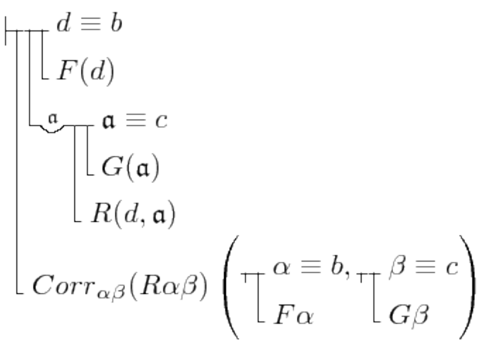
(37).

Aplicando CGC1, temos



(38).

Da seguinte instância de (C5)



e (38), por meio de TR, derivamos

$$
\begin{array}{l}
\vdash\; d \equiv b \\
\quad F(d) \\
\quad \smile^{\mathfrak{a}}\; G(\mathfrak{a}) \\
\qquad R(d, \mathfrak{a}) \\
\qquad\quad d \equiv b \\
\qquad\quad \mathfrak{a} \equiv c \\
\quad Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta) \left(\begin{array}{l} \alpha \equiv b, \\ F\alpha \end{array} \begin{array}{l} \beta \equiv c \\ G\beta \end{array} \right)
\end{array}
$$

(39).

Da seguinte instância de 27BS

$$
\begin{array}{l}
\vdash\; d \equiv b \\
\quad c \equiv c \\
\quad d \equiv b \\
\quad c \equiv c
\end{array}
$$

,

54BS e MP, obtemos

$$
\begin{array}{l}
\vdash\; d \equiv b \\
\quad d \equiv b \\
\quad c \equiv c
\end{array}
$$

(40).

Da seguinte instância de 38BS

$$
\begin{array}{l}
\vdash\; R(d, c) \\
\quad d \equiv b \\
\quad d \equiv b
\end{array}
$$

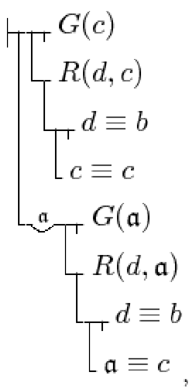
,

(40) e TR, temos

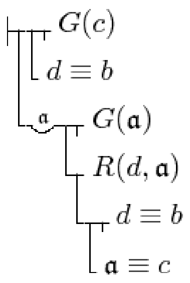
$$
\begin{array}{l}
\vdash\; R(d, c) \\
\qquad d \equiv b \\
\qquad c \equiv c \\
\quad d \equiv b
\end{array}
$$

(41).

Da seguinte instância de 58BS1

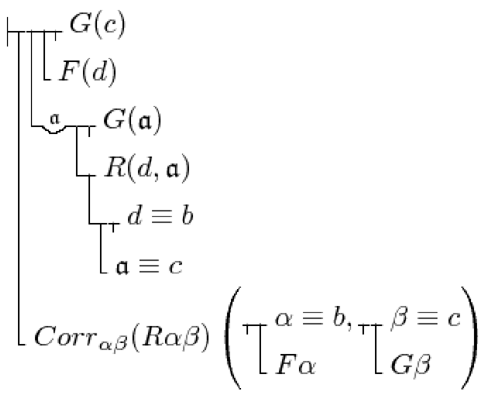


(41) e TR, obtemos



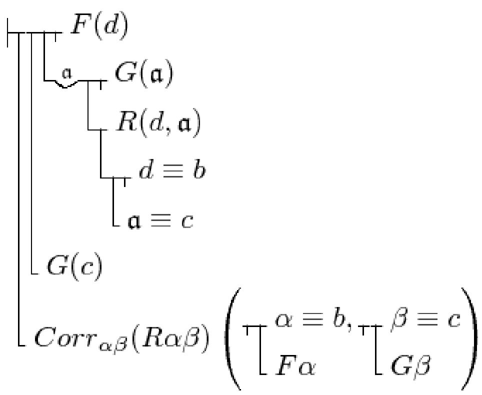
(42).

De (39), (42) e TR, derivamos



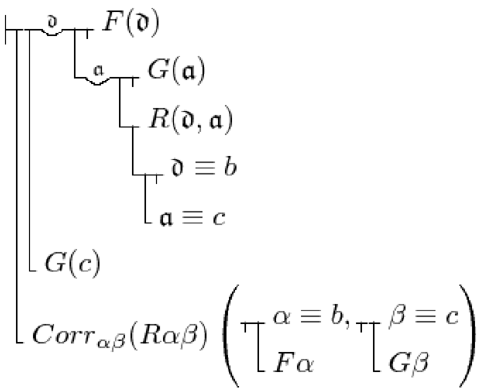
(43).

De (43) e CP, obtemos



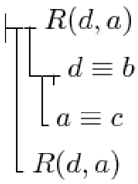
(44).

Aplicando CGC1, temos

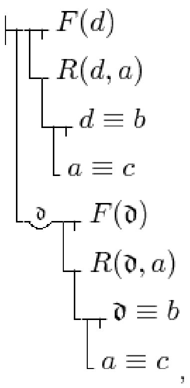


(45).

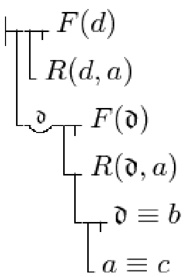
Da seguinte instância do 1BS



e da seguinte instância de 58BS1

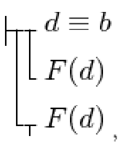


por meio de TR, temos

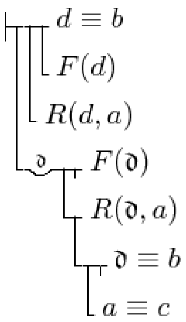


(46).

Da seguinte instância de 38BS

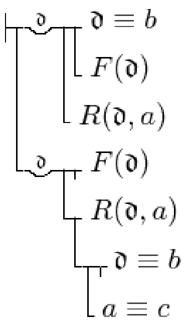


(46) e TR, obtemos



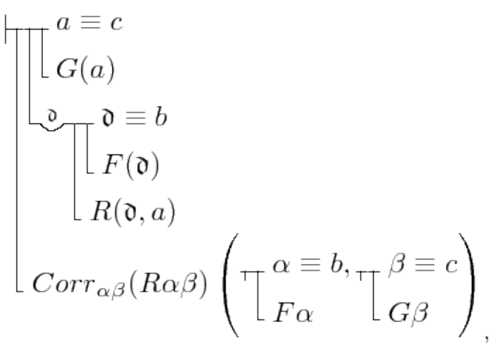
(47).

Aplicando CGC1, chegamos a

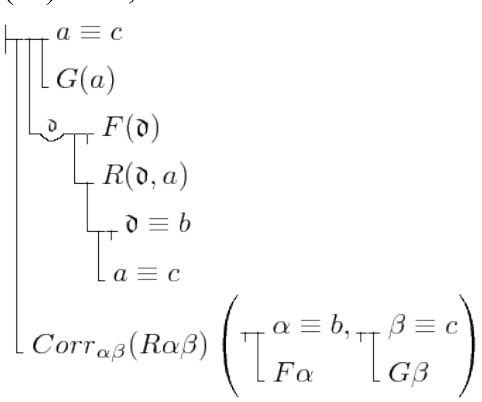


(48).

Da seguinte instância de (C6)

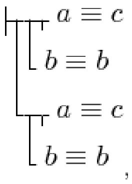


(48) e TR, obtemos

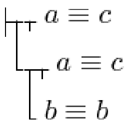


(49).

Da seguinte instância do 27BS

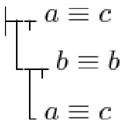


54BS e MP, derivamos



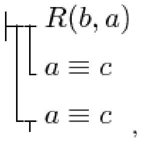
(50).

De (50) e CP, obtemos

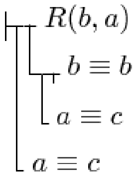


(51).

Da seguinte instância de 38BS

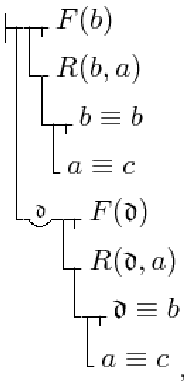


(51) e TR, obtemos

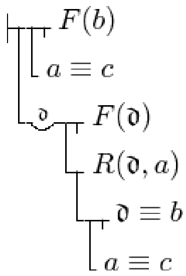


(52).

Da seguinte instância de 58BS1

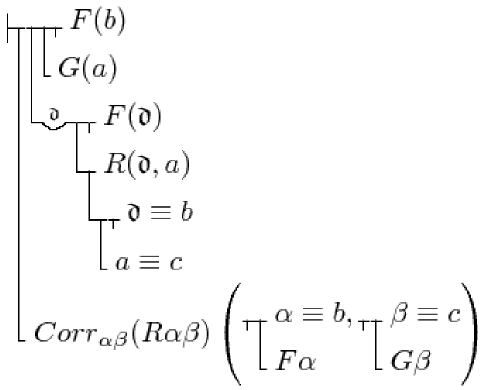


(52) e TR, temos



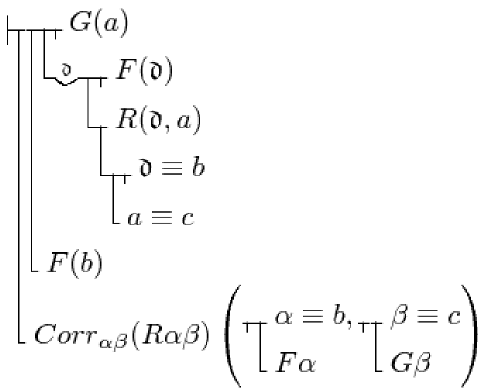
(53).

De (53), (49) e TR, derivamos



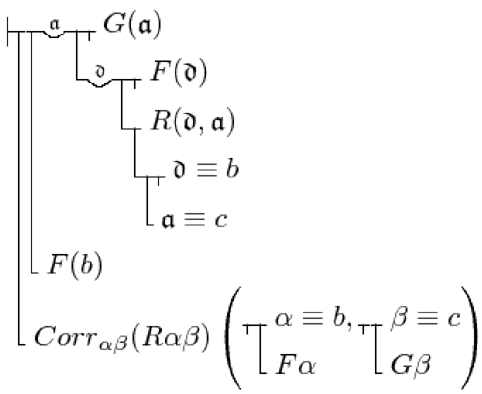
(54).

De (54) e CP, obtemos



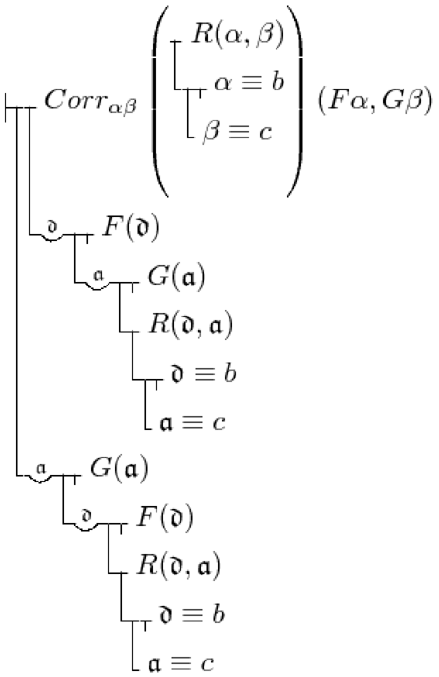
(55).

Aplicando CGC1, temos



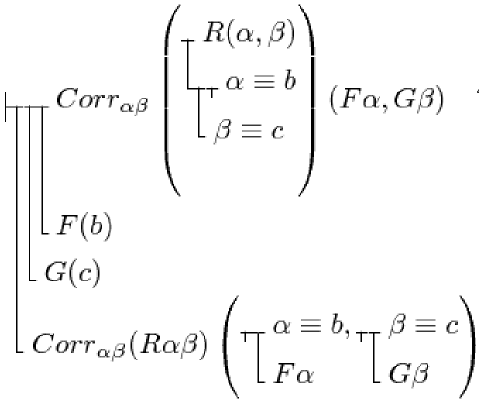
(56).

Da seguinte instância de (C1)



,

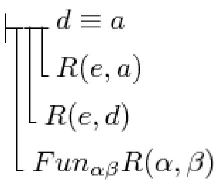
(45), (56) e TR, derivamos



[485]

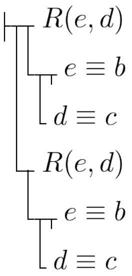
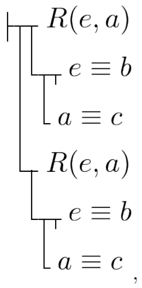
(57).

Da seguinte instância de (A2)

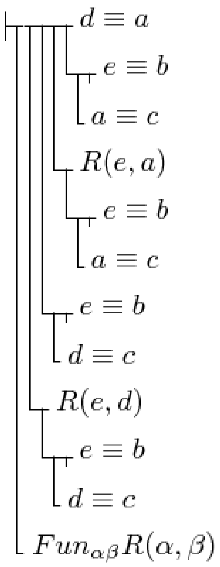


e das seguintes instâncias do 27BS

485 Esta proposição afirma que se $R(x,y)$ correlaciona os conceitos 'cair sob F, mas ser diferente de b' e 'cair sob G, mas ser diferente de c' e se b cai sob F e se c cai sob G, então a relação 'x é igual a b e y é igual a c ou $R(x,y)$' correlaciona os conceitos F e G.

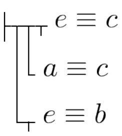
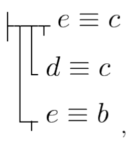



por meio de TR, obtemos

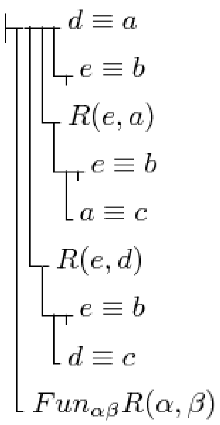


(58).

Das seguintes instâncias de 1BS

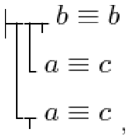



(58) e TR, inferimos

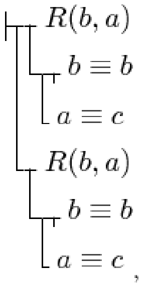


(59).

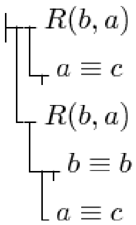
Da seguinte instância de 38BS



e da seguinte instância de 27BS

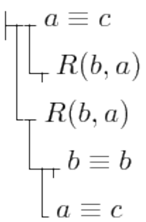


por meio de TR, obtemos



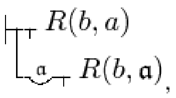
(60).

De (60) e CP, temos

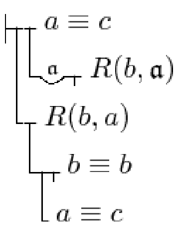


(61).

Da seguinte instância de 58BS1

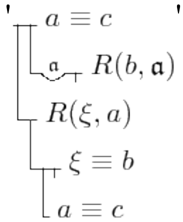


(61) e TR, obtemos

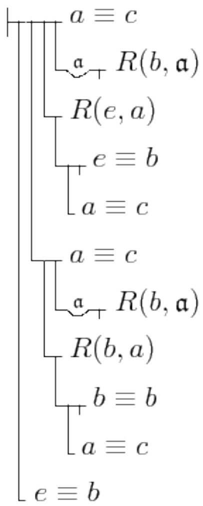


(62).

Substituindo-se '$f\xi$' por

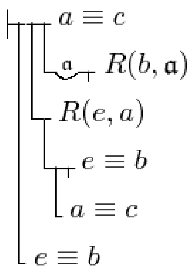
''

'*c*' por '*e*' e '*d*' por '*b*' em 57BS, temos



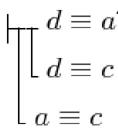
(57BS1).

De (57BS1), (62) e MP, derivamos



(63).

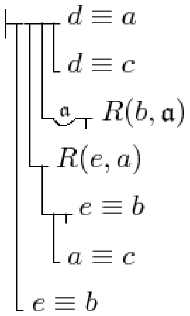
Da seguinte instância do 57BS

[486]

,

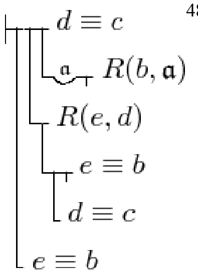
(63) e TR, temos

486 Substitua '$f\xi$' por '$d \equiv \xi$'.

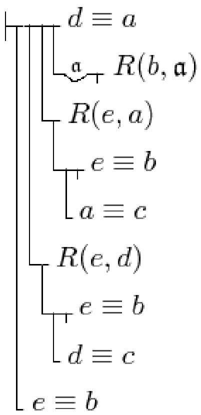


(64).

Da seguinte instância de (63)

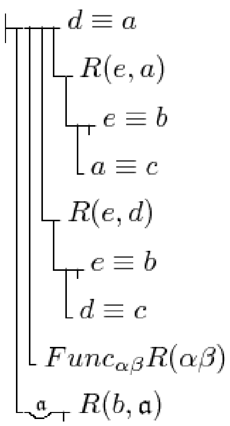
[487]

(64) e TR, obtemos



(65).

De (65), (59) e TMI, obtemos



(66).

Aplicando CGC1, temos

487 Substitua '*a*' por '*d*'.

$$\begin{array}{l}
\vdash \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\overset{\mathfrak{d}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \mathfrak{d} \equiv \mathfrak{a} \\
\qquad\qquad R(\mathfrak{e}, \mathfrak{a}) \\
\qquad\qquad\quad \mathfrak{e} \equiv b \\
\qquad\qquad\quad \mathfrak{a} \equiv c \\
\qquad\quad R(\mathfrak{e}, \mathfrak{d}) \\
\qquad\qquad \mathfrak{e} \equiv b \\
\qquad\qquad \mathfrak{d} \equiv c \\
\quad Func_{\alpha\beta} R(\alpha\beta) \\
\quad \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ R(b, \mathfrak{a})
\end{array}$$

(67).

De (A1), (67) e TR, obtemos

$$\begin{array}{l}
\vdash Fun_{\alpha\beta} \left(\begin{array}{l} R(\alpha, \beta) \\ \quad \alpha \equiv b \\ \quad \beta \equiv c \end{array} \right)^{488} \\
\quad Func_{\alpha\beta} R(\alpha\beta) \\
\quad \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ R(b, \mathfrak{a})
\end{array}$$

(68).

Da seguinte instância de (B2)

$$\begin{array}{l}
\vdash d \equiv a \\
\quad R(a, e) \\
\quad R(d, e) \\
\quad UpM_{\alpha\beta} R(\alpha, \beta),
\end{array}$$

e das seguintes instâncias de 27BS

$$\begin{array}{l}
\vdash R(d, e) \\
\qquad d \equiv b \\
\qquad e \equiv c \\
\quad R(d, e) \\
\qquad d \equiv b \\
\qquad e \equiv c
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
\vdash R(a, e) \\
\qquad a \equiv b \\
\qquad e \equiv c \\
\quad R(a, e) \\
\qquad a \equiv b \\
\qquad e \equiv c ,
\end{array}$$

por meio da TR, obtemos

488 Esta proposição afirma que se $R(x,y)$ é funcional e se b não está na relação R com nenhum objeto, então a relação "x é igual a b e y igual a c ou $R(x,y)$" é funcional.

$$d \equiv a$$
$$a \equiv b$$
$$e \equiv c$$
$$R(a, e)$$
$$a \equiv b$$
$$e \equiv c$$
$$d \equiv b$$
$$e \equiv c$$
$$R(d, e)$$
$$d \equiv b$$
$$e \equiv c$$
$$UpM_{\alpha\beta}R(\alpha, \beta)$$

(69).

Das seguintes instâncias de 38BS

$$d \equiv b$$
$$e \equiv c$$
$$e \equiv c$$

$$a \equiv b$$
$$e \equiv c$$
$$e \equiv c \quad ,$$

(69) eTR, temos

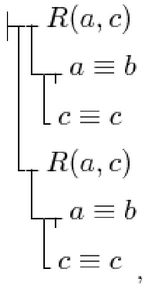
$$d \equiv a$$
$$e \equiv c$$
$$R(a, e)$$
$$a \equiv b$$
$$e \equiv c$$
$$R(d, e)$$
$$d \equiv b$$
$$e \equiv c$$
$$UpM_{\alpha\beta}R(\alpha, \beta)$$

(70).

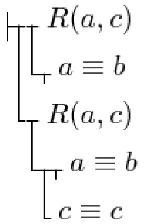
Da seguinte instância de IBS

$$a \equiv b$$
$$c \equiv c$$
$$a \equiv b \quad ,$$

e da seguinte instância de 27BS

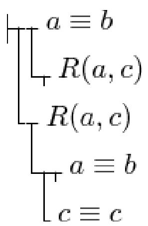


por meio de TR, inferimos



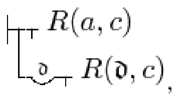
(71).

De (71) e CP, derivamos

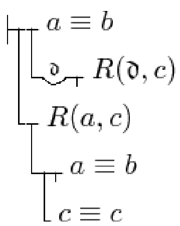


(72).

Da seguinte instância de 58BS1

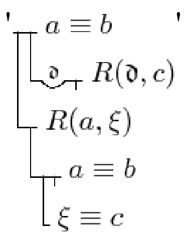


(72) e TR, temos



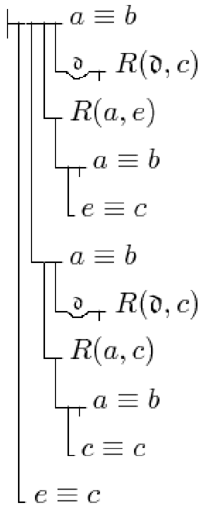
(73).

Substituindo-se '$f\xi$' por



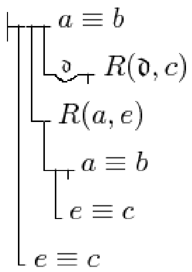
,

'*c*' por '*e*' e '*d*' por '*c*' em 57BS, obtemos



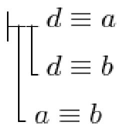
(57BS2).

De (57BS2), (73) e MP, derivamos

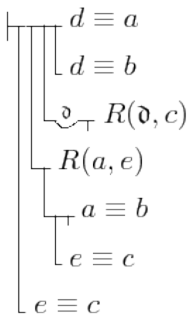


(74).

Da seguinte instância de 57BS

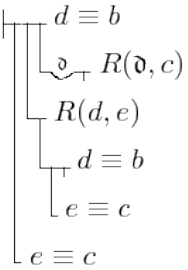


(74) e TR, inferimos



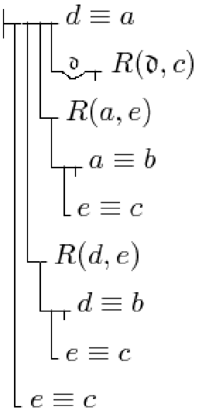
(75).

Da seguinte instância de (74)

 [489]

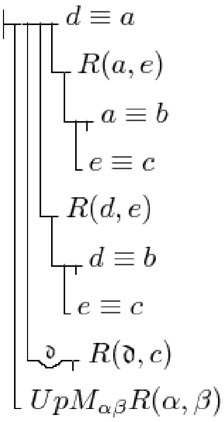
,

(75) e TR, derivamos



(76).

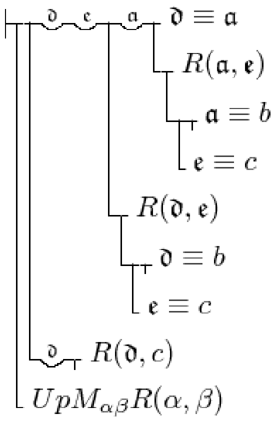
De (76), (70) e TMI, obtemos



(77).

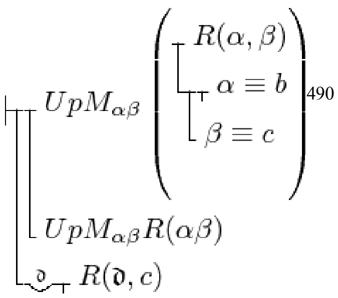
Aplicando CGC1, temos

489 Substitua '*a*' por '*d*'.



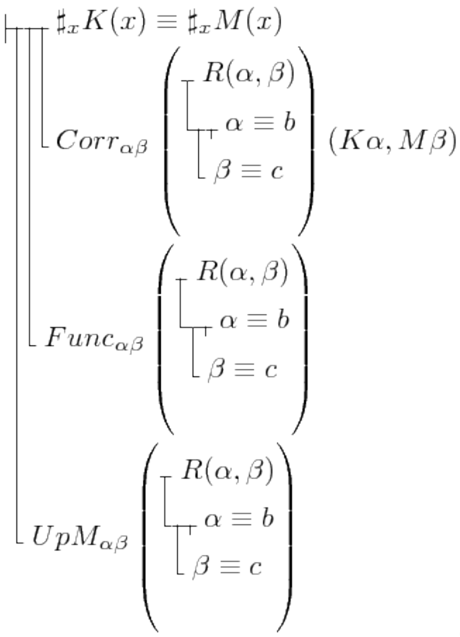
(78).

