UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

O MÉTODO DE BOCHNER

Ivan Italo Gonzales Gargate

Rio de Janeiro, Abril de 2007

O MÉTODO DE BOCHNER

Ivan Italo Gonzales Gargate

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática da Universidade Federal Fluminense,
como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática.

Orientador: Detang Zhou

Rio de Janeiro, Abril de 2007

Introdução

Um dos mais importantes aspectos da geometria diferencial é obter uma relação entre as propriedades da curvatura de uma variedade Riemanniana e sua estrutura topológica. Na década em que apareceram os primeiros trabalhos de S. S. Bochner nesta linha de pesquisa, muitas investigações com o nome de "curvature and betti numbers"foram inauguradas.

Agora, quando queremos establecer relações entre o Laplaciano induzido sobre uma variedade Riemanniana compacta e sua Geometria, isto é, a curvature e os números de Betti de uma variedade. Os métodos que a continuação indicaremos foram introduzidos pelo matemático Solomon Bochner e que nestos momentos é chamado , o método de Bochner.

Bochner nasceu em 1899 em Krakóv em Austria-Hungria (agora Polónia) e falleceu em 1982 Houston (Texas USA). Solomon Bochner estudio na Universidade de Warsaw. Obteve seu Ph. D. na Universidade de Berlin em 1921 com o trabalho sobre sistemas ortogonais de funções analíticas complexas. Foi supervisado por Schmidt. Bochner trabalhou com Harald Bohr, Hadry e Littlewood em Copenhagen, Oxford anda Cambridge respectivamente. Muitos de seus trabalhos foram sobre a função Zeta de Riemann . Bochner em Munich desde 1924 até 1933 desenvolveu resultados sobre analisis harmônico. Seu trabalho foi ussado na teoria de distribuições.Fora de Alemanha em 1933, aceitou trabalhar em Pinceton, onde segueu ate se retirar. Ele trabalhou neste tempo sobre as somas de series de Fourier e foi considerado como um dos maiores espertos sobre o Análise de Fourier. Também trabalhou juntamente com Von Neuman por um momento. Seu maior livro inclui Análise Harmônico e a Teoria de Probabilidades (1955). Nos 1960's trabalhou sobre a historia e filosofia da matemática.

Usando a teoria harmônica de Bochner é possível mostrar que certos números de Betti de X são nulos baixo certas estimativas sobre a curvatura de uma variedade Riemanniana compacta.

No capítulo 1 estudaremos os fundamentos básicos da Álgebra Tensorial assim como a obtenção do produto tensorial, e a obtenção dos Fibrados Tensoriais e Vetoriais sobre uma variedade qualquer.

No capítulo 2 estudaremos em forma geral os aspectos da diferenciação exterior e conexões sobre uma variedade, obserando sempre nem como as componentes de uma r-forma muda com mudanças de coordenadas.

No capítulo 3, dado por conhecida a existência de uma conexão afim em uma variedade Riemanniana, se desenvolve como é que a conexão, ou derivação sobre a variedade, vai agindo sobre aplicações e r-formas diferenciais.

No capítulo 4 teremos como principais resultados os teoremas de Hodge e o Método de Bochner, e veremos na seção 4.4 a suas aplicações e a obtenção de resultados topológicos em base a estas observações. Veremos como é que a fórmula de Bochner é uma mistura da curvatura e o operador Laplaciano-Beltrami, definido na seção 4.2.

Sumário

Capítulo 1

Álgebra Tensorial

Neste capítulo introduziremos as ferramentas básicas da Álgebra Tensorial, assim como a construção do produto tensorial, com a finalidade de aproveitar este desenvolvimento e aplicar nas variedades Riemannianas. Aqui, todos os espaços vetoriais são de dimensão finita

1.1 Álgebra Multilinear

Denotemos por $\mathbb{F}$ um corpo ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$. Uma aplicação $f : V \longrightarrow \mathbb{F}$ é chamada *linear* se

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y),$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, e $x, y \in V$.

O conjunto $V^* = \{f : V \longrightarrow \mathbb{F},\ f \text{ é linear}\}$, é chamado o *Espaço Dual* de V. Se V é um espaço vetorial n-dimensional sobre $\mathbb{F}$, então V^* é também um espaço vetorial n-dimensional sobre $\mathbb{F}$; em efeito, considere $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ uma base para V e $v \in V$ tal que

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i a_i,$$

com os v^i escalares; se $f \in V^*$, então

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} v^i f(a_i).$$

De esta maneira, a aplicação linear f é determinada pelo seus valores $f(a_i)$, $1 \leq i \leq n$, sobre a base, assim podemos definir aplicações lineares $a^{*i} \in V^*$, $1 \leq i \leq n$, tais que

$$a^{*i}(a_j) = \delta^i_j, \quad 1 \leq j \leq n,$$

com $\delta^i_j = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$, e assim, $a^{*i}(v) = v^i$. Daqui

$$\begin{aligned} f(v) &= \sum_{i=1}^{n} f_i v^i \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_i a^{*i}(v), \end{aligned}$$

logo

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i a^{*i}, \tag{1.1}$$

onde $f_i = f(a_i)$.

A equação (1.1) indica que qualquer elemento em V^* pode ser expressado como combinação linear dos $\{a^{*i}, 1 \leq i \leq n\}$; observando que esta expressão é única, o conjunto $\{a^{*i}, 1 \leq i \leq n\}$ forma uma base para V^* a qual é chamada a *base dual* de $\{a^i, 1 \leq i \leq n\}$ e portanto V^* é também um espaço vetorial n-dimensional sobre $\mathbb{F}$.

Definição 1.1 *Sejam V, Z espaços vetoriais. Uma aplicação $f : V \longrightarrow Z$ é chamada linear se temos*

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2),$$

para cada $v_1, v_2 \in V$, $\alpha_1, \alpha_2 \in F$. $\Diamond$

Definição 1.2 *Sejam V, W e Z espaços vetoriais. Uma aplicação $f : V \times W \longrightarrow Z$ é chamada bilinear se temos*

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) &= \alpha_1 f(v_1, w) + \alpha_2 f(v_2, w) \\ f(v, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) &= \beta_1 f(v, w_1) + \beta_2 f(v, w_2), \end{aligned}$$

para cada $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$, $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \beta_1, \beta_2 \in F$. $\Diamond$

Exemplo 1 : Sejam V e V^* espaços duais. Definimos a aplicação

$$\begin{array}{rcll} <,>: V \times V^* & \longrightarrow & \mathbb{F} & \\ (v, v^*) & \longrightarrow & <,> \cdot (v, v^*) & = < v, v^* > \\ & & & = v^*(v). \end{array}$$

Assim, $<,>$ é uma aplicação bilinear com valores em $\mathbb{F}$ definida sobre $V \times V^*$.

Definição 1.3 *Sejam $V_1, V_2, \cdots, V_r, Z$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$. Uma aplicação $f : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_r \longrightarrow Z$ é chamada r-linear se*

$$f(v_1, \cdots, \alpha_1 v_i^1 + \alpha_2 v_i^2, \cdots, v_r) = \alpha_1 f(v_1, \cdots, v_i^1, \cdots, v_r) + \alpha_2 f(v_1, \cdots, v_i^2, \cdots, v_r).$$

$\Diamond$

Denotaremos o conjunto de todas as aplicações r-lineares de $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_r$ em Z como $\mathcal{L}(V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_r; Z)$.

Sejam $f, g \in \mathcal{L}(V_1 \times V_2 \times ... \times V_r; Z), \alpha \in \mathbb{F}$, então para quaisquer $v_i \in V_i, 1 \leq i \leq n$, definimos

$$\begin{aligned}(f+g)(v_1, v_2, \cdots, v_n) &= f(v_1, \cdots, v_n) + g(v_1, \cdots, v_n) \\ (\alpha f)(v_1, v_2, \cdots, v_n) &= \alpha f(v_1, v_2, \cdots, v_n),\end{aligned}$$

com isto temos que $f + g$ e αf pertencem a $\mathcal{L}(V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_r; Z)$, daqui $\mathcal{L}(V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_r; Z)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$.

No que segue pretendemos transformar uma aplicação bilinear sobre $V \times W$, em uma aplicação linear; mas precisamente, dados dos espaços vetoriais V, W, construir um espaço vetorial Y e uma aplicação bilinear $h : V \times W \longrightarrow Y$ dependendo somente dos espaços V, W e satisfazendo que: para quaisquer aplicação bilinear $f : V \times W \longrightarrow Z$, existe uma única aplicação linear $g : Y \longrightarrow Z$ tal que

$$f = g \circ h : V \times W \longrightarrow Z$$

isto é, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

O espaço Y assim construído é chamado o *Produto Tensorial* de V e W.

Os elementos da forma $v^* \otimes w^*$ em $V^* \otimes W^*$ são chamados *Redutíveis*.

1.2 Construção do Produto Tensorial

Primeiro consideraremos o Produto Tensorial dos espaços duais V^* e W^*. Sejam $v^* \in V^*, w^* \in W^*$, então definimos o produto tensorial $\otimes$ como sendo

$$\begin{aligned}v^* \otimes w^*(v, w) &= v^*(v).w^*(w) \\ &= < v, v^* > \cdot < w, w^* >,\end{aligned}$$

onde $v \in V, w \in W$.

Assim definido, $\otimes : V^* \times W^* \longrightarrow \mathcal{L}(V, W; \mathbb{F})$ é uma aplicação bilinear , pois se $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$, então

$$\begin{aligned}(\alpha_1 v_1^* + \alpha_2 v_2^*) \otimes w^*(v, w) &= < v, \alpha_1 v_1^* + \alpha_2 v_2^* > \cdot < w, w^* > \\ &= \alpha_1 < v, v_1^* > \cdot < w, w^* > + \alpha_2 < v, v_2^* > \cdot < w, w^* > \\ &= (\alpha_1(v_1^* \otimes w^*) + (\alpha_2(v_2^* \otimes w^*)))(v, w),\end{aligned}$$

isto é

$$(\alpha_1 v_1^* + \alpha_2 v_2^*) \otimes w^* = \alpha_1(v_1^* \otimes w^*) + \alpha_2(v_2^* \otimes w*).$$

Similarmente podemos mostrar que a operação $\otimes$ é também linear na segunda variável.

Sejam $\{a_i\}_{1\leq i\leq n}$ e $\{b_j\}_{1\leq j\leq m}$ bases de V e W, e sejam $\{a^{*i}\}_{1\leq i\leq n}$ e $\{b^{*j}\}_{1\leq j\leq m}$ suas bases duais , isto é, bases de V^* e W^* respectivamente, então, desde que $\otimes$ é bilinear, temos

$$v^* \otimes w^* = \sum_{i,j=1}^{n,m} v^*(a_i)\cdot w^*(b_j)a^{*i}\otimes b^{*j}.$$

Com isto, qualquer elemento de $V^*\times W^*$ pode ser expressado como combinação linear de elementos da forma $a^{*i}\otimes b^{*j}$, os quais resultam ser uma base para $V^*\otimes W^*$, assim $V^*\otimes W^*$ é um espaço vetorial $(n\times m)$-dimensional.

É possível mostrar que qualquer aplicação bilinear $f: V\times W \longrightarrow \mathbb{F}$ pode ser expressada como combinação linear dos $a^{*i}\otimes b^{*j}$, assim, obtemos que os espaços $V^*\otimes W^*$ e $\mathcal{L}(V\times W;\mathbb{F})$ são isomorfos. Similarmente temos

$$V\otimes W = \mathcal{L}(V^*\times W^*;\mathbb{F}).$$

Para que $V\otimes W$ e $V^*\otimes W^*$ sejam duais entre sim, requeremos

$$< v\otimes w, v^*\otimes w^* >=< v, v^* > \cdot < w, w^* >,$$

em particular

$$< a_i\otimes b_j, a^{*p}\otimes b^{*q} >= \delta_i^p\cdot\delta_j^q.$$

$$\delta_i^p\cdot\delta_j^q = \begin{cases} 1 & ,(i,j)=(p,q)\\ 0 & ,(i,j)\neq(p,q).\end{cases}$$

Assim $\{a_i\otimes b_j, 1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m\}$ e $\{a^{*i}\otimes b^{*j}, 1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m\}$ são bases duais. Finalmente temos

$$V^*\otimes W^* = (V\otimes W)^*.$$

Teorema 1.1 *Suponhamos que $h: V\times W \longrightarrow V\otimes W$ é a aplicação bilinear obtida do produto tensorial $\otimes$, i.e, para $v\in V, w\in W$*

$$h(v,w) = v\otimes w,$$

então, para qualquer aplicação bilinear $f: V\times W \longrightarrow Z$, existe uma única aplicação linear $g: V\otimes W :\longrightarrow Z$ tal que

$$f = g\circ h : V\times W \longrightarrow Z.$$

Demonstração.
Defina a aplicação linear $g : V \otimes W \longrightarrow Z$ tal que sua ação sobre a base é definida por

$$g(a_i \otimes b_j) = f(a_i, b_j), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Sejam $v \in V, w \in W$, assim existem escalares v^i, w^i, $1 \leq i \leq n$ tais que

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i a_i \quad w = \sum_{j=1}^{m} w^j b_j,$$

então

$$\begin{aligned} g(v \otimes w) &= \sum_{i,j} v^i w^j g(a_i \otimes b_j) \\ &= \sum_{i,j} v^i w^j f(a_i, b_j), \\ &= f(v, w), \end{aligned}$$

daqui $f = g \circ h : V \times W \longrightarrow Z$, aliás , g é única. ■

Corolario 1.1 *Os espaços vetoriais $\mathcal{L}(V \times W; Z)$ e $\mathcal{L}(V \otimes W; Z)$ são isomorfos.*

Demonstração.
Defina a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{L}(V \otimes W; Z) & \longrightarrow & \mathcal{L}(V, W; Z) \\ g & \longrightarrow & \varphi(g) = g \circ h, \end{array}$$

onde h é definido como no teorema (1.1), assim, pelo o teorema anterior, temos que φ é uma bijeção e além disso é linear, portanto φ é um isomorfismo. ■

Podemos generalizar a operação de produto tensorial de aplicações lineares a aplicações multilineares, para isso sejam $f \in \mathcal{L}(V_1 \times \cdots \times V_r; \mathbb{F})$, $g \in \mathcal{L}(W_1 \times \cdots \times W_s; \mathbb{F})$, então o seu produto tensorial é definido como segue

$$f \otimes g(v_1, \cdots, v_r, w_1, \cdots, w_s) = f(v_1, \cdots, v_r) \cdot g(w_1, \cdots, w_s)$$

onde $v_i \in V_i, w_j \in W_j$, $1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s$.

Como conseqüência desta definição temos o seguinte teorema :

Teorema 1.2 *O produto tensorial $\otimes$ é uma aplicação bilinear de $\mathcal{L}(V_1, \cdots, V_r; \mathbb{F}) \times \mathcal{L}(W_1, \cdots, W_s; \mathbb{F})$ em $\mathcal{L}(V_1, \cdots, V_r, W_1, \cdots, W_s; \mathbb{F})$; além disso, $\otimes$ é associativo, isto é, para quaisquer $\varphi \in \mathcal{L}(V_1, \cdots, V_r; \mathbb{F}), \psi \in \mathcal{L}(W_1, \cdots, W_s; \mathbb{F}), \xi \in \mathcal{L}(Z_1, \cdots, Z_t; \mathbb{F})$ temos*

$$(\phi \otimes \psi) \otimes \xi = \phi \otimes (\psi \otimes \xi).$$

Demonstração.
Ver ([1]). ■

Podemos mostrar também que

$$dim(V_1 \otimes \cdots \otimes V_r) = dimV_1.dimV_2.\cdots.dimV_r,$$

e

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_r = \mathcal{L}(V_1^* \times \cdots \times V_r^*; \mathbb{F}).$$

Finalmente, apresentamos a generalização do teorema anterior :

Teorema 1.3 *Seja* $h : V_1 \times \cdots \times V_r \longrightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$ *aplicação r-linear definida pelo produto tensorial* $\otimes$ *, i.e. , para* $v_i \in V_i, 1 \leq i \leq r$,

$$h(v_1, \cdots, v_r) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_r.$$

Então, para quaisquer $f \in \mathcal{L}(V_1, \cdots, V_s; Z)$, *existe uma única aplicação linear* $g \in \mathcal{L}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_r; Z)$ *tal que*

$$f = g \circ h : V_1 \times \cdots \times V_r \longrightarrow Z.$$

Demonstração.
Ver ([1]). ■

1.3 Tensores

Definição 1.4 *Seja V um espaço vetorial n-dimensional sobre $\mathbb{F}$ e V^* o seu espaço dual. Os elementos do produto tensorial*

$$V_s^r = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r-termos} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{s-termos},$$

são chamados tensores do tipo $-(r,s)$, onde "r"é o ordem contravariante e "s"é o ordem covariante.

