Universidade Federal Fluminense

Pós-Graduação em Matemática

Dissertação de Mestrado

Estimativas do Primeiro Autovalor do Operador L_r em $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{H}^n$

Fernanda Lúcia Sá Ferreira

Orientador: Francisco Xavier Fontenele

Co-orientadora: Walcy Santos

Submetido em cumprimento parcial dos requisitos para obtenção do grau de mestre em Matemática pela Universidade Federal Fluminense

Niterói, Rio de Janeiro

Julho de 2007

Estimativas do Primeiro Autovalor do Operador L_r em $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{H}^n$

Fernanda Lúcia Sá Ferreira

Como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre, essa dissertação está submetida a seguinte banca de professores:

Professor Detang Zhou (Presidente) - UFF

Professora Walcy Santos (Co-orientadora) - UFRJ

Professora Nedir do Espírito Santo - UFRJ

Universidade Federal Fluminense

Julho de 2007

Sumário

Introdução

Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n e seja $x : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de M em uma forma espacial de dimensão $n+1$ e curvatura seccional c. Denote por A a Segunda Forma Fundamental da imersão x e por $k_1, \cdots, k_n$ suas curvaturas principais. Para $r = 1, \cdots, n$ definimos a $r-$ésima curvatura média como sendo

$$H_r = \frac{S_r}{\binom{n}{r}}, \quad \text{onde} \quad S_r = \sum_{j_1 < \cdots < j_r} k_{j_1} \cdots k_{j_r}.$$

Em particular, quando $r = 1$ temos $H_1 = \frac{1}{n}(k_1 + \cdots + k_n)$ que é a curvatura média e quando $r = n$ temos $H_n = k_1 \cdots k_n$ que é a curvatura de Gauss-Kronecker.

Definimos para $r = 1, \cdots, n$ o $r-$ésimo operador linearizado, L_r pondo para cada função real f definida em M de classe $C^\infty(M)$

$$L_r(f) = div(T_r grad\ f),$$

onde T_r é o $r-$ésimo operador de Newton definido de forma recursiva por

$$T_0 = I \quad \text{e} \quad T_r = S_r - AT_{r-1}.$$

Note que em particular, L_0 é o operador Laplaciano.

Quanto a estabilidade, em 1984, J. L. Barbosa e M. P. do Carmo em [5], concluíram que somente as esferas são estáveis quando estudavam o problema da estabilidade para hipersuperfícies compactas de dimensão n imersas em $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura média constante.

O teorema apresentado em [5] foi estendido por B. Palmer em [16], A. M. de Silveira em [19] e por F. J. Lopez e A. Ros em [15], onde a condição de estabilidade é aplicada em todo subdomínio compacto e também assume-se que a variedade tem curvatura média constante não nula.

Já em 1988, J. L. Barbosa, M. P. do Carmo, J. Eschenburg em [6] estenderam o trabalho feito em [5], para o caso de M imersa em S^{n+1} ou no espaço hiperbólico $\mathcal{H}^{n+1}$. Independentemente A. El Soufi e S. Ilias em [9] e E. Heintze em [13], também fizeram tal extensão.

Em 1993, H. Alencar, M. P. do Carmo e A. G. Colares em [1] estudaram estabilidade para hipersuperfícies com curvatura escalar constante e concluíram que

"As hipersuperfícies M de dimensão n orientáveis,compactas e com curvatura escalar constante imersas em $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathcal{H}^{n+1}$ ou no hemisfério aberto de S^{n+1} são estáveis se, e somente se, são as esferas geodésicas."

O objetivo dessa dissertação é apresentar a prova do seguinte teorema

"Se M é uma hipersuperfície fechada estável de dimensão n imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$ e se para $r = 1, \cdots, n-1$, $H_{r+1} > 0$ então M é a esfera."

Para atingir nosso objetivo optamos por seguir os passos de H. Alencar, M. do Carmo e H. Rosenberg em [4], onde o teorema que mencionamos é apresentado como uma aplicação razoavelmente simples de uma estimativa para o primeiro autovalor de L_r.

Em 1977, R. Reilly em [17] encontrou uma estimativa para λ_1, o primeiro autovalor do operador Laplaciano, supondo M compacta, conexa, sem bordo e imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$. Eis aqui a estimativa obtida:

$$\frac{\lambda_1}{n} \leq \frac{1}{vol(M)} \int_M H_1^2 dM,$$

com a igualdade ocorrendo se M for a esfera.

Buscar estimativas para λ_1, o primeiro autovalor do Laplaciano, quando M está imersa no espaço hiperbólico $\mathcal{H}^{n+1}$ é um pouco mais sutil. Uma estimativa foi feita por E. Heintze, mas a melhor estimativa em $\mathcal{H}^{n+1}$ foi obtida por A. El Soufi e S. Ilias em [9] no ano de 1992. A estimativa obtida foi

$$\frac{\lambda_1}{n} + 1 \leq \frac{1}{vol(M)} \int_M H_1^2 dM, \quad m \geq 2,$$

mais uma vez a igualdade ocorre se M for a esfera.

Foi através dessa estimativa que A. El Soufé e S. Ilias em [9] estudaram o problema da estabilidade para imersões com curvatura média constante que mencionamos anteriormente. Em particular, eles obtiveram o teorema de J. L. Barbosa e M. P. do Carmo em [5] no caso de M estar imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$ e o teorema de J. L. Barbosa, M. P. do Carmo, J. Eschenburg em [6] no caso de M estar imersa em S^{n+1} ou $\mathcal{H}^{n+1}$.

Nessa exposição mostramos a seguinte estimativa para λ_1, o primeiro autovalor de L_r,

"Se M é uma variedade Riemanniana compacta, sem bordo, imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$ com $H_{r+1} > 0$ então $\lambda_1 \leq c(r) \frac{\int_M H_{r+1}^2 dM}{\int_M H_r dM}$, onde $c(r) = (n-r)\binom{n}{r}$".

Embora nessa dissertação só tenhamos nos preocupado em estudar estabilidade em variedades Riemannianas imersas em $\mathbb{R}^{n+1}$, estimamos também λ_1, o primeiro autovalor de L_r, para variedades imersas em H^{n+1}.

"Se M é uma variedade Riemanniana compacta, sem bordo, imersa em $\mathcal{H}^{n+1}$ com $H_{r+1} > 0$ então $\lambda_1 \leq c(r)(\overline{H}_{r+1} + \frac{\overline{H}_{r+1}^3}{2\underline{H}_r^2} - \underline{H}_{r+1}^{\frac{r}{r+1}})$. Em particular, se H_{r+1} for uma constante positiva segue que

$$\lambda_1 \leq c(r)(H_{r+1} + \frac{H_{r+1}^{\frac{r+3}{r+1}}}{2} - 1)."$$

A barra superior que aparece no enunciado do teorema acima denota o supremo e a barra inferior o ínfimo.

A seguir faremos uma descrição sucinta do nosso trabalho.

No capítulo 1, o capítulo das preliminares, apresentamos as definições e resultados necessários para o leitor compreender essa dissertação.

No capítulo 2 tratamos de alguns operadores diferenciáveis, trazendo a definição do operador de Newton, do operador L_r, o $r-$ésimo operador linearizado, e obtemos algumas propriedades relevantes desses operadores.

O capítulo 3 é o capítulo dedicado a estimativa do primeiro autovalor de L_r e a aplicação a estabilidade de hipersuperfícies em R^{n+1}.

Algo que é essencial para o estudo da estimativa que apresentamos aqui é o fato do operador L_r ser elíptico. A demonstração desse teorema é essencialmente, aquela apresentada por T. Vlachos em [20]. Pelo fato do operador ser elíptico invocamos a teoria de análise para obter uma caracterização para o primeiro autovalor de L_r, que pode ser vista no teorema abaixo.

"Seja M uma variedade Riemanniana, e seja $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica com $H_{r+1} > 0$ então L_r é elíptico e vale a seguinte caracterização para o seu primeiro autovalor,

$$\lambda_1 = \inf \left[\frac{\int_M -gL_r(g)dM}{\int_M g^2 dM}, \int_M g dM = 0 \right]". \tag{0.1}$$

A primeira parte do teorema acima é o teorema 3.5, a segunda parte foi feita por P. Berard em [7] para o caso particular do Laplaciano, mas o resultado vale mais geralmente.

É através dessa caracterização para o primeiro autovalor de L_r que faremos a estimativa para variedades Riemannianas compactas, conexas, sem bordo, orientáveis e imersas em $\mathbb{R}^{n+1}$ e no espaço hiperbólico $\mathcal{H}^{n+1}$. Como espaço hiperbólico estamos usando o modelo de Minkowsky.

E no final desse capítulo reservamos algumas linhas para falar brevemente sobre a estabilidade para enfim provar a nossa aplicação com o teorema que classifica as hipersuperfícies estáveis com H_r constante do espaço Euclidiano. A demonstração desse teorema é, essencialmente, aquela apresentada por H. Alencar, M. do Carmo e H. Rosenberg em [2].

Capítulo 1

Preliminares

Esse capítulo inicial é destinado a definições e resultados que usamos no decorrer dessa dissertação. Nele também para colocamos as notações utilizadas.

Definição 1.1. Um *campo de vetores* X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$, onde T_pM é o plano tangente a M no ponto p. O campo é *diferenciável* se a aplicação $X : M \longrightarrow TM$ é diferenciável, onde TM é o fibrado tangente de M. O conjunto dos campos de vetores diferenciáveis em M será denotado por $\mathfrak{X}(M)$.

É conveniente pensar em um campo de vetores como uma aplicação $X : \mathfrak{D}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$, do conjunto $\mathfrak{D}(M)$ das funções diferenciáveis em M no conjunto $\mathcal{F}(M)$ das funções em M, definida por: $(Xf)(p) = df_p(X(p))$. Neste contexto, X é diferenciável se, e somente se, $X : \mathfrak{D}(M) \longrightarrow \mathfrak{D}(M)$, isto é, $Xf \in \mathfrak{D}(M)$ para todo $f \in \mathfrak{D}(M)$.

Lema 1.2. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Então existe um único campo vetorial Z tal que

$$Z(f) = (XY - YX)f\,,$$

para todo $f \in \mathfrak{D}(M)$.

O campo vetorial Z é diferenciável e é chamado o *colchete* $[X, Y] = XY - YX$ de X e Y. A operação colchete possui as seguintes propriedades:

- $[X, Y] = -[Y, X]$
- $[aX + bY, Z] = a[X, Y] + b[Y, Z]$,

onde $a, b \in \mathbb{R}$.

Definição 1.3. Uma *métrica Riemanniana* em uma variedade M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente T_pM, que varia diferencialmente, i.e., se $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com $x(x_1, \ldots, x_n) = q$ e $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, \ldots, \underbrace{1}_{i}, \ldots, 0)$, então

$$g_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle_q$$

é uma função diferenciável em U, para todo $i, j = 1, \ldots, n$. As funções $g_{ij} = g_{ji}$ são chamadas *expressão da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas* $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$. Uma variedade com uma métrica Riemanniana chama-se uma *variedade Riemanniana.*

Definição 1.4. Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \longrightarrow N$ é chamado uma *isometria* se, para todo $p \in M, u, v \in T_pM$,

$$\langle u, v \rangle = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle.$$

Definição 1.5. Uma *conexão afim* ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$, que satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

(2) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

(3) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathfrak{D}(M)$.

Pode-se provar, usando as propriedades acima, que $\nabla_X Y(p)$ só depende do valor de X em p e do valor de Y ao longo de uma curva tangente a X em p.

Definição 1.6. Dizemos que uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é *compatível com a métrica* se, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \,.$$

E, dizemos que ∇ é *simétrica* se, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]\,.$$

Enunciemos agora o teorema fundamental sobre conexão.

Teorema 1.7. (Teorema de Levi-Civitta) Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma única conexão afim ∇ simétrica e compatível com a métrica de M.