De (78), (B1) e TR, obtemos



(79)

Da seguinte instância de (PH6)



,

(57)[491], (68), (79) e TR, temos

490 A proposição 79 afirma que se $R(x,y)$ é Um-para-Muitos e se nenhum objeto está na relação R com c, então a relação ' x é igual a b e y é igual a c ou $R(x,y)$' é Um-para-Muitos também.

491 Na fórmula (**57**), substitua '$F\xi$ ' por '$K\xi$ ' e '$G\xi$ ' por '$M\xi$ '.

$$
\begin{array}{l}
\vdash \sharp_x K(x) \equiv \sharp_x M(x) \\
\quad Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta) \left(\begin{array}{l} \alpha \equiv b, \\ K\alpha \end{array} \begin{array}{l} \beta \equiv c \\ M\beta \end{array} \right) \\
\quad Func_{\alpha\beta} R(\alpha, \beta) \\
\quad UpM_{\alpha\beta} R(\alpha, \beta) \\
\quad \smile^{\mathfrak{a}} \top R(b, \mathfrak{a}) \\
\quad \smile^{\mathfrak{d}} \top R(\mathfrak{d}, c) \\
\quad K(b) \\
\quad M(c)
\end{array}
$$

(80).

De (80) e CP, derivamos

$$
\begin{array}{l}
\vdash Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta) \left(\begin{array}{l} \alpha \equiv b, \\ K\alpha \end{array} \begin{array}{l} \beta \equiv c \\ M\beta \end{array} \right) \\
\quad Func_{\alpha\beta} R(\alpha, \beta) \\
\quad UpM_{\alpha\beta} R(\alpha, \beta) \\
\quad \smile^{\mathfrak{a}} \top R(b, \mathfrak{a}) \\
\quad \smile^{\mathfrak{d}} \top R(\mathfrak{d}, c) \\
\quad K(b) \\
\quad M(c) \\
\quad \top \sharp_x K(x) \equiv \sharp_x M(x)
\end{array}
$$

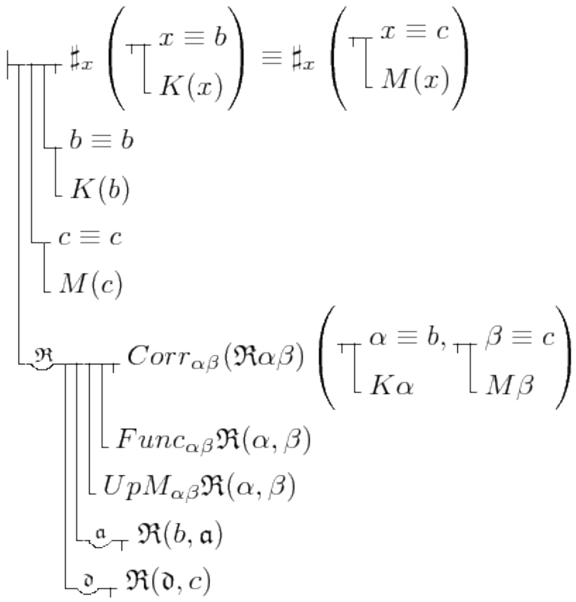
(81).

Aplicando CGC2, obtemos

$$
\begin{array}{l}
\vdash \smile^{\mathfrak{R}} Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta) \left(\begin{array}{l} \alpha \equiv b, \\ K\alpha \end{array} \begin{array}{l} \beta \equiv c \\ M\beta \end{array} \right) \\
\quad Func_{\alpha\beta} \mathfrak{R}(\alpha, \beta) \\
\quad UpM_{\alpha\beta} \mathfrak{R}(\alpha, \beta) \\
\quad \smile^{\mathfrak{a}} \top \mathfrak{R}(b, \mathfrak{a}) \\
\quad \smile^{\mathfrak{d}} \top \mathfrak{R}(\mathfrak{d}, c) \\
\quad K(b) \\
\quad M(c) \\
\quad \top \sharp_x K(x) \equiv \sharp_x M(x)
\end{array}
$$

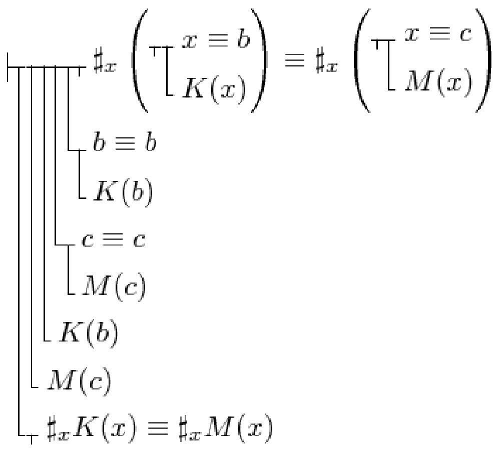
(82).

Substituindo-se '$F\xi$' por '$\begin{array}{l} \top \xi \equiv b \\ K\xi \end{array}$' e '$G\xi$' por '$\begin{array}{l} \top \xi \equiv c \\ M\xi \end{array}$' na fórmula (35), obtemos



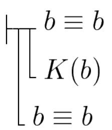
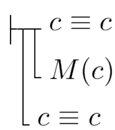
(35a)

De (35a), (82) e TR, obtemos

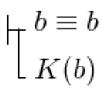


(83).

Das seguintes instâncias de 1BS

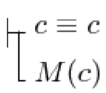
  ,

54BS e MP, derivamos



(84)

e



(85).

De (83), (84), (85) e MP, inferimos

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\top\!\!\top\!\!\top\!\!\top\; \natural_x\left(\begin{array}{l}\top\!\!\top\, x\equiv b\\ \;\llcorner\, K(x)\end{array}\right)\equiv\natural_x\left(\begin{array}{l}\top\!\!\top\, x\equiv c\\ \;\llcorner\, M(x)\end{array}\right)\\
\quad\;\;\llcorner\, K(b)\\
\quad\;\llcorner\, M(c)\\
\;\llcorner\!\top\, \natural_x K(x)\equiv\natural_x M(x)
\end{array}$$

(86).

De (86) e CP, temos

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\top\!\!\top\!\!\top\; \natural_x K(x)\equiv\natural_x M(x)\\
\quad\;\;\llcorner\, K(b)\\
\quad\;\llcorner\, M(c)\\
\;\llcorner\, \natural_x\left(\begin{array}{l}\top\!\!\top\, x\equiv b\\ \;\llcorner\, K(x)\end{array}\right)\equiv\natural_x\left(\begin{array}{l}\top\!\!\top\, x\equiv c\\ \;\llcorner\, M(x)\end{array}\right)
\end{array}$$

[492]

(87).

Da seguinte instância do 52BS

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\top\!\!\top\; \natural_x M(x)\equiv a\\
\quad\;\llcorner\, \natural_x K(x)\equiv a\\
\;\llcorner\, \natural_x K(x)\equiv\natural_x M(x)
\end{array}$$

[493]

e CP, obtemos

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\top\!\!\top\; \natural_x K(x)\equiv a\\
\quad\;\llcorner\!\top\, \natural_x M(x)\equiv a\\
\;\llcorner\, \natural_x K(x)\equiv\natural_x M(x)
\end{array}$$

(52BSa)

De (52BSa), (87) e TR, derivamos

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\top\!\!\top\!\!\top\!\!\top\; \natural_x K(x)\equiv a\\
\quad\quad\llcorner\!\top\, \natural_x M(x)\equiv a\\
\quad\;\;\llcorner\, K(b)\\
\quad\;\llcorner\, M(c)\\
\;\llcorner\, \natural_x\left(\begin{array}{l}\top\!\!\top\, x\equiv b\\ \;\llcorner\, K(x)\end{array}\right)\equiv\natural_x\left(\begin{array}{l}\top\!\!\top\, x\equiv c\\ \;\llcorner\, M(x)\end{array}\right)
\end{array}$$

(88).

Substituindo-se '$f\xi$' por

---

492 Esta proposição afirma que se o número que pertence ao conceito "cair sob *K*, mas ser diferente de *b*" é igual ao número que pertence ao conceito "cair sob *M*, mas ser diferente de *c*" e se *c* cai sob *M* e se *b* cai sob *K*, então o número que pertence a *K* é igual ao número que pertence a *M*.

493 Instancie '$f\xi$' por '$\xi\equiv a$', '*c*' por '$\natural_x K(x)$' e '*d*' por '$\natural_x M(x)$'.

'
$$\begin{array}{l} \sharp_x K(x) \equiv a \\ \sharp_x M(x) \equiv a \\ K(b) \\ M(c) \\ \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv b \\ K(x) \end{array} \right) \equiv \xi \end{array}$$
',

'*c*' por '$\sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv c \\ M(x) \end{array} \right)$' e '*d*' por '*e*' em 52BS, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash \sharp_x K(x) \equiv a \\ \quad \sharp_x M(x) \equiv a \\ \quad K(b) \\ \quad M(c) \\ \quad \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv b \\ K(x) \end{array} \right) \equiv e \\ \quad \sharp_x K(x) \equiv a \\ \quad \sharp_x M(x) \equiv a \\ \quad K(b) \\ \quad M(c) \\ \quad \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv b \\ K(x) \end{array} \right) \equiv \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv c \\ M(x) \end{array} \right) \\ \quad \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv c \\ M(x) \end{array} \right) \equiv e \end{array}$$

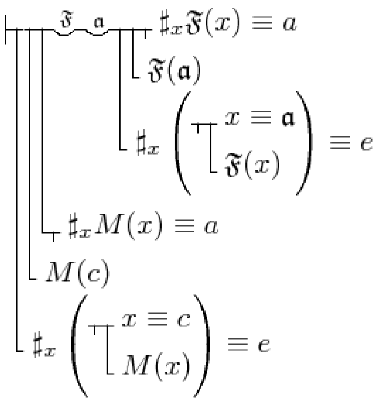
(52BSb)

De (52BSb), (88) e MP, derivamos

$$\begin{array}{l} \vdash \sharp_x K(x) \equiv a \\ \quad K(b) \\ \quad \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv b \\ K(x) \end{array} \right) \equiv e \\ \quad \sharp_x M(x) \equiv a \\ \quad M(c) \\ \quad \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv c \\ M(x) \end{array} \right) \equiv e \end{array}$$

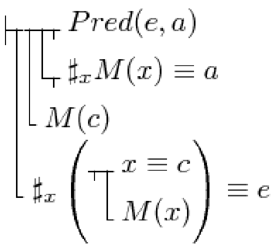
(89).

Aplicando CGC2 e CGC1, inferimos



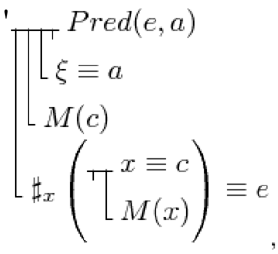
(90).

De (90), (F6) e TR, temos

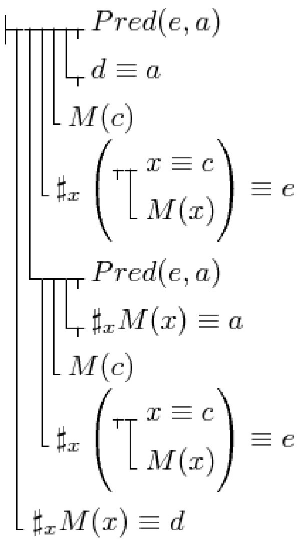


(91).

Substituindo-se '$f\xi$' por

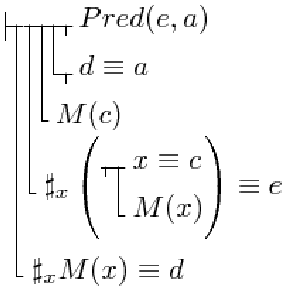


'*c*' por '$\sharp_x M(x)$' em 52BS, obtemos



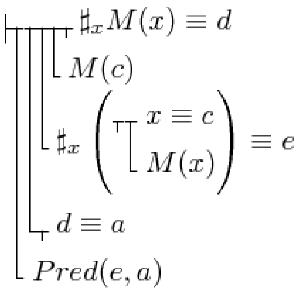
(52BSc).

De (52BSc), (91) e MP, derivamos



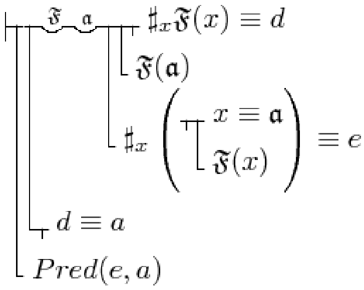
(92).

De (92) e CP, obtemos



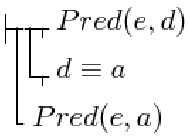
(93).

Aplicando CGC2 e CGC1, temos



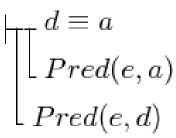
(94).

De (94), (F6) e TR, inferimos



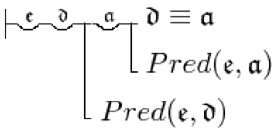
(95).

De (95) e CP, obtemos



(96).

Aplicando GU1, derivamos



(97).

De (97), (A1) e MP, inferimos

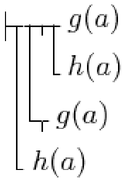
$\vdash Func_{\alpha\beta}Pred(\alpha, \beta)$

(Teor. 5).

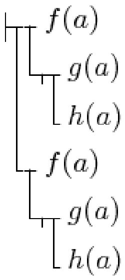
Teorema 6[494]

$$\vdash UpM_{\alpha\beta}Pred(\alpha, \beta)^{495}.$$

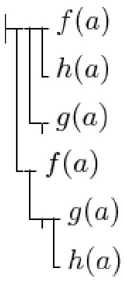
Da seguinte instância do Teorema IfGGA



e da seguinte instância de 27BS



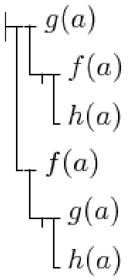
por meio da TR, obtemos



(98).

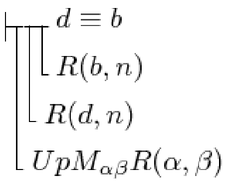
Por CP, temos

494 Em **GGA1** (pp. 113-127), é feito uso do teorema IVa na prova desta proposição.
495 A relação de predecessão é Um-para-Muitos.

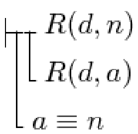


(99).

Da seguinte instância de (B2)

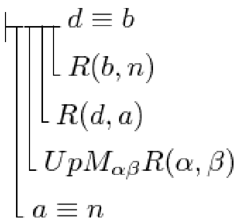


e da seguinte instância de 57BS

 [496]

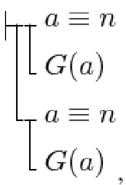
,

por meio de TR, inferimos



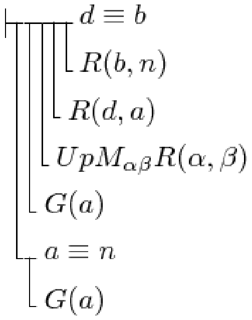
(100).

Da seguinte instância de 27BS



,

(100) e TR, obtemos

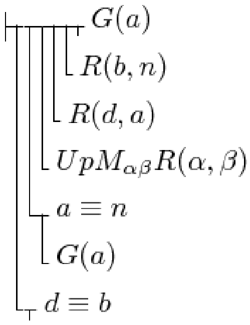


(101).

---

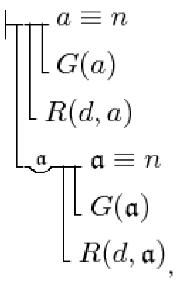
496 Substitua '$f\xi$' por '$R(d, \xi)$', '*c*' por '*a*' e '*d*' por '*n*'.

Por CP, temos

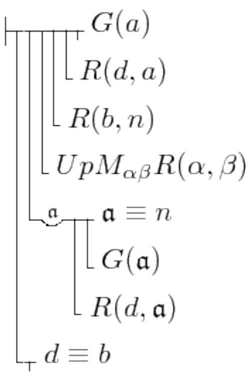


(102).

Da seguinte instância de 58BS1

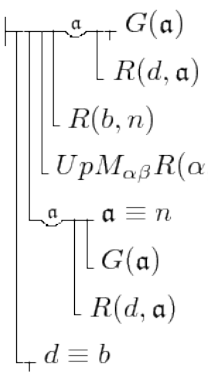


(102) e TR, inferimos



(103).

Aplicando CGC1, temos



(104).

Da seguinte instância de (C3)

$$
\begin{array}{l}
\vdash F(d) \\
\quad \smile^{\mathfrak{a}}\ G(a) \\
\qquad R(d, a) \\
Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(F\alpha, G\beta)
\end{array}
$$,

(104) e TR, obtemos

$$
\begin{array}{l}
\vdash F(d) \\
\quad R(b, n) \\
\quad UpM_{\alpha\beta}R(\alpha, \beta) \\
\quad \smile^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a} \equiv n \\
\qquad G(\mathfrak{a}) \\
\qquad R(d, \mathfrak{a}) \\
\quad \top\ d \equiv b \\
Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(F\alpha, G\beta)
\end{array}
$$

(105).

Por CP, obtemos

$$
\begin{array}{l}
\vdash d \equiv b \\
\quad F(d) \\
\quad \smile^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a} \equiv n \\
\qquad G(\mathfrak{a}) \\
\qquad R(d, \mathfrak{a}) \\
\quad R(b, n) \\
\quad UpM_{\alpha\beta}R(\alpha, \beta) \\
Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(F\alpha, G\beta)
\end{array}
$$

(106).

Da seguinte instância de (A2)

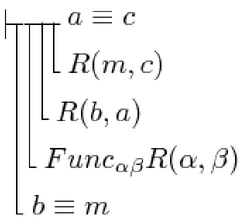
$$
\begin{array}{l}
\vdash a \equiv c \\
\quad R(m, c) \\
\quad R(m, a) \\
Func_{\alpha\beta}R(\alpha, \beta)
\end{array}
$$

e da seguinte instância de 57BS

$$
\begin{array}{l}
\vdash R(m, a) \\
\quad R(b, a) \\
b \equiv m
\end{array}
$$ [497],

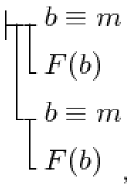
por meio de TR, obtemos

497 Substitua '$f\xi$' por '$R(\xi, a)$', 'c' por 'b' e 'd' por 'm'.



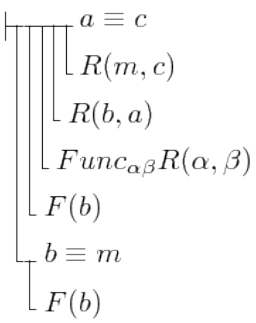
(107).

Da seguinte instância de 27BS



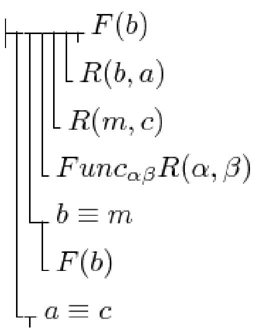
,

(107) e TR, inferimos



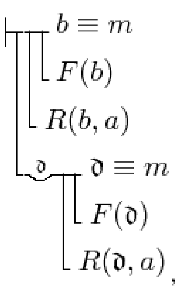
(108).

Por CP, obtemos



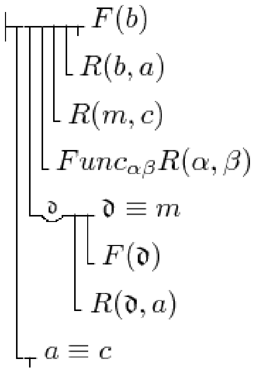
(109).

Da seguinte instância de 58BS1



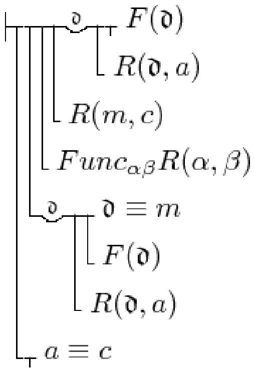
,

(109) e TR, inferimos



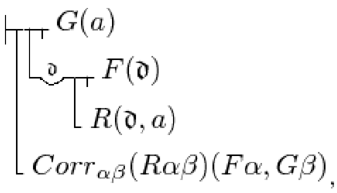
(110).

Aplicando CGC1, temos

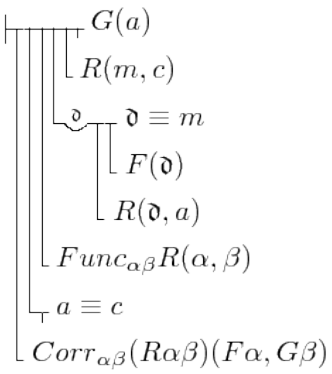


(111).

Da seguinte instância de (C4)

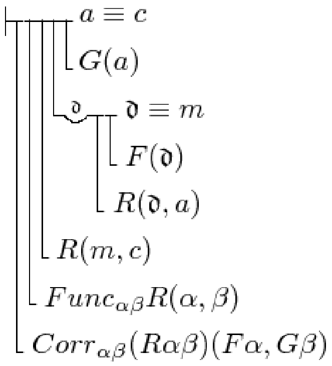


(111) e TR, obtemos

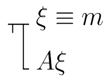
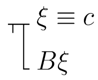


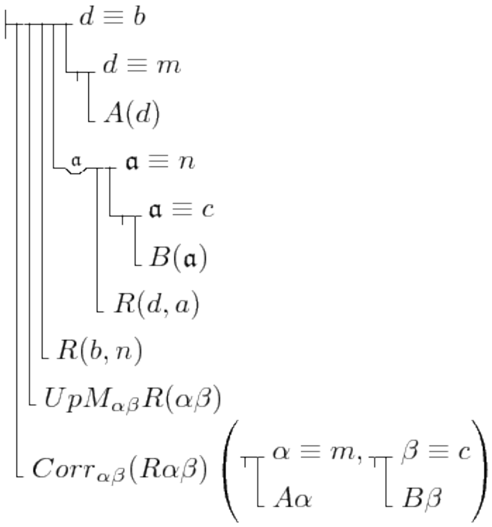
(112).

Por CP, temos



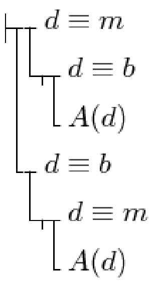
(113).

Na fórmula (106), substituindo-se '$F\xi$' por  e '$G\xi$' por , obtemos



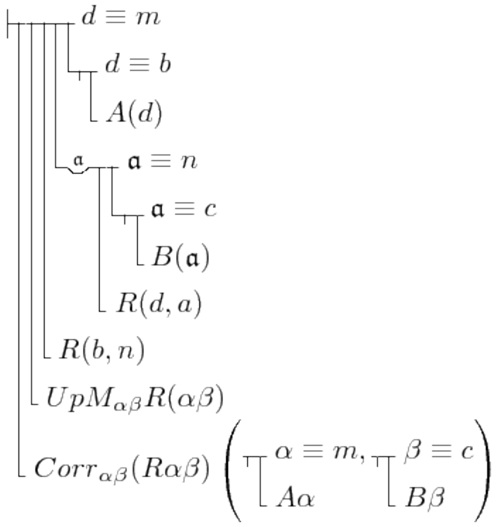
(114).

Na fórmula (99), substituindo-se '*a*' por '*d*', '*f*ξ' por 'ξ = *b*', '*g*ξ' por 'ξ= *m*' e '*h*ξ' por '*A*ξ', obtemos



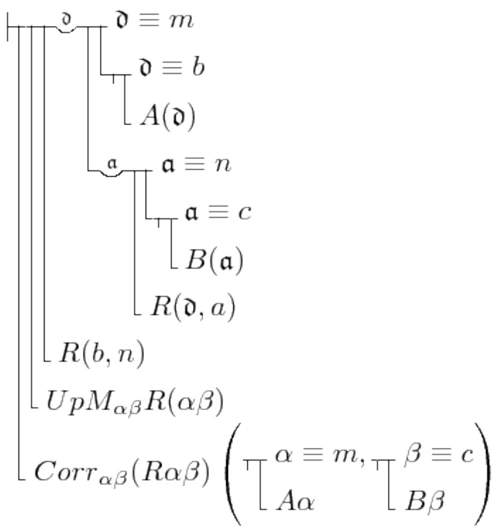
(115).

