PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC – SP

Luis Manuel Peliz Marques Bica

Funções em livros didáticos: relações entre aspectos visuais e textuais

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo
2009

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC – SP

Luis Manuel Peliz Marques Bica

Funções em livros didáticos: relações entre aspectos visuais e textuais

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação da Profª. Dra. Sônia Pitta Coelho.

São Paulo

2009

Banca Examinadora

Autorizo exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de foto copiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ________________________________ Local e Data: ____________________

À minha família que sempre soube compreender a minha ausência com incondicional apoio.

AGRADECIMENTOS

À Profª Dra. Sônia Pitta Coelho pela orientação sempre segura e competente principalmente nos momentos mais difíceis.

À Profª Dra. Celina Aparecida Pereira Almeida Abar e à Profª Dra. Ana Chiummo pelas valiosas recomendações na Qualificação que enriqueceram este trabalho.

À Secretária de Educação do Estado de São Paulo pela concessão da bolsa de estudos.

À minha esposa e companheira Fátima pelo apoio, carinho e paciência que sempre demonstrou durante a realização deste trabalho.

Aos companheiros do Programa de Estudos Pró-Graduados parceiros de tantas horas pelos momentos agradáveis por que passamos.

À Pontifícia Universidade Católica de São Paulo por contribuir para a minha formação acadêmica.

RESUMO

O objetivo deste trabalho foi investigar os aspectos visuais e textuais do tema função de forma geral, e da função afim em particular, em livros didáticos de Matemática da 1ª série do Ensino Médio brasileiro. Para tanto, verificamos qual o enfoque dado ao desenvolvimento conceitual da função afim, em especial sua representação gráfica, e como são promovidas as articulações entre os parâmetros algébricos e seus correspondentes visuais dos pontos de vista matemático e visual. Para atingir nossos objetivos, desenvolvemos um conjunto de critérios de investigação que permitiram realizar uma análise qualitativa em três livros didáticos da 1ª série do Ensino Médio aprovados em 2005 pelo Programa Nacional de Livros para o Ensino Médio do Ministério de Educação e Cultura. A pesquisa foi fundamentada na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Os critérios de investigação tiveram como objetivo indicar se os livros propiciavam a apreensão global defendida por Duval. Em todo o trabalho estivemos sempre atentos às recomendações oficiais, notadamente no que diz respeito à contextualização e interdisciplinaridade do conceito em estudo. Também analisamos os exercícios dos livros sobre função afim para verificar se mantinham coerência com o tratamento expositivo, bem como se promoviam atividades de conversão onde se manifestassem fenômenos de congruência e de não-congruência. Os resultados mostraram que apenas dois livros, um mais que o outro, promoviam a apreensão global e apresentavam diversidade de registros. Estes livros mostraram também coerência entre o texto teórico e os exercícios, muitos deles contextualizados. Quanto aos exercícios, a pesquisa mostrou que estes livros também apresentaram alguns exercícios com fenômenos de não-congruência.

Palavras-chave: função afim; livro didático; registros de representação.

ABSTRACT

The objective of this study was to investigate the visual and textual aspects of the theme function, in a general way, and of the similar function in particular, in textbooks of Mathematics for the 1st grade of Brazilian high school. Thus, we see which is the focus given to the conceptual development of the similar function, specially its graphical representation, and how are promoted as the joints between the algebraic parameters and their visual correspondings from the mathematical and visual points of view. In order to achieve our goals, we developed a set of criteria for research that led to carry out a qualitative analysis of three textbooks from 1st grade of high school, approved in 2005 by the National Books Program for the High School of the Ministry of Education and Culture. The research was based on the theory of Records of Semiotic Representation of Raymond Duval. The investigation criteria were as objective to indicate if the books provided a global concern expressed by Duval. In all the work we were always attentive to official recommendations, notably regarding to the contextualization and interdisciplinary of the concept of study. We also analyze the exercises of the books about similar function in order to check if they remained consistent with the expositive treatment, as well as they promoted conversion activities which show phenomena of congruence and non-congruence. The results showed that only two books, one more than the other, promoted global understanding and presented a diversity of records. These books also showed consistency between the theoretical text and the exercises, many of them contextualized. As far as the exercises, the research has shown that these books also had some exercises with non-congruence phenomena.

Keywords: similar function; textbook; records of representation.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 12
CAPÍTULO 1. PROBLEMÁTICA 15
CAPÍTULO 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 33
2.1 Registros de representação semiótica de Raymond Duval 33
CAPÍTULO 3. CONSIDERAÇÕES METODOLÓGICAS 52
3.1 Programa Nacional de Livros do Ensino Médio – PNLEM 52
3.2 Escolha dos livros didáticos 52
3.3 Critérios para investigar aspectos visuais e textuais 56
3.4 Justificativas para os critérios 59
CAPÍTULO 4. ANÁLISE DOS LIVROS: TRATAMENTO EXPOSITIVO 68
4.1 Qual o tipo de abordagem ao conceito de função? 68
4.2 Qual o enfoque dado ao gráfico de função? 79
4.3 Como é definida a função afim? 87
4.4 Sobre o gráfico da função afim 90
4.5 Considerações sobre os aspectos visuais e textuais 117
CAPÍTULO 5. ANÁLISE DOS EXERCÍCIOS 121
5.1 Análise do corpo de exercícios 121
5.2 Considerações sobre a análise dos exercícios 133
CAPÍTULO 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS 138
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 144

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.	Esquema de organização semiótica e do funcionamento das representações gráficas	42
Figura 2.	Exemplos de algumas das 18 representações possíveis	48
Figura 3.	Ilustração da atividade proposta por Duval a alunos franceses	50
Figura 4.	Gráfico de participação do carro a álcool no mercado	68
Figura 5.	Gráfico de Pediatria e Puericultura	69
Figura 6.	Tabela e gráfico de suco produzido	70
Figura 7.	Tabela e gráfico da área de um quadrado em função do seu lado	70
Figura 8.	Tapete de Sierpinsk	71
Figura 9.	Gráfico de evolução do salário mínimo	72
Figura 10.	Gráfico de frenagem em função da velocidade	73
Figura 11.	Relação de dependência entre duas grandezas	74
Figura 12.	Exemplos de relações que não são funções	75
Figura 13.	Exemplos de relações	78
Figura 14.	Gráficos de relações	78
Figura 15.	Gráfico do rendimento mensal entre pessoas de 15 a 55 anos	79
Figura 16.	Gráfico de função	81
Figura 17.	Gráfico de função	82
Figura 18.	Exercícios resolvidos envolvendo gráficos para ilustrar quais representam funções	83
Figura 19.	Construção do gráfico de uma função	84
Figura 20.	Construção do gráfico de uma função	85
Figura 21.	Tabela e gráfico do volume de combustível em função do tempo de um carro de corrida	87
Figura 22.	Construção do gráfico de uma função de 1º grau	91
Figura 23.	Gráfico da função $y = 2x + 3$	91
Figura 24.	Alinhamento de 3 pontos	92

Figura 25. Construção do gráfico da função y = 2x – 3 94

Figura 26. Gráfico da função y = -x + 3 94

Figura 27. Tabela e gráfico da função f(x) = 2x + 1 95

Figura 28. Gráfico da equação y – 2 = 3(x –1) 96

Figura 29. Gráficos das funções y = 2x, y = 2x + 3, y = 3x e y = 3x + 3 98

Figura 30. Representação gráfica do zero das funções y = 2x – 4 e y = -5x+5 ... 99

Figura 31. Representação gráfica do zero da função y = 2x + 1 100

Figura 32. Gráfico da função crescente y = 2x 101

Figura 33. Gráfico da função decrescente y = -2x 102

Figura 34. Gráficos da função y = 2x - 3 crescente e da função y = -x + 3 decrescente 104

Figura 35. Representação do ângulo de inclinação 106

Figura 36. Representação do ângulo de inclinação 107

Figura 37. Gráfico da função identidade 109

Figura 38. Gráficos da função y = 2x - 3 crescente e da função y = -x + 3 decrescente 111

Figura 39. Gráfico da função linear y = 2x 113

Figura 40. Gráficos das bissetrizes 114

Figura 41. Ilustração de declividades 115

Figura 42. Representação algébrica e representação gráfica de declividade 116

Figura 43. Gráfico de exercícios 124

Figura 44. Gráfico de exercícios 126

Figura 45. Gráfico de exercícios 128

Figura 46. Gráfico de exercícios 131

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.	Valores das variáveis visuais e correspondentes unidades simbólicas	46
Tabela 2.	Exemplos de valores das variáveis visuais e correspondentes unidades simbólicas	49
Tabela 3.	Tipo de abordagem ao conceito de função encontrado nos livros	68
Tabela 4.	Comparação entre os livros sobre a demonstração de que o gráfico de uma função afim é uma reta	90
Tabela 5.	Comparação entre os livros sobre o tratamento algébrico e visual da raiz ou zero da função	97
Tabela 6.	Comparação entre os livros sobre as implicações $a > 0 \Leftrightarrow f(x) = ax+b$ crescente e $a < 0 \Leftrightarrow f(x) = ax+b$ decrescente	101
Tabela 7.	Comparação entre os livros sobre a demonstração que o parâmetro *a* de uma função afim é tangente do ângulo que o gráfico faz com o eixo 0x	104
Tabela 8.	Comparação entre os livros sobre o tratamento algébrico concomitante com a parte visual do coeficiente linear	105
Tabela 9.	Resumo das Transformações exigidas na resolução dos exercícios de Função Afim	122

INTRODUÇÃO

No decorrer da nossa prática docente temos constatado a grande dificuldade dos alunos do ensino médio com o conceito de função. Dificuldades essas que várias pesquisas nessa área confirmam, como veremos mais adiante.

Hoje em dia, com a vida agitada e globalizada, com pouco tempo para assimilar tamanho volume de informações, a sociedade através da mídia, de forma geral, faz uso de gráficos como forma de otimizar o acesso à informação. Muitas dessas informações que são trazidas para a sala de aula, não têm sido interpretadas de forma adequada, mesmo aquelas que são traduzidas em gráficos simples, como é o caso de retas.

Portanto, como os meios de comunicação se utilizam de quadros, tabelas e gráficos na análise de dados e tratamento de informações, é relevante que os alunos possam estabelecer relações entre as diferentes formas de representação associadas ao conceito de função. Por exemplo, interpretar rapidamente um gráfico e associá-lo à sua expressão algébrica, ou vice-versa.

Isso tem nos trazido angústias e questionamentos ao longo do tempo. Queríamos ajudar nossos alunos a compreenderem aquilo que lhes parecia tão difícil.

Lembramo-nos do nosso professor à época do colégio, no caso, uma professora, exigente e competente na arte de ensinar. Dominava o assunto, amava o que fazia e embora fosse de formação tradicional, nada ficava a dever a abordagens mais recentes. Mas nos lembramos também das dificuldades por que passamos para entender o conceito de função, mesmo com seu jeito às vezes, quase cândido de explicar o conteúdo na lousa, seguido de muitos exercícios. Quando o assunto era gráfico, tentávamos entender o conceito observando vários deles esboçados na lousa. A professora nos fazia acreditar que era fácil. Nós até queríamos acreditar, mas no fundo, dificilmente víamos relação alguma com a expressão algébrica. Na realidade, desconfiávamos que aqueles gráficos não eram matemática.

Algum ensaio tímido, vez por outra, na tentativa de tornar a aula mais atraente, e só. Os recursos tecnológicos eram escassos, para não dizer quase inexistentes, mas a qualidade da aula era ímpar. Apenas faltava algo, algum detalhe, que na época não sabia definir. Mas o livro didático sempre presente, parecia oferecer-lhe um refúgio seguro. Ele era seu guia e conseqüentemente nosso também, ferramenta indispensável do professor e do aluno. Ele estava lá, fosse para estudar, fazer exercícios, sempre companheiro. Nós alunos, até gostávamos do cheiro deles quando novos.

Hoje em dia, verificamos como é fácil para o aluno ter acesso ao livro didático. A escola está cheia deles devido à programas do governo. No entanto, os alunos reclamam que têm que carregá-los, mas continuam sendo indispensáveis como apoio dentro da cultura escolar.

Assim, depois de alguns anos em sala de aula, percebendo as dificuldades dos estudantes com relação ao conceito de função e suas representações, procuramos respostas que contribuíssem para entender, diagnosticar e minimizar essa deficiência.

De encontro com essas aspirações, encontramos no mestrado acadêmico a oportunidade maior para iniciar um trabalho de pesquisa, onde essas inquietações e dúvidas pudessem ser sanadas e assim ampliar qualitativamente a nossa atividade como educador, produzindo trabalhos que tragam no seu bojo contribuições pertinentes à educação matemática, de tal sorte que outros possam usufruir e criticar.

A motivação inicial para a realização desta pesquisa surgiu depois da leitura do trabalho de Mesa (2001). A autora vincula o desempenho sofrível dos alunos sobre o conceito de função com a forma que esse tema é abordado em livros didáticos.

Por considerarmos que função é um tópico importante para a matemática, sendo inclusive no ensino pré-universitário um tema de dificuldades para os alunos, aliado ao fato de que os livros didáticos são instrumentos importantes como fonte de informações para professores e alunos que permitem conduzir a prática docente com maior segurança e riqueza, consideramos relevante um estudo diagnóstico sobre as concepções da função afim veiculadas nos livros.

Assim, o objetivo do nosso trabalho será investigar de que forma o conceito de função afim é abordado nos livros didáticos, particularmente a sua representação gráfica, como são estudados os parâmetros algébricos e suas correspondentes unidades visuais e ainda, como são promovidas as suas respectivas articulações.

Acreditamos que o tema escolhido, por envolver a educação matemática, trará subsídios para avaliar o conteúdo conceitual em livros didáticos. Com isso esperamos também agregar uma qualidade maior à nossa atividade como educadores, ajudando assim a superar as dificuldades de nossos alunos.

O desenvolvimento do nosso trabalho está exposto em cinco capítulos descritos a seguir.

O primeiro diz respeito às considerações e análises de trabalhos de vários autores e das orientações de documentos oficiais sobre o tema que nos conduziram à problemática da pesquisa: 1. PROBLEMÁTICA

No segundo capítulo, apresentamos os princípios da fundamentação teórica que nortearam a nossa pesquisa, baseados nos registros de representação de Raymond Duval: 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.

O terceiro capítulo apresenta os livros didáticos utilizados no desenvolvimento da pesquisa e as justificativas das questões que orientaram a coleta de dados: 3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.

O quarto capítulo foi reservado para a análise dos livros didáticos envolvendo as questões investigadas definidas no capítulo anterior bem como as conclusões sobre os aspectos visuais e textuais: 4. ANÁLISE DOS LIVROS: TRATAMENTO EXPOSITIVO.

No capítulo número cinco observamos os exercícios que constam nos livros e as conclusões que foram os resultados das investigações: 5. ANÁLISE DOS LIVROS: CORPO DE EXERCÍCIOS.

O sexto e último capítulo contém as considerações finais sobre o nosso trabalho: 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS.

CAPÍTULO 1. PROBLEMÁTICA

Desde quando começamos a lecionar, a responsabilidade como professor conferiu-nos alguns direitos e deveres, mais deveres que direitos na realidade. Assim, trabalhando com alunos da 1ª série do ensino médio, tanto na rede particular como na rede pública estadual, tivemos a percepção do grande número de estudantes que encontrava dificuldades na aprendizagem do conceito de função.

A nossa experiência como professores na rede particular e na rede estadual tem nos mostrado que, apesar dos alunos da escola particular possuírem um desempenho na média superior aos da escola pública, quando observados sob o ponto de vista individual, encontramos nesta última um número significativo de alunos com potencial igual e muitas vezes superior aos seus pares na rede particular. Esse fato tem origem, entre outros fatores, em problemas de ordem social e econômico que não são o foco do nosso trabalho.

Esta realidade também se reflete quando analisamos o objeto em estudo o conceito de função. Mas, de forma geral, os alunos nos dois tipos de instituições de ensino convivem com graus de dificuldade semelhantes, guardadas as devidas proporções, com relação ao objeto de pesquisa.

Enquanto que com os alunos da escola pública é necessário resgatar conceitos fundamentais e assim subsidiar o que se vai estudar, além do conceito em si mesmo, os nossos esforços na escola particular têm outro perfil; o foco é o estudo do objeto matemático em si, tomados como requisitos prévios conceitos já contemplados em séries anteriores. Estes alunos têm ainda, em tese, uma estrutura familiar que exerce uma cobrança, colaborando assim com a nossa atividade enquanto professor. Já os nossos alunos da rede pública exigem uma atenção maior, uma abordagem diferente, mais condescendente e, por conseguinte mais cuidadosa.

Muitos desses alunos que apresentavam lacunas acerca da noção de proporcionalidade tinham dificuldades em interpretar gráficos, confundiam domínio com contradomínio e possuíam total incapacidade de estabelecer relações entre as informações das diferentes representações, no que diz respeito à função.

O conceito de proporcionalidade é fundamental na interpretação de fenômenos do cotidiano: uma noção matemática simples que pode ser usada para resolver problemas variados. No contexto escolar, o raciocínio proporcional é fundamental não só em matemática, como é o caso de função afim, mas também em outras ciências, como a Física e a Química, por agregar compreensão e significado. Está presente, por exemplo, ao interpretar uma estatística ou um gráfico.

Procuramos então trabalhos que pudessem elucidar mais sobre o assunto.

O nosso interesse inicial foi deflagrado ao lermos o artigo de Markovits, Eylon e Bruckeimer (2003), envolvendo as causas prováveis de dificuldades e erros de concepções sobre o conceito de função de alunos em Israel na faixa de 14 a 16. Consolidou-se posteriormente com o artigo de Mesa (2001) sobre a hipótese de vincular a concepção de função dos alunos com a forma como ela é abordada em livros didáticos.

É inquestionável a importância no estudo de função dentro da matemática e a sua relação com outros campos do conhecimento.

Durante muito tempo o conceito de função foi considerado como elemento unificador da matemática. A Reforma Francisco Campos[1] trazia no seu bojo essa intenção, conforme as recomendações constantes das suas Instruções Pedagógicas:

[1] Primeira reforma centralizadora do governo em âmbito nacional em 1931 em relação à educação. Organizou o ensino secundário em dois ciclos, um fundamental de cinco anos e outro complementar de dois anos, visando a preparação para o ingresso no ensino superior. Organizou também as universidades (BRAGA, 2006).

> [...] Para dar unidade à matéria, estabelecendo-se essa estreita correlação entre as diferentes modalidades do pensamento matemático, será adotada, como idéia central do ensino, a noção de função, apresentada a principio, intuitivamente e desenvolvida, nas séries sucessivas [...], de modo gradativo, tanto sob a forma geométrica como sob a analítica.
> [...]. Antes mesmo de formular qualquer definição e de usar notação especial, o professor não deixará nas múltiplas ocasiões que se apresentem, tanta em Álgebra como em Geometria, de chamar atenção para a dependência de uma grandeza em relação a outra ou como é determinada uma quantidade por uma ou por várias outras.
> [...] A representação gráfica e a discussão numérica devem acompanhar, constantemente, o estudo das funções e permitir, assim, uma estreita conexão entre os diversos ramos das matemáticas elementares.
> [...] Como recursos indispensáveis à resolução rápida dos problemas da vida prática, é necessário que o estudante perceba serem tabelas, gráficos e fórmulas algébricas representações da mesma espécie de conexão entre quantidades e verifique a possibilidade de se tomar qualquer desses meios como ponto de partida conforme as circunstâncias (BICUDO, apud BRAGA, 2006, p. 137-8).

No entanto, esta característica unificadora pareceu dificultar a sua assimilação, pois segundo Mesa, a “introdução unificadora da noção de função na matemática escolar tem provado ser problemática para estudantes, futuros professores e professores no que diz respeito à compreensão de funções” (MESA, 2001, p. 455, tradução nossa).

É interessante observar que, com relação a funções, os PCN[2] (1998) são objetivos, pois propõem o desenvolvimento do aprendizado de tal forma que o aluno consiga construir tabelas e representar graficamente informações como dados estatísticos, utilizando diversos recursos, assim como interpretar e elaborar conclusões a partir da leitura dos mesmos. Para tanto, os PCN (1998) são incisivos quando recomendam:

> Assim, no trabalho com a álgebra é fundamental a compreensão dos conceitos como o de variável e de função: a representação de fenômenos na forma algébrica e gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações ao identificar parâmetros, incógnitas, (variáveis) e o conhecimento da sintaxe (regras para a resolução) de uma equação. Para apoiar a compreensão desses conceitos pode-se lançar mão da construção e interpretação de planilhas, utilizando recursos tecnológicos como a calculadora e o computador (PCN de Matemática, 1998, p. 84).

[2] Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio.

É possível perceber ainda a importância da proporcionalidade dentro da matemática quando da abordagem de semelhança de figuras geométricas, de porcentagem ou na análise de tabelas, gráficos e funções. Essa importância aparece também na descrição dos PCN (1998):

> O aluno poderá desenvolver essa noção [de proporcionalidade] ao analisar a natureza da interdependência de duas grandezas em situações problema em que elas sejam diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais (função quadrática ou afim). Essas situações são oportunas para que se expresse a variação por meio de uma sentença algébrica, representando-a no plano cartesiano (PCN de Matemática, 1998, p. 84-5).

A noção de proporcionalidade permite, portanto analisar relações numéricas de determinadas situações e estabelecer relações entre variáveis e expressão algébrica. Assim, uma função que estabelece entre x e y uma relação tal que y/x é constante é dita linear. Expressamos a relação por f(x) = kx, k constante, e dizemos que a variação de f(x) é diretamente proporcional a x. Isto é um dos aspectos mais notáveis relativo às funções afins: acréscimos iguais em x correspondem acréscimos iguais em f(x). Isto se revela inclusive no gráfico, sendo possível demonstrar que toda a reta não perpendicular ao eixo x representa o gráfico de uma função afim.

Especificamente para o nosso estudo, a relevância do conceito de proporcionalidade está em caracterizar as situações em que o modelo linear se aplica.

Sobre a importância do conceito de função, destacamos também a obra de Braga (2006) que cita:

> [...] passou-se a dar uma importância cada vez maior ao caráter integrador das diversas representações de função no estabelecimento de conexão entre os diferentes ramos da matemática, dessa com outras ciências e, também, com situações do cotidiano dotadas de significado real pelos estudantes (BRAGA, 2006, p. 15).

Segundo Braga (2006), essa conexão de função com a vida cotidiana faz parte de critérios para classificação em quatro[3] níveis de alfabetismo funcional em matemática utilizados nas pesquisas do INFA (Instituto Nacional de Alfabetismo Funcional). Essa classificação serve para avaliar as habilidades básicas em matemática, e para o autor:

> Essa classificação não deixa de revelar a importância conferida às representações funcionais tabular e gráfica ao estabelecer que o *nível 3 alfabetismo matemático* considera também uma familiaridade do pesquisado com tabelas e gráficos. Este fato mostra a importância dessas representações de função quanto à inclusão social do individuo, a ponto de ele não ser considerado plenamente alfabetizado em termos matemáticos, se não tiver algum domínio sobre elas. Seguramente, o avanço de um educando em direção a um conhecimento maior do conceito de função devera levá-lo a uma compreensão melhor de seu dia-a-dia, disponibilizando-lhe ferramentas úteis ao exercício de sua cidadania, como por exemplo, o reconhecimento de variáveis em situações do cotidiano e o estabelecimento de relações entre elas. Esse alcance confere ao referido conteúdo uma relevância incontestável na matemática escolar (BRAGA, 2006, p. 17).

Assim como percebemos que são imprescindíveis a compreensão e a interpretação de função, não só em atividades matemáticas no âmbito escolar, como também na vida social, é de fácil constatação as dificuldades inerentes ao seu aprendizado.

Como já comentamos anteriormente existem vários pesquisadores que apontam como é notável a dificuldade dos alunos quando têm função como objeto de estudo, particularmente quando eles se deparam com as suas várias formas de representação.

---

[3] Analfabetismo matemático, nível em que as pessoas não demonstram dominar sequer as habilidades mais simples e básicas, como ler o preço de um produto ou anotar um número ditado por outra pessoa.
Nível 1 de alfabetismo matemático, em que as pessoas conseguem ler as horas, medir com fitas métricas, verificar dias em calendários e outras atividades simples.
Nível 2 de alfabetismo matemático, em que, além das habilidades requeridas no nível anterior, as pessoas são capazes de comparar decimais que se referem a preços, efetuarem operações de adição, subtração e mesmo uma multiplicação, muitas vezes com calculadora, e, por fim, identificar a existência de relação proporcional direta e inversa..
Nível 3 de alfabetismo matemático, em que, além das habilidades requeridas nos níveis anteriores, as pessoas conseguem resolver problemas que demandam uma série de operações, fazer cálculos proporcionais e demonstrar certa familiaridade com algumas representações como mapas, tabelas e gráficos.

Pesquisas realizadas nessa área confirmaram tais dificuldades, como é o caso de Markovits, Eylon e Bruckeimer (2003), e do artigo de Mesa (2001).

Os pesquisadores Markovits, Eylon e Bruckeimer (2003), desenvolveram um estudo sobre as dificuldades dos alunos acerca do conceito de *função*, analisando como estes assimilaram esse conteúdo e propondo seqüências didáticas para minimizar essas dificuldades. Segundo os autores, este conceito é abstrato e soa quase que sem sentido sempre que insistimos em descrevê-lo para alunos, muito embora sejam feitos pelos professores esforços variados na tentativa de reverter esse quadro desanimador. Assim, de acordo com os autores:

> A complexidade do conceito de função também é parcialmente responsável pelas dificuldades dos alunos. Notemos que a definição de função, tal como é ensinada atualmente, envolve muitos conceitos – domínio, contradomínio, conjunto imagem, regra de correspondência. Assim, ou temos de ter certeza de que esses conceitos foram compreendidos em todas as representações, antes de continuarmos a ensinar mais coisas sobre funções, ou temos de optar por deixar de lado alguns aspectos (MARKOVITS; EYLON; BRUCKHEIMER, 2003, p. 59)

Esta dificuldade sobre o conceito é acentuada mais ainda pelo fato de que muitos alunos não percebem que uma função não é caracterizada apenas de regra de correspondência, mas também pelo domínio e contradomínio.

Os autores argumentam que muitos alunos têm dificuldade em identificar claramente o que é domínio, contradomínio e imagem na representação gráfica:

> Eles não perceberam que na representação gráfica o eixo x representa o domínio e o eixo y representa o contradomínio, ao passo que os pontos do gráfico representam os pares. Esta é uma dificuldade clara e fundamental. Muitos alunos não fazem a conexão entre os componentes da definição verbal de função e os componentes da representação gráfica visual. Há uma dificuldade subsidiária intrínseca à forma gráfica, envolvendo o papel duplo dos pontos situados nos eixos: são pontos do plano, com coordenadas (x,0) ou (0,y), e como tais podem representar pares, correspondentes a intersecções do gráfico com um dos eixos, mas são também pontos dos eixos (MARKOVITS, EYLON, BRUCKHEIMER, 2003, p. 56).

Portanto, se o aluno não consegue reconhecer estes conjuntos, é natural que a sua compreensão fique comprometida. Os autores (2003) destacam ainda um componente de dificuldade maior na representação gráfica, devido ao papel duplo dos pontos situados nos eixos coordenados: são pontos do plano que correspondem a intersecções do gráfico com os eixos e também são pontos dos eixos. Esse problema, segundo os autores, não existe nas demais representações (algébrica, diagrama de flechas, etc).

Entre as várias dificuldades dos alunos identificadas pelos pesquisadores (2003), destacamos a dificuldade de lidar com a função constante, pela peculiaridade de seu conjunto imagem ser unitário, e a dificuldade da manipulação técnica. Neste último caso, dada uma função na forma algébrica, os autores afirmam que a tarefa de encontrar o valor da abscissa quando se fornece a ordenada, é mais difícil do que o processo inverso. Explicam que a causa é muito simples, pois para encontrar o valor da imagem basta o aluno substituir o valor de x na representação algébrica. Utilizando a mesma forma de raciocínio, os autores explicam ainda que, a dificuldade de manipulação técnica quando da passagem de uma forma de representação para outra, particularmente da gráfica para algébrica, é mais acentuada do que passagem inversa por envolver uma maior complexidade.

Sobre o entendimento e o pensar matemático acerca do conceito de função, é importante destacar que Markovits, Eylon e Bruckheimer (2003) citam:

> Temos evidências de que foi mais fácil para os alunos lidar com funções dadas na forma gráfica do que na forma algébrica. Não é difícil encontrar razões para isso. A representação gráfica é mais visual; o domínio, o contradomínio e a regra de correspondência são dados simultaneamente; e se tem uma impressão visual do comportamento da função. Mas em quase todos os currículos, a representação algébrica é ensinada antes da representação gráfica. Sugerimos que se trabalhe muito mais a forma gráfica nos passos iniciais do desenvolvimento do conceito de função (MARKOVITS, EYLON, BRUCKHEIMER, 2003, p. 65).

Contrariamente à recomendação dos autores, uma verificação superficial mostrou que a maioria dos livros didáticos brasileiros examinados começa com problemas envolvendo a representação algébrica quando da apresentação do conceito.

Com relação ao uso de livro didático em geral, vale destacar o trabalho de Morgado (2004). A sua obra foi motivada pela constatação do autor de que na nossa sociedade o conhecimento cientifico está cada vez mais presente no nosso cotidiano. Assim, defende que o cidadão comum deve ter uma formação sólida que lhe permita aprender mesmo quando deixe a sala de aula.

Por considerar que os manuais escolares desempenham papel importante tanto na prática educativa como na composição curricular, pois deles depende "muitas vezes a maior ou menor relevância dos temas abordados nas aulas" (MORGADO, 2004, p. 8), Morgado elaborou um questionamento genérico sobre os manuais escolares.

Para tanto dividiu o seu trabalho nos tópicos abaixo:

1. Desafios educativos contemporâneos.
2. A importância dos manuais escolares na configuração dos processos de ensino aprendizagem.
3. Os manuais escolares como mediadores das práticas docentes.
4. Manuais escolares e sociedade informal.

O primeiro tópico diz respeito aos *Desafios educativos contemporâneos*. Para o autor, o professor como profissional liberal, tem que se adaptar à nova realidade dos jovens. Um volume de informações cada vez maior é trazido para dentro da sala de aula, em conexão com as experiências de vida dos estudantes. Aliado a essa característica, Morgado (2004) aponta também um acesso maciço à escola. Daí sugere a necessidade de repensar as práticas curriculares. Como o manual escolar unifica determinado projeto curricular e é um recurso utilizado pelo professor, para Morgado (2004), torna-se pertinente a sua discussão.

Para ilustrar, bastaria comentar o acesso à internet, com o seu volume e rapidez de informações caracterizadas pela inevitável globalização. Novos valores também estão sendo agregados à nossa sociedade, assim como a substituição de alguns por outros. A utilização de softwares para o estudo de funções é uma realidade. A título de exemplos poderíamos citar alguns, tais como Cabri Géomètre, GraphMat, Advanced Grapher e Objetivo Funções Matemáticas.

No segundo ponto, chamado pelo autor (2004) de *A importância dos manuais escolares na configuração dos processos de ensino aprendizagem*, é descrita a necessidade de reflexão sobre como os instrumentos didáticos são organizados, já que têm papel relevante nos processos educativos. Para o autor, os manuais escolares devem-se adaptar aos estudantes e não ao contrário. Morgado (2004) é de opinião que além de propiciar informação relevante para os alunos, os manuais devem promover a exploração de outros recursos e ter um caráter abrangente e não excessivamente acadêmico.

Entendemos assim que o livro didático deverá guardar o rigor que caracteriza o estudo da matemática enquanto ciência, sem, no entanto, pecar pelo excesso de tecnicismo, correndo o risco de apenas cumprir a sua meta curricular ficando afastado do interesse e da realidade do aluno. Aliás, isso faz parte das orientações oficiais.

No entanto, no caso da matemática, consideramos que o excesso de informalidade, ou até mesmo a forma como se aborda determinado assunto, é determinante na formação de quem se utiliza do livro.

A pesquisadora Mesa (2001) levanta hipóteses sobre a vinculação entre as diferentes concepções sobre função que emergem de problemas e exercícios presentes em livros didáticos de vários países, como por exemplo, Argentina, Austrália, Espanha, Estados Unidos, Inglaterra e Portugal entre outros, e a forma como os alunos assimilam o conceito. A autora aborda ainda a cultura de resolver mecanicamente equações, alegando que tal abordagem contribui para erros de manipulação algébrica e que o estudo da álgebra é às vezes confundido com o estudo de funções.

A autora argumenta que uma investigação sobre os livros didáticos pode ser um dos elementos que contribui para explicar o motivo da dificuldade de aprender os conceitos ali expostos, no nosso caso – função.

Esta apresenta uma classificação de problemas e exercícios do tema função contido em livros didáticos da escola secundária, o que fornece subsídios para identificar algumas concepções de funções que seriam privilegiadas no conjunto de exercícios de cada livro examinado.

Assim, defende no seu trabalho que as concepções de função que são promovidas pelos problemas e exercícios, teriam uma relação com o processo de ensino e aprendizado.

As razões que levaram Mesa (2001) a escolher livros didáticos, passam pela convicção de que eles constituem um elemento fundamental na cultura escolar segundo essa pesquisadora. Sintetizam informações valiosas e são uma fonte potencial de aprendizado de uma forma geral. Ela considera que uma investigação dos livros didáticos é relevante não só para análises particulares de alguns tópicos (que merecem pouca atenção dos pesquisadores), mas também pode explicar o porquê da dificuldade de aprender os conceitos associados. Ela lembra que os estudantes aprendem dos livros didáticos dentro do contexto escolar. A autora lembra ainda, que os professores intermediam e às vezes omitem parte do conteúdo dos livros.

Assim, ao nos alinharmos à posição de Mesa, decidimos investigar então mais material que abordasse o assunto sobre livros didáticos.

A obra de Oliveira (1997) foi motivada pela constatação da dificuldade dos alunos do primeiro ano de Engenharia com o conceito de função na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Este fato resulta, segundo a autora, em grande número de reprovações. Assim, por considerar que é importante a compreensão deste conceito como pré-requisito para o estudo do cálculo, a autora propôs uma seqüência didática. Depois de aplicada, segundo a autora ainda, os alunos deram um salto qualitativo nas suas concepções de função.

Dessa pesquisa destacamos a investigação de alguns livros didáticos acerca do conceito de função, sua parte histórica, suas linguagens e notações, obstáculos epistemológicos e didáticos e seus exercícios. Segundo a autora (1997), os livros pesquisados fazem meras citações à parte histórica sobre funções. Considera também que de acordo com as definições sobre função presentes nos livros, não ficam claras as noções de dependência, de variável dependente e independente em geral, e o conceito de função aparece apenas como objeto de estudo, e não como instrumento para resolver algum problema. Cita ainda como obstáculos epistemológicos presentes nos livros, diversos aspectos, tais como o tratamento do conceito de razão e proporção, e como obstáculo didático, o fato de os livros didáticos privilegiarem inicialmente as representações algébricas em detrimento das gráficas. Além do mais, Oliveira (1997) esclarece que a passagem de um quadro de representação para outro é feita sem nenhuma explicação; ainda, os gráficos aparecem em muitos livros sem escala e não é proposto que os alunos construam gráficos em papel quadriculado ou milimetrado. Considera também que os diagramas de flecha são usados em excesso quando se define relação e função, e geralmente isso só é feito com números inteiros.

