CAMILO DAVID MOREIRA DORADO

A GEOMETRIA DAS CURVAS RACIONAIS NORMAIS

Dissertação apresentada por **Camilo David Moreira Dorado** ao Curso de Mestrado em Matemática da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Linha de Pesquisa: Geometria Algébrica.

Orientador: Nivaldo Medeiros

Niterói, 30 de julho de 2009.

Livros Grátis

http://www.livrosgratis.com.br

Milhares de livros grátis para download.

A meus pais David Moreira Valdiviezo e Teresa Cármen Dorado,
por ter-me apoiado num momento muito difícil de minha vida.

Agradecimentos

Aos meus pais, eles em todo momento me incentivaram, e nunca esqueceram de mim, especialmente quando mais precisei de sua ajuda.

Ao professor Abramo Hefez, pois ele foi a primeira pessoa que me acolheu no Brasil; e porque apesar de tudo, não deixou de acreditar em mim.

Ao professor Nivaldo Medeiros, por ter-me guiado com sua experiência, e por ser mais que só um professor com seus estudantes.

Ao professor Dinamérico Pombo, que me auxiliou no momento em que retornei a Niterói, e sempre foi atento quando eu precisava de um favor.

A Fernando del Carpio, um amigo muito caro, já que ele me impulsou a começar o mestrado, e esteve presente nos momentos difíceis.

Sumário

Introdução

As *curvas racionais normais*, objeto central de estudo desta monografia, são curvas geometricamente bastante simples. Podem ser caracterizadas, por exemplo, como as curvas irredutíveis e não degeneradas de grau mínimo em um dado espaço projetivo.

Essa simplicidade nos poderia fazer pensar, equivocadamente, que estes objetos não sejam muito interessantes desde o ponto de vista matemático. Porém essas curvas, além de possuirem propriedades geométricas muito ricas, aparecem naturalmente em várias construções e prestam auxílio para a demonstração de vários resultados importantes.

Como ilustração, considere o seguinte problema: quando dois conjuntos de pontos em *posição geral* em $\mathbb{P}^n$ são projetivamente equivalentes? Em $\mathbb{P}^1$, a resposta é clássica, e faz uso do método da *razão cruzada*, como recordaremos no final da seção 1.1. E o que acontece quando $n > 1$? O seguinte resultado, do final do século XIX e devido a Veronese [Veronese] (apesar de ser comumente atribuído a Castelnuovo, cf. [CC02]) é a chave para a solução dessa questão:

Teorema. *Dados $n+3$ pontos de $\mathbb{P}^n$ em posição geral, então existe uma única curva racional normal passando por eles.*

No Corolário 2.5 veremos que com o uso deste Teorema reduzimos nosso problema ao de equivalência projetiva de pontos em $\mathbb{P}^1$, que já sabemos tratar.

Há aplicações mais interessantes e profundas. Por exemplo, mostraremos no Teorema 2.22 que, em característica zero, uma superfície cúbica geral de $\mathbb{P}^3$ é racional. Mais ainda, curvas racionais normais surgem como instrumento na classificação de variedades de grau mínimo em espaços projetivos (e.g. [Griffiths e Harris, Section 4.3, p. 522]) e no estudo de variedades defectivas (veja [CC01] e [CC02]).

A primeira parte do nosso trabalho é apresentar diversas propriedades geométricas dessas curvas, bem como várias caracterizações. São nestes resultados é que estão baseadas as aplicações geométricas. Aqui nos baseamos principalmente em [Harris].

Na segunda parte, discutimos generalizações do resultado de Veronese. Precisamente, desejamos resolver o seguinte problema:

> *Dada uma coleção finita de espaços lineares em posição geral em $\mathbb{P}^n$, existe uma curva racional normal intersectando cada componente de dimensão i da coleção em $i+1$ pontos?*

Note que, como no caso de Veronese, este problema está ligado com a questão de determinar quando duas coleções de espaços lineares são projetivamente equivalentes.

Apresentamos uma resposta completa para esse problema em $\mathbb{P}^3$ (Teorema 3.18). O caso geral parece difícil, e os resultados são apenas parciais. Nosso tratamento está baseado no artigo de Carlini e Catalisano [CC02]. Cabe destacar que nos empenhamos em dar um abordagem mais elementar dos resultados, simplificando as demonstrações, de maneira que os conhecimentos de Geometria Algébrica necessários para sua compreensão sejam básicos. As ferramentas fundamentais utilizadas foram as Grassmannianas e as variedades de Segre e o Teorema da Dimensão das Fibras.

Apresentamos agora uma descrição sucinta dos três capítulos desta dissertação.

O Capítulo 1 é introdutório, e se enfoca em citar os teoremas que utilizaremos ao longo da monografia. Fazemos também uma breve revisão dos conceitos básicos de Geometria Algébrica, introduzindo seus principais objetos e invariantes: variedades algébricas, dimensão, morfismos, mapas racionais, o teorema da dimensão das fibras, etc. Além disso, apresentamos resultados relativos aos automorfismos de $\mathbb{P}^n$ e a birracionalidade de funções regulares injetivas. Baseamo-nos principalmente em [Shafarevich] e em [Harris].

No Capítulo 2 apresentamos as curvas racionais normais e diversas de suas propriedades mais básicas, tanto do ponto de vista algébrico como geométrico. Entre outras, mostramos que com exceção das retas e cônicas, essas curvas não são de interseção completa e que têm a propriedade de grau mínimo que mencionamos no início. Demonstramos também o o Teorema de Veronese (Teorema 2.4). Em seguida construímos espaços de parâmetros para essas curvas e calculamos a sua dimensão, fazendo a partir daí aplicações.

No Capítulo 3, discutimos o problema acima destacado utilizando os métodos de [CC02]. Após introduzir alguns conceitos, apresentamos condições para que existam curvas racionais normais intersectando certas configurações de espaços lineares em posição geral. De fato, associamos a cada tal configuração um dado númerico, denominado *vetor de pesos*, que simplesmente indica quantos espaços de cada dimensão a configuração possui. Mostramos que em um dado espaço projetvo existe apenas um número finito de vetores de pesos para os quais o problema tem resposta afirmativa. Isto é feito construindo-se um espaço de parâmetros para cada vetor de pesos. Finalizamos apresentando exemplos concretos, onde aplicamos os resultados obtidos.

Capítulo 1

Preliminares

Começamos expondo algumas noções básicas em Geometria Algébrica. Definimos as variedades algébricas, tratamos de seus morfismos e das propriedades que são preservadas por esses morfismos. Além disso, enunciamos diversos resultados serão utilizados posteriormente. Nesta dissertação, o corpo de base k sempre será algebricamente fechado.

1.1 Noções básicas

O *espaço afim de dimensão* n, denotado por $\mathbb{A}^n$, é simplesmente o conjunto de n-uplas com entradas em k. Definimos uma topologia neste conjunto: dizemos que $X \subset \mathbb{A}^n$ é um fechado (*variedade afim*) se existem polinômios $F_1, \ldots, F_k \in k[T_1, \ldots, T_n]$ tais que $X = Z(F_1, \ldots, F_k)$ onde $Z(F_1, \ldots, F_k) = \{p \in \mathbb{A}^n \mid F_i(p) = 0 \text{ para } i = 1, \ldots, k\}$. A topologia gerada por estes fechados é chamada a *topologia de Zariski*.

Dado um fechado afim $X \subset \mathbb{A}^n$, definimos $\mathrm{I}(X)$ como o ideal de polinômios que se anulam em todos os pontos de X. Dizemos que uma função $f\colon X \to \mathbb{A}^m$ é *regular* (ou um *morfismo*) se é a restrição de uma função polinomial, ou seja, se é da forma $f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1, \ldots, f_m)$ onde cada f_i é um polinômio em $k[T_1, \ldots, T_n]$. Denotamos por $k[X]$ o anel das funções polinomiais em X. Em [Shafarevich, Seção 2.2, p. 24] podemos ver que este anel é isomorfo a $k[T_1, \ldots, T_n]/I(X)$. No caso que $\mathrm{I}(X)$ é um ideal primo $k[X]$ é um domínio, pelo que tem sentido falar de seu corpo de frações. Denotamos este corpo por $k(X)$.

Definimos $\mathbb{P}^n$ como o conjunto de retas de $\mathbb{A}^{n+1}$ que passam pelo origem. Para um ponto $p = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$, denotamos por $(x_0 : \cdots : x_n)$ a única reta de $\mathbb{P}^n$ que passa por p. Estas são chamadas de *coordenadas homogêneas* do ponto p. Note que $(x_0 : \cdots : x_n) = ((y_0 : \cdots : y_n)$ se e somente se existe $\lambda \in k^*$ tal que $x_i = \lambda y_i$ para todo i.

Podemos estender a topologia de Zariski definida anteriormente para conjuntos de $\mathbb{P}^n$. Um conjunto $X \subset \mathbb{P}^n$ é uma *variedade projetiva* se é o conjunto de zeros de polinômios homogêneos em $k[T_0, \ldots, T_n]$. Munimos X da topologia induzida por $\mathbb{P}^n$. Os conjuntos que são abertos de alguma variedade projetiva são chamados de *quase-projetivos*. Em geral, denominamos simplesmente por *variedade* qualquer conjunto algébrico quase-projetivo.

Observamos que o espaço afim $\mathbb{A}^n$ está naturalmente mergulhado em $\mathbb{P}^n$ mediante a inclusão $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \cdots : x_n)$ e fica identificado com o aberto $\mathbb{P} \setminus Z(x_0)$. Assim, variedades afins também são quase-projetivas.

Para uma variedade quase-projetiva X dizemos que um elemento $x \in X$ é tomado *genericamente* se x é tomado em algum aberto denso de X.

Dizemos que uma função $f\colon X \to \mathbb{P}^m$ é *regular* em um ponto p se existe um aberto afim $U \subset X$ contendo p, tal que a função restrita a se aberto é um morfismo. Uma função é regular em X se é regular em todos os pontos, em particular os mapas regulares (também chamados morfismos) são contínuos na topologia de Zariski.

Dizemos que $f\colon X \to Y$ é um *isomorfismo* se f tem inversa regular. Se $f(X)$ é denso em Y dizemos que f é *dominante*. Construímos o conjunto de *funções racionais*, $f\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^m$, como o conjunto de classes de equivalência (U, f) tais que U é um aberto de X, e f é uma função regular em U, com a relação de equivalência $(U, f) \simeq (U', f')$ se $f\,|_{U\cap U'} = f'\,|_{U\cap U'}$.

Se entre X e Y existe uma função racional que tem inversa racional, dizemos que X, Y são *birracionalmente equivalentes*. Estendemos a definição de afim, para os conjuntos que sejam isomorfos a conjuntos afins. Para uma variedade quase-projetiva X, denotamos por $\mathcal{O}_X$ o conjunto de funções regulares de X a k.

Exemplo 1.1 (Produto de variedades projetivas)**.** Seja $X = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$, e $f\colon X \to \mathbb{P}^N$, onde $N = (m+1)(n+1) - 1$, dada por $f(x_0 : \dots : x_n), (y_0 : \dots : y_n) = (\dots : x_i y_j : \dots)$. Então f é injetiva e sua imagem é um fechado de $\mathbb{P}^N$ (veja [Shafarevich, Seção 1.5.1, p. 55]). A função f é chamada o *mergulho de Segre* e definimos X, com a topologia induzida por f, como a variedade produto $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$.

Exemplo 1.2 (Grassmannianas)**.** Tomamos X como o espaço de planos de dimensão k em $\mathbb{P}^n$, definimos $f\colon X \to \mathbb{P}^N$ (onde $N = \binom{n}{k} - 1$) tal que se o plano L e gerado pelos vetores $v_1, \dots, v_k$, então $f(L)$ é o ponto gerado pelos determinantes dos menores $k \times k$ da matriz formada por $v_1, \dots, v_k$; esta aplicação está bem definida e é injetiva, e sua imagem é um fechado de $\mathbb{P}^N$ (veja [Harris, Exemplo 6.6, p. 64]). Denotamos a essa imagem como $\mathbb{G}_{k,n}$, a *Grassmanniana* de planos de dimensão k em $\mathbb{P}^n$. Dizemos que o ponto $f(L)$ são as coordenadas de Plücker de L. Por exemplo, $\mathbb{G}_{1,3}$ é a Grassmanniana das retas em $\mathbb{P}^3$ e é dada pelos zeros de equação

$$X_0X_5 - X_1X_4 + X_2X_3$$

em $\mathbb{P}^5$ (veja [Shafarevich, Seção 1.4.1, p. 43]).

Definição 1.3. Um espaço topológico é *irredutível* se não pode ser escrito como a união de dois fechados próprios. No caso em que X é um conjunto quase-projetivo irredutível o ideal $\mathrm{I}(X)$ é primo e o conjunto das funções racionais de X a k é um corpo. Denotamos por $k(X)$ este conjunto.

Proposição 1.4. *Para X uma variedade quase-projetiva, então X pode-se escrever de maneira única (salvo permutação dos fatores) como $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$ onde cada X_i é um fechado irredutível e $X_i \not\subset X_j$ para $i \neq j$.*

Demonstração. Veja [Shafarevich, Sec. 3.1, p. 34] □

Proposição 1.5. *Seja X um conjunto algébrico e $\overline{X}$ seu fecho. Então X é irredutível se somente $\overline{X}$ é irredutível.*

Demonstração. É claro que se $X = X_1 \cup X_2$ com X_1, X_2 conjuntos fechados próprios de X, então $\overline{X} = \overline{X_1} \cup \overline{X_2}$ além disso como os X_i são fechados de X, os $\overline{X_i}$ são conjuntos próprios de $\overline{X}$.

Para a recíproca, suponhamos que $\overline{X} = F_1 \cup F_2$ com F_i fechados próprios de $\overline{X}$, assim $X = (X \cap F_1) \cup (X \cap F_2)$, e se pode ver que se $X \cap F_1 = X$ então $\overline{X} \subset \overline{F_i}$ o que é absurdo, logo ambos conjuntos são próprios de X. □

Proposição 1.6. *Se X é irredutível e $f \colon X \to \mathbb{P}^m$ é mapa regular, então $f(X)$ é irredutível.*

Demonstração. Suponhamos que $f(X) = Y_1 \cup Y_2$ com Y_1, Y_2 fechados de $f(X)$ assim $X_1 = f^{-1}(Y_1)$, $X_2 = f^{-1}(Y_2)$ também são fechados de X, cuja união contém a X; como X é irredutível, um destes fechados não pode ser próprio, logo suponhamos $X_1 = X$, assim $Y_1 = f(X_1) = f(X)$ pelo que Y_1, Y_2 não podem ser ambos próprios. □

Dizemos que um mapa $f \colon X \to Y$ é *fechado*, se as imagens de fechados de X são também fechados de Y.

Proposição 1.7. *Seja $f \colon X \to Y$ um mapa regular. Suponhamos que X é uma variedade projetiva, então f é um mapa fechado.*

Demonstração. Veja [Shafarevich, Thm. 1.5.2, p. 57] □

Proposição 1.8. *Se X é uma variedade projetiva, e Y uma variedade quase-projetiva então a segunda projeção $\pi_2 \colon X \times Y \to Y$ é um morfismo fechado.*

Demonstração. Veja [Shafarevich, Thm. 1.5.3, p. 58] □

Proposição 1.9. *Se $f \colon X \to Y$ é um morfismo regular entre conjuntos quase-projetivos X, Y e f é dominante, então $f(X)$ contém um aberto de Y.*

Demonstração. Veja [Shafarevich, Thm 1.5.6 p. 63] □

Agora faremos um breve estudo sobre os automorfismos de $\mathbb{P}^n$.

Definição 1.10. Dizemos que $T \colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ é uma *transformação projetiva* se existe uma matriz não singular (a_{ij}) tal que $T[v] = [(a_{ij})v]$, para todo vetor não nulo de $\mathbb{A}^{n+1}$. Denotamos ao conjunto de transformações projetivas em $\mathbb{P}^n$ como PGL_n.

É claro que as transformações projetivas são automorfismos de $\mathbb{P}^n$. E para $\mathbb{P}^1$ temos:

Lema 1.11. *O único automorfismo de $\mathbb{P}^1$ que tem três pontos fixos é a identidade.*

Demonstração. Podemos supor sem perda de generalidade que os pontos fixos de $F \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ são $(1:0), (0:1)$ e $(1:1)$; como $F(0:1) = (0:1)$, podemos escrever $F(1:y) = (1:f(y))$, onde a aplicação $f \colon \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ está bem definida e é regular em $\mathbb{A}^1$; mas toda aplicação regular em $\mathbb{A}^1$ é um polinômio, e os únicos polinômios que induzem aplicações bijetivas são os de grau 1, assim $f(X) = aX + b$, como $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$ logo temos que $f(X) = X$ e $F(x:y) = (x:y)$ para todo $(x:y) \in \mathbb{P}^1$. □

Uma conseqüência imediata desta proposição é o seguinte resultado:

Corolário 1.12. *Todo automorfismo de $\mathbb{P}^1$ é uma transformação projetiva.*

Este resultado pode estender-se para $\mathbb{P}^n$ em geral, (veja [Hartshorne, p. 151]). Dizemos que um conjunto finito $X \subset \mathbb{P}^n$ está em *posição geral* se todo subconjunto de k pontos com $1 \leq k \leq n+1$, não está contido em um plano $k-2$ dimensional ou, equivalentemente se quaisquer $n+1$ deles geram $\mathbb{P}^n$. Os pontos

$$(1 : 0 : \cdots : 0), (0 : 1 : \cdots : 0), \ldots, (0 : \cdots : 0 : 1)$$

são chamados os *pontos fundamentais* de $\mathbb{P}^n$.

