PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

ALEXANDRA GARROTE ANGIOLIN

TRAJETÓRIAS HIPOTÉTICAS DE APRENDIZAGEM SOBRE FUNÇÕES EXPONENCIAIS

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo

2009

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

ALEXANDRA GARROTE ANGIOLIN

TRAJETÓRIAS HIPOTÉTICAS DE APRENDIZAGEM SOBRE FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para a obtenção do título de MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, sob a orientação da Prof. Doutora Célia Maria Carolino Pires.

São Paulo

2009

Banca Examinadora

____

____

____

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ________________________________ **Local e Data:** ______________

Este trabalho é dedicado à minha família pelo apoio nesses anos, mas em especial, a minha irmã Denise, que mesmo sendo uma criança, compreendeu minha impaciência em alguns momentos.

AGRADECIMENTOS

A **Deus**, por mais essa vitória.

À **Profª. Drª. Célia Carolino,** pelo carinho, amparo, pela disponibilidade prestada, pela paciência, incentivo, orientações e sugestões, que contribuíram tanto para essa pesquisa, quanto a minha vida profissional.

Ao **Prof. Dr. Nilson José Machado** e ao **Prof. Dr. Benedito Antonio da Silva,** pelas valiosas contribuições apontadas na qualificação.

A toda minha **família** que esteve ao meu lado apoiando-me, amparando-me e incentivando-me durante todo esse momento de dedicação à vida acadêmica. Obrigada **Mãe** pela tolerância com a minha impaciência e por torcer sempre por mim!

Ao meu pai **Antonio Roberto** que mesmo longe me apoiou e incentivou sempre! Agora sim, pai, posso dizer que acabei. Muito obrigada, Pai!

Ao meu namorado **Gabriel,** pelo companheirismo, incentivo, compreensão, carinho, muito amor, paciência, coragem e perseverança em querer iniciar um namoro na fase mais conturbadora do curso.

Aos meus sinceros amigos do Ceneart, **Ana Ferreira**, **Leni**, **Márcio**, **Kátia, César**, **Sueli**, **Washington**, **Márcia**, **Marcelo Mello** e outros pelo apoio incondicional durante esse período. Muitíssimo obrigada, meus amigos!

Aos meus amigos professores **Adubaldo** e **Ilza,** pelo apoio e incentivo constante e por colaborarem diretamente na realização desse trabalho. Sem vocês, teria sido muito mais difícil.

À diretora do Ceneart, **Sra. Neiva Pereira Cruz** e, em memória, **Sra. Hilda Aparecida** pelo incentivo e colaboração com as xérox da THA. Saudades sempre, Hilda!

Aos meus amigos do **Grupo de Pesquisa,** pelas contribuições e sugestões que ajudaram na realização dessa pesquisa.

Ao amigo **Antonio Celso,** por ter tido muita paciência e ter me aguentado em momentos de desespero e loucura, tanto na vida acadêmica, quanto na pessoal. O Átilla também agradece por tudo!

Aos **professores** do Programa, que colaboraram para meu crescimento profissional.

Os **alunos,** que participaram da pesquisa.

Aos meus colegas do curso **Daniela**, **Marcelo**, **Vanderlei**, **Luis** e **Sandra**. Que sempre juntos, com muita alegria, companheirismo e incentivo mútuo conseguimos finalizar essa etapa da vida.

À **Secretaria de Educação de São Paulo,** pela bolsa que propiciou minha evolução profissional.

A todos aqueles que me incentivaram e torceram por mim.

MUITO OBRIGADA!

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo investigar como compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com a planificação de ensino, no caso particular de funções exponenciais. Pretende-se ainda analisar a atuação dos professores de Matemática, no que se refere às atividades de planejamento e desenvolvimento de ensino, de forma compatível com uma perspectiva construtivista de aprendizagem. Como fundamentação teórica, recorremos nessa obra aos trabalhos de Simon (1995) sobre trajetórias hipotéticas de aprendizagem (THA). Trata-se de uma pesquisa qualitativa, envolvendo dois professores de Matemática, de uma escola pública estadual de São Paulo e suas atuações junto a 77 alunos da 1ª Série do Ensino Médio. Elaboramos uma trajetória hipotética de aprendizagem a partir de objetivos específicos e, tendo como referência hipóteses sobre a aprendizagem dos estudantes, buscando a proposição de tarefas que envolvessem resolução de problemas, investigação, uso de tecnologias, abordagens interdisciplinares e aplicações em situações do cotidiano e em outras áreas de conhecimento. A THA foi aplicada pelos professores participantes com, suas respectivas turmas. Com a análise dos dados obtidos, constatamos a complexidade de elaboração de propostas com a finalidade de que os alunos possam construir seus próprios conhecimentos sobre o assunto. Da mesma forma, vivenciamos o desafio a ser enfrentado pelos professores em desenvolver tarefas nessa perspectiva construtivistas, mesmo quando as intenções tenham sido discutidas e compartilhadas. O professor tem papel decisivo, pois mesmo que o ensino seja planificado numa perspectiva construtivista, o que realmente fará com que isso ocorra depende de como ele a desenvolve em sala de aula. Com relação aos alunos, seu envolvimento com tarefas menos usuais que envolviam leitura de textos, uso do computador, investigações mostraram que essas possibilidades são promissoras no sentido de que ocorra a aprendizagem, mas diversos fatores, dentre os quais a própria atuação do professor, não permitem que se formule assertivas mais contundentes sobre essas propostas.

Palavras-chave: Função Exponencial. Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem. Currículo. Ensino Médio.