Com relação aos exercícios, Oliveira (1997), considera que são poucos os que apresentam exemplos de relações que não são funções e a grande maioria não estimulam a criatividade nem o raciocínio lógico. Trata-se de simples treino. A autora (1997) na sua análise sobre os livros, considera que estes apresentam poucos exercícios interessantes e sustenta que a metodologia utilizada nos livros, na abordagem do conceito função, limita a participação do aluno na construção de significados. Por isso, considera que “a transposição didática do conceito de função, salvo raras exceções, não está de acordo com a Proposta Curricular” (OLIVEIRA, 1997, p. 36).

Rossini (2006), é outra pesquisadora que alerta sobre a importância do livro didático, já que os professores fazem uso dele para preparar suas aulas, fato esse, segundo a autora ainda, respaldado por orientações oficiais.

Em sua tese de Doutorado, Rossini (2006) estudou as concepções e dificuldades de um grupo de professores no que diz respeito à noção de função, ao longo de um processo de formação continuada. Utilizou a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard como fundamentação teórica para associar algumas das concepções de função que subsidiou a análise de cinco coleções de livros didáticos da 8ª série do Ensino Fundamental.

A autora (2006) analisou também até que ponto os livros seguiam as orientações dos PCN de Matemática (1998) e a Proposta Curricular do Estado de São Paulo (1992) acerca da introdução do conceito de função. Para tanto, a pesquisadora estabeleceu doze categorias, e as comparou com o tipo de abordagem utilizada nos livros. Essas categorias são todas relativas a como conceituar função: 1. Em termos conjuntivistas, 2. Como relação entre duas grandezas, 3. Identificar variável independente e variável dependente, 4. Função como máquina, 5. Como padrão de regularidade de sequências numéricas e geométricas, 6. Em torno da função linear y=kx, modelo matemático da proporcionalidade direta, 7. Em torno do modelo matemático da proporcionalidade inversa y=k/x, 8. Como objeto função polinomial de 1º grau, 9. Como objeto função polinomial de 2º grau, 10. Manipulação de objetos concretos, 11. Apresentação de textos científicos ou gráficos extraídos de jornais ou revistas e 12. Apresentação de batalha naval.

A investigação de Rossini (2006) que examinou estes tipos de abordagem apontou que enquanto alguns livros didáticos se utilizavam de apenas um tipo de abordagem, outros faziam uso de mais do que uma, demonstrando assim estas últimas, uma variedade muito rica na forma de introdução do conceito. No entanto, a autora destaca a escassez de articulações entre os vários registros de representação, além de apontar a presença de poucas tarefas sobre leitura e interpretação de gráficos nos livros.

Rossini (2006) identificou ainda que nos livros, existe uma predominância de exercícios que envolvem a determinação de uma expressão algébrica, elaboração de uma tabela e em seguida a construção do gráfico correspondente. Esta característica, segundo a autora (2006), parece ser reforçada pelas orientações da Proposta Curricular de Matemática para o Estado de São Paulo (1997). Tarefas onde são exigidas leitura e interpretação de gráficos são escassas nas coleções analisadas.

Silva (2007), na sua dissertação de mestrado, apresenta um estudo sobre funções em cinco livros didáticos sendo dois do Ensino Fundamental e três do Ensino Médio. Investiga como é feita a abordagem sobre função, se na construção de gráficos a passagem do discreto (que pode ser contado) ao continuo (que pode ser medido) é explicitado satisfatoriamente e se são propostas tarefas que tratem dos dois sentidos da conversão entre as representações algébrica e gráfica. A sua fundamentação teórica são os Registros de representação Semiótica de Duval.

O autor concluiu (2007) que: a abordagem está de acordo com as orientações oficiais; a passagem do discreto ao contínuo não é feita satisfatoriamente e a maioria dos livros privilegia um único sentido de conversão, da algébrica para gráfica.

Sobre os cuidados maiores na abordagem de conceitos, já mencionados anteriormente, no caso envolvendo função, características que a matemática exige em seus livros didáticos, Lima (2001) faz uma análise de várias coleções de livros didáticos do ensino médio e em seu posfácio tece comentários pertinentes.

Considera que embora os livros de forma geral tenham boa diagramação e sejam multicoloridos, as figuras contêm imprecisões e o texto não induz o aluno a pensar. Sobre funções em particular o autor cita explicitamente:

> [...] Funções são definidas como relações binárias, ponto de vista que nenhum matemático nem usuário de Matemática adota em seu dia a dia. Pior: esta generalidade inútil é rapidamente abandonada e todas as funções que surgem depois são bolinhas e flechinhas, ou então dadas pelas fórmulas.
> [...] Função afim: A importantíssima noção de proporcionalidade, que o aluno não aprendeu corretamente no Ensino Fundamental, não é retomada de forma adequada. A caracterização da função afim (acréscimos iguais a x provocam acréscimos iguais em $f(x)$) nunca é mencionada. Que seu gráfico é uma reta é uma conclusão nunca provada, mas afirmada a partir de três pontos particulares num exemplo particular. Além disso, é chamada função de primeiro grau, como se funções tivessem grau (LIMA, 2001, p. 463-4).

Os Manuais Escolares como mediadores das Práticas Docentes é o terceiro ponto abordado por Morgado (2004). Aqui, o autor defende a autonomia do professor como um profissional liberal com total autonomia e liberdade no exercício da sua profissão com responsabilidade. Para o autor, o manual não deve, portanto limitar a atuação do professor, como mero cumpridor meramente de suas atribuições. Para o pesquisador, os manuais escolares “devem ser considerados como um meio facilitador de aprendizagem dos alunos” (MORGADO, 2004, p. 37), pois é através deles que sedimentam seus saberes. O autor comenta ainda que o manual escolar continua sendo insubstituível na educação para alunos e professores e até para a família encarregada pela educação, vinculado a valores e princípios. No entanto, reforça a idéia de que o manual apesar de transmitir um saber oficial, não deve ser a única fonte de conhecimento, recomendando o recurso a outras fontes, cujo objetivo é desenvolver a capacidade de análise e espírito crítico.

O autor (2004) alerta ainda para a existência de alguns manuais escolares que são elaborados como se todos os alunos tivessem os mesmos conhecimentos prévios e características similares.

Outro aspecto relevante citado por Morgado (2004) é o fato de que, embora o manual seja feito para professores e alunos, compete apenas aos primeiros a sua seleção. Assim, as editoras, segundo o autor, motivadas por interesses comerciais, estariam privilegiando e facilitando a vida do professor, já que cabe a eles a escolha do livro didático.

Antes de encerrar este tópico, Morgado (2004) questiona o papel político do Estado como regulador do discurso curricular e o papel das editoras que o reinterpretam e apresentam ao professor. Assim, se por um lado o professor pretende exercer a sua profissão com responsabilidade e liberdade, por outro lado ele se vê refém de uma série de fatores que influenciam direta ou indiretamente a sua atividade. As Influências políticas e mercantilistas têm veiculação direta com a sua prática pedagógica, uma vez que o livro didático, instrumento auxiliar de extrema importância, está sujeito aos fatores acima descritos. Argumenta então que caberia ao professor o papel de mero receptor passivo do processo, ficando assim, refém desse material, correndo o risco de ser “despojado dos seus saberes e habilidades” (MORGADO, 2004, p. 51). Assim, a sua atuação muitas vezes é limitada por fatores externos à sua atividade.

No nosso caso, na rede pública, embora exista um catálogo de livros pré determinados disponíveis para seleção, temos liberdade de escolha na definição do livro a ser adotado. Também gozamos de relativa autonomia em definir estratégias e outros materiais de apoio para explorar o currículo. Manda o bom senso observar as orientações oficiais.

Já no caso da escola particular, existe um fator de marketing associado à definição do material didático. A sua escolha é estabelecida pela qualidade concomitantemente com a propaganda, funcionando muitas vezes como cartão de visita. Cabe a nós professores interferir apenas no aspecto didático que define a linha mestre de desenvolvimento de estratégias.

Por acreditar que a formação dos professores tem estreito relacionamento com o livro didático, Morgado (2004, p. 51) alerta sobre o fato de que os professores “em muitos casos, são treinados para utilizarem como recurso privilegiado o manual escolar” pois está convencido que muitos deles privilegiam a memorização, em detrimento da construção do conhecimento.

Sobre o incentivo e o papel do livro na cultura escolar, vale lembrar, entretanto o que as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) citam como *mea* culpa:

> Na ausência de orientações curriculares mais consolidadas, sistematizadas e acessíveis a todos os professores, o livro didático vem assumindo, há algum tempo, o papel de única referência sobre o saber a ser ensinado, gerando, muitas vezes, a concepção de que “o mais importante no ensino da matemática na escola é trabalhar o livro de capa a capa” (ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO MÉDIO, 2006, p. 86).

Oliveira (1997) também estudou como os professores abordavam o conceito função. De um total de 17 professores de Matemática solicitados a responder um questionário sobre que materiais utilizavam para ensinar funções, apenas 13 o fizeram. A maioria destes, 69,3%, responderam que utilizavam livros didáticos. O restante de material utilizado era composto de jornais, revistas e outros (cartazes, jogos, textos, computadores e quadro negro), o que levou a autora à conclusão de que “os referidos professores têm utilizado uma variedade de materiais didáticos para O ensino funções, mas o livro didático ainda impera como o recurso mais utilizado ou considerado importante nessa tarefa.” (OLIVEIRA, 1997, p. 44).

Embora o livro realmente possa servir de referência, ele não deve ser o único apoio. A própria autora constatou na sua pesquisa a importância de outros materiais como o jornal, revistas, computadores, etc. Embora não seja tema do nosso trabalho, reconhecemos a importância do uso de softwares, mas principalmente de situações do cotidiano para ilustrar melhor o conceito de função. Revelar significância do conceito tem relação direta com a aplicabilidade no dia a dia do cidadão.

A autora é mais explícita quando cita que “em geral as concepções dos professores que responderam o nosso questionário são aquelas que aparecem nos livros didáticos” (OLIVEIRA, 1997, p. 44).

Isso demonstra então, a necessidade de enriquecer as nossas aulas de matemática com outras abordagens onde tudo se interliga.

Quando os professores foram questionados sobre que mudanças de registro de representação que utilizavam no ensinamento de função, a pesquisa apontou para uma preferência da mudança de tabela para gráfico e de algébrico para gráfico.

> Como podemos observar, a mudança de registros de representação mais utilizada é da tabela para o gráfico, o que era de se esperar, pois a maior parte dos livros didáticos que analisamos propõem essa mesma situação, o que pode provocar o aparecimento de obstáculos didáticos para os alunos, como no caso em que tiverem que resolver algum problema em que apareçam outras mudanças de registro (OLIVEIRA, 1997, p. 44).

Como este fato também é privilegiado nos livros didáticos, é plausível supor que esta característica acaba por se refletir na atuação dos professores em sala de aula.

Andrade e Dias (2007) fizeram uma análise dos documentos oficiais a saber, Proposta Curricular para o Ensino de Matemática no Nível Médio do Estado de São Paulo (1992), os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM, 2004) e Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio: Ciências da Natureza e suas Tecnologias (PCN +, 2005), onde destacam as noções de função linear e do coeficiente angular da reta, "que devem ser desenvolvidas simultaneamente com a noção de função afim e que permitem a articulação dessa noção com diferentes domínios ou quadros" (ANDRADE e DIAS, 2007, p. 7).

As autoras analisaram (2007) ainda dois livros didáticos do ensino médio aprovados pelo PNLEM – 2005 (Programa Nacional do Livro do Ensino Médio) no que diz respeito à função afim, e fizeram um estudo sobre os resultados obtidos pelos estudantes de uma escola pública de São Paulo no SARESP (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo) envolvendo o conceito de função.

Nas conclusões, Andrade e Dias (2007) consideram que embora fosse possível identificar nos livros uma preocupação em trabalhar com conversões de registros de representação semiótica, noção já introduzida por Duval (2003) o que contempla a proposta curricular, devido ao resultado mostrado no SARESP, "ainda existe uma imensa distância entre o que é proposto institucionalmente e o que os estudantes foram capazes de desenvolver" (ANDRADE e DIAS, 2007, p. 17).

No ponto quatro, intitulado por Morgado *Manuais Escolares e Sociedade Informal*, o autor revela "que o conhecimento deixou de ser uma aquisição meramente escolar." (MORGADO, 2004, p. 55). Para ele é necessário então, que o professor numa mudança de atitude ajude os estudantes na confrontação com as informações com que os alunos se deparam diariamente. Para Morgado (2004), é importante que o aluno seja o protagonista da sua aprendizagem.

Não cabe somente à escola o papel de desenvolver conhecimento. Com as novas tecnologias e novas fontes de informação, há necessidade de um novo paradigma na atuação do professor. O volume e a velocidade de informações é de tal porte, que há necessidade de novos métodos de trabalho.

Nos trabalhos descritos acima, podemos constatar a importância do livro didático dentro da cultura escolar e como ele é determinante como instrumento de apoio ao professor e ao estudante.

Assim, se concordamos com Mesa (2001) que a dificuldade dos alunos sobre o conceito de função pode estar associado à forma como esse conteúdo é abordado nos livros, devemos investigar de que forma esses mesmos livros abordam o tema função afim em particular. É importante ressaltar, entretanto, que essa investigação levará em conta, primordialmente, os aspectos visuais da representação gráfica. Queremos identificar como é que os componentes visuais são abordados e de que forma são articulados com seus correspondentes algébricos.

Para endossar o nosso objetivo, temos ainda as orientações dos documentos oficiais, bem como os trabalhos que discursam sobre o assunto, ambos descritos ao longo deste capítulo e que demonstram a relevância do tema.

As motivações pessoais que nos levaram a estudar o assunto estão diretamente ligadas à nossa prática pedagógica. Em outras palavras, diríamos que o interesse sobre o tema, aparentemente simples, tem estreita ligação com a realidade em sala de aula: os alunos demonstram uma enorme dificuldade em transitar entre a representação gráfica e a representação algébrica da função afim.

Se nas instituições onde ministramos aulas temos uma relativa autonomia na escolha do livro didático, queremos agregar critérios qualitativos para definir a nossa escolha pessoal.

Ao investigarmos o enfoque que é dado à visualização da função afim e sua articulação com os componentes algébricos, queremos fazê-lo sob o ponto de vista matemático, além do cognitivo.

Isso é motivado pela constatação em nossa sociedade moderna de informações visuais com que nossos alunos são bombardeados sistematicamente. São situações do cotidiano que exigem um entendimento correto do conceito. Vale lembrar que a informação exposta na mídia de forma geral tem obviamente um componente lógico-matemático por trás por se tratar de um conteúdo conceitual. A nossa preocupação é o entendimento desse conceito. Outros pesquisadores já citados também manifestaram a mesma preocupação.

Dessa forma acreditamos que seja possível que o aluno possa entender situações não só na vida acadêmica como no seu dia a dia.

Essa relevância social é maior quando pensamos em inserção social. Vale lembrar a discussão de Braga (2006) sobre alfabetismo funcional, especificamente sobre representações gráficas. Não conseguimos enxergar no nosso país, um caminho vitorioso que não seja através da educação.

CAPÍTULO 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Registros de representação semiótica de Raymond Duval

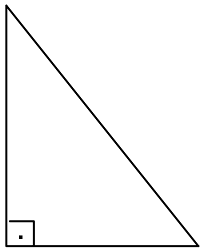
Para desenvolvimento da nossa pesquisa, nos apoiamos na teoria dos registros de representação semióticas de Raymond Duval, que tem uma relação muito estreita com a didática da matemática. Ela servirá de guia norteador do nosso trabalho.

Para compreender as dificuldades do aluno no trato da matemática, Duval (2003) argumenta que não podemos nos restringir apenas à análise no campo da matemática em si. Propõe analisar também as condições e os problemas pertinentes à sua aprendizagem através de uma abordagem sob o aspecto cognitivo. Dessa forma, explica o autor, estaremos contribuindo para “o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização.” (DUVAL, 2003, p. 11). Reforça essa convicção ao defender uma maior formação matemática inicial dos alunos para que possam enfrentar ambientes informáticos e novas tecnologias, independentemente de serem futuros matemáticos ou não.

Para Duval (2003), a originalidade e a especificidade da abordagem cognitiva no que diz respeito às dificuldades em matemática, está em possibilitar ao aluno compreender e controlar a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos, características típicas desses processos, que não estão presentes em outras áreas de conhecimento cientifico, como a astronomia a biologia, etc. Isto se deve ao fato de que segundo o autor, para a matemática, que trata de objetos não diretamente perceptíveis, ao contrário, por exemplo da Biologia, as representações são muito importantes, sendo essa a única forma de acessar tais objetos. Essa originalidade da atividade matemática à qual Duval se refere, diz respeito especificamente a duas características:

- a importância das representações semióticas;
- a variedade das representações semióticas.

Por exemplo, para se referir a um triângulo retângulo podemos empregar as representações:

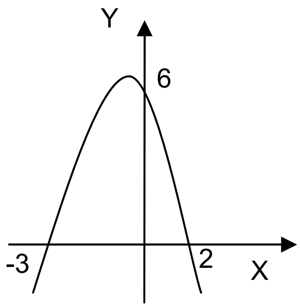


Qualquer triângulo que tenha um ângulo de 90º em um dos seus vértices.

representação figural

representação na língua natural

Outro exemplo seria: para uma função quadrática, podemos empregar as representações:



$$f(x) = -x^2 - x + 6$$

representação gráfica

representação algébrica

Para ilustrar a relevância das representações semióticas, basta observar a história do desenvolvimento da matemática no que diz respeito à evolução dessas representações, consideradas por Duval (2003) de fundamental importância no atual pensamento matemático. Assim, essa importância destacada pelo autor, se manifesta no fato dos tratamentos matemáticos dependerem de um sistema de representação para sua apreensão como também, pela razão dos objetos matemáticos não serem perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos, como já citados.

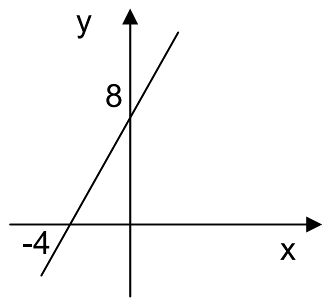
Já quanto à variedade das representações semióticas, Duval (2003), cita uma gama diversificada: representações de sistemas de numeração, figuras geométricas, escritas algébricas, representações gráficas e língua natural.

No caso do nosso trabalho, o interesse está nas três últimas representações: língua natural, escrita algébrica e gráficos.

Exemplos:

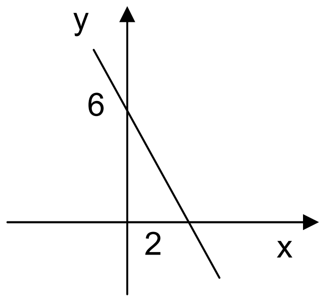
1. Dada uma função tipo f(x) = 2x + 8, esboçar o seu gráfico.

   O enunciado é dado em língua natural, a expressão f(x) = 2x + 8 é uma representação algébrica e o gráfico ao lado é uma representação gráfica.



2. Dado o gráfico abaixo, encontrar a expressão algébrica da função correspondente.

   O enunciado é dado em língua natural, o gráfico ao lado é uma representação gráfica, a expressão f(x) = -3x + 6 é uma representação algébrica.



Para designar os diferentes tipos de representação semiótica, Duval (2003, p. 14) utiliza o termo “registro”. Assim, temos para a representação gráfica o registro gráfico e para a representação algébrica o registro algébrico.

Com relação às condições de aquisição de conhecimentos matemáticos por parte de alunos, Duval (2003), faz algumas considerações.

Ele considera que a preocupação maior é de oferecer condições específicas de acesso aos objetos matemáticos, cujo objetivo é permitir a sua compreensão. Para tanto, considera as representações semióticas como protagonistas neste processo. Esse acesso exige, segundo Duval (2003), a coordenação dos diferentes registros de representação semiótica. No entanto, alerta que essa coordenação não é natural, justificando assim as dificuldades de aprendizagem que os alunos apresentam. Vai mais além ainda, quando discute que alguns sucessos dos alunos se dão apenas quando a resolução de problemas envolve apenas registros algoritmizáveis, tais como sistemas de escrita (numérica, algébrica, simbólica), cálculos ou gráficos cartesianos, mas em muitas oportunidades sem sentido e sem contextualização.

Para permitir uma coordenação efetiva, Duval (2003) defende que os sistemas de representação semióticos devem estar cognitivamente estruturados, como parte integrante da forma de pensar das pessoas. Para tal, o autor apresenta quatro idéias básicas que compõem o seu modelo para aquisição de conhecimentos matemáticos.

1. O desenvolvimento da capacidade mental de representação depende do desenvolvimento cultural de sistemas semióticos. Essa capacidade de se apropriar das representações contribui não só na comunicação, como forma de expressão do raciocínio, como também, na capacidade de transformar uma representação em outras e até mesmo, transitar com confiança entre as diferentes representações.
2. A aquisição de conhecimentos matemáticos está vinculada à capacidade de coordenação de registros de representação semiótica. Embora esta coordenação não seja natural, ela deverá ser considerada no processo de apropriação dos sistemas de representação semiótica.
3. Algumas variáveis cognitivas podem ser retomadas como variáveis didáticas. O autor considera que as variáveis relativas ao conhecimento que são abstratas, podem ser retomadas como variáveis didáticas, que são aquelas que provocam modificações de estratégias na resolução de problemas.
4. Como a atividade matemática utiliza diversas representações, a sua apreensão pode contribuir para o desenvolvimento das capacidades cognitivas de forma geral para os indivíduos. A preocupação desse processo como um todo, sem se ater a determinado conceito em particular, é relevante para a educação do individuo, em geral.

Das quatro idéias expostas acima, apenas estamos interessados nas três primeiras que nortearão o desenvolvimento da nossa análise.

A primeira que diz respeito ao desenvolvimento e à valorização dos sistemas semióticos. Pesquisaremos se os livros de alguma forma trabalham nesse sentido, ou seja, se promovem esse desenvolvimento.

A segunda idéia defende a idéia da importância da coordenação dos registros de representação como uma forma de aquisição de conhecimento matemático. Verificaremos então, se e como os livros promovem essa articulação.

A quarta e última idéia não será utilizada como principio norteador por tratar da capacidade cognitiva global que pode ser adquirida pelos indivíduos com a diversidade dos registros de representação.

Para o autor (2003), a condição essencial para a compreensão da matemática, é a articulação dos diferentes registros de representação de um mesmo objeto, como já citamos no ponto 3 acima.

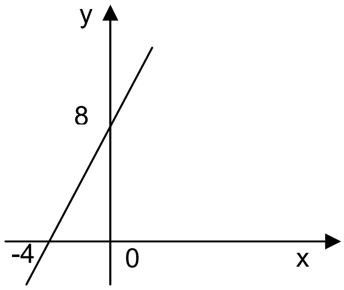
Para o autor, é clara a idéia de que registros de representação de um mesmo objeto não têm "igual conteúdo ou que se deixem perceber uns nos outros" (DUVAL, 2003, p. 31), razão pela qual defende a mobilização simultânea de vários registros de representação e a possibilidade de trocar a qualquer momento de registro. Ou seja, as atividades tais como o raciocínio, a conceituação, a compreensão de textos de matemática e a consequente resolução de problemas, requerem outras formas de expressão e de representação além da língua natural ou de imagens, como gráficos, fórmulas, diagramas, etc.

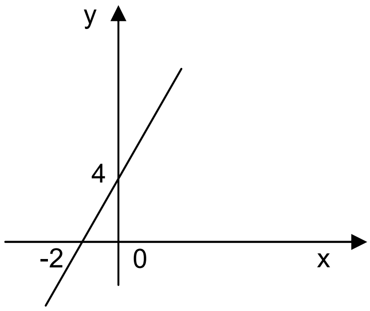
Para ilustrar a pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, assim como a importância da coordenação e articulação de registros, tomemos como exemplo:

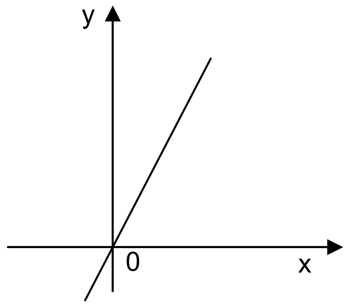
Dados $f(x) = 2x + 8$, $g(x) = 2x + 4$ e $h(x) = 2x$, esboçar os respectivos gráficos.

O enunciado é em língua natural, as expressões que o acompanham são representações algébricas e o resultado pretendido são representação gráficas.

Articular e coordenar os registros neste caso significa compreender o que significa a alteração gráfica concomitantemente com a alteração dos coeficientes algébricos.

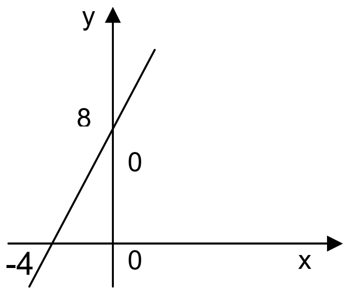


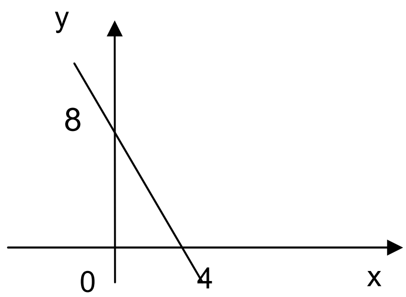




$f(x) = 2x + 8$ $\qquad$ $g(x) = 2x + 4$ $\qquad$ $h(x) = 2x$

Outro exemplo seria sair da representação gráfica para a representação algébrica. Compreender o significado da alteração dos coeficientes algébricos concomitantemente com a alteração gráfica.





$f(x) = 2x + 8$ $\qquad$ $g(x) = -2x + 8$

Na teoria dos registros de representação semiótica, Duval (2003) descreve dois tipos de transformações radicalmente diferentes de representações semióticas de um mesmo objeto matemático: o tratamento e a conversão. O tratamento é a transformação de uma representação em outra dentro do mesmo registro; como exemplo, apresentamos a transformação do registro numérico da escrita fracionária $\frac{1}{4}$ em $\frac{2}{8}$:

$$\frac{1}{4} \xrightarrow{\text{tratamento}} \frac{2}{8}$$

registro na escrita fracionária $\qquad$ registro na escrita fracionária

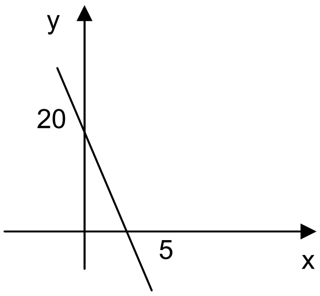
Um outro exemplo de tratamento seria a resolução de uma equação:

$$3x - 6 = 0 \xrightarrow{\text{tratamento}} x = \frac{6}{3}$$

Dentro do nosso tema, um outro exemplo de tratamento seria:

$$f(x) = 4x + 8 \quad f(x) = 12 \quad 12 = 4.x + 8 \quad \xRightarrow{\text{tratamento}} \quad 12 - 8 = 4x \quad 8 = 4x \quad x = \frac{8}{4}$$

Já a conversão consiste na mudança de registros; como exemplo dentro do nosso tema, temos abaixo a passagem do registro gráfico para o registro algébrico.



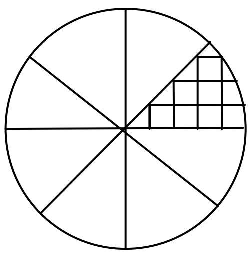
conversão $\Rightarrow$ $f(x) = -4x + 20$

registro gráfico | registro algébrico

Outros exemplos de conversão seriam:

$$0{,}25 \quad \xRightarrow{\text{conversão}} \quad \frac{1}{4}$$

registro na forma decimal | registro na forma fracionária



conversão $\Rightarrow$ $\frac{1}{8}$

registro figural | registro fracionário

Para o autor (2003), sob o ponto de vista matemático, a conversão é considerada uma atividade lateral e não como uma verdadeira atividade matemática, uma vez que não lhe cabe nenhum papel de justificação ou prova e acontece apenas para escolher o registro onde os tratamentos são mais eficazes. Entretanto, quando olhada sob o ponto de vista cognitivo, é a conversão que conduz ao entendimento e à compreensão, sendo o elemento básico para análise cognitiva.

A importância da coordenação entre diferentes registros de representação defendidos por Duval aparece explicitamente nos exemplos anteriores de conversão. Assim, um aluno pode saber dividir 1 por quatro, mas pode não reconhecer 0,25 como uma outra representação desse número, e também talvez o aluno não reconheça o número $\frac{1}{8}$ através do seu representante do registro figural.

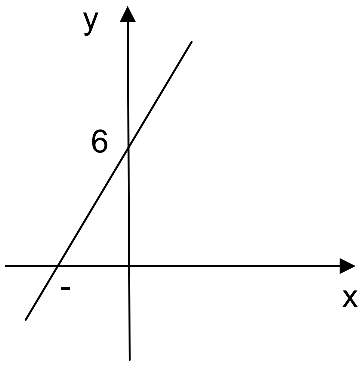
Para Duval (2003), existem dois tipos de fenômenos característicos da conversão das representações: as variações de congruência e de não congruência e a heterogeneidade dos dois sentidos de conversão.

No que diz respeito ao primeiro, quando se analisa uma conversão, ainda sob o aspecto cognitivo, onde é comparada a representação do registro de partida com o da chegada, pode-se observar as variações de congruência ou de não-congruência dessa transformação. Ou seja, se essa transformação é natural e direta ou não; mais ainda, se a representação terminal é perceptível a partir da representação de saída ou não. Exemplos:

- A conversão de 0,25 para $\frac{1}{4}$ é de caráter não-congruente.
- A conversão de $\frac{1}{4}$ para 0,25 é de caráter congruente.
- A conversão de 0,25 para $\frac{25}{100}$ é de caráter congruente.
- A conversão de “o conjunto de pontos cuja ordenada é superior à abscissa” para $y > x$ é de caráter congruente.
- A conversão em língua natural de “o conjunto de pontos cuja abscissa e cuja ordenada têm o mesmo valor” para a inequação $x.y > 0$ é de caráter não-congruente.

Duval (2003) argumenta que no ensino, o privilégio dado a um determinado sentido de conversão, vem associado à idéia equivocada de que o treinamento efetuado nesse sentido automaticamente treina a conversão no outro sentido.

Para o autor a heterogeneidade dos dois sentidos de conversão diz respeito ao fato de que, no ensino, nem sempre se efetua a conversão nos dois sentidos: ou seja, passar do registro de saída ao de chegada e vice-versa. Por exemplo, em funções afins, o sentido de conversão do registro algébrico para o gráfico é privilegiado em detrimento da conversão inversa. Como conseqüência, Duval observa que, em geral, para os estudantes um sentido de conversão se torna mais fácil que o outro por ser mais explorado no contexto escolar.



Conversão

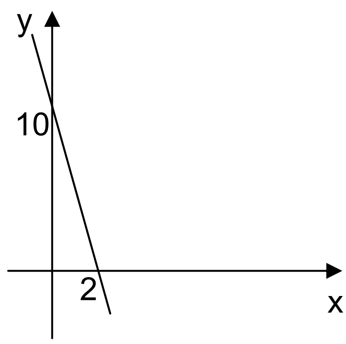
do registro gráfico para o registro algébrico

$f(x) = 2x + 6$

Conversão

do registro algébrico para o registro

$f(x) = -5x + 10$



O autor (2003) considera que se em alguma resolução de problema, um determinado registro é privilegiado em detrimento de outros, deve existir a possibilidade de se passar para um outro tipo de registro.

Sob o ponto de vista cognitivo, Duval (2003), destaca que a conversão não é uma simples codificação, ou seja, passar de uma equação para o gráfico através da aplicação da regra. Para ele, é necessária a “articulação entre as variáveis cognitivas que são especificas do funcionamento de cada um dos registros.” (DUVAL, 2003, p. 17).

Para o autor, a “organização semiótica permite três tipos de tratamento (isto é, de operações internas aos gráficos) e dois tipos de conversão com o registro simbólico” (DUVAL, 2003, p. 18), representado esquematicamente conforme a figura 1 abaixo.

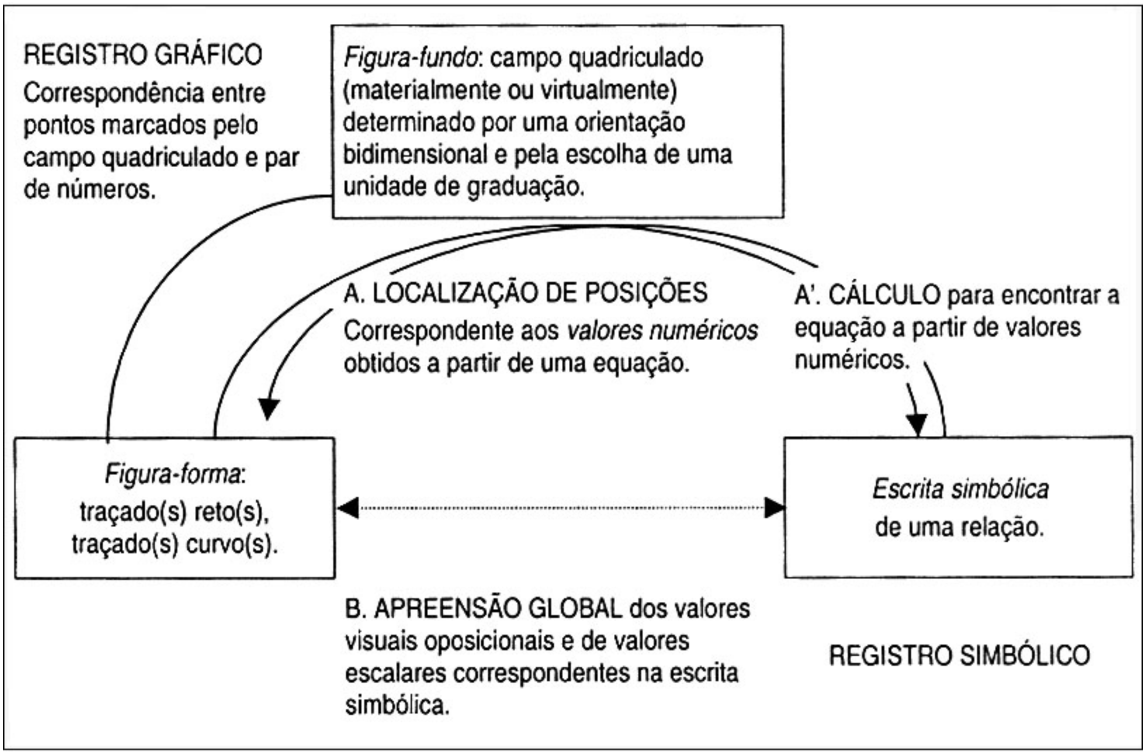


Figura 1. Esquema de organização semiótica e do funcionamento das representações gráficas.
Fonte: Duval, 2003, p. 18

Pelo esquema acima, podemos perceber que, na conversão A, (escrita simbólica para figura-forma), a localização de pontos na figura fundo (plano cartesiano) é obtida pela substituição de números na equação que originará o gráfico (figura-forma). Na conversão A’ (figura forma para escrita simbólica) a expressão algébrica é obtida a partir de cálculos de valores numéricos de pontos do gráfico (figura-forma) e lidos na figura-fundo (plano cartesiano). Estas duas conversões, segundo o autor, permitem apenas uma leitura pontual.