De (114), (115) e TR, obtemos



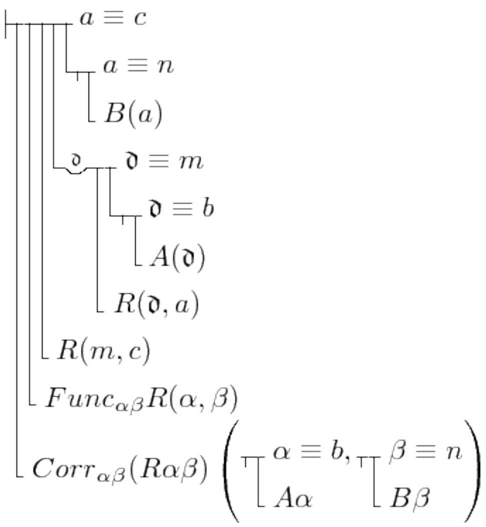
(116).

Aplicando CGC1, obtemos



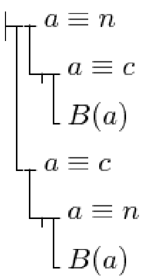
(117).

Na fórmula (113), substituindo-se '$F\xi$' por '$\xi \equiv b$, $A\xi$' e '$G\xi$' por $\xi \equiv n$, $B\xi$, obtemos



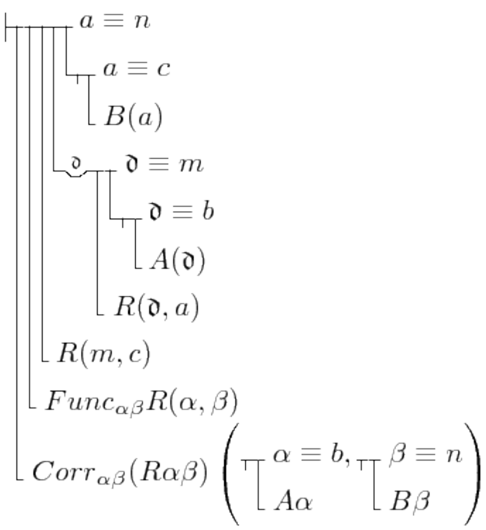
(118).

Na fórmula (99), substituindo '*f*ξ' por 'ξ=*c*', '*g*ξ' por 'ξ=*n*' e '*h*ξ' por '*B*ξ', obtemos



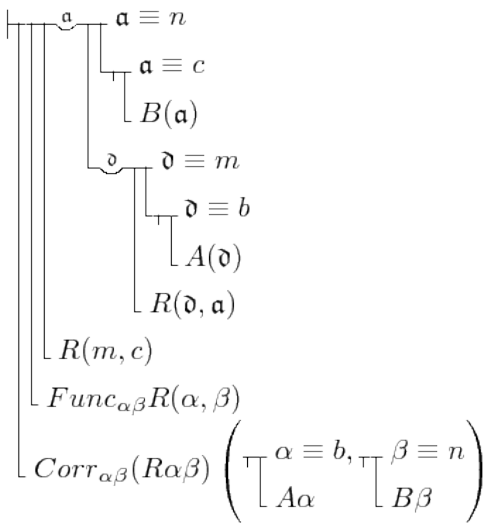
(119).

De (118), (119) e TR, obtemos



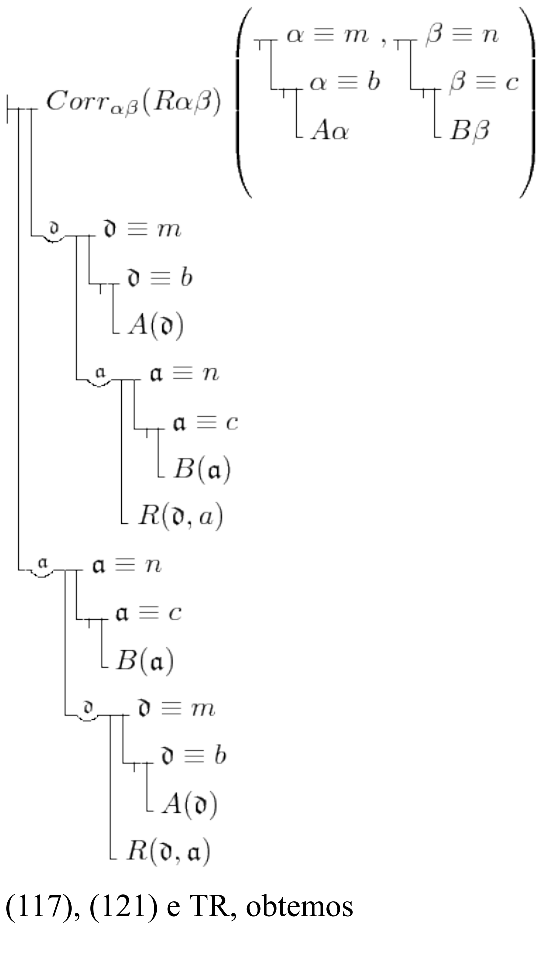
(120).

Aplicando CGC1, derivamos

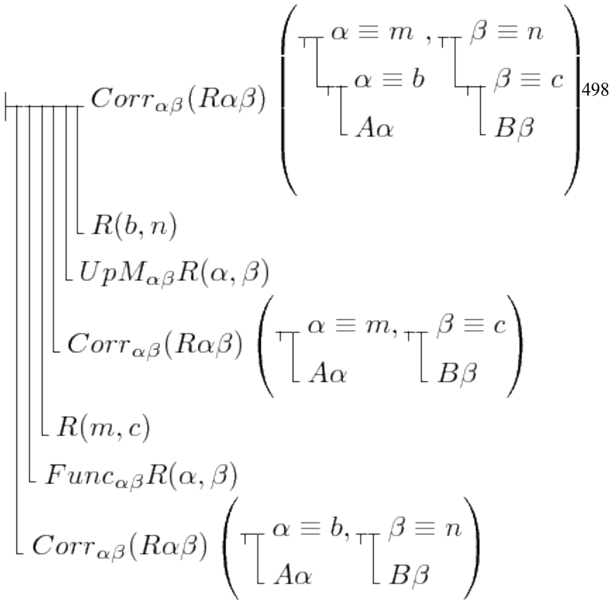


(121).

Da seguinte instância de (C1)

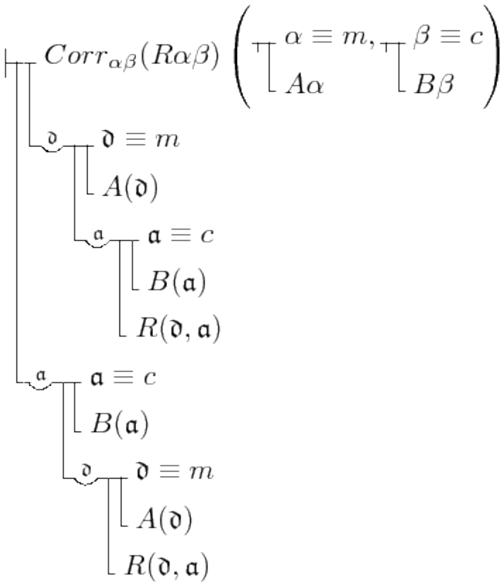


(117), (121) e TR, obtemos

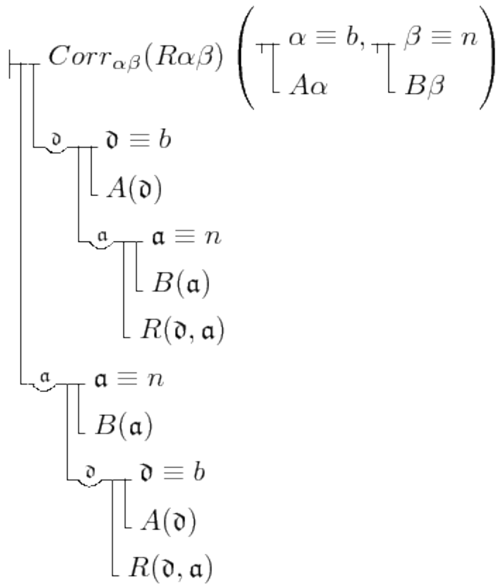


(122).

Das seguintes instâncias de (C1)



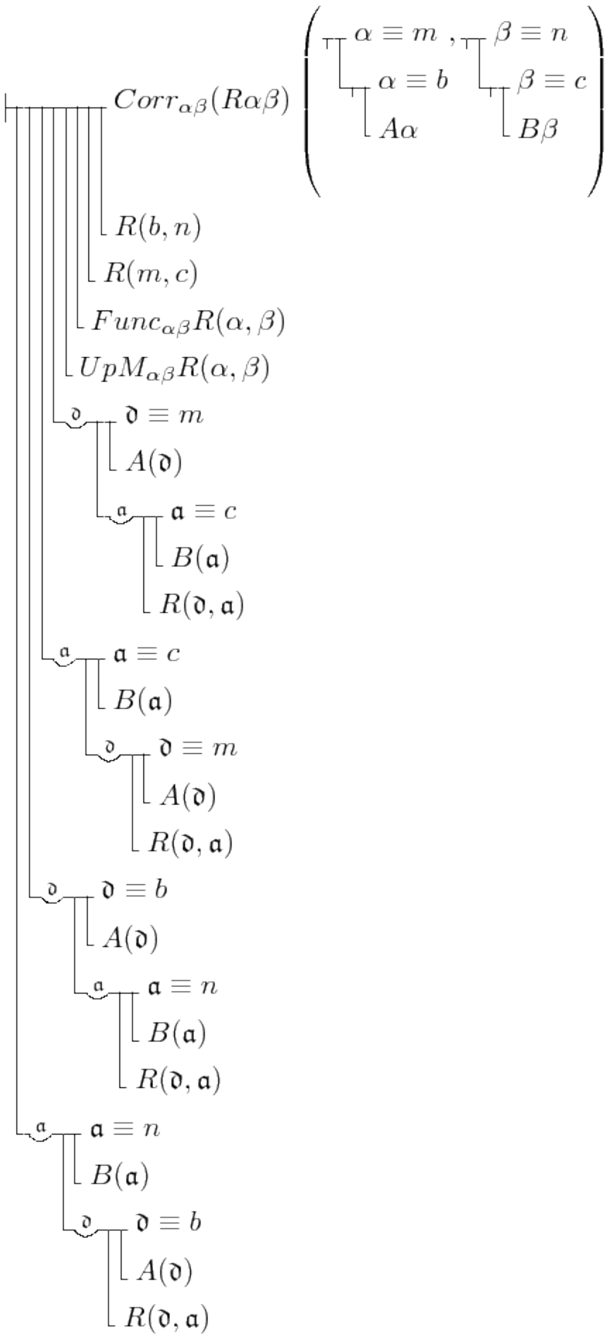
,



e (122), por meio de TR, inferimos

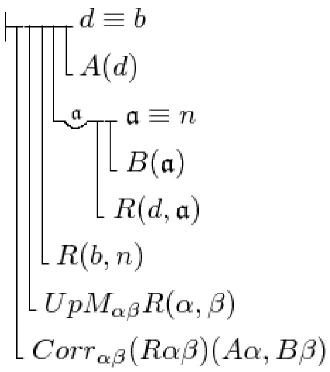
---

498 Esta proposição afirma que se $R(x,y)$ correlaciona os conceitos “cair sob A, mas ser diferente de b” e “cair sob B, mas ser diferente n” e se $R(x,y)$ é funcional e se $R(m,c)$ e se $R(x,y)$ correlaciona os conceitos “cair sob A, mas ser diferente de m” e “cair sob B, mas ser diferente de c” e se $R(x,y)$ é Um-para-Muitos e se $R(b,n)$, então $R(x,y)$ correlaciona os conceitos “cair sob A, mas ser diferente de b e ser diferente de m” e “cair sob B, mas ser diferente de c e ser diferente de n”.



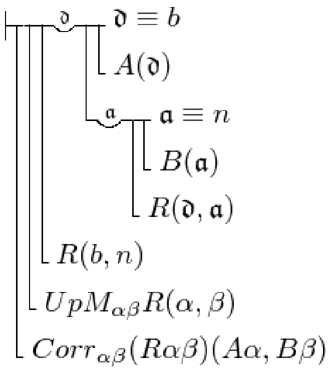
(123).

Na fórmula (106), substituindo-se '*F*ξ' por '*A*ξ' e '*G*ξ' por '*B*ξ', obtemos



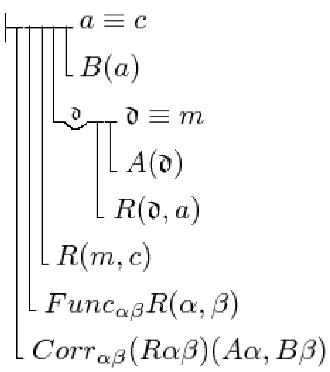
(124).

Aplicando CGC1, obtemos



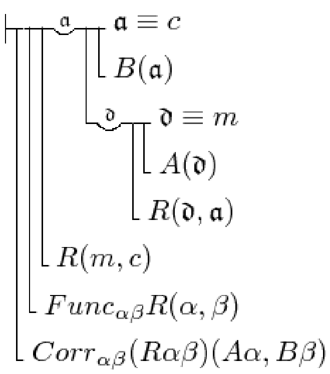
(125).

Na fórmula (113), substituindo-se '*F*ξ' por '*A*ξ' e '*G*ξ' por '*B*ξ', obtemos



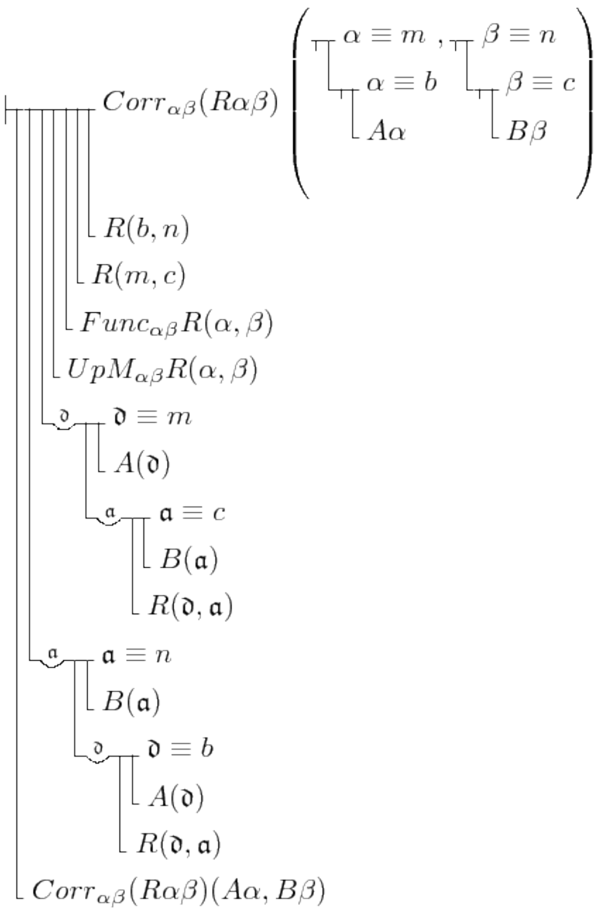
(126).

Aplicando CGC1, temos



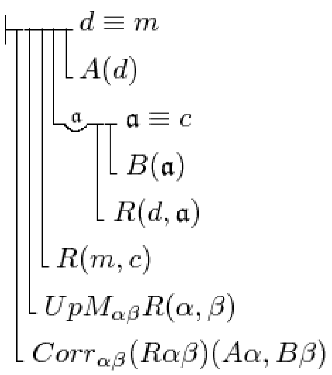
(127).

De (123), (125), (127) e TR, inferimos



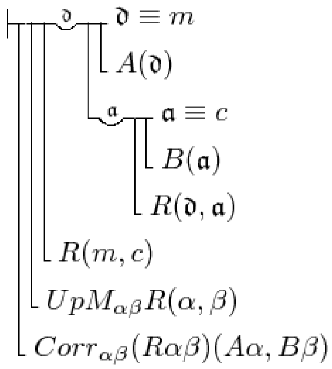
(128).

Na fórmula (106), substituindo-se '*F*ξ' por '*A*ξ', '*G*ξ' por '*B*ξ', '*b*' por '*m*' e '*n*' por '*c*', obtemos



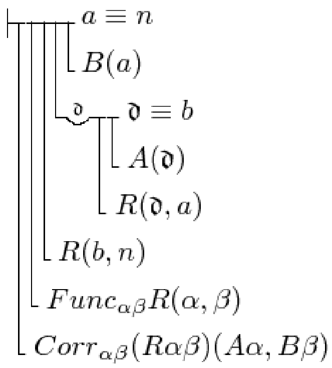
(129).

Aplicando CGC1, temos



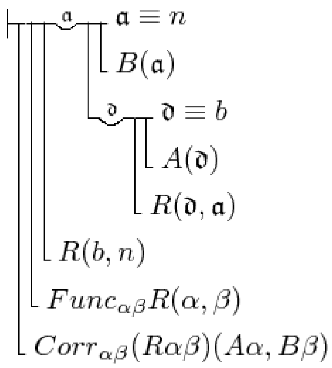
(130).

Na fórmula (113), substituindo-se '*F*ξ' por '*A*ξ', '*G*ξ' por '*B*ξ', '*m*' por '*b*' e '*c*' por '*n*', obtemos



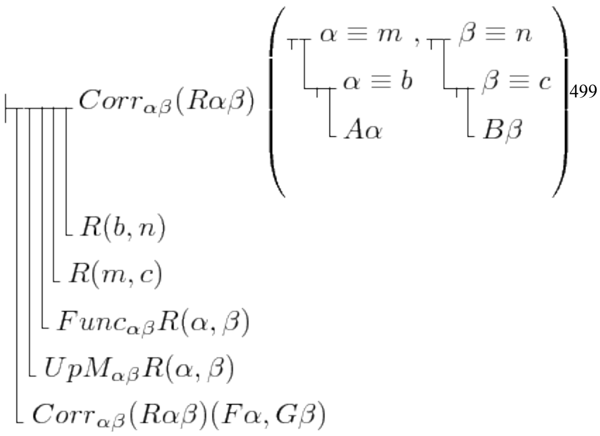
(131).

Aplicando CGC1, temos



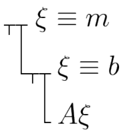
(132).

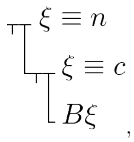
De (128), (130), (132) e TR, inferimos



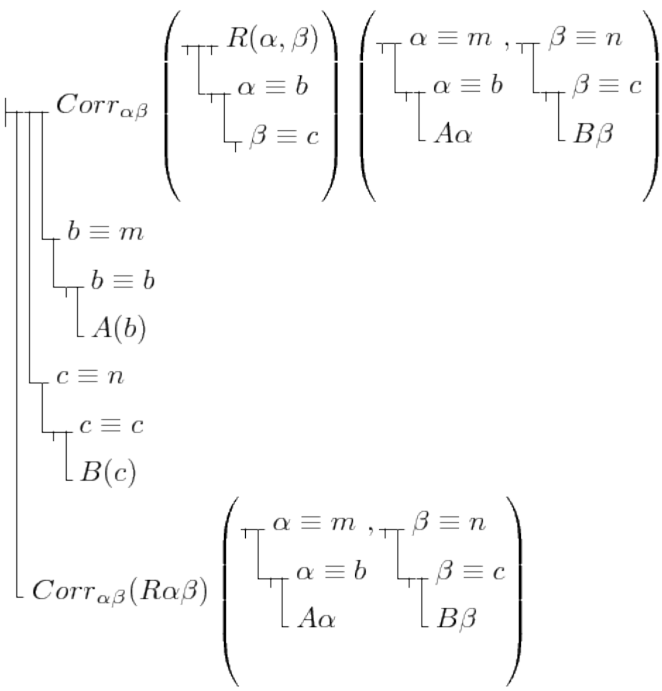
(133).

Na fórmula (14), substituindo-se '*F*ξ' e *G*ξ' por





respectivamente, obtemos



(134).

Da seguinte instância de 36BS

499 Se *R* correlaciona os conceitos *A* e *B* e se *R* é Um-para-Muitos e se *R* é funcional e se *m* está na relação *R* com *c* e se *b* está na relação R com *n*, então *R* correlaciona os conceitos "cair sob *A*, mas ser diferente de *b* e ser diferente de *m*" e "cair sob *B*, mas ser diferente de *c* e ser diferente de *n*".

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\!\!\top\!\!\!\top\; b \equiv m \\
\;\;\lfloor\; A(b) \\
\;\lfloor\!\!\top\; b \equiv b \\
\lfloor\; b \equiv b
\end{array},$$

54BS e MP, derivamos

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\!\!\top\; b \equiv m \\
\;\lfloor\; A(b) \\
\lfloor\!\!\top\; b \equiv b
\end{array}$$

(135).

Por CP, inferimos

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\!\!\top\; b \equiv b \\
\;\lfloor\; A(b) \\
\lfloor\!\!\top\; b \equiv m
\end{array}$$

(136).

Novamente, por CP obtemos

$$\begin{array}{l}
\vdash\; b \equiv m \\
\lfloor\!\!\top\; b \equiv b \\
\;\;\lfloor\; A(b)
\end{array}$$

(137).

A prova da proposição

$$\begin{array}{l}
\vdash\; c \equiv n \\
\lfloor\!\!\top\; c \equiv c \\
\;\;\lfloor\; B(c)
\end{array}$$

(138).

é similar à da proposição (137).

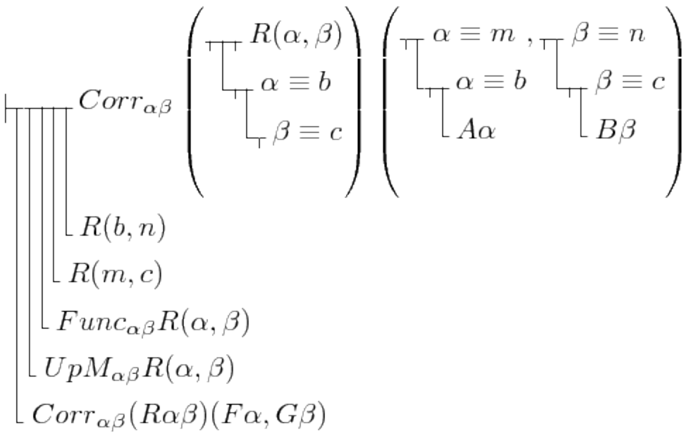
De (134), (137), (138) e MP, obtemos

$$\begin{array}{l}
\vdash\; Corr_{\alpha\beta}\left(\begin{array}{l} \top\!\!\top\; R(\alpha,\beta) \\ \;\lfloor\!\!\top\; \alpha \equiv b \\ \;\;\lfloor\!\!\top\; \beta \equiv c \end{array}\right)\left(\begin{array}{ll} \top\; \alpha \equiv m\;, & \top\; \beta \equiv n \\ \lfloor\!\!\top\; \alpha \equiv b & \lfloor\!\!\top\; \beta \equiv c \\ \;\lfloor\; A\alpha & \;\lfloor\; B\beta \end{array}\right)^{500} \\
\lfloor\; Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)\left(\begin{array}{ll} \top\; \alpha \equiv m\;, & \top\; \beta \equiv n \\ \lfloor\!\!\top\; \alpha \equiv b & \lfloor\!\!\top\; \beta \equiv c \\ \;\lfloor\; A\alpha & \;\lfloor\; B\beta \end{array}\right)
\end{array}$$

(139).

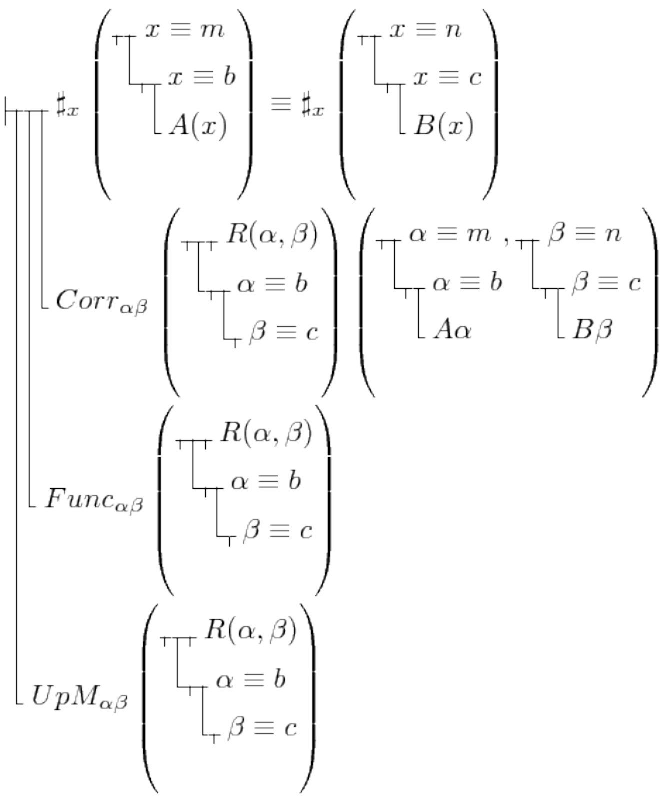
500 Esta proposição afirma que se *R*(*x*,*y*) correlaciona os conceitos "cair sob *A*, mas ser diferente de *b* e ser diferente de *m*" e "cair sob *B*, mas ser diferente de *c* e ser diferente de *n*", então a relação "*x* encontra-se na relação *R* com *y* e *x* é diferente de *b* e *y* é diferente de *c*" correlaciona os conceitos "cair sob *A*, mas ser diferente de *b* e ser diferente de *m*" e "cair sob *B*, mas ser diferente de *c* e ser diferente de *n*".

