

UFF
Instituto de
Matemática

Centro de Estudos Gerais
Curso de Mestrado em Matemática
Coordenação de Pós Graduação em Matemática

LAURA SENOS LACERDA

**O TEOREMA DO PONTO FIXO DE POINCARÉ-
BIRKHOFF**

Orientador: Sebastião Marcos Firmo

**UNIVERSIDADE
FEDERAL
FLUMINENSE**

**NITERÓI
Abril/2006**

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

LAURA SENOS LACERDA

O TEOREMA DO PONTO FIXO DE POINCARÉ-BIRKHOFF

Dissertação apresentada por **Laura Senos Lacerda** ao Curso de Mestrado em Matemática - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre. Linha de Pesquisa: Topologia

Orientador: Sebastião Marcos Firmo

Niterói
2006

(Atenção: Esta ficha deve ser impressa no verso da folha de rosto)

CONSULTE A BIBLIOTECA EM CASO DE DÚVIDA

B854 (Notação numérica do sobrenome do autor)

Lacerda, Laura Senos

O Teorema do Ponto Fixo de Poincaré-Birkhoff /
Laura Senos Lacerda. - Niterói: [s.n.], 2006.

Dissertação (Mestrado em Matemática – Topologia) -
Universidade Federal Fluminense, 2006.

1. Topologia

(Classificação do assunto principal) CDD: 510

LAURA SENOS LACERDA

O TEOREMA DO PONTO FIXO DE POINCARÉ-BIRKHOFF

Dissertação apresentada por **Laura Senos Lacerda** ao Curso de Mestrado em Matemática - da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre. Linha de Pesquisa: Topologia.

Aprovada em: 10 de abril de 2006.

Banca Examinadora

Prof. Sebastião Marcos Firmo - Orientador
Doutor – Universidade Federal Fluminense

Prof. Bruno Scárdua - Membro
Doutor – Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Júlio Rebelo - Membro
Doutor – Pontifícia Universidade Católica – Rio de Janeiro

NITERÓI

Ano

DEDICATÓRIAS

A minha família ...

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Professor Sebastião Marcos Firmo pela orientação e paciência.

Aos meus pais e meus irmãos, pelo apoio constante que sempre me deram...

Aos professores que fizeram parte da minha formação acadêmica durante toda minha vida.

Aos meus colegas e amigos, por todas as conversas e o convívio agradável.

Aos funcionários da secretaria que sempre me ajudaram com problemas da mais diversa natureza.

Finalmente agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro que tornou possível minha conclusão no programa de Mestrado.

RESUMO

Essa dissertação é baseada no clássico artigo:

M. Brown and W. D. Newmann, *Proof of the Poincaré-Birkhoff fixed point theorem*, Michigan Math. J., 24 (1977), 21-31.

O celebrado Teorema de Poincaré-Birkhoff garante a existência de dois pontos fixos para homeomorfismos do anel que são de torção e preservam área.

Segundo os autores, a prova apresentada por eles é uma modificação da prova inicialmente apresentada por Birkhoff em 1913 na sua primeira tentativa (segunda em 1925) de demonstrar esse resultado que foi formulado como conjectura por Poincaré em 1912 e para o qual Poincaré apresentou demonstrações para alguns casos particulares.

ABSTRACT

This dissertation is based on the classic article:

M. Brown and W. D. Newmann, Proof of the Poincaré-Birkhoff fixed point theorem, Michigan Math. J., 24 (1977), 21-31.

The celebrated Poincaré-Birkhoff theorem guarantees the existence of two fixed points to a homeomorphism of the ring which is twist and preserve area.

According to authors, the proof presented for them is an modification of the proof initially presented by Birkhoff in 1913 in its first attempt (second in 1925) to demonstrate this result that was formulated as a conjecture for Poincaré in 1912 and for which Poincaré presented demonstrations for some particular cases.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO.....	1
1 PRELIMINARES.....	2
1.1 ESPAÇOS DE RECOBRIMENTO.....	2
1.2 NÚMEROS DE ROTAÇÃO E ÍNDICE	9
1.2.1 DEFINIÇÕES.....	9
1.2.2 PROPRIEDADES DO ÍNDICE.....	11
2 O TEOREMA.....	17
2.0.3 O ENUNCIADO	17
2.1 PROVA DO TEOREMA	21
3 REFERÊNCIAS.....	54

Apresentação

Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ um anel em \mathbb{R}^2 .

A idéia de um homeomorfismo de torção do anel A é a de um homeomorfismo $g : A \rightarrow A$ que rotaciona as duas componentes do bordo de A em direções opostas.

De fato, não podemos definir homeomorfismo de torção dessa maneira, pois ela é ambígua: uma rotação no sentido anti-horário de um ângulo θ é a mesma rotação no sentido horário de um ângulo $(2\pi - \theta)$.

Resolveremos essa questão passando ao recobrimento universal de A .

O Teorema do Ponto Fixo de Poincaré-Birkhoff, também conhecido como o “*último teorema geométrico de Poincaré*”, assegura a existência de pelo menos dois pontos fixos para um homeomorfismo de torção do anel que preserva área.

Ele foi formulado como uma conjectura e provado para casos particulares por Poincaré, em [5], pouco antes de sua morte. Menos de um ano depois, George Birkhoff em [1] publicou uma prova que, embora correta para um ponto fixo, não considerou a possibilidade desse ponto fixo ter índice 0 na dedução da existência do segundo ponto fixo. Birkhoff corrigiu este erro em [2] publicado em 1925.

Esta monografia é baseada no artigo [3] e apresenta uma prova do teorema para dois pontos fixos, que contém poucas modificações da prova original de Birkhoff para um ponto. Para conseguir o segundo ponto fixo, a estratégia usada é essencialmente a mesma usada por Birkhoff em [2].

Capítulo 1

Preliminares

Neste Capítulo daremos algumas definições e estabeleceremos alguns resultados e notações que utilizaremos no decorrer deste trabalho. Os detalhes podem ser encontrados nos livros indicados no texto.

1.1 Espaços de recobrimento

Definição 1.1.1 (Espaço de recobrimento) *Seja E um espaço topológico. Dizemos que (E, p) é um espaço de recobrimento de X se existe uma aplicação contínua $p : E \rightarrow X$ com a seguinte propriedade: dado $x \in X$, existe uma vizinhança aberta $U \subset X$ de x , tal que $p^{-1}(U)$ é uma união disjunta de abertos em E , cada um deles homeomorfo a U via p .*

Sejam B , C e D conjuntos, e $f : D \rightarrow B$, $g : C \rightarrow B$ funções. Se existir uma função $\tilde{f} : D \rightarrow C$ tal que $\tilde{f} \circ g = f$, então dizemos que \tilde{f} é um levantamento de f por g .

Exemplo 1: Considere $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ a aplicação contínua definida por

$$t \mapsto (\cos t, \sin t), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Então (\mathbb{R}, π) é um espaço de recobrimento de S^1 .

De fato, dado $(a, b) \in S^1$, sabemos que se $\theta \in \pi^{-1}(a, b)$, então:

$$(a, b) = (\cos \theta, \sin \theta) = (\cos \theta + 2k\pi, \sin \theta + 2k\pi), \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}$$

Também temos que se $\theta' \in \pi^{-1}(a, b)$, então:

$$(\cos \theta', \sin \theta') = (a, b) = (\cos \theta, \sin \theta)$$

Segue:

$$\theta' = \theta + 2k\pi, \quad \text{para algum } k \in \mathbb{Z}$$

Então, fixando $\theta \in f^{-1}(a, b)$, temos que $f^{-1}(a, b) = \{\theta + 2k\pi \in \mathbb{R} / k \in \mathbb{Z}\}$.

Considere $U = S^1 \setminus (-a, -b)$ vizinhança aberta de (a, b) em S^1 .

Bem, para cada inteiro k , o intervalo $U_k = (\theta - k\pi, \theta - k\pi + 2\pi)$ é um subconjunto aberto da reta real. Sabemos também, que cada restrição $\pi|_{U_k}$ é um homeomorfismo sobre U .

Então $\pi^{-1}(U)$ é a união disjunta dos abertos $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} U_k$.

Segue daí que (\mathbb{R}, π) é um espaço de recobrimento de S^1 .

Exemplo 2: Considere $\pi : \mathbb{R} \times [0, 1] \longrightarrow A$, com $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$, a aplicação contínua definida por

$$(t, s) \longmapsto ((s + 1) \cos t, (s + 1) \sin t), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Então $([\mathbb{R} \times [0, 1], \pi)$ é um espaço de recobrimento de A .

De fato, dado $(a, b) \in A$, sabemos que se $(\theta, \rho) \in \pi^{-1}(a, b)$, então $(\theta', \rho') \in f^{-1}(a, b)$ se e somente se

$$\begin{aligned} ((\rho' + 1) \cos \theta', (\rho' + 1) \sin \theta') &= (a, b) = ((\rho + 1) \cos \theta, (\rho + 1) \sin \theta) \\ &\Downarrow \\ \rho &= \rho' \quad \text{e} \quad \theta' = \theta + 2k\pi, \end{aligned}$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Então, escolhendo $(\theta, \rho) \in f^{-1}(a, b)$, temos que

$$f^{-1}(a, b) = \{(\theta + 2k\pi, \rho) \in [0, 1] \times \mathbb{R} / k \in \mathbb{Z}\}.$$

Seja $0 < r < \min\{|2 - \rho|, |\rho - 1|\}$, e considere

$$U = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 1 + r < x^2 + y^2 < 2 - r \right\} \setminus \left\{ \left(\frac{-ta}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{-tb}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \in A ; t \in [1, 2] \right\}$$

vizinhança aberta de (a, b) .

Bem, fixando $\theta \in \pi^{-1}(a, b)$ temos que para cada inteiro k o conjunto $U_k = [r, 1 - r] \times (\theta - k\pi, \theta - k\pi + 2\pi)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times [0, 1]$. Sabemos também, que cada restrição $\pi|_{U_k}$ é um homeomorfismo sobre U .

Então $\pi^{-1}(U)$ é a união disjunta dos abertos $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} U_k$.

Segue daí que $([0, 1] \times \mathbb{R}, \pi)$ é um espaço de recobrimento de A .

Um caminho em X é uma aplicação contínua $\rho : [0, 1] \longrightarrow X$. Nesse caso chamamos $\rho(0)$ e $\rho(1)$ os pontos inicial e final do caminho ρ , respectivamente.

Dados dois caminhos $\rho : [0, 1] \longrightarrow X$ e $\delta : [0, 1] \longrightarrow X$ com mesmos pontos final e inicial, digamos $\rho(0) = \delta(0) = x_0$ e $\rho(1) = \delta(1) = x_1$, dizemos que ρ e δ são homotópicos se existir uma aplicação contínua $H : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X$ tal que:

$$H(t, 0) = \rho(t) \quad \text{e} \quad H(t, 1) = \delta(t) \quad \forall t \in [0, 1],$$

$$H(0, s) = x_0 \quad \text{e} \quad H(s, 1) = x_1 \quad \forall s \in [0, 1],$$

Sejam ρ e γ caminhos em X tais que $\rho(1) = \gamma(0)$. Definimos o caminho

$$\rho\gamma : [0, 1] \longrightarrow X \quad \text{por}$$

$$\rho\gamma(t) = \begin{cases} \rho(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \gamma(2t - 1) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

e chamamos $\rho\gamma$ a justaposição dos caminhos ρ e γ .

Definimos também o caminho

$$\begin{aligned} \rho^{-1} : [0, 1] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \rho(1 - t), \end{aligned}$$

e chamamos este caminho o caminho inverso de ρ .

Aqui daremos a justificativa de chamarmos a aplicação $\rho\gamma$ de caminho, ou seja, mostraremos que $\rho\gamma$ é contínua.

Como ρ e γ são contínuas, segue que $\rho\gamma$ é contínua em todo $t \neq 1/2$, e além disso temos

$$\lim_{t \rightarrow (1/2)^-} \rho\gamma(t) = \rho(1/2) = \gamma(1/2) = \lim_{t \rightarrow (1/2)^+} \rho\gamma(t)$$

E daí temos que $\rho\gamma$ é contínua em $t = 1/2$, e portanto é um caminho.

Um laço em X é caminho $\rho : [0, 1] \longrightarrow X$ tal que $\rho(0) = \rho(1)$. Nesse caso chamamos $\rho(0)$ de ponto base do laço ρ .

Aplicando a definição de caminhos homotópicos à laços, dados dois laços $\alpha : [0, 1] \longrightarrow X$ e $\beta : [0, 1] \longrightarrow X$, dizemos que α e β são homotópicos se existir uma aplicação contínua $H : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X$ tal que:

$$\bullet \quad H(t, 0) = \alpha(t) \quad \text{e} \quad H(t, 1) = \beta(t), \quad \forall t \in [0, 1], \text{ e}$$

- $H(0, s) = H(1, s) = \alpha(0) = \alpha(1) = \beta(0) = \beta(1), \quad \forall s \in [0, 1].$

A aplicação H acima é dita uma homotopia de α a β .

No conjunto dos laços de $[0, 1]$ em X com ponto base em x_0 , que denotaremos por $\Omega(X, x_0)$, seja \sim a relação de equivalência tal que $\rho \sim \gamma \iff \rho$ e γ são homotópicos. Definimos o grupo fundamental de (X, x_0) pelo conjunto das classes de equivalência $\Omega(X, x_0)/\sim$. Denotamos o grupo fundamental de (X, x_0) por $\pi_1(X, x_0)$.

A relação acima é de fato uma relação de equivalência pois tem as seguintes propriedades.

Reflexiva Se $\alpha \in \Omega(X, x_0)$, então temos que

$$\begin{aligned} H : [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow X \\ (t, s) &\longmapsto \alpha(t) \end{aligned}$$

é uma homotopia de α a α . Segue daí que para qualquer α em $\Omega(X, x_0)$ temos que $\alpha \sim \alpha$.

Simétrica Dados α e $\beta \in \Omega(X, x_0)$ tais que $\alpha \sim \beta$, temos que existe aplicação contínua $H[0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X$ tal que

$$\begin{aligned} H(t, 0) &= \alpha(t) \text{ e } H(t, 1) = \beta(t) \quad \forall t \in [0, 1], \\ x_0 &= H(0, s) = H(1, s) \quad \forall s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Defina

$$\begin{aligned} F : [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow X \\ (t, s) &\longmapsto H(t, 1 - s). \end{aligned}$$

Assim, F é contínua, pois é a composição de H com a aplicação G definida por

$$\begin{aligned} G : [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \times [0, 1] \\ (t, s) &\longmapsto (t, 1 - s). \end{aligned}$$

Como H e G são contínuas, temos que F é contínua, e ainda:

$$\begin{aligned} F(t, 0) &= H(t, 1) = \beta(t), & \forall t \in [0, 1] \\ F(t, 1) &= H(t, 0) = \alpha(t), & \forall t \in [0, 1], \\ F(0, s) &= H(0, 1 - s) = x_0 = H(1, 1 - s) = F(1, s), & \forall s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Logo $\beta \sim \alpha$.

Transitiva Dados α, β e $\gamma \in \Omega(X, x_0)$ tais que $\alpha \sim \beta$ e $\beta \sim \gamma$, temos que existem aplicações contínuas

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X$$

$$F : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X$$

tais que, para quaisquer $s, t \in [0, 1]$ temos

$$H(t, 0) = \alpha(t) \quad , \quad H(t, 1) = \beta(t),$$

$$F(t, 0) = \beta(t) \quad , \quad F(t, 1) = \gamma(t),$$

$$H(0, s) = H(1, s) = x_0, \quad F(0, s) = F(1, s) = x_0.$$

e

$$H(0, s) = H(1, s) \quad \text{e} \quad F(0, s) = F(1, s) \quad \forall s \in [0, 1]$$

Então definamos a aplicação

$$G : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X$$

por

$$G(t, s) = \begin{cases} H(t, 2s) & \text{se } 0 \leq s \leq 1/2; \\ F(t, 2s - 1) & \text{se } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Temos que G é uma aplicação contínua tal que,

$$G(t, 0) = H(t, 0) = \alpha(t) \quad \text{e} \quad G(t, 1) = F(t, 1) = \gamma(t) \quad \forall t \in [0, 1],$$

e ainda

$$x_0 = G(0, s) = G(1, s) \quad \forall s \in [0, 1].$$

Segue daí que $\alpha \sim \gamma$.

Bem, como a relação \sim é simétrica, reflexiva e transitiva, segue que \sim é uma relação de equivalência, e assim, podemos considerar o grupo fundamental $\Omega(X, x_0) / \sim$.

Sabemos que caminhos são aplicações de $[0, 1]$ em X . Nós podemos substituir $[0, 1]$ por um espaço topológico qualquer Y e definir homotopia entre aplicações. Nesse caso não teremos ponto final e inicial, mas podemos substituir o conjunto $\{0, 1\}$ por um conjunto $Z \subset Y$.

Dadas aplicações contínuas $f, g : Y \longrightarrow X$ tais que $f|_Z = g|_Z$, dizemos que f é homotópico a g relativamente a Z quando existir uma aplicação contínua $H : Y \times [0, 1] \longrightarrow X$ satisfazendo:

1. $H(y, 0) = f(y) \quad \forall y \in Y;$
2. $H(y, 1) = g(y) \quad \forall y \in Y;$
3. $H(y, t) = f(y) = g(y) \quad \forall y \in Z, t \in [0, 1].$

No caso em que Z é vazio nós dizemos simplesmente que f e g são homotópicas.