ABSTRACT

This study has the objectives of investigating how to make constructivist perspectives of learning compatible with the planning the teaching-learning process, in the particular case of exponential functions and analyzing the performance of teachers of Mathematics with regard to the activities of the planning and development of teaching, in a way compatible with a constructivist perspective of learning. It is based on the work of Simon (1995) on hypothetical learning trajectories (HLTs). This is qualitative research involving two teachers of Mathematics from a state public school in Sao Paulo and their work with 77 students in the first year of Junior High School. We produced a hypothetical learning trajectory based on specific objectives and, taking as our reference hypotheses on student learning, we sought to propose tasks that involve the resolution of problems, investigation, the use of technologies, interdisciplinary approaches, applications to everyday situations and in other areas of knowledge. The HLT was implemented by the participating teachers in their own classes. From the analysis of the data obtained, we realized the complexity of producing proposals with the purpose of allowing students to build upon their own knowledge on the subject. In the same way, we experienced the challenge of facing teachers in developing tasks in this constructivist perspective, even when the intentions had been discussed and decided together. The teacher has a decisive role as, even when the teaching is planned within a constructivist perspective, what will really make this happen depends upon how he puts it into practice in the classroom. With regard to the students, when he is involved with less usual tasks that involve the reading of texts or the use of a computer, investigations show that these possibilities are promising in the sense of what occurs in learning, but various factors, which include the performance of the teacher himself, do not allow one to formulate more confident assertions upon these proposals.

Keywords: Exponential Functions. Hypothetical Learning Trajectories. Student Curriculum. High School.

Sumário

Apresentação da Pesquisa

I. Inserção do trabalho num grupo de pesquisa..............................13
II. Questões de pesquisa...18
III. Procedimento metodológicos..19
IV. Estrutura do trabalho..20

CAPÍTULO 1

Fundamentação teórica e pesquisas sobre função exponencial

1. As formulações de Martin Simon e de outros autores 22
1.1 Recuperando aspectos da perspectiva construtivista.......................25
1.2 Construtivismo e Pedagogia da Matemática....................................26
1.3 Trajetória(s) Hipotética(s) de aprendizagem – Simon 28
1.4 O ciclo de Ensino de Matemática – Simon......................................29
1.5 Composição da Trajetória hipotética de aprendizagem – Simon 31
1.6 A geração de uma trajetória hipotética de aprendizagem.................33
1.7 Outras contribuições para a reflexão sobre THAs............................35
1.8 Considerações e reflexões do grupo de pesquisa............................38
2. Algumas pesquisas sobre o ensino e aprendizagem de função exponencial..40

CAPÍTULO 2

Construção da Trajetória Hipotética de Aprendizagem sobre Função Exponencial

2.1 O processo de construção da THA sobre função exponencial 46
2.2 Objetivos para a aprendizagem dos alunos..48
2.3 Hipóteses da professora pesquisadora sobre o processo de aprendizagem dos alunos...49
2.4 Primeira versão da THA referente à escolha de atividades de aprendizagens..54
2.5 A aproximação com os professores envolvidos do projeto...................70

2.6 Análise da THA pelos professores e modificações sugeridas....................72
2.6.1 Discussões realizadas no dia 5 de agosto....................72
2.6.2 Discussões realizadas no dia 6 de agosto....................76

CAPÍTULO 3

A Trajetória Hipotética de Aprendizagem em salas de aula: atuação dos professores e dos alunos

3.1 Os alunos do Ensino Médio que participaram da pesquisa....................79
3.2 O desenvolvimento da THA pelos professores P1 e P2....................79
3.2.1 Organização da classe e "clima" dominante....................79
3.2.2 Consignas do professor sobre a tarefa, explicação dos objetivos de aprendizagem e combinados....................80
3.2.3 Atitude dos alunos durante o desenvolvimento das tarefas e implicação dos alunos na busca de solução....................81
3.2.4 Eventuais problemas relacionados à leitura e compreensão de textos....................83
3.2.5 Interação entre alunos na realização das tarefas....................84
3.2.6 Dificuldades observadas e possíveis causas....................84
3.2.7 Interesse dos alunos nas atividades que envolvem contextualização, situações de investigação e recursos tecnológicos....................85
3.2.8 Adequação do tempo previsto para a atividade....................86
3.2.9 Intervenções do professor durante a realização das atividades e sistematização das conclusões....................87
3.2.10 A opinião dos alunos sobre as atividades....................88
3.3 A aprendizagem dos alunos com as atividades envolvendo Função Exponencial....................92
3.4 Uma avaliação do conhecimento dos estudantes após o desenvolvimento da THA....................95

CAPÍTULO 4

Novos conhecimentos dos professores e da professora pesquisadora

4.1 Os conhecimentos e reflexões dos professores........................103

4.2 Os novos conhecimentos da professora pesquisadora e indicações para mudanças na THA..105

CONSIDERAÇÕES FINAIS..126

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS...133

ANEXOS

Anexo A – Segunda versão da THA..138

Anexo B – Questionário para os professores aplicadores....................153

Anexo C – Roteiro de observação do desenvolvimento da THA..........155

Anexo D – Relatório da professora pesquisadora sobre as aulas........156

Anexo E - Avaliação aplicada após o desenvolvimento da THA...........195

APRESENTAÇÃO DA PESQUISA

I. A inserção do trabalho num grupo de pesquisa

O presente trabalho faz parte de um conjunto de pesquisas que têm como objetivo analisar como podem ser organizadas e desenvolvidas propostas didáticas em sala de aula, que explorem contextos do cotidiano, de outras áreas de conhecimento e da própria matemática, com vistas à construção de algumas expectativas de aprendizagem por alunos do ensino médio.

O projeto de pesquisa denomina-se “Construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem e implementação de inovações curriculares em Matemática no Ensino Médio” e está inserido numa das linhas de pesquisa do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, qual seja, “Matemática na Estrutura Curricular e Formação de Professores”. Tal projeto inclui pesquisas de mestrado e doutorado que se orientam por referências teóricas comuns.

O objetivo das dissertações de mestrado desse grupo é o de construir, discutir e avaliar para diferentes expectativas de aprendizagem do ensino médio, trajetórias hipotéticas de aprendizagem (THA), que consistem de objetivos para a aprendizagem dos estudantes, de tarefas matemáticas que serão usadas para promover a aprendizagem dos estudantes e do levantamento de hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos estudantes, segundo Simon (1995). Essas THA procuram envolver resolução de problemas, investigação, uso de tecnologias, abordagens interdisciplinares e aplicações de conceitos e procedimentos matemáticos a situações do cotidiano em diversas áreas de conhecimento, conforme prescrições curriculares atuais.

O objetivo das teses de doutorado, desenvolvidas no grupo, é o de elaborar fundamentos teóricos sobre diferentes aspectos dos currículos de matemática, tais como: contextualização, interdisciplinaridade, eleição de critérios de avaliação de currículos, polarização entre aplicações práticas, especulações teóricas e caracterização histórica dos currículos de Matemática.

