

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

ESPAÇOS VETORIAIS TOPOLÓGICOS
DE DIMENSÃO FINITA

SUZETE MARIA SILVA AFONSO

Rio de Janeiro, RJ

Março de 2008

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

SUZETE MARIA SILVA AFONSO

MONOGRAFIA DE MESTRADO

Orientador: Nilson da Costa Bernardes Junior

Rio de Janeiro, RJ

Março de 2008

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Introdução	vi
Capítulo 1 - Preliminares	1
1. Espaços topológicos	1
2. Anéis topológicos	7
3. Espaços vetoriais topológicos	10
Capítulo 2 - Espaços de Dimensão Finita	16
1. Anéis estritamente minimais	16
2. Espaços uni-dimensionais	19
3. Espaços de dimensão finita	22
Referências Bibliográficas	26

AGRADECIMENTOS

Ao soberano Deus minha eterna gratidão pelo amor, pela força que me impulsiona a lutar pelos meus objetivos e pela concretização deste trabalho. E à Santíssima Virgem Maria, minha fiel intercessora, toda a minha devoção por permitir que eu sempre sinta a sua presença.

Agradeço aos meus pais, Humberto e Vanda, pelo amor incondicional, pelos ensinamentos e pelo apoio constante.

Agradeço à minha saudosa e eterna amiga Dadá por tudo o que me ensinou e por todo amor que me dedicou desde o primeiro dia de minha vida.

Agradeço aos meus irmãos, Soraya e Humberto, e à tia Cicina pelo incentivo e pela compreensão ao longo destes anos de dedicação à Matemática.

Agradeço ao meu sobrinho Bento por tornar os meus dias mais alegres.

Agradeço às religiosas e pensionistas da Residência de Maria Imaculada pelo acolhimento, pela amizade e pelas orações.

Agradeço ao meu orientador professor Nilson da Costa Bernardes Junior pelo apoio, pela amizade e pela paciência que me prestou na elaboração deste trabalho.

Agradeço aos colegas e amigos da UFF e, em especial, à Jaqueline, ao Jefferson Nogueira, ao Luiz Alberto, à Maria Eugênia, ao Reginaldo e ao Renan Edgard pelo apoio, pelos ensinamentos e por todos os momentos inesquecíveis vividos em tal Instituição.

Agradeço aos Freis da Capela São José, ao Grupo Jovem Amigos de Cristo, ao Grupo de Oração Universitário São José, ao Padre Zito, aos religiosos da Fraternidade Toca de Assis e a todos os meus amigos de Campos dos Goytacazes pelo apoio espiritual e pelas orações.

Agradeço a todos os meus amigos pela força, pelo incentivo e pela disponibilidade, em

especial, à Griseuda, à Thaís Barreto e ao Aluizio.

Agradeço aos professores pela dedicação, em especial, ao Nivaldo Nunes de Medeiros Junior e à Kátia Rosenvald Frensel por todas as palavras de incentivo.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo suporte financeiro durante meus estudos.

RESUMO

Um teorema clássico devido a Hausdorff-Tychonoff afirma que a menos de isomorfismo, para cada dimensão finita n existe um único espaço vetorial topológico de dimensão finita n , a saber, o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Tendo em vista a importância deste resultado é natural considerar o problema de estendê-lo a espaços vetoriais topológicos de dimensão finita sobre anéis de divisão mais gerais. A solução definitiva para este problema foi dada por Nachbin que isolou a classe de anéis de divisão para os quais o resultado é verdadeiro. Mais precisamente, Nachbin estabeleceu o seguinte teorema:

Seja K um anel de divisão topológico. Para que todo espaço vetorial topológico sobre K de dimensão finita n seja isomorfo ao espaço produto K^n é necessário e suficiente que o anel de divisão topológico K seja estritamente minimal e completo.

O objetivo da monografia é apresentar estes resultados e suas consequências.

Abstract

A classical theorem due to Hausdorff and Tychonoff asserts that, modulo an isomorphism, for each finite dimension n there is only one real topological vector space of dimension n , namely, the euclidean space $\mathbb{R}^n$. In view of the importance of this result, it is natural to consider the problem of extending it to finite-dimensional topological vector spaces over more general topological division rings. The definitive solution to this problem was given by Nachbin, who isolated the class of topological division rings for which the result is true. More precisely, Nachbin established the following theorem:

Let K be a topological division ring. In order that every topological vector space over K of finite dimension n be isomorphic to the product space K^n it is necessary and sufficient that the topological division ring K be strictly minimal and complete.

The goal of the present monograph is to present this result and its consequences.

INTRODUÇÃO

A presente monografia é motivada pelo seguinte teorema clássico devido a Hausdorff [6]:

Todo espaço normado real de dimensão finita n é isomorfo ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Tychonoff [11] estabeleceu a seguinte generalização deste resultado:

Todo espaço vetorial topológico real de dimensão finita n é isomorfo ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

O Teorema de Hausdorff-Tychonoff é, sem dúvidas, o resultado central sobre espaços vetoriais topológicos de dimensão finita. Ele afirma que, a menos de isomorfismo, para cada dimensão finita n existe um único espaço vetorial topológico real de dimensão n , a saber, o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Daí, decorre uma série de resultados importantes sobre espaços vetoriais topológicos de dimensão finita como, por exemplo, a continuidade automática das aplicações lineares entre espaços vetoriais topológicos no caso em que o domínio tem dimensão finita.

Tendo em vista a importância do Teorema de Hausdorff-Tychonoff é natural considerar o problema de estendê-lo a espaços vetoriais topológicos sobre anéis de divisão topológicos mais gerais. Braconnier [5] estabeleceu tal resultado para anéis de divisão localmente compactos e não-discretos, sob a hipótese adicional dos espaços serem completos. Kaplansky [7] estendeu ainda mais a classe dos anéis de divisão em questão, mas com a hipótese dos espaços serem metrizáveis. Contudo, a solução definitiva para este problema foi dada por Nachbin [9] que isolou a classe dos anéis de divisão topológicos para os quais o resultado é verdadeiro. Mais precisamente, Nachbin estabeleceu o seguinte teorema:

Seja K um anel de divisão topológico. Para que todo espaço vetorial topológico sobre K de dimensão finita n seja isomorfo ao espaço produto K^n é necessário e suficiente que o anel de divisão topológico K seja estritamente minimal e completo.

O objetivo da presente monografia é apresentar os resultados obtidos por Nachbin [9]. Cabe observar que estes resultados são elementares, envolvendo poucos pré-requisitos.

Assumimos que o leitor tenha familiaridade com certos conceitos básicos de Álgebra (anéis, anéis de divisão, subanéis, ...) e de Álgebra Linear (espaços vetoriais sobre anéis de divisão, subespaços vetoriais, dimensão, aplicações lineares, ...). Mas todos os pré-requisitos de Topologia Geral e de Álgebra Topológica necessários à compreensão do texto são apresentados no Capítulo 1, com exceção da demonstração do teorema de completamento de anéis topológicos que, por ser demasiadamente trabalhosa, preferimos omitir. No Capítulo 2 apresentamos os resultados de Nachbin [9].

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

1. Espaços topológicos

Uma *topologia* sobre um conjunto X é uma coleção $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:

(A1) $\phi \in \mathcal{T}$ e $X \in \mathcal{T}$.

(A2) Toda união de conjuntos de $\mathcal{T}$ é um conjunto de $\mathcal{T}$.

(A3) Toda interseção finita de conjuntos de $\mathcal{T}$ é um conjunto de $\mathcal{T}$.

Um *espaço topológico* é um conjunto X munido de uma topologia $\mathcal{T}$ sobre X . Neste caso, os elementos de X são chamados de *pontos* e os elementos de $\mathcal{T}$ são chamados de *conjuntos abertos*.

Exemplo 1. (a) Dado um conjunto X arbitrário, a coleção $\mathcal{T} = \{\phi, X\}$ é uma topologia sobre X , dita a *topologia caótica* sobre X .

(b) Dado um conjunto X arbitrário, a coleção $\mathcal{T} = P(X)$ de todas as partes de X é uma topologia sobre X , dita a *topologia discreta* sobre X .