Em particular, os elementos em V_0^r são chamados tensores contravariantes de ordem r, e os elementos de V_s^0 são chamados tensores covariantes de ordem s.$\Diamond$

Vamos convenir que $V_0^0 = \mathbb{F}, V_0^1 = V, V_1^0 = V^*$. Os elementos de V são chamados *contravetores*, e os elementos de V^* são *covetores.*

Pelo feito na seção anterior temos que

$$dim V_s^r = n^{r+s},$$

e

$$V_s^r = \mathcal{L}(\underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r-termos} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s-termos}; \mathbb{F}).$$

Isto mostra que os tensores do tipo-(r,s) são $(r+s)$-funcionais lineares definidas sobre

$$\underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r-termos} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s-termos}.$$

Seja $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$ uma base de V e $\{e^{*i}\}_{1\leq i\leq n}$ a sua base dual, então

$$e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{*k_1} \otimes \cdots \otimes e^{*k_s}, \quad 1 \leq i_1, \cdots, i_r, k_1, \cdots, k_s \leq n, \tag{1.2}$$

forma uma base para V_s^r; daqui um tensor x do tipo-(r,s) pode ser unicamente representado por

$$x = \sum_{\substack{i_1\cdots i_r \\ k_1\cdots k_s}} x_{k_1\cdots k_s}^{i_1\cdots ir} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{*k_1} \otimes \cdots \otimes e^{*k_s},$$

onde os $x_{k_1\cdots k_s}^{i_1\cdots ir}$ são chamados as *componentes* do tensor x na base dada em (1.2). Com um simples cálculo podemos obter que

$$\begin{aligned} x_{k_1\cdots k_s}^{i_1\cdots ir} &= x(e^{*i_1}, \cdots, e^{*i_r}, e_{k_1}, \cdots, e_{k_s}) \\ &= < e^{*i_1} \otimes \cdots \otimes e^{*i_r} \otimes e_{k_1} \otimes \cdots \otimes e_{k_s}, x > . \end{aligned}$$

Se escolhemos uma outra base $\{\bar{e}_i\}_{1\leq i\leq n}$ de V com base dual $\{\bar{e}^{*i}\}_{1\leq i\leq n}$, então a relação com respeito á base inicial vem dada por

$$\bar{e}_i = \alpha_i^j e_j,$$

onde $\alpha = (\alpha_i^j)$ é uma matriz $n \times n$ não singular. Também temos

$$\bar{e}^{*i} = \beta_j^i e^{*j},$$

onde $\beta = (\beta_i^j)$ é a matriz inversa de α, isto é

$$\alpha_i^j \beta_j^k = \beta_i^j \alpha_j^k = \delta_i^k.$$

Se denotamos as componentes do tensor x, com respeito a esta nova base, por $\bar{x}_{k_1\cdots k_s}^{i_1\cdots i_r}$, então obtemos a seguinte relação

$$x_{l_1\cdots l_s}^{j_1\cdots j_r} = \bar{x}_{k_1\cdots k_s}^{i_1\cdots i_r} \alpha_{i_1}^{j_1} \cdots \alpha_{i_r}^{j_r} \beta_{l_1}^{k_1} \cdots \beta_{l_s}^{k_s}.$$

O espaço V_s^r de todos os tensores do tipo-(r, s) é um espaço vetorial, aliás podemos definir duas operações: multiplicação e contração.

Definição 1.5 *Sejam x um tensor do tipo-(r_1, s_1) e y um tensor do tipo-(r_2, s_2). O produto tensorial de x e y, $x \otimes y$, é um tensor do tipo-$(r_1 + r_2, s_1 + s_2)$ dado por*

$$\begin{aligned} x \otimes y(v^{*1}, \cdots, v^{*r_1 r_2}, v_1, \cdots, v_{s_1+s_2}) = {} & x(v^{*1}, \cdots, v^{*r_1}, v_1, \cdots, v_{s_1}) \cdot \\ & y(v^{*r_1+1}, \cdots, v^{*r_1+r_2}, v_{s_1+1}, \cdots, v_{s_1+s_2}), \end{aligned}$$

onde $v_i \in V$,$v^j \in V^*$ para todo $1 \leq i \leq s_1 + s_2$, $1 \leq j \leq r_1 + r_2$. $\diamondsuit$

Quando é escolhida uma base, as componentes de $x \otimes y$ tem a forma

$$(x \otimes y)_{k_1\cdots k s_1+s_2}^{i_1\cdots i_{r_1+r_2}} = x_{k_1\cdots k_{s_1}}^{i_1\cdots i_{r_1}} \cdot y_{k_{s_1+1}\cdots k_{s_1+s_2}}^{i_{r_1+1}\cdots i_{r_1+r_2}}.$$

Definição 1.6 *Escolha dois índices $\lambda, \mu, 1 \leq \lambda \leq r, 1 \leq \mu \leq s$. Para qualquer tensor redutível do tipo-(r, s)*

$$x = v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes v^{*1} \otimes \cdots \otimes v^{*s} \in V_s^r,$$

definimos

$$C_{\lambda\mu}(x) = < v_\lambda, v^{*\mu} > v_1 \otimes \cdots \otimes \hat{v}_\lambda \otimes \cdots \otimes v_r \otimes v^{*1} \otimes \cdots \otimes \hat{v}^{*\mu} \otimes \cdots \otimes v^{*s},$$

onde a notação "$\hat{v}_\lambda$" significa que omitimos o termo v_λ, assim, $C_{\lambda\mu}(x) \in V_{s-1}^{r-1}$. Estendendo a aplicação $x \longrightarrow C_{\lambda\mu}(x)$ linearmente obtemos uma aplicação $C_{\lambda\mu}$: $V_s^r \longrightarrow V_{s-1}^{r-1}$ chamada a aplicação de contração de tensores. $\diamondsuit$

Se expressamos o tensor x em componentes

$$x = x^{i_1 \cdots i_r}_{k_1 \cdots k_s} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{*k_1} \otimes \cdots \otimes e^{*k_s},$$

então pela definição do tensor contração, obtemos

$$\begin{aligned} C_{\lambda\mu}(x) &= x^{i_1 \cdots i_r}_{k_1 \cdots k_s} C_{\lambda\mu}(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{*k_1} \otimes \cdots \otimes e^{*k_s}) \\ &= x^{i_1 \cdots i_{\lambda-1} j i_\lambda \cdots i_{r-1}}_{k_1 \cdots k_{\mu-1} j k_\mu \cdots k_{s-1}} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{r-1}} \otimes e^{*k_1} \otimes \cdots \otimes e^{*k_{s-1}}. \end{aligned}$$

Suponhamos que, para cada $r > 0$ definimos

$$T^r(V) = V^r_0 = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r-termos},$$

então, se consideramos a soma direita

$$T(V) = \sum_{r \leq 0} x^r, x^r \in T^r(V),$$

qualquer elemento x pode ser expressado como a soma formal

$$x = \sum_{r \leq 0} x^r, \quad x^r \in T^r(v),$$

onde todos salvo um número finito são zeros; assim $T(V)$ é um espaço vetorial infinito-dimensional, com a lei distributiva, o produto entre tensores pode ser estendida a uma multiplicação em $T(V)$ fazendo deste espaço uma álgebra chamada o *Álgebra Tensorial de V.*

Denotemos por $\ell(r)$ ao grupo de permutações do conjunto de números naturais $\{1, 2, \cdots, r\}$, assim um elemento $\sigma \in \ell(r)$ determina um automorfismo sobre o espaço vetorial $T^r(V)$ definido por

$$\sigma x(v^{*1}, \cdots, v^{*r}) = x(v^{*\sigma(1)}, \cdots, v^{*\sigma(r)}),$$

onde $x \in T^r(V)$, e os $v^{*i} \in V^*$. Podemos observar que se $x = v_1 \otimes \cdots \otimes v_r$ então

$$\sigma x = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(r)},$$

onde $\sigma^{-1} \in \ell(r)$ é a inversa de σ.

Definição 1.7 *Seja $x \in T^r(V)$. Se para todo $\sigma \in \ell(r)$ temos*

$$\sigma x = x,$$

então dizermos que x é um tensor contravariante simétrico *de ordem r.*

Se para todo $\sigma \in \ell(r)$ temos

$$\sigma x = sgn\sigma \cdot x,$$

onde

$$sgn\sigma = \begin{cases} 1 & \text{se } \sigma \text{ é uma permutação par} \\ -1 & \text{se } \sigma \text{ é uma permutação impar,} \end{cases}$$

então dizemos que x é um tensor contravariante alternante de ordem r. $\Diamond$

Definição 1.8 *Denotemos por $P^r(V)$ ao conjunto de todos os tensores contravariantes simétricos de ordem r, e por $\Lambda^r(V)$ ao os tensores contravariantes alternantes. Resulta que, com as operações de soma e produto com um escalar, os espaços $P^r(V)$ e $\Lambda^r(V)$ são subespaços vetoriais de $T^r(V)$, é por isto que podemos definir, para cada $x \in T^r(V)$*

$$S_r(x) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \ell(r)} \sigma x$$
$$A_r(x) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \ell(r)} sgn\sigma \cdot \sigma x.$$

As aplicações lineares $S_r, A_r : T^r(V) \longrightarrow T^r(V)$ são chamadas a aplicação simetrização *e* alternante *respectivamente.* $\Diamond$

Observações 1.1 *Podemos demonstrar que*

$$P^r(V) = S_r(T^r(V)),$$

e aliás

$$\Lambda^r(V) = A_r(T^r(V)).$$

1.4 Fibrados Tensoriais e Fibrados Vetoriais

Nesta seção, M será considerada uma variedade diferenciável n-dimensional, $T_p(M)$ e $T_p^*(M)$ o espaço tangente e cotangente de M no ponto p, respectivamente, então podemos definir o espaço tensorial do tipo-(r,s) como sendo

$$T_s^r(M)_p = \underbrace{T_p(M) \otimes \cdots \otimes T_p(M)}_{r-termos} \otimes \underbrace{T_p^*(M) \otimes \cdots \otimes T_p^*(M)}_{s-termos},$$

sobre cada ponto $p \in M$, a qual é um espaço vetorial n^{r+s}-dimensional. Consideremos também o espaço

$$T_s^r(M) = \bigcup_{p \in M} T_s^r(M)_p,$$

que é chamado *fibrado tensorial do tipo-(r,s)* sobre M.

Com a finalidade de dotar de uma topologia ao espaço $T_s^r(M)$, definiremos nele uma estrutura diferenciável C^∞ para fazer dele uma variedade diferenciável.

Considere V um espaço n-dimensional sobre $\mathbb{R}$, e seja

$$GL(V) = \{T : V \longrightarrow V, T \text{ automorfismo linear}$$

assim definido, $GL(V)$ é um grupo. Se escolhemos $\{e_1, \cdots, e_n\}$ base de V, então V é isomorfo a $\mathbb{R}^n$ e deste jeito podemos representar um elemento $y \in V$ da forma

$$y = (y^1, \cdots, y^n)$$

Assim, $GL(V)$ é o grupo multiplicativo de matrizes não singulares de ordem $n \times n$, que agi sobre V da forma seguinte

$$y \cdot a = (y^1, \cdots, y^n) \cdot \begin{bmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{bmatrix}$$

com $a = (a_j^i) \in GL(V)$.

Seja agora U um sistema de coordenadas sobre M com coordenadas locais $u^1, \cdots, u^n$, então para $p \in U$ temos a existência de uma base natural

$$\{(\frac{\partial}{\partial u^1})_p, \cdots, (\frac{\partial}{\partial u^n})_p\},$$

do espaço $T_p(M)$, e $\{(du^1)_p, \cdots, (du^n)_p\}$ a sua base dual (base de $T_p^*(M)$), então

$$(\frac{\partial}{\partial u^{i_1}})_p \otimes \cdots \otimes (\frac{\partial}{\partial u^{i_r}})_p \otimes (du^{j_1})_p \otimes \cdots \otimes (du^{j_s})_p, \ 1 \leq i_\alpha, j_\beta \leq n, \ 1 \leq \alpha, \beta \leq n, \quad (1.3)$$

é uma base para $T^r_s(p)$.

Denotemos por V^r_s o espaço de todos os tensores do tipo-(r, s) do espaço vetorial V, assim este espaço tem como base

$$e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{*j_1} \otimes \cdots \otimes e^{*j_s};\ 1 \leq i_\alpha, j_\beta \leq n,\ 1 \leq \alpha, \beta \leq n. \tag{1.4}$$

Assim os elementos de V^r_s podem ser expressado por componentes, logo podemos definir a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \varphi_U : U \times V^r_s & \longrightarrow & \bigcup_{p\in U} T^r_s(p), \\ (p, y) & \longrightarrow & \varphi_U(p, y) = \bar{y}, \end{array}$$

sendo $\bar{y}$ um elemento de $T^r_s(p)$ tal que as componentes com respeito á base (1.4) são as mesmas componentes de y com respeito á base (1.3), desta maneira, podemos demonstrar que o conjunto $\{\varphi_U(U \times V^r_s), \varphi_W(W \times V^r_s), \cdots\}$ forma uma estrutura diferenciável em $T^r_s(M)$, com $U, W, \cdots$ sistemas de coordenadas de M.

Definição 1.9 *Sejam E, M duas variedades diferenciáveis, e $\pi : E \longrightarrow M$ uma aplicação diferenciável sobrejetiva. Seja $V = \mathbb{R}^q$ um espaço q-dimensional. Se um cubrimento aberto $\{U, W, Z, \cdots\}$ de M e um conjunto de aplicações $\{\varphi_U, \varphi_W, \varphi_Z, \cdots\}$ satisfazem as condições*

1. *Toda aplicação φ_U é um difeomorfismo entre $U \times \mathbb{R}^q$ e $\pi^{-1}(U)$, e para $p \in U$, $y \in \mathbb{R}^q$ temos $\pi \cdot \varphi_U(p, y) = p$.*

2. *Fixando $p \in U$ quaisquer, seja*

$$\varphi_{U,p}(y) = \varphi_U(p, y),$$

$y \in \mathbb{R}^q$. Então $\varphi_{U,p} : \mathbb{R}^q \longrightarrow \pi^{-1}(p)$ é um homeomorfismo. Quando $U \cap W \neq \emptyset$, para qualquer $p \in U \cap W$:

$$g_{UW}(p) := \varphi^{-1}_{W,p} \circ \varphi_{U,p} : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$$

é um automorfismo linear de $V = \mathbb{R}^q$, i.e., $g_{UW}(p) \in GL(V)$.

3. *Quando $U \cap W \neq \emptyset$, a aplicação*

$$g_{UW} : U \cap W \longrightarrow GL(V)$$

é diferenciável.

Então (E, M, π) é chamada um Fibrado Vetorial Real q-dimensional sobre M, onde E é chamada o Espaço Fibrado, M é chamada o Espaço Base, π é chamada Projeção do Fibrado, e V é a Fibra Típica.

Para cada $p \in M$ o espaço $E_p = \pi^{-1}(p)$ é chamada a Fibra do Fibrado vetorial E no ponto p. $\Diamond$

Podemos definir sobre E_p uma estrutura linear natural. É possível mostrar que sobre uma variedade diferenciável M existe um Fibrado vetorial q dimensional (E, M, π) (Ver[1]).

Definição 1.10 *Uma aplicação $s : M \longrightarrow E$ diferenciável tal que $\pi \circ s = id : M \longrightarrow M$ é chamada seção diferenciável do fibrado vetorial (E, M, π). Denotamos ao conjunto de todas as seções diferenciáveis do fibrado vetorial (E, M, π) por $\Gamma(E)$.* $\Diamond$

Não é difícil mostrar que $\Gamma(E)$ é um espaço vetorial real.