A conexão dada pelo teorema acima é denominada *conexão de Levi-Civitta* ou *conexão Riemanniana* de M.

No que se segue, M será uma variedade diferenciável Riemanniana conexa de dimensão n munida de sua conexão Riemanniana.

Definição 1.8. A *curvatura* R de uma variedade Riemanniana M é a aplicação

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)\,,$$

dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z\,,$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Proposição 1.9. Seja $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente T_pM e sejam $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então,

$$K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y\rangle}{\sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2}^{\,2}}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Definição 1.10. Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bi-dimensional $\sigma \subset T_pM$, $K(\sigma) = K(x,y)$ é chamada a *curvatura seccional* de σ em p, onde $\{x,y\}$ é uma base qualquer de σ . Usaremos a notação Q_c^{n+1} para indicar as variedades com curvatura seccional constante de dimensão $n+1$.

É possível mostrar que a noção de curvatura seccional generaliza a noção de *curvatura Gaussiana* das superfícies.

O teorema abaixo caracteriza as únicas variedades Riemannianas completas e com curvatura seccional constante. Uma demonstração desse fato pode ser vista na capítulo 8 de [8] página 163.

Teorema 1.11. Seja M^n uma variedade Riemanniana completa e de curvatura seccional constante c. Então o recobrimento universal $\widetilde{M}$ de M, com a métrica do recobrimento, é isométrico a

(1) $\mathcal{H}^n$ se $c = -1$, onde $\mathcal{H}^n$ é o espaço hiperbólico;

(2) $\mathbb{R}^n$ se $c = 0$;

(3) S^n se $c = 1$, onde S^n é a esfera.

Faremos, a seguir, um resumo de alguns tópicos relativos a imersões isométricas que serão necessários no decorrer do texto.

Seja $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^k$ uma imersão de uma variedade M de dimensão n em uma variedade $\overline{M}$ Riemanniana de dimensão $n+m=k$.

A métrica Riemanniana de $\overline{M}$ induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em M da seguinte maneira: se $p \in M$, $v, w \in T_pM$, definimos

$$\langle v, w\rangle_p = \langle dx_p(v), dx_p(w)\rangle_{x(p)} .$$

Deste modo, $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+m}$ passa a ser uma imersão isométrica. No que se segue, assumiremos que toda imersão é isométrica.

Visto que toda imersão é localmente um mergulho, podemos identificar p com $x(p)$ e cada vetor $v \in T_pM$ com $dx_p(v) \in T_{x(p)}\overline{M}$, e considerar T_pM como um subespaço de $T_{x(p)}\overline{M} = T_p\overline{M}$.

Usaremos tais identificações para estender um campo local de vetores de M a um campo local de vetores de $\overline{M}$.

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_p\overline{M})^\perp ,$$

onde $(T_p\overline{M})^\perp$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Assim, todo vetor $v \in T_p\overline{M}$ pode ser decomposto na forma $v = v^T + v^N$, onde $v^T \in T_pM$ é a componente tangente de v e $v^N \in (T_pM)^\perp$ a componente normal de v.

Se X, Y são campos locais de vetores em M e $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ são extensões locais a $\overline{M}$ de X, Y, respectivamente, definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T ,$$

onde $\overline{\nabla}$ é a conexão Riemanniana de $\overline{M}$. Pode-se verificar que ∇ é a conexão Riemanniana de M relativa à métrica induzida de $\overline{M}$.

Além disso, usando as propriedades de conexão, podemos provar que o campo local em $\overline{M}$ normal a M dado por $\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X} - \nabla_Y X$ não depende das extensões $\overline{X}, \overline{Y}$ e que a aplicação B, definida por

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y ,$$

é bilinear e simétrica. Assim, o valor de $B(X,Y)(p)$ só depende de $X(p)$ e $Y(p)$.

Definição 1.12. A *segunda forma fundamental de x em p* é a aplicação bilinear simétrica

$$B : T_pM \times T_pM \longrightarrow (T_pM)^\perp .$$

Para cada $\eta \in (T_pM)^\perp$, seja $A_\eta : T_pM \longrightarrow T_pM$ a aplicação linear dada por

$$\langle A_\eta(x), y\rangle = \langle B(x,y), \eta\rangle ,$$

para todo $x, y \in T_pM$. Em termos de derivada covariante, $A_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T$, onde N é uma extensão local de η normal a M.

Definição 1.13. O traço da aplicação bilinear simétrica $B : T_pM \times T_pM \longrightarrow (T_pM)^T$ é chamado o *vetor curvatura média $\overline{H}$ da imersão x em p.*

Se $e_1, \ldots, e_n$ são campos locais diferenciáveis de vetores tangentes a M, definidas num aberto $U \subset M$, tais que $\{e_1(p), \ldots, e_n(p)\}$ é uma base ortonormal de T_pM para todo todo $p \in U$, o vetor curvatura média em U é dado por:

$$\overline{H} = \sum_{i=1}^{n} (\overline{\nabla}_{e_i} e_i)^N .$$

Assim, $\overline{H}$ é um campo diferenciável de vetores normais a M, globalmente definido em M.

Se $x, y \in T_pM \subset T_p\overline{M}$ são linearmente independentes, indicaremos por $K(x, y)$ e $\overline{K}(x, y)$ as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$, respectivamente, no plano gerado por x e y.

Teorema 1.14. (Teorema de Gauss)

Sejam $p \in M$ e x, y vetores ortonormais de T_pM. Então,

$$K(x, y) - \overline{K}(x, y) = \langle B(x, x), B(y, y)\rangle - |B(x, y)|^2 . \tag{1.1}$$

No caso de hipersuperfícies $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$, com as quais trabalharemos nesta tese, a fórmula de Gauss (1.1) admite uma expressão mais simples.

Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$, $|\eta| = 1$. Como $A_\eta : T_pM \longrightarrow T_pM$ é simétrica, existe uma base ortonormal de vetores próprios $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de T_pM com valores próprios reais $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, i.e., $A_\eta(e_i) = \lambda_i e_i$, $i = 1, \ldots, n$. Assim, $\langle A_\eta(e_i), e_i\rangle = \langle B(e_i, e_i), \eta\rangle = \lambda_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$ e $\langle A_\eta(e_i, e_j), \eta\rangle = \langle B(e_i, e_j), \eta\rangle = 0$, se $i \neq j$. Portanto, (1.1) se escreve

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j \tag{1.2}$$

Se M e $\overline{M}$ são orientáveis e estão orientadas, o vetor η fica univocamente determinado se exigirmos que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base na orientação de M e $\{e_1, \ldots, e_n, \eta\}$ é uma base na orientação de $\overline{M}$. Denominamos os e_i *direções principais* e os $\lambda_i = k_i$ *curvaturas principais* da imersão x.

Neste caso, definimos a *curvatura média de x em p* por:

$$H = \langle \overline{H}, \eta \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \langle B(e_i, e_i), \eta \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} k_i \tag{1.3}$$

Definição 1.15. Um *tensor T de ordem r* em uma variedade Riemanniana é uma aplicação multilinear

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times ... \times \mathfrak{X}(M)}_{r \text{ fatores}} \to \mathfrak{D}(M).$$

Isso quer dizer que, dados $X_1, X_2, \cdots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$, $T(X_1, X_2, \cdots, X_r)$ é uma função diferenciável em M, e que T é linear em cada argumento.

Definição 1.16. Para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$ a *derivada covariante* é definida por $\nabla_Z T(X_1, X_2, \cdots, X_r) = \nabla T(X_1, X_2, \cdots, X_r, Z)$, onde ∇T é a *diferencial covariante* definida por $T(X_1, X_2, \cdots, X_r, Z) = Z(T(X_1, X_2, \cdots, X_r)) - T(\nabla_Z X_1, X_2, \cdots, X_r) - \cdots - T(X_1, X_2, \cdots, \nabla_Z X_r)$.

Capítulo 2

Operadores diferenciáveis sobre Variedades Riemannianas

Nesse capítulo definimos os operadores diferenciáveis que trabalhamos nesse dissertação. Começamos com a definição dos operadores mais comuns, que são o Gradiente, o Hessiano, o Divergente e o Laplaciano e apenas citamos algumas de suas propriedades. Depois definimos os operadores de Newton e por fim o operador L_r e demonstramos uma série de propriedades que serão bastante úteis no próximo capítulo.

Definição 2.1. Seja M uma variedade Riemanniana e $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Definimos o *gradiente* de f, denotado por $grad\ f \in \mathfrak{X}(M)$, o único campo vetorial sobre M tal que

$$\langle grad\ f, X\rangle = df(X), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

O gradiente tem as seguintes propriedades:

- $grad(f_1 + f_2) = grad\ f_1 + grad\ f_2$;
- $grad(f_1 f_2) = f_2 grad\ f_1 + f_1 grad\ f_2$.

Definição 2.2. Seja M uma variedade Riemanniana munida da conexão ∇ e $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, onde $C^\infty(M, \mathbb{R})$ denota o conjunto das funções $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ que são C^∞. O *Hessiano* de f, denotado por $Hess\ f : T_pM \to T_pM$, é definido da seguinte forma. Fixado $p \in M$, $(Hess\ f)_p$ é o operador linear em T_pM dado por

$$(Hess\ f)_p(X) = (\nabla_X grad\ f)_p.$$

Definição 2.3. Seja M uma variedade Riemanniana munida da conexão ∇. Para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$, definimos o *divergente* de X, com a notação $div\ X$, a aplicação $div : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^{\infty}(M, \mathbb{R})$, dada por

$$(div\ X)_p = tr(Y \mapsto \nabla_Y X), \text{ onde } Y \in T_pM.$$

São válidas as seguintes propriedades do divergente:

- $div(X+Y) = div\ X + div\ Y, \quad \forall\ X, Y \in \mathfrak{X}(M);$
- $div(fX) = fdiv\ X + Xf, \quad \forall\ f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R}),\ \forall\ X \in \mathfrak{X}(M).$

Definição 2.4. Seja M uma variedade Riemanniana munida da conexão ∇. Para cada $f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$, o operador de *Laplace*, denotado por Δ é definido como a aplicação $\Delta : C^{\infty}(M, \mathbb{R}) \longrightarrow C^{\infty}(M, \mathbb{R})$, dada por

$$\Delta\ f = div\ (grad\ f).$$

O *Laplaciano* possui as seguintes propriedades:

- $\Delta(f+g) = \Delta\ f + \Delta\ g;$
- $\Delta(fg) = f\Delta\ g + h\Delta\ f + 2\langle grad\ f, grad\ g\rangle;$
- $\Delta\ f = tr(Hess\ f).$

2.1 Operadores de Newton e o L_r

Seja $\sigma_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a r-ésima função simetria dada por $\sigma_r(z_1, z_2, ..., z_n) = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_r} z_{i_1} z_{i_2} \cdots z_{i_r}$.

Definição 2.5. Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão de n. Definimos S_r como a aplicação σ_r calculada em $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$, onde k_i são autovalores do operador de segunda forma fundamental A. Assim, $S_1 = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$,..., $S_n = k_1 k_2 \cdots k_n$. Convencionamos que $S_0 = 1$.

Definição 2.6. $S_r(\hat{k_i})$ com $1 \leq r \leq n$ denota a soma

$$S_r(\hat{k_i}) = \sum_{j_1 < \cdots < j_r} k_{j_1} \cdots k_{j_r}, \quad \text{para} \quad j_r \neq i.$$

Definição 2.7. A *r-ésima curvatura média* H_r, $1 \leq r \leq n$ é dada por

$$H_r = \frac{S_r}{\binom{n}{r}}.$$

Definição 2.8. $H_r(\hat{k_i})$ com $1 \leq r \leq n$, denota o quociente

$$H_r(\hat{k_i}) = \frac{S_r(\hat{k_i})}{\binom{n}{r}}.$$

Proposição 2.9. Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n e e seja $f : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de M em uma forma espacial de dimensão $n+1$ e curvatura seccional c. Então para todo $r \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$ temos

$$H_r^2 \geq H_{r-1} H_{r+1},$$

e a igualdade ocorre se M é a esfera.