(c) Relembremos que uma *métrica* sobre um conjunto X é uma função $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ que satisfaz as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in X$:

(M1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$.

(M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Um *espaço métrico* é um conjunto X munido de uma métrica d sobre X . Neste caso, definimos a *bola aberta de centro a e raio r* ($a \in X$ e $r > 0$) por

$$B_X(a, r) = \{x \in X; d(x, a) < r\}.$$

A coleção $\mathcal{T}$ formada por todas as uniões arbitrárias de bolas abertas em X é uma topologia sobre X , dita a *topologia induzida pela métrica d* .

O estudo dos espaços topológicos desempenha um papel importante em grande parte da matemática, incluindo as áreas de Análise, Geometria e Topologia. A seguir apresentaremos apenas os conceitos e resultados que se farão necessários no decorrer desta monografia. Para um estudo mais abrangente recomendamos os livros Bourbaki [3,4] e Munkres [8].

Se X é um espaço topológico e x é um elemento de X , um subconjunto V de X é dito uma *vizinhança* de x se V contém algum conjunto aberto contendo x . Denotamos por $V_X(x)$, ou simplesmente $V(x)$, o conjunto de todas as vizinhanças de x . Estes conjuntos têm as seguintes propriedades:

- (V1) Todo subconjunto de X que contém um conjunto de $V(x)$ pertence a $V(x)$.
- (V2) Toda interseção finita de conjuntos de $V(x)$ pertence a $V(x)$.
- (V3) O elemento x pertence a todo conjunto de $V(x)$.
- (V4) Se V pertence a $V(x)$, então existe um conjunto W pertencente a $V(x)$ tal que, para cada $y \in W$, V pertence a $V(y)$.

De fato, (V1) e (V3) são evidentes, (V2) decorre de (A3) e em (V4) basta tomarmos W como sendo qualquer conjunto aberto tal que $x \in W \subset V$. Note que um conjunto $A \subset X$ é aberto se e somente se A é vizinhança de todos os seus pontos.

Um espaço topológico X é dito *separado* se quaisquer dois pontos distintos de X possuem vizinhanças disjuntas. Toda topologia induzida por uma métrica é separada.

Seja X um espaço topológico. Um subconjunto F de X é dito um *conjunto fechado* se o seu complementar $X \setminus F$ é um conjunto aberto. Tomando complementares em (A1), (A2) e (A3), e usando as Leis de De Morgan, vemos que:

- (F1) $\emptyset$ e X são conjuntos fechados.
- (F2) Toda interseção de conjuntos fechados é um conjunto fechado.
- (F3) Toda união finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

Sejam X um espaço topológico e A um subconjunto de X . Um ponto x de X é dito um *ponto aderente* a A se toda vizinhança de x intercepta A . Denotamos por $\overline{A}$ o conjunto

de todos os pontos aderentes a A ; $\overline{A}$ é dito a *aderência* (ou o *fecho*) de A . Se $\overline{A} = X$, dizemos que A é um *conjunto denso*.

Proposição 2. Sejam X um espaço topológico e A um subconjunto de X . A aderência $\overline{A}$ de A é o menor conjunto fechado de X que contém A . Em outras palavras:

- (a) $\overline{A} \supset A$.
- (b) $\overline{A}$ é um conjunto fechado.
- (c) se $F \subset X$ é um conjunto fechado e $F \supset A$, então $F \supset \overline{A}$.

Demonstração: Obviamente $A \subset \overline{A}$. Se $x \in X \setminus \overline{A}$ então existe uma vizinhança V de x tal que $V \cap A = \emptyset$; escolhendo W como em (V4), temos então que $W \subset X \setminus \overline{A}$. Isto prova que $X \setminus \overline{A}$ é um conjunto aberto, ou seja, $\overline{A}$ é um conjunto fechado. Se F é um conjunto fechado contendo A , então $X \setminus F$ é um conjunto aberto disjunto de A . Logo, $X \setminus F$ é uma vizinhança de cada $x \in X \setminus F$ que não intercepta A , provando que $X \setminus F \subset X \setminus \overline{A}$, ou seja, $F \supset \overline{A}$.

Sejam X e Y espaços topológicos, f uma função de X em Y e a um ponto de X . Dizemos que f é *contínua em a* se, para toda vizinhança V de $f(a)$, existe uma vizinhança U de a tal que

$$f(U) \subset V.$$

Se f é contínua em todos os pontos de X , dizemos que f é uma *função contínua*.

Proposição 3. Seja f uma função de um espaço topológico X em um espaço topológico Y . As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) f é uma função contínua.
- (ii) A imagem inversa por f de todo subconjunto aberto de Y é um subconjunto aberto de X .
- (iii) A imagem inversa por f de todo subconjunto fechado de Y é um subconjunto fechado de X .

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii): Seja B um subconjunto aberto de Y e ponha $A = f^{-1}(B)$. Para cada $a \in A$, como f é contínua em a e B é uma vizinhança de $f(a)$, existe uma vizinhança aberta U_a de a tal que $f(U_a) \subset B$, ou seja, $U_a \subset f^{-1}(B) = A$. Logo, $A = \bigcup_{a \in A} U_a$ é aberto por (A2).

(ii) $\Rightarrow$ (i): Fixe $a \in X$ e seja V uma vizinhança de $f(a)$. Então existe um conjunto aberto V' em Y tal que $f(a) \in V' \subset V$. Por hipótese, $U = f^{-1}(V')$ é um conjunto aberto em X . Como $a \in U$, temos que U é vizinhança de a e $f(U) \subset V' \subset V$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Decorre imediatamente da fórmula $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$, que vale para todo subconjunto B de Y .

Corolário 4. Sejam X , Y e Z espaços topológicos. Se $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$ são funções contínuas, então $g \circ f: X \rightarrow Z$ também o é.

Demonstração: Como $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$ para todo $B \subset Z$, o resultado decorre da equivalência entre (i) e (ii) na proposição anterior.

Seja X um espaço topológico com topologia $\mathcal{T}$. Se Y é um subconjunto de X , então a coleção

$$\mathcal{T}' = \{A \cap Y; A \in \mathcal{T}\}$$

é uma topologia sobre Y , dita a *topologia induzida* sobre Y por $\mathcal{T}$. Munido desta topologia, Y é dito um *subespaço* de X . É fácil ver que a aplicação inclusão $Y \rightarrow X$ satisfaz a condição (ii) da Proposição 3, donde ela é uma função contínua.

Sejam $X_1, \dots, X_n$ espaços topológicos e considere o conjunto produto $X = X_1 \times \dots \times X_n$. Um *conjunto elementar* em X é um conjunto da forma $A_1 \times \dots \times A_n$, onde A_i é aberto em X_i para cada $i = 1, \dots, n$. A coleção $\mathcal{T}$ de todas as uniões arbitrárias de conjuntos elementares é uma topologia sobre X , dita a *topologia produto* das topologias dos X_i . X munido desta topologia é dito o *espaço produto* dos espaços X_i . Para cada $i = 1, \dots, n$, seja

$$\pi_i: X \rightarrow X_i$$

a projeção canônica. É fácil ver que cada π_i satisfaz a condição (ii) da Proposição 3. Portanto, as projeções π_i são funções contínuas.

Proposição 5. Seja f uma função de um espaço topológico Y em um espaço produto $X = X_1 \times \cdots \times X_n$. Escreva

$$f(y) = (f_1(y), \dots, f_n(y)), \quad y \in Y.$$

Então f é uma função contínua se e somente se cada f_i é uma função contínua.

Demonstração: Como $f_i = \pi_i \circ f$ e π_i é contínua, a continuidade de f implica a continuidade de f_i pelo Corolário 4 ($1 \leq i \leq n$).

Reciprocamente, suponha $f_1, \dots, f_n$ contínuas. Se $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ é um conjunto elementar em X , então

$$f^{-1}(A) = f_1^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(A_n)$$

é um conjunto aberto em Y . Como todo aberto de X é uma união de conjuntos elementares vemos que f satisfaz a condição (ii) da Proposição 3, donde f é uma função contínua.

Sejam E e F conjuntos e $\phi: E \rightarrow F$ uma função. O conjunto $G(\phi) = \{(x, \phi(x)) \in E \times F; x \in E\}$ é dito *gráfico* da função ϕ .