Segundo Pires (2008), desde 1998, a discussão curricular no Brasil está na pauta das discussões, impulsionada especialmente pelo processo desencadeado pelo Conselho Nacional de Educação e pelo Ministério da Educação, de proposição de Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNEM) e Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNEM). Embora imerso em muitas polêmicas, esse processo revelou alguns consensos, mas também inúmeras divergências e dúvidas que interferem na formulação e na implementação curricular.

As DCNEM propõem que o currículo para o Ensino Médio seja organizado a partir de três áreas do conhecimento: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias; Linguagens, Códigos e suas tecnologias; Ciências Humanas e suas tecnologias. No entanto, a nosso ver, essa proposição, potencialmente rica no sentido de apontar para as conexões entre diferentes campos do conhecimento, com destaque para a abordagem interdisciplinar, precisa ser implementada com muita clareza, para que a especificidade e a contribuição de cada um desses campos não se perca.

Outra ideia central é a que destaca a importância da exploração de situações contextualizadas a serem trabalhadas por meio da resolução de problemas. Essa perspectiva de trabalho, embora tenha o apoio teórico e uma gama considerável de experiências, é ainda pouco conhecida pela maioria dos professores, que tiveram uma formação exatamente na direção oposta.

Os PCNEM enfatizam que o papel da Matemática no Ensino Médio não é apenas formativo (que ajuda a estruturar o raciocínio dedutivo) ou instrumental (ferramenta que auxilia em todas as atividades humanas), mas que ela também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. Nesse sentido, o documento destaca a importância de o aluno perceber que definições, demonstrações, encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas, a partir de outros, e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. Propõem ainda que cabe apresentar ao aluno o conhecimento matemático de modo que ele possa buscar novas informações e instrumentos necessários para que seja possível continuar aprendendo. Essas diferentes funções da Matemática devem ser discutidas e estimuladas de modo que sejam equilibradamente trabalhadas.

Além da seleção dos conteúdos, outro ponto importante para discussão, refere-se à sua organização. Tradicionalmente, a organização é linear, guiada por pré-requisitos internos que dificultam uma abordagem interdisciplinar. Além disso, há uma tradição de organização, em que um dado tema é visto uma única vez, extensivamente.

Outro aspecto, que merece atenção, são os chamados conteúdos atitudinais. Integrando o currículo, com o mesmo peso que os conceitos e os procedimentos, o desenvolvimento de valores e atitudes são fundamentais para que o aluno aprenda a aprender. Omitir ou descuidar do trabalho, com esse aspecto da formação, pode impedir a aprendizagem, inclusive da própria Matemática. Dentre esses valores e atitudes, podemos destacar a iniciativa na busca de informações, a responsabilidade com sua aprendizagem, a confiança em suas formas de pensar, a valorização de fundamentar suas ideias e argumentações. A questão apontada pelos professores é: como fazer isso?

Nas DCNEM, é defendida a proposta de que o Ensino Médio não deve ter como objetivo principal a preparação para os exames vestibulares. Elas expressam uma concepção de aprendizagem como construção de competências em torno do conhecimento. Tal aspecto é sempre questionado pelos professores, que identificam um descompasso entre essa proposta curricular e a sistemática de acesso ao ensino superior. Esse é um impasse a ser discutido por suas implicações, tanto para a seleção de objetivos e de conteúdos, como também para a avaliação de desempenho dos alunos do Ensino Médio.

Pires (2008) destaca que em diferentes congressos, seminários, simpósios e grupos de pesquisa são apontados problemas a serem enfrentados no processo de implementação de inovações curriculares para o Ensino Médio.

Dentre esses problemas, os mais frequentemente destacados referem-se à predominância de uma prática de organização curricular em que os objetivos, os conteúdos, a metodologia e a avaliação aparecem desarticulados.

Mas há aspectos mais específicos como a falta de oportunidades para o desenvolvimento cultural dos estudantes, para o uso das tecnologias da informação e das comunicações.

Há ainda o problema da falta de diálogo entre as instituições formadoras de professores (cursos de licenciatura) e o distanciamento entre elas e as escolas dos sistemas de ensino da educação básica. Geralmente, na formação inicial e continuada dos professores não se consideram as especificidades próprias dos níveis e/ou modalidades de ensino em que são atendidos os alunos da educação básica (como o ensino médio, por exemplo). Há também problemas referentes à desarticulação, quase total, entre conhecimentos específicos e conhecimentos pedagógicos, assim como entre teoria e prática. Ressente-se a não incorporação nos cursos, das discussões e dos dados de pesquisas tanto da área da Educação, como da área de conhecimentos específicos.

Por outro lado, ao longo de sua formação, os futuros professores são expostos a uma prática em que se revela uma concepção de professor, exclusivamente como aquele que transmite/repassa conteúdos veiculados por livros, textos e outras fontes de informação. Em decorrência disso, o futuro professor vivencia como aluno, situações em que "aluno" é agente passivo e individual no processo de aprendizagem.

A concepção de aprendizagem subjacente é a de que se trata de um processo que envolve, meramente a atenção, a memorização, a fixação de conteúdos e o treino procedimental por meio de atividades mecânicas e repetitivas, num processo acumulativo de apropriação de informações previamente selecionadas, hierarquizadas, ordenadas e apresentadas pelo professor. Adotam-se ainda processos de avaliação, baseados na crença de que existe correspondência absoluta entre o que o aluno demonstra em provas e o conhecimento que possui.

Em função dessas constatações, justifica-se a proposição de projetos de pesquisa que envolvam mestrandos, doutorandos e professores do Ensino Médio, no sentido de constituir possibilidades de implementação de propostas de ensino mais condizentes com pressupostos curriculares inovadores.

A opção do grupo de pesquisa foi a de incorporar algumas perspectivas de um grupo colaborativo de pesquisa, com vistas a que se pudesse ganhar maior consistência nas investigações realizadas. Esse espaço de colaboração contribuiu para a discussão e delineamento dos problemas da pesquisa e para a tomada de decisões. A primeira decisão foi a de que as dissertações de mestrado[1] se dedicariam a construir, discutir e avaliar THAs para diferentes expectativas de aprendizagem do ensino médio.

