KELLY CADENA MADRID

A TEORIA DE PERRON-FROBENIUS E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada por **Kelly Cadena Madrid** ao Curso de Mestrado em Matemática da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre. Linha de Pesquisa: Álgebra.

Orientador: Miriam Abdón

Niterói
2009

KELLY CADENA MADRID

A TEORIA DE PERRON-FROBENIUS E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada por **KELLY CADENA MADRID** ao Curso de Mestrado em Matemática da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre. Linha de Pesquisa: Álgebra.

Aprovada em: 13/02/2009

Banca Examinadora

Prof. Miriam Abdón - Orientador
Doutor - Universidade Federal Fluminense

Prof. Luciane Quoos Conte - Membro
Doutor - Universidade Federal de Rio de Janeiro

Prof. Juscelino Bezerra dos Santos - Membro
Doutor - Universidade Estadual de Rio de Janeiro

Prof. Juliana Coelho Chaves - Membro
Doutor - Universidade Federal Fluminense

DEDICATÓRIAS

A Edelcy E. Madrid P minha mãe.
(in memorian)

AGRADECIMENTOS

Agradeço á meus pais Sebastian Cadena, Edelcy Madrid. A meus irmaos Ketty, Maciel, Maira e Willy pela força,amor,apoio,comprensão em todo momento apesar da distancia.

Agradeço ao professor Dinamérico Pombo Jr. pela paciencia apoio e as muitas oportunidades durante o mestrado.

Agradeço à professora Miriam Abdón, pela orientação, apoio, colaboração e confianza.

Agradeço à CAPES pelo soporte financiero durante meus estudos.

Agradeço aos colegas e amigos, em especial, á Hector,Jaqueline,Maria Eugenia,Liz,Simone,Karina,Renata pelo apoio nos momentos dificies.

Agradeço aos meus professores do mestrado..

RESUMO

Nesta dissertação estudamos as propiedades das matrizes não-negativas e irredutíveis. Para tais matrizes provamos o teorema de Perron-Frobenius e mostramos algumas aplicações do teorema, como por exemplo ao Google e a dinâmica de populações. Também damos estimativas para o autovalor maximal e estudamos o espectro.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Nosso primeiro objetivo foi o de entender como funciona o Google. Isto nos levou a considerar matrizes não-negativas e matrizes irredutíveis. Estudamos suas propriedades como também a conexão existente entre estas matrizes e grafos dirigidos. Estes são os principais tópicos do Capítulo 2.

Como veremos na seção seguinte, o principal resultado por trás do Google é o Teorema de Perron-Frobenius e no Capítulo 3 se encontra o enunciado e a prova deste Teorema, assim como também sua aplicação ao Google.

Finalmente no Capítulo 4 são estudadas outras propriedades das matrizes irredutíveis. Em particular a forma de Frobenius para estas matrizes é introduzida. Também são mencionados outros problemas onde a Teoria de Perron-Frobenius é muito utilizada.

1.1 O Google

O Google foi criado em 1998 por **Sergei Brin** e **Lawrence Page**, dois estudantes de Doutorado em Informática da Universidade de Stanford.

O Google é uma página de busca na rede que hoje em dia é a mais utilizada no mundo inteiro para procurar qualquer tipo de informação, e recebe até 200 milhões de consultas diárias. O nome Google é uma variação sobre o termo googol, que refere-se ao número 10^{100}.

O Google utiliza uma enorme base de dados formadas pelas milhões de páginas web existentes na internet para procurar a informação pedida. O Google utiliza um algorítmo, chamado **PageRank** para ordenar os resultados das buscas para logo serem apresentadas.

Brin e Page tinham o objetivo de exibir, em um número relevante dos casos, uma lista onde ao menos as dez primeiras páginas contivessem informação útil para quem realiza a busca. Mais que isso, eles conseguiram fazer com que o Google corrigisse os termos da busca e fizesse sugestões de termos certos.

1.2 O Modelo

Devemos cadastrar todas as páginas web existentes, com seus conteúdos, links, etc.

Neste primeiro momento, vamos nos interessar só nas páginas as quais vamos atribuir uma etiqueta $P_1, \ldots, P_n$ e por seus enlaces. Assim a rede pode ser descrita usando um grafo dirigido em que cada página é um vértice do grafo e existe uma seta ligando P_i a P_j se desde a página P_i há um enlace para a página P_j. Como este grafo é muito grande vamos trabalhar com a transposta da sua matriz de adjacência A, que será uma matriz $n \times n$ cujas entradas são 0 ou 1, onde $a_{ij} = 1$ se, e somente se, existe um enlace desde a página P_j para a página P_i, e $a_{ij} = 0$ caso contrário. Mais detalhes sobre grafos e matrizes de adjacência podem ser encontrados na seção 2.3.

A matriz A é da forma

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{ccccc} P_1 & \cdots & P_j & \cdots & P_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \begin{array}{c} P_1 \rightarrow \\ \vdots \\ P_i \rightarrow \\ \vdots \\ P_n \rightarrow \end{array} & \left(\begin{array}{ccccc} & & & & \\ & & & & \\ & & a_{ij} & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array} \right) & \rightarrow \ \text{enlaces à página } P_i \\ & \downarrow & \\ & \text{enlaces desde la página } P_j & \end{array}$$

Vamos chamar A a matriz de Google.

Observação 1. A soma das entradas correspondentes à coluna j é exatamente o número de links que esta página contém.

Uma primeira idéia para ordenar as páginas sería a de postular que a "importância"de uma página está relacionada com o número de páginas que têm um enlace para ela, já que isto significaria que o conteúdo desta página seria recomendado por muitos participantes da rede.

Mas este modelo não traduz adequadamente a seguinte situação: que uma página P tenha poucas citações, mas esteja citada de páginas relevantes como por exemplo, desde www.amazon.com ou www.microsoft.com e se simplesmente nos dedicassemos a contar as páginas que citam P, nossa página tería asignada um peso baixo, mas isto não parece razoável.

Assim devemos melhorar nosso modelo de maneira de asignar um peso alto

- tanto páginas muito citadas
- quanto a páginas pouco citadas, mas desde sites importantes.

Nosso segunda tentativa consistirá em decidir que o peso x_j da página P_j será proporcional a soma das impor tâncias das páginas que possuem um enlace para P_j.

Usando matrizes, podemos traduzir isto da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

onde λ é a constante de proporcionalidade e A é a matriz dada acima.

Podemos reformular nosso problema da seguinte maneira: queremos achar λ um autovalor de A e $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ um autovetor associado a λ que tem todas as coordenadas não negativas ou seja $x \geq 0$.

Observe que se pretendemos que este método seja útil deveríamos pedir que o autovetor acima fosse único.

Capítulo 2

Noções Básicas

Ao longo deste trabalho estaremos usando alguns conceitos conhecidos pelo leitor, como os de autovalor e autovetor, que já apareceram nos cursos de Álgebra Linear. Já outros conceitos, como os de matriz positiva ou irredutível, são menos conhecidos, assim que para facilitar a leitura, faremos aqui uma breve revisão destes conceitos básicos.

2.1 Autovalores e Autovetores

Em toda esta seção vamos considerar A uma matriz $n \times n$ real.

Definição 1. Um número $\lambda \in \mathbb{R}$ é dito ser um *autovalor* de A se existe um vetor não-nulo $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $A\,v = \lambda\,v$, ou equivalentemente, se λ é uma raíz de $p(x)$, polinômio característico de A. Lembramos que o polinômio característico está dado por $p(x) = \det(xI - A)$

Se λ é um autovalor de A, então o conjunto a seguir é um subespaço vetorial não-nulo, chamado de auto-espaço associado a λ:

$$W_\lambda := \{v \in \mathbb{R}^n \,|\, A\,v = \lambda\,v\}.$$

Assim, associados a um autovalor de A temos definidos dois números inteiros: um deles a multiplicidade de λ como raíz do polinômio característico e o outro a dimensão do auto-espaço W_λ.

Definição 2. Dado λ um autovalor de A definimos a sua *multiplicidade algébrica* como sendo igual à multiplicidade de λ como raíz do polinômio característico. A *multiplicidade geométrica* estará dada pela dimensão do auto-espaço associado a λ.

Observação 2. A multiplicidade algébrica de um autovalor λ é sempre maior o igual à multiplicidade geométrica do mesmo. Já que se a multiplicidade geométrica for $m \leq n$, então existem $v_1, \ldots, v_m$ autovetores não-nulos,linearmente independentes associados a λ. Considerando $B = \{v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_{n_m}\}$ uma base de $\mathbb{R}^n$ temos que a matriz C é equivalente à matriz A, onde C está dada por

$$C = \begin{pmatrix} \lambda I_m & C_{1,2} \\ 0 & C_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Portanto A e C têm o mesmo polinômio característico. Note que o polinômio característico de C está dado por $p(x) = (x-\lambda)^m \cdot \det(xI_{n-m} - C_{2,2})$ e logo λ tem multiplicidade algébrica pelo menos m.

Proposição 1. Sejam λ um autovalor de A e $B(\lambda)$ a matriz $n \times n$ dada por:

$$B(\lambda) = \operatorname{adj}(\lambda I - A)$$

então as colunas não-nulas de B(λ) são autovetores de A associados a λ.