Prova: Consulte [12] na página 52.

Proposição 2.10. Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n e e seja $f : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de M em uma forma espacial de dimensão $n+1$ e curvatura seccional c. Então para todo $r \in \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ se $H_r > 0$ temos

$$H_1 H_r \geq H_{r+1}.$$

Prova: A prova será feita por indução. Claramente o resultado é verdadeiro para $r = 0$. Suponhamos então que

$$H_1 H_{r-1} \geq H_r.$$

Como H_r é positiva, multiplicando essa desigualdade por H_r e aplicando a proposição 2.9 ficamos com

$$H_1 H_{r-1} H_r \geq H_r^2 \geq H_{r-1} H_{r+1},$$

de onde segue que

$$H_1 H_r \geq H_{r+1}.$$

■

Proposição 2.11. Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n e seja $f : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de M em uma forma espacial de dimensão $n+1$ e curvatura seccional c. Então para todo $r \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$ temos

$$H_r \geq H_{r+1}^{\frac{r}{r+1}},$$

e a igualdade ocorre se M é a esfera.

Prova: Procederemos novamente por indução. O resultado vale claramente para $r = 1$, basta aplicar a proposição 2.10. Suponhamos agora que o reultado seja válido para $r-1$, ou seja, suponha que

$$H_{r-1} \geq H_r^{\frac{r-1}{r}}.$$

Usando essa informação na desigualdade dada pela proposição 2.9 temos que

$$H_r^2 \geq H_r^{\frac{r-1}{r}} H_{r+1},$$

e portanto

$$H_r \geq H_{r+1}^{\frac{r}{r+1}},$$

e a igualdade ocorre se M é a esfera pois é nesse caso que ocorre a igualdade na proposição 2.9. ■

Proposição 2.12. Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n e e seja $f : M^n \rightarrow Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de M em uma forma espacial de dimensão $n+1$ e curvatura seccional c. Então para todo $r \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$ se $H_r > 0$ temos a seguinte desigualdade clássica,

$$H_1 \geq H_2^{\frac{1}{2}} \geq H_3^{\frac{1}{3}} \geq \cdots \geq H_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} \geq H_n^{\frac{1}{n}}.$$

Prova: A relação encadeada entre as $r-$ésimas curvaturas médias nessa proposição não passa de uma aplicação sucessiva da proposição anterior para $r = 1, 2, \cdots, n-1$. ■

Proposição 2.13. Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n e e seja $f : M^n \rightarrow Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de M em uma forma espacial de dimensão $n+1$ e curvatura seccional c. Então para todo $r \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$ é válida a desigualdade $H_1 \geq H_{r+1}^{\frac{1}{r+1}}$, ocorrendo a igualdade somente em pontos umbílicos.

Prova: Esse resultado é uma aplicação direta desigualdade clássica que provamos acima, onde se vê que para cada $r \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$, $H_1 \geq H_{r+1}^{\frac{1}{r+1}}$.

Definição 2.14. Definimos o *r-ésimo operador de Newton* T_r colocando

$$T_0 = I \quad \text{e} \quad T_r = S_r I - AT_{r-1}.$$

Lema 2.15. Sejam M uma variedade Riemanniana de dimensão n e $f : M^n \rightarrow Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de M em uma forma espacial de dimensão $n+1$ de curvatura seccional c. Para cada $r = 1, ..., n$, T_r o r-ésimo operador de Newton e A, o operador de segunda forma, comutam.

Prova: A prova será feita por indução. Claro que o resultado é válido para T_0. Suponhamos agora que $AT_{r-1} = T_{r-1}A$. Então

$$AT_r = A(S_r I - AT_{r-1}) = A(S_r I - T_{r-1}A) = S_r A - AT_{r-1}A = (S_r I - AT_{r-1})A = T_r A.$$

■

Proposição 2.16. Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n e e seja $f : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de M em uma forma espacial de dimensão $n+1$ e curvatura seccional c. Para cada $r = 1, ..., n$, T_r, o r-ésimo operador de Newton é um operador auto-adjunto.

Prova: A demonstração será feita por indução e se baseia simplesmente na definição do operador T_r e no fato de A ser auto-adjunto. É obvio que $T_0 = I$ é auto-adjunto. Suponhamos agora que T_{r-1} seja auto-adjunto e tomemos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

$$\begin{aligned}
\langle T_r X, Y\rangle &= \langle (S_r I - AT_{r-1})X, Y\rangle \\
&= \langle S_r X, Y\rangle - \langle AT_{r-1}X, Y\rangle \\
&= \langle X, S_r Y\rangle - \langle T_{r-1}X, AY\rangle \\
&= \langle X, S_r Y\rangle - \langle X, T_{r-1}AY\rangle \\
&= \langle X, (S_r I - T_{r-1}A)Y\rangle \\
&= \langle X, T_r Y\rangle,
\end{aligned}$$

já que para $j = 1, ..., n$ A e T_j comutam. ■

Lema 2.17. Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n e e seja $f : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de M em uma forma espacial de dimensão $n+1$ e curvatura seccional c. Para $i = 1, ..., n$, λ_i os autovalores do operador da segunda forma A. Temos então a seguinte relação:

$$S_r(\widehat{k_i}) = S_r - k_i S_{r-1}(\widehat{k_i}).$$

Prova: Fixado $i = 1, ..., n$, podemos dividir a soma S_r em duas parcelas, uma onde o k_i aparece e outra onde não. Assim, $S_r = A + k_i B$. Dessa forma, é imediato ver que $S_r(\widehat{k_i}) = A$. Por outro lado, B é uma soma cujas parcelas são somas de todos os produtos de $(r-1)$ curvaturas principais, exceto k_i. Ora essa é justamente a definição de $S_{r-1}(\widehat{k_i})$. Segue então que

$$S_r = S_r(\widehat{k_i}) + k_i S_{r-1}(\widehat{k_i}).$$

■

Proposição 2.18. Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n e e seja $f : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de M em uma forma espacial de dimensão $n+1$ e curvatura seccional c. Para todo $p \in M$, se $\{e_1, \cdots, e_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM formada por autovetores de A, com correspondentes autovalores $k_1, \cdots, k_n$, então, para todo $r = 1, ..., n$, $e_1, ..., e_n$ são autovalores de T_r com correspondentes autovalores

$$\mu_{r,i} = S_r(\hat{k_i}).$$

Prova: Procederemos novamente por indução. No caso $r = 0$ é claro que $T_0 e_i = I e_i = e_i = 1 e_i = S_0(\hat{k_i}) e_i$. Mostrando que $\mu_{0,i} = S_0(\hat{k_i})$.

Suponhamos agora o resultado válido para $r-1$ e vamos provar que vale também para r. Vejamos

$$\begin{aligned}
T_r e_i &= S_r e_i - A T_{r-1} \\
&= S_r e_i - A(S_{r-1}(\widehat{k_i}) e_i) \\
&= S_r e_i - S_{r-1}(\widehat{k_i}) A e_i \\
&= S_r e_i - S_{r-1}(\widehat{k_i}) k_i e_i \\
&= (S_r - S_{r-1}(\widehat{k_i}) k_i) e_i \\
&= S_r(\widehat{k_i})) e_i,
\end{aligned}$$

pelo lema 2.17. ■

Proposição 2.19. Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n e seja $f : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de M em uma forma espacial de dimensão $n+1$ e curvatura seccional c, munida da conexão ∇ e T_r o r-ésimo operador de Newton. Então $\nabla_X T_r$ é um operador auto-adjunto, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Prova: De fato, fixe $X \in \mathfrak{X}(M)$ e tome $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Temos que,

$$\begin{aligned}
\langle(\nabla_X T_r)Y, Z\rangle &= \langle \nabla_X T_r Y - T_r(\nabla_X Y), Z\rangle \\
&= \langle \nabla_X T_r Y, Z\rangle - \langle T_r(\nabla_X Y), Z\rangle \\
&= X\langle T_r Y, Z\rangle - \langle T_r Y, \nabla_X Z\rangle - \langle T_r(\nabla_X Y), Z\rangle,
\end{aligned}$$

pois $X\langle T_r Y, Z\rangle = \langle \nabla_X T_r Y, Z\rangle + \langle T_r Y, \nabla_X Z\rangle$.

Usando a proposição 2.16 segue que:

$$\begin{aligned}
(\langle\nabla_X T_r)Y, Z\rangle &= X\langle Y, T_r Z\rangle - \langle Y, T_r(\nabla_X Z)\rangle - \langle \nabla_X Y, T_r Z\rangle \\
&= \langle \nabla_X Y, T_r Z\rangle + \langle Y, \nabla_X T_r Z\rangle - \langle Y, T_r(\nabla_X Z)\rangle - \langle \nabla_X Y, T_r Z\rangle \\
&= \langle Y, \nabla_X T_r Z\rangle - \langle Y, T_r(\nabla_X Z)\rangle \\
&= \langle Y, \nabla_X T_r Z - T_r(\nabla_X Z)\rangle \\
&= \langle Y, (\nabla_X T_r)Z\rangle. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Lema 2.20. Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n e seja $f : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de M em uma forma espacial de dimensão $n+1$ e curvatura seccional c, munida da conexão ∇ e T_r o r-ésimo operador de Newton. Para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ temos que ,

$$tr(T_{r-1}\nabla_X A) = \langle gradS_r, X\rangle. \tag{2.1}$$

Prova: Essa demonstração está baseada no fato de T_r ser auto-adjunto.

$$\begin{aligned}
tr(T_{r-1}\nabla_X A) &= \sum_{i=1}^{n}\langle T_{r-1}\nabla_X A(e_i), e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle(\nabla_X A)e_i, T_{r-1}e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle(\nabla_X A)e_i, \mu_{r-1,i}e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\mu_{r-1,i}\langle(\nabla_X A)e_i, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\mu_{r-1,i}\langle\nabla_X Ae_i - A(\nabla_X e_i), e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\mu_{r-1,i}\langle\nabla_X k_ie_i - A(\nabla_X e_i), e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\mu_{r-1,i}(\langle\nabla_X k_ie_i, e_i\rangle - \langle A(\nabla_X e_i), e_i\rangle) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\mu_{r-1,i}(\langle X(k_i)e_i, e_i\rangle + \langle k_i\nabla_X e_i, e_i\rangle - \langle\nabla_X e_i, A(e_i)\rangle) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\mu_{r-1,i}(X(k_i) + k_i\langle\nabla_X e_i, e_i\rangle - k_i\langle\nabla_X e_i, e_i\rangle) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\mu_{r-1,i}X(k_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}S_{r-1}(\widehat{k_i})X(k_i).
\end{aligned}$$

Essa demonstração se encerra quando mostramos que $\sum_{i=1}^{n}S_{r-1}(\widehat{k_i})X(k_i) = \langle gradS_r, X\rangle$. ■

Lema 2.21. Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n e seja $f : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de M em uma forma espacial de dimensão $n+1$ e curvatura seccional c, munida da conexão ∇ e T_r o r-ésimo operador de Newton. É válida a fórmula

$$rS_r = tr(AT_{r-1}).$$

Prova: Como

$$tr(AT_{r-1}) = \sum_{i=1}^{n} \langle AT_{r-1}(e_i), e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle T_{r-1}(e_i), A(e_i) \rangle,$$

segue da proposição 2.18 que

$$\begin{aligned} tr(AT_{r-1}) &= \sum_{i=1}^{n} k_i \mu_{r-1,i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} k_i S_{r-1}(\hat{k}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (S_r - S_r(\hat{k}_i)) \\ &= nS_r - \sum_{i=1}^{n} S_r(\hat{k}_i) \\ &= nS_r - (n-r)S_r \\ &= rS_r. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lema 2.22. Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n e seja $f : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de M em uma forma espacial de dimensão $n+1$ e curvatura seccional c, T_r o r-ésimo operador de Newton e A o operador de segunda fundamental. Temos que vale também

$$tr(A^2 T_{r-1}) = S_1 S_r - (r+1) S_{r+1}.$$

Prova: Temos que

$$\begin{aligned} tr(A^2 T_{r-1}) &= \sum_{i=1}^{n} k_i^2 \mu_{r-1,i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} k_i (k_i \mu_{r-1,i}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} k_i (k_i S_{r-1}(\hat{k}_i)) \end{aligned}$$

Além disso, pelo lema 2.17 sabemos que

$$k_i S_{r-1}(\hat{k}_i) = S_r - S_r(\hat{k}_i).$$

Substituindo essa informação em (2.2) temos

$$\begin{aligned} tr(A^2T_{r-1}) &= \sum_{i=1}^{n} k_i(S_r - S_r(\hat{k_i})) \\ &= \sum_{i=1}^{n} k_i S_r - \sum_{i=1}^{n} k_i S_r(\hat{k_i}) \\ &= S_1 S_r - (r+1) S_{r+1}, \end{aligned}$$

uma vez que por (2.21) temos

$$\begin{aligned} (r+1)S_{r+1} &= tr(AT_r) \\ &= \sum_{i=1}^{n} k_i \mu_{r,i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} k_i S_r(\hat{k_i}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Seja M uma variedade Riemanniana compacta, conexa e orientada de dimensão n. Seja $\overrightarrow{n}$ a orientação de M. Seja $f : M \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de M em uma forma espacial de dimensão $n+1$ e curvatura seccional c. Fixemos um ponto $p_0 \in Q_c^{n+1}$ e consideremos a função $r : Q_c^{n+1} \to \mathbb{R}$ dada por $r(p) = d(p, p_0)$, onde d é a distância no ambiente Q_c^{n+1}.