Proposição 6. Sejam X um espaço topológico, Y um espaço topológico separado e $\phi: X \rightarrow Y$ uma função. Se ϕ é contínua então o gráfico de ϕ é fechado em $X \times Y$, onde consideramos $X \times Y$ munido da topologia produto.

Demonstração: Seja $A = (X \times Y) \setminus G(\phi)$. Tome $(x_0, y_0) \in A$. Então $y_0 \neq \phi(x_0)$. Como Y é um espaço separado, existem uma vizinhança V de y_0 e uma vizinhança W de $\phi(x_0)$ em Y tais que $V \cap W = \emptyset$. Mas, segue da continuidade de ϕ que existe uma vizinhança U de x_0 tal que $\phi(U) \subset W$. Logo, $U \times V$ é uma vizinhança de (x_0, y_0) inteiramente contida no conjunto A , donde concluímos que A é um conjunto aberto. Por conseguinte, $G(\phi)$ é fechado.

Sejam X um espaço topológico, Y um conjunto e f uma função de X sobre Y . A coleção

$$\mathcal{T}' = \{B \subset Y; f^{-1}(B) \text{ é aberto em } X\}$$

é uma topologia sobre Y , dita a *topologia imagem direta* por f da topologia de X . Claramente, f é uma função contínua se considerarmos Y munido de $\mathcal{T}'$. Um caso particular importante é o seguinte: sejam R uma relação de equivalência sobre X , X/R o conjunto quociente de X módulo R e $\varphi: X \rightarrow X/R$ a sobrejeção canônica. A topologia imagem direta por φ da topologia de X é dita a *topologia quociente* da topologia de X pela relação R ; X/R munido desta topologia é dito o *espaço quociente* de X por R .

Sejam $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ topologias sobre um conjunto X . Dizemos que $\mathcal{T}_1$ é *mais fina do que* $\mathcal{T}_2$, e representamos por $\mathcal{T}_2 \leq \mathcal{T}_1$, quando a aplicação identidade

$$x \in (X, \mathcal{T}_1) \mapsto x \in (X, \mathcal{T}_2) \text{ é contínua.}$$

É fácil ver que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) $\mathcal{T}_2 \leq \mathcal{T}_1$.
- (ii) Para todo $x \in X$, toda vizinhança de x na topologia $\mathcal{T}_2$ é uma vizinhança de x na topologia $\mathcal{T}_1$.
- (iii) Para todo subconjunto A de X , o fecho de A na topologia $\mathcal{T}_1$ está contido no fecho de A na topologia $\mathcal{T}_2$.
- (iv) Todo subconjunto de X que é fechado na topologia $\mathcal{T}_2$ é fechado na topologia $\mathcal{T}_1$.
- (v) Todo subconjunto de X que é aberto na topologia $\mathcal{T}_2$ é aberto na topologia $\mathcal{T}_1$.

Um *filtro* sobre um conjunto X é um conjunto $\mathcal{F}$ de partes de X que satisfaz os seguintes axiomas:

- (F_I) Se $A \in \mathcal{F}$ e $A \subset B \subset X$, então $B \in \mathcal{F}$.
- (F_{II}) Toda interseção finita de conjuntos de $\mathcal{F}$ está em $\mathcal{F}$.
- (F_{III}) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Exemplo 7. (a) Se X é um espaço topológico, o conjunto $V(x)$ de todas as vizinhanças de um ponto $x \in X$ é um filtro.

(b) Se X é um conjunto infinito, os complementares dos subconjuntos finitos de X formam um filtro.

(c) Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência em um conjunto X , o conjunto das partes M de X tais que $x_n \in M$ exceto para um número finito de índices n é um filtro sobre X , chamado *filtro elementar* associado a (x_n) .

Se X é um espaço topológico, $\mathcal{F}$ é um filtro sobre X e $x \in X$, dizemos que $\mathcal{F}$ *converge* para x (ou que x é um *ponto limite* de $\mathcal{F}$) se toda vizinhança de x pertence a $\mathcal{F}$. Se X é um espaço separado, então todo filtro sobre X possui no máximo um ponto limite. Com efeito, suponha que $x \neq y$ são pontos limite de um filtro $\mathcal{F}$ sobre X . Como X é separado, existem vizinhanças U de x e V de y tais que $U \cap V = \emptyset$. Pela definição de limite $U \in \mathcal{F}$ e $V \in \mathcal{F}$, donde $\emptyset = U \cap V \in \mathcal{F}$ por (F_{II}). Mas isto contradiz (F_{III}).

Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em um espaço topológico X . Dizemos que (x_n) *converge* para um ponto $x \in X$ se, para toda vizinhança U de x , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in U \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0.$$

Se $\mathcal{F}$ é o filtro elementar associado a (x_n) , isto equivale a dizer que $\mathcal{F}$ converge para x .

2. Anéis topológicos

Um *anel topológico* é um anel A munido de uma *topologia de anel*, ou seja, uma topologia separada $\mathcal{T}$ para a qual as funções

$$(x, y) \in A \times A \mapsto x + y \in A,$$

$$x \in A \mapsto -x \in A$$

e

$$(x, y) \in A \times A \mapsto xy \in A$$

são contínuas, onde consideramos $A \times A$ munido da topologia produto. Se, além disso, A é um anel de divisão e a função

$$x \in A \setminus \{0\} \mapsto x^{-1} \in A \setminus \{0\}$$

é contínua, dizemos que A é um *anel de divisão topológico* e que $\mathcal{T}$ é uma *topologia de anel de divisão*. Um anel de divisão topológico comutativo é dito um *corpo topológico* e a sua topologia é dita uma *topologia de corpo*.

Se A é um anel topológico, então toda translação $x \rightarrow x + a$ é um homeomorfismo de A sobre A . Portanto, as vizinhanças de um ponto $a \in A$ são exatamente os conjuntos da forma $a + V$, com V vizinhança de 0. Isto mostra que a topologia de A está totalmente determinada pelo conjunto $\mathcal{V}_A(0)$ de todas as vizinhanças de 0. A continuidade da adição e da multiplicação em A implica as seguintes propriedades:

- Para todo $V \in \mathcal{V}_A(0)$, existe $U \in \mathcal{V}_A(0)$ tal que $U + U \subset V$.
- Para todo $V \in \mathcal{V}_A(0)$, existe $U \in \mathcal{V}_A(0)$ tal que $UU \subset V$.

Como a função $x \rightarrow -x$ é um homeomorfismo de A sobre A , um conjunto V é vizinhança de 0 se e somente se $-V$ é vizinhança de 0. Neste caso, $U = V \cap (-V)$ é uma vizinhança *simétrica* (isto é, $-U = U$) de 0 contida em V . Isto mostra que toda vizinhança de 0 contém uma vizinhança simétrica de 0.

Exemplo 8. (a) Anéis discretos.

Se A é um anel (resp. um anel de divisão, um corpo) então A munido da topologia discreta é um anel topológico (resp. um anel de divisão topológico, um corpo topológico), dito um *anel discreto* (resp. um *anel de divisão discreto*, um *corpo discreto*.)

(b) Anéis de divisão valorizados.

Um *anel de divisão valorizado* é um anel de divisão A munido de um *valor absoluto*, isto é, de uma função

$$|\cdot|: A \rightarrow \mathbb{R}_+$$

tal que as seguintes condições são satisfeitas para quaisquer $a, b \in A$.

(VA1) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

(VA2) $|ab| = |a| |b|$.

(VA3) $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Decorre das duas primeiras condições que

$$|-1| = |1| = 1 \quad \text{e} \quad |-a| = |a| \quad \text{para todo } a \in A.$$

Além disso,

$$d(a, b) = |a - b|$$

define uma métrica sobre A que induz uma topologia de anel de divisão sobre A .

O estudo dos anéis de divisão valorizados e, em particular, o estudo dos corpos valorizados, desempenha um papel importante em diversas áreas da matemática, tais como Álgebra Comutativa, Geometria Algébrica e Teoria dos Números. Veja, por exemplo, os livros Artin [1], Bourbaki [2] e Warner [11].

Sejam A e B anéis topológicos. Uma função $f: A \rightarrow B$ é dita um *isomorfismo* se f é um isomorfismo de anéis contínuo cuja inversa $f^{-1}: B \rightarrow A$ também é contínua. B é dito um *subanel topológico* de A se B é um subanel de A e a topologia de B coincide com a topologia induzida pela de A .

Sejam A um anel topológico e $\mathcal{F}$ um filtro sobre A . Dizemos que $\mathcal{F}$ é um *filtro de Cauchy* se, para toda vizinhança V de 0 em A , existe $X \in \mathcal{F}$ tal que

$$X - X := \{x - y; x, y \in X\} \subset V.$$

Se $\mathcal{F}$ possui um limite em A , então $\mathcal{F}$ é um filtro de Cauchy. Se, reciprocamente, todo filtro de Cauchy sobre A possui um limite em A , dizemos que A é um *anel topológico completo*.

Teorema 9. Para todo anel topológico A , existe um anel topológico completo $\hat{A}$ que contém A como subanel topológico denso. $\hat{A}$ é dito um *completamento* de A . Ele é único no seguinte sentido: se A' é um anel topológico completo que contém A como subanel

topológico denso, então existe um isomorfismo $f: A' \rightarrow \widehat{A}$ tal que $f(x) = x$ para todo $x \in A$.

A demonstração deste teorema é um tanto trabalhosa e será omitida. Veja Bourbaki [3] ou Warner [12], por exemplo.

3. Espaços vetoriais topológicos

Seja K um anel de divisão topológico. Um *espaço vetorial topológico sobre K* é um espaço vetorial E sobre K munido de uma *topologia vetorial*, ou seja, uma topologia separada $\mathcal{T}$ para a qual as funções

$$(x, y) \in E \times E \mapsto x + y \in E$$

e

$$(\lambda, y) \in K \times E \mapsto \lambda x \in E$$

são contínuas, onde consideraremos $E \times E$ e $K \times E$ munidos de suas topologias produto.

Se E é um espaço vetorial topológico sobre K , então toda translação $x \mapsto x + a$ é um homeomorfismo de E sobre E . Portanto,

$$\mathcal{V}_E(a) = \{V + a; V \in \mathcal{V}_E(0)\}.$$

As seguintes propriedades decorrem da continuidade da adição e da multiplicação por escalar.

- Para todo $V \in \mathcal{V}_E(0)$, existe $U \in \mathcal{V}_E(0)$ tal que $U + U \subset V$.
- Para todo $V \in \mathcal{V}_E(0)$, existem $W \in \mathcal{V}_K(0)$ e $U \in \mathcal{V}_E(0)$ tais que $WU \subset V$.

Se E é um espaço vetorial topológico sobre K e M é um subespaço vetorial de E , então M munido da topologia induzida pela de E é um espaço vetorial topológico sobre K , dito um *subespaço* de E .

Exemplo 10. Considere K um anel de divisão topológico. Sejam $E_1, E_2, \dots, E_n$ espaços vetoriais topológicos sobre K e $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ o espaço vetorial produto munido

da topologia produto. Então E é um espaço vetorial topológico sobre K . Com efeito, sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ pontos distintos de E . Existe i tal que $x_i \neq y_i$. Como E_i é separado, existem abertos U_i e V_i em E_i tais que $x_i \in U_i$, $y_i \in V_i$ e $U_i \cap V_i = \emptyset$. Ponha $U_j = V_j = E_j$ para todo $j \neq i$ e considere os conjuntos elementares $U = \prod_{j=1}^m U_j$ e $V = \prod_{j=1}^m V_j$. Temos que $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Isto prova que E é separado. Agora, provemos que a adição é contínua. Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ pontos distintos de E e seja W uma vizinhança de $x + y$. Então existe um conjunto elementar $\prod_{j=1}^m W_j$ tal que

$$x + y \in \prod_{j=1}^m W_j \subset W.$$

Para cada j , existem abertos U_j e V_j em E_j tais que $x_j \in U_j$, $y_j \in V_j$ e $U_j + V_j \subset W_j$, uma vez que a adição em E_j é contínua. Considere os conjuntos elementares $U = \prod_{j=1}^m U_j$ e $V = \prod_{j=1}^m V_j$. Então $x \in U$, $y \in V$ e $U + V \subset \prod_{j=1}^m W_j \subset W$. A continuidade da multiplicação por escalar é provada de modo análogo.

Em particular, K^n é um espaço vetorial topológico sobre K .

O resultado a seguir será muito utilizado no próximo capítulo.

Proposição 11. Para todo espaço vetorial topológico F sobre K , toda aplicação linear $f: K^n \rightarrow F$ é contínua, onde $n \geq 1$.

Demonstração: Com efeito, seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ a base canônica de K^n . Se $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in K^n$ então

$$f(x) = f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n),$$

já que f é linear. Logo, a continuidade de f decorre da continuidade da adição e da multiplicação por escalar em F .

Proposição 12. Sejam E um espaço vetorial topológico sobre K , F um espaço vetorial sobre K e f uma aplicação linear de E sobre F cujo núcleo $f^{-1}(0)$ é fechado em E .

Então, a topologia imagem direta por f da topologia de E é uma topologia vetorial sobre F . Além disso, considerando F munido desta topologia, temos que f é contínua e aplica conjuntos abertos de E em conjuntos abertos de F .

Demonstração: É fácil ver que f é contínua se considerarmos F munido da topologia imagem direta por f da topologia de E . Afirmamos que f é uma aplicação aberta. Com efeito, seja $A \subset E$ um conjunto aberto em E . Note que mostrar que $f(A)$ é aberto em F é equivalente a mostrar que $f^{-1}(f(A))$ é aberto em E . Vejamos que $f^{-1}(f(A)) = A + f^{-1}(0)$. Sejam $a \in A$ e $x \in f^{-1}(0)$. Temos que $f(a + x) = f(a) + f(x) = f(a) \in f(A)$, donde $A + f^{-1}(0) \subset f^{-1}(f(A))$. Por outro lado, se $y \in f^{-1}(f(A))$ então $f(y) \in f(A)$. Daí, existe $a \in A$ tal que $f(y) = f(a)$ e, como f é linear, $f(y - a) = 0$, ou seja, $y - a = x \in f^{-1}(0)$. Logo, $y = a + x \in A + f^{-1}(0)$, provando que $f^{-1}(f(A)) \subset A + f^{-1}(0)$. Então, $f^{-1}(f(A)) = A + f^{-1}(0) = \bigcup_{y \in f^{-1}(0)} (A + y)$, donde $f^{-1}(f(A))$ é um conjunto aberto em E .

Agora, vejamos que a topologia imagem direta por f da topologia de E é uma topologia vetorial sobre F . De fato, sejam $x_2, y_2 \in F$. Como f é sobrejetora, existem $x_1, y_1 \in E$ de modo que $x_2 = f(x_1)$ e $y_2 = f(y_1)$. Se W é uma vizinhança de $x_2 + y_2$ em F então $f^{-1}(W)$ é uma vizinhança de $x_1 + y_1$ em E . Logo, existem uma vizinhança U de x_1 e uma vizinhança V de y_1 em E de modo que $U + V \subset f^{-1}(W)$. Como f é uma aplicação aberta, $f(U)$ é vizinhança de x_2 em F e $f(V)$ é vizinhança de y_2 em F . Além disso, como f é linear temos que $f(U) + f(V) = f(U + V) \subset f(f^{-1}(W)) = W$, provando que a operação de adição em F é contínua. Por outro lado, se W' é uma vizinhança de λx_2 em F , onde $\lambda \in K$, então $f^{-1}(W')$ é uma vizinhança de λx_1 em E . Logo, existem uma vizinhança U de λ em K e uma vizinhança V de x_1 em E de modo que $U V \subset f^{-1}(W')$. Todavia, $f(V)$ é vizinhança de x_2 em F e, temos que $U f(V) = f(U V) \subset f(f^{-1}(W')) = W'$, estabelecendo a continuidade da operação de multiplicação por escalar em F .

Agora, resta mostrar que a topologia imagem direta por f da topologia de E é uma topologia separada. Sejam $y_1, y_2 \in F$ com $y_1 \neq y_2$. Como f é sobrejetora, existem

$x_1, x_2 \in E$ tais que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Como

$$f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2) = y_1 - y_2 \neq 0,$$

temos que $x_1 - x_2 \notin f^{-1}(0)$. Por hipótese, $f^{-1}(0)$ é fechado em E . Logo, existe uma vizinhança U de 0 em E tal que $(x_1 - x_2 + U) \cap f^{-1}(0) = \emptyset$. Seja V uma vizinhança de 0 em E tal que $V + V \subset U$. Então

$$[(x_1 + V) - (x_2 - V)] \cap f^{-1}(0) = \emptyset.$$

Como f é uma aplicação aberta, $W_1 := f(x_1 + V)$ é uma vizinhança de y_1 e $W_2 := f(x_2 - V)$ é uma vizinhança de y_2 . Como $0 \notin W_1 - W_2$, concluímos que

$$W_1 \cap W_2 = \emptyset.$$

Corolário 13. Se E é um espaço vetorial topológico sobre K e M é um subespaço vetorial fechado de E , então E/M munido da topologia quociente é um espaço vetorial topológico sobre K , e a sobrejeção canônica $\phi: E \rightarrow E/M$ é contínua e aplica abertos de E em abertos de E/M .

Sejam E e F espaços vetoriais topológicos. Uma função $f: E \rightarrow F$ é dita um *isomorfismo* se f é um isomorfismo de espaços vetoriais contínuo cuja inversa $f^{-1}: F \rightarrow E$ também é contínua.

Seja E um espaço vetorial topológico e sejam M_1 e M_2 subespaços vetoriais de E tais que $E = M_1 \oplus M_2$. Dizemos que E é a *soma direta topológica* de M_1 e M_2 se a função

$$(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2 \mapsto x_1 + x_2 \in E$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais topológicos, onde consideramos $M_1 \times M_2$ munido da topologia produto.

Como a função acima é claramente bijetora, linear e contínua, E é a soma direta topológica de M_1 e M_2 se, e somente se, a inversa dessa função é contínua. Mas, isto

equivale a dizer que as projeções canônicas

$$p_1: E \rightarrow M_1 \quad \text{e} \quad p_2: E \rightarrow M_2$$

são contínuas. Note que, como $p_1(x) + p_2(x) = x$ para todo $x \in E$, a continuidade de uma das projeções p_1 e p_2 implica a continuidade de ambas.

Seja E um espaço vetorial topológico sobre um anel de divisão topológico K . Um filtro $\mathcal{F}$ sobre E é dito um *filtro de Cauchy* se, para toda vizinhança V de 0 em E , existe $X \in \mathcal{F}$ tal que

$$X - X \subset V.$$

Se $\mathcal{F}$ possui um limite em E , então $\mathcal{F}$ é um filtro de Cauchy. Se, reciprocamente, todo filtro de Cauchy sobre E possui um limite em E , dizemos que E é um *espaço vetorial topológico completo*. Note que se um anel topológico A contém K como um subanel topológico, então A pode ser visto como um espaço vetorial topológico sobre K . Além disso, dizer que A é completo como anel topológico ou como espaço vetorial topológico sobre K é a mesma coisa.

Proposição 14. Seja E um espaço vetorial topológico sobre um anel de divisão topológico K e seja F um subespaço de E . Se F é completo então F é fechado em E .

Demonstração: Dado $x \in \overline{F}$, o conjunto

$$\mathcal{F} = \{V \cap F; V \text{ é vizinhança de } x \text{ em } E\}$$

é um filtro sobre F . Além disso, $\mathcal{F}$ é um filtro de Cauchy. Com efeito, se U é uma vizinhança de 0 em F , então existe uma vizinhança V de 0 em E tal que $U = V \cap F$ e existe uma vizinhança V' de 0 em E tal que $V' - V' \subset V$. Logo, $V' \cap F \in \mathcal{F}$ e

$$(V' \cap F) - (V' \cap F) \subset (V' - V') \cap F \subset V \cap F = U.$$

Como F é completo, $\mathcal{F}$ converge para um certo $y \in F$. Afirmamos que $x = y$, provando que $x \in F$ e F é fechado em E . De fato, suponha $x \neq y$. Então existem vizinhanças V_x e

V_y de x e y em E tais que $V_x \cap V_y = \phi$. Como $V_y \cap F$ é uma vizinhança de y em F e $\mathcal{F}$ converge para y em F , $V_y \cap F \in \mathcal{F}$. Mas, pela definição de $\mathcal{F}$, $V_x \cap F \in \mathcal{F}$. Logo,

$$\phi = (V_x \cap F) \cap (V_y \cap F) \in \mathcal{F},$$

uma contradição.

Proposição 15. Sejam $E_1, \dots, E_n$ espaços vetoriais topológicos sobre um anel de divisão topológico K . Se $E_1, \dots, E_n$ são completos então o espaço produto $E = E_1 \times \dots \times E_n$ também é completo.

Demonstração: Seja $\mathcal{F}$ um filtro de Cauchy sobre E . Para cada $1 \leq i \leq n$, seja $\pi_i: E \rightarrow E_i$ a projeção canônica e defina

$$\mathcal{F}_i = \{X \subset E_i; X \supset \pi_i(Y) \text{ para algum } Y \in \mathcal{F}\}.$$

É fácil ver que $\mathcal{F}_i$ é um filtro sobre E_i . Afirmamos que $\mathcal{F}_i$ é um filtro de Cauchy. Com efeito, seja U_i uma vizinhança de 0 em E_i . Como π_i é contínua, existe uma vizinhança U de 0 em E tal que $\pi_i(U) \subset U_i$. Como $\mathcal{F}$ é um filtro de Cauchy, existe $Y \in \mathcal{F}$ tal que $Y - Y \subset U$. Logo, $\pi_i(Y) \in \mathcal{F}_i$ e

$$\pi_i(Y) - \pi_i(Y) = \pi_i(Y - Y) \subset \pi_i(U) \subset U_i.$$

Como E_i é completo, $\mathcal{F}_i$ converge para um certo $x_i \in E_i$. Ponha

$$x = (x_1, \dots, x_n).$$

Vamos mostrar que $\mathcal{F}$ converge para x . Com efeito, seja V uma vizinhança de x em E . Então existe um conjunto elementar $V_1 \times \dots \times V_n$ tal que

$$x \in V_1 \times \dots \times V_n \subset V.$$

Como V_i é uma vizinhança de x_i e $\mathcal{F}_i$ converge para x_i , $V_i \in \mathcal{F}_i$. Pela definição de $\mathcal{F}_i$, existe $Y^{(i)} \in \mathcal{F}$ tal que $V_i \supset \pi_i(Y^{(i)})$. Considere

$$Y = Y^{(1)} \cap \dots \cap Y^{(n)} \in \mathcal{F}.$$

Como $V_i \supset \pi_i(Y)$ para todo $1 \leq i \leq n$, vemos que

$$Y \subset V_1 \times \cdots \times V_n \subset V,$$

provando que $V \in \mathcal{F}$.

Corolário 16. Se K é um anel de divisão topológico completo, então o espaço vetorial topológico produto K^n é completo.

CAPÍTULO 2

ESPAÇOS DE DIMENSÃO FINITA

1. Anéis estritamente minimais

Seja K um anel de divisão topológico munido de uma topologia de anel de divisão $\mathcal{T}_K$. Uma topologia $\mathcal{T}$ sobre K é dita uma *topologia vetorial com respeito a $\mathcal{T}_K$* se $(K, \mathcal{T})$ é um espaço vetorial topológico sobre $(K, \mathcal{T}_K)$. Isto significa que as aplicações

$$(x, y) \in (K, \mathcal{T}) \times (K, \mathcal{T}) \mapsto x + y \in (K, \mathcal{T})$$

e

$$(x, y) \in (K, \mathcal{T}_K) \times (K, \mathcal{T}) \mapsto xy \in (K, \mathcal{T})$$

são contínuas.

Afirmamos que $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}_K$. Com efeito, como a aplicação $(x, y) \in (K, \mathcal{T}_K) \times (K, \mathcal{T}) \mapsto xy \in (K, \mathcal{T})$ é contínua, fazendo $y = 1$, temos que a aplicação identidade $x \in (K, \mathcal{T}_K) \mapsto x \in (K, \mathcal{T})$ é contínua, donde $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}_K$. É de grande valia observar que se $\mathcal{T}$ é uma topologia de anel de divisão sobre K e $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}_K$, então $\mathcal{T}$ é uma topologia vetorial com respeito a $\mathcal{T}_K$.

Considere K um anel de divisão topológico munido de uma topologia de anel de divisão $\mathcal{T}_K$.

- K é dito *minimal* se não existe uma topologia de anel de divisão $\mathcal{T}$ sobre K tal que $\mathcal{T} < \mathcal{T}_K$.

- K é dito *estritamente minimal* se a única topologia vetorial sobre K com respeito a $\mathcal{T}_K$ é $\mathcal{T}_K$. Isto equivale a dizer que não existe uma topologia vetorial $\mathcal{T}$ sobre K com respeito a $\mathcal{T}_K$ tal que $\mathcal{T} < \mathcal{T}_K$.

Teorema 1. Todo anel de divisão topológico estritamente minimal é minimal.

Demonstração: Considere K um anel de divisão topológico estritamente minimal munido de uma topologia de anel de divisão $\mathcal{T}_K$ e seja $\mathcal{T}$ uma outra topologia de anel de

divisão sobre K . Se $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}_K$ então $\mathcal{T}$ é uma topologia vetorial com respeito a $\mathcal{T}_K$. Como, por hipótese, K é estritamente minimal, concluímos que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_K$ e, por conseguinte, K é minimal.

Seja K um anel de divisão topológico. Um conjunto $A \subset K$ é dito *limitado à esquerda* se, para toda vizinhança W de 0, existe uma vizinhança V de 0 tal que $V A \subset W$.

Proposição 2. Seja K um anel de divisão topológico. Temos que:

- (A) Se K é discreto, então todo subconjunto de K é limitado à esquerda.
- (B) Se K não é discreto, então um subconjunto A de K é limitado à esquerda se, e somente se, para toda vizinhança W de 0, existe um $\lambda \in K$ não nulo tal que $\lambda A \subset W$.

Demonstração: (A) Se K é discreto então $V = \{0\}$ é uma vizinhança de 0. Portanto, dados um subconjunto A de K e uma vizinhança W de 0 temos que $V \cdot A = \{0\} \cdot A = \{0\} \subset W$, donde A é limitado à esquerda.

(B) ($\Rightarrow$): Sejam W uma vizinhança de 0 e $A \subset K$ um conjunto limitado à esquerda. Por definição, existe uma vizinhança V de 0 tal que $V A \subset W$. Como K não é discreto, $V \neq \{0\}$. Portanto, tome $\lambda \in V$ não nulo. Daí, $\lambda A \subset W$.

($\Leftarrow$): Seja W uma vizinhança de 0. Sabemos que existe uma vizinhança W_1 de 0 de modo que $W_1 W_1 \subset W$. Por hipótese, existe um $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda A \subset W_1$. Fazendo $V = W_1 \lambda$ temos que V é uma vizinhança de 0 e $V A \subset W$, donde A é limitado à esquerda.

Seja K um anel de divisão topológico. Um conjunto $B \subset K$ é dito *restrito* se existe uma vizinhança V de 0 satisfazendo as seguintes condições equivalentes: $1 \notin VB$, $1 \notin BV$.

Proposição 3. Sejam K um anel de divisão topológico e $A \subset K$ um conjunto qualquer. Temos que:

- (A) K tem pelo menos uma vizinhança de 0 restrita.
- (B) Se A é limitado à esquerda então A é restrito.

Demonstração: (A) De fato, considere W uma vizinhança de 0 onde $1 \notin W$ e tome uma vizinhança V de 0 de modo que $V V \subset W$. Portanto, $1 \notin V V$, donde V é um conjunto restrito.

(B) Seja W uma vizinhança de 0 tal que $1 \notin W$. Como A é limitado à esquerda, existe uma vizinhança V de 0 tal que $VA \subset W$. Logo, $1 \notin VA$ e, por definição, A é restrito.

Teorema 4. Seja K um anel de divisão topológico não discreto. Se todo conjunto restrito $A \subset K$ é limitado à esquerda, então K é estritamente minimal.

Demonstração: Considere K munido da topologia de anel de divisão $\mathcal{T}_K$ e seja $\mathcal{T}$ uma topologia vetorial sobre K com respeito a $\mathcal{T}_K$. Então, *a priori*, temos que $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}_K$.

Seja V_0 uma vizinhança de 0 na topologia $\mathcal{T}$ tal que $1 \notin V_0$. Note que a continuidade da aplicação $(x, y) \in (K, \mathcal{T}_K) \times (K, \mathcal{T}) \mapsto xy \in (K, \mathcal{T})$ garante a existência de uma vizinhança V_1 de 0 na topologia $\mathcal{T}_K$ e de uma vizinhança V_2 de 0 na topologia $\mathcal{T}$ de modo que $V_1V_2 \subset V_0$. Daí, $1 \notin V_1V_2$. Isto mostra que V_2 é restrito na topologia $\mathcal{T}_K$. Por hipótese, V_2 é limitado à esquerda na topologia $\mathcal{T}_K$. Logo, para toda vizinhança V de 0 na topologia $\mathcal{T}_K$ existe um $\lambda \in K$ não nulo tal que $\lambda V_2 \subset V$. Como λV_2 é uma vizinhança de 0 na topologia $\mathcal{T}$ temos que V também o é. Deste modo concluímos que $\mathcal{T}_K \leq \mathcal{T}$ e, portanto, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_K$. Logo, K é estritamente minimal.

Corolário 5. Todo anel de divisão valorizado não discreto é estritamente minimal.

Demonstração: Seja K um anel de divisão valorizado não discreto com valor absoluto $|\cdot|$ e seja $A \subset K$ um conjunto restrito. Tendo em vista o teorema anterior, basta provarmos que A é limitado à esquerda. Pela definição de conjunto restrito, existe $\delta > 0$ tal que

$$1 \notin VA, \quad \text{onde} \quad V = \{\lambda \in K; |\lambda| < \delta\}.$$

Isto implica que

$$|a| \leq 1/\delta \quad \text{para todo} \quad a \in A.$$

Com efeito, se $a \in A$ e $|a| > \frac{1}{\delta}$ então $|a^{-1}| = |a|^{-1} < \delta$, donde $a^{-1} \in V$ e $1 = a^{-1}a \in VA$, um absurdo. Agora, considere uma vizinhança de 0 da forma

$$W = \{\lambda \in K; |\lambda| < \varepsilon\}, \quad \text{onde} \quad \varepsilon > 0.$$

Como K não é discreto, existe $\alpha \in K$ tal que $0 < |\alpha| < 1$. Daí, $\alpha^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Escolhendo n suficientemente grande para que $|\alpha^n| < \varepsilon\delta$, temos que

$$\alpha^n A \subset W,$$

provando que A é limitado à esquerda.

Um resultado importante da Teoria das Valorizações afirma que a topologia de qualquer anel de divisão localmente compacto é dada por um valor absoluto (veja o Teorema 1.44 de [10], por exemplo). Assim sendo, decorre do Corolário 5 que todo anel de divisão localmente compacto não discreto é estritamente minimal.

2. Espaços uni-dimensionais

Teorema 6. Seja K um anel de divisão topológico munido da topologia de anel de divisão $\mathcal{T}_K$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) K é estritamente minimal.
- (ii) Todo espaço vetorial topológico sobre K de dimensão 1 é isomorfo a K .
- (iii) Para todo espaço vetorial topológico E sobre K de dimensão 1, todo isomorfismo de espaços vetoriais $f: E \rightarrow K$ é um isomorfismo de espaços vetoriais topológicos.
- (iv) Todo espaço vetorial E sobre K de dimensão 1 possui uma única topologia vetorial.
- (v) Para quaisquer espaços vetoriais topológicos E e F sobre K com $\dim E = 1$, toda aplicação linear $f: E \rightarrow F$ é contínua.

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii): Seja E um espaço vetorial topológico sobre K de dimensão 1 e seja $f: E \rightarrow K$ um isomorfismo de espaços vetoriais. Pela Proposição 11 do Capítulo 1, a aplicação $f^{-1}: K \rightarrow E$ é contínua. Então, basta mostrar que f também é contínua. Com efeito, como f é um isomorfismo de espaços vetoriais, $f^{-1}(0) = \{0\}$ é fechado em E e, além disso, f é sobrejetora. Considere, pois, $\mathcal{T}$ como sendo a topologia imagem direta por f da topologia de E . Pela Proposição 12 do Capítulo 1, f é contínua se considerarmos

K munido da topologia $\mathcal{T}$ e $(K, \mathcal{T})$ é um espaço vetorial topológico sobre $(K, \mathcal{T}_K)$. Como, por hipótese, K é estritamente minimal, temos que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_K$, o que conclui o desejado.

(ii) $\Rightarrow$ (v): Considere E e F espaços vetoriais topológicos sobre K , onde E é unidimensional. Seja $f: E \rightarrow F$ uma aplicação linear. Por hipótese, existe um isomorfismo $g: K \rightarrow E$. Observe que, como f é linear, $f \circ g: K \rightarrow F$ também é linear. Logo, pela Proposição 11 do Capítulo 1, $f \circ g$ é contínua. Como $f = (f \circ g) \circ g^{-1}$ e g^{-1} é contínua, concluímos que f é contínua, pelo Corolário 4 do Capítulo 1.

(v) $\Rightarrow$ (iii): Seja $f: E \rightarrow K$ um isomorfismo de espaços vetoriais. Por hipótese, f é contínua. Mas, pela Proposição 11 do Capítulo 1, f^{-1} também é contínua. Por conseguinte, f é um isomorfismo de espaços vetoriais topológicos.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Como E é algebricamente isomorfo a K , E possui uma topologia vetorial. Suponha que $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ sejam topologias vetoriais sobre E . Fixemos um isomorfismo de espaços vetoriais $f: E \rightarrow K$. Sejam $f_1: (E, \mathcal{T}_1) \rightarrow K$ e $f_2: (E, \mathcal{T}_2) \rightarrow K$ dados por $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$ para todo $x \in E$. Por hipótese, f_1 e f_2 são isomorfismos de espaços vetoriais topológicos. Sendo assim, a aplicação $\text{id} = f_2^{-1} \circ f_1: (E, \mathcal{T}_1) \rightarrow (E, \mathcal{T}_2)$ é um isomorfismo de espaços vetoriais topológicos, donde $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Suponha que K não seja estritamente minimal. Então, existe uma topologia vetorial $\mathcal{T}$ sobre K com respeito a $\mathcal{T}_K$ tal que $\mathcal{T} < \mathcal{T}_K$. Ou seja, K possui duas topologias vetoriais distintas, o que contradiz (iv).

Teorema 7. Seja K um anel de divisão topológico munido da topologia de anel de divisão $\mathcal{T}_K$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) K é estritamente minimal.
- (ii) Para quaisquer espaços vetoriais topológicos E e F sobre K com $\dim F = 1$, uma aplicação linear $f: E \rightarrow F$ é contínua se e somente se o seu núcleo $f^{-1}(0)$ é fechado em E .
- (iii) Para quaisquer espaços vetoriais topológicos E e F sobre K com $\dim F = 1$, uma aplicação linear $f: E \rightarrow F$ é contínua se e somente se o seu gráfico $G(f)$ é fechado

em $E \times F$.

Demonstração: Sejam $\mathcal{T}_E$ e $\mathcal{T}_F$ as topologias de E e F , respectivamente.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Se f é contínua então $f^{-1}(0)$ é fechado em E pela Proposição 3 do Capítulo 1. Reciprocamente, suponha que $f^{-1}(0)$ é fechado em E . Se $f \equiv 0$ então f é obviamente contínua. Suponha que $f \not\equiv 0$, o que implica que $f(E) = F$, já que F tem dimensão 1. Portanto, podemos introduzir em F a topologia imagem direta $\mathcal{T}'_F$ por f da topologia $\mathcal{T}_E$. Pelo teorema anterior, F possui somente uma topologia vetorial, donde $\mathcal{T}_F = \mathcal{T}'_F$. Lembrando que f é contínua se considerarmos F munido da topologia $\mathcal{T}'_F$, concluímos o desejado.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Se $f: E \rightarrow F$ é contínua então $G(f)$ é fechado em $E \times F$ pela Proposição 6 do Capítulo 1. Reciprocamente, suponha que $G(f)$ é fechado em $E \times F$. Defina $\varphi: E \times F \rightarrow F$ pondo $\varphi(x, y) = f(x) - y$ para todo $x \in E$ e para todo $y \in F$. Temos, então, que φ é uma aplicação linear cujo núcleo $\varphi^{-1}(0) = G(f)$ é fechado em $E \times F$. Logo, φ é contínua, por hipótese. Como $\varphi(x, 0) = f(x)$, f também é contínua.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Suponha, por absurdo, que K não é estritamente minimal. Então, existe uma topologia vetorial $\mathcal{T}$ sobre K com respeito a $\mathcal{T}_K$ tal que $\mathcal{T} < \mathcal{T}_K$. Considere $E = (K, \mathcal{T})$ um espaço vetorial topológico sobre $(K, \mathcal{T}_K)$, $F = (K, \mathcal{T}_K)$ um espaço vetorial topológico sobre $(K, \mathcal{T}_K)$ e a aplicação linear não-nula $f: E \rightarrow F$ dada por $f(x) = x$ para todo $x \in E$. Note que $G(f) = \{(x, x) \in E \times F; x \in E\}$ é fechado em $E \times F$, mas f não é contínua, já que $\mathcal{T} < \mathcal{T}_K$.

Corolário 8. Seja E um espaço vetorial topológico sobre um anel de divisão topológico estritamente minimal K . Suponha que M_1 e M_2 são subespaços vetoriais de E tais que

$$E = M_1 \oplus M_2 \quad \text{e} \quad \dim M_1 = 1.$$

Então E é a soma direta topológica dos subespaços M_1 e M_2 se e somente se M_2 é fechado em E .

Demonstração: Sabemos que E é a soma direta topológica de M_1 e M_2 se e somente se a projeção canônica $f: E \rightarrow M_1$ é contínua. Mas pelo item (ii) do Teorema 7, isto ocorre exatamente quando $M_2 = f^{-1}(0)$ é fechado em E .

3. Espaços de dimensão finita

Teorema 9. Seja K um anel de divisão topológico munido da topologia de anel de divisão $\mathcal{T}_K$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) K é estritamente minimal e completo.
- (ii) Todo espaço vetorial topológico sobre K de dimensão finita n é isomorfo a K^n .
- (iii) Para todo espaço vetorial topológico E sobre K de dimensão finita n , todo isomorfismo de espaços vetoriais $f: E \rightarrow K^n$ é um isomorfismo de espaços vetoriais topológicos.
- (iv) Todo espaço vetorial E sobre K de dimensão finita possui uma única topologia vetorial.
- (v) Para quaisquer espaços vetoriais topológicos E e F sobre K com $\dim E = n < \infty$, toda aplicação linear $f: E \rightarrow F$ é contínua.

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii): A prova será feita por indução sobre n . Se $n = 1$ o resultado decorre do fato de K ser estritamente minimal, pelo Teorema 6. Suponha que o resultado seja válido para espaços vetoriais topológicos de dimensão $n - 1$. Seja, então, E um espaço vetorial topológico de dimensão n e considere $f: E \rightarrow K^n$ um isomorfismo de espaços vetoriais. Dado $x \in E$, podemos escrever $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Note que $f_i^{-1}(0)$ é um subespaço de E de dimensão $n - 1$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Portanto, $f_i^{-1}(0)$ munido da topologia induzida pela topologia de E é isomorfo a K^{n-1} , pela hipótese de indução. Logo, $f_i^{-1}(0)$ é completo, pois K^{n-1} é completo (Corolário 16 do Capítulo 1), donde é fechado em E (Proposição 14 do Capítulo 1). Pelo item (ii) do Teorema 7, cada f_i é uma função contínua e, por conseguinte, f também o é. Por outro lado, a Proposição

11 do Capítulo 1 garante que f^{-1} também é contínua. Daí, f é um isomorfismo de espaços vetoriais topológicos, ou seja, E é isomorfo a K^n .