Demonstração. De fato, pelas propriedades da adjunta, temos que

$$\begin{aligned} (\lambda\, I - A)\, B(\lambda) &= (\lambda\, I - A) \operatorname{adj}(\lambda I - A) \\ &= \det(\lambda\, I - A)\, I_n \\ &= p(\lambda)\, I_n \\ &= 0, \end{aligned}$$

já que λ é uma raíz do polinômio caracterísitico p de A. Logo temos que cada coluna não nula é um autovetor não-nulo associado a λ. □

Esta proposição será de grande utilidade nos próximos capítulos.

2.2 Matrizes Não-Negativas e Matrizes Irredutíveis

Definição 3. Uma matriz $n \times n$ real A é dita *não-negativa* se $a_{ij} \geq 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$, neste caso denotaremos por $A \geq 0$. Se $a_{ij} > 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$, diremos que A é *positiva* e denotaremos por $A > 0$.

Observação 3. Se $A \geq 0$, então $A^p \geq 0$ para qualquer $p \geq 0$. Podemos também esperar que, se A tem uma alta densidade de elementos não-nulos, então para um p suficientemente grande, deveríamos obter $A^p > 0$.

Exemplos de matrizes não-negativas, que vamos utlilizar nos próximos capítulos, são as *matrizes de permutação.* Dada uma pernutação $\sigma \in S_n$, a matriz associada a σ será a matriz P dada por

$$P_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } \sigma(i) = j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Outro tipo especial de matrizes que vamos a considerar são as chamadas "matrizes irredutíveis". Vamos definir o conceito de matriz redutível:

Definição 4. Seja A uma matriz $n \times n$, com $n \geq 2$. A é dita *redutível* se existe uma matriz de permutação P tal que

$$P^t A P = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22}, \end{bmatrix}$$

onde A_{11}, A_{22} são matrizes quadradas de ordem menor que n. Se não existe uma tal matriz de permutação P, então diremos que A é *irredutível.*

Exemplo. Toda matriz positiva é irredutível.

Exemplo. Toda matriz não-negativa 3×3 que tem só uma entrada nula, é irredutível.

O exemplo anterior pode ser generalizado da seguinte maneira:

Exemplo. Toda matriz não-negativa $n \times n$ com $n \geq 2$ que tenha no máximo $n-2$ entradas nulas, é irredutível.

Matrizes não-negativas e irredutíveis têm muitas propriedades especiais, como por exemplo:

Proposição 2. Se A é uma matriz $n \times n$, não-negativa e irredutível, e seja $x = (x_1, \ldots, x_n) \geq 0$ tal que $Ax = 0$, então $x = 0$.

Demonstração. Suponha que $x_k > 0$ para algum k, então:

$$\begin{aligned} 0 &= (Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \\ &\geq a_{i,k} x_k, \end{aligned}$$

o que mostra que $x_k \leq 0$, uma contradição. $\square$

Outra propriedade especial das matrizes não-negativas e irredutíveis é a seguinte:

Lema 1. Seja A uma matriz $n \times n$ não-negativa e irredutível, então $(I + A)^{n-1} > 0$.

Demonstração. Seja $y \in \mathbb{R}^n$ não-nulo e $y \geq 0$, consideremos

$$z = (I + A)\, y = y + Ay \tag{$\dagger$}$$

note que $z \geq 0$ pois $A \geq 0$ e $y \geq 0$ e, além disso, z tem pelo menos tantas coordenadas não-nulas quanto y. Se y não for positivo, provaremos que z tem, pelo menos, uma coordenada não-nula a mais do que y.

Suponhamos que z tem tantas coordenadas não-nulas quanto y, sem perda de generalidade podemos supor que:

$$y = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad z = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{onde } u, v > 0$$

já que a propriedade de uma matriz ser positiva é invariante por permutações. Observe que tanto u quanto v são vetores de $\mathbb{R}^m$ (sem coordenadas nulas), onde $m \geq 1$ é o número de coordendas não-nulas de y e 0 é o vetor nulo de $\mathbb{R}^{n-m}$.

Podemos pensar a matriz A formada por blocos da seguinte forma:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

onde as matrizes A_{11}, A_{12}, A_{21} e A_{22} têm ordens $m \times m$, $m \times (n - m)$, $(n - m) \times m$ e $(n - m) \times (n - m)$ respectivamente. Pela definição de z em ($\dagger$), temos que:

$$
\begin{aligned}
z = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11}\, u + 0 \\ A_{21}\, u + 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_{11}\, u + u \\ A_{21}\, u \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

logo $A_{21}\, u = 0$. Mas como $u > 0$ e $A_{21} \geq 0$, então $A_{21} = 0$. Isto é uma contradição já que A é irredutível.

Assim, z tem pelo menos uma coordenada não-nula a mais do que y. Se z não for positivo, aplicando o mesmo argumento para z temos que $z_2 = (I + A)z = (I + A)^2 y$ tem pelo menos uma coordenada não-nula a mais do que z e pelo menos 2 coordenadas não-nulas a mais do que y.

Repetindo este argumento no máximo $n - 1$ vezes, teremos que para todo $y \geq 0$ não-nulo, $z = (I + A)^{n-1} y$ tem todas suas coordenadas positivas.

Em particular, para $j = 1, 2, ..., n$ tomando $y = e_j$ o j-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$, temos que:

$$
(I + A)^{n-1} e_j > 0 \quad \forall j = 1, 2, ..., n.
$$

Como $(I + A)^{n-1} e_j$ é a j-ésima coluna da matriz $(I + A)^{n-1}$, temos que $(I + A)^{n-1}$ tem todas suas colunas positivas e portanto $(I + A)^{n-1}$ é uma matriz positiva como queríamos mostrar.

□

Esta propriedade será uma peça chave na prova do Teorema de Perron-Frobenius.

Vários corolários podem ser deduzidos deste lema:

Corolário 1. Uma matriz A $n \times n$, não-negativa é irredutível se, e somente se $(I_n + A)^{n-1} > 0$.

Corolário 2. Se A é uma matriz $n \times n$ não-negativa e irredutível, então todo autovetor não-negativo de A deve ser positivo.

Corolário 3. Uma matriz A $n \times n$ não-negativa é irredutível se, e somente se, para cada (i, j) existe um inteiro k tal que a entrada (i, j) da matriz A^k seja positiva.

Tanto o corolário 1, quanto o corolário 3, nos proporcionam um critério para decidir quando uma matriz não-negativa é irredutível.

2.3 Matrizes e Grafos

Muitas das propriedades das matrizes não-negativas que serão estudadas neste trabalho dependem da distribuição das entradas nulas e por isso, às vezes, é mais conveniente substituir a matriz original por uma matriz em que substituimos as entradas não-nulas por 1, obtendo assim uma matriz que só tem como entradas 0 e 1 e que tem a mesma distribuição de zeros que a matriz A. Diremos que esta é a matriz $(0, 1)$ obtida a partir de A.

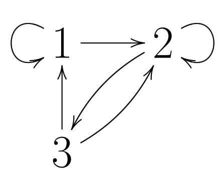
Vamos querer associar a uma matriz não-nula A, ou melhor a matriz $(0, 1)$ obtida a partir de A, um grafo e relacionar as propriedades de A com as propriedades do grafo construído a partir de A.

Precisamos definir grafo:

Definição 5. Seja V um conjunto não-vazio com n-elementos que denotaremos por $1, 2, \ldots, n$ e seja S uma relação binária em V. O par $D = (V, S)$ é chamado um *grafo dirigido*. Os elementos de V serão chamados de *vértices* e os elementos de S serão chamados de *setas* de D. A seta $(i, j) \in S$ será dita ligando o vértice i ao vértice j.

Será conveniente representar o grafo $D = (V, S)$ por um diagrama no qual os elementos de V serão pontos e os elementos de S serão setas ligando os pontos apropriados de V.

Exemplo. Considere $V = \{1, 2, 3\}$ e $S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$. O grafo $D = (V, S)$ pode ser representado pelo seguinte diagrama:



Definição 6. A *matriz de adjacência* $A(D)$ associada a um grafo D com n vértices, é uma matriz $(0,1)$ de ordem $n \times n$ cuja entrada (i,j) é igual a 1 se, e somente se, (i,j) é uma seta de D.

Exemplo. A matriz de adjacência do exemplo anterior será

$$A(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Observação 4. Analogamente, dada uma matriz $(0,1)$ A, podemos associar-lhe um grafo dirigido D tal que a matriz de adjacência de D seja a matriz A. Para isto basta colocar uma seta ligando o vértice i ao vértice j toda vez que $a_{i,j} = 1$.

Definição 7. Um grafo D será dito *fortemente conexo* se para todo par ordenado de vértices distintos i e j existe um caminho em D ligando i a j.

Exemplo. O exemplo anterior é um grafo fortemente conexo. Se "apagássemos"a seta ligando 3 a 2 ainda sería fortemente conexo, mas se "apagássemos"a seta ligando 2 a 3 já não sería fortemente conexo, por exemplo para o par ordenado $(1,3)$ não existe nenhum caminho ligando o 1 ao 3.

O nosso objetivo é relacionar o fato de que uma matriz não-negativa seja irredutível com o fato de que seu grafo dirigido associado seja fortemente conexo.