A segunda foi a de que os doutorandos[2], que integram o grupo de pesquisa, ficariam responsáveis por investigar e elaborar fundamentos teóricos sobre diferentes aspectos dos currículos de matemática tais como: caracterização histórica dos currículos de Matemática, eleição dos critérios de avaliação dos currículos, polarização entre aplicações práticas e especulações teóricas, contextualização e interdisciplinaridade.

A proposta do grupo colaborativo, divulgada por Boavida e Ponte (2002), defende a ideia de que a colaboração constitui uma estratégia fundamental, para lidar com problemas que se afiguram demasiado pesados para serem enfrentados individualmente. O autor ressalta ainda, que, para a investigação sobre a prática, a colaboração oferece importantes vantagens, como por exemplo:

---

[1] Mestrandos e seus temas: Alexandra Garrote Angiolin – Funções exponenciais; Américo Augusto Barbosa – Funções trigonométricas; Ana Lúcia Viveiros Freitas– Isometrias e Geometria Plana; Antonio Celso Tonnetti – Estatística; Maria de Fátima Aleixo de Luna – Geometria Plana; José Manoel Vitolo – Variação de Grandezas e funções, funções polinomiais do 1º grau e funções constantes; Márcia Aparecida Nunes Mesquita – Funções polinomiais do segundo grau; Patrick Oliveira de Lima – Funções logarítmicas; Vivaldo de Souza Bartolomeu – Dos números naturais aos números reais; Denílson Gonçalves Pereira – Geometria Analítica; Rubens de Souza Cabral Junior – Combinatória e probabilidade; Alan de Carlo Antonio Silva. Sistemas de Inequações.

[2] Doutorandos e seus temas: Márcio Antonio da Silva – Currículos de Matemática no Ensino Médio: estabelecendo critérios para escolha e organização de conteúdos; Arlete Aparecida Oliveira de Almeida - Da polarização entre aplicações e especulações teóricas nos currículos de matemática do ensino médio, às possibilidades de articulação. Harryson Junio Lessa Goncalves – A Interdisciplinaridade no Currículo de Matemática de Ensino Médio; Márcia Maioli – Contextualização no Currículo de Matemática de Ensino Médio; Denise Franco Capello Ribeiro – Trajetória histórica dos livros didáticos de geometria editados para os primeiros cursos do ensino médio brasileiro; Maryneusa Cordeiro Otone Silva – Currículos de Matemática do Ensino Médio, no período de 1930 a 1960.

- *juntando diversas pessoas com experiências, competências e perspectivas diversificadas, reúnem-se mais recursos para concretizar, com êxito, um dado trabalho, havendo, deste modo, um acréscimo de segurança para promover mudanças e iniciar inovações;*
- *juntando diversas pessoas que se empenham num objetivo comum, reúnem-se, só por si, mais energias do que as que possuem uma única pessoa, fortalecendo-se, assim, a determinação em agir;*
- *juntando diversas pessoas que interagem, dialogam e refletem em conjunto, criam-se sinergias que possibilitam uma capacidade de reflexão acrescida e um aumento*

Diante da problemática em questão, nosso trabalho focaliza a construção de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem sobre Função Exponencial, assunto que é abordado no Ensino Médio, como um sub-ítem do tópico funções, mas que ainda é, de forma geral, desenvolvido por meio da apresentação de definições, propriedades, roteiro de construção de gráficos e exercícios. Parece que ainda não é tão freqüente explorar a ligação com acontecimentos naturais e sociais, nem as características matemáticas do chamado crescimento exponencial. Tal fato nos estimula a elaborar uma THA que envolva situações contextualizadas e interdisciplinares, por meio de textos e resolução de problemas, para que o aluno possa aplicar seu conhecimento em situações do cotidiano, em outras áreas do conhecimento e internas à própria matemática.

II. Questões de Pesquisa

Estudando o tema “Trajetórias hipotéticas de aprendizagem sobre Funções Exponenciais”, buscaremos responder às seguintes questões:

a) Que atuação pode ter um professor de Matemática, no que se refere às atividades de planejamento do ensino do tema funções exponenciais, de forma compatível com uma perspectiva construtivista de aprendizagem?

b) Como compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem referentes a funções exponenciais, com a planificação do ensino?
c) Como as pesquisas na área de Educação Matemática, que trazem resultados importantes sobre a aprendizagem, podem contribuir para a organização de um ensino que potencialize boas situações de aprendizagem dos alunos, no caso das funções exponenciais?

III. Procedimentos metodológicos

Nossa pesquisa é de natureza qualitativa, por ter as características básicas apresentadas por Ludke e André (1986, p. 11-13), como explicitamos a seguir.

O desenvolvimento da THA na sala de aula, as entrevistas e discussões com os professores acontecem em seus locais de trabalhos, e o ambiente escolar é a fonte direta dos dados.

Os dados coletados são predominantemente descritivos e organizados a partir dos relatórios elaborados para todas as aulas desenvolvidas e acompanhadas.

A preocupação com o processo é muito maior do que com o produto, uma vez que o interesse principal da investigação não é o de mostrar que a THA elaborada funciona, mas sim o de verificar qual é a atuação do professor, assim como sua interação com os alunos, tendo como base uma THA elaborada por um professor que é o pesquisador, mas que é debatida com o ele.

Há uma grande preocupação em capturar a perspectiva dos professores, ou seja, compreender sua prática e os conhecimentos profissionais que têm a respeito do tema ensinado. A análise dos dados segue um processo indutivo, pois não se procura buscar evidências que comprovem hipóteses definidas no início dos estudos, mas o compromisso de capturar evidências que vão emergindo.

Nossa pesquisa foi desenvolvida em duas etapas:

Etapa I: Planejamento do Projeto de pesquisa, com base nas reuniões com os pós-graduandos envolvidos. Estudos coletivos sobre referências teóricas que fundamentam o projeto, nas reuniões semanais do grupo de pesquisa. Estudos individuais sobre teses, dissertações e artigos referentes ao tema de cada sub-grupo. Elaboração das atividades que constituem a THA de cada sub-grupo. Estudos do professor pesquisador com os professores do Ensino Médio que vão participar da pesquisa. Fechamento das propostas de THA em comum acordo entre pesquisador e professores. Elaboração, pelo pesquisador, de instrumentos para a observação e coleta de dados durante a realização das propostas em sala de aula, pelos professores do ensino médio.