Seja $\varphi_c(t)$ a solução de $y''(t) + cy(t) = 0$, satisfazendo $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$, e ponhamos $\mu_c(t) = \frac{t\varphi_c'(t)}{\varphi_c(t)}$. Temos que

$$\varphi_c(t) = \begin{cases} \sin(\sqrt{c}t) & \text{se } c > 0 \\ t & \text{se } c = 0 \\ \sinh(\sqrt{-c}t) & \text{se } c < 0 \end{cases}$$

e que

$$\mu_c(t) = \begin{cases} \sqrt{c}t\cot(\sqrt{c}t) & \text{se } c > 0 \\ 1 & \text{se } c = 0 \\ \sqrt{-c}t\coth(\sqrt{-c}t) & \text{se } c < 0 \end{cases}$$

Definição 2.23. Seguindo [20], definimos o *vetor posição* com origem em $p_0 \in Q_c^{m+1}$ por $x = \varphi_c(r)\overline{grad}r$, onde $\overline{grad}$ denota o gradiente em Q_c^{n+1}

Decompondo x, restrito a M, em uma componente x^T tangente a M e uma componente x^N normal a M^m temos

$$x = x^T + x^N = x^T + < x, \overrightarrow{n} > \overrightarrow{n} = x^T + \rho \overrightarrow{n},$$

onde $\rho =< x, \overrightarrow{n} >$. Seguindo a terminologia usual chamaremos de ρ a *função suporte da imersão.*

Proposição 2.24. Seja M uma variedade Riemanniana compacta, conexa, orientada de dimensão n e seja $f : M^n \rightarrow Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de M em uma forma espacial de dimensão $n+1$ e curvatura seccional c. Denote por A a Segunda Forma Fundamental da imersão f. Para $X \in \mathfrak{X}(M)$, vale a fórmula

$$\nabla_X x^T = \varphi_c'(r) X + \rho A X, \tag{2.2}$$

onde $\rho = \langle X, \overrightarrow{n} \rangle$.

Esboço da prova: Apresentaremos aqui um esboço da prova desse resultado. Para ver a prova dos resultados que aparecem aqui consulte [8].

Como $\nabla_X x^T$ é a componente tangente a M do vetor $\overline{\nabla}_X x^T$ e $x^T = x - < x, \overrightarrow{n} > \overrightarrow{n}$, calculemos inicialmente $\overline{\nabla}_X x$. Temos

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X x &= \overline{\nabla}_X (\varphi_c(r \circ f) \overline{grad} r) \\ &= \varphi_c(r \circ f) \overline{\nabla}_X \overline{grad} r + X(\varphi_c(r \circ f)) \overline{grad} r. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Fixe $p \in M$. Denotando por X^T a componente de X tangente à esfera geodésica de Q_c^{n+1} que passa por $f(p)$ e lembrando que $\overline{grad}$ é ortogonal à esfera geodésica e que $\overline{\nabla}_{\overline{grad}} \overline{grad} = 0$, segue da equação (2.3) que

$$\overline{\nabla}_X x = \varphi_c(r \circ f) \overline{\nabla}_{X^T} \overline{grad} r + \varphi_c'(r \circ f) < X, grad(r \circ f) > \overline{grad} r. \tag{2.4}$$

Como $\overline{grad}$ é um campo unitário, ortogonal à esfera geodésica, e aponta para fora desta, prova-se que $\overline{\nabla}_{X^T} \overline{grad}$ é exatamente o operador de forma da inclusão da esfera geodésica em $Q_c^{m+1}1$ associado ao campo normal unitário que aponta para dentro da esfera geodésica. Mostra-se que os autovalores desse operador de forma são, dados por $\frac{\mu_c(r)}{r}$, obtemos

$$\overline{\nabla}_{X^T}\overline{grad}r = \frac{\mu_c(r\circ f)}{r\circ f}X^T \tag{2.5}$$

Por outro lado, mostra-se também que $grad(r\circ f)$ é,a componente tangente a M de $\overline{grad}r$ então segue que

$$< X, grad(r\circ f) >=< X, \overline{grad}r > \tag{2.6}$$

Substituindo (2.5) e (2.6) em (2.4) e lembrando da definição de μ_c obtemos

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X x &= \varphi_c(r\circ f)\frac{\mu_c(r\circ f)}{r\circ f}X^T + \varphi_c'(r\circ f) < X, \overline{grad}r > \overline{grad}r \\ &= \varphi_c'(r\circ f)(X^T + < X, \overline{grad}r > \overline{grad}r) \\ &= \varphi_c'(r\circ f)X \end{aligned}\tag{2.7}$$

Usando (2.7) e o fato de que

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X x^T &= \overline{\nabla}_X(x - < x, \overrightarrow{n} > \overrightarrow{n}) \\ &= \overline{\nabla}_X x - < \overline{\nabla}_X x, \overrightarrow{n} > \overrightarrow{n} - < x, \overline{\nabla}_X\overrightarrow{n} > \overrightarrow{n} - < x, \overrightarrow{n} > \overline{\nabla}_X\overrightarrow{n} \\ &= \varphi_c'(r\circ f)X + < x, AX > \overrightarrow{n} + < x, \overrightarrow{n} > AX,\end{aligned}$$

temos que

$$\nabla_X x^T = (\overline{\nabla}_X x^T)^T = \varphi_c'(r\circ f)X + \rho AX. \quad \blacksquare$$

Proposição 2.25. Sejam M uma variedade Riemanniana compacta, conexa e orientada de dimensão n, $f : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de M em uma forma espacial de dimensão $n+1$ e curvatura seccional c e T_r o r-ésimo operador de Newton. Então é válida a fórmula:

$$div\ \ T_r x^T = \sum_{i=1}^{n}\langle x^T, (\nabla_{e_i}T_r)e_i\rangle + (n-r)S_r\varphi_c'(r) + \rho(r+1)S_{r+1}. \tag{2.8}$$

Prova: Temos que

$$\begin{aligned} div\ \ T_r x^T &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} T_r x^T, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle (\nabla_{e_i} T_r) x^T + T_r(\nabla_{e_i} x^T), e_i \rangle. \end{aligned}$$

Usando a proposição 2.19 e depois aplicando a proposição 2.2 segue que

$$\begin{aligned} div\ \ T_r x^T &= \sum_{i=1}^{n} \langle x^T, (\nabla_{e_i} T_r) e_i \rangle + \langle T_r(\nabla_{e_i} x^T), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle x^T, (\nabla_{e_i} T_r) e_i \rangle + \langle T_r(\varphi_c'(r) e_i + \rho A e_i), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle x^T, (\nabla_{e_i} T_r) e_i \rangle + \varphi_c'(r) \sum_{i=1}^{n} \langle T_r(e_i), e_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle T_r(\rho A e_i), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle x^T, (\nabla_{e_i} T_r) e_i \rangle + \varphi_c'(r) \sum_{i=1}^{n} \langle (S_r - A T_{r-1})(e_i), e_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle T_r(\rho A e_i), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle x^T, (\nabla_{e_i} T_r) e_i \rangle + \varphi_c'(r) [\sum_{i=1}^{n} \langle S_r e_i, e_i \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle A T_{r-1}(e_i), e_i \rangle] + \sum_{i=1}^{n} \langle T_r(\rho A e_i), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle x^T, (\nabla_{e_i} T_r) e_i \rangle + \varphi_c'(r) [n S_r - tr(A T_{r-1})] + \sum_{i=1}^{n} \langle T_r(\rho \rho A e_i), e_i \rangle. \end{aligned}$$

Usando o lema 2.21 ficamos com

$$\begin{aligned} div\ \ T_r x^T &= \sum_{i=1}^{n} \langle x^T, (\nabla_{e_i} T_r) e_i \rangle + \varphi_c'(r)[n S_r - r S_r] + \sum_{i=1}^{n} \langle T_r(\rho A e_i), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle x^T, (\nabla_{e_i} T_r) e_i \rangle + (n-r) S_r \varphi_c'(r) + \rho(r+1) S_{r+1}, \end{aligned}$$

exatamente o que queríamos mostrar.

Definição 2.26. Dizemos que um operador T é *livre de divergência* quando

$$\sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i} T) e_i = 0$$

Teorema 2.27. Sejam M uma variedade Riemanniana compacta, conexa e orientada de dimensão n, $f : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de M em uma forma espacial de dimensão $n+1$. O r-ésimo operador de Newton, T_r é livre de divergência.

Prova: Como $T_r = S_r I - AT_{r-1}$ temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}T_r)e_i &= \sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}(S_rI - AT_{r-1}))e_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}S_rI)e_i - \sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}(AT_{r-1}))e_i \\
&= gradS_r - \sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}A)(T_{r-1}e_i) - \sum_{i=1}^{n}A((\nabla_{e_i}T_{r-1})e_i) \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Fixe $X \in \mathfrak{X}(M)$. Aplicando o lema 2.20 e usando a equação de Codazzi ficamos com

$$\begin{aligned}
\langle\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}A)T_{r-1}e_i, X\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\langle(\nabla_X A)T_{r-1}e_i, e_i\rangle \\
&= tr(T_{r-1}\nabla_X A) \\
&= \langle gradS_r, X\rangle
\end{aligned}$$

Temos então que $\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}A)T_{r-1}e_i = gradS_r$. Substituindo essa informação na equação (2.9) ficamos com

$$\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}T_r)e_i = -\sum_{i=1}^{n}A(\nabla_{e_i}T_{r-1})e_i \qquad (2.10)$$

Afirmamos então que $\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}T_r)e_i = 0$. Daqui para frente procedemos por indução sobre r. Para $r = 0$ temos

$$\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}T_0)e_i = \sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}I)e_i = 0.$$

Suponhamos agora que $\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}T_{r-1})e_i = 0$

Lembrando da equação (2.10) temos então que

$$\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}T_r)e_i = -\sum_{i=1}^{n}A(\nabla_{e_i}T_{r-1})e_i = 0,$$

pela hipótese de indução. Provando enfim que T_r é livre de divergência. ∎

Teorema 2.28. (Fórmula de Minkowsky) Seja M uma variedade Riemanniana compacta, conexa e orientada de dimensão n. Seja $\overrightarrow{n}$ a orientação dada em M e $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica. Então é válida a fórmula

$$\int_M (H_r + H_{r+1}\langle X, \overrightarrow{n}\rangle) = 0. \tag{2.11}$$

Prova: Como M está imersa no R^{n+1} temos de (2.8)

$$div\ \ T_r x^T = \sum_{i=1}^{n} \langle x^T, (\nabla_{e_i} T_r)e_i\rangle + (n-r)S_r + \rho(r+1)S_{r+1}. \tag{2.12}$$

Usando teorema 2.27 na equação (2.12) a expressão reduz-se a

$$div\ \ T_r x^T = (n-r)S_r + p(r+1)S_{r+1}. \tag{2.13}$$

Integrando ambos os lados de (2.13) e usando o teorema de Stokes temos que

$$0 = \int_M (n-r)S_r + p(r+1)S_{r+1} dM. \tag{2.14}$$

Segue da definição de S_r que

$$\begin{aligned}
\int_M (n-r)\binom{n}{r} H_r dM &= -\int_M p(r+1)\binom{n}{r+1} H_{r+1} dM \\
\int_M (n-r)\binom{n}{r} H_r &= -\int_M p(n-r)\binom{n}{r} H_{r+1} \\
\int_M H_r &= -\int_M \langle X, \overrightarrow{n}\rangle H_{r+1}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Definimos agora o operador L_r, o *r-ésimo operador linearizado*, que exerce um papel fundamental nessa dissertação.