Para Duval (2003), somente a conversão B, independente do sentido, é que permite uma apreensão global, pois leva em consideração as variáveis pertinentes a cada representação.

Assim, para que a conversão se torne instrumento de análise, é necessário explicitar essas variáveis cognitivas próprias de cada registro. No nosso caso, estaremos especialmente interessados nos registros algébrico e gráfico. O registro da língua natural será usado para examinar as justificativas dos desenvolvimentos algébricos e da aparência dos gráficos, além das relações com esses registros. Assim, explicitaremos apenas algumas variáveis relativas a esses dois registros, o algébrico e o gráfico.

A importância da articulação das variáveis pertinentes nas representações algébrica e gráfica foi descrita por Duval (1988) em um dos seus trabalhos com o nome de *Graphiques et Equations: L'Articulation de deux registres.*

Neste trabalho, Duval descreve a necessidade da articulação dos registros gráfico e algébrico, dada a dificuldade dos alunos na interpretação de gráficos cartesianos, particularmente no caso de retas. Para ele, essa constatação está associada à conversão do registro gráfico para o algébrico e vice-versa.

Para o autor, (1988), essa dificuldade apresentada pelos alunos nas conversões não está no conceito matemático da função afim, mas sim no desconhecimento das regras de correspondência dos registros de representação semiótica - algébrico e gráfico. Tanto é que mesmo depois do ensino de função afim, para o autor, a articulação entre as representações algébricas e gráficas não parece estabelecida.

Para defender suas idéias, Duval (1988) utiliza três tópicos:

I. Explica os três tratamentos heterogêneos das representações cartesianas.
II. Explicita as variáveis visuais pertinentes que correspondem às características da escrita algébrica.
III. Ilustra com uma análise, os resultados de uma pesquisa feita com alunos sobre articulação dos registros algébrico e gráfico.

<u>I Tratamentos heterogêneos das representações gráficas</u>

Segundo Duval (1988), existem três procedimentos para a construção de gráficos cartesianos:

1. O procedimento de pontuar;

2. O procedimento de extensão do traço;

3. O procedimento da interpretação global das propriedades figurais.

1. Para Duval (1988) o procedimento de pontuar é aquele que é utilizado para introduzir as representações gráficas. Um par ordenado permite a marcação de um ponto e vice-versa. Este procedimento é limitado a valores particulares e é favorecido quando se trata de traçar gráficos correspondentes a equações de primeiro e segundo grau. Segundo o autor, esse processo de codificação não permite a apreensão global e qualitativa do objeto em estudo, no caso, função, mas somente uma leitura pontual. O autor vai mais adiante quando destaca que infelizmente o procedimento de pontuar além de ser prática sistemática no ensino, é totalmente inoperante, já que por definição desvia a atenção das variáveis visuais.

É o que acontece, quando o aluno a partir de uma expressão algébrica ou uma tabela, marca ponto a ponto usando números inteiros por exemplo.

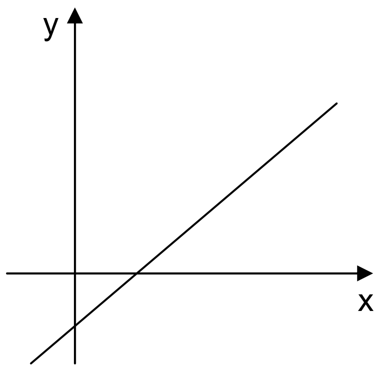
2. Já o procedimento de extensão do traçado, segundo Duval (1988), diz respeito às atividades de interpolação e extrapolação e é meramente mental, sendo que a extensão se apóia no conjunto infinito dos pontos potenciais e sobre os intervalos entre os pontos marcados. Mas, assim como o procedimento de pontuar não leva em conta as variáveis visuais pertinentes da representação gráfica, elementos necessários para uma apreensão global. Duval (2003) destaca que essa apreensão global é necessária para extrapolar, interpolar e conseqüentemente interpretar gráficos, relacionando-os com suas representações algébricas.

Esta situação se verifica quando o aluno conhece alguns pontos e acaba por uni-los sem preocupação alguma com o comportamento da função como um todo.

3. No procedimento de interpretação global das propriedades figurais, Duval (1988) explica que o conjunto traçado/eixos forma uma imagem que representa um objeto matemático descrito por uma expressão algébrica.

> Qualquer modificação dessa imagem implica em mudança na expressão algébrica. Dessa forma, é possível perceber uma correspondência entre os dois registros de representação, pois permite identificar todas as modificações relevantes e conjuntas da imagem e da escrita algébrica. Para Duval, “não estamos mais na presença da associação um ponto – um par de números, mas da associação variável visual da representação – unidade significativa da escrita algébrica” (DUVAL, 1988, p. 237, tradução nossa).

Para ilustração, apresentamos um exemplo de uma atividade que envolve o procedimento de interpretação global das propriedades figurais.



A reta da figura ao lado é do tipo $y = ax + b$, então:

a) $a>0$ e $b>0$

b) $a>0$ e $b<0$

c) $a<0$ e $b>0$

d) $a<0$ e $b<0$

e) $a=b$

Este tipo de exercício não tem associação explícita de pontos com pares de números nem atividades de interpolação e extrapolação. Exige, no entanto, que se associe as variáveis visuais com as suas correspondentes algébricas.

<u>(II) Variáveis visuais e unidades simbólicas significativas</u>.

Já vimos anteriormente que quando se tenta encontrar a representação algébrica a partir da representação gráfica ou vice-versa, é o procedimento de interpretação global aquele apontado por Duval (2003) como o mais adequado.

Para tanto, o autor destaca a importância da articulação entre os registros gráficos e algébricos. A tabela abaixo mostra a correspondência entre as variáveis visuais da representação gráfica e suas correspondentes unidades simbólicas da representação algébrica, proposta por Duval:

Tabela 1. Valores das variáveis visuais e correspondentes unidades simbólicas.

Variáveis visuais	Valores das variáveis visuais	Unidades simbólicas correspondentes
sentido de inclinação	traçado ascendente de esquerda para a direita	coeficiente>0, ausência do símbolo -
	traçado descendente de esquerda para a direita	coeficiente<0, presença do símbolo -
	obs.: a referência esquerda direita é o sentido normal do escrita latina	
Ângulos com os eixos	divisão simétrica	coeficiente=1 sem coeficiente escrito
	ângulo formado com eixo vertical é maior que o formado com o eixo horizontal	coeficiente<1
	ângulo formado com eixo vertical é menor que o formado com o eixo horizontal	coeficiente>
	obs.: quando a reta não passa pela origem é suficiente deslocar o eixo vertical até ao ponto de intersecção da reta com o eixo horizontal	
Posição do traçado em relação à origem do eixo vertical	o traçado cruza o eixo y acima da origem	acrescentamos uma constante, sinal +
	o traçado cruza o eixo y abaixo da origem	acrescentamos uma constante, sinal -
	o traçado cruza o eixo y na origem	sem correção aditiva

Da tabela anterior podemos observar que enquanto o coeficiente angular está relacionado com sentido de inclinação da reta e com o ângulo que esta faz com os eixos x e y, o coeficiente linear está relacionado com a posição onde a reta corta o eixo y.

Por conseguinte, a conversão entre gráficos e expressões de função afim, deve levar em consideração as articulações entre as variáveis visuais gráficas (maior ou menor inclinação da reta e sua intersecção com os eixos do plano), e os coeficientes da função (coeficiente positivo, negativo, maior, menor ou igual a 1). Para o autor, são essas variáveis cognitivas especificas a cada registro “que permitem determinar quais as unidades de significado pertinentes, que devem ser levadas em consideração” (DUVAL, 2003, p. 17).

A partir da tabela acima, o autor destaca a importância dos coeficientes *a* e *b* da escrita algébrica y =*a*x+*b*, observando que:

> O conceito de inclinação, algebricamente traduzido pelo coeficiente, abrange duas unidades significativas diferentes, uma definida em relação ao sinal e o outro em relação ao número inteiro 1. Estas duas unidades significativas correspondem à duas variáveis diferentes, respectivamente o sentido da inclinação e o ângulo. Não há congruência entre a direção da reta no plano e o coeficiente que determina esta direção na escrita da expressão algébrica. Para cada valor de coeficiente dado (2, ½, -2,...) é necessário invocar duas propriedades distintas, relativamente a 0 e relativamente a 1 (DUVAL, 1988, p. 240, tradução nossa).

Essa falta de congruência destacada pelo autor é relevante, uma vez que não é fácil para o aluno analisar concomitantemente o sinal e o valor (em relação a 1) do coeficiente que traduz o ângulo e o sentido de inclinação respectivamente.

Para Duval (1988), com o procedimento de pontuar, ou até mesmo o da extensão, é possível sair da escrita algébrica para a representação gráfica, atribuindo valores para *x* e assim encontrando vários pontos. No entanto, para ir da representação gráfica para a representação algébrica, há necessidade de identificar e integrar as variáveis visuais. Essa apreensão global passa necessariamente pela atenção sobre um conjunto de propriedades e não apenas sobre valores específicos tomados um a um.

Sobre a importância da apreensão global, Duval (1988) cita:

> Uma apresentação explícita das variáveis visuais significativas não somente centra a atenção sobre a correspondência entre a representação gráfica e a escrita algébrica, mas ela permite encontrar diretamente a expressão algébrica de propriedades geométricas
> [...] É suficiente com efeito praticar o procedimento experimental clássico: fazer variar uma unidade significativa da escrita guardando os outras constantes e ver o que se passa no outro registro (ou fazer variar cada variável visual as outras duas constantes e ver as modificações da escrita). Assim, por exemplo, o oposto entre y=x e y=-x articula-se na unidade de uma imagem visual, e esta imagem empresta-se à modificações que têm a sua contrapartida algébrica imediata (DUVAL, 1988, p. 242, tradução nossa).

Ainda sobre a tabela anterior, Duval (1988), identificou que, para retas não paralelas aos eixos, existem somente 18 representações gráficas que são visualmente diferentes e significativas sendo que a cada uma dessas representações corresponde uma função afim particular. No entanto, nos casos de paralelismo a um dos eixos, não aparece a variável relativa ao eixo em questão.

Abaixo, alguns exemplos das 18 representações possíveis.

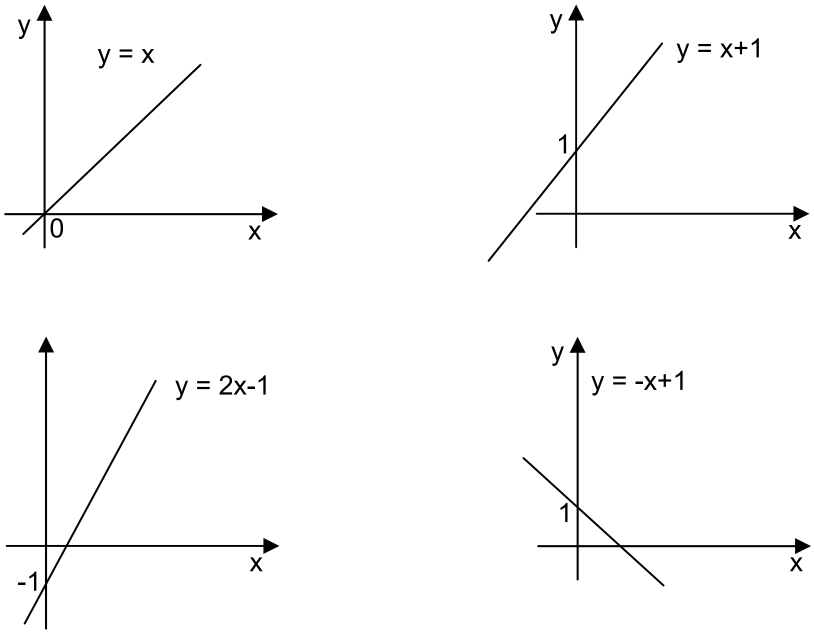


Figura 2. Exemplos de algumas das 18 representações possíveis.

Tabela 2. Exemplos de valores das variáveis visuais e correspondentes unidades simbólicas.

Variável visual	Exemplo	Valor da Variável visual	Unidade Simbólica Correspondente
Sentido de Inclinação	y = x	Traçado ascendente da esquerda para a direita	Coeficiente > 0, ausência do símbolo -
	y = x + 1	Traçado ascendente da esquerda para a direita	Coeficiente > 0, ausência do símbolo -
	y = 2x – 1	Traçado ascendente da esquerda para a direita	Coeficiente > 0, ausência do símbolo -
	y = -x + 1	Traçado descendente da esquerda para a direita	Coeficiente < 0, presença do símbolo -
Ângulo com os eixos	y = x	Divisão simétrica	Coeficiente = 1, sem coeficiente escrito
	y = x + 1	Divisão simétrica	Coeficiente = 1, sem coeficiente escrito
	y = 2x – 1	Ângulo formado com o eixo vertical é maior que o formado com o eixo horizontal	Coeficiente > 1
	y = -x + 1	Divisão simétrica	Coeficiente = 1, sem coeficiente
Posição do traçado em relação à origem	y = x	O traçado cruza o eixo na origem	Sem correção aditiva
	y = x + 1	O traçado cruza o eixo acima da origem	Acrescentamos uma constante, sinal +
	y = 2x – 1	O traçado cruza o eixo abaixo da origem	Acrescentamos uma constante, sinal –
	y = -x + 1	O traçado cruza o eixo acima da origem	Acrescentamos uma constante, sinal +

Duval (1988), afirma que apesar da importância da articulação entre a representação algébrica e gráfica, ela não está presente na perspectiva do ensino da matemática. Sugere inclusive que olhemos os livros de forma geral onde existem variedades de representações gráficas para perceber que estas precedem as articulações em questão.

(III) O sincretismo da percepção das representações gráficas nos alunos

Para investigar as dificuldades que os alunos têm em perceber as variáveis visuais pertinentes e a correspondência com as unidades significativas da expressão algébrica, Duval (1988) propôs a um grupo de alunos franceses na faixa de 15 e 16 anos que associassem as representações gráficas (G1, G2, G3, G4, G5) com as representações algébricas (E1, E2, E3,...,E10) como mostra a figura abaixo.

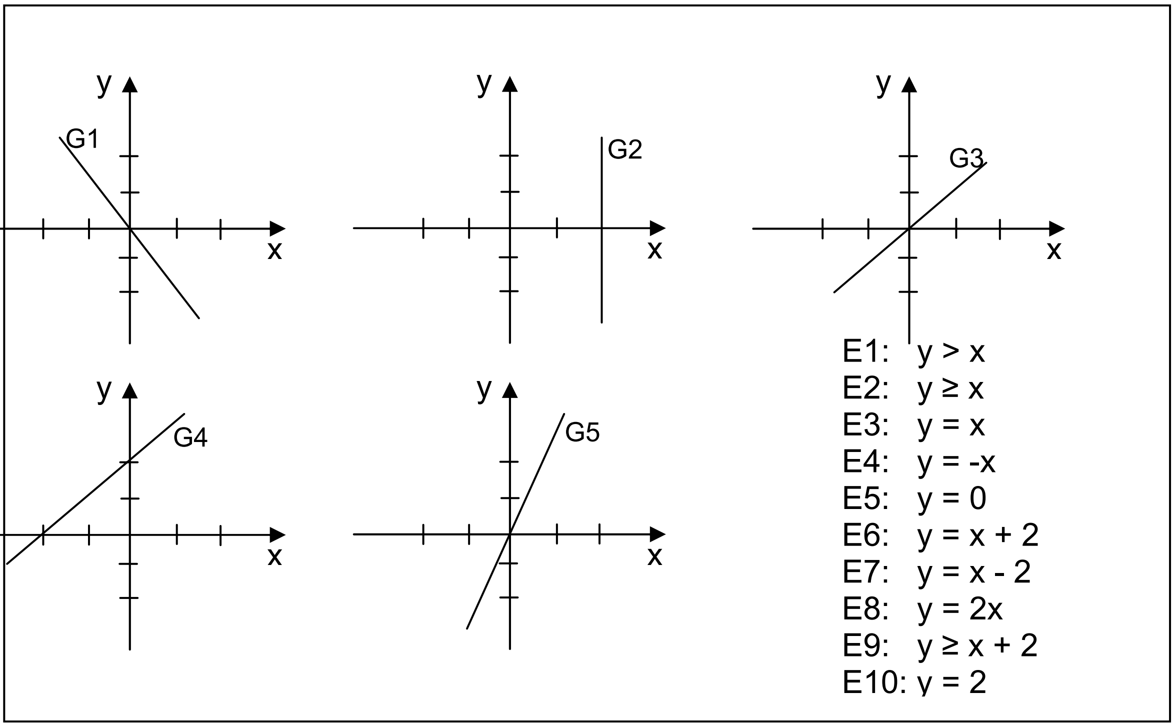


Figura 3. Ilustração da atividade proposta por Duval a alunos franceses.
Fonte: Duval, 1988, p. 244

Os resultados apresentados apontaram dificuldades ligadas à identificação da escrita gráfica e sua correspondente representação algébrica.

Dentro dos resultados apresentados, Duval constatou que:

- 21 alunos associaram o gráfico G1 à expressão y = x. Duval (1988, p. 245) acredita que esses alunos não associaram o traçado descendente com o símbolo negativo “-” o coeficiente da expressão algébrica.
- 23 alunos associaram a expressão y = -x ao gráfico G4. Para o autor (1988, p. 245) os alunos apenas retêm a propriedade figural de intersecção da reta com o ramo do eixo x.

Duval também realizou essa pesquisa junto a 60 alunos do ensino médio que apresentou resultados semelhantes à pesquisa anterior.

Analisando então todo o universo de 165 alunos, o autor (1988, p. 246) constatou que apenas ¼ deles conseguiu distinguir y = x + 2 de y = 2x e somente 20 % dos 165 conseguiram acertar os cinco exercícios. Mas o que chamou a atenção de Duval foi o fato de que apenas 99 alunos, isto é, 60%, viram uma diferença de sentido de inclinação da reta associada à diferença entre $y = x$ e $y = -x$.

Segundo Duval (1988, p. 246) a pesquisa mostrou a diferença acentuada que separa o procedimento de pontuar e o procedimento de interpretação global. Para o autor, sem esta interpretação global, não é possível reconhecer na escrita algébrica a expressão analítica das propriedades geométricas, nem interpretar gráficos que representam grandezas de naturezas diferentes como tempo, distância percorrida, velocidade, etc.

Ora, se para Duval (1988) o significado dos gráficos e sua leitura dependem da percepção das articulações dos registros presente na interpretação global, é necessário então promover procedimentos que valorizem os sistemas de representação semióticos e a coordenação efetiva dos registros envolvidos, expostos pelo autor (2003) como pressupostos para a aquisição de conhecimentos matemáticos.

Os procedimentos a que nos referimos são as transformações, tratamentos e principalmente conversões, de tal sorte a propiciar que os sistemas de representação semióticos possam ficar cognitivamente estruturados.

Observaremos então de que forma as variáveis pertinentes de cada registro se articulam nessas transformações e de que forma estas últimas são promovidas.

É neste contexto teórico que iremos desenvolver o nosso trabalho sobre visualização da função afim.

CAPÍTULO 3. CONSIDERAÇÕES METODOLÓGICAS

3.1 Programa Nacional de Livros do Ensino Médio – PNLEM

O programa Nacional do Livro Didático – PNLD foi implantado a partir de 1985 pelo Ministério de Educação – MEC, que começou a distribuir livros didáticos na rede pública de ensino para professores e alunos do Ensino Fundamental. Os livros, apesar de distribuídos pelo MEC, eram escolhidos pelos professores.

No entanto, a partir de 1995, o MEC, através de um grupo de especialistas em diversas áreas de conhecimento, iniciou um processo de análises pedagógicas sobre o conteúdo dos livros em forma de resenhas. Surgia assim o Guia de Livros Didáticos, que implicou no mercado editorial em uma mudança de estratégia mercadológica, que desencadeou em uma melhora significativa na qualidade dos livros didáticos.

Em 2004, devido aos resultados obtidos pelo PNLD, o MEC decidiu ampliar esse programa de distribuição de livros didáticos para o Ensino Médio chamado de Programa Nacional de Livros do Ensino Médio PNLEM. Dele consta um catálogo com análises dos livros aprovados pelo MEC.

3.2 Escolha dos livros didáticos

Apresentamos agora as justificativas que serviram de guia para definir a escolha dos livros.

Assim, iniciamos com a leitura dos anexos do catálogo relativo ao PNLEM 2005.

Analisando os critérios de avaliação do livro didático de matemática do catálogo dos livros selecionados pelo MEC, destacamos a importância de alguns critérios do ensino da matemática associados ao tema do nosso trabalho.

O primeiro tema que aparece diz respeito à forma de abordagem dos conteúdos, no caso função:

> Em contraste com muitas das abordagens atuais, o tratamento desses conteúdos deve buscar o equilíbrio na atenção aos diversos conteúdos. Deve, igualmente, afastar-se da compartimentalização e procurar ampliar as ocasiões de articulação entre os diferentes temas, evitando o inconveniente de se limitar à apresentação de conteúdos de maneira concentrada em uma parte da coleção e desconectada de outros conteúdos. Por exemplo, é freqüente que sejam abordadas as funções apenas no primeiro volume da coleção e os de geometria analítica no último volume, com pouquíssimas conexões com os demais conteúdos (MEC, SEMTEC, FNDE, 2004, p. 71).

É caso da forma como é abordado o conceito de função e sua formalização ou não e se o conteúdo é estendido à geometria analítica. Aliás, sobre o tipo de abordagem de função especificamente e sua estreita relação com a geometria analítica, os critérios são claros:

> O estudo das funções numéricas como modelos matemáticos para o estudo da validação de uma grandeza associada à variação de outra grandeza assume um papel unificador importante. [...] Além disso, a representação no plano cartesiano permite ligar as propriedades de uma função com as de seu gráfico e a geometria analítica pode aparecer, então, como um campo de confluência de vários conceitos — função, equação, figura geométrica, etc. — que deveriam ser desenvolvidos e integrados no decorrer de todo o ensino médio. Por fim, o tratamento de temas como crescimento, decrescimento, taxa de variação de uma função, inclinação do gráfico, entre outros, devem permear o estudo das diferentes funções estudadas. Esse seria um caminho apropriado quando se deseja trabalhar o conceito de derivada nesse nível (MEC, SEMTEC, FNDE, 2004, p. 71).

É inegável a importância do estudo de função como subsídio para o estudo de cálculo na universidade, onde alunos do 1º ano de engenharia já apresentam dificuldades, de acordo com o trabalho de Oliveira (1997), comentado anteriormente no capítulo da problemática.

Nos critérios, é relevante ainda o destaque dado à função linear, que faz parte da nossa pesquisa:

> A função linear e sua estreita relação com o conceito de proporcionalidade entre grandezas é uma primeira dessas funções relevantes, que se amplia para o estudo da função linear, função afim e correlatas, e suas inúmeras aplicações (MEC, SEMTEC, FNDE, 2004, p. 71-2).

Outro aspecto importante, diz respeito à teoria dos conjuntos. Sobre esse conteúdo e a forma de abordagem do conceito de função a ela relacionada os critérios de avaliação recomendam:

> Um exemplo em que é bastante desaconselhável, tanto do ponto de vista matemático como didático, o uso da linguagem da teoria dos conjuntos é a definição de função com base em conceito de produto cartesiano de dois conjuntos (MEC, SEMTEC, FNDE, 2004, p. 72-3).

Quanto à importância do método dedutivo como forma de comprovação de um fato matemático, embora hoje em dia, segundo os PCN, sejam aceites outros como o raciocínio indutivo, conjecturas, tentativas ou verificações empíricas, o documento descreve:

> O livro-texto deve valorizar os vários recursos do pensamento matemático, como a imaginação, a intuição, o raciocínio indutivo e o raciocínio lógico-dedutivo, a distinção entre validação matemática e validação empírica e favorecer a construção progressiva do método dedutivo em Matemática. A respeito do método dedutivo, convém advertir para desvios freqüentes a serem afastados. O primeiro deles é o de formular uma generalização como fato provado, com base na verificação de exemplos — muitas vezes um ou dois apenas [...] É indispensável que os conteúdos ensinados sejam compatíveis com a Matemática, enquanto conhecimento acumulado e organizado, evitando-se, dessa forma, erros conceituais. Também são prejudiciais as formulações que induzam o aluno a tirar conclusões erradas com base no que é afirmado no livro-texto. É, igualmente, necessário empregar corretamente o raciocínio dedutivo, não sendo admissíveis afirmações contraditórias ou inconsistências lógicas (MEC, SEMTEC, FNDE, 2004, p. 75).

Este é o caso da demonstração, que é uma das questões dos livros didáticos que iremos investigar.

Outro tema que aparece diz respeito à diversificação das representações matemáticas, inclusive sobre gráficos, cuja importância já foi discutida anteriormente.

> Podem ser utilizadas diferentes linguagens para representar os conteúdos símbolos: matemáticos, língua natural, desenhos, gráficos, ícones, etc. Esse tratamento diversificado é apontado, atualmente, como um fator muito importante para a compreensão dos conceitos e dos procedimentos matemáticos (MEC, SEMTEC, FNDE, 2004, p. 75).

Num segundo momento, analisamos o catálogo do PNLEM 2005 (MEC, SEMTEC, FNDE, 2004) com a descrição e conteúdo dos livros didáticos, bem como suas respectivas análises.

Então examinamos as informações do catálogo sobre os livros levando em consideração os critérios de avaliação anteriormente descritos.

Quanto aos nossos critérios de escolha, o livro de Longen (2003) foi selecionado por possuir falta de articulação como no estudo de funções e o livro de Guelli (2004) foi selecionado por possuir articulação restrita dos conteúdos, características, portanto semelhantes. Já o livro de Smole e Diniz (2005) foi escolhido por apresentar uma articulação em espiral, característica oposta aos outros dois livros.

Com relação à análise das obras constantes no catalogo, destacamos das escolhidas, algumas das observações feitas no mesmo documento, que consideramos pertinentes ao nosso trabalho:

LIVRO 1. Matemática Ensino Médio 1ª série – Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz – Editora Saraiva – 2005 – São Paulo.

Além dos conceitos, das propriedades e dos procedimentos serem tratados com diversidade de enfoque, como em sistemas lineares, por exemplo, onde estão integradas as interpretações algébrica e geométrica, os conteúdos favorecem a interação entre as representações em língua natural, linguagem simbólica, gráficos, tabelas, desenho e ícones.

As atividades estimulam a verificação de processos e demonstrações e de validações empíricas e matemáticas.

LIVRO 2. Matemática uma atividade humana 1ª série – Adilson Longen – Editora Base – 2003 – Curitiba.

A obra apresenta diversidade de representações de conceitos, enriquecidos com desenhos e esquemas.

As demonstrações são poucas, mas de fácil compreensão.

LIVRO 3. Matemática 1ª série – Oscar Guelli – Editora Ática – 2004 –São Paulo.

No estudo de funções, as definições e as propriedades não são devidamente exploradas.

Com relação à diversidade, o ponto de vista algébrico é privilegiado.

A linguagem utilizada na obra é clara e acessível. Observa-se, também, um projeto gráfico de boa qualidade visual.

3.3 Critérios para investigar aspectos visuais e textuais

O propósito da grade de análise apresentada abaixo é servir como instrumento que permita observar e analisar, como são abordadas e articuladas as informações que apresentam a noção de função e de função afim, privilegiando a abordagem gráfica.

A pertinência desta grade se justifica pelo fato, como já foi descrito anteriormente, de que os livros didáticos, além de servirem de apoio aos professores, podem influenciar as concepções que fundamentam as suas práticas de ensino.

Ao longo da análise dos livros didáticos, verificamos quanto eles seguem as orientações dos PCN, permeada com a obra de Lima et al. (2006) sobre a matemática do ensino médio e com o trabalho de Lima (org. 2001) sobre análise de livros didáticos.

Destacamos ainda o trabalho de Morgado (2004) sobre a importância dos manuais escolares que nos ajudaram a definir alguns dos critérios a serem investigados. Assim, ao pensarmos nos dias atuais onde a realidade dos alunos vive em constante mutação, compartilhando um volume de informações cada vez maior através da internet, temos que repensar sobre os instrumentos didáticos. Outro aspecto fundamental é a responsabilidade de levar também em consideração a experiência de vida do estudante e fornecer informações relevantes. Esta idéia é compartilhada também pelas orientações oficiais como já descrevemos. Apesar do livro não ser a única fonte referencial, cabe-lhe, no entanto o papel de facilitador, motivo pelo qual é interessante investigar como é feita a abordagem do conceito de função e qual o enfoque dado à sua representação gráfica (critérios 1, 2 e 3).

É importante ainda ressaltar que esta análise foi feita sob o viés da teoria dos registros de representação semiótica de Duval (2003) que consiste na nossa fundamentação teórica.

As três idéias norteadoras a que nos referimos no capítulo anterior aparecem aqui para mostrar a sua importância na definição dos critérios que irão compor a grade de análise:

1. A relevância dos sistemas semióticos está vinculada à capacidade de reconhecer a diversidade dos registros de representação, e à habilidade em manipulá-los através das transformações porque pode passar o objeto matemático em estudo. Por isso, é importante, por exemplo, saber que uma reta não vertical, que é um registro gráfico, é gráfico de uma função afim da forma $f(x) = ax + b$, que é um registro algébrico e vice-versa. Para tanto, destacamos que a importância desse reconhecimento passa pela demonstração de que o gráfico de uma função afim é uma reta (critério 4a). Também importante é saber que dois pontos do gráfico são

suficientes para caracterizar a função. Além disso, se um dos pontos for uma raiz ou zero da função, é interessante que seja tratado algébrica e visualmente (critério 4b).

2. A habilidade em manipular os vários registros de representação, no nosso caso particular entre registro gráfico e algébrico, exige reconhecer as variáveis pertinentes que são cognitivamente importantes nas transformações. Ou seja, que o valor da variável de determinado registro uma vez alterado, implica mudança concomitante no valor da variável correspondente do outro registro. Em outras palavras, as transformações só são possíveis com a coordenação das variáveis dos registros envolvidos. Então, se para Duval (2003) essa coordenação tem que ser espontânea, é necessário dominar a articulação dos registros. Para que isso seja possível, é necessário reconhecer que as variáveis algébricas *coeficiente angular* e *coeficiente linear* têm respectivamente suas contrapartidas no registro gráfico como variáveis visuais *sentido de inclinação* e *ângulo com os eixos*, e *posição do traçado em relação á origem do eixo vertical* da reta (critérios 4c, e 4e).

Sobre a variável *sentido de inclinação* da reta, é importante saber ainda que existe uma relação com o ângulo que ela faz com o eixo x no sentido horário (critério 4d).

3. O fenômeno de congruência ou de não-congruência nas conversões tem relação direta com as variáveis didáticas expostas em atividades matemáticas. Dependendo da complexidade expressa nos enunciados dos exercícios, por exemplo, as estratégias talvez demandem um esforço cognitivo maior. Segundo Duval (2003), a característica de não-congruência presente nas atividades contribui para a apropriação do conceito em estudo. Por este motivo, nos parece pertinente estudar sob este viés o corpo de exercícios que constituirá um capítulo a parte.

Descrevemos abaixo então, os critérios a serem investigados nos livros, e que compõem a nossa grade de análise:

1. Qual o tipo de abordagem ao conceito de função?
2. Qual o enfoque dado ao gráfico de função de forma geral?
3. Como é definida a função afim?
4. Sobre o gráfico da função afim:
   a) O livro demonstra que o gráfico de uma função afim é uma reta?
   b) O livro trata a raiz ou zero da função afim algébrica e visualmente?

c) O livro prova as implicações: $a > 0 \Leftrightarrow f(x) = ax + b$ crescente e $a < 0 \Leftrightarrow f(x) = ax + b$ decrescente?
d) O livro demonstra que o parâmetro a de uma função afim é a tangente trigonométrica do ângulo que o gráfico faz com o eixo 0x?
e) O livro trata o coeficiente linear de uma função afim algebricamente e a parte visual concomitantemente?

3.4 Justificativas para os critérios

Passamos a descrever as critérios da grade de análise e a justificativa de cada um:

Critério 1: Qual o tipo de abordagem ao conceito de função?

Como já comentamos anteriormente, existem pesquisas que apontam que muitas das concepções que alunos e professores têm sobre o conceito de função, estão vinculados aos livros didáticos.

Assim, inicialmente analisamos as diversas concepções de função presentes nos livros didáticos em questão. Para tanto, utilizaremos o trabalho de Selden e Selden (1992) sobre os diferentes aspetos do conceito de função, além de observamos o tema função segundo documentos oficiais e pesquisas.

Para os autores (1992), uma pessoa que seja *expert* em matemática, é capaz de transitar com segurança por cada aspecto do conceito de função, já que tem habilidade de perceber que os diferentes aspectos do conceito se sobrepõem e se completam mutuamente, o que não acontece com aquele que não é *expert*. Para os autores, existem ainda evidências, de que a familiarização com determinado aspecto do conceito de função, pode interferir no desenvolvimento e compreensão de outros aspetos do conceito.

Quanto às possíveis definições escolares de função, as pesquisadoras apontam três possibilidades: **par ordenado**, **correspondência entre conjuntos** e

de variável dependente ou variável independente fórmula. Essas diversas abordagens sobre concepções de função nortearão este tópico da grade de análise.

Segundo os autores (1992), a abordagem de Bourbaki introduzida em 1939, definida por uma correspondência entre elementos de dois conjuntos através de **par ordenado**, é considerada por alguns pesquisadores, excessivamente abstrata, particularmente para uma introdução inicial para alunos pré-universitários. Embora essa definição esteja, por exemplo, presente na matemática avançada, na ciência da computação, em teorias gráficas, etc, os pesquisadores (1992) alertam que essa visão abstrata não deve ser eternamente mantida em aplicações matemáticas.

O aspecto do conceito de par ordenado é importante dentro da matemática, e vale destacar o que as Orientações Curriculares Para o Ensino Médio citam:

> A Geometria analítica tem origem em uma idéia muito simples, introduzida por Descartes no século XVII, mas extremamente original: a criação de um sistema de coordenadas que identifica um ponto P do plano com um par de números reais (x,y).[...] (PCN, 2007, p. 76,77).

No entanto, especificamente sobre funções, os PCN+[4] recomendam que "toda a linguagem excessivamente formal que cerca esse tema deve ser relativizada e em parte deixada de lado [...]" (PCN+, 2002, p. 121). Ou seja, as orientações são no sentido de não introduzir formalmente o conceito de função.

Esse excesso de formalismo que deve ser evitado é também apontado por Lima (2001), justamente na definição de função como conjunto de pares ordenados.

Ainda segundo Selden e Selden (1992) em 1837, Dirichlet definiu função como um **tipo especial de correspondência entre dois conjuntos.** Segundo os pesquisadores, esta abordagem é mais fácil de ser compreendida que a de pares ordenados, embora as duas sejam tecnicamente semelhantes. A definição de Dirichlet, segundo os autores, facilita o entendimento das noções de domínio e contradomínio, assim como a noção de que para cada valor da variável independente, existe um só valor para a variável dependente. Alegam ainda que,

[4] Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.

quando matemáticos pensam em função como correspondência, eles manifestam suas idéias esboçando duas regiões unidas por setas. Os pesquisadores pensam que este tipo de visualização faz parte de recursos pessoais utilizados por especialistas e é utilizado no lugar da definição em si. No entanto, embora estes diagramas estejam presentes nos livros didáticos, Selden e Selden (1992) observaram que os calouros universitários hesitam em utilizá-los, mesmo quando são encorajados a fazê-lo.