Etapa 2: Desenvolvimento das propostas de trabalho em sala de aula. Avaliação do andamento do projeto, nas reuniões semanais do grupo de pesquisa. Realização de seminários para apresentação da produção e leitura crítica dos trabalhos, pelos participantes do grupo de pesquisa. Debates do pesquisador com os professores do ensino médio, sobre os resultados do trabalho realizado nas salas de aula e indicações de possíveis mudanças na THA. Escrita do material para a qualificação e elaboração de artigos. Escrita do material para a defesa.

IIII. Estrutura do trabalho

Organizamos nosso trabalho em cinco capítulos.

No primeiro capítulo, apresentamos a fundamentação teórica que orienta esta pesquisa e as escolhas metodológicas que serão utilizadas. Realizamos, ainda, um levantamento das pesquisas que abordam o ensino e aprendizagem sobre o tema *função exponencial* que tanto nos auxiliou a elaboração da THA.

No segundo capítulo, trazemos o processo de construção da primeira versão da THA, apresentando objetivos e hipóteses da professora pesquisadora sobre o processo de aprendizagem dos alunos, sobre o objeto de estudo e as atividades elaboradas pela mesma. Na sequência, fazemos a caracterização dos professores envolvidos no projeto, a análise da THA por esses, juntamente com as modificações sugeridas.

No terceiro capítulo, apresentamos o relatório das observações das aulas em que a THA foi desenvolvida e a atuação dos professores e alunos, a aprendizagem dos alunos com as atividades da THA sobre função exponencial e a avaliação sobre o conhecimento dos estudantes após o desenvolvimento da THA.

No quarto capítulo, buscamos identificar novos conhecimentos dos professores e também da professora pesquisadora. Além disso, apontamos indicações para mudanças na THA.

Por fim, apresentamos as considerações finais que concluímos com base no trabalho realizado.

CAPITULO 1
FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E PESQUISAS SOBRE FUNÇÃO EXPONENCIAL

Neste capítulo, vamos apresentar uma síntese dos estudos que apoiam nosso trabalho. Tomamos como referência o artigo "Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações de Martin Simon", Pires (2008), em que a autora faz referência ao nosso grupo de pesquisa e discute a contribuição de textos como os de Martin Simon[3] (1995), e o de Pedro Gómez e José Luis Lupiáñez (2007) traduzidos pelo grupo e que foram de grande importância para nossas reflexões.

No que se refere especificamente ao assunto de nossa pesquisa, apresentamos algumas contribuições, como as dissertações de mestrado de Dominoni (2005) e Araújo (2005), que estudaram funções exponenciais e que nos trazem elementos importantes para nosso trabalho.

1. As formulações de Martin Simon e de outros autores

Pires (2009) destaca que "não é exagero afirmar que debate e pesquisa sobre questões curriculares ainda não são uma tradição na comunidade de educadores matemáticos brasileiros".

> *Fazemos tal avaliação com base na experiência de termos participado da equipe de elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais, quando analisamos pareceres advindos de docentes e pesquisadores de universidades de todo o país. Naquela oportunidade, observamos que as discussões se concentraram no problema da centralização versus descentralização das decisões sobre currículos e na*

[3] Pesquisador da Pensylvania State University.

> *necessidade e/ou adequação da existência de currículos prescritivos – em especial no âmbito nacional.* (PIRES, 2009, p.4)

Para a autora, são poucas as fontes teóricas no campo específico da organização e desenvolvimento curricular em Matemática:

> *Nas investigações que conduzimos no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, inicialmente nos apoiamos em trabalhos como os de Bishop (1991) e Doll (1997), que apresentam alguns princípios orientadores, os quais podem sustentar a construção de critérios de avaliação, – autores estes que ainda são pouco discutidos entre nós.* (PIRES, 2009, p. 5)

Referindo-se às reflexões dentro do nosso grupo de pesquisa Pires (2009) comenta que "é bastante frequente certo desconforto quanto à discussão sobre 'currículo' – entendido como planificação de uma trajetória a ser realizada por alunos, seja ao longo da educação básica ou durante o ensino superior" (p.5).

> *Esse desconforto é causado por uma idéia bastante comum de que, numa perspectiva construtivista, esse percurso deve ser ditado por interesses dos alunos e sem definições prévias de objetivos e conteúdos. Desse modo, a leitura do texto de Simon (1995) foi bastante significativa para o trabalho desses mestrandos e doutorandos interessados em pesquisar questões curriculares.* (PIRES, 2009, p. 5-6)

Na sequência, Pires inicia o diálogo com Simon (1995), destacando que para ele "o construtivismo epistemológico tem sido fonte de pesquisas no ensino da Matemática e tem oferecido uma base para recentes esforços de uma reforma na Educação Matemática" (p.6). No entanto, ele considera que embora o construtivismo tenha potencialidade para sustentar mudanças no ensino da Matemática, é necessário formular modelos de ensino baseados no construtivismo[4].

---

[4] Os dados apresentados no artigo de Simon foram coletados dentro de uma sala de aula experimental, com 25 alunos. O pesquisador acompanhou um professor de Matemática em suas tarefas sobre a construção do conceito de área. A partir da análise dos dados coletados, trabalhou numa fundamentação teórica visando à formulação de uma pedagogia da Matemática.

Pires em seu artigo destaca que Simon “discute a tensão criativa entre a meta dos professores para o ensino e o compromisso de ser sensível ao pensamento matemático dos seus alunos” (p.6). Ela informa que o autor inclui em suas reflexões alguns outros temas, a saber:

> *a) as atividades de ensino estruturadas e implementas, tendo como ponto central a consideração do pensamento/entendimento dos alunos; b) o planejamento do ensino, gerado a partir de uma trajetória hipotética de aprendizagem dos alunos; c) a formação continuada dos professores, apoiada em reflexões sobre trajetórias hipotéticas de aprendizagem de seus alunos, num processo de permanente elaboração.*(PIRES, 2009, p. 6)

Simon, apud Pires (2009), ressalta que a perspectiva construtivista no ensino tem sido foco para muitos dos estudos empíricos e referenciais teóricos na Educação Matemática e que, como resultado, tem contribuído para inovações nas reformas do ensino da Matemática, como é o caso, nos Estados Unidos, das proposições do NCTM - Conselho Nacional de Professores de Matemática.