De (133), (139) e TR, derivamos



(140).

Da seguinte instância de (PH6)



(17), (20) e TR, inferimos

$$
\begin{array}{l}
\vdash \sharp_x\left(\begin{array}{l} x\equiv m \\ \quad x\equiv b \\ \quad A(x)\end{array}\right) \equiv \sharp_x\left(\begin{array}{l} x\equiv n \\ \quad x\equiv c \\ \quad B(x)\end{array}\right) \\
\quad Corr_{\alpha\beta}\left(\begin{array}{l} R(\alpha,\beta) \\ \quad \alpha\equiv b \\ \quad \beta\equiv c\end{array}\right)\left(\begin{array}{l} \alpha\equiv m \\ \quad \alpha\equiv b \\ \quad A\alpha\end{array}, \begin{array}{l} \beta\equiv n \\ \quad \beta\equiv c \\ \quad B\beta\end{array}\right) \\
\quad Func_{\alpha\beta}R(\alpha,\beta) \\
\quad UpM_{\alpha\beta}R(\alpha,\beta)
\end{array}
$$

(141).

De (140), (141) e TR, derivamos

$$
\begin{array}{l}
\vdash \sharp_x\left(\begin{array}{l} x\equiv m \\ \quad x\equiv b \\ \quad A(x)\end{array}\right) \equiv \sharp_x\left(\begin{array}{l} x\equiv n \\ \quad x\equiv c \\ \quad B(x)\end{array}\right) \\
\quad R(b,n) \\
\quad R(m,c) \\
\quad Func_{\alpha\beta}R(\alpha,\beta) \\
\quad UpM_{\alpha\beta}R(\alpha,\beta) \\
\quad Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(A\alpha, B\beta)
\end{array}
$$

(142).

Na fórmula (87), substituindo-se '*b*' por '*m*', '*c*' por '*n*', '*K*ξ' por

'$\begin{array}{l} \xi\equiv b \\ \quad A\xi \end{array}$'

e '*M*ξ' por

'$\begin{array}{l} \xi\equiv c \\ \quad B\xi \end{array}$'

,

obtemos

$$\begin{array}{l}
\vdash \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv b \\ A(x) \end{array} \right) \equiv \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv c \\ B(x) \end{array} \right) \\
\quad m \equiv b \\
\quad A(m) \\
\quad n \equiv c \\
\quad B(n) \\
\quad \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv m \\ x \equiv b \\ A(x) \end{array} \right) \equiv \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv n \\ x \equiv c \\ B(x) \end{array} \right)
\end{array}$$

(143).

De (142), (143) e TR, temos

$$\begin{array}{l}
\vdash \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv b \\ A(x) \end{array} \right) \equiv \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv c \\ B(x) \end{array} \right) \\
\quad m \equiv b \\
\quad A(m) \\
\quad n \equiv c \\
\quad B(n) \\
\quad R(b, n) \\
\quad R(m, c) \\
\quad Func_{\alpha\beta} R(\alpha, \beta) \\
\quad UpM_{\alpha\beta} R(\alpha, \beta) \\
\quad Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(A\alpha, B\beta)
\end{array}$$

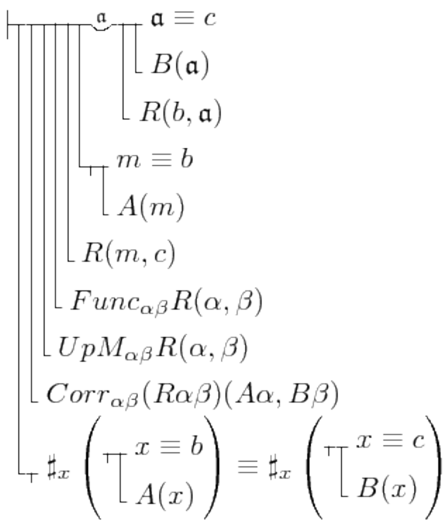
(144).

Por CP, obtemos

$$\begin{array}{l}
\vdash n \equiv c \\
\quad B(n) \\
\quad R(b, n) \\
\quad m \equiv b \\
\quad A(m) \\
\quad R(m, c) \\
\quad Func_{\alpha\beta} R(\alpha, \beta) \\
\quad UpM_{\alpha\beta} R(\alpha, \beta) \\
\quad Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(A\alpha, B\beta) \\
\quad \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv b \\ A(x) \end{array} \right) \equiv \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv c \\ B(x) \end{array} \right)
\end{array}$$

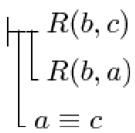
(145).

Aplicando CGC1, derivamos

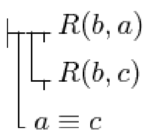


(146).

Da seguinte instância de 52BS

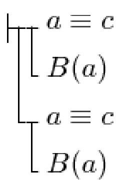


e contraposição, obtemos

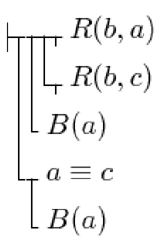


(147).

Da seguinte instância de 27BS

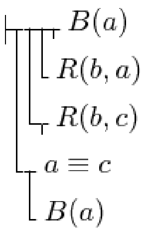


(147) e TR, inferimos



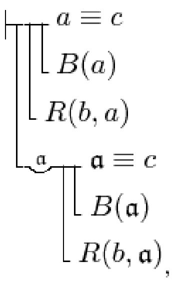
(148).

Por CP, obtemos

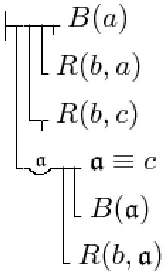


(149).

Da seguinte instância de 58BS1

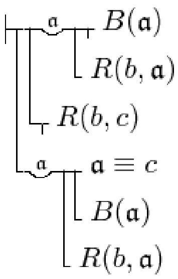


(149) e TR, inferimos



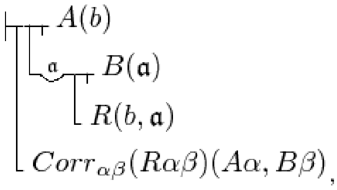
(150).

Aplicando CGC1, obtemos

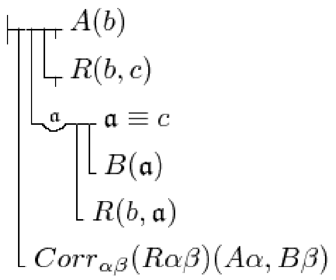


(151).

Da seguinte instância de (C3)

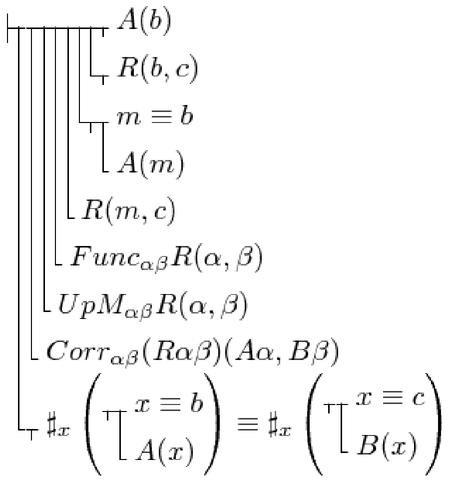


(151) e TR, inferimos



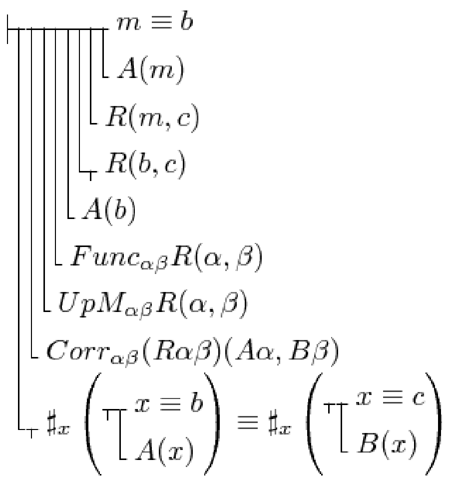
(152).

De (146), (152) e TR, derivamos



(153).

Por CP, obtemos



(154).

Aplicando CGC1, temos

$$
\begin{array}{l}
\vdash\!\!\!-\!\!\!\smile^{\mathfrak{d}}\!\!\top\!\!\top\; \mathfrak{d} \equiv b \\
\qquad\qquad\quad \llcorner\; A(\mathfrak{d}) \\
\qquad\qquad \llcorner\; R(\mathfrak{d}, c) \\
\qquad\quad \llcorner\!\!\top\; R(b, c) \\
\qquad\quad \llcorner\; A(b) \\
\qquad \llcorner\; Func_{\alpha\beta} R(\alpha, \beta) \\
\quad\;\; \llcorner\; UpM_{\alpha\beta} R(\alpha, \beta) \\
\quad \llcorner\; Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(A\alpha, B\beta) \\
\;\; \llcorner\!\!\top\; \sharp_x \left(\begin{array}{l} \top\!\!\top\; x \equiv b \\ \;\;\llcorner\; A(x) \end{array} \right) \equiv \sharp_x \left(\begin{array}{l} \top\!\!\top\; x \equiv c \\ \;\;\llcorner\; B(x) \end{array} \right)
\end{array}
$$

(155).

Da seguinte instância de 52BS

$$
\begin{array}{l}
\vdash\!\!\top\!\!\top\; R(b, c)^{501} \\
\quad \llcorner\; R(a, c) \\
\;\; \llcorner\; a \equiv b
\end{array}
$$

e CP, derivamos

$$
\begin{array}{l}
\vdash\!\!\top\!\!\top\; R(a, c) \\
\quad \llcorner\!\!\top\; R(b, c) \\
\;\; \llcorner\; a \equiv b
\end{array}
$$

(156).

Da seguinte instância de 27BS

$$
\begin{array}{l}
\vdash\!\!\top\!\!\top\; a \equiv b \\
\quad \llcorner\; A(a) \\
\;\; \llcorner\!\!\top\; a \equiv b \\
\quad\;\; \llcorner\; A(a)
\end{array}
$$

,

(156) e TR, obtemos

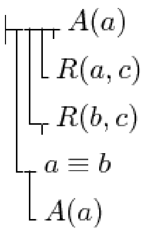
$$
\begin{array}{l}
\vdash\!\!\top\!\!\top\!\!\top\; R(a, c) \\
\qquad \llcorner\!\!\top\; R(b, c) \\
\quad \llcorner\; A(a) \\
\;\; \llcorner\!\!\top\; a \equiv b \\
\quad\;\; \llcorner\; A(a)
\end{array}
$$

(157).

Por CP, temos

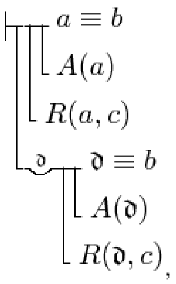
---

501 Substitua '$f\xi$' por ' $R(\xi, c)$”, 'c' por 'a' e 'd' por 'b'.

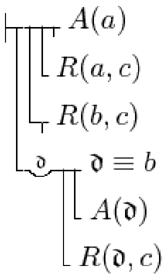


(158).

Da seguinte instância de 58BS1

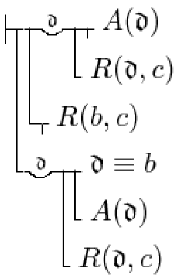


(158) e TR, inferimos



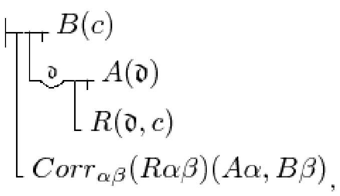
(159).

Aplicando CGC1, derivamos



(160).

Da seguinte instância de (C4)



(160) e TR, obtemos

$$
\begin{array}{l}
\vdash B(c) \\
\quad R(b, c) \\
\quad \overset{\mathfrak{d}}{\smile}\ \mathfrak{d} \equiv b \\
\qquad A(\mathfrak{d}) \\
\qquad R(\mathfrak{d}, c) \\
\quad Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(A\alpha, B\beta)
\end{array}
$$

(161).

De (155), (161) e TR, inferimos

$$
\begin{array}{l}
\vdash B(c) \\
\quad R(b, c) \\
\quad A(b) \\
\quad Func_{\alpha\beta}R(\alpha, \beta) \\
\quad UpM_{\alpha\beta}R(\alpha, \beta) \\
\quad Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(A\alpha, B\beta) \\
\quad \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv b \\ A(x) \end{array} \right) \equiv \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv c \\ B(x) \end{array} \right)
\end{array}
$$

(162).

Por CP, temos

$$
\begin{array}{l}
\vdash \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv b \\ A(x) \end{array} \right) \equiv \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv c \\ B(x) \end{array} \right) \\
\quad R(b, c) \\
\quad A(b) \\
\quad B(c) \\
\quad Func_{\alpha\beta}R(\alpha, \beta) \\
\quad UpM_{\alpha\beta}R(\alpha, \beta) \\
\quad Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(A\alpha, B\beta)
\end{array}
$$

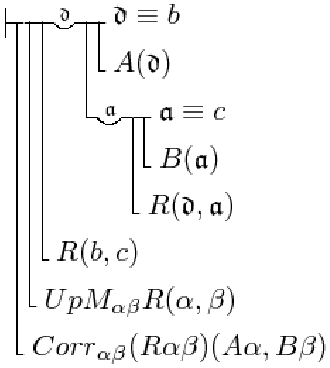
(163).

Na fórmula (106), substituindo-se '*n*' por '*c*', '*F*ξ' por '*A*ξ' e '*G*ξ' por '*B*ξ', obtemos

$$
\begin{array}{l}
\vdash d \equiv b \\
\quad A(d) \\
\quad \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \mathfrak{a} \equiv c \\
\qquad B(\mathfrak{a}) \\
\qquad R(d, \mathfrak{a}) \\
\quad R(b, c) \\
\quad UpM_{\alpha\beta}R(\alpha, \beta) \\
\quad Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(A\alpha, B\beta)
\end{array}
$$

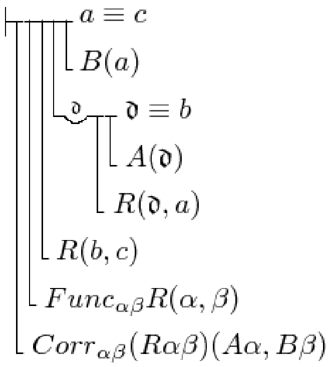
(164).

Aplicando CGC1, temos



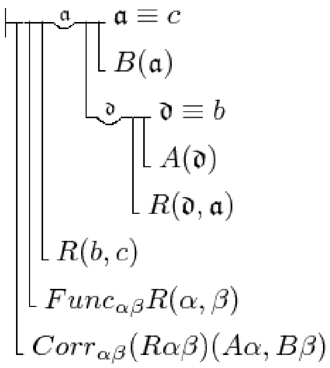
(165).

Na fórmula (113), substituindo-se '*m*' por '*b*', '*F*ξ' por '*A*ξ' e '*G*ξ' por '*B*ξ', obtemos



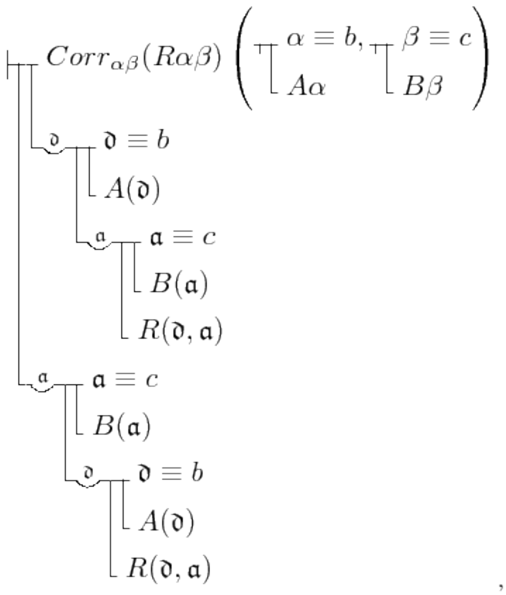
(166).

Aplicando CGC1, temos

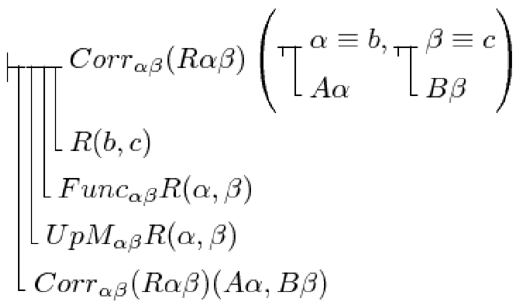


(167).

Da seguinte instância de (C1)

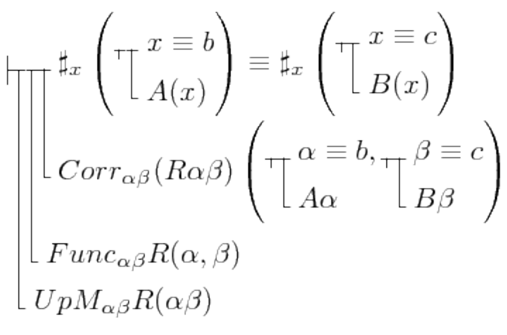


(165), (167) e TR, inferimos



(168).

Da seguinte instância de (PH6)



(168) e TR, derivamos

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\top\!\top\!\top\!\top\; \sharp_x\left(\begin{array}{l}\top\!\!\!\!\!\!\quad x \equiv b\\ \llcorner\, A(x)\end{array}\right) \equiv \sharp_x\left(\begin{array}{l}\top\!\!\!\!\!\!\quad x \equiv c\\ \llcorner\, B(x)\end{array}\right)\\
\qquad\quad \llcorner\, R(b,c)\\
\qquad \llcorner\, Func_{\alpha\beta}R(\alpha,\beta)\\
\quad\ \llcorner\, UpM_{\alpha\beta}R(\alpha\beta\\
\quad \llcorner\, Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(A\alpha,B\beta)
\end{array}$$ [502]

(169).

De (163), (169) e TMI, obtemos

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\top\!\top\!\top\!\top\!\top\; \sharp_x\left(\begin{array}{l}\top\!\!\!\!\!\!\quad x \equiv b\\ \llcorner\, A(x)\end{array}\right) \equiv \sharp_x\left(\begin{array}{l}\top\!\!\!\!\!\!\quad x \equiv c\\ \llcorner\, B(x)\end{array}\right)\\
\qquad\qquad \llcorner\, Func_{\alpha\beta}R(\alpha,\beta)\\
\qquad\quad \llcorner\, UpM_{\alpha\beta}R(\alpha,\beta)\\
\qquad \llcorner\, Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(A\alpha,B\beta)\\
\quad\ \llcorner\, A(b)\\
\quad \llcorner\, B(c)
\end{array}$$ [503]

(170).

Por CP, temos

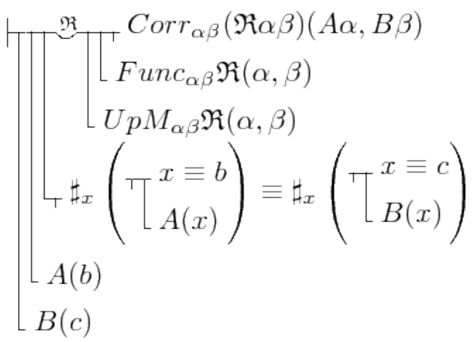
$$\begin{array}{l}
\vdash\!\top\!\top\!\top\!\top\!\top\; Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(A\alpha,B\beta)\\
\qquad\qquad \llcorner\, Func_{\alpha\beta}R(\alpha,\beta)\\
\qquad\quad \llcorner\, UpM_{\alpha\beta}R(\alpha,\beta)\\
\qquad \llcorner\!\top\, \sharp_x\left(\begin{array}{l}\top\!\!\!\!\!\!\quad x \equiv b\\ \llcorner\, A(x)\end{array}\right) \equiv \sharp_x\left(\begin{array}{l}\top\!\!\!\!\!\!\quad x \equiv c\\ \llcorner\, B(x)\end{array}\right)\\
\quad\ \llcorner\, A(b)\\
\quad \llcorner\, B(c)
\end{array}$$

(171).

Aplicando CGC2, obtemos

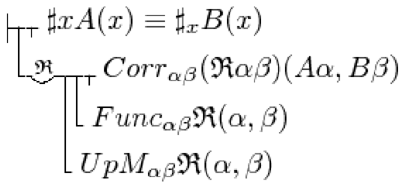
502 Se *R* correlaciona os conceitos *A* e *B* e se *R* é Um-para-Muitos e se *R* é funcional e se *b* está na relação *R* com *c*, então o número que pertence ao conceito "cair sob *A*, mas ser diferente de *b*" é igual ao número que pertence ao conceito "cair sob *B*, mas ser diferente de *c*".

503 Se *c* cai sob *B* e se *b* cai sob *A* e se *R* correlaciona os conceitos *A* e *B* e se *R* é Um-para-Muitos e se *R* é funcional, então o número que pertence ao conceito "cair sob *A*, mas ser diferente de *b*" é igual ao número que pertence ao conceito "cair sob *B*, mas ser diferente de *c*".



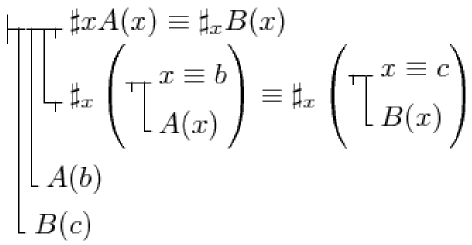
(172).

Da seguinte instância de (PH3)



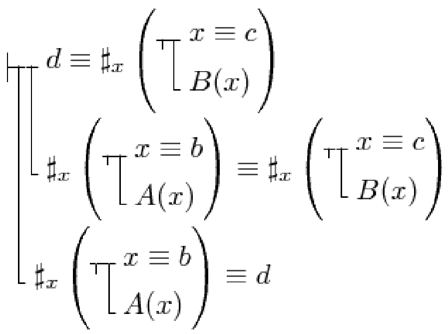
,

(172) e TR, temos

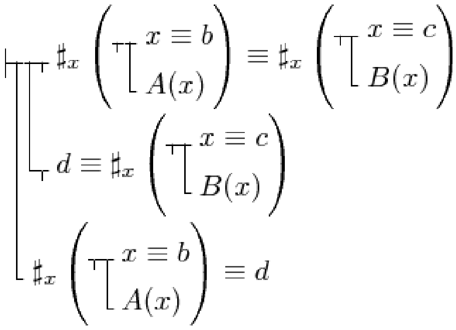


(173).

Da seguinte instância de 52BS

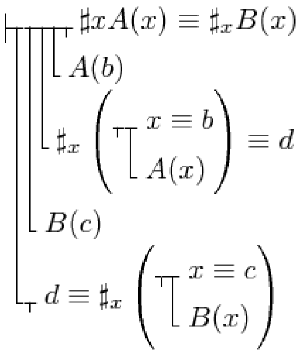


e CP, obtemos



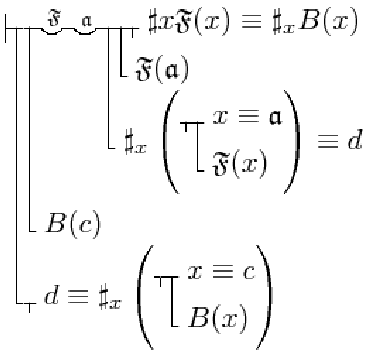
(174).

De (173), (174) e , inferimos



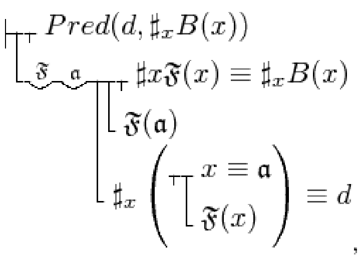
(175).

Aplicando CGC2 e CGC1, obtemos

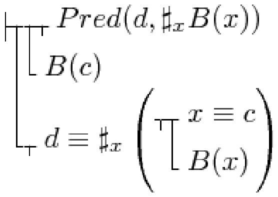


(176).