Capítulo 2

Diferenciação Exterior

Neste capítulo estudaremos como é possível definir uma derivação sobre uma variedade. Este conceito vem dado pela conexão sobre uma varieade. Aqui demonstraremos que tal conexão existe sempre em uma variedade.

2.1 Algebra Exterior

Um tensor contravariante alternante de ordem r é também chamado um *vetor exterior de grau* r ou um r*-vetor exterior*. O espaço $\Lambda^r(V)$ é chamado o *espaço exterior* de V de grau r. Convenhamos que $\Lambda^1(V) = V$ e $\Lambda^0(V) = \mathbb{F}$.

Definição 2.1 *Seja ξ um k-vetor exterior e η um l-vetor exterior. Definamos*

$$\xi \wedge \eta = A_{k+l}(\xi \otimes \eta).$$

Assim, $\xi \wedge \eta$ é um $(k+l)$-vetor exterior chamado o produto exterior (wedge) de ξ e η. $\Diamond$

Teorema 2.1 *Se $\xi, \xi_1, \xi_2 \in \Lambda^k(V), \eta, \eta_1, \eta_2 \in \Lambda^l(V), \zeta \in \Lambda^h(V)$, então temos*

1. *Lei Distributiva :*
$$(\xi_1 + \xi_2) \wedge \eta = \xi_1 \wedge \eta + \xi_2 \wedge \eta,$$
$$\xi \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \xi \wedge \eta_1 + \xi \wedge \eta_2.$$

2. *Lei Anticomutativa:*
$$\xi \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \xi.$$

3. *Lei Associativa:*
$$(\xi \wedge \eta) \wedge \zeta = \xi \wedge (\eta \wedge \zeta).$$

Demonstração.
Demonstraremos somente a segunda Lei; dado que $\xi \wedge \eta$ é um tensor alternante, se $\tau \in \ell(k+l)$, então
$$\tau(\xi \wedge \eta) = sgn(\tau) \xi \wedge \eta,$$

assim podemos escolher τ como sendo

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & k & k+1 & ... & k+l \\ l+1 & l+2 & ... & l+k & 1 & ... & l \end{pmatrix},$$

daqui, $sgn(\tau) = (-1)^{kl}$, logo para quaisquer $v^{*1}, \cdots, v^{*k+l} \in V^*$ temos

$$\begin{aligned}(\xi \wedge \eta)(v^{*1}, \cdots, v^{*k+l}) &= (-1)^{kl}\tau(\xi \wedge \eta)(v^{*1}, \cdots, v^{*k+l}) \\ &= (-1)^{kl}\xi \wedge \eta(v^{*\tau(1)}, \cdots, v^{*\tau(k+l)}) \\ &= \frac{(-1)^{kl}}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in \ell(k+l)} sgn\sigma \xi(v^{*\sigma\tau(1)}, \cdots, v^{*\sigma\tau(k)}) \cdot \\ &\qquad\qquad \eta(v^{*\sigma\tau(k+1)}, \cdots, v^{*\sigma\tau(k+l)}),\end{aligned}$$

e pela forma que estamos considerando τ obtemos

$$\begin{aligned}&= \frac{(-1)^{kl}}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in \ell(k+l)} sgn\sigma \cdot \eta(v^{*\sigma(1)}, \cdots, v^{*\sigma(l)}) \cdot \xi(v^{*\sigma(l+1)}, \cdots, v^{*(l+k)}) \\ &= (-1)^{kl}\eta \wedge \xi(v^{*1}, \cdots, v^{*k+l}).\end{aligned}$$

As outras propriedades seguem da mesma definição. ∎

Podemos observar que se $\xi, \eta \in V = \Lambda^1(V)$, então, pela lei anticomutativa obtemos que

$$\xi \wedge \eta = -\eta \wedge \xi \quad , \quad \xi \wedge \xi = 0.$$

Seja $\{e_1, \cdots, e_n\}$ uma base em V, então de acordo com a Lei Associativa temos

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} = A_r(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}), \quad 1 \leq i_1, \cdots, i_r \leq n.$$

Assim pela observação anterior, o vetor exterior $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$ é não zero se e somente se $i_1, \cdots, i_r$ são distintos, daqui se $r > n$ então o vetor exterior correspondente é zero.

Se expressamos um r-vetor exterior alternada da forma

$$\xi = \xi^{i_1 \cdots i_r} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r},$$

então, da linearidade de A_r temos

$$\begin{aligned}A_r(\xi) &= \xi^{i_1 \cdots i_r} A_r(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}) \\ &= \xi^{i_1 \cdots i_r} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r},\end{aligned}$$

assim, qualquer vetor exterior de grau maior que n é nulo, i.e. $\Lambda^r(V) = \{0\}$ para todo $r > n$.

No caso que $n \leq r$ podemos expressar ξ como segue

$$\xi = r! \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \xi^{i_1 \cdots i_r} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}.$$

Assim os vetores exteriores da forma $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}; 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n\}$ formam uma base para o espaço $\Lambda^r(V)$,em efeito, se $v^{*1}, \cdots, v^{*r} \in V^*$ então

$$\begin{aligned} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}(v^{*1}, \cdots, v^{*r}) &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \ell(r)} sgn\sigma < e_{i_1}, v^{*\sigma(1)} > \cdots < e_{i_r}, v^{*\sigma(r)} > \\ &= \frac{1}{r!} \begin{vmatrix} < e_{i_1}, v^{*\sigma(1)} > \cdots < e_{i_1}, v^{*\sigma(r)} > \\ < e_{i_2}, v^{*\sigma(1)} > \cdots < e_{i_2}, v^{*\sigma(r)} > \\ . \\ . \\ . \\ < e_{i_r}, v^{*\sigma(1)} > \cdots < e_{i_r}, v^{*\sigma(r)} > \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Esta fórmula é chamada *Fórmula de Avaliação* para $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$. Em particular temos

$$\begin{aligned} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}(e^{*j_1}, \cdots, e^{*j_r}) &= \frac{1}{r!} \det(< e_{i_\alpha}, e^{*j_\beta} >) \\ &= \frac{1}{r!} \delta^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_r}, \end{aligned}$$

onde

$$\delta^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_r} = \begin{cases} 1 & ; \text{ se } i_1 , \cdots i_r \text{ são distintos e } \{j_1, \cdots, j_r\} \text{ é uma} \\ & \quad \text{permutação ímpar de } (i_1, \cdots, i_r) \\ -1 & ; \text{ se } i_1 , \cdots i_r \text{ são distintos e } \{j_1, \cdots, j_r\} \text{ é uma} \\ & \quad \text{permutação par de } (i_1, \cdots, i_r) \\ 0 & ; \text{ em outros casos,} \end{cases}$$

é chamado o *δ-símbolo Geralizado de Kronecker*. Disto obtemos que

$$e_1 \wedge \cdots \wedge e_n(e^{*1}, \cdots, e^{*n}) = \frac{1}{n!},$$

assim $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \neq 0$.

Agora suponhamos que $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}; 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n\}$, com $r < n$, são linearmente dependentes, então existem escalares $a^{i_1 \cdots i_r} \in \mathbb{F}$ não todos nulos, tais que

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} a^{i_1 \cdots i_r} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} = 0. \tag{2.1}$$

Suponhamos que $a^{j_1 \cdots j_r}$ é não zero ,com $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n$, e que os índices que faltam para completar o conjunto $\{1, \cdots, n\}$ sejam $k_1 < \cdots < k_{n-r}$, assim

$\{j_1 \cdots j_r, k_1, \cdots, k_{n-r}\}$ é uma permutação de $\{1, \cdots, n\}$, logo fazendo o produto exterior a ambos lados por $e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_{n-r}}$ na fórmula (2.1) obtemos

$$\begin{aligned} a^{j_1 \cdots j_r} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_r} \wedge e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_{n-r}} &= \pm a^{j_1 \cdots j_r} e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ &= 0, \end{aligned}$$

e daqui obtemos que $a^{j_1 \cdots j_r} = 0$ o que contradiz nossa suposição; por tanto concluímos que $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}; 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n\}$ é linearmente independente e forma uma base de $\Lambda^r(V)$, assim a dimensão deste espaço é

$$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Definição 2.2 *Denotamos a soma formal* $\sum_{r=0}^{n} \Lambda^r(V)$ *por* $\Lambda(V)$*, desta forma* $\Lambda(V)$ *é um espaço vetorial de dimensão* 2^n*. Sejam* $\xi = \sum_{r=0}^{n} \xi^n$*,* $\eta = \sum_{s=0}^{n} \eta^s$*, onde* $\xi^r \in \Lambda^r(V), \eta^s \in \Lambda^s(V)$*. Definamos o produto exterior de* ξ *e* η *por*

$$\xi \wedge \eta = \sum_{r,s=0}^{n} \xi^r \wedge \eta^s.$$

Com isto $\Lambda(V)$ *é uma álgebra com respeito ao produto exterior que é chamado Álgebra exterior ou Álgebra de Grassman de* V*.* $\diamondsuit$

O conjunto $\{1;\ e_i\ (1 \leq i \leq n);\ e_{i_1} \wedge e_{i_2}\ (1 \leq i_1 < i_2 \leq n);\ \cdots;\ e_1 \wedge \cdots \wedge e_n\}$ é uma base para o espaço vetorial $\Lambda(V)$.

De igual maneira podemos definir uma álgebra exterior para o espaço dual V^*

$$\Lambda(V^*) = \sum_{0 \leq r \leq n} \Lambda^r(V^*),$$

assim um elemento de $\Lambda^r(V^*)$ é chamada uma *forma exterior de grau* r, ou uma r-forma exterior sobre V.

Os espaços vetoriais $\Lambda^r(V)$ e $\Lambda^r(V^*)$ são entre ambos duais, neste caso se $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \in \Lambda^r(V),\ v^{*1} \wedge \cdots \wedge v^{*r} \in \Lambda^r(V^*)$ então

$$< v_1 \wedge \cdots \wedge v_r, v^{*1} \wedge \cdots \wedge v^{*r} >= \det(< v_\alpha, v^{*\beta} >).$$

Seja $f : V \longrightarrow W$ uma aplicação linear com V, W espaços vetoriais, então f induz uma aplicação linear entre os espaços exteriores $\Lambda^r(W^*)$ e $\Lambda^r(V^*)$ definido como

$$\begin{aligned} f^* : \Lambda^r(W^*) &\longrightarrow \Lambda^r(V^*) \\ \phi &\longrightarrow f^*\phi, \end{aligned}$$

tal que $f^*\phi(v_1, \cdots v_r) = \phi(f(v_1), \cdots, f(v_r)),\ v_i \in V,\ 1 \leq i \leq n$. Assim definido podemos ver que a aplicação f^* é linear.

Teorema 2.2 *Sejam* V , W *espaços vetoriais. Dada uma aplicação* $f : V \longrightarrow W$ *linear, então,* f^* *comuta com o produto exterior, isto é, para* $\phi \in \Lambda^r(W^*)$ *e* $\psi \in \Lambda^s(W^*)$ *temos*

$$f^*(\phi \wedge \psi) = f^*\phi \wedge f^*\psi.$$

Demonstração.
Ver ([1]). ∎

2.2 Diferenciação Exterior

O conjunto

$$\Lambda^r(M) = \bigcup_{p\in M} \Lambda^r(T_p^*(M)),$$

que é o *fibrado de r-formas exteriores* sobre M, é um fibrado vetorial sobre M. Se $\Gamma(\Lambda^r(M))$ é o espaço de seções diferenciáveis do fibrado exterior $\Lambda^r(M)$, então ele é um $C^\infty(M)$-módulo e seus elementos são chamados *r-formas diferenciáveis exteriores* sobre M. Assim uma r-forma diferenciável exterior sobre M é um campo tensorial diferenciável covariante anti-simétrico de ordem r sobre M.

Similarmente, o fibrado forma exterior

$$\Lambda(M) = \bigcup_{p\in M} (\Lambda(T_p^*(M)),$$

é também um fibrado vetorial sobre M e os elementos do espaço das seções $\Gamma(\Lambda(M))$ são chamados *formas diferenciais exteriores sobre* M.

Sem perda de generalidade, representamos $\Gamma(\Lambda(M))$ por simplesmente $\Lambda(M)$, ao igual que $\Gamma(\Lambda^r(M))$ por $\Lambda^r(M)$. Podemos expressar como a soma formal

$$\Lambda(M) = \sum_{r=o}^{n} \Lambda^r(M),$$

desta maneira, toda forma diferenciável exterior ω pode ser expressada como

$$\omega = \omega^0 + \omega^1 + \omega^2 + \cdots + \omega^n,$$

onde ω^i é uma i-forma diferencial exterior.

Com isto podemos estender o produto exterior de formas diferenciais ao espaço de formas diferenciais exteriores, dado $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^r(M)$, então para cada $p \in M$ definimos

$$\omega_1 \wedge \omega_2(p) := \omega_1(p) \wedge \omega_2(p).$$

Também, o produto exterior $\wedge$ define uma aplicação

$$\wedge : \Lambda^r(M) \times \Lambda^s(M) \longrightarrow \Lambda^{r+s}(M)$$

onde $\Lambda^{r+s}(M) = \{0\}$ quando $r + s > n$.

Teorema 2.3 *Seja M uma variedade diferenciável n-dimensional, então existe uma única aplicação*

$$d : \Lambda(M) \longrightarrow \Lambda(M)$$

tal que $d(\Lambda^r(M)) \subset \Lambda^{r+1}(M)$ e satisfaz

1. *Dados* $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda(M)$ *temos* $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$.

2. *Se* ω_1 *é uma* r*-forma diferencial exterior, então*

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge d\omega_2.$$

3. *Se* f *é uma função diferenciável sobre* M*, então* df *é precisamente a diferencial de* f.

4. *Se* $f \in \Lambda^0(V)$*, então* $d(df) = 0$.

A aplicação d *assim definida é chamada a* derivada Exterior.

Demonstração.
Suponhamos pelo momento que d existe, então temos as seguintes afirmações
Afirmação 1 : Se $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda(M)$ e se existe um aberto $U \subset M$ tal que $\omega_1|_U = \omega_2|_U$, então $d\omega_1|_U = d\omega_2|_U$.

Para mostrar isto só precisamos provar que se $\omega/U = 0$ então $d\omega/U = 0$, para isso seja $p \in M$; dado que uma variedade Riemanniana é localmente compacta, então existe um aberto W com $p \in W$, tal que $\bar{W} \subset U$, e daqui existe uma função diferenciável $h : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$h(p^{'}) = \begin{cases} 1 & , \quad p^{'} \in W \\ 0 & , \quad p^{'} \in M - U \end{cases},$$

assim, $h \cdot \omega \in \Lambda(M)$ e $h \cdot \omega \equiv 0$, e então, pela segunda condição

$$\begin{aligned} 0 &= d(h \wedge \omega) \\ &= dh \wedge \omega + (-1)^0 h \cdot d\omega, \end{aligned}$$

como $\omega|_W = 0$, então $h \cdot d\omega = 0$ sobre W, e daqui $d\omega|_W = 0$. Desde que p é arbitrário, concluímos que $d\omega|_U = 0$ sobre M.

Seja agora ω uma forma diferenciável exterior definida sobre o conjunto aberto U, então, para qualquer ponto $p \in U$ existe um sistema de coordenadas $U_1 \subset U$ de p e uma forma exterior $\bar{\omega}$ definida sobre M (a saber $\bar{\omega} = h \cdot \omega$) tal que

$$\bar{\omega}|_{U_1} = \omega|_U,$$

assim , podemos definir

$$d\omega|_{U_1} := d\bar{\omega}|_{U_1},$$

e daqui, d é um operador localmente diferenciável.

Mostraremos a unicidade da Derivada Exterior d com respeito a um entorno coordenado, mas pela condição 1), só precisamos mostrar isto para monômios. Suponha que em um entorno coordenado U, ω é expressado por

$$\omega = a du^1 \wedge \cdots \wedge du^r,$$

com $a : U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, assim

$$\begin{aligned} d\omega &= da \wedge du^1 \wedge \cdots \wedge du^r + a \wedge d(du^1 \wedge \cdots \wedge du^r) \\ &= da \wedge du^1 \wedge \cdots \wedge du^r, \end{aligned}$$

onde, da é a diferencial da função a, assim , ω restrita ao entorno coordenado U possui uma forma completamente determinada.

Agora, suponhamos que

$$\omega|_U = a_{i_1 \cdots i_p} du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i^r},$$

então podemos definir

$$d(\omega|_U) = da_{i_1 \cdots i_r} \wedge du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r}, \tag{2.2}$$

desta maneira, $d(\omega|_U)$ é uma $(r+1)$-forma diferenciável exterior sobre U satisfazendo as condições 1) e 3).

Para mostrar 2), consideremos os monômios

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r} \\ \alpha_2 &= b du^{j_1} \wedge \cdots \wedge du^{j_s}, \end{aligned}$$

então, pela definição

$$\begin{aligned} d(\alpha_1 \wedge \alpha_2) &= d(a.b du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r} \wedge du^{j_1} \wedge \cdots \wedge du^{j_s}) \\ &= (adb + bda) \wedge du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r} \wedge du^{j_1} \wedge \cdots \wedge du^{j_s} \\ &= adb \wedge du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r} \wedge du^{j_1} \wedge \cdots \wedge du^{j_s} + \\ &\qquad bda \wedge du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r} \wedge du^{j_1} \wedge \cdots \wedge du^{j_s} \\ &= (da \wedge du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r}) \wedge (b du^{j_1} \wedge \cdots \wedge du^{j_s}) + \\ &\qquad (-1)^r (a du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r}) \wedge (db \wedge du^{j_1} \wedge \cdots \wedge du^{j_s}) \\ &= d\alpha_1 \wedge \alpha_2 + (-1)^r \alpha_1 \wedge d\alpha_2, \end{aligned}$$

mostrando assim a propriedade 2).

Dada $f :\longrightarrow \mathbb{R}$ função diferenciável, então sobre U temos

$$df = \frac{\partial f}{\partial u^i} du^i,$$

como $f \in C^\infty(M)$, então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i},$$

daqui

$$\begin{aligned}
d(df) &= d(\frac{\partial f}{\partial u^i du^i}) \\
&= d(\frac{\partial f}{\partial u^i}) \wedge du^i + (-1)^0 . \frac{\partial f}{\partial u^i} \wedge d(du^i) \\
&= d(\frac{\partial f}{\partial u^i}) \wedge du^i \\
&= (\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} du^j) \wedge du^i \\
&= \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i}) du^j \wedge du^i \\
&= 0,
\end{aligned}$$

assim temos demonstrada a propriedade 4).

Se W é um outro entorno coordenado, então pela propriedade local do operador derivada exterior e sua unicidade, obtemos que

$$\begin{aligned}
d(\omega|_U)|_{U\cap W} &= d(\omega|_{U\cap W}) \\
&= d(\omega|_W)|_{U\cap W},
\end{aligned}$$

daqui, o operador derivada exterior d é uniformemente definido por (2.2) sobre $U \cap W$, assim podemos definir-o sobre todo M globalmente, isto mostra a existência do operador d satisfazendo as condições do teorema. ∎

Teorema 2.4 (Lema de Poincaré) *Para qualquer forma diferencial exterior ω, $d(d\omega) = 0$.*

Demonstração.
Desde que d é um operador linear, só precisamos mostrar o lema no caso em que ω é um monômio, para isso suponhamos que

$$\omega = a du^1 \wedge \cdots \wedge du^r,$$

daqui

$$d\omega = da \wedge du^1 \wedge \cdots \wedge du^r,$$

logo

$$\begin{aligned}
d(d\omega) &= d(da) \wedge du^1 \wedge \cdots \wedge du^r - da \wedge d(du^1) \wedge \cdots \wedge du^r + \cdots \\
&= 0.
\end{aligned}$$

culminando assim a nossa demonstração. ∎

Seja $f : M \longrightarrow N$ uma função diferenciável entre as variedades M e N, então, ele induz uma aplicação entre os espaços de formas diferenciais exteriores

$$f^* : \Lambda(N) \longrightarrow \Lambda(M).$$

De fato, f induz uma aplicação tangente

$$\begin{array}{rcl} f_*: T_p(M) & \longrightarrow & T_{f(p)}(N) \\ \alpha'(0) & \longrightarrow & \frac{d}{dt}(f\circ\alpha)(0), \end{array}$$

em cada ponto $p \in M$, e assim podemos definir

$$f^*: \Lambda(N) \longrightarrow \Lambda(M)$$

em cada parte homogênea de $\Lambda(N)$ e $\Lambda(M)$ como segue: Se $\beta \in \Lambda^r(N), r \geq 1$, então $f^*\beta \in \Lambda^r(M)$ é tal que para qualquer conjunto $\{X_1, \cdots, X_r\}$ de campos vetoriais sobre M

$$< X_1 \wedge X_2 \wedge \cdots \wedge X_r, f^*\beta >_p := < f_*X_1 \wedge \cdots \wedge f_*X_r, \beta >_{f(p)},$$

com $p \in M$.

Se $\beta \in \Lambda^0(N)$, definimos

$$f^*\beta := \beta \circ f \in \Lambda^0(M).$$

Como já vimos anteriormente, a aplicação f^* se distribui sobre o produto exterior, isto é, para $\omega, \eta \in \Lambda(N)$

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta.$$

Teorema 2.5 *Seja $f : M \longrightarrow N$ uma função diferenciável entre as variedades diferenciáveis M e N. Então, a aplicação induzida $f^* : \Lambda(N) \longrightarrow \Lambda(M)$ comuta com a derivada exterior d, isto é*

$$f^* \circ d = d \circ f^* : \Lambda(N) \longrightarrow \Lambda(M)$$

em outras palavras, o diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} \Lambda(N) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f^*"] & \Lambda(N) \arrow[d, "f^*"] \\ \Lambda(M) \arrow[r, "d"] & \Lambda(M) \end{tikzcd} .$$

Demonstração.
Desde que f^* e d são lineares. só precisamos mostrar que $f^* \circ d = d \circ f^*$ para monômios.

Suponhamos que $\beta \in \Lambda^0(M)$, escolha um campo vetorial diferenciável X tangente a M, então

$$\begin{aligned} < X, f^*(d\beta) > &= < f_*X, d\beta > \\ &= f_*X(\beta) \\ &= X(\beta \circ f) \\ &= < X, d(f^*\beta) >, \end{aligned}$$

logo
$$f^*(d\beta) = d(f^*\beta).$$
Agora, se $\beta = udv$, com $u, v : N \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis então

$$\begin{aligned} f^*(d\beta) &= f^*(du \wedge dv) \\ &= f^*du \wedge f^*dv \\ &= d(f^*u) \wedge d(f^*v) \\ &= d(f^*u.d(f^*v)) \\ &= d(f^*(u \cdot dv)) \\ &= d(f^*(\beta)). \end{aligned}$$

Assumamos agora que (2.2) vale para formas diferenciáveis de grau menor que r, mostremos também que vale para r-formas exteriores diferenciáveis . Seja β um monômio de grau r da forma
$$\beta = \beta_1 \wedge \beta_2,$$
onde β_1 é uma 1-forma diferenciável exterior sobre N e β_2 uma $(r-1)$-forma diferenciável exterior sobre N, então pela hipótese de indução

$$\begin{aligned} df^*(\beta_1 \wedge \beta_2) &= d(f^*\beta_1 \wedge f^*\beta_2) \\ &= d(f^*\beta_1) \wedge f^*\beta_2 - f^*\beta_1 \wedge d(f^*\beta_2) \\ &= f^*(d\beta_1 \wedge \beta_2) - f^*(\beta_1 \wedge \beta_2) \\ &= f^*d(\beta_1 \wedge \beta_2). \end{aligned}$$

demonstrando assim o teorema. ∎

2.3 Conexões

Definição 2.3 *Uma conexão sobre um fibrado vetorial E é uma aplicação*

$$\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^*(M) \otimes E)$$

a qual satisfaz:

1. *Para todo $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$, $\nabla(s_1 + s_2) = \nabla s_1 + \nabla s_2$.*
2. *Para $s \in \Gamma(E)$ e $\alpha \in C^\infty(M)$, $\nabla(\alpha s) = d\alpha \otimes s + \alpha \nabla s$.*
   $\diamondsuit$

Suponhamos que X é um campo vetorial diferenciável tangente a M e $s \in \Gamma(E)$, seja

$$\nabla_X s =< X, \nabla s > \tag{2.3}$$

onde $<,>$ representa a relação entre $T(M)$ e $T^*(M)$, assim ∇_X é uma seção de E, chamada o *Quociente Diferencial Absoluto* ou a *Derivada Covariante* da seção s ao longo de X.

Observações 2.1 *Dado (2.3), podemos associar*

$$\begin{array}{rcl} \nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) & \longrightarrow & \Gamma(E) \\ (X, s) & \longrightarrow & \nabla_X s =< X, \nabla s > . \end{array}$$

Proposição 2.1 *Sejam X, Y dois campos vetoriais diferenciáveis tangentes sobre M, s_1, s_2, s seções de E, e $\alpha \in C^\infty(M)$, então*

1. $\nabla_{X+Y} s = \nabla_X s + \nabla_Y s$.
2. $\nabla_{\alpha X} s = \alpha \nabla_X s$.
3. $\nabla_X (s_1 + s_2) = \nabla_X s_1 + \nabla_X s_2$.
4. $\nabla_X (\alpha s) = (X\alpha) s + \alpha \nabla_X s$.
5. *Se $X_1(p) = X_2(p)$ com $p \in M$, então para qualquer seção $s \in \Gamma(E)$ temos:* $\nabla_{X_1} s(p) = \nabla_{X_2} s(p)$.

Demonstração.
Ver ([1]). ■

Pela propriedade 5), podemos definir o quociente diferencial absoluto de uma seção de E com respeito a um vetor tangente de M no ponto p, assim para $X \in T_p(M)$ temos

$$\nabla_X : \Gamma(E) \longrightarrow E_p = \pi^{-1}(p)$$

com isto podemos concluir que, se os valores das seções s_1, s_2 sobre uma curva parametrizada em M que é tangente a X são os mesmos, então $\nabla_X s_1 = \nabla_X s_2$.

"Localmente, uma conexão é dada por um conjunto de 1*-formas diferenciáveis"*; em efeito, consideremos um entorno coordenado (U, u^i) de M e escolha q-seções diferenciáveis s_α, $1 \leq \alpha \leq q$ de E sobre U tais que sejam linearmente independentes em U. Tal conjunto de q-seções é chamado um *referencial local* de E em U.

Em todo ponto $p \in U$, temos associado o conjunto $\{du^i \otimes s_\alpha;\ 1 \leq i \leq n, 1 \leq \alpha \leq q\}$, que é uma base do espaço tensorial $T_p^*(M) \otimes E_p$. Como ∇s_α é uma seção local sobre U do fibrado $T^*(M) \otimes E_p$, podemos escrever

$$\nabla s_\alpha = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq \beta \leq q}} \Gamma_{\alpha i}^\beta du^i \otimes s_\beta,$$

onde, os $\Gamma_{\alpha i}^\beta$ são funções diferenciáveis sobre U.

Denotemos por

$$\omega_\alpha^\beta = \sum_{1 \leq i \leq m} \Gamma_{\alpha i}^\beta du^i,$$

assim obtemos

$$\nabla s_\alpha = \sum_{\beta=1}^{q} \omega_\alpha^\beta \otimes s_\beta. \tag{2.4}$$

Para simplificar os cálculos vamos introduzir uma notação matricial, assim denotemos por

$$S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_q \end{pmatrix},$$

a matriz coluna onde os s_i são os referenciais locais, e seja

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_1^q \\ & \ddots & \\ \omega_1^q & \cdots & \omega_q^q \end{bmatrix}$$

então, (2.4) pode ser expressado por

$$\nabla S = \omega \otimes S,$$

onde a ω é chamada a *Matriz da Conexão* e depende da escolha do referencial local.

Se $S' = \begin{pmatrix} s_1' \\ \vdots \\ s_q' \end{pmatrix}$ é um outro referencial local sobre U, então

$$S' = AS, \quad A = \begin{bmatrix} a_1^1 & \cdots & a_q^1 \\ & \ddots & \\ a_q^1 & \cdots & a_q^q \end{bmatrix},$$

onde os $a^i_j : U \longrightarrow \mathbb{R}$ são diferenciáveis e $\det A \neq 0$, e suponhamos que a matriz da conexão ∇ com respeito ao referencial local $S^{'}$ seja $\omega^{'}$, então

$$\begin{aligned}\nabla S^{'} &= \nabla(A \cdot S)\\ &= dA \otimes S + A \cdot \nabla S\\ &= (dA + A \cdot \omega) \otimes S\\ &= (dA + A \cdot \omega) \otimes A^{-1} \cdot S^{'}\\ &= (dA \cdot A^{-1} + A \cdot \omega \cdot A^{-1}) \otimes S^{'},\end{aligned}$$

finalmente

$$\omega^{'} = dA \cdot A^{-1} + A \cdot \omega \cdot A^{-1}, \tag{2.5}$$

esta é a *Fórmula de Transformação* para uma matriz de conexão com respeito a uma mudança de referenciais locais.

Seja agora $\{U, W, \cdots\}$ um cubrimento coordenado para M. Sobre cada U fixe um referencial local S_U de E e assine uma matriz ω_U de ordem $q \times q$ de 1-formas diferenciais as quais satisfazem a fórmula de transformação (2.5) quando as vizinhanças coordenadas correspondentes se interceptam, i.e.,se sobre $U \cap W \neq \emptyset$ temos que

$$S_W = A_{WU} \cdot S_U,$$

onde A_{WU} é uma matriz de ordem $q \times q$ de funções diferenciáveis sobre $U \cap W$, então

$$\omega_W = dA_{WU} \cdot A^{-1}_{WU} + A_{WU} \cdot \omega_U \cdot A^{-1}_{WU}. \tag{2.6}$$

Então, *"existe uma conexão ∇ sobre E cuja representação matricial sobre cada U do cubrimento coordenado é exatamente ω_U".* (Ver[1]).

Teorema 2.6 *Sempre existe uma conexão sobre um Fibrado vetorial.*

Demonstração.
Escolha um cubrimento coordenado $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M. Como localmente as funções $\varphi_{U_\alpha} : U_\alpha \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$ são difeomorfismos, então podemos observar que os fibrados vetoriais são localmente triviais (ou seja da forma $U_\alpha \times \mathbb{R}^q$), assim podemos assumir que existe um referencial local S_α para cada $U_\alpha, \alpha \in A$, logo, pela estrutura local das conexões precisamos só construir uma matriz ω_α de ordem $q \times q$ para cada U_α tais que as matrizes construídas satisfazem (2.5) com respeito a uma mudança de referenciais locais.

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é localmente finito, e seja $\{g_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma partição da unidade subordinada a $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, tal que $supp g_\alpha \subset U_\alpha$, então, quando $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, existe uma matriz $A_{\alpha\beta}$ de funções diferenciáveis sobre $U_\alpha \cap U_\beta$ tal que

$$S_\alpha = A_{\alpha\beta} \cdot S_\beta,$$

com $\det A_{\alpha\beta} \neq \emptyset$.

Para cada $\alpha \in A$, escolha uma matriz ϕ_α de ordem $q \times q$ de 1-formas diferenciais sobre U_α, seja então

$$\omega_\alpha = \sum_{\beta \in A} g_\beta \cdot (dA_{\alpha\beta} \cdot A_{\alpha\beta}^{-1} + A_{\alpha\beta} \cdot \phi_\beta A_{\alpha\beta}^{-1}),$$

onde, a soma sobre os termos β tais que $U_\beta \cap U_\alpha = \emptyset$, são zeros, assim ω_α é uma matriz de 1-formas diferenciais sobre U_α.

Agora necessitamos mostrar que, sobre $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ temos

$$\omega_\alpha = dA_{\alpha\beta} \cdot A_{\alpha\beta}^{-1} + A_{\alpha\beta} \cdot \omega_\beta \cdot A_{\alpha\beta}^{-1}.$$

Observe primeiro que se $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$, temos

$$A_{\alpha\beta} \cdot A_{\beta\gamma} = A_{\alpha\gamma},$$

assim, sobre $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ temos

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta} \cdot \omega_\beta \cdot A_{\alpha\beta}^{-1} &= A_{\alpha\beta} \cdot (\sum_{\substack{\gamma \\ U_\gamma \cap U_\beta \cap U_\alpha \neq \emptyset}} g_\gamma \cdot (dA_{\beta\alpha} \cdot A_{\beta\gamma}^{-1} + A_{\beta\gamma} \cdot \phi_\gamma \cdot A_{\beta\gamma}^{-1}) A_{\alpha\beta}^{-1}) \\ &= \sum_{\substack{\gamma \\ U_\gamma \cap U_\beta \cap U_\alpha \neq \emptyset}} g_\gamma \cdot (A_{\alpha\beta} \cdot dA_{\beta\alpha} \cdot A_{\beta\gamma}^{-1} \cdot A_{\alpha\beta}^{-1} + A_{\alpha\beta} \cdot A_{\beta\gamma} \cdot \phi_\gamma \cdot A_{\beta\gamma}^{-1} \cdot A_{\alpha\beta}^{-1}), \end{aligned}$$

como

$$A_{\alpha\beta} \cdot A_{\beta\gamma} = A_{\alpha\gamma}, \tag{2.7}$$

então

$$A_{\alpha\beta} \cdot \omega_\beta \cdot A_{\alpha\beta}^{-1} = \sum_\gamma g_\gamma \cdot (A_{\alpha\beta} \cdot dA_{\beta\gamma} \cdot A_{\alpha\gamma}^{-1} + A_{\alpha\gamma} \cdot \phi_\gamma \cdot A_{\alpha\gamma}^{-1}).$$

Também de (2.7), obtemos

$$dA_{\alpha\beta} \cdot A_{\beta\gamma} + A_{\alpha\beta} \cdot dA_{\beta\gamma} = dA_{\alpha\gamma},$$

e daqui

$$A_{\alpha\beta} \cdot dA_{\beta\gamma} = dA_{\alpha\gamma} - dA_{\alpha\beta} \cdot A_{\beta\gamma},$$

logo

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta} \cdot \omega_\beta \cdot A_{\alpha\beta}^{-1} &= \sum_\gamma g_\gamma \cdot ((dA_{\alpha\gamma} - dA_{\beta\gamma} \cdot A_{\beta\gamma}) \cdot A_{\alpha\gamma}^{-1} + A_{\alpha\gamma} \cdot \phi_\gamma \cdot A_{\alpha\gamma}^{-1}) \\ &= \sum_\gamma g_\gamma \cdot (dA_{\alpha\gamma} \cdot A_{\alpha\gamma}^{-1} + A_{\alpha\gamma} \cdot \phi_\gamma \cdot A_{\alpha\gamma}^{-1}) - \sum_\gamma g_\gamma \cdot dA_{\alpha\beta} \cdot A_{\alpha\beta}^{-1} \\ &= \omega_\alpha - \sum_\gamma dA_{\alpha\beta} \cdot A_{\alpha\beta}^{-1}, \end{aligned}$$

portanto

$$A_{\alpha\beta} \cdot \omega_\beta \cdot A_{\alpha\beta}^{-1} = \omega_\alpha - dA_{\alpha\beta} \cdot A_{\alpha\beta}^{-1},$$

ou equivalentemente

$$\omega_\alpha = A_{\alpha\beta} \cdot \omega_\beta \cdot A_{\alpha\beta}^{-1} + dA_{\alpha\beta} \cdot A_{\alpha\beta}^{-1},$$

concluindo assim a nossa demonstração. ∎

No caso particular em que $\phi_\beta = 0$ então obtemos uma conexão ∇ sobre E cuja matriz de conexão sobre U_α é

$$\omega_\alpha = \sum_\beta g_\beta \cdot (dA_{\alpha\beta} \cdot A_{\alpha\beta}^{-1}).$$

Teorema 2.7 *Seja ∇ uma conexão sobre um fibrado vetorial E, e $p \in M$, então, existe um referencial local S em um entorno coordenado de p tal que a matriz de conexão correspondente, ω, é zero no ponto p.*

Demonstração.
Ver([1]). ∎

Capítulo 3

Derivação em Variedades

No capítulo anterior demonstramos a existência de uma conexão sobre uma variedade, aliás existe uma conexão em particular no caso que a variedade seja Riemanniana, a conexão afim, a qual nós permite derivar funções, formas diferenciais, sobre variedades.

No começo introduziremos conceitos básicos de geometria Riemanniana, considerando os resultados da existência de uma conexão afim e as equações estruturais de Cartan, sem demonstração.

3.1 Tópicos em Geometria Riemanniana

Consideremos M uma variedade Riemanniana n-dimensional e G um campo tensorial covariante simétrico de posto 2 localmente expressada por

$$G = g_{ij}du^i \otimes du^j,$$

onde (U, u^i) é um sistema local de coordenadas.

No caso que G é não degenerado e definida positiva, então é chamado um *Tensor Métrico* de M e neste caso M é chamada uma *Variedade Riemanniana.*

Dado um campo referencial local $S = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$, então a conexão em uma variedade pode ser expressado localmente por

$$\nabla S = \omega \otimes S,$$

onde $\omega = (\omega_j^j)$ é a matriz de conexão e os ω_j^i são 1-formas diferenciáveis.

Uma conexão ∇ se diz que é compatível com a métrica G se

$$\nabla G = 0,$$

ou equivalentemente

$$dG = \omega \cdot G + G \cdot \omega^t$$

onde $\omega = \begin{bmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_1^n \\ & \ddots & \\ \omega_n^1 & \cdots & \omega_n^n \end{bmatrix}$, $G = [g_{ij}]$.

Uma conexão se diz de *Livre Torsão* se

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0, \quad \forall X, Y \in \Gamma(T(M)).$$

O teorema fundamental diz que existe uma única conexão de livre torsão compatível com a métrica sobre M chamada a *Conexão de Levi-Civita.*

Definimos, para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathrm{M})$, a *curvatura*

$$\begin{array}{l} R(X,Y) : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X} \\ R(X,Y) \cdot Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla[X,Y]Z \end{array}$$

a qual vem associada da matriz curvatura

$$\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega, \tag{3.1}$$

onde ω é a matriz da conexão ∇ e

$$R(X,Y) \cdot Z = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \lambda^\alpha < X \wedge Y, \Omega_\alpha^\beta > \cdot e_\beta$$

com $Z = \sum_{\alpha=1}^n \lambda^\alpha \cdot e_\alpha, \quad e \quad \Omega = (\Omega_\alpha^\beta)$, sendo os $\{e_1, \cdots, e_n\}$ um campo referencial local linearmente independente, e $\{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ o seu campo referencial dual, então

$$\omega_i(e_j) = \delta_j^i.$$

As equações estruturais de Cartan indicam que existe uma única matriz de conexão (ω_j^i) sobre $T^*(M)$ tal que

$$\begin{cases} d\omega_i = \omega_j^i \wedge \omega_j \\ \omega_j^i + \omega_i^j = 0. \end{cases}$$

Com respeito a (3.1) temos a segunda equação estrutural de Cartan

$$d\omega_j^i = \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \Omega_{ij}.$$

Nosso caso podemos escrever

$$\omega_{ij} = g_{il}\omega_j^l = \omega_j^i$$

$$\Omega_{ij} = \Omega_i^k g_{kj},$$

com

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} R_{ijkl} \omega_l \wedge \omega_k,$$

sendo

$$R_{ijkl} =< R(e_i, e_j)e_l, e_k > .$$

Se consideramos uma subvariedade $N^m \hookrightarrow M^n$, e $\{e_1, \cdots, e_n\}$ referencial local ortonormal de M tal que $\{e_1, \cdots, e_m\}$ são ortonormais a N, então definimos a segunda forma fundamental

$$-\overrightarrow{II}(X, Y) = (\nabla_X Y)^n, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(\mathrm{M}) \, ,$$

onde ∇ é a conexão de M, e $(\cdot)^n$ indica a componente normal a N, ou também podemos expressar

$$-\overrightarrow{II}(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla^N_X Y.$$

onde ∇^N é a conexão sobre N gerada pela restrição da métrica G sobre N.

Por outro lado temos que

$$\begin{aligned} (\nabla e_i)(e_k) &= (\omega_{ij} \otimes e_j)(e_k) \\ &= \omega_{ij}(e_k) \cdot e_j, \end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned} \omega_{ij}(e_k) &= < (\nabla e_i)(e_k), e_j > \\ \omega_{ij}(e_k) &= < \nabla_{e_k} e_i, e_j > . \end{aligned} \tag{3.2}$$

Como os ω_{ij} são 1-formas diferenciais, então temos que

$$\omega_{\nu i} = h^\nu_{ij} \cdot \omega_j, \quad m+1 \le \nu \le n,$$

daqui

$$\omega_{\nu i}(e_j) = h^\nu_{ij},$$

pois $\omega_j(e_j) = 1$, e por (3.2), dado que a conexão é compatível com a métrica, temos

$$\begin{aligned} < \nabla_{e_j} e_\nu . e_i > &= e_j < e_i, e_\nu > - < e_\nu, \nabla_{e_j} e_i > \\ &= < -\nabla_{e_j} e_i, e_\nu > \\ &= < \overrightarrow{II}(e_i, e_j), e_\nu >, \quad m+1 \le \nu, \end{aligned}$$

por tanto

$$h^\nu_{ij} =< \overrightarrow{II}(e_i, e_j), e_\nu > .$$

Denotamos a curvatura seccional da seção gerada pelos vetores e_i, e_j por R_{ijij}, e a curvatura de Ricci por

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^{n} R_{ikjk}.$$

3.2 Derivadas de Ordem Superior

Considere $f \in C^\infty(M)$, então a sua derivada exterior é dada por

$$\nabla f = df,$$

neste caso df pertence ao espaço $T^*(M)$, assim localmente podemos escrever

$$df = f_i \omega_i, \tag{3.3}$$

onde $f_i \in C^\infty(M)$.

Para calcular a segunda derivada covariante , $\nabla^2 f$, devemos ter em conta que ele é um tensor simétrico do tipo $(0,2)$, a qual podemos representar da forma

$$\nabla^2 f = f_{ij}\omega_j \otimes \omega_i, \tag{3.4}$$

onde os $f_{ij} \in C^\infty(M)$.
Para obter a expressão dos f_{ij} observemos que da expresão dada em (3.3)

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f &= \nabla(f_i \cdot \omega_i)\\
&= df_i \otimes \omega_i + f_i \cdot \nabla \omega_i\\
&= df_i \otimes \omega_i + f_i \cdot \omega_{ij} \otimes \omega_j\\
&= (df_i + f_j \cdot \omega_{ji}) \otimes \omega_i,
\end{aligned}$$

assim, comparando obtemos a relação

$$f_{ij}\omega_j = df_i + f_j \cdot \omega_{ji},$$

por outro lado, também de (2.1), podemos diferenciar exteriormente e obter mais uma relação

$$\begin{aligned}
0 &= df_i \wedge \omega_i + f_i . d\omega_i\\
&= df_i \wedge \omega_i + f_i . \omega_{ij} \wedge \omega_j\\
&= (df_i + f_j . \omega_{ji}) \wedge \omega_i\\
&= f_{ij}\omega_j \wedge \omega_i\\
&= \sum_{i<j} f_{ij}\omega_j \wedge \omega_i + \sum_{i>j} f_{ij}\omega_j \wedge \omega_i\\
&= \sum_{i<j} (f_{ij} - f_{ji})\omega_j \wedge \omega_i,
\end{aligned}$$

desde que os $\omega_i \wedge \omega_j$, com $i < j$ é uma base , concluímos que

$$f_{ij} = f_{ji}, \quad \forall i, j.$$

O tensor do tipo-$(0,2)$ simétrico dado por

$$f_{ij}\omega_j \otimes \omega_i,$$

é chamado o *Hessiano* de f.

Tomando o traço do Hessiano , definimos o *Laplaciano* de f como sendo

$$\triangle f = f_{ii}.$$

Observações 3.1 *Para calcular os* f_{ij} *observe que*

$$\begin{aligned} f_{ij} &= f_{ij}\omega_j(e_j) \\ &= df_i(e_j) + f_j.\omega_{ji}(e_j) \\ &= df_i(e_j) + f_j < \nabla_{e_i} e_j, e_j > \end{aligned}$$

logo

$$f_{ij} = df_i(e_j) + f_j < \nabla_{e_i}, e_j > .$$

∎

Definimos a terceira derivada covariante

$$\nabla^3 f = f_{ijk}\omega_k \otimes \omega_j \otimes \omega_i, \tag{3.5}$$

com $f_{ijk} \in C^\infty(M)$. Novamente, para obter os valores dos f_{ijk}, derivamos covariantemente (3.4) e obtemos

$$\begin{aligned} \nabla^3 f &= \nabla(f_{ij}\omega_j \otimes \omega_i) \\ &= df_{ij} \otimes \omega_j \otimes \omega_i + f_{ij}\nabla\omega_j \otimes \omega_i + f_{ij}\omega_j \otimes \nabla\omega_i \\ &= df_{ij} \otimes \omega_j \otimes \omega_i + f_{ij}\omega_{jk} \otimes \omega_k \otimes \omega_i + f_{ij}\omega_j \otimes \omega_{ik} \otimes \omega_k \\ &= df_{ij} \otimes \omega_j \otimes \omega_i + f_{ik}\omega_{kj} \otimes \omega_j \otimes \omega_i + f_{ij}\omega_j \otimes \omega_{ik} \otimes \omega_k \\ &= df_{ij} \otimes \omega_j \otimes \omega_i + f_{ik}\omega_{kj} \otimes \omega_j \otimes \omega_i + f_{kj}\omega_{ki} \otimes \omega_j \otimes \omega_i \\ &= (df_{ij} + f_{ik}\omega_{kj} + f_{kj}\omega_{ki}) \otimes \omega_j \otimes \omega_i, \end{aligned}$$

comparando com (3.5) conseguimos a seguinte relação

$$f_{ijk}\omega_k = df_{ij} + f_{ik}\omega_{kj} + f_{kj}\omega_{ki}. \tag{3.6}$$

Diferenciando exteriormente (3.4)

$$\begin{aligned} d(f_{ij}\omega_j) &= d(f_j\omega_{ji}) \\ df_{ij} \wedge \omega_j + f_{ij}d\omega_j &= df_j \wedge \omega_{ji} + f_i d\omega_{ji}. \end{aligned}$$

Daqui, e da primeira e segunda equações estruturais temos

$$\begin{aligned} 0 &= -df_{ij} \wedge \omega_j - f_{ij}d\omega_j + df_j \wedge \omega_{ji} + f_i d\omega_{ji} \\ &= -df_{ij} \wedge \omega_j - f_{ij}(\omega_{jk} \wedge \omega_k) + df_j \wedge \omega_{ji} + f_i(\omega_{jk} \wedge \omega_{ki} + \Omega_{ji}) \\ &= -(df_{ij} + f_{ik}\omega_{kj}) \wedge \omega_j + (df_j + f_k\omega_{kj}) \wedge \omega_{ji} + f_j\Omega_{ji} \\ &= -(df_{ij} + f_{ik}\omega_{kj}) \wedge \omega_j + f_{jk}\omega_k \wedge \omega_{ji} + f_j\Omega_{ji} \\ &= -(df_{ij} + f_{ik}\omega_{kj} + f_{kj}\omega_{ki}) \wedge \omega_j + f_j\Omega_{ji} \\ &= -f_{ijk}\omega_k \wedge \omega_j + \frac{1}{2} f_j R_{jikl}\omega_l \wedge \omega_k, \end{aligned}$$

ou equivalentemente

$$\begin{aligned}
0 &= -f_{ijk}\omega_k \wedge \omega_j + \frac{1}{2} f_k R_{kijl}\omega_l \wedge \omega_j \\
&= (-f_{ijk} + \frac{1}{2} f_l R_{lijk})\omega_k \wedge \omega_j \\
&= \sum_{k<j}(-f_{ijk} + \frac{1}{2} f_l R_{lijk})\omega_k \wedge \omega_j + \sum_{k>j}(-f_{ijk} + \frac{1}{2} f_l R_{lijk})\omega_k \wedge \omega_j \\
&= \sum_{k<j}(-f_{ijk} + \frac{1}{2} f_l R_{lijk} + f_{ikj} - \frac{1}{2} f_l R_{likj})\omega_k \wedge \omega_j.
\end{aligned}$$

Como os $\omega_k \wedge \omega_j$, com $k < j$ são linearmente independentes, igualamos cada componente da ultima expressão a zero, e daqui

$$\begin{aligned}
f_{ijk} - f_{ikj} &= \frac{1}{2} f_l (R_{lijk} - R_{likj}) \\
&= f_l R_{lijk},
\end{aligned}$$

obtendo finalmente a *identidade de Ricci*

$$f_{ijk} - f_{ikj} = f_l R_{lijk}.$$

Em particular, considerando $i = k$ na identidade de Ricci,

$$f_{iji} - f_{iij} = f_j R_{liji},$$

e somando com respeito a i, com $1 \leq i \leq n$, temos

$$f_{iji} - f_{iij} = f_l R_{lj},$$

ou

$$\sum_{i=1}^{n}(f_{iji} - f_{iij}) = f_j R_{lj}.$$

3.3 Derivadas de r-formas exteriores

Seja $\omega \in \Lambda^r(M)$, assim podemos escrever

$$\omega = a_{i_1 \dots i_r} \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_r}, \tag{3.7}$$

definimos a sua derivada covariante como sendo

$$\nabla \omega = a_{i_1 \dots i_r, j} \omega_j \wedge \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_r} \tag{3.8}$$

que é uma $r+1$-forma exterior, com $1 \leq j \leq n$ e $I = \{i_1, \cdots, i_r\} \subseteq \{1, \cdots, n\}$ tal que os $\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_r}$ formam uma base de $\Lambda^r(M)$.
Derivando exteriormente (3.7) temos

$$\begin{aligned}
d\omega &= d(a_I \cdot \omega_I) \\
&= da_I \wedge \omega_I + a_I (-1)^{\alpha} \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\omega_{i_\alpha} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_r} \\
&= da_I \wedge \omega_I + a_I (-1)^{\alpha} \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge (\omega_{i_\alpha j_\alpha} \wedge \omega_{j_\alpha}) \wedge \cdots \wedge \omega_{i_r} \\
&= da_I \wedge \omega_I + a_I \omega_{i_\alpha j_\alpha} \wedge \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{j_\alpha} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_r} \\
&= (da_I + a_{i_1 \cdots j_\alpha \cdots i_r} \omega_{j_\alpha i_\alpha}) \wedge \omega_I.
\end{aligned}$$

Assim definimos a derivada covariante dos $a_{i_1 \cdots i_r, j}$ via a relação

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_1 \cdots i_r, j} \omega_j = da_{i_1 \cdots i_r} + \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq r \\ j_\alpha}} a_{i_1 \cdots j_\alpha \cdots i_r} \omega_{j_\alpha i_\alpha}. \tag{3.9}$$

De maneira análoga, obtemos uma relação para $(r-1)$-formas exteriores

$$a_{i_1 \cdots i_{r-1}, j} \omega_j = da_{i_1 \cdots i_{r-1}} + a_{i_1 \cdots j_\alpha \cdots i_{r-1}} \omega_{j_\alpha i_\alpha}. \tag{3.10}$$

Vejamos agora um caso particular. Para $n = 2$, seja $\omega = a\omega_1 \wedge \omega_2$, então a sua derivada covariante tem a forma

$$\nabla \omega = a_{,j} \omega_j \wedge \omega_1 \wedge \omega_2, \quad 1 \leq j \leq 2,$$

onde

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{2} a_{,j} \omega_j &= da + a\Big(\sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq 2 \\ j_\alpha}} \omega_{j_\alpha i_\alpha}\Big) \\
&= da + a\Big(\sum_{i,j=1}^{2} \omega_{ji}\Big) \\
&= da + a(\omega_{11} + \omega_{12} + \omega_{21} + \omega_{22}),
\end{aligned}$$

com isto

$$\begin{aligned}
a_{,j} &= a_{,j} \omega_j(e_j) \\
&= da(e_j) + a(\omega_{11}(e_j) + \omega_{12}(e_j) + \omega_{21}(e_j) + \omega_{22}(e_j)),
\end{aligned}$$

desta maneira obtemos uma expressão simples da derivada covariante.

Derivando exteriormente (3.10), obtemos

$$\begin{aligned}
da_{i_1\cdots i_{r-1},j}\wedge w_j + a_{i_1\cdots i_{r-1},j}d\omega_j &= da_{i_1\cdots j_\alpha\cdots i_{r-1}}\wedge\omega_{j_\alpha i_\alpha} + a_{i_1\cdots j_\alpha\cdots i_{r-1}}d\omega_{j_\alpha i_\alpha}\\
da_{i_1\cdots i_{r-1},j}\wedge \omega_j + a_{i_1\cdots i_{r-1},k}\omega_{kj}\wedge\omega_j &= da_{i_1\cdots j_\alpha\cdots i_{r-1}}\wedge\omega_{j_\alpha i_\alpha} + a_{i_1\cdots j_\alpha\cdots i_{r-1}}(\omega_{j_\alpha k}\wedge\omega_{ki_\alpha})\\
&\quad + a_{i_1\cdots j_\alpha\cdots i_{r-1}}\Omega_{j_\alpha i_\alpha}\\
&= da_{i_1\cdots j_\alpha\cdots i_{r-1}}\wedge\omega_{j_\alpha i_\alpha} + a_{i_1\cdots j_\alpha\cdots i_{r-1}}(\omega_{j_\alpha k}\wedge\omega_{ki_\alpha})\\
&\quad +\frac{1}{2}a_{i_1\cdots j_\alpha\cdots i_{r-1}}R_{j_\alpha i_\alpha kl}w_l\wedge w_k.
\end{aligned}$$

Por um lado temos

$$\begin{aligned}
da_{i_1\cdots i_{r-1},j}\wedge \omega_j + a_{i_1\cdots i_{r-1},k}\omega_{kj}\wedge\omega_j &= a_{i_1\cdots i_{r-1},jk}\omega_k\wedge\omega_j - a_{i_1\cdots k_\alpha\cdots i_{r-1},j}\omega_{k_\alpha i_\alpha}\wedge\omega_j\\
&= a_{i_1\cdots i_{r-1},jk}\omega_k\wedge\omega_j + a_{i_1\cdots k_\alpha\cdots i_{r-1},j}\omega_j\wedge\omega_{k_\alpha i_\alpha}\\
&= a_{i_1\cdots i_{r-1},jk}\omega_k\wedge\omega_j +\\
&\qquad (da_{i1\cdots k_\alpha\cdots i_{r-1}} + a_{i_1\cdots j_\nu\cdots k_\alpha\cdots i_{r-1}}\omega_{j_\nu i_\nu})\wedge\omega_{k_\alpha i_\alpha}\\
&= a_{i_1\cdots i_{r-1},jk}\omega_k\wedge\omega_j + da_{i_1\cdots k_\alpha\cdots i_{r-1}}\wedge\omega_{k_\alpha i_\alpha} +\\
&\qquad \sum_{\nu\neq\alpha} a_{i_1\cdots j_\nu k_\alpha\cdots i_{r-1}}\omega_{j_\nu i_\nu}\wedge\omega_{k_\alpha i_\alpha} +\\
&\qquad a_{i_1\cdots j_\nu\cdots k_\alpha\cdots i_{r-1}}\omega_{j_\nu i_\nu}\wedge\omega_{k_\alpha i_\alpha}\\
&= a_{i_1\cdots i_{r-1},jk}\omega_k\wedge\omega_j + da_{i_1\cdots k_\alpha\cdots i_{r-1}}\wedge\omega_{k_\alpha i_\alpha} +\\
&\qquad \sum_{\nu\neq\alpha} a_{i_1\cdots j_\nu k_\alpha\cdots i_{r-1}}\omega_{j_\nu i_\nu}\wedge\omega_{k_\alpha i_\alpha} +\\
&\qquad a_{i_1\cdots j_\alpha\cdots i_\alpha\cdots i_{r-1}}\omega_{j_\alpha k_\alpha}\wedge\omega_{k_\alpha i_\alpha}\\
&= a_{i_1\cdots i_{r-1},jk}\omega_k\wedge\omega_j + da_{i_1\cdots k_\alpha\cdots i_{r-1}}\wedge\omega_{k_\alpha i_\alpha} +\\
&\qquad \sum_{\nu\neq\alpha} a_{i_1\cdots j_\nu k_\alpha\cdots i_{r-1}}\omega_{j_\nu i_\nu}\wedge\omega_{k_\alpha i_\alpha} +\\
&\qquad a_{i_1\cdots j_\alpha\cdots i_{r-1}}\omega_{j_\alpha i_\alpha}\wedge\omega_{k_\alpha i_\alpha},
\end{aligned}$$

comparando as duas últimas equações temos

$$a_{i_1\cdots i_{r-1},jk}\omega_k\wedge\omega_j + \sum_{\nu\neq\alpha} a_{i_1\cdots j_\nu\cdots k_\alpha\cdots i_{r-1}}\omega_{j_\nu i_\nu}\wedge\omega_{k_\alpha i_\alpha} = \frac{1}{2}R_{j_\alpha i_\alpha lk}a_{i_1\cdots j_\alpha\cdots i_{r-1}}\omega_k\wedge\omega_l,$$

observe que a expressão $\sum_{\nu\neq\alpha} a_{i_1\cdots j_\nu\cdots k_\alpha\cdots i_{r-1}}\omega_{j_\nu i_\nu}\wedge\omega_{k_\alpha i_\alpha}$ é identicamente zero pois

$$\begin{aligned}\sum_{\nu\neq\alpha} a_{i_1\cdots j_\nu\cdots k_\alpha\cdots i_{r-1}}\omega_{j_\nu i_\nu}\wedge\omega_{k_\alpha i_\alpha} &= \sum_{\nu<\alpha} a_{i_1\cdots j_\nu\cdots k_\alpha\cdots i_{r-1}}\omega_{j_\nu i_\nu}\wedge\omega_{k_\alpha i_\alpha} + \\ &\qquad \sum_{\nu>\alpha} a_{i_1\cdots j_\nu\cdots k_\alpha\cdots i_{r-1}}\omega_{j_\nu i_\nu}\wedge\omega_{k_\alpha i_\alpha} \\ &= \sum_{\nu<\alpha} a_{i_1\cdots j_\nu\cdots k_\alpha\cdots i_{r-1}}\omega_{j_\nu i_\nu}\wedge\omega_{k_\alpha i_\alpha} + \\ &\qquad \sum_{\nu<\alpha} a_{i_1\cdots j_\alpha\cdots k_\nu\cdots i_{r-1}}\omega_{j_\alpha i_\alpha}\wedge\omega_{k_\nu i_\nu} \\ &= \sum_{\nu<\alpha} a_{i_1\cdots j_\nu\cdots k_\alpha\cdots i_{r-1}}\omega_{j_\nu i_\nu}\wedge\omega_{k_\alpha i_\alpha} - \\ &\qquad \sum_{\nu<\alpha} a_{i_1\cdots j_\alpha\cdots k_\nu\cdots i_{r-1}}\omega_{k_\nu i_\nu}\wedge\omega_{j_\alpha i_\alpha} \\ &= \sum_{\nu<\alpha} a_{i_1\cdots j_\nu\cdots k_\alpha\cdots i_{r-1}}\omega_{j_\nu i_\nu}\wedge\omega_{k_\alpha i_\alpha} - \\ &\qquad \sum_{\nu<\alpha} a_{i_1\cdots k_\alpha\cdots j_\nu\cdots i_{r-1}}\omega_{j_\nu i_\nu}\wedge\omega_{k_\alpha i_\alpha} \\ &= 0,\end{aligned}$$

com isto,

$$a_{i_1\cdots i_{r-1},jk}\omega_k\wedge\omega_j = \frac{1}{2}R_{j_\alpha i_\alpha lk}a_{i_1\cdots j_\alpha\cdots i_{r-1}}\omega_k\wedge\omega_l,$$

o que implica a seguinte igualdade

$$a_{i_1\cdots i_{r-1},lk} - a_{i_1\cdots i_{r-1},kl} = R_{j_\alpha i_\alpha lk}a_{i_1\cdots j_\alpha\cdots i_{r-1}}.$$

Similarmente, para r-formas temos

$$a_{i_1\cdots i_r,jk} - a_{i_1\cdots i_r,kj} = R_{l_\alpha i_\alpha jk}a_{i_1\cdots l_\alpha\cdots i_r}.$$

Capítulo 4

Método de Bochner

Neste capítulo tem como fundamento estudar o operador Laplaciano Δ sobre uma variedade Riemanniana, e observar que o seu estudo dá informação sobre a topologia da variedade.

Teremos como principais resultados o Teorema de Decomposição de Hodge e o Método de Bochner, os quais em combinação nós da informação dos números de Betti, que é uma ferramenta topológica.

Na Seção 4.2, demonstraremos que as definições dadas por K. Kodaira e Hodge com respeito a uma r-forma harmônica são equivalentes.

Na Seção 4.4 conheceremos como é que o Método de Bochner é aplicado a os números de Betti.

4.1 O Operador Estrela

Seja $\{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ uma base ortonormal positiva, de 1-formas exteriores sobre a variedade Riemanniana M. Definimos o *operador linear estrela* $(*)$ ou *operador de Hodge* como sendo

$$* : \Lambda^r(M) \longrightarrow \Lambda^{n-r}(M)$$

$$*(\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_r}) := sgn(\sigma(I, I^c))\omega_{i_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \omega_n,$$

onde $\sigma(I, I^c)$, denota a permutação

$$(i_1, \cdots, i_r, i_{r+1}, \cdots, i_n) \hookrightarrow (1, \cdots, n).$$

Em base a esta definição obtemos as seguintes propriedades do operador $*$,

$$*(1) = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$$

$$*(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n) = 1,$$

aliás podemos mostrar que

$$*(A\omega_1 \wedge \cdots \wedge A\omega_n) = (\det A) * (w_1 \wedge \cdots \wedge w_n),$$

isto significa que o operador $*$ independe da base positiva escolhida.

Como conseqüência imediata da definição temos os seguintes lemas enunciados sem demonstração

Lema 4.1 *Temos* $** = (-1)^{r(n-r)} : \Lambda^r(M) \longrightarrow \Lambda^r(M)$.

Lema 4.2 *Para* $\omega, v \in \Lambda^r(M)$ *temos*

$$< v, \omega >= *(\omega \wedge *v) = *(v \wedge *\omega).$$

Lema 4.3 *Seja* $v_1, \cdots, v_n$ *uma outra base arbitraria positiva de* $T^*(M)$*, então*

$$*(1) = \frac{1}{\sqrt{\det(< v_i, v_j >)}} v_1 \wedge \cdots \wedge v_n.$$

Se supormos M orientável,considerando coordenadas locais, então escolhendo os vetores $\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ como uma base positiva, podemos expressar

$$*(1) = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

A esta expressão chamamos *Forma de Volume*

$$vol(M) = \int_M *(1).$$

Com isto, sobre $\Lambda^r(M)$, podemos definir um produto escalar

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) &= \int_M < \alpha, \beta > *(1) \\ &= \int_M \alpha \wedge *\beta, \end{aligned}$$

assim definida, $(,)$ é bilinear e positiva definida.

Definição 4.1 *Se* ω *é uma* r*-forma então definimos*

$$\delta\omega = (-1)^{n(r+1)+1} * d * \omega.$$

$\Diamond$

Lema 4.4 *Se* M *é compacto, então o operador* δ *é o operador adjunto de* d *com respeito ao produto escalar* $(\ , \ )$*, i.e.*

$$\int_M < d\omega, \eta >= \int_M < \omega, \delta\eta >,$$

para todo $\omega \in \Lambda^{r-1}(M)$*,* $\eta \in \Lambda^r(M)$.

Demonstração.
Observe primeiro que por definição do operador $*$ temos

$$\begin{aligned} **(\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_r}) &= *\{sgn(\sigma(I,I^c))\omega_{i_{r+1}}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_n}\} \\ &= sgn(\sigma(I^c,I))\cdot sgn(\sigma(I,I^c))\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_r}, \end{aligned}$$

por outro lado

$$sgn(\sigma(I,I^c)) = (-1)^{(n-r)r}sgn(\sigma(I,I^c)),$$

e assim por linearidade obtemos

$$**\omega = (-1)^{(n-r)r}\omega, \quad \forall\omega\in\Lambda^r(M).$$

Observe também que

$$\begin{aligned} (\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_r})\wedge*(\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_r}) &= sgn(\sigma(I,I^c))\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_r}\wedge\omega_{i_{r+1}}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_n} \\ &= \omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n. \end{aligned}$$

Se $\omega = a_I\omega_I$ e $\theta = b_I\omega_I$ então por linearidade

$$\begin{aligned} \omega\wedge*\theta &= (a_I\omega_I)\wedge*(b_I\omega_I) \\ &= a_Ib_I\omega_I\wedge*(\omega_I) \\ &= a_Ib_I\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n \\ &= <\omega,\theta> dV. \end{aligned}$$

Agora, se $\omega\in\Lambda^{r-1}(M)$ e $\eta\in\Lambda^r(M)$, então

$$\begin{aligned} <d\omega,\eta> &= d\omega\wedge*\eta \\ &= d(\omega\wedge*\eta) + (-1)^r\omega\wedge d*\eta \\ &= d(\omega\wedge*\eta) + (-1)^r\cdot(-1)^{(n-r+1)(r-1)}\omega\wedge**(d*\eta), \end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned} (-1)^{r+(n-r+1)(r-1)} &= (-1)^{nr+n+1} \\ &= (-1)^{n(r+1)+1}, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} <d\omega,\eta> &= d(\omega\wedge*\eta) + \omega\wedge*(\delta\eta) \\ &= d(\omega\wedge*\eta) + <\omega,\delta\eta>; \end{aligned}$$

integrando obtemos

$$\int_M <d\omega,\eta> = \int_M d(\omega\wedge*\eta) + \int_M <\omega,\delta\eta> .$$

Finalmente, pelo teorema de Stoke's, ver ([1]), concluímos que

$$\int_M <d\omega,\eta> = \int_M <\omega,\delta\eta> .$$

■

4.2 O Laplaciano

Lembremos que temos dois operadores

$$d : \Lambda^r(M) \longrightarrow \Lambda^{r+1}(M)$$

e

$$\delta : \Lambda^{r+1}(M) \longrightarrow \Lambda^r(M),$$

com a relação

$$(\alpha, d\beta) = (\delta\alpha, \beta),$$

onde $\alpha \in \Lambda^{r+1}(M), \beta \in \Lambda^r(M)$.

Uma forma ω é chamada *harmônica* se for fechada e co-fechada (i.e $d\omega = o$ e $\delta\omega = 0$), esta é a definicição dada por Hodge; mas K. Kodaira por outro lado, chama a uma forma ω, *harmônica*, se $\Delta\omega = 0$, onde Δ é o operador Laplace-Beltrami $-d\delta - \delta d$.

Neste capítulo demonstraremos, na proposição (3.2), a equivalência das duas definições anteriores.

Considerando α, β formas exteriores de grau r e $r+1$ respectivamente, então, pelo teorema de Stoke's

$$\int_M d(\alpha \wedge *\beta) = 0,$$

daqui

$$\int_M d\alpha \wedge *\beta = (-1)^{r-1} \int_M \alpha \wedge d * \beta,$$

ou equivalentemente

$$(d\alpha, \beta) = (\alpha, \delta\beta).$$

De maneira análoga podemos observar que se β é uma $p-1$-forma então

$$(\alpha, d\beta) = (\delta\alpha, \beta).$$

Com tudo isto podemos enunciar o seguinte resultado: *"Para que uma forma exterior α seja fechada é necessário e suficiente que seja ortogonal a todas as formas co-exatas de grau r."*

De fato, esta condição é necessária pois se $d\alpha = 0$ então $(\alpha, \delta\beta) = 0$ para todo $\beta \in \Lambda^{r+1}(M)$. Suponhamos agora que α é ortogonal a todas as r- formas co-exatas , então $(\alpha, \delta d\alpha) = 0$ e daqui $(d\alpha, d\alpha) = 0$, o que implica $d\alpha = 0$. ∎

Analogamente podemos afirmar que : *"Para que uma forma exterior seja co-fechada é necessário e suficiente que seja ortogonal a todas as formas exatas"*.

Das duas afirmações anteriores podemos concluir que se α e β são duas r-formas com α exata e β co-exata , então $(\alpha, \beta) = 0$.

Definição 4.2 *O Operador de Laplace-Beltrami sobre $\Lambda^r(M)$ é definido por*

$$\Delta := -d\delta - \delta d : \Lambda^r(M) \longrightarrow \Lambda^r(M)$$

Uma r-forma exterior ω é chamada harmônica *se $\Delta\omega = 0$.* $\Diamond$

Proposição 4.1 *O Operador Laplaciano Δ é auto-adjunto, i.e.*

$$(\Delta\alpha, \beta) = (\alpha, \Delta\beta),$$

para todo $\alpha, \beta \in \Lambda^r(M)$.

Proposição 4.2 *Seja $\alpha \in \Lambda^r(M)$ então*

$$\Delta\alpha = 0 \Longleftrightarrow d\alpha = 0 \quad e \quad \delta\alpha = 0.$$

Demonstração.
Pela mesma definição, é claro que se $d\alpha = 0$ e $\delta\alpha = 0$ então $\Delta\alpha = 0$.

Reciprocamente, se $\Delta\alpha = 0$, então, da identidade

$$\begin{aligned}(\Delta\alpha.\alpha) &= ((d\delta + \delta d)\alpha, \alpha) \\ &= (\delta\alpha, \delta\alpha) + (d\alpha, d\alpha),\end{aligned}$$

e pela hipótesse temos que, a expressão acima é zero, e como $(\delta\alpha, \delta\alpha) + (d\alpha, d\alpha)$ é não negativa, eles são nulos quando $d\alpha = 0$ e $\delta\alpha = 0$. ■

Corolario 4.1 *Sobre uma variedade Riemanniana compacta e conexa, toda aplicação harmônica é constante.*

Exemplo 2 : Suponhamos agora que $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação diferenciável, assim temos

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i.$$

Mostremos que neste caso a definição do operador Laplaciano-Beltrami coincide com o Laplaciano em $\mathbb{R}^n$, para isso escolha $\varphi = \varphi_i dx^i$ com suporte compacto, assim

$$*\varphi = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \varphi_i dx^1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

logo

$$(df, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi_i dx^1 \cdots dx^n,$$

mas

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f\varphi_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi_i + f \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i},$$

assim, desde que φ tem suporte compacto

$$(df, \varphi) = -\int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

segue-se que

$$\delta\varphi = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} = -div\varphi.$$

finalmente obtemos que

$$\Delta f = -\delta df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{(\partial x_i)^2} = div(gradf).$$

Logo, o operador Laplaciano coincide com o usual em $\mathbb{R}^n$. ■

Exemplo 3 : Suponhamos agora que temos uma aplicação diferenciável $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ e seja, $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável com suporte compacto, e denotemos por $g = \det g_{ij}$ com (g_{ij}) a métrica Riemanniana de M e (g^{ij}) a sua matriz inversa (que define uma métrica em $T^*(M)$); assim

$$\begin{aligned}
\int_M \Delta f \cdot \varphi \sqrt{g} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n &= (\Delta f, \varphi) \\
&= -(df, d\varphi) \\
&= -\int_M < df, d\varphi > *(1) \\
&= -\int_M < \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i, \frac{\partial v\varphi}{\partial x_i} dx^i > *(1) \\
&= -\int_M g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \sqrt{g} dx^1 \cdots dx^n \\
&= \int_M \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i}(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i}) \varphi \sqrt{g} dx^1 \cdots dx^n,
\end{aligned}$$

como isto vale para todo $\varphi \in C^\infty(M)$ com suporte compacto, segue-se que

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i}(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i}),$$

o que queríamos demonstrar. ■

Agora calculemos o Laplaciano para r-formas exteriores, para isso seja $\omega = a_I\omega_I$ com $I = \{i_1, \cdots, i_r\}$ e $\omega_I = \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_r}$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$, assim então

$$\begin{aligned} d\omega &= a_{I,j}\omega_j \wedge \omega_I \\ &= \sum_{i_1<\cdots<i_{r+1}} \sum_{\sigma(i_1,\cdots,i_{r+1})} sgn(\sigma)a_\sigma\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_{r+1}}, \end{aligned}$$

onde $\sigma(i_1, \cdots, i_{r+1})$ denota a permutação do conjunto $\{i_1, \cdots, i_{r+1}\}$.

Agora calculemos $\delta\omega$, para isso chamemos de

$$\begin{aligned} \beta &= *\omega \\ &= a_{i_1\cdots i_r} sgn(\sigma(I, I^c))\omega_{i_{r-1}} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_n}. \end{aligned}$$

Denotemos por

$$b_{k_1\cdots k_{n-r}} = sgn(\sigma(I, I^c))a_{i_1\cdots i_r},$$

se $k = (k_1, \cdots, k_{n-r}) = (i_{r+1}, \cdots, i_n) = I^c$, então podemos escrever

$$\beta = b_K\omega_K.$$

Derivando exteriormente

$$\begin{aligned} d\beta &= b_{K,j}\omega_j \wedge \omega_K \\ &= (db_{k_1\cdots k_{n-r}} + b_{k_1\cdots j_\theta\cdots k_{n-r}}\omega_{j_\theta k_\theta}) \wedge \omega_K, \quad 1 \leq \theta \leq n-r. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} d\beta &= d(*\omega) \\ &= sgn(\sigma(I, I^c))da_{i_1\cdots i_r} \wedge \omega_{i_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_n} + b_{k_1\cdots j_\theta\cdots k_{n-r}}\omega_{j_\theta k_\theta} \wedge \omega_K, \end{aligned}$$

e dada a fórmula

$$a_{i_1\cdots i_r,j}\omega_j = da_{i_1\cdots j_\alpha\cdots i_r} + a_{i_1\cdots j_\alpha\cdots i_r}\omega_{j_\alpha i_\alpha},$$

obtemos

$$\begin{aligned} d\beta = {} & sgn(\sigma(I, I^c))a_{i_1\cdots i_r}\omega_j \wedge w_{i_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_n} - \\ & sgn(\sigma(I, I^c))a_{i_1\cdots j_\alpha\cdots i_r}\omega_{j_\alpha i_\alpha} \wedge \omega_{i_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_n} \\ & +b_{k_1\cdots j_\theta\cdots k_{n-r}}\omega_{j_\theta k_\theta} \wedge \omega_{i_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_n} \\ = {} & sgn(\sigma(I, I^c))a_{i_1\cdots i_\alpha\cdots i_r}\omega_{i_\alpha} \wedge w_{i_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_n} - \\ & sgn(\sigma(I, I^c))a_{i_1\cdots j_\alpha\cdots i_r}\omega_{j_\alpha i_\alpha} \wedge \omega_{i_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_n} \\ & +b_{k_1\cdots j_\theta\cdots k_{n-r}}\omega_{j_\theta k_\theta} \wedge \omega_{i_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_n}. \end{aligned}$$

Pela definição dos b_K, afirmamos que

$$b_{k_1\cdots i_\alpha\cdots k_{n-r}} = 0,$$

no caso que $j_\theta = i_\alpha$, para algum α; isto é claro desde que

$$\begin{aligned} b_{k_1\cdots i_\alpha\cdots k_{n-r}} &= sgn(\sigma(i_1\cdots k_\theta\cdots i_r; k_1\cdots i_\alpha\cdots k_{n-r}))a_{i_1\cdots k_\theta\cdots i_r} \\ &= -sgn(\sigma(i_1\cdots i_r; i_{n-r}\cdots i_n))a_{i_1\cdots j_\alpha\cdots i_r} \\ &= -b_{k_1\cdots j_\theta\cdots k_{n-r}}, \end{aligned}$$

logo

$$b_{k_1\cdots j_\theta\cdots k_{n-r}} = 0$$

finalmente concluímos que

$$d\beta = sgn(\sigma(I, I^c))a_{i_1\cdots i_\alpha\cdots i_r, i_\alpha}\omega_{i_\alpha}\wedge\omega_{i_{r+1}}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_n},$$

e daqui

$$\begin{aligned} *d\beta &= sgn(\sigma(I, I^c))sgn(\sigma(i_\alpha, i_{r+1},\cdots, i_n, i_1,\cdots\hat{i_\alpha},\cdots, i_r)) \\ &\quad\times a_{i_1\cdots i_\alpha\cdots i_r, i_\alpha}\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\hat{\omega_{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_r} \\ &= (-1)^{n-\alpha+r(n-r)}a_{i_1\cdots i_r}\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\hat{\omega_{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_r}; \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \delta\omega &= (-1)^{n(r+1)+1} * d\omega \\ &= \sum_{1\leq\alpha\leq r}(-1)^{n(r+1)+1+n-\alpha+r(n+r)}a_{i_1\cdots i_r, i_\alpha}\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\hat{\omega_{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_r} \\ &= \sum_{1\leq\alpha\leq r}(-1)^{\alpha+r^2+1}a_{i_1\cdots i_r, i_\alpha}\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\hat{\omega_{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_r}, \end{aligned}$$

agora, pela definição

$$\begin{aligned} -\Delta\omega &= \delta d\omega + d\delta\omega \\ &= \delta(a_{i_1\cdots i_r, j}\omega_j\wedge\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_r}) + d((-1)^{\alpha+r^2+1}a_{i_1\cdots i_r, i_\alpha}\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\hat{\omega_{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_r}) \\ &= (-1)^{\alpha+(r+1)^2+1}a_{i_1\cdots i_r, ji_\alpha}\omega_j\wedge\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\hat{\omega_{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_r} + \\ &\qquad (-1)^{\alpha+(r+1)^2+1}a_{i_1\cdots i_r, i_\alpha j}\omega_j\wedge\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\hat{\omega_{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_r} \\ &= (-1)^{\alpha+(r+1)^2+1}a_{i_1\cdots i_r, ji_\alpha}\omega_j\wedge\omega_{i_1}\wedge\cdots\hat{\omega_{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_r} + \\ &\qquad (-1)^{\alpha+r^2+1}a_{i_1\cdots i_r, jj}\omega_j\wedge\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\hat{\omega_{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_r} + \\ &\qquad (-1)^{\alpha+r^{2+1}}a_{i_1\cdots i_r, i_\alpha j}\omega_j\wedge\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\hat{\omega_{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_r} \\ &= (-1)^{(r+1)+(r+1)^2+1}a_{i_1\cdots i_r, ji_\alpha}\omega_j\wedge\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\hat{\omega_{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_r} + \\ &\qquad (-1)^{(r+1)+(r+1)^2+1}a_{i_1\cdots i_r, jj}\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_r} + \\ &\qquad (-1)^{\alpha+r^2+1}a_{i_1\cdots i_r, i_\alpha j}\omega_j\wedge\omega_1\wedge\cdots\wedge\hat{\omega_{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_r}. \end{aligned}$$

Por outro lado temos que

$$a_{i_1\cdots i_r,i_\alpha j} = a_{i_1\cdots i_r,ji_\alpha} + R_{k_\beta i_\beta i_\alpha j} a_{i_1\cdots k_\beta\cdots i_r}.$$

Observe-se que

$$(-1)^{\alpha+(r+1)^2+1} = (-1)^{\alpha+r^2+2r+2} = (-1)^{\alpha+r^2},$$

e assim

$$\begin{aligned}-\Delta\omega = &((-1)^{\alpha+(r+1)^2+1} a_{i_1\cdots i_r,ji_\alpha} + (-1)^{\alpha+r^2+1} a_{i_1\cdots i_r,ji_\alpha} + (-1)^{\alpha+r^2+1} R_{k_\beta i_\beta i_\alpha j}) \cdot \\ &\omega_j \wedge \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{\omega_{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_r} + \\ &(-1)^{(r+1)+(r+1)^2+1} a_{i_1\cdots i_r,jj} \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_r};\end{aligned}$$

com isto

$$\begin{aligned}\Delta\omega = &(-1)^{\alpha+r^2} R_{k_\beta i_\beta i_\alpha j} a_{i_1\cdots k_\beta\cdots i_r} \omega_j \wedge \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{\omega_{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_r} + \\ &(-1)^{(r+1)+(r+1)^2+2} a_{i_1\cdots i_r,jj} \omega_{i_q} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_r};\end{aligned}$$

mas

$$(-1)^{(r+1)+(r+1)^2} = (-1)^{r+1+r^2+2r+1} = (-1)^{r(r+1)} = 1,$$

e assim

$$\begin{aligned}\Delta\omega &= (-1)^{\alpha+r^2} R_{k_\beta i_\beta i_\alpha j} a_{i_1\cdots k_\beta\cdots i_r} \omega_j \wedge \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{\omega_{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_r} + \\ &\quad a_{i_1\cdots i_r,jj} \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_r} \\ &= -R_{k_\beta i_\beta i_\alpha j} a_{i_1\cdots k_\beta\cdots i_r} \omega_j \wedge \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{\omega_{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_r} + a_{I,jj}\omega_I.\end{aligned}$$

Seja

$$E(\omega) := R_{k_\beta i_\beta j_\alpha i_\alpha} a_{i_1\cdots k_\beta\cdots i_r} \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_\alpha} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_r},$$

e definimos o *Operador Laplaciano de Bochner* por

$$\nabla^*\nabla\omega := a_{I,jj}\omega_I.$$

Logo, podemos observar que

$$\Delta\omega = \nabla^*\nabla\omega - E(\omega).$$

Observações 4.1 *No caso que $\omega = f$, uma aplicação diferenciável, então*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} f_{ii}.$$

Neste caso $E(f) = 0$.

Observações 4.2 *Se $\omega = a_i\omega_i$ é uma 1-forma, então*

$$\begin{aligned}E(\omega) &= R_{kiji} a_k \omega_j \\ &= R_{jk} a_k \omega_j.\end{aligned}$$

4.3 Teorema de Decomposição de Hodge

Enunciaremos sem demonstração alguns teoremas importantes no desenvolvimento desta teoría

Definição 4.3 *Seja*

$$H^r = \{\omega \in \Lambda^r(M),\ \ \Delta\omega = 0\}.$$

Os elementos de H^r são chamados r-formas harmônicas (seguindo a definição dada por K. Kodaira). $\Diamond$

Definição 4.4 *Seja α uma r-forma exterior, então, ela é chamada* fechada *se $d\alpha = 0$; e se existe um $\eta \in \Lambda^{r-1}(M)$ tal que $d\eta = \alpha$, então α é chamada* exata. $\Diamond$

Definição 4.5 *Duas formas fechadas $\alpha, \beta \in \Lambda^r(M)$ são chamadas* cohomologas *se $\alpha - \beta$ é exata.* $\Diamond$

Esta última definição determina uma relação de equivalência sobre o espaço de formas fechadas em $\Lambda^r(M)$. Assim o conjunto formado pelas classe de equivalência é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, chamado o *p-ésimo grupo de cohomologia de Rham* e denotado por $H^r_{dR}(M, \mathbb{R})$ ou simplesmente $H^r(M)$.

Teorema 4.1 *Seja M uma variedade Riemanniana compacta. Então toda classe de cohomologia em $H^r(M)$ $(0 \leq p \leq n = \dim M)$ contém precissamente uma forma harmônica.*

Demonstração.
Ver([5]). $\blacksquare$

Com este teorema podemos observar que existe um isomorfismo entre nossos espaços H^r e $H^r(M)$.

Teorema 4.2 (Hodge, Descomposição) *Seja M uma variedade Riemanniana compacta. Para cada inteiro r com $0 \leq r \leq n$, H^r é finito dimensional, e temos a seguinte decomposição em soma direta do espaço $\Lambda^r(M)$ de r-formas diferenciáveis sobre M :*

$$\begin{aligned} \Lambda^r(M) &= \Delta(\Lambda^r(M)) \oplus H^r \\ &= d\delta(\Lambda^r(M)) \oplus \delta d(\Lambda^r(M)) \oplus H^r \\ &= d(\Lambda^{r-1}(M)) \oplus \delta(\Lambda^{r+1}(M)) \oplus H^r; \end{aligned}$$

além disso, a equação $\Delta\omega = \alpha$ possui uma solução $\omega \in \Lambda^r(M)$ se e somente se a r-forma α é ortogonal ao espaço de r-formas harmônicas.

Demonstração.
Ver ([4]). $\blacksquare$

4.4 Método de Bochner e Aplicações

Lembremos que

$$H^r_{dR}(M, \mathbb{R}) = \frac{Kerd}{Imd},$$

é a cohmologia de Rham, assim

$$\dim H^r_{dR}(M, \mathbb{R}) = b_r(M),$$

é chamado o *p-número de Betti.*

Lema 4.5 (Bochner) *Seja* $\omega = \sum_I a_I \omega_I$ *uma r-forma sobre* M*, então*

$$\Delta|\omega|^2 = 2 < \Delta\omega, \omega > +2|\nabla\omega|^2 + 2 < E(\omega), \omega > . \tag{4.1}$$

Demonstração.
Temos que a norma de ω é da forma

$$|\omega|^2 = \sum_I a_I^2.$$

Escolha um referencial ortonormal dual em um entorno de $p \in M$ por translação paralela de um referencial ortonormal $\{e_1, \cdots e_n\}$ no ponto p. Daqui, neste ponto temos que $\omega_{ij} = 0$, pois

$$0 = \nabla e_i = \omega_{ij} \otimes e_j,$$

então

$$0 = \omega_{ij} \otimes e_j,$$

avaliando sobre $(v, \omega_k) \in T_p(M) \otimes T_p^*(M)$, temos

$$\begin{aligned} &= \omega_{ij}(v) \otimes e_j(\omega_k), \\ &= \omega_{ij}(v), \quad \forall i, j \in \{1, \cdots, n\}. \end{aligned}$$

Aliás, $\nabla_{e_i} e_j = 0$ ao longo da geodésica tangente a e_i, o q implica que

$$\nabla_{e_i}(\nabla_{e_i} e_j) = 0,$$

no ponto p.

Calculando

$$\begin{aligned} \Delta|\omega|^2 &= (a_I^2)_{jj} \\ &= 2a_I(a_I)_{jj} + 2((a_I)_j)^2. \end{aligned}$$

Observe que em geral $(a_I)_j \neq a_{I,j}$ e $(a_I)_{jj} \neq a_{I,jj}$, onde os termos da direita denotam a diferenciação da aplicação a_I e os termos do lado esquerdo denotam a diferenciação covariante de r-formas, mas, pela escolha de nosso referencial local temos

$$\begin{aligned}(a_I)_j &= da_I(e_j)\\ &= a_{I,j} - a_{i_1\cdots j_\alpha \cdots i_r}\omega_{j_\alpha i_\alpha}(e_j)\\ &= a_{I,j},\end{aligned}$$

no ponto p.

Analogamente

$$\begin{aligned}a_{I,jj} &= da_{i_1\cdots i_r,j}(e_j)\\ &= d[da_I(e_j) + a_{i_1\cdots j_\alpha \cdots i_r}\omega_{j_\alpha i_\alpha}(e_j)](e_j)\\ &= (a_I)_{jj} + a_{i_1\cdots j_\alpha \cdots i_r}.e_j(\omega_{j_\alpha i_\alpha}(e_j));\end{aligned}$$

por outro lado

$$\begin{aligned}e_j(\omega_{j_\alpha i_\alpha}) &= e_j < \nabla_{e_j}e_{j_\alpha}, e_{i_\alpha} >\\ &= < \nabla_{e_j}\nabla_{e_j}e_{j_\alpha}, e_{i_\alpha} > + < \nabla_{e_j}e_{j_\alpha}, \nabla_{e_j}e_{i_\alpha} >\\ &= 0.\end{aligned}$$

no ponto p, e daqui

$$\begin{aligned}< \nabla^*\nabla\omega, \omega > &= < a_{I,jj}\omega_I, a_I\omega_I >\\ &= a_I(a_I)_{jj},\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}|\nabla\omega|^2 &= |\nabla(a_I\omega_I)|^2\\ &= |(a_I)_{,j}\omega_j \wedge \omega_I|^2\\ &= (a_I)^2_{,j},\end{aligned}$$

finalmente

$$\begin{aligned}\Delta|\omega|^2 &= 2a_I(a_I)_{jj} + 2((a_I)_j)^2\\ &= 2 < \nabla^*\nabla\omega, \omega > +2|\nabla\omega|^2\\ &= 2 < \Delta\omega, \omega > +2|\nabla\omega|^2 + 2 < E(\omega), \omega >,\end{aligned}$$

no ponto $p \in M$.

Observe que os dois lados da igualdade independem do ponto p, assim, esta igualdade é globalmente definida em todo M. ■

Teorema 4.3 *Seja M uma variedade Riemanniana compacta n-dimensional sem bordo. Suponhamos que $R_{ji} \geq 0$, entao, qualquer 1-forma harmônica ω é paralela (i.e $\nabla\omega = 0$) e $R(\omega, \omega) = 0$.*

Em particular, isto implica que o primeiro número de Betti, $b_1(M)$, é ao mais n. Além disso, se existe um ponto $p \in M$ tal que a curvatura de Ricci é positiva, então $b_1(M) = 0$.

Demonstração.
Sejaω uma 1-forma harmônica, então pela fórmula de Bochner temos

$$\begin{aligned}\Delta|\omega|^2 &= 2 < \Delta\omega, \omega > +2|\Delta\omega|^2 + 2 < E(\omega), \omega > \\ &= 2|\Delta\omega|^2 + 2 < R_{jk}a_j\omega_k, a_i\omega_i > \\ &= 2|\Delta\omega|^2 + 2R_{ji}a_ja_i.\end{aligned}$$

Podemos definir

$$\begin{aligned}R(\omega, \omega) &= R_{ji}a_ja_i \\ &= < R(e_j, e_k)e_k, e_i > a_ja_i \\ &= < R(a_je_j, e_k)e_k, a_ie_i > \\ &= Ric(a_je_j, a_ie_i) \\ &= Ric(a_ie_i, a_ie_i);\end{aligned}$$

assim

$$\Delta|\omega|^2 = 2|\nabla\omega|^2 + 2R(\omega, \omega),$$

logo $\Delta|\omega|^2 \geq 0$, assim a aplicação $|\omega|^2$ é sub-harmônica, assim dado que M é compacto implica pelo principio do Máximo, que $|\omega|^2$ é constante.

Assim

$$0 = 2|\nabla\omega|^2 + 2R(\omega, \omega),$$

daqui

$$|\Delta\omega|^2 = 0 \qquad R(\omega, \omega) = 0.$$

Com isto, $|\nabla\omega|^2 = 0$, assim ω é paralela, e desde que a dimensão de 1-formas paralelas é ao mais n, segue-se que a dimensão de 1-formas harmônicas é também ao mais n, e desde que os espaços H^r e $H^r_{dR}(M)$ são isomorfos, obtemos o resultado.

No caso que $R(p) > 0$ para algum ponto $p \in M$, então, desde que $R(\omega, \omega) = 0$ obtemos $\omega(p) = 0$ e daqui $b_1(M) = 0$. ■

Definição 4.6 *O operador curvatura de uma variedade Riemanniana M é a aplicação linear*

$$\mathcal{S} : \Lambda^2(M) \longrightarrow \Lambda^2(M),$$

dada por

$$\mathcal{S}(\omega_i \wedge \omega_j) = R_{jikl}\omega_l \wedge \omega_k.$$

$\Diamond$

Teorema 4.4 *Seja M uma variedade Riemanniana compacta. Se o operador curvatura é não negativo sobre M, então qualquer r-forma harmônica é paralela. Daqui, o r-ésimo número de Betti é ao mais $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$. Além disso, se existe um ponto $p \in M$ tal que $\mathcal{S}(p) > 0$, então $b_r(M) = 0$.*

Demonstração.
Dada a identidade

$$\Delta|\omega|^2 = 2|\nabla\omega|^2 + < E(\omega), \omega >,$$

onde

$$< E(\omega), \omega >= R_{k_\beta i_\beta j_\alpha i_\alpha} a_{i_1 \cdots k_\beta \cdots i_r} a_{i_1 \cdots j_\alpha \cdots i_r},$$

podemos definir a 2-forma

$$\bar{\omega} = a_{i_1 \cdots j_\alpha \cdots i_r} \omega_{j_\alpha} \wedge \omega_{i_\alpha},$$

então

$$\mathcal{S}(\bar{\omega}) = R_{i_\alpha j_\alpha kl} a_{i_1 \cdots j_\alpha \cdots i_r} \omega_l \wedge \omega_k.$$

Daqui

$$\begin{aligned} < \mathcal{S}(\bar{\omega}), \bar{\omega} > &= < R_{i_\alpha j_\alpha kl} a_{i_1 \cdots j_\alpha \cdots i_r} \omega_j \wedge \omega_k, a_{i_1 \cdots j_\beta \cdots i_r} \omega_{j_\beta} \wedge \omega_{i_\beta} > \\ &= R_{i_\alpha j_\alpha kl} a_{i_1 \cdots j_\alpha \cdots i_r} . a_{i_1 \cdots j_\beta \cdots i_r} \\ &= < E(\omega), \omega >, \end{aligned}$$

e assim, seguindo o mesmo procedimento do teorema anterior concluímos a demonstração. $\blacksquare$

Definição 4.7 *Um campo vetorial $X = a_i e_i$ é chamado um campo vetorial de* Killing *se*

$$a_{i,j} + a_{j,i} = 0,$$

para todo $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$. $\Diamond$

Lema 4.6 *O gerador infinitesimal de uma familia 1-paramétrica de isometrias de M é um campo vetorial de Killing sobre M.*

Demonstração.
Seja $\varphi_t : M \longrightarrow M$ uma familia 1-paramétrica de isometrias, parametrizadas por $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Se $\{e_1, \cdots, e_n\}$ é um referencial local ortonormal no ponto $p \in M$

dada pelas coordenadas normais centradas em p.Então, pelo fato das funções φ_t ser isometrias, obtemos

$$\begin{aligned} < d\varphi_t(e_i), d\varphi_t(e_j) > &= < e_i, e_j > \\ &= \delta^{ij}, \end{aligned}$$

diferenciando e avaliando no ponto $t = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} < d\varphi_t(e_i), d\varphi_t(e_j) > |_{t=0} \\ &= < \nabla_T d\varphi_t(e_i), d\varphi_t(e_j) > + < \nabla_T d\varphi_t(e_j), d\varphi_t(e_i) >, \end{aligned}$$

onde $T = d\varphi_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ é o campo vetorial infinitesimal dada por φ_t.

Podemos ver os vetores $\frac{\partial}{\partial t}, e_1, \cdots, e_n$ como vetores tangentes dadas por coordenadas desde $(-\varepsilon, \varepsilon) \times M$, neste caso temos a propriedade que

$$[T, d\varphi_t(e_1] = 0,\ 1 \leq i \leq n,$$

então, podemos escrever a igualdade anterior como

$$0 =< \nabla_{e_i} T, e_j > + < \nabla_{e_j} T, e_i >,$$

no ponto $t = 0$, assim se $T = a_i e_i$, então

$$\begin{aligned} \nabla T &= a_i \nabla e_i \\ &= a_i \omega_{ii} \otimes e_j, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \nabla_{e_i} T &= \nabla T(e_i) \\ &= a_i \omega_{ii}(e_i) \cdot e_j \\ &= a_{i,j} e_j \end{aligned}$$

finalmente

$$< \nabla_{e_i}, e_j >= a_{i,j},$$

analogamente

$$< \nabla_{e_j} T, e_i >= a_{j,i},$$

concluindo assim a demonstração. ■

Teorema 4.5 *Seja M uma variedade Riemanniana compacta com curvatura de Ricci não positiva. Então, qualquer campo de Killing sobre M é paralelo. Além disso, se existe um ponto $p \in M$ tal que a curvatura de Ricci satisfaz $R(p) < 0$, então não existem campos vetoriais de Killing não triviais.*

Em particular , isto implica que M não possui uma familia de isometrias 1-paramétricas.

Demonstração.
Seja $X = a_i e_i$ um campo de Killing, a sua forma dual é dada por $\omega = a_i \omega_i$. Logo

$$\begin{aligned}\Delta|\omega|^2 &= 2a_{i,j}^2 + 2a_{i,jj} \cdot a_i \\ &= 2|\nabla\omega|^2 - 2a_{j,ij} \cdot a_i \\ &= 2|\nabla\omega|^2 - 2R(p,p),\end{aligned}$$

assim, aplicamos o mesmo método do teorema anterior para concluir a demonstração. ∎

Referências Bibliográficas

[1] S. S. Chern, W. H. Chen ,K. S. Lam , *Lectures on Differential Geometry*, World Scientific, 1999.

[2] Peter Li, *Lecture Notes on Geometric Analysis*, University of California, 1996.

[3] Samuel L. Goldberg, *Curvature and Homology*, Dover Publications, Inc, New York, 1962.

[4] Frank W. Warner, *Fundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, 1983.

[5] Jürgen Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Universitext, Springer Verlag, Third Edition , 2000.