Definição 2.29. Definimos L_r, o *r-ésimo operador linearizado* por $L_r(f) = div(T_r gradf)$. Note que em particular, $L_0(f) = \Delta f$.

Proposição 2.30. Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n munida da conexão ∇ e $f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$. Então vale que

$$tr(T_r(Hess\ f)) = div(T_r(grad\ f)). \tag{2.15}$$

Prova: Fixemos $X \in \mathfrak{X}(M)$. Pela definição de Hessiano temos que

$$\begin{aligned} tr(T_r(Hess\ f)(X)) &= tr(T_r \nabla_X grad\ f) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle T_r \nabla_{e_i} grad\ f, e_i \rangle. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Usando a definição de divergente, derivação de tensores, a proposição 2.19 e o fato de T_r ser livre de divergência como vimos no teorema 2.27 temos

$$\begin{aligned} div(T_r(grad\ f)(X)) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} T_r grad\ f, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\langle (\nabla_{e_i} T_r) grad\ f, e_i \rangle + \langle T_r \nabla_{e_i} grad\ f, e_i \rangle) \\ &= \langle grad\ f, \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i} T_r) e_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle T_r \nabla_{e_i} grad\ f, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle T_r \nabla_{e_i} grad\ f, e_i \rangle. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Agora basta comparar as equações (2.16) e (2.17). ∎

Capítulo 3

Estimativas do primeiro autovalor do operador L_r

As considerações a seguir servirão para provar as duas próximas proposições.

Seja $\sigma_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $\sigma_r(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_r} x_{i_1}x_{i_2}\cdots, x_{i_r}$, a *r-ésima função simétrica dos $x_i's$.*

Tome

$$\mathcal{O}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n); x_i > 0 \; i = 1, 2, \cdots, n\}$$

e seja Γ_r a componente conexa do conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n; \sigma_r(x) > 0\}$ que contém $(1, 1, \cdots, 1)$. Observe que $\mathcal{O}^n \subset \{x \in \mathbb{R}^n; \sigma_r(x) > 0\}$ e também que $(1, 1, \cdots, 1) \in \mathcal{O}^n$, logo $\mathcal{O}^n \subset \Gamma_r$.

Definição 3.1. Seja $P = P(x)$ um polinômio homogêneo de grau $m > 0$ em n variáveis $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e seja $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Dizemos que P é hiperbólico com respeito a a, ou simplesmente que P é $a-$hiperbólico, se a equação $P(sa + x) = 0$ tem m zeros reais para cada $b \in R$ e para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

L. Gȧrding provou em [11] que Γ_r é aberto e que

$$\Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \cdots \Gamma_n. \tag{3.1}$$

Além disso, L. Gȧrding também em [11], estabeleceu uma desigualdade para polinômios hiperbólicos da qual é possível mostrar que

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial x_i} > 0 \ \text{ em } \ \Gamma_r \ \text{ com } \ 1 \leq i, r \leq n. \tag{3.2}$$

Proposição 3.2. Sejam M uma variedade Riemanniana compacta e conexa, T_r o $r-$ésimo operador de Newton e H_{r+1} a $\{r+1\}-$ésima curvatura média. Se $H_{r+1} > 0$ então todos os autovalores do operador T_r são positivos.

Prova: Como M^n é compacta segue que dado $p \in M^n$, $k_i(p) > 0$ para $i = 1, 2, \cdots, n$. Sendo assim, $\overrightarrow{k}(p) = (k_1(p), k_2(p), \cdots, k_n(p)) \in \mathcal{O}^n \subset \Gamma_{r+1}$. Temos que:

$$H_{r+1}(x) = \frac{1}{\begin{pmatrix} n \\ r+1 \end{pmatrix}} S_{r+1} = \frac{1}{\begin{pmatrix} n \\ r+1 \end{pmatrix}} \sigma_{r+1}(\overrightarrow{k}(x)) > 0.$$

O que implica que $\overrightarrow{k}(x) \in \{y \in \mathbb{R}^n; \sigma_{r+1} > 0\}$ para todo $x \in M$. Logo $\overrightarrow{k}(M) = \{\overrightarrow{k}(p); p \in M\} \subset \{y \in \mathbb{R}^n; \sigma_{r+1} > 0\}$. Mas como M é conexa e $\overrightarrow{k}$ é contínua , $\overrightarrow{k}(M)$ também é conexo e como $\overrightarrow{k}(p) \in \Gamma_{r+1}$ segue que $\overrightarrow{k}(M) \subset \Gamma_{r+1}$.

Por (3.2) temos que $\frac{\partial \sigma_{r+1}}{\partial x_i}(k(x)) > 0, \forall x \in M$, mas sabemos do lema 2.17 que $\sigma_{r+1}(x) = x_i \sigma_r(\widehat{x_i}) + \sigma_{r+1}(\widehat{x_i}), \forall i$. Assim segue que $\frac{\partial \sigma_{r+1}}{\partial x_i} = \sigma_r(\widehat{x_i})$. Portanto,

$$\begin{aligned} 0 < \frac{\partial \sigma_{r+1}}{\partial x_i}(k_1(x), k_2(x), \cdots, k_n(x)) &= \sigma_r(\widehat{k_i(x)}) \\ &= \sigma_r(k_1(x), k_2(x), \cdots, \widehat{k_i(x)}, \cdots, k_n(x)) \\ &= S_r(\widehat{k_i(x)}) \\ &= \mu_r, i \end{aligned} \tag{3.3}$$

o que finaliza a prova da proposição. ∎

Proposição 3.3. Seja M uma variedade Riemanniana compacta e conexa. Se $H_{r+1} > 0$ em M^n então $H_r > 0$ em M^n.

Prova: Na demonstração da proposição acima vimos que $\overrightarrow{k}(p) \in \Gamma_{r+1}$. Por (3.1) temos que $\overrightarrow{k}(p) \in \Gamma_r$ e por isso $\sigma_r(k_1(x), k_2(x), \cdots, k_n(x)) > 0$. Mas

$$H_r(x) = \frac{1}{\binom{n}{r}} S_r = \frac{1}{\binom{n}{r}} \sigma_r(\overrightarrow{k}(x)) > 0.$$

Logo se $H_{r+1} > 0$ então $H_r > 0$, como queríamos. ■

Proposição 3.4. Seja M uma variedade Riemanniana munida da conexão ∇ e $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Sendo $f_{ii} = \langle e_i, grad\langle gradf, e_i\rangle\rangle$, vale que

$$L_r(f) = \sum_{i=1}^n S_r(\hat{k_i}) f_{ii}.$$

Prova: Usando derivação de tensores, as proposições 2.19, 2.16 e 2.18, além do fato de T_r ser livre de divergência como vimos no teorema 2.27 temos

$$\begin{aligned}
L_r(f) &= div(T_r gradf) \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} T_r grad\ f, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n (\langle(\nabla_{e_i} T_r) grad\ f, e_i\rangle + \langle T_r \nabla_{e_i} grad\ f, e_i\rangle) \\
&= \langle grad\ f, \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} T_r) e_i\rangle + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} grad\ f, T_r e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} grad\ f, T_r e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} grad\ f, S_r(\hat{k_i}) e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n S_r(\hat{k_i}) \langle \nabla_{e_i} grad\ f, e_i\rangle \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Investiguemos separadamente quanto vale $\langle \nabla_{e_i} grad\ f, e_i\rangle$.

Temos que

$$grad\ f = \sum_{j=1}^n \langle grad\ f, e_j\rangle e_j,$$

logo

$$
\begin{aligned}
\nabla_{e_i} grad\, f &= \nabla_{e_i} \sum_{j=1}^{n} \langle grad\, f, e_j \rangle e_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \nabla_{e_i} \langle grad\, f, e_j \rangle e_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} (\nabla_{e_i} \langle grad\, f, e_j \rangle) e_j + \langle grad\, f, e_j \rangle \nabla_{e_i} e_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} ((\langle grad\, f, \nabla_{e_i} e_j \rangle + \langle \nabla_{e_i} grad\, f, e_j \rangle) e_j + \langle grad\, f, e_j \rangle \nabla_{e_i} e_j)
\end{aligned}
$$

Resta mostrar que

$$
\sum_{j=1}^{n} ((\langle grad\, f, \nabla_{e_i} e_j \rangle + \langle \nabla_{e_i} grad\, f, e_j \rangle) e_j + \langle grad\, f, e_j \rangle \nabla_{e_i} e_j) = \sum_{j=1}^{n} \langle e_i, grad\, \langle grad\, f, e_j \rangle \rangle e_j.
$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
\langle e_i, \nabla_{e_i} grad\, f \rangle &= \langle e_i, \sum_{j=1}^{n} \langle e_i, grad\, \langle grad\, f, e_j \rangle \rangle e_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle e_i, grad\, \langle grad\, f, e_j \rangle \rangle \langle e_i, e_j \rangle \\
&= \langle e_i, grad\, \langle grad\, f, e_i \rangle \rangle.
\end{aligned}
$$

Substituindo essa informação em (3.4) temos

$$
\begin{aligned}
L_r(f) &= \sum_{i=1}^{n} S_r(\hat{k}_i) \langle \nabla_{e_i} grad\, f, e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} S_r(\hat{k}_i) \langle e_i, grad\, \langle grad\, f, e_i \rangle \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} S_r(\hat{k}_i) f_{ii}. \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

Como queríamos demonstrar. ■

Teorema 3.5. Sejam M uma variedade Riemanniana de dimensão n compacta e $f : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica. Caso $c = 1$, suponhamos também que M esteja contida em um hemisfério. Se $H_{r+1} > 0$ então L_r é um operador elíptico.

Prova: Da proposição 3.4 vemos que mostrar a elipticidade de L_r é equivalente a mostrar que $S_r(\hat{k}_i) > 0$ já que $L_r(f) = \sum_{i=1}^{n} S_r(\hat{k}_i) f_{ii}$.

Observemos inicialmente que o fato das esferas de Q_c^{n+1} serem convexas e de M ser compacta implica na existência de um ponto $p \in M$ onde as curvaturas principais tem o mesmo sinal. Suponhamos, sem perda de generalidade, que todas as curvaturas principais são positivas. Assim por continuidade existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de p onde S_j, $S_j(\widehat{k_i})$ e $H_j(\widehat{k_i})$ são positivos para $i, j = 1, ..., n$.

Definamos o conjunto,

$$\mathcal{K}_j = \{p \in M; S_j(\widehat{k_i}) > 0, i = 1, ..., n\}.$$

Pode-se ver que $\mathcal{K}_j$ é aberto e contém $\mathcal{U}$. Chamemos de $\mathcal{G}_j$ a componente conexa de $\mathcal{K}_j$ que contém $\mathcal{U}$.