Vamos usar as seguinte notação: se $A = (a_{i,j})$ é uma matriz quadrada, então $a_{i,j}^{(k)}$ denotará a entrada (i,j) da matriz A^k.

Teorema 1. Se $A = (a_{i,j})$ é uma matriz $(0,1)$ e $D(A)$ é o grafo dirigido associado a A com vértices $1, 2, \ldots, n$, então o número de caminhos distintos de comprimento k ligando i a j é igual a $a_{i,j}^{(k)}$.

Demonstração. Por um lado temos que

$$a_{i,j}^{(k)} = \sum_{t_1, t_2, \ldots, t_k} a_{i,t_1} a_{t_1,t_2} \cdots a_{t_{k-1},t_k} a_{t_k,t_j}$$

onde $t_1, \ldots, t_k$ percorrem independentemente, os números de 1 a n.

Por outro lado, o caminho $(i, t_1), (t_1, t_2), \ldots, (t_{k-1}, t_k), (t_k, j)$ liga i a j em $D(A)$ se, e somente se, $a_{i,t_1} = a_{t_1,t_2} = \cdots = a_{t_{k-1},t_k} = a_{t_k,t_j} = 1$, isto é, se, e somente se,

$$a_{i,t_1} \cdot a_{t_1,t_2} \cdots a_{t_{k-1},t_k} \cdot a_{t_k,t_j} = 1,$$

donde o resultado segue de forma imediata. □

Corolário 4. Se $A = (a_{i,j})$ é uma matriz não-negativa, então o grafo dirigido associado a A tem caminhos de comprimento k ligando o vértice i ao vértice j se, e somente se, $a_{i,j}^{(k)} > 0$.

Este corolário tem uma conseqüência importante:

Teorema 2. Uma matriz não-negativa é irredutível se, e somente se, seu grafo dirigido associado é fortemente conexo.

Demonstração. Temos pelo Corolário 3 que uma matriz não-negativa $A = (a_{i,j})$ é irredutível se, e somente se, para cada i, j existe um k tal que $a_{i,j}^{(k)} > 0$. Pelo corolário 4 temos que esta condição será satisfeita se, e somente se, o grafo dirigido $D(A)$ tem um caminho ligando o vértice i ao vértice j. Portanto A será irredutível se, e somente se, para cada i e j existe um caminho em $D(A)$ ligando i a j, ou seja: se, e somente se $D(A)$ é fortemente conexo. □

Outros invariantes associados às matrizes não-negativas, como o índice de imprimitividade definido no capítulo 4, também podem ser calculados através do grafo dirigido associado.

Capítulo 3

O Teorema de Perron-Frobenius e o Google

3.1 O Teorema

O teorema de Perron-Frobenius foi mostrado por Perron em 1907 para matrizes positivas (ver [Per]) e estendido para matrizes não-negativas e irredutíveis por Frobenius em 1908-1909 (ver [Fr1] e [Fr2]). A prova que daremos aqui segue o método desenvolvido por Weilandt em [Wie].

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz irredutível e não-negativa e seja $\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x \geq 0, x \neq 0\}$. Considere a função: $r_A : \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ dada por

$$r_A(x) = \min_{\substack{1\leq i\leq n \\ x_i\neq 0}} \frac{(Ax)_i}{x_i},$$

onde $(Ax)_i$ é a i-ésima coordenada do vetor Ax.

Definição 8. Esta função é chamada da *função de Collatz - Wielandt* associada à matriz A e foi introduzida em [Col] e [Wie].

Para todo $x \in \mathbb{P}$, esta função tem as seguintes propriedades:

- $r_A(x) \geq 0$.
- Para $j = 1, 2, \ldots, n$, temos que $r_A(x)\, x_j \leq (Ax)_j$. Mais ainda, temos que a igualdade é verificada para algum j.

- $x\, r_A(x) \leq Ax$.

O teorema a seguir, estabelece mais propriedades da função r_A:

Teorema 3. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz irredutível e não-negativa e seja r_A a função de Collatz - Wielandt associada à matriz A. Então:

(i) A função r_A é homogênea de grau 0.

(ii) Se x é não-negativo, não-nulo, e ρ é o maior número real tal que $Ax - \rho\, x \geq 0$, então $r_A(x) = \rho$

(iii) Seja $x \in \mathbb{P}$ e $y = (I + A)^{n-1}\, x$, então $r_A(y) \geq r_A(x)$.

Demonstração. (i) Para $x \in \mathbb{P} \setminus \{0\}$ e $t > 0$, temos que

$$\begin{aligned} r_A(tx) &= \min_{tx_i \neq 0} \frac{(Atx)_i}{(tx)_i} \\ &= \min_{x_i \neq 0} \frac{t(Ax)_i}{tx_i} \\ &= \min_{x_i \neq 0} \frac{(Ax)_i}{(x)_i} \\ &= r_A(x). \end{aligned}$$

(ii) A definição de r_A implica que:

$$Ax - r_A(x)\, x \geq 0,$$

e que existe um $1 \leq k \leq n$ tal que $x_k \neq 0$ e $(A\, x - r_A(x)\, x)_k = 0$. Se $c > r_A(x)$, então a k-ésima coordenada de $A\, x - c\, x$ é negativa, logo $r_A(x) = \max\{\rho \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $A\, x - \rho\, x \geq 0\}$, como queríamos.

(iii) Como $A\, x - r_A(x)\, x \geq 0$, multiplicando nos dois lados por $(I + A)^{n-1}$ (que é uma matriz positiva pelo lema 1) temos que

$$(I + A)^{n-1} A\, x - (I + A)^{n-1}\, r_A(x)\, x \geq 0,$$

e como A e $I + A$ comutam, podemos reescrever a desigualdade anterior da seguinte maneira:

$$0 \leq A\, (I + A)^{n-1}\, x - r_A(x)(I + A)^{n-1}\, x = A\, y - r_A(x) y,$$

assim, pelo item anterior, temos que $r_A(y) \geq r_A(x)$.

$\square$

Exemplo. Vamos mostrar que se A é uma matriz $n \times n$, não-negativa e irredutível, então a função r_A está limitada.

Obviamente r_A está limitada inferiormente já que $r_A(x) \geq 0$ para todo x no domínio de r_A.

Vamos mostrar que r_A está limitada superiormente pela maior soma das colunas de A. Para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, definimos

$$c_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \quad \text{a soma dos elementos da } j\text{-ésima coluna de } A.$$

Como r_A é homogênea de grau 0, é suficiente mostrar que

$$r_A(x) \leq \max_j c_j \qquad \text{para } x \in \mathbb{E} = \{x \in \mathbb{P} \text{ tal que } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

Temos que $(A\,x)_i \geq r_A(x)\,x_i$ ou seja,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq r_A(x)\,x_i, \quad \forall i = 1, \ldots, n,$$

somando sobre i temos que:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq \sum_{i=1}^{n} r_A(x)\,x_i = r_A(x), \quad \text{já que } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

O lado esquerdo pode ser escrito como:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} x_j\, c_j \leq \max_j c_j,$$

logo $r_A(x) \leq \max_j\, c_j$.

Vamos definir $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ como

$$r = \sup_{x \in \mathbb{P}} r_A(x) = \sup_{x \in \mathbb{E}} r_A(x), \tag{3.1}$$

já que todo vector $x \in \mathbb{P}$ pode ser pensado como $x = t \cdot \tilde{x}$ onde $\tilde{x} = \frac{1}{\sum x_i} \cdot x \in \mathbb{E}$ e $r_A(x) = r_A(\tilde{x})$.

Por outro lado, se a função r_A fosse contínua, como $\mathbb{E}$ é um compacto, r_A atingiria o máximo em algum elemento de $\mathbb{E}$ e podriamos trocar o supremo pelo máximo:

$$r = \sup_{x \in \mathbb{E}} r_A(x) = \max_{x \in \mathbb{E}} r_A(x),$$

Obviamente r_A é continua para todo $x \in E$ com $x > 0$, mas r_A pode ser não contínua em um x de $\mathbb{E}$ se x tem alguma coordenada nula. De fato considere o seguinte exemplo

Exemplo. Considere a matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

e considere $x_\epsilon = (1, 0, \epsilon)/(1 + \epsilon) \in \mathbb{E}$ onde $\epsilon > 0$. Então

$$A\, x_\epsilon = (2 + \epsilon, 1 + \epsilon, \epsilon)/(1 + \epsilon) \quad \text{ e } r_A(x_\epsilon) = 1.$$

Por outro lado, temos que

$$r_A(x_0) = 2 \neq 1 = \lim_{\epsilon \to 0} r_A(x_\epsilon).$$

Teorema 4. Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ uma matriz irredutível e não-negativa, então a função r_A atinge seu máximo em $\mathbb{E}$.

Demonstração. Seja G dado por $G = (I + A)^{n-1}\mathbb{E}$, ou seja

$$G = (I + A)^{n-1}\mathbb{E} = \{y \,|\, y = (I + A)^{n-1}\, x \text{ onde } x \in \mathbb{E}\},$$

G é compacto e os elementos de G são positivos, como r é contínua em G, existe $y_0 \in G$ tal que $r_A(y_0) \geq r_A(z)$ para todo $z \in G$. Seja $x_0 = y_0 / \sum_{i=1}^{n} (y_0)_i \in E$, temos que $r_A(x_0) = r_A(y_0)$, pelo teorema 3(i). Se $y = (I + A)^{n-1}\, x$, temos que

$$\begin{aligned} r_A(x) &\leq r_A(y) && \text{pelo Teorema 3} \\ &\leq r_A(y_0) && \text{pela definição de } y_0 \\ &= r_A(x_0), \end{aligned}$$

logo $r_A(x) \leq r_A(x_0)$ para todo $x \in \mathbb{E}$ e o máximo é atingido em x_0.