Novamente, definindo a relação \sim por

$$f \sim g \iff f \text{ e } g \text{ são homotópicas}$$

para quaisquer $f, g : Y \rightarrow X$ aplicações contínuas, temos que \sim é uma relação de equivalência.

Teorema 1.1.1 (Teorema de unicidade de levantamentos) *Sejam $((E, e_0), p)$ recobrimento de (X, x_0) , Y espaço topológico conexo, e $f : Y \rightarrow X$ uma aplicação tal que $f(y_0) = x_0$. Se existe uma aplicação $\tilde{f} : Y \rightarrow E$ tal que $\tilde{f}(y_0) = e_0$ e $p \circ \tilde{f} = f$, então esta aplicação é única.*

Demonstração: A demonstração desse resultado pode ser vista em [4], pág. 21. ■

Teorema 1.1.2 (Teorema de levantamento de homotopias) *Seja $((E, e_0), p)$ recobrimento de (X, x_0) e sejam Y espaço topológico arbitrário, e $f : Y \rightarrow X$ tal que $f(y_0) = x_0$ aplicação que admite um levantamento $\tilde{f} : Y \rightarrow E$ tal que $\tilde{f}(y_0) = e_0$. Então qualquer homotopia $F : Y \times I \rightarrow X$ com $F(y, 0) = f(y)$ para todo $y \in Y$ poder ser levantada por p a uma homotopia $\tilde{F} : Y \times I \rightarrow E$ tal que $\tilde{F}(y, 0) = \tilde{f}(y)$, $\forall y \in Y$.*

Demonstração: A demonstração desse resultado pode ser vista em [4], pág. 22. ■

Sejam X e Y espaços topológicos, e $f : Y \rightarrow X$ tal que $f(y_0) = x_0$ uma aplicação contínua. Denotaremos por f_* a aplicação de $\pi_1(X, x_0)$ em $\pi_1(Y, y_0)$ definida por

$$f_*([\rho]) = [f \circ \rho] \quad \text{para cada } \rho \in \Omega(X, x_0),$$

onde $[\rho]$ e $[f \circ \rho]$ denotam as classes de equivalência de ρ e $f \circ \rho$ respectivamente.

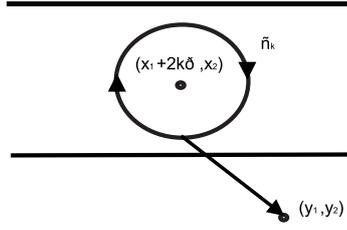


Figura 1.1:

Teorema 1.1.3 (Teorema de existência de levantamento) *Seja $((E, e_0), p)$ um recobrimento de (X, x_0) e sejam Y um espaço topológico arbitrário, e $f : Y \rightarrow X$ uma aplicação contínua tal que $f(y_0) = x_0$. Suponha que todos os espaços considerados acima são localmente conexos por caminhos. Então, existe um levantamento \tilde{f} de f por p se, e somente se, $f_*\pi_1(Y, y_0) \subset p_*\pi_1(E, e_0)$.*

Demonstração: A demonstração desse resultado pode ser vista em [4], pág. 26. ■

Esse Teorema, juntamente com o Teorema 1.1.1 mostra que todo caminho $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ se levanta de maneira única a um recobrimento (E, p, X) quando fixamos $\tilde{\alpha}(0)$ tal que $p(\tilde{\alpha}(0)) = \alpha(0)$.

Para finalizar esta seção, apresentaremos uma proposição que será muito útil na demonstração do teorema central dessa monografia.

Sejam $0 < \varepsilon < \pi$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Dados $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1 + 2k\pi, x_2); k \in \mathbb{Z}\}$, e $k \in \mathbb{Z}$, defina os caminhos:

$$\begin{aligned} \lambda_k : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1 + 2k\pi, x_2); k \in \mathbb{Z}\} \\ t &\longmapsto (t(x_1 + 2k\pi) + y_1, t(x_2 - \varepsilon) + y_2) \\ \bar{\lambda}_k : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1 + 2k\pi, x_2); k \in \mathbb{Z}\} \\ t &\longmapsto (\varepsilon \sin(2\pi t) + (x_1 + 2k\pi), \varepsilon \cos(2\pi t) + x_2) \end{aligned}$$

e definimos o laço $\rho_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1 + 2k\pi, x_2); k \in \mathbb{Z}\}$ por $\rho_k = \lambda_k \bar{\lambda}_k (\lambda_k^{-1})$, ou seja, a justaposição dos caminhos λ_k , $\bar{\lambda}_k$ e (λ_k^{-1}) .

Proposição 1.1.1 $\left\{ [\rho_k] \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ gera $\pi_1 \left(\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1 + 2k\pi, x_2); k \in \mathbb{Z}\}, (y_1, y_2) \right)$

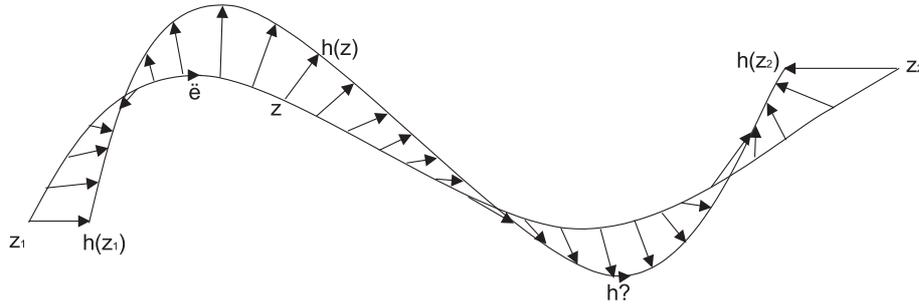


Figura 1.2:

A proposição acima significa que qualquer laço $\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1 + 2k\pi, x_2); k \in \mathbb{Z}\}$ com ponto base em (y_1, y_2) é tal que sua classe de equivalência $[\lambda]$ contém um laço δ , que é a justaposição de um número finito de potências de ρ_k , com $k \in \mathbb{Z}$.

Observamos que a justaposição de caminhos não é uma operação comutativa, ou seja, se $k \neq j$, não vale que $\rho_k \rho_j = \rho_j \rho_k$. Mais que isso, nem podemos dizer que os caminhos $\rho_k \rho_j$ e $\rho_j \rho_k$ são homotópicos.

Então, o que queremos dizer é que existem um $n \in \mathbb{N}$, e uma aplicação $\zeta : \{m \in \mathbb{N}; m \leq n\} \rightarrow \mathbb{Z}$ tais que podemos escrever $\delta = \rho_{\zeta(1)}^{i_1} \dots \rho_{\zeta(n)}^{i_n}$, onde $i_1, \dots, i_n \in \{1, -1\}$.

Observamos que se existe tal laço δ em $[\lambda]$, então λ é homotópico a δ .

1.2 Números de rotação e índice

1.2.1 Definições

Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo de U em \mathbb{R}^2 sem pontos fixos, isto é: $f(z) \neq z$, para todo $z \in U$. Se λ é uma curva qualquer em U de um ponto Z_1 a um ponto Z_2 , definimos o índice de λ com respeito a f como sendo a rotação total que a direção $\frac{f(z)-z}{\|f(z)-z\|}$ faz quando z se desloca ao longo da curva λ de Z_1 a Z_2 .

Por exemplo, na figura acima, essa direção faz um total de $\frac{1}{2}$ volta no sentido horário, e então o índice será de $-\frac{1}{2}$.

Para dar uma definição precisa, seja f como acima e consideramos a aplicação $F : U \rightarrow$

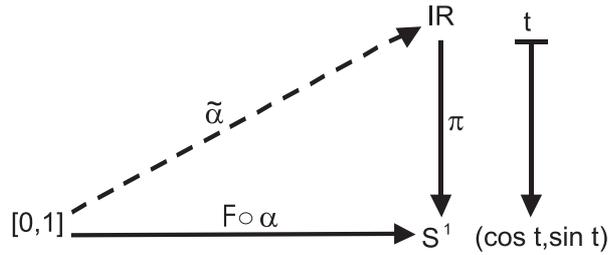


Figura 1.3:

S^1 tal que

$$F(z) = \frac{f(z) - z}{\|f(z) - z\|},$$

onde $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = 1\}$.

Observação: F é contínua, pois a aplicação F é um quociente de funções contínuas cujo denominador não se anula por hipótese. Agora consideramos o recobrimento universal de S^1 dado pela aplicação $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ tal que

$$\pi(t) = (\cos t, \sin t) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

e consideramos uma curva $\lambda : [0, 1] \rightarrow U$.

Tomamos t_0 qualquer em $\pi^{-1}(F \circ \lambda(0))$. Daí temos que (\mathbb{R}, t_0, π) é recobrimento de $(S^1, \lambda(0))$, temos que $F \circ \lambda : [0, 1] \rightarrow S^1$ é contínua, e temos ainda que \mathbb{R} , $[0, 1]$ e S^1 são conexos por caminhos. Podemos usar, então, o Teorema 1.1.3, pois todas as suas hipóteses são satisfeitas.

Segue que existe um levantamento $\tilde{\lambda} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de $F \circ \lambda$ em relação ao recobrimento universal de S^1 , dado por π .

A partir desse momento, sempre que fizermos menção a uma aplicação F , ela será a aplicação definida anteriormente.

Observamos que se $\tilde{\lambda}_1$, e $\tilde{\lambda}_2$ são levantamentos de $F \circ \lambda$ em relação ao recobrimento universal de S^1 , dado por π , então:

$$\tilde{\lambda}_1(t) = \tilde{\lambda}_2(t) + 2k\pi \quad \text{para todo } t \in [0, 1] \text{ e para algum } k \in \mathbb{Z}.$$

De fato:

$$\pi \circ \tilde{\lambda}_1(t) = F \circ \lambda(t) = \pi \circ \tilde{\lambda}_2(t), \quad \text{para todo } t \in [0, 1]$$

↓

$$\tilde{\lambda}_1(t) = \tilde{\lambda}_2(t) + 2k(t)\pi, \quad \text{para todo } t \in [0, 1] \text{ e para algum } k \in \mathbb{Z}$$

↓

$$\tilde{\lambda}_1(t) - \tilde{\lambda}_2(t) = 2k(t)\pi, \quad \text{para todo } t \in [0, 1] \text{ e para algum } k \in \mathbb{Z}$$

Mas $\tilde{\lambda}_1$ e $\tilde{\lambda}_2$ são funções contínuas, e portanto k é uma função contínua cuja imagem está contida em \mathbb{Z} , que é um conjunto de pontos isolados. Segue daí que a função k é constante.

Sendo assim, dados dois levantamentos quaisquer de $F \circ \lambda$ por π , temos que

$$\frac{\tilde{\lambda}_1(1) - \tilde{\lambda}_1(0)}{2\pi} = \frac{\tilde{\lambda}_2(1) + 2k\pi - \tilde{\lambda}_2(0) - 2k\pi}{2\pi} = \frac{\tilde{\lambda}_2(1) - \tilde{\lambda}_2(0)}{2\pi}$$

Portanto fazer a seguinte definição.

Definição 1.2.1 (Índice de uma curva) *Dados, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ homeomorfismo sem pontos fixos e $\lambda : [0, 1] \rightarrow U$ curva em U , definimos o índice da curva λ em relação a f por:*

$$Ind_f \lambda = \frac{\tilde{\lambda}(1) - \tilde{\lambda}(0)}{2\pi} \in \mathbb{R}$$

1.2.2 Propriedades do índice

Propriedade 1.2.1 *Para uma família contínua a um parâmetro real de curvas λ ou de homeomorfismos f como da definição, o índice $Ind_f \lambda$ varia continuamente com o parâmetro.*

Entendemos por uma família contínua a um parâmetro real de curvas um conjunto de curvas λ_ν , onde o índice ν está em um intervalo compacto não degenerado da reta real, e tal que as curvas variam continuamente em relação a ν .

No caso, podemos assumir que esse intervalo compacto é $[0, 1]$, pois se $J = [a, b]$ onde $a, b \in \mathbb{R}$, basta considerar a família $\{\gamma_s\}_{s \in [0, 1]}$, onde $\gamma_s = \lambda_{(b-a)\nu+a}$ e teremos que a propriedade acima vale para $\{\lambda_\nu\}_{\nu \in J}$ se, e somente se vale para $\{\gamma_s\}_{s \in [0, 1]}$.

Da mesma forma, entendemos por uma família contínua a um parâmetro real de homeomorfismos um conjunto de homeomorfismos f_ν , onde o índice ν está em um intervalo compacto da reta real não degenerado, e tal que os homeomorfismos variam continuamente em relação a ν .

Novamente, podemos assumir que esse intervalo compacto é $[0, 1]$.

Demonstração:

Se $\{\lambda_s\}_{s \in [0, 1]}$ é uma família contínua a um parâmetro de curvas, então a aplicação $s \mapsto \lambda_s$ é contínua. Isso significa que

$$\begin{aligned} H : [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (s, t) &\longmapsto \lambda_s(t) \end{aligned}$$

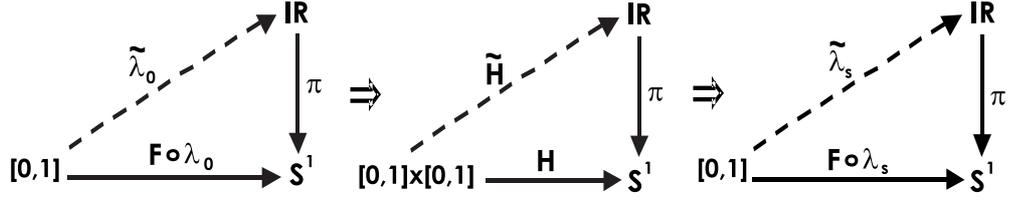


Figura 1.4:

é uma aplicação contínua, e portanto, uma homotopia de λ_0 a λ_1 .

Então $F \circ H : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow S^1$ é uma homotopia de $F \circ \lambda_0$ a $F \circ \lambda_1$.

Lembramos que λ_0 admite um levantamento $\tilde{\lambda}_0 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ por π .

Tome $p \in \pi^{-1}(F \circ \lambda_0(0)) \in \mathbb{R}$. Então (\mathbb{R}, p, π) é um espaço de recobrimento para $(S^1, F \circ \lambda_0(0))$. Temos também que $F \circ \lambda_0 : [0, 1] \longrightarrow S^1$ é uma aplicação contínua que admite um levantamento $\tilde{\lambda}_0 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, que $([0, 1], 0)$ é espaço topológico, e que H é homotopia tal que $H(0, t) = \lambda_0(t)$, $\forall t \in [0, 1]$. Isso significa que todas as hipóteses do Teorema 1.1.2 são verificadas.

Segue que $F \circ H$ pode ser levantada a uma homotopia $\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\lambda}_0(t) = \tilde{H}(0, t)$.

Assim, para cada $s \in [0, 1]$, temos que

$$\lambda_s(t) = H(s, t) \quad \text{para todo } t \in [0, 1],$$

o que implica em

$$F \circ \lambda_s(t) = F \circ H(s, t) \quad \text{para todo } t \in [0, 1].$$

Segue do levantamento de $F \circ H$ que, para cada $s \in [0, 1]$, a aplicação

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_s : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}; \\ t &\longmapsto \tilde{H}(s, t) \end{aligned}$$

é um levantamento de $F \circ \lambda_s$ por π . Portanto temos

$$Ind_h(\lambda_s) = \tilde{\lambda}_s(1) - \tilde{\lambda}_s(0) = \tilde{H}(s, 1) - \tilde{H}(s, 0).$$

Segue dessa igualdade e do fato de \tilde{H} ser contínua, que a aplicação

$$s \longmapsto Ind_f(\lambda_s)$$

é contínua.

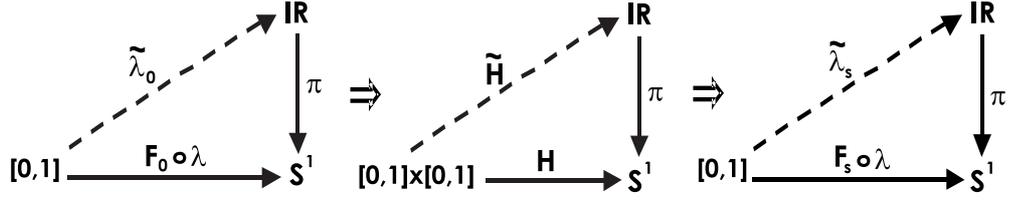


Figura 1.5:

Agora, se $\{f_s\}_{s \in [0,1]}$ é uma família contínua de homeomorfismos, onde cada homeomorfismo f_s não tem pontos fixos em U , então definimos para cada s em $[0, 1]$, uma nova aplicação

$$F_s : U \longrightarrow S^1$$

$$z \longmapsto \frac{f_s(z) - z}{\|f_s(z) - z\|}.$$

Observamos que, pela hipótese, a aplicação $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \{F_s\}_{s \in [0,1]}$ que associa a cada s em $[0, 1]$, a aplicação F_s , é contínua, pois $\varphi = \frac{f_s - Id}{\|f_s - Id\|}$.

Assim podemos concluir que a aplicação

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow S^1 \quad \text{tal que}$$

$$H(s, t) = F_s \circ \lambda(t), \quad \forall t \in [0, 1]$$

é contínua, e que $H(0, t) = F_0 \circ \lambda(t)$ para todo $t \in [0, 1]$.