Assim, quando os autores argumentam que aqueles que se utilizam da sua representação, parecem entender mais facilmente a composição das funções do que os que não utilizam, mostra a pertinência sobre o nosso trabalho acerca da visualização.

Sobre o aspecto de correspondência dos conjuntos como forma de abordagem, vale lembrar que o conceito de função na matemática moderna é considerado como referência na teoria dos conjuntos e o seu significado é de uma correspondência ou relação unívoca, onde cada elemento de x no plano cartesiano corresponde um único elemento de y.

No entanto, Rossini (2006) critica essa abordagem no contexto do ensino. Para essa pesquisadora “introduzir função a partir de relações entre dois conjuntos mostra o desconhecimento de diversas pesquisas em Educação Matemática” (ROSSINI, 2006, p. 94).

Cita por exemplo Kieran et al. (2006) que argumentam, através de pesquisas, que os estudantes oferecem resistência a uma abordagem estrutural da matemática. Os estudantes prefeririam concepções mais operacionais, ou seja, vêem “uma função como um processo para calcular um valor a partir de outro” (KIERAN apud ROSSINI, 2006, p. 64).

Esse ponto de vista é corroborado por Sfard (apud ROSSINI, 2006, p. 94), que afirma que “novos conceitos não devem ser introduzidos de maneira estrutural e uma concepção estrutural não deve ser utilizada, enquanto o aluno puder trabalhar sem ela”.

A este respeito, envolvendo a qualidade didática de um livro, Lima (2001, p. 4) defende que um “novo conceito deve ser precedido de situações-problema que justifiquem a introdução e acompanhado de vários exemplos que visem não somente exibir suas aplicações como também esclarecer o significado desse conceito [...]".

Para Selden e Selden (1992) a idéia de **variável dependente** também é ocasionalmente utilizada para introduzir o conceito de função. Esta idéia ocorre freqüentemente no contexto de números reais e normalmente se refere uma **fórmula** ou uma expressão envolvendo a **variável independente**. Para Norma, Sfard e Vinner (apud SELDEN e SELDEN, 1992), os estudantes que inicialmente vêem funções apenas nesta forma restrita, podem ter dificuldades para estender as suas noções sobre função, por exemplo, para expressões envolvendo duas fórmulas.

No entanto, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006, p. 72) sugerem que "o estudo de *Funções* pode ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações; idade e altura; área do círculo e raio; tempo e distância percorrida [...]".

Essa relação de dependência também é encontrada com clareza nos PCN (1998), particularmente quanto à importância da proporcionalidade:

> O aluno poderá desenvolver essa noção ao analisar a natureza da **interdependência de duas grandezas** em situações problema em que elas sejam diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais (função quadrática ou afim). Essas situações são oportunas para que se expresse a variação por meio de uma sentença algébrica, representando-a no plano cartesiano (PCN de Matemática 1998, p. 84-5, grifo nosso).

Observamos que aqui, a sentença algébrica, ou seja, a fórmula, também se enquadra num dos aspetos do conceito de função expostos pelos pesquisadores. É relevante ressaltar ainda a importância do gráfico para o ensino de funções presente na citação acima que encontra eco no trabalho de Selden e Selden (1992) como veremos mais adiante no tópico de gráfico de uma função.

Ainda sobre gráficos e fórmulas, podemos perceber a sua importância também nas Orientações do PCN+ no que diz respeito à competência de

Representação e Comunicação[5], em "traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra; por exemplo, transformar situações dadas em linguagem discursivas em esquemas, tabelas, gráficos, desenhos, fórmulas ou equações matemáticas e vice-versa [...]" (PCN+, 2002, p. 114). Percebemos claramente que a abordagem envolvendo a fórmula é um dos aspectos envolvidos, e de novo, aparece explícita a importância do gráfico.

Embora Selden e Selden (1992) não discutam o padrão de regularidade entre seqüências numéricas ou geométricas, como forma de abordagem ao conceito, as orientações do PCN+ com relação à competência de Investigação e Compreensão, em uma das três metas a serem perseguidas, formulam que o aluno saiba "identificar regularidades em situações semelhantes para estabelecer regras, algoritmos e propriedades [...]" (PCN+, 2002, p. 116).

Essas características são encontradas nos aspectos do conceito de função, expostas pelas autoras, na abordagem sob o aspecto de fórmula, que estabelece relações entre variáveis dependentes e independentes.

Para Mason (apud ROSSINI, 2006, p. 97), procurar fórmulas para padrões geométricos é um processo de generalização que envolve: "a visualização; a manipulação da figura para construir a fórmula; a formulação de uma regra recursiva que mostre como construir o termo seguinte a partir do termo anterior; a descoberta de um padrão que leve diretamente a fórmula".

Assim, para Selden e Selden (1992), o conceito de função pode ser introduzido através de um conjunto de pares ordenados, ou uma correspondência entre dois conjuntos, ou uma fórmula de variável dependente ou variável independente. Eles argumentam que estudantes universitários freqüentemente guardam apenas algumas destas concepções de forma incompleta e que têm uma dificuldade considerável para mudar de um ponto de vista para outro. Os autores consideram que, infelizmente, o caminho mais eficiente para ensinar estudantes a resolver álgebra rotineira e problemas de cálculo é ignorar esta riqueza acerca dos aspetos do conceito de função. No entanto, alertam sobre a importância da compreensão dos vários aspectos da abordagem de função para a matemática e suas aplicações.

---

[5] São três competências: Representação e Comunicação; Investigação e Compreensão; Contextualização das ciências no âmbito sócio-cultural.

Critério 2: Qual o tratamento dado ao gráfico de função?

Neste tópico queremos observar de que forma o gráfico é utilizado na abordagem do conceito de função, cuja importância foi devidamente explorada em capítulos anteriores.

Para Selden e Selden (1992), outro aspecto relevante para o ensino de funções é o gráfico. Para eles, **gráficos** também são utilizados para representar funções, especialmente no campo dos números reais. Facilitam o acesso imediato através de uma imagem pictórica, mostrando acréscimo ou decréscimo, concavidade, pontos de máximo e de mínimo e pontos de inflexão.

No entanto, segundo os pesquisadores, infelizmente alguns estudantes vêem gráficos como ícones e só conseguem extrair deles algumas informações pontuais.

Dreyfus & Eisenberg (apud SELDEN e SELDEN, 1992) acreditam que os alunos se tornam dependentes de obter informações explanatórias nos livros didáticos e são confundidos pela natureza não linear da informação gráfica.

É importante então que o gráfico seja visto como um meio confiável de descrever fenômenos, permitindo assim, interpretá-los extraindo dessa forma informações que talvez a representação algébrica não possibilite de forma imediata.

Critério 3: Como é definida a função afim ?

Queremos identificar se existe coerência com a definição utilizada para a função de forma geral e a definição de função afim. Pretendemos pesquisar ainda se a definição facilita a modelagem de problemas envolvendo funções afins. Este aspecto é importante, já que alguns pesquisadores consideram que a abordagem formal não tem sido eficaz, na construção do conceito de função, motivo pelo qual as orientações dos PCN recomendam a introdução contextualizada.

Além disso, estamos interessados em pesquisar se na definição de função afim, os livros consideram a função constante e a função linear como casos particulares da função afim ou não, por envolverem os parâmetros a e b que são componentes do nosso estudo.

Critério 4. Sobre o gráfico da função afim

a. O livro demonstra que o gráfico de uma função afim é uma reta?

b. O livro trata a raiz ou zero da função afim algébrica e visualmente?

c. O livro prova as implicações: $a > 0 \Leftrightarrow f(x) = ax + b$ crescente e $a < 0 \Leftrightarrow f(x) = ax + b$ decrescente?

d. O livro demonstra que o parâmetro <u>*a*</u> de uma função afim é a tangente trigonométrica do ângulo que o gráfico faz com o eixo 0x?

e. O livro trata o coeficiente linear de uma função afim algebricamente e a parte visual concomitantemente?

A representação de uma reta por uma equação é um recurso extremamente importante para tratar grandezas diretamente proporcionais. Para Lima et al. (2006) isso permite caracterizar uma função afim.

O gráfico de uma função afim traduz fenômenos lineares e modela tarefas práticas do dia a dia por expressar bem a relação de interdependência.

Esse fenômeno linear tem aplicação em processos de otimização na resolução gráfica em Pesquisa Operacional, por exemplo.

De forma geral, pretendemos explorar o estudo do gráfico da função afim e seus componentes visuais bem como seus correspondentes algébricos.

Para expor melhor as razões das questões investigadas consideramos a conversão da representação algébrica para a representação gráfica e vice versa.

<u>Representação Algébrica → Representação Gráfica</u>

Pensamos que se for demonstrado que o gráfico de uma função afim é uma reta, abandonaremos de vez o método de pontuar e o da extensão do traçado, considerados por Duval inoperantes e obstáculos à apreensão global, como já dissertamos no capítulo reservado ao referencial teórico.

Dessa forma, não haveria então necessidade de obter algebricamente, pontos isolados a partir da escrita simbólica (equação) para assiná-los em seguida na figura fundo (plano cartesiano) para finalmente obter a figura forma (gráfico).

Entretanto, é necessário mostrar que são necessários pelo menos dois pontos quaisquer para determinar uma reta. Este fato está associado a uma característica da função afim: para conhecer a taxa de variação (coeficiente angular), que é constante, basta conhecer quaisquer dois pontos.

Além desses dois pontos poderem ser quaisquer, eles determinam a tangente trigonométrica do ângulo (no sentido anti-horário) que a reta faz com o eixo 0x. O valor da tangente corresponde ao valor do parâmetro *a*, que representa na escrita algébrica o *coeficiente angular* e tem relação direta com o valor da sua correspondente variável visual *ângulos com os eixos*.

Convenientemente, podemos escolher esse dois pontos como pontos de intersecção com os eixos pelo motivo seguinte:

- Com relação ao eixo y, aparece a importância do *coeficiente linear b* que é uma variável algébrica, cuja correspondência visual é a variável *posição do traçado em relação à origem do eixo vertical*.

  Para determinar esse ponto de intersecção no eixo y, surge então a importância da sua determinação algébrica.

  Esse valor encontrado pertencente à representação algébrica irá determinar o seu valor correspondente na representação gráfica: o *traçado cruza o eixo y acima, abaixo ou na origem.*

- Com relação ao eixo x, é a raiz ou zero da função que se faz presente. Assim, seria necessária a sua determinação algébrica.

É importante destacar ainda, a importância do sinal do coeficiente angular com relação ao comportamento da função. Em sendo positivo ($a>0$) implica em uma função crescente e, portanto a sua variável visual é *traçado ascendente da esquerda para a direita*. Em sendo negativo ($a<0$), estaremos na presença de uma função decrescente onde a variável visual é *traçado descendente da esquerda para a* *direita*. Este fato, aliás, está intrinsecamente associado ao traçado determinado pelos dois pontos quaisquer descritos acima.

É particularmente importante então, reconhecer que em uma função do tipo f(x) = *a*x + *b*, *a* é a inclinação da reta com relação ao eixo x e *b* representa o ponto em que a reta corta o eixo 0y, para que se possa praticar tal reconhecimento.

Representação Gráfica → Representação Algébrica

Se soubermos que toda a reta não vertical é gráfico de uma função afim, temos uma idéia muito precisa da sua expressão algébrica, pois é possível reconhecer no gráfico através das variáveis visuais as suas correspondentes algébricas. Não haveria então necessidade de sair da figura fundo para a escrita simbólica através de cálculos com a utilização de valores de pares ordenados.

Se analisarmos o *sentido de inclinação*, que é uma variável visual, com o seu valor *traçado ascendente ou descendente da esquerda para a direita*, saberemos que estamos tratando respectivamente com uma função crescente ou decrescente respectivamente e, portanto podemos definir o *sinal* do valor do *coeficiente angular* na escrita algébrica.

Com relação ao valor do parâmetro *a*, sabendo que é a tangente trigonométrica do ângulo no sentido anti-horário que a reta faz com o eixo 0x, podemos determiná-lo.

Se, entretanto estivermos na presença de uma reta vertical, é importante lembrar que não é possível determinar o seu coeficiente angular já que a tangente de 90º é indeterminado (divisão por zero na escrita algébrica).

CAPÍTULO 4. ANÁLISE DOS LIVROS: TRATAMENTO EXPOSITIVO

4.1 Qual o tipo de abordagem ao conceito de função?

A tabela abaixo tem como referência as abordagens de Selden e Selden (1992) sobre o conceito de função introduzidas no capítulo anterior.

Tabela 3. Tipo de abordagem ao conceito de função encontrado nos livros

Conceito de função	**Correspondência entre Conjuntos**	**Formula de Variável Dependente ou Independente**	**Par ordenado**
Livro 1	X		
Livro 2		X	
Livro 3			X

LIVRO 1. Matemática 1. SMOLE, Kátia S. e DINIZ, Maria I.:

Ao iniciar o capítulo sobre função, as autoras apresentam um gráfico contextualizado sobre a participação do carro a álcool no mercado nacional, conforme figura 4 abaixo.

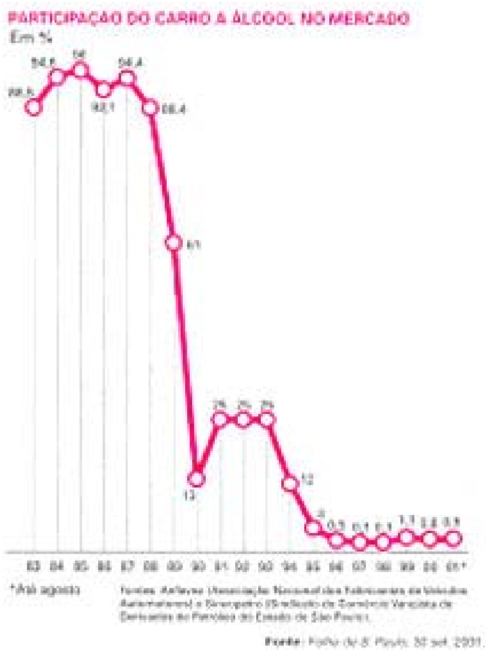


Figura 4. Gráfico de participação do carro a álcool no mercado.
Fonte: SMOLE e DINIZ, 2005, p. 81

Consideramos este exemplo oportuno e atual, justamente numa época em que se discute combustíveis renováveis.

Em seguida as autoras introduzem o conceito de função:

> A **função** é um modo especial de relacionar grandezas. Nesse tipo de relação, duas grandezas, **x** e **y**, se relacionam de tal forma que:
> **.** **x** pode assumir qualquer valor em um conjunto **A** dado;
> **.** a cada **x** corresponde um único valor de **y** em um dado conjunto **B**;
> **.** os valores que **y** assume dependem dos valores assumidos por **x** (SMOLE e DINIZ, 2005, p. 81, grifo das autoras).

Ao termo "relação" utilizada na definição, as autoras dão uma atenção especial que veremos mais adiante.

Após a introdução da definição, seguem-se cinco exemplos de funções, segundo as autoras (2005), presentes no nosso dia a dia. Exceto o primeiro exemplo onde só é apresentado o gráfico, todos os demais são contemplados com representações gráficas, algébricas e tabulares, sendo esta última utilizada como intermediária entre as duas primeiras. Seguem quatro dos cinco exemplos.

Exemplo 1

Gráfico da altura (cm) de uma criança em função da idade (meses). Para cada valor de idade da criança, está associada uma altura.

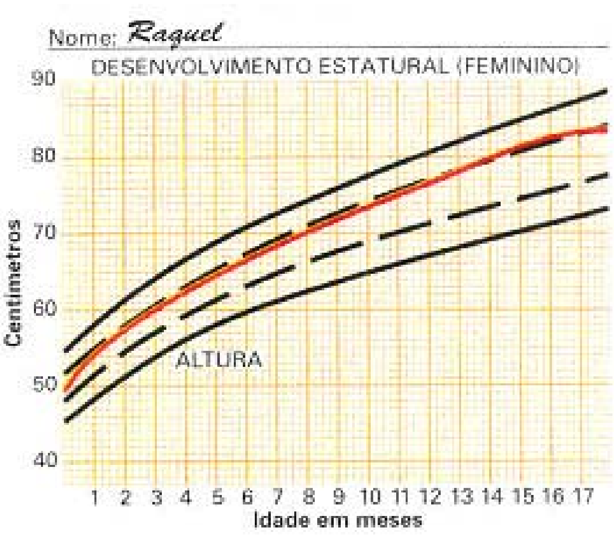


Figura 5. Gráfico de Pediatria e Puericultura.
Fonte: SMOLE e DINIZ, 2005, p. 82

Todos certamente em consulta com o pediatra fomos avaliados por este gráfico. Este fato pode ser passado aos alunos que pode confirmar com as mães.

Exemplo 2

Um gráfico e uma tabela que associam o número de garrafas e a quantidade de litros de suco produzido sabendo que uma garrafa de 500 ml de suco concentrado deve ser dissolvida em 2 l de água para obter o suco a ser engarrafado.

Chamando de **S** o número de litros de suco pronto e de **c** o número de garrafas de suco concentrado, temos:

$S = (2\ \ell \text{ de água} + 0{,}5\ \ell \text{ de suco concentrado}) \times c$

$S = c \times 2{,}5$

Suco concentrado (número de garrafas)	Suco pronto (em litros)
1	2,5
2	5
3	7,5
4	10
10	25
⋮	⋮

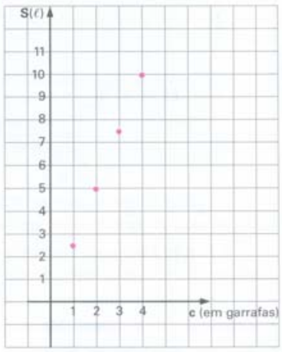


Figura 6. Tabela e gráfico de suco produzido.
Fonte: SMOLE e DINIZ, 2005, p. 82

Neste exemplo, podemos observar que o gráfico é constituído de pontos demarcados no plano cartesiano (pares ordenados). Não existe uma linha que une esses pontos, uma vez que o número de garrafas tem que ser um número natural.

Exemplo 3

Um gráfico e uma tabela que associa a área de um quadrado qualquer com a medida do seu lado ($A = l^2$).

ℓ	A
1	1
2	4
3	9
4	16
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
3,48	12,1104
4,2	17,64
5	25
⋮	⋮

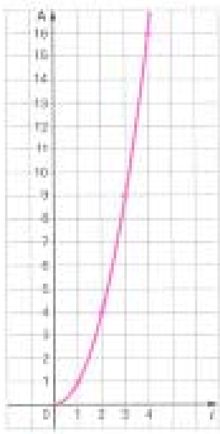


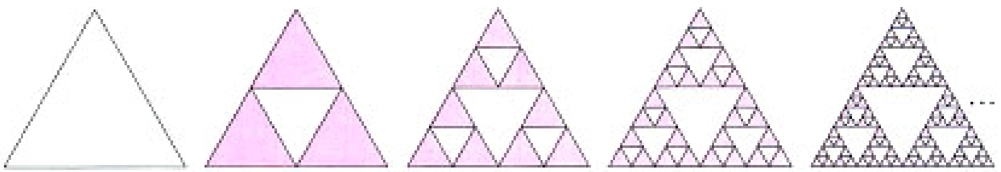
Figura 7. Tabela e gráfico da área de um quadrado em função do seu lado.
Fonte: SMOLE e DINIZ, 2005, p. 83

As autoras (2005) chamam a atenção neste caso, sobre a possibilidade de traçar o gráfico como uma linha contínua pelo fato de que é possível atribuir qualquer valor real positivo para o lado do quadrado. Pode ser explorado como função quadrática inclusive.

Exemplo 5

Apresentação de figuras com padrões geométricos com a intenção de encontrar uma regra que descreva esses padrões ($T = 3^{n-1}$).

Repete-se a divisão de cada triângulo restante em 4 triângulos eqüiláteros congruentes, como mostra o desenho, desconsiderando sempre o triângulo do centro.



O número de triângulos que compõem o tapete em cada etapa do processo é uma função do número da etapa de sua construção?

Etapa	1	2	3	4	...
Número de triângulos	1	3	9	27	...

Quantos triângulos haverá na décima etapa da construção do tapete?
É possível desenhar tantos triângulos?

Figura 8. Tapete de Sierpinsk.
Fonte: SMOLE e DINIZ, 2005, p. 84

Ótima oportunidade para revisar progressões geométricas e suas razões. Após estes exemplos, as autoras retomam o conceito de "relação" comentado anteriormente.

Assim, sobre o fato que função é um tipo especial de relação, advertem: "No entanto, nem sempre uma relação entre duas grandezas é uma função. Para entender isso, vamos observar um contra-exemplo." (SMOLE e DINIZ, 2005, p.85).

Segue então o contra-exemplo: "A cada número natural *n* vamos associar os números inteiros que elevados ao quadrado resultam em *n*." (SMOLE e DINIZ, 2005, p.85).

Assim, é possível constatar que nem todo o elemento de *n* está associado a algum valor em Z, e outros valores de *n* estão associados a mais de um valor em Z, o que para as autoras, contradizem a definição.

A seguir, as autoras (2005) detalham o que elas chamam de elementos de uma função: Domínio, Contradomínio e Conjunto Imagem.

Embora na descrição dos elementos de uma função as autoras chamem *x* e *y* respectivamente de variável independente e variável dependente, na definição formal de função, está presente a correspondência entre conjuntos, uma das categorias descritas por Seldon e Seldon (1992). Também é possível perceber que o gráfico que é uma das formas para introduzir o conceito de função destacada pelas mesmas autoras, está posto claramente no livro.

É importante ressaltar ainda, o fato de que o último exemplo aborda o conceito de função através padrões de regularidade de sequências geométricas que contempla as orientações dos PCN, como descrito nos procedimentos metodológicos. Da mesma forma, a abordagem contextualizada da introdução do conceito segue essas mesmas recomendações. Importante também é constatar a variedade de exemplos que o autor mostra sobre a sua concepção de função.

LIVRO 2 – Matemática: uma atividade Humana. LONGEN, Adilson:

Na unidade reservada ao estudo de funções, o autor apresenta inicialmente um gráfico sobre a evolução do salário mínimo de 1940 até ao ano de 2000, conforme figura abaixo.

Figura 9. Gráfico de evolução do salário mínimo.
Fonte: LONGEN, 2003, p. 150

O gráfico acima é rico em informações podendo ser explorado na sua plenitude, como máximos e mínimos, variações crescentes e decrescentes.

Longen (2003) argumenta que as grandezas salário mínimo e tempo, aparecem aqui graficamente relacionadas

No sentido de explorar o gráfico, o autor (2003, p. 150) coloca algumas questões para discussão do tipo: “Qual o ano em que o salário mínimo teve o maior valor?” e “Qual o valor do salário mínimo atual?”. Desta forma, o autor tenta interagir com o leitor.

Em seguida, é apresentado outro gráfico, desta vez envolvendo o espaço de frenagem de um automóvel em função da sua velocidade, extraído de uma revista especializada, como mostra a figura abaixo.

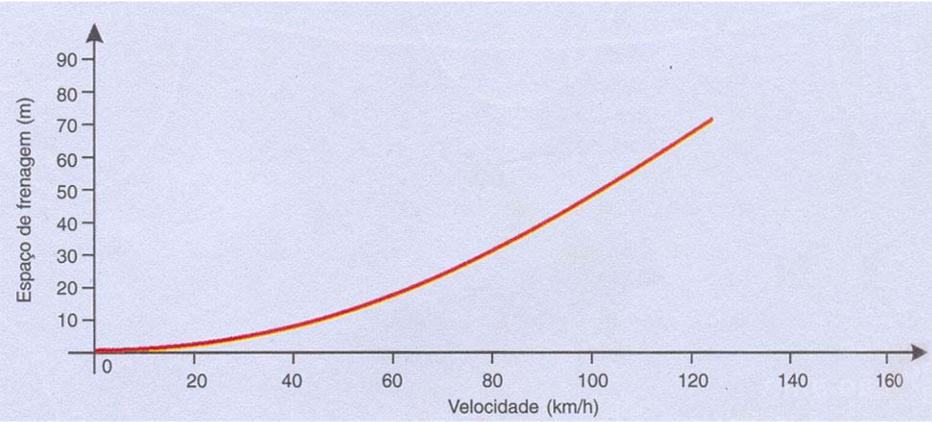


Figura 10. Gráfico de frenagem em função da velocidade.
Fonte: LONGEN, 2003, p. 150

Aqui, o autor comenta que é possível perceber que as duas grandezas, espaço de frenagem e velocidade estão relacionadas: “É imediato perceber que, quanto maior for a velocidade do carro, maior será a distância necessária para que ele pare definitivamente, depois de acionado o freio (espaço de frenagem).” (LONGEN, 2003, p. 150).

Este exemplo ilustra a interação da matemática com outras ciências, aqui no caso com a Física.

Através destes exemplos contextualizados envolvendo duas grandezas relacionadas, o autor tenta dar uma idéia sobre o conceito de função, antes de introduzi-lo formalmente. Assim, afirma: “Uma função é uma relação de dependência entre duas grandezas.” (LONGEN, 2003, p. 151).

É importante observar que só será possível entender o termo “relação” ao qual o autor faz referência, quando o mesmo exemplificar mais adiante, relações que não são funções.

Seguem-se então dois exemplos de funções: a área de um quadrado é função da medida do lado; o número de diagonais de um polígono convexo é função do número de vértices.

Para explicar melhor o que é uma relação de dependência entre duas grandezas, o autor expõe o exemplo abaixo:

Seja S a área de um quadrado e x a medida do seu lado, conforma figura abaixo:

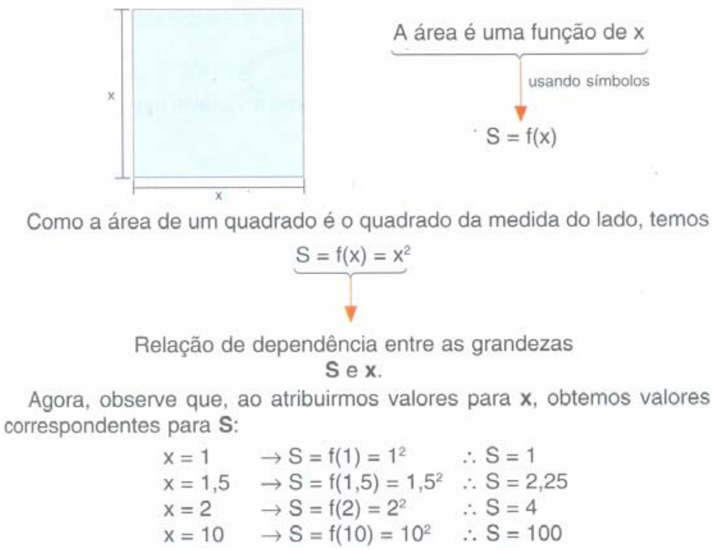


Figura 11. Relação de dependência entre duas grandezas.
Fonte: LONGEN, 2003, p. 151

À relação $S = f(x) = x^2$ do exemplo acima, o autor dá o nome de lei de formação, onde denomina x de variável independente e S de variável dependente.

Assim, o autor introduz formalmente a definição de função: “Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma função f de A em B (escreve-se f: $A \rightarrow B$) é uma relação que associa cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$” (2003, p. 151).

Destaca ainda: “[...] numa função f: A→B, todo o elemento x Є A deve estar relacionado com algum elemento y Є B, e esta relação deve ser única.” (2003, p. 151).

Retomando a idéia de “relação”, o autor apresenta dois exemplos com diagramas de Venn conforme figura abaixo.

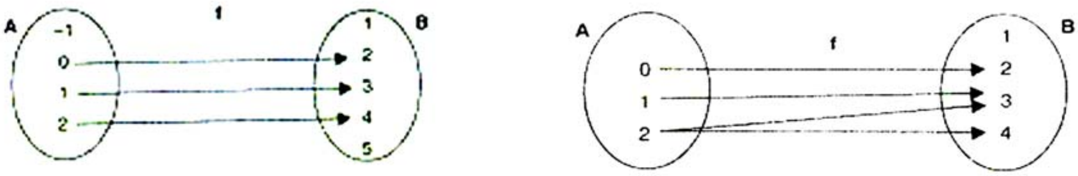


Figura 12. Exemplos de relações que não são funções.
Fonte: LONGEN, 2003, p. 152

Para o exemplo da esquerda, existe um elemento de A que não se relaciona com ninguém em B. No exemplo da direita, um elemento de A se relaciona com dois elementos em B. Assim, o autor afirma que essas relações não são funções, por não obedecerem à definição.

A seguir, o autor define os conceitos de Domínio, Imagem e Contradomínio de uma função.

No livro aparece claramente a abordagem sob o ponto de vista de variável independente e variável dependente, uma das abordagens descritas por Selden e Selden (1992) comentadas no capítulo de procedimentos metodológicos.

Da mesma forma que o Livro 1, o autor faz uso do gráfico também para iniciar a abordagem do conceito de função, também destacado por Selden e Selden (1992) e comentado no mesmo capítulo.

A introdução é contextualizada a exemplo do Livro 1, fugindo inicialmente da formalidade do conceito, além de interagir com outras ciências como é o caso de Física no segundo exemplo. O livro segue dessa forma as orientações dos PCN.

LIVRO 3 – Matemática 1ª série. GUELLI, Oscar:

Inicialmente o autor lança um desafio ao leitor envolvendo um problema contextualizado para introduzir o conceito de função. Envolve artesãos que fabricam brincos para vender na feira Caruaru: “A receita y obtida na venda de x pares de brincos pode estimada pela função polinomial $y = -0{,}1x^2 + 12\,x$.” (GUELLI, 2004, p. 26).

Para ilustrar, prossegue descrevendo uma situação em que os artesãos têm um gasto de R$ 40,00 por dia com aluguel de uma barraca e um custo variável de R$ 2,00 na compra de material para produção de cada par de brincos. Em seguida faz os seguintes questionamentos:

> a) A que preço devem vender cada par de brincos para obter o maior lucro possível?
>
> b) Supondo que o custo variável tenha aumentado de R$ 2,00 para R$ 4,00, os artesãos devem repassar esse aumento para o consumidor? Por quê? (GUELLI, 2004, p. 26).

Nada mais é comentado em seguida sobre o exemplo além de não ser mais retomado em nenhum momento do livro.

A seguir, descreve a Matemática como uma ciência que tem um vocabulário próprio, tomando por vezes emprestado palavras do dia a dia, e dando-lhes significado próprio, como é o caso de “função”.

Como ponto de partida o autor nos lembra historicamente do surgimento do termo função através de Leibniz no séc. XVII até a definição proposta por Diritchlet, para a definição de função: “uma função é uma correspondência que registra um único valor da variável dependente para todo valor permitido de uma variável independente” (GUELLI, 2004, p. 27).

Comenta que essa definição é muito próxima daquela que temos hoje e faz uma indagação: “Você já pensou sobre a importância de saber que duas coisas podem se apresentar em pares?” (GUELLI, 2004, p. 27).

A seguir, o autor exemplifica isso contextualmente:

> A equipe de um piloto de fórmula 1 registra em computadores a velocidade de seu piloto em cada instante; o gerente de uma empresa acompanha a receita obtida na venda de uma quantidade de um artigo; um biólogo acompanha o crescimento diário de uma planta. Até mesmo o movimento de um martelo pode ser descrito por uma função (GUELLI, 2004, p. 27).

Para explicar como isso é tratado na matemática, o autor cita: “Os matemáticos formam pares ordenados de números: uma vez que se designam um deles, pode-se identificar o outro” (GUELLI, 2004, p. 27).

Como reconhecimento da importância da função dentro da matemática, Guelli (2004, p. 27) ressalta: “Embora pareça simples, a função funciona como uma linha de ouro invisível que une todos os ramos da matemática”.

Finalizando a apresentação, seguem-se dois gráficos (velocidade em função do tempo e pressão em função do volume) “soltos” e sem contexto algum.

Na sequência, o autor explora os conceitos de relação e função. Para ele, os termos têm significados na matemática diferentes daqueles presentes no dia a dia como já foi comentado anteriormente. Retomado isso, o autor prossegue: “Muitas vezes temos que trabalhar com conjuntos cujos elementos são pares de números reais” (GUELLI, 2004, p. 30).

A partir dessa explanação define relação: “Um conjunto de pares ordenados de números reais chama-se relação.” (GUELLI, 2004, p. 31).

A seguir define domínio e imagem e explica que num gráfico os elementos do primeiro são marcados no eixo x e os da imagem no eixo y.

Para mostrar a diferença entre relação e função, o autor faz uso de digramas de Venn, conforme figura abaixo, onde cita: “As flechas são utilizadas para indicar os pares ordenados de cada relação.” (GUELLI, 2004, p. 31).

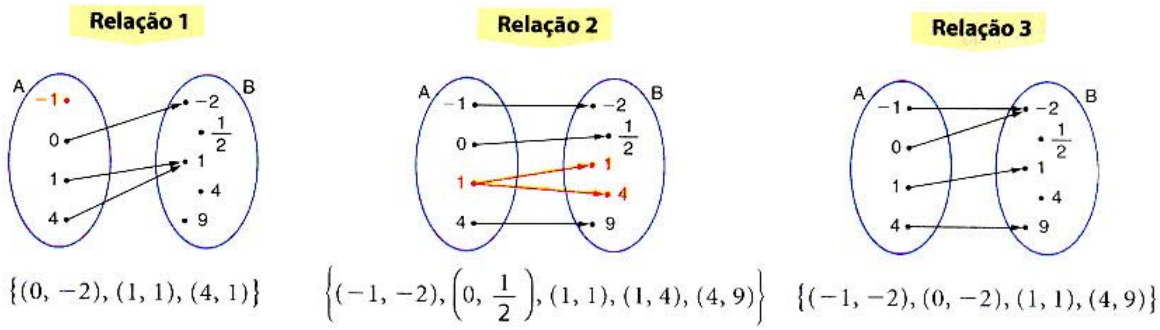


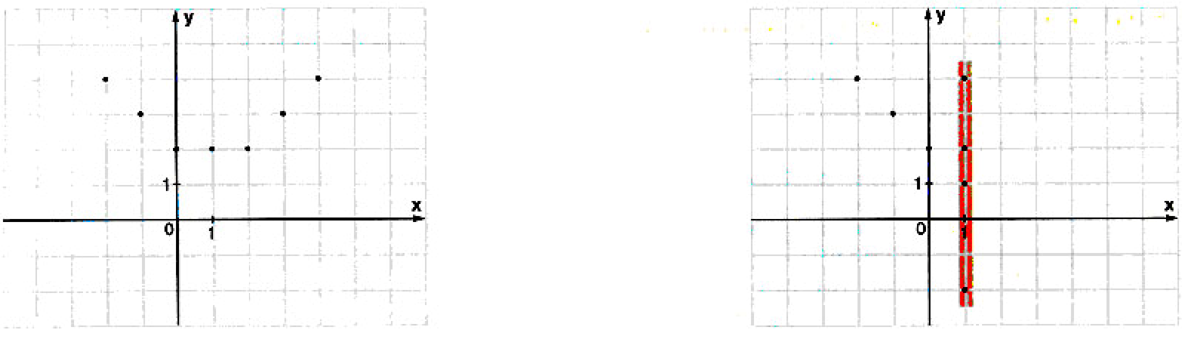
Figura 13. Exemplos de relações.
Fonte: GUELLI, 2004, p. 31

Assim, não são funções as relações 1 e 2, pois a relação 1 tem o elemento -1 que segundo o autor, não é número de nenhum par ordenado e na relação 2, também segundo Guelli, o número 1 é o primeiro número de dois pares ordenados.

Exposto isso, o autor define função como: "Dados dois conjuntos A e B, uma função de A em B é uma relação que associa a todo elemento de A um único elemento de B." (GUELLI, 2004, p. 32).

A seguir, o livro apresenta o gráfico de duas relações f e g, onde apenas g é função conforme figura abaixo.

As figuras abaixo mostram os gráficos das relações **f** e **g**:



$f = \{(-2, 4), (-1, 3), (0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

$g = \{(-2, 4), (-1, 3), (0, 2), (1, -2), (1, 1), (1, 2), (1, 4)\}$

Na relação g, observe que quatro pontos estão numa mesma reta vertical: $(1, -2)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$ e $(1, 4)$. O número 1 aparece como primeiro número em quatro pares ordenados.

Isso não acontece na relação f, que é uma função.

Figura 14. Gráficos de relações.
Fonte: GUELLI, 2004, p. 31

Uma das formas de abordagem ao conceito de função descritos por Selden e Selden (1992) é a de par ordenado. Neste livro, ao longo da explanação do conceito de função é flagrante a abordagem ao conceito sob este viés. Até para elaboração dos gráficos, o par ordenado parece ser o foco.

Quando vistos sob a perspectiva das orientações dos PCN, tanto o tipo de abordagem como a forma contextualizada de introduzir o conceito, estão a contento.

4.2 Qual o enfoque dado ao gráfico de função?

LIVRO 1 – Matemática 1. SMOLE, Kátia S. e DINIZ, Maria I.:

Smole e Diniz descrevem o gráfico como “o conjunto de pontos (x, f(x)) de um plano cartesiano onde no eixo das abscissas Ox, representamos os valores de x, $x \in A$, e no eixo das ordenadas Oy, os valores de y = f(x), $y \in B$.” (2005, p. 90).

As autoras (2005, p. 90) revelam que funções podem ser representadas por gráficos e que a partir destes é possível obter diferentes informações das expressões algébricas. Para ilustrar é apresentado um gráfico de dados divulgados pelo censo nacional de 2000:

Figura 15. Gráfico do rendimento mensal entre pessoas de 15 a 55 anos.
Fonte: SMOLE e DINIZ, 2005, p. 90

A partir dele, as autoras afirmam que é possível fazer uma leitura qualitativa das informações ali contidas, dando em seguida alguns exemplos tais como:

- entre 1992 e 1996 o rendimento médio mensal aumentou.
- o rendimento médio entre 1992 e 1996 aumentou R$ 159,30
- entre 1996 e 1999 houve queda do rendimento médio mensal.

Embora para as autoras uma função possa ser representada por uma fórmula do tipo y=f(x) ou até mesmo por uma tabela de valores, elas salientam: ”na maior parte dos casos, é o gráfico que permite uma análise detalhada da função representada e revela informações que seriam menos perceptíveis em uma fórmula ou tabela.” (SMOLE e DINIZ, 2005, p. 90).

Neste exemplo, é possível constatar uma coerência com o trabalho de Selden e Selden (1992) acerca do acesso imediato a pontos particulares do gráfico, tais como, ponto de máximo, ponto de mínimo, e até mesmo verificar quando a função é crescente ou decrescente.

É possível notar ainda, que esta observação encontra respaldo nas orientações dos PCN (1999) no que tange à importância da habilidade visual na busca de soluções que podem ser encontradas além do trabalho com números envolvendo cálculos. Vale lembrar, entretanto, a importância de reconhecer representações equivalentes do mesmo conceito, recomendações essas presentes no mesmo documento.

Podemos observar então, o destaque dado pelas autoras à representação gráfica. Esta preocupação, aliás, está presente na excelente apresentação, dos gráficos, que se traduzem em diagramação adequada quando da explanação do conceito, ou ainda nos exemplos e exercícios propostos.

Em sintonia com o trabalho de Selden e Selden (1992) sobre a relevância dos gráficos cartesianos no estudo de função, as autoras apresentam um roteiro básico de como construí-los. Explicam então:

> “Para representar graficamente uma função, devemos:
> - fixar um referencial cartesiano
> - fazer uma tabela de dupla entrada, com números que satisfaçam à equação y=f(x), onde x Є D(f);
> - localizar no referencial cartesiano os pontos aos pares ordenados (SMOLE e DINIZ, 2005, p. 91).

Para explicar a citação, as autoras dão dois exemplos.

É Importante destacar nos exemplos, o domínio e contradomínio diferentes.

Exemplo 1

f: A →B   A= {1,2,3,4}   e   B={1,5; 2,5; 3,5; 4,5)

x |→ y = x + 0,5

x	1	2	3	4
y	1,5	2,5	3,5	4,5

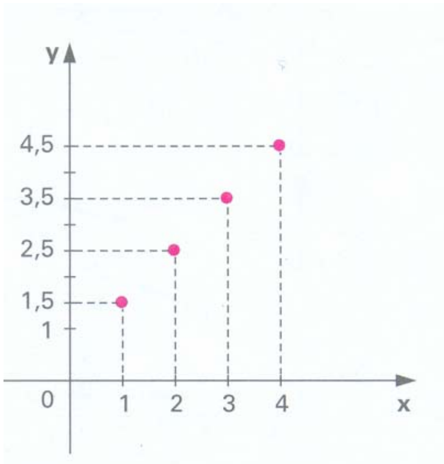


Figura 16. Gráfico de função.
Fonte: SMOLE e DINIZ, 2005, p. 91

Neste exemplo, as autoras (2005) definem claramente o domínio e contradomínio e afirmam que é possível determinar todas as imagens, pois A e B são conjuntos finitos.

Exemplo 2

f: |R → |R

x |→ y= x + 0,5

x	−1,5	0	$\sqrt{2}$	3,5
y	−1	0,5	$\sqrt{2} + 0,5$	4

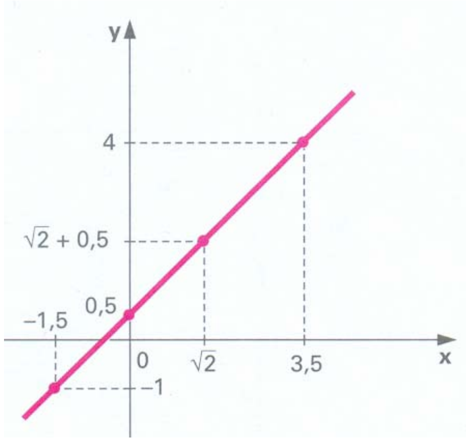


Figura 17. Gráfico de função.
Fonte: SMOLE e DINIZ, 2004, p. 91

Já neste exemplo, alertam as autoras (2005), não é possível determinar todas as imagens de todos os elementos do domínio, uma vez que este é o conjunto dos números reais que é infinito. No entanto, observam (2005) que o valor de x pode ser racional ou irracional. Adiantam inclusive que o gráfico da função é uma reta.

Acerca dos exemplos, valem algumas considerações sobre a construção dos gráficos. Embora as autoras queiram dar uma idéia geral sobre a construção de gráficos, sem se aterem a determinada função, o segundo exemplo aqui apresentado, corresponde a uma função afim, objeto do nosso estudo, onde a conversão do registro algébrico para o gráfico é privilegiada. Na terminologia de Duval (2003), passa da escrita simbólica (fórmula) através de cálculos para obter pontos e assinalados na figura-fundo (plano cartesiano) para obter a figura-forma que é a reta.

Assim, embora o gráfico tenha graduação adequada e apresente algumas variáveis visuais pertinentes (sentido de inclinação e intersecção com o eixo y), utiliza o procedimento de pontuar e o da extensão do traçado que sofrem críticas por parte de Duval (1988), procedimentos esses que analisaremos mais adiante no capítulo reservado ao gráfico de uma função afim.

Entretanto, identifica-se a preocupação das autoras, com a linha de raciocínio para a construção e entendimento da representação gráfica.

Encerrando este tópico, são apresentados exemplos de gráficos, cujo objetivo é determinar e justificar quais representam funções, conforme figura abaixo.

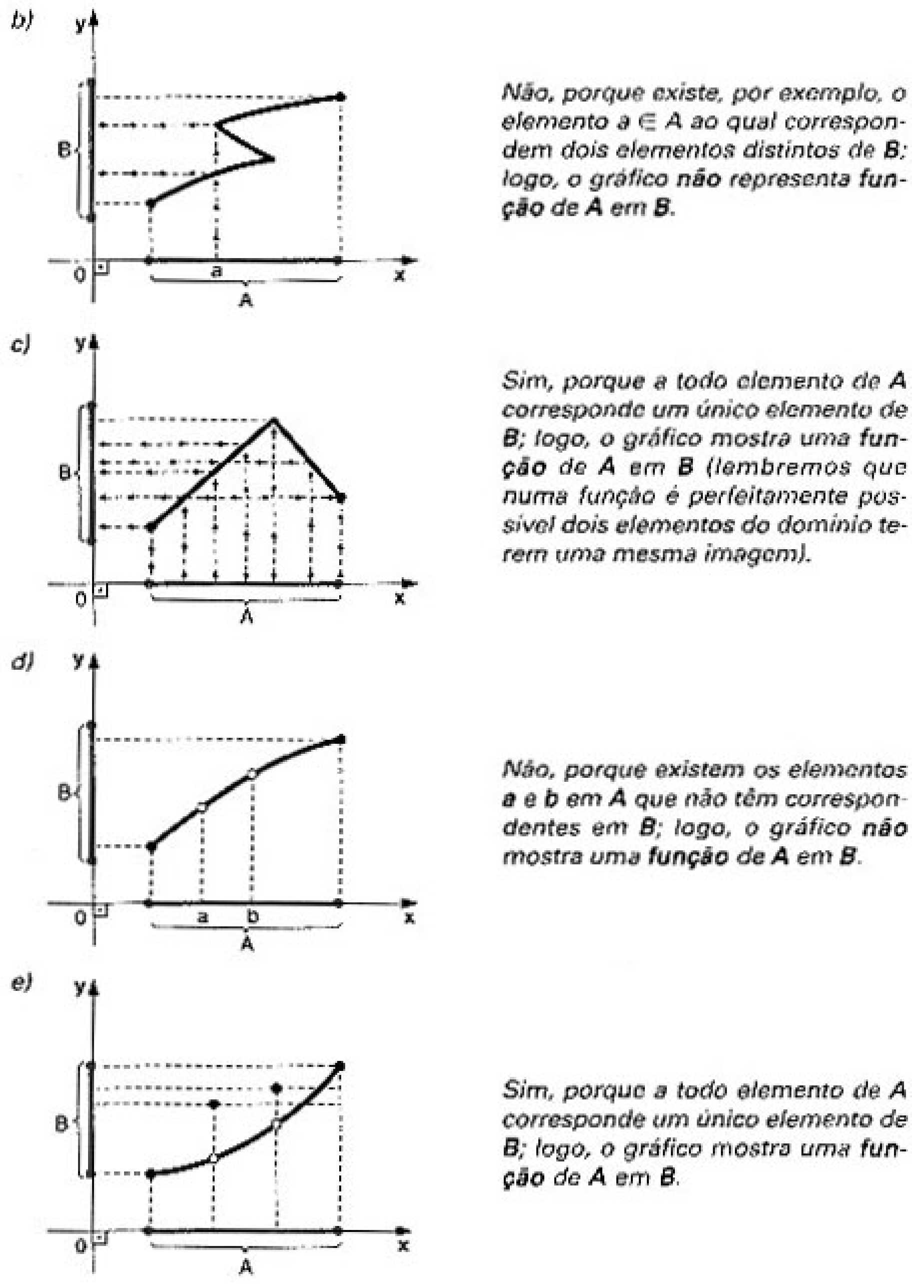


Figura 18. Exercícios resolvidos envolvendo gráficos para ilustrar quais representam funções.
Fonte: SMOLE e DINIZ, 2004, p. 93

Além de justificar visualmente a solução, utiliza a língua natural concomitantemente. As autoras lembram ainda o método prático de traçar retas paralelas ao eixo Oy para verificar se cada uma delas intercepta o gráfico de *f* em um só ponto para afirmar que é função. Acima, alguns exemplos.

LIVRO 2 – Matemática: uma atividade Humana. LONGEN, Adilson:

Inicialmente o autor lembra a associação de pares ordenados estudado no Ensino Fundamental: “a cada par ordenado (x;y) corresponde um ponto no plano e reciprocamente a cada ponto de um plano corresponde um par ordenado (x;y)” (LONGEN, 2003, p. 153). É interessante observar que aqui, o gráfico de uma função aparece inicialmente associado à uma abordagem de conceito de par ordenado, diferentemente da que foi utilizada na definição geral de função, de variável dependente e variável independente, visto anteriormente.

No entanto, a seguir, convida-nos a utilizar essa idéia de par ordenado para “visualizarmos” o comportamento de uma função, argumentando: “Assim, ficará mais evidente a relação entre as variáveis dependente e independente numa função” (LONGEN, 2003, p.153).

Usa dois exemplos de funções, uma função afim e outra quadrática, sem utilizar esta terminologia, para mostrar gráficos a partir de representações algébricas e passando pelas tabulares, conforme figura abaixo.

Exemplo 1:

y=2x

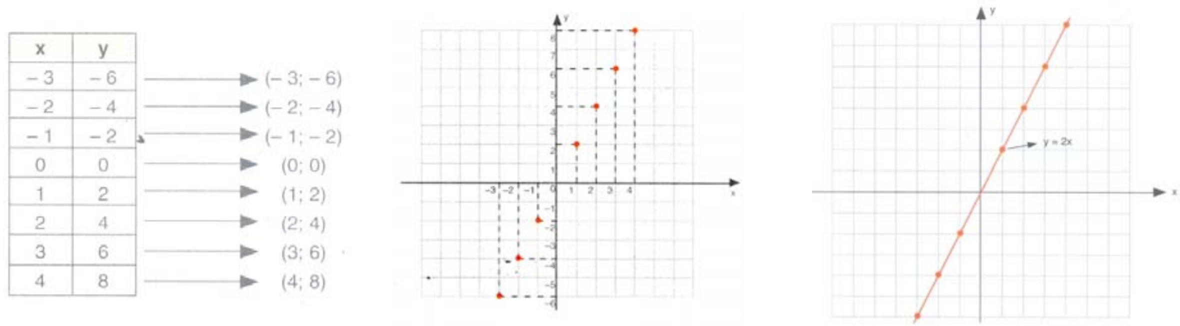


Figura 19. Construção do gráfico de uma função.
Fonte: LONGEN, 2003, p. 154

Em um primeiro momento, segundo a estrutura semiótica de Duval (2003), o autor passa da escrita simbólica (fórmula) para a figura-fundo (plano cartesiano), assinalando pontos isolados. Como já observamos anteriormente, este processo não é adequado para Duval (2003).

A seguir, indaga o leitor sobre a disposição dos pontos assinalados no plano cartesiano: “Observe que esses pontos têm algo em comum. Você saberia dizer o quê?” (LONGEN, 2003, p. 154).

Em seguida, tenta convencer o leitor que os pontos estão alinhados através da observação do gráfico e que outros pontos obtidos também estarão alinhados. Dessa forma obtém a figura-forma que é a reta.

A expressão “visualizarmos” utilizado pelo autor, está longe do aspecto didático dos registros de representação semiótica de Duval (2003), senão vejamos:

Em primeiro lugar, utiliza o procedimento de pontuar, considerado por Duval (1988) além de inadequado, um obstáculo à compreensão visual do gráfico. Em segundo lugar, sugere que os pontos têm algo em comum, que é o mesmo alinhamento. Nessa linha de raciocínio, argumenta que outros pontos, infinitos deles, obedecendo a mesma correspondência, também estarão alinhados. No entanto não prova isso.

Embora o autor utilize corretamente o papel milimetrado para justificar tal argumentação, assinalando ponto a ponto, essa “correspondência” nem sempre é explícita pelo simples fato de que a abordagem deste tópico é sobre gráfico de uma função genérica, podendo ter diferentes formas e não de uma função afim necessariamente, como ilustrado na figura abaixo.

Exemplo 2

$Y = 4 – x^2$

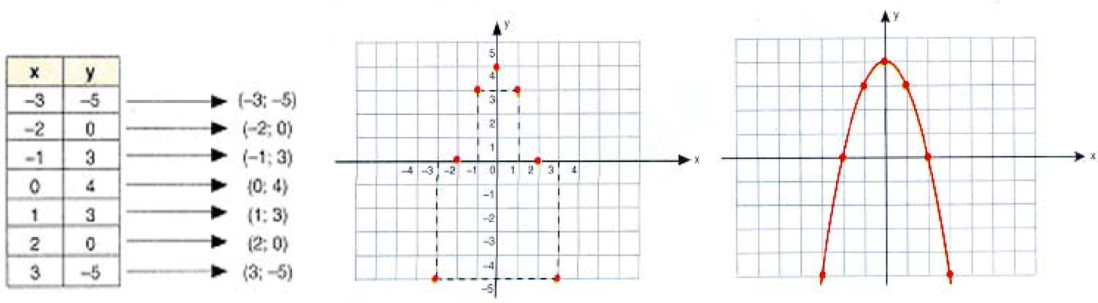


Figura 20. Construção do gráfico de uma função.
Fonte: LONGEN, 2003, p. 155

As observações feitas no exemplo anterior com relação à passagem da escrita simbólica até a figura-forma, valem também para este, só que desta vez, o autor orienta: “os pontos devem ser ‘ligados’ adequadamente para obtenção do gráfico” (LONGEN, 2003, p. 155).

É o caso de perguntar o que é adequadamente e porque agora a união dos pontos não pode ser traduzida em pontos alinhados? Obviamente sabemos que a representação gráfica de uma função quadrática é uma parábola, mas justificar informalmente que a curva deverá seguir uma tendência de pontos, não nos parece adequado.

Embora exista a preocupação do autor em mostrar como se constrói um gráfico, os dois exemplos utilizam o procedimento de pontuar, que segundo Duval (1988) provoca uma atenção maior nos pontos assinalados do que no traçado em si do gráfico, que é o mais importante na apreensão global do conceito.

O livro não apresenta em nenhum momento exemplos da potencialidade de leitura de um gráfico contextualizado, que exercite a habilidade visual, recomendação esta feita pelos PCN.

É importante também ressaltar que o autor insiste na idéia de par ordenado, diferente do tipo de abordagem feita na introdução do conceito de função que é a de variável dependente e independente.

LIVRO 3 – Matemática 1ª série. GUELLI, Oscar:

O livro não apresenta nenhum tópico especifico sobre gráficos de função de forma geral. Os gráficos apresentados estão inseridos em outros tópicos. No caso de função polinomial de 1º grau (denominação adotado pelo autor na obra), ou seja, função afim, analisaremos o seu gráfico no capítulo dedicado a esse assunto.

4.3 Como é definida a função afim?

LIVRO 1 – Matemática 1. SMOLE, Kátia S. e DINIZ, Maria I.:

Antes do tratamento conceitual de função afim, as autoras explicitam a sua importância na descrição de vários fenômenos da natureza, cuja aplicação em diversas áreas de conhecimento envolve o estudo de relações entre grandezas.

Assim, tomando o conceito de relação emprestado, as autoras designam funções afim como funções de 1º grau, “que correspondem a relações entre a variável dependente e a variável independente expressas por polinômios de 1º grau” (SMOLE e DINIZ, 2005, p. 105).

À luz das orientações dos PCN (1999), segue-se um exemplo contextualizado e interdisciplinar, que permite estudar (construir e interpretar) através do gráfico, conexões da própria matemática, associando-as a fenômenos do cotidiano, como também relacionado-as a outras áreas de conhecimento, como a Física por exemplo. O exercício consta de reabastecimento de combustível em um automóvel de corrida em função do tempo. A partir da relação algébrica e de valores de tempo predeterminados presentes numa tabela, é construído o gráfico ponto a ponto, seguido de um segmento de reta que os une, como mostra a figura abaixo:

t (s)	**V** (ℓ)
2	$V(2) = 2 \cdot 3 + 8 = 14$
3	$V(3) = 3 \cdot 3 + 8 = 17$
4	$V(4) = 4 \cdot 3 + 8 = 20$
5	$V(5) = 5 \cdot 3 + 8 = 23$
6	$V(6) = 6 \cdot 3 + 8 = 26$

Podemos expressar a relação entre **V** e **t** por:

$V = t \cdot 3 + 8,\ t \in [0, 6]$

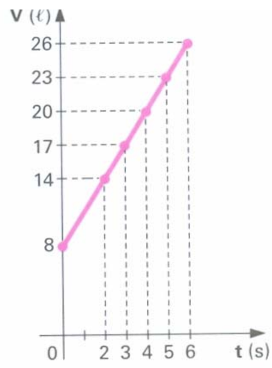


Figura 21. Tabela e gráfico do volume de combustível em função do tempo de um carro de corrida.
Fonte: SMOLE e DINIZ, 2005, p. 105

Embora as autoras não justifiquem a união dos pontos de forma contínua, tomaram o cuidado de descrever o intervalo para o qual a expressão V = t.3 + 8 é válida, ($\in$ [0,6]). É plausível imaginar, portanto, que a reta construída só pode existir devido aos infinitos números reais presentes no intervalo, além é claro, daqueles predeterminados na tabela.

O exemplo descrito serve então, como fio condutor para a introdução da definição formal de função afim: “Uma função f, de $\Re$ em $\Re$, que a todo número x associa o número ax+b, com a e b reais, a $\neq$ 0, é denominada função de 1º grau.” (SMOLE e DINIZ, 2005, p. 106).

Esta abordagem é coerente com a que foi utilizada para a definição geral de função, como correspondência entre dois conjuntos, visto anteriormente.

Seguem-se exemplos de funções afins, onde é possível identificar os coeficientes *a* e *b*.

Pela definição da função afim adotada pelas autoras que implica a $\neq$ 0, segue que a função constante não é um caso particular da função de 1º grau. Já a função linear e a função identidade (a=1 e b=o) (p.114). São consideradas pelas autoras como casos particulares de função de 1º grau.

LIVRO 2 – Matemática: uma atividade Humana. LONGEN, Adilson:

A introdução do capítulo, reservado ao conceito de função afim, é feita de forma contextualizada, o que contempla as orientações dos PCN (1999), por permitir, devido à relevância do tema, conexões entre as diferentes formas de pensamento e suas aplicações com situações do cotidiano.

O exemplo envolve o salário do vendedor que é dado em função de uma parte fixa de R$ 500,00 e outra parte variável de 4% comissionada.

Assim, para explicar a situação o autor algebriza da seguinte forma:

Salário = (parte fixa) + (parte variável)

$$y \quad = \quad 500 \quad + \quad 0,04 \cdot x$$

O autor completa, para descrever melhor, que o salário do vendedor é uma função do total de vendas que ele realizou afirmando ainda: “A sentença y=500+0,004x é uma função que relaciona o salário em função do total de vendas. É um exemplo de função afim.” (LONGEN, 2003, p. 160).

O exercício aborda apenas a resolução algébrica que serve de referência para a definição de função afim.

Dessa forma, o autor define: “Uma função f: |R → |R é denominada função afim na variável independente x, quando for da forma y=f(x)=ax+b, onde *a* e *b* são números reais” (LONGEN, 2003, p. 160).

Esta definição acompanha a abordagem do conceito geral de função, também vista anteriormente, que foi através de uma fórmula.

Para ilustrar o que são funções afim, seguem-se exemplos na forma algébrica onde o autor identifica quem é *a* e quem é *b*.

Uma consonância dessa definição é que para Longen (2003), a função constante (*a*=0) e a função linear (*a*≠o e *b*=0) são casos particulares de função afim.

LIVRO 3. Matemática 1ª série. GUELLI, Oscar

O autor não faz uso de nenhuma introdução contextualizada nem interdisciplinar para abordar o conceito de função afim.

Inicia pedindo: “Considere dois números a e b, com a≠0.”. Logo em seguida define: “Uma função cujos valores são dados por uma fórmula, como f(x) = ax+b chama-se função polinomial de 1º grau” (GUELLI, 2004, p. 35).

A forma como foi introduzido o conceito de função não está de acordo com as orientações oficiais sobre funções, pois é explícito quando citam que “O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui.” (PCN, 1999, p. 255). Esse fato é ainda reforçado nos PCN+ (2002) já observado também anteriormente, que não recomendam a introdução formal do conceito de função.

Sobre a definição de função afim descrita pelo autor, expressa através de uma fórmula, ela não segue a de par ordenado utilizada na definição geral sobre função, vista no item anterior.

A seguir, o autor dá um exemplo de uma expressão algébrica, f(x) = 2x + 1, com sua representação gráfica, intermediada com uma tabela, para ilustrar o conceito de função afim. Destaca ilustrando que a raiz ou zero da função é o ponto em que o gráfico da função intercepta o eixo x.

Sobre função constante e função linear, embora o autor não utilize tais denominações, pela restrição imposta pela definição ($a \neq 0$), a função constante não é um caso particular da função afim. Já sobre a função linear, é plausível supor que o autor deve considerá-la como caso particular de função afim.

4.4 Sobre o gráfico da função afim

a) O livro demonstra que o gráfico de uma função afim é uma reta?

Tabela 4. Comparação entre os livros sobre a demonstração de que o gráfico de uma função afim é uma reta.

O livro demonstra que o gráfico de uma função afim é uma reta ?	Sim	Não
Livro 1	X	
Livro 2		X
Livro 3		X

LIVRO 1. Matemática 1. SMOLE, Kátia S. e DINIZ, Maria I.

As autoras convidam o leitor a esboçar um gráfico a partir da expressão algébrica da função polinomial de 1º grau y = 2x + 3, no domínio dos números reais. Atribuindo quatro valores para x, é construída uma tabela cujos pontos são marcados no plano cartesiano, conforme figura 22.

x	$-\frac{3}{2}$	−1	0	1
y	0	1	3	5

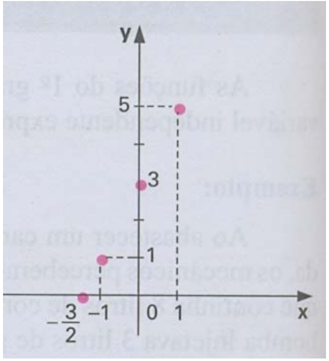


Figura 22. Construção do gráfico de uma função de 1º grau.
Fonte: SMOLE e DINIZ, 2005, p. 106

Para a construção do gráfico, o ideal, segundo as autoras, seria atribuir valores para *x* e ir marcando os pontos correspondentes. Entretanto, como a função é definida nos números reais, Smole e Diniz (2005) alertam que seria impossível considerar todos os pontos já que são infinitos.

As autoras sugerem, a seguir, que o gráfico seria uma reta, pois é possível unir os pontos com esse traçado, uma vez que a função é definida para os números reais.

Aqui, podemos observar que a conversão do registro algébrico para o gráfico (escrita simbólica → figura forma), é feita através da substituição de números na expressão algébrica, cujos valores são transferidos para o plano cartesiano (figura-fundo), obtendo-se assim parte do gráfico (figura-forma). Este tipo de conversão, dentro da organização semiótica de Duval (2003), permite apenas uma leitura pontual do gráfico.

Assim, para o exemplo da função y= 2x+3, Smole e Diniz traçam o gráfico mostrado na figura abaixo.

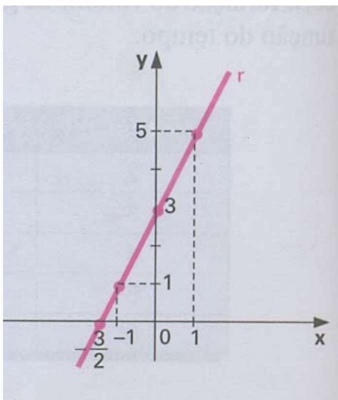


Figura 23. Gráfico da função y = 2x + 3.
Fonte: SMOLE e DINIZ, 2005, p. 106

Conjecturam a seguir que dois segmentos determinados por três pontos assinalados no gráfico estão na mesma reta. Para isso, escolhem os pontos (-1,1), (0,3) e (1,5). Para convencer o leitor, sugerem que meça os ângulos desses dois segmentos em relação ao eixo das abscissas. Como os ângulos têm a mesma medida e os dois segmentos têm o ponto (0,3) em comum, elas concluem que os segmentos estão na mesma reta.

Observamos que esse argumento prova apenas que existe uma reta que passa pelos três pontos escolhidos.

A seguir as autoras examinam a questão em toda a sua generalidade, ou seja, se o gráfico de uma função afim f(x) = ax + b (a, b Є |R) é uma reta.

Para a prova, fazem uso da semelhança de triângulos como descrevemos a seguir:

Sejam uma função y= ax+b e três pontos quaisquer $P_1(x_1, ax_1+b)$, $P_1(x_2, ax_2+b)$ e $P(x_0, ax_0+b)$ do gráfico da função.

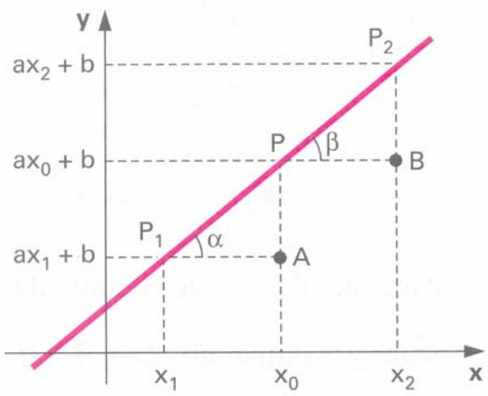


Figura 24. Alinhamento de 3 pontos.
Fonte: SMOLE e DINIZ, 2004, p. 107

$$\frac{PA}{P_2B} = \frac{(ax_0 + b) - (ax_1 + b)}{(ax_2 + b) - (ax_0 + b)} = \frac{x_0 - x_1}{x_{2-}x_0} = \frac{AP_1}{BP}$$

Concluem disso que os dois triângulos têm lados proporcionais e um ângulo reto. Logo seus ângulos correspondentes α e β são congruentes. Assim os pontos P_1, P_2 e P que são quaisquer, estão na mesma reta. Logo, "o gráfico de uma função do 1º grau é sempre uma reta" (2005, p. 107, grifo nosso).

Nas suas conclusões, as autoras (2005) afirmam ainda que para construir o gráfico de uma y = ax + b, basta determinar apenas dois de seus pontos.

No LIVRO 1 constatamos que na demonstração são utilizados registros algébrico e gráfico articulados com o apoio da linguagem natural. A visualização auxilia no entendimento da prova e tem papel preponderante.

É relevante observar o cuidado que as autoras tiveram no tratamento da representação gráfica. Utilizam inicialmente o procedimento de pontuar que é considerado por Duval (1988), como um obstáculo à compreensão por permitir apenas uma leitura pontual. Na sequência, utilizam o método da extensão do traçado, que Duval (1988) chama de um processo meramente mental, pois é feito através da união dos infinitos pontos potenciais entre pontos marcados no plano. No entanto esses procedimentos são apenas coadjuvantes no processo, e para convencer o leitor de que o gráfico de qualquer função afim é uma reta, o livro caminha com a estratégia da interpretação global das propriedades figurais, defendidas por Duval (1988). Ou seja, se o aluno é convencido com argumentos de que todo o gráfico de uma função afim é uma reta, fica mais fácil assimilar o significado das variáveis pertinentes de cada representação (algébrica e gráfica). O fato de o leitor ser lembrado que bastam dois pontos para determinar uma reta, fato esse destacado pelas autoras, é relevante para começar a entender o procedimento de apreensão global

Criam-se assim, condições potenciais que permitam ao leitor associar os coeficientes angular e linear do registro algébrico respectivamente com a inclinação da reta em relação ao eixo x e o ponto onde a reta cruza o eixo das ordenadas do registro gráfico.

LIVRO 2. Matemática: uma atividade Humana. LONGEN, Adilson:

O autor inicia a abordagem a este tópico afirmando que “o gráfico de uma função afim, na variável x, representada no plano cartesiano é uma reta não paralela ao eixo das abscissas.” (2003, p.161).

Para convencer o leitor dessa afirmação apresenta dois exemplos de funções afins, formulados no formato de exercício resolvido, em que pede para construir os gráficos correspondentes. Assim, a partir das representações algébricas vai atribuindo valores confortáveis (próximos da origem dos eixos) “à variável independente x, obtendo em correspondência os valores da variável dependente y" (2003, p. 161-2), obtendo assim pares ordenados. Para esse procedimento, o autor utiliza aqui o método de pontuar.

Exemplo 1: y = 2x-3

x	y	
–2	–7	→ (–2; –7)
–1	–5	→ (–1; –5)
0	–3	→ (0; –3)
1	–1	→ (1; –1)
2	1	→ (2; 1)
3	3	→ (3; 3)
4	5	→ (4; 5)
5	7	→ (5; 7)

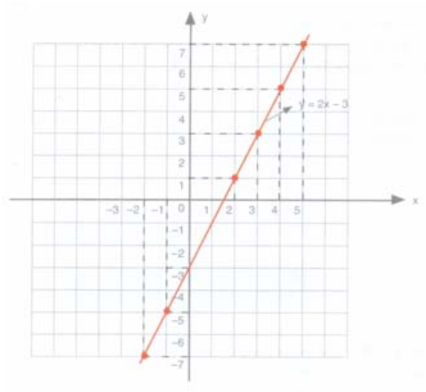


Figura 25. Construção do gráfico da função y = 2x – 3.
Fonte: LONGEN, 2003, p. 161

Exemplo 2: y = -x + 3

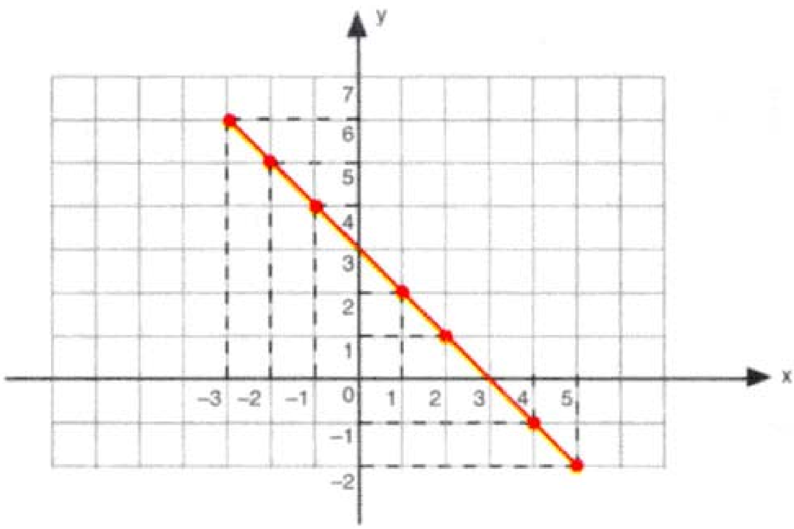


Figura 26. Gráfico da função y = -x + 3.
Fonte: LONGEN, 2003, p. 161

No momento de passar de pontos isolados do gráfico no plano cartesiano (passagem figura-fundo a figura-forma) ao procedimento de extensão de traçado, acrescenta: "Localizamos, agora, os pontos correspondentes no plano cartesiano e ligamos esses pontos adequadamente, considerando que o domínio é |R." (2003, p. 161-2).

Entretanto, Duval (1988) observa que, tanto no procedimento de pontuar como no de extensão do traçado, não há relação entre o registro algébrico e o registro gráfico.

Finalmente, Longen conclui afirmando: “como você deve ter observado nos dois exemplos, o gráfico de uma função afim, com domínio |R, é uma reta” (2003, p. 162).

Assim, constatamos que em nenhum momento existiu preocupação por parte do autor em demonstrar que o gráfico de uma função afim é uma reta.

Da mesma forma que o Livro 1, o autor faz uso do método de pontuar e o de extensão do traçado para construir os gráficos, procedimentos esses que Duval (2003) não considera adequados. Vale ainda a observação de que quando o autor pede que liguemos os pontos “adequadamente” para traçarmos o gráfico, esse adjetivo soa como se fosse a condição suficiente para o surgimento da reta. Assim, no Livro 2, o autor não apresenta a demonstração que o gráfico de uma função afim é uma reta, embora utilize representações algébrica, tabular e gráfica, com exemplos particulares e tente convencer o leitor disso, o que convenhamos é insuficiente.

LIVRO 3 – Matemática 1ª série. GUELLI, Oscar

Quando da abordagem da função polinomial de 1º grau, não existe nenhum tópico que trate especificamente do gráfico desta função. Apenas mostra-se a partir da representação algébrica f(x) = 2x+1, o gráfico da função e a representação tabular e afirma-se: “a figura mostra o gráfico da função (fx) = 2x+1” (2004, p. 36), sem qualquer outro comentário.

x	2x + 1	f(x)
0	$2 \cdot 0 + 1$	1
1	$2 \cdot 1 + 1$	3
−1	$2(-1) + 1$	−1

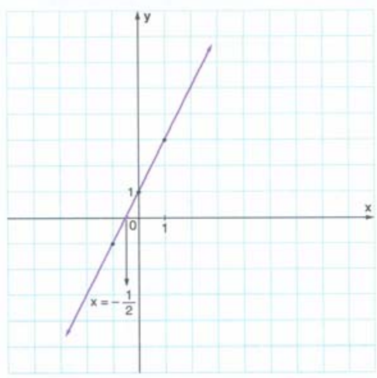


Figura 27. Tabela e gráfico da função f(x) = 2x + 1.
Fonte: GUELLI, 2004, p. 36

No entanto, o autor destinou, antes da Unidade 2 que trata de funções, uma Unidade do livro ao estudo do Plano Cartesiano (2004, p. 7-25), onde aborda o tema: "*Declividade de um segmento*" e "*Como descrever uma reta com uma equação*".

Nessa seção, ele mostra como obter a equação da reta não vertical passando pelos pontos $P_1(x_1,y_1)$ e $P(x,y)$ através de semelhança de triângulos, chegando à equação: $y - y_1 = m(x_1 - x_2)$, em que m é o que ele chama de declividade da reta.

O autor ilustra então para um exemplo, com dois pontos, A(1,2) e B(2,5), mostrado na figura abaixo.

Assim, $m = \dfrac{2-5}{1-2}$ => $m = 3$

Escolhendo um dos pontos, A(1,2) temos: $y - 2 = 3(x - 1)$

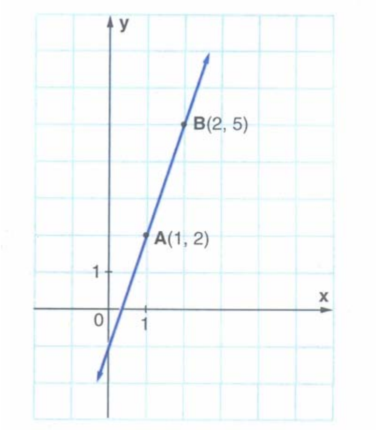


Figura 28. Gráfico da equação y – 2 = 3(x –1).
Fonte: GUELLI, 2004, p. 17

Voltemos à Unidade referente à função polinomial do 1º grau, na sequência, o livro passa a tratar de inequações envolvendo funções polinomiais de 1º grau.

Na Unidade específica de função polinomial de 1º grau, o livro não retoma o que abordou sobre retas na Unidade de Plano Cartesiano onde aparece a demonstração mencionada acima.

Embora o livro trate da conversão da figura-forma para a escrita simbólica, existe na obra uma preocupação com relação ao tratamento da declividade, abordada em dois exemplos. O sentido de inclinação aparece associado ao sinal – e ao sinal +. Este tipo de abordagem contempla parcialmente o que Duval (2003) chama de apreensão global, pois é possível perceber, pelo menos com relação à declividade, a articulação do valor visual (sentido de inclinação) e sua correspondente na escrita algébrica (sinal do coeficiente).

Antes de terminar a análise do tópico "**O livro demonstra que o gráfico de uma função afim é uma reta ?"**, vale ressaltar ainda que a observação de que para construir um gráfico de uma função afim, é suficiente determinar apenas dois pontos, aparece apenas no Livro 1.

Consideramos importante esta observação nos livros, pois dessa forma estaremos abandonando o método de pontuar considerado por Duval (2003) como inadequado e presente no Livro 2.

Já no Livro 3, embora não esteja explicitamente descriminado esta observação, para obter a equação da reta, o autor utiliza dois pontos genéricos.

b) O livro trata a raiz ou zero da função afim algébrica e visualmente ?

Tabela 5. Comparação entre os livros sobre o tratamento algébrico e visual da raiz ou zero da função.

Aborda a raiz	Em quantos exemplos numéricos?	Visualmente	Algebricamente
Livro 1	4	Sim	Não
Livro 2	2	Sim	Não
Livro 3	1	Sim	Não

LIVRO 1. Matemática 1. SMOLE, Kátia S. e DINIZ, Maria I.:

A partir da conclusão de que todo o gráfico de uma função de 1º grau é uma reta, as autoras fazem algumas observações que são produtos dessa apreensão e que permitem interpretar gráficos relacionando-os com suas representações algébricas.

Uma dessas observações diz respeito ao que as autoras chamam de zero ou raiz da função.

Assim, utilizando-se da apreensão acima descrita, as autoras (2005) abordam algébrica e graficamente o zero ou raiz da função. Na articulação entre os dois tipos de representação, mostrada na figura abaixo, é possível perceber a presença das unidades visuais do registro gráfico (_sentido de inclinação_, _ângulo com os eixos_ e _posição do traçado em relação à origem dos eixos_) e dos valores escalares do registro algébrico (coeficientes positivo ou negativo, maior, menor ou igual 1.

Esta articulação é ainda amparada pela língua natural como podemos observar na referida figura, mostrada abaixo.

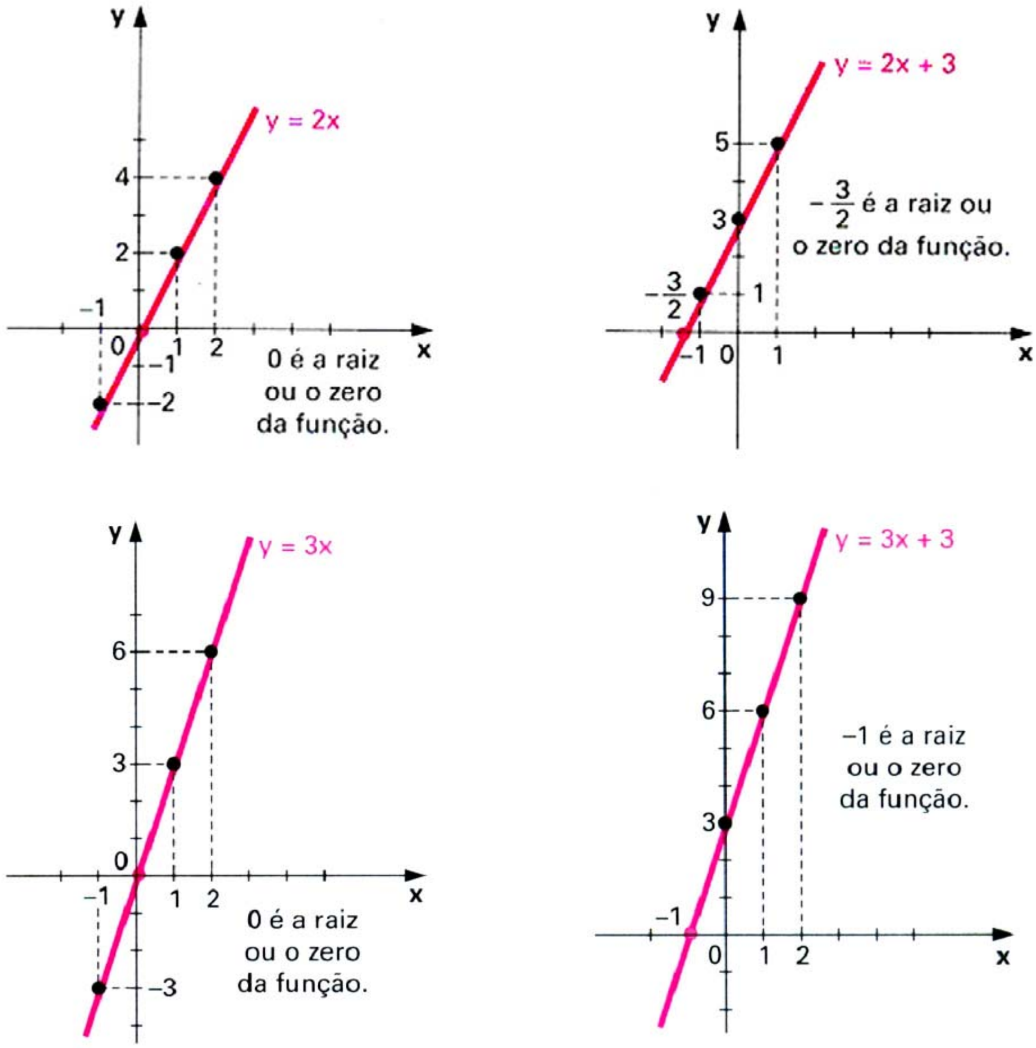


Figura 29. Gráficos das funções y = 2x, y = 2x + 3, y = 3x e y = 3x + 3.
Fonte: SMOLE e DINIZ, 2005, p. 107-8

As autoras descrevem que “o ponto onde o gráfico corta o eixo x corresponde ao valor de x tal que f(x) = 0. Nesse caso, x é chamado de zero ou raiz da função” (2005, p. 107).

Para determiná-lo algebricamente, no caso do gráfico de y = 2x + 3, as autoras mostram que quando f(x)=0, é possível encontrar o valor de x que torne a equação 2x + 3 = 0 verdadeira; no caso, x= -3/2

O mesmo raciocínio vale para o outro exemplo, y = 3x + 3. Aqui, x= -1.

LIVRO 2. Matemática: uma atividade Humana. LONGEN, Adilson:

É no tópico intitulado *Sinal de uma função afim* que o livro aborda o zero da função. Para tanto, inicia com a seguinte pergunta: “para que valores de x o y é igual a zero?” (2003, p. 163).

O autor faz uso da denominação usada nos dois exemplos para mostrar o “zero da função”: y = 2x + 4 e y = -5y + 5.

Resolve algebricamente as equações, encontrando respectivamente x = 2 e x = 1, e esboça os gráficos mostrados na figura abaixo.

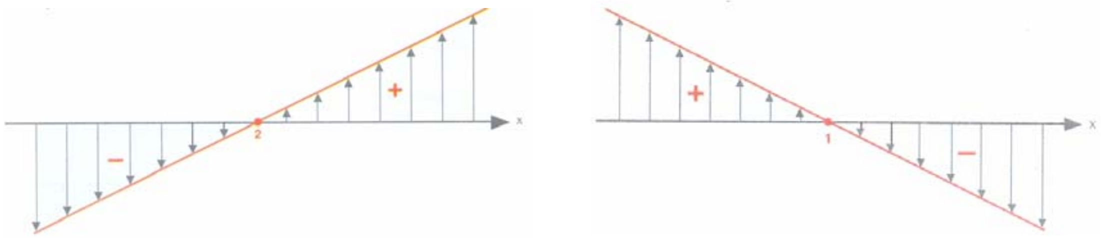


Figura 30. Representação gráfica do zero das funções y = 2x – 4 e y = -5x+5
Fonte: LONGEN, 2003, p. 162-3

Assim, no 1º exemplo, está privilegiada a conversão da escrita simbólica para a figura fundo, quando o que está em questão é a apreensão global dos valores visuais e seus correspondentes na escrita simbólica (figura-forma → escrita simbólica e vice versa); no caso, especificamente a intersecção do gráfico com o eixo x.

Entretanto, apenas no 2º exemplo, o autor observa explicitamente que “[...] o gráfico intercepta o eixo x no ponto (1;0) [...]“ (p. 164), enquanto que no 1º exemplo menciona apenas “que o gráfico contém o ponto (2;0) [...]” (2003, p.163).

LIVRO 3. Matemática 1ª série. GUELLI, Oscar

É no único exemplo mostrado na figura 31 que Guelli (2004, p. 36) cita: ”é comum chamar de raiz ou zero da função o número real associado ao ponto em que o gráfico da função intercepta o eixo x”.

Usa o exemplo f(x) = 2x + 1 para ilustrar como determina o zero da função, fazendo f(x) = 0, e mostrando o valor encontrado para x, e a seguir o ponto correspondente no plano cartesiano, conforme figura abaixo.

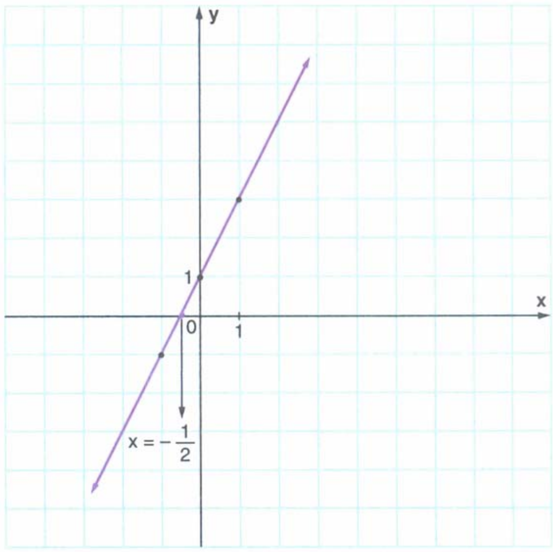


Figura 31. Representação gráfica do zero da função y = 2x + 1.
Fonte: GUELLI, 2004, p. 36

Merece menção o fato de que nenhum dos livros explicita de forma generalizada o tratamento no registro algébrico necessário para passar da equação algébrica a raiz que corresponderia a explicar a sequência:

$$f(x) = ax + b \qquad f(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = -\frac{b}{a} \qquad \text{com } a \neq 0$$

Fica a impressão de que uma constatação em alguns exemplos é suficiente para se chegar à conclusão geral.

Outra observação diz respeito à diversidade dos exemplos: O Livro 1 apresenta exemplos utilizando zero e números inteiros e fracionários negativos para ilustrar o zero da função, enquanto o Livro 2, utiliza apenas números inteiros positivos. Já o Livro 3 apresenta apenas um exemplo, onde o zero da função é ilustrado com um número fracionário positivo.

Faltaram, portanto, no Livro 1, exemplos com números inteiros e números fracionários positivos, no Livro 2, exemplos com números fracionários positivos e números fracionários e inteiros negativos, e o no Livro 3, o mais pobre, exemplos com números fracionários positivos e números inteiros positivos e negativos.

Vale a pena destacar que exceção feita ao Livro 2, os demais trabalharam com números fracionários para o zero da função o que é muito bom.

c) O livro prova as implicações: $a > 0 \Leftrightarrow f(x) = ax+b$ crescente e $a < 0 \Leftrightarrow f(x) = ax+b$ decrescente?

Tabela 6. Comparação entre os livros sobre as implicações $a > 0 \Leftrightarrow f(x) = ax+b$ crescente e $a < 0 \Leftrightarrow f(x) = ax+b$ decrescente

$a > 0 \Leftrightarrow f(x) = ax+b$ crescente $a< 0 \Leftrightarrow f(x) = ax+b$ decrescente	$a > 0 \Rightarrow f$ crescente	f crescente $\Rightarrow a > 0$	$a < 0 \Rightarrow f$ decrescente	f decrescente $\Rightarrow a < 0$	Exemplos apresentados
Livro 1	Sim	Não	Sim	Não	2
Livro 2	Não	Não	Não	Não	2
Livro 3	Não	Não	Não	Não	0

LIVRO 1. Matemática 1. SMOLE, Kátia S. e DINIZ, Maria I.:

Para introduzir o conceito de função crescente e decrescente, as autoras apresentam dois exemplos conforme as duas próximas figuras.

f(x)= 2x

x	−2	−1	0	1	2
y = 2x	−4	−2	0	2	4

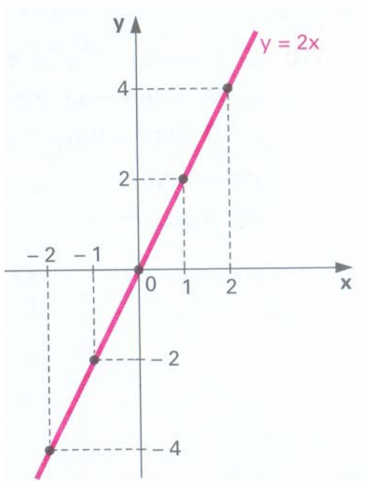


Figura 32. Gráfico da função crescente y = 2x.
Fonte: SMOLE e DINIZ, 2005, p. 115

Para este exemplo, explicam que aumentando os valores de x, os valores das imagens correspondentes aumentam também. Em seguida acrescentam: “Dizemos, então, que f(x) = 2x é crescente em |R. Note que a função y cresce 2 unidades para cada unidade de variação de x e que a = 2” (SMOLE e DINIZ, 2005, p. 115).

Passam em seguida ao exemplo abaixo:

g(x)= -2x

x	−2	−1	0	1	2
y = −2x	4	2	0	−2	−4

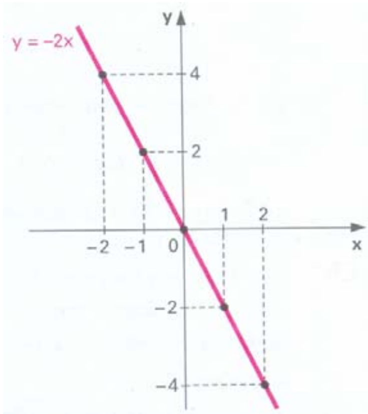


Figura 33. Gráfico da função decrescente y = -2x.
Fonte: SMOLE e DINIZ, 2005, p. 115

Neste exemplo, as autoras explicam que aumentando os valores de x, os valores das imagens correspondentes diminuem. A seguir, Introduzem informalmente o termo “decrescente” para a função g(x) = -2x, semelhantemente ao que foi feito logo acima para f(x)= 2x.

Neste caso, as autoras citam: “Note que a função y decresce 2 unidades para cada unidade de variação de x e que a = -2” (2005, p. 115).

Podemos observar nos gráficos apresentados, a articulação entre as variáveis envolvidas *sentido de inclinação* e *sinal do coeficiente angular*, respectivamente variável visual e sua correspondente na unidade algébrica.

Assim, podemos constatar que os valores da variável visual *sentido de inclinação*, *traçado ascendente da esquerda para a direita* no primeiro exemplo e *traçado descendente da esquerda para a direita* no segundo, estão associados à variável algébrica correspondente *sinal do coeficiente angular* respectivamente ao *sinal+* e *sinal-.*

Ainda vale ressaltar que a variável visual, *posição do traçado em relação à origem do eixo x* e sua correspondente variável algébrica, *coeficiente linear*, foi mantida constante e igual a 0 (zero).

A seguir, introduzem a definição geral de função crescente e decrescente, como segue: "f é crescente em |R se, para quaisquer valores x_1 e x_2 em |R com $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$, e f é decrescente em |R se, para quaisquer valores x_1 e x_2 em |R com $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$." (SMOLE e DINIZ, 2005, p. 115).

Para a função f(x) = ax+b, as autoras trazem os argumentos em toda a sua generalidade:

Na função do 1º grau f(x) = ax + b

> - se a > 0 e $x_1 < x_2$, então $ax_1 < ax_2$ e $ax_1 + b < ax_2 + b$, ou seja $f(x_1) < f(x_2)$ e f é crescente em seu domínio |R.
> - se a < 0 e $x_1 < x_2$, então $ax_1 > ax_2$ e $ax_1 + b > ax_2 + b$, ou seja $f(x_1) > f(x_2)$ e f é decrescente em seu domínio |R (SMOLE e DINIZ, 2005, p. 115).

LIVRO 2. Matemática: uma atividade Humana. LONGEN, Adilson:

O autor inicia destacando que é importante que o leitor constate que uma função afim pode ser crescente, decrescente ou constante (a=0). Prossegue: "Não é necessário construir o gráfico de uma função afim para verificar se esta é crescente ou decrescente!" (LONGEN, 2003, p. 162). No entanto, não demonstra isso.

Com relação ao coeficiente *a* da função afim y = f(x) = *ax*+*b*, que o autor chama de taxa de variação, Longen (2003, p. 162) afirma a seguir: "O sinal do coeficiente de x indica se função é crescente ou decrescente."

No entanto, o autor não introduz, nem mesmo informalmente, o conceito de função crescente e decrescente em nenhum momento do seu livro.

Sem demonstração alguma conclui: $\begin{cases} a > 0 : função crescente \\ a < 0 : função decrescente \end{cases}$

Para ilustrar, o autor utiliza as funções abaixo como exemplos, sem comentários:

- A função y = 2x –3 é crescente, pois a = 2 > 0
- A função y = -x+3 é decrescente, pois a = -1 < 0

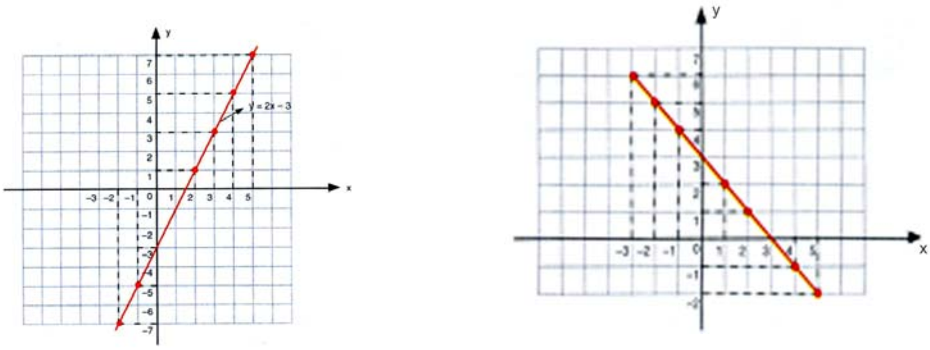


Figura 34. Gráficos das funções y = 2x – 3 crescente e de y = -x + 3 decrescente.
Fonte: LONGEN, 2003, p. 161-2

Assim, o autor tenta convencer o leitor através de dois exemplos da veracidade da sua afirmação. Embora os dois exemplos acima venham acompanhadas de suas representações gráficas, conforme figura 34, o autor não relaciona a variável visual _sentido de inclinação_ com a sua correspondente na escrita algébrica _coeficiente angular_.

LIVRO 3. Matemática 1ª série. GUELLI, Oscar:

No capítulo reservado para a função afim, e também no capítulo onde o plano cartesiano é abordado, não se mencionam os termos crescente ou decrescente.

d) O livro demonstra que o parâmetro _a_ de uma função afim é a tangente trigonométrica do ângulo que o gráfico faz com o eixo 0x (sentido anti-horário)?

Tabela 7. Comparação entre os livros sobre a demonstração que o parâmetro _a_ de uma função afim é tangente do ângulo que o gráfico faz com o eixo 0x.

Demonstra que o parâmetro _a_ de uma função afim é tangente do ângulo que o gráfico faz com o eixo 0x ?	**Sim**	**Não**
Livro 1		X
Livro 2		X
Livro 3		X

e) O livro trata o coeficiente linear de uma função afim algebricamente e a parte visual concomitantemente?

Tabela 8. Comparação entre os livros sobre o tratamento algébrico concomitante com a parte visual do coeficiente linear.

Aborda o Coeficiente Linear de função afim	Em quantos exemplos numéricos ?	Visualmente	Algebricamente
Livro 1	4	Sim	Não
Livro 2	2	Sim	Sim
Livro 3	0	Não	Não

LIVRO 1. Matemática 1. SMOLE, Kátia S. e DINIZ, Maria I.:

Ao explicitar a prova que o gráfico de uma função de 1º grau é uma reta, as autoras abriram a possibilidade de interpretar gráficos, relacionando-os com suas representações algébricas, e facilitando dessa forma as articulações entre variáveis visuais gráficas (inclinação, sentido de inclinação e intersecção com os eixos) e os coeficientes da expressão algébrica (*a* e *b*).

Com auxílio do gráfico da função de 1º grau, as autoras fazem observações importantes acerca dos parâmetros *a* e *b:*

> na função de 1º grau f(x) = ax + b, a é chamado de coeficiente angular ou declividade, porque determina a inclinação da reta, e b é denominado coeficiente linear do gráfico de f. Vejamos intuitivamente o que isso significa em relação ao eixo x (SMOLE e DINIZ, 2005, p. 108).

Para convencer o leitor da citação, as autoras apresentam quatro exemplos de funções de 1º grau.

Prosseguem: "Consideremos os gráficos de y = 2x e y = 2x + 3 e meçamos o ângulo α formado entre as retas que representam a função e o eixo Ox:" (SMOLE e DINIZ, 2005, p. 108).

Abaixo, na figura abaixo, estão representados os gráficos correspondentes.

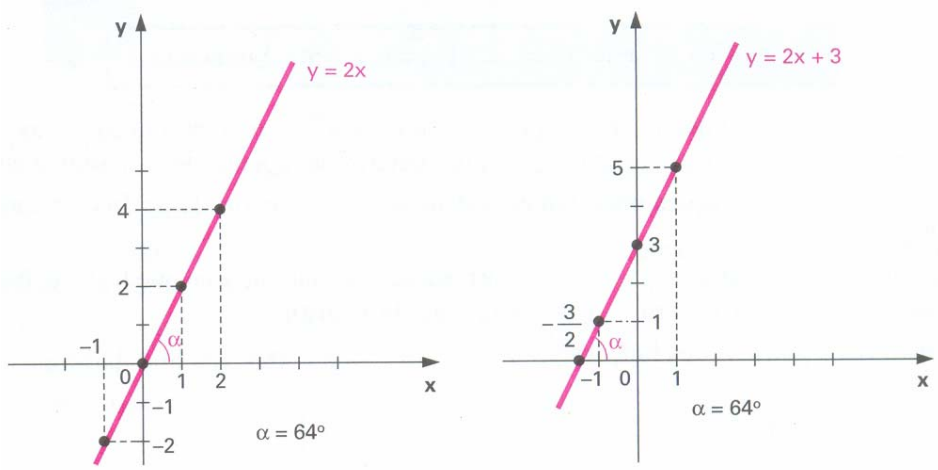


Figura 35. Representação do ângulo de inclinação.
Fonte: SMOLE e DINIZ, 2005, p. 108

Smole e Diniz (2005, p. 108) observam: “em ambas as funções, *a* = 2 e o ângulo de inclinação da reta não varia. Já a posição das retas no plano cartesiano muda“. As autoras prosseguem descrevendo que “a reta foi transportada um pouco mais para a esquerda, passando a cortar os eixos em y = 3 e $x = -\frac{3}{2}$ ou em (0,3) e $(-\frac{3}{2},0)$” (SMOLE e DINIZ, 2005, p. 108).

Para explicar isso ao leitor, as autoras afirmam: “Isso ocorre porque o coeficiente linear *b* é diferente nas duas funções: *b*=0 em y=2x e *b* = 3 em y = 2x + 3” (SMOLE e DINIZ, 2005, p. 108).

O ângulo α = 64º é explicitado nos dois gráficos, para confirmar que o ângulo não mudou efetivamente quando da translação da reta.

Desta forma, podemos perceber as articulações entre a representação gráfica e a representação algébrica. Assim, tanto a inclinação como o ponto de intersecção nos eixos, que são variáveis visuais gráficas que provocam mudanças concomitantemente nos coeficientes angular e coeficiente linear, da expressão algébrica, são exploradas pelas autoras.

Na terminologia de Duval (2003), a variável visual _posição do traçado em relação à origem do eixo x_ foi mobilizada inicialmente com o valor _traçado cruza o eixo y na origem_ e passou para o valor _traçado cruza o eixo y acima da origem_. Isso provocou uma mudança concomitante na correspondente unidade algébrica _coeficiente linear_ de valor 0 (zero) para o valor 3.

Todavia, o leitor consegue constatar que os valores, tanto da variável visual _ângulos com os eixos_ como da variável visual _sentido de inclinação_ não mudaram, o que implicou que as suas correspondentes algébricas, respectivamente _coeficiente angular_ e _sinal do coeficiente_ se mantivessem constantes.

Este movimento clássico de translação feita no livro é recomendado por Duval (1988), para mostrar que uma mudança visual no gráfico implica imediatamente a sua contrapartida algébrica e vice-versa.

Assim, prosseguem nos dois exemplos seguintes: “observe os gráficos das funções y = 3x e y=3x + 3” (SMOLE e DINIZ, 2005, p. 109), figura abaixo.

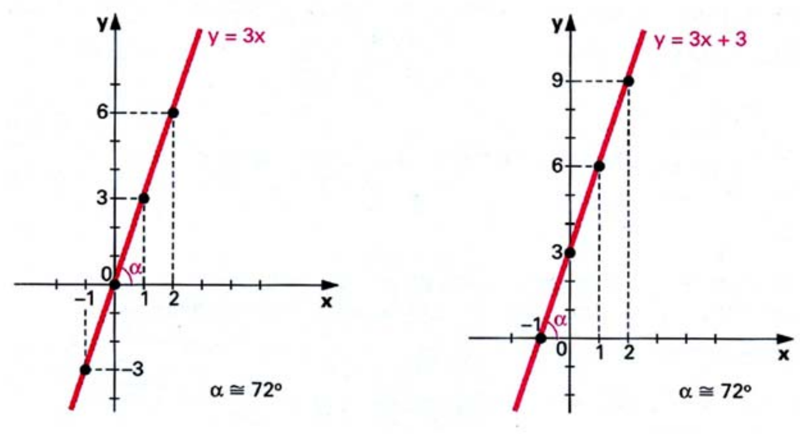


Figura 36. Representação do ângulo de inclinação.
Fonte: SMOLE e DINIZ, 2005, p. 109

Logo após as figuras, as autoras tecem as seguintes considerações: “Em ambas as funções, o coeficiente angular é *a* = 3 e o ângulo de inclinação é $\alpha \cong 72^{o}$. Já a posição das retas no gráfico, que depende do coeficiente linear b, varia porque b = 0 em y = 3x e b = 3 em y = 3x + 3” (2005).

A seguir, baseadas nos exemplos apresentados, generalizam afirmando: “o gráfico de toda a função do 1º grau f(x) = *ax* + *b*, $a \neq 0$, intercepta o eixo Oy no ponto (0,b).” (SMOLE e DINIZ, 2005, p. 109).

Na terminologia de Duval (2003), a variável visual *posição do traçado em relação à origem do eixo x* foi mobilizada inicialmente com o valor *traçado cruza o eixo y na origem* e passou para o valor *traçado cruza o eixo y acima da origem*. Isso provocou uma mudança concomitante na correspondente unidade algébrica *coeficiente linear* de valor 0 (zero) para o valor 3.

O leitor consegue ainda constatar que tanto a variável visual *ângulos com os eixos* como a variável visual *sentido de inclinação* não mudaram, o que implicou que as suas correspondentes algébricas, respectivamente *coeficiente angular* e *sinal do coeficiente* se mantivessem constantes.

A diferença fundamental dos exemplos apresentados, diz respeito ao ângulo α. O valor dele está relacionado com a variável visual *ângulos com os eixos* cuja correspondência na representação algébrica é o *coeficiente angular*.

Nos exemplos é possível perceber, portanto, que um ângulo maior implica em um coeficiente angular maior, embora as autoras não expliquem qual a razão. Vale lembrar ainda que é necessário ainda levar em consideração a variável visual *sentido de inclinação* e sua correspondente algébrica *símbolo + ou -*.

Assim, para um ângulo α=64º, temos para os dois primeiros exemplos a=2 e para $\alpha \cong$74º para os dois últimos exemplos, a=3.

Nos exemplos das figuras 10 e 11, podemos perceber que não existe nenhum privilégio dado a algum tipo de conversão, seja ela da escrita simbólica para a figura-forma ou vice versa. O que as autoras apresentam é o que Duval (2003) chama de apreensão global, cujo procedimento implica articular os valores visuais e seus valores correspondentes na escrita simbólica.

É essa articulação e correspondência entre os dois registros que leva a apreensão do conceito, conforme afirma Duval.

Continuando a sua explanação, as autoras afirmam que quando b = 0, o gráfico passa pela origem dos eixos e “nessa situação, a função recebe o nome de função linear” (SMOLE e DINIZ, 2005, p. 109).

Mais à frente, Smole e Diniz (2005, p. 114) afirmam: “Se uma função do 1º grau y = ax + b apresenta a = 1 e b = 0, ela fica reduzida a y = x, sendo conhecida como função identidade, porque a cada valor de x, associa idêntico valor a y" conforme mostrada na figura abaixo.

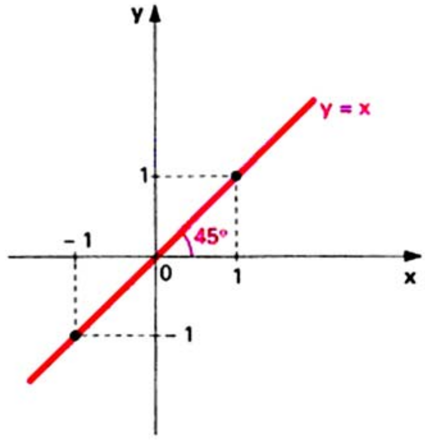


Figura 37. Gráfico da função identidade.
Fonte: SMOLE e DINIZ, 2005, p. 114

Apoiadas no registro gráfico, as autoras ainda ressaltam: "O gráfico da função identidade é a reta que é bissetriz do primeiro e do terceiro quadrantes do referencial cartesiano" (SMOLE e DINIZ, 2005, p. 114).

Aqui podemos perceber que a variável visual *intersecção com os eixos* cujo valor *traçado cruza o eixo y na origem* tem a sua correspondência na unidade algébrica *coeficiente linear* igual ao valor 0 (zero). Este fato é possível de ser percebido pelo leitor em função dos exemplos anteriores. Já para, a variável visual *ângulos com os eixos* cujo valor é *divisão simétrica*, o leitor poderá ter dificuldade de relacioná-la com a sua correspondente algébrica *coeficiente angular* cujo valor é *1*, uma vez que as autoras nada comentam a respeito.

Neste livro, faltou explicar qual a relação de α com o coeficiente *a* no primeiro exemplo α=64º (figura 35) e no segundo $\alpha \cong$ 72º (figura 36), assim como o ângulo de 45º na função identidade (figura 37). Em nenhum momento as autoras identificam o coeficiente *a* como tangente trigonométrica de α. Ou mesmo que *a* é o resultado da divisão do cateto oposto sobre o cateto adjacente no triângulo retângulo. Esta seria uma boa oportunidade de vincular conceitos relacionados na matemática que são inclusive orientações de documentos oficiais.

Faltou, portanto o tratamento algébrico do coeficiente angular: dados dois pontos quaisquer da reta (x_1,y_1) e (x_2,y_2) teríamos $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

O fato de que o ângulo que o gráfico faz com o eixo 0x depende das unidades e da escala estabelecida nos dois eixos, não é comentado pelas autoras.

Faltaram exemplos com relação à variável visual *sentido de inclinação*, associados ao sinal do coeficiente da variável algébrica *coeficiente angular*: retas ascendentes estão associadas ao coeficiente angular positivo e retas descendentes ao coeficiente angular negativo.

O livro também não explicita genericamente o tratamento dentro do registro algébrico para encontrar o coeficiente linear *b* que corresponderia à sequência:.

$f(x) = ax + b$ quando $x = 0$ => $f(0) = a.0 + b$ => $f(0) = b$

A conclusão das autoras, de que o valor de b é ponto onde o gráfico corta o eixo Oy, é baseada em dois exemplos, o que pode passar a idéia de que exemplos bastam para sustentar uma afirmação.

LIVRO 2 – Matemática: uma atividade Humana. LONGEN, Adilson:

Na abordagem do gráfico de uma função afim, Longen utiliza a expressão y = f(x) = ax + b para designar *a* como taxa de variação e *b* como coeficiente linear. Em seguida cita: “O sinal do coeficiente x indica se a função é crescente ou decrescente.” (LONGEN, 2003, p. 162).

Assim, generaliza afirmando que quando $a > 0$ a função é crescente e quando $a < 0$ a função é decrescente. Entretanto, como já observamos no tópico anterior, o autor não introduz o conceito de função crescente ou função decrescente.

Em seguida mostra dois exemplos envolvendo expressões algébricas para ilustrar o papel do sinal de *a*:

$y = 2x – 3$ é crescente, pois $a = 2 > 0$

$y = -x + 3$ é decrescente, pois $a = -1 < 0$

Utiliza as suas respectivas representações gráficas já postas anteriormente conforme figura abaixo.

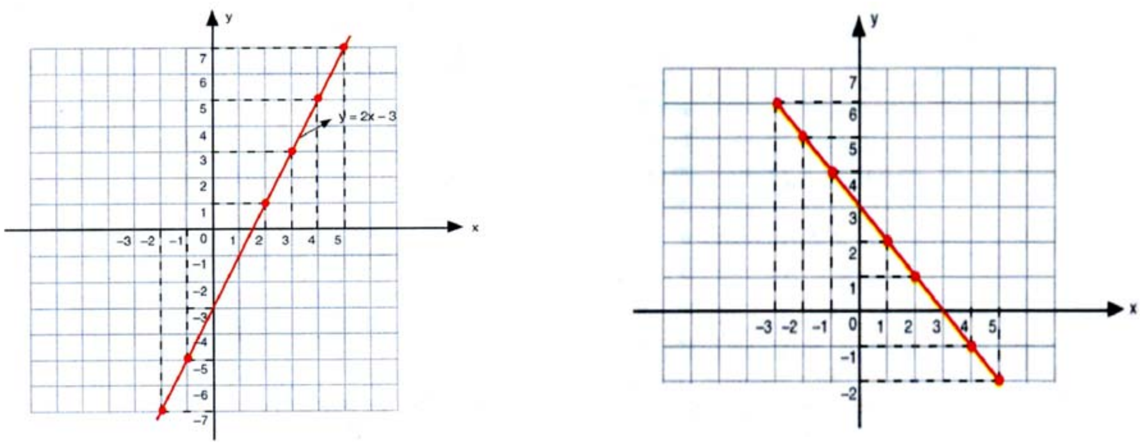


Figura 38. Gráficos da função y = 2x – 3 crescente e da função y = -x + 3 decrescente.
Fonte: LONGEN, 2003, p. 161-2

Embora o autor não observe nenhuma relação da posição das retas com a taxa de variação <u>a</u>, estabelece que é natural associar o coeficiente de x da função afim com crescimento ou decrescimento.

Em seguida, para abordar o coeficiente linear <u>b</u> faz uma indagação: “o que seria o coeficiente linear b na função do 1º grau y = ax + b ?” (LONGEN, 2003, p. 163).

O autor observa: “no eixo y qualquer ponto tem abscissa igual a zero, e que o termo independente de x, na função afim, indica onde a reta corta o eixo y.” (LONGEN, 2003, p. 163).

Prossegue generalizando algebricamente:

Seja y = f(x) – ax + b   fazendo   x = 0   =>   y = f(0) = a.o + b = b

Para uma melhor compreensão, Longen recomenda em seguida que o leitor observe os gráficos dos exemplos acima (figura 38) e cita explicitamente: “Na função y = 2x – 3, o gráfico intercepta o eixo y no ponto (0;-3). Na função y = -x + 3, o gráfico intercepta o eixo y no ponto (0;3)” (LONGEN, 2003, p. 163).

Através destes dois exemplos, é possível constatar que este livro explora as seguintes situações:

No primeiro exemplo, a variável visual *intersecção com os eixos* cujo valor *traçado cruza o eixo y abaixo da origem* tem a sua correspondência na unidade algébrica *coeficiente linear* igual ao valor -3, e a variável visual *sentido de inclinação*, cujo valor *traçado ascendente da esquerda para a direita* tem sua correspondência com o sinal do *coeficiente angular* na escrita algébrica igual ao *sinal+*.

No segundo exemplo, a variável visual *intersecção com os eixos* cujo valor *traçado cruza o eixo y acima da origem* tem a sua correspondência na unidade algébrica *coeficiente linear* igual ao valor 3, e a variável visual *sentido de inclinação* cujo valor *traçado descendente da esquerda para a direita* tem sua correspondência com o sinal do *coeficiente angular* na escrita algébrica igual ao *sinal-*.

A seguir, o autor aborda a função linear, definindo-a como: “Uma função f: |R → |R da forma y = f(x) = ax, com a Є |R e a ≠ 0, é uma função linear” (LONGEN, 2003, p. 164).

Seguem-se depois dois exemplos numéricos para ilustrar a forma da função linear: f(x) = 4x e f(x) = 0,2x.

Em seguida, para caracterizar graficamente o coeficiente linear acrescenta:

> Como a função linear é uma função afim, o gráfico também será uma reta. A novidade aqui é que a reta intersecta os dois eixos coordenados na origem. Lembre em relação ao que vimos antes, que o termo independente de x (b) indica onde a reta corta o eixo y. Como na função linear temos b = 0, então a reta correspondente intersectará o eixo y, no ponto (0;0)” (LONGEN, 2003, p. 164).

Aqui, o autor faz a coordenação, segundo a teoria semiótica de Duval (2003), da variável visual, *intersecção com os eixos*, com valor *traçado cruza o eixo y na origem* com a correspondente unidade algébrica *coeficiente linear* de valor igual 0 (zero).

Para mostra isso ao leitor, Longen (2003) constrói o gráfico da função y = f(x) = 2x a partir de alguns valores para *x* para obter valores correspondentes de *y*. Dessa forma, assinala pontos isolados no plano cartesiano (figura-fundo) a partir da escrita simbólica para chegar a figura forma através do procedimento de extensão do traçado conforme figura abaixo.

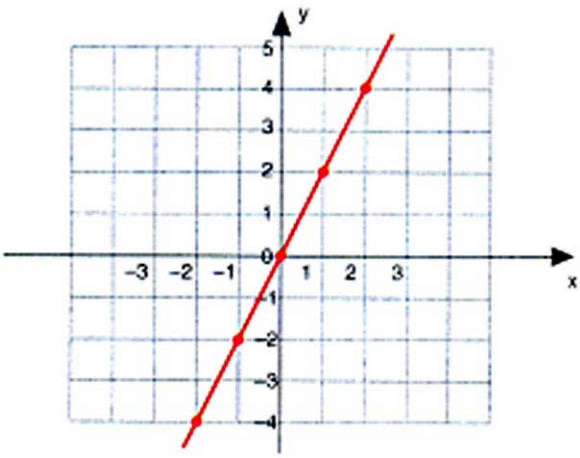


Figura 39. Gráfico da função linear y = 2x.
Fonte: LONGEN, 2003, p. 164

Ainda dentro do tópico Função Linear, o autor faz duas observações importantes: a primeira diz respeito às bissetrizes e a segunda ao conceito de proporcionalidade.

Com relação às bissetrizes, Longen lembra o leitor de que na definição de função linear, y = f(x) = ax, a é a taxa de variação. No entanto cita: "Você verá mais tarde que o coeficiente angular é a tangente do ângulo que a reta forma com o eixo x, sentido positivo" (LONGEN, 2003, p. 165). Embora o autor não tenha definido anteriormente coeficiente angular, é plausível imaginar que ele queira dizer que a taxa de variação a também pode ser chamada de coeficiente angular, embora isso não esteja explícito. Entretanto, o autor não retoma mais neste livro o próprio conceito de coeficiente angular.

É importante ainda salientar ainda que a afirmação do autor de que o coeficiente angular é tangente do ângulo do gráfico com o eixo 0x, teria que ser provado, coisa que o livro não faz.

A seguir, o autor tenta mostrar as articulações entre as variáveis visuais e suas correspondentes variáveis algébricas, conforme figura abaixo.

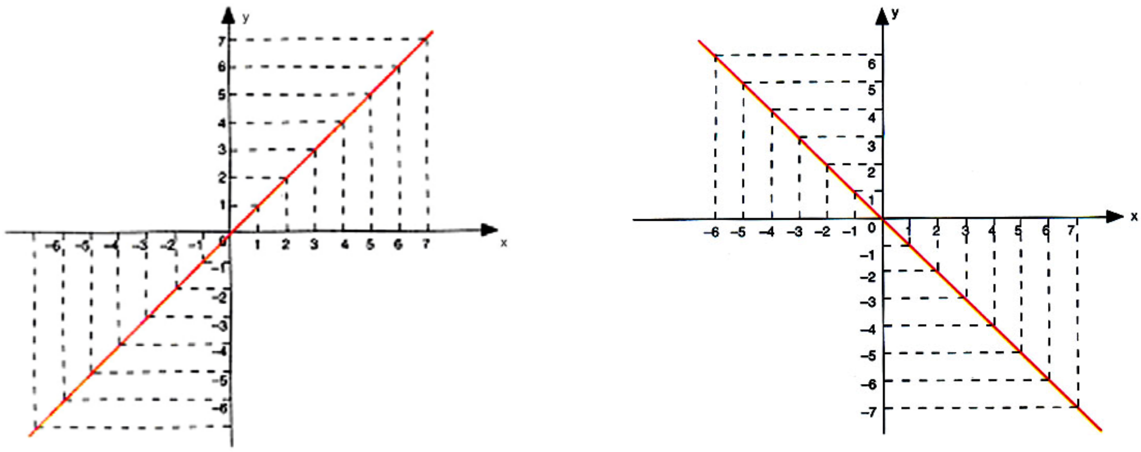


Figura 40. Gráficos das bissetrizes.
Fonte: LONGEN, 2003, p. 165

Para a figura da esquerda o autor comenta: “Como qualquer ponto dessa reta tem o valor da abscissa igual ao valor da ordenada, tal função linear é da forma y = f(x) = x” (LONGEN, 2003, p. 165). As variáveis visuais *intersecção com os eixos*, de valor: *traçado cruza o eixo y na origem*, *ângulos com os eixos* de valor: *divisão simétrica* e *sentido de inclinação*, de valor *traçado ascendente da esquerda para a direita* têm respectivamente as suas correspondências na unidade algébrica *coeficiente linear* com valor 0 (zero), *coeficiente angular* com valor 1 e *sinal do coeficiente angular*, com *sinal+*.

Já para a figura da direita, o autor explica: “Como qualquer ponto dessa reta tem o valor da abscissa oposto ao valor da ordenada, tal função linear é da forma y = f(x) = - x” (LONGEN, 2003, p. 165). As variáveis visuais *intersecção com os eixos*, de valor: *traçado cruza o eixo y na origem*, *ângulos com os eixos*: de valor: *divisão simétrica* e *sentido de inclinação*, de valor: *traçado descendente da esquerda para a direita*, têm respectivamente as suas correspondências na unidade algébrica com *coeficiente linear* igual com valor 0 (zero), *coeficiente angular* com valor 1 e *o sinal do coeficiente angular* com valor *sinal-*.

Com relação à segunda observação, utilizando o fato de que a função linear é um modelo matemático para a proporcionalidade, o livro apresenta um exemplo da relação entre perímetro e a medida do lado de um quadrado comentando: “Quando duas grandezas estão relacionadas por meio de uma função linear, dizemos que essas grandezas são diretamente proporcionais” (LONGEN, 2003, p. 166).

Infelizmente não aparece nenhuma representação gráfica para ilustrar esse fato de que acréscimos iguais em x provocam acréscimos iguais em y.

LIVRO 3 – Matemática 1ª série. GUELLI, Oscar

No capítulo reservado à função polinomial de 1º grau não existe nenhuma alusão aos conceitos de taxa de variação, coeficiente angular ou declividade. O coeficiente a não recebe nome especial. O mesmo vale para o coeficiente b.

Ainda, não há nenhuma observação sobre o significado geométrico dos coeficientes angular e linear da função afim neste capítulo.

Entretanto, no capítulo anterior reservado ao plano cartesiano o autor aborda a declividade de um segmento.

Neste capítulo, o autor inicia o estudo apresentando a figura abaixo citando: “A idéia de declividade (ou inclinação) de um segmento é sugerida pelas figuras.” (GUELLI, 2004, p. 14).

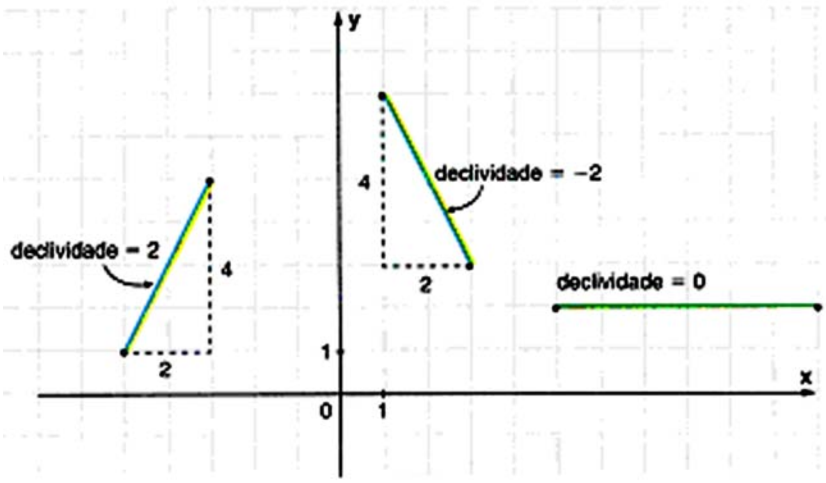


Figura 41. Ilustração de declividades.
Fonte: GUELLI, 2004, p. 14

A partir destes exemplos particulares, o autor define: “se o segmento P_1P_2 não é vertical, a declividade *m* de P_1P_2 é:” (GUELLI, 2004, p. 14).

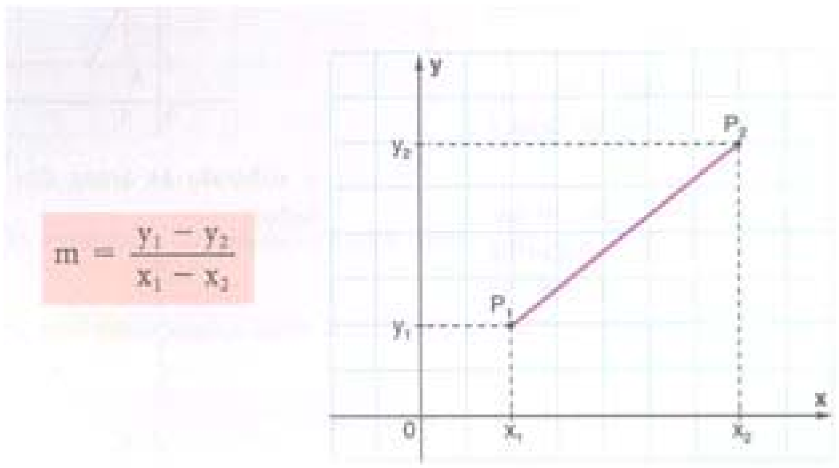


Figura 42. Representação algébrica e representação gráfica de declividade.
Fonte: GUELLI, 2004, p. 14

Explicita a inexistência de declividade de segmentos verticais através de constatação algébrica pois “neste caso, o denominador é igual a 0 e a fórmula da declividade não representa um número” (GUELLI, 2004, p. 14).

O autor prossegue expressando-se em linguagem natural: “se um segmento se eleva da esquerda para a direita, a declividade é positiva, se se eleva da direita para a esquerda, a declividade é negativa” (GUELLI, 2004, p. 15).

Assim, para declividades positiva e negativa, existe então uma articulação entre a variável visual *sentido de inclinação*, com valores *ascendente da esquerda para a direita* e *descendente da esquerda para direita* e a sua correspondente algébrica sinal do *coeficiente angular* cujo valor é o respectivamente *sinal+* e *sinal-*.

Não encontramos também neste capítulo, reservado ao estudo do plano cartesiano, nenhuma referência à taxa de variação ou coeficiente angular da função afim. Como no capítulo sobre função afim, que estamos investigando, não há menção ao que foi abordado anteriormente no capítulo do plano cartesiano, a obra pressupõe que o leitor tenha a capacidade de relacionar esses conceitos para perceber que a declividade *m* nada mais é que o coeficiente a da função afim.

Além de não haver destaque algum quanto ao significado gráfico ou numérico dos coeficientes angular e linear, o autor não relaciona a declividade com a tangente trigonométrica do ângulo que o gráfico faz com o eixo Ox.

4.5 Considerações sobre os aspectos visuais e textuais

Hoje na nossa sociedade o cidadão comum se depara invariavelmente com um volume de informações que são essenciais na sua vida do dia a dia. Nesse contexto, é inegável a importância das representações gráficas e da diversidade de gêneros textuais relacionados ao conceito de função, sejam eles matérias de revistas, de jornais, ou até mesmo da TV, entre tantos outros.

No entanto, os conceitos e propriedades matemáticas são temas abstratos e requerem uma compreensão do significado e sua aplicabilidade. Então, é importante que asseguremos essa compreensão desses conceitos quando o leitor é exposto a uma informação sobre juros, ou sobre a leitura de uma pesquisa eleitoral por exemplo.

A análise dos livros, do ponto de vista visual e textual, levou em consideração as sequências dos conteúdos conceituais apresentados sob esse viés. Seguem abaixo as considerações sobre esse trabalho.

De forma geral os três livros fizeram uma introdução ao conceito de função de forma contextualizada com exemplos do cotidiano. No entanto, o livro 1 foi disparadamente mais rico em exemplos e na diversidade de registros de representação (língua natural, gráficos, tabelas, expressões algébricas), sinalizando para o leitor um panorama geral do que vem pela frente. Quando observamos o livro 2, não encontramos estas qualidades em igual número. Já o livro 3 praticamente não as tem.

Durante a explanação do conteúdo teórico, percebemos também que os livros 1 e 2 relacionaram de alguma forma o tema em estudo com outras áreas de conhecimento. O livro 3 passou distante desta preocupação.

Especificamente sobre a introdução da função afim, o livro 3 foi o único que não utilizou qualquer tipo de contextualização. O fator do contexto é determinante, pois mostra ao leitor a importância do tema que irá estudar, podendo inclusive identificá-lo em situações do seu cotidiano.

Os textos dos livros 1 e 2 não apresentam uma linguagem rigorosa nem excessivamente formal e a simbologia é a consagrada pala maioria dos livros didáticos.

Com relação aos gráficos, a nossa experiência como educadores em sala de aula tem nos mostrado que um dos pré-requisitos para abordar o conceito de função é o plano cartesiano, fato esse corroborado por vários autores de livros didáticos. Nessa linha de trabalho, apenas os livro 1 e 3 têm um capítulo imediatamente anterior ao de função reservado sobre o assunto.

O livro 1, ao longo da explanação teórica retoma a todo o instante o conceito de plano cartesiano, até porque utiliza sobejamente esse sistema de referência nas representações gráficas como figura fundo, quando aborda os critérios analisados.

Analisando o livro 1 foi possível então constatar a lógica utilizada pelas autoras no desenvolvimento teórico dos conceitos.

Utilizando língua natural com ponto de partida, as autoras vão construindo o conceito articulando gráfica e algebricamente as situações apresentadas até atingir a linguagem lógico matemática. Assim, embora utilizem inicialmente o método de pontuar para explicar e traçar o gráfico, superam-no quando demonstram que o gráfico de uma função afim é uma reta e que dois pontos quaisquer são suficientes para defini-la. A partir daí, os objetivos e finalidades são subentendidos no texto didático.

Configura-se então no livro 1 uma articulação de conteúdos com a mesma lógica conceitual de construção, notadamente quando coordena as variáveis visuais com suas correspondentes algébricas com o auxilio da língua natural. Embora o procedimento da apreensão global preconizado pela teoria dos registros de representação semiótica não seja explicito no texto didático, ele está presente segundo a maioria dos critérios utilizados por nós.

O livro 2 supõe que o leitor tenha presente o conceito de plano cartesiano estudado no ensino fundamental, pois além de comentar isso no seu texto, o autor não apresenta nenhum tópico sobre pano cartesiano.

O caráter conceitual dos conteúdos é exposto através de estratégias semelhantes às do livro 1. Embora a maioria dos critérios introduzidos por nós não seja verificada, é possível observar alguns cuidados que o autor teve no traçado gráfico. Utiliza o método de pontuar e destaca o tratamento algébrico e gráfico do coeficiente linear. É possível perceber alguma articulação entre registros de representação como é o caso do coeficiente linear.

O texto busca em alguns momentos justificar em língua natural alguns dos quesitos que utilizamos com princípios para definir nossos critérios como por exemplo, quando tenta justificar que o gráfico de uma função afim é uma reta.

Embora o autor explore razoavelmente alguns conteúdos, o faz com menos detalhes e esclarecimentos que o livro 1. Apesar disso, o livro pode ser considerado correto embora incompleto.

No trato da função afim, o livro 3 não apresenta conexão com os conceitos prévios vistos no capítulo de plano cartesiano, pois não retoma em momento algum o conceito de declividade. Perde a oportunidade de explorar a declividade, tratada algébrica e graficamente, para definir o coeficiente angular e articulá-lo com as variáveis visuais *sentido de inclinação* e *ângulo com os eixos*, já que fala em declividade positiva e negativa. Também poderia aproveitar o conteúdo introduzido para falar sobre função crescente e decrescente.

Embora utilize dois pontos genéricos do plano para obter a equação da reta não vertical, o texto também não esclarece que quaisquer dois pontos genéricos são suficientes para defini-la.

O tratamento gráfico no livro 3 é pobre pois apresenta apenas um exemplo neste registro, em que utiliza o método de pontuar para sair da representação algébrica para a representação gráfica; muito longe da apreensão global defendida por Duval (2003).

Em nenhum momento do estudo de função afim do livro 3, o autor contextualiza graficamente algo do cotidiano para mostrar a sua relevância. De forma implícita, tenta relacionar o registro gráfico da função afim com outros objetos matemáticos, como é o caso da relação com a geometria analítica no estudo de plano cartesiano, embora o faça timidamente.

Pareceu-nos que no livro 3, com o objetivo de simplificar a linguagem, nada é sistematizado, até mesmo a raiz ou zero da função tratada visualmente, ou seja, o livro 3 no seu desenvolvimento teórico, não conduz o leitor à definição de raiz.

Assim, no nosso entendimento fica evidente que o conceito de função afim foi negligenciando.

Podemos constatar então que em termos de diversidade de gêneros e tipos textuais, o livro 1 levou vantagem sobre os demais. Os seus textos são claros e permeados com vários registros de representação. As figuras ocupam um papel importante, pois funcionam como um meio e não um fim.

Diríamos então que o livro 1, preferencialmente, por promover uma articulação de registros mais efetiva, está mais próximo da teoria dos registros de representação semiótica de Duval (2003). O livro 2 fica atrás do livro 1. Já no livro 3 a articulação dos registros de representação praticamente não existe.

Faltou um pouco mais de rigor no texto matemático relativo aos conteúdos e critérios por nós introduzidos em nossa análise de forma geral. Assim mesmo, o livro 1 também leva vantagem sobre os demais; por exemplo, seria adequado estabelecer relações entre os diferentes significados das idéias estudadas, como por exemplo com a geometria analítica e a trigonometria, no caso aqui, coeficiente angular nos livros 1 e 2 e declividade no livro 3, com a tangente trigonométrica que consideramos importante.

CAPÍTULO 5. ANÁLISE DOS EXERCÍCIOS

5.1 Análise do corpo de exercícios

Como complementação da análise dos livros didáticos, reservamos este capítulo para descrever os resultados do nosso estudo sobre os exercícios que fazem parte do tópico relativo à função afim e que compõem o que chamamos de corpo de exercícios.

Vale salientar que consideramos corpo de exercícios, aqueles designados como exemplos resolvidos, problemas, atividades ou simplesmente exercícios concernentes às seções dos livros sobre função afim.

Acreditamos que os exercícios são ferramentas importantes e eficientes para o ensino da matemática, pois têm a peculiaridade de permitir ao leitor a oportunidade de pensar, refletir, concluir e tomar decisões, entendendo e compreendendo dessa forma aquilo que se propôs a estudar.

Para investigar os exercícios presentes nos livros, levamos em consideração os critérios de análise descritos anteriormente no capítulo 4, no que diz respeito à função afim que têm como suporte teórico os registros de representação semiótica de Duval (2003), bem como as orientações dos PCN (1998).

Queremos também estudar se os exercícios expostos estão pautados no desenvolvimento teórico do conteúdo apresentado pelos autores.

Abaixo, segue a tabela-resumo da análise dos exercícios, onde estão descritas as transformações e os diferentes registros de representação presentes na totalidade dos exercícios do capítulo sobre função afim de cada um dos livros analisados. Vale lembrar que embora não apareçam na tabela, estão implícitas as variáveis cognitivas de cada registro.

Tabela 9. Resumo das Transformações exigidas na resolução dos exercícios de Função Afim.

			Livro 1			Livro 2			Livro 3		
Tratamento	Algébrico				12			2			
Conversão	Ling. Natural→ Repr. Algébrica	Congruente	5	6	23	3	3	8	1	1	6
		Não congruente	1								
	Ling. Natural→ Repr. Gráfica	Congruente	1	1			1				
		Não congruente				1					
	Repr. Algébrica→ Repr. Gráfica	Congruente	11	11			1		1	1	
		Não congruente				1					
	Repr. Gráfica→ Repr.Algébrica	Congruente	2	2		3	3		1	1	
		Não congruente									
	Ling.Natural → Rep. Alg. / Rep. Graf.	Congruente	1	3					3	3	
		Não congruente	2								
	Total de exercícios				35			10			6

LIVRO 1. Matemática 1. SMOLE, Kátia S. e DINIZ, Maria I.:

Dentre os exercícios apresentados no livro, é possível perceber que o número de conversões, 65,7%, é maior do que o de tratamentos, 34,3%.

Embora para Duval (2003) as conversões sejam o tipo de transformação mais eficaz para a aquisição de conhecimento e as autoras fazem uso adequado delas, como iremos comentar mais adiante, reconhecemos que os exercícios que exigem tratamentos exploram propriedades importantes expostas no conteúdo. Vejamos alguns exemplos:

Exercício 20

Indique uma equação que representa uma reta paralela a:

a) $y = 2x - 7$ b) $y = -\frac{1}{2}x + 3$ c) $y = - 4x + 1$ e que passe pelo ponto (0,3)

Tarefas assim, além de exigirem o reconhecimento da expressão algébrica da função afim na forma $y = ax + b$, com $a \neq 0$ usada palas autoras na definição, mobilizam as variáveis cognitivas específicas do funcionamento do registro apresentado, no caso algébrico. Além disso, o leitor tem que entender a contrapartida no registro gráfico, pois é desta forma que é possível perceber as unidades de significado que devem ser levadas em consideração. Neste caso, o coeficiente angular que está associado à variável visual <u>ângulo com os eixos</u> não muda e o valor do coeficiente linear, que está associado à variável visual <u>posição do</u>

<u>*traçado em relação à origem do eixo vertical*</u> é indiferente, pois não é este que será mobilizado.

Exercício 26

Classifique em crescente ou decrescente as seguintes funções de domínio |R.

a) $f(x) = (\sqrt{3} - 1)x$ c) $f(x) = (\pi - 4)\, x$

b) $f(x) = (1 - \sqrt{2})x$ d) $f(x) = (2 - \sqrt{3})x$

Exercícios assim têm o seu tratamento algébrico respaldado no livro, já que este na sua exposição teórica prova que se a > 0 => f é crescente e, se

a < 0 => f é decrescente.

Com relação às conversões, é possível perceber que o livro prioriza um dos sentidos: o da representação algébrica para a apresentação gráfica.

Foi possível constatar ainda que o livro explora as múltiplas representações do objeto matemático em estudo, já que foram utilizados diferentes registros de representações.

Outra constatação importante e que completa o que foi escrito acima, é a diversidade dos sentidos de conversão. É transparente na obra o que Duval (2003) defende sobre sequência de exercícios quando se trata de articulação entre dois registros: devem-se promover os dois sentidos de conversão e, para cada sentido de conversão, devem existir exercícios que contemplem casos de congruência e de não-congruência. No caso do fenômeno de não-congruência, encontramos apenas 8,5% de exercícios.

Além da importância dos aspectos de congruência, identificamos nos exercícios propriedades importantes descritas no conteúdo do livro, conforme os exemplos abaixo.

Exercício 8

Obtenha a função de 1º grau cujo gráfico passa por:

a) A(0,3) e B(-1,2,) c) C(3,7) e D(0,0)

b) K(1,6) e L(-2,-3) d) M(-1,3) e N(0,0)

O fato de dois pontos serem suficientes para determinar uma reta que é gráfico de uma função de 1º grau, propriedade destacada pelas autoras, é explorado neste tipo de exercício, inclusive com o par de pontos em quadrantes diferentes.

Exercício 10

Determinar a função f cujo gráfico é a reta r nos casos abaixo:

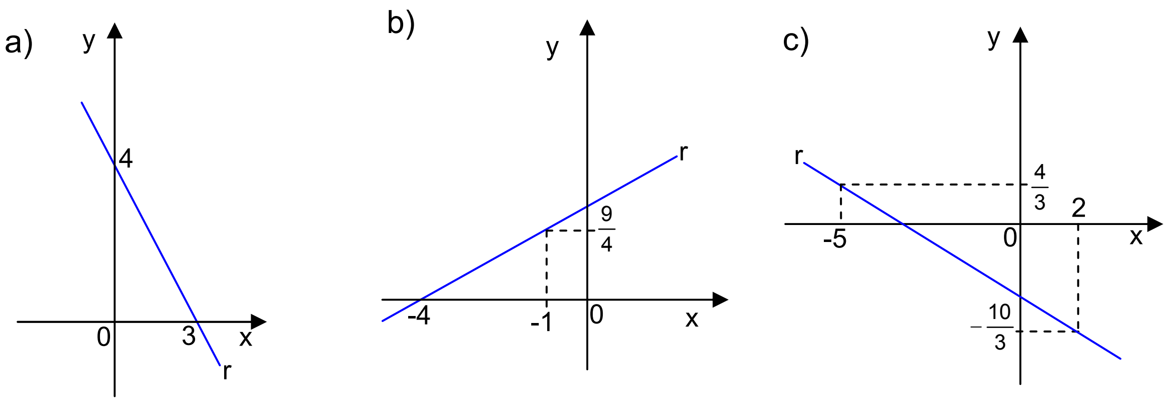


Figura 43. Gráficos de exercícios
Fonte: SMOLE e DINIZ, 2005, p.112

Este é o tipo de conversão (Gráfica → Algébrica), de caráter congruente, que exige a articulação entre as variáveis visuais dos gráficos (inclinação, intersecção com os eixos, etc.) e a contrapartida dos valores escalares da expressão algébrica (coeficientes angular, linear e seus valores positivos e negativos).

Embora os coeficientes da equação possam transparecer a partir das variáveis visuais do registro de saída, é necessário sair da figura-forma (reta) através de valores numéricos obtidos na figura fundo (plano cartesiano) para encontrar a equação.

Exercício 13

Uma papelaria cobra R$ 0,10 por página xerocada, caso o número de páginas seja inferior a 50. Se o número de páginas for superior a 50, o custo por página adicional passa ser R$ 0,08. Esboce o gráfico do custo total (C) para copiar x páginas.

Na conversão, as variáveis identificadas como pertinentes no registro em língua natural *R$ 0,10 por página xerocada caso o número de páginas seja inferior ou igual a 50* e *superior a 50, o custo por página adicional passa a ser R$ 0,08*, não são espontaneamente mobilizadas com as variáveis pertinentes da expressão algébrica. Essa falta de transparência no registro terminal a partir do registro de saída é que caracteriza a conversão exigida no exercício como não-congruente.

A importância da conversão do registro em língua natural para o registro gráfico está na modelagem contextualizada de um problema do cotidiano preconizado nos PCN. Aliado a isso, acrescentamos o caráter de não-congruência na transformação.

Exercício 14

Um trabalhador recebe R$ 900,00 por 15 horas de trabalho.

a) Calcule o seu salário-hora médio.

b) Determine a relação que permite calcular o seu salário (S) em função do número de horas trabalhadas (h).

c) Construa a representação gráfica da função definida para $0 \leq h \leq 20$ (use 1 cm para cada 2 horas no eixo horizontal e 1 cm para cada R$ 100,00 no eixo vertical).

d) Determine graficamente:
   - o salário correspondente a 10 horas de trabalho;
   - o número de horas correspondente a um salário de R$ 750,00.

   Verifique se os resultados obtidos estão corretos efetuando os cálculos.

e) O trabalhador gastou R$ 112,50 com alimentação. Qual a porcentagem do salário de R$ 900,00 que isso representa?

Para a resolução do exercício, há necessidade de duas conversões. A primeira, do registro em língua natural para o registro algébrico (item b), exige inicialmente um tratamento aritmético (item a). Por esse motivo, a primeira conversão tem caráter não-congruente, já que é difícil coordenar as variáveis pertinentes do registro em língua natural (registro de saída) <u>*recebe R$ 900,00*</u> e <u>*por 15 horas trabalhadas*</u>, com as variáveis do registro algébrico (registro de saída). Já a segunda conversão (item c), do registro algébrico para o gráfico, tem característica congruente.

A riqueza da diversidade dos registros de representações está explicitada de forma harmoniosa com a contextualização do problema. Os vários sentidos de conversões como instrumentos para o entendimento do objeto matemático têm as suas características de congruência, e de não-congruência também contempladas.

Com relação às orientações institucionais, além da contextualização já comentada, o exercício explora a construção e principalmente a leitura do gráfico (item d), assim como associa o tema função a outros temas da matemática como é o caso do conceito de porcentagem (item e).

Exercício 17

As funções y = x, y = x - 1, y = x + 1 e y = x + 1,5 foram representadas abaixo:

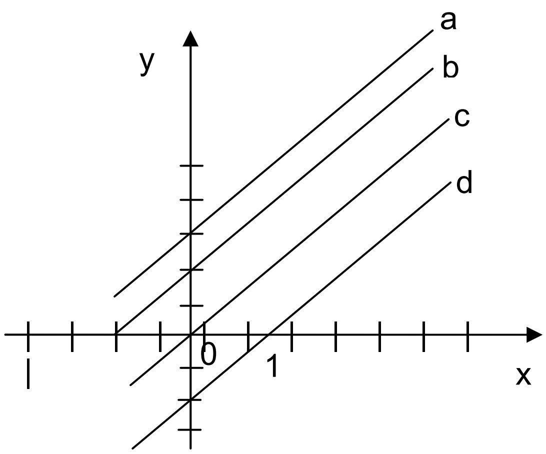


Figura 44. Gráfico de exercícios

a) Faça corresponder a cada reta do gráfico a respectiva função.

b) Dê as coordenadas de dois pontos do plano que pertençam a cada uma das retas.

c) Indique as coordenadas do ponto de intersecção de cada reta com o eixo das ordenadas.

d) Em que ponto cada reta intercepta o eixo das abscissas?

e) Qual a posição relativa das retas?

Exercício 19

a) Represente, num mesmo sistema de eixos coordenados, as funções f: |R→|R:
b) y = 4x y = 4x + 1 y = 4x - 1 y = 4x + 2 y = 4x – 2
c) Qual a posição relativa das retas obtidas?
d) Qual o coeficiente angular de cada reta?
e) Qual a relação que existe entre o coeficiente angular e a posição das retas?

Nestes dois exercícios tipicamente tecnicistas, as conversões são de características congruentes. Para a transformação ter sucesso, o leitor terá que articular as variáveis pertinentes de cada registro de representação: as variáveis visuais dos gráficos (inclinação, intersecção dos eixos, etc.) e as variáveis algébricas da equação (coeficientes positivos ou negativos). Os exercícios exigem do leitor a capacidade de reconhecer no que diferem as representações e suas variáveis significativas, ou seja, o que uma variável visual influencia na sua contrapartida algébrica e vice-versa. No caso dos dois exercícios, o *coeficiente angular* – *ângulo com os eixos* é o mesmo, só mudando o *coeficiente linear* – *posição do traçado em relação à origem do eixo vertical.* No exercício 17 item c, salientamos ainda a necessidade de reconhecer o coeficiente linear como a intersecção da reta com o eixo das ordenadas. Esta atividade encontra respaldo no desenvolvimento teórico, já que as autoras tratam o coeficiente linear visualmente.

LIVRO 2. Matemática: uma atividade Humana. LONGEN, Adilson:

No livro, o número de exercícios que exigiram tratamento representa 20% do total contra 80% daqueles onde a conversão é exigida.

Com relação aos tratamentos, destacamos:

Exercício 1

Considere f: |R → |R uma função afim da forma f(x) = mx + n. Considerando que f(120) = 370 e f(330) = 1000, calcule f(250).

Este exercício nos parece meramente tecnicista. Explora apenas algebricamente a fórmula usada na definição de função afim, mas passa longe da parte conceitual, ausente no livro, que é o fato de que dois pontos são suficientes para definir uma função afim. No entanto, a utilização de cálculos para encontrar a equação a partir de valores numéricos exige do leitor o reconhecimento das varáveis envolvidas (coeficiente angular m e coeficiente linear n) na representação algébrica.

Para os exercícios que exigem conversões, existe uma distribuição equilibrada entre aquelas de registros de representação em língua natural para registros de representação algébrica (30%) e as das representações gráficas para as representações algébricas (30%).

Da mesma forma que no livro anterior, os exercícios também exploram a multiplicidade de representações, o que é relevante sob o ponto de vista dos registros de representação semiótica de Duval (2003), associando-as a problemas do cotidiano, como orientam os PCN. Quando observados sob o viés do fenômeno de não-congruência, são 20% os exercícios com estas características.

Vejamos então alguns dos exercícios analisados, inclusive com relação às propriedades descritas no conteúdo teórico do livro.

Exercício 3

Em uma loja de roupas, o salário fixo do vendedor é de R$ 200,00. Além disso, ganha 2 reais por peça de roupa vendida. Escreva a lei de formação da função que relaciona o salário bruto S em função do número n de peças vendidas.

A conversão da representação do registro em língua natural para o registro algébrico neste exercício tem característica congruente. A representação algébrica transparece a partir da linguagem natural, pois está próxima de uma codificação.

Exercício 6

Sendo f: |R → |R uma função afim definida por f(x) = mx + n, conforme o gráfico a seguir. Indique por V as afirmações verdadeiras e por F aquelas que são falsas.

I) o gráfico de f passa pelo ponto (2;4)

II) m = 2n

III) f(x)>0 para x> -2

III) $[f(x)]^2 = x^2 + 4x + 4$

IV) f(-2).f(2) = 0

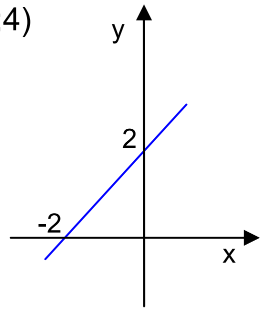


Figura 45. Gráfico de exercícios
Fonte: LONGEN, 2003, p. 168

O exercício acima cuja conversão (Gráfica → Algébrica) é congruente, exige que se leve em consideração, de um lado, as variáveis visuais do gráfico (inclinação, intersecção com os eixos, etc.) e do outro, os valores dos coeficientes da expressão algébrica (coeficiente angular e linear). No entanto, apenas o valor do coeficiente linear transparece na conversão a partir da variável visual *posição do traçado em relação à origem do eixo vertical*. Vale lembrar que o livro trata o coeficiente linear algebricamente, concomitante com a parte visual. Já a raiz ou zero da função só recebe atenção na parte visual. Então, para determinar o coeficiente angular e assim encontrar a expressão algébrica completa, o leitor terá que sair da figura forma (reta) marcada na figura-fundo (plano cartesiano), efetuando cálculos a partir dos dois valores numéricos.

Exercício 10

O imposto de renda (IR) a ser pago mensalmente é calculado com base na tabela da Receita Federal, da seguinte forma:

- sobre o rendimento-base aplica-se a alíquota correspondente;
- do valor obtido, subtrai-se a "parcela a deduzir";
- o resultado é o valor do imposto a ser pago.

Descubra qual é a tabela vigente do IR e construa o gráfico correspondente.

Este exercício totalmente contextualizado, cuja conversão (Língua Natural → Representação Gráfica) é de caráter não-congruente, enquadrando-se no tipo que Duval (2003) considera importante na sequência de atividades. Para o autor, a falta de transparência do registro terminal (gráfico) dificulta a coordenação espontânea entre os dois registros, exigindo assim, um esforço cognitivo maior que leva ao entendimento do conceito.

As variáveis pertinentes do registro em língua natural <u>*rendimento base*</u>, <u>*alíquota correspondente*</u>, <u>*parcela a deduzir*</u> e <u>*imposto a ser pago*</u> são difíceis de serem mobilizadas na coordenação desse registro de saída com as variáveis visuais (inclinação, intersecção com os eixos, etc.) do registro terminal (gráfico). É necessário então efetuar duas conversões: da representação em língua natural para representação algébrica e desta para a representação gráfica, que torna portanto, o exercício de característica não-congruente.

LIVRO 3. Matemática 1ª série. GUELLI, Oscar:

Na análise do livro 3 percebemos que a totalidade dos exercícios exige conversões. No entanto, nenhuma delas apresenta características de não-congruência consideradas fundamentais para compreensão do conceito, no caso, função afim, dentro da teoria dos registros de representação semiótica. Vejamos os resultados da análise de alguns dos exercícios:

Exercício 9

Trace o gráfico e determine a raiz de cada função.

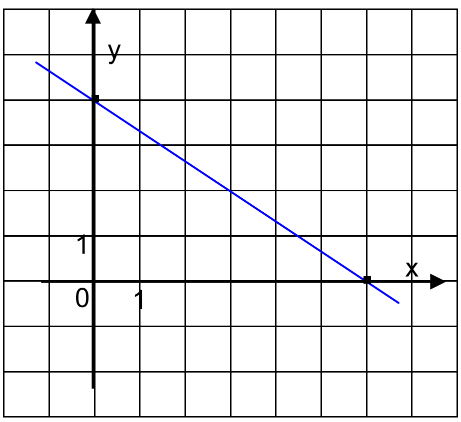
a) $f(x) = -2x$
b) $g(x) = -2x + 5$
c) $h(x) = 1 - \frac{x}{2}$

As conversões da representação algébrica para a representação gráfica são de caráter congruente. No desenvolvimento teórico do livro o autor pressupõe que o leitor estabeleça a relação de declividade explicitada anteriormente na obra, com o coeficiente angular, e assim reconheça valores das variáveis visuais *sentido de inclinação* e *ângulo com os eixos*. Assim, é possível articular o traçado (ascendente ou descendente), bem como sua inclinação com o coeficiente angular. Já com relação ao coeficiente linear, como o livro não trata nem menciona tal termo, cabe ao leitor assinalar pontos na figura-fundo (plano cartesiano) para traçar a reta (figura-forma) através de valores numéricos obtidos a partir da expressão algébrica. O fato de o autor tratar visualmente a raiz da função ajuda na resolução do exercício. No entanto, é importante destacar os exercícios a e b por permitirem verificar quais variações no registro de partida (algébrica) provocam modificações no registro de saída (gráfico), no caso variações do *coeficiente linear* provocam alterações na *posição do traçado em relação à origem do eixo*.

Exercício 10

Expresse as funções mediante a fórmula $y = ax + b$

a)



b)

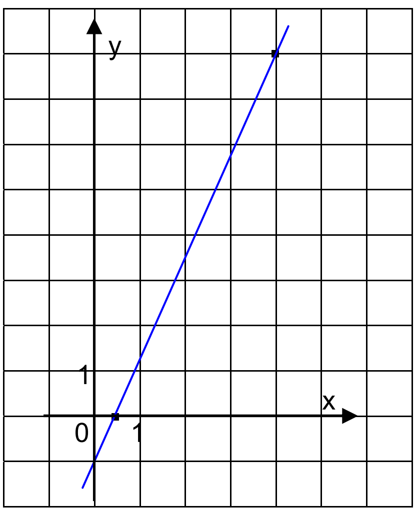


Figura 46. Gráfico de exercícios
Fonte: GUELLI, 2004, p. 36

Este exercício requer uma conversão (Representação Gráfica → Representação Algébrica) que tem caráter congruente, pois é possível enxergar o registro de saída (expressão algébrica). Exige, no entanto a coordenação das variáveis visuais do gráfico (inclinação, intersecção com os eixos, etc.) com as suas correspondentes variáveis algébricas da fórmula (coeficiente angular e linear).

Embora sob o ponto de vista da teoria dos registros de representação semiótica a variável visual *posição do traçado em relação à origem do eixo vertical* tenha seu valor correspondente na expressão algébrica como *coeficiente linear*, transparecendo dessa forma no exercício, o livro no seu desenvolvimento teórico, não trata o coeficiente linear visual nem algebricamente. Já para encontrar o valor do *coeficiente angular* na expressão algébrica que tem o seu valor associado à variável visual *ângulo com os eixos*, há necessidade de sair da figura forma (reta) assinalada na figura funda (plano cartesiano) efetuando cálculos a partir dos valores numéricos dos pontos.

Exercício 12

Uma agência de aluguel de automóveis cobra R$ 40,00 por dia mais R$ 0,50 por quilômetro rodado.

a) Expresse o custo do aluguel de um automóvel em função do número de quilômetros rodados e trace o gráfico.

b) Quanto custa alugar um automóvel para uma viagem de um dia, percorrendo 200 km?

c) Uma pessoa pagou R$ 89,00 pelo aluguel de um automóvel por um dia. Quantos quilômetros rodou?

Cabe aqui um comentário sobre o enunciado envolvendo o item a. Consideramos que a expressão do custo do aluguel solicitado é para um dia apenas, embora isso não esteja expresso no texto. Caso contrário, o exercício estaria fora do contexto da função afim.

Na análise deste tipo de exercício, que é associado a problemas do cotidiano, (maioria no livro), para resolver o item a, consideramos dois momentos envolvendo as conversões: inicialmente a conversão do registro em língua natural para o registro algébrico e a conversão do registro algébrico para o registro gráfico.

Na primeira conversão, as variáveis identificadas como pertinentes são *cobra R$ 40 por dia* e *R$ 0,50 por quilometro rodado*. Elas são mobilizadas na coordenação espontânea desse registro com o registro algébrico; a primeira variável com o *coeficiente linear* e a segunda com o *coeficiente angular* da expressão algébrica. Pela espontaneidade da conversão, ela é do tipo congruente.

Na segunda conversão, também de caráter congruente, são tomadas como variáveis pertinentes os parâmetros da expressão algébrica (coeficientes) que serão articulados com as variáveis visuais (inclinação, intersecção com os eixos, etc.). Valem aqui as mesmas observações feitas no exercício anterior sobre a localização de posições na figura fundo (plano cartesiano) correspondentes a valores numéricos a partir de uma equação e que resultam na figura-forma (reta).

Para resolver os itens b e c o exercício exige tratamento dentro do campo algébrico. Outra possibilidade seria a construção do gráfico (item a) de tal forma a permitir uma leitura precisa, utilizando, por exemplo, papel milimetrado. Este tipo de leitura é incentivado pelas orientações curriculares dos PCN (1998).

5.2 Considerações sobre a análise dos exercícios

Como comentamos no início deste capítulo, a análise dos exercícios envolveu a teoria dos registros de representação semiótica, a coerência com o conteúdo exposto nos livros, permeada com os critérios descritos no capítulo 4 e as recomendações dos PCN.

- Com relação à teoria dos registros de representação semiótica:

Para Duval (2003) é importante que se estude primordialmente as conversões e não os tratamentos. Então, quando comparados, o livro 3 apresenta seis exercícios com essa característica contra oito do livro 2 e vinte três exercícios do livro 1. Isso representa um total de 100%, 80% e 65,7% respectivamente do total de transformações de cada livro.

Conforme a tabela-resumo, verificamos que o livro 1 com onze exercícios prioriza a conversão do registro algébrico para o registro gráfico, representando um total de 47,8% das conversões. De certa forma, isso não constitui uma novidade já que outros estudos que investigaram o assunto, comentados em nosso trabalho, apontaram o mesmo resultado. No entanto, isso não acontece nos livros 2 e 3, pois apresentaram apenas um exercício cada o que representa 12,5% e 16,7% respectivamente de suas conversões.

Já quando pesquisadas as conversões da representação gráfica para a representação algébrica, enquanto o livro 2, com três exercícios apresentou 37,5%, o livro 1 com dois exercícios e o livro 3 com um exercício, apresentaram respectivamente 8,7% e 16,7% do total de conversões, o que é muito pouco.

Para Duval (2003), uma das características importantes da atividade matemática é a diversidade dos registros de representação semiótica que ela mobiliza obrigatoriamente, bem como uma multiplicidade de sentidos de conversão. Então, quando observamos a tabela-resumo das transformações do capítulo 5.1., constatamos que todos os livros de certa forma contemplam essa diversidade e multiplicidade.

Sobre os fenômenos de não-congruência que os exercícios devem apresentar no sentido de conversão, percebemos que apenas o livro 1 com três atividades e o livro 2 com duas atividades o fazem. Isso representa 13% e 25% respectivamente do total de conversões de cada livro. Vale lembrar que Duval (2003) considera esta característica um obstáculo positivo à coordenação espontânea entre registros, levando dessa forma o leitor ao entendimento do conceito.

Destacamos ainda outra característica das conversões entre a representação algébrica e a representação gráfica e vice-versa que são os fenômenos de congruência e não-congruência evidenciados pelos livros 1 e 3 ao apresentarem atividades que permitissem perceber as variações no registro de saída que provocam concomitantemente uma variação no registro de chegada. Elas auxiliam no entendimento da coordenação dos diferentes registros. Para Duval (2003) esse método permite discriminar as variáveis cognitivamente importantes. Para ilustrar podemos citar do livro 1 os exercícios 17 (exposto), 18, 19 (exposto), 22 e no livro 3 o exercício 9 (exposto). No livro 2 não existem exercícios com essa característica.

Já os tratamentos, que ocupam o papel de coadjuvante na teoria de Duval (2003), muitas vezes são importantes não só por viabilizarem algumas conversões já comentadas em exemplos, como também por sedimentarem propriedades descritas no texto teórico, É o caso do livro 1 que explora melhor que os outros dois livros essa potencialidade. Para ilustrar poderíamos indicar os exercícios 1 (raiz ou zero da função), exercício 8 (gráfico de função afim é uma reta), exercício 21 (coeficiente angular) e exercício 26 (a>0 => função crescente, a<0 => função decrescente), entre outros.

- Com relação à coerência entre o conteúdo teórico exposto no livro e os exercícios:

As atividades envolvendo exercícios pressupõem que devam ter como objetivo a sedimentação do conteúdo aprendido, assim como potencializá-lo como ferramenta da vida prática do cotidiano.

Ao olharmos o corpo de exercícios como um todo, destacamos de imediato a presença no livro 1 de uma série de 5 exercícios resolvidos, o que não existe nos outros dois. Esta série de exercícios funciona como um tipo de ajuda prática, proporcionada logo após a apresentação do conteúdo teórico. É como uma prática guiada que é retirada assim que o leitor assume o controle.

O livro 1 também explora convenientemente os conceitos expostos no texto didático. Talvez pelo fato do conteúdo expositivo do livro 1 ser mais completo que os demais, ele apresenta não só um diversidade como um número bem maior de exercícios. Embora os exercícios não precisem ser necessariamente muitos, é conveniente que exista um número suficiente e adequado para exercitação e aplicação dos conceitos.

Apesar do livro 2 apresentar uma articulação do conteúdo teórico com os exercícios, peca pelo baixo numero de atividades. O conteúdo teórico deveria ser explorado em mais exercícios.

No livro 3 os exercícios também são em pequeno número. Além disso, são de uma complexidade não condizente com os conceitos expostos no texto teórico. Parece, portanto, não haver conexão entre o conteúdo teórico e os exercícios.

Em nenhum dos livros identificamos alguma ordem de dificuldade de exercícios nem de simples repetição. Apenas o livro 3 apresenta um exercício de desafio, o que é uma pena. Este tipo de atividade quando aplicado a contextos diferenciados como é caso do Imposto de renda, exige do leitor, além da sua independência, competências no domínio do conteúdo estudado

Com relação aos exercícios envolvendo gráficos, o livro 1 apresenta dezessete deles o que é um número expressivo. O livro 2 e o livro 3 apresentam cinco exercícios. No entanto quando esses números são comparados com o total de atividades propostas, o livro 3 apresenta 83,3% dos seus exercícios envolvendo gráficos, contra 48,6% do livro 1 e 50% do livro 2. Isto aparenta ser uma desarticulação com a construção conceitual do conteúdo no livro 3, já que na sua explanação teórica não existe nenhum tópico especifico sobre gráfico da função afim

- Com relação às recomendações dos PCN:

Nas suas recomendações, os PCN são muito claros em relação à matemática como já comentamos no capítulo 1, particularmente no que se refere ao objeto matemático em estudo – função afim.

Notadamente, uma das recomendações gerais preconizadas pelos PCN é a contextualização dos conteúdos estudados. Exercícios de mera aplicação ou fixação são insuficientes.

Dessa forma, entendemos que para compreensão do significado e da funcionalidade de conceitos aprendidos, os exercícios devem estar vinculados à capacidade do leitor em utilizar esses conhecimentos em outros contextos que não sejam os estritamente escolares, ainda que consiga relacioná-los a outros campos de conhecimento (Física, Biologia, Economia, etc.), ou mesmo a outros objetos matemáticos.

Quando observados sob este viés de contextualização, tanto o livro 1 como o livro 3 propõem quatro exercícios. Já o livro 2 apresenta 6 atividades contextualizadas. No entanto, se comparados proporcionalmente os números de exercícios contextualizados, o livro 1 infelizmente propôs apenas 11,4% deles, ao passo que os livros 2 e 3 ao contrário do livro 1 apresentaram respectivamente 60% e 66,7%.

Quando observamos a contextualização especificamente envolvendo gráficos, fomos surpreendidos com o livro 1. Explora pouca a leitura de gráficos contextualizados, restringindo-se apenas a leituras pontuais. Era de se esperar mais já que as autoras além de introduzirem a função de 1º grau utilizando um gráfico contextualizado, fazem menção à importância da sua leitura por permitir obter informações menos perceptíveis em uma fórmula.

Deparamo-nos então com aspectos aparentemente antagônicos: se por um lado o livro 1, mostra um cuidado das autoras com relação à discussão dos conteúdos de forma geral, por outro lado os exercícios contextualizados não expressam em número essa preocupação. Já os livros 2 e principalmente o 3, que não apresentam essa preocupação, superam o livro 1 nesse aspecto.

Assim, os exercícios de forma geral fugiram das armadilhas repetitivas, cujo único sentido às vezes parece ser o domínio do conteúdo procedimental em si mesmo esquecendo a sua real finalidade. No entanto, no livro 1, a grande maioria das atividades não partiu de situações significativas de forma que o conteúdo fosse assimilado junto com a capacidade de utilizá-lo quando necessário. Pareceu-nos que o livro 1 pecou pelo excesso do tecnicismo.

CAPÍTULO 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou alguns elementos da análise sobre a concepção de função afim em livros didáticos. Procuramos pesquisar de que forma as relações entre aspectos textuais e visuais foram abordadas tendo como modelo teórico os registros de representação semiótica de Duval (2003). Para que pudéssemos instrumentalizar essa análise, estabelecemos alguns critérios de investigação que nos levassem a verificar, à luz das nossas questões de pesquisa, a lógica utilizada no desenvolvimento conceitual da função afim nos livros didáticos do ponto de vista matemático e visual.

Para o desenvolvimento deste trabalho, percorremos algumas etapas, desde a leitura de várias obras, passando pela delimitação do problema, pela leitura de orientações oficiais sobre o objeto a estudar, por leituras pertinentes ao tema, até ao resultado final. Dessa trajetória emergiram considerações que julgamos oportunas.

- *Sobre as leituras:*

As leituras foram importantes no desenvolvimento do nosso trabalho, pois além de ampliarem o espectro da análise, esclareceram vários aspectos de como seguir adiante. Agregaram também novas informações que permitiram observar assuntos relacionados, às vezes sob paradigmas um pouco diferentes, como foi o caso do trabalho de Morgado (2004).

Vimos, em alguns trabalhos, como o de Mesa (2001), que a forma de relacionamento com o conhecimento utilizando material didático, notadamente o livro, é determinante na prática educativa, podendo trazer conseqüências na prática escolar e social dos indivíduos enquanto cidadãos.

Esse papel do livro didático no processo de ensino tem sido destacado não só por ações governamentais, através do PNLD e PNLEM, que destinam grandes somas para distribuir livros às escolas públicas, como também pela ação dos próprios professores que neles se apóiam para desenvolver os currículos. Vale lembrar que embora os professores tenham liberdade em escolher livros didáticos, eles são influenciados pelo caráter oficial via catálogo, o que nos remete a um dos tópicos observados de Morgado (2004).

As orientações oficiais também reconhecem a importância do livro didático com já comentamos anteriormente, fato esse também encontrado no trabalho de Andrade e Dias (2007) que identificou o livro como o recurso mais utilizado como material didático pelo professor.

Outros trabalhos, como o de Lima et al. (2006) e Lima (2001), foram de suma importância para mostrar a necessidade de produzir textos de matemática atualizados e práticos mantendo o rigor lógico. Não podemos pecar pelo excesso de informalidade.

Vale lembrar que produzir uma matemática ligada a outras áreas é orientação moderna e presente nos PCN, cuja referência foi sempre constante na análise das obras.

Os trabalhos de Mesa (2001) e de Markovits, Eylon e Bruckheimer (2003), não foram só importantes por terem deflagrado o início do trabalho, mas também para mostrar que às vezes um assunto aparentemente tão banal em matemática, como a função afim, guarda propriedades tão importantes quando observado intensamente sob determinado aspecto.

As demais leituras, embora possam não estar aqui nomeadas, não são menos importantes, pois também nos apoiaram no desenvolvimento do trabalho, mostrando a preocupação dos autores com o tema cuja relevância é inquestionável.

É importante também destacar a fundamentação teórica que em momentos às vezes difíceis nos iluminou o caminho a seguir.

Na realidade, as leituras de forma geral, são fundamentais em qualquer tipo de pesquisa.

- *Sobre os aspectos visuais e textuais.*

Parece-nos que é unanimidade na educação matemática, como apontam as orientações oficiais bem como obras de outros autores, introduzir conteúdos com base no conhecimento prévio do aluno, preferencialmente com exemplos do cotidiano. No entanto, julgamos importante a presença de pré-requisitos para abordar determinado objeto matemático. O livro deve articular de alguma forma o objeto matemático a ser estudado com esses pré-requisitos. Todavia, esses pré-requisitos nem sempre estão presentes, ou se estão, são parciais, ou ainda não mantêm relação alguma nem são evocados na explanação. São esses momentos em que se faz necessário a correlação entre os vários assuntos da matemática.

No nosso caso, quando da escolha de livros didáticos na escola pública, levamos em consideração a presença deles. Embora esse assunto possa ficar por conta do professor durante o desenvolvimento do currículo, os autores precisam comentar alguma coisa. Mais ainda, se cabe ao professor, ao adotar determinado livro didático, levar em conta os conteúdos a serem estudados, o fará de forma a direcionar a participação do aluno como protagonista que necessitará de todos os recursos presentes no livro. Portanto, o livro não poderá conter uma simples exposição de fatos, mas uma vez que se propõe explicar conceitos tem que oferecer condições que contribuam para o seu entendimento.

No entanto, não podemos ter a pretensão que para qualquer assunto a ser estudado, deverá o livro relacioná-lo invariavelmente a todas as áreas da matemática, formando assim um alfarrábio enorme.

Para o nosso estudo, contudo, um fator importante, diz respeito à habilidade dos nossos alunos em lidar com o plano cartesiano. Vale lembrar da dificuldade dos alunos em interpretar os pontos de intersecção com os eixos, salientado no trabalho de Markovits, Eylon e Bruckheimer (2003), que têm relação direta com as variáveis visuais de Duval (2003). Apenas os livros 1 e 3 resgatam o conceito de plano cartesiano. Outro pré-requisito importante é o conceito de proporcionalidade. Não só para os PCN (1998), como também para Lima (2001) e Lima et al. (2006), a função linear constitui um modelo matemático para questões referente à proporcionalidade. No entanto, somente o livro 2 resgata esse conceito com um capítulo sobre o assunto e dando destaque à função linear como aplicação. A nossa experiência como professor tem nos mostrado como esses conteúdos são de grande valia para a abordagem do objeto em estudo e a conseqüente manipulação e aplicação. Como na grande maioria dos casos essa habilidade é precária, entendemos que esses pré-requisitos são fundamentais, evidenciado por nós ao longo do trabalho e constatado que nos três livros isso só acontece parcialmente.

A diversidade de gêneros textuais, cuja importância foi destacada em praticamente todas as obras que compõem a nossa referência, mostra como os gráficos, quando bem tratados, trazem informações para a matemática. Duval (1988) destaca essa importância sob o ponto de vista cognitivo. Dessa forma é possível aprender matemática com visualização. Esse aspecto é de tal relevância que Braga (2006) aponta como ele é determinante na definição do nível brasileiro de alfabetismo funcional em matemática, pois, segundo ele, tem relação direta com a inclusão social do indivíduo.

Ainda sobre o texto matemático destacamos nas obras de Lima (2001) e de Lima et al. (2006), por exemplo, a importância do método dedutivo na demonstração de que toda a reta não vertical é gráfico de uma função afim, ou ainda a importância de tratar a função afim na forma geral f(x) = ax+b sem tratar a função constante (a=0) nem a função linear (b=0) como outros tipos de funções. Segundo o autor, isso só traria vantagem ao aluno e sob o nosso ponto de vista facilitaria a compreensão. No entanto como vimos, nem todos os livros o fazem.

Assim, os livros depois de analisados, permitiram concluir que o livro 1 manifesta um compromisso maior com o texto matemático, onde as figuras desempenham um papel fundamental na explanação do conteúdo. Exatamente oposto, temos o livro 3 onde essa preocupação não existe. Já no livro 2, encontramos uma situação intermediária.

- *Sobre exercícios*

Quanto à quantidade e qualidade dos exercícios propostos nos livros, relevamos que além da manipulação, eles devem explorar os vários registros de representação postulados por Duval (2003).

A inclusão da realidade social nos estudos, passa necessariamente pela matemática acadêmica que será requerida nas atividades que estão presentes na sociedade contemporânea. Essas atividades devem também contemplar outras áreas de conhecimento, conforme orientações dos PCN (1998). Por esse motivo, os exercícios são importantes e devem apresentar situações que tenham significado para o leitor. Estaremos criando assim situações favoráveis para que o conceito seja aprendido, potencializando a sua utilização. Evitaremos também a nossa perplexidade quando o aluno que sabe utilizar esse conhecimento em determinada área, não consegue desenvolver a mesma capacidade numa área diferente.

Através dos aspectos de congruência e de não-congruência nos sentidos de conversões descritos por Duval (2003), constatamos como é possível sair da conceituação à manipulação e aplicação dos conceitos tendo como objetivo a compreensão. Assim, foi possível entender como a coordenação espontânea definida por Duval (2003) pode ser implementada em exercícios.

Para evidenciar a importância dessas atividades, podemos citar o trabalho de Andrade e Dias (2007) sobre o resultado da avaliação do SARESP, quando os alunos são colocados em situações de avaliação.

Nesse sentido, os três livros podem ser considerados satisfatórios, pois algumas situações da sociedade contemporânea estão presentes. Todavia, as idéias de Morgado (2004) sobre a importância de uma abordagem atual e moderna em sintonia com as orientações dos PCN (1990) no que diz respeito à novas tecnologias, como o computador (softwares, internet, etc.), ficaram à margem de qualquer comentário. O próprio Lima (2001), que vem de uma escola mais tradicional, defende a preparação do aluno para tarefas na sociedade atual através de métodos mais modernos para interagir com as atividades.

- *Sobre os livros*

Consideramos então que os livros didáticos, apesar da grande quantidade de informações que contêm, não conseguem oferecer toda a informação necessária. Às vezes o livro pode ser determinante não por aquilo que contém, mas pelo que deixa de mostrar. Além disso, os materiais didáticos não podem e nem devem se limitar ao livro didático. Por isso, a importância de ampliar os recursos didáticos tirando proveito do avanço tecnológico para abordar e exercitar conceitos de diferentes formas.

Com relação aos livros propriamente ditos, somos de opinião de que seja essencialmente necessária a consulta em mais de um livro para explorar determinado conteúdo. Na nossa pesquisa, embora o livro 1 tenha explanado de forma mais completa, concluímos que os outros dois podem completá-lo.

Outro aspecto importante diz respeito às orientações que têm que ser levados em consideração quando da elaboração do livro didático.

Por tudo o que foi exposto no trabalho, é possível confirmar a importância do livro didático na cultura escolar já comentada anteriormente. Todavia, entendemos que ele não substitui o professor, pois cabe somente a este a prerrogativa de decidir a forma de desenvolver o currículo.

Também jamais podemos nos esquecer do trabalho árduo dos autores por trás da elaboração de um livro com o objetivo de construir uma obra simultaneamente completa, sucinta e comercialmente viável, dentro dos padrões do MEC.

- *Sobre a nossa atividade como educadores.*

Este trabalho contribui de forma decisiva para a nossa formação profissional. O olhar agora tem outra percepção mais apurada, mais comprometida. A leitura não é mais superficial. Os critérios para analisar um livro também têm um caráter muito mais qualitativo. A responsabilidade ao analisar um livro de matemática também aumentou, mas o mais importante foi a consciência de possuir essa responsabilidade. Imaginamos também que possamos agir ainda como agentes multiplicadores quando assim for solicitado, o que faremos com prazer.

Finalmente, esperamos que este trabalho possa trazer contribuições, por modestas que sejam, para o desenvolvimento da educação matemática de nossos jovens.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRADE, Sirlene N. de; DIAS, Marlene A. Análise Institucional das possibilidades de articulação entre as diferentes representações simbólicas de função afim. In IX ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (Jul. 2007, Belo Horizonte – MG).

BRAGA, Ciro. Função: a alma da matemática. São Paulo: Fapesp, 2006.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC, 1998.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCN+ Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica. Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2006.

DUVAL, Raymond, Registros de representações e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Alcântara (Org.). Aprendizagem em Matemática. São Paulo; Editora Papirus, 2003, p. 11-33.

DUVAL, Raymond, Graphiques et Equations: l'articulation de deux registres. Annales de Didactque et Sciences Cognitives, v. 1, p. 235-53, 1988.

GUELLI, Oscar. Matemática 1ª ´serie. São Paulo: Editora Ática, 2004.

LIMA, Elon Lages. Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio. São Paulo: SBM-Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. A Matemática do Ensino Médio. São Paulo: SBM-Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. v. 1.

LONGEN, Adilson. Matemática: uma atividade humana. Curitiba: Editora Base, 2003.

MARKOVITS, Zvia; EYLON, Bat Sheva; BRUCKHEIMER, Maxim. Dificuldades dos alunos com o conceito de função. In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. (Org.). As idéias da Álgebra. São Paulo: Atual Editora, 2003. p. 49-69.

MEC, SEMTEC, FNDE. Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio: PNLEM/2005: Matemática. 2004. Disponível em: http://mec.gov.br. Acesso em: 16 março 2007.

MESA, Vilma. Functions in Middle School Mathematics Textbooks: Implications for a Functional Approach to Álgebra. In: STUDY CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL COMMISSION ON MATHEMATICAL INSTRUCTION (ICMI), 12, 2001, Melbourne. Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The Future of the Teaching and Learning of Algebra. Melbourne: Helen Chick et al. – University of Melbourne 2001, v.1. p. 454-61.

MORGADO, José Carlos. Manuais Escolares. Porto: Porto Editora, 2004.

OLIVEIRA, Nanci de. Conceito de função: uma abordagem do ensino-aprendizagem. Dissertação de Mestrado – Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática, PUC, São Paulo, 1997.

SÃO PAULO (Estado). Proposta Curricular para o Ensino de Matemática Ensino Fundamental. 5. ed. Secretaria de Estado da Educação – São Paulo Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. São Paulo, 1997.

ROSSINI, Renata. Saberes docentes sobre o tema função: uma investigação das praxeologias. Tese de Doutorado – Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática, PUC, São Paulo, 2006.

SELDEN, Annie; SELDEN, John. Foreword. Research Perspectives on Conceptions of Functions: Summary and Overview. In: HAREL, Guershon; DUBINSKY, Ed. (Eds). The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, v. 25. Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 1992. p. 1-16.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. Matemática Ensino Médio 1ª série. São Paulo: Editora Saraiva, 2005.

SILVA, Umberto Almeida. Análise da abordagem de função em livros didáticos de Matemática da educação básica. Dissertação de Mestrado – Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática, PUC, São Paulo, 2007.