$\square$

Definição 9. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz irredutível e não-negativa, um vetor $z \in \mathbb{P}$ é dito ser um *vetor maximal* de A se $r\,z \leq A\,z$. Um vetor $z \in \mathbb{P}$ é *maximal* se, e somente se, $r_A(z) = r$.

Lema 2. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz irredutível e não-negativa, então o número r definido em (3.1) é positivo e é um autovalor de A. Além disso todo vetor extremal de A é positivo e é um autovetor de A associado ao autovalor r.

Demonstração. Seja $u = (1, 1, ..., 1)$, então temos que

$$r_A(u) = \min_{\substack{1\leq i\leq n\\ u_i\neq 0}} \frac{(Au)_i}{u_i} = \min_{1\leq i\leq n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} > 0.$$

Pois se qualquer linha de A fosse nula, então A sería redutível. Como $r \geq r_A(u)$, então $r > 0$. Seja z um vetor extremal e seja $x = (I + A)^{n-1}\,z$. Sem perda de generalidade podemos supor que $z \in \mathbb{E}$, então pelo Lema 1 temos que $x > 0$ e $x \in G$. Também temos que $A\,z - r\,z \geq 0$, pois z é extremal.

Suponhamos que $A\,z - r\,z \neq 0$, então

$$(I + A)^{n-1}(A\,z - r\,z) = A\,x - r\,x > 0,$$

como $A\,x > r\,x$, então temos que $r < r_A(x)$, o que contradiz a definição de r.

Assim temos que $A\,z - r\,z = 0$, e logo r é um autovalor de A, z é um autovetor associado a r.

Finalmente, como $Az = rz$, temos que

$$x = (I + A)^{n-1}z = (1 + r)^{n-1}z$$

e como $x > 0$, $r > 0$, obtemos que $z > 0$ □

Agora já podemos enunciar o Teorema de Perron-Frobenius, o principal resultado deste Capítulo.

Notações: Para o Teorema de Perron- Frobenius temos:

- $|A|$ é a matriz cujos elementos (i, j) são os $|a_{i,j}|$, onde $A = (a_{i,j})$
- $|y| = (|y_1|, ..., |y_n|)$ onde $y = (y_1, ..., y_n)$

Teorema 5 (Perron-Frobenius). Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz irredutível e não-negativa, então:

(i) A tem um autovalor positivo r, igual ao raio espectral de A.

(ii) Existe um autovetor positivo associado a r

(iii) O autovalor r tem multiplicidade algébrica igual a um.

Demonstração. (i) Só resta mostrar que se λ é outro autovalor de A, então $|\lambda| \leq r$.

Sejam λ um autovalor de A e $y \neq 0$ um autovetor associado a λ, como A é não-negativa, temos que

$$|\lambda|\,|y| = |Ay| \leq A|y|,$$

logo $|\lambda| \leq r(|y|) \leq r$.

(ii) Seja $z \neq 0$ um autovetor associado a r, ou seja, $A\,z = r\,z$, temos

$$r\,|z| \leq A\,|z|,$$

isto implica que $|z|$ é um vetor maximal de A, logo pelo Lema 2 temos que $|z|$ não tem nenhuma coordenada nula, assim a dimensão do auto-espaço associado a r é um. Pois se tivéssemos dois autovetores x, y linearmente independentes associados a r, então teriamos que $\alpha x + \beta y$ também seria um autovetor associado a r para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e poderíamos determinar α e β tais que o vetor $\alpha x + \beta y$ tivesse uma coordenada nula, absurdo. Portanto a multiplicidade geométrica de r é um.

Para provarmos que a multiplicidade algébrica de r é um, devemos mostrar que r é uma raiz de $p_A(x)$ o polinômio característico de A, e não é raiz do polinômio obtido derivando p_A.

Considere a matriz $B(t) = adj(It - A)$. Temos que $B(r)$ é não-nula já que o posto de $Ir - A$ é $(n-1)$, temos pelo menos um menor de tamanho $n-1$ não-nulo. Por outo lado, pela proposição 1 temos que as colunas não-nulas de $B(r)$ são autovetores associados a r, logo cada coluna é não nula de $B(r)$ é um múltiplo do vetor $z > 0$, assim cada coluna não nula de $B(r)$ é positiva ou negativa. Se aplicarmos o mesmo argumento a matriz A^t temos que cada linha não nula de $B(r)$ é positiva ou negativa. Portanto cada elemento de $B(r)$ é não-nulo e todos têm o mesmo sinal.

Como $B(t)(It - A) = p_A(t)\, I$, temos que

$$B'(t)(It - A) + B(t)(It - A)' = B'(t)(It - A) + B(t) = p'_A(t)\, I$$

onde $'$ indica a derivada. Em $t = r$ e aplicando ao vetor z temos que

$$B(r)(z) = B'(r)(Ir - A)(z) + B(r)(z) = p'_A(r)\, z,$$

e logo como $B(r)$ e z são não-nulos e todos os elementos de $B(r)$ têm o mesmo sinal e o mesno acontece para todas as coordenadas de z, temos que $B(r)\, z \neq 0$, assim r é uma raiz simples do polinômio característico de A, $p_A(t)$, que é o que queríamos provar. $\square$

Exemplo. Considere a matriz A dada a seguir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Por um cálculo direto vemos que $r = 5$. Vamos comparar com os valores da função r nos vetores $(I + A)^2(x_i) = x_{i+1}$ onde $x_1 = (0, 1, 1)$, para $i = 1, 2$. Temos que

$$\begin{array}{lll} x_1 = (0,1,1), & A\,(x_1) = (5,2,4), & r_A(x_1) = \min\{2,4\} = 2 \\ x_2 = (31,11,33), & A\,(x_2) = (152,44,11), & r_A(x_2) = \min\{\frac{152}{31}, \frac{44}{11}, \frac{11}{33}\} = 4 \\ x_3 = (1091,315,1241), & A\,(x_3) = (5444,1556,6220), & r_A(x_3) = 4,93968\ldots \end{array}$$

Vemos que $r_A(x_i)$ converge de maneira muito rápida para o valor de r.

Uma versão mais fraca do Teorema 5 pode ser provada para matrizes não-negativas, não necessariamente irredutíveis:

Teorema 6. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz não-negativa, então A tem um autovalor r que é maior ou igual do que o módulo de qualquer autovalor de A e um autovetor positivo associado a r.

Demonstração. Seja $A_\epsilon = A + \epsilon B$, onde B é qualquer matriz positiva $n \times n$ e ϵ é um número real positivo. Temos que $A_\epsilon > 0$ é irredutível, então existe r_ϵ autovalor de A_ϵ tal que se λ_ϵ é um autovalor de A_ϵ, então

$$r_\epsilon \geq |\lambda_\epsilon|$$

Seja $z_\epsilon \in \mathbb{E}$ um autovetor associado a r_ϵ. Como tanto os autovalores quanto os autovetores dependem continuamente das entradas da matriz, temos que

$$r = \lim_{\epsilon \to 0} r_\epsilon \quad z = \lim_{\epsilon \to 0} z_\epsilon$$

temos que

$$r\, z = \lim_{\epsilon \to 0} r_\epsilon\, z_\epsilon = \lim_{\epsilon \to 0} A_\epsilon\, z_\epsilon = A\, z$$

Como os autovalores de A podem ser obtidos como $\lim_{\epsilon \to 0} \lambda_\epsilon = \lambda$ onde λ_ϵ é um autovalor de A_ϵ temos o que queríamos. □

3.2 Voltando ao Google

Para aplicar o Teorema de Perron-Frobenius à matriz de Google, esta deverá ser irredutível.

Outro problema é determinar o autovetor não negativo $x = (x_1, \ldots, x_n)$ formado pelas importâncias das páginas $P_1, \ldots, P_n$. O Teorema de Perro-Frobenius nos diz que o autovetor procurado está associado ao autovalor positivo de módulo máximo. Esta parte computacional não faz parte do nosso objetivo, mas vamos dar uma idéia rápida de como resolver este problema no caso mais simples:

Suponha que A seja diagonalizável e que A só tem um autovalor de módulo máximo (ou seja vamos supor que A é primitiva (ver seção 4.2)).

Seja $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base de autovetores, associados aos autovalores

$$\lambda_1 > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|.$$

Observe que v_1 é o autovetor procurado.

Começamos com um vetor $v_0 \geq 0$ qualquer, sabemos que podemos escrevê-lo como combinação linear dos vetores da base B, ou seja, existem $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$v_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$$

Como os vetores v_i são autovetores de A, temos que

$$A(v_0) = c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + c_n \lambda_n v_n$$

Aplicando A sucessivas vezes temos que

$$A^k(v_0) = c_1\lambda_1^k v_1 + c_2\lambda_2^k v_2 + \cdots + c_n\lambda_n^k v_n \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Se $c_1 \neq 0$, então temos que

$$\frac{A^k(v_0)}{\lambda_1^k} = c_1 v_1 + c_2\Big(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Big)^k v_2 + \cdots + c_n\Big(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\Big)^k v_n \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Como $|\lambda_i/\lambda_1| < 1$ para $i = 2, \ldots, n$ temos que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{A^k(v_0)}{\lambda_1^k} = c_1 v_1,$$

e podemos obter v_1 da igualdade acima.