No entender de Simon, “embora o construtivismo tenha apresentado aos professores de Matemática caminhos proveitosos para o entendimento de como se processam as aprendizagens, a tarefa da reconstrução de uma ‘Pedagogia da Matemática’ baseada na visão construtivista é um desafio considerável, no qual a comunidade de Educação Matemática tem apenas começado a trabalhar” (apud PIRES, 2009, p.6). Na opinião de Simon, *o construtivismo pode contribuir com importantes caminhos para o ensino da Matemática em sala de aula, embora não estipule um modelo particular.*

Pires (2009) prossegue explicitando:

Ao referir-se à ‘Pedagogia da Matemática’, Simon explica que o termo *pedagogia* tem a intenção de significar todas as contribuições para a educação matemática na sala de aula. Dessa maneira, o autor inclui não apenas um trabalho multifacetado do professor, mas também o currículo a ser construído e o desenvolvimento de materiais de ensino. Assim, o foco específico de seu trabalho está na tomada de decisão a respeito de conteúdos matemáticos e nas tarefas de ensino da Matemática em sala de aula. Para expor sua proposta de Ciclo de Ensino de Matemática e de Trajetórias Hipotéticas de

Aprendizagem, Simon busca situar sua posição em relação às perspectivas construtivistas e as relações entre construtivismo e pedagogia da Matemática que resumiremos nos dois próximos itens. (cf. p. 7)

1.1 Recuperando aspectos da perspectiva construtivista

Um ponto importante no texto de Simon é a recuperação de aspectos da perspectiva construtivista. Para Simon, o interesse na difusão do construtivismo entre teóricos da Educação Matemática, pesquisadores e praticantes tem moldado o discurso para diferentes pretensões do construtivismo.

> *De expressões como "Construtivismo Radical" e "Construtivismo Social" derivam algumas orientações, caracterizando a existência de uma diversidade de perspectivas epistemológicas semelhantes dentro dessas categorias. Consequentemente, parece importante uma descrição aprofundada da perspectiva construtivista na qual nossa pesquisa está baseada. (SIMON, 1995, p.4).*

Do ponto de vista de Simon, a maior parte das informações que dividem os recentes debates epistemológicos sobre o conhecimento são, fundamentalmente, as que o identificam como um processo social e as que o tomam como um processo cognitivo.

> *A posição radical do construtivismo focaliza a construção individual para obter, desse modo, uma perspectiva cognitiva ou uma perspectiva psicológica. Embora a interação social seja vista como um contexto importante para o conhecimento, o foco está na reorganização cognitiva individual. Em contrapartida, a epistemologia com orientação sociocultural vê a construção mental como um processo socialmente determinado; o conhecimento individual origina-se da dimensão social. Para a perspectiva social, o conhecimento localiza-se na cultura, insere-se num sistema – que é maior que a soma de suas partes*. (apud PIRES, 2009, p.8)

Simon insiste que sua posição evita qualquer extremo, e busca construir um trabalho teórico baseado em autores como: Blumer (1969), Bauersfeld (1988), Cobb, Yackel, e Wood (1989) e Von Glasersfeld (1991).

Ao referir-se aos trabalhos de Cobb (1989), Simon lembra que, para esse autor, a coordenação das duas perspectivas construtivistas é necessária para se entender a aprendizagem em sala de aula. Ela não está somente no social ou na dimensão cognitiva, mas, preferencialmente, na combinação da análise dessas duas perspectivas.

Simon formula uma analogia à luz das teorias psíquicas:

> *Nenhuma teoria em particular acena um enfoque suficiente para caracterizar dados psíquicos. Porém cada teoria tem construído uma contribuição significativa para basear teoricamente a pesquisa; considerando ser um enfoque particular e considerando ser um enfoque que acena também para cada teoria em particular, coordena a descoberta que se origina de cada perspectiva moldada para avanços neste campo*. (SIMON,1995, p 6).

Do mesmo modo, para esse autor, a organização do desenvolvimento do conhecimento em sala de aula parece uma análise particular coordenada, baseada em perspectivas psicológicas (cognitivas) e sociológicas. A análise psicológica da aprendizagem da Matemática em sala de aula foca-se no conhecimento individual sobre a Matemática, seu entendimento para o outro, e seu senso de funcionamento na aula de Matemática. A análise sociológica toma como ponto de partida o conhecimento e as normas sociais da sala de aula. As "normas sociais" referem-se àquilo que está entendido como a construção do conhecimento com efetiva participação dos alunos nas aulas de Matemática. Incluem também as expectativas que os membros da comunidade têm sobre professores e alunos, os conceitos dos meios utilizados para a elaboração da aula e o caminho utilizado para validar a aula de Matemática.

Para Simon, é proveitoso ter uma visão da Matemática como uma atividade cognitiva apreendida por processos culturais e sociais e como fenômenos sociais e culturais constituídos por uma comunidade altamente conscientizada.

1.2 Construtivismo e Pedagogia da Matemática

No entender de Simon, a aprendizagem é entendida como um processo de construção individual e social mediados por professores com a concepção de um trabalho estruturado – no qual se entende a aprendizagem dos alunos. Compreender o desenvolvimento da aprendizagem é extremamente útil, e tal fato leva à questão de como o construtivismo poderia contribuir para a reconstrução de uma Pedagogia da Matemática.

Segundo Pires (2009), Simon novamente faz referência a autores como Wood, Cobb e Yackel para os quais os professores devem ter como finalidade a construção de uma prática que capacite seus alunos a percorrerem o caminho da aprendizagem matemática. Este é o desafio fundamental que deve fascinar os professores de Matemática, o que implica a necessidade de reconstruir meios para fazer conhecer a Matemática na escola e, desse modo, meios para ensiná-la.

Simon pondera mais uma vez que se o construtivismo é uma teoria epistemológica, ela não define uma orientação particular de ensino. O desenvolvimento do conhecimento está presente no professor ou no ensino realizado. Não existe uma simples função que mapeie a metodologia de ensino dentro de princípios construtivistas. De outra forma*: o construtivismo epistemológico não determina a apropriação ou inapropriação de estratégias de ensino*.