Da seguinte instância de (F6)

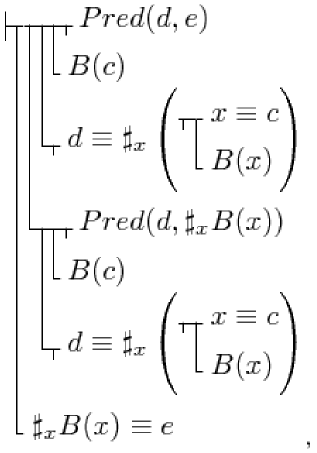


(176) e TR, derivamos



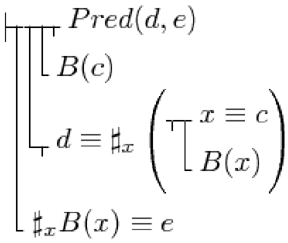
(177).

Da seguinte instância de 52BS



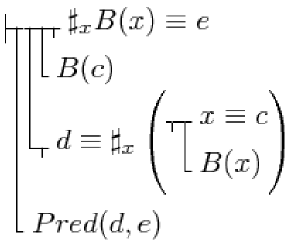
,

(177) e MP, inferimos



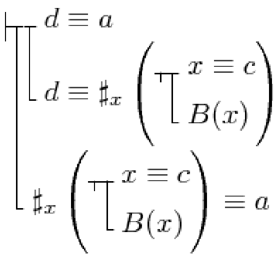
(178).

Por CP, obtemos

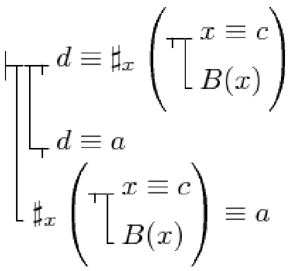


(179).

Da seguinte instância de 52BS

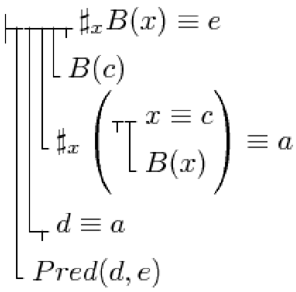


e CP, obtemos



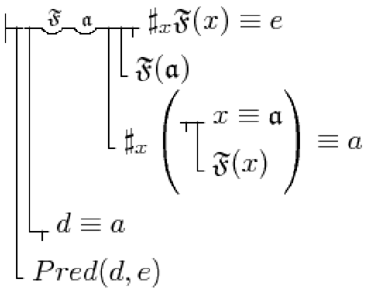
(180).

De (179), (180) e TR, inferimos



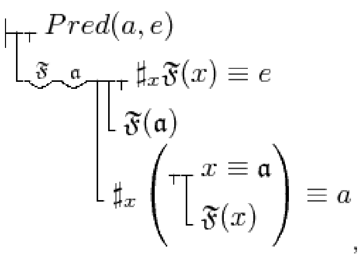
(181).

Aplicando CGC2 e CGC1, obtemos



(182).

Da seguinte instância de (F6)



,

(182) e TR, derivamos

$$
\begin{array}{l}
\vdash\!\top\!\!\top Pred(a,e) \\
\quad\;\, \llcorner\!\top d \equiv a \\
\quad \llcorner\, Pred(d,e)
\end{array}
$$

(183).

Por CP, obtemos

$$
\begin{array}{l}
\vdash\!\top\!\!\top d \equiv a \\
\quad\;\, \llcorner\, Pred(a,e) \\
\quad \llcorner\, Pred(d,e)
\end{array}
$$

(184).

Aplicando GU1, temos

$$
\begin{array}{l}
\vdash\!\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\!\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top \mathfrak{e} \equiv \mathfrak{a} \\
\qquad\qquad\quad \llcorner\, Pred(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \\
\qquad\qquad \llcorner\, Pred(\mathfrak{e},\mathfrak{b})
\end{array}
$$

(185).

De (B1), (185) e MP, obtemos

$$\vdash UpM_{\alpha\beta} Pred(\alpha,\beta)$$

(Teor. 6).

Teorema 7

$$
\begin{array}{l}
\vdash\!\top \sharp_x \left(\begin{array}{l} \top\!\!\top H(x) \\ \;\; \llcorner\, F(x) \end{array} \right) \equiv 0 \\
\quad \llcorner\, \sharp_x H(x) \equiv 0
\end{array}
$$ [504] [505]

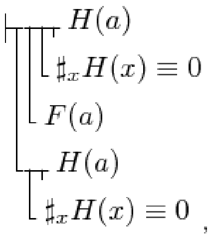
Da seguinte instância de (m3)

$$
\begin{array}{l}
\vdash\!\top H(a) \\
\quad \llcorner\, \sharp_x H(x) \equiv 0
\end{array}
$$

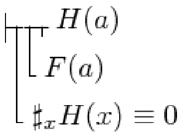
e seguinte instância de 1BS

504 Se o número que pertence ao conceito *H* é zero, então o número que pertence ao conceito "cair sob *H* e cair sob *F*" é zero.

505 Os análogos dos nossos teoremas 7, 8 e 9 em **GGA** (pp. 127-131) não são provados explicitamente por meio do teorema IVa. Porém, ambos dependem de um análogo do nosso Teorema 4, que é provado usando-se o teorema IVa.

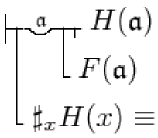


aplicando MP, obtemos



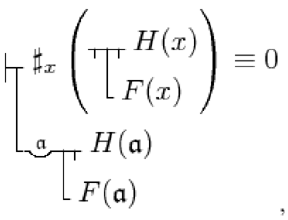
(186).

Aplicando CGC1, temos

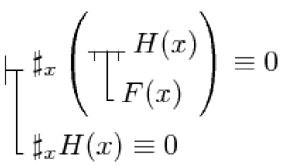


(187).

Da seguinte instância de (Teor. 4)



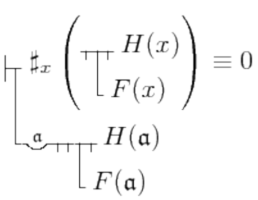
(187) e TR, inferimos



(Teor. 7).

Observação:

Na instância do (Teor 4) acima, usamos inadvertidamente a lei da dupla negação. A instância deveria ser:



Mas, o seguinte é provável no sistema de BS

$$\BGassert\BGconditional{\BGquant{\mathfrak{a}}\BGconditional{F(\mathfrak{a})}{H(\mathfrak{a})}}{\BGquant{\mathfrak{a}}\BGnot\BGnot\BGconditional{F(\mathfrak{a})}{H(\mathfrak{a})}}$$

por meio de 58BS1, 41BS, TR e CGC1.

Teorema 8

$$\BGassert\BGconditional{\BGquant{\mathfrak{a}}\BGconditional{F(\mathfrak{a})}{H(\mathfrak{a})}}{\BGconditional{\sharp_x H(x) \equiv 0}{\sharp_x F(x) \equiv 0}}$$ [506]

Da seguinte instância de (m3)

$$\BGassert\BGconditional{\sharp_x H(x) \equiv 0}{H(a)}$$

e CP, temos

$$\BGassert\BGconditional{H(a)}{\sharp_x H(x) \equiv 0}$$

(188).

Da seguinte instância de 58BS1

$$\BGassert\BGconditional{\BGquant{\mathfrak{a}}\BGconditional{F(\mathfrak{a})}{H(\mathfrak{a})}}{\BGconditional{F(a)}{H(a)}},$$

(188) e TR, derivamos

$$\BGassert\BGconditional{\BGquant{\mathfrak{a}}\BGconditional{F(\mathfrak{a})}{H(\mathfrak{a})}}{\BGconditional{F(a)}{\sharp_x H(x) \equiv 0}}$$

(189).

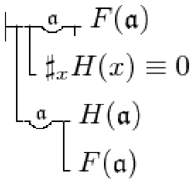
De (189) e CP, temos

$$\BGassert\BGconditional{\BGquant{\mathfrak{a}}\BGconditional{F(\mathfrak{a})}{H(\mathfrak{a})}}{\BGconditional{\sharp_x H(x) \equiv 0}{F(a)}}$$

(190).

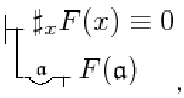
506 Se tudo que cai sob F cai sob H e se o número que pertence a H é zero, então o número que pertence a F também é zero.

Aplicando CGC1, obtemos



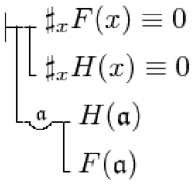
(191).

Da seguinte instância de Teor. 4



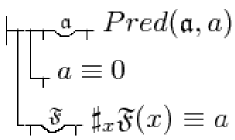
,

(191) e TR, derivamos

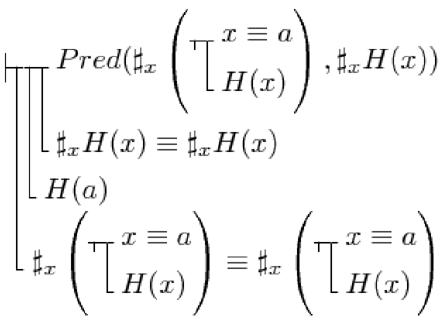


(Teor. 8).

Teorema 9

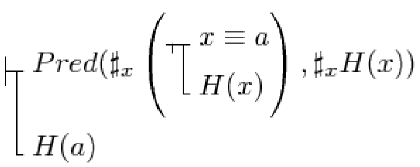
 [507] [508]

Da seguinte instância de (F5)



,

54BS e MP, derivamos



(192).

De (192) e CP, obtemos

507 Este teorema é enunciado em **GLA**, §78: "6. Every Number except 0 follows in the series of natural numbers directly after a Number".

508 Note que ao invés de '$\overset{\mathfrak{F}}{\smile}\ \sharp_x\mathfrak{F}(x) \equiv a$' poderíamos escrever '*Card*(*n*)'.

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\, H(a)\\ \llcorner\!\top\, Pred\left(\sharp_x\left(\begin{array}{l}\top\, x\equiv a\\ \llcorner\, H(x)\end{array}\right), \sharp_x H(x)\right)\end{array}$$

(193).

Da seguinte instância de 58BS1

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\, Pred\left(\sharp_x\left(\begin{array}{l}\top\, x\equiv a\\ \llcorner\, H(x)\end{array}\right), \sharp_x H(x)\right)\\ \llcorner\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, Pred(\mathfrak{a}, \sharp_x H(x))\end{array},$$

(193) e TR, derivamos

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\, H(a)\\ \llcorner\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, Pred(\mathfrak{a}, \sharp_x H(x))\end{array}$$

(194).

Aplicando CGC1, obtemos

$$\begin{array}{l}\vdash\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, H(\mathfrak{a})\\ \llcorner\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, Pred(\mathfrak{a}, \sharp_x H(x))\end{array}$$

(195).

Da seguinte instância de Teor. 4

$$\begin{array}{l}\vdash\, \sharp_x H(x)\equiv 0\\ \llcorner\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, H(\mathfrak{a})\end{array},$$

(195) e TR, obtemos

$$\begin{array}{l}\vdash\, \sharp_x H(x)\equiv 0\\ \llcorner\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, Pred(\mathfrak{a}, \sharp_x H(x))\end{array}$$

(196).

De (196) e contraposição, obtemos

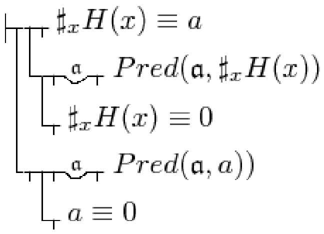
$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, Pred(\mathfrak{a}, \sharp_x H(x))\\ \llcorner\!\top\, \sharp_x H(x)\equiv 0\end{array}$$

(197).

Substituindo-se '$f\xi$' por

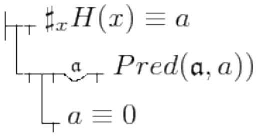
'$\begin{array}{l}\top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, Pred(a, \xi)\\ \llcorner\!\top\, \xi\equiv 0\end{array}$'

'*c*' por '$\sharp_x H(x)$' e '*d*' por '*a*' em IIIdGGA, obtemos



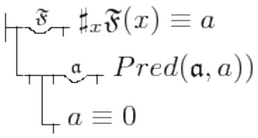
(IIIdGGAa)

De (IIIcGGAa), (197) e MP, inferimos



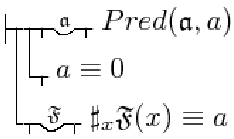
(198).

Aplicando CGC2, obtemos



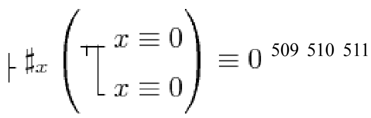
(199).

De (199) e CP, obtemos



(Teor. 9).

Lema 1



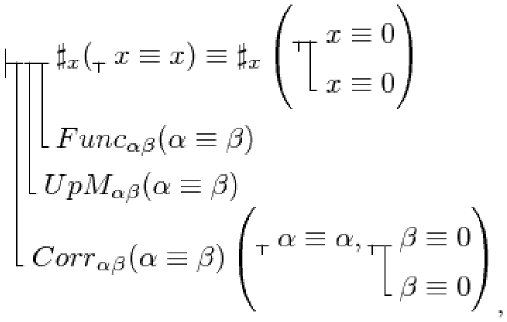
Da seguinte instância de (PH6)

---

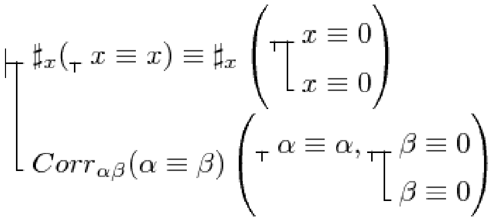
509 O número que pertence ao conceito “ser idêntico a 0, mas ser diferente de 0” é 0.

510 Este lema é importante para a prova de que 1 é o sucessor de 0. Aqui, podemos dizer “o sucessor” porque já provamos que '*Pred*' é funcional.

511 Na prova de um análogo deste lema em **GGA**, Frege usa o teorema 58 (**GGA**, pág. 104) que, por sua vez, depende do teorema IVb, que não é provável em **BS**. Além disso, ele usa um análogo do nosso teorema 4, que depende do teorema IVa.

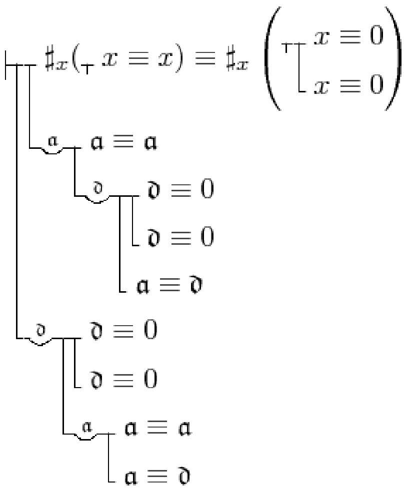


(Teor. 1), (Teor. 2) e MP, obtemos



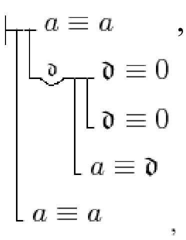
(200).

De (200), (C1) e TR, derivamos

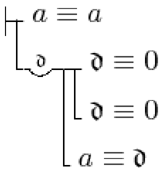


(201).

Da seguinte instância de 1BS

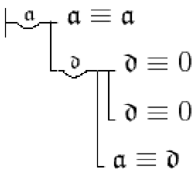


54BS e MP, inferimos



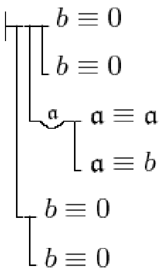
(202).

Aplicando GU1, obtemos

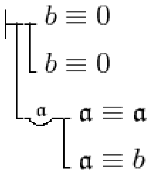


(203).

Da seguinte instância de 1BS

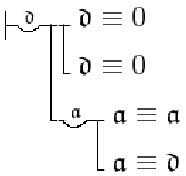


,
27BS e MP, derivamos



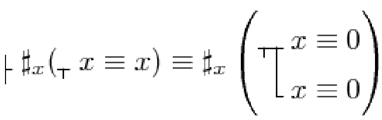
(204).

Aplicando GU1, obtemos



(205).

De (201), (203), (205) e MP, obtemos



(206).

Da seguinte instância de (D1)

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} 0 \equiv \natural_x \left(\top\!\!\begin{array}{l} x \equiv 0 \\ x \equiv 0 \end{array} \right) \\ \natural_x(\top\, x \equiv x) \equiv \natural_x \left(\top\!\!\begin{array}{l} x \equiv 0 \\ x \equiv 0 \end{array} \right) \end{array},$$

(206) e MP, inferimos

$$\vdash 0 \equiv \natural_x \left(\top\!\!\begin{array}{l} x \equiv 0 \\ x \equiv 0 \end{array} \right)$$

(207).

De (207), (55BS) e MP, obtemos

$$\vdash \natural_x \left(\top\!\!\begin{array}{l} x \equiv 0 \\ x \equiv 0 \end{array} \right) \equiv 0$$

(Lem. 1).

Teorema 10

$$\vdash Pred(c, 0)$$[512]

De (188)

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \natural_x H(x) \equiv 0 \\ H(a) \end{array}$$

e da seguinte instância do 1BS

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \natural_x H(x) \equiv 0 \\ H(a) \\ \natural_x \left(\top\!\!\begin{array}{l} x \equiv a \\ H(x) \end{array} \right) \equiv c \\ \begin{array}{l} \natural_x H(x) \equiv 0 \\ H(a) \end{array} \end{array},$$

aplicando MP, obtemos

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \natural_x H(x) \equiv 0 \\ H(a) \\ \natural_x \left(\top\!\!\begin{array}{l} x \equiv a \\ H(x) \end{array} \right) \equiv c \end{array}$$

(208).

Aplicando CGC2 e CGC1, temos

512 Nenhum objeto precede o número 0.

$$\vdash\!\smile^{\mathfrak{F}}\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\begin{array}{l} \sharp_x\mathfrak{F}(x)\equiv 0 \\ \mathfrak{F}(\mathfrak{a}) \\ \sharp_x\left(\begin{array}{l} x\equiv\mathfrak{a}\\ \mathfrak{F}(x)\end{array}\right)\equiv c\end{array}$$

(209).

De (209), (F6) e MP, inferimos

$$\vdash Pred(c,0)$$

(Teor. 10).

Teorema 11

$$\vdash Pred(0,1)$$ [513] [514]

Da seguinte instância de (F5)

$$\vdash \begin{array}{l} Pred(0,1) \\ \sharp_x(x\equiv 0)\equiv 1 \\ 0\equiv 0 \\ \sharp_x\left(\begin{array}{l} x\equiv 0\\ x\equiv 0\end{array}\right)\equiv 0\end{array},$$

54BS, (E), (Lem. 1) e MP, derivamos

$$\vdash Pred(0,1)$$

(Teor. 11).

Teorema 12

$$\vdash 0\equiv 1$$ [515]

Da seguinte instância de IIIbGGA

$$\vdash \begin{array}{l} 0\equiv 1 \\ Pred(0,1) \\ Pred(0,0)\end{array},$$

(Teor. 11) e MP, obtemos

$$\vdash \begin{array}{l} 0\equiv 1 \\ Pred(0,0)\end{array}$$

(210).

De (210), (Teor. 10) e MP, deduzimos

$$\vdash 0\equiv 1$$

(Teor. 12).

---

513 1 é o sucessor de 0.

514 Este teorema é enunciado por Frege em **GLA**, §77.

515 0 é diferente de 1.

Teorema 13

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\!\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, F(\mathfrak{a})\\ \;\llcorner\, \sharp_x F(x)\equiv 1\end{array}$$ [516] [517] [518]

De (Teor. 4)

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\, \sharp_x F(x)\equiv 0\\ \;\llcorner\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, F(\mathfrak{a})\end{array}$$

e CP, obtemos

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\!\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, F(\mathfrak{a})\\ \;\llcorner\!\top\, \sharp_x F(x)\equiv 0\end{array}$$

(211).

Da seguinte instância de IIIdGGA

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\!\!\top\!\!\top\, \sharp_x F(x)\equiv 0\\ \;\;\;\llcorner\, \sharp_x F(x)\equiv 1\\ \;\llcorner\!\top\, 0\equiv 1\end{array}$$,

(211) e TR, obtemos

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\!\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, F(\mathfrak{a})\\ \;\;\;\llcorner\, \sharp_x F(x)\equiv 1\\ \;\llcorner\!\top\, 0\equiv 1\end{array}$$

(212).

De (212), (Teor. 12) e MP, inferimos

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\!\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, F(\mathfrak{a})\\ \;\llcorner\, \sharp_x F(x)\equiv 1\end{array}$$

(Teor. 13).

Teorema 14

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\, a\equiv 1\\ \;\llcorner\, Pred(0,a)\end{array}$$ [519] [520] [521]

Da seguinte instância de (A2)

516 Se o número que pertence ao conceito F é 1, então existe algo que cai sob F.
517 Veja **GLA**, §78, proposição 2.
518 Novamente, este teorema depende de um análogo do nosso teorema 4, que em **GGA** é provado usando-se IVa.
519 Se a sucede 0, então a é igual a 1.
520 Veja **GLA**, §78, proposição 1.
521 Este teorema depende do nosso teorema 5, cujo análogo em **GGA** depende de IVa.

$$\begin{array}{l} \vdash a \equiv 1 \\ \quad Pred(0,1) \\ \quad Pred(0,a) \\ \quad Func_{\alpha\beta}Pred(\alpha,\beta) \end{array},$$

(Teor. 5), (Teor. 11) e MP, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash a \equiv 1 \\ \quad Pred(0,a) \end{array}$$

(Teor. 14).

Teorema 15

$$\begin{array}{l} \vdash d \equiv a \\ \quad F(a) \\ \quad \sharp_x F(x) \equiv 1 \\ \quad F(d) \end{array}$$ [522] [523]

Da seguinte instância do Teorema IIIdGGA

$$\begin{array}{l} \vdash e \equiv c \\ \quad R(a,e) \\ \quad R(a,c) \end{array}$$

e CGC1, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \mathfrak{a} \equiv c \\ \quad R(a,\mathfrak{a}) \\ \quad R(a,c) \end{array}$$

(213).

Da seguinte instância de (C3)

$$\begin{array}{l} \vdash F(a) \\ \quad \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \mathfrak{a} \equiv c \\ \quad\quad R(a,\mathfrak{a}) \\ \quad Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(F\alpha, \beta \equiv c) \end{array},$$

(213) e TR, inferimos

$$\begin{array}{l} \vdash F(a) \\ \quad R(a,c) \\ \quad Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(F\alpha, \beta \equiv c) \end{array}$$

(214).

Por CP, obtemos

522 Se *d* cai sob *F* e se o número que pertence a *F* é igual a 1 e se *a* cai sob *F*, então *d* é igual a *a*.

523 Veja **GLA**, §78, proposição 3.

$$
\begin{array}{l}
R(a,c) \\
F(a) \\
Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(F\alpha, \beta \equiv c)
\end{array}
$$

(215).

Na fórmula (215) substituindo-se '*c*' por '0', obtemos

$$
\begin{array}{l}
R(a,0) \\
F(a) \\
Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(F\alpha, \beta \equiv 0)
\end{array}
$$

(216).

Na fórmula (216), substituindo-se 'a' por 'd', obtemos

$$
\begin{array}{l}
R(d,0) \\
F(d) \\
Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(F\alpha, \beta \equiv 0)
\end{array}
$$

(217).

Da seguinte instância de (B2)

$$
\begin{array}{l}
d \equiv a \\
R(a,0) \\
R(d,0) \\
UpM_{\alpha\beta}R(\alpha\beta)
\end{array}
$$

,

(216), (217)e TR, inferimos

$$
\begin{array}{l}
d \equiv a \\
F(a) \\
F(d) \\
UpM_{\alpha\beta}R(\alpha\beta) \\
Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(F\alpha, \beta \equiv 0)
\end{array}
$$

(218).

Por CP, obtemos

$$
\begin{array}{l}
Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(F\alpha, \beta \equiv 0) \\
F(a) \\
F(d) \\
UpM_{\alpha\beta}R(\alpha\beta) \\
d \equiv a
\end{array}
$$

(219).

Da seguinte instância de 1BS

$$
\begin{array}{l}
d \equiv a \\
Func_{\alpha\beta}R(\alpha,\beta) \\
d \equiv a
\end{array}
$$

,

(219) e TR, derivamos

$$\begin{array}{l} Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(F\alpha, \beta \equiv 0) \\ Func_{\alpha\beta}R(\alpha, \beta) \\ UpM_{\alpha\beta}R(\alpha, \beta) \\ F(a) \\ F(d) \\ d \equiv a \end{array}$$

(220).

Aplicando CGC2, obtemos

$$\begin{array}{l} \mathfrak{R} \; Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(F\alpha, \beta \equiv 0) \\ Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta) \\ UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta) \\ F(a) \\ F(d) \\ d \equiv a \end{array}$$

(221).