Este método numérico é conhecido como método das potências e a sua velocidade de convergência depende do quociente λ_1/λ_2.

Como falamos no início desta seção, precisamos que a matriz de Google seja irredutível, ou equivalentemente, que o grafo da rede seja fortemente conexo,mas isto não acontece em geral. Por exemplo, páginas criadas recentemente não recebem enlaces de outras páginas e páginas coorporativas só recebem links internos. Como resolver este problema?

O Google resolve isto agregando uma série de probabilidades de transição (saída) a todos os vértices. Isto é considerando a matriz

$$A^{''} = cA' + (1-c)\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}(1, \ldots, 1)$$

onde $p_1, \ldots, p_n$ é uma distribuição de probabilidade, ou seja $p_j \geq 0$ e $\sum_{j=1}^n p_j = 1$ e c é um parâmetro entre 0 e 1. No caso do Google c é da ordem de $0,85$.

A matriz A' é a matriz obtida de A dividindo cada coluna não-nula pela soma dos elementos dessa coluna, ou seja

$$A' = \begin{pmatrix} & \frac{m_{1j}}{N_j} & \\ & \vdots & \\ & \frac{m_{ij}}{N_j} & \\ & \vdots & \\ & \frac{m_{nj}}{N_j} & \end{pmatrix}$$

onde $N_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}$, se $N_j \neq 0$. Se uma coluna é nula, substituiremos suas entradas por $1/n$.

Observe que a matriz $A' > 0$ e que a soma dos elementos de cada coluna é igual a 1. Matrizes com esta propriedade são chamadas de matrizes estocásticas ou de Markov.

Poderíamos escolher $p_j = 1/n$ para todo j e com isto a matriz A'' sería positiva e logo irredutível, ou poderíamos escolher outras distribuições de probabilidade e este grau de liberdade nos permitiria fazer buscas "personalizadas".

Capítulo 4

Mais sobre Matrizes Não-Negativas

Neste capítulo daremos estimativas para o maior autovalor positivo de uma matriz não-negativa, estudaremos o espectro e definiremos a forma de Frobenius para matrizes irredutíveis.

4.1 Estimativas para o autovalor máximo de uma matriz não-negativa

O problema de localizar o autovalor maximal de matrizes não-negativas é importante não só de um ponto de vista teórico, mas também na prática. Para que estas estimativas sejam úteis, tais cotas devem ser dadas por funções de fácil computação nas entradas da matriz. A melhor cota conhecida (e a mais utilizada) para o autovalor maximal de uma matriz não-negativa foi dada por Frobenius em [Fr2]:

Seja A uma matriz $n \times n$ e para cada $i, j = 1, \ldots, n$ sejam

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \quad \text{e} \quad c_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j},$$

temos que:

Teorema 7. Se A é não-negativa e r é seu autovalor maximal, então

$$\rho \leq r \leq R$$

onde $\rho = \min_i r_i$ e $R = \max_i r_i$. Se A é irredutível, então $\rho = r = R$ se, e somente se, as somas das linhas de A são todas iguais.

Demonstração. Vamos supor que A seja irredutível. Seja $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ um autovetor maximal. Então

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = r\, x_i \quad i = 1, \dots, n$$

Se $x_m \geq x_j$ para $j = 1, \dots, n$ temos que

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{x_m} \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} a_{mj} \\ &= r_m \\ &\leq R. \end{aligned}$$

Analogamente se $x_k \leq x_j$ para $j = 1, \dots, n$ temos que:

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{x_k} \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \\ &\geq \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \\ &= r_k \\ &\geq \rho. \end{aligned}$$

Se A for redutível, podemos aplicar o resultado mostrado para as matrizes positivas $A_\epsilon = A + \epsilon B$, onde B é uma matriz positiva, e usar um argumento de continuidade como foi feito no Teorema 6. $\square$

Outro resultado nesta direção é o seguinte:

Teorema 8. Se A é não-negativa, $r_1, r_2, \dots, r_n$ as somas das linhas de A, e A não tem uma linha nula, então

$$\min_i \left(\frac{1}{r_i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_j\right) \leq r \leq \max_i \left(\frac{1}{r_i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_j\right)$$

Demonstração. Podemos supor sem perda de generalidade que A é irredutível já que o caso geral segue-se deste caso usando um argumento de continuidade como fizemos na demostração do Teorema anterior.

Denotemos por $r_i(A^2)$ a soma dos elementos de i-ésima linha de A^2. Se $(x_1, \dots, x_n) > 0$ com $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ é um autovalor de A^t associado a r e portanto um autovalor de $(A^2)^t$ associado a r^2, temos que

$$r^2 = \sum_{i=1}^n x_i \, r_i(A^2) \quad r = \sum_{i=1}^n x_i \, r_i.$$

Daí segue-se que

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \, r_i(A^2)}{\sum_{i=1}^n x_i \, r_i}.$$

Afirmação. Se $q_1, \dots, q_n$ são números positivos, então

$$\min_i \frac{p_i}{q_i} \leq \frac{p_1 + \cdots + p_n}{q_1 + \cdots + q_n} \leq \max_i \frac{p_i}{q_i},$$

onde $p_1, \dots, p_n$ são números reais. A igualdade vale se todos os quocientes p_i/q_i são iguais.

Logo pela afirmação anterior, temos que

$$\min_i \frac{r_1(A^2)}{r_i} \leq \min_{x_i \neq 0} \frac{r_1(A^2)}{r_i} \leq r \leq \max_{x_i \neq 0} \frac{r_1(A^2)}{r_i} \leq \max_i \frac{r_1(A^2)}{r_i}.$$

O teorema segue do anterior e de:

$$\begin{aligned}
r_i(A^2) &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^n a_{ik} \sum_{j=1}^n a_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^n a_{ik} r_k.
\end{aligned}$$

$\square$

Para terminar esta seção vamos dar outras cotas para o autovalor maximal de uma matriz positiva e comparar em um exemplo os resultados obtidos usando as diferentes métodos.

Se A é uma matriz positiva com autovalor maximal r e se $\rho = \min_i r_i < R = \max_i r_i$, temos que $\rho < r < R$. Ledermann propôs em [Len] o problema de determinar números positivos p_1 e p_2 tais que

$$\rho + p_1 \leq r \leq R - p_2.$$

O resultado obtido por ele foi:

Teorema 9. Seja A uma matriz positiva com autovalor maximal r e soma de suas linhas $r_1, \ldots, r_n$. Sejam $R = \max_i r_i, \rho = \min_i r_i$ e $\eta = \min_{i,j}\ a_{i,j}$, se $R > \rho$, então:

$$\rho + \eta(\frac{1}{\delta} - 1) \leq r \leq R - \eta(1 - \sqrt{\delta}),$$

onde $\delta = max_{r_i < r_j}(r_i/r_j)$.

Este resultado de Lendermann foi melhorado por Ostrowski em [Ost] como segue:

Teorema 10. Seja A uma matriz positiva com autovalor maximal r e soma de suas linhas $r_1, \ldots, r_n$. Seja $\sigma = \sqrt{(\rho - \eta)/(R - \eta)}$ onde R, ρ e η são como no teorema anterior. Então:

$$\rho + \eta(\frac{1}{\sigma} - 1) \leq r \leq R - \eta(1 - \sigma).$$

Brauer em [Bra] melhorou estas cotas para o autovalor maximal e mostrou que sua cota não pode ser melhorada no sentido que dados R, ρ e η satisfazendo $R > \rho > n\,\eta > 0$ existe uma matriz positiva $n \times n$ com R o máximo das somas das linhas, ρ o mínimo das somas das linhas e com entrada mínima η tal que atinge a cota de Brauer. Vamos enunciar a cota de Brauer:

Teorema 11. Seja A, R, ρ e η como no enunciado do Teorema 10 e sejam

$$g = \frac{R - 2\eta + \sqrt{R^2 - 4\eta(R - \rho)}}{2(\rho - \eta)} \quad h = \frac{-\rho + 2\eta + \sqrt{\rho^2 + 4\eta(R - \rho)}}{2\eta}.$$

Então

$$\rho + \eta(h - 1) \leq r \leq R - \eta(1 - 1/g).$$

Observação 5. Os resultados acima também são válidos se substituimos as somas das linhas r_i pelas somas das colunas c_i

Exemplo. Considere a matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

O autovalor maximal de A é $r = 5,7416...$ e usando as diferentes cotas para r obtemos:

Cota de Frobenius sobre as linhas: $4 < r < 8$

Cota de Frobenius sobre as colunas: $5 < r < 7$

Teorema 8 sobre as linhas: $5 < r < 6,25$

Teorema 8 sobre as colunas: $5,6 < r < 5,8572$

Cota de Lendermann sobre as linhas: $4,1547 < r < 7,8661$

Cota de Lendermann sobre as colunas: $5,080 < r < 6,9259$

Cota de Ostrowski sobre as linhas: $4,5275 < r < 7,6547$

Cota de Ostrowski sobre as colunas: $5,2247 < r < 6,8165$

Cota de Brauer sobre as linhas: $4,8284 < r < 7,4642$

Cota de Brauer sobre as colunas: $5,3722 < r < 6,7016$

4.2 Matrizes Primitivas

Definição 10. Seja A uma matriz irredutível $n \times n$ não-negativa com autovalor maximal r, e suponha que A tem exatamente h autovalores de módulo r. O número h é chamado o *índice de imprimitividade* de A, ou simplemente o índice de A. Se $h = 1$, então a matriz A é dita primitiva, caso contrário é dita imprimitiva.