Uma propriedade básica acerca das transformações projetivas é:

Proposição 1.13. *Dois subconjuntos de $n+2$ pontos de $\mathbb{P}^n$ em posição geral são projetivamente equivalentes por uma única transformação projetiva.*

Demonstração. Basta mostrar a afirmação para os pontos fundamentais $p_0, \ldots, p_n \in \mathbb{P}^n$ e $p_{n+1} = (1 : 1 : \cdots : 1)$. Para mostrar a existência, seja $q_i = (q_{i,0} : \cdots : q_{i,n})$ para $i = 0, \ldots, n+1$. Como $q_0, \ldots, q_n$ geram $\mathbb{P}^n$, temos que:

$$(q_{n+1,0}, \ldots, q_{n+1,n}) = a_0(q_{0,0}, \ldots, q_{0,n}) + \cdots + a_n(q_{n,0}, \ldots, q_{n,n})$$

onde $a_i \in k$. Como os pontos estão em posição geral, temos $a_i \neq 0$ para $i = 0, \ldots, n$. Então a matriz:

$$\begin{pmatrix} a_0 q_{0,0} & a_1 q_{0,1} & \cdots & a_n q_{0,n} \\ a_0 q_{1,0} & a_1 q_{1,1} & \cdots & a_n q_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_0 q_{n,0} & a_1 q_{n,1} & \cdots & a_n q_{n,n} \end{pmatrix}$$

é invertível e induz uma transformação projetiva T tal que $T(p_i) = q_i$ para $i = 0, \ldots, n+1$. Para provar a unicidade, podemos supor sem perda de generalidade que $q_i = p_i$ são os pontos fundamentais de $\mathbb{P}^n$ para $i = 0, \ldots, n$ e $p_{n+1} = q_{n+1} = (1 : 1 : \cdots : 1)$, logo uma transformação T tal que $T(p_i) = q_i$ é da forma $T = (T_0 : T_1 : \cdots : T_n)$ onde T_i é um polinômio linear homogêneo; como $T_i(p_j) = 0$ para $i \neq j$ e $j < n+1$, T_i é da forma $a_i X_i$; assim $T(1 : 1 : \cdots : 1) = (a_0 : a_1 : \cdots : a_n)$ logo $a_0 = a_1 = \cdots = a_n$, pelo qual T é igual à transformação identidade em todos os pontos. $\square$

O que se pode dizer para conjuntos com mais de $n+2$ pontos?

Vejamos a resposta em $\mathbb{P}^1$. Começamos com quatro pontos, digamos $z_1, \ldots, z_4 \in \mathbb{P}^1$ e definimos a *razão cruzada*:

$$\lambda(z_1, \ldots, z_4) = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}.$$

Note que $\lambda(z_1, \ldots, z_4)$ é a imagem de z_4 da (única) transformação projetiva que manda z_1, z_2, z_3 a $1, \infty, 0$ respectivamente. Logo dois conjuntos de quatro pontos em $\mathbb{P}^1$ são projetivamente equivalentes se e somente se eles têm a mesma razão cruzada. E para conjuntos $z_1, \ldots, z_r$ e $z'_1, \ldots, z'_r$ com $r \geq 4$, basta verificar se as razões $\lambda(z_1, z_2, z_3, z_i)$ e $\lambda(z'_1, z'_2, z'_3, z'_i)$ coincidem para todo $i \geq 4$ (pois pelo Lema 1.11 um automorfismo de $\mathbb{P}^1$ fica determinado pela sua imagem em três pontos).

Para o caso de $\mathbb{P}^n$ com $n > 1$, responderemos essa pergunta na Proposição 2.5. Faremos isso com o auxílio de curvas racionais normais e veremos que o problema pode ser reduzido para o caso de $\mathbb{P}^1$.

1.2 Dimensão e fibras

Definimos a *dimensão* de uma variedade irredutível X como o grau de transcendência da extensão $k(X)|k$ e denotamos $\dim(X)$. Se X é um quase-projetivo em geral, definimos a dimensão de X como o máximo das dimensões de suas componentes irredutíveis. Se $Y \subset X$ é um fechado de X então chamamos ao número $\dim(X) - \dim(Y)$ como a *codimensão* de Y em X. Variedades algébricas de dimensão 1 são chamadas *curvas* e de dimensão 2 são chamadas *superfícies*. Dizemos que $Y \subset X$ é uma *hipersuperfície*, se Y tem codimensão 1.

Por exemplo, se X tem dimensão n e Y tem dimensão m então $X \times Y$ tem dimensão $m + n$; e a Grassmanniana $\mathbb{G}_{k,n}$ tem dimensão $k(n-k)$.

A dimensão de X também se pode definir como o máximo inteiro n tal que exista uma cadeia estritamente decrescente $\emptyset \subsetneq Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_n$, de fechados irredutíveis de X.

Proposição 1.14 (Teorema do ideal principal de Krull)**.** *Seja $X \subset \mathbb{P}^N$ uma variedade irredutível n-dimensional, e $Y \subset X$ o conjunto de zeros de m formas. Então toda componente irredutível (não vazia) de Y tem dimensão maior ou igual a $n - m$.*

Demonstração. Veja [Shafarevich, 1.6.5 p. 71] □

Este teorema diz, em particular, que toda variedade definida por uma única equação tem codimensão 1. Para o caso de $\mathbb{P}^n$, a recíproca também vale. Mas em geral não é certo que toda subvariedade de codimensão 1 seja definida por uma única equação. Mais adiante veremos que as cúbicas torcidas como subvariedades de superfícies cubicas não podem ser definidas por um só polinômio.

Para um mapa regular $f\colon X \to Y$ entre variedades quase-projetivas, dado $y \in Y$ o conjunto $f^{-1}(y)$ é chamado a *fibra* de f sobre y. Esta é obviamente uma subvariedade fechada de Y.

Teorema 1.15 (Teorema de dimensão das fibras)**.** *Seja $f\colon X \to Y$ um mapa regular entre variedades irredutíveis, com $\dim(X) = n$, $\dim(Y) = m$. Suponha que f é dominante. Então $m \leq n$ e*

1. *$\dim(F) \geq n - m$ para quaisquer componente irredutível F de $f^{-1}(y)$.*

2. *Existe um conjunto aberto $U \subset Y$ tal que $\dim(f^{-1}(y)) = n - m$ para todo $y \in U$.*

Demonstração. Veja [Shafarevich, Thm. 1.6.7, p. 76] □

Um critério útil para saber se um conjunto é irredutível surge como conseqüência do teorema anterior:

Proposição 1.16. *Seja $f\colon X \to Y$ um mapa regular fechado e dominante entre duas variedades quase-projetivas. Suponha que Y é irredutível, que todas as fibras $f^{-1}(y)$ são irredutíveis e têm a mesma dimensão. Então X é irredutível.*

Demonstração. Veja [Shafarevich, Thm. 1.6.8, p. 77] □

Como aplicação destes teoremas, obtemos informações sobre as superfícies em $\mathbb{P}^3$ que contém alguma reta. De fato, utilizando relações de incidência e argumentos de dimensão, prova-se que uma superfície geral em $\mathbb{P}^3$ de grau > 4 não contém retas [Shafarevich, Thm. 1.6.9, p. 80]. Por outro lado:

Proposição 1.17. *Toda superfície cúbica em $\mathbb{P}^3$ contém pelo menos uma reta. Existe um aberto $U \subset \mathbb{P}^{19}$ do espaço de cúbicas de $\mathbb{P}^3$ (o espaço projetivo de polinômios homogêneos de grau 3 em quatro variáveis) tal que toda cúbica de U contém apenas um número finito de retas.*

Demonstração. Veja [Shafarevich, Thm. 1.6.10, p. 80] □

Corolário 1.18. *O conjunto das cúbicas irredutíveis contém um aberto de $\mathbb{P}^{19}$.*

Demonstração. Como uma cúbica redutível sempre contém um plano, então estas cúbicas contém infinitas retas e pela Proposição 1.17 deduzimos o resultado. □

1.3 Espaços tangentes, variedades suaves e normais

Seja $X = Z(f_1, \dots, f_n) \subset \mathbb{A}^n$ um fechado afim. Dado um ponto $p \in X$ definimos *o espaço tangente* de X em p T_pX como o plano gerado pelos polinômios lineares:

$$df_i(p) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_j - x_j)$$

para o caso projetivo definimos o *plano tangente* de X em p como o fecho do espaço T_pX. Em geral, vale que $\dim_k T_pX \geq \dim_p X$. Dizemos que uma variedade é *suave ou não singular* se $\dim(T_pX) = \dim(X)$ para todo $p \in X$.

Uma propriedade muito similar à suavidade e equivalente para o caso de curvas, é a normalidade. Dizemos que uma variedade X é *normal* se para cada ponto $p \in X$, existe um aberto afim de $U \ni p$ tal que $k[U]$ seja integralmente fechado. De maneira equivalente, X é normal se o anel local de X em p é integralmente fechado, para todo $x \in X$.

Proposição 1.19. *Toda variedade não singular é normal.*

Demonstração. Veja [Shafarevich, Thm. 2.5.3, p. 126] □

Definição 1.20. Sejam X e Y variedades irredutíveis afins e $f\colon X \to Y$ uma aplicação regular e dominante. Dizemos que f é um morfismo *finito* se a extensão de anéis $f^*(k[Y]) \subset k[X]$ é inteira. Estendemos esta definição para X, Y variedades quase-projetivas: dizemos que f é *finito* se para todo ponto de $y \in Y$ existe uma vizinhança afim $V \ni y$ tal que $U = f^{-1}(V)$ seja afim e que $f|_U\colon U \to V$ seja finito.

Dada uma aplicação racional dominante $f\colon X \to Y$, esta induz um homomorfismo injetor de corpos $f^*\colon k(Y) \to k(X)$. Definimos o *grau de f* como o grau da extensão $[k(X) : f^*(k(Y))]$.

Lema 1.21. *Se $f\colon X \to Y$ é um mapa finito entre variedades irredutíveis, e Y é normal, então o número de imagens inversas de cada ponto $y \in Y$ é menor o igual do que o grau de f. Mais ainda o conjunto onde se cumpre a igualdade é um aberto; este conjunto é não vazio sempre que a extensão $k(X)|f^*(k(Y))$ é sepáravel.*

Demonstração. Veja [Shafarevich, Thm. 2.6.4, p. 144] □

Proposição 1.22. *Seja $f\colon X \to Y$ um morfismo entre variedades irredutíveis afins, tal que Y é normal e $k(X)|f^*(k(Y))$ seja separável e finita, então o número de pontos na fibra geral é igual ao grau de f.*

Demonstração. Mostramos que existe um aberto denso U contido em Y tal que $f|_{f^{-1}(U)}$ é finito. Temos que f^* induz uma inclusão $k[Y] \subset k[X]$. Sejam $x_1, \ldots, x_r$ os geradores de $k[X]$ sobre $k[Y]$. Como a extensão de corpos é finita cada x_i é algébrico sobre $k(X)$, logo o polinômio minimal de x_i é da forma:

$$a_i^{(0)}(x_i)^{n_i} + \cdots + a_i^{(n_i)} = 0$$

Sejam $a = a_1^{(0)} \cdots a_r^{(0)}$ e $U \subset Y$ o aberto principal dado por $Y \setminus Z(a)$. Tome $V = f^{-1}(U)$. Então $k[V] = k[X][f^*(a^{-1})] = f^*(k[U])[x_1, \ldots, x_r]$ e como $a_i^{(0)}$ são invertíveis em $k[U]$, os polinômios minimais de $x_1, \ldots, x_r$ são mônicos sobre $k[U]$, assim $k[V]|k[U]$ é uma extensão inteira e $f|_V$ é finito. Pelo Lema 1.21 existe um aberto $U' \subset U$ tal que o número de elementos na pré-imagem dos pontos de U' é exatamente o grau de f. Como U' é denso em Y temos que o número de pontos na fibra geral é igual ao grau de f. □

Corolário 1.23. *Se um morfismo entre duas variedades irredutíveis é dominante, injetivo e a extensão de corpos induzida é separável, então o morfismo é birracional.*

Proposição 1.24. *Seja $k(x_1, \ldots, x_r)$ um corpo, com grau de transcendência 1 sobre um corpo k algebricamente fechado então existe um x_i tal que $k(x_1, \ldots, x_r)|k(x_i)$ é uma extensão finita separável.*

Demonstração. Para o caso em que k tenha característica nula, a afirmação é óbvia. Se k tem característica $p > 0$ mostramos por indução sobre r. Para o caso $r = 1$ é imediato; se é certo para $r = n$, temos que para $r = n + 1$, pela hipótese de indução, $k(x_2, \ldots, x_{n+1})$ é separável sobre $k(x_i)$, podemos supor sem perda de generalidade que $i = 2$ como o grau de transcendência é 1, x_1 é algébrico sobre $k(x_2)$, logo como o polinômio minimal de x_1 é irredutível, mediante o lema de Gauss existe um polinômio $F(X_1, X_2) \in k[X_1, X_2]$ irredutível tal que $F(x_1, x_2) = 0$. Se todos os monômios de este polinômio são da forma $X_1^{kp}X_2^{sp}$, então como k é algebricamente fechado, o polinômio e potência $p-$ésima de algum outro polinômio, o que é absurdo (pois F é irredutível), logo $\partial F/\partial X_j \neq 0$ para alguma variável X_j pelo que para x_i o outro elemento se tem que $k(x_1, x_2)$ é separável sobre $k(x_i)$, e como $k(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ é separável sobre $k(x_2, x_1)$, então toda a extensão é separável sobre $k(x_i)$. □

Capítulo 2

Curvas racionais normais

Neste Capítulo apresentamos nosso objeto central de estudo, as curvas racionais normais. As estudamos tanto como curvas parametrizadas como variedades determinantais. Provamos a partir daí o Teorema de Veronese, mencionado na Introdução. Mostramos que elas são as únicas curvas irredutíveis não degeneradas de grau n em $\mathbb{P}^n$. Finalmente, construímos um espaço de parâmetros para estas curvas e fazemos algumas aplicações.

2.1 Propriedades básicas

Definição 2.1. Seja $\nu\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$ a aplicação de Veronese dada por

$$\nu(x:y) = (x^n : x^{n-1}y : \cdots : y^n).$$

Dizemos que uma curva projetiva $C \subset \mathbb{P}^n$ é uma *curva racional normal* se C é a imagem de uma transformação projetiva composta com a aplicação de Veronese.

Por exemplo, em $\mathbb{P}^2$ as curvas racionais normais são as cônicas irredutíveis. Em $\mathbb{P}^3$ as curvas racionais normais são conhecidas como cúbicas *torcidas* ou cúbicas *reversas*. Note que a aplicação de Veronese é um isomorfismo na imagem e logo toda curva racional normal é isomorfa à reta projetiva.