Da seguinte instância de (PH3)

$$\begin{array}{l} \sharp_x F(x) \equiv \sharp_x (x \equiv 0) \\ \mathfrak{R} \; Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(F\alpha, \beta \equiv 0) \\ Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta) \\ UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta) \end{array}$$

,

(221) e TR, obtemos

$$\begin{array}{l} \sharp_x F(x) \equiv \sharp_x (x \equiv 0) \\ F(a) \\ F(d) \\ d \equiv a \end{array}$$

(222).

Por contraposição, temos

$$\begin{array}{l} d \equiv a \\ F(a) \\ F(d) \\ \sharp_x F(x) \equiv \sharp_x (x \equiv 0) \end{array}$$

(223).

Da seguinte instância de (E2)

$$\begin{array}{l} \sharp_x F(x) \equiv \sharp_x (x \equiv 0) \\ \sharp_x F(x) \equiv 1 \end{array}$$

,

(223) e TR

$$\vdash \begin{array}{l} d \equiv a \\ F(a) \\ \sharp_x F(x) \equiv 1 \\ F(d) \end{array}$$

(Teor. 15).

Lema 2

$$\vdash \sharp_x(x \equiv n) \equiv \sharp_x(x \equiv c)$$

Da seguinte instância de 57BS

$$\vdash \begin{array}{l} d \equiv a \\ a \equiv c \\ d \equiv c \end{array}$$

e das seguintes instâncias de IbGGA

$$\vdash \begin{array}{l} a \equiv c \\ \quad \neg\!\!\begin{array}{l} a \equiv c \\ e \equiv n \end{array} \end{array} \qquad\qquad \vdash \begin{array}{l} d \equiv c \\ \quad \neg\!\!\begin{array}{l} d \equiv c \\ e \equiv n \end{array} \end{array},$$

por meio de TR, derivamos

$$\vdash \begin{array}{l} d \equiv a \\ \quad \neg\!\!\begin{array}{l} a \equiv c \\ e \equiv n \end{array} \\ \quad \neg\!\!\begin{array}{l} d \equiv c \\ e \equiv n \end{array} \end{array}$$

(224).

Aplicando GU1, obtemos

$$\vdash \smile^{\mathfrak{e}}\smile^{\mathfrak{d}} \begin{array}{l} \smile^{\mathfrak{a}} \begin{array}{l} \mathfrak{d} \equiv \mathfrak{a} \\ \quad \neg\!\!\begin{array}{l} \mathfrak{a} \equiv c \\ \mathfrak{e} \equiv n \end{array} \end{array} \\ \quad \neg\!\!\begin{array}{l} \mathfrak{d} \equiv c \\ \mathfrak{e} \equiv n \end{array} \end{array}$$

(225).

De (225), (A1), e MP, obtemos

$$\vdash Func_{\alpha\beta}\left(\neg\!\!\begin{array}{l} \beta \equiv c \\ \alpha \equiv n \end{array} \right)^{524}$$

(226).

Da seguinte instância do Teorema 57 de BS

524 Isto é, a relação “x é igual a n e y é igual a c” é funcional

$$\vdash \begin{array}{l} a \equiv d \\ \quad a \equiv n \\ d \equiv n \end{array},$$

55BS

$$\vdash \begin{array}{l} d \equiv a \\ a \equiv d \end{array}$$

e TR, obtemos

$$\vdash \begin{array}{l} d \equiv a \\ \quad a \equiv n \\ d \equiv n \end{array}$$

(57BSb).

Das seguintes instâncias de Ib

$$\vdash \begin{array}{l} d \equiv n \\ \quad \neg \begin{array}{l} e \equiv c \\ d \equiv n \end{array} \end{array} \qquad \vdash \begin{array}{l} a \equiv n \\ \quad \neg \begin{array}{l} e \equiv c \\ a \equiv n \end{array} \end{array},$$

57BSb e TR, derivamos

$$\vdash \begin{array}{l} d \equiv a \\ \quad \neg \begin{array}{l} e \equiv c \\ a \equiv n \end{array} \\ \neg \begin{array}{l} e \equiv c \\ d \equiv n \end{array} \end{array}$$

(227).

Aplicando GU1, temos

$$\vdash \overset{\mathfrak{d}}{\smile}\overset{\mathfrak{e}}{\smile} \begin{array}{l} \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\; \mathfrak{d} \equiv \mathfrak{a} \\ \qquad \neg \begin{array}{l} \mathfrak{e} \equiv c \\ \mathfrak{a} \equiv n \end{array} \\ \neg \begin{array}{l} \mathfrak{e} \equiv c \\ \mathfrak{d} \equiv n \end{array} \end{array}$$

(228).

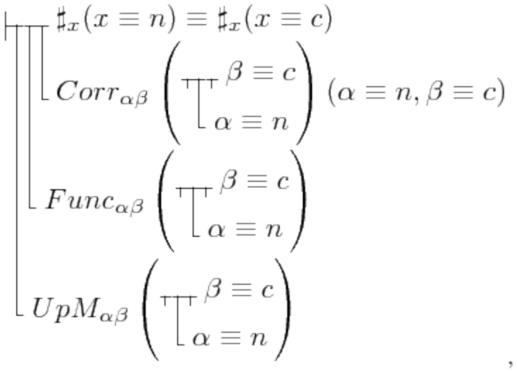
De (228), (B2) e MP, inferimos

$$\vdash UpM_{\alpha\beta} \left(\neg \begin{array}{l} \beta \equiv c \\ \alpha \equiv n \end{array} \right)$$ [525]

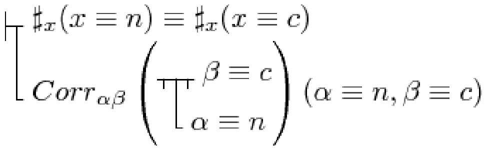
(229).

Da seguinte instância de (PH6)

525 Ou seja, a relação “*x* é igual a *n* e *y* é igual a *c*” é Um-para-Muitos.

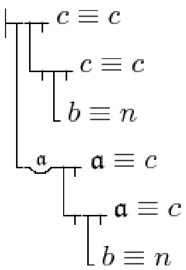


(226), (229) e MP, derivamos

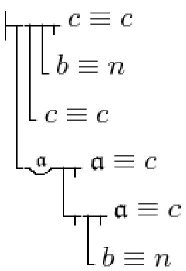


(230).

Da seguinte instância de 58BS1

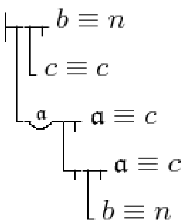


e CP, obtemos



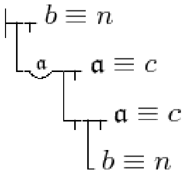
(231).

Novamente, por CP, obtemos



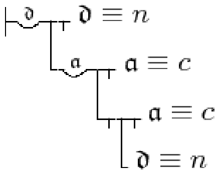
(232).

De (232), 54BS e MP, inferimos



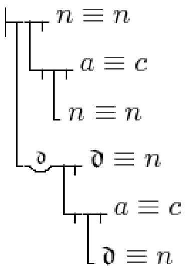
(233).

Aplicando GU1, temos

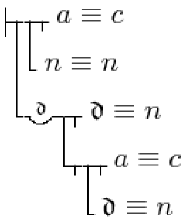


(234).

Da seguinte instância de 58BS1

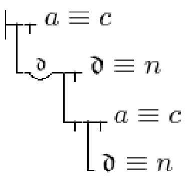


e CP, obtemos



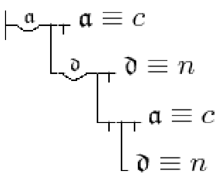
(235).

De (235), 54BS e MP, derivamos



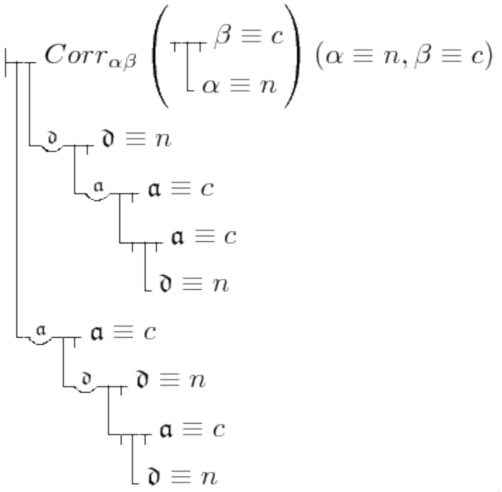
(236).

Aplicando GU1, temos

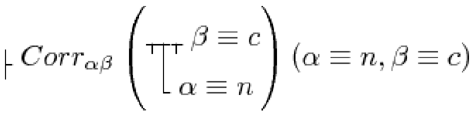


(237).

Da seguinte instância de (C1)



(234), (237) e MP, derivamos



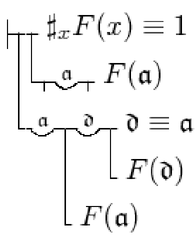
(238).

De (230), (238) e MP, inferimos

$\vdash \sharp_x(x \equiv n) \equiv \sharp_x(x \equiv c)$

(Lema 2).

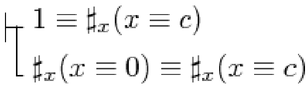
Teorema 17

 [526]

Da seguinte instância do (Lema 2)

$\vdash \sharp_x(x \equiv 0) \equiv \sharp_x(x \equiv c)$,

da seguinte instância de (E1)



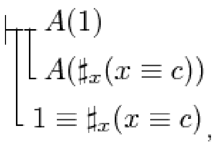
e MP, obtemos

$\vdash 1 \equiv \sharp_x(x \equiv c)$

(239).

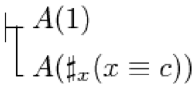
Da seguinte instância de 57BS

526 Este teorema é enunciado por Frege em **GLA**, §78, proposição 4.



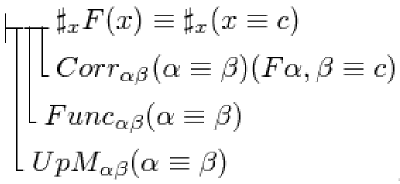
,

(239) e MP, derivamos



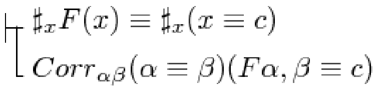
(240).

Da seguinte instância de (PH6)



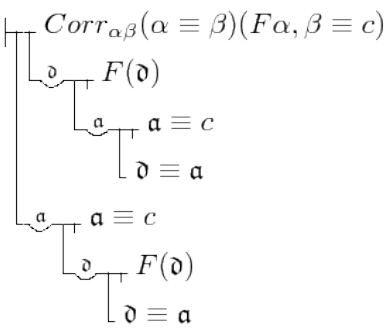
,

(Teor. 1), (Teor. 2) e MP, derivamos



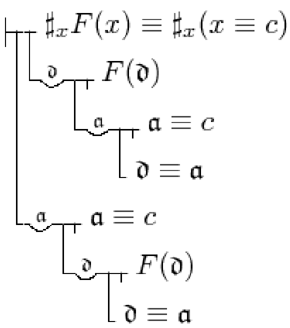
(241).

Da seguinte instância de (C1)



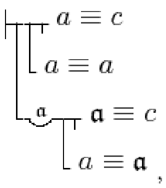
,

(241) e TR, obtemos

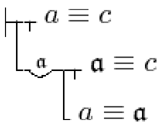


(242).

Da seguinte instância de 58BS1

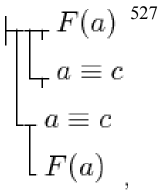


54BS e MP, inferimos

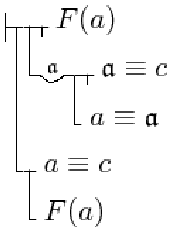


(243).

Da seguinte instância de 28BS

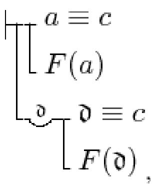


(243) e TR, inferimos

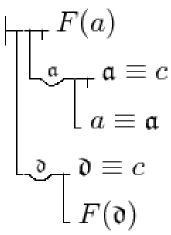


(244).

Da seguinte instância de 58BS1



(244) e TR, derivamos



(245).

Aplicando CGC1, temos

---

527 Aqui, poderíamos usar **27BS** e **CP**.

$$\BGassert\BGconditional{\BGquant{\mathfrak{d}}\BGconditional{F(\mathfrak{d})}{\mathfrak{d}\equiv c}}{\BGquant{\mathfrak{d}}\BGconditional{\BGquant{\mathfrak{a}}\BGconditional{\mathfrak{d}\equiv\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}\equiv c}}{F(\mathfrak{d})}}$$

(246).

Da seguinte instância de 58BS1

$$\BGassert\BGconditional{\BGquant{\mathfrak{d}}\BGconditional{\mathfrak{d}\equiv a}{F(\mathfrak{d})}}{\BGconditional{a\equiv a}{F(a)}},$$

54BS e MP, obtemos

$$\BGassert\BGconditional{\BGquant{\mathfrak{d}}\BGconditional{\mathfrak{d}\equiv a}{F(\mathfrak{d})}}{F(a)}$$

(247).

Da seguinte instância de 57BS

$$\BGassert\BGconditional{a\equiv c}{\BGconditional{F(c)}{F(a)}}$$

e CP, obtemos

$$\BGassert\BGconditional{F(c)}{\BGconditional{\BGnot F(a)}{a\equiv c}}$$

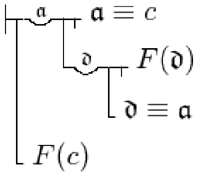
(248).

De (247), (248) e TR, inferimos

$$\BGassert\BGconditional{F(c)}{\BGconditional{\BGquant{\mathfrak{d}}\BGconditional{\mathfrak{d}\equiv a}{F(\mathfrak{d})}}{a\equiv c}}$$

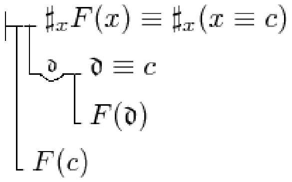
(249).

Aplicando GU1, temos



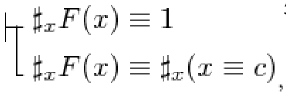
(250).

De (242), (246), (250) eTR, obtemos



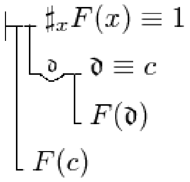
(251).

Da seguinte instância de (240)



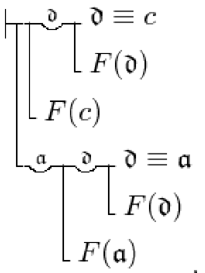
[528],

(251) e TR, derivamos



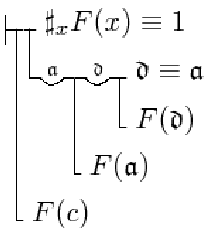
(252).

Da seguinte instância de 58BS1



,

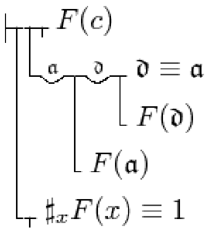
(252) e TR, inferimos



(253).

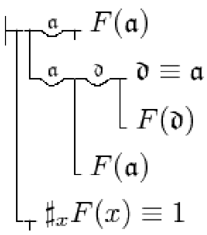
528 Substitua '$A\xi$' por '$\sharp_x F(x) \equiv \xi$'.

Por CP, obtemos



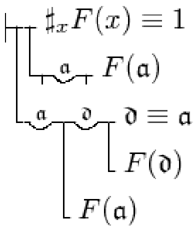
(254).

Aplicando CGC1, derivamos



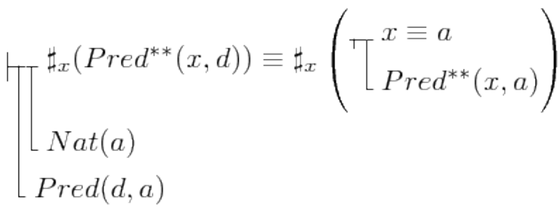
(256).

Por contraposição novamente, obtemos

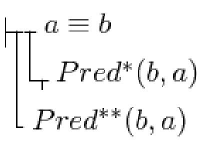


(Teor. 17).

Teorema 18


[529] [530]

Da seguinte instância de (H2)


,

55BS e TR, obtemos

529 Ou seja, se *a* é o sucessor de *d* e se *a* é número natural, então o número que pertence ao conceito "pertencer à Pred-série terminada por *d*" é igual ao número que pertence ao conceito "pertencer à Pred-série terminada por *a*, mas ser diferente de *a*".

530 Em **GGA** (pp. 146-47), é feito uso explicito de IVa na prova do análogo deste teorema.

$$\begin{array}{l} \vdash b \equiv a \\ \quad\; Pred^{**}(b,a) \\ \quad \neg\, Pred^{*}(b,a) \end{array}$$

(257).

De (257) e CP, temos

$$\begin{array}{l} \vdash Pred^{*}(b,a) \\ \quad \neg\; b \equiv a \\ \quad\quad\; Pred^{**}(b,a) \end{array}$$

(258).

De (258) e do Teorema 143 de **GGA**[531]

$$\begin{array}{l} \vdash Pred^{**}(b,d)\ ^{532} \\ \quad\; Pred^{*}(b,a) \\ \quad Pred(d,a) \end{array} \quad ,$$

por meio de TR, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash Pred^{**}(b,d) \\ \quad\; \neg\; b \equiv a \\ \quad\quad\; Pred^{**}(b,a) \\ \quad Pred(d,a) \end{array}$$

(259).

De (259) e CP, temos

$$\begin{array}{l} \vdash b \equiv a \\ \quad\; Pred^{**}(b,a) \\ \quad \neg\, Pred^{**}(b,d) \\ \quad Pred(d,a) \end{array}$$

(260).

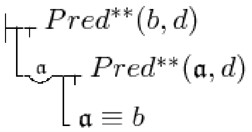
Da seguinte instância de 58BS1

$$\begin{array}{l} \vdash Pred^{**}(b,d) \\ \quad\; b \equiv b \\ \quad \smile^{\mathfrak{a}}\; Pred^{**}(\mathfrak{a},d) \\ \quad\quad\; \mathfrak{a} \equiv b \end{array} \quad ,$$

54BS e MP, obtemos

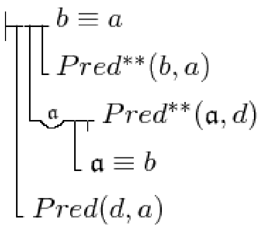
531 O teorema 143 de **GGA** é provável no nosso sistema. Sua prova em **GGA** depende indiretamente do **Teorema IVa**, porque depende do teorema 88 de **GGA,** que é um análogo da nossa fórmula (**184**) provada sem usar IVa. Os demais teoremas necessários para provar 143 são prováveis da nossa base axiomática. Veja (**GGA**, pp. 137-144).

532 O teorema 143 afirma que se *a* é o sucessor de *d* e se *a* vem depois de *b* na Pred-serie, então *d* pertence à Pred-série iniciada por *b* (b vem depois de *d* na Pred-serie ou *d* é igual a *b*).



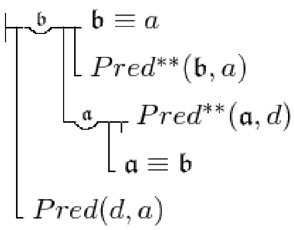
(261).

De (260), (261) e TR, inferimos



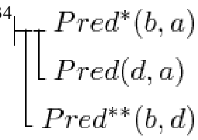
(262).

Aplicando CGC1, temos

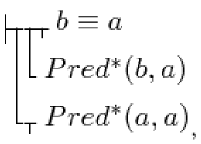


(263).

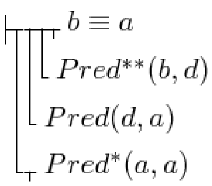
Da seguinte instância do Teorema 134 de **GGA**[533]

[534] 

e da seguinte instância do Teorema IIId



por meio de TR, obtemos



(264).

Da seguinte instância do Teorema 145 de **GGA**[535]

533 Esta fórmula corresponde a uma instância do teorema 102 de **BS**.

534 O teorema 134 de **GGA** não depende do teorema IVa, sendo provável no nosso sistema.

535 Novamente, o teorema 145 é provável no nosso sistema. Este teorema depende indiretamente de IVa, porque depende do teorema 143 de **GGA**. Mas, como já afirmamos, o teorema 143 de **GGA** é provável no nosso sistema. Os demais teoremas necessários são prováveis a partir da nossa base axiomática. De fato, muitos dos teoremas presentes nas páginas 137-144 de **GGA**

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\!\!-\!-\ Pred^{*}(a,a) \\ \quad \llcorner\ Pred^{**}(0,a) \end{array}$$ [536],

(264) e TR, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!-\!\!-\!\!-\ b \equiv a \\ \qquad \llcorner\ Pred^{**}(b,d) \\ \quad\ \ \llcorner\ Pred(d,a) \\ \quad \llcorner\ Pred^{**}(0,a) \end{array}$$

(265).

Da seguinte instância de If GGA

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!-\!\!-\!\!-\ b \equiv a \\ \qquad \llcorner\ Pred^{**}(b,a) \\ \quad\ \ \llcorner\!\top\ b \equiv a \\ \quad \llcorner\ Pred^{**}(b,a) \end{array}$$,

(265) e TR, inferimos

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\ b \equiv a \\ \qquad\quad\ \llcorner\ Pred^{**}(b,a) \\ \qquad\ \ \llcorner\ Pred(d,a) \\ \qquad \llcorner\ Pred^{**}(b,d) \\ \quad\ \ \llcorner\ Pred^{**}(0,a) \\ \quad \llcorner\ Pred^{**}(b,a) \end{array}$$

(266).

Da seguinte instância do Teorema 137 de **GGA**[537]

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!-\!\!-\ Pred^{**}(b,a) \\ \quad\ \ \llcorner\ Pred(d,a) \\ \quad \llcorner\ Pred^{**}(b,d) \end{array}$$ [538],

(266) e TR, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\ b \equiv a \\ \qquad\ \ \llcorner\ Pred^{**}(b,a) \\ \qquad \llcorner\ Pred^{**}(b,d) \\ \quad\ \ \llcorner\ Pred(d,a) \\ \quad \llcorner\ Pred^{**}(0,a) \end{array}$$

(267).

---

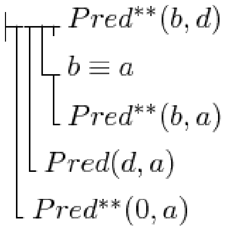
são teoremas de **BS** ou instâncias de teorema de **BS**.

536 O teorema 145 afirma que se *a* é número natural, então ele não vem depois de si mesmo na Pred-série.

537 Esta fórmula corresponde a uma instância do teorema 108 de **BS**.

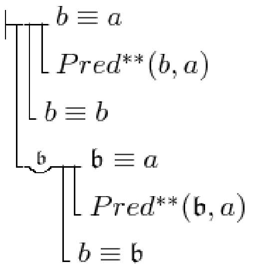
538 Se *d* pertence à Pred-série iniciada por *b* e se *a* é o sucessor de *d*, então *a* pertence à Pred-série iniciada por *b*.

De (267) e CP, temos



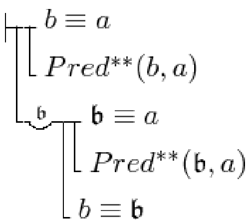
(268).

Da seguinte instância de 58BS1



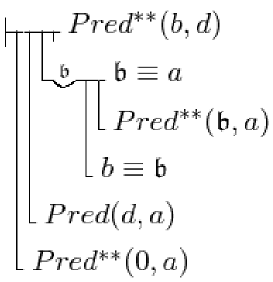
,

54BS e MP, inferimos



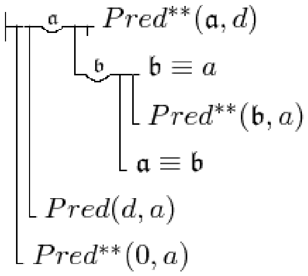
(269).

De (268), (269) e TR, obtemos



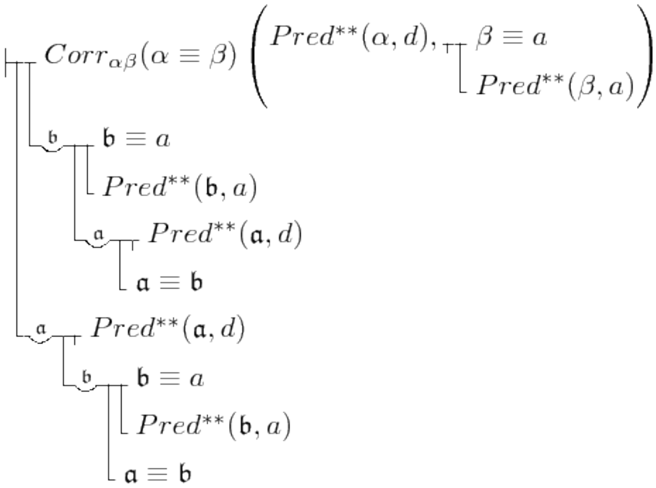
(270).