Veremos agora como podemos calcular este índice usando o grafo dirigido associado à matriz A irredutível.

Definição 11. Seja D um grafo fortemente conexo, o m.d.c. dos comprimentos de todos os ciclos de D é chamado de *índice de imprimitividade* de D. Lembramos que um ciclo nada mais é um caminho fechado no grafo.

Lema 3. Seja D um grafo fortemente conexo com índice k e k_i o m.d.c. dos comprimentos de todos os ciclos em D que passam pelo vértice i. Então $k = k_i$.

Demonstração. Temos que $k|k_i$ por definição. Seja C_j um ciclo em D de comprimento m_j e suponha que C_j passa pelo vértice j. Como D é fortemente conexo, existe um caminho P_{ij} ligando i a j e um caminho P_{ji} ligando j a i, Vamos denotar por s_{ij} o comprimento do caminho P_{ij} e por s_{ji} o comprimento do caminho P_{ji}.

Considere agora o ciclo dado por P_{ij}, C_j e P_{ji} que começa em i e tem comprimento $s_{ij} + m_j + s_{ji}$. Observe que k_i divide $s_{ij} + s_{ji}$ já que o ciclo formado por P_{ij} e P_{ji} é um ciclo que começa em i e tem comprimento exatamente $s_{ij} + s_{ji}$, assim k_i deve dividir m_j, ou seja, k_i deve dividir o comprimento de qualquer ciclo em D, assim $k_i|k$. □

Teorema 12. Se A é uma matriz irredutível e suponha que

$$a_{ij}a_{ij}^{(2)} > 0,$$

para algum (i, j), então A é primitiva.

Demonstração. Pelo corolário 4, no grafo dirigido D associado a A, o vértice i está conectado ao vértice j por caminhos de comprimento 1 e 2. Como A é irredutível e portanto $D(A)$ é fortemente conexo, existe um caminho ligando j a i de comprimento s, então $D(A)$ contém um ciclo de comprimento $s + 1$ e outro de comprimento $s + 2$, logo o índice de $D(A)$ é igual a 1 □

4.3 O Espectro de Matrizes Irredutíveis

Nosso objetivo é o de caracterizar os autovalores que têm módulo máximo. Para isto vamos precisar da seguinte proposição.

Proposição 3. Seja C uma matriz complexa dominada por uma matriz irredutível não negativa A, ou seja $|C| \leq A$, e seja r o autovalor maximal de A. Então para todo autovalor s de C, temos que

$$|s| \leq r \tag{4.1}$$

A igualdade vale em (4.1) se, e somente se,

$$C = e^{i\varphi} DAD^{-1} \tag{4.2}$$

onde $s = re^{i\varphi}$ e $|D| = I_n$

Demonstração. Seja $y \in \mathbb{C}^n$ um autovetor, não-nulo, associado ao autovalor s

$$Cy = sy \tag{4.3}$$

onde $y \neq 0$. Então, pela desigualdade triangular, temos que

$$|C|\,|y| \geq |Cy| = |s|\,|y|$$

Como $A \geq |C|$, então

$$A\,|y| \geq |C|\,|y| \geq |s|\,|y| \tag{4.4}$$

ou seja,

$$A\,|y| \geq |s|\,|y|$$

daí

$$A\,|y| - |s|\,|y| \geq 0$$

Agora, pelo Teorema 3(ii),

$$|s| \leq r_A(|y|)$$

onde r_A é a função Collatz-Wielandt associada a A, portanto

$$|s| \leq r_A(|y|) \leq r \tag{4.5}$$

como queríamos mostrar.

Por outro lado, suponhamos que $C = e^{i\varphi} DAD^{-1}$, onde $|D| = I_n$, então as matrizes C e $e^{i\varphi}A$ são semelhantes e se r é o autovalor máximal de A, então $re^{i\varphi}$ é um autovalor de $e^{i\varphi}A$ e portanto, é um autovalor de C.

Suponhamos que $|s| = r$, ou seja, que $s = re^{i\varphi}$. Então (4.5) implica que $r_A(|y|) = r$. Assim $|y|$ é um vetor maximal, logo pela demostração do lema 2, o vetor maximal $|y|$ é um autovetor de A associado ao autovalor r, isto é,

$$A\,|y| = r\,|y|$$

logo por (4.4) tem-se que

$$A\,|y| = |C|\,|y| = r\,|y| \tag{4.6}$$

isto é

$$(A - |C|)\,|y| = 0$$

Já que $|y|$ é maximal, pelo lema (2) $|y| > 0$. Por outro lado temos que $|C| \leq A$, logo $A - |C| \geq 0$, daí temos que

$$A = |C| \tag{4.7}$$

Seja D a matriz diagonal dada por $d_{ii} = \frac{y_i}{|y_i|}$ e definamos

$$G = (g_{ij}) = e^{-i\varphi} D^{-1} C D$$

Agora, temos que,

$$D\,|y| = \begin{bmatrix} \frac{y_1}{|y_1|} & & & \\ & \frac{y_2}{|y_2|} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{y_n}{|y_n|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |y_1| \\ |y_2| \\ \vdots \\ |y_n| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = y$$

então, pelo anterior e por (4.3), obtemos que

$$sy = Cy = CD\,|y| = sD\,|y| = re^{i\varphi} D\,|y|\,.$$

Portanto

$$\begin{aligned} G\,|y| &= e^{-i\varphi} D^{-1} C D\,|y| \\ &= e^{-i\varphi} D^{-1}(sy) \\ &= r\,|y|\,. \end{aligned}$$

e, por (4.6) temos que

$$G\,|y| = A\,|y| \tag{4.8}$$

Agora, pela definição de G,

$$|G| = |C|$$

e por (4.7) segue-se que

$$|G| = A.$$

Logo de (4.8) tem-se

$$|G|\,|y| = G\,|y|$$

ou, equivalentemente, que

$$\begin{aligned} |G|\,|y| - G\,|y| = 0 &\Longleftrightarrow (|G| - G)\,|y| = 0 \\ &\Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} (|g_{ij}| - g_{ij})\,|y_j| = 0,\ i = 1, 2, ..., n, \end{aligned}$$

o qual implica que

$$|g_{ij}| - g_{ij} = 0,$$

pois $|y_j| > 0$ e $|g_{ij}| - g_{ij} \geq 0$ para todo $i, j = 1, 2, ..., n$. Daí, temos que

$$G = |G| = A,$$

logo pela definição de G,

$$C = e^{i\varphi} D A D^{-1}$$

□

Agora já podemos enunciar o teorema que caracteriza os autovalores com módulo máximo.

Teorema 13. Seja A uma matriz irredutível $n \times n$ com autovalor maximal r e índice h. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_h$ os autovalores de A de módulo r. Então $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_h$ são as h-ésimas raizes de r^h.

Demonstração. Sejam $\lambda_t = re^{i\phi_t}$ com $t = 1, 2, ..., h$. Já que $|\lambda_t| = r$, a condição de igualdade da Proposição 3, para o caso em que $C = A$ e $s = \lambda_t$, implica que

$$\begin{aligned} A = e^{i\varphi_t} D_t A D_t^{-1}, &\quad t = 1, 2, ..., h \\ A = D_t (e^{i\varphi_t} A) D_t^{-1}, &\quad t = 1, 2, ..., h \end{aligned} \tag{4.9}$$

pois A é dominada por ela mesma. Assim A e $e^{i\varphi_t}A$ são semelhantes. Já que r é um autovalor simples de A, observese que para cada t, $e^{i\varphi_t} r = \lambda_t$ é um autovalor simples de $e^{i\varphi_t}A$, logo λ_t é um autovalor simples de A.

Voltando com a prova do teorema, temos por (4.9) temos que

$$\begin{aligned} A &= e^{i\varphi_t} D_t\, A\, D_t^{-1} \\ &= e^{i\varphi_t} D_t (e^{i\varphi_s} D_s A\, D_s{}^{-1})\, D_t{}^{-1} \\ &= e^{i(\varphi_t + \varphi_s)} (D_t D_s) A (D_t D_s)^{-1} \end{aligned}$$

Portanto A e $e^{i(\varphi_t+\varphi_s)}A$ são semelhantes para qualquer s e t. Daí, pela observação anterior, temos que $re^{i(\varphi_t+\varphi_s)}$ é um autovalor de A, logo $e^{i(\varphi_t+\varphi_s)}$ é um dos números $e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, ..., e^{i\varphi_h}$. Portanto o conjunto formado pelos h distintos números $e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, ..., e^{i\varphi_h}$ é fechado para a multiplicação, então temos que o conjunto está formado pelas h-ésimas raizes da unidade.