Afirmação 3.6. Para cada $j = 1, ..., n$ temos que $\mathcal{G}_{j+1} \subset \mathcal{G}_j$.

Prova: Para cada $i = 1, ..., n$ defina o conjunto aberto abaixo

$$\mathcal{V}_i = \cap_{j=1}^{i} \mathcal{G}_j.$$

Observe que $S_j(\widehat{k_k}) > 0$ em $\mathcal{V}_i$ para $j = 1, ..., i$ e $k = 1, ..., n$.

Para cada ponto de $\mathcal{V}_i$ vale a seguinte desigualdade clássica vista na proposição (2.12),

$$H_1(\widehat{k_k}) \geq H_2(\widehat{k_k})^{\frac{1}{2}} \geq \cdots \geq H_i(\widehat{k_k})^{\frac{1}{i}}, \quad 1 \leq k \leq n \tag{3.6}$$

Por continuidade, a desigualdade (2.12) continua válida no fecho de $\mathcal{V}_i$. Assim se tomarmos um ponto no fecho de $\mathcal{V}_i$ concluímos que esse ponto pertence a $\mathcal{G}_j$ para $j \leq i$, ou seja, tal ponto pertence ao interior de $\mathcal{V}_i$. Pela definição de $\mathcal{V}_i$ temos que $\mathcal{V}_i \subset \mathcal{G}_i$. Além disso $\mathcal{V}_i$ é aberto e acabamos de mostrar $\mathcal{V}_i$ é fechado. Como $\mathcal{G}_i$ é conexo provamos que $\mathcal{G}_i = \mathcal{V}_i$. Logo temos que $\mathcal{G}_{j+1} \subset \mathcal{G}_j$. ■

Voltando a demonstração do nosso teorema provaremos agora, usando a afirmação 3.6, que $\mathcal{G}_r$ é fechado.

Seja q no fecho de $\mathcal{G}_r$. Por continuidade temos nesse ponto que $S_r(\widehat{k_i}) \geq 0$ para $i = 1, ..., n$.

Pela afirmação 3.6 para cada $1 \leq j \leq r$ e $1 \leq i \leq n$ temos que $S_j(\widehat{k_i}) \geq 0$ em q.

O lema 2.17 nos diz que

$$S_{r+1} = k_i S_r(\widehat{k_i}) + S_{r+1}(\widehat{k_i}) \tag{3.7}$$

Suponhamos que $S_r(\widehat{k_i}) = 0$ em q. Usando essa informação na equação 3.7 teremos que $S_{r+1} = S_{r+1}(\widehat{k_i})$ em q. Por hipótese temos que $H_{r+1} > 0$, logo $S_{r+1} > 0$ e daí $S_{r+1}(\widehat{k_i}) > 0$.

Usando a afirmação 3.6 temos

$$\begin{aligned}
0 &\leq S_{r+1}(\widehat{k_i}) \\
&= \binom{n}{r+1} H_{r+1}(\widehat{k_i}) \\
&\leq \binom{n}{r+1} (H_r(\widehat{k_i}))^{\frac{r+1}{r}} \\
&\leq \binom{n}{r+1} \left[\binom{n}{r}\right]^{\frac{-(r+1)}{r}} (S_r(\widehat{k_i}))^{\frac{r+1}{r}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Chegamos a uma contradição obtida pelo fato de estarmos supondo que que $S_r(\widehat{k_i}) = 0$ em q. Então $S_r(\widehat{k_i}) > 0$ em q provando que q está no interior de $\mathcal{G}_r$. Logo $\mathcal{G}_r$ é fechada. Ora, sendo $\mathcal{G}_j$ aberto e fechado em M e M sendo conexa temos usando a afirmação 3.6 que $\mathcal{G}_j = M$ para $j = 1, ..., r$. Dessa forma, $S_j(\widehat{k_i}) > 0$ para $j = 1, ..., r$ e $i = 1, ..., n$ em cada ponto de M. O que finaliza essa demonstração.

3.1 Estimativa quando temos variedades imersas em $\mathbb{R}^{n+1}$ com H_r constante

Seja M uma variedade Riemanniana conexa, compacta, sem bordo e $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica.

Lema 3.7. Sejam M uma Variedade Riemanniana conexa, compacta, sem bordo, $\overrightarrow{n}$ a orientação de M, $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica e $c(r) = (n-r)\binom{n}{r}$. Então vale a fórmula

$$L_r(f) = c(r)H_{r+1}\overrightarrow{n}, \tag{3.8}$$

onde $L_r(f) = (L_r(f_1), \cdots, L_r(f_n))$ sendo $f = (f_1, \cdots, f_n)$.

Prova: Fixe $v \in R^{n+1}$ e considere a função altura $\langle f, v\rangle : M \to \mathbb{R}$. Note que $grad\langle f, v\rangle = v^T$, onde $v^T = v - \langle \overrightarrow{n}, v\rangle \overrightarrow{n}$ denota a componente tangente de v ao longo da imersão f. Para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ temos que

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X(grad\langle f, v\rangle) &= \overline{\nabla}_X(v^T) \\
&= \overline{\nabla}_X(v - \langle \overrightarrow{n}, v\rangle \overrightarrow{n}) \\
&= \overline{\nabla}_X v - \overline{\nabla}_X\langle \overrightarrow{n}, v\rangle \overrightarrow{n} \\
&= -\langle \overrightarrow{n}, v\rangle \overline{\nabla}_X \overrightarrow{n} - X(\langle \overrightarrow{n}, v\rangle)\overrightarrow{n}. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Como $\nabla_X(grad\langle f, v\rangle) = (\overline{\nabla}_X((grad\langle f, v\rangle)))^T$, tomando a componente tangente a (3.9) ficamos com

$$\begin{aligned}
\nabla_X(grad\langle f, v\rangle) &= (-\langle \overrightarrow{n}, v\rangle \overline{\nabla}_X \overrightarrow{n} - X(\langle \overrightarrow{n}, v\rangle)\overrightarrow{n})^T \\
&= \langle \overrightarrow{n}, v\rangle AX. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
L_r(\langle f, v\rangle) &= div(T_r grad\langle f, v\rangle) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\langle \nabla_{e_i} T_r grad\langle f, v\rangle, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle (\nabla_{e_i} T_r) grad\langle f, v\rangle, e_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle T_r(\nabla_{e_i} grad\langle f, v\rangle), e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle grad\langle f, v\rangle, (\nabla_{e_i} T_r)e_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle T_r(\langle \overrightarrow{n}, v\rangle Ae_i), e_i\rangle \\
&= \langle grad\langle f, v\rangle, \sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i} T_r)e_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle \langle \overrightarrow{n}, v\rangle T_r(Ae_i), e_i\rangle \\
&= \langle \overrightarrow{n}, v\rangle \sum_{i=1}^{n}\langle (T_r A)e_i, e_i\rangle \\
&= \langle \overrightarrow{n}, v\rangle tr(AT_r) \\
&= \langle \overrightarrow{n}, v\rangle (r+1)S_{r+1} \\
&= \langle \overrightarrow{n}, v\rangle c(r)H_{r+1}. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Acima usamos a proposição 2.19, o lema 2.21, o teorema 2.27 e a equação (3.10).

Consideremos agora $\{u_1, ..., u_{n+1}\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$. Assim sendo

$$\begin{aligned}
L_r(f) &= \sum_{i=1}^{n+1}(L_r(f_i))u_i \\
&= \sum_{i=1}^{n+1}(L_r(\langle f, u_i\rangle))u_i \\
&= \sum_{i=1}^{n+1}(\langle \overrightarrow{n}, u_i\rangle c(r)H_{r+1})u_i \\
&= c(r)H_{r+1}\sum_{i=1}^{n+1}\langle \overrightarrow{n}, u_i\rangle u_i \\
&= c(r)H_{r+1}\overrightarrow{n}. \quad \blacksquare \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

A primeira parte do teorema a seguir é o teorema 3.5, a segunda parte foi feita por P. Berard em [7] para o caso particular do Laplaciano, mas o resultado vale mais geralmente.

Teorema 3.8. Seja M uma variedade Riemanniana, e seja f uma imersão isométrica em $\mathbb{R}^{n+1}$ ou $\mathcal{H}^{n+1}$ com $H_{r+1} > 0$ então L_r é elíptico e vale a seguinte caracterização para o seu primeiro autovalor,

$$\lambda_1 = \inf\left\{\frac{\int_M -gL_r(g)dM}{\int_M g^2 dM}, \int_M gdM = 0\right\}. \tag{3.13}$$

Teorema 3.9. Sejam M uma variedade Riemanniana conexa, compacta, sem bordo, $\overrightarrow{n}$ a orientação de M, $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica e $c(r) = (n-r)\binom{n}{r}$. Se $H_{r+1} > 0$ em M então

$$\lambda_1 \leq \frac{c(r)\int_M H_{r+1}^2 dM}{\int_M H_r dM},$$

onde e a igualdade ocorre precisamente se M é uma esfera de R^{n+1}.

Prova: Pelo teorema 3.8 temos a seguinte caracterização para o menor autovalor do operador L_r:

$$\lambda_1 = \inf\left\{\frac{\int_M -gL_r(g)dM}{\int_M g^2 dM}, \int_M gdM = 0\right\}. \tag{3.14}$$

Suponhamos que $\int_M fdM = 0$, onde $\int_M fdM = (\int_M f_1 dM, \cdots, \int_M f_{n+1})dM)$. Se $\int_M fdM = v$ bastaria transladarmos f de $\frac{v}{volM}$, dessa forma teríamos

$$\int_M (f - \frac{v}{volM})dM = \int_M f - \frac{v}{volM}\int_M dM = \int_M f - vdM = 0$$

Como $f = (f_1, \cdots, f_{n+1})$ temos que $\int_M f_i dM = 0$, com $1 \leq i \leq n+1$. Assim por (3.14) temos que

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_M -f_i L_r(f_i)dM}{\int_M f_i^2 dM} \tag{3.15}$$

Usando o lema 3.7 em (3.15) ficamos com

$$\lambda_1 \int_M {f_i}^2 dM \leq -\int_M f_i L_r(x_i)dM = -\int_M f_i c(r) H_{r+1} n_i dM.$$

Somando agora de 1 até $n+1$ temos:

$$\lambda_1 \int_M |f|^2 dM \leq -c(r)\int_M H_{r+1} < f, \overrightarrow{n} > dM \tag{3.16}$$

Usando a Fórmula de Minkowsky, teorema 2.28, em (3.16) segue que

$$\lambda_1 \int_M |f|^2 dM \leq -c(r) \int_M H_r dM \tag{3.17}$$

Multiplicando (3.17) por $\int_M H_{r+1}^2 dM$ e usando Cauchy-Schwartz ficamos com

$$\begin{aligned} c(r) \int_M H_r dM \int_M H_{r+1}^2 dM &\geq \lambda_1 \int_M |f|^2 dM \int_M H_{r+1}^2 dM \\ &\geq \lambda_1 \Big(\int_M |f| H_{r+1} \Big)^2 dM \\ &\geq \lambda_1 \Big(\int_M < f, \overrightarrow{n} > H_{r+1} \Big)^2 dM \\ &= \lambda_1 \Big(\int_M H_r \Big)^2 dM. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Pela proposição 3.3 temos $H_r > 0$. Então podemos dividir (3.18) por $\Big(\int_M H_r \Big)^2 dM$ obtendo

$$\lambda_1 \leq \frac{c(r) \int_M H_{r+1}^2 dM}{\int_M H_r dM}.$$

Vejamos agora o que ocorre quando temos a igualdade. Nesse caso todas as desigualdades que usamos para obter (3.18) devem ser igualdades, em particular temos que necessariamente

$$\int_M |f| H_{r+1} dM = \int_M < f, \overrightarrow{n} > H_{r+1} dM.$$

Mas isso implica que $f = k\overrightarrow{n}$ para algum k.

Temos então o seguinte

$$e_i(|f|^2) = e_i(< f, f >) = 2 < \overline{\nabla}_{e_i} f, f >= 2 < e_i, f >= 2 < e_i, k\overrightarrow{n} >= 0.$$

Logo $grad|f|^2 = 0$, assim $|f|$ é constante e portanto M é uma esfera. ∎

Corolário 3.10. Adicionando as hipóteses do teorema 3.9 o fato de H_{r+1} ser constante temos que

$$\lambda_1 \leq c(r) H_{r+1}^{\frac{r+2}{r+1}},$$

ocorrendo a igualdade quando M for a esfera.

Prova: Usando a proposição 2.11 com o teorema 3.9 temos que

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &\leq \frac{c(r)\int_M H_{r+1}^2 dM}{\int_M H_r dM} \\
&\leq \frac{c(r)\int_M H_{r+1}^2 dM}{\int_M H_r^{\frac{r}{r+1}} dM} \\
&\leq c(r)\frac{H_{r+1}^2}{H_r^{\frac{r}{r+1}}}\frac{\int_M dM}{\int_M dM} \\
&\leq c(r)H_{r+1}^{\frac{r+2}{r+1}}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

3.2 Estimativa quando temos variedades imersas em $\mathcal{H}^{n+1}$ com H_r constante

3.2.1 Sobre o espaço hiperbólico $\mathcal{H}^{n+1}$

Considere o conjunto

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{X = (\widetilde{x}, x); \widetilde{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ e } x > 0\}.$$

Coloquemos nesse conjunto a norma dada por $||X|| = |\widetilde{x}|^2 - x^2$, onde $|\ .\ |$ denota a norma euclidiana.

O modelo de espaço hiperbólico que vamos trabalhar aqui é o *modelo de Minkowsky* dado por

$$\mathcal{H}^{n+1} = \{X \in \mathbb{H}^{n+1}; ||X|| = -1\}.$$

3.2.2 A estimativa

Lema 3.11. Sejam M^n uma variedade Riemanniana conexa, compacta, sem bordo, $\overrightarrow{n}$ a orientação de M, $f : M^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ uma imersão isométrica e $c(r) = (n-r)\binom{n}{r}$. Então vale que

$$tr(T_r) = c(r)H_r.$$

Prova: De fato,

$$
\begin{aligned}
tr(T_r) &= tr(S_r I - AT_{r-1}) \\
&= tr(S_r I) - tr(AT_{r-1}) \\
&= nS_r I - rS_r \\
&= (n-r)\binom{n}{r} H_r \\
&= c(r)H_r. \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Lema 3.12. Sejam M^n uma variedade Riemanniana conexa, compacta, sem bordo, $\overrightarrow{n}$ a orientação de M, $f : M^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ uma imersão isométrica e $c(r) = (n-r)\binom{n}{r}$, então temos a seguinte generalização do lema 3.7,

$$
L_r(f) = c(r)(H_{r+1}\overrightarrow{n} - cH_r f). \tag{3.19}
$$

Prova: A demonstração desse teorema será muito parecida com a demonstração do seu caso particular. Seja $V \in \mathbb{R}^{n+2}$ e a função $\langle f, v\rangle : M \to \mathbb{R}$. Note que $grad\langle f, v\rangle = v^T$, onde $v^T = v - \langle \overrightarrow{n}, v\rangle \overrightarrow{n} - c\langle f, v\rangle f$ denota a componente tangente de v ao longo da imersão f.

Então para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ calculemos $\nabla_X(grad\langle f, v\rangle)$.

$$
\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X(grad\langle f, v\rangle) &= \overline{\nabla}_X(v^T) \\
&= \overline{\nabla}_X(v - \langle \overrightarrow{n}, v\rangle \overrightarrow{n} - c\langle f, v\rangle f) \\
&= \overline{\nabla}_X v - \overline{\nabla}_X \langle \overrightarrow{n}, v\rangle - \overline{\nabla}_X \overrightarrow{n} - \overline{\nabla}_X c\langle f, v\rangle f \\
&= -\langle \overrightarrow{n}, v\rangle \overline{\nabla}_X \overrightarrow{n} - X(\langle \overrightarrow{n}, v\rangle)\overrightarrow{n} - X(c\langle f, v\rangle)f - c\langle f, v\rangle \overline{\nabla}_X f. \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

Tomando agora a componente tangente de (3.20) ficamos com,

$$
\begin{aligned}
\nabla_X(grad\langle f, v\rangle) &= (-\langle \overrightarrow{n}, v\rangle \overline{\nabla}_X \overrightarrow{n} - X(\langle \overrightarrow{n}, v\rangle)\overrightarrow{n} - X(c\langle f, v\rangle)f - c\langle f, v\rangle \overline{\nabla}_X f)^T \\
&= \langle \overrightarrow{n}, v\rangle AX - c\langle f, v\rangle X. \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\begin{aligned}
L_r(\langle f,v\rangle) &= div(T_r grad\langle f,v\rangle)\\
&= \sum_{i=1}^{n}(\langle\nabla_{e_i}T_r grad\langle f,v\rangle,e_i\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle(\nabla_{e_i}T_r)grad\langle f,v\rangle,e_i\rangle+\sum_{i=1}^{n}\langle T_r(\nabla_{e_i}grad\langle f,v\rangle),e_i\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle grad\langle f,v\rangle,(\nabla_{e_i}T_r)e_i\rangle+\sum_{i=1}^{n}\langle T_r(\langle\overrightarrow{n},v\rangle Ae_i-c\langle f,v\rangle e_i),e_i\rangle\\
&= \langle grad\langle f,v\rangle,\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}T_r)e_i\rangle+\sum_{i=1}^{n}\langle\langle\overrightarrow{n},v\rangle T_r(Ae_i),e_i\rangle-\sum_{i=1}^{n}\langle c\langle f,v\rangle T_r(e_i),e_i\rangle\\
&= \langle\overrightarrow{n},v\rangle\sum_{i=1}^{n}\langle(T_rA)e_i,e_i\rangle-c\langle f,v\rangle\sum_{i=1}^{n}\langle T_r(e_i),e_i\rangle\\
&= \langle\overrightarrow{n},v\rangle tr(AT_r)-c\langle f,v\rangle tr(T_r)
\end{aligned}$$

Tendo em vista o lema 3.11, resta mostrar que $tr(AT_r)=c(r)H_{r+1}$. Assim teremos que $L_r(\langle f,v\rangle)=c(r)(\langle\overrightarrow{n},v\rangle H_{r+1}-c\langle f,v\rangle H_r)$, de onde concluímos de forma inteiramente análoga ao lema 3.7 que

$$L_r(f)=c(r)(H_{r+1}\overrightarrow{n}-cH_rf).\quad\blacksquare$$

No que segue usaremos as notações $\underline{H}_r=\inf H_r$ e $\overline{H}_r=\sup H_r$.

Teorema 3.13. Seja M uma hipersuperfície imersa isometricamente em $\mathcal{H}^{n+1}$ e suponha que $H_{r+1}>0$ em M. Então,

$$\lambda_1\leq c(r)(\overline{H}_{r+1}+\frac{\overline{H}^3_{r+1}}{2\underline{H}^2_r}-\underline{H}^{\frac{r}{r+1}}_{r+1}).$$

Se H_{r+1} é constante positiva segue que:

$$\lambda_1\leq c(r)(H_{r+1}+\frac{H^{\frac{r+3}{r+1}}_{r+1}}{2}-1).$$

Prova: Seja $F=(\tilde{f},f)\in\mathcal{H}^{n+1}$, sendo $\tilde{f}:M^n\to\mathbb{R}^{n+1}$. Assim como no teorema 3.9 podemos supor que $\int_M fdM=0$, tendo então que se $\tilde{f}=(f_1,...,f_{n+1})$, $\int_M f_idM=0$.

No nosso caso, como $c = 1$ o lema 3.12 se torna

$$L_r(f) = c(r)(H_{r+1}\overrightarrow{n} - H_r f).$$

Tal equação pode ser vista como $n+2$ equações nas coordenadas de f e de $\overrightarrow{n}$ como segue

$$L_r(f_i) = c(r)(H_{r+1}n_i - H_r f_i), \quad \text{para } \ i = 1, ..., n+2. \tag{3.22}$$

Multiplicando (3.22) por $-f_i$ teremos

$$-f_i L_r(f_i) = c(r)(-H_{r+1}n_i f_i - H_r(f_i)^2) \tag{3.23}$$

Agora lembremos novamente do teorema 3.11, que garante que

$$\lambda_1 \int_M f_i^2 dM \leq \int_M -f_i L_r(f_i) \tag{3.24}$$

Assim ficamos com

$$\lambda_1 \int_M f_i^2 dM \leq \int_M c(r)(H_{r+1}n_i f_i - H_r(f_i)^2) dM. \tag{3.25}$$

Somando as equações (3.25) de $i = 0$ até $n+1$, teremos

$$\lambda_1 \int_M |\tilde{f}|^2 \leq \int_M c(r)(H_{r+1}\langle \overrightarrow{n}, \tilde{f}\rangle - H_r|\tilde{f}|^2). \tag{3.26}$$

Lembremos que $|F| = -1$ e que $\langle F, \overrightarrow{N}\rangle = 0$. Assim,

$$|\tilde{f}| = f^2 + 1 \quad \text{e} \quad \langle \tilde{f}, \tilde{\overrightarrow{n}}\rangle = \langle f, \overrightarrow{n}\rangle + f.n,$$

onde $n = -e\overrightarrow{N}$, sendo $e = (0, \cdots, 1) \in \mathbb{R}^{n+2}$.

Como $F, \overrightarrow{N}$ e o espaço tangente a M em F geram o espaço $\mathbb{R}^{n+2}$ o gradiente de f pode ser escrito como

$$grad\ f = e + \langle e, F\rangle F - \langle e, \overrightarrow{N}\rangle = e + fF + \overrightarrow{n}\overrightarrow{N},$$

segundo [6], p. 131.

Então,

$$0 \leq |grad\ f|^2 = -1 + f^2 - n^2. \tag{3.27}$$

Usando (3.27) chegamos a

$$fn \leq \frac{f^2+n^2}{2} \leq f^2 - \frac{1}{2} = |\tilde{f}| + 1 - \frac{1}{2} = |\tilde{f}| + \frac{1}{2}$$

Como $H_{r+1} > 0$ e pela proposição 2.11 é claro que

$$-\int_M H_r|\tilde{f}|^2 dM \leq -\int_M \underline{H}_{r+1}^{\frac{r}{r+1}}|\tilde{f}|^2 dM$$

e

$$\int_M H_{r+1}\langle \tilde{f}, \tilde{\overrightarrow{n}}\rangle dM = \int_M H_{r+1} fn dM \leq \int_M (H_{r+1}|\tilde{f}|^2 + \frac{H_{r+1}}{2}) dM \leq \overline{H}_{r+1}\int_M |\tilde{f}|^2 dM + \frac{1}{2}\int_M H_{r+1} dM.$$

Segue então que

$$\frac{\lambda_1}{c(r)}\int_M |\tilde{f}|^2 dM \leq \overline{H}_{r+1}\int_M |\tilde{f}|^2 dM + \frac{1}{2}\int_M H_{r+1} dM - \underline{H}_{r+1}^{\frac{r}{r+1}}\int_M |\tilde{f}|^2 dM. \tag{3.28}$$

Dividindo a expressão em (3.28) por $\int_M |\tilde{f}|^2 dM$ chegamos a conclusão que

$$\frac{\lambda_1}{c(r)} \leq \overline{H}_{r+1} + \frac{\frac{1}{2}\int_M H_{r+1} dM}{\int_M |\tilde{f}|^2 dM} - \underline{H}_{r+1}^{\frac{r}{r+1}}. \tag{3.29}$$

Além disso,

$$\int_M |\tilde{f}|^2 dM \int_M H_{r+1}^2 dM \geq \int_M n^2 dM \int_M H_{r+1}^2 dM,$$

já que por (3.27) $|\tilde{f}|^2 = x^2 - 1 \geq n^2$.