Para Bauerfied, citado por Simon (apud Pires, 2009), a construção cognitiva, de natureza essencialmente humana, e a processual emergente dos temas, regularidades e normas entrecruzando Matemática, interação social – para trazer a cognição e o social juntos – não podem ser construídas *com simples sumários prescritivos de ensino.* Assim, não há referências a respeito da operacionalização de uma perspectiva construtivista social, sem contradizê-la. Comumente é usada a denominação "ensino construtivista", no entanto, o construtivismo não oferece uma noção de como resolver os problemas de ensino ou de como efetivá-lo.

Simon propõe que, para uma perspectiva teórica, a questão que precisa de atenção é a seguinte: "Em que o construtivismo contribui para o desenvolvimento de um proveitoso trabalho teórico estruturado pela Pedagogia da Matemática?" (apud Pires, 2009, p.10)

Pires (2009) destaca sua concordância com Simon, quando ele considera excessivamente simplista aproveitar a conexão do construtivismo para o ensino com a romântica noção de "deixar os alunos sozinhos e eles construirão seu conhecimento matemático" (p.11). E acrescenta: "Colocar alunos em grupos e deixá-los socializar o modo como eles resolvem seus problemas" (p.9). E lembra que nas experiências educacionais brasileiras ideias como estas foram veiculadas de forma maciça e ocasionaram grandes problemas no que se refere ao papel do ensino e do professor.

Simon conta que em sua experiência com alunos perguntava-se: "Como poderia entender o pensamento daqueles estudantes e como poderia trabalhar com eles para verificar se seriam capazes de desenvolver raciocínios mais poderosos? O autor conclui que, nessas experiências com alunos ficou bem nítida a relação entre o projeto de atividades do professor e a consideração do pensamento que os alunos podem trazer em sua participação nessas atividades , conduzindo assim, à formulação da ideia de trajetórias hipotéticas de aprendizagem.

1.3 Trajetória(s) hipotética(s) de aprendizagem segundo Simon

Simon defende a ideia de que a consideração do objetivo da aprendizagem, as atividades de aprendizagem e pensamento e conhecimento dos estudantes são elementos importantes na construção de uma trajetória hipotética de aprendizagem – parte chave do que ele denomina Ciclo de Ensino de Matemática.

No que se refere ao conhecimento dos professores de Matemática, além das hipóteses sobre o conhecimento dos alunos, outros diferentes saberes profissionais intervêm, como por exemplo: teorias do ensino sobre Matemática; representações matemáticas; materiais didáticos e atividades; e teorias sobre como alunos constroem conhecimentos sobre um dado assunto – saberes estes derivados da pesquisa em literatura e/ou da própria experiência docente.

Durante o desenvolvimento das atividades pelos professores, um objetivo inicial planejado, geralmente, deveria ser modificado muitas vezes (talvez continuamente), durante o estudo de um conceito matemático particular. Quando os alunos começam a comprometer-se com as atividades planejadas, os professores deveriam "comunicar-se" com as observações dos alunos, nas quais eles formatam novas ideias sobre esse conceito. Assim, o ambiente de aprendizagem envolveria resultados da interação entre o professor e os alunos e o modo como eles se engajam em um conteúdo matemático.

Simon refere-se a um comentário de Steffe (1990): “um professor pode propor uma tarefa; contudo, *como* os alunos constroem suas tarefas e suas experiências é que vai determinar seu potencial de aprendizagem” (apud Pires, 2009, p.12). Assim, por exemplo, se um aluno responder a um problema elaborado pelo professor, e no entendimento do professor, não for uma compreensão adequada sobre conceitos ou procedimentos envolvidos, isso deve resultar num novo objetivo de ensino sobre o assunto. Este objetivo, temporariamente, substitui o original.

Simon afirma que em suas experiências, a discussão na sala de aula o impulsionou a reexaminar diversos conhecimentos para favorecer a elaboração do seu “mapa conceitual” e destaca que o termo “mapa”, neste contexto, é usado para enfatizar que o conhecimento do professor serve como um mapa que traduz como ele se empenha na construção da compreensão dos alunos e identifica o potencial de aprendizagem.

Simon ressalta que sua observação em relação aos alunos modificou sua perspectiva tanto no que se refere ao conhecimento dos alunos quanto à concepção matemática envolvida (seu mapa interno). Esta reorganização de perspectivas contribuiu para a modificação de seus objetivos e planos para atividades de ensino/aprendizagem que ele havia elaborado anteriormente.

1.4 O Ciclo de Ensino de Matemática segundo Simon

A análise do episódio de ensino vivenciado por Simon contribuiu para o desenvolvimento do Ciclo de Ensino Matemático (Figura 1), como um modelo de inter-relações cíclicas dos aspectos do conhecimento do professor, pensamento, tomada de atitudes.