$\square$

Teorema 14. O espectro de uma matriz irredutível de índice h é invariante pela rotação no sentido anti-horário de um ângulo de $2\pi/h$, mas não é invariante pela a rotação de qualquer ângulo positivo menor do que $2\pi/h$.

Demonstração. Seja $\delta = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ o espectro de A. Então o espectro de $e^{i\frac{2\pi}{h}}A$ é $\zeta = \left\{\lambda_1 e^{i\frac{2\pi}{h}}, \lambda_2 e^{i\frac{2\pi}{h}}, ..., \lambda_n e^{i\frac{2\pi}{h}}\right\}$. Agora, na prova do teorema 13, mostramos que as matrizes A e $e^{i\frac{2\pi}{h}}A$ são semelhantes, logo ζ é também o espectro de A. Isto prova a primeira parte do Teorema. Além disso, no resultado do Teorema 13, vimos que qualquer rotação de ângulo menor do que $\frac{i2\pi}{h}$ não pode deixar o espectro fixado, pois o conjunto dos autovalores de módulo máximo não é preservado. $\square$

O seguinte teorema relaciona o índice de uma matriz imprimitiva com o seu polinômio característico. Este resultado é usado para determinar quando uma matriz irredutível é primitiva ou não.

Teorema 15. Seja A uma matriz irredutível com índice h, e seja

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n_1} + a_2\lambda^{n_2} + ... + a_k\lambda^{n_k},$$

onde $n > n_1 > ... > n_k$ e $a_t \neq 0$, $t = 1, 2, ..., k$, o polinômio característico de A. Então

$$h = \text{mdc}\,(n - n_1, n - n_2, ..., n - n_k) \tag{4.10}$$

Demonstração. Suponha que $m \geq 2$ é um número inteiro tal que A e $e^{i\frac{2\pi}{m}}A = \hat{A}$ tenham o mesmo espectro. Então A e $\hat{A}$ têm o mesmo polinômio característico :

$$\begin{aligned} P_A(x) &= \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i) \\ &= \prod_{i=1}^{n}(x - \theta\alpha_i) \\ &= P_{\hat{A}}(x), \end{aligned}$$

onde $\theta = e^{i\frac{2\pi}{m}}$. Por outro lado temos que

$$P_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x^1 + a_0$$

e

$$P_{\hat{A}}(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1x^1 + b_0.$$

Usando a relações entre raizes e coeficientes temos que

$$a_t = b_t = a_t\theta^{n-n_t} \quad t = 1, 2, ...k$$

Assim devemos ter que m divide cada $n - n_t$. Como, pelo Teorema 14, as matrices A e $e^{\frac{i2\pi}{h}}A$ tem o mesmo espectro, temos que h divide $n - n_t$ para $t = 1, \ldots, k$ e portanto h divide $n-n_1, n-n_2, \ldots, n-n_k$. Se $m > h$, as matrizes A e $\hat{A}$ não têm o mesmo espectro, logo devemos ter que para algum $1 \leq t_0 \leq k$ devemos ter que m não divide $n - n_{t_0}$. Isto implica que

$$h = mdc(n - n_1, n - n_2, ..., n - n_k)$$

□

Corolário 5. Uma matriz irredutível com traço positivo é primitiva.

Demonstração. Dada uma matriz irredutível A com traço positivo, temos que $n_1 = n-1$, então pelo Teorema 15, o índice da matriz A é

$$h = \mathrm{mdc}(n - (n-1), n - n_2, ..., n - n_k) = \mathrm{mdc}(1, n - n_2, ..., n - n_k) = 1$$

portanto A é primitiva □

4.4 Forma de Frobenius de Matrizes Irredutíveis

Frobenius descobriu que existe uma relação entre o espectro de uma matriz irredutível e a distribuição de zeros nas entradas da matriz (ver [Fr1]). Vamos dar a demonstração dada em [Wie].

Teorema 16. Seja A uma matriz irredutível com índice $h \geq 2$, então existe uma matriz de permutação P tal que $P^t\, A\, P = M$, onde M é da forma

$$M = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & A_{h-1,h} \\ A_{h1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

onde os blocos de zeros ao longo da diagonal principal são quadrados.

Demonstração. Seja r o autovalor maximal de A. Então, pelo Teorema 13

$$\lambda_t = re^{\frac{i2\pi t}{h}} \quad t = 0, 1, ..., h-1$$

são os autovalores de A de módulo r, e

$$A = e^{\frac{i2\pi t}{h}} D_t A D_t^{-1} \tag{4.12}$$

onde $|D_t| = I_n$. Podemos asumir, sem perda de generalidade, que a entrada (1,1) de cada D_t é 1. Seja z um autovetor positivo de A correspondente a r.

Para cada $t = 0, 1, \ldots, h-1$, definimos

$$z_t = D_t z, \quad t = 1, 2, ..., h-1 \tag{4.13}$$

por (4.12) e (4.13) temos que

$$\begin{aligned} Az_t &= e^{\frac{i2\pi t}{h}} D_t A D_t^{-1} z_t \\ &= e^{\frac{i2\pi t}{h}} D_t A D_t^{-1} D_t z \\ &= e^{\frac{i2\pi t}{h}} D_t A z \\ &= e^{\frac{i2\pi t}{h}} D_t r z \\ &= re^{\frac{i2\pi t}{h}} D_t z \\ Az_t &= \lambda_t z_t \end{aligned}$$

logo z_t é um autovetor de A correpondente a λ_t. Como o autoespaço associado a cada λ_t é unidimensional os z_t, e portanto D_t, estão unicamente determinados a menos de uma constante para $t = 0, 1, ...h-1$. Como a primeira coordenada de cada D_t é 1, temos que D_t estão unicamente determinados. Agora, aplicando (4.12) duas vezes, temos

$$\begin{aligned} A &= e^{\frac{i2\pi t}{h}} D_t \left(e^{\frac{i2\pi s}{h}} D_s A D_s^{-1} \right) D_t^{-1} \\ &= e^{\frac{i2\pi(t+s)}{h}} \left(D_t D_s\right) A \left(D_t D_s\right)^{-1} \end{aligned}$$

Por outro lado $D_t D_s z$ é autovetor de A correspondente ao autovalor $re^{\frac{i2\pi(t+s)}{h}}$, pois

$$
\begin{aligned}
A(D_tD_s)z &= e^{\frac{i2\pi t+s}{h}}(D_tD_s)A(D_tD_s)^{-1}(D_tD_s)z\\
&= e^{\frac{i2\pi(t+s)}{h}}D_tD_sAz\\
&= e^{\frac{i2\pi(t+s)}{h}}D_tD_srz\\
&= re^{\frac{i2\pi(t+s)}{h}}D_tD_sz
\end{aligned}
$$

Em particular $(D_1)^h z$ é um autovetor correspondente a $re^{\frac{2\pi ih}{h}} = r$. Pela unicidade dos D_t podemos concluir que

$$(D_1)^h = I_n$$

e assim as entradas da diagonal principal de D_1 são as h-ésimas raizes da unidade (lembre que $|D_j| = I_n \quad \forall i = 0, 1, \dots, h-1$).

Seja P uma matriz permutação tal que

$$P^t\, D_1\, P = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1s} \\ D_{21} & D_{22} & \cdots & D_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{s1} & D_{s2} & \cdots & D_{ss} \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

onde os elementos da diagonal de matriz $D_{t,t}$, que tem ordem $n_t \times n_t$, são todos iguais a $e^{\frac{2\pi i m_t}{h}}$ onde $0 = m_1 < m_2 < ... < m_s \leq h-1$ e as matrizes $D_{i,j}$ são nulas se $i \neq j$.

Dividindo $P^t\, A\, P$ em blocos, conforme à divisão de $P^t\, D_1\, P$ dada acima, temos que

$$P^tAP = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{ss} \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

onde os blocos A_{pq} são $n_p \times n_q$, $p, q = 1, 2, ..., s$. Considerando $A = e^{\frac{2\pi i}{h}}D_1A(D_1)^{-1}$ e comparando os blocos (p, q) para cada uma das expressões de A tem-se que

$$
\begin{aligned}
P^tAP &= P^t(e^{\frac{2\pi i}{h}}D_1AD_1^{-1})P\\
&= e^{\frac{2\pi i}{h}}P^tD_1AD_1^{-1}P\\
&= e^{\frac{2\pi i}{h}}(P^tD_1P)(P^tAP)(P^tD_1^{-1}P).
\end{aligned}
$$

Como P uma permutação tem-se que $P^{-1} = P^t$. Logo obtemos

$$A_{pq} = e^{\frac{i(1+m_p-m_q)2\pi}{h}} A_{pq},$$

pois se $(P^tAP)_{i,j} \in A_{pq}$ temos que

$$\begin{aligned}
(P^tAP)_{i,\,j} &= e^{\frac{2\pi i}{h}} \sum_{k=1}^{n} [(P^tD_1P)(P^tAP)]_{i,\,k} (P^tD_1^{-1}P)_{k,\,j} \\
&= e^{\frac{2\pi i(1-m_q)}{h}} \sum_{l=1}^{n} (P^tD_1P)_{i,\,l} (P^tAP)_{l,\,j} \\
&= e^{\frac{2\pi i(1+m_p-m_q)}{h}} (P^tAP)_{i,\,j}
\end{aligned}$$

Portanto para cada (p, q) temos que,

$$A_{pq} = 0 \quad \text{ou} \quad e^{\frac{i(1+m_p-m_q)2\pi}{h}} = 1 \tag{4.16}$$

ou seja, que

$$\text{Se } A_{pq} \neq 0 \quad \text{então} \quad m_q - m_p \equiv 1 \bmod h \tag{4.17}$$

Como a matriz A é irredutível, temos que para todo p existe um q tal que $A_{pq} \neq 0$, analogamente, para todo q existe um p tal que $A_{pq} \neq 0$.