Tomamos $p \in \pi^{-1}(F_0 \circ \lambda(0))$ qualquer. Então temos que $((\mathbb{R}, p), \pi)$ é espaço de recobrimento para $((S^1, F_0 \circ \lambda(0)))$.

Lembramos que existe um levantamento $\tilde{\lambda}_0 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de $F_0 \circ \lambda$ por π .

E finalmente observamos que H definida acima é uma homotopia tal que $H(0, t) = F_0 \circ \lambda(t) \quad \forall t \in [0, 1]$.

Estão satisfeitas, então, todas as hipóteses do Teorema 1.1.2, e segue que H pode ser levantada a uma homotopia $\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ com $\tilde{H}(0, t) = \tilde{\lambda}_0(t)$ para todo $t \in [0, 1]$.

Portanto, para cada $s \in [0, 1]$, temos que $\tilde{H}(s, t) = \tilde{\lambda}_s(t)$, onde $\tilde{\lambda}_s(t)$ é um levantamento de $F_s \circ \lambda(t)$. Temos que

$$Ind_{f_s}(\lambda) = \tilde{\lambda}_s(1) - \tilde{\lambda}_s(0) = \tilde{H}(s, 1) - \tilde{H}(s, 0).$$

Novamente, segue dessa igualdade que a aplicação $s \longmapsto Ind_{f_s}(\lambda)$ é contínua. \blacksquare

Propriedade 1.2.2 Se λ tem ponto inicial Z_1 e ponto final Z_2 , então

$$Ind_h \lambda \equiv \frac{\theta}{2\pi} \pmod{1},$$

onde θ é o ângulo entre $\frac{f(Z_1)-Z_1}{\|f(Z_1)-Z_1\|}$ e $\frac{f(Z_2)-Z_2}{\|f(Z_2)-Z_2\|}$.

Demonstração:

Seja λ uma curva com ponto inicial em Z_1 e ponto final em Z_2 , e seja θ o ângulo formado entre $\frac{f(Z_1)-Z_1}{\|f(Z_1)-Z_1\|}$ e $\frac{f(Z_2)-Z_2}{\|f(Z_2)-Z_2\|}$. Então

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \left\langle \frac{f(Z_1) - Z_1}{\|f(Z_1) - Z_1\|}, \frac{f(Z_2) - Z_2}{\|f(Z_2) - Z_2\|} \right\rangle = \langle F(Z_1), F(Z_2) \rangle \\ &= \langle F \circ \lambda(0), F \circ \lambda(1) \rangle = \langle \pi \circ \tilde{\lambda}(0), \pi \circ \tilde{\lambda}(1) \rangle \\ &= \langle (\cos \tilde{\lambda}(0), \sin \tilde{\lambda}(0)), (\cos \tilde{\lambda}(1), \sin \tilde{\lambda}(1)) \rangle \\ &= \cos \tilde{\lambda}(0) \cos \tilde{\lambda}(1) + \sin \tilde{\lambda}(0) \sin \tilde{\lambda}(1) \\ &= \cos(\tilde{\lambda}(1) - \tilde{\lambda}(0)). \end{aligned}$$

Daí, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\tilde{\lambda}(1) - \tilde{\lambda}(0) = \theta + 2\pi k$. Mas, por definição,

$$2\pi Ind_f \lambda = \tilde{\lambda}(1) - \tilde{\lambda}(0),$$

e logo

$$Ind_f(\lambda) = \frac{\theta}{2\pi} + k.$$

Isso significa que $Ind_f(\lambda) \equiv \frac{\theta}{2\pi} \pmod{1}$. ■

Propriedade 1.2.3 Se $\lambda = \lambda_1 \lambda_2$ é a justaposição dos caminhos λ_1 e λ_2 , então

$$Ind_f \lambda = Ind_f \lambda_1 + Ind_f \lambda_2.$$

Se λ^{-1} é o caminho inverso a λ , então

$$Ind_f(\lambda^{-1}) = -Ind_f \lambda.$$

Demonstração:

Se $\lambda = \lambda_1 \lambda_2$, é a justaposição dos caminhos λ_1 e λ_2 , então $\lambda : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é tal que:

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda_1(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2; \\ \lambda_2(2t - 1), & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Sabemos que existe levantamentos $\tilde{\lambda}_1 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\tilde{\lambda}_2 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de $F \circ \lambda_1$ e $F \circ \lambda_2$ por π .

Então para todo t em $[0, 1/2]$, temos que

$$\pi \circ \tilde{\lambda}_1(2t) = \pi \circ \tilde{\lambda}(t) = F \circ \lambda(t) = F \circ \lambda_1(2t) ,$$

E para todo $t \in [1/2, 1]$, teremos

$$\pi \circ \tilde{\lambda}_2(2t - 1) = \pi \circ \tilde{\lambda}(t) = F \circ \lambda(t) = F \circ \lambda_2(2t - 1) ,$$

Daí temos que

$$\begin{aligned} 2\pi \text{Ind}_f \lambda &= \tilde{\lambda}(1) - \tilde{\lambda}(0) \\ &= \tilde{\lambda}(1) - \tilde{\lambda}(1/2) + \tilde{\lambda}(1/2) - \tilde{\lambda}(0) \\ &= \tilde{\lambda}_1(1) - \tilde{\lambda}_1(0) + \tilde{\lambda}_2(1) - \tilde{\lambda}_2(0) \\ &= 2\pi \text{Ind}_f(\lambda_1) + 2\pi \text{Ind}_f(\lambda_2). \end{aligned}$$

E portanto $\text{Ind}_f \lambda = \text{Ind}_f \lambda_1 + \text{Ind}_f \lambda_2$.

Falta mostrar que $\text{Ind}_f(\lambda^{-1}) = -\text{Ind}_f(\lambda)$.

Por definição temos que

$$\begin{aligned} \lambda^{-1} : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \lambda(1 - t). \end{aligned}$$

Agora observamos que, como $\tilde{\lambda}$ é um levantamento de $F \circ \lambda$ por π , temos que

$$F \circ \lambda(t) = \pi \circ \tilde{\lambda}(t), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Isso significa que $F \circ (\lambda^{-1})(t) = F \circ \lambda(1 - t) = \pi \circ \tilde{\lambda}(1 - t)$ para todo $t \in [0, 1]$. Assim podemos dizer que a aplicação $t \longmapsto \tilde{\lambda}(1 - t)$ é um levantamento de λ^{-1} por π , então:

$$2\pi \text{Ind}_f(\lambda^{-1}) = \tilde{\lambda}(1 - 1) - \tilde{\lambda}(1 - 0) = \tilde{\lambda}(0) - \tilde{\lambda}(1) = -2\pi \text{Ind}_f \lambda.$$

Está provada a Propriedade 1.2.3. ■

Propriedade 1.2.4 $\text{Ind}_f \lambda = \text{Ind}_{f^{-1}}(f \circ \lambda)$

Demonstração:

Bem, definimos $\bar{F} : U \rightarrow S_1$ por

$$\bar{F}(z) = \frac{f^{-1}(z) - z}{\|f^{-1}(z) - z\|}.$$

Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ homeomorfismo sem pontos fixos, temos que $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow U$ é um homeomorfismo sem pontos fixos, e logo \bar{F} está bem definida, e para todo $z \in \mathbb{R}^2$ temos que

$$\bar{F} \circ (f \circ \lambda)(t) = \frac{\lambda(t) - f \circ \lambda(t)}{\|\lambda(t) - f \circ \lambda(t)\|}, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Mas

$$\frac{\lambda(t) - f \circ \lambda(t)}{\|\lambda(t) - f \circ \lambda(t)\|} = -\frac{f \circ \lambda(t) - \lambda(t)}{\|f \circ \lambda(t) - \lambda(t)\|} = -\bar{F} \circ \lambda(t) \quad \forall t \in [0, 1].$$

Então a aplicação $t \mapsto \tilde{\lambda}(t) + \pi$ é um levantamento para $\bar{F} \circ (f \circ \lambda)$ por π . De fato,

$$\begin{aligned} \pi(\tilde{\lambda}(t) + \pi) &= (\cos(\tilde{\lambda}(t) + \pi), \sin(\tilde{\lambda}(t) + \pi)) \\ &= (-\cos \tilde{\lambda}(t), -\sin \tilde{\lambda}(t)) \\ &= -(\cos \tilde{\lambda}(t), \sin \tilde{\lambda}(t)) \\ &= -\pi \circ \tilde{\lambda}(t) = -F \circ \lambda(t) \\ &= \bar{F} \circ (f \circ \lambda)(t), \quad \forall t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Assim,

$$2\pi \text{Ind}_{f^{-1}}(f \circ \lambda) = (-\tilde{\lambda})(1) - (-\tilde{\lambda})(0) = \tilde{\lambda}(1) - \tilde{\lambda}(0) = 2\pi \text{Ind}_f(\lambda).$$

Com isso concluímos a demonstração. ■

Capítulo 2

O Teorema do Ponto Fixo de Poincaré - Birkhoff

Na primeira seção deste capítulo, damos a definição precisa de homeomorfismo de torção do anel A , enunciaremos o teorema que é objetivo do trabalho, e faremos algumas considerações sobre o enunciado do teorema.

Na segunda seção damos a demonstração do teorema.

2.0.3 O Enunciado

Definição 2.0.2 *Um homeomorfismo $g : A \rightarrow A$ é um homeomorfismo de torção se não tem pontos fixos em ∂A e pode ser levantado a um homeomorfismo $\tilde{g} : S \rightarrow S$ do recobrimento universal*

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq 1\}$$

de A que move as duas componentes de fronteira em direções opostas.

Por $\tilde{g} : S \rightarrow S$ mover as duas componentes de fronteira em direções opostas, queremos dizer que vale somente uma das seguintes alternativas:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \tilde{g}_1(x, 0) < x < \tilde{g}_1(x, 1), \quad \forall x \in \mathbb{R}; \\ (ii) \quad & \tilde{g}_1(x, 0) > x > \tilde{g}_1(x, 1), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $\tilde{g}(x, y) = (\tilde{g}_1(x, y), \tilde{g}_2(x, y))$ para todo $(x, y) \in S$.

Bem, observamos que todo homeomorfismo $g : A \rightarrow A$ admite um levantamento $\tilde{g} : S \rightarrow S$ que é um homeomorfismo local.

De fato, sendo S o recobrimento universal de A , segue do Teorema 1.1.1 e do Teorema 1.1.3 que para cada $(x, y) \in S$ tal que $\pi(x, y) = g(0, 0)$, existe um único levantamento $\tilde{g} : S \rightarrow S$ de g pela aplicação de recobrimento $p : S \rightarrow A$.

Por outro lado, sabemos que a aplicação de recobrimento $\pi : S \longrightarrow S$ dada por

$$\pi(x, y) = (y + 1)(\cos(x), \sin(x)) ,$$

é um homeomorfismo local.

Assim temos que $g \circ \pi = \pi \circ \tilde{g}$. Como π é homeomorfismo local, e g é um homeomorfismo, segue da igualdade acima que \tilde{g} é um homeomorfismo local.

A seguir está o enunciado do Teorema do Ponto Fixo de Poincaré - Birkhoff.

Teorema 2.0.1 *Seja $g : A \longrightarrow A$ um homeomorfismo de torção que preserva área. Então g possui pelo menos dois pontos fixos distintos.*

Agora, tomando o homeomorfismo $h : S \longrightarrow S$ como o levantamento de g por π , podemos formular o teorema da seguinte forma:

Teorema 2.0.2 *Seja $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo que preserva área satisfazendo as seguintes condições:*

- $h(x, y) = (x - r_1, y)$, se $y \geq 1$;
- $h(x, y) = (x + r_2, y)$, se $y \leq 0$;
- $h(x + 2\pi, y) = h(x, y) + (2\pi, 0) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$;

para $r_1, r_2 > 0$. Então h tem dois pontos fixos distintos F_1 e F_2 . Além disso, $F_1 - F_2$ não é um múltiplo inteiro de $(2\pi, 0)$.

Bem, se \tilde{g}_s e \tilde{g}_t são levantamentos de g por π , segue que

$$\pi \circ \tilde{g}_s = \pi \circ \tilde{g}_t \implies \tilde{g}_s(x, y) = \tilde{g}_t(x, y) + (2k\pi, 0), \quad \forall (x, y) \in S,$$

daí que um homeomorfismo que é de torção somente admite levantamentos com a propriedade (2.1).

Observação 1 - Se $g : A \longrightarrow A$ é de torção, então vale uma das alternativas de (2.1). Essa condição não é equivalente a:

$$\tilde{g}(x, 0) = (x + r_2, 0) \quad \text{e} \quad \tilde{g}(x, 1) = (x - r_1, 1), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Contudo, se extendêssemos o levantamento \tilde{g} somente com a condição (2.1), a aplicação h não preservaria área em todo \mathbb{R}^2 , mas somente em S . Observaremos no final da demonstração que é suficiente que h preserve área em S , e que leve conjuntos de área diferente de zero em conjuntos cuja área ainda é diferente de zero.

Observação 2 - A condição de periodicidade

$$h(x + 2\pi, y) = h(x, y) + (2\pi, 0) \quad \text{para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

é precisamente a condição de que a restrição de h a S é o levantamento de uma aplicação $g : A \rightarrow A$ via aplicação π de recobrimento.

De fato, como $h : S \rightarrow S$ é um levantamento do homeomorfismo $g : A \rightarrow A$, então:

$$\begin{aligned} \pi(h(x + 2\pi, y)) &= \pi(h(x, y)), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \implies \\ h(x + 2\pi, y) &= h(x, y) + (2k\pi, 0), \quad \text{para algum } k \in \mathbb{Z} \text{ e } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Tome $(a, b) = h(x, y) + (2\pi, 0)$, então

$$\begin{aligned} h^{-1}(a, b) &\in \{(x + 2\bar{k}\pi, y) \in \mathbb{R}^2; \bar{k} \in \mathbb{Z}\} \\ \implies h(a, b) &= h(x + 2\bar{k}\pi, y) = h(x, y) + (2\bar{k}\pi, 0) \\ \implies (2\pi, 0) &= (2\bar{k}\pi, 0) \\ k &= \bar{k} = \pm 1 \end{aligned}$$

Em particular:

$$h(x + 2\pi, 0) = (x + 2\pi + r_2, 0) = (x + r_2, 0) + (2\pi, 0) = h(x, 0) + (2\pi, 0)$$

Segue daí que $k = 1$.

Observação 3 - O fato do homeomorfismo $g : A \rightarrow A$ preservar área, não significa que seu levantamento $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por π preserve área.

No entanto, se o Teorema 2.0.2 vale, supomos g como no Teorema 2.0.1, e temos que g preserva área. Então, para qualquer região R em A , temos

$$\int_R dx dy = \int_{g(R)} dx dy \implies \int_R r dr d\theta = \int_{g(R)} r dr d\theta.$$

Onde, na segunda igualdade temos a área de R e de $g(R)$, calculadas em coordenadas polares.

Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada em coordenadas polares por

$$\varphi(r, \theta) = \left(\frac{r^2 + 2}{3}, \theta \right),$$

então φ é um homeomorfismo tal que:

$$\int_{\varphi(R)} drd\theta = \frac{2}{3} \int_R r drd\theta, \quad (2.2)$$

e tal que sua aplicação inversa é dada por $\varphi(r, \theta) = (\sqrt{3r - 2}, \theta)$. Então:

$$\int_{\varphi^{-1}(R)} r drd\theta = \int_R \sqrt{3r - 2} \frac{1}{2\sqrt{3r - 2}} 3 drd\theta = \frac{3}{2} \int_R drd\theta \quad (2.3)$$

Isso para uma região R qualquer. Assim de (2.2) e (2.3) temos

$$\begin{aligned} \int_{\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}(R)} drd\theta &= \frac{2}{3} \int_{g(\varphi^{-1}(R))} r drd\theta = \frac{2}{3} \int_{\varphi^{-1}(R)} r drd\theta \\ &= \int_R drd\theta. \end{aligned}$$

Então a aplicação $\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$ pode ser levantada a um homeomorfismo que preserva área.

De fato, se $\tilde{R} \subset (a, a + 2k\pi) \times [0, 1]$, para algum $a \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} \int_{\pi^{-1}(\tilde{R})} dx dy &= \int_{\tilde{R}} J(\pi^{-1}) dx dy = \int_{\tilde{R}} \frac{1}{y - 1} dx dy \\ &= \int_{\tilde{R}} \frac{1}{r} r drd\theta = \int_{\tilde{R}} drd\theta, \end{aligned}$$

então

$$\int_{\pi(R)} drd\theta = \int_R dx dy.$$

Daí que

$$\begin{aligned} \int_{h(R)} dx dy &= \int_{\pi \circ h(R)} drd\theta = \int_{g \circ \pi(R)} drd\theta \\ &= \int_{\pi(R)} drd\theta = \int_R dx dy, \end{aligned}$$

para qualquer região $R \subset \pi((a, a + 2k\pi) \times [0, 1])$. E portanto h preserva área.

Agora podemos observar que, sendo $g : A \rightarrow A$ homeomorfismo de torção que preserva área, então $\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$ é uma aplicação que pode ser levantada a uma aplicação h que preserva área. Como a aplicação φ mantém o argumento de todo ponto constante, temos que o levantamento h é tal que $h(x, 0) < x < h(x, 1)$ ou $h(x, 0) > x > h(x, 1)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Assim, sabemos que o levantamento h de $\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$ satisfaz todas as hipóteses do teorema 2.0.2, e portanto $\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$ tem dois pontos fixos. Segue que g tem dois pontos fixos.