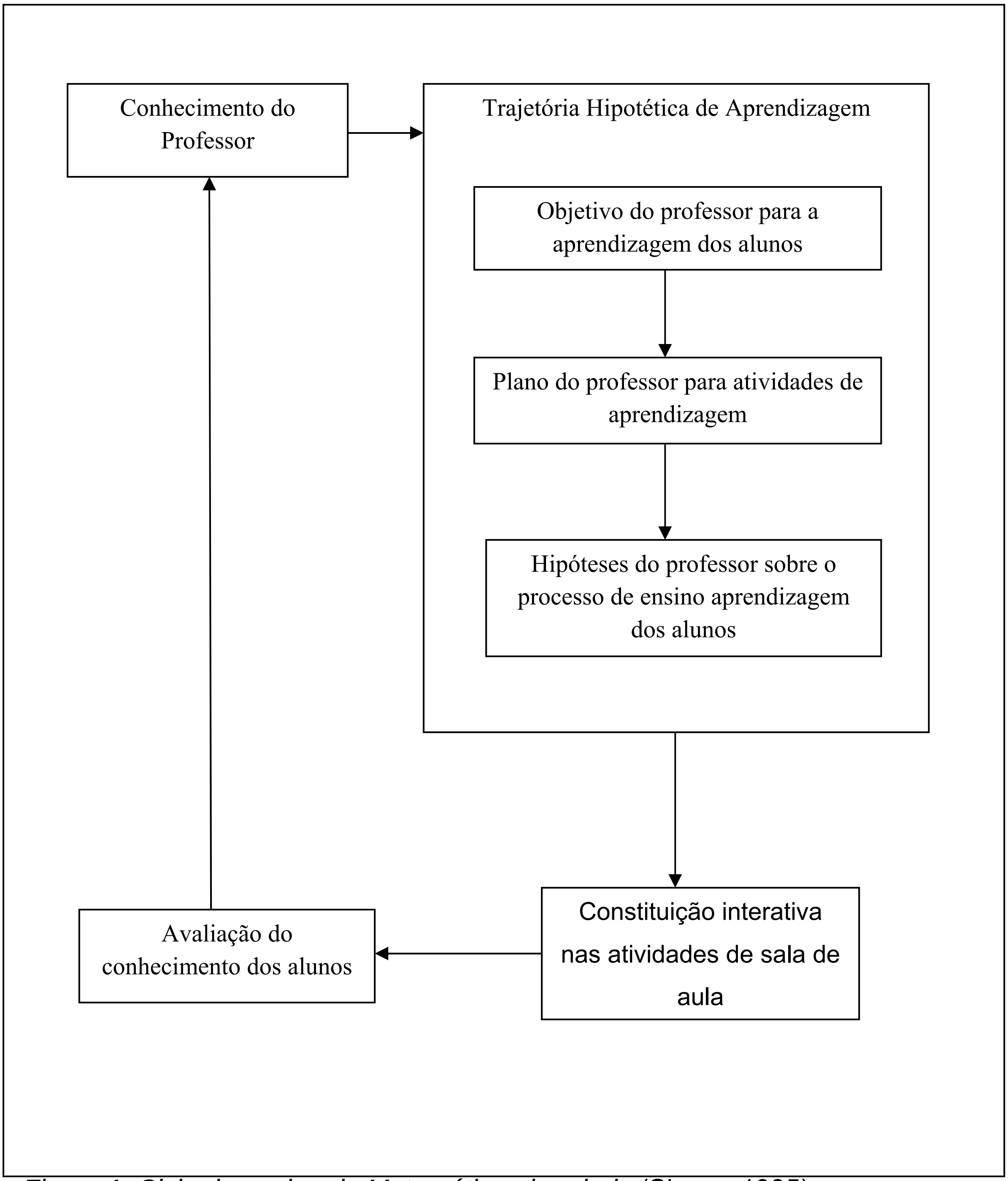


Figura 1: Ciclo de ensino de Matemática abreviado (Simon, 1995)

Simon refere-se a *hipóteses* sobre o conhecimento dos alunos para enfatizar que não temos acesso direto ao conhecimento deles. E destaca:

> *Como professor, minha concepção do conhecimento matemático dos alunos, está estruturada pelo meu conhecimento da Matemática em questão. Convenientemente,*

o que observei no gosto pelo pensamento matemático dos alunos e meu entendimento das idéias matemáticas envolveram interconexões. Estes dois fatos são interessantes na esfera do ensino do professor. (SIMON,1995, p. 29).

E faz uma referência a Steffe (1990) para o qual, usando seu próprio conhecimento matemático, os professores de Matemática devem interpretar a linguagem e as ações dos seus alunos e tomar decisões sobre seus possíveis conhecimentos matemáticos e ampliar suas possibilidades de aprendizagem. Para Simon é a meta da aprendizagem estabelecida pelo professor junto aos seus alunos que possibilita uma direção para uma trajetória hipotética de aprendizagem:

Usaremos o termo trajetória hipotética de aprendizagem tanto para fazer referência ao prognóstico do professor, como para o caminho que possibilitará o processamento da aprendizagem. É hipotética porque caracteriza a propensão a uma expectativa. O conhecimento individual dos estudantes ocorre de forma idiossincrática, embora freqüentemente em caminhos similares. O conhecimento do indivíduo tem alguma regularidade (cf. Steffe, Von Glaserfield, Richards e Cobb, 1983), que em sala de aula adquire com atividades matemáticas freqüentes em métodos prognósticos, e que muitos dos alunos em uma mesma sala de aula podem se beneficiar das mesmas tarefas matemáticas. (SIMON, 1995, p. 34)

Para Simon, a trajetória hipotética de aprendizagem possibilita ao professor construir seu projeto de decisões, baseado em suas melhores suposições de como o conhecimento poderia ser processado.

1.5 Composição da Trajetória hipotética de aprendizagem, segundo Simon

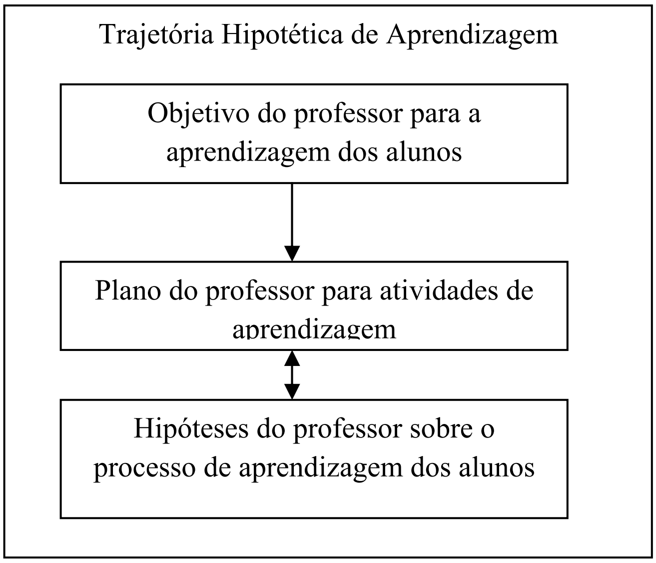
Uma trajetória hipotética de aprendizagem – THA – é composta por três componentes:

1. o objetivo do professor, com direções definidas para a aprendizagem de seus alunos;

2. as atividades de ensino;

3. o processamento hipotético de aprendizagem (uma suposição de como o pensamento e o entendimento dos alunos serão colocados em ação, no contexto de aprendizagem das atividades).

A criação das possibilidades de modificações da trajetória hipotética de aprendizagem é a parte central do modelo adiante diagramado.



A noção da trajetória hipotética de aprendizagem