(ii) $\Rightarrow$ (v): Sejam E e F espaços vetoriais topológicos sobre K , onde E tem dimensão finita n e seja $f: E \rightarrow F$ uma aplicação linear. Por hipótese, existe um isomorfismo $g: K^n \rightarrow E$. Como f é linear temos que $f \circ g: K^n \rightarrow F$ também é linear. Portanto, pela Proposição 11 do Capítulo 1, $f \circ g$ é contínua. Como $f = (f \circ g) \circ g^{-1}$ e g^{-1} é contínua, concluímos que f é contínua.

(v) $\Rightarrow$ (iii): Seja $f: E \rightarrow K^n$ um isomorfismo de espaços vetoriais. Por hipótese, f é contínua. Porém, pela Proposição 11 do Capítulo 1, f^{-1} também é contínua. Logo, f é um isomorfismo de espaços vetoriais topológicos.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Seja E um espaço vetorial sobre K de dimensão n . Como E é algebricamente isomorfo a K^n , E possui uma topologia vetorial. Suponha que $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ sejam topologias vetoriais sobre E . Fixemos um isomorfismo de espaços vetoriais $f: E \rightarrow K^n$. Sejam $f_1: (E, \mathcal{T}_1) \rightarrow K^n$ e $f_2: (E, \mathcal{T}_2) \rightarrow K^n$ dados por $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$ para todo $x \in E$. Por hipótese, f_1 e f_2 são isomorfismos de espaços vetoriais topológicos. Portanto, a aplicação $\text{id} = f_2^{-1} \circ f_1: (E, \mathcal{T}_1) \rightarrow (E, \mathcal{T}_2)$ é um isomorfismo de espaços vetoriais topológicos, donde $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Suponha que a afirmação (i) seja falsa. Se K não é estritamente minimal então existe uma topologia vetorial $\mathcal{T}$ sobre K com respeito a $\mathcal{T}_K$ tal que $\mathcal{T} < \mathcal{T}_K$. Isto é, K possui duas topologias vetoriais distintas, o que contradiz (iv). Agora, suponha que K não é completo e tome $y \in \widehat{K} \setminus K$, onde $\widehat{K}$ é o completamento de K (Teorema 9 do Capítulo 1). Pensemos em $\widehat{K}$ como um espaço vetorial topológico sobre K e seja E o subespaço vetorial de $\widehat{K}$ gerado por K e por y , ou seja, $E = \{x + \lambda y; x, \lambda \in K\}$. Seja $\mathcal{T}_1$ a topologia sobre E induzida pela topologia de $\widehat{K}$. É sabido que $\mathcal{T}_1$ é uma topologia vetorial sobre E . Como E é um subespaço de dimensão 2, considere o isomorfismo de espaços vetoriais $f: K^2 \rightarrow E$ dado por $f(x, \lambda) = x + \lambda y$ para todo $(x, \lambda) \in K^2$. Pela Proposição 12 do Capítulo 1, a topologia imagem direta por f da topologia de K^2 é uma

topologia vetorial sobre E . Considere, pois, $\mathcal{T}_2$ como sendo tal topologia. Vejamos que $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$. De fato, note que K é fechado em $(E, \mathcal{T}_2)$, pois $f^{-1}(K) = K \times \{0\}$, que é um conjunto fechado em K^2 . Mas, K não é fechado em $(E, \mathcal{T}_1)$, uma vez que K é denso em $\widehat{K}$ e, por conseguinte, é denso em E . Desta forma o fecho de K na topologia $\mathcal{T}_1$ é igual ao subespaço E . Com isso, $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ são topologias vetoriais distintas sobre E , o que contradiz (iv). Portanto, K é estritamente minimal e completo.

Teorema 10. Seja K um anel de divisão topológico munido da topologia de anel de divisão $\mathcal{T}_K$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) K é estritamente minimal e completo.
- (ii) Para quaisquer espaços vetoriais topológicos E e F sobre K com $\dim F = n < \infty$, uma aplicação linear $f: E \rightarrow F$ é contínua se e somente se o seu núcleo $f^{-1}(0)$ é fechado em E .
- (iii) Para quaisquer espaços vetoriais topológicos E e F sobre K com $\dim F = n < \infty$ uma aplicação linear $f: E \rightarrow F$ é contínua se e somente se o seu gráfico $G(f)$ é fechado em $E \times F$.

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii): Se f é contínua então $f^{-1}(0)$ é fechado em E pela Proposição 3 do Capítulo 1. Reciprocamente, suponha que $f^{-1}(0)$ é fechado em E . Supondo, sem perda de generalidade, que a aplicação linear $f: E \rightarrow F$ é sobrejetora e procedendo de forma análoga à demonstração do Teorema 7 ((i) $\Rightarrow$ (ii)) da seção anterior, concluímos o desejado. Todavia, cabe ressaltar que agora é preciso recorrer ao Teorema 9.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Basta proceder como na demonstração do Teorema 7 da seção anterior no passo (ii) $\Rightarrow$ (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i): Suponha que a afirmação (i) seja falsa. Se K não é estritamente minimal, procedemos de forma análoga à demonstração do Teorema 7 ((iii) $\Rightarrow$ (i)) da seção anterior. Suponha, agora, que K não é completo. Pela demonstração do teorema precedente ((iv) $\Rightarrow$ (i)), podemos encontrar um espaço vetorial sobre K de dimensão 2 que possui

duas topologias vetoriais distintas $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$. Considere $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2$ e a aplicação identidade $f: (E, \mathcal{T}_1) \rightarrow (E, \mathcal{T}_2)$ dada por $f(x) = x$ para todo $x \in (E, \mathcal{T}_1)$. Sendo assim, temos que $G(f) = \{(x, x) \in (E, \mathcal{T}_1) \times (E, \mathcal{T}_2); x \in E\}$ é fechado em $(E, \mathcal{T}_1) \times (E, \mathcal{T}_2)$, mas f não é contínua, já que $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2$.

Corolário 11. Seja E um espaço vetorial topológico sobre um anel de divisão topológico estritamente minimal e completo K . Suponha que M_1 e M_2 são subespaços vetoriais de E tais que

$$E = M_1 \oplus M_2 \quad \text{e} \quad \dim M_1 = n < \infty.$$

Então E é a soma direta topológica dos subespaços M_1 e M_2 se e somente se M_2 é fechado em E .

Demonstração: É sabido que E é a soma direta topológica de M_1 e M_2 se e somente se a projeção canônica $f: E \rightarrow M_1$ é contínua. Porém pelo item (ii) do Teorema 10, isto ocorre exatamente quando $M_2 = f^{-1}(0)$ é fechado em E .

Referências Bibliográficas

- [1] E. Artin, Algebraic Numbers and Algebraic Functions, New York University, 1951.
- [2] N. Bourbaki, Commutative Algebra, Hermann & Addison-Wesley, 1972.
- [3] N. Bourbaki, General Topology, Chapters 1-4, Springer-Verlag, 1989.
- [4] N. Bourbaki, General Topology, Chapters 5-10, Springer-Verlag, 1989.
- [5] J. Braconnier, Sur les espaces vectoriels localement compacts, C.R. Acad. Sci.Paris 222 (1946), 777-778.
- [6] F. Hausdorff, Zur Theorie der linearen metrischen Räume, J. Reine Angew. Math. 167 (1932), 294-311.
- [7] I. Kaplansky, Topological rings, Amer. J. Math. 69 (1947), 153-183.
- [8] J.R. Munkres, Topology - A First Course, Prentice Hall, 1975.
- [9] L. Nachbin, On strictly minimal topological division rings, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 1128-1136.
- [10] J. B. Prolla, Topics in Functional Analysis over Valued Division Rings, North-Holland Math. Studies 77, North-Holland, 1982.
- [11] A. Tychonoff, Ein Fixpunktsatz, Math. Ann. 111 (1935), 767-776.
- [12] S. Warner, Topological Fields, North-Holland, 1989.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)