2.1 Prova do teorema

Primeiro estabeleceremos algumas notações. Sejam:

$$\begin{aligned} H_+ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 1 \right\} \\ H_- &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq 0 \right\} \\ S &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Agora, suponhamos $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ como no enunciado do Teorema 2.0.2.

Se $(a, b) \in \text{Int}(S)$ é um ponto fixo de h , temos que $(a + 2k\pi, b)$ também é ponto fixo de h para todo $k \in \mathbb{Z}$, pois

$$h(a + 2k\pi, b) = h(a, b) + (2k\pi, 0) \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

e segue de $h(a, b) = (a, b)$ que

$$h(a + 2k\pi, b) = (a + 2k\pi, b) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Nós vamos supor que h tem no máximo uma família $\{(a + 2k\pi, b)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de pontos fixos, e vamos chegar a uma contradição. Para isso vamos construir duas curvas λ e λ' partindo de H_- , chegando à H_+ e evitando todos os pontos fixos de h , tais que $\text{Ind}_h \lambda = \frac{1}{2} = -\text{Ind}_h \lambda'$. Isso vai contradizer o seguinte lema:

Lema 2.1.1 *Seja $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo que preserva área satisfazendo as seguintes condições:*

- $h(x, y) = (x - r_1, y)$, se $y \geq 1$;
- $h(x, y) = (x + r_2, y)$, se $y \leq 0$;
- $h(x + 2\pi, y) = h(x, y) + 2\pi$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

onde $r_1, r_2 > 0$. Suponhamos que h tem no máximo uma família $\{(a + 2k\pi, b)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de pontos fixos. Então, para qualquer curva λ partindo de H_- e chegando a H_+ que não passa por um ponto fixo de h , temos:

- (i) $\text{Ind}_h \lambda \equiv \frac{1}{2} \pmod{1}$;
- (ii) $\text{Ind}_h \lambda$ independe da curva λ .

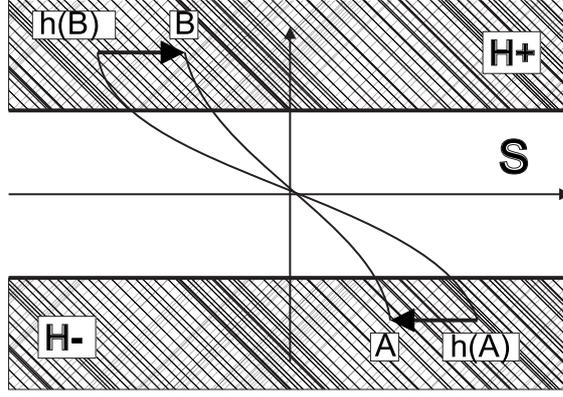


Figura 2.1: Na figura, temos $\lambda(0) = A$, e $\lambda(1) = B$.

Demonstração:

A Propriedade 1.2.2 garante que, se θ é o ângulo formado entre $\frac{h(\lambda(0)) - \lambda(0)}{\|h(\lambda(0)) - \lambda(0)\|}$ e $\frac{h(\lambda(1)) - \lambda(1)}{\|h(\lambda(1)) - \lambda(1)\|}$, então

$$Ind_h \lambda \equiv \frac{\theta}{2\pi} (mod 1).$$

Como $\lambda(0) \in H_-$, temos que $h \circ \lambda(0) - \lambda(0) = (r_2, 0)$. E como $h \circ \lambda(1) - \lambda(1) = (-r_1, 0)$. Então

$$\begin{aligned} \frac{h(\lambda(0)) - \lambda(0)}{\|h(\lambda(0)) - \lambda(0)\|} &= \frac{1}{r_2}(r_2, 0) = (1, 0). \\ \frac{h(\lambda(1)) - \lambda(1)}{\|h(\lambda(1)) - \lambda(1)\|} &= \frac{1}{r_1}(-r_1, 0) = (-1, 0). \end{aligned}$$

Logo, $\theta = \pi$, que é o ângulo formado entre $(1, 0)$ e $(-1, 0)$. Assim,

$$Ind_h \lambda \equiv \frac{\pi}{2\pi} (mod 1), \quad \text{e logo} \quad Ind_h \lambda \equiv \frac{1}{2} (mod 1).$$

Isto prova o item (i).

Para provar (ii), primeiro definimos $Fix(h)$ como sendo o conjunto dos pontos fixos de h . Como estamos supondo que h tem no máximo uma família $\{(a + 2k\pi, b)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de pontos fixos, temos que

$$Fix(h) = \emptyset, \quad \text{ou} \quad Fix(h) = \{(a + 2k\pi, b)\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

para algum $F \in \mathbb{R}^2$.

Sejam

$$\beta, \gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus Fix(h)$$

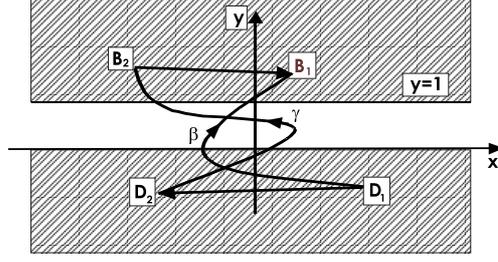


Figura 2.2:

duas curvas em $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Fix}(h)$ tais que

$$\begin{aligned} \beta(0) &= D_1, & \gamma(0) &= D_2, & \text{onde } D_1, D_2 &\in H_-, \\ \beta(1) &= B_1, & \gamma(1) &= B_2, & \text{onde } B_1, B_2 &\in H_+. \end{aligned}$$

Tomamos $\delta : [0, 1] \rightarrow H_+$ o segmento de reta que une B_1 a B_2 , e $\tau : [0, 1] \rightarrow H_-$ o segmento de reta que une D_1 a D_2 . Definimos

$$\lambda' : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ por } \lambda' = \beta\delta\gamma^{-1}\tau,$$

ou seja, λ' é a justaposição das curvas β , δ , γ^{-1} e τ .

Observamos que em H_+ e em H_- a aplicação $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1$ dada por

$$F(x, y) = \frac{h(x, y) - (x, y)}{\|h(x, y) - (x, y)\|}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

é uma aplicação constante. De fato:

$$h(x, y) = (x - r_1, y), \quad \text{se } (x, y) \in H_+$$

$$h(x, y) = (x + r_2, y), \quad \text{se } (x, y) \in H_-.$$

Assim:

$$F(x, y) = \frac{(x - r_1, y) - (x, y)}{\|(x - r_1, y) - (x, y)\|} = (-1, 0), \quad \text{se } (x, y) \in H_+ \text{ e}$$

$$F(x, y) = \frac{(x + r_2, y) - (x, y)}{\|(x + r_2, y) - (x, y)\|} = (1, 0), \quad \text{se } (x, y) \in H_-.$$

Então:

$$F \circ \delta(t) = (-1, 0), \quad \forall t \in [0, 1],$$

$$F \circ \tau(t) = (1, 0), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Observamos que:

$$\pi^{-1}(-1, 0) = \{(\pi + 2k\pi) \in \mathbb{R}; k \in \mathbb{Z}\},$$

$$\pi^{-1}(1, 0) = \{2k\pi \in \mathbb{R}; k \in \mathbb{Z}\}$$

que são conjuntos de pontos isolados.

Sendo $\tilde{\delta}$ e $\tilde{\tau}$ os respectivos levantamentos de $F \circ \delta$ e $F \circ \tau$ por π , segue que $\tilde{\delta} : [0, 1] \rightarrow \pi^{-1}(-1, 0)$ e $\tilde{\tau} : [0, 1] \rightarrow \pi^{-1}(1, 0)$ são funções contínuas de um conjunto compacto em um conjunto de pontos isolados, e portanto, são funções constantes.

Daí segue que

$$\begin{aligned} \text{Ind}_h \delta &= \tilde{\delta}(1) - \tilde{\delta}(0) = 0 \\ &= \tilde{\tau}(1) - \tilde{\tau}(0) = \text{Ind}_h \tau. \end{aligned}$$

E, portanto, $\text{Ind}_h \lambda' = \text{Ind}_h \beta - \text{Ind}_h \gamma$.

Agora, para mostrar que $\text{Ind}_h \beta = \text{Ind}_h \gamma$, basta mostrar que $\text{Ind}_h \lambda' = 0$. Nesse momento, devemos considerar duas hipóteses:

(a) O homeomorfismo h não tem nenhuma família de pontos fixos.

Nesse caso o conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Fix}(h)$ é o próprio \mathbb{R}^2 .

Como \mathbb{R}^2 é simplesmente conexo, então todo laço com ponto base em $\lambda'(1) = \lambda'(0) \in H_- \subset \mathbb{R}^2$ é homotópico ao laço constante

$$\begin{aligned} \kappa : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \text{Fix}(h) \\ t &\longmapsto \lambda'(1), \end{aligned}$$

que sabemos ser tal que $\text{Ind}_h \kappa = 0$. Observando que essa homotopia preserva os pontos finais da curva, temos que $\text{Ind}_h \lambda' = 0$.

(b) O homeomorfismo h tem exatamente uma família de pontos fixos.

Nesse caso, tomamos $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \varepsilon < \pi$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, consideramos o ponto $(a + 2k\pi, b) \in \text{Fix}(h)$. Definimos os caminhos:

$$\begin{aligned} \sigma_k : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \text{Fix}(h) \\ t &\longmapsto t(a + 2k\pi, b) + (1 - t)D_1 \\ \bar{\sigma}_k : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \text{Fix}(h) \\ t &\longmapsto \left(\cos(t 2\pi) + (a + 2k\pi), \sin(t 2\pi) + b \right), \end{aligned}$$

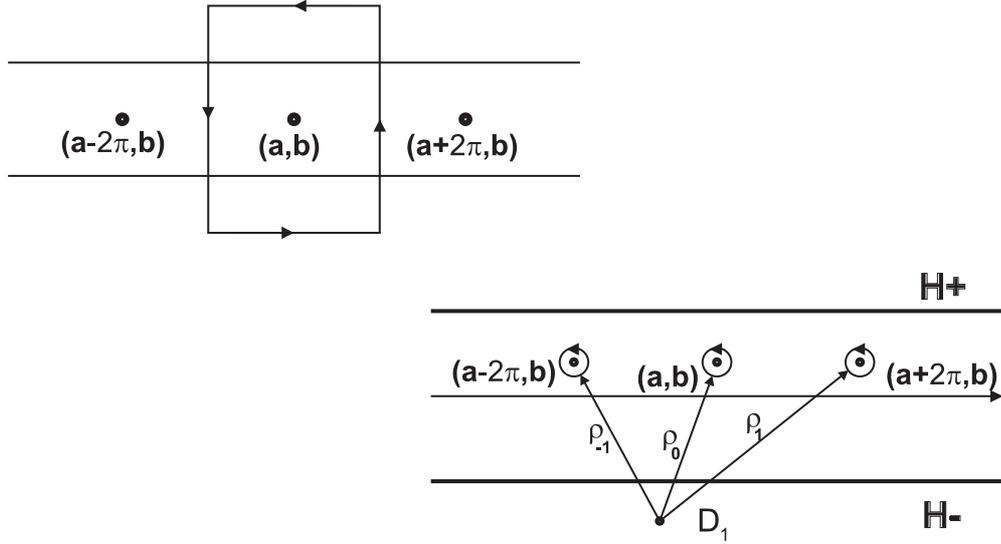


Figura 2.3:

e definimos o caminho

$$\rho_k : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus Fix(h) \text{ por } \rho_k = \sigma_k \bar{\sigma}_k \sigma_k^{-1}.$$

Agora consideramos o conjunto $\{[\rho_k]; k \in \mathbb{Z}\} \subset \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus Fix(h), D_1)$.

A proposição 1.1.1 garante que $\{[\rho_k]; k \in \mathbb{Z}\}$ gera $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus Fix(h), D_1)$, ou seja, para cada laço λ' com ponto base em D_1 , temos que $\lambda' = \rho_{\zeta(1)}^{i_1} \dots \rho_{\zeta(n)}^{i_n}$ onde $\zeta : \{m \in \mathbb{N}; m \leq n\} \longrightarrow \mathbb{Z}$ e $i_1, \dots, i_n \in \{1, -1\}$. Então, pelas propriedades do índice, nosso problema se resume a mostrar que $Ind_h \rho_k = 0$ para qualquer $k \in \mathbb{Z}$.

Para cada $k \in \mathbb{Z}$, temos que o laço ρ_k é homotópico ao laço

$$\xi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus Fix(h) \text{ definido por } \xi = \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \xi_5 (\xi_1^{-1})$$

onde ξ_1 é o segmento de reta que une $D_1 \in H_-$ ao ponto $(a + (2k + 1)\pi, -2) \in H_-$, e onde

$$\begin{aligned}\xi_2 : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus Fix(h) \\ t &\longmapsto (a + (2k + 1)\pi, 4t - 2) \\ \xi_3 : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus Fix(h) \\ t &\longmapsto (a + (2k - 2t + 1)\pi, 2) \\ \xi_4 : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus Fix(h) \\ t &\longmapsto (a + (2k + 1)\pi, -4t + 2) \\ \xi_5 : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus Fix(h) \\ t &\longmapsto (a + (2k + 2t - 1)\pi, -2).\end{aligned}$$

Segue que da Propriedade 1.2.3 que

$$\begin{aligned}Ind_h \rho &= Ind_h \xi \\ &= Ind_h \xi_1 + Ind_h \xi_2 + Ind_h \xi_3 + Ind_h \xi_4 + Ind_h \xi_5 + Ind_h \xi_1^{-1} \\ &= Ind_h \xi_1 + Ind_h \xi_2 + Ind_h \xi_3 + Ind_h \xi_4 + Ind_h \xi_5 - Ind_h \xi_1 \\ &= Ind_h \xi_2 + Ind_h \xi_3 + Ind_h \xi_4 + Ind_h \xi_5.\end{aligned}$$

Mas temos que as curvas ξ_3 e ξ_5 estão contidas em H_+ e H_- , respectivamente. Como h é constante em cada uma dessas regiões segue que $Ind_h \xi_3 = 0 = Ind_h \xi_5$. Daí:

$$Ind_h \rho_k = 0 = Ind_h \xi_2 + Ind_h \xi_4.$$

Agora, observamos que

$$\begin{aligned}h \circ \xi_2(t) &= (a + (2k + 1)\pi, 4t - 2) = (a + (2k + 1)\pi, -(4t - 2)) \\ &= h \circ \xi_4(-t) = h \circ \xi_4^{-1}(t), \quad \forall t \in [0, 1]\end{aligned}$$

E portanto

$$Ind_h \xi_2 = Ind_h(\xi_4^{-1}) = -Ind_h \xi_4$$

o que significa que

$$Ind_h \rho_k = Ind_h \xi_4 - Ind_h \xi_4 = 0.$$

Concluimos, assim, a demonstração. ■

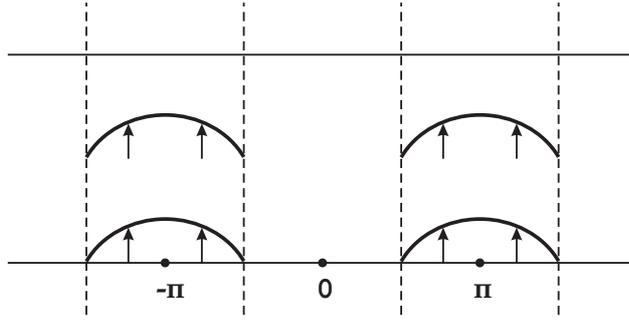


Figura 2.4:

Daremos agora um pequeno resumo de nossa estratégia para demonstrar o Teorema do ponto fixo de Poincaré-Birkhoff.

Considere a aplicação

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2; \quad T(x, y) = (x, y + (\varepsilon/2)(|\cos x| - \cos x)).$$

Podemos escrever $T(x, y) = (x, y + T_2(x))$.

Se N é uma região em \mathbb{R}^2 tal que o bordo de N é o gráfico de duas funções $j, m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, então a área de N pode ser calculada por

$$A(N) = \int_a^b [j(x) - m(x)]dx,$$

e área de N pode ser calculada por

$$\begin{aligned} A(T(N)) &= \int_a^b [j(x) + T_2(x) - m(x) - T_2(x)]dx \\ &= \int_a^b [j(x) - m(x)]dx = A(N). \end{aligned}$$

Em outras palavras, T preserva área.

Nas duas Proposições seguintes, vamos mostrar que existe um $P_0 \in H_-$ que satisfaz $(T \circ h)^n P_0 \in H_+$ para algum $n \in \mathbb{N}$, e vamos encontrar uma curva λ que pode ser levada nela mesma por $T \circ h$, exceto perto de um dos extremos.

Nós veremos que $Ind_{T \circ h} \lambda$ está muito próximo de $1/2$. Como $T \circ h$ está muito próximo de h , nós seremos capazes de deduzir que $Ind_h \lambda = 1/2$. Um argumento fácil de simetria mostrará que outra curva λ' existe, com $Ind_h \lambda' = -1/2$, nos dando uma contradição com o Lema 2.1.1.