Por Cauchy-Schwartz temos

$$\int_M n^2 dM \int_M H_{r+1}^2 dM \geq (\int_M nH_{r+1} dM)^2,$$

portanto,

$$\int_M |\tilde{f}|^2 dM \int_M H_{r+1}^2 dM \geq (\int_M nH_{r+1} dM)^2. \tag{3.30}$$

Integrando a equação (3.22), $L_r(f_i) = c(r)(H_{r+1}n_i - H_r f_i)$, que falamos no início da demonstração do teorema, vamos obter pelo teorema de Stokes que

$$H_{r+1}n_i = H_r f_i,$$

de onde segue que

$$H_{r+1}N = H_r x_i F \quad \text{em particular} \quad H_{r+1}n = H_r x$$

Substituindo agora essa informação em (3.30) obtemos

$$\int_M |\tilde{f}|^2 dM \int_M H_{r+1}^2 dM \geq (\int_M f H_r dM)^2 \geq (\int_M H_r dM)^2, \quad \text{pois} \quad x \geq 1.$$

Com isso temos que

$$\int_M |\tilde{f}|^2 dM \geq \frac{(\int_M H_r)^2 dM}{\int_M H_{r+1}^2 dM}. \tag{3.31}$$

Voltando nosso pensamento para (3.29) usamos (3.31) para obter a seguinte desigualdade

$$\frac{\int_M H_{r+1} dM}{\int_M |\tilde{f}|^2 dM} \leq \frac{\int_M H_{r+1} dM \int_M H_{r+1}^2 dM}{\int_M H_r dM \int_M H_r dM} \leq \frac{\overline{H}_{r+1} \int_M dM \overline{H}_{r+1}^2 \int_M dM}{\underline{H}_r \int_M dM \underline{H}_r \int_M dM} = \frac{\overline{H}_{r+1}^3}{\underline{H}_r^2}.$$

Enfim, voltando para (3.29) obtemos

$$\frac{\lambda_1}{c(r)} \leq \overline{H}_{r+1} + \frac{\overline{H}_{r+1}^3}{2\underline{H}_r^2} - \underline{H}_{r+1}^{\frac{r}{r+1}},$$

como queríamos.

Resta agora ver o que acontece quando H_{r+1} é constante. Para isso usaremos o que mostramos acima e a proposição 2.11. Ocorre então que,

$$\begin{aligned} \tfrac{\lambda_1}{c(r)} &\leq H_{r+1} + \tfrac{H_{r+1}^3}{2H_r^2} - H_{r+1}^{\frac{r}{r+1}} \\ &\leq H_{r+1} + \tfrac{1}{2} H_{r+1}^{\frac{3}{r+1}} - H_{r+1}^{\frac{r}{r+1}} \\ &\leq H_{r+1} + \tfrac{1}{2} H_{r+1}^{\frac{r+3}{r+1}} - 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3.3 Aplicação: Estabilidade de Hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$

Agora,que já temos uma estimativa para o primeiro autovalor do operador L_r, vamos aplica-lá ao estudo das hipersuperfícies estáveis.

Como o objetivo dessa dissertação não é fazer o estudo da estabilidade, vamos somente dar ao leitor uma idéia para que este possa entender a nossa aplicação. O leitor que desejar saber mais sobre o assunto pode consultar Espinoza em [10].

Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n e seja $f : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de M em uma forma espacial de dimensão $n+1$. Uma variação de $f : M^n \to Q_c^{n+1}$ é uma aplicação diferenciável $X : M^n \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to Q_c^{n+1}$, com $\varepsilon > 0$ de modo que para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ a aplicação $X_t : M^n \to Q_c^{n+1}$ dada por $X_t(p) = X(p,t)$ é uma imersão para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e que $X_0 = f$.

Para cada $r = 1, 2, \cdots, n$ definimos o funcional Barbosa-Colares por

$$\mathcal{A}_{r,c} = \int_M F_r[S_1, S_2, \cdots, S_r] dM,$$

onde as funções F_r são definidas recursivamente por $F_0 = 1, F_1 = S_1, \cdots, F_r = S_r + \frac{c(n-r+1)F_{r-2}}{r-1}$.

Consideremos agora o problema variacional de minimizar $\mathcal{A}_{r,c}$ para todas as variações de f que tenham variação de volume nulo.

Considerando as variações que preservam volume, essas devem ser um ponto crítico do funcional

$$\mathcal{A}_{r,c}(t) = \int_M F_r[S_1(A)(t), S_2(A)(t), \cdots, S_r(A)(t)] dM_t,$$

onde $A(t)$ é a segunda forma fundamental de X_t e dM_t é o elemento de volume da métrica induzida em M por X_t.

Em [10] encontra-se uma demonstração para as fórmulas de primeira e segunda variação. Que são dadas por

$$\mathcal{A}'_{r,c}(0) = \int_M [-(r+1)S_{r+1} + k] f dM$$

e

$$\mathcal{A}''_{r,c}(0) = -(r+1)\int_M f[L_r(f) + (S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})f + c(n-r)S_r f]dM.$$

Definindo,

$$I_r(f) = -\int_M f[L_r(f) + (S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})f + c(n-r)S_r f]dM,$$

dizemos que a imersão f com S_{r+1} constante é estável se $I_r(f) \geq 0$ para toda função diferenciável com suporte compacto, com valor médio nulo.

Note que $I_r(f) \geq 0$ é equivalente a $\int_M -(r+1)fL_r(f) + [(r+1)c(r+1)H_{r+2} - nc(r)H_1H_{r+1}]f^2 dM \geq 0$. Vamos então provar nossa aplicação usando essa última integral.

Teorema 3.14. Seja M uma hipersuperfície fechada imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$ com $H_{r+1} > 0$. Então M é estável se, e somente se, M é uma esfera.

Prova: Suponhamos M é estável. Usando a fórmula da segunda variação para a primeira autofunção de $L_r : L_r(f_1) + \lambda_1 f_1 = 0$ obtemos

$$\int_M [(r+1)\lambda_1 + (r+1)c(r+1)H_{r+2} - nc(r)H_1H_{r+1}]f_1^2 \, dM \geq 0.$$

Pelo corolário 3.10 do capítulo 2 temos que:

$$\lambda_1 f_1^2 \leq c(r)H_{r+1}^{\frac{r+2}{r+1}} f_1^2,$$

então

$$\int_M [(r+1)c(r)H_{r+1}^{\frac{r+2}{r+1}} + (r+1)c(r+1)H_{r+2} - nc(r)H_1H_{r+1}]f_1^2 \, dM \geq 0 \tag{3.32}$$

Como $(r+1)c(r+1) = (m-r-1)c(r)$ e pela proposição 2.10 temos que

$$(r+1)c(r)H_{r+1}^{\frac{r+2}{r+1}} + (r+1)c(r+1)H_{r+2} - nc(r)H_1H_{r+1}$$

$$\leq (r+1)c(r)H_{r+1}^{\frac{r+2}{r+1}} + (m-r-1)c(r)H_1H_{r+1} - nc(r)H_1H_{r+1}$$

$$= (r+1)c(r)H_{r+1}^{\frac{r+2}{r+1}} - (r+1)c(r)H_1H_{r+1}$$

$$= (r+1)c(r)(H_{r+1}^{\frac{r+2}{r+1}} - H_1H_{r+1}) \tag{3.33}$$

Como pela proposição 2.13 $H_1 \geq H_{r+1}^{\frac{1}{r+1}}$ e a igualdade ocorre somente nos pontos umbílicos temos que $H_1H_{r+1} \geq H_{r+1}^{\frac{r+2}{r+1}}$. Substituindo essa informação em (3.33) ficamos com

$$(r+1)c(r)H_{r+1}^{\frac{r+2}{r+1}} + (r+1)c(r+1)H_{r+2} - nc(r)H_1H_{r+1} \leq 0. \tag{3.34}$$

Mas sabemos que vale a desigualdade (3.32), então precisamos da igualdade na equação (3.34), que é equivalente a igualdade na proposição 2.13. Sendo assim todos os pontos de M são umbílicos, sendo M uma esfera.

Reciprocamente, se supormos agora que M é uma esfera, teremos a igualdade na proposição 2.13, o que faria com que

$$\int_M [(r+1)c(r)H_{r+1}^{\frac{r+2}{r+1}} + (r+1)c(r+1)H_{r+2} - nc(r)H_1H_{r+1}]f\, dM = 0$$

em todos os pontos. O que mostra que M é estável. ■

Referências Bibliográficas

[1] H. Alencar, M. P. do Carmo e A. G. Colares. *Stable Hypersurfaces with Constant Scalar Curvature.* Math. Z. **213**, (1993) 117-131.

[2] H. Alencar, M. do Carmo e H. Rosenberg. *On the First Eigenvalue of the Linearized Operator of r-th Curvature of a Hypersurface.* Annals of Global Analysis and Geometry **11**, (1993) 387-395.

[3] L. J. Alías e J. M. Malacarne. *On the First Eigenvalue of the Linearized Operator of the Higher Order Mean Curvature for Closed Hypersurfaces in Space .*

[4] J. L. Barbosa e A. G. Colares. *Stability of Hypersurfaces with r-Mean Curvature.* Annals of Global Analysis and Geometry **15**, (1997) 277-297.

[5] J. L. Barbosa e M. P. do Carmo. *Stability of Hipersurfaces with constant mean curvature.* Math. Z. **185**, (1984) 339-353.

[6] J. L. Barbosa, M. P. do Carmo, J. Eschenburg. *Stability of Hypersurfaces of Constant Mean Curvature in Riemannian Manifolds.*Math. Z. **197**, (1988) 123-138.

[7] P. Berard. *Lectures on Spectral Geometry.* 15º Colôquio Brasileiro de Matemática , (1985).

[8] M. do Carmo. *Geometria Riemanniana.* 3ª Ed. Projeto Euclides, IMPA (2005).

[9] A. El Soufi e S. Ilias. *Majoration de Seconde Valeur Propre d'un Operateur de Schridinger sur une Varieté Compacte et Applications*. J. Funct Anal. **103**, (1992) 294-316.

[10] F. E. E. Espinoza. *Estabilidade de Hipersuperfícies Fechadas com r-ésima Curvatura Média Constante.* Dissertação de Mestrado. UFRJ, (1999).

[11] L. Gärding. *An inequality for hyperbolic polynomials*. J. Math. Mech. **8**, (1959) 957-965.

[12] G. H. Hardy, J. E. Littlewood e G.Pólya. *Inequalities, 2nd Ed.* Cambridge Univ. Press. (1989).

[13] E. Heintze. *Extrinsic Upper Bounds for* λ_1. Math. Ann. **280**, (1988) 389-402.

[14] E. Lima. *Variedades Diferenciáveis*. Monografias de Matemática, **15**. IMPA (1973).

[15] F. J. Lopez e A. Ros.. *Complete Minimal Surfaces with Index One and Stable Constante Mean Curvature Surfaces*. Comment. Math. Helvetici **64**, (1989) 34-43.

[16] B. Palmer. *Surfaces of Constant Mean Curvature in Space Forms.*Thesis (1986).

[17] R. Reilly. *On the First Eigenvalue of the Laplacian for Compact Submanifolds of Euclidean Space*. Comment. Math. Helv. **52**, (1977) 525-533.

[18] R. Reilly. *Variational Proprieties of Functions of the Mean Curvature for Hypersurfaces in Space Forms*. J. Differential Geom. **8**, (1973) 465-477.

[19] A. M. da Silveira. *Stable Complete Surfaces with Constant Mean Curvature*. Math. Ann. **277**, (1984) 629-638.

[20] T. Vlachos. *A Characterization for Geodesic Spheres in Space Forms*. Geometriae Dedicata **68**, (1997) 73-78.