Se $p = 1$, então a congrüência dada em (4.17) implica que

$$m_q \equiv 1 \bmod h \tag{4.18}$$

e como $1 \leq m_2 < ... < m_s \leq h - 1$, a única solução de (4.18) é $m_2 = 1$. Assim $A_{1q} = 0$ para todo $q \neq 2$.

Para $p = 2$ a condição (4.17) implica que

$$m_q - m_2 \equiv 1 \bmod h$$

ou seja

$$m_q - 1 \equiv 1 \bmod h \Longleftrightarrow m_q \equiv 2 \bmod h \tag{4.19}$$

já que $2 \leq m_3 < ... < m_s \leq h-1$, a única solução para (4.19) é $m_3 = 2$. Assim $A_{2q} = 0$ para todo $q \neq 3$. Continuando da mesma maneira concluimos que $m_{p+1} = p$ e $A_{pq} = 0$ para todo $q \neq p+1$, $p = 1, 2, ..., s-1$.

Para $p = s$, as condições (4.16) e (4.17) implicam que para cada q temos que, ou $A_{sq} = 0$ ou $m_q - m_s \equiv 1 \bmod h$. Daí usando $m_{p+1} = p$ com $p = s-1$ tem-se que

$$m_e \equiv s \bmod h.$$

Agora, $A_{s1} \neq 0$ já que $A_{p1} = 0$ para $p = 1, \ldots, s-1$. Daí podemos ter

$$m_1 \equiv s \bmod h,$$

o qual implica que $s = h$ e assim $m_q \neq s \bmod h$ para todo $q \neq 1$. Com isto fica provado o teorema. □

Agora sim podemos mostrar

Teorema 17. O índice de uma matriz irredutível é igual ao índice do grafo dirigido associado.

Demonstração. Seja h o índice de uma matriz irredutível A e seja k o índice do seu grafo dirigido associado. Consideremos os ciclos que passam por i e seja M_i o conjunto formado pelos comprimentos de tais ciclos. Pelo lema 3, temos que

$$k = \mathrm{mdc}\{m_i \,|\, m_i \in M_i\}.$$

Vejamos que M_i é fechado para a soma. De fato, se m_1, e m_2 são dois inteiros em M_i, então temos que $a_{ii}^{(m_1)} > 0$ e que $a_{ii}^{(m_2)} > 0$ pelo corolário 4. Isto implica que

$$a_{ii}^{(m_1+m_2)} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}^{(m_1)} a_{ti}^{(m_2)} \geq a_{ii}^{(m_1)} a_{ii}^{(m_2)} > 0.$$

Novamente pelo corolário 4 temos que existe um ciclo de comprimento $m_1 + m_2$ passando por i, ou seja, $m_1 + m_2 \in M_i$.

Como M_i é fechado para a soma, deve conter todos os múltiplos de k, exceto um número finito (teorema de Schur). Logo temos que $a_{ii}^{(kt)} > 0$ para t suficientemente grande.

Por outro lado, se s não é um múltiplo de k, então pela definição de M_i, e pela definição de k e pelo corolário 4, devemos ter que $a_{ii}^{(s)} = 0$. Como i é um vértice de $D(A)$ devemos ter que $a_{ii}^{(s)} > 0$ para todo s suficientemente grande e $i = 1, \ldots, n$ se, e somente se, s é um múltiplo de k.

Pelo Teorema 16 existe uma matriz de permutação P tal que $P^t \, A \, P = M$ está na forma de Frobenius

$$M = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & A_{h-1,h} \\ A_{h1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

e temos que M^h pode ser escrita como uma soma direta de matrizes primitivas:

$$M^h = \sum_{j=1}^{h} B_j$$

com

$$B_j = A_{j,j+1} A_{j+1,j+2} \cdots A_{j_1,j}$$

onde os subíndices foram reduzidos módulo h. Para m suficientemente grande temos que $M^{hm} = P^t A^{hm} P$ é uma soma direta de matrizes positivas e logo $a_{ii}^{(hm)} > 0$ para todo i.

Se s não é múltiplo de h todos os elementos na diagonal de A^s são nulos. Se $h = 1$, então A é primitiva e para m suficientemente grande temos que $A^{hm} > 0$.

Podemos concluir que para s suficientemente grande, $a_{ii}^{(s)} > 0$ se, e somente se, s é múltiplo de h. Logo temos que $h = k$

□

4.5 Aplicações da Teoria de Perron-Frobenius

Além da aplicação das matrizes não-negativas e a Teoria de Perron-Frobenius ao Google , estas têm aplicações em muitas outras áreas. Para finalizar esta dissertação mencionaremos rapidamente duas aplicações: uma à Economia e outra à Biologia.

4.5.1 Modelos econômicos O modelo de *input-ouput* foi introduzido por W. Leontief, prêmio Nobel de Economia em 1973.

Este modelo tornou-se um instrumento essencial para o planejamento, tanto nos países de economia centralmente planejada quanto naqueles que adotam a economia de mercado.

A hipótese fundamental é que o consumo que uma produção x_i faz de um setor j é proporcional a x_j, a produção de j.

Em termos matriciais, pode ser traduzido por

$$Ax + b = x$$

A pergunta é, dado um vetor de consumo $b \geq 0$, o sistema anterior admite uma solução $x \geq 0$? Se a matriz $I - A$ tem uma inversa não-negativa, o sistema admite uma solução não-negativa já que é suficiente tomar

$$x = (I - A)^{-1}b \geq 0.$$

Uma condição suficiente para a existência de uma inversa positiva é que o autovalor dominante de A seja menor que 1, já que neste caso temos que $(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots$

4.5.2 Modelos de dinâmica de populações O modelo de Leslie é um dos mais utilizados em dinânica de populações. É um modelo de tempo discreto de uma população estruturada por idades que descreve o desenvolvimento, a mortalidade e a reprodução dos organismos.

Este modelo é freqüentemente utilizado para responder duas questões:

1) Qual é a taxa de crescimento exponencial?

2) Qual é a distribuição de cada classe de idades na distribuição estável?

Suponhamos que em uma certa espécie os indivíduos se agrupam por idade $C_1, \dots, C_n$. A população inicial é $z^{(0)} = (z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)})$. Fixemos as seguintes hipóteses:

- cada indivíduo passa ao grupo seguinte em cada unidade de tempo.
- na etapa i, cada indivíduo da lugar a m_i descendentes.
- s_i é a fração que sobrevive dá idade $i-1$ à idade i

Na linguagem matricial temos:

$$\begin{pmatrix} z_1^{(k)} \\ \vdots \\ z_n^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 m_1 & s_1 m_2 & \cdots & s_1 m_{n-1} & s_1 m_n \\ s_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_n & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} z_1^{(0)} \\ \vdots \\ z_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

A matriz acima é conhecida como matriz de *Leslie*, já que este modelo foi introduzido por P. H. Leslie em 1945 (ver [Les]).

Se a matriz é primitiva temos que

$$z^{(k)} \approx K \lambda_1^k v_1, \quad \text{quando } k \to \infty$$

onde λ_1 é o autovalor dominante, v_1 é seu autovetor associado e K é uma constante positiva. Assim teremos que a população crescerá se $\lambda_1 > 1$, se extinguirá se $\lambda_1 < 1$.

Bibliografia

[Bra] Brauer, A.: "The theorems of Lendermann and Ostrowski on positive matrices", *Duje Math. J.* **24**, 265–274 (1957).

[Col] Collatz, L.: "Einschliessungssatz für dei charakteristichen Zahlen von Matrizen", *Math Z*, **48**, 221–226 (1942).

[Fr1] Frobenius, G.:"Über Matrizen aus nicht negativen Elementen", *S. -B. K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, 471–476 (1908), 514–518 (1909).

[Fr2] Frobenius, G.:"Über Matrizen aus positiven Elementen", *S. -B. K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* , 456–477 (1912).

[Lan] Lancaster, P.: *Theory of Matrices*, Academic Press, New York (1969).

[Len] Lendermann, W.: "Bounds for the greatest latent root of a positive matrix". *J. London Math. Soc* **25**, 265–268 (1950).

[Les] Leslie, P. H.:"On the Use of Matices in Certain Population Mathematics". *Biometrika* **33**, 182–212 (1945).

[Min] Minc, H.: *Nonnegative Matrices*, Wiley, New York (1988).

[Ost] Ostrowski A.: "Bounds for the greatest latent root of a positive matrix", *J. London Math. Soc.* **27**, 253–256 (1952).

[Per] Perron, O.: "Zur Theorie der Matrizen", *Math. Ann.* **64**, 248–263 (1907).

[Wie] Wielandt, H.: "Unzerlegbare nicht-negative Matrizen", *Math Z*, **52**, 642–648 (1950).