Proposição 2.2. *Todo subconjunto finito de pontos de uma curva racional normal está em posição geral.*

Demonstração. Podemos supor que a curva C é exatamente a imagem da aplicação de Veronese. Basta mostrar que todo conjunto de $n+1$ pontos está em posição geral e isto equivale a que o determinante da matriz formada por alguma escolha das coordenadas homogêneas de esses $n+1$ pontos seja não nula. Sejam $p_0, \ldots, p_n$ pontos de C; se supomos que nenhum p_i está em $Z(X_0)$ podemos escrever cada p_i como $(1 : s_i : \cdots : s_i^n)$, para algum $s_i \in k$; então o determinante desses $n+1$ pontos será da forma:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{n+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ s_1^n & s_2^n & \ldots & s_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

Como essa é a matriz de Vandermonde, e os pontos são distintos, o determinante dessa matriz não se anula. Para o outro caso, note que $C \cap Z(X_0) = \{(0 : \cdots : 0 : 1)\}$, logo só um dos p_i esta em $Z(X_0)$, pelo que podemos supor que $p_n = (0 : \cdots : 1)$. Os demais p_i escrevem-se como acima; assim, temos agora

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ s_1^{n-1} & \dots & s_{n+1}^{n-1} & 0 \\ s_1^n & \dots & s_{n+1}^n & 1 \end{pmatrix}$$

que pelo argumento anterior também é não nulo. □

A proposição anterior mostrou que uma curva racional normal é uma curva que se pode parametrizar com polinômios de grau n e que tem $n+1$ pontos em posição geral. Esta propriedade caracteriza as curvas racionais normais:

Proposição 2.3. *Seja $P\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$ dada por $P(x : y) = (P_0(x,y) : \cdots : P_{n+1}(x,y))$, onde cada $P_i(x,y)$ é um polinômio homogêneo de grau n. Se a imagem de P contém $n+1$ pontos em posição geral então esta é uma curva racional normal.*

Demonstração. Podemos supor, pela Proposição 1.13, que os pontos em posição geral são os pontos fundamentais de $\mathbb{P}^n$. Sejam $(s_i : t_i) \in \mathbb{P}^1$ com $i = 0, \dots, n$, $P_j(s_i, t_i) = \delta_{ij}$. Provemos que $P_0(X,Y), \dots, P_n(X,Y)$ são linearmente independentes no espaço de polinômios de grau n: se $a_0P_0(X,Y) + \cdots + a_nP_n(X,Y) = 0$ então aplicando essa expressão a (s_i, t_i) teremos que $a_i = 0$ para $i = 0, \dots, n$; logo estes polinômios são uma base do espaço de polinômios homogêneos de grau n em duas variáveis; assim existe uma transformação linear T tal que $T \circ P_i(X,Y) = X^iY^{n-i}$; pelo que $T^{-1} \circ \nu(X : Y) = P(X : Y)$, o que prova que a imagem de P é uma curva racional normal. □

Observe que uma aplicação $P(X : Y)$ como acima com $(s_i : t_i)$ tais que $P_j(s_i : t_i) = 0$ para $i \neq j$ é da forma $P_j(X,Y) = \prod_{i \neq j}(t_iX - s_iY)$, logo a aplicação de Veronese é projetivamente equivalente a

$$P(X : Y) = \left(\frac{1}{t_0X - s_0Y} : \frac{1}{t_1X - s_1Y} : \cdots : \frac{1}{t_nX - s_nY} \right)$$

Agora surge a pergunta de que condições precisamos pedir a um conjunto de pontos de $\mathbb{P}^n$ para que exista uma única curva racional que passe por eles. Por exemplo no plano projetivo para cinco pontos não colineares dois a dois, existe uma única cônica que passa por estes pontos. Generalizaremos este resultado

Teorema 2.4 (Veronese)**.** *Existe uma única curva racional normal que passa por $n+3$ pontos em posição geral em $\mathbb{P}^n$.*

Demonstração. Pela Proposição 1.13 podemos supor sem perda de generalidade que os $n+1$ primeiros pontos são os pontos fundamentais de $\mathbb{P}^n$, e que, como estes pontos estão em posição geral, os últimos pontos são da forma $(a_0 : \cdots : a_n)$ e $(b_0 : \cdots : b_n)$ com $a_i, b_i \neq 0$ para $i = 0, \dots, n$.

Para demonstrar a existência sejam $t_i = a_i^{-1}$ e $s_i = b_i^{-1}$ como vimos antes a imagem da aplicação:

$$P(X:Y) = \left(\frac{\prod_{j=0}^{n}(t_jX - s_jY)}{t_0X - s_0Y} : \frac{\prod_{j=0}^{n}(t_jX - s_jY)}{t_1X - s_1Y} : \cdots : \frac{\prod_{j=0}^{n}(t_jX - s_jY)}{t_nX - s_nY} \right)$$

parametriza uma curva racional normal que passa pelos $n+1$ primeiros pontos fundamentais, além disso $P(1:0) = (a_0 : \cdots : a_n)$ e $P(0:1) = (b_0 : \cdots : b_n)$, o que mostra a existência.

Para mostrar a unicidade seja $Q(X:Y)$ uma parametrização de outra curva racional normal que passe pelos $n+3$ pontos dados, logo por uma transformação projetiva em $\mathbb{P}^1$ podemos supor que $Q(1:0) = (a_0 : \cdots : a_n)$; $Q(0:1) = (b_0 : \cdots : b_n)$ e $Q(a_0 : b_0) = (1:0:\cdots:0)$. Como os $n+1$ primeiros pontos são os pontos fundamentais de $\mathbb{P}^n$, então $Q(X:Y)$ é da forma:

$$Q(X:Y) = \left(\frac{\prod_{j=0}^{n}(t_jX - s_jY)}{t_0X - s_0Y} : \cdots : \frac{\prod_{j=0}^{n}(t_jX - s_jY)}{t_nX - s_nY} \right)$$

com t_i, s_i distintos de zero, para $i = 0, \ldots, n$. Logo $Q(1:0) = (a_0 : \cdots : a_n) = (t_0^{-1} : \cdots : t_n^{-1})$ assim $a_i = \lambda t_i^{-1}$ para $i = 0, \ldots, n$, para algum $\lambda \neq 0$; analogamente $b_i = \mu s_i^{-1}$ para algum $\mu \neq 0$. Finalmente como $Q(a_0 : b_0) = (1:0:\cdots:0)$, $t_0a_0 - s_0b_0 = 0$ logo $\lambda = \mu$, e

$$Q(X:Y) = \left(\frac{1}{a_0^{-1}X - b_0^{-1}Y} : \frac{1}{a_1^{-1}X - b_1^{-1}Y} : \cdots : \frac{1}{a_n^{-1}X - b_n^{-1}Y} \right)$$

como queríamos. □

Em particular, se $P_1, \ldots, P_{n+3}$ é um conjunto de pontos de $\mathbb{P}^n$ em posição geral, e se $\gamma, \gamma' \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$ são parametrizações de curvas racionais normais que passam por esses pontos, então pela demonstração anterior γ é uma reparametrização de γ' (isto é, existe $\sigma \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ transformação projetiva tal que $\gamma = \gamma' \circ \sigma$). Assim se $Q_1, \ldots, Q_{n+3}$, $Q'_1, \ldots, Q'_{n+3}$ são os pontos de $\mathbb{P}^1$ tais que $\gamma(Q_i) = P_i$ e $\gamma'(Q'_i) = P'_i$ então $Q_1, \ldots, Q_{n+3}$, $Q'_1, \ldots, Q'_{n+3}$ são projetivamente equivalentes em $\mathbb{P}^1$. Deduzimos então:

Corolário 2.5. *Dois conjuntos de $n+3$ pontos de $\mathbb{P}^n$ em posição geral são projetivamente equivalentes se e só se os pontos correspondentes em $\mathbb{P}^1$ são projetivamente equivalentes.*

Logo o problema de quando dois conjuntos finitos de pontos são projetivamente equivalentes fica resolvido, pois mediante o Corolário o problema se reduz ao caso de $\mathbb{P}^1$, que sabemos resolver aplicando o método da razão cruzada (veja o final da Seção 1.1).

Definição 2.6. Seja H um hiperplano, $p \in \mathbb{P}^n \setminus H$ definimos $\pi_{H,p} \colon \mathbb{P}^n \setminus \{p\} \to H$ a *projeção* com centro em p, como $\pi_{H,p}(x) = L(x,p) \cap H$, onde $L(x,p)$ é a reta que une x e p. Esta aplicação está bem definida e é regular, mais ainda $\pi_{H,p_0}(x) = (T_0(x) : \cdots : T_{n-1}(x))$, onde os T_i são polinômios lineares homogêneos com $Z(T_0, \ldots, T_{n+1}) = \{p\}$.

Analogamente para um plano r-dimensional $\Sigma \subset \mathbb{P}^n$ e outro plano H de codimensão $r+1$, com $\Sigma \cap H = \emptyset$, definimos a projeção $\pi_{H,\Sigma} : \mathbb{P}^n \to H$ por $p \mapsto \langle p, \Sigma \rangle \cap H$ onde

$\langle p, \Sigma\rangle$ é o plano gerado por p e por Σ; esta aplicação é bem definida e é da forma $\pi_{H,\Sigma}(p) = (T_0(p), \ldots, T_r(p))$ onde os T_i são formas lineares tais que $Z(T_0, \ldots, T_r) = \Sigma$, pelo que é regular. Notemos também que se $\Sigma = \langle p_1, \ldots, p_r\rangle$ então para H_i o plano gerado por H e $p_i, \ldots, p_r$, tem-se que $\pi_{\Sigma,H} = \pi_{p_0,H_1} \circ \pi_{p_1,H_2} \circ \cdots \circ \pi_{p_r,H}$.

Proposição 2.7. *Seja C uma curva racional normal, H um hiperplano e $p_0 \in C\backslash H$. Então existe $q_0 \in H$ tal que $\pi_{H,p_0}(C) \cup \{q_0\}$ é uma curva racional normal no espaço ambiente $H \simeq \mathbb{P}^{n-1}$.*

Demonstração. Seja $P(X : Y)$ uma parametrização para a curva racional normal C, e $p_1,\ldots,p_n$ outros n pontos na curva. Seja $(s_0 : t_0) \in \mathbb{P}^1$ tal que $P(s_0 : t_0) = p_0$. Pela discussão anterior $\pi_{p_0} \circ P(X : Y) = (Q_0(X : Y) : \cdots : Q_{n-1}(X : Y))$, com $Q_i(X,Y)$ polinômios de grau n e $Q_i(s_0,t_0) = 0$, assim $Q_i(X,Y) = (t_0X - s_0Y)R_i(X,Y)$ e $\pi_{p_0} \circ P(X : Y)$ é da forma $R(X : Y) = (R_0(X : Y) : \cdots : R_{n-1}(X : Y))$ onde os $R_i(X,Y)$ são polinômios de grau $n-1$, além disso como $p_0, \ldots, p_n$ estão em posição geral então $\pi_{p_0}(p_1), \ldots, \pi_{p_0}(p_n)$ também estão em posição geral; logo para $q_0 = R(s_0,t_0)$, $\pi_{p_0}(C) \cup q_0$ é uma curva racional normal em $\mathbb{P}^{n-1}$. □

Agora procedemos estudar o espaço secante de uma curva racional normal. Primeiramente damos algumas definições necessárias.

Definição 2.8. Para uma variedade X definimos $\mathrm{Sec}(X)$ como a união de todas as retas que passam por dois pontos de X, e $\mathrm{Tan}(X)$ como a união dos espaços tangentes de X. Em geral se $X \subset \mathbb{P}^n$ é uma variedade projetiva $\mathrm{Tan}(X)$ é um fechado projetivo, e $\mathrm{Sec}(X)$ é um conjunto quase-projetivo quando X é suave (Veja [Hartshorne, p. 310]).

Utilizaremos $\mathrm{S}(C) \subset \mathbb{G}_{1,n}$ como o conjunto de retas secantes da curva C, seja $\phi\colon (\mathbb{P}^1)^2 \setminus \Delta \to \mathrm{S}(C)$ (onde Δ é a diagonal em $(\mathbb{P}^1)^2$); dada por

$$f(P,Q) = \langle \nu(P), \nu(Q)\rangle$$

(onde denotamos $\langle V, W\rangle$ como a reta gerada por V e W); assim temos que ϕ parametriza $\mathrm{S}(C)$ e que tem fibras finitas, pois se $\langle \nu(P), \nu(Q)\rangle = \langle \nu(P'), \nu(Q')\rangle$ então, como os pontos numa curva racional normal estão em posição geral, isso implica que $\{P', Q'\} = \{P, Q\}$; assim, aplicando o teorema de dimensão das fibras a ϕ, a dimensão de $\mathrm{S}(C)$ é 2. Para dar um exemplo de $\mathrm{S}(C)$, podemos tomar o caso $n = 3$; afirmamos que $\mathrm{S}(C)$ é a superfície de Veronese em $\mathbb{P}^5$. De fato se restringimos ϕ a $\mathbb{A}^2 \setminus \Delta$ temos que:

$$\phi(s,t) = \det_{2\times 2}\begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ 1 & s & s^2 & s^3 \end{pmatrix} = (1 : t+s : t^2+st+s^2 : st : st(s+t) : (st)^2)$$

Logo vemos que a imagem de ϕ é projetivamente equivalente a o conjunto:

$$\{(1 : s+t : (s+t)^2 : st : st(s+t) : (st)^2) \mid s,t \in k, s \neq t\}$$

e está contida na superfície de Veronese parametrizada por $(X : Y : Z) \mapsto (X^2 : XY : Y^2 : YX : YZ : Z^2)$ logo o fecho de $\mathrm{S}(C)$ é a superfície de Veronese.

Este cálculo nos pode servir para calcular a dimensão de $\mathrm{Sec}(C)$; pois seja $\Sigma = \{(x, \langle L\rangle) \in \mathbb{P}^n \times \overline{\mathrm{S}(C)} \mid x \in L \text{ e } \langle L\rangle \in \overline{\mathrm{S}(C)}\}$ vemos que Σ é uma variedade projetiva, e que aplicando a segunda projeção $\pi_2 \colon \Sigma \to \overline{\mathrm{S}(C)}$, fixando uma reta L, é claro que $\pi_2^{-1}(\langle L\rangle) = L$, pelo que todas as fibras tem dimensão 1 e são irredutíveis (pois são retas). Logo pela Proposição 1.16 Σ é irredutível e tem dimensão 3. Agora vemos que $\overline{\mathrm{Sec}(C)} = \pi_1(\Sigma)$ logo para calcular a dimensão de $\mathrm{Sec}(C)$ bastará calcular a dimensão das fibras genéricas de π_1; fazemos estes cálculos para o caso $n \geq 3$ (no caso de $\mathbb{P}^2$ é claro que $\overline{\mathrm{Sec}(X)} = \mathbb{P}^2$ pois qualquer reta de $\mathbb{P}^2$ é secante ou tangente da cônica C) fixando um ponto $p \in \mathrm{Sec}(C)$ tal que $p \notin C$, suponhamos que p está em L, L', retas secantes de C, logo sejam q, q' e s, s' as intersecções $C \cap L$, $C \cap L'$ respectivamente, então q, q', s, s' estão no plano gerado por L e L' e como todos os pontos de C estão em posição geral e $n \geq 3$ então um desses pontos se repete. Logo as retas L e L' tem dois pontos em comum, ou seja $L = L'$. Como a fibra geral tem dimensão 0 então a dimensão de $\mathrm{Sec}(C)$ e a mesma que a dimensão de Σ, ou seja, ambas têm dimensão 3.

Numa curva qualquer pode existir casos em que a uma reta também seja tangente. O resultado a seguir mostra que isso não ocorre nas curvas racionais normais:

Proposição 2.9. *Para $n \geq 3$, em uma curva racional normal contida em $\mathbb{P}^n$, uma reta secante e uma reta tangente nunca se interceptam; mais ainda, duas retas tangentes tampouco se encontram.*

Demonstração. Podemos supor sem perda de generalidade que C é a imagem da aplicação de Veronese; sejam p_1, p_2, p_3 pontos tais que passe uma tangente por p_1 e uma secante por p_2, p_3 (para o outro caso podemos supor que a segunda tangente passe por p_2). Como uma curva racional normal é isomorfa a $\mathbb{P}^1$ existe um automorfismo em C que manda p_1 a $(1 : 0 : \cdots : 0)$, p_2 a $(0 : \cdots : 0 : 1)$ e p_3 a $(1 : \cdots : 1)$; além disso é fácil ver que todo automorfismo de C é induzido por uma transformação projetiva pelo que o automorfismo citado vai preservar retas e tangentes; assim esta demonstração se reduz ao caso p_1, p_2, p_3 como acima.

Vemos que a tangente que passa por p_1 é a reta gerada por $p_1, (0 : 1 : 0 : \cdots : 0)$ e a reta que passa por p_2, p_3 não intercepta essa tangente, pois $p_1, p_2, p_3, (0 : 1 : 0 : \cdots : 0)$ estão em posição geral para $n \geq 4$. No segundo caso a tangente que passa por p_2 é a reta gerada por p_2 e $(0 : \cdots : 0 : 1 : 0)$ que claramente não intercepta a tangente que passa por p_1; logo em ambos casos as retas não se interceptam. □

Para calcular a dimensão de $\mathrm{Tan}(C)$, vemos que para a aplicação $\psi : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^n$ tal que $\psi(t) = (1, 1, 2t, \ldots, nt^{n-1})$ tem-se que $T_{(\nu(t))}C = \langle \nu(t), \psi(t)\rangle$, logo para $T(C)$ o conjunto de tangentes de C, tem-se que um aberto denso de $T(C)$ é imagem por (ψ, ν) de $\mathbb{A}^1$, e como $T(C)$ não é finito então $T(C)$ é um irredutível de dimensão 1. E aplicando o mesmo cálculo que para a secante podemos mostrar que $\Sigma' = \{(p, \langle L\rangle) \in \mathbb{P}^n \times T(C) \mid p \in L\}$ é um fechado irredutível de dimensão 1. Logo $\mathrm{Tan}(C)$ é a primeira projeção de Σ'. Assim, se $(p, \langle L\rangle), (p, \langle L'\rangle) \in \Sigma'$, então pela Proposição 2.9 temos $L = L'$.

Em resumo, concluímos:

$$\dim \mathrm{Sec}(C) = 3 \text{ e } \dim \mathrm{Tan}(C) = 2. \tag{2.1}$$

Outra conseqüência do resultado anterior é que $\mathrm{Sec}(C) \neq \overline{\mathrm{Sec}(C)}$ pois $\mathrm{Tan}(C) \subset \overline{\mathrm{Sec}(C)}$; em particular para $n = 3$, se bem $\overline{\mathrm{Sec}(C)} = \mathbb{P}^3$, não ocorre o mesmo para $\mathrm{Sec}(C)$; isto também pode ocorrer para o caso $n = 2$; por exemplo, se consideramos k tal que $car(k) = 2$, e em $\mathbb{P}^2$ seja a curva $C = Z(Y^2 - XZ)$ que claramente é a imagem da aplicação de Veronese. A reta tangente de C em $(x : y : z)$ está determinada pela equação $zX + xZ$. Em particular a reta que passa pelo ponto $(0 : 1 : 0)$ e por $(x : y : z) \in C$ é uma reta tangente. Logo não existem retas secantes de C que passem por $(0 : 1 : 0)$. Assim $\mathrm{Sec}(C) \neq \mathbb{P}^2$. Estas curvas formam uma classe especial de cônicas e recebem o nome de *cônicas estranhas.*

2.2 Variedades determinantais

Definição 2.10. Seja M uma matriz de dimensões $r \times s$ com entradas polinomiais. Dizemos que um conjunto X é uma *variedade determinantal* de posto k da matriz M, se é o conjunto de zeros das determinantes dos menores $k \times k$ da matriz M, para $k \leq r, s$.

A imagem de $\mathbb{P}^1$ por uma aplicação de Veronese é a variedade determinantal de posto 2 da matriz

$$\begin{pmatrix} X_0 & X_1 & \cdots & X_{n-1} \\ X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{pmatrix}$$

e esta aplicação é um isomorfismo entre $\mathbb{P}^1$ e sua imagem, pelo qual este é um conjunto irredutível. Denotaremos o conjunto de formas quadráticas em n variáveis sobre k como $k[X_1, \ldots, X_n]_2$. Procedemos a estudar o ideal de C, para o qual analisaremos o espaço de formas quadráticas em $I(C)$, que denotaremos por $I(C)_2$.

Proposição 2.11. *Suponha $n \geq 2$ e seja $C \subset \mathbb{P}^n$ uma curva racional normal, então $I(C)_2$ tem dimensão $\binom{n}{2}$.*

Demonstração. Podemos supor que C é a imagem da aplicação de Veronese $\nu : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$. Seja A o espaço de formas quadráticas em $n+1$ variáveis, e B o espaço de formas de grau $2n$ em duas variáveis; a dimensão de A é $\binom{n+2}{2}$ e a dimensão de B é $2n + 1$. Sabemos que ν induz uma transformação linear $\nu^* : A \to B$ dada por $\nu^*(F) = F \circ \nu$. É claro que $\mathrm{Ker}(\nu^*) = I(C)_2$, além disso ν^* é sobrejetiva, pois os polinômios $X^{n+k}Y^{n-k}$ e $Y^{n+k}X^{n-k}$ são da forma $\nu^*(X_0X_k)$ e $\nu^*(X_nX_k)$ respectivamente. Logo a dimensão de $A \cap I(C)$ é igual à dimensão da imagem menos a dimensão do núcleo, isto é, $\binom{n+2}{2} - 2n - 1 = \binom{n}{2}$. □

Corolário 2.12. *Para $n \geq 3$, $I(C)$ não se pode ser gerada por menos de n formas.*

Demonstração. Seja $I(C) = \langle F_1, \ldots, F_k \rangle$, com $F_1, \ldots, F_k$ formas de $k[X_0, \ldots, X_n]$. Sejam $F_1, \ldots, F_s$ $(s \leq k)$ formas de grau 2, e supomos que as demais F_i têm grau distinto de 2 (como C não está contida em um hiperplano, temos que $\mathrm{grau}(F_i) > 1$ para todo i). Então todo polinômio de $I(C)_2$ só pode ser uma combinação linear de $F_1, \ldots, F_s$, logo estes polinômios geram $I(C)_2$ como espaço vetorial. Assim $s \geq \binom{n}{2}$ que é maior ou igual do que n quando $n \geq 3$. □

Em particular se $n \geq 3$ as curvas racionais normais não são de interseção completa. Sem embargo pode ocorrer que C escreva-se como interseção de menos de n formas polinomiais. Por exemplo em $\mathbb{P}^4$

$$\nu(\mathbb{P}^1) = Z(X_4X_0 - X_2^2, X_2X_0 - X_1^2, X_3X_0^2 - X_1^3)$$

Assim toda curva racional normal é uma variedade determinantal de posto 2 de alguma matriz de polinômios. Perguntamos: quais são as matrizes de polinômios lineares geram curvas racionais normais?

Teorema 2.13. *A variedade determinantal de posto 2 induzida pela matriz*

$$\begin{pmatrix} L_1 & \dots & L_n \\ M_1 & \dots & M_n \end{pmatrix}$$

é uma curva racional normal sempre que esta seja conjugada sobre k a uma matriz do tipo:

$$\begin{pmatrix} N_0 & N_1 & \dots & N_{n-1} \\ N_1 & N_2 & \dots & N_n \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

com $N_0, \dots, N_n$ polinômios linearmente independentes

Demonstração. É claro que se X é a variedade determinantal de posto 2 induzida por uma matriz S da forma (2.2) então X é uma curva racional normal. Logo seja Y a variedade determinantal induzida pela matriz

$$T = \begin{pmatrix} L_1 & \dots & L_n \\ M_1 & \dots & M_n \end{pmatrix}$$

onde $T = ASB$ com $A \in k^{2\times 2}$ e $B \in k^{n\times n}$ ambas matrizes invertíveis, e S como acima; seja X o conjunto de zeros de S, provamos que $Y = X$. Como a determinante dos menores 2×2 de ASB, e SB são associados, então Y e igual à variedade induzida por SB. Pelo outro lado temos que $p \in X$ se somente se as coordenadas $(N_0(p), \dots, N_{n-1}(p))$ e $(N_1(p), \dots, N_n(p))$ são linearmente dependentes, isto é $\lambda(N_0(p), \dots, N_{n-1}(p)) + \mu(N_1(p), \dots, N_n(p)) = 0$ para algum $(\lambda, \mu) \neq 0$. Assim $\lambda N_j(p) + \mu N_{j+1}(p) = 0$ para $j = 0, \dots, n-1$ como $B = (b_{ij})_{0\leq i,j\leq n-1}$ é invertível, isso equivale a que $\sum_{j=1}^n b_{ij}(\lambda N_{j-1}(p) + \mu N_j(p)) = 0$ para $i = 0, \dots, n-1$, como $\sum_{j=1}^n b_{ij}N_{j-1}(p) = (SB)_{i1}$ e $\sum_{j=1}^n b_{ij}N_j(p) = (SB)_{i2}$; temos que $p \in X$ se somente se $\lambda(SB)_{i1}(p) + \mu(SB)_{i2}(p) = 0$ para $i = 0, \dots, n-1$, o que equivale a que p esteja na variedade determinantal induzida pela matriz SB, que como vimos antes é Y.

Para mostrar a recíproca, seja X uma curva racional normal induzida pela matriz

$$T = \begin{pmatrix} L_1 & \dots & L_n \\ M_1 & \dots & M_n \end{pmatrix}$$

Suponhamos primeiramente que X é a imagem da aplicação de Veronese $\nu\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$. Temos que para cada $(x : y) \in \mathbb{P}^1$ existe um $(\mu : \lambda)$ tal que

$$\lambda(L_1(\nu(x,y)), \dots, L_n(\nu(x,y))) + \mu(M_1(\nu(x,y)), \dots, M_n(\nu(x,y))) = 0 \tag{2.3}$$

$(\mu : \lambda)$ é único, caso contrário como $L_i(\nu(x,y)) = M_i(\nu(x,y)) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$, então os espaços gerados por $L_1, \ldots, L_n$ e $M_1, \ldots, M_n$ são iguais, assim $Z(L_1, \ldots, L_n) \subset X$, o que é absurdo.

Mostremos que $\alpha \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ com $\alpha(x : y) = (\mu : \lambda)$ é um automorfismo de $\mathbb{P}^1$. Para isto primeiro mostraremos que a aplicação $\tau \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$ tal que $\tau(\mu : \lambda) \in Z(\lambda L_1 + \mu M_1, \ldots, \lambda L_n + \mu M_n)$ é projetivamente equivalente à aplicação de Veronese. Sejam $l_1, \ldots, l_n, m_1, \ldots, m_n \in k^{n+1}$ os vetores formados pelos coeficientes das formas lineares $L_1, \ldots, L_n, M_1, \ldots, M_n$; definimos o vetor $v(\mu, \lambda) = (\lambda l_1 + \mu m_1) \times \cdots \times (\lambda l_n + \mu m_n)$ (onde $\times$ é o produto tensorial usual) logo $v(\mu, \lambda)$ é ortogonal a $\lambda l_i + \mu m_i$ para $i = 1, \ldots, n$; o que equivale a que $[v(\mu, \lambda)] \in \mathbb{P}^n$ seja igual a $Z(\lambda L_1 + \mu M_1, \ldots, \lambda L_n + \mu M_n)$; definimos $\tau(\mu, \lambda) = [v(\mu, \lambda)]$. Pela construção de τ vemos que $\tau(\mu, \lambda) = (P_0(\mu, \lambda) : \cdots : P_n(\mu, \lambda))$ com P_i formas de grau n, além disso τ é sobrejetiva em X; pelo que aplicando a Proposição 2.3, τ é projetivamente equivalente á aplicação de Veronese, em particular é um isomorfismo.

Seja $\alpha = \tau^{-1} \circ \nu$, assim α é um automorfismo em $\mathbb{P}^1$, pela Proposição 1.12 este é da forma $\alpha(x : y) = (ax + by : cx + dy)$ com a matriz $A' = \left(\begin{smallmatrix} ab \\ cd \end{smallmatrix}\right)$ invertível, e por (2.3) temos que:

$$(cx + dy)(L_1(\nu(x,y)), \ldots, L_n(\nu(x,y))) + (ax + by)(M_1(\nu(x,y)), \ldots, M_n(\nu(x,y))) = 0$$

isto equivale a que $y(dL_i + bM_i)(\nu(x,y)) = x(-aM_i - cL_i)(\nu(x,y))$ para $i = 1, \ldots, n$ pelo qual para a matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} d & b \\ -c & -a \end{smallmatrix}\right)$ seja

$$AT = \begin{pmatrix} L_1' & \ldots & L_n' \\ M_1' & \ldots & M_n' \end{pmatrix}$$

então

$$YL_i' \circ \nu(X,Y) = XM_i' \circ \nu(X,Y) \text{ para } i = 1, \ldots, n. \tag{2.4}$$

Logo $(0 : \cdots : 0 : 1) \in Z(L_1', \ldots, L_n')$, pelo qual o espaço de formas lineares gerado por $L_1', \ldots, L_n'$ é igual ao espaço gerado por $X_1, \ldots, X_n$ assim tomando $B \in k^{n \times n}$ como a matriz de mudança de base entre $L_1', \ldots, L_n'$ e $X_1, \ldots, X_n$ temos que

$$ATB = \begin{pmatrix} X_0 & \ldots & X_{n-1} \\ N_1 & \ldots & N_n \end{pmatrix}$$

como a igualdade (2.4) se preserva para ATB temos: $YX_{i-1} \circ \nu(X,Y) = XN_i \circ \nu(X,Y)$ para $i = 1, \ldots, n$. Como $X_{i-1} \circ \nu(X,Y) = X^{n-i+1}Y^{i-1}$ e $N_i \circ \nu(X,Y) = X^{n-i}Y^i$ concluímos finalmente $N_i = X_i$, e

$$ATB = \begin{pmatrix} X_0 & \ldots & X_{n-1} \\ X_1 & \ldots & X_n \end{pmatrix}$$

Para o caso geral seja X a variedade determinantal induzida pela matriz

$$T = \begin{pmatrix} L_1 & \ldots & L_n \\ M_1 & \ldots & M_n \end{pmatrix}$$

logo existe uma transformação projetiva $V \colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ tal que $V(X)$ é a imagem da aplicação de Veronese, assim a matriz $T \circ V^{-1}$ é conjugada a uma matriz

$$S = \begin{pmatrix} X_0 & \ldots & X_{n-1} \\ X_1 & \ldots & X_n \end{pmatrix}$$

pelo que vimos acima, finalmente T é conjugada a $S \circ V$ que é uma matriz da forma (2.2) como queríamos. $\square$

2.3 Caracterização com respeito ao grau

Definição 2.14. Definimos o *grau de uma curva* $C \subset \mathbb{P}^n$ como o número máximo de pontos na interseção com um hiperplano que não contenha nenhuma componente da curva, (o fato de que este número é de finito pode-se ver em [Shafarevich, Sec. 3.2.2, p. 172]).

Uma curva $C \subset \mathbb{P}^n$ é dita *não degenerada* se ela não está contida em nenhum hiperplano.

Pela definição observamos que uma curva irredutível de grau menor a n em $\mathbb{P}^n$ é degenerada, pois tomando n pontos distintos da curva existe um hiperplano que passa por eles logo como o número de pontos na interseção da curva com esse hiperplano é maior ao grau então a curva toda está contida nesse hiperplano.

Também é certo que uma curva racional normal $C \subset \mathbb{P}^n$ tem grau n: podemos supor sem perda de generalidade que C passa pelos pontos fundamentais. $C \cap Z(X_n)$ contém n pontos e logo grau$(C) \geq n$. Por outro lado dado uma hiperplano H os pontos de $H \cap C$ estão em posição geral pela Proposição 2.2, pelo que o número de pontos na interseção é menor ou igual do que n, assim o grau é n.

Agora vamos ver a recíproca da afirmação anterior, é dizer que mostraremos que toda curva não degenerada de grau n em $\mathbb{P}^n$ é uma curva racional normal, fazendo destas as curvas de grau mínimo. Antes, um resultado auxiliar.

Lema 2.15. *Uma curva racional não degenerada em $\mathbb{P}^n$ de grau n é racional normal.*

Demonstração. Seja X a curva racional, assim um aberto de X está parametrizado por uma função da forma $f(X : Y) = (P_0(X_0, X_1) : \cdots : P_n(X_0, X_1))$ com P_i polinômios homogêneos do mesmo grau, podemos supor que esses polinômios não tem zeros comuns. Como X é um fechado projetivo, f é um morfismo dominante entre $\mathbb{P}^1$ e X. Sabemos que essa curva tem n pontos de interseção com um hiperplano $H = Z(a_0X_0 + \cdots + a_nX_n)$, assim o polinômio $a_0P_0(X_0, X_1) + \cdots + a_nP_n(X_0, X_1)$ se anula em n pontos de $\mathbb{P}^1$ e isso implica que todos os P_i tem grau n.

Como X é não degenerada, tomemos n pontos de $X \cap H$, e provemos que esses n pontos estão em posição geral. Se esses n pontos estiverem contidos em um plano $n-2$ dimensional L, então tomando qualquer outro ponto $p_0 \in X$, para H' o plano formado por L e p_0 temos que $H' \cap X$ consiste em mais de n pontos, o que contradiz que a curva seja de grau n. Se tomamos qualquer outro ponto em X, como este não está em H concluímos que X contém $n+1$ pontos em posição geral. Assim f cumpre as condições da Proposição 2.3, logo X é uma curva racional normal. $\square$

Agora passamos a mostrar que estas curvas são as grau mínimo.

Proposição 2.16. *Toda curva não degenerada e irredutível de grau n em $\mathbb{P}^n$ é uma curva racional normal.*

Demonstração. Seja H um hiperplano que intercepte a curva X em n pontos, digamos $p_1, \dots, p_n$. Pelo raciocínio que fizemos no Lema 2.15 estes pontos estão em posição geral. Logo podemos supor sem perda de generalidade que estes pontos são os n últimos pontos fundamentais, contidos em $H = Z(X_0)$, seja $X' = X \backslash Z(X_0)$ como $k(X)$ esta gerado sobre k por $x_1, \dots, x_n$, pelo Lema 1.24, existe x_i tal que $k(X)$ é separável sobre $k(x_i)$, suponhamos sem perda de generalidade que $i = 1$. Seja L o plano $n-2$ dimensional formado por $p_2, \dots, p_n$. Identificamos $\mathbb{P}^1$ com $Z(X_2, \dots, X_n)$. Considere a projeção $\pi_L \colon \mathbb{P}^n \setminus L \to \mathbb{P}^1$ com centro em L, dada por $\pi_L(x_0 : \dots : x_n) = (x_0 : x_1)$. Restringimos esta projeção a X', assim $\pi_L|_{X'}$ é uma aplicação regular. Mais ainda, temos que $\pi_L|_{X'}$ também é injetiva, pois se $\pi_L(x) = \pi_L(y) = a$, com $x, y \in X'$ então para H_a o plano gerado por L e a, $H_a \cap X$ está formado por x, y e $p_0, \dots, p_{n-1}$ logo como a interseção $H_a \cap L$ consiste em menos de $n+1$ pontos e $x, y \notin Z(X_0)$, então $x = y$. Além disso, notamos que $\pi_L^*|_{X'}(T) = x_1$ assim a extensão $k(X)|\pi_L^*|_{X'}(k(T))$ é separável. Como a fibra geral da aplicação tem 1 elemento então pelo Lema 1.23 X é racional e pelo Lema 2.15, X é uma curva racional normal. □

Outras propriedades que caracterizam as curvas racionais normais podem ser encontradas em [Miranda, Seção 4.4, p. 233]. Uma caracterização de superfícies de grau mínimo em dimensão qualquer pode-se ver em [Griffiths e Harris, Seção 4.3, p. 522].

2.4 Espaços de parâmetros e aplicações

Começamos esta seção construindo um espaço de parâmetros das curvas racionais normais em $\mathbb{P}^n$ e calculando sua dimensão. Seja $\mathcal{G}$ a Grassmanniana $\mathbb{G}_{\binom{n}{2}-1, \binom{n+2}{2}-1}$ dos planos de codimensão $2n-1$ em $\mathbb{P}(k[X_0, \dots, X_n]_2)$, seja $\phi \colon \mathrm{PGL}_n \to \mathcal{G}$ dada por

$$\phi(T) = F_1 \circ T^{-1} \wedge \dots \wedge F_{\binom{n}{2}} \circ T^{-1} \tag{2.5}$$

onde $F_1, \dots, F_{\binom{n}{2}}$ são os menores 2×2 da matriz

$$\begin{pmatrix} X_0 & X_1 & \cdots & X_{n-1} \\ X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{pmatrix}$$

Notemos que $Z(\phi(T)) \subset \mathbb{P}^n$ é uma curva racional normal; mais ainda, toda curva racional normal C está associada via $I_2(C)$ a um único plano da imagem de ϕ. Assim $\mathcal{H} = \phi(\mathrm{PGL}_n)$ é um espaço de parâmetros das curvas racionais normais em $\mathbb{P}^n$.

Proposição 2.17. *$\mathcal{H}$ é quase-projetiva, irredutível e de dimensão $(n+3)(n-1)$.*

Demonstração. Para mostrar que $\mathcal{H}$ é quase-projetiva considere a relação de incidência

$$\Sigma = \{(T, \langle H \rangle) \in \mathbb{P}^N \times \mathcal{G} \mid F \circ T \circ \nu = 0, \forall F \in H\}$$

onde ν é a aplicação de Veronese e $\mathbb{P}^N$ denota o espaço projetivo das matrizes $n+1 \times n+1$ $(N = n^2 + 2n)$. Não é difícil mostrar que Σ é um fechado projetivo, pois as coordenadas de Plücker de H vão determinar os polinômios lineares que definem H; logo para cada matriz $T \in \mathbb{P}^N$, $(T \circ \nu)^*$ vai determinar uma transformação linear de $k[X_0, \dots, X_n]_2$ a $k[X_0, X_1]_n$

pelo que somente tem-se que pedir que os polinômios que definem esta transformação sejam combinação linear dos polinômios que definem H, e é claro que esta propriedade é algébrica.

Agora notemos que se T é não singular e $(T, \langle H\rangle) \in \Sigma$ então $H \in \mathcal{H}$ pois para $C = T \circ \nu(\mathbb{P}^1)$, $C \subset Z(H)$ logo $H \subset I(C)_2$ e como os dois espaços tem dimensões iguais $H = I(C)_2$ assim $H \in \mathcal{H}$; também se cumpre a recíproca pois se $H \in \mathcal{H}$ então $Z(H)$ é uma curva racional normal, em particular se T é singular $C = T \circ \nu(\mathbb{P}^1)$ é degenerada logo $C \not\subset Z(H)$ assim $(T, \langle H\rangle) \notin \mathcal{H}$. Pela discussão anterior temos que $\mathcal{H} = \pi_2(\Sigma) \setminus \pi_2(\Sigma \cap (S \times \mathcal{G}))$ onde S é o conjunto de matrizes singulares, logo $\mathcal{H}$ é um conjunto quase-projetivo.

Calculemos a dimensão de $\mathcal{H}$. Primeiramente, como $\mathcal{H}$ é imagem de um conjunto irredutível então $\mathcal{H}$ é irredutível. Para ϕ a função definida acima, fixamos h um plano de $\mathcal{H}$, mostramos que $\dim(\phi^{-1}(h)) = 3$. Seja C a curva racional normal induzida por h, podemos supor sem perda de generalidade que C é a imagem da aplicação de Veronese. Como $\mathbb{P}^n \simeq \mathbb{P}(k[X,Y]_n)$ (onde $k[X,Y]_n$ é o espaço de formas de grau n em duas variáveis), podemos definir $\alpha\colon \mathrm{PGL}_2 \to \phi^{-1}(h)$ dada por $\alpha(S) = T$ donde T é a transformação projetiva cuja regra de correspondência é $T(F) = F \circ S$. Observamos que uma transformação desse tipo preserva C logo α é um morfismo entre PGL_2 e $\phi^{-1}(h)$, cujas fibras de α são finitas, assim $\dim(\phi^{-1}(h)) \geq 3$. Por outro lado como $\phi^{-1}(h)$ está mergulhado no conjunto de isomorfismos de C que é isomorfo a PGL_2 (pois C é isomorfo a $\mathbb{P}^1$) $\dim(\phi^{-1}(h)) = 3$. Finalmente, aplicando o teorema de dimensão das fibras ao mapa ϕ, obtemos

$$\dim(\mathcal{H}) = (n+1)^2 - 3 = (n+3)(n-1). \qquad \square$$

Uma aplicação interessante do resultado anterior é determinar as hipersuperfícies que contém uma curva racional normal; para isto construímos o conjunto

$$\Lambda = \{(T, F) \in \mathrm{PGL}_n \times \mathbb{P}^N \mid F \circ T \circ \nu = 0\}$$

onde $\mathbb{P}^N$ é o espaço de hipersuperfícies de grau d em $\mathbb{P}^n$ ($N = \binom{n+d}{d} - 1$).

Lema 2.18. *Λ é uma variedade projetiva irredutível, cuja dimensão é $N + n^2 + 2n - dn - 1$.*

Demonstração. Claramente Λ é um conjunto fechado de $\mathrm{PGL}_n \times \mathbb{P}^N$. Provemos que Λ é irredutível: para a primeira projeção $\pi_1\colon \Lambda \to \mathrm{PGL}_n$ tem-se que fixando uma matriz T, $T \circ \nu$ induz uma aplicação linear sobrejetiva de $k[X_0, \ldots, X_n]_d$ a $k[X_1, X_2]_{dn}$ (onde $k[X_0, \ldots, X_n]_d$ é o espaço de polinômios homogêneos de grau d) pelo qual $\pi_1^{-1}(T)$ é o espaço de formas de grau d no núcleo dessa aplicação logo todas as fibras são planos de dimensão $N - nd - 1$, e são irredutíveis; como o segundo fator de $\mathrm{PGL}_n \times \mathbb{P}^N$ é um espaço projetivo, a primeira projeção é um morfismo fechado, e concluímos pela Proposição 1.16 que Λ é irredutível. Pelo teorema de dimensão das fibras, Λ tem a dimensão da imagem mais a dimensão da fibra genérica e assim $\dim(\Lambda) = N + n^2 + 2n - nd - 1$. $\square$

Proposição 2.19. *Para $nd + 1 > (n+3)(n-1)$ uma hipersuperfície genérica de grau d não contém curvas racionais normais.*

Demonstração. Seja

$$\Delta = \{(\langle C\rangle, F) \in \mathcal{H} \times \mathbb{P}^N \mid C \subset F\}$$

Considere o mapa $\psi\colon \Lambda \to \Delta$ dado por $\psi(T,F) = (\phi(T),F)$ onde ϕ é como acima. Observamos que $\psi^{-1}(\langle C\rangle, F) = \phi^{-1}(\langle C\rangle) \times \{F\}$ logo todas as fibras têm dimensão 3; além disso ψ é sobrejetiva e como Λ é irredutível, Δ é irredutível. Do teorema de dimensão das fibras segue que $\overline{\Delta}$ tem dimensão $\dim(\Lambda) - 3 = N - (n+3)(n-1) - nd - 1$.

Daí a imagem da segunda projeção $\pi_2\colon \Delta \to \mathbb{P}^N$ terá dimensão no máximo $N - (n+3)(n-1) - nd - 1$, e se $nd + 1 > (n+3)(n-1)$ esta projeção não é dominante, donde se deduz o resultado. $\square$

Em particular, uma superfície genérica em $\mathbb{P}^3$ de grau $d > 4$ não contém curvas racionais normais.

Para o caso $n = d = 3$ pode-se ver que a projeção π_2 é um mapa dominante. Com efeito, tomando a segunda projeção $\pi_2\colon \Lambda \to \mathbb{P}^N$ temos pelo teorema de dimensão das fibras que fixado $F \in \mathbb{P}^N$, tem-se que $\dim(\overline{\pi_2(\Lambda)}) \geq \dim(\Lambda) - \dim(\pi_2^{-1}(F))$. Daí para mostrar que π_2 é dominante basta mostrar que existe uma forma $F \in \mathbb{P}^N$ tal que $\dim(\Lambda) - \dim(\pi_2^{-1}(F)) \geq \dim(\mathbb{P}^N)$, isto é que $\dim(\pi_2^{-1}(F)) \leq \dim(\Lambda) - N = n^2 + 2n - nd - 1 = 5$. Seja $F = X^3 - WYZ$ e considere a curva parametrizada por $\sigma : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ dada por

$$\sigma(X:Y) = (XY(X+Y) : X^2Y : X(X+Y)^2 : Y^2(X+Y))$$

É fácil ver que esta é uma curva racional normal e que está contida na superfície definida por F, assim $\pi_2^{-1}(F) \neq \emptyset$. Para calcular a fibra de F observemos que se $F \circ T \circ \nu = 0$, então para $T \circ \nu = [P_1, P_2, P_3, P_4]$ (com P_i polinômios cúbicos homogêneos em duas variáveis), tem-se que $P_1^3 = P_2P_3P_4$, logo as raízes de P_2, P_3, P_4 estão determinadas pelo polinômio P_1. Seja a função $\xi_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}\colon \mathbb{A}^3 \times (A \setminus \{0\})^2 \to \mathbb{P}^{n^2+2n}$, dada por

$$\begin{aligned}
\xi_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(x_1,x_2,x_3,\lambda,\mu) = ((X - x_1Y)&(X - x_2Y)(X - x_3Y)\\
&: \frac{1}{\mu\lambda}(X - x_{\alpha_1(1)}Y)(X - x_{\alpha_1(2)}Y)(X - x_{\alpha_1(3)}Y)\\
&: \mu(X - x_{\alpha_2(1)}Y)(X - x_{\alpha_2(2)}Y)(X - x_{\alpha_2(3)}Y)\\
&: \lambda(X - x_{\alpha_2(1)}Y)(X - x_{\alpha_2(2)}Y)(X - x_{\alpha_2(3)}Y))
\end{aligned}$$

onde $\alpha_i\colon \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$. Logo vemos que $\pi_2^{-1}(F)$ pode ser coberta com imagens de funções de este tipo. Como estas são imagens de conjuntos de dimensão 5, então $\pi_2^{-1}(F)$ tem dimensão menor do que 5, logo π_2 é dominante. Assim concluímos:

Proposição 2.20. *Uma superfície cúbica geral em $\mathbb{P}^3$ contém uma curva racional normal.*

Varias conseqüências se podem deduzir deste resultado, como:

Corolário 2.21. *Para um polinômio irredutível genérico F de grau 3, o anel $k[X,Y,Z,W]/(F)$ não é um domínio fatorial.*

Demonstração. Para F um polinômio irredutível genérico tal que $Z(F)$ contenha uma curva racional normal C, tem-se que se $k[X,Y,Z,W]/(F)$ fosse um domínio fatorial, todos os ideais de altura 1 seriam principais (veja [Matsumura, Thm. 20.1, p. 161]), logo para C tem-se que $I(C)/(F)$ é um ideal de altura 1 de $k[X,Y,Z,W]/(F)$; mas se este ideal fosse gerado por um elemento G então teríamos que $I(C)$ é gerado por F e G, o que é uma contradição pois $I(C)$ não é de interseção completa. $\square$

Apresentamos outra interessante aplicação da Proposição 2.20. Recorde que uma variedade algébrica de dimensão n é dita *racional* se é birracionalmente equivalente a $\mathbb{P}^n$.

Teorema 2.22. *Em característica zero, uma superfície cúbica genérica contida em $\mathbb{P}^3$ é racional.*

Para mostrar este resultado, precisaremos do seguinte lema:

Lema 2.23. *Seja $C \subset \mathbb{P}^3$ uma cúbica torcida. Então a interseção dos zeros de duas formas de grau 2 linearmente independentes em $I(C)$ é C unida a uma reta secante ou tangente de C.*

Demonstração. Podemos supor sem perda de generalidade que C é a imagem pela aplicação de Veronese. Considere a forma:

$$G_{a,b,c} = aF_1 + bF_2 + cF_3$$

onde F_1, F_2, F_3 são os menores da matriz

$$\begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Y & Z & W \end{pmatrix}.$$

Note que

$$G_{a,b,c} = \det \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Y & Z & W \\ a & -b & c \end{pmatrix}.$$

Assim para (a,b,c) e (a',b',c') linearmente independentes $(x:y:z:w) \in Z(G_{a,b,c}, G_{a',b',c'})$ se somente se $(x:y:z:w) \in C$ ou se $(a,-b,c), (a',-b',c') \in \langle (x,y,z), (y,z,w) \rangle$. Como estes vetores são linearmente independentes então (x,y,z) e (y,z,w) são combinação linear de $(a,-b,c), (a',-b',c')$, assim para (r,s,t) um vetor perpendicular a $(a,-b,c), (a',-b',c')$. Tem-se que (x,y,z,w) esta contido na reta definida pelas equações $rY + sZ + tW$ e $rX + sY + tZ$; além disso se $rY^2 + sYX + tX^2 = (\alpha Y - \beta X)(\alpha' Y - \beta' X)$ então as coordenadas $\nu(\beta : \alpha), \nu(\beta' : \alpha')$ estão em L, logo L é uma secante ou uma tangente de C. □

Demonstração do Teorema 2.22. Seja S nossa cúbica, pela Proposição 1.17 podemos pedir que S só contenha um número finito de retas, logo S é irredutível. Seja $C \subset S$ uma curva racional normal e F_1, F_2, F_3 formas geradoras de $I(C)_2$. Tome $\psi \colon S \setminus C \to \mathbb{P}^2$ dado por

$$\psi(x:y:z:w) = (F_1(x:y:z:w) : F_2(x:y:z:w) : F_3(x:y:z:w)).$$

Mostremos que este mapa é genericamente injetivo. Escolha p tal que não esteja em nenhuma das retas contidas em S, e que tampouco esteja em $\mathrm{Tan}(C)$ (como $\mathrm{Tan}(C)$ contém infinitas retas, e por (2.1) temos que $\dim \mathrm{Tan}(C) = 2$ e logo $S \not\subset \mathrm{Tan}(C)$). Então se $\psi(p) = q \in \mathbb{P}^2$, sejam $L_1 = aX + bY + c$, $L_2 = a'X + b'Y + c'Z$ as retas que definem q. Assim:

$$aF_1(p) + bF_2(p) + cF_3(p) = 0$$
$$a'F_1(p) + b'F_2(p) + c'F_3(p) = 0$$

e pelo Lema 2.23 a interseção destas duas hipersuperfícies define uma reta L unida com a curva racional normal C. Como esta reta não pode ser tangente a C (pois contém pontos fora de $\mathrm{Tan}(C)$) então é uma reta secante de C. Logo p só pode pertencer ao conjunto $L \setminus C$. Como L não está contida em S então L corta S em três pontos, dois dos quais estão em C segue que p só pode ser o terceiro ponto.

Como S é irredutível, aplicando o teorema da dimensão das fibras tem-se que ψ é dominante. Finalmente, a extensão de corpos induzida por ψ é algébrica pois ambas variedades tem a mesma dimensão e é sepáravel pois k tem característica zero. Concluímos pelo Corolário 1.23 que ψ é um mapa birracional. □

Capítulo 3

Configurações Geométricas

Neste Capítulo vamos expôr os resultados centrais deste trabalho, a saber, uma generalização do Teorema de Veronese (Teorema 2.4). Aqui, buscamos que condições para a existência de uma curva racional normal intersectando uma dada configuração de subespaços lineares em um número máximo de pontos. Nossos resultados se baseiam no artigo de Carlini e Catalisano [CC02].

Na primeira seção apresentamos a definição de configuração factível e de vetor de pesos factível. Mostraremos algumas condições suficientes para garantir que certos vetores de pesos são factíveis. Na segunda seção falaremos do espaço de parâmetros das configurações factíveis. Utilizando resultados acerca do espaço de parâmetros mostraremos que a quantidade de vetores de pesos factíveis em $\mathbb{P}^n$ é finita. Também daremos uma condição suficiente que vai caracterizar quando um certo tipo de vetor de pesos é factível. Na terceira seção mostraremos alguns exemplos de vetores de pesos factíveis e comentaremos alguns resultados interessantes acerca deste tema.

3.1 Configurações factíveis

Definição 3.1. Dizemos que uma $(n-1)$-upla de números inteiros não negativos $L = (l_0, \ldots, l_{n-2})$ é um *vetor de pesos* em $\mathbb{P}^n$. Um fechado

$$\Lambda_L = \Lambda_1^{(0)} \cup \cdots \cup \Lambda_{l_0}^{(0)} \cup \cdots \cup \Lambda_1^{(n-2)} \cup \cdots \cup \Lambda_{l_{n-2}}^{(n-2)}$$

onde $\Lambda_i^{(j)}$ é um plano j-dimensional em $\mathbb{P}^n$, é chamada uma *configuração de peso* L. Dizemos que Λ_L é *factível* ou *realizável* se existe uma curva racional normal $C \subset \mathbb{P}^n$ que intersecta cada plano i dimensional que seja componente de Λ_L em $i+1$ pontos (aqui não estamos contando os pontos com multiplicidade de interseção; pedimos apenas que sejam $i+1$ pontos distintos). Dizemos que o vetor de pesos L *é factível* se existe um aberto U do produto das Grassmannianas $(\mathbb{G}_{0,n})^{l_0} \times \cdots \times (\mathbb{G}_{n-2,n})^{l_{n-2}}$ tal que para todo $(\Lambda_1^{(0)}, \ldots, \Lambda_{l_{n-2}}^{(n-2)}) \in U$ a configuração de peso L formada por esses espaços seja factível.

Por exemplo, o Teorema 2.4 nos diz que o vetor de pesos $(p, 0, \ldots, 0)$ é factível sempre que p seja menor a $n+3$. Comecemos estudando um caso simples:

Proposição 3.2. *Um vetor de pesos $(l_0, \ldots, l_{n-2})$ com $\sum_i (i+1) l_i \leq n+3$ é factível.*

Demonstração. Sejam $s = \sum(i+1)l_i$ e $U \subset (\mathbb{P}^n)^s$ o aberto formado pelas s-uplas de pontos de $\mathbb{P}^n$ em posição geral. Seja o mapa $f\colon U \to (\mathbb{G}_{0,n})^{l_0} \times \cdots \times (\mathbb{G}_{n-2,n})^{l_{n-2}}$ dado por

$$f(\dots[(p_{0,1}^{(i)},\dots,p_{i,1}^{(i)}),\dots,(p_{0,l_i}^{(i)},\dots,p_{i,l_i}^{(i)})]\dots) = \\ (\dots[p_{0,1}^{(i)} \wedge \cdots \wedge p_{i,1}^{(i)},\dots,p_{0,l_i}^{(i)} \wedge \cdots \wedge p_{i,l_i}^{(i)}],\dots)$$

A imagem deste mapa contém um aberto denso no contradomínio. Dada uma coleção de pontos $p_1,\dots,p_s \in U$ e uma curva racional normal que passa por esses pontos, essa curva intersecta cada plano i-dimensional da configuração induzida por $f(p_1,\dots,p_s)$ em $i+1$ pontos. Logo $f(p_1,\dots,p_s)$ é factível e portanto L é factível. □

Mais adiante veremos que o vetor $L = (5,1,1)$ em $\mathbb{P}^5$ é factível mas é claro que esse vetor não cumpre a hipótese da Proposição 3.2. Ou seja, essa condição é suficiente mas não necessária. De fato o problema de caracterizar todas as configurações factíveis parece intratável. Naturalmente, passamos a tratar configurações mais simples porém interessantes.

Notação 3.3. Fixemos uma notação para o restante desta seção. Sejam $n_1 \leq \cdots \leq n_r$ inteiros positivos e tome $n = n_1 + \cdots + n_r$. Sejam

$$S = \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r}$$

e $i\colon S \to \mathbf{S} \subset \mathbb{P}^N$ o mergulho de Segre onde $\mathbf{S} = i(S)$ e $N = (n_1+1)\cdots(n_r+1)-1$.

Consideramos também o mapa $\phi\colon S \to \mathbb{P}^n$ definido como se segue: dado um ponto $Q = (x_0^{(1)} : \cdots : x_{n_1}^{(1)}),\dots,(x_0^{(r)} : \cdots : x_{n_r}^{(r)}) \in \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r}$ então

$$\begin{aligned}\phi(Q) = (x_0^{(1)}x_0^{(2)}\dots x_0^{(r)} \quad & : x_1^{(1)}x_0^{(2)}\dots x_0^{(r)} : \cdots : x_{n_1}^{(1)}x_0^{(2)}\dots x_0^{(r)} \\ & : x_0^{(1)}x_1^{(2)}\dots x_0^{(r)} : \cdots : x_0^{(1)}x_{n_2}^{(2)}\dots x_0^{(r)} \\ & \vdots \\ & : x_0^{(1)}x_0^{(2)}\dots x_1^{(r)} : \cdots : x_0^{(1)}x_0^{(2)}\dots x_{n_r}^{(r)})\end{aligned}.$$

Seja $\pi_i\colon S \to \mathbb{P}^{n_i}$ a i-ésima projeção. Dados os hiperplanos $H_i = Z(X_0^{(i)}) \subset \mathbb{P}^{n_i}$, denotamos $\Delta_i = \phi(\pi_i^{-1}(H_i))$. Por fim, definimos

$$B = \bigcup_{1 \leq i < j \leq r} \pi_i^{-1}(H_i) \cap \pi_j^{-1}(H_j).$$

Mantenha a notação acima e seja s um inteiro positivo. Perguntamos: quando existe um aberto denso $U \subset (\mathbb{G}_{0,n})^s \times \mathbb{G}_{n_1-1,n} \times \cdots \times \mathbb{G}_{n_r-1,n}$ tal que pontos $(p_1,\dots,p_s,\Lambda_1,\dots,\Lambda_r) \in U$ a configuração induzida pela união de suas coordenadas seja factível? No que se segue, apresentaremos uma condição para a realização de tais configurações.

Proposição 3.4. *Mantenha a notação acima. Então:*

(a) O mapa ϕ é birracional e seu lugar de indeterminação é o conjunto B.

(b) Δ_i é um plano de dimensão $n_i - 1$ em $\mathbb{P}^n$.

(c) *Existe um subespaço linear $\Sigma \subset \mathbb{P}^n$ de dimensão $N-n$ tal que se π_Σ é a projeção com centro em Σ, então $\phi = \pi_\Sigma \circ i$ e $i(B) = \Sigma \cap \mathbf{S}$.*

Demonstração.
(a) Seja $Q = (x_0^{(1)} : \cdots : x_{n_1}^{(1)}), \ldots, (x_0^{(r)} : \cdots : x_{n_r}^{(r)}) \in B$. Então $x_0^{(i)} = x_0^{(j)} = 0$ para algum $i \neq j$, logo ϕ não está definida em Q.

Se $Q \notin B$, então raciocinamos por casos: se $x_0^{(i)} \neq 0$ para $i = 1, \ldots, r$ então podemos assumir que $x_0^{(i)} = 1$ e daí

$$\phi(Q) = (1 : x_1^{(1)} : \cdots : x_{n_1}^{(1)} : \cdots : x_1^{(r)} : \cdots : x_{n_r}^{(r)}).$$

Além disso podemos definir a função $\phi^{-1}\colon \mathbb{P}^n \setminus Z(X_0) \to S$ dada por $\phi^{-1}(1 : x_1^{(1)} : \cdots : x_{n_1}^{(1)} : \cdots : x_1^{(r)} : \cdots : x_{n_r}^{(r)}) = (1 : x_1^{(1)} : \cdots : x_{n_1}^{(1)}), \ldots, (1 : x_1^{(r)} : \cdots : x_{n_r}^{(r)})$, ϕ^{-1} é claramente a inversa de ϕ no aberto que estamos considerando, e portanto ϕ é birracional. Para o outro caso, se $x_0^{(i)} = 0$, como $Q \notin B$ podemos supor que $x_0^{(j)} = 1$ para $j \neq i$ logo $\phi(Q) = (0 : \cdots : 0 : x_1^{(i)} : \cdots : x_{n_i}^{(i)} : 0 : \cdots : 0)$ que está bem definido pois $(0, x_1^{(i)}, \ldots, x_{n_i}^{(i)}) \neq 0$.

(b) Denote um ponto de $\mathbb{P}^n$ por $(x_0^1 : \cdots : x_{n_1}^1 : x_1^2 : \cdots : x_{n_2}^2 : \cdots : x_1^r : \cdots : x_{n_r}^r)$. Então $\phi(\pi_i^{-1}(H) \setminus B) = Z(\{X_k^{(j)} \mid k = 1, \ldots, n_j, j \neq i\}) = \Delta_i$ e este é um plano $n_i - 1$ dimensional.

(c) Seja $i\colon S \to \mathbf{S}$ a inclusão de Segre. Então

$$i(x_0^{(1)} : \cdots : x_{n_1}^{(1)}), \ldots, (x_0^{(r)} : \cdots : x_{n_r}^{(r)}) = (\cdots : x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \ldots x_{i_r}^{(r)} : \ldots)_{1 \leq i_k \leq n_k}$$

logo para $\Sigma = Z(X_{0,\ldots,0}, X_{1,0,\ldots,0}, \ldots, X_{n_1,\ldots,0}, \ldots, X_{0,\ldots,1} \ldots, X_{0,\ldots,n_r})$ e $\widetilde{\Sigma} \simeq \mathbb{P}^n$.Onde $\widetilde{\Sigma}$ é o plano gerado por $e_{0,\ldots,0}, e_{1,0,\ldots,0}, \ldots, e_{n_1,0,\ldots,0}, \ldots, e_{0,\ldots,n_r}$ ($e_{i_1,\ldots,i_r}$ são os pontos fundamentais de $\mathbb{P}^N$). Para $\pi_\Sigma\colon \mathbf{S} \to \widetilde{\Sigma}$, temos

$$\pi_\Sigma(\cdots : x_{i_1,\ldots,i_r} : \ldots)_{1 \leq i_k \leq n_k} = (x_{0,\ldots,0} : x_{1,0,\ldots,0} : \cdots : x_{n_1,\ldots,0} : \cdots : x_{0,\ldots,1} : \cdots : x_{0,\ldots,n_r})$$

e da definição de ϕ, concluímos $\phi = \pi_\Sigma \circ i$. $\square$

Definimos $U_{n,k} \subset (\mathbb{A}^{n+1})^k$ como o conjunto de k-uplas de vetores de $\mathbb{A}^{n+1}$ tais que os pontos de $\mathbb{P}^n$ gerados por estes vetores estejam em posição geral. Este conjunto é um aberto denso em $(\mathbb{A}^{n+1})^k$.

Lema 3.5. *Existe uma função polinomial $T\colon (U_{n,n+2})^2 \to \mathrm{GL}_{n+1}$ tal que*

$$T(v_0, \ldots, v_{n+2})(u_0, \ldots, u_{n+2}) = S$$

onde $S(u_i) = \lambda_i v_i$ para algum $\lambda_i \neq 0$.

Demonstração. Primeiramente seja $\operatorname{inv}\colon \mathrm{GL}_{n+1} \to \mathrm{GL}_{n+1}$ dado por $\operatorname{inv}(A) = \det(A)A^{-1}$ vemos que todas as coordenadas de $\operatorname{inv}(a_{ij})$ são polinômios variando nos a_{ij}, logo inv é polinomial.

Dados $v \in \mathbb{A}^{n+1}$ e a matriz $M \in \mathrm{GL}_{n+1}$, escrevemos a multiplicação usual de matrizes $Mv = ((Mv)_0, \dots, (Mv)_n)$, onde cada $(Mv)_i$ é a i-ésima coordenada de Mv. Para $Q = (v_0, \dots, v_{n+1}) \in U_{n,n+2}$, seja $A(Q)$ a matriz formada pelos $n + 1$ primeiros vetores de Q, e seja $A^{-1}(Q) = \operatorname{inv}A(Q)$. Definimos $f\colon U_{n,n+2} \to \mathrm{GL}_{n+1}$ por $f(Q) = ((A^{-1}(Q)v_{n+1})_0 v_0, \dots, (A^{-1}(Q)(v_{n+1}))_n v_n)$. Então $f(Q)e_i = (A^{-1}(Q)v_{n+1})_i v_i$ (onde e_i é o $i-$ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{A}^n$, e chamamos $e_{n+1} = (1, \dots, 1)$). Como os v_i são tomados em posição geral $(A^{-1}(Q)v_{n+1})_i \neq 0$, além disso

$$f(Q)e_{n+1} = A(Q)A^{-1}(Q)(v_{n+1}) = \det(v_0, \dots, v_n)v_{n+1}.$$

Portanto f cumpre as condições requeridas para os vetores $(v_0, \dots, v_{n+1})$ e $(e_0, \dots, e_n, e_{n+1})$.

Para $(Q, Q') = (v_0, \dots, v_n)(u_0, \dots, u_n)$ seja $T(Q, Q') = f(Q)\operatorname{inv}(f(Q'))$, temos que $T(Q, Q')u_i = f(Q)\operatorname{inv}(f(Q'))u_i = f(Q)\lambda_i e_i = \lambda'_i v_i$, além disso pela construção de T é claro que todas as funções coordenadas de T são polinomiais, logo T cumpre as condições pedidas. □

Lema 3.6. *Mantenha a notação de 3.3. Se em $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r}$ temos uma aplicação $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ tal que cada α_i parametrize uma curva racional normal em $\mathbb{P}^{n_i}$, e escrevendo $\alpha_i = (F_0^{(i)}, \dots, F_{n_i}^{(i)})$ com $F_j^{(i)}$ polinômios de grau n_i se tenha que $F = F_0^{(1)} \cdots F_0^{(r)}$ seja livre de quadrados, então a composição $\phi \circ \alpha$ parametriza uma curva racional normal em $\mathbb{P}^n$ cuja interseção com Δ_i consiste em n_i pontos distintos.*

Demonstração. Temos que $\gamma = \phi \circ \alpha$, γ escreve-se como polinômios de grau n. Como F é livre de quadrados, não existe P tal que $F_0^{(i)}(P) = F_0^{(j)}(P) = 0$ para $i \neq j$ logo $\alpha(P) \notin B$ para todo $P \in \mathbb{P}^1$; assim γ está definido em todo $\mathbb{P}^1$. Note que $\gamma(P) \in \Delta_i$ se e só se $F_0^{(i)}(P) = 0$ e que para cada i existem $P_1^{(i)}, \dots, P_{n_i}^{(i)}$ raízes distintas de $F_0^{(i)}$. Tomando P_0 tal que $F(P_0) \neq 0$ temos que $\gamma(P_0), \gamma(P_1^{(1)}), \dots, \gamma(P_{n_1}^{(1)}),\ \dots, \gamma(P_1^{(r)}), \dots, \gamma(P_{n_r}^{(r)})$ são $n+1$ pontos em posição geral, logo pela Proposição 2.3, γ parametriza uma curva racional normal. □

Lema 3.7. *Existe uma curva $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r}$ tal que, com a notação do lema anterior, $F = F_0^{(1)} \cdots F_0^{(r)}$ é livre de quadrados.*

Demonstração. Para começar, afirmamos que dados $\{P_1, \dots, P_r\}$ e $\{Q_1, \dots, Q_s\}$ dois conjuntos de r e s pontos distintos de $\mathbb{P}^1$, existe uma transformação projetiva $\sigma\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ tal que $P_1, \dots, P_r, \sigma(Q_1), \dots, \sigma(Q_s)$ são $r + s$ pontos distintos. Com efeito, o conjunto de transformações projetivas que mandam Q_j a P_i, é um fechado próprio de PGL_2, como PGL_2 é irredutível, a união destes conjuntos não pode ser todo PGL_2. Portanto existe uma aplicação projetiva σ com as propriedades pedidas.

Seja α'_i uma aplicação que parametrize uma curva racional normal em $\mathbb{P}^{n_i}$ e que intercepte a $H_i = Z(X_0^{(i)})$ em $P_1^{(i)}, \dots, P_{n_i}^{(i)}$, pelo argumento anterior, existe $\sigma_1, \dots, \sigma_r\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ tais que o os elementos $\sigma_j(P_i^{(j)})$ são todos distintos. Definimos $\alpha_i = \alpha'_i \circ \sigma^{-1}$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. Assim α tem que o polinômio F definido como no Lema 3.6, só vai-se anular nos pontos da forma $\sigma_i(P_j^{(i)})$, pelo que F tem n raízes distintas e é livre de quadrados. □

Teorema 3.8. *Sejam $s, n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_r$ inteiros positivos. Se alguma das condições abaixo são satisfeitas:*

- $s \leq n_1 + 3$ *e* $1 < n_1 < n_2$
- $s \leq n_2 + 2$ *e* $n_1 = 1$ *ou* $n_1 = n_2$

então existe um aberto $V \subset (\mathbb{P}^n)^s$ tal que para todo $(p_1, \dots, p_s) \in V$ a configuração $\{p_1, \dots, p_s\} \cup \Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_r$ é factível.

Demonstração. Seja $G = \mathrm{GL}_{n_1+1} \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_r+1}$ e considere a aplicação racional $\Theta\colon (\mathbb{P}^1)^s \times G \dashrightarrow (\mathbb{P}^n)^s$ dada por

$$\Theta(P_1, \dots, P_s)(T_1, \dots, T_r) = \\ \phi(T_1 \circ \nu_1(P_1), \dots, T_r \circ \nu_r(P_1)), \dots, \phi(T_1 \circ \nu_1(P_s), \dots, T_r \circ \nu_r(P_s))$$

onde $\nu_i\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^{n_i}$ é a aplicação de Veronese e ϕ é como em 3.3. Seja U o aberto de $(\mathbb{P}^1)^s \times G$ onde Θ está definida. Para $(T_1, \dots, T_r) \in G$ considere $\alpha(T_1, \dots, T_r)\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r}$ dada por $\alpha(T_1, \dots, T_r) = (T_1 \circ \nu_1, \dots, T_r \circ \nu_r)$. Seja $F(\alpha)$ o polinômio definido por α como no Lema 3.6 e seja A o aberto de G consistindo de todas as r-uplas de matrizes tais que $F(\alpha(T_1, \dots, T_r))$ seja livre de quadrados (isto é, que as resultantes nas suas duas variáveis sejam não nulas). Pelo Lema 3.7 este aberto é não vazio e pelo Lema 3.6 toda aplicação da forma $\alpha(T)$ com $T \in A$ é tal que $\phi \circ \alpha(T)$ parametriza uma curva racional normal que intercepta a cada Δ_i em $n_i + 1$ pontos. Tome $V = \Theta((\mathbb{P}^1)^s \times A \cap U)$. Note que dado um ponto $(Q_1, \dots, Q_s)$ em V, existe uma curva da forma $\phi \circ \alpha(T)$ (com $T \in A$) que passa por cada Q_i e logo $\{Q_1, \dots, Q_s\} \cup \Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_r$ é uma configuração factível. Agora somente falta mostrar que para os casos citados no enunciado, V contém um aberto não vazio de $(\mathbb{P}^n)^s$, para isto basta mostrar que a aplicação Θ é dominante.

Seja $\widetilde{U}_i \subset (\mathbb{P}^{n_i})^s$ o conjunto de s-uplas de pontos em posição geral e seja $\widetilde{U} = j(\widetilde{U}_1 \times \cdots \times \widetilde{U}_n)$, onde $j\colon (\mathbb{P}^{n_1})^s \times \cdots \times (\mathbb{P}^{n_r})^s \to (\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r})^s$ é a reordenação de coordenadas dada por

$$j((Q_1^{(1)}, \dots, Q_s^{(1)}) \dots (Q_1^{(r)}, \dots, Q_s^{(r)})) = (Q_1^{(1)}, \dots, Q_1^{(r)}), \dots, (Q_s^{(1)}, \dots, Q_s^{(r)}).$$

Observe que $\widetilde{U}$ é um aberto não vazio de $(\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r})^s$. Mostraremos que se $s, n_1, \dots, n_r$ são como no enunciado, então $\bar{\phi}(\widetilde{U} \setminus B^s) \subset \Theta((\mathbb{P}^1)^s \times G)$, onde $\bar{\phi}(Q_1, \dots, Q_s) = (\phi(Q_1), \dots, \phi(Q_s))$. Isso é equivalente a que exista uma aplicação $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ com α_i parametrizando uma curva racional normal em $\mathbb{P}^{n_i}$ tal que para todo $Q \in \widetilde{U}_1 \times \cdots \times \widetilde{U}_n$, tenha-se α que passe por todas as coordenadas de $j(Q)$.

Em ambos casos, basta mostrar para quando s atinge o máximo pedido (i.e. $s = n_1 + 3$ se $1 < n_1 < n_2$; ou $s = n_2 + 2$ se $n_1 = 1$ ou $n_1 = n_2$). Logo para

$$Q = (Q_1^{(1)}, \dots, Q_s^{(1)}) \dots (Q_1^{(r)}, \dots, Q_s^{(r)}) \in \widetilde{U}_1 \times \cdots \times \widetilde{U}_r$$

temos que em $\mathbb{P}^{n_1}$ existe uma curva racional normal que passa por $Q_1^{(1)}, \dots, Q_s^{(1)}$. Seja α_1 uma parametrização para essa curva e sejam $P_1, \dots, P_s$ os pontos de $\mathbb{P}^1$ tais que $\alpha(P_i) =$

$Q_i^{(1)}$. Agora como $s \leq n_i + 2$ para $i \geq 2$ e os pontos $Q_1^{(i)}, \ldots, Q_s^{(i)}$ estão em posição geral, existe uma transformação projetiva $T_i \colon \mathbb{P}^{n_i} \to \mathbb{P}^{n_i}$ tal que $T_i(\nu_i(P_j)) = Q_j^{(i)}$. Assim, se definimos para cada i, $\alpha_i = T_i \circ \nu_i$, então a função $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ passa pelos pontos das coordenadas de $j(Q)$. □

Corolário 3.9. *A tese do Teorema 3.8 é equivalente a que o vetor de pesos induzido por $s, n_1, \ldots, n_r$ seja factível, ou seja que exista um aberto $W \subset (\mathbb{P}^n)^s \times \mathbb{G}_{n_1-1,n} \times \cdots \times \mathbb{G}_{n_r-1,n}$ tal que para todo $(p_1, \ldots, p_s), (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_r) \in W$ a configuração $\{p_1, \ldots, p_s\} \cup \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_r$ seja factível.*

Demonstração. Sejam $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ fixos e suponha que exista um aberto $V \subset (\mathbb{P}^n)^s$ que cumpra a tese do Teorema 3.8. Seja $\widetilde{W} \subset (\mathbb{A}^{n+1})^n$ o conjunto de n-uplas tais que os pontos em $\mathbb{P}^n$ induzidos por estes vetores estejam em posição geral entre eles e com os pontos $(1 : 0 : \cdots : 0)$ e $(1 : \cdots : 1)$. Então $\widetilde{W}$ é um aberto denso. Para cada n-upla $v = (v_1^{(1)}, \ldots, v_{n_1}^{(1)}), \ldots, (v_1^{(r)}, \ldots, v_{n_r}^{(r)}) \in \widetilde{W}$ seja

$$\lambda(v) = T(e_1^{(1)}, \ldots, e_{n_1}^{(1)}, \ldots, e_1^{(r)}, \ldots, e_{n_r}^{(r)}, e_0, e_{n+1})(v_1^{(1)}, \ldots, v_{n_1}^{(1)}, \ldots, v_1^{(r)}, \ldots, v_{n_r}^{(r)}, e_0, e_{n+1})$$

(onde T é como no Lema 3.5) e seja W' um aberto de $(\mathbb{P}^n)^s \times \widetilde{W}$ dado por $W' = \{(p_1, \ldots, p_s, v) \mid (\lambda(v)(p_1), \ldots, \lambda(v)(p_s)) \in V\}$. Assim W' é um aberto denso. Seja $\xi \colon W \to (\mathbb{P}^n)^s \times \mathbb{G}_{n_1-1,n} \times \cdots \times \mathbb{G}_{n_r-1,n}$, dado por

$$\xi(p_1, \ldots, p_s)(v_1^{(1)}, \ldots, v_{n_1}^{(1)}) \ldots (v_1^{(r)}, \ldots, v_{n_1}^{(r)}) = (p_1, \ldots, p_s)\langle v_1^{(1)}, \ldots, v_{n_1}^{(1)}\rangle \ldots \langle v_1^{(r)}, \ldots, v_{n_1}^{(r)}\rangle$$

(onde $\langle v_1, \ldots, v_d\rangle$ é o plano gerado por $v_1, \ldots, v_d$). Finalmente seja W um aberto denso contido em $\xi(W')$. Se $(p_1, \ldots, p_s, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_r) \in W$, então existe uma transformação projetiva λ' que manda Λ_i a Δ_i e tal que $(\lambda'(p_1), \ldots, \lambda'(p_1)) \in V$, logo $\{\lambda'(p_1), \ldots, \lambda'(p_1)\} \cup \Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_r$ é factível, e como $\Lambda = \{p_1, \ldots, p_s\} \cup \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_r$ é projetivamente equivalente à configuração anterior, temos que Λ é factível.

Para a recíproca, suponha que $W \subset (\mathbb{P}^n)^s \times \mathbb{G}_{n_1-1,n} \times \cdots \times \mathbb{G}_{n_r-1,n}$ é um aberto denso que cumpre as condições do enunciado. Pelo raciocínio que fizemos no caso anterior, o conjunto $\widehat{W}$, das configurações projetivamente equivalentes a $\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_r$ é um aberto denso. Tomando $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_r)$ a segunda coordenada de um ponto em $W \cap (\mathbb{P}^n)^s \times \widehat{W}$ podemos construir um aberto O' de $(\mathbb{P}^n)^s$ tal que para todo $(p_1, \ldots, p_s) \in O'$ a configuração $\{p_1, \ldots, p_s\} \cup \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_r$ seja factível. Além disso, $\Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_r$ é projetivamente equivalente a $\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_r$. Seja T a transformação projetiva entre estes dois conjuntos, assim para o aberto $O = \{(T(p_1), \ldots, T(p_s)) \mid (p_1, \ldots, p_s) \in O'\}$ temos que para todo $(q_1, \ldots, q_s) \in O$ a configuração $\{q_1, \ldots, q_s\} \cup \Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_r$ é factível. □

3.2 Espaços de parâmetros e aplicações

Nesta seção construiremos um espaço de parâmetros de configurações factíveis para um dado vetor de pesos. Com tais espaços, usamos um argumento de dimensão para mostrar que certos pesos não são factíveis. De fato, mostraremos que existe apenas um número finito de vetores de pesos factíveis em $\mathbb{P}^n$. Além disso, caracterizaremos quando os vetores de pesos induzidos por inteiros positivos $s, n_1 \leq \cdots \leq n_r$, como na Seção anterior, são factíveis em $\mathbb{P}^n$ (onde $n = n_1 + \cdots + n_r$).

Seja $L = (l_0, \ldots, l_{n-2})$ um vetor de pesos fixado. Tome $\mathcal{H}$ o espaço de parâmetros para as curvas racionais normais definido na Proposição 2.17.

Seja X o subconjunto de $\mathcal{H} \times (\mathbb{G}_{0,n})^{l_0} \times (\mathbb{G}_{1,n})^{l_1} \times \cdots \times (\mathbb{G}_{n-2,n})^{l_{n-2}}$ dado por:

$$X = \{(C, (\Lambda_1^{(0)}, \ldots, \Lambda_{l_1}^{(0)}), \ldots, (\Lambda_1^{(n-2)}, \ldots, \Lambda_{l_{n-2}}^{(n-2)})) \mid \#(\Lambda_i^{(j)} \cap C) = j + 1\}$$

isto é, o conjunto de pares (C, Λ) onde Λ é uma configuração de peso L e intersecta C no número máximo de pontos. Seja $\pi_2 \colon X \to (\mathbb{G}_{0,n})^{l_0} \times \cdots \times (\mathbb{G}_{n-2,n})^{l_{n-2}}$ a projeção na segunda coordenada. Assim Λ é uma configuração factível sempre que exista uma curva racional normal C tal que $(C, \Lambda) \in X$. Observe que $\pi_2(X)$ é um espaço de parâmetros para as configurações factíveis de peso L. Logo o vetor L é factível se e somente se o mapa π_2 é dominante (pois nesse caso a imagem contém um aberto do contradomínio, pela Proposição 1.9).

Proposição 3.10. *O conjunto X é irredutível e seu fecho $\overline{X}$ tem dimensão $(n+3)(n-1) + \sum_{i=0}^{n-2}(i+1)l_i$.*

Demonstração. Mostremos que X é irredutível. Se fixamos uma curva $C \in \mathcal{H}$, seja σ uma parametrização para C, observamos que um plano r dimensional Λ intercepta C num número máximo de pontos sempre e quando $\Lambda = \langle \sigma(p_0), \ldots, \sigma(p_r) \rangle$ com $p_0, \ldots, p_r \in \mathbb{P}^1$ pontos distintos. Defina $U_l = \{(p_0, \ldots, p_l) \in (\mathbb{P}^1)^l \mid p_i \neq p_j \text{ para todo } i \neq j\}$ temos o mapa $\eta \colon \mathrm{PGL}_n \times (U_1)^{l_1} \times \cdots \times (U_{n-2})^{l_r} \to X$ dado por:

$$\eta(T, \ldots, (p_0, \ldots, p_i), \ldots) = (\phi(T), \ldots, \langle T \circ \nu(p_0), \ldots, T \circ \nu(p_i) \rangle, \ldots)$$

onde $\phi \colon \mathrm{PGL}_n \to \mathcal{H}$ é a aplicação construída em (2.5). Como X é imagem de η, X é irredutível; e pela Proposição 1.9, X contém um aberto não vazio de $\overline{X}$.

Para uma curva C fixa, seja T uma transformação projetiva que induza C. Sejam $\pi_1|_X \colon X \to \mathcal{H}$ a primeira projeção e $Y_C = \pi_1^{-1}(C)$. Seja $\tilde{\eta} \colon (U_1)^{l_1} \times \cdots \times (U_{n-2})^{l_{n-2}} \to Y_C$, dada por $\tilde{\eta}(v) = \eta(T, v)$. Afirmamos que $\tilde{\eta}$ tem fibras finitas: pois se $\langle T \circ \nu(p_0), \ldots, T \circ \nu(p_l) \rangle = \langle T \circ \nu(q_0), \ldots, T \circ \nu(q_r) \rangle$ e $(q_0, \ldots, q_r)$ não é uma permutação de $(p_0, \ldots, p_n)$ então existe algum q_i que é distinto a todo p_j, logo o espaço $\langle T \circ \nu(p_0), \ldots, T \circ \nu(p_r), T \circ \nu(q_i) \rangle$ tem dimensão $i+1$ o que é absurdo. Assim pelo teorema de dimensão das fibras, $\dim(\overline{Y}_C) = \dim(U_0^{l_0} \times \cdots \times U_{n-2}^{l_{n-2}}) = \sum (i+1) l_i$.

Finalmente, seja O um aberto denso de $\overline{X}$ contido em X, seja $Y_C' = \pi_1|_O^{-1}(C)$ e $Y_C'' = \pi_1|_{\overline{X}}(C)$, logo como $O \subset X \subset \overline{X}$, $Y_C' \subset \overline{Y}_C \subset Y_C''$ e suas dimensões preservam a mesma desigualdade. Aplicando o teorema de dimensão das fibras em $\pi_1|_O$ e $\pi_1|_{\overline{X}}$, vemos que existem abertos de $\mathcal{H}$ para os quais esse teorema atinge a igualdade em cada caso. Tomando C na interseção desses abertos temos que

$$\dim Y_C'' = \dim(O) - \dim \mathcal{H} \quad \text{e} \quad \dim(Y_C') = \dim(\overline{Y}) - \dim \mathcal{H}$$

e como O é denso em X temos que $\dim(Y_C') = \dim(\overline{Y}_C) = \dim(Y_C'')$. Daí:

$$\dim(\overline{X}) = \dim \mathcal{H} + \dim(\overline{Y}_C) = (n+3)(n-1) + \sum_{i=0}^{n-2}(i+1)l_i.$$

□

Corolário 3.11. *Se $L = (l_0, \ldots, l_{n-2})$ é um vetor de pesos em $\mathbb{P}^n$ tal que*

$$\sum_{i=0}^{n-2}(i+1)(n-1-i)l_i > (n+3)(n-1)$$

então L não é factível.

Demonstração. O argumento baseia-se em uma aplicação imediata do teorema da dimensão das fibras. Pela discussão anterior, basta mostrarmos que π_2 não é dominante. Mas para que π_2 seja dominante é necessário que

$$\dim(\overline{X}) - \dim(\mathbb{G}_{0,n}^{l_0} \times \cdots \times \mathbb{G}_{n-2,n}^{l_{n-2}}) = (n+3)(n-1) + \sum_{i=0}^{n-2}(i+1)l_i - \sum_{i=0}^{n-2}(i+1)(n-i)l_i$$

seja não negativo, o que não ocorre por hipótese. $\square$

Como consequência imediata, temos:

Corolário 3.12. *Há apenas um número finito de vetores de pesos factíveis em $\mathbb{P}^n$.*

Agora vamos apresentar uma caracterização que garante que os vetores de peso como os dados na Seção anterior sejam factíveis. Para isto primeiro mostraremos o seguinte lema:

Lema 3.13. *Seja $\Lambda = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_r$ uma configuração, tal que se $i \neq j$, então $\Lambda_i \cap \Lambda_j = \emptyset$. Seja Λ_k uma componente i-dimensional da configuração Λ e considere*

$$\pi_{\Lambda_k} : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^{n-i-1}$$

a projeção com centro Λ_k. Seja $\Lambda' = \pi_{\Lambda_k}(\Lambda)$ a configuração projetada. Se Λ é factível então Λ' é factível.

Demonstração. Se Λ é factível e C uma curva racional normal que intersecta em um número máximo de pontos a Λ, então $C \cap \Lambda_i$ consiste em $\dim(\Lambda_i) + 1$ pontos. Pela Proposição 2.7, $C' = \overline{\pi_{\Lambda_i}(C)}$ é uma curva racional normal, além disso como $\Lambda_j \cap \Lambda_i = \emptyset$, para $\Lambda'_j = \pi_{\Lambda_i}(\Lambda_j)$, Λ'_j é um plano da mesma dimensão que Λ_j, e como $\pi(\Lambda_j \cap C) \subset \Lambda'_j \cap C'$, o número de pontos em $\Lambda'_j \cap C'$ é maior ou igual do que $\dim(\Lambda_j) + 1$, mas como C' é uma curva racional e todos seus pontos estão em posição geral, temos a igualdade. Portanto $\Lambda'_1 \cup \cdots \cup \Lambda'_n$ intersecta C no número máximo de pontos. $\square$

Teorema 3.14. *Tome $s, n_1 \leq \cdots \leq n_r$ inteiros positivos. Se existe um aberto $W \subset (\mathbb{P}^n)^s \times \mathbb{G}_{n_1-1,n} \times \cdots \times \mathbb{G}_{n_r-1,n}$, tal que para todo $(p_1, \ldots, p_s), (\Delta_1, \ldots, \Delta_r) \in W$ a configuração $\{p_1, \ldots, p_s\} \cup \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_r$ seja factível então $s \leq n_1 + 3$ e $1 < n_1 < n_2$, ou $s \leq n_2 + 2$ e $n_1 = 1$ ou $n_1 = n_2$.*

Demonstração. Pelo Corolário 3.9 podemos fixar $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ e supor que existe um aberto $U \subset (\mathbb{P}^n)^s$ tal que para todo $(p_1, \ldots, p_s) \in U$, $\{p_1, \ldots, p_s\} \cup \Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_r$ é factível. Fazemos um raciocínio por casos:

Caso 1. $1 < n_1$ e $s \geq n_1 + 4$: Mostramos por contradição. Consideramos a projeção $\pi\colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^{n_1}$ com centro em $\langle \Delta_2, \dots, \Delta_r \rangle$. Então $V = \{(\pi(q_1), \dots, \pi(q_s)) \mid (q_1, \dots, q_s) \in U\}$ contém um aberto denso em $\mathbb{P}^{n_1}$, e para cada $(p_1, \dots, p_s) \in V$ existe, pelo Lema 3.13, uma curva racional normal que passa por esses pontos; mas isso implica que existem $p_1, \dots, p_{n_1+3}$ pontos em posição geral em $\mathbb{P}^{n_1}$ fixos, e um aberto O em $\mathbb{P}^{n_1}$ tal que para todo ponto $p \in O$, por $p_1, \dots, p_{n_i+3}, p$ passa uma curva racional normal. Como sabemos por $p_1, \dots, p_{n_i+3}$ passa uma única curva racional normal, logo esta curva contém O o que é absurdo.

Caso 2. $n_1 = 1$ e $s \geq n_2 + 3$: Neste caso Δ_1 é um ponto somente, consideramos a projeção $\pi\colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^{n_2+1}$ com centro em $\langle \Delta_3, \dots, \Delta_r \rangle$, assim para $\Delta_i' = \pi(\Delta_i)$ para $i = 1, 2$ existe um aberto $V \subset (\mathbb{P}^{n_2+1})^s$ ($V \subset \{(\pi(q_1), \dots, \pi(q_s)) \mid (p_1, \dots, p_s) \in U\}$) tal que para todo $(p_1, \dots, p_s) \in V$ a configuração $\{p_1, \dots, p_s\} \cup \Delta_1 \cup \Delta_2$ é factível, pelo qual o vetor de pesos $(s+1, 0, \dots, 1)$ é factível em $\mathbb{P}^{n_2+1}$ o que é absurdo pois isso contradiz o Corolário 3.11 pois $(s+1)(n_2 - 1) + (n_2 + 1) > (n_2 + 4)(n_2 - 1)$.

Caso 3. Seja $\phi\colon \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r} \to \mathbb{P}^n$ a aplicação definida em (2.5). Seja A o complemento do espaço gerado por $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle$ e Γ_i o plano gerado por $\Delta_1, \dots, \Delta_{i-1}, \Delta_{i+1}, \dots, \Delta_r$. Assim vemos que para π_{Γ_i} a projeção com centro Γ_i, tem-se que $\pi_{\Gamma_i}|_A = \pi_i \circ \phi^{-1}|_A$ onde $\pi_i\colon \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r} \to \mathbb{P}^{n_i}$ é a i-ésima projeção, (lembremos que $\phi^{-1}(1 : x_1 : \cdots : x_n) = (1 : \cdots : x_{n_1}) \dots (1 : x_{n-n_r} : \cdots : x_n)$). Concluímos que se γ parametriza uma curva racional normal C que intercepte num número máximo de pontos a configuração $\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_r$, então pelo Lema 3.6, $\overline{\phi^{-1}(C)}$ é parametrizada por uma curva $\alpha\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ tal que todas as α_i parametrizam curvas racionais normais em $\mathbb{P}^{n_i}$.

Seja U_1 um aberto denso de $((\mathbb{P}^{n_1})^2)^s$ com

$$U_1 \subset \{(\pi_{\Gamma_1}(p_1), \pi_{\Gamma_2}(p_2)), \dots, (\pi_{\Gamma_1}(p_s), \pi_{\Gamma_2}(p_s)) \mid (p_1, \dots, p_s) \in U \cap A^s\}$$

Pela discussão anterior para todo ponto $(p_1, q_1), \dots, (p_s, q_s) \in U_1$ existem parametrizações para curvas racionais normais α_1, α_2 tais que (α_1, α_2) passa por cada par (p_i, q_i). Isso implica que U está contido no conjunto Z formado por todos os pontos $(p_1, \dots, p_s)(q_1, \dots, q_s)$ tais que a duas coordenadas sejam projetivamente equivalentes; mas Z se pode escrever como:

$$Z = \{(p_i^{(j)})_{i \leq s, j \leq r} \mid T(p_1^{(1)}, \dots, p_{s-1}^{(1)})(p_1^{(2)}, \dots, p_{s-1}^{(2)})(p_s^{(2)}) = p_s^{(1)}\}$$

(onde T é como no Lema 3.5), assim Z é um fechado próprio de $((\mathbb{P}^{n_1})^2)^s$, logo Z não pode conter um aberto como U_0; finalmente concluímos que para $s = n_2 + 3$ não pode existir um aberto como W. □

3.3 Exemplos

Faremos agora aplicações dos nossos critérios em casos particulares. Nosso primeiro exemplo é caracterizar quando a configuração formada por um espaço de cada dimensão é realizável:

Proposição 3.15. *Considere o vetor de pesos $L = (1, \dots, 1)$ em $\mathbb{P}^n$. Então L é factível para $n \leq 5$ e não factível para $n \geq 8$.*

Demonstração. Da Proposição 3.2 segue que L é factível para

$$n+3 \geq \sum_{i=0}^{n-2}(i+1) = \binom{n}{2}$$

do que deduzimos que L é factível para $n \leq 4$. Para o caso $n = 5$ aplicamos o Teorema 3.8 para $r = 2$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$. Assim temos que a configuração

$$\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \{P_1, \ldots, P_5\} \subset \mathbb{P}^5$$

é factível. Tomando P_1, P_2, P_3, P_4 de forma que formem um plano genérico de dimensão 3, temos que o vetor $(1,1,1,1)$ é factível em $\mathbb{P}^5$.

Pela Proposição 3.11, L não é factível para:

$$(n+3)(n-1) < \sum_{i=0}^{n-2}(i+1)(n-i-1) = \binom{n+1}{3}$$

donde se deduz que L não é factível se $n \geq 8$, como queríamos. □

Aplicamos nossos resultados também no caso das *configurações homogêneas*, isto é, aquelas cujas componentes têm a mesma dimensão. Por exemplo, o Teorema 2.4 resolve o problema para configurações homogêneas de pontos. Veremos que para n suficientemente grande as Proposições 3.2 e 3.11 caracterizam quando tais configurações são factíveis.

Proposição 3.16. *Sejam $n \geq 3$ e Λ uma configuração homogênea de l planos genéricos i-dimensionais. Se $n > i^2 + 5i + 1$, então Λ é factível para $l \leq \frac{n+3}{i+1}$, e Λ não é factível para $l > \lceil \frac{n+3}{i+1} \rceil$.*

Demonstração. Pela Proposição 3.2 esta configuração é factível para $l \leq \frac{n+3}{i+1}$ e a Proposição 3.11 mostra que não é factível para $l > \frac{(n+3)(n-1)}{(i+1)(n-1-i)}$.
Por outro lado como $n > i^2 + 5i + 1$ então temos que:

$$\frac{(n+3)(n-1)}{(i+1)(n-1-i)} - \frac{n+3}{i+1} < 1$$

Assim se $i+1$ divide $n+3$ então $l > \frac{(n+3)(n-1)}{(i+1)(n-1-i)}$ é equivalente a $l > \lceil \frac{n+3}{i+1} \rceil$. Se $i+1$ não divide $n+3$, seja $q = \lfloor \frac{n+3}{i+1} \rfloor$. Então:

$$n+3 = q(n+1) + r$$

Para algum $r \in \{1, \ldots, i\}$. Um cálculo direto nos fornece

$$\frac{(n+3)(n-1)}{(i+1)(n-i-1)} - q > 1$$

logo concluímos que

$$1 + q < \frac{(n+3)(n-1)}{(i+1)(n-i-1)} < 1 + \frac{n+3}{i+1} = 1 + q + \frac{r}{i+1}$$

e então $l > \frac{(n+3)(n-1)}{(i+1)(n-i-1)}$ é equivalente a que $l > q + 1 = \lceil \frac{n+3}{i+1} \rceil$. □

Agora estudamos configurações homogêneas de retas em $\mathbb{P}^n$:

Corolário 3.17. *Seja $n \geq 3$, e $\Lambda \subset \mathbb{P}^n$ a união de l retas genéricas. Então:*

1. *Λ é factível nos seguintes casos:*
   - $n = 3$ *e* $l \leq 6$*;*
   - $n > 3$ *e* $l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$.
2. *Λ não é factível nos casos:*
   - $n = 3$ *e* $l \geq 7$*;*
   - $n = 5$ *e* $l \geq 6$*;*
   - $n = 7$ *e* $l \geq 7$*;*
   - $n > 3, n \neq 5, 7$ *e* $l \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3$.

Demonstração. Para analisar quando a configuração $\Lambda \subset \mathbb{P}^n$ é realizável, estudamos os diferentes casos:

Se $n = 3$, podemos ver este resultado em [CC01, Prop. 3.1]. Se $n > 3$ é ímpar, pela Proposição 3.2 temos que Λ é factível para $2l \leq n + 3$, ou seja $l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$.

Se $n > 3$ é par, segue do Teorema 3.8 com $s = 4$, $r = \frac{n}{2}$, $n_1 = \cdots = n_r = 2$ que a configuração de $\frac{n}{2}$ retas e 4 pontos:

$$\Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_{\frac{n}{2}} \cup \{P_1, \ldots, P_4\} \subset \mathbb{P}^n$$

é factível, logo escolhemos P_1, P_2 e P_3, P_4 de tal forma de que estes pontos formem parte de duas retas genéricas, assim Λ é factível para $l \leq \lfloor \frac{n}{2} + 2 \rfloor$.

Vejamos agora os casos não factíveis. Se $n > 7$, então $n > i^2 + 5i + 1$ e pela Proposição 3.16 esta configuração não é factível para $l \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$. No caso $n \leq 7$, segue da Proposição 3.11 que a configuração não é factível para $l > \frac{(n+3)(n-1)}{2(n-2)}$, donde se deduz o Corolário para os casos $n = 3, 5, 7$ e para o caso 4 quando $l \geq 6$. Para $(n, l) = (4, 5)$, veja [CC02, Prop. 5.2]. □

Apresentamos um refinamento do resultado anterior para $\mathbb{P}^3$.

Teorema 3.18. *Em $\mathbb{P}^3$, considere configurações formadas por p pontos e l retas genéricas tais que $p + l = 6$. Então a configuração (p, l) é factível para os casos:*

$$(p, l) = (6, 0), (5, 1), (3, 3), (2, 4), (1, 5), (0, 6)$$

e não é factível para o caso $(p, l) = (4, 2)$.

Demonstração. Os casos com $l = 0, 1, 2$ seguem imediatamente do Teorema 3.14. Para os restantes, a demonstração é *ad-hoc* e pode ser encontrada em [CC01, Prop. 3.1]. □

De fato, o resultado em [CC01, Prop. 3.1] é mais preciso: existe exatamente uma única curva racional normal passando por seis retas em posição geral em $\mathbb{P}^3$ (intersectando cada uma em dois pontos). Como no caso de pontos, temos então um critério para saber se dois conjuntos de seis retas em $\mathbb{P}^3$ em posição geral são projetivamente equivalentes: isto acontece se e somente se os dois conjuntos de doze pontos induzidos em $\mathbb{P}^1$ são projetivamente equivalentes!

Para uma generalização do Teorema 3.18, tratando de configurações formadas por pontos e espaços lineares de codimensão 2, veja [CC01, Prop. 4.7].

Terminamos este Capítulo fazendo um comentário sobre o caso para o caso de $n+3$ planos de codimensão 2. Pelo que vimos antes, temos uma solução completa quando $n=3$. Sem embargo, esta prova não pode ser estendida para o caso $n>3$. Como o mencionado no artigo [CC01, Seção 6], mesmo nesse caso mais simples o problema está em aberto para $n>3$. Por exemplo, não se sabe se uma configuração formada por 7 planos em posição geral em $\mathbb{P}^4$ é factível.

Referências Bibliográficas

[CC01] Carlini, E. e Catalisano M. V., *Existence Results for Rational Normal Curves*, J. London Math. Soc. **76**, 2007, 73–86.

[CC02] Carlini, E. e Catalisano M. V., *On Rational Normal Curves in Projective Space*, J. London Math. Soc. 2009, 1–17.

[Fulton] Fulton, W., *Algebraic Curves*, W. A. Benjamin, 1969.

[Griffiths e Harris] Griffiths, P. e Harris, J., *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley Interscience, 1978.

[Harris] Harris, J., *Algebraic Geometry – A First Course*, Springer-Verlag, 1992.

[Hartshorne] Hartshorne, R., *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag New York, 1997.

[Lang] Lang, S., *Algebra*, revised 3rd ed., GTM 211, Springer-Verlag, 2002.

[Matsumura] Matsumura, H., *Commutative Ring Theory*. Cambridge University Press, 1986.

[Miranda] Miranda, Rick., *Algebraic Curves and Riemman Surfaces*, American Mathematical Society, 1995.

[Mumford] Mumford, D., *Algebraic Geometry I - Complex Projective Varieties*, Springer-Verlag, 1976.

[Shafarevich] Shafarevich, I.R., *Basic Algebraic Geometry I*, Springer-Verlag, 1977.

[Veronese] Veronese, G., *Behandlung der projectivischen verhältnisse der räume von verschiedenen...*, Math. ann., XIX:161–234, 1882.

Livros Grátis

(http://www.livrosgratis.com.br)

Milhares de Livros para Download:

Baixar livros de Administração
Baixar livros de Agronomia
Baixar livros de Arquitetura
Baixar livros de Artes
Baixar livros de Astronomia
Baixar livros de Biologia Geral
Baixar livros de Ciência da Computação
Baixar livros de Ciência da Informação
Baixar livros de Ciência Política
Baixar livros de Ciências da Saúde
Baixar livros de Comunicação
Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE
Baixar livros de Defesa civil
Baixar livros de Direito
Baixar livros de Direitos humanos
Baixar livros de Economia
Baixar livros de Economia Doméstica
Baixar livros de Educação
Baixar livros de Educação - Trânsito
Baixar livros de Educação Física
Baixar livros de Engenharia Aeroespacial
Baixar livros de Farmácia
Baixar livros de Filosofia
Baixar livros de Física
Baixar livros de Geociências
Baixar livros de Geografia
Baixar livros de História
Baixar livros de Línguas

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo