**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO**
**PUC-SP**

**Vagner Valeiro Ramos**

# Dificuldades e concepções de alunos de um curso de licenciatura em matemática, sobre derivada e suas aplicações

**MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

**SÃO PAULO**
**2009**

**PONTIFÍCIA NIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO**

**PUC-SP**

**Vagner Valeiro Ramos**

# Dificuldades e concepções de alunos de um curso de licenciatura em matemática, sobre derivada e suas aplicações

**Trabalho Final apresentado à banca examinadora como exigência parcial para obtenção do titulo de MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA, pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sob a orientação do Professor Doutor Benedito Antonio da Silva.**

**São Paulo**

**2009**

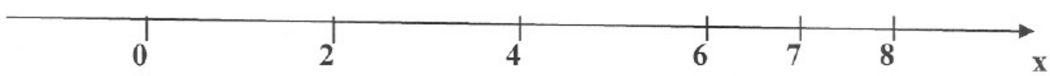
## ERRATA

Na página 39, após o gráfico onde se lê:

**crescente ou decrescente.**

Considerar:

**a) Na reta abaixo represente com setas ↗ ou ↘ os intervalos em que a função f é crescente ou decrescente.**




Na página 72, após quadro da dupla 9 onde se lê:

**Duas duplas responderam parcialmente a questão, faltando somente apresentar a resposta solicitada. Observamos nos protocolos a seguir, que uma delas fez a simplificação e a**

Considerar:

**Duas duplas responderam parcialmente a questão, faltando somente apresentar a resposta solicitada. Observamos nos protocolos a seguir, que uma delas fez a simplificação e a derivação da função L e que a outra preferiu derivar as funções F e C, para depois, obter a função derivada de L.**

**Banca Examinadora**

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

___________________________ ___________________________

Assinatura Local e Data

*Às minhas filhas*

*Amanda de Mello Ramos*

*Isabella de Mello Ramos*

# AGRADECIMENTOS

Primeiramente à essência divina, que dá sentido a vida, por me privilegiar, dando-me a oportunidade e as forças necessárias para chegar a realização dessa pesquisa.

À Secretaria Estadual de Educação do Governo do Estado de São Paulo, por ter financiado parcialmente meus estudos por meio do programa "*Bolsa Mestrado*", incentivo essencial, sem o qual não teria conseguido realizá-lo.

Ao meu orientador, Professor Doutor Benedito Antonio da Silva, por aceitar orientar-me, por ter dado direcionamento em minhas idéias iniciais, pelo carisma, dedicação, apoio e paciência na condução de meus estudos.

Aos membros da banca, professora doutora Rute Cunha e Professora doutora Sonia Pitta Coelho, pelas observações e contribuições para o enriquecimento de meu trabalho.

Aos professores, Antonio Claret da Silva e Roberto Fecchio, que muito contribuíram para minha formação nos tempos da graduação.

À minha esposa, Edneia Caires de Mello Ramos, pela cumplicidade e compreensão, principalmente nas minhas ausências noturnas oriundas de horas e horas de trabalho e estudo.

Ao meu irmão, Clayton Valeiro Ramos, pelos incentivos e apoios nos momentos mais difíceis dessa caminhada.

Aos meus pais, sogros e amigos (que, para não cometer injustiças, não citarei nomes), pelas intenções positivas que certamente foram fontes de energia que emergiram sobre mim em todos os momentos.

Aos colegas das escolas, EE Professor Francisco de Paula Conceição Júnior e EMEF Maria Rita de Cássia Pinheiro Simões Braga, pelo convívio, pela cumplicidade e pelas idéias trocadas por horas e horas “e horas” nessa jornada.

# RESUMO

Esta é uma pesquisa diagnóstica, cujo objetivo é investigar os conhecimentos dos alunos que já passaram por um curso de Cálculo e estudaram “a derivada”, quanto a suas aplicações e tentar classificar as dificuldades desses alunos diante dessas atividades. Elaboramos então um teste composto de quatro tarefas, que versam sobre o tema. Esse teste foi estruturado segundo a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Com os dados obtidos realizamos as análises qualitativa e quantitativamente. Exploramos no teste as representações algébricas e gráficas de uma função e de sua derivada e as relações que existem entre elas, que ora exigem conversões para serem obtidas, ora exigem tratamentos. Após a analise dos resultados, observamos que os alunos manipulam bem as representações algébricas, mas muitos deles não conseguem identificar os procedimentos necessários, nem fazer uso do conceito de derivada, para a resolução de uma determinada situação de aplicação.

**Palavras Chave:** *Função, Derivada, Registro de Representação, Aplicação, Dificuldade*

## ABSTRACTS

This is a  diagnostic research, whose objective is investigate the students' knowledge that already passed a Calculus course “derivative”, as much as its applications and try to classify the difficulties of these students before these activities.We elaboreted then a test composite of four tasks, that deal with the theme.  This test was structured according to Raymond Duval's theory - Register of Representation Semiotic. With the data got we carried out the analyses qualitatively and quantitatively. We explored in the test the algebraic and graphic representations of a function and of its derivative and the relation that there are between them, that well demand conversions to be obtained, well demand treatment. After the analyses of the results, we observed that the students manipulate well the algebric representations, but many of the students neither get to indentify the need procedures, nor do use of the concept of derivative, for a resolution of a determineted situation of aplication.

**Key words:** Function, Derivative, Register of representation, Application, Difficulty

# SUMÁRIO

# APRESENTAÇÃO

Este trabalho é o produto final de nossa pesquisa, realizada durante o curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, do Programa de Estudos Pós-Graduados da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Realizamos um estudo sobre as aplicações da derivada. Com o objetivo de investigar as concepções de alunos de um curso de licenciatura em Matemática, elaboramos e aplicamos uma seqüência de quatro tarefas, envolvendo aplicações da derivada.

Participaram do teste dezoito alunos dos quais dez estavam em fase intermediária do curso e os outros oito estavam em fase terminal, sendo que esses alunos já haviam estudado o tema, objeto de nosso estudo, em semestres anteriores do curso. Em geral eles apresentaram bom domínio sobre as manipulações algébricas, porém conseguir identificar o conceito necessário para a resolução de algumas tarefas, foi o principal elemento que dificultou o sucesso diante das mesmas.

Organizamos nosso trabalho em seis capítulos. No capitulo um descrevemos o motivo pelo qual optamos realizar um estudo sobre esse assunto do Cálculo. Já no capítulo dois buscamos resgatar cronologicamente o desenvolvimento da derivada, com o objetivo de situar o tema e apresentar algumas idéias a ele relacionadas. No capítulo três expomos os principais elementos da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymund Duval. Nossa escolha por essa teoria é justificada pela variedade de registros em que podemos representar uma função, as possibilidades de análises dessas representações e os aspectos epistemológicos envolvidos. No capítulo quatro descrevemos os procedimentos metodológicos utilizados para elaborar as quatro tarefas, realizamos as análises prévias e descrevemos a aplicação da seqüência. No capítulo cinco apresentamos as analises dos resultados. No capítulo seis estão nossas considerações finais.

# CAPÍTULO 1

# INTRODUÇÃO

Desde nossa graduação no curso de licenciatura em Matemática temos observado que o Cálculo Diferencial e Integral é uma disciplina de difícil compreensão por grande parte dos alunos que freqüentam o curso. Posteriormente como monitor de estudos das disciplinas do curso de minha turma de graduação e como professor de matemática de um colégio particular em que a introdução ao Cálculo Diferencial fazia parte da grade curricular dos alunos do terceiro ano do Ensino Médio, verificamos que o ensino e a aprendizagem da derivada têm sido um dos tópicos em que os alunos apresentam grandes dificuldades.

Participando do grupo de pesquisas "*Matemática do Ensino Superior: Didática do Cálculo*", do programa de estudos pós-graduados em Educação Matemática, da PUC-SP, tivemos a oportunidade de conhecer alguns trabalhos já realizados sobre o tema.

Dall'anese(2000) e D'avoglio(2002) realizaram pesquisas sobre a aprendizagem do conceito de derivada, fazendo uma investigação com alunos de cursos de graduação, em que propuseram uma forma diferenciada para o seu ensino.

Dall'anese elaborou uma seqüência didática composta de quatorze fichas de atividades relacionadas ao conceito de derivada, trabalhou com duplas de alunos durante um semestre. Foram realizados quatorze encontros, em cada encontro os alunos resolviam uma ficha; e após a resolução o pesquisador realizava uma plenária com os alunos sobre as atividades da ficha e no final ele fazia a institucionalização dos conceitos explorados na ficha. Segundo ele propor uma seqüência didática para o ensino da derivada pode ser uma metodologia satisfatória, principalmente pelas discussões desencadeadas durante as etapas de aplicação.

Lembra ainda que com essa forma de ensinar o professor acaba retomando outros conceitos relacionados ao assunto, o que é muito significativo para o bom desempenho dos alunos.

D'avoglio elaborou uma seqüência didática com sete atividades para a introdução do conceito de derivada a partir de conceitos da Física. Segundo ele, essa forma de introduzir o conceito parte de conhecimentos que os alunos já possuem como as noções de velocidade e aceleração. Dessa forma uma seqüência didática valoriza e expõe os conhecimentos prévios dos alunos para a aquisição de um novo conceito, contribui para a sua aprendizagem, tornando o novo conceito significativo.

Godoy(2004) realizou um estudo investigando o processo de ensino-aprendizagem da noção de derivada sob a ótica dos registros de representação de Duval. Observou que em geral dois tipos de enfoques são encontrados no ensino da derivada: o Teórico e o Técnico. Segundo ele, o primeiro está ligado aos Conceitos e as Definições; já o outro está voltado para os Processos de resolução e as Técnicas envolvidas.

Contudo, verificamos a carência de pesquisas que tratem de um aspecto importantíssimo da derivada que são "*As Aplicações*". Entendemos por aplicações, situações matemáticas que, para serem resolvidas, necessitam de um ou mais conceitos matemáticos específicos e não necessariamente precisam estar relacionadas a um problema ou a uma outra área do conhecimento.

Lima(1999), em seu artigo publicado na Revista do Professor de Matemática 41, com o titulo "A Conceituação, A Manipulação e As Aplicações". São os três componentes fundamentais no ensino da matemática. Nesse artigo ele expõe o papel de cada um deles no ensino.

Faremos agora um breve resumo do significado de cada componente para o ensino da matemática, segundo o autor.

*A Conceituação – Abrange o processo de escolhas que o aluno faz, das hipóteses que admitem para o êxito de uma determinada tarefa;*

*A Manipulação – Tem caráter principalmente algébrico, ligado ao desenvolvimento de atitudes mentais, que permitem ao aluno concentrar sua atenção nos pontos cruciais;*

*As Aplicações – São empregos das noções e teorias da matemática para obter resultados, elas constituem a principal razão da difusão do ensino da matemática. Elas incluem ainda a resolução de problemas, que é uma arte, a qual, por meio de desafios, desenvolvem a criatividade, nutrem a auto-estima, estimulam a imaginação e recompensam o esforço de aprender.*

Podemos observar que, segundo o autor, as aplicações têm um papel fundamental no ensino da matemática, e embora não possamos desvincular esses três componentes, vamos focar nosso trabalho no terceiro deles, porém com forte vínculo aos outros dois.

Nesse sentido, desenvolvemos uma pesquisa que trata das aplicações da derivada com o objetivo de responder à seguinte pergunta:

Até que ponto as dificuldades dos alunos em resolver problemas de aplicações das derivadas são conceituais e até que ponto são manipulativas?

# CAPÍTULO 2

# GÊNESE HISTÓRICA DA DERIVADA

Neste capítulo faremos uma breve síntese do desenvolvimento da derivada até meados do século XX, que é o momento em que esse conteúdo aparece nos livros de Cálculo, como o conhecemos.

É interessante observar que o desenvolvimento histórico do Cálculo surgiu em ordem contrária à apresentada nos livros textos e cursos sobre o assunto. Historicamente primeiro surgiram as idéias do Cálculo Integral (originado a partir de processos somatórios ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos); já o Cálculo Diferencial surgiu bem mais tarde, a partir de problemas sobre tangentes a curvas e de questões de máximos e mínimos.

Segundo Boyer, entre os gregos da antiguidade, Arquimedes foi quem fez de maneira mais elegante a sistematização do Método de Exaustão de Eudóxo (370a.C.), que consistia em inscrever e circunscrever figuras retilíneas (polígonos regulares) em uma circunferência e, num processo contínuo, duplicar o número de lados dessas figuras e comparar as medidas de suas áreas. Ele provou, com o uso do método de Eudóxo e, por redução ao absurdo, as limitações desse processo; foi ele também quem mais se aproximou dos resultados obtidos hoje com o cálculo de integrais definidas, com sua abordagem para áreas e volumes.

Em seus trabalhos Arquimedes definiu fórmulas para se calcular áreas como a do segmento de parábola. Observamos no livro de Boyer que as fórmulas foram obtidas a partir de triângulos inscritos e circunscritos no segmento da curva. Definiu também fórmulas para se calcular volumes de alguns sólidos geométricos como o Cilindro, o Cone e a Esfera. Possivelmente o desenvolvimento desses trabalhos está relacionado com a questão da Quadratura do Círculo, que era um dos três grandes problemas da antiguidade e talvez o que mais se pesquisasse naquele momento.

A Diferenciação originou-se de problemas relativos ao traçado de tangentes a curvas e da determinação de máximos e mínimos de algumas funções. Essas considerações nos fazem voltar novamente aos gregos da Antiguidade, mas nos parece pertinente afirmar que a primeira manifestação realmente clara do método de diferenciação se encontra em algumas idéias de Fermat, expostas em 1629.

Kepler, em 1609, observou o que acontecia nas proximidades de um ponto de máximo ou de mínimo em uma função. Ao realizar seus estudos sobre Astronomia. Fermat transformou o fato observado por Kepler num processo, que encontramos em Eves (p. 429), assim enunciado:

> "Se f(x) tem um máximo ou um mínimo em x e se $e$ é muito pequeno, então o valor de f(x-e) é quase igual ao de f(x). Portanto, pode-se experimentar fazer f(x-e) = f(x) e para tornar essa igualdade correta, impor que $e$ assuma o valor zero. As raízes da equação resultante darão então os valores de x para os quais f(x) assuma um máximo ou um mínimo."

Eves mostra ainda nessa mesma página, que a lógica de Fermat é equivalente ao que temos hoje como:

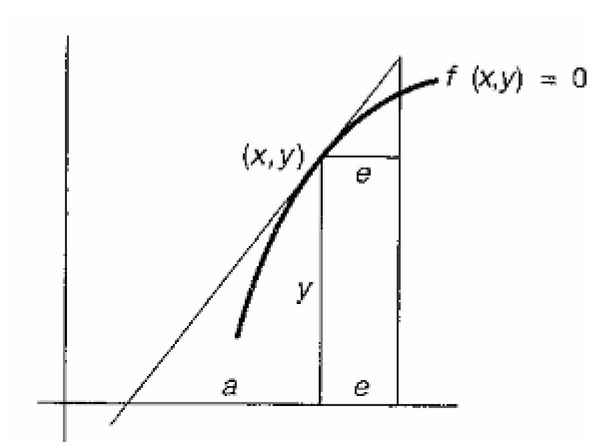
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$$

O significado dessa expressão nada mais é que a imposição de a derivada da função f na variável x ser nula. Alguns livros indicam esse método para se obter máximos e mínimos como "*Método de Fermat*".

Fermat também descobriu um procedimento para determinar a tangente a uma curva cuja equação cartesiana é conhecida. A idéia usada por ele consiste na determinação da posição limite de secantes quando os dois pontos de intersecção com a curva tendem a coincidir. Vejamos abaixo como está enunciado o Método no livro de Eves (p. 430)

> "Seja f(x,y) = 0 a equação da curva, e procuramos sua subtangente $a$ (segmento de reta cujas extremidades são a projeção do ponto de tangencia sobre o eixo x e a intersecção da tangente com esse eixo), relativa a (x,y). Por semelhança de triângulos facilmente se estabelece que as coordenadas de um ponto da tangente, próximo do ponto de tangência, são [x+e,y(1+e/a)], tratando-se esse ponto como se ele fosse da curva, obtém-se:

$$f\left[x+e, y\left(1+\frac{e}{a}\right)\right]=0$$




Apresentaremos a demonstração desse procedimento na pagina 20.

Para que essa igualdade possa ser considerada correta faz-se $e = 0$. Determina-se então na equação resultante a subtangente $a$ em função das coordenadas x e y do ponto de tangência."

Segundo Eves, o que Fermat descobriu equivale à fórmula abaixo, que apareceu posteriormente num livro de Sluse, intitulado *Mesolabum* (1659). Sluze aperfeiçoou alguns dos resultados de Descartes. Foi através de seus trabalhos que Leibniz teve acesso a muitos resultados da Geometria Analítica, ele também foi cônego da Igreja Católica e escreveu vários Opúsculos sobre a matemática.

$$a = -y\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}$$

Observemos a seguir uma ilustração do método de Fermat para a determinação da subtangente relativa a um ponto genérico da Folium de Descartes:

Seja a equação da Folium: $x^3 + y^3 = nxy$

Fazendo $x = x + e$ e $y = y\left(1 + \frac{e}{a}\right)$, temos:

$$(x + e)^3 + y^3\left(1 + \frac{e}{a}\right)^3 - ny(x + e)\left(1 + \frac{e}{a}\right) = 0$$

Desenvolvendo as potências, calculando os produtos e agrupando os termos fatorados nas potências de $e$, temos:

$$e\left(3x^2 + \frac{3y^3}{a} - \frac{nxy}{a} - ny\right) + e^2\left(3x + \frac{3y^3}{a^2} - \frac{ny}{a}\right) + e^3\left(1 + \frac{y^3}{a^3}\right) = 0$$

Dividindo ambos os membros da igualdade por $e$ e fazendo $e = 0$, chegamos a :

$$a = -\frac{3y^3 - nxy}{3x^2 - ny} \Leftrightarrow a = -y\left(\frac{3y^2 - nx}{3x^2 - ny}\right)$$

Observemos que, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - nx$ e $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - ny$

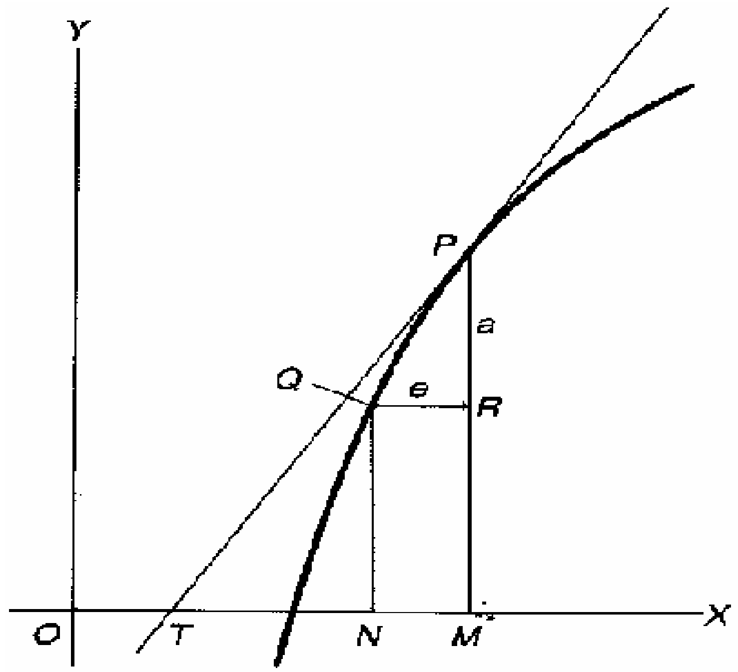
Daí, temos: $a = -y\left(\frac{3y^2 - nx}{3x^2 - ny}\right) \Leftrightarrow a = -y\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}\right)$

Tanto em Boyer como em Eves, encontramos concordância com a idéia de que Fermat como matemático desenvolveu um trabalho pioneiro no que se refere à Diferenciação.

Isaac Barrow foi outro matemático que muito contribuiu à teoria da diferenciação. Em suas obras, "*Lectiones opticae(1669) et Lectiones geometricae(1670)*" - que é considerada a mais importante entre suas obras - se encontra uma abordagem muito próxima do processo moderno de diferenciação. Ele faz uso do chamado triângulo diferencial, que ainda hoje pode ser encontrado em livros de Cálculo.

O triângulo diferencial é construído sobre dois pontos distintos de uma curva dada, com dois de seus lados paralelos aos eixos do plano ortogonal. Conforme vamos aproximando os pontos pertencentes à curva, as hipotenusas secantes tendem para o ponto de tangência.

Como exemplo, vamos supor que se pretenda obter a tangente à curva da figura a seguir, no ponto P.




Seja Q um ponto da curva vizinho de P. Então os triângulos PTM e PQR são praticamente semelhantes. Segundo Barrow, se considerarmos o triângulo menor indefinidamente pequeno, a relação abaixo será válida.

$$\frac{RP}{QR} = \frac{MP}{TM}$$

Fazendo QR = *e*, RP = *a* , e considerando x e y como as coordenadas de P, teremos para Q as seguintes coordenadas x-*e* e y-*a*. Ao fazermos a substituição desses valores na equação da curva e desconsiderando os quadrados e as potências superiores de *e* e *a*, encontraremos a razão $\frac{a}{e}$. Temos então:

$$\text{OT} = \text{OM - TM} = \text{OM - MP} \left(\frac{QR}{RP}\right) = \text{X - Y} \left(\frac{e}{a}\right)$$

Ao aplicar seu método para determinação de tangentes à curvas, ele encontrou a razão $\frac{a}{e}$, que em notação moderna é $\frac{dy}{dx}$. Eves cita que, apesar de alguns indícios apontar em outra direção, considera-se que Barrow foi o primeiro a perceber plenamente que a diferenciação e a integração são operações inversas uma da outra. Essa descoberta aparece e é provada em seu livro citado anteriormente, sendo conhecida como o Teorema Fundamental do Cálculo. Mas segundo Boyer, Barrow era conservador à adesão de métodos geométricos, consequentemente essa postura o impediu de fazer uso eficaz de sua descoberta.

Até esse período as idéias do Cálculo Diferencial e Integral já haviam sido aplicados e, ao mesmo tempo, descoberto em muitas situações problema. O T.F.C. já fora enunciado e provado e as idéias de Limite já existiam. Porém, ainda faltava uma sistematização teórica de regras que fizessem uso de uma simbologia geral, bem como da necessidade de um redesenvolvimento rigoroso dos fundamentos da integração e da diferenciação.

Newton e Leibniz foram os matemáticos que criaram um Cálculo manipulável e proveitoso. O mais interessante é que, apesar de serem contemporâneos, seus trabalhos foram independentes um do outro. Já os créditos do redesenvolvimento do Cálculo ficaram para o francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e seus sucessores. Observemos ainda que, apesar de muitas outras pessoas terem trabalhado com esses conceitos antes de Newton e Leibniz, é atribuída a eles a criação do Cálculo.

Segundo Boyer, Isaac Newton desenvolveu seu Cálculo com base em seu método dos fluxos. Porém, não fez publicações de seus resultados, embora soubesse que Gregory e Mercator já haviam revelado sua obra sobre séries infinitas em 1668. O primeiro trabalho que ele publicara só apareceu em 1687, com o título "*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*".

No livro de Boyer (p. 274), assim está traduzido "*O Método da Primeira e Última Razões de Quantidades*":

“Quantidades, e as razões de quantidades, que em qualquer tempo finito convergem continuamente à igualdade, e antes do fim desse tempo se aproximam mais uma da outra que por qualquer diferença dada, se tornam finalmente iguais.”

Vidigal(2007) explica esse método em sua dissertação como:

“A fluxão é um conceito cinemático, que ocasionou a velocidade ou a taxa de mudança de variável, onde as variáveis dependem do tempo (variáveis que fluem num intervalo de tempo), portanto conceitos mecânicos, cinemáticos.”

Esses resultados compõem uma de suas obras intitulada “*The Method of Fluxions and Infinite Séries”*, que só foi publicada muito tempo depois de produzida por pressões de amigos e foi traduzida do original para o Inglês por J. Colson em 1736.

O que conhecemos hoje por derivada de uma função (y) numa determinada variável era enunciada por Newton em sua obra, segundo Eves (p.439), por:

“Uma curva era gerada pelo movimento continuo de um ponto. Feita essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser, em geral quantidades variáveis. A uma quantidade variável ele dava o nome de *fluente* (uma quantidade que flui) e à sua taxa de variação dava o nome de *fluxo* do fluente. Se um fluente, como a ordenada do ponto gerador, era indicada por y, então o fluxo desse fluente era denotado por y̌.”

Newton com sua Teoria do Método dos Fluxos fez muitas e importantes aplicações, como determinar máximos e mínimos, tangentes a curvas, curvaturas de curvas, pontos de inflexão e convexidade/concavidade de curvas.

Gottfried Wilhelm Leibniz escreveu seu Cálculo entre 1673 e 1676, nesse período estabeleceu o Teorema Fundamental do Cálculo. Esse teorema foi publicado por Leibniz na

"*Acta Eruditorum*" em 1684. Nesse trabalho ele mostra que no Cálculo Integral as quadraturas são casos especiais do método inverso do das tangentes no Cálculo Diferencial. Segundo Boyer, foi nesse trabalho que ele apresentou grande ênfase na relação inversa entre a diferenciação e a integração.

Para ilustrar essa relação de inversibilidade, vamos derivar a função $y = x^3$ e em seguida integrar essa derivada.

$$y = x^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^{3-1} \Rightarrow dy = 3x^2 dx$$

$$\int dy \Leftrightarrow \int 3x^2 dx = \frac{3x^{2+1}}{2+1} = x^3$$

Leibniz desenvolveu grande parte de sua notação para o assunto e estabeleceu muitas das fórmulas elementares de diferenciação. Foi ele quem usou pela primeira vez o símbolo de integral, ( $\int$ ) um S alongado (por ser a primeira letra da palavra latina "*summa*", que significa soma). No final de 1675 ele já escrevia diferenciais e derivadas como as fazemos hoje. A utilização do d é justificada, (por ser a primeira letra da palavra latina "*differentia*", que significa diferença). Seu primeiro artigo sobre o Cálculo Diferencial só apareceu em 1684. Nele se define dx como um intervalo finito arbitrário e dy pela proporção.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{subtangente}$$

Foi Leibniz quem deduziu muitas das regras de diferenciação que os alunos aprendem logo no início de um curso de Cálculo. A fórmula da derivada enésima do produto de duas funções é conhecida em geral por regra de Leibniz.

No início do século XIX, o rigor e a fundamentação do Cálculo estavam sendo desenvolvidos. Um grande matemático que muito contribuiu foi Cauchy, deve-se a ele grande parte da fundamentação teórica e lógico-dedutiva que ainda hoje nos é apresentada em livros textos universitários, como os conceitos básicos de Limite e Continuidade. Foi ele quem definiu a derivada de y = f(x) em relação a x como o limite, quando $\Delta x \to 0$ da razão:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Cauchy tinha muita desenvoltura em trabalhar com as derivadas. Para ele, se dx é uma quantidade finita, dy de y = f(x) é simplesmente f '(x) dx. Ele preferia definir a Integral pela definição moderna de limite da soma de um conjunto infinitamente crescente de partes pequenas tendendo a zero. Muito parecido com o que fazemos ainda hoje.

Com a criação da Geometria Analítica, o cálculo se apoiou nela, até a época de Cauchy. Talvez por esse motivo os estudiosos não se preocupassem com os fundamentos e somente após começarem a surgir muitas contradições na matemática é que os estudiosos começaram a se preocupar com essas fundamentações e, a partir daí, não só em Cálculo, mas em todos os ramos da matemática, passaram a estabelecer os fundamentos essenciais de suas respectivas áreas.

Como resultado desse trabalho que durou mais de cem anos, obteve-se um apuramento profundo de muitos conceitos matemáticos.

No que se refere ao Cálculo, por exemplo, o conceito de função teve de ser estabelecido; e noções como as de Limite, Continuidade, Diferenciais e Integrais tiveram de ser cuidado e minuciosamente definidas. Contudo, essa ousada tarefa fez com que os conceitos sofressem grandes generalizações e assim tornaram-se muito abstratos.

As grandes mudanças (sociais, econômicas e culturais) ocorridas no mundo nesses três últimos séculos trouxeram ainda mais progressos ao campo da matemática. Contudo, no início do século XX se tornou necessário dividi-la em dois campos, o da matemática pura e o da matemática aplicada.

Com essa síntese do desenvolvimento do Cálculo (Derivada) na história da civilização, podemos agora entender o porquê das aplicações das derivadas serem apresentadas em vários ramos das ciências exatas após um estudo conceitual e lógico dedutivo desse conceito em um curso de Cálculo.

# CAPÍTULO 3

## REFERENCIAL TEÓRICO

Para elaborarmos a seqüência e analisarmos os resultados, optamos por fundamentar a pesquisa segundo a Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval(1993).

Segundo esse autor, a abordagem cognitiva possibilita ao aluno ter sucesso nas situações matemáticas que são propostas, mas para ele isso nos conduz a duas questões imediatas e fundamentais relacionadas aos problemas de aprendizagem em matemática.

*1 - Quais sistemas cognitivos são necessários mobilizar para aceder aos objetos matemáticos e para efetuar as múltiplas transformações que constituem os tratamentos matemáticos?*

*2 - Esses sistemas cognitivos são os únicos a serem mobilizados por qualquer processo de conhecimento em outros domínios científicos (Geologia, Astronomia, Física, Biologia...) e práticos, ou, ao contrário, trata-se de sistemas específicos, cujo desenvolvimento e cuja aquisição são próprios da atividade matemática?*

Com base nessas duas questões, Duval nos apresenta as exigências metodológicas e as observações pertinentes para a evolução das pesquisas sobre aprendizagem matemática.

O que caracteriza a atividade matemática do ponto de vista cognitivo é a *compreensão* que se faz dos objetos matemáticos em jogo e os *bloqueios nessa compreensão.*

O autor nos coloca que os registros de representações semióticas explicam bem os aspectos cognitivos frente a uma situação matemática, sendo eles classificados em registros *multifuncionais* – em que as transformações não são algoritmizáveis e os *monofuncionais* – em que as transformações são principalmente algoritmos.

Os registros multifuncionais podem se apresentar sob dois tipos de representações: discursiva (uso da linguagem natural, argumentação por observações e crenças, deduções válidas por definições ou teoremas) e a não discursiva (uso de figuras geométricas em dimensão 1, 2 ou 3, apreensão operatória, construções com instrumentos). Os registros monofuncionais também se apresentam sob a forma de representação discursiva (uso de sistemas de escrita: numéricas, algébricas, simbólicas) e a não-discursiva (uso de gráficos cartesianos, mudança de sistemas de coordenadas, interpolação e extrapolação).

Ainda segundo o autor existem dois tipos de transformação de representações semióticas que são muito diferentes em sua essência, que são os tratamentos e as conversões.

O tratamento é a transformação de uma representação dentro de um mesmo registro.

Exemplos: 1) 0,2 + 0,5 = 0,7

Nesse caso temos uma operação na representação decimal com um tratamento decimal para obter o resultado.

2) 1/10 + 5/10 = 6/10

Agora temos uma operação na representação fracionária com um tratamento fracionário para obter o resultado.

A conversão é a transformação de um registro para outro registro, conservando a totalidade ou uma parte do objeto matemático em questão.

Exemplo: passar uma equação da representação algébrica para a sua representação gráfica, ou da escrita natural para a representação algébrica.

Geralmente, considera-se uma conversão de representação de um objeto matemático uma atividade simples, talvez até rotineira, mas essa visão é imediata e enganosa, pois para a realização de tal conversão é preciso mobilizar variáveis cognitivas que são especificas para cada tipo de registro representação.

Dois fenômenos específicos das conversões de representação são: as variações de congruência e de não-congruência (fazer comparações entre os registros de partida e de chegada) e a heterogeneidade dos dois sentidos de conversão (inverter os registros de partida e de chegada).

Para entendermos melhor essas relações vejamos os exemplos a seguir.

Exemplo de congruência: a passagem de uma função afim ou quadrática de sua representação algébrica para a representação gráfica é um tipo de conversão congruente, pois partindo dos pares de pontos escolhidos e calculados algebricamente o aluno constrói a representação gráfica naturalmente

Exemplo de não-congruência: observar a representação gráfica de uma função e partir somente de pontos pertencentes a esse gráfico não é suficiente para o aluno obter a representação algébrica dela, não é natural.

Ao ressaltar a heterogeneidade dos dois sentidos de conversão, o autor refere-se à diversidade dos tipos de atividades, como por exemplo, passar uma função de sua representação algébrica para a gráfica e da gráfica para a algébrica; enquanto que no primeiro sentido da conversão há congruência, no segundo sentido, não há. Como exemplificamos acima.

Contudo, Duval observou que existe um paradoxo entre a conversão de registros e a compreensão do objeto matemático, pois o aluno só conhece o objeto matemático por meio de sua representação; ele, por si só, é um conceito abstrato. Então nos surge o paradoxo: "*Como não confundir um objeto matemático e sua representação se não temos acesso a esse objeto a não ser por meio de sua representação?*"

Assim, os conteúdos de uma representação dependem mais do registro de representação do que do objeto representado.

Nos exemplos abaixo temos o mesmo objeto matemático representado de duas maneiras diferentes. Porém, se perguntarmos para um aluno do ensino fundamental se essas representações têm o mesmo significado, possivelmente ele dirá que não.

$0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$

(Registro de representação decimal envolvendo um tratamento decimal.)

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(Registro de representação fracionária, utilizando um tratamento fracionário.)

Para o autor, uma articulação de um determinado objeto em mais de uma forma de representação é de fundamental importância para a compreensão real desse objeto, pois é essa pluralidade que mobiliza as capacidades cognitivas do estudante. Um aluno, quando tem domínio das várias formas de representação de um objeto matemático, ele pode selecionar a mais conveniente para a resolução de um tipo de problema proposto a ele.

Em nosso estudo os fenômenos cognitivos são explicados por meio de registros de representação do autor, com ênfase nas distinções que existem entre tratamento e conversão, em especial, a conversão é um instrumento poderoso de análise, na qual todas as variações possíveis que ocorrerão no registro de saída devem ser observadas as respectivas alterações no registro de chegada.

Duval defende que é preciso priorizar as conversões de registros nas atividades matemáticas propostas aos alunos, pois é na conversão que podemos verificar as dificuldades dos alunos na aprendizagem da matemática. É de fundamental importância a diversidade de registro de representação e sua integração com os modelos cognitivos da pessoa no desenvolvimento de uma atividade matemática, uma pluralidade de registros de representação de um objeto e suas articulações são condição para a compreensão do conhecimento matemático.

Acreditamos que essa teoria é adequada para nossa pesquisa, pelo fato de as aplicações das derivadas abrangerem de forma geral tanto tratamentos como conversões nos mais diversos tipos de registros como o figural, o da linguagem natural, o gráfico, o numérico, o algébrico, o analítico, etc.

# CAPÍTULO 4

# PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

## 4.1. PRELIMINARES

O termo concepção que utilizamos em nosso trabalho está calçado nas idéias de Cury(1994) e de Ponte(1992).

Cury, ao realizar um estudo sobre o termo concepção, encontrou diferentes maneiras de defini-lo, pois vários são os autores que consideram as concepções como um grande conjunto que se subdivide em outros pequenos conjuntos, sendo esses compostos por crenças, visões, opiniões, experiências, conhecimentos e, ainda, outros elementos implícitos do indivíduo. Segundo essa autora, o termo concepção engloba toda a filosofia individual do sujeito, ao produzir suas idéias e ao fazer uso delas para interpretar o mundo e resolver situações.

Ponte acredita que as crenças não fazem parte das concepções, pois elas não têm suporte empírico que as justifique, são criações da imaginação humana e, portanto constituem uma forma primitiva do saber. Já as concepções, segundo ele, estão pautadas em conceitos, funcionam como organizadores internos de natureza cognitiva que determinam a forma como o sujeito se manifesta diante das situações.

Sendo assim consideraremos concepção, como sendo as ações dos alunos diante das tarefas propostas; tais ações envolvem seus conhecimentos sobre os conceitos e conteúdos necessários para a resolução da situação. Envolvem também a disponibilidade dessas ferramentas matemáticas; as influências sob como interagir com seus conhecimentos e organizar suas idéias, deixadas pelos seus professores na época da aprendizagem; as associações e relações estabelecidas cognitivamente entre os conceitos aprendidos; as experiências de outras situações enfrentadas e seus interesses pelos desafios.

Para analisarmos as concepções e dificuldades sobre derivada e aplicações dos alunos, elaboramos uma seqüência composta de quatro tarefas. As questões para compor as tarefas foram selecionadas de forma tal que convergissem para aquelas que os documentos oficiais indicam e os órgãos oficiais aplicam.

Com a finalidade de obter um perfil dos alunos participantes da pesquisa, elaboramos um questionário para se resolvido individualmente, composto de quatro perguntas relacionadas à sua formação e avaliação de seu desempenho no estudo de derivada. Além de estabelecer o perfil dos estudantes, pretendemos obter informações relevantes que possam nos auxiliar na análise das respostas das tarefas.

Optamos por fazer uma investigação do que se tem exigido dos alunos de graduação dos cursos de licenciatura e bacharelado em matemática nas avaliações nacionais de 1998 a 2005 (Provão: 98/99/00/01/02/03; Enade: 05, no ano 04 os cursos de matemática não foram avaliados) no que se refere ao estudo da derivada e, com base em algumas dessas questões, pretendemos elaborar nossa seqüência de tarefas.

Observamos que as diretrizes curriculares nacionais para os cursos de matemática, Licenciatura e Bacharelado indicam as habilidades e competências que os alunos devem manifestar na resolução de uma determinada situação matemática, sendo elas:

> e) Habilidade de identificar, formular e resolver problemas na sua área de aplicação, utilizando rigor lógico-científico na análise da situação-problema;
> f) Estabelecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento;
>
> (Parecer CNE/CES 1.302/2001, p.3 e 4)

Após a investigação e o estudo dos documentos e dos registros citados e com base em nosso referencial teórico, produzimos nossa seqüência contemplando os tópicos relativos ao tema derivadas, para tentar responder a nossa questão de pesquisa. Com essa seqüência pretendemos que os alunos interajam de forma satisfatória com seus conhecimentos para a resolução das tarefas, apresentamos a seguir como ficou a organização das tarefas.

I- Atividades para determinação da derivada de algumas funções sem o uso de tabela;

II- Atividades que envolvem pontos de máximo e mínimo;

III- Estudo do comportamento de uma função a partir do gráfico de sua derivada;

IV- Problemas de máximo e mínimo.

Antes de iniciar a resolução das tarefas, aplicamos o questionário de composição do perfil dos alunos, que se encontra no inicio do capítulo 5.

## 4.2. AS TAREFAS / ANÁLISES PRÉVIAS

Às tarefas I e II acrescentamos um breve resumo conceitual sobre as derivadas, com o objetivo de fornecer uma fonte de consulta para os alunos. Essas tarefas contêm duas questões cada, com elas, pretendemos que os alunos fiquem mais familiarizados com o tema e possam realizar mais facilmente as tarefas III e IV, que versam sobre a aplicação da derivada.

Tarefa I

Objetivo: propiciar aos alunos um momento de familiarização com os conceitos e as técnicas de derivação de algumas funções.

**Sabemos que a derivada de uma função pode ser calculada pelo**

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

**Porém, se a função for uma função polinomial de grau n, podemos obter essa mesma derivada com o uso da "regra do polinômio".**

$$f(x) = ax^{n} \Rightarrow f\,`(x) = n.ax^{n-1}$$

**Contudo, se f(x) for uma função composta f(g(x)).**

**Temos que: $f(x) = g(x)^{n}$, com $n \neq 0 \Rightarrow f\,`(x) = n.g(x)^{n-1}.g\,`(x)$ ou com outra notação: $y = u^{n} \Rightarrow y\,`(u) = n.u^{n-1}.u`$**

Questões:

1) Determine a derivada das funções abaixo:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^4$

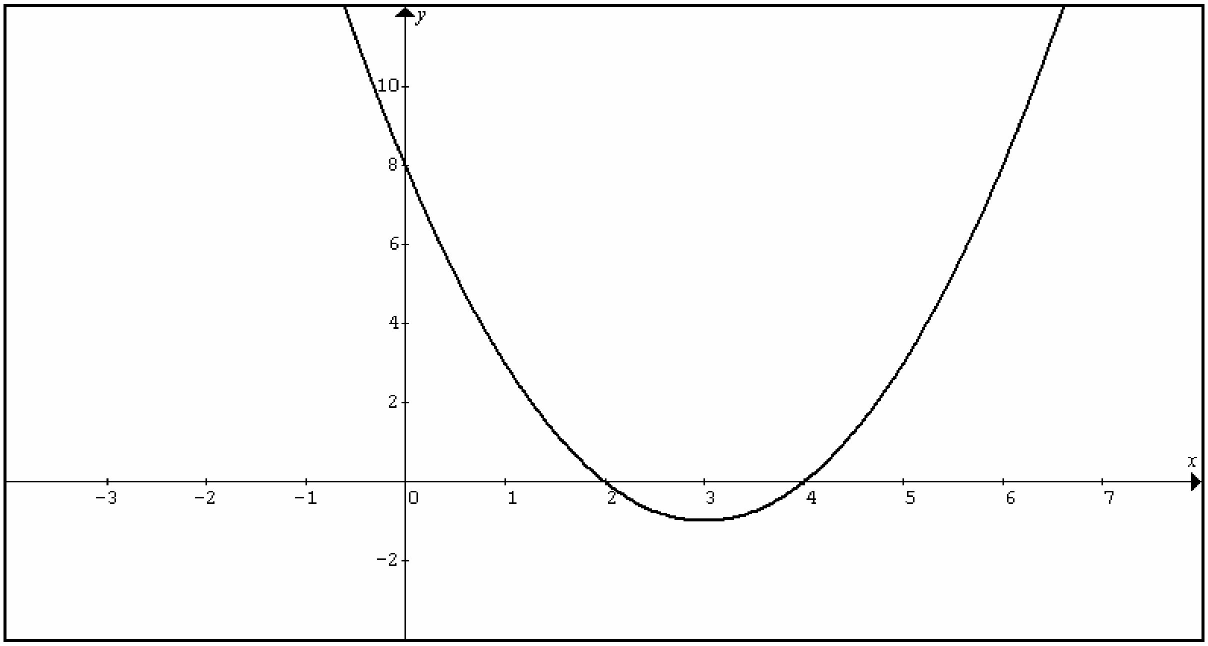
b) $f(x) = 7(ax^3 + bx^2 + cx)$

c) $y = \frac{3}{x^4} + \frac{2}{x^5}$

d) $y = (3x^2 - 4x)^2$

2) Calcule a derivada primeira da função f(x) representada no gráfico a seguir Sugestão:

$x_v = \frac{-b}{2a}$, $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$, $f(0) = c$




Pretendemos relacionar as respostas do questionário de composição do perfil com as respostas apresentadas pelos alunos nas tarefas I e II propostas, a saber: determinação da derivada de funções e pontos de máximos e mínimos de funções.

Na tarefa I, a primeira questão contém quatro itens que trazem as representações algébricas de funções e se pede para calcular a sua derivada. Para resolvê-las, os alunos precisarão realizar tratamentos nos registros algébricos com o uso das regras de derivação de funções que envolvem potências.

Propusemos em três dos itens funções polinomiais por serem os tipos que mais aparecem nas aplicações das derivadas nos livros de Cálculo. A função do item c) foi escolhida para investigar se os alunos utilizam a regra do quociente ou se fazem um tratamento para obter potências com expoente negativo.

Nessa questão escolhemos funções que podem sugerir a necessidade de tratamentos no registro algébrico por ser um registro muito familiar aos alunos e pelos nossos objetivos com a questão, que é de retomar algoritmos de derivação de uma função.

Já na segunda questão optamos por apresentar a função no registro gráfico, pois para resolvê-la, os alunos precisarão realizar uma conversão não congruente do registro gráfico para o algébrico, formulamos dessa maneira por acreditarmos, assim como Duval, na importância da mudança de registro diante das situações de aprendizagem.

Essa questão exigirá um pouco mais de conhecimentos matemáticos dos alunos, principalmente por valorizar a conversão de registros e também, pelo fato de essa conversão não ser congruente. O objetivo é verificar se os estudantes identificam o modelo e conseguem obter a representação algébrica da função, objeto de estudo da questão, e encontre a sua derivada.

Tarefa II

Objetivo: verificar se os alunos conseguem relacionar os conceitos de derivada e os de máximo e mínimo de função contínua, coordenando dois tipos de conversão de registros de representação (gráfico/algébrico e algébrico/gráfico).

**Dada uma função derivável f, ao calcularmos f \`(x) = 0, determinamos os seus pontos críticos, que podem ser pontos de máximo local, mínimo local ou abscissa de ponto inflexão.**

**Considerando um intervalo ]a,b[ e se para todo ponto x desse intervalo:**

**f \`(x) > 0, então f é crescente no intervalo ]a,b[**

**f \`(x) = 0, então f é constante no intervalo ]a,b[**

**f \`(x) < 0, então f é decrescente no intervalo ]a,b[**

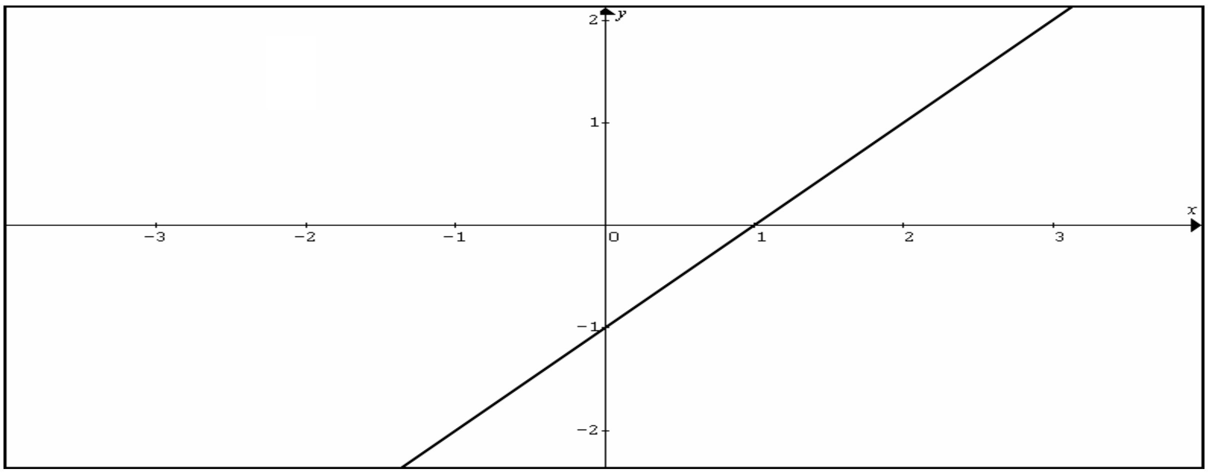
Questões:

1) O gráfico a seguir é o da derivada f `de uma função f. Com base nesse gráfico, assinale se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações. Justifique sua resposta.

a) A função f tem ponto de mínimo em x = 1

b) A função f tem ponto de máximo em x = 1

c) A função f é crescente em todo o seu domínio.




2) Dada a função: IR $\rightarrow$ IR definida por $f(x) = x^3 - 3x + 2$

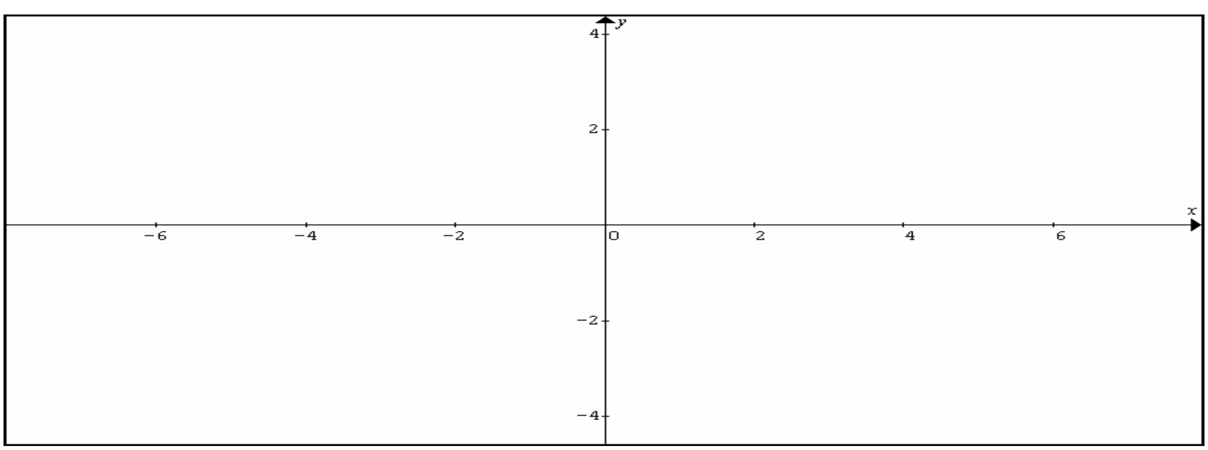
a) Ache os pontos críticos de f

b) Encontre os pontos de máximo local e de mínimo local de f

c) Determine os máximos e os mínimos locais

d) Dê as coordenadas de seu ponto de inflexão

e) A partir dos resultados obtidos nos itens a, b, c, d, esboce o gráfico de f



Na tarefa II apresentamos alguns resultados relacionados ao estudo, que consideramos básicos para a resolução das questões propostas. Por meio dela, propomos um estudo mais conceitual das aplicações da derivada, em que o objetivo principal é ensejar aos alunos a manipulação da relação que existe entre a função e sua derivada de primeira ordem. A primeira questão foi formulada a partir da questão objetiva número 27 do provão de 1998, haja visto valorizar o registro gráfico e algébrico em sua resolução.

Esta questão exige a manipulação de conhecimentos relativos ao registro de representação gráfico da função e de sua derivada; exige ainda que os alunos apresentem em suas afirmações a relação que existe entre a derivada da função com a função. Acreditamos que um erro muito comum que pode surgir nas respostas é confundir as características da derivada com as da função.

Já a segunda questão, exigirá durante quase todo o processo de resolução, a realização de tratamentos no registro algébrico, porém no último item será necessária a realização de uma conversão do registro algébrico para o gráfico.

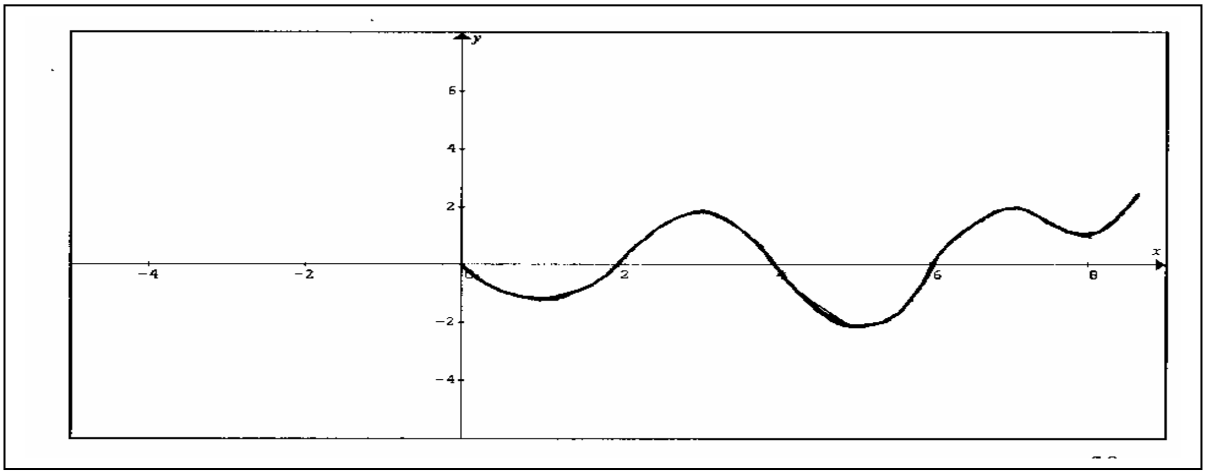
Ainda na segunda, questão privilegiamos os conceitos relacionados da função com sua derivada no registro algébrico, objetivando principalmente a obtenção do registro gráfico da função a partir dos resultados obtidos com a derivada da função no registro algébrico. Em geral, questões desse tipo exigem uma conversão de registro congruente; contudo, por se tratar de dados obtidos com a derivada da função para auxiliar no esboço do gráfico da função, a relação de congruência pode ficar comprometida a nosso entender. Ainda assim, cremos que será uma questão bem sucedida pelos alunos em virtude do direcionamento proposto para sua resolução.

Tarefa III

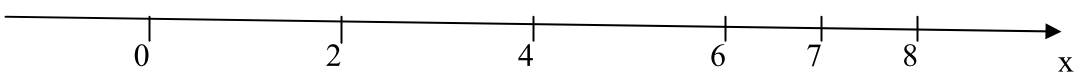
Objetivo: investigar se os alunos conseguem aplicar os conceitos de derivada de forma satisfatória na resolução de uma situação realizando a conversão dos resultados obtidos para o registro gráfico.

Questão:

Um trecho do gráfico da derivada primeira f ` de uma função f: IR $\rightarrow$ IR é:




a) Na reta abaixo represente com setas ↗ ou ↘ os intervalos em que a função f é crescente ou decrescente.

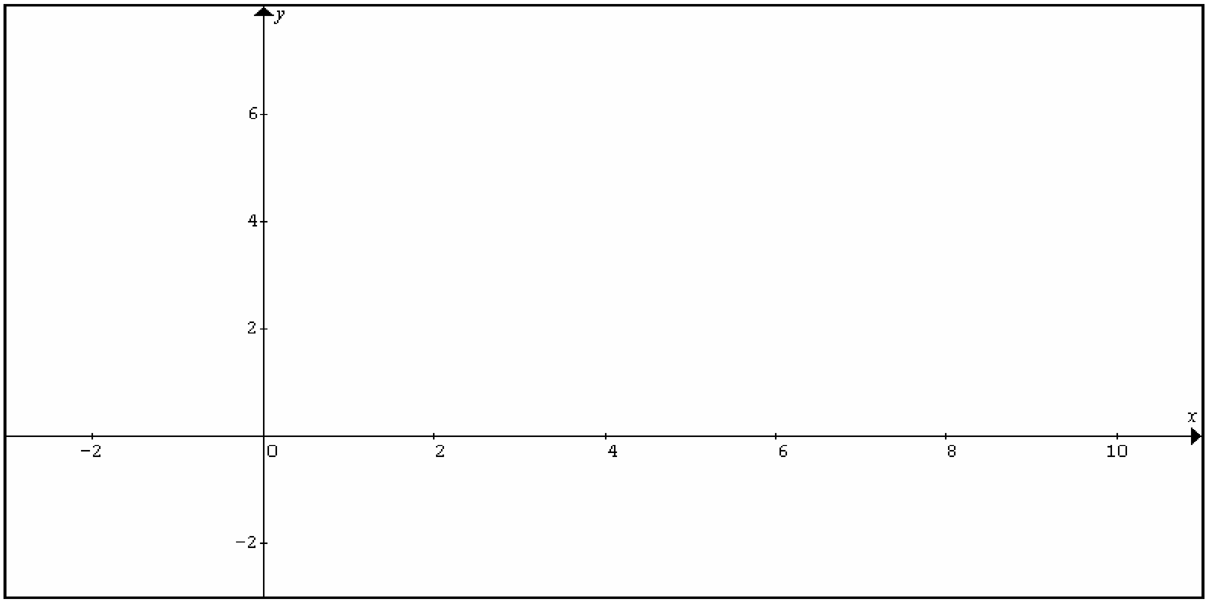



b) Em que valores de x, f tem um máximo ou mínimo local? Explique.

c) Em quais intervalos f é côncava para cima ou para baixo?

d) Quais as coordenadas x, dos pontos de inflexão de f?

e) No sistema de eixos coordenados abaixo faça um esboço do gráfico de f, sabendo que os pontos (0,3), (2,1), (4,3), (6,2), (7,3) e (8,4) pertencem ao gráfico.




A tarefa III contém apenas uma questão, que foi inspirada na questão 30 (discursiva) do ENADE 2005, em que se pretendia verificar os conhecimentos dos alunos quanto ao comportamento de uma função a partir do gráfico de sua derivada. Ela foi selecionada pela importância apresentada em nossa fundamentação teórica da alternância de registros durante a resolução de uma dada situação de aprendizagem.

Essa questão exigirá do aluno a compreensão do significado do sinal da derivada de uma função a partir de seu gráfico e a relação que existe entre este e o crescimento e decrescimento da função. A questão é proposta no registro gráfico e valorizará os conceitos relacionados da função com sua derivada nesse registro de representação.

Tarefa IV

Objetivo: propor aos alunos uma situação de aplicação do uso das derivadas em outras áreas do conhecimento, verificando se eles conseguem identificar os conceitos matemáticos necessários para a plena resolução das questões, interagem de forma satisfatória com essas representações e analisam a validade dos resultados obtidos.

Questões:

1) Uma fábrica produz x milhares de unidades mensais de um objeto. Se o custo de produção é dado por $C = x^3 + 3x^2 + 9x + 30$ e o faturamento obtido na venda é dado por $F = 30x - 6x^2$. Determinar o número ótimo de unidades mensais que maximizará o lucro $L = F - C$

2) Uma caixa com base quadrada e sem tampa tem um volume de 32000 $cm^3$. Determine:

a) Uma possível representação geométrica dessa caixa;

b) As expressões algébricas que calculam área total e volume dessa caixa;

c) As dimensões da caixa que minimizam a quantidade de material usado para montar a caixa.

A tarefa IV é composta de duas questões. A primeira foi inspirada em aplicações do uso da derivada na área da Economia; ela traz uma situação de aplicação da derivada para ser desenvolvida totalmente no registro algébrico com o uso de tratamentos. Pode ocorrer de os alunos derivarem as funções de Faturamento e Custo separadamente. Porém, derivar a função Lucro, a nosso ver, seria uma resolução simplificada para a questão. Fazer a análise da solução da derivada de segunda ordem da função é uma etapa desnecessária, pois, pela natureza do problema a escolha correta da raiz da derivada é obvia, já que apenas uma delas é positiva.

A segunda está diretamente relacionada com a Geometria. Ela exigirá que os alunos escrevam o problema com o uso de uma representação geométrica, efetuando assim uma conversão, o que exigirá ainda do aluno conhecimentos de Geometria Métrica (área total e volume do paralelepípedo) e de Álgebra (sistemas de equações) adicionados aos conhecimentos das aplicações da derivada.

Classificamos essa questão, como de difícil resolução, pela ampla exigência de conhecimentos matemáticos e procedimentais. Nosso principal objetivo com ela é observar se de fato os alunos relacionam os conteúdos aprendidos com os problemas de aplicação, por ser uma competência muito exigida dos alunos após a realização de um curso. Contudo ressaltamos que esses procedimentos de resolução necessários encontram-se muito próximos aos exigidos nas questões anteriores.

Assim como na primeira questão, a análise da derivada de segunda ordem fica dispensada, mas agora pelo fato da resposta ser única. Observamos que as duas questões dessa tarefa têm em comum o fato de envolverem máximos e mínimos em sua resolução.

## 4.3 – TESTANDO AS TAREFAS

Na expectativa de observar as ações dos alunos diante de nossa seqüência de tarefas, realizamos uma aplicação experimental com três professores da rede estadual de educação, do estado de São Paulo, Eles foram convidados a participar do teste pelo fato de terem estudado ou estarem estudando no mesmo período de sua realização disciplina relacionada ao tema objeto de nosso estudo. Essa escolha se deu, pois o foco principal de nossa pesquisa é analisar se, de fato, após um curso de Cálculo as competências elementares sobre as aplicações da derivada fazem parte das habilidades adquiridas pelos alunos.

Verificamos pelas respostas obtidas no questionário que os três professores haviam estudado derivadas há mais de um ano. Quanto à abordagem enfatizada pelos seus professores durante o curso, dois deles responderam ter sido a conceitual e um a mista com valorização das três (conceitual, tecnicista e aplicada).

Todos os professores assinalaram que seu desempenho foi satisfatório diante de atividades que envolviam o conteúdo tema de nosso estudo, conseguindo citar exemplos de aplicações das derivadas; porém, dois citaram o coeficiente angular da reta tangente a um gráfico da função, como aplicação de derivada. Acreditamos que esse exemplo seja fruto de uma resposta imediatista, tendo em vista ser uma aplicação citada na maioria dos livros textos de Cálculo, na introdução do estudo da derivada ou nas primeiras aplicações. Citaram ainda que o conhecimento da derivada auxilia no estudo do comportamento do gráfico de uma função, sendo que essa aplicação é objeto de estudo de nosso teste.

Na Tarefa I, os professores foram bem sucedidos na resolução da primeira questão, sendo que eles usaram com facilidade a regra da potência para a obtenção da função derivada. Interessante observar que somente um dos professores desenvolveu o produto obtido na derivada da função do item d, que era uma função composta, com o objetivo de simplificar a lei dessa função; os outros se limitaram em aplicar a regra da cadeia, sem efetuar o produto.

A segunda questão foi resolvida com sucesso pelos três professores, mas ao contrário do que nós esperávamos, eles não utilizaram as informações dadas para obter a representação algébrica da função, fizeram uso da forma fatorada do polinômio e posteriormente utilizando essa expressão calcularam a função derivada solicitada.

Na Tarefa II, primeira questão, dois deles erraram a questão por confundir o sinal da função derivada e o comportamento de seu gráfico com o comportamento do gráfico da função primitiva. Já na segunda questão todos tiveram sucesso na resolução. Observamos com essa tarefa que os professores tiveram mais facilidade em lidar com os cálculos na representação algébrica de uma função, (comportamento típico de alunos que estudaram com a forma tecnicista, "contradizendo ao que responderam quanto à abordagem enfatizada durante o curso"), do que fazer observações e chegar a conclusões a partir do registro gráfico de funções.

A Tarefa III só foi realizada com sucesso em todas as etapas de sua resolução por um deles, pois os outros dois cometeram erros ao confundir novamente o comportamento do gráfico de uma função f com o de sua derivada f ´, tanto no crescimento/decrescimento, quanto no sinal da função em um determinado intervalo e nas posições da concavidade de uma curva nos intervalos do gráfico de f, contudo, conseguiram esboçar parcialmente o intervalo do gráfico solicitado. Acreditamos que os pontos dados no item acabaram influenciando o esboço da curva.

Os mesmos dois que não conseguiram resolver a Tarefa III tiveram dificuldades na hora de fornecer o resultado final da primeira questão da Tarefa IV, pois confundiram a quantidade de unidades solicitadas com faturamento, em um dos casos, e a representação de um número no sistema de numeração, no outro caso, mas os cálculos e a utilização da derivada foram feitos com sucesso pelos três professores.

Na segunda questão da mesma tarefa um deles não conseguiu obter a representação geométrica da caixa; toda via, ele só conseguiu resolver a questão após lhe terem sido fornecidos as expressões que calculam área total e volume do paralelepípedo. Os outros dois resolveram a questão sem dificuldades, porém, apenas um deles verificou se de fato o ponto obtido era de mínimo para a função.

Assim, concluída a analise da aplicação experimental, não vemos a necessidade de realizar alterações no teste para a realização do estudo principal.

## 4.4 – APLICAÇÃO

A seqüência de tarefas foi aplicada em meados da segunda quinzena do mês de setembro de 2008, realizamos a aplicação com alunos do 4º e 6º semestre do curso de Licenciatura em Matemática (curso noturno) de uma instituição de ensino superior da cidade de São Paulo, sendo que geral os alunos são oriundos de escolas públicas da região e, tradicionalmente ao se formarem tornam-se professores de escolas publicas e particulares da mesma localidade.

A aplicação se deu em uma única sessão de aproximadamente três horas e meia para todos os alunos. Contamos com a participação de cinco duplas de alunos do 4º semestre e de quatro duplas de alunos do 6º semestre do curso. A realização do trabalho em duplas foi feita para propiciar a eles a possibilidade de troca de informações, de idéias e conhecimentos para a resolução das tarefas.

Optamos em realizar nossa pesquisa com duplas de alunos de dois períodos diferentes do curso, por crermos que o intervalo de tempo em que eles estudaram o conteúdo matemático objeto de nosso estudo e o amadurecimento dos conteúdos aprendidos, sejam fatores relevantes que influenciam o desempenho diante das tarefas propostas.

Entregamos às duplas o questionário de composição do perfil (um para cada aluno) e as tarefas I e II. Explicamos que, ao término das tarefas I e II, recolheríamos as folhas e entregaríamos as tarefas III e IV. Em geral, as duplas levaram uma hora e meia para realizar cada etapa do teste. A primeira dupla a terminar a primeira etapa levou mais ou menos quarenta e cinco minutos, ao passo que a última a terminar essa mesma etapa levou cerca de uma hora e cinqüenta minutos. Assim ocorreu a aplicação da seqüência. O objetivo desse procedimento era não permitir que as tarefas III e IV influenciassem as respostas das perguntas feitas no questionário de composição do perfil.

Durante a aplicação, contamos com a presença dos dois professores das turmas e de um observador, os dois professores não interferiram no nosso trabalho, no entanto o observador registrou os principais acontecimentos que ocorreram durante a aplicação.

Gravamos três das nove duplas que participaram da aplicação, após o consentimento das mesmas, porém uma dupla desligou o gravador após dez minutos de gravação, fato que comprometeu a análise desse material, já as gravações das outras duas duplas não apresentaram diálogos relevantes sobre as tarefas, em função dessas ocorrências consideramos desnecessário o uso desse material em nosso trabalho.

# CAPÍTULO 5

## ANÁLISE DOS RESULTADOS

Antes da realização das tarefas, aplicamos aos alunos um questionário composto de quatro perguntas, com a finalidade de conhecermos dados quanto ao processo de aprendizagem dos estudantes relativos à derivada.

**Questionário:**

1) Há quanto tempo você estudou as derivadas?

a)Nesse semestre
b)Há um semestre
c)Há dois semestres
d)Há mais de dois semestres

2) Assinale a abordagem que segundo suas concepções mais foi enfatizada durante o curso:

a)Conceitual (a partir de definições)
b)Tecnicista (a partir de técnicas para fazer cálculos)
c)Aplicada (a partir de problemas com o uso dos conceitos e técnicas)
d)Mista com valorização das três citadas acima

3) Como você classifica seu desempenho durante o curso, nas atividades que envolviam as derivadas:

a)Muito satisfatório
b)Satisfatório
c)Parcialmente satisfatório
d)Insatisfatório

4) Cite dois exemplos de problemas práticos da matemática ou de outras ciências em que as derivadas auxiliam na resolução:

Apresentaremos na tabela a seguir os dados coletados com o questionário.

| Grupo/Sem. | | Q 1 | Q 2 | Q3 | Questão 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| G1 / 6º | a | mais de dois | d | b | Na física/ Equações Diferenciais Ordinárias |
| | b | mais de dois | d | b | Na física/ Equações Diferenciais Ordinárias |
| G2 / 6º | a | mais de dois | d | c | Aceleração e velocidade de corpos/ área de figuras planas |
| | b | mais de dois | b | b | Aceleração de um corpo/ maior volume com menor custo material |
| G3 / 6º | a | mais de dois | b | d | Não citou |
| | b | mais de dois | b | c | Cálculo de área da superfície de uma figura |
| G4 / 6º | a | mais de dois | b | b | Velocidade na cinemática/ Equações Diferenciais |
| | b | mais de dois | b | d | Cálculo de áreas/ Equações Diferenciais |
| G5 / 4º | a | um | a | b | Aceleração na cinemática/ Custo mín. para produção máx. de latas |
| | b | um | d | c | Aceleração na cinemática/ Custo mín. para produção máx. de latas |
| G6 / 4º | a | um | a | c | Aceleração na física |
| | b | um | b | c | Mecânica (física)/ Logistica |
| G7 / 4º | a | um | a | c | Receita, lucro, curvatura de produção, etc |
| | b | um | a | c | Receita, lucro, produção de certos produtos |
| G8 / 4º | a | um | b | d | Cálculo de áreas |
| | b | um | d | c | Cálculo de áreas |
| G9 / 4º | a | um | b | b | Dedução de fórmulas da cinemática/ cálculo de área |
| | b | um | a | a | Dedução de fórmulas da cinemática/ máx. mín. e otimização de funções |

Podemos observar que os alunos do 4º semestre estudaram derivada há um semestre e os do 6º semestre há mais de dois, por isso, concluímos que eles estudaram derivada no 3º semestre de seus respectivos cursos.

A seguir apresentamos a análise dos resultados apresentados pelos estudantes na resolução das tarefas. Para tal, reproduzimos os enunciados das questões, antes das descrições das respostas.

Os protocolos das quatro duplas dos estudantes do 6º semestre foram numerados de 1 a 5 e os das cinco duplas do 4º semestre receberam os números 6,7,8 e 9.

Tarefa I / questão 1

Determine a derivada das funções abaixo:

a) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^4$

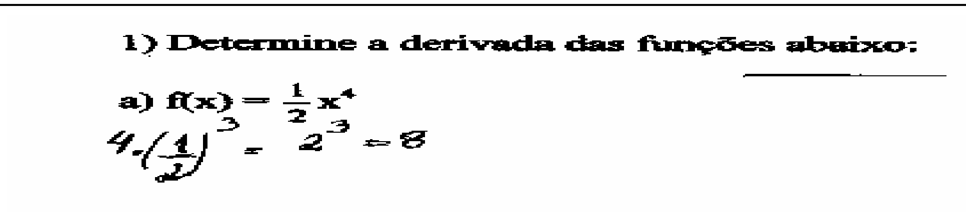
b) $f(x) = 7(ax^3 + bx^2 + cx)$

c) $y = \dfrac{3}{x^4} + \dfrac{2}{x^5}$

d) $y = (3x^2 - 4x)^2$

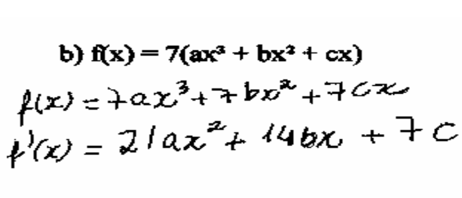
Conforme prevíamos, os alunos tiveram um bom desempenho nos itens da 1ª questão pelo fato de estarem diante de atividades representadas no registro algébrico, que epistemologicamente é o registro mais familiar na representação dos objetos matemáticos, além do fato que a resolução depende tão somente da aplicação de técnicas e de tratamentos algorítmicos.

Apenas uma dupla apresentou resultado insatisfatório no primeiro item, por terem seus componentes substituído o coeficiente numérico na variável x da função derivada de f, suprimindo esse coeficiente e cometido erros operacionais, como mostra o protocolo.

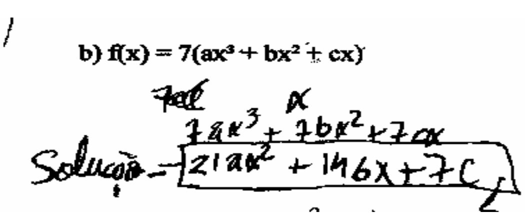



Dupla 6

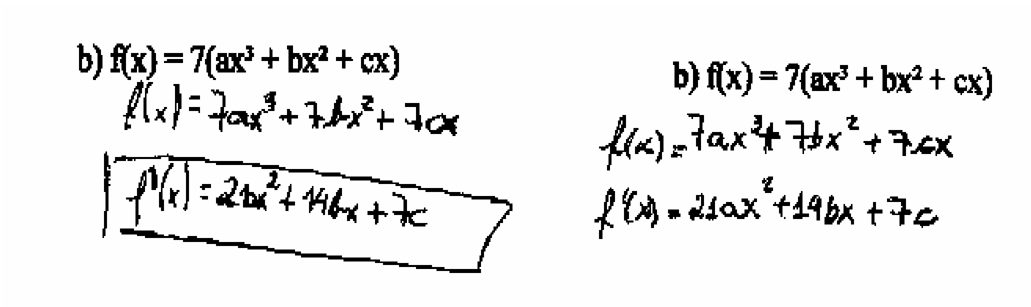
É interessante observar que a maioria das duplas resolveu o segundo item somente após desenvolverem o produto indicado na representação algébrica da função, possivelmente, lembraram-se da regra da derivada do produto de funções e sentiram-se incomodados com a presença da função constante, pois ao final da resolução, a maioria das duplas não colocou o fator comum entre os termos, em evidência.




Dupla 7

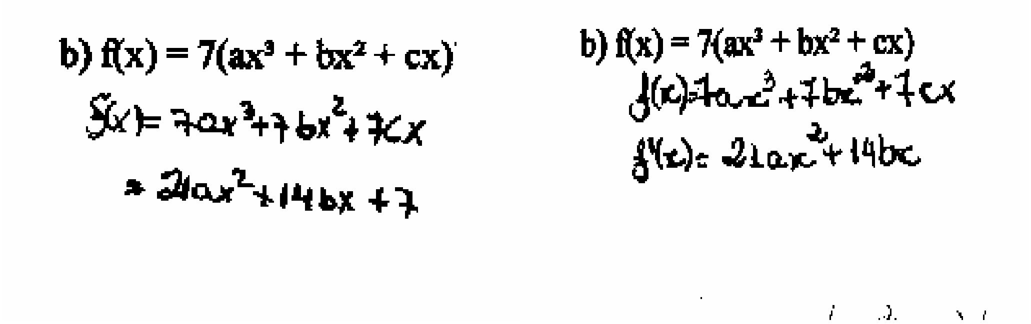



Dupla 1



Dupla 5 Dupla 6

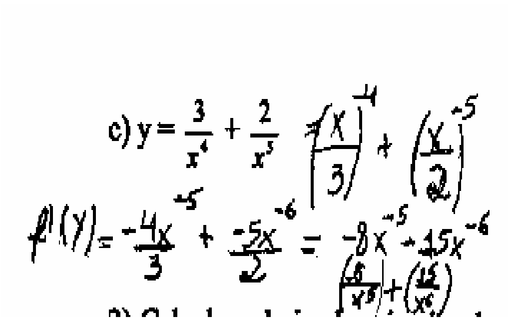
Duas duplas resolveram corretamente em parte o item b), cometendo igualmente um erro, que foi o de cancelar a constante c do termo independente da função derivada. Isso nos mostra que alguns alunos confundem a variável independente de uma função com um parâmetro que eventualmente seja fator de multiplicação por uma constante numérica independente da função.



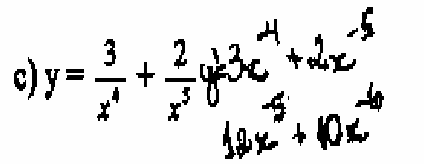
Dupla 4 Dupla 8

No terceiro item, no qual acreditávamos que os alunos pudessem recorrer eventualmente à regra do quociente de funções, tivemos todas as resoluções desenvolvidas pelo uso das potências de expoente negativo, e somente duas duplas desenvolveram erroneamente.

A dupla 6 ignorou o sinal de adição entre os termos e considerou como se fosse de igualdade, pois multiplicaram as frações “em cruz”, já a dupla 8 cometeu um erro na multiplicação dos números relativos.

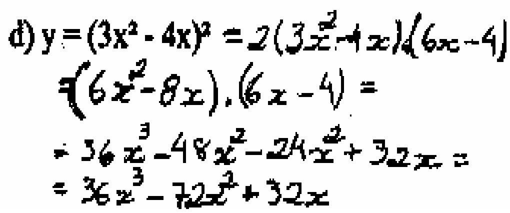


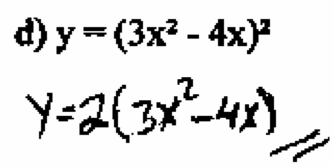
Dupla 6



Dupla 8

O quarto item foi resolvido com sucesso por sete das nove duplas, Notamos que, apesar de termos fornecido a regra da derivada de função composta, somente duas duplas optaram por utilizá-la em sua resolução, sendo que só uma delas (dupla 3) resolveu-a com sucesso, a outra (dupla 4) esqueceu de derivar o argumento da função composta.



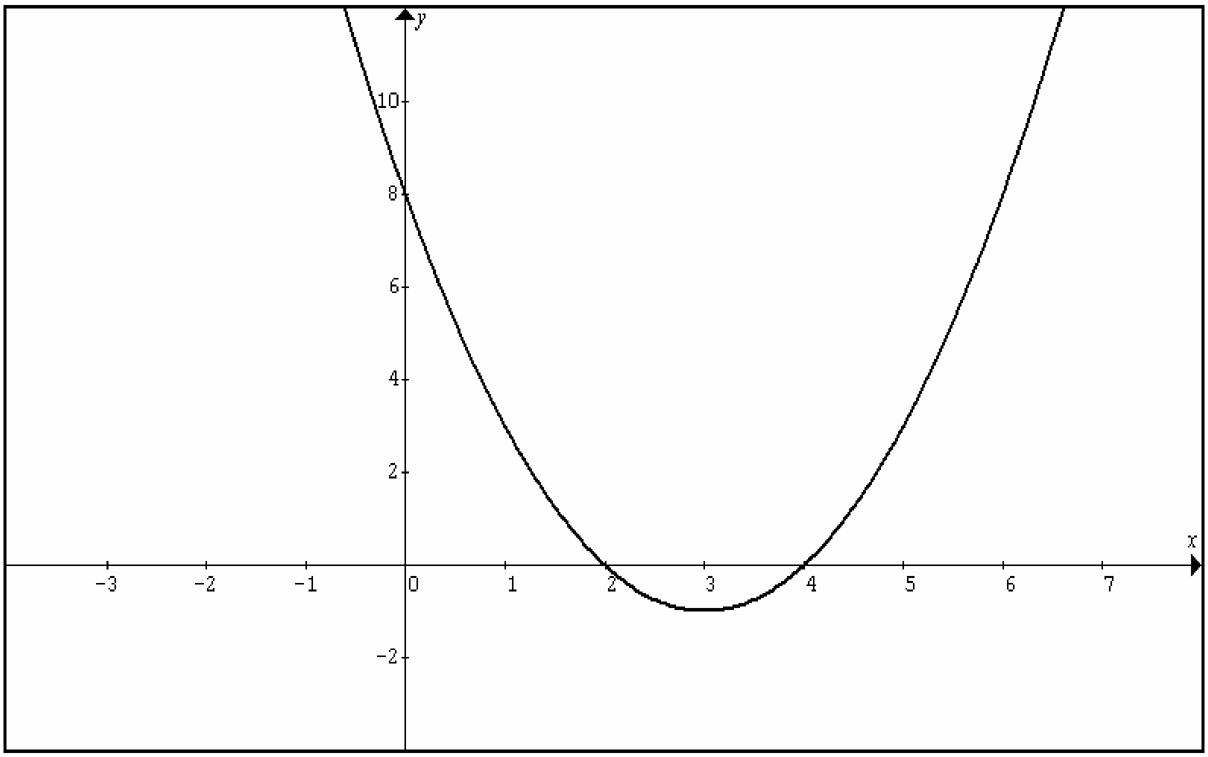




Assim como Duval, acreditamos que o bom desempenho apresentado pelos alunos em tarefas desse tipo é justificado pelo fato de as questões exigirem somente tratamentos em um mesmo registro de representação. Dentre as duplas que não conseguiram realizar as tarefas, somente uma era do 6º semestre do curso, o que nos faz entender que os alunos do 6º semestre estão mais familiarizados com os cálculos e os conteúdos envolvidos nas resoluções dos itens; possivelmente, seus conhecimentos estejam mais bem organizados.

De fato, como a maioria dos alunos respondeu na 2ª questão do questionário, os resultados apresentados na tarefa I é comum entre alunos que estudaram numa abordagem tecnicista (a partir de cálculos).

Tarefa I / questão 2

Calcule a derivada primeira da função f(x) representada no gráfico a seguir. (Sugestão: $x_v = \frac{-b}{2a}$ , $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$ , f(0) = c)




Já na 2ª questão da tarefa, houve um desempenho muito abaixo do esperado, verificando-se que as conversões de registros, principalmente as não congruentes, representam de fato grandes dificuldades na aprendizagem dos alunos. Apesar de eles conhecerem a forma genérica da representação algébrica de uma função do 2º grau, conseguir reconhecer sua representação gráfica e, até mesmo, obter dados evidentes nessa representação para a representação algébrica, não conseguem manipular esses dados nem desenvolver expressões que solucionem a questão, como evidenciam os protocolos apresentados a seguir.

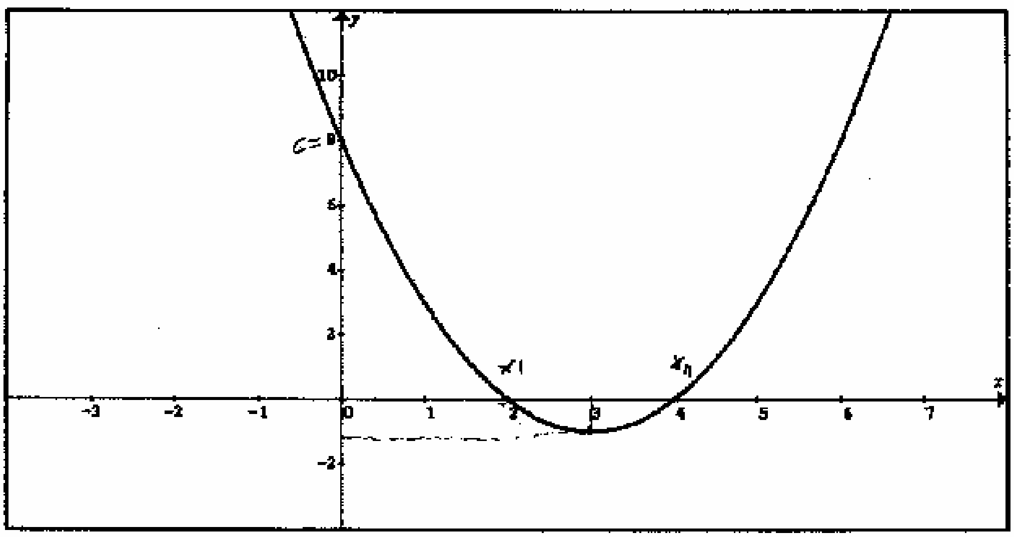
2) Calcule a derivada primeira da função f(x) do 2º grau, representada no gráfico a seguir. (Sugestão: $X_v = \frac{-b}{2a}$, $\boxed{y_v = \frac{-\Delta}{4a}}$, f(0) = c)

$f(o) = 8 \qquad ax^2 + bx + c = 0$

Dupla 3

2) Calcule a derivada primeira da função f(x) do 2º grau, representada no gráfico a seguir. (Sugestão: $X_v = \frac{-b}{2a}$, $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$, f(0) = c)

$x^2 + 2x + 8 = 0$




$4 \pm \qquad x^2 \qquad \frac{\phantom{xx}}{2} \qquad x^2 + 4x + 8$

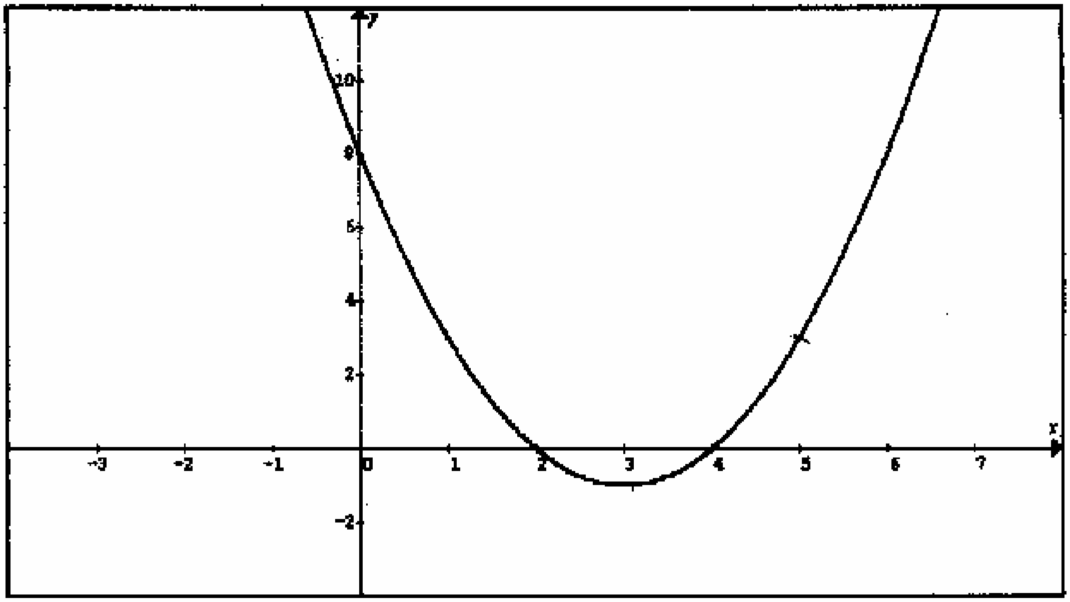
$4 \pm 6$

$5 + 4$

Dupla 6

Somente a dupla 9 (do 4º semestre) conseguiu resolver a questão completamente fazendo uso da sugestão indicada.

**2) Calcule a derivada primeira da função f(x) do 2º grau, representada no gráfico a seguir. (Sugestão: $X_v = \frac{-b}{2a}$ , $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$ , $f(0) = c$)**




$C = 8$

$a > 0$

$x_v = 3$

$3 = \frac{-b}{2a}$

$6a = -b$

$b = -6a$

$b = -6$

$ax^2 + bx + c = 0$

$2^2a + 2b + 8 = 0$

$4a + 2b + 8 = 0 \Rightarrow 4a + 2(-6a) + 8 = 0$

$16a + 4b + 8 = 0$

$4a - 12a + 8 = 0$

$a = 1$

$f(x) = x^2 - 6x + 8$

$\boxed{f'(x) = 2x - 6}$

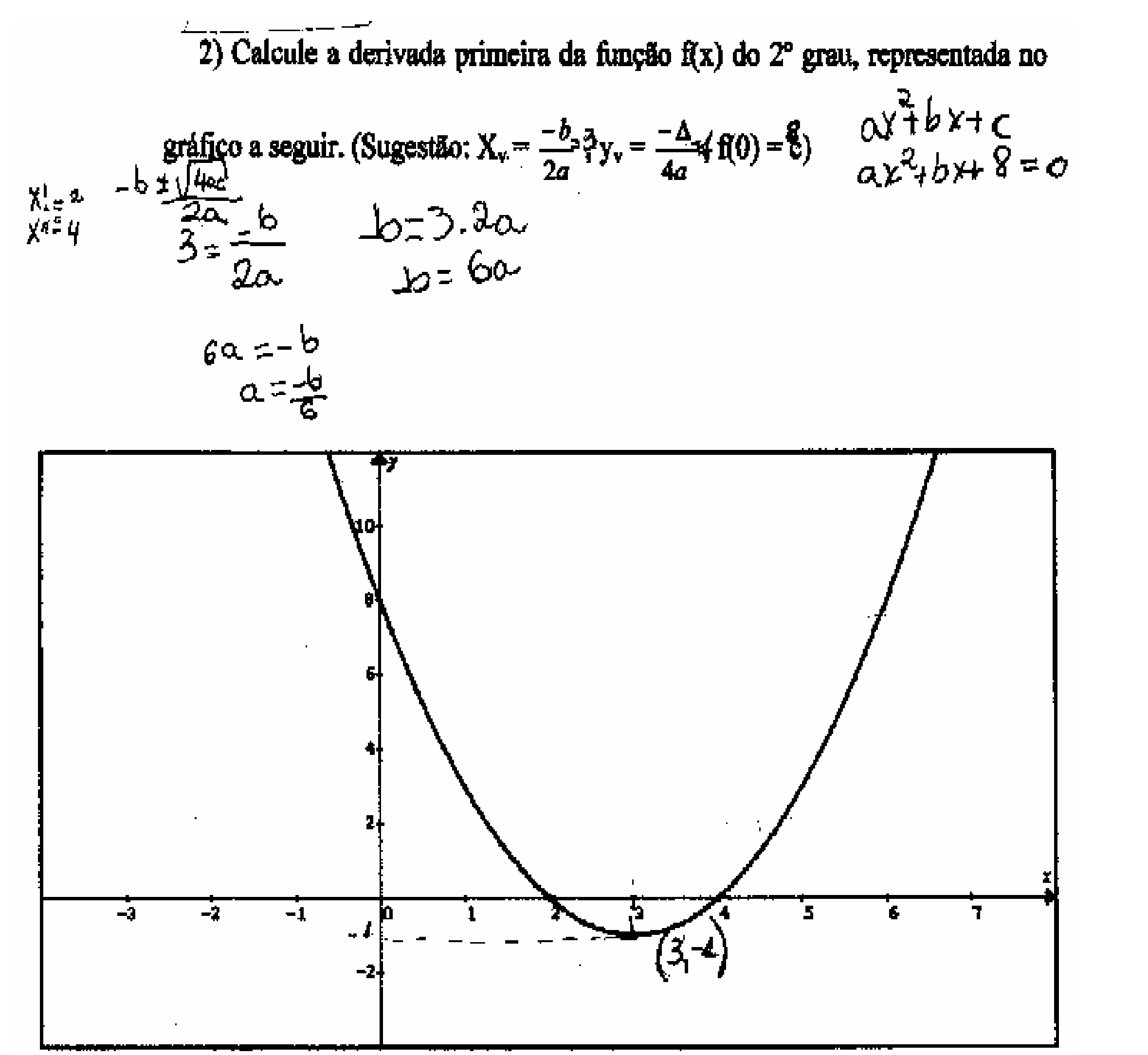
**Tarefa II**

Dupla 9

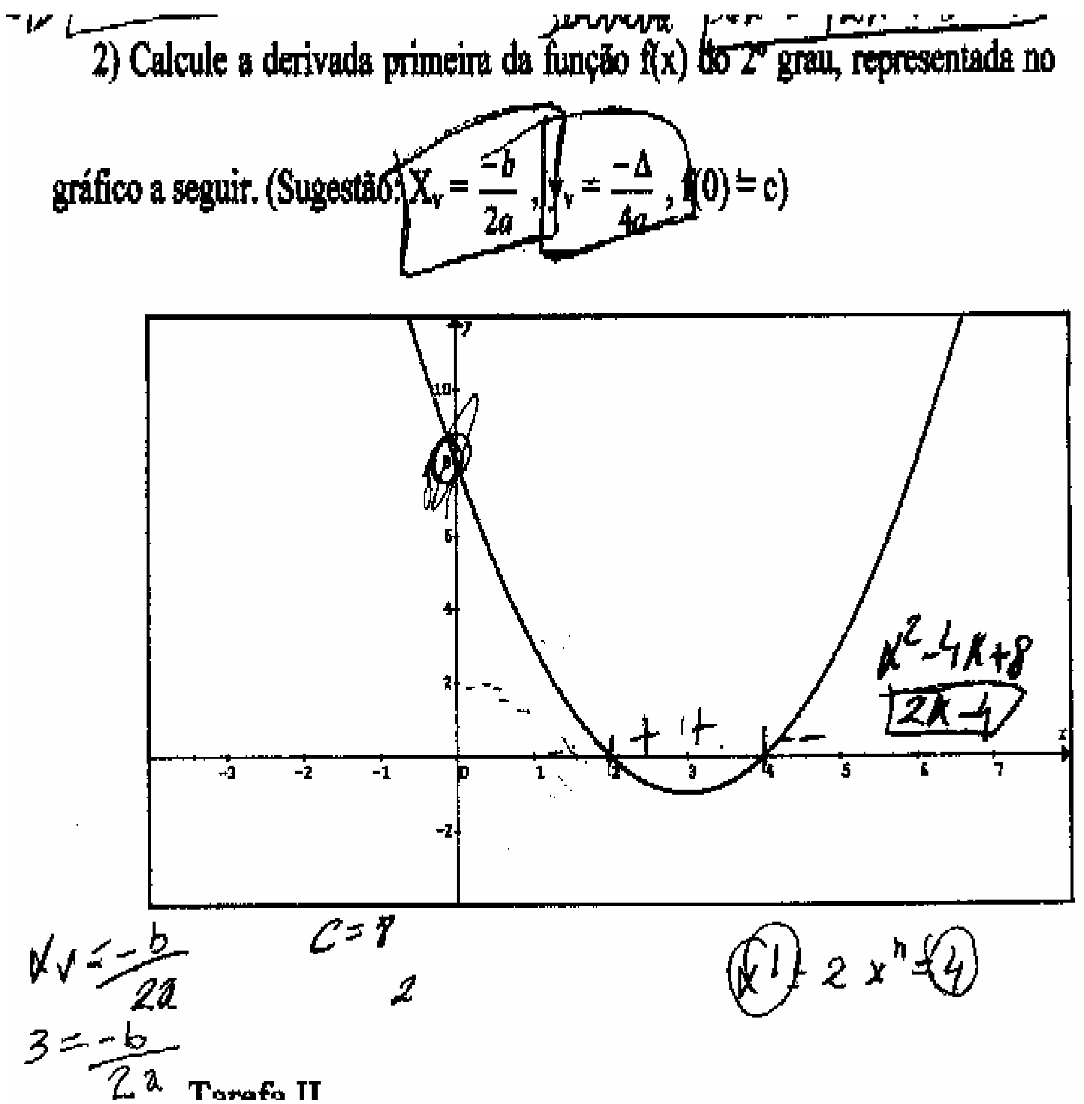
Observamos que essa dupla só fez uso da expressão da abscissa do vértice da parábola, calculando b em função de a, e utilizou um procedimento não previsto por nós, seus componentes substituíram na representação genérica da função a raiz x = 2 e o coeficiente b em função de a, e com isso determinaram o valor de a. Na seqüência retornando na expressão de b em função de a obtiveram o seu valor, com isso apresentaram a expressão algébrica de f e encontraram a derivada f ´.

Esse tipo de resolução evidencia um bom domínio das manipulações algébricas (tratamentos) relacionadas ao conceito estudado.

Outras seis duplas conseguiram identificar o coeficiente independente “c” e as raízes da função com o auxilio do gráfico; porém, somente três dessas duplas, sendo elas de alunos do 6º semestre do curso, apresentaram tentativa de uso da fórmula da abscissa do vértice da parábola em suas resoluções, mas não conseguiram continuar com o desenvolvimento para a conclusão da questão.




Dupla 2




Dupla 1

Notamos que apesar de os alunos conhecerem o modelo de representação algébrica da função, nenhuma dupla apresentou sequer indícios de sua obtenção a partir da forma fatorada com o uso das raízes, provavelmente a sugestão do uso das expressões das coordenadas do ponto de vértice tenha sido um elemento bloqueador de outras formas possíveis para a obtenção da lei algébrica da função.

Acreditamos que esses alunos não tiveram muito contato com exercícios desse tipo durante o curso de derivada, afinal a questão proposta por nós parece ser uma das mais elementares que existem do tipo. Ao observarmos os resultados da questão um, comparados com os da questão dois, temos a impressão de que os professores durante o curso focaram muito mais situações no registro algébrico, do que as que envolvem análise gráfica em sua resolução.

Dentre os alunos que responderam ter tido rendimento muito satisfatório e satisfatório durante o curso de derivada, estão os alunos das duplas que conseguiram responder parcial e totalmente a questão dois da tarefa.

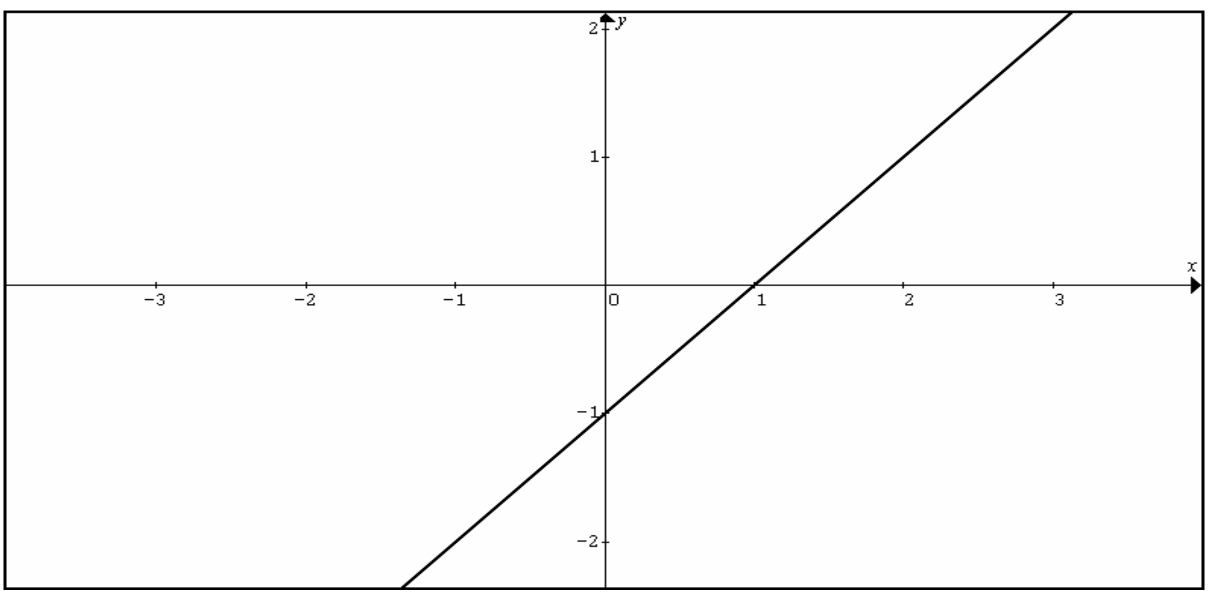
Tarefa II / questão 1

1) O gráfico a seguir é o da derivada f `de uma função f. Com base nesse gráfico, assinale se verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações. Justifique sua resposta.

a) A função f tem ponto de mínimo em x = 1

b) A função f tem ponto de máximo em x = 1

c) A função f é uma função crescente em todo o seu domínio.




Conforme previamos, três das nove duplas confundiram o gráfico da função derivada f ` com o gráfico da primitiva f. Este fato fica explicitado nos protocolos exibidos a seguir.

1) O gráfico a seguir, é o da derivada de uma função f. Com base nesse gráfico assinale se verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações. Justifique sua resposta.

a) A função f assume mínimo em x = 1 → NÃO, POIS RETA NÃO POSSUI mínimo $f(x) = x-1$

b) A função f tem máximo em x = 1 → NÃO, ″

c) A função f é crescente em todo o seu domínio. → SIM, POIS É UMA RETA

Dupla 5

1) O gráfico a seguir, é o da derivada de uma função f. Com base nesse gráfico assinale se verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações. Justifique sua resposta.

a) A função f assume mínimo em x = 1 Não, para ter ponto de mínimo tem que ser uma parábola

b) A função f tem máximo em x = 1 Não, idem igual a 1°

c) A função f é crescente em todo o seu domínio. Não, pois é decrescente [illegible] para [illegible].

Dupla 6

1) O gráfico a seguir, é o da derivada de uma função f. Com base nesse gráfico assinale se verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações. Justifique sua resposta.

a) A função f assume mínimo em x = 1 → falsa porque f(x) é crescente e decrescente ]a,b[

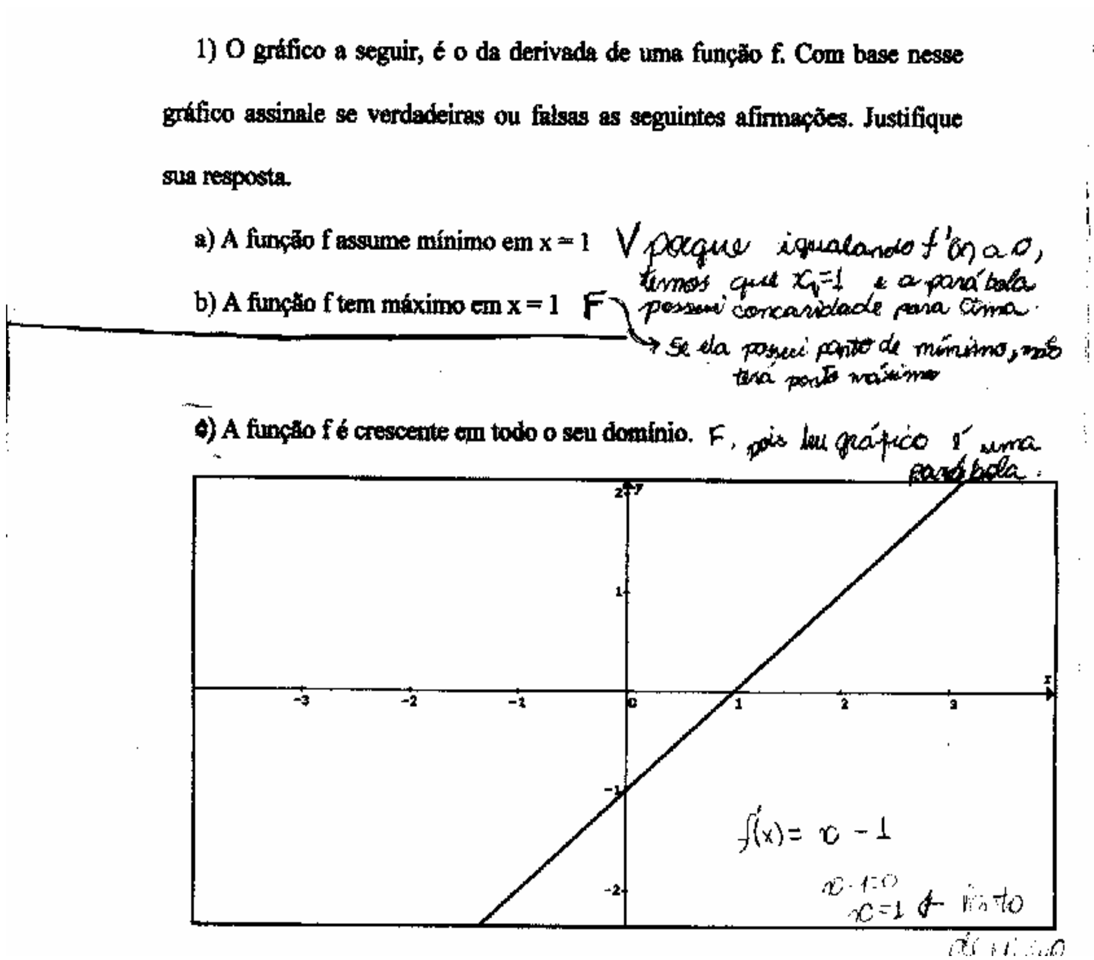
b) A função f tem máximo em x = 1 → falso idem explicação anterior

d) A função f é crescente em todo o seu domínio. Não porque a reta corta o -1 e 1 no intervalo ]a,b[

Dupla 7

Dessa forma, como mostram os protocolos, eles erraram os três itens por acreditarem que a função f era uma função do 1º grau. Classificamos esse erro na categoria conceitual, pois as justificativas apresentadas pautavam-se na hipótese de f ser uma função de 1º grau.

Somente uma dupla conseguiu resolver a questão completamente. Pelas justificativas apresentadas essa dupla tem um bom domínio das relações existentes entre uma função f e sua derivada f \`.



**1) O gráfico a seguir, é o da derivada de uma função f. Com base nesse gráfico assinale se verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações. Justifique sua resposta.**

**a) A função f assume mínimo em x = 1** V porque igualando f'(x) a 0, temos que $x_v=1$ e a parábola possui concavidade para cima.

**b) A função f tem máximo em x = 1** F Se ela possui ponto de mínimo, não terá ponto máximo

**c) A função f é crescente em todo o seu domínio.** F, pois seu gráfico é uma parábola.



Dupla 9

Duas duplas deixaram a questão em branco e outras três responderam parcialmente a questão, mas cometeram os mesmos erros das duplas anteriores confundindo o gráfico de f \` com o de f.

Tarefa II / questão 2

2) Dada a função: IR $\rightarrow$ IR definida por $f(x) = x^3 - 3x + 2$

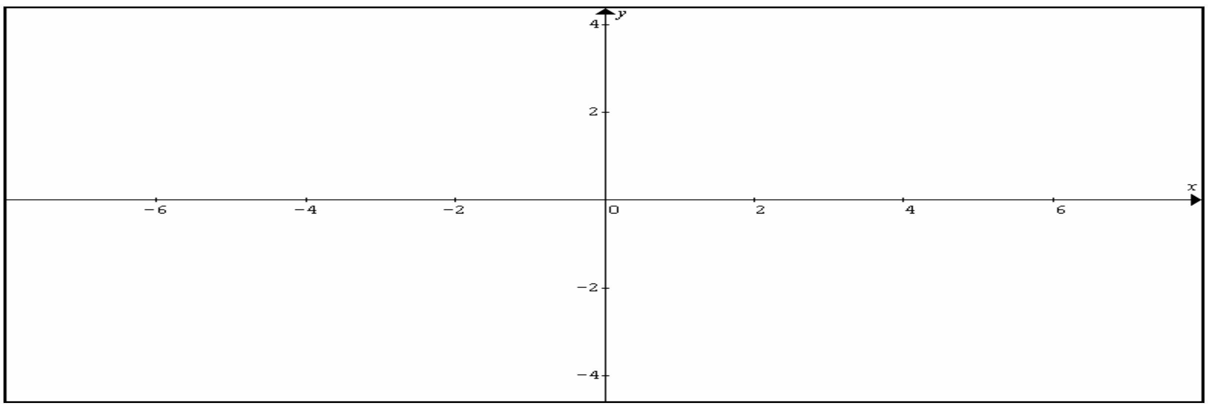
a) Ache os pontos críticos de f

b) Encontre os pontos de máximo local e mínimo local de f

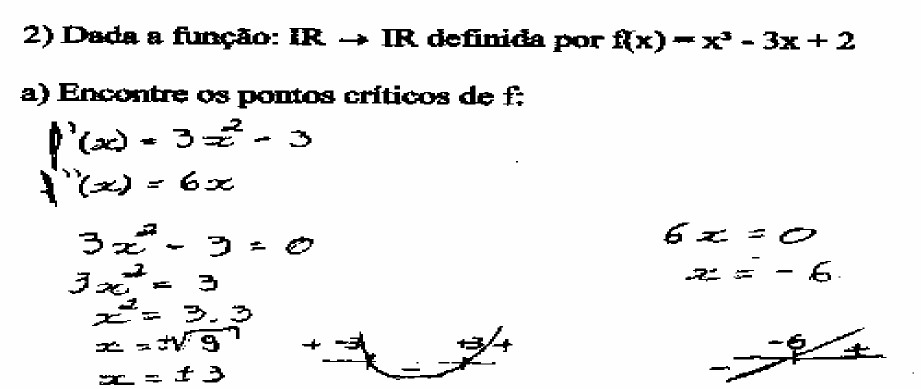
c) Determine os máximos e os mínimos locais

d) Dê as coordenadas de seu ponto de inflexão

e) A partir dos resultados obtidos nos itens a, b, c, d, esboce o gráfico de f




O item (a) dessa questão foi resolvido com sucesso por quase todas as duplas, somente três delas não conseguiram resolver o item. A dupla 3 derivou corretamente a função, igualou-a a zero, mas cometeu um erro manipulativo encontrando valores errados para os pontos críticos.



**2) Dada a função: IR $\rightarrow$ IR definida por $f(x) = x^3 - 3x + 2$**

**a) Encontre os pontos críticos de f:**

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f''(x) = 6x$

$3x^2 - 3 = 0$

$3x^2 = 3$

$x^2 = 3.3$

$x = \pm\sqrt{9}$

$x = \pm 3$

$+ \ -3 \ - \ +3 \ +$

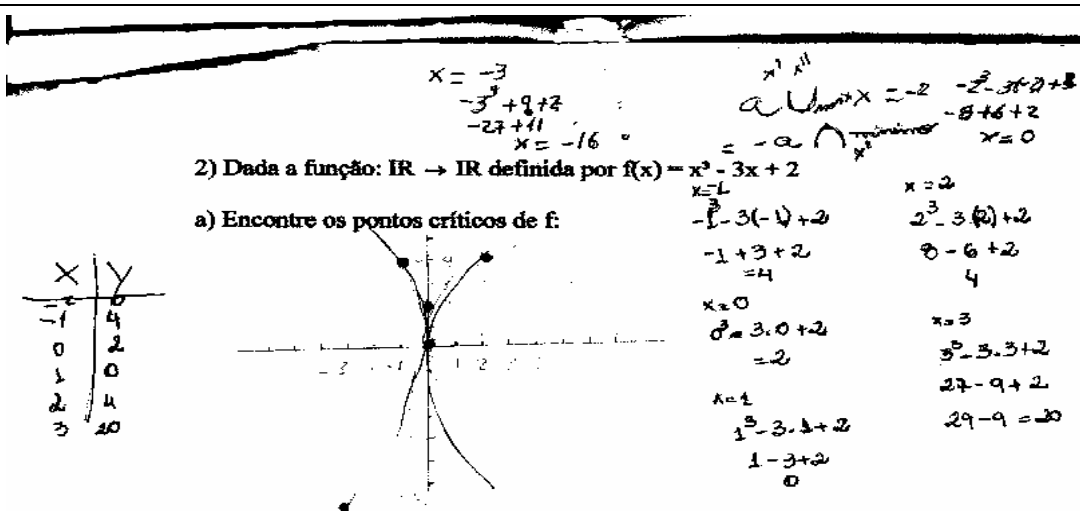
$6x = 0$

$x = -6$

$- \ -6 \ +$

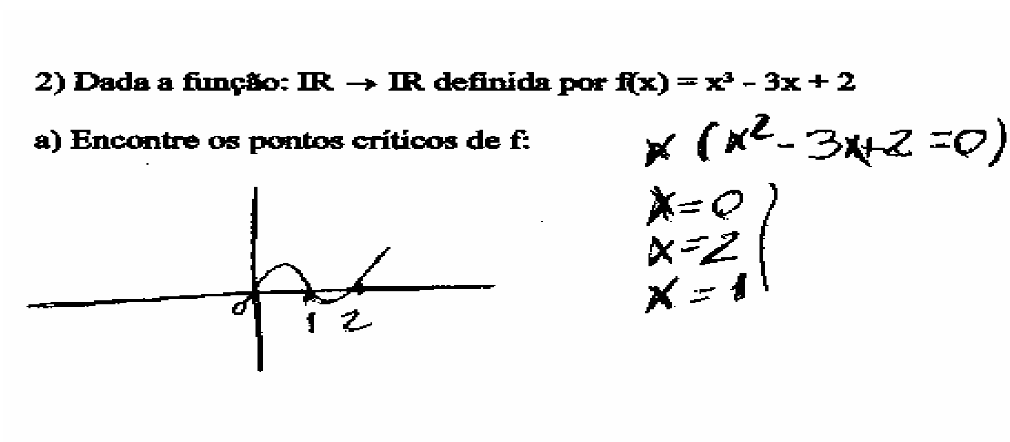
Dupla 3

A dupla 8 cometeu um erro conceitual, pois nem ao menos derivou a função, simplesmente atribuiu valores aleatórios para a variável x e calculou o valor correspondente na função. Ao final, apresentou um gráfico que nem sequer é a representação de uma função.



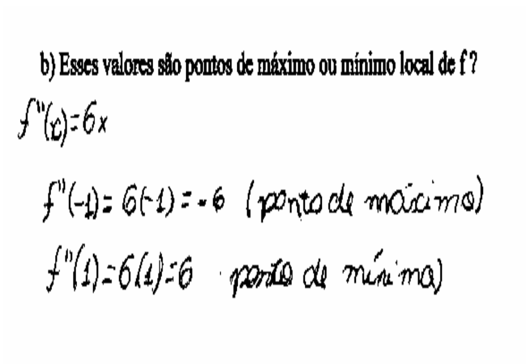

Dupla 8

Já a dupla 1 igualou a própria função a zero e apresentou três possíveis valores como sendo raízes da função, tentou ainda um esboço muito rudimentar para o gráfico a partir desses valores. Classificamos também esse tipo de erro como sendo conceitual, pois nem sequer derivar a função a dupla conseguiu.




Dupla 1

O item (b) foi resolvido com sucesso por duas duplas. Nesses dois casos, as duplas utilizaram com precisão o critério da segunda derivada para a identificação das características desses pontos em relação a função f.

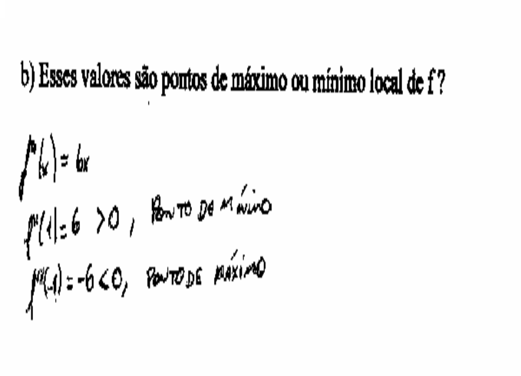

b) Esses valores são pontos de máximo ou mínimo local de f ?

$f''(x)=6x$

$f''(-1)=6(-1)=-6$ (ponto de máximo)

$f''(1)=6(1)=6$ ponto de mínimo)

Dupla 9


b) Esses valores são pontos de máximo ou mínimo local de f ?

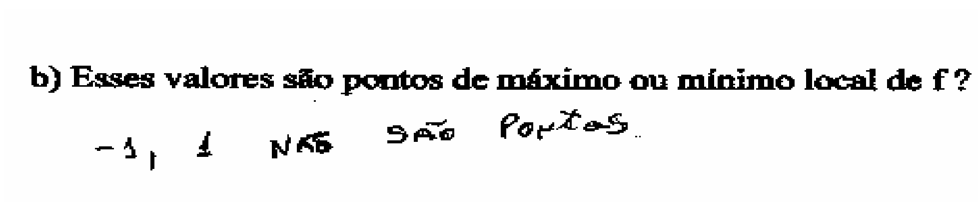
$f''(x)=6x$

$f''(1)=6>0$, ponto de mínimo

$f''(-1)=-6<0$, ponto de máximo

Dupla 5

Outra dupla justificou que as raízes encontradas não são pontos pertencentes a função f. Provavelmente esses alunos não compreenderam ainda as relações existentes entre uma função e sua derivada.

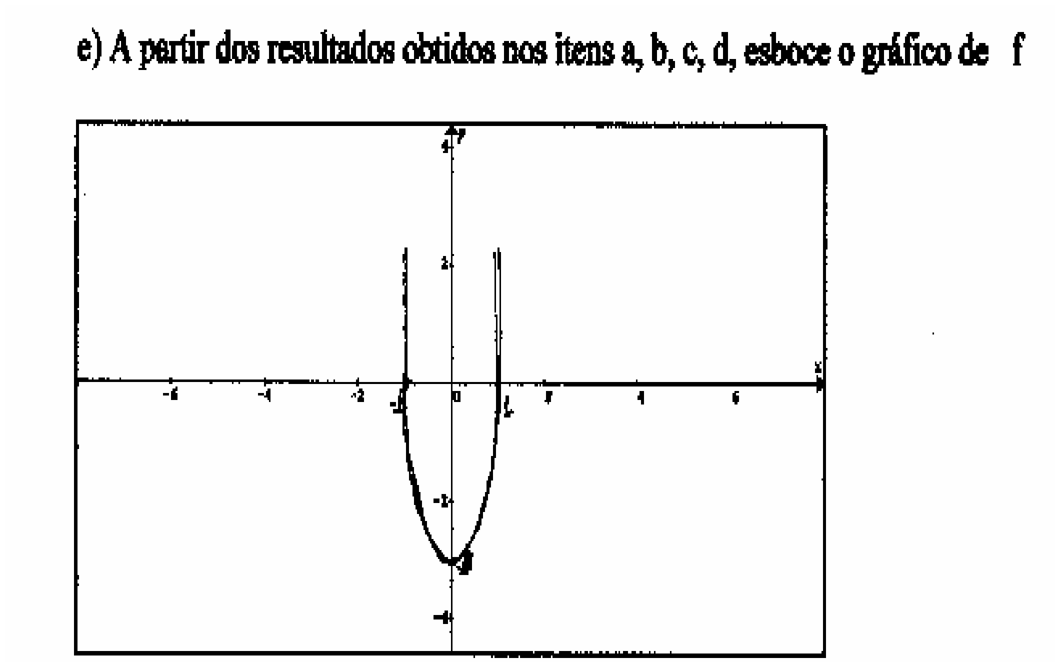

**b) Esses valores são pontos de máximo ou mínimo local de f ?**

-1, 1 não são pontos.

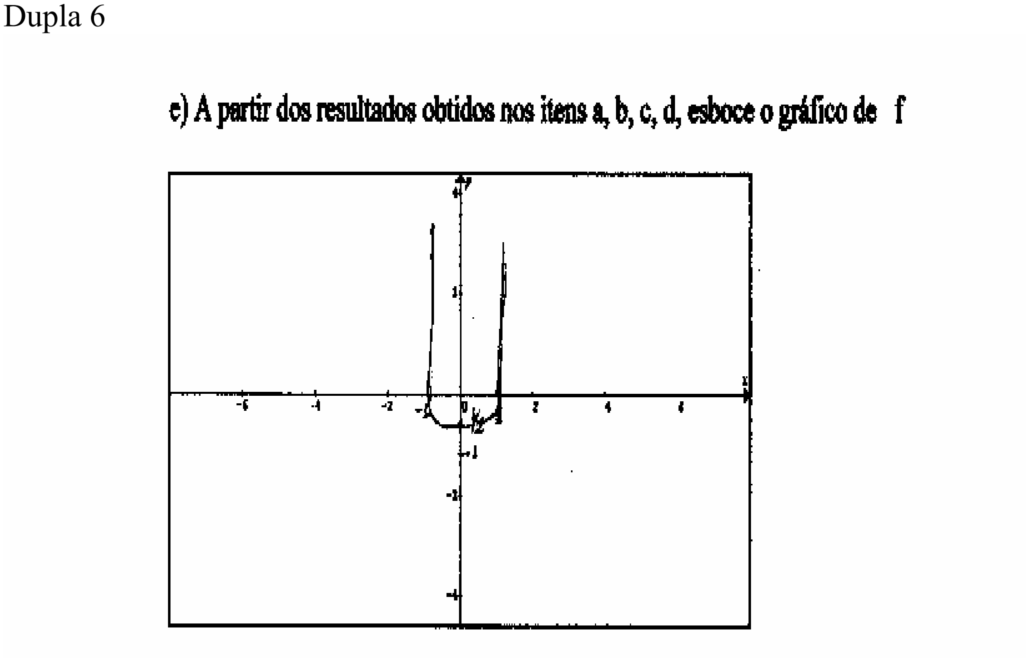
Dupla 7

As outras duplas não apresentaram cálculo algum no item; dentre as quais, algumas simplesmente escreveram máximo ou mínimo no espaço de resolução.

Pudemos observar que a maioria dos alunos sabe calcular derivadas, mas não consegue estabelecer as relações que existem entre uma função f e sua derivada f `, ou seja, não consegue manipular os dados obtidos. Cremos que foi em função dessa deficiência que a maioria das duplas não conseguiu desenvolver os outros itens solicitados. Somente duas dessas duplas apresentaram uma tentativa de esboço de gráfico para representar a função derivada f `e não da f.

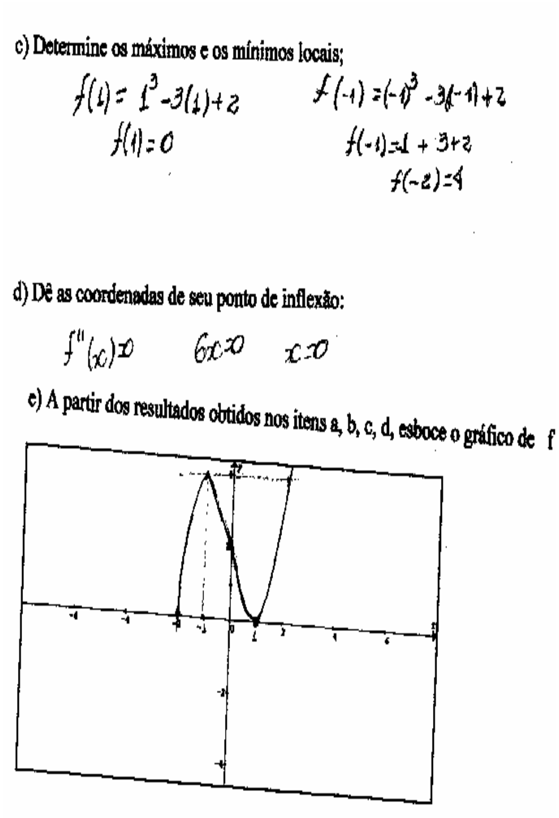



Dupla 6

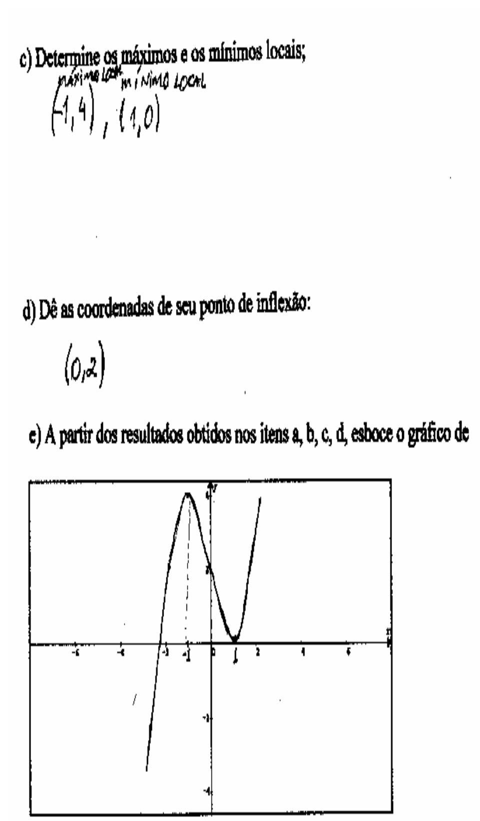



Dupla 7

Somente duas duplas conseguiram resolver os itens c), d) e e) solicitados satisfatoriamente, porém uma delas não explicitou os cálculos efetuados nos itens c) e d).




Dupla 9




Dupla 5

Observamos que a maioria das duplas consegue efetuar os tratamentos necessários para obter a função derivada no registro algébrico; todavia as relações que existem entre a derivada no registro algébrico e no gráfico com a função primitiva é de difícil compreensão dos alunos.

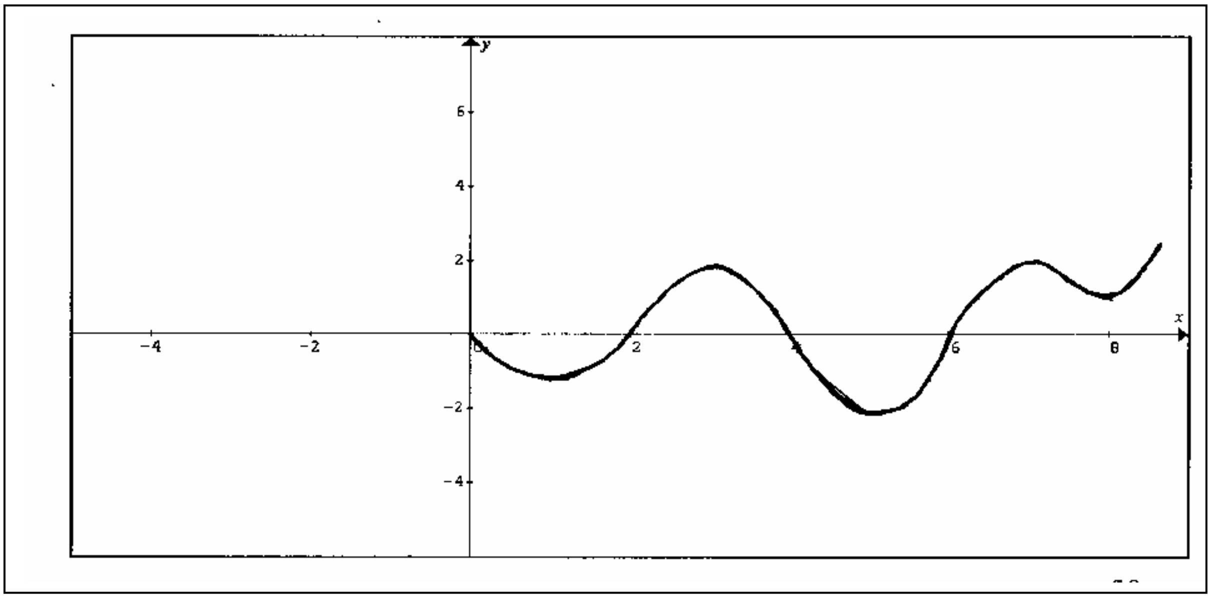
Os alunos apresentaram desempenho melhor no desenvolvimento da questão 2, mesmo sendo parcial, pois ela foi apresentada no registro algébrico, que parece ser o tipo de registro com que eles estão mais acostumados a trabalhar cotidianamente.

Possivelmente o fato de ter que fazer conversão de registros não-congruente na questão 1, interpretar os dados e relacioná-los com a representação gráfica da função primitiva, tenham sido os principais elementos complicadores da questão, o que está presente nas análises de

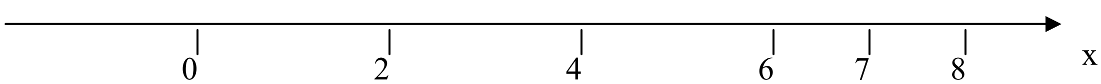
Duval, no que concerne ao comportamento dos alunos diante de uma situação que exija conversões não-congruentes.

Tarefa III

Um trecho do gráfico da derivada primeira f ` de uma função f: IR $\rightarrow$ IR é:




a) Na reta abaixo represente com setas ↗ ou ↘ os intervalos em que a função f é crescente ou decrescente.

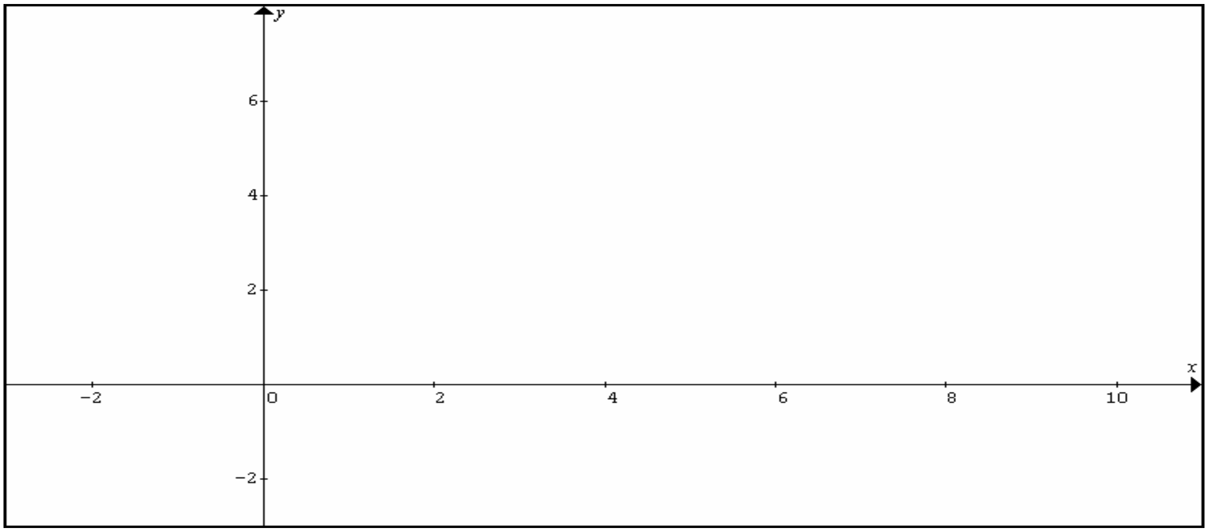



b) Em que valores de x, f tem um máximo ou mínimo local? Explique.

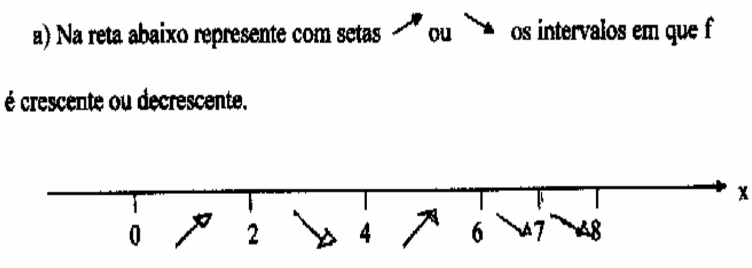
c) Em quais intervalos f é côncava para cima ou para baixo?

d) Quais as coordenadas x, dos pontos de inflexão de f?

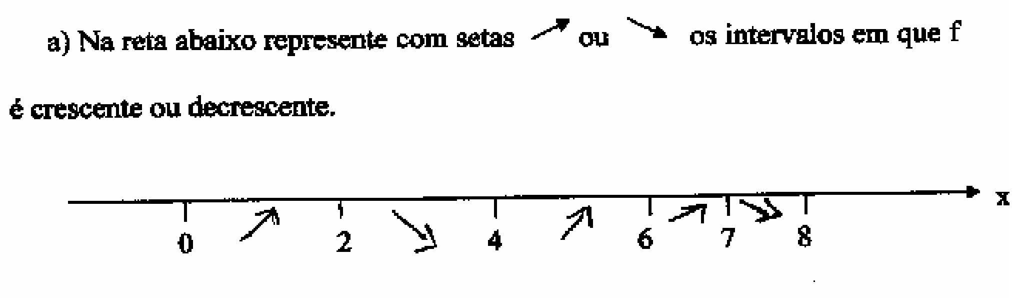
e) No sistema de eixos coordenados abaixo faça um esboço do gráfico de f, sabendo que os pontos (0,3), (2,1), (4,3), (6,2), (7,3) e (8,4) pertencem ao gráfico de f.




No item (a) da tarefa III, três duplas apresentaram as setas nos intervalos no sentido contrário do correto, cremos que esses alunos conheçam a relação que existe entre o sinal da derivada e o crescimento da função primitiva.

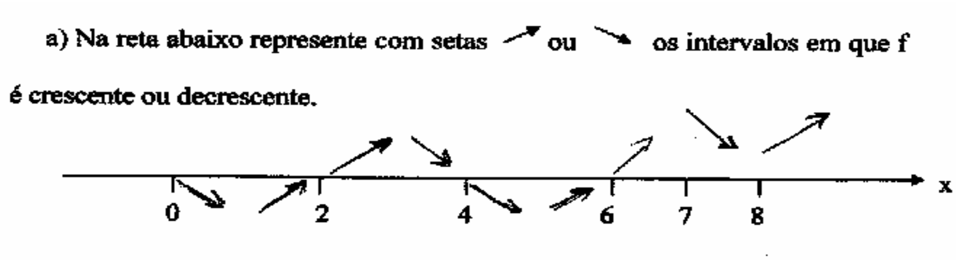



Dupla 9



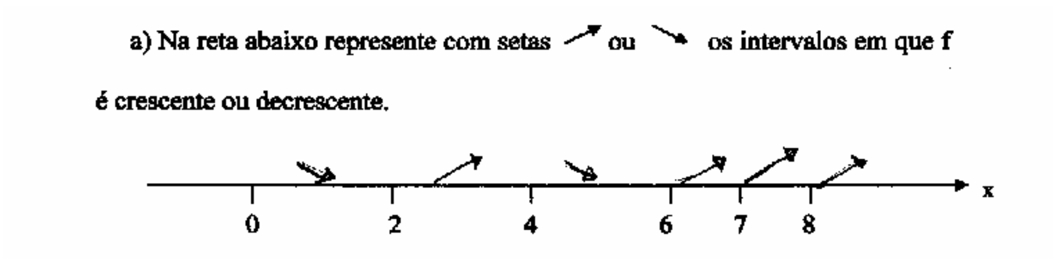

Dupla 7

Outro erro que observamos na dupla 2 foi a colocação das setas, indicando o crescimento e o decrescimento da função derivada; essa dupla não fez relação alguma entre o gráfico da função derivada com o comportamento da função primitiva.




Dupla 2

Somente uma dupla conseguiu apresentar as setas, caracterizando o comportamento da função a partir do gráfico de sua derivada corretamente.




Dupla 8

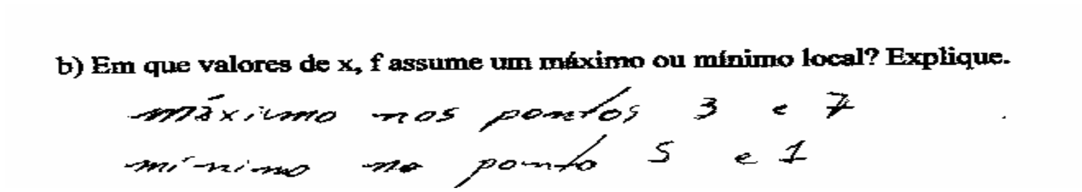
Nenhuma dupla conseguiu realizar totalmente o item (b) da tarefa III. A dupla que mais próximo chegou da resposta correta incluiu os valores (8 e 10) como sendo também pontos de mínimo ou de máximo local, respectivamente, da função f. É provável que eles tenham confundido o mínimo local (x = 8) da função derivada e julgaram que o próximo máximo local fosse (x = 10) também da função derivada.

**b) Em que valores de x, f assume um máximo ou mínimo local? Explique.**

0, 2, 4, 6, 8 e 10, pois são os pontos de inflxão de F'

Dupla 9

Todas as outras duplas indicaram, como mínimo e máximo locais da função f, os mínimos e máximos locais da função derivada representada no gráfico; dessa maneira, pudemos observar que esses alunos não fizeram nenhuma associação entre os dados que o gráfico da função derivada fornecia e o que esses dados representavam no comportamento da função primitiva.

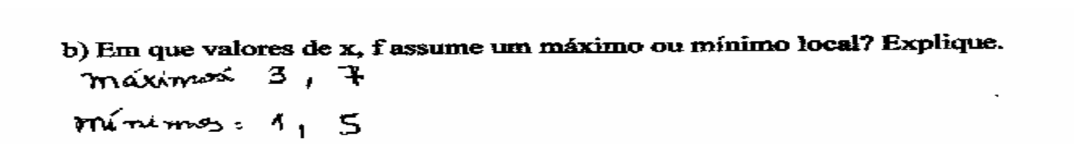


b) Em que valores de x, f assume um máximo ou mínimo local? Explique.

máximo nos pontos 3 e 7

mínimo no ponto 5 e 1

Dupla 3

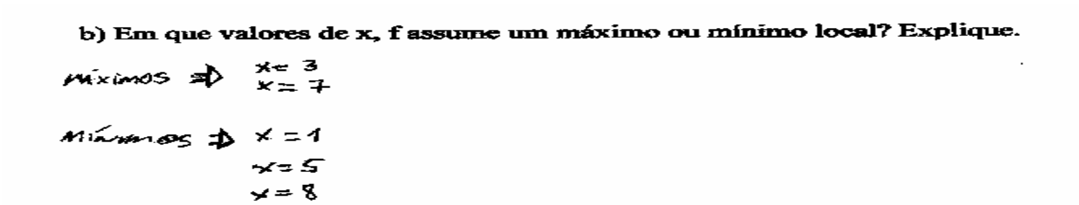


b) Em que valores de x, f assume um máximo ou mínimo local? Explique.

máximos 3, 7

mínimos: 1, 5

Dupla 4

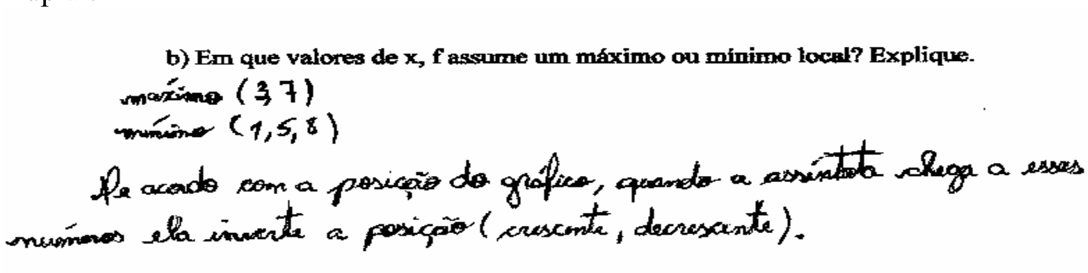


b) Em que valores de x, f assume um máximo ou mínimo local? Explique.

máximos ⇒ x= 3, x= 7

Mínimos ⇒ x = 1, x=5, x=8

Dupla 5



b) Em que valores de x, f assume um máximo ou mínimo local? Explique.

máximo (3,7)

mínimo (1,5,8)

De acordo com a posição do gráfico, quando a assíntota chega a esses números ela inverte a posição (crescente, decresante).

Dupla 6

No item (c), somente a dupla que acertou parcialmente o item (b) apresentou uma análise que relacionasse o gráfico da função derivada com o comportamento da função primitiva, todavia ela colocou os intervalos compreendendo pontos de máximo e mínimo como sendo os de inflexão, que muda o sentido da curva do gráfico da função.

c) Em quais intervalos f é côncava para cima ou para baixo?

Concavidade para cima: ]-2, 2[ ; ]2, 6[ ; ]6, 10[

Concavidade para baixo: ]0, 4[ ; ]4, 8[ ; ]8, 12[

Dupla 9

As outras duplas cometeram o mesmo erro do item (b), analisando o gráfico da função derivada e atribuindo à função primitiva os intervalos representados nesse gráfico.

c) Em quais intervalos f é côncava para cima ou para baixo?

$\cup \Rightarrow (0,2); (4,6); (7,9)$

$\cap \Rightarrow (2,4); (6,8)$

Dupla 2

c) Em quais intervalos f é côncava para cima ou para baixo?

]0,2[ P/ Cima
]2,4[ P/ BAixo
]4,6[ P/ Cima
]6,8[ P/ Baixo

Dupla 5

c) Em quais intervalos f é côncava para cima ou para baixo?

(0,2) ; (2,4) ; (4,6) ; (6,8)

Dupla 6

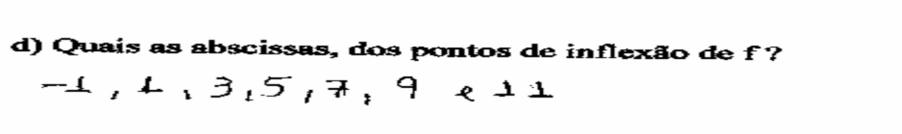
c) Em quais intervalos f é côncava para cima ou para baixo?

Para cima = 0,2 e 0,6

para baixo = 2,4 e 6,8

Dupla 7

O item (d) foi respondido com sucesso por apenas duas duplas e parcialmente por uma outra, esta última cometeu o equívoco de analisar valores que estão fora do intervalo dado do gráfico (o que eles já vinham fazendo nos itens anteriores). Observamos que essas duplas conhecem a relação existente entre o gráfico da derivada e o comportamento da função.


d) Quais as abscissas, dos pontos de inflexão de f ?
-1, 1, 3, 5, 7, 9 e 11

Dupla 9


d) Quais as abscissas, dos pontos de inflexão de f ?
1, 3, 5, 7.

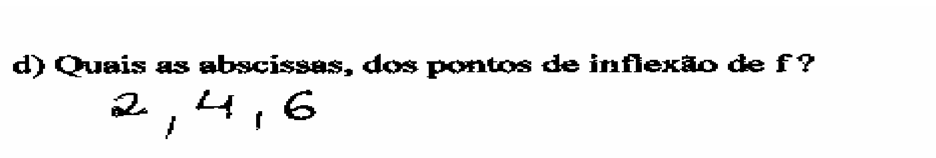
Dupla 6


d) Quais as abscissas, dos pontos de inflexão de f ?
1, 3, 5, 7

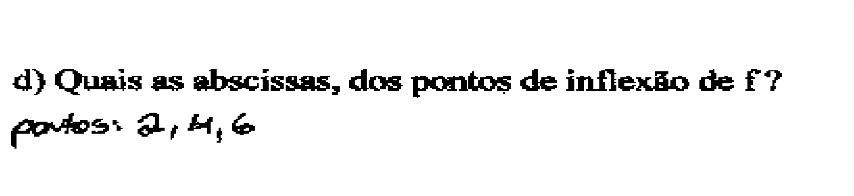
Dupla 7

As outras duplas cometeram os mesmos erros dos itens anteriores; observaram os valores das abscissas dos pontos de inflexão da função derivada e apresentaram como pertencentes ao gráfico da função primitiva.

Analisando as respostas apresentadas, observamos que os alunos conhecem o significado de um ponto de inflexão no gráfico de uma função, mas não as relações que existem entre o gráfico da derivada e o comportamento do gráfico da primitiva.


d) Quais as abscissas, dos pontos de inflexão de f ?
2, 4, 6

Dupla 2

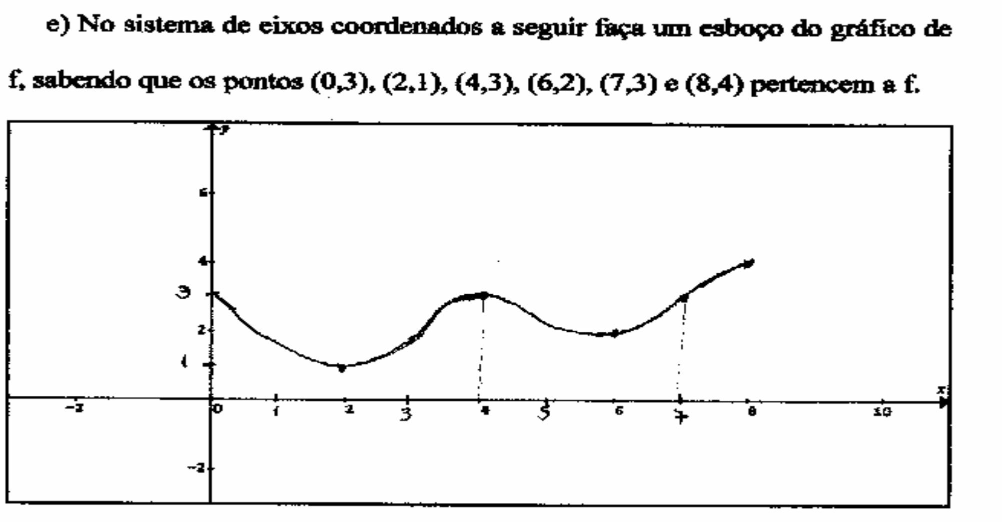

d) Quais as abscissas, dos pontos de inflexão de f ?
pontos: 2, 4, 6

Dupla 4

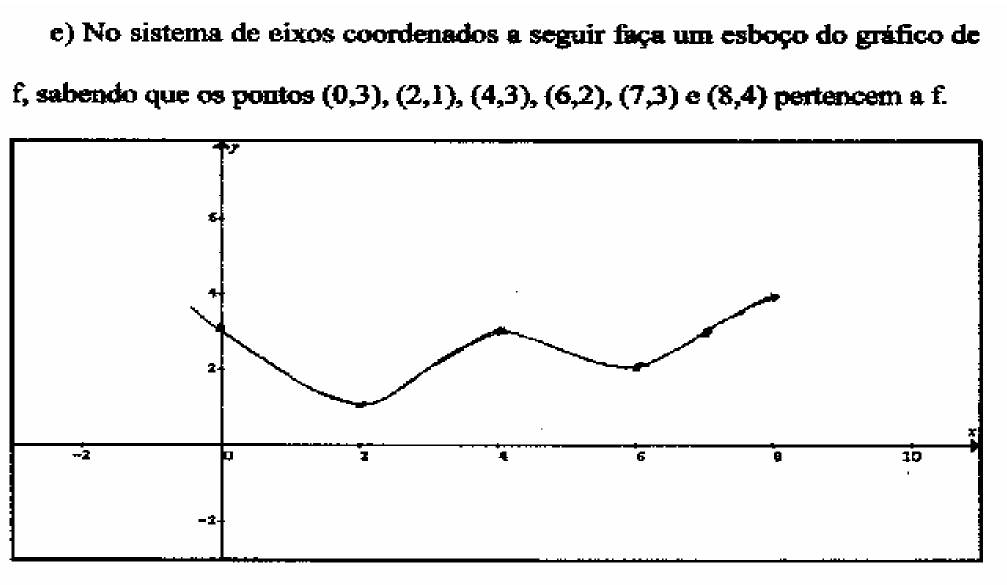

d) Quais as abscissas, dos pontos de inflexão de f ?
0, 2, 4, 6, (75)

Dupla 5

O item (e) da tarefa foi respondido com sucesso por sete das nove duplas; as outras duas duplas cometeram um erro trivial na localização de um ponto no sistema de eixos coordenados. Conforme observamos no resultado do teste aplicado aos três professores, o sucesso na resolução desse item ocorreu em virtude do fornecimento dos pontos pertencentes ao gráfico da função primitiva.




Dupla 3

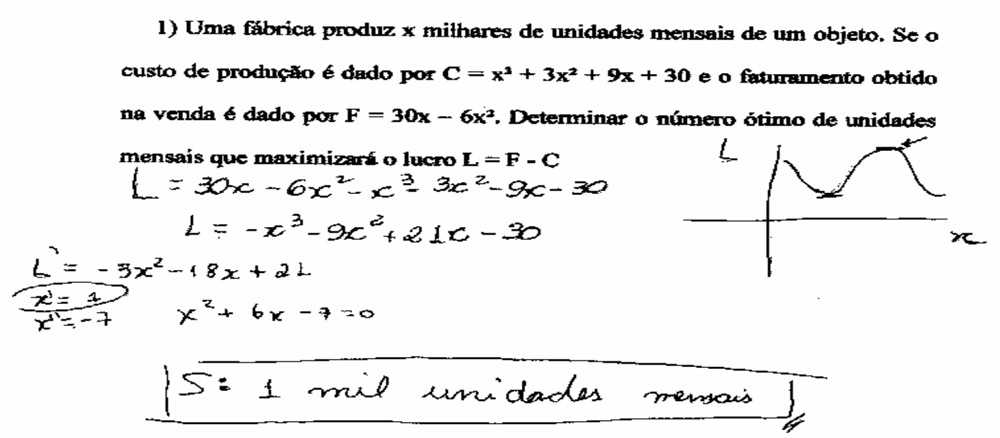



Dupla 5

Tarefa IV / questão 1

1) Uma fábrica produz x milhares de unidades mensais de um objeto. Se o custo de produção é dado por $C = x^3 + 3x^2 + 9x + 30$ e o faturamento obtido na venda é dado por $F = 30x - 6x^2$. Determinar o número ótimo de unidades mensais que maximizará o lucro $L = F - C$

A primeira questão da tarefa foi resolvida totalmente por apenas uma dupla, que optou por simplificar a função L e derivá-la para chegar à resposta.



1) Uma fábrica produz x milhares de unidades mensais de um objeto. Se o custo de produção é dado por C = x³ + 3x² + 9x + 30 e o faturamento obtido na venda é dado por F = 30x – 6x². Determinar o número ótimo de unidades mensais que maximizará o lucro L = F - C

$L = 30x - 6x^2 - x^3 - 3x^2 - 9x - 30$

$L = -x^3 - 9x^2 + 21x - 30$

$L' = -3x^2 - 18x + 21$

$x' = 1$

$x'' = -7$

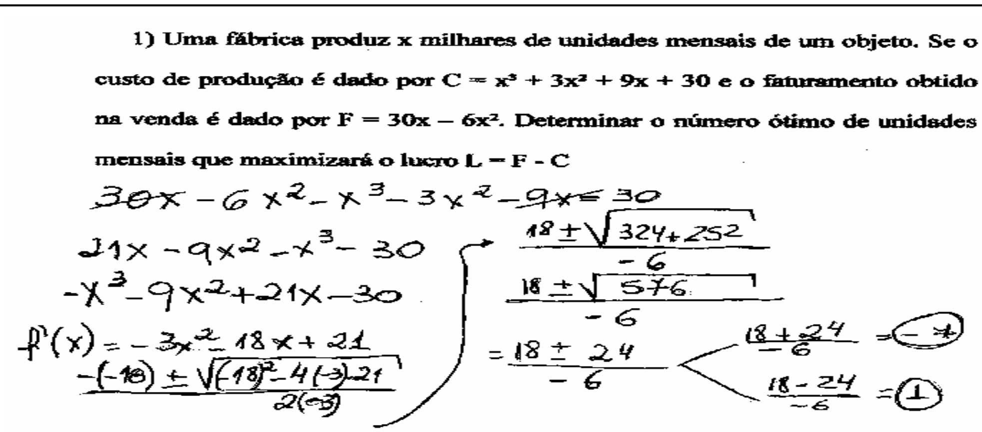
$x^2 + 6x - 7 = 0$

S: 1 mil unidades mensais



Dupla 9

Duas duplas responderam parcialmente a questão, faltando somente apresentar a resposta solicitada. Observamos nos protocolos a seguir, que uma delas fez a simplificação e a derivação da função L e que a outra preferiu derivar as funções F e C, para depois, obter a função derivada de L.



1) Uma fábrica produz x milhares de unidades mensais de um objeto. Se o custo de produção é dado por C = x³ + 3x² + 9x + 30 e o faturamento obtido na venda é dado por F = 30x – 6x². Determinar o número ótimo de unidades mensais que maximizará o lucro L = F - C

$30x - 6x^2 - x^3 - 3x^2 - 9x - 30$

$21x - 9x^2 - x^3 - 30$

$-x^3 - 9x^2 + 21x - 30$

$f'(x) = -3x^2 - 18x + 21$

$\frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4(-3)21}}{2(-3)}$

$\frac{18 \pm \sqrt{324 + 252}}{-6}$

$\frac{18 \pm \sqrt{576}}{-6}$

$= \frac{18 \pm 24}{-6}$

$\frac{18 + 24}{-6} = -7$

$\frac{18 - 24}{-6} = 1$

Dupla 2

1) Uma fábrica produz x milhares de unidades mensais de um objeto. Se o custo de produção é dado por $C = x^3 + 3x^2 + 9x + 30$ e o faturamento obtido na venda é dado por $F = 30x - 6x^2$. Determinar o número ótimo de unidades mensais que maximizará o lucro $L = F - C$

$C' = 3x^2 + 6x + 9$ $\quad F' = -12x + 30$ $\quad L' = -12x + 30 - 3x^2 - 6x - 9$

$L' = -3x^2 - 18x + 21$

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a c$

$a = -3$ $\quad \Delta = 324 + 252$ $\quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$

$b = -18$ $\quad \Delta = 576$ $\quad x = \frac{18 \pm 24}{-6}$ $\quad x_1 = \boxed{-7}$

$c = 21$ $\quad x_2 = \boxed{1}$

Dupla 8

Outras duas duplas iniciaram corretamente a resolução chegando às funções derivadas de F e C; inclusive, uma delas conseguiu obter a função derivada de L, mas seus componentes pararam a resolução nessa etapa. Assim, observamos que esses alunos assimilaram o conceito e manipulam bem as derivadas no registro algébrico, mas não conseguem aplicar esse conhecimento em uma situação de aplicação.

Ressaltamos ainda que o registro de representação em que a questão é proposta, também favorece os alunos, pois eles estão muito familiarizados com as manipulações (ou tratamentos) no registro algébrico.

1) Uma fábrica produz x milhares de unidades mensais de um objeto. Se o custo de produção é dado por $C = x^3 + 3x^2 + 9x + 30$ e o faturamento obtido na venda é dado por $F = 30x - 6x^2$. Determinar o número ótimo de unidades mensais que maximizará o lucro $L = F - C$

$C'(x) = 3x^2 + 6x + 9$ $\quad 3x^2 + 6x + 9 = 0$ $\quad \Delta = 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9$

$F'(x) = -12x + 30$

Dupla 5

1) Uma fábrica produz x milhares de unidades mensais de um objeto. Se o custo de produção é dado por $C = x^3 + 3x^2 + 9x + 30$ e o faturamento obtido na venda é dado por $F = 30x - 6x^2$. Determinar o número ótimo de unidades mensais que maximizará o lucro $L = F - C$

$C = F'(c) = 3x^2 + 6x + 9$

As outras duplas restantes não conseguiram sequer calcular as derivadas por terem cometido erros nos tratamentos das expressões algébricas fornecidas; uma delas derivou a função C, obtendo a função que entendia ser a derivada de L, sem derivar a função F.

**1) Uma fábrica produz x milhares de unidades mensais de um objeto. Se o custo de produção é dado por $C = x^3 + 3x^2 + 9x + 30$ e o faturamento obtido na venda é dado por $F = 30x - 6x^2$. Determinar o número ótimo de unidades mensais que maximizará o lucro $L = F - C$**

$L = 30x - 6x^2 - (x^3 + 3x^2 + 9x + 30)$

$L = -x^3 - 3x^2 + 21x - 30$

Dupla 4

**1) Uma fábrica produz x milhares de unidades mensais de um objeto. Se o custo de produção é dado por $C = x^3 + 3x^2 + 9x + 30$ e o faturamento obtido na venda é dado por $F = 30x - 6x^2$. Determinar o número ótimo de unidades mensais que maximizará o lucro $L = F - C$**

$C = f'(x) \quad 3x^2 + 6x + 9$

$L = 30x - 6x^2$

$- \quad +6x \quad 3x^2 \quad +9$

$a \; -9x^2 + 24x - 9$

$-18x + 24$

$x = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$

$-6x^2 + 30x + 0$

$-3x^2 + 6x + 9$

$-9x^2 + 24x - 9$

$24 \times 24$: $96$, $48+$, $576$

$576 - 324$

$252$

Dupla 6

Cremos que as dificuldades desses alunos estejam nas manipulações algébricas e na compreensão da tarefa, no que se refere às etapas de resolução, como coletar as informações dadas no enunciado e analisá-las; identificar que tipo de resolução é a mais conveniente para o problema; analisar os resultados obtidos e identificar a resposta conveniente.

Tarefa IV / questão 2

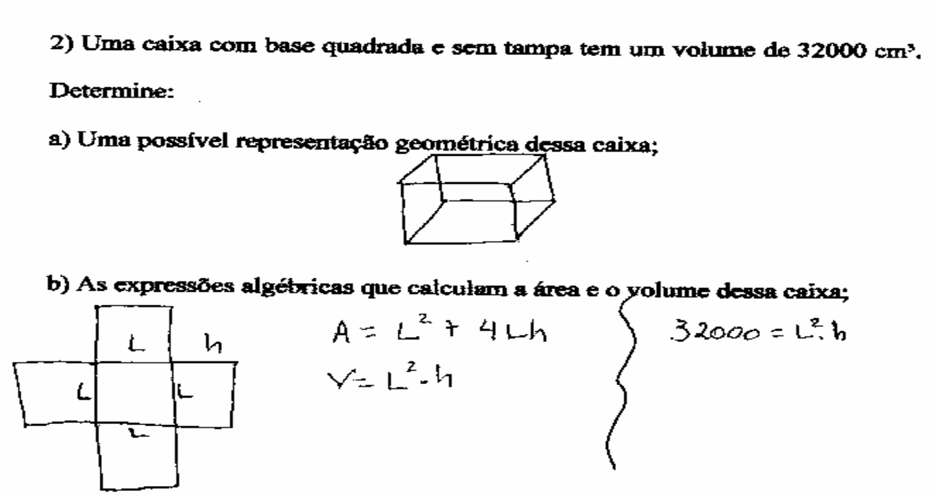
2) Uma caixa com base quadrada e sem tampa tem um volume de 32000 cm³. Determine:

a) Uma possível representação geométrica dessa caixa;

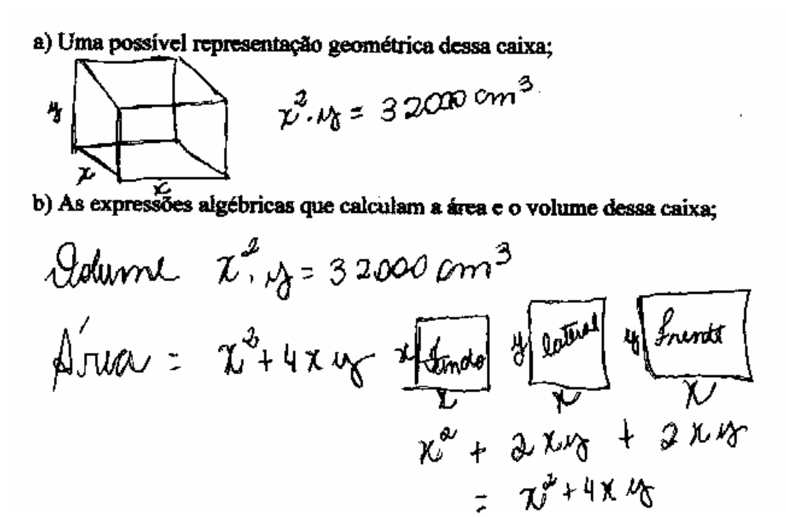
b) As expressões algébricas que calculam área total e volume dessa caixa;

c) As dimensões da caixa que minimizam a quantidade de material usado para montar a caixa.

Na questão 2 da tarefa IV, quase todas as duplas conseguiram esboçar uma representação geométrica para a questão; apenas uma dupla errou, por representar um retângulo como sendo a caixa. Notamos que, das quatro duplas que conseguiram representar algebricamente as expressões da área total e do volume da caixa, duas fizeram uma planificação, o que possivelmente ajudou-as na obtenção das expressões algébricas.

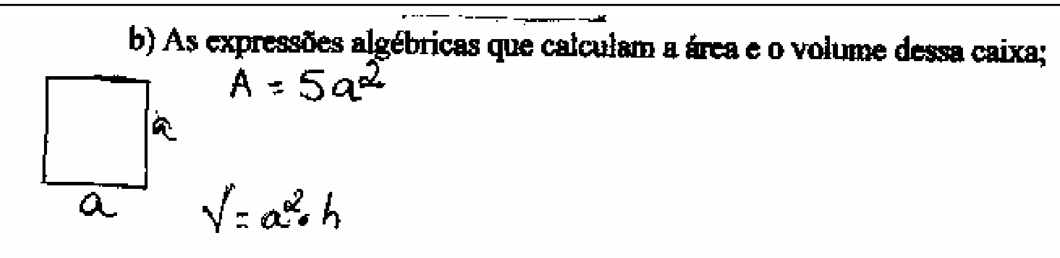



Dupla 9

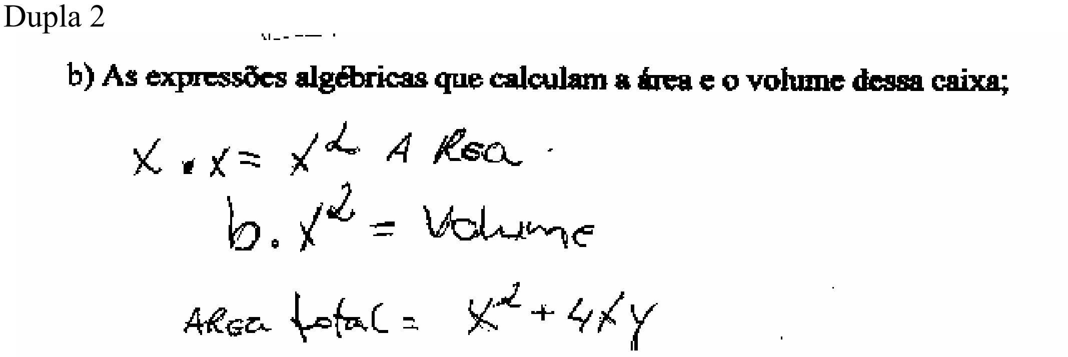



Dupla 7

Duas duplas que fizeram a representação geométrica da caixa parecida com um cubo, apesar de terem obtido a expressão correta para o volume, apresentaram uma expressão equivocada para a área da base e das laterais, pois consideraram-nas idênticas, provavelmente por terem fixado a atenção nas representações geométricas que eles mesmos construíram




Dupla 2




Dupla 6

Outras três duplas só apresentaram expressões parciais, ora para o cálculo do volume, ora para a área da base.

**b) As expressões algébricas que calculam a área e o volume dessa caixa;**

$V = x^2 \cdot y.$

Dupla 3

**b) As expressões algébricas que calculam a área e o volume dessa caixa;**

$L \times L \times h$

Dupla 4

**b) Às expressões algébricas que calculam a área e o volume dessa caixa;**

área $= L \times L$

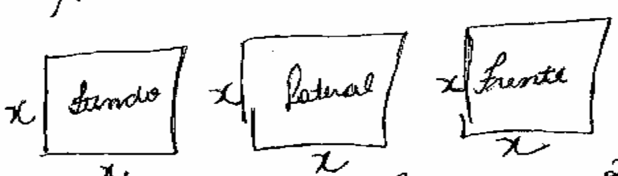
Dupla 8

Nenhuma dupla conseguiu resolver o item (c), três delas deixaram em branco; outras duas atribuíram valores aleatórios para as dimensões, os quais, errados; uma outra dupla apresentou uma justificativa errada para o item, mas não apresentou os cálculos que os validassem.

**c) As dimensões da caixa que minimizam a quantidade de material usado para montar a caixa.**

Volume $= x^3$

Área $= 5x^2$

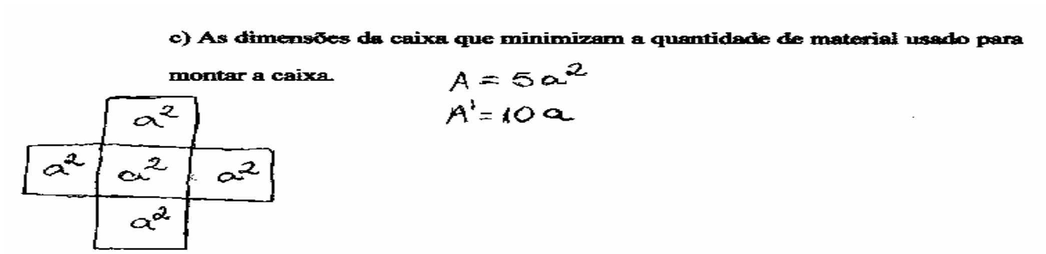



$x^2 + 2x^2 + 2x^2 = 5x^2$

Segundo a figura geométrica para se ter o mínimo posivel de matéria prima com o máximo de volume ela precisa ser um quadrado.

Dupla 7

Uma das duplas, que acreditou que a caixa fosse um cubo, derivou a expressão que obteve para a área total da caixa, mas não conseguiu dar continuidade à resolução. A outra dupla apresentou a expressão que calculava o volume, substituiu V = 32000 na expressão, mas, a exemplo da outra dupla, não deu continuidade à resolução, como mostram os protocolos a seguir.



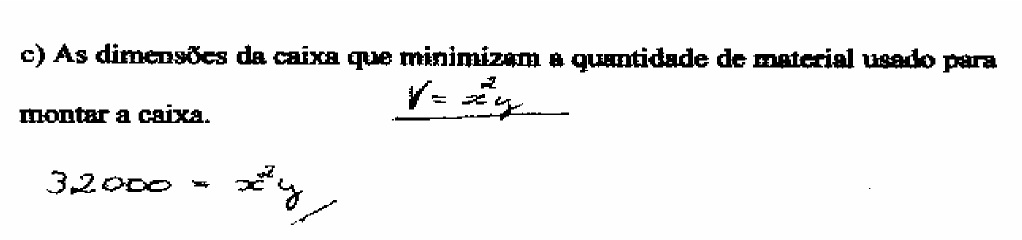
**c) As dimensões da caixa que minimizam a quantidade de material usado para montar a caixa.**

$A = 5a^2$

$A' = 10a$



Dupla 2



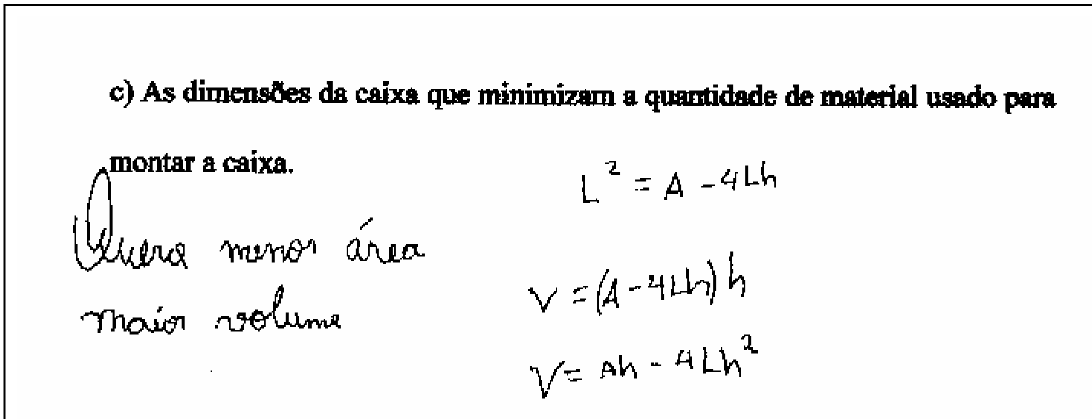
**c) As dimensões da caixa que minimizam a quantidade de material usado para montar a caixa.**

$V = x^2 y$

$32000 = x^2 y$

Dupla 3

Somente uma dupla teve a idéia de isolar uma incógnita em uma expressão e substituir na outra; apesar de terem feito a substituição errada e de não terem observados que V = 32000. Provavelmente essa dupla lembrou-se vagamente das etapas de resolução de um exercício desse tipo.



**c) As dimensões da caixa que minimizam a quantidade de material usado para montar a caixa.**

Quero menor área

maior volume

$L^2 = A - 4Lh$

$V = (A - 4Lh)h$

$V = Ah - 4Lh^2$

Dupla 9

A despeito de alguns resultados, podemos notar que a maioria dos alunos não está acostumada a lidar com esse tipo de situação-problema, em virtude do insucesso apresentado por todas as duplas.

Observamos de um modo geral que os alunos têm facilidades em lidar com situações representadas no registro algébrico, porém, no registro gráfico, a maioria, não consegue identificar dados e nem estabelecer relações entre registros de representação. Apesar de possuírem conhecimentos relativos aos conceitos e procedimentos no registro algébrico, apresentam muitas dificuldades em descontextualizar uma situação aplicada, para efetuar sua resolução.

As duplas de alunos que estavam cursando o 6º semestre do curso apresentaram melhor desenvoltura nas resoluções das tarefas, que as duplas de alunos do 4º semestre. Possivelmente os alunos do 6º semestre, por já terem estudado outros conteúdos, até mesmo em situações aplicadas, tiveram melhor desempenho nas tarefas, em virtude dessa experiência a mais, em relação aos alunos do 4º semestre.

# CAPÍTULO 6

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com os resultados obtidos a partir da resolução da tarefa I, realizada pelos alunos, temos condições de concluir que eles estão muito mais habituados a resolver situações representadas no registro algébrico, pois, como apresentamos em nossas análises, tiveram desempenho muito bom na resolução da primeira questão, porém, na segunda, que foi proposta no registro gráfico, somente uma dupla conseguiu resolvê-la totalmente.

Esse fato evidência a necessidade de se alternar mais as formas de representação das situações de aprendizagem que envolvam o conceito de derivada durante as aulas.

Na segunda questão da tarefa I, classificamos a dificuldade dos alunos, como sendo manipulativa, uma vez que eles não conseguiram resolver a questão por não terem identificado a representação algébrica da função, reconfirmando as observações de Duval sobre a conversão de registros não-congruentes.

Conforme apresentamos em nossas análises da tarefa II, primeira questão (que de fato os alunos confundem a representação gráfica da derivada de uma função com a representação gráfica da função), nos faz concluir que as dificuldades desses alunos se encontram no âmbito conceitual, sobre as relações existentes entre uma função e sua derivada.

Já na segunda questão da tarefa II, na qual esperávamos que eles apresentassem bons resultados, por ser uma situação representada no registro algébrico, e por exigir uma mudança de registro congruente, notamos que tiveram muitas dificuldades para resolvê-la. Esses resultados mostram que tais dificuldades são conceituais, pois os alunos não conseguem visualizar o significado dos resultados obtidos com a derivada da função, nem identificam as relações que existem entre esses resultados e a própria função.

Assim como na resolução da primeira questão da tarefa II, os alunos, em geral, diante da tarefa III interpretaram as características da função derivada representada no gráfico como sendo as da função primitiva, mais uma vez evidenciando dificuldades no campo conceitual.

Como a primeira questão da tarefa IV foi proposta no registro algébrico e pelo fato de sua resolução exigir apenas tratamentos (manipulações), acreditamos que as dificuldades dos alunos na resolução dessa questão estejam relacionadas com a pouca familiaridade com o tipo de situação, pois era uma situação semelhante à primeira questão da tarefa I, que eles apresentaram bons resultados, no que se refere à resolução. O diferencial entre elas era o contexto e a necessidade de igualar a função derivada a zero, para se chegar a resposta, no caso da tarefa IV.

Notamos que, na segunda questão da tarefa, quase todas as duplas conseguiram responder aos itens *a* e *b*, porém, efetuar os tratamentos necessários e aplicar os conhecimentos sobre derivada para resolvê-la foram possivelmente os elementos que bloquearam sua resolução. Cremos ainda que a pouca familiaridade com o tipo de situação também tenha sido um fator relevante.

Após a análise de todos esses dados, concluímos que as dificuldades dos alunos diante de situações que envolvam aplicações de derivada estão localizadas tanto no âmbito conceitual quanto no manipulativo, pois eles efetuam tratamentos e chegam a resultados, mas, ora não sabem identificar as relações deles com o comportamento gráfico da função ou de sua derivada, ora não conseguem aplicar o conceito de derivada para efetuar os tratamentos.

Percebemos que os alunos do 6º semestre apresentaram menos dificuldades nas resoluções das tarefas que os alunos do 4º semestre, provavelmente por já terem estudado situações de aplicação de outros conceitos do Cálculo e de outras disciplinas

Com os resultados apresentados nas tarefas, concluímos que as dificuldades dos alunos em situações que envolvem aplicações da derivada, se alternam em conceituais e manipulativas, conforme o tipo de registro de representação utilizado na situação de aplicação proposta.

O referencial teórico que utilizamos instrumentalizou a elaboração das tarefas e consequentemente influenciou-nos muito nas análises dos resultados obtidos.

Gostaríamos que esses resultados pudessem influenciar os professores de cálculo no sentido de trabalharem mais as aplicações da derivada com seus alunos, pois a nosso ver, quando o aluno aplica o novo conhecimento, compreende melhor o significado do conceito.

Esperamos ter contribuído com o campo da Educação Matemática no que se refere ao estudo das aplicações da derivada e que nosso trabalho possa colaborar com futuras pesquisas da área.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


1. ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. Recherches em Didactique dês Mathématiques, 9/3, 281-308. Paris. 1988

2. BOYER, C. B. História da Matemática. Editora EDGARD BLÜCHER, São Paulo, SP- 1996. Tradução GOMIDE E. F.

3. BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la Didactiques dês Mathématiques. Recherches em Didactique dês Mathématiques, 7/2, 33-115. Paris. 1986

4. BRUN, J. Didáctica das Matemáticas. Coleção Horizontes Pedagógicos. Instituto Piaget. Lisboa. 1996

5. CURY, H. N. Concepções e Crenças dos Professores de Matemática: pesquisas realizadas e significados dos termos utilizados. Bolema, Rio Claro, v. 12, n. 13, p. 29-44, 1999

6. DALL'ANESE, C. Conceito de Derivada: Uma Proposta Para seu Ensino e Aprendizagem. Dissertação de Mestrado. PUC-SP São Paulo. 2000

7. D'AVOGLIO, A. R. Derivada de uma Função num Ponto (Uma forma significativa de introduzir o conceito). Dissertação de Mestrado. PUC-SP São Paulo. 2002

8. DOUADY, R. Jeux de Cadres et Dialectique Outil-Objet. Recherches em Didactique dês Mathématiques, 7/2, 5-31. Paris. 1987

9. DUVAL, R. Registres de Representations Sémiotique et Fonctionnements Cognitif de la Pensée. Annales de Didactique et Sciences Cognitives, vol 5. IREM-ULP, Strasbourg, 1993, pp. 37-65.

10. EVES, H. Introdução à História da Matemática. Editora UNICAMP, Campinas, SP- 2004. Tradução DOMINGUES, H. H.

11. FIGUEREDO, A. C. Saberes e Concepções de Educação Algébrica em um Curso de Licenciatura em Matemática. Tese de Doutorado. PUC-SP São Paulo. 2007

12. GODOY, L. F. S. Registros de Representação da Noção de Derivada e o Processo de Aprendizagem. Dissertação de Mestrado. PUC-SP São Paulo. 2004

13. LIMA, E. L. Conceituação, Manipulação e Aplicação (Os três componentes do ensino da Matemática). Revista do Professor de Matemática nº 41. Sociedade Brasileira de Matemática. IMPA-RJ. Rio de Janeiro. 1999.

14. MACHADO, S. D. A. (org.) Aprendizagem em Matemática (Registros de Representação Semiótica) Coleção Papirus Educação. Campinas, SP 2ª Edição. 2005

15. PONTE, J. P. Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação. In: BROWN, M.; FERNANDES, D.; MATOS, J.F.; PONTE, J. P. Educação Matemática: Temas de Investigação. Lisboa: IIE, 1992. p. 185-239