Seja W a união das faixas verticais

$$W_k = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad 2k\pi + \pi/2 \leq x \leq 2k\pi + 3\pi/2 \right\}$$

onde $k \in \mathbb{Z}$. Assim:

$$W = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad 2k\pi + \pi/2 \leq x \leq 2k\pi + 3\pi/2, \quad \text{para algum } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Então W não contém nenhum ponto fixo. Escolhemos $\varepsilon > 0$ tal que $\|(x, y) - h(x, y)\| > \varepsilon$ para todo $(x, y) \in W$. Isso é possível: basta provar para (x, y) na região

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad \pi/2 \leq x \leq 3\pi/2, \quad 0 \leq y \leq 1 \right\}.$$

De fato, uma vez provado que existe ε tal que $\|(x, y) - h(x, y)\| > \varepsilon$ para todo $(x, y) \in R$, tomamos

$$0 < \varepsilon_0 < \min\{\varepsilon, r_1, r_2\} \quad \text{e} \quad (x_Q, y_Q) \in W,$$

e teremos

$$2k\pi \leq x_Q \leq \pi(2k + 3/2) \quad \text{para algum } k \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad y_Q \in \mathbb{R}.$$

Agora há duas hipóteses a considerar:

- (a) Se $(x_Q, y_Q) \in H_+ \cup H_-$, então $\|(x_Q, y_Q) - h(x_Q, y_Q)\| \geq \min\{r_1, r_2\} > \varepsilon_0$.
- (b) Se $(x_Q, y_Q) \in S$ então $y_Q \in [0, 1]$. Isto implica que:

$$(x_Q - 2k\pi, y_Q) \in R$$

logo

$$h(x_Q - 2k\pi, y_Q) = h(x_Q, y_Q) - (2k\pi, 0)$$

e portanto

$$\begin{aligned} \|(x_Q, y_Q) - h(x_Q, y_Q)\| &= \|(x_Q, y_Q) - h(x_Q - 2k\pi, y_Q) - (2k\pi, 0)\| \\ &= \|(x_Q - 2k\pi, y_Q) - h(x_Q - 2k\pi, y_Q)\| \\ &> \varepsilon > \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Daí, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\|(x, y) - h(x, y)\| > \varepsilon, \quad \forall (x, y) \in W$.

Na região R , a função $\Phi(x, y) = \|(x, y) - h(x, y)\|$ é contínua e positiva, com R compacto, logo, Φ admite um mínimo positivo.

Além disso, T move somente pontos que estão em W , e os move de uma distância de, no máximo, ε . Portanto, $T \circ h$ não tem pontos fixos em W , pois $(x, y) = T \circ h(x, y)$ com $P \in W$, implicaria em

$$\varepsilon \geq \|T \circ h(x, y) - h(x, y)\| = \|(x, y) - h(x, y)\| > \varepsilon ,$$

que é uma contradição.

Observamos que a aplicação T é inversível, com

$$T^{-1}(x, y) = (x, y - (|\cos x| - \cos x)).$$

De fato,

$$\begin{aligned} T \circ T^{-1}(x, y) &= (x, y - (|\cos x| - \cos x) + (|\cos x| - \cos x)) \\ &= (x, y). \end{aligned}$$

Mais que isso, T e T^{-1} são contínuas. Logo, T é homeomorfismo.

Proposição 2.1.1 *Seja $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ homeomorfismo que preserva área, e que, para algum $r_1 < 0 < r_2$ ou $r_2 < 0 < r_1$:*

$$h(x, y) = (x + r_1, y), \text{ se } (x, y) \in H_+$$

$$h(x, y) = (x + r_2, y), \text{ se } (x, y) \in H_-$$

$$h(x + 2\pi, y) = h(x, y) + (2\pi, 0), \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2 .$$

Suponhamos que h tem no máximo uma família de periódica de pontos fixos. Então existem um ponto $P_0 \in H_-$ e um $n \in \mathbb{N}$ tais que $(T \circ h)^n(P_0) \in H_+$.

Demonstração:

Defina:

$$D_0 = H_- \setminus (T \circ h)^{-1}H_-$$

$$D_1 = (T \circ h)D_0 = (T \circ h)H_- \setminus H_-$$

$$\vdots = \quad \vdots$$

$$D_i = (T \circ h)^i D_0.$$

Bem, sabemos que T e h são homeomorfismos, então está bem definida a aplicação $(T \circ h)^{-1} \equiv h^{-1} \circ T^{-1}$, e todas as suas iteradas.

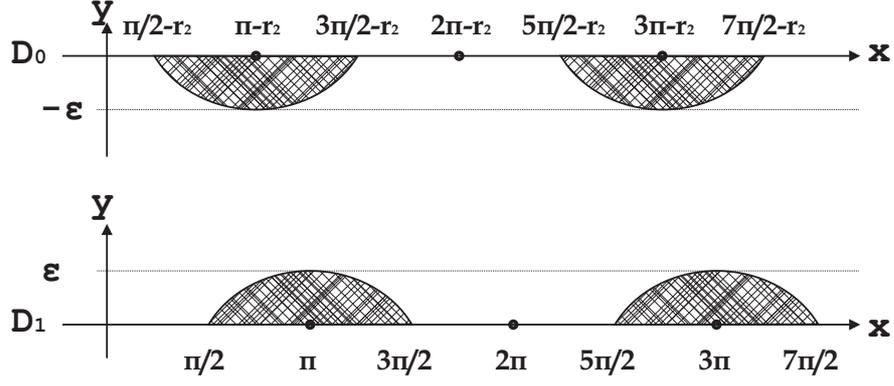


Figura 2.5:

Observamos que:

$$\begin{aligned}
(x, y) \in D_0 &\Leftrightarrow (x, y) \in H_- \setminus (T \circ h)^{-1}H_- \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in H_- \text{ e } (x, y) \notin (T \circ h)^{-1}H_- \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in H_- \text{ e } T \circ h(x, y) \notin H_- \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in H_- \text{ e } T \circ h(x, y) \in H_+ \cup \text{Int}(S).
\end{aligned}$$

E segue daí que

$$D_1 \subset \text{Int}(S) \cup H_+ \quad (2.4)$$

onde

$$\text{Int}(S) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < y < 1 \right\}.$$

Temos também:

$$\begin{aligned}
(x, y) \in \text{Int}(S) &\Rightarrow h(x, y) \in \text{Int}(S) \\
&\Rightarrow h(x, y) = (u, v) \text{ com } 0 < v < 1 \\
&\Rightarrow T \circ h(x, y) = \left(u, v + \varepsilon/2(|\cos u| - \cos u) \right).
\end{aligned}$$

Como $\frac{\varepsilon}{2}(|\cos u| - \cos u) > 0$, para todo $u \in \mathbb{R}$, segue que $v + \frac{\varepsilon}{2}(|\cos u| - \cos u) > 0$, para todo $u \in \mathbb{R}$, e assim

$$T \circ h(x, y) \notin H_-, \quad \text{para todo } (x, y) \in \text{Int}(S)$$

O que implica em

$$T \circ h(x, y) \in \text{Int}(S) \cup H_+, \quad \text{para todo } (x, y) \in \text{Int}(S).$$

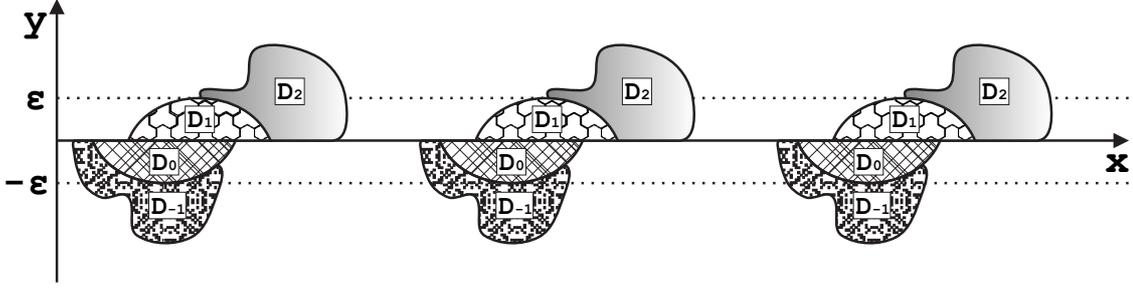


Figura 2.6:

Daí segue que

$$T \circ h(Int(S) \cup H_+) \subset Int(S) \cup H_+. \quad (2.5)$$

De (2.4) e (2.5) temos que

$$T \circ h(D_0) \subset Int(S) \cup H_+.$$

Assumimos, por hipótese de indução que $D_k \subset Int(S) \cup H_+$, e então

$$T \circ h(D_k) \subset T \circ h(Int(S) \cup H_+) \subset Int(S) \cup H_+$$

ou seja

$$D_{k+1} \subset Int(S) \cup H_+.$$

Pelo Princípio de Indução Matemática

$$D_i \subset Int(S) \cup H_+, \text{ para todo } i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \quad (2.6)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} D_0 \subset H_- &\Rightarrow h^{-1}H_- \subset H_- \text{ e } T^{-1}H_- \subset H_- \\ &\Rightarrow (T \circ h)^{-1}H_- = T^{-1}(h^{-1}(H_-)) \subset H_- . \end{aligned}$$

Daí temos que

$$D_{-1} = (T \circ h)^{-1}(D_0) \subset (T \circ h)^{-1}H_- \subset H_- .$$

Novamente, assumimos por hipótese de indução que $D_{-k} \subset H_-$. Segue que

$$D_{-(k+1)} = (T \circ h)^{-1}D_{-k} \subset (T \circ h)^{-1}H_- \subset H_- .$$

Pelo Princípio de Indução Matemática, segue que $D_i \subset H_-$, para todo $i \leq 0$.

Em particular, $D_i \cap D_0 = \emptyset$, para todo $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Observamos que $T \circ h$ é uma bijeção, logo, $(T \circ h)^k$ é uma bijeção, para cada $k \in \mathbb{Z}$. Daí, dados dois conjuntos A, B quaisquer, vale que

$$(T \circ h)^k(A \cap B) = (T \circ h)^k(A) \cap (T \circ h)^k(B),$$

então

$$(T \circ h)^k(D_i \cap D_0) = (T \circ h)^k D_i \cap (T \circ h)^k D_0$$

e portanto,

$$\emptyset = D_{k+i} \cap D_k, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}, \text{ e para todo } \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Em outras palavras: $D_j \cap D_k = \emptyset$, sempre que $j \neq k$.

Neste momento vamos definir a relação

$$(x, y) \equiv (a, b) \iff \exists k \in \mathbb{Z} : (a, b) = (2k\pi + x, y).$$

A relação \equiv é

- **Reflexiva**, pois

$$(a, b) = (2 \cdot 0\pi + a, b) \Rightarrow (a, b) \equiv (a, b).$$

- **Simétrica**, pois

$$\begin{aligned} (x, y) \equiv (a, b) &\Rightarrow (a, b) \equiv (2k\pi + x, y) \\ &\Rightarrow (x, y) \equiv (a - 2k\pi, b) \\ &\Rightarrow (a, b) \equiv (x, y). \end{aligned}$$

- **Transitiva**, pois

$$\begin{aligned} (x, y) \equiv (a, b) \text{ e } (a, b) \equiv (s, t) &\Rightarrow (a, b) \equiv (2k\pi + x, y) \text{ e } (s, t) \equiv (2\bar{k}\pi + a, b) \\ &\Rightarrow (s, t) \equiv (2(k - \bar{k})\pi + x, y) \\ &\Rightarrow (x, y) \equiv (s, t). \end{aligned}$$

Então \equiv é uma relação de equivalencia. Coisderemos \mathbb{R}^2/\equiv o espaço quociente. Em \mathbb{R}^2/\equiv ,

cada D_i está bem definida pois

$$\begin{aligned}
(1) \quad (x, y) \in D_0 &\Leftrightarrow (x, y) \in H_- \setminus (T \circ h)^{-1}H_- \\
&\Leftrightarrow y < 0 \quad \text{e} \quad T \circ h(x, y) \notin H_- \\
&\Leftrightarrow y < 0 \quad \text{e} \quad T \circ h(x + 2k\pi, y) \notin H_-, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow (x + 2k\pi, y) \in D_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad (x, y) \in D_i^0 &\Leftrightarrow (x, y) \in (T \circ h)^i(D_0) \\
&\Leftrightarrow (T \circ h)^{-1}(x, y) \in D_0 \\
&\Leftrightarrow (T \circ h)^{-1}(x + 2k\pi, y) \in D_0 \\
&\Leftrightarrow (x + 2k\pi, y) \in (T \circ h)^i(D_0) \\
&\Leftrightarrow (x + 2k\pi, y) \in D_i
\end{aligned}$$

Agora vamos calcular a área de cada D_i em \mathbb{R}^2/\cong . Como T e h preservam área, as aplicações induzidas por T e h em \mathbb{R}^2/\cong estão bem definidas, pois

$$\begin{aligned}
T(x, y) &= T(x + 2k\pi, y), \quad \forall k \\
h(x, y) &= h(x + 2k\pi, y), \quad \forall k,
\end{aligned}$$

e preservam área. De fato, se R é região em \mathbb{R}^2/\cong , definimos

$$\bar{R} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; (x, y) \in \mathbb{R} \} \cap [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$$

e temos

$$\bar{A} = A(\bar{R}) = A(T \circ h(\bar{R})) = \bar{A}(T \circ h(R)).$$

Bem, defina $R_0 = D_0 \cap [-r_2, 2\pi - r_2] \times \mathbb{R}$. Então

$$\bar{A}(D_0) = A(R_0) = \int_{R_0} dx dy$$

A curva $\gamma : [0, 3\pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$;

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, \varepsilon \cos t) & \text{se } \pi/2 \leq t \leq 3\pi/2; \\ (-2t + 3\pi/2) & \text{se } 0 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$$

é tal que seu traço é o bordo de D_0 . Pelo Teorema de Green segue que:

$$\begin{aligned}\bar{A}(D_0) &= \int_{\bar{D}_0} dx dy = \int_0^{3\pi/2} -\gamma_y(t)\gamma'_x(t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} 0 dx dy + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} -\varepsilon \cos t dt \\ &= [-\varepsilon \sin t]_{\pi/2}^{3\pi/2} = 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Daí que D_0 tem área de 2ε , e como T e h preservam área, então $T \circ h$ preserva área, e portanto cada D_i tem área 2ε .

Calculemos agora a área de S .

$$\bar{A}(S) = A(S \cap [0, 2\pi] \times \mathbb{R}) = A([0, 2\pi] \times [0, 1]).$$

Mas $[0, 2\pi] \times [0, 1]$ é um retângulo, cujos lados medem 1 e 2π , portanto, sua área é dada por 2π .

Agora, lembramos que $D_i \cap D_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Então

$$A(D_i) + A(D_j) = A(D_i \cup D_j)$$

e logo

$$A\left(\bigcup_{i=0}^n D_i\right) = 2n\varepsilon,$$

Escolhemos $n > 0$ tal que $2n\varepsilon > 2\pi$, e temos que

$$A\left(\bigcup_{i=0}^n D_i\right) > A(S),$$

portanto existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $D_i \not\subseteq S$. Segue que $D_i \cap H_+ \neq \emptyset$. Ou seja, D_i ($i > 0$), eventualmente intersecta H_+ . Como $D_n \subset (T \circ h)(H_-)$, nós mostramos que existe um $n > 0$ tal que $(T \circ h)^n(H_-) \cap H_+ \neq \emptyset$. ■

Proposição 2.1.2 *Seja $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ homeomorfismo que preserva área, e que, para algum $r_1, r_2 > 0$,*

$$h(x, y) = (x - r_1, y), \quad \text{se } (x, y) \in H_+;$$

$$h(x, y) = (x + r_2, y), \quad \text{se } (x, y) \in H_-;$$

$$h(x + 2\pi, y) = h(x, y) + (2\pi, 0), \quad \text{para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Suponhamos que h tem no máximo uma família de periódica de pontos fixos. Então existe uma curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \text{Fix}(h)$ com $\gamma(0) \in H_-$ e $\gamma(1) \in H_+$ tal que $\text{Ind}_h \gamma = 1/2$.

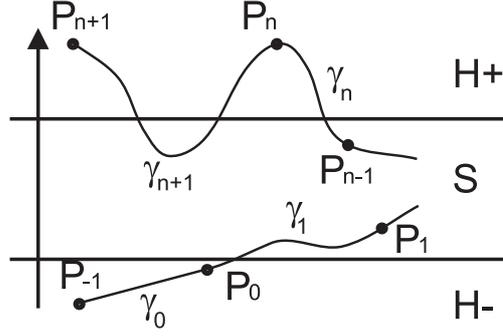


Figura 2.7:

Demonstração: Pela Proposição Proposição 2.1.1, existe $P_0 \in H_-$ tal que $(T \circ h)^n P_0 \in H_+$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Para tal n , escolhamos um ponto $P_0 \in D_0$ tal que $P_n = (T \circ h)^n \in (T \circ h)(H_-)$ com coordenada y máxima. Tal P_n pode não ser único, mas ele existe, pois, pela periodicidade de cada D_i , basta observarmos a região compacta $(T \circ h)(H_-) \cap \{(x, y); y \geq 0, 0 \leq x \leq 2\pi\}$, e vemos que y é uma função contínua nessa região, logo tem um máximo.

Definimos

$$P_i = (x_i, y_i) = (T \circ h)^i P_0, \quad \text{para cada } i \in \mathbb{Z}.$$

Então

$$P_{i+1} = T \circ h(P_i), \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad \text{e } P_n, P_{n+1} \in H_+.$$

Sejam γ_0 o segmento de reta que parte de P_{-1} e vai até P_0 , γ_i a curva tal que $\gamma_i(t) = (T \circ h)^i(\gamma_0(t))$, para todo $t \in [0, 1]$, e para todo $i \in \mathbb{Z}$, e finalmente, seja

$$\gamma = \gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_{n-1} \gamma_n,$$

então $T \circ h(\gamma) = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n \gamma_{n+1}$.

Nós precisaremos dos seguintes fatos sobre γ :

1. A curva $\gamma \gamma_{n+1} = \gamma_0 \dots \gamma_{n+1}$ não tem auto-interseção.

Como γ_0 é um segmento de reta, e γ_i ($i = 1, \dots, n+1$) é a i -ésima potência do homeomorfismo $T \circ h$, segue que cada γ_i não tem auto-interseção.

Agora, suponhamos por absurdo que γ_i e γ_j , com $i < j$, se intersectam em algum ponto diferente do ponto final ou inicial, que ocorre quando $j = i+1$. Chamaremos $\gamma_i(s_1) = \gamma_j(s_2) = (q_1, q_2)$ esse ponto.

Então $\gamma_0(s_1) = (T \circ h)^{-i}(\gamma_i(s_1))$, e logo

$$(T \circ h)^{-i}(q_1, q_2) = (T \circ h)^{-i}(\gamma_j(s_2)) = \gamma_{j-i}(s_2),$$

onde $j - i > 0$.

Mas $\gamma_0(s_1) \in D_0$, e $\gamma_{j-i}(s_2) \in D_{j-i} \subset S \cup H_+$, que é uma contradição.

2. Nenhum ponto de γ tem coordenada- y maior que P_{n+1} .

Como escolhemos P_n com coordenada- y máxima, segue que $y_n > y$ para todo $(x, y) \in \gamma_n$.

Mas $\gamma_i \subset S, \forall i < n$, logo

$$y_n > y \quad \forall (x, y) \in \gamma$$

Como $y_{n+1} = y_n + \frac{\varepsilon}{2}(|\cos x_n| + \cos x_n)$, temos

$$y_{n+1} > y_n > y, \quad \forall (x, y) \in \gamma.$$

3. Nenhum ponto de $T \circ h(\gamma)$ tem coordenada- y menor que P_{-1} .

Temos $\gamma_{-1} \leq y \quad \forall (x, y) \in \gamma_0 \subset D_{-1} \cup D_0$.

Temos ainda

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_2 \subset D_1 \cup D_2 \subset S \cup H_+ \\ \vdots \\ \gamma_{n+1} \subset D_n \cup D_{n+1} \subset S \cup H_+ \end{array} \right. \implies \gamma_2 \cdots \gamma_{n+1} \subset S \cup H_+$$

Então $y_{-1} < y, \forall (x, y) \in \gamma_2 \cdots \gamma_n \subset S \cup H_+$.

Agora, se $(x, y) \in \gamma_1$ há duas hipóteses a considerarmos:

- (1) $(x, y) \in S \cup H_+$ e, portanto $y_{-1} < y$.
- (2) $(x, y) \in H_-$ e nesse caso

$$\begin{aligned} (x, y) &= T \circ h(a, b), \text{ com } (a, b) \in \gamma_0 \\ &= \left(a + r_2, b + \frac{\varepsilon}{2}(|\cos x| + \cos x) \right). \end{aligned}$$

E logo $y > b > y_{-1}$.

Nós podemos, agora, calcular o $Ind_{T \circ h} \gamma$.

Pela construção que fizemos:

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= (x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n - r_1, y_n + \delta_1), \quad \text{onde } 0 \leq \delta_1 \leq \varepsilon; \\ P_0 &= (x_0, y_0) = (x_{-1} + r_2, y_{-1} + \delta_2), \quad \text{onde } 0 \leq \delta_2 \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

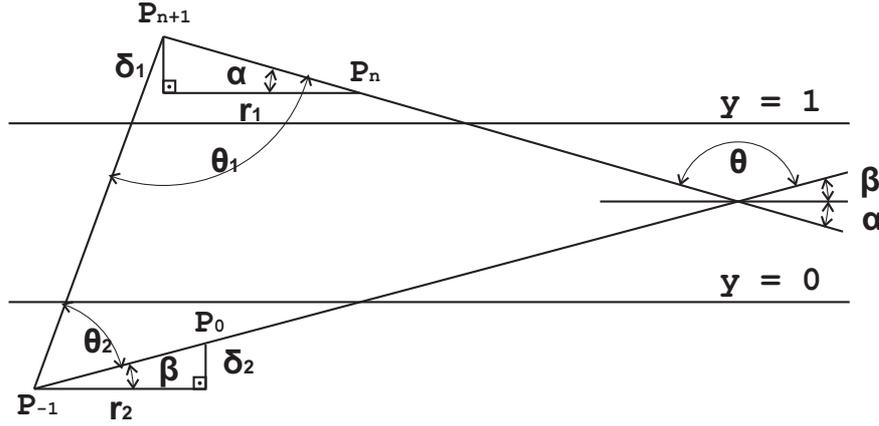


Figura 2.8:

Vamos calcular o ângulo entre os vetores $(P_0 - P_{-1})$ e $(P_{n+1} - P_n)$.

Sejam α e β os ângulos que $\overline{P_{n+1}P_n}$ e $\overline{P_{-1}P_0}$ fazem com o eixo-x, respectivamente. Sejam, também, Q' o ponto em que as retas que contém $\overline{P_{n+1}P_n}$ e $\overline{P_{-1}P_0}$ se encontram, e θ_1 e θ_2 os ângulos $\angle Q'P_{n+1}P_{-1}$, e $\angle P_{n+1}P_{-1}Q'$, respectivamente. Então, pelo triângulo $\triangle P_{n+1}P_{-1}Q'$ vemos que $\theta_1 + \theta_2 + \alpha + \beta = \pi$ ou seja $\theta = \pi - (\alpha + \beta)$.

Mas $\tan \alpha = (\delta_1/r_1)$ e $\tan \beta = (\delta_2/r_2)$ daí que

$$\theta = \pi - [\arctan(\delta_1/r_1) + \arctan(\delta_2/r_2)]$$

Pelo primeiro item do Lema 2.1.1, temos:

$$\text{Ind}_{\text{toh}} \gamma \equiv (\theta/2\pi) \pmod{1}$$

e logo

$$\text{Ind}_{\text{Toh}} \gamma \equiv \left(\left(\frac{1}{2} - 1/2\pi \right) (\arctan(\delta_1/r_1) + \arctan(\delta_2/r_2)) \right) \pmod{1}.$$

Observamos que $0 \leq \delta_i < \varepsilon < r_i$ para $i = 1, 2$, e observamos ainda que

$$\begin{aligned} 0 \leq \delta_i < \varepsilon < r_i &\Rightarrow 0 \leq (\delta_i/r_i) < \varepsilon/r_i < 1 \\ &\Rightarrow 0 \leq (\delta_i/r_i) < 1 \\ &\Rightarrow 0 \leq \arctan(\delta_i/r_i) < \pi/4 \end{aligned}$$

Daí segue que:

$$0 \leq \arctan(\delta_1/r_1) + \arctan(\delta_2/r_2) < \pi/2.$$

Então

$$1/2 \geq 1/2 - (1/2\pi) (\arctan(\delta_1/r_1) + \arctan(\delta_2/r_2)) > 1/2 - \pi/4\pi = 1/4.$$

Portanto

$$1/4 < \theta/2\pi \leq 1/2.$$

Nós devemos mostrar que a congruência $Ind_{T \circ h} \gamma \equiv (\theta/2\pi)(mod 1)$ pode ser trocada por uma igualdade, que é $Ind_{T \circ h} \gamma = (\theta/2\pi)(mod 1)$. Aqui vai um esquema prévio do argumento:

O $Ind_{T \circ h} \gamma$ é a rotação total do vetor $\frac{Q-P}{\|Q-P\|}$, onde $Q = T \circ h(P)$, quando P percorre γ . A idéia é observar que temos a mesma rotação total se primeiro tomarmos $P = P_{-1}$ fixado, e apenas movermos Q por $T \circ h(\gamma)$ de $T \circ h(P_{-1}) = P_0$ a P_{n+1} , e então tomarmos Q em P_{n+1} e movermos P por γ de P_{-1} a P_n .

Mas agora, ao invés de movermos Q por $T \circ h(\gamma)$ e P por γ , nós podemos mover Q pelo segmento de reta de P_0 a P_{n+1} e então mover P através do segmento de reta de P_{-1} a P_n . Nessa situação, a rotação total é como queremos.

Para o argumento preciso, parametrizamos a curva γ_0 através da seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} P : [-1, 0] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (-t)P_{-1} + (t+1)P_0. \end{aligned}$$

Extendemos a aplicação P ao intervalo $[-1, n+1]$ fazendo

$$T \circ h(P(t)) = P(t+1) \quad \text{para} \quad -1 \leq t \leq n.$$

A aplicação P está bem definida pois, para qualquer $t \in [-1, n+1]$, podemos tomar \bar{t} o maior inteiro tal que $\bar{t} \leq t$, e chamando $r = t - \bar{t}$, temos que

$$0 \leq r \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -1 \leq r-1 < 0 \quad \text{e} \quad t = r + \bar{t}$$

E assim

$$\begin{aligned} P(t) &= P(r + \bar{t}) \\ &= T \circ h(P(r + (\bar{t} - 1))) \\ &= (T \circ h)^2(P(r + \bar{t} - 2)) \\ &= \dots = (T \circ h)^{\bar{t}}(P(r)), \end{aligned}$$

onde $r \in [-1, 0]$.

Por definição, $Ind_{T \circ h} \gamma$ é calculado de

$$\begin{aligned} \bar{P} : [-1, n] &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto \frac{P(t+1) - P(t)}{\|P(t+1) - P(t)\|}. \end{aligned}$$

Nós podemos usar, então $\bar{P}_0 : [-1, 2n + 1] \longrightarrow S^1$ definido por:

$$\bar{P}_0 = \begin{cases} \bar{P}(t) & \text{se } -1 \leq t \leq n; \\ \bar{P}(n) & \text{se } n \leq t \leq 2n + 1. \end{cases}$$

Observamos que \bar{P}_0 é constante em $[n, 2n + 1]$. Daí que se $\tilde{P} : [-1, n] \longrightarrow \mathbb{R}$ é um levantamento de \bar{P} por π , segue que $\tilde{P}_0 : [-1, 2n + 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por:

$$\tilde{P}_0(t) = \begin{cases} \tilde{P}(t) & \text{se } -1 \leq t \leq n; \\ \tilde{P}(n) & \text{se } n \leq t \leq 2n + 1. \end{cases}$$

é um levantamento de \bar{P}_0 . De fato:

$$\text{Se } t \in [-1, n], \text{ então } \pi \circ \tilde{P}_0(t) = \pi \circ \tilde{P}(t) = \bar{P}(t) = \bar{P}_0(t).$$

$$\text{Se } t \in [n, 2n + 1], \text{ então } \pi \circ \tilde{P}_0(t) = \pi \circ \tilde{P}(n) = \bar{P}(n) = \bar{P}_0(t).$$

Agora, observamos que

$$\text{Ind}_{T \circ h} \gamma = \bar{P}(n) - \bar{P}(-1) = \bar{P}_0(2n + 1) - \bar{P}_0(-1)$$

e isso justifica o fato de podermos usar \bar{P}_0 como descrito acima.

Nós agora definiremos uma família contínua de aplicações

$$\bar{P}_\lambda : [-1, 2n + 1] \longrightarrow S^1, \text{ para todo } 0 \leq \lambda \leq n + 2,$$

todas com mesmos pontos final e inicial, e tal que a aplicação final \bar{P}_{n+2} é apenas um aumento monótono de um ângulo de $\arctan(\delta_2/r_2)$ por $\pi - \arctan(\pi_1/r_1)$.

O que queremos seguirá imediatamente do último comentário sobre levantamentos de homotopias ao final do capítulo anterior.

Definiremos P_λ em duas partes:

Parte 1: $0 \leq \lambda \leq n + 1$.

$$\bar{P}_\lambda(t) = \begin{cases} \frac{P(t+1) - P(-1)}{\|P(t+1) - P(-1)\|} & \text{se } -1 \leq t \leq \lambda - 1; \\ \frac{P(t+1) - P(t-\lambda)}{\|P(t+1) - P(t-\lambda)\|} & \text{se } \lambda - 1 \leq t \leq n; \\ \frac{P(n+1) - P(t-\lambda)}{\|P(n+1) - P(t-\lambda)\|} & \text{se } n \leq t \leq n + \lambda; \\ \frac{P(n+1) - P(n)}{\|P(n+1) - P(n)\|} & \text{se } n + \lambda \leq t \leq 2n + 1; \end{cases}$$

Observamos que:

- se $-1 \leq t \leq \lambda - 1$:

$$P(-1) = P(t + 1) \iff -1 = t + 1 \iff t = -2.$$

Mas $-1 \leq t$ e então $P(-1) \neq P(t + 1)$.

- se $\lambda - 1 \leq t \leq n$:

$$P(t - \lambda) = P(t + 1) \iff t - \lambda = t + 1 \iff \lambda = -1.$$

Mas $0 \leq \lambda \leq n + 1$ e então $P(t - \lambda) \neq P(t + 1)$.

- se $n \leq t \leq n + \lambda$:

$$\begin{aligned} P(t - \lambda) = P(n + 1) &\iff t - \lambda = n + 1 \iff t - 1 = n + \lambda \\ &\implies t \leq t - 1 \end{aligned}$$

e então $P(t - \lambda) \neq P(n + 1)$.

- se $n + \lambda \leq t \leq 2n + 1$:

$n \neq n + 1$ sempre, e logo $P(n) \neq P(n + 1)$

Parte 2: $n + 1 \leq \lambda \leq n + 2$.

Sejam $P' : [0, n + 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $P'' : [-1, n] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ os segmentos de reta que unem $P(0)$ a $P(n + 1)$ e $P(-1)$ a $P(n)$ respectivamente. Então:

$$\begin{aligned} P' : [0, n + 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \frac{1}{n + 1} \left(tP_{n+1} + (n + 1 - t)P_0 \right) \\ P'' : [-1, n] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \frac{1}{n + 1} \left((t + 1)P_n + (n - t)P_{-1} \right) \end{aligned}$$

Para $0 \leq \mu \leq 1$, definimos $\bar{P}_{n+1+\mu} : [-1, 2n + 1] \longrightarrow S^1$ por:

Se $-1 \leq t \leq n$, então:

$$\bar{P}_{n+1+\mu}(t) = \frac{(1 - \mu)P(t + 1) + \mu P'(t + 1) - P(-1)}{\|(1 - \mu)P(t + 1) + \mu P'(t + 1) - P(-1)\|};$$

E, se $n \leq t \leq 2n + 1$, então:

$$\bar{P}_{n+1+\mu}(t) = \frac{P(n + 1) - (1 - \mu)P(t - n - 1) + \mu P''(t - n - 1)}{\|P(n + 1) - (1 - \mu)P(t - n - 1) - \mu P''(t - n - 1)\|}.$$

\bar{P}_λ está bem definida:

- Se $-1 \leq t \leq n$:

$$\bar{P}_{n+1+\lambda}(t) = \frac{Q-P}{\|Q-P\|}, \text{ onde}$$

$$P = P(-1) \quad \text{e} \quad Q = (1 - \mu)P(t+1) + \mu P'(t+1).$$

Agora observamos que

$$P(t+1) \in \gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_{n+1} = T \circ h(\gamma), \quad \text{e que} \quad P'(t+1) \in \overline{P(0)P(n+1)}.$$

Bem, sabemos que a coordenada-y de $P(t+1)$ é maior que a coordenada-y de $P(-1) = P_{-1}$, e pelas propriedades de $\overline{P(0)P(n+1)}$, a coordenada-y de qualquer ponto em $\overline{P(0)P(n+1)}$ é sempre maior ou igual à coordenada-y de P_{-1} , sendo igual somente no caso em que P_0 e P_{-1} têm a mesma coordenada-y, e $\mu = 1$. Mas, em tal caso, $\bar{P}_{n+2}(t) = \frac{Q-P}{\|Q-P\|}$ onde $P = P_{-1}$ e $Q = P_0$. Sabemos que $P_{-1} \neq P_0$, logo, mesmo neste caso, $\bar{P}_{n+1+\mu}$ está bem definida.

- Se $n \leq t \leq 2n+1$:

$$Q = P(n+1) \quad \text{e} \quad P = (1 - \mu)P(t-n-1) + \mu P''(t-n-1).$$

Sabemos que a coordenada-y de $P(t-n-1)$ é sempre menor que a coordenada-y de $P(n+1)$. De fato:

$$\begin{aligned} t \leq 2n-1 &\implies t-n \leq n-1 \\ &\implies t-n-1 < t-n \leq n-1 < n+1 \\ &\implies P(t-n-1) \neq P(n+1) \end{aligned}$$

Por outro lado, $P''(t-n-1) \in \overline{P_{-1}P_n}$, que é um segmento de reta não-horizontal. Segue que a coordenada-y de $P''(n+1)$ é sempre menor que a coordenada-y de $P(n+1)$ exceto, possivelmente, quando $t = 2n+1$ e $\mu = 1$.

Mas nesse caso: $P = P_n = P_{n+1} = Q$. Então \bar{P}_λ está bem definida.

Falta ainda, mostrar que \bar{P}_λ é contínua para todo λ .

Parte 1:

- $t = \lambda - 1$. Temos que

$$\begin{aligned} t = \lambda - 1 &\implies \frac{P(t+1) - P(-1)}{\|P(t+1) - P(-1)\|} = \frac{P(\lambda) - P(-1)}{\|P(\lambda) - P(-1)\|} \\ &= \frac{P(\lambda - 1 + 1) - P(\lambda - 1 - \lambda)}{\|P(\lambda - 1 + 1) - P(\lambda - 1 - \lambda)\|} \\ &= \frac{P(t+1) - P(t-\lambda)}{\|P(t+1) - P(t-\lambda)\|}. \end{aligned}$$

• $t = n$. Temos que

$$\begin{aligned} t = n \implies \frac{P(t+1) - P(t-\lambda)}{\|P(t+1) - P(t-\lambda)\|} &= \frac{P(n+1) - P(n-\lambda)}{\|P(n+1) - P(n-\lambda)\|} \\ &= \frac{P(n+1) - P(t-\lambda)}{\|P(n+1) - P(t-\lambda)\|}. \end{aligned}$$

• $t = n + \lambda$. Temos que

$$t = n + \lambda \implies \frac{P(n+1) - P(t-\lambda)}{\|P(n+1) - P(t-\lambda)\|} = \frac{P(n+1) - P(n)}{\|P(n+1) - P(n)\|}.$$

Como \bar{P}_λ é contínua em $[-1, \lambda - 1]$, em $[\lambda - 1, n]$, em $[n, n + \lambda]$, e em $[n + \lambda, 2n + 1]$, e como \bar{P}_λ está bem definida em $\lambda - 1$, em n e em $n + \lambda$, segue que \bar{P}_λ é contínua.

Parte 2:

$t = n$ é o único ponto de possível descontinuidade. Temos:

$$\begin{aligned} \frac{(1-\mu)P(t+1) + \mu P'(t+1) - P(-1)}{\|(1-\mu)P(t+1) + \mu P'(t+1) - P(-1)\|} &= \\ \frac{(1-\mu)P(n+1) + \mu P'(n+1) - P(-1)}{\|(1-\mu)P(n+1) + \mu P'(n+1) - P(-1)\|} &= \\ \frac{P(n+1) - P(-1)}{\|P(n+1) - P(-1)\|} &= \\ \frac{P(n+1) - ((1-\mu)P(-1) + \mu P''(-1))}{\|P(n+1) - ((1-\mu)P(-1) + \mu P''(-1))\|} &= \\ \frac{P(n+1) - ((1-\mu)P(t-n-1) + \mu P''(t-n-1))}{\|P(n+1) - ((1-\mu)P(t-n-1) + \mu P''(t-n-1))\|}. \end{aligned}$$

Agora, vamos ao cálculo de $Ind_{T \circ h} C$:

Primeiro, observamos que $H(t, \lambda) = \bar{P}_\lambda$ é uma homotopia tal que

$$H(t, 0) = \bar{P}_0(t) \quad \text{e} \quad H(t, n+2) = \bar{P}_{n+2}(t) \quad \forall t \in [-1, 2n+1].$$

Daí, pelo Teorema 1.1.2, H pode ser levantada por uma homotopia $\tilde{H}(t, \lambda)$ tal que

$$\tilde{H}(t, 0) = \tilde{P}_0(t) \quad \text{e} \quad \tilde{H}(t, n+2) = \tilde{P}_{n+2}(t), \quad \forall t \in [-1, 2n+1].$$

Vemos que $\tilde{P}_{n+2}(t)$ e $\tilde{P}_0(t)$ têm as mesmas extremidades e logo

$$Ind_{T \circ h} \gamma = \frac{\tilde{P}_0(2n+1) - \tilde{P}_0(-1)}{2\pi} = \frac{\tilde{P}_{n+2} - \tilde{P}_{n+2}(-1)}{2\pi}.$$

Agora:

$$\bar{P}_{n+2}(t) = \begin{cases} \frac{P'(t+1)-P(-1)}{\|P'(t+1)-P(-1)\|} & \text{se } -1 \leq t \leq n; \\ \frac{P(n+1)-P''(t-n-1)}{\|P(n+1)-P''(t-n-1)\|} & \text{se } n \leq t \leq 2n+1; \end{cases}$$

Então para $t \in [-1, n]$:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{n+2}(t) &= \frac{P'(t+1) - P(-1)}{\|P'(t+1) - P(-1)\|} \\ &= \frac{1/(n+1)\left(tP_{n+1} + (n+1-t)P_0\right) - P_{-1}}{\|1/(n+1)\left(tP_{n+1} + (n+1-t)P_0\right) - P_{-1}\|} \\ &= \frac{1/(n+1)\left(t(P_{n+1} - P_{-1}) + (n+1-t)(P_0 - P_{-1})\right)}{\|1/(n+1)\left(t(P_{n+1} - P_{-1}) + (n+1-t)(P_0 - P_{-1})\right)\|} \\ &= \frac{t\vec{v} + (n+1-t)\vec{u}}{\|t\vec{v} + (n+1-t)\vec{u}\|}, \end{aligned}$$

onde, \vec{u} é o vetor $(P_0 - P_{-1})$, e \vec{v} é o vetor $(P_{n+1} - P_{-1})$.

E para $t \in [n, 2n+1]$:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{n+2}(t) &= \frac{P(n+1) - P''(t-n-1)}{\|P(n+1) - P''(t-n-1)\|} \\ &= \frac{P(n+1) - 1/(n+1)\left((t-n)P_n + (2n-t+1)P_{-1}\right)}{\|P(n+1) - 1/(n+1)\left((t-n)P_n + (2n-t+1)P_{-1}\right)\|} \\ &= \frac{1/(n+1)\left((t-n)(P_{n+1} - P_n) + (2n-t+1)(P_{n+1} - P_{-1})\right)}{\|1/(n+1)\left((t-n)(P_{n+1} - P_n) + (2n-t+1)(P_{n+1} - P_{-1})\right)\|} \\ &= \frac{(t-n)(\vec{w}) + (2n-t+1)\vec{u}}{\|(t-n)(\vec{w}) + (2n-t+1)\vec{u}\|} \end{aligned}$$

onde \vec{w} é o vetor $(P_{n+1} - P_n)$.

Observamos que $\alpha + \beta + \theta_1 + \theta_2 = \pi$, e daí segue que $\beta + \theta_1 + \theta_2 \leq \pi$.

Quando $t \in [-1, n]$, temos que $(t+1)\vec{v} + (n-t)\vec{u}$ está no segmento de reta que une \vec{u} a \vec{v} , ou seja no segmento de reta $\overline{P_0, P_{n+1}}$. Temos também que, pela definição de P_{-1} , P_0 e P_{n+1} , o ângulo $\sphericalangle(P_0, P_{-1}, P_{n+1}) = \theta_2$, que está em $[0, \pi]$. Chamando de $\Psi(t)$ o ângulo que $(t+1)\vec{v} + (n-t)\vec{u}$ faz com \vec{u} , segue que $\Psi(t)$ está entre $\vec{u}/\|\vec{u}\|$ e $\vec{v}/\|\vec{v}\| \in S^1$. Então temos que $\Psi(t)$ é o menor ângulo entre \vec{u} e $\bar{P}_{n+2}(t)$, e logo,

$$0 \leq \Psi(t) \leq \sphericalangle(P_0, P_{-1}, P_{n+1}) = \theta_2, \quad \forall t \in [-1, n].$$

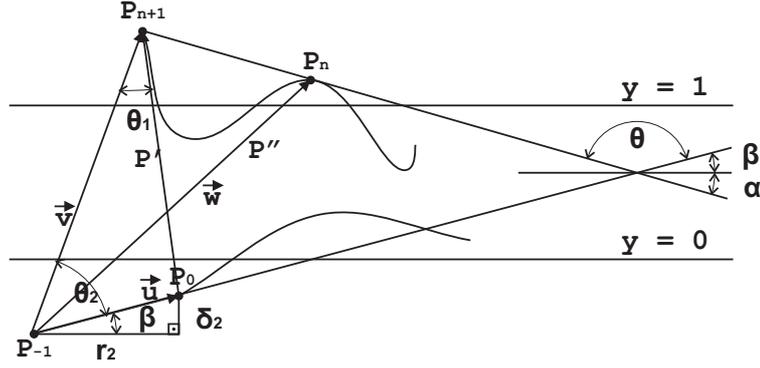


Figura 2.9:

E sabemos que $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ restrita ao intervalo $(-\pi/2, 3\pi/2)$ é um homeomorfismo. Segue daí que

$$\begin{aligned} \pi(\Psi(t) + \beta) &= (\cos(\Psi(t) + \beta), \sin(\Psi(t) + \beta)) \\ &= \bar{P}_{n+2}(t), \quad \forall t \in [-1, n]. \end{aligned}$$

Quando $t \in [n, 2n + 1]$, temos que $(t - n)\vec{w} + (2n + 1 - t)\vec{v}$ está no segmento de reta que une os pontos iniciais do vetor \vec{v} ao vetor \vec{w} , ou seja, está em $\overline{P_{-1}P_n}$. Temos também que, pela definição de P_{-1} , P_n e P_{n+1} , o ângulo $\sphericalangle(P_{-1}, P_{n+1}, P_n) = \theta_1$, e é tal que $\theta_1 + \theta_2 < \pi$. Chamando de $\Phi(t)$ o menor ângulo que $(t - n)\vec{w} + (2n + 1 - t)\vec{v}$ faz com \vec{v} , segue que $\Phi(t)$ é o menor ângulo entre \vec{v} e $\bar{P}_{n+2}(t)$. Em outras palavras, $\Phi(t)$ é tal que

$$\pi(\Phi(t) + \theta_2) = \bar{P}_{n+2}(t), \quad \forall t \in [n, 2n + 1].$$

Extendemos $\Psi(t)$ ao intervalo $[-1, 2n + 1]$ de maneira que

$$\text{se } t \in [n, 2n + 1], \quad \text{então } \Psi(t) = \Phi(t) + \theta_2.$$

Segue daí que $\Psi(t)$ é o ângulo que $\bar{P}_{n+2}(t)$ faz com $\vec{u}/\|\vec{u}\|$ em S^1 , para qualquer $t \in [-1, 2n + 1]$.

Então

$$\begin{aligned} \pi(\Psi(t) + \beta) &= (\cos(\Psi(t) + \beta), \sin(\Psi(t) + \beta)) \\ &= \bar{P}_{n+2}(t), \quad \forall t \in [-1, 2n + 1]. \end{aligned}$$

Pela definição de levantamento, temos que $\Psi(t)$ é um levantamento para $\bar{P}_{n+2}(t)$ por π , e ainda:

$$\Psi(2n + 1) = \beta + \theta_1 + \theta_2 = \beta + \theta \quad \text{e} \quad \Psi(-1) = \beta$$

Podemos concluir que

$$Ind_{T_{oh}}\gamma = \theta/2\pi. \quad (2.7)$$

Agora, se definirmos

$$\begin{aligned} T_s : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \left(x, y + \frac{s\varepsilon}{2}(|\cos x| - \cos x) \right) \end{aligned}$$

Então

$$T_0 \equiv Id \quad \text{e} \quad T_1 \equiv T.$$

Segue que, para qualquer $0 \leq s \leq 1$, temos que $Ind_{T_s oh}$ está definido, e

$$Ind_{T_s oh} \equiv \frac{1}{2} - \left(\arctan(s\delta_1/r_1) + \arctan(s\delta_2/r_2) \right) (mod 1).$$

Mas vimos que essa congruência é, na verdade, uma igualdade para $s = 1$. Pela Propriedade 1.2.1, sabemos que $Ind_{t_s oh}\gamma$ varia continuamente em relação a s . Sabemos, também, que

$$Ind_{T_1 oh}\gamma = Ind_{T oh}\gamma = \theta/2.$$

Daí que, como

$$Ind_{T_s oh} \equiv \frac{1}{2} - \left(\arctan(s\delta_1/r_1) + \arctan(s\delta_2/r_2) \right) (mod 1),$$

segue que

$$Ind_{T_s oh} = \frac{1}{2} - \left(\arctan(s\delta_1/r_1) + \arctan(s\delta_2/r_2) \right) (mod 1).$$

E portanto

$$Ind_{T_0 oh}\gamma = Ind_h\gamma = \frac{1}{2}.$$

■

Agora, estamos em busca de uma curva γ tal que seu índice em relação a h seja $-1/2$. Nossa estratégia será a de fazer um estudo análogo ao que fizemos para h , para h^{-1} , de forma a encontrar curva γ' tal que $Ind_h\gamma' = -1/2$.

Temos a seguinte proposição:

Proposição 2.1.3 *Seja $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ homeomorfismo que preserva área, e que, para algum $r_1, r_2 > 0$, valem as seguintes propriedades:*

$$\begin{aligned}
h(x, y) &= (x + r_1, y), \quad \text{se } (x, y) \in H_+; \\
h(x, y) &= (x - r_2, y), \quad \text{se } (x, y) \in H_-; \\
h(x + 2\pi, y) &= h(x, y) + (2\pi, 0), \quad \text{para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

Suponhamos que h tem no máximo uma família de periódica de pontos fixos. Então existe uma curva $\beta : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \text{Fix}(h)$ com $\varphi(0) \in H_-$ e $\varphi(1) \in H_+$ e tal que $\text{Ind}_h \varphi = -1/2$

Demonstração: Pela Proposição 2.1.1, existe $P_0 \in H_-$ tal que $(T \circ h)^n P_0 \in H_+$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Para tal n , escolha um ponto $P_n \in (T \circ h)^n(H_-)$ com coordenada y máxima.

Definimos

$$P_i = (x_i, y_i) = (T \circ h)^i P_0, \quad \text{para cada } i \in \mathbb{Z}.$$

Então

$$P_{i+1} = T \circ h(P_i), \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad \text{e } P_n, P_{n+1} \in H_+.$$

Seja γ_0 o segmento de reta que parte de P_{-1} e vai até P_0 . Seja também

$$\gamma_i = (T \circ h)^i(\gamma_0), \quad \text{para cada } i \in \mathbb{Z},$$

e finalmente, seja

$$\gamma = \gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_{n-1} \gamma_n.$$

Então

$$T \circ h(\gamma) = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n \gamma_{n+1}.$$

Nós precisaremos dos seguintes fatos sobre γ :

1. A curva $\gamma \gamma_{n+1} = \gamma_0 \dots \gamma_{n+1}$ não tem auto-interseção.
2. Nenhum ponto de γ tem coordenada- y maior que P_{n+1} .
3. Nenhum ponto de $T \circ h(\gamma)$ tem coordenada- y menor que P_{-1} .

Agora vamos calcular o $\text{Ind}_{T \circ h} \gamma$.

Pela construção,

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= (x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n + r_1, y_n + \delta_1), \quad \text{onde } 0 \leq \delta_1 \leq \varepsilon; \\
P_0 &= (x_0, y_0) = (x_{-1} - r_2, y_{-1} + \delta_2), \quad \text{onde } 0 \leq \delta_2 \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Temos, também que o ângulo entre $\frac{P_0 - P_{-1}}{\|P_0 - P_{-1}\|}$ e $\frac{P_{n+1} - P_n}{\|P_{n+1} - P_n\|}$ é

$$\theta = \pi - [\arctan(\delta_1/r_1) + \arctan(\delta_2/r_2)].$$

Chamaremos α o ângulo que $\overline{P_{n+1}P_n}$ faz com o eixo-x, e β o ângulo que $\overline{P_{-1}P_0}$ faz com o mesmo eixo.

Então

$$Ind_{T \circ h} \gamma \equiv \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \left(\arctan(\delta_1/r_1) + \arctan(\delta_2/r_2) \right) \pmod{1}.$$

Parametrizando γ_0 por

$$\begin{aligned} P : [-1, 0] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (-t)P_{-1} + (t+1)P_0 \end{aligned}$$

temos que P é o segmento de reta partindo P_{-1} e chegando a P_0 .

Extendemos P ao intervalo $[-1, n+1]$ fazendo

$$P(t+1) = T \circ h(P(t)) \quad \text{para todo } t \in [-1, n].$$

Pela definição de índice, podemos calcular $Ind_{T \circ h} \gamma$ através do levantamento por π da aplicação

$$\begin{aligned} \bar{P} : [-1, n] &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto \frac{P(t+1) - P(t)}{\|P(t+1) - P(t)\|}. \end{aligned}$$

Definimos $\bar{P}_0 : [-1, 2n+1] \longrightarrow S^1$;

$$\bar{P}_0 = \begin{cases} \bar{P}(t) & \text{se } -1 \leq t \leq n; \\ \bar{P}(n) & \text{se } n \leq t \leq 2n+1. \end{cases}$$

Podemos usar \bar{P}_0 para calcular o $Ind_{T \circ h} \gamma$, pois se $\tilde{P} : [-1, n] \longrightarrow \mathbb{R}$ é levantamento de \bar{P} por π , então $\tilde{P}_0 : [-1, 2n+1] \longrightarrow S^1$ definida por

$$\tilde{P}_0 = \begin{cases} \tilde{P}(t) & \text{se } -1 \leq t \leq n; \\ \tilde{P}(n) & \text{se } n \leq t \leq 2n+1; \end{cases}$$

também é levantamento de \bar{P}_0 por π .

Como na demonstração da proposição anterior, definiremos uma família contínua de aplicações

$$\bar{P}_\lambda : [-1, 2n+1] \longrightarrow S^1; \quad 0 \leq \lambda \leq n+2,$$

todas com mesmos pontos final e inicial, tal que a aplicação final \bar{P}_{n+2} é apenas a subtração monótona de um ângulo de $\arctan(\delta_2/r_2)$ por $\pi - \arctan(\pi_1/r_1)$.

O que queremos seguirá imediatamente do último comentário sobre levantamentos de homotopias ao final do capítulo anterior.

Definiremos P_λ em duas partes:

Parte 1: $0 \leq \lambda \leq n + 1$.

$$\bar{P}_\lambda(t) = \begin{cases} \frac{P(t+1)-P(-1)}{\|P(t+1)-P(-1)\|} & \text{se } -1 \leq t \leq \lambda - 1; \\ \frac{P(t+1)-P(t-\lambda)}{\|P(t+1)-P(t-\lambda)\|} & \text{se } \lambda - 1 \leq t \leq n; \\ \frac{P(n+1)-P(t-\lambda)}{\|P(n+1)-P(t-\lambda)\|} & \text{se } n \leq t \leq n + \lambda; \\ \frac{P(n+1)-P(n)}{\|P(n+1)-P(t-n)\|} & \text{se } n + \lambda \leq t \leq 2n + 1; \end{cases}$$

Parte 2: $n + 1 \leq \lambda \leq n + 2$

Sejam $P' : [0, n + 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $P'' : [-1, n] \rightarrow \mathbb{R}^2$ os segmentos de reta que unem $P(0)$ a $P(n + 1)$ e $P(-1)$ a $P(n)$ respectivamente. Então:

$$\begin{aligned} P' : [0, n + 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \frac{1}{n + 1} \left(tP_{n+1} + (n + 1 - t)P_0 \right) \\ P'' : [-1, n] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \frac{1}{n + 1} \left((t + 1)P_n + (n - t)P_{-1} \right) \end{aligned}$$

Para $0 \leq \mu \leq 1$, definimos:

Se $-1 \leq t \leq n$, então:

$$\bar{P}_{n+1+\mu}(t) = \frac{(1 - \mu)P(t + 1) + \mu P'(t + 1) - P(-1)}{\|(1 - \mu)P(t + 1) + \mu P'(t + 1) - P(-1)\|};$$

E, se $n \leq t \leq 2n + 1$, então:

$$\bar{P}_{n+1+\mu}(t) = \frac{P(n + 1) - (1 - \mu)P(t - n - 1) + \mu P''(t - n - 1)}{\|P(n + 1) - (1 - \mu)P(t - n - 1) - \mu P''(t - n - 1)\|}.$$

Agora, vamos ao cálculo de $\text{Ind}_{T_{\text{oh}}}\gamma$:

Primeiro, observamos que $H(t, \lambda) = \bar{P}_\lambda$ é uma homotopia tal que

$$H(t, 0) = \bar{P}_0(t) \quad \text{e} \quad H(t, n + 2) = \bar{P}_{n+2}(t) \quad \forall t \in [-1, 2n + 1].$$

Daí, pelo Teorema 1.1.2, H pode ser levantada por uma homotopia $\tilde{H}(t, \lambda)$ tal que

$$\tilde{H}(t, 0) = \tilde{P}_0(t) \quad \text{e} \quad \tilde{H}(t, n+2) = \tilde{P}_{n+2}(t), \quad \forall t.$$

$\tilde{P}_{n+2}(t)$ e $\tilde{P}_0(t)$ têm as mesmas extremidades. Bem:

$$\text{Ind}_{T^{\text{oh}}\gamma} = \frac{\tilde{P}_0(2n+1) - \tilde{P}_0(-1)}{2\pi} = \frac{\tilde{P}_{n+2} - \tilde{P}_{n+2}(-1)}{2\pi}.$$

Agora:

$$\bar{P}_{n+2}(t) = \begin{cases} \frac{P'(t+1) - P(-1)}{\|P'(t+1) - P(-1)\|} & \text{se } -1 \leq t \leq n; \\ \frac{P(n+1) - P''(t-n-1)}{\|P(n+1) - P''(t-n-1)\|} & \text{se } n \leq t \leq 2n+1; \end{cases}$$

Então para $t \in [-1, n]$:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{n+2}(t) &= \frac{P'(t+1) - P(-1)}{\|P'(t+1) - P(-1)\|} \\ &= \frac{1/(n+1) \left(tP_{n+1} + (n+1-t)P_0 \right) - P_{-1}}{\|1/(n+1) \left(tP_{n+1} + (n+1-t)P_0 \right) - P_{-1}\|} \\ &= \frac{1/(n+1) \left(t(P_{n+1} - P_{-1}) + (n+1-t)(P_0 - P_{-1}) \right)}{\|1/(n+1) \left(t(P_{n+1} - P_{-1}) + (n+1-t)(P_0 - P_{-1}) \right)\|} \\ &= \frac{t\vec{v} + (n+1-t)\vec{u}}{\|t\vec{v} + (n+1-t)\vec{u}\|}, \end{aligned}$$

onde, \vec{u} é o vetor $(P_0 - P_{-1})$, e \vec{v} é o vetor $(P_{n+1} - P_{-1})$.

E para $t \in [n, 2n+1]$:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{n+2}(t) &= \frac{P(n+1) - P''(t-n-1)}{\|P(n+1) - P''(t-n-1)\|} \\ &= \frac{P(n+1) - 1/(n+1) \left((t-n)P_n + (2n-t+1)P_{-1} \right)}{\|P(n+1) - 1/(n+1) \left((t-n)P_n + (2n-t+1)P_{-1} \right)\|} \\ &= \frac{1/(n+1) \left((t-n)(P_{n+1} - P_n) + (2n-t+1)(P_{n+1} - P_{-1}) \right)}{\|1/(n+1) \left((t-n)(P_{n+1} - P_n) + (2n-t+1)(P_{n+1} - P_{-1}) \right)\|} \\ &= \frac{(t-n)(\vec{w}) + (2n-t+1)\vec{u}}{\|(t-n)(\vec{w}) + (2n-t+1)\vec{u}\|} \end{aligned}$$

onde \vec{w} é o vetor $(P_{n+1} - P_n)$.

Definimos, como na proposição anterior, Q' o ponto em que as retas que contém $\overline{P_{n+1}P_n}$ e $\overline{P_{-1}P_0}$ se encontram, e θ_1 e θ_2 os ângulos $\sphericalangle Q'P_{n+1}P_{-1}$, e $\sphericalangle P_{n+1}P_{-1}Q'$.

Observamos que

$$\alpha + \beta + \theta_1 + \theta_2 = \pi,$$

e daí segue que

$$\alpha + \theta_1 + \theta_2 \leq \pi.$$

Quando $t \in [-1, n]$, temos que $(t+1)\vec{v} + (n-t)\vec{u}$ está no segmento de reta que une \vec{u} a \vec{v} , ou seja no segmento de reta $\overline{P_0, P_{n+1}}$. Temos também que, pela definição de P_{-1} , P_0 e P_{n+1} , que o ângulo $\sphericalangle(P_0, P_{-1}, P_{n+1}) = \theta_2 \in [0, \pi]$.

Chamando de $\Psi(t)$ o ângulo que $(t+1)\vec{v} + (n-t)\vec{u}$ faz com \vec{u} , segue que $\Psi(t)$ está entre $\vec{u}/\|\vec{u}\|$ e $\vec{v}/\|\vec{v}\| \in S^1$. Observamos que

$$\begin{aligned} \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} &= (\cos(\pi - \beta), \sin(\pi - \beta)) \\ \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} &= (\cos(\pi - \beta - \theta_2), \sin(\pi - \beta - \theta_2)) \end{aligned}$$

Então temos que $\Psi(t)$ é o menor ângulo entre \vec{u} e $\bar{P}_{n+2}(t)$, e logo,

$$0 \leq \Psi(t) \leq \sphericalangle(P_0, P_{-1}, P_{n+1}) = \theta_2, \quad \forall t \in [-1, n].$$

E sabemos que $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ restrita ao intervalo $(-\pi/2, 3\pi/2)$ é um homeomorfismo. Segue daí que

$$\begin{aligned} \pi(\pi - \Psi(t) - \beta) &= (\cos(\pi - \Psi(t) - \beta), \sin(\pi - \Psi(t) - \beta)) \\ &= \bar{P}_{n+2}(t), \quad \forall t \in [-1, n]. \end{aligned}$$

Quando $t \in [n, 2n+1]$, temos que $(t-n)\vec{w} + (2n+1-t)\vec{v}$ está no segmento de reta que une os pontos iniciais do vetor \vec{v} ao vetor \vec{w} , ou seja, está em $\overline{P_{-1}P_n}$.

Temos também que, pela definição de P_{-1} , P_n e P_{n+1} , o ângulo $\sphericalangle(P_{-1}, P_{n+1}, P_n) = \theta_1$, e é tal que $\theta_1 + \theta_2 < \pi$.

Chamando de $\Phi(t)$ o menor ângulo que $(t-n)\vec{w} + (2n+1-t)\vec{v}$ faz com \vec{v} , segue que $\Phi(t)$ é o menor ângulo entre \vec{v} e $\bar{P}_{n+2}(t)$. Em outras palavras, $\Phi(t)$ é tal que

$$\pi(\pi - \beta - \Phi(t) - \theta_2) = \bar{P}_{n+2}(t), \quad \forall t \in [n, 2n+1].$$

Extendemos $\Psi(t)$ ao intervalo $[-1, 2n+1]$ de maneira que

$$\text{se } t \in [n, 2n+1], \quad \text{então } \Psi(t) = \Phi(t) + \theta_2.$$

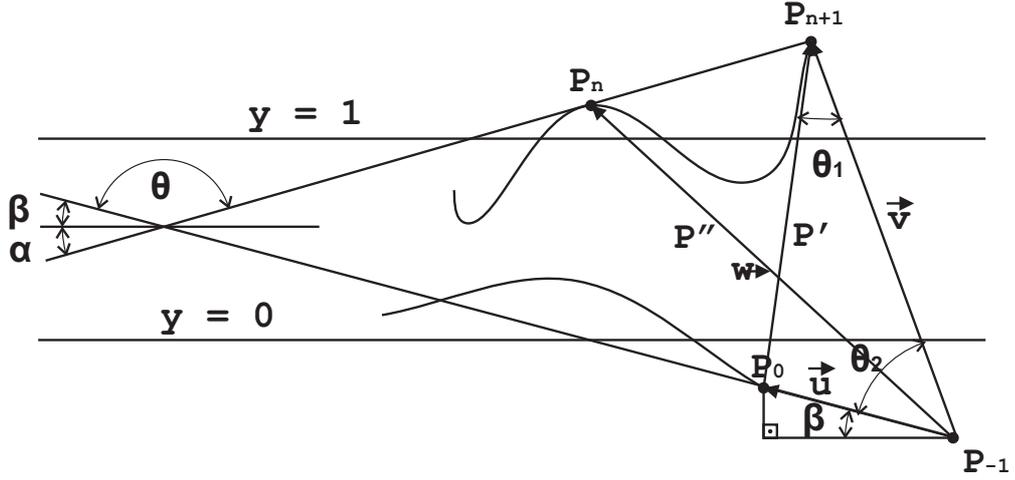


Figura 2.10:

Segue daí que $\Psi(t)$ é o ângulo que $\bar{P}_{n+2}(t)$ faz com $\vec{u}/\|\vec{u}\|$ em S^1 , para qualquer $t \in [-1, 2n+1]$.

Então

$$\begin{aligned} \pi(\pi - \beta - \Psi(t)) &= (\cos(\pi - \beta - \Psi(t)), \sin(\pi - \beta - \Psi(t))) \\ &= \bar{P}_{n+2}(t), \quad \forall t \in [-1, 2n+1]. \end{aligned}$$

Pela definição de levantamento, temos que

$$\begin{aligned} \Theta : [-1, 2n+1] &: \longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \pi - \beta - \Psi(t) \end{aligned}$$

é um levantamento para $P_{n+2}(t)$ por π , e ainda:

$$\Theta(2n+1) = \pi - \beta - \theta_1 - \theta_2 = \pi - \beta - \theta \quad \text{e} \quad \Psi(-1) = \pi - \beta$$

Podemos concluir que

$$\text{Ind}_{T \circ h} \gamma = -\theta/2\pi. \tag{2.8}$$

Novamente, definindo para cada $s \in [0, \varepsilon]$

$$\begin{aligned} T_s : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \left(x, y + \frac{s\varepsilon}{2} (|\cos x| - \cos x) \right) \end{aligned}$$

temos que

$$T_0 \equiv \text{Id} \quad \text{e} \quad T_1 \equiv T.$$

Então, para $0 \leq s \leq 1$, $Ind_{T_s \circ h}$ está definido, e

$$Ind_{T_s \circ h} \equiv 1/2 - \left(\arctan(s\delta_1/r_1) + \arctan(s\delta_2/r_2) \right) \pmod{1}.$$

Mas essa congruência é, na verdade, uma igualdade para $s = 1$. Pela Propriedade 1.2.1, sabemos que $Ind_{t_s \circ h} \gamma$ varia continuamente em relação a s . Sabemos, também, que

$$Ind_{T_1 \circ h} \gamma = Ind_{T \circ h} \gamma = -\frac{1}{2}.$$

Daí que, como

$$Ind_{T_s \circ h} \gamma \equiv \frac{1}{2} - \left(\arctan(s\delta_1/r_1) + \arctan(s\delta_2/r_2) \right) \pmod{1},$$

segue que

$$Ind_{T_s \circ h} \gamma = -\frac{1}{2} + \left(\arctan(s\delta_1/r_1) + \arctan(s\delta_2/r_2) \right) \pmod{1}.$$

Portanto

$$Ind_{T_0 \circ h} \gamma = Ind_h \gamma = -\frac{1}{2}.$$

■

Agora vamos à demonstração do Teorema 2.0.2:

Demonstração: Teorema do Ponto Fixo de Poincaré-Birkhoff.

Sendo h um homeomorfismo que preserva área, tal que, para algum $r_1, r_2 > 0$,

$$h(x, y) = (x - r_1, y), \quad \text{se } (x, y) \in H_+;$$

$$h(x, y) = (x + r_2, y), \quad \text{se } (x, y) \in H_-;$$

$$h(x + 2\pi, y) = h(x, y) + (2\pi, 0) \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Suponha, por absurdo que existe no máximo uma família de pontos fixos.

Temos que valem o lema 2.1.1, e a Proposição 2.1.2. Pelo segundo ítem do Lema 2.1.1 e pela Proposição 2.1.2, toda curva δ partindo de H_- e chegando à H_+ é tal que

$$Ind_h \delta = 1/2.$$

Agora observamos que a inversa de h é tal que:

$$h^{-1}(x, y) = (x + r_1, y), \quad \text{se } (x, y) \in H_+;$$

$$h^{-1}(x, y) = (x - r_2, y), \quad \text{se } (x, y) \in H_-;$$

$$h^{-1}(x + 2\pi, y) = h^{-1}(x, y) + (2\pi, 0), \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Chamando $h(\bar{x}, \bar{y}) = (x, y)$ segue:

$$\begin{aligned}h^{-1}(x + 2\pi, y) &= h^{-1}((x, y) + (2\pi, 0)) = h^{-1}(h(\bar{x}, \bar{y}) + (2\pi, 0)) \\ &= h^{-1} \circ h(\bar{x} + 2\pi, \bar{y}) \\ &= (\bar{x} + 2\pi, \bar{y}) = (\bar{x}, \bar{y}) + (2\pi, 0) \\ &= h^{-1}(x, y) + (2\pi, 0), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

Então a inversa de h , que é h^{-1} , se encaixa nas hipóteses da proposição 2.1.3.

Daí que existe uma curva γ' partindo de H_- e chegando a H_+ tal que

$$Ind_{h^{-1}}\gamma' = -1/2.$$

Mas a Propriedade de Índice 1.2.4 garante que

$$Ind_{h^{-1}}\gamma' = Ind_h(h^{-1} \circ \gamma').$$

Podemos, então, assegurar a existência de uma curva $h^{-1} \circ \gamma'$ partindo de H_- e chegando a H_+ com

$$Ind_h(h^{-1} \circ \gamma') = -1/2,$$

o que consiste em uma contradição.

■

Referências

- [1] BIRKHOFF, G. D. **Proof of Poincaré's Geometric Theorem.** Trans. Amer. Math. Soc. 14, pp 14-22, 1913.
- [2] BIRKHOFF, G. D. **An Extension of Poincaré's Last Geometric Theorem.** Acta Math. 47, pp 297-311, 1925.
- [3] BROWN, M. and NEUMANN, W. D. **Proof of the Poincaré-Birkhoff Fixed Point Theorem.** Michigan Math. J. 24, pp 21-31, 1977.
- [4] GREENBERG, M. H. and HARPER, J. R. **Algebraic Topology, A First Course.** Addison-Wesley Publishing Company, California, 1997.
- [5] POINCARÉ, H. **Sur un Théoremè de Géométrie.** Rend. Circ. Mat. Palermo 33, pp 375-407, 1912.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)