Aplicando CGC1, obtemos



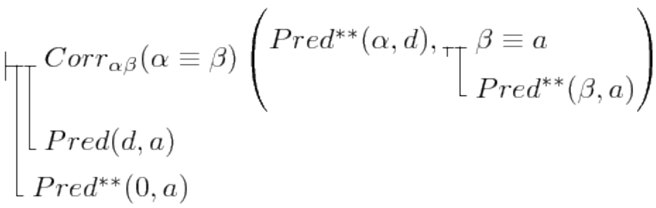
(271).

Da seguinte instância de (C1)



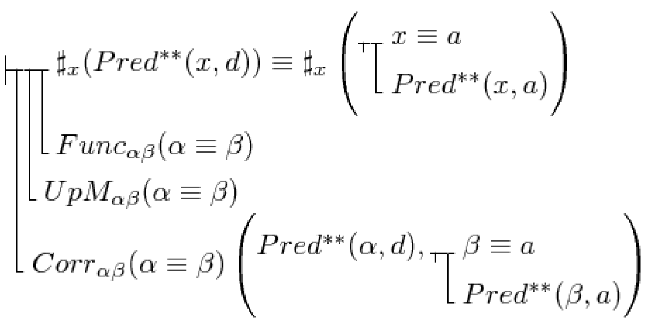
,

(263), (271) e TR, derivamos



(272).

Da seguinte instância de (PH6)



,

(Teor.1), (Teor. 2) e MP, inferimos

$$\vdash\!\!\top \begin{array}{l} \sharp_x(Pred^{**}(x,d)) \equiv \sharp_x \left(\begin{array}{l} \top\!\top\, x \equiv a \\ \quad \llcorner\, Pred^{**}(x,a) \end{array} \right) \\ \llcorner\, Corr_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta) \left(Pred^{**}(\alpha,d), \begin{array}{l} \top\!\top\, \beta \equiv a \\ \quad \llcorner\, Pred^{**}(\beta,a) \end{array} \right) \end{array}$$

(273).

De (272), (273) e TR, obtemos

$$\vdash\!\!\top\!\!\top \begin{array}{l} \sharp_x(Pred^{**}(x,d)) \equiv \sharp_x \left(\begin{array}{l} \top\!\top\, x \equiv a \\ \quad \llcorner\, Pred^{**}(x,a) \end{array} \right) \\ \quad \llcorner\, Pred^{**}(0,a) \\ \llcorner\, Pred(d,a) \end{array}$$

(274).

De (J2), (274) e TR, temos

$$\vdash\!\!\top\!\!\top \begin{array}{l} \sharp_x(Pred^{**}(x,d)) \equiv \sharp_x \left(\begin{array}{l} \top\!\top\, x \equiv a \\ \quad \llcorner\, Pred^{**}(x,a) \end{array} \right) \\ \quad \llcorner\, Nat(a) \\ \llcorner\, Pred(d,a) \end{array}$$

(Teor. 18).

A partir do teorema 18, podemos provar, dentro do nosso sistema, o teorema enunciado por Frege em **GLA** (§83) de que todo número natural tem um sucessor, uma vez que todos os teoremas necessários são prováveis. Além disso, é provável no sistema, sendo uma consequência direta da definição, que 0 é número natural. Ainda, são prováveis no nosso sistema os teoremas sobre o “Endlos” (o número dos números naturais) enunciado por Frege (**GLA**, §85), a saber que “Endlos” não é um número natural e que ele vem depois de si mesmo na Pred-série.

Estas provas tornam plausível que, em 1882, no livro mencionado na carta enviada a Marty, Frege tenha provado as leis básicas da aritmética adicionando o **Princípio de Hume** (ou como axioma ou como uma espécie de definição) ao sistema lógico de **BS**. Frege não precisaria da “equivalência” na forma do teorema IVa (**GGA**) para obter estas leis básicas. A questão muda quando ele resolve definir explicitamente o operador numérico em termos de extensões de conceitos. Agora, é necessária a “equivalência” na forma do teorema IVa, o qual não é provável em **BS**, para provar o **Princípio de Hume** e deste as leis básicas da aritmética.

5
Conclusão

Nosso trabalho parte da premissa de que Frege escrevera um livro em 1882 na conceitografia no qual ele tinha provado as leis básicas da aritmética. Além disso, foi suposto que **GLA** foi escrito para ser uma espécie de prolegômenos ao livro mencionado na missiva a Marty. Em nossa visão, o sistema lógico subjacente ao livro de 1882 é o sistema de **BS**.

Analisamos o sistema de **BS** e argumentamos que **IV*** e **BB**, que desempenhariam um papel importante na teoria Fregeana das extensões, não eram prováveis neste livro. Ademais, discutimos que a introdução destas fórmulas como axiomas acarretaria problemas substanciais ao sistema lógico de **BS**.

Mencionamos que provavelmente Frege não dispunha de **IV*** e **BB** em 1884, fato este que produziria, com a introdução das extensões de conceitos e o **Axioma V** no sistema, uma teoria extremamente complicada. De fato, como mencionamos, somos céticos se Frege dispunha deste axioma quando publicou **GLA**. Além disso, ele não poderia obter **PH** a partir da sua definição explícita do operador cardinalidade.

Argumentamos que, como um livro de introdução, **GLA** não cumpre seu papel. Não há uma discussão minuciosa sobre que tipo de objetos são as extensões de conceitos e qual é a sua natureza. Grande parte deste livro parece sugerir que números são entidades intimamente ligadas a conceitos, dos quais poderíamos obter conhecimento por meio da relação lógica de equinumerosidade.

Segundo o nosso entendimento, as extensões de conceitos foram introduzidas tardiamente com o intuito de evitar o Problema de Júlio César. Como tentamos mostrar, este problema é ocultado quando introduzimos apenas o **PH** ao sistema de **BS**, uma vez que os únicos termos singulares do sistema são nomes da forma $\sharp_x ... x ...$. Sugerimos que este problema tenha ocorrido a Frege quando ele começou as suas investigações sobre os demais números. Ele seria obrigado a introduzir novos operadores abstração e, com isso, o Problema de Júlio César se estabeleceria dentro do sistema formal.

Mostramos que não é evidente que tipo de extensões de conceitos os números são. Eles parecem ser identificados às extensões de conceitos de segunda ordem. Neste caso, o operador-extensionalidade seria uma função de terceira ordem regido por um Axioma V de ordem superior. Mas, sendo isto o caso, Frege teria novamente problemas com a identidade, uma vez que nos parece plausível supor a existência de conceitos de primeira ordem regidos pelo Axioma V habitual.

Alguns autores defendem que a definição de **GLA** é a mesma que a de **GGA**, isto é, números são extensões de conceitos de primeira-ordem. Isto exige "reduzir" o conceito de equinumerosidade, que é de segunda ordem, a um conceito de primeira ordem. Mostramos que a defesa desta interpretação baseia-se em uma questão linguística, mas que, formalmente, esta redução não é possível no sistema lógico subjacente de **GGA**. Apontamos que sem **IV*** ou **BB** no sistema de **GLA**, Frege não poderia obter algo análogo ao teorema 1 de **GGA**, sem o qual não é possível obter algo análogo ao teorema 2 de **GGA**. Neste caso, Frege teria de introduzir um Axioma V para obter extensões de relações binárias e definir uma relação de pertinência para estes objetos. Discutimos ainda uma possível teoria sugerida por Landini, mas igualmente problemática.

Por outro lado, indicamos que a adição de **PH** ao sistema de **BS** produz os axiomas de Peano e o sistema é relativamente simples, salvo, é claro, a questão de **PH** ser uma definição. Além disso, afirmamos que a demora na publicação de **GGA** é um sintoma de que havia problemas com a introdução das extensões de conceitos a **GLA**.

Afirmamos que a distinção entre sentido e referência e a introdução dos valores de verdades tinham o objetivo formal de justificar a introdução do Axioma IV no sistema de **GGA**. Este axioma implica o teorema IVa, que desempenha um papel essencial na prova do teorema 1 de **GGA**, a partir do qual é obtido o teorema 2 de **GGA**. Estes teoremas justificam as reduções Fregeanas dos conceitos matemáticos de segunda ordem expressos em **BS** e **GLA** aos conceitos de primeira ordem de **GGA**. Isto também possibilitou o descarte dos axiomas IIb para relações eneárias.

Muitos problemas tratados aqui foram obliterados na literatura secundária por causa da tradução notacional, na qual o papel desempenhado pelo traço de conteúdo se perde. Ademais, a definição de pertinência na tradução não faz jus à definição desta relação em **GGA**. Na linguagem lógica contemporânea, a tripla barra e a identidade, quando ocorrem entre sentenças, são traduzidas pela bi-implicação. Acreditamos que esta tese é uma pequena contribuição para dissipar estes mal-entendidos.

6
Bibliografia

ALNES, J. H. “Sense and Basic Law V in Frege´s Logicism”. *Nordic Journal of Philosophical Logic* 4:1, pp. 1-30, 1999.

BAKER, G.P.; HACKER, P. M. S. “Functions in *Begriffsschrift*”. *Synthese* 135, pp. 273-97, 2003.

BEANEY, M. *The Frege Reader*. Oxford: Blackwell Publishers, 1997.

_______. “Frege's Use of Function-Argument Analysis and This Introduction of Truth-Values as Objects”. *Grazer Philosophische Studien* 75, pp. 93-123, 2007.

BLANCHETE, P. “Frege's Reduction”. *History and Philosophy of Logic*, 15, pp. 85-103, 1994.

BOOLE, G. *The Mathematical Analysis of Logic*. Bristol: Thoemmes Press, 1847.

_______. *The Laws of Thought*. New York: Prometheus Books, 1854.

BOOLOS, G. “Saving Frege from Contradiction”, 1986. In: BOOLOS, 1998, pp. 171-82.

_______. “*The Consistency of Frege’s Foundations of Arithmetic*”, 1987. In: BOOLOS, 1998, pp. 183-201.

_______. “The Standard of Equality of Numbers”, 1990. In: BOOLOS, 1998, pp. 202-219.

_______; HECK Jr, R. G. “Die Grundlagen der Arithmetik, §§82-83”, 1997. In: BOOLOS, 1998, pp. 315-333.

_______. *Logic, Logic and Logic*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1998.

BURGE, T.. “Frege on Extension of Concepts from 1884 to 1903”. *The Philosophical Review* XCIII(1), pp. 3–34, 1984.

BURGESS, J. P. “Review of Wright (1983)”. *Philosophical review* 93, pp. 638-40, 1984.

BYNUM, T. W. “On The Life and Work of Gottlob Frege”, 1972. In: Frege, 1972, pp. 1-54.

CANTOR, G. “Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre“, 1878. In: ZERMELO (Ed.), 1962, pp. 119-33.

CHATEAUBRIAND, O. *Logical Forms Part I: Truth and Description*. Campinas: UNICAMP-CLE, 2001.

COFFA, A. “Kant, Bolzano and the Emergence of Logicism”, 1982. In: DEMOPOULOS (Ed.), 1995, pp. 29-40.

COOK, R.; EBERT, P. “Abstraction and Identity”. Dialecta 59 (2), pp 121-39, 2005.

DEDEKIND, R. *Essays on theory of Numbers*. Editado e traduzido por W. Bemam. New York: Dover Publications, 1963.

DEMOPOULOS, W. “Frege and Rigorization of Analysis”, 1994. In: DEMOPOULOS (Ed.), 1995, pp. 68-88.

_______. (Ed.). *Frege´s Philosophy of Mathematics*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1995.

DUARTE, A. B. *Princípio de Hume: Possibilidade de uma Filosofia (Neo) Fregeana da Aritmética?,* 2004. 156p. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Filosofia.

_______. “A Lógica de Boole”. Artigo escrito para o exame de qualificação da Pontifície Universidade Católica do Rio de Janeiro (artigo não publicado), 2006.

DUMMETT, M. *Frege: Philosophy of Language*. London: Duckworth, 1973.

_______. *Frege: Philosophy of Mathematics*. (Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1991.

FREGE, G. *Begriffsschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle: Verlag von Louis Nebert, 1879. Reimpresso, Hildesheim: George Olms Verlag, 1998.

_______. *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Breslau: Verlag von Wilhelm Koebner, 1884. Reimpresso, Hamburg: Felix Meiner Verlag, 1988.

_______. *Grundgesetze der Arithmetik. Vol I*. Jena: Pohle, 1893. Reimpresso, Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1962.

_______. *Grundgesetze der Arithmetik. Vol II*. Jena: Pohle, 1903. Reimpresso, Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1962.

_______. *The Basic Laws of Arithmetic: Exposition of the System*. Traduzido e editado por Montgomery Furth. Berkeley e Los Angeles: University of California Press, 1967.

_______. *Conceptual Notation and Related Articles*. Traduzido e editado por Terrell Ward Bynum. Oxford: Clarendon Press, 1972.

_______. *Wissenschafticher Briefwechsel*. Editado por Gottfried Gabriel, *et al*. Hamburgo: Felix Meiner Verlag, 1976.

_______. *Posthumous Writings*. Editado por Hans Hermes, *et al*. Traduzido por Peter Long e Roger White. Oxford: Basil Blackwell, 1979.

_______. *Philosophical and Mathematical Correspondence*. Traduzido por Hans Kaal. Chicago: Basil Blackwell, 1980.

_______. *Nachgelassene Schriften*. 2. ed. Editado por Hans Hermes, Friedrich Kambartel e Friedrich Kaulbach. Hamburg: Felix Meiner Verlag, 1983.

_______. *Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy*. Editado por Brian McGuinness. Oxford: Basil Blackwell, 1984.

_______. *The Foundations of Arithmetik*. *A logico-mathematical enquiry into the concept of number*. 2. ed. Traduzido por J. L. Austin. (Oxford: Basil Blackwell), 1986.

_______. *Kleine Schriften*. 2. ed. Editado por Ignácio Angelelli. Hildesheim: George Olms Verlag, 1990.

GABRIEL, G; DATHE, U. (Eds.). *Gottlob Frege: Werk und Wirkung*. Mentis, Paderborn: Mentis Verlag, 2000.

_______; KIENSLER, W. (Eds.). *Frege in Jena: Beiträge zur Spurensicherung*. Würzburg: Königshausen & Neumann, 1997.

GREIMANN, D.. “What is Frege's Julius Caesar Problem?” *Dialectica* 57 (3), pp. 261-78, 2003.

HAAPARANTA, L.; HINTIKKA, J. (Eds.). *Frege Synthesized*. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1986.

HADDOCK, G. “On Frege's Two Notions of Sense”. *History and Philosophy of Logic* 7, pp. 31-41, 1986.

________. *A Critical Introduction to the Philosophy of Gottlob Frege*. Hampshire: Ashgate Publishing, Ltd., 2006.

HALE, B. “Grundlagen §64”, 1997. In: HALE; WRIGHT, 2001a, pp. 91-116.

______.; WRIGHT, C. *The Reason´s Proper Study: Essays Towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics*. New York: Oxford University Press, 2001a.

______; _____. “To Bury Caesar...”, 2001b. In: Hale; Wright, 2001a, pp. 335-96.

HALLETT, M. *Cantorian Set Theory and Limitation of Size.* Oxford: Clarendon Press, 1984.

HECK JR., R, G. “The Development of Arithmetic in Frege´s Grundgesetze der Arithmetik”, 1993. In: DEMOPOULOS (Ed.), 1995, pp. 257-94.

______. “Definition by Induction in Frege's *Grundgesetze der Arithmetik*”, 1995. In: DEMOPOULOS (Ed.), 1995, pp. 295-333.

______. (Ed.). *Language, Thought and Logic*. Oxford: Oxford University Press, 1997a.

______ “The Julius Caesar Objection”, 1997b. In: HECK JR., 1997a, pp. 273-308.

______. “Julius Caesar and Basic Law V”. *Dialectica* 59 (2), 161-78, 2005.

______. “Formal Arithmetic Before *Grundgestze*”. Manuscrito não-publicado.

HODES, H. “Logicism and the Ontological Commitments of Arithmetic”. *Journal of Philosophy* LXXXI (3), pp. 123-49, 1984.

HUME, D. *Tratado da Natureza Humena*. São Paulo: Editora Unesp, 2001.

JANSSEN, T. “Frege, Contextuality and Compositionality”. *Journal of Logic, Language, and Information* 10, pp. 115-36, 2001.

KANT, I. *Crítica da Razão Pura*. Traduzido por Manuela Pinto dos Santos e Alexandre Fradique Morujão. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1997.

______. Prolegomena to Any Future Metaphysics. Traduzido por James Fieser. Forgotten Books, 2008.

KASCHMIEDAR, H. *Beurteiberer Inhalt und Gedanke in der Philosophie Gottlob Freges.* Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1989.

KEMP, G. “Caesar from Frege's Perspective”. *Dialectica* 59 (2), 179-99, 2005.

KENNEDY, H. C. (Ed.). *Selected works of Giuseppe Peano*. Toronto : University of Toronto Press, 1973.

KREISER, L. *Gottlob Frege: Leben-Werk-Zeit*. Hamburg: Felix Meiner Verlag, 2001.

KUTSCHERA, F. *Gottlob Frege*. Berlin: Walter de Gruyter, 1989.

LANDAU, E. *Foundations of Analysis.* 3. ed. New York: Chelsea, 1966.

LANDINI, G. “Decomposition and Analysis in Frege's *Grundgesetze*”. *History and Philosophy of Logic* 17, pp. 121-39, 1996

______. “Frege's Cardinals as Concept-Correlates”. *Erkenntnis* 65, pp. 207-43, 2006.

______. “The Ins and Outs of Frege's Way Out”. *Philosophia Mathematica* (III) 14, pp. 1-25, 2006.

LEVINE, J. “Analysis, Abstraction Principles and Slingshot Arguments”. *Ratio* 19 (1), pp. 43-63, 2006.

MACBETH, D. “Striving for Truth in the Practice of Mathematics Kant and Frege”. *Grazer Philosophische Studien* 75, 65-92, 2007.

______. *Frege's Logic*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 2005.

MACFARLANE, J. “Frege, Kant, and the Logic in Logicism”. *The Philosophical Review* 111, pp. 25-65, 2002.

MAKIN, G. *The Metaphysicians of Meaning: Russell and Frege on Sense and Denotation*. Londres: Routledge, 2000.

MENDELSOHN, R. L. *The Philosophy of Gottlob Frege*. New York: Cambridge University Press, 2005.

MILNE, P. ”Frege's Context Principle”. *Mind* 95 (380), 491-495, 1986.

Nusenoff, R. “Frege on Identity Sentences”. *Philosophy and Phenomenological Research* 39 (3), pp. 438-42, 1979.

PARSONS, C. “Frege´s Theory of Number”, 1964. In: DEMOPOULOS (Ed.), 1995, pp. 182-210.

PEANO, G. “Le Definizioni per Astrazione”. *Bollettim della Mathesis* VII, pp. 106-120, 1915.

______. “Definitions in Mathematics”, 1921. In: KENNEDY (Ed.), 1973, pp. 235-246.

RAYO, A. “Frege's Unoffcial Arithmetic”. *The Journal of Symbolic Logic* 67 (4), pp. 1623-38, 2001.

RECK, E. (Ed.). *From Frege to Wittgenstein: Perspective on Early Analytic Philosophy*. New York: Oxford University Press, 2002.

RICKETTS, T. "Truth-Values and Courses-of-Values in Frege's Grundgesetze”, 1997. In: TAIT (Ed.), 1998, pp. 187-211.

RODRIGUES FILHO, A. A. *Frege, Fazedores de Verdade e o Argumento da Funda,* 2007. 223p. Tese (Doutorado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Filosofia.

RUFFINO, M. *Frege´s Notion of Logical Objects*, 1996. 298p. Tese (Doutorado) - Universidade da Califórnia, Los Angeles.

______. “The Primacy of Concepts and the Priority of Judgments in Frege's Logic”. *Grazer Philosophische Studien* 56, pp. 73-90, 1998.

______. “Wahrheitswerte als Gegenstände und die Unterscheidung zwischen Sinn und Bedeutung”. In: Gabriel; Kienzler (Eds.), 1997, pp.139-148.

______. “Extensions as Representative Objects in Frege´s Logic”. *Erkenntnis* 53 (2), pp. 239-52, 2000.

______. “Why Frege would not be a Neo-Fregean”. *Mind* 112, pp. 51-78, 2003.

RUSSELL, B. *Principles of Mathematics.* Reimpresso, New York: W.W. Norton & Company, 1996.

______. *Introduction to Mathematical Philosophy*. Reimpresso, New York: Dover Publications, 1993.

SCHIRN, M. (Ed.). *Studies on Frege I: Logic and Philosophy of Mathematics*. Stuttgart: Friedrich Frommann Verlag, 1976.

_______. “Begriff und Begriffsumfang. Zu Freges Anzahldefinition in den *Grundlagen der Arithmetik*. *History and Philosophy of Logic* 4, pp. 117-43, 1983.

________. (Ed.). *Frege: Importance and Legacy* Berlin e New York: Walter de Gruyter, 1996a.

________. “On Frege´s Introduction of Cardinal Numbers as Logical Objects”, 1996b. In: SCHIRN (Ed.), 1996a, pp. 114-173.

________. “Fregean Abstraction, Referential Indeterminacy and The Logical Foundations of Arithmetic”. *Erkenntnis* 59, pp. 203-232, 2003.

________. “Hume's Principle and Axiom V Reconsidered: Critical Reflections on Frege and His Interpreters”. *Synthese* 148, pp. 171-227, 2006.

SLUGA, H. *Gottlob Frege*. London: Routledge and Kegan Paul, 1980.

SNAPPER, J. “Contextual Definition: What Frege Might Have Meant but Probably Didn't”. *Noûs* 8, pp. 259-72, 1974.

SULLIVAN, P. “Frege on the Statement of Number”. *Philosophy and Phenomenological Research* 1 (3), pp. 595-603, 1990.

TABATA, H. “Frege´s Theorem and his Logic”. *History and Philosophy of Logic* 21, pp. 265-95, 2000.

TAIT, W. (Ed.). *Early Analytic Philosophy: Essays in honor of Leonard Linsky* Lasalle: Open Court, 1997.

TAPENDEN, J. “The Caesar Problem in its Historical Context: Mathematical Background”. Dialectica 59 (2), pp. 237-64, 2005.

VAN HEIJENOORT, J. “Sense in Frege”. *Journal of Philosophical Logic* 6, pp. 93-102, 1977.

______. “Frege on sense Identity”. *Journal of Philosophical Logic* 6, pp. 103-8, 1977.

VERAART, A. “Geschichte des wissenschaftlichen Nachlasses Gottlob Freges und seiner Edition. Mit einem Katalog des ursprünglichen Bestands der nachgelassenen Schriften Freges”. In: SCHIRN, 1976, pp. 49-106.

VIKKO, R. “The Reception of Frege´s Begriffsschrift”. *Historia Mathematica* 25, 412-22, 1998.

WAGNER, S. “Frege's Definition of Number”. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 24 (1), pp. 1-21, 1983.

WALKER, J. D. B. *A Study of Frege*. Oxford: Basil Blackwell, 1965.

WILSON, M. “To Err is Humean”. *Philosophia Mathematica* 7, pp. 247-57, 1999.

WRIGHT, C. *Frege's Conception of Numbers as Objects*. Aberdeen: Aberdeen University Press, 1983.

ZERMELO, E. (Ed.). *Gesammelte Abhandlungen Mathematischen und Philosophischen Inhalts*. Hildesheim: Georg Olms, 1962.

Apêndice 1[539]

Provas de independências das fórmulas (IV*), (BB) e (NN) em relação aos axiomas de BS

1. O Cálculo BS-Prop

A linguagem de **BS** é inteiramente diferente da linguagem dos sistemas lógicos formais contemporâneos. De fato, poderia ser sem sentido e anacrônico tentar apresentar o conteúdo de **BS** como um sistema formal. Porém, é possível interpretar a linguagem de **BS** em uma linguagem formalizada contemporânea. Foi assim que Lukasiewicz mostrou que os axiomas (1), (2), (28), (31) e (41) são independentes uns dos outros e que o axioma (8) de **BS** não é independente, sendo provável a partir dos axiomas (1) e (2). Neste sentido, iremos propor um cálculo, que será chamado BS-Prop, no qual tentaremos interpretar os axiomas (1), (2), (28), (31), (41), (52) e (54) de **BS**. A linguagem de BS-Prop é diferente da linguagem usual dos sistemas lógicos formais proposicionais contemporâneos, uma vez que, além de variáveis proposicionais, do conectivo unário '$\neg$' (a negação) e do conectivo binário '$\supset$' (a implicação), há um conectivo binário '$\equiv$' que será chamado identidade de conteúdo.

A base axiomática para BS-prop é dada pelos seguintes esquemas de axiomas:

(1) $(A\supset(B\supset A))$

(2) $((A\supset(B\supset C))\supset((A\supset B)\supset(A\supset C)))$

(3) $(\neg\neg A\supset A)$

(4) $(A\supset\neg\neg A)$

(5) $((A\supset B)\supset(\neg B\supset \neg A))$

(6) $(A\equiv A)$

(7) $((A\equiv B)\supset(C\supset C[A/B]))$

A regra de inferência utilizada é *Modus Ponens*: $A, A\supset B\vdash B$

No axioma 7, '$C[A/B]$' é uma notação para uma fórmula que resulta de C pela substituição de uma ou mais ocorrência de A por uma ou mais ocorrências de B.

539 Esta prova foi-nos sugerida pela Prof. (a) Dr. Andrea Loparic.

Este axioma pretende ser um substituto da proposição (52) de **BS**, quando '≡' é aplicado a fórmulas.

Chamaremos de CPC (Cálculo Proposicional Clássico) o sub-cálculo de Prop-BS que tem os axiomas de (1) a (5) expressáveis na linguagem clássica (LC) contendo apenas variáveis proposicionais, a negação, implicação e *Modus Ponens*. Os seguintes fatos são válidos em CPC e LC:

(I) CPC é uma base axiomática completa para a lógica clássica das funções bivalentes em LC, ou seja, o conjunto dos teoremas de CPC é o mesmo que o das sentenças tautológicas clássicas de LC.;

(II) LC é funcionalmente completa, isto quer dizer, todas as funções bivalentes de verdade podem ser expressas em LC

A prova de independência de (**IV***), (**BB**) e (**NN**) mostra que BS-Prop não é um cálculo clássico, caso contrário, '≡' teria de expressar uma função de verdade bivalente. Neste caso, alguma fórmula de LC deveria ser dedutivamente equivalente a '$A{\equiv}B$' [540].

Mas que função de verdade poderia ser expressa por $(A{\equiv}B)$? Vamos considerar todas as possibilidades de distribuição dos valores de verdade V e F nas variáveis *A* e *B*:

≡	V	F
V	1	2
F	3	4

Como temos o axioma (6) $(A{\equiv}A)$, então nas posições 1 e 4 temos de ter o Verdadeiro. Por outro lado, uma vez que $((A{\equiv}B){\supset}(A{\supset}B))$ é demonstrável a partir do axioma (7) e, portanto, esta fórmula tem de ser verdadeira, então quando $(A{\supset}B)$ é falsa (na posição 2), $(A{\equiv}B)$ também deve ser. Por outro lado, $((A{\equiv}B){\supset}(B{\supset}A))$ é

540 Obviamente, BS-Prop seria uma base, na sua linguagem (LC + ≡), para a lógica das funções de verdade bivalentes.

demonstrável no sistema (a partir de 57 de **BS**) e uma vez que $(B \supset A)$ é falsa na posição 3, então $(A \equiv B)$ deveria ser obrigatoriamente falsa nesta posição também. Portanto, em BS-Prop, as únicas candidatas que restariam para expressar $(A \equiv B)$ como uma função de verdade bivalente seriam todas as fórmulas equivalentes a: $\neg((A \supset B) \supset \neg(B \supset A))$[541].

Destarte, se '≡' expressasse uma função de verdade bivalente, $(A \equiv B)$ deveria ser dedutivamente equivalente a $\neg((A \supset B) \supset \neg(B \supset A))$. Mas, pela nossa hipótese, em BS-Prop, o teorema da dedução teria de ser válido e, portanto, o esquema $(\neg((A \supset B) \supset \neg(B \supset A)) \supset (A \equiv B))$ deveria ser demonstrável.

Contudo, recorrendo-se a uma matriz com três valores, mostraremos que um esquema dedutivamente equivalente a $(\neg((A \supset B) \supset \neg(B \supset A)) \supset (A \equiv B))$ não é demonstrável em BS-Prop.

Portanto, '$A \equiv B$' não expressa a equivalência material e, assim, não expressa nenhuma função de verdade bivalente. Disto, podemos concluir que BS-Prop não é um cálculo clássico.

2 – Matriz Trivalente para BS-Prop

Seja M=<{1,2,3}, {1}, ¬, ⊃, ≡> uma matriz trivalente com o valor distinguido 1. Sejam também as tabelas abaixo para os conectivos de BS-Prop.

Tabela da Negação

A	$\neg A$
1	2
2	1
3	1

541 Esta fórmula expressa a equivalência material.

Tabela da Implicação

$\to$	1	2	3
1	1	2	2
2	1	1	1
3	1	1	1

Tabela da Identidade de Conteúdo

$\equiv$	1	2	3
1	1	3	3
2	3	1	3
3	3	3	1

3 – M-Validade dos Axiomas de BS-Prop

Dizemos que uma fórmula é M-válida se ela recebe valor distinguido 1 para qualquer atribuição dada às suas variáveis proposicionais.

Agora, verificaremos se os axiomas de (1) a (7) recebem valor 1 para todas as atribuições, mostrando que todos são M-válidos.

Axioma 1: $(A \supset (B \supset A))$

A	B	$(B \supset A)$	$(A \supset (B \supset A))$
1	1	1	1
1	2	1	1
1	3	1	1
2	1	2	1
2	2	1	1
2	3	1	1
3	1	2	1
3	2	1	1
3	3	1	1

Axioma 3 e Axioma 4: $(\neg\neg A \supset A)$ e $(A \supset \neg\neg A)$

A	$\neg A$	$\neg\neg A$	$(\neg\neg A \supset A)$	$(A \supset \neg\neg A)$
1	2	1	1	1
2	1	2	1	1
3	1	2	1	1

Axioma 2: $((A\supset(B\supset C))\supset((A\supset B)\supset(A\supset C)))$

A	B	C	$(B\supset C)$	$(A\supset(B\supset C))$	$(A\supset B)$	$(A\supset C)$	$((A\supset B)\supset(A\supset C))$	$(A\supset(B\supset C))\supset((A\supset B)\supset(A\supset C))$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	2	2	1	2	2	1
1	1	3	2	2	1	2	2	1
1	2	1	1	1	2	1	1	1
1	2	2	1	1	2	2	1	1
1	2	3	1	1	2	2	1	1
1	3	1	1	1	2	1	1	1
1	3	2	1	1	2	2	1	1
1	3	3	1	1	2	2	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	1	1	1	1	1
2	1	3	2	1	1	1	1	1
2	2	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	1	1	1	1	1	1
2	2	3	1	1	1	1	1	1
2	3	1	1	1	1	1	1	1
2	3	2	1	1	1	1	1	1
2	3	3	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	2	2	1	1	1	1	1
3	1	3	2	1	1	1	1	1
3	2	1	1	1	1	1	1	1
3	2	2	1	1	1	1	1	1
3	2	3	1	1	1	1	1	1
3	3	1	1	1	1	1	1	1
3	3	2	1	1	1	1	1	1
3	3	3	1	1	1	1	1	1

Axioma 5: $((A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A))$

A	B	$\neg B$	$\neg A$	$(A \supset B)$	$(\neg B \supset \neg A)$	$((A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A))$
1	1	2	2	1	1	1
1	2	1	2	2	2	1
1	3	1	2	2	2	1
2	1	2	1	1	1	1
2	2	1	1	1	1	1
2	3	1	1	1	1	1
3	1	2	1	1	1	1
3	2	1	1	1	1	1
3	3	1	1	1	1	1

Axioma 6: $(A \equiv A)$

A	$(A \equiv A)$
1	1
2	1
3	1

Axioma 7: $((A \equiv B) \supset (C \supset C[A/B]))$

O axioma 7 tem a forma implicativa, portanto ele só poderia receber um valor diferente de 1 no caso do antecedente receber o valor 1. Mas, $(A \equiv B)$ só receberá valor 1, quando A e B receberem o mesmo valor. Ora, se A e B tiverem o mesmo valor, C e $C[A/B]$ terão necessariamente o mesmo valor, qualquer que seja C. Mas, pela tabela da implicação, quando o antecedente e o consequente recebem o mesmo valor, a implicação receberá o valor 1. Assim, sempre que $(A \equiv B)$ tiver valor 1, $(C \supset C[A/B])$ terá o valor 1 também. Portanto, o axioma 7 é M-válido.

Teorema 1: Todos os axiomas de BS-Prop são M-válidos.

Se chamarmos grotescas todas as fórmulas que recebem o valor 1 para todas as atribuições, então:

Lema: Modus Ponens (MP) preserva a propriedade de ser grotesca.

Esboço de Prova: Assuma que A e $A \supset B$ são grotescas. Assuma, por contradição, que B (inferida por MP) não é grotesca. Ou seja, B recebe valor 2 ou 3. Mas, uma vez que A é grotesco, ele recebe valor 1 sempre. Assim, existiria alguma atribuição tal que A é 1 e B é 2 ou 3. Mas, nestes casos, seguindo a tabela de implicação, $A \supset B$ receberia valor 2, contradizendo o fato inicial de que $A \supset B$ tem a propriedade de ser grotesca.

Corolário: Todos os teoremas de BS-Prop são grotescos, portanto sempre recebem valor 1, ou seja, são M-válidos.

O próximo passo é mostrar que (**IV***), (**NN**) e (**BB**) não são grotescos. Para isto, basta mostrar apenas a existência de uma M-valoração que dá um valor diferente de 1 para cada uma destas fórmulas.

4 – Independência de (**IV***), (**NN**) e (**BB**)

Independência de IV*: $(\neg(A\equiv \neg B)\supset(A\equiv B))$

Há três possibilidades nas quais (**IV***) não recebe valor 1. Estas são:

A	B	$\neg B$	$(A\equiv \neg B)$	$\neg(A\equiv \neg B)$	$(A\equiv B)$	$(\neg(A\equiv \neg B)\supset(A\equiv B))$
2	3	1	3	1	3	2
3	1	2	3	1	3	2
3	2	1	3	1	3	2

Independência de (BB): $((A\supset B)\supset((B\supset A)\supset(A\equiv B)))$

Há duas possibilidades na qual (**BB**) não recebe valor 1

A	B	$(A\supset B)$	$(B\supset A)$	$(A\equiv B)$	$(B\supset A)\supset(A\equiv B)$	$((A\supset B)\supset((B\supset A)\supset(A\equiv B)))$
2	3	1	1	3	2	2
3	2	1	1	3	2	2

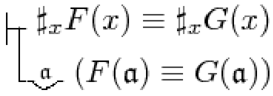
Independência de (**NN**): $\neg\neg A\equiv A$

Há uma possibilidade na qual (**NN**) não recebe valor 1.

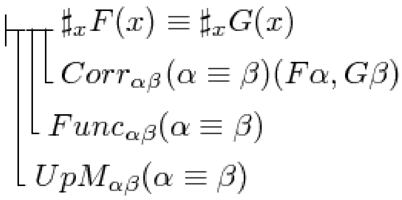
A	$\neg A$	$\neg\neg A$	$\neg\neg A\equiv A$
3	1	2	3

Apêndice 2

Prova de um análogo do teorema 96 de GGA

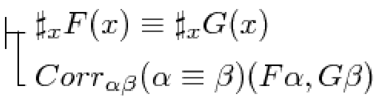


Da seguinte instância de PH6, temos



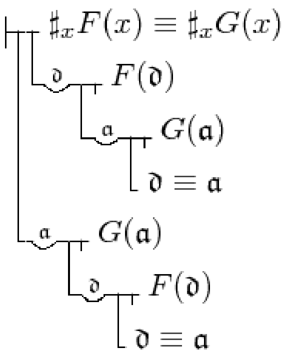
(1)

Dos teoremas 1 e 2 de **4** e MP, obtemos



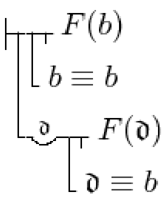
(2)

Isto é equivalente a



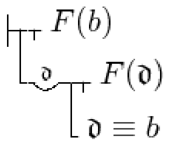
(3)

De 58BS, temos



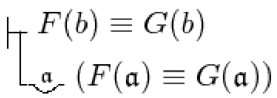
(4)

De 54BS e MP, derivamos



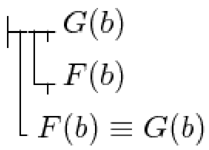
(5)

De 58BS, temos



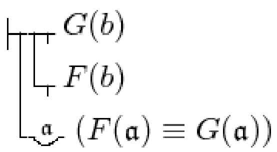
(6)

De 52BS, temos



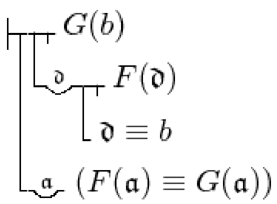
(7)

De (6), (7) e TR, obtemos



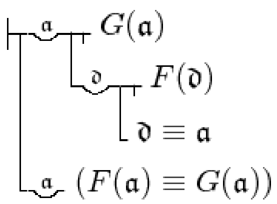
(8)

De (5), (8) e TR, obtemos



(9)

Aplicando CGC1, obtemos



(10)

De 58BS, temos

$$\begin{array}{l} \vdash F(b) \\ \quad b \equiv b \\ \quad \overset{\mathfrak{d}}{\smile} F(\mathfrak{d}) \\ \qquad \mathfrak{d} \equiv b \end{array} \tag{11}$$

De 54BS e MP, temos

$$\begin{array}{l} \vdash G(d) \\ \quad \overset{\mathfrak{a}}{\smile} G(\mathfrak{a}) \\ \qquad d \equiv \mathfrak{a} \end{array} \tag{11}$$

De 58BS, temos

$$\begin{array}{l} \vdash F(d) \equiv G(d) \\ \quad \overset{\mathfrak{a}}{\smile} (F(\mathfrak{a}) \equiv G(\mathfrak{a})) \end{array} \tag{12}$$

De 57BS, temos

$$\begin{array}{l} \vdash F(d) \\ \quad G(d) \\ \quad F(d) \equiv G(d) \end{array} \tag{13}$$

De (12), (13) e TR, temos

$$\begin{array}{l} \vdash F(d) \\ \quad G(d) \\ \quad \overset{\mathfrak{a}}{\smile} (F(\mathfrak{a}) \equiv G(\mathfrak{a})) \end{array} \tag{14}$$

De (11), (14) e TR, derivamos

$$\begin{array}{l} \vdash F(d) \\ \quad \overset{\mathfrak{a}}{\smile} G(\mathfrak{a}) \\ \qquad d \equiv \mathfrak{a} \\ \quad \overset{\mathfrak{a}}{\smile} (F(\mathfrak{a}) \equiv G(\mathfrak{a})) \end{array} \tag{15}$$

Aplicando CGC1, obtemos

$$\BGassert\BGconditional{\BGquant{\mathfrak{a}}(F(\mathfrak{a})\equiv G(\mathfrak{a}))}{\BGquant{\mathfrak{d}}\BGconditional{\BGquant{\mathfrak{a}}\BGconditional{\mathfrak{d}\equiv\mathfrak{a}}{G(\mathfrak{a})}}{F(\mathfrak{d})}} \tag{16}$$

De (3), (10), (16) e TR, obtemos

$$\BGassert\BGconditional{\BGquant{\mathfrak{a}}(F(\mathfrak{a})\equiv G(\mathfrak{a}))}{\sharp_x F(x)\equiv\sharp_x G(x).}$$

Apêndice 3

Suposta prova da fórmula (V*)

$$\vdash \alpha'\epsilon' f(\epsilon,\alpha) = \alpha'\epsilon' g(\epsilon,\alpha) = \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\overset{\mathfrak{b}}{\smile}((f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = g(\mathfrak{a},\mathfrak{b}))$$

Na suposta prova, deveríamos mostrar as duas proposições:

(Va*)
$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\, \alpha'\epsilon' f(\epsilon,\alpha) = \alpha'\epsilon' g(\epsilon,\alpha) \\ \quad\llcorner \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\overset{\mathfrak{b}}{\smile} (f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = g(\mathfrak{a},\mathfrak{b})) \end{array}$$

(Vb*)
$$\begin{array}{l} \vdash\!\top \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\overset{\mathfrak{b}}{\smile} (f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = g(\mathfrak{a},\mathfrak{b})) \\ \quad\llcorner\, \alpha'\epsilon' f(\epsilon,\alpha) = \alpha'\epsilon' g(\epsilon,\alpha) \end{array}$$

O que desejamos mostrar é a dependência de (Vb*) em relação ao teorema 1 de **GGA**, que por sua vez depende do teorema IVa e dos valores de verdade como objetos.

Assumiremos aqui os teoremas (Va) e (Vb) que são derivados diretamente do Axioma V:

(Va)
$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\, \epsilon' f(\epsilon) = \epsilon' g(\epsilon) \\ \quad\llcorner \overset{\mathfrak{a}}{\smile} (f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})) \end{array}$$

(Vb)
$$\begin{array}{l} \vdash\!\top \overset{\mathfrak{a}}{\smile} (f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})) \\ \quad\llcorner\, \epsilon' f(\epsilon) = \epsilon' g(\epsilon) \end{array}$$

Prova de (Va*)

De IIa, temos a seguinte instância

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top \overset{\mathfrak{b}}{\smile} (f(a,\mathfrak{b}) = g(a,\mathfrak{b})) \\ \quad\llcorner \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\overset{\mathfrak{b}}{\smile} (f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = g(\mathfrak{a},\mathfrak{b})) \end{array}$$

(1).

Da seguinte instância de IIa

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\, f(a,b) = g(a,b) \\ \quad\llcorner \overset{\mathfrak{b}}{\smile} (f(a,\mathfrak{b}) = g(a,\mathfrak{b})) \end{array}$$

(2)

(1) e TR, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\, f(a,b) = g(a,b) \\ \quad\llcorner \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\overset{\mathfrak{b}}{\smile} (f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = g(\mathfrak{a},\mathfrak{b})) \end{array}$$

(3)

Por CGC1, obtemos

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, (f(\mathfrak{a},b) = g(\mathfrak{a},b)) \\ \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\, (f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = g(\mathfrak{a},\mathfrak{b})) \end{array}$$

(4)

Da seguinte instância de (Va)

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \epsilon' f(\epsilon,b) = \epsilon' g(\epsilon,b) \\ \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, (f(\mathfrak{a},b) = g(\mathfrak{a},b)) \end{array}$$

(4) e TR, obtemos

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \epsilon' f(\epsilon,b) = \epsilon' g(\epsilon,b) \\ \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\, (f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = g(\mathfrak{a},\mathfrak{b})) \end{array}$$

(5)

Por CGC1, temos

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{b}}{\smile}\, (\epsilon' f(\epsilon,\mathfrak{b}) = \epsilon' g(\epsilon,\mathfrak{b})) \\ \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\, (f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = g(\mathfrak{a},\mathfrak{b})) \end{array}$$

(6)

Da seguinte instância de Va

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \alpha'\epsilon' f(\epsilon,\alpha) = \alpha'\epsilon' g(\epsilon,\alpha) \\ \overset{\mathfrak{b}}{\smile}\, (\epsilon' f(\epsilon,\mathfrak{b}) = \epsilon' g(\epsilon,\mathfrak{b})) \end{array}$$

(6) e TR, obtemos

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \alpha'\epsilon' f(\epsilon,\alpha) = \alpha'\epsilon' g(\epsilon,\alpha) \\ \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\, (f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = g(\mathfrak{a},\mathfrak{b})) \end{array}$$

(Va*)

Prova de (Vb*)

Da seguinte instância de IIIc (ou 52BS), temos

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} f(a,b) = a \cap (b \cap \alpha'\epsilon' g(\epsilon,\alpha)) \\ f(a,b) = a \cap (b \cap \alpha'\epsilon' f(\epsilon,\alpha)) \\ \alpha'\epsilon' f(\epsilon,\alpha) = \alpha'\epsilon' g(\epsilon,\alpha) \end{array}$$

(7)

Observação: aqui '$f\xi$' que ocorre em IIIc foi substituída pela seguinte fórmula:

$$f(a,b) = a \cap (b \cap \xi)$$

Uma vez que há o teorema 2 de GGA

$$\vdash f(a,b) = a \cap (b \cap \alpha'\epsilon' f(\epsilon,\alpha))$$

aplicando MP, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top f(a,b) = a \cap (b \cap \alpha'\epsilon' g(\epsilon,\alpha)) \\ \quad \llcorner\, \alpha'\epsilon' f(\epsilon,\alpha) = \alpha'\epsilon' g(\epsilon,\alpha) \end{array}$$

(8)

Da seguinte instância de IIIc [542]

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\!\top g(a,b) = f(a,b) \\ \quad\;\; \llcorner\, g(a,b) = a \cap (b \cap \alpha'\epsilon' g(\epsilon,\alpha)) \\ \quad \llcorner\, f(a,b) = a \cap (b \cap \alpha'\epsilon' g(\epsilon,\alpha)) \end{array},$$

teorema 2 de GGA e MP, derivamos

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top g(a,b) = f(a,b) \\ \quad \llcorner\, f(a,b) = a \cap (b \cap \alpha'\epsilon' g(\epsilon,\alpha)) \end{array}$$

(9)

De (8), (9) e TR, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top g(a,b) = f(a,b) \\ \quad \llcorner\, \alpha'\epsilon' f(\epsilon,\alpha) = \alpha'\epsilon' g(\epsilon,\alpha) \end{array}$$

(10)

Da seguinte instância de IIIf de GGA

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top f(a,b) = g(a,b) \\ \quad \llcorner\, g(a,b) = f(a,b) \end{array},$$

(10) e TR, derivamos

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top f(a,b) = g(a,b) \\ \quad \llcorner\, \alpha'\epsilon' f(\epsilon,\alpha) = \alpha'\epsilon' g(\epsilon,\alpha) \end{array}$$

(11)

Por CGC1, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\overset{\mathfrak{b}}{\smile} (f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = g(\mathfrak{a},\mathfrak{b})) \\ \quad \llcorner\, \alpha'\epsilon' f(\epsilon,\alpha) = \alpha'\epsilon' g(\epsilon,\alpha) \end{array}$$

(Vb*)

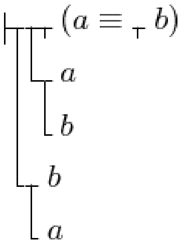
De (Va*), (Vb*), IVa e MP, obtemos (V*).

542 Aqui substituímos '$f\xi$' por '$g(a,b) = \xi$'.

Apêndice 4

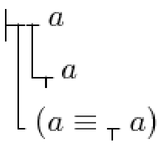
Prova das fórmulas

(1) $\vdash (a \equiv a)$

(2) 

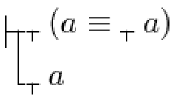
Prova de (1)

Da seguinte instância de de 57BS, temos



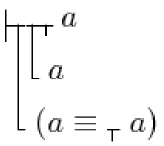
(1)

e CP, obtemos



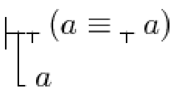
(2)

Da seguinte instância de 52BS



(3)

e CP, derivamos



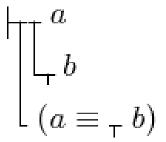
(4)

De (2), (3) e TMI, obtemos

$\vdash (a \equiv a)$.

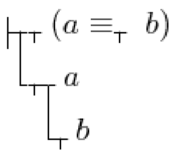
Prova de 2

Da seguinte instância de 57BS,



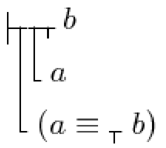
(5)

e (CP), obtemos



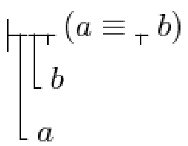
(6)

Da seguinte instância de 52BS



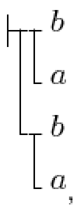
(7)

e CP, obtemos

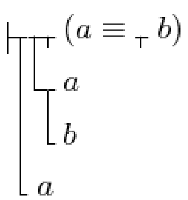


(8)

Da seguinte instância de 27BS

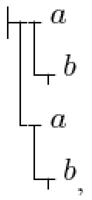


(8) e TR, derivamos

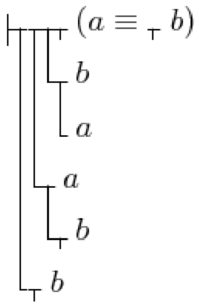


(9)

Da seguinte instância de 27BS

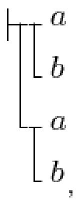


(9) e TR, inferimos

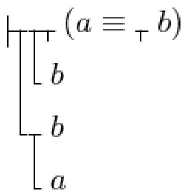


(10)

Da seguinte instância de 27BS

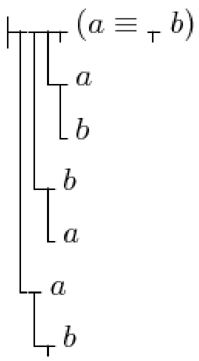


(8) e TR, obtemos



(11)

De (10), (11) e TMI, derivamos



(12)

De (6), (12) e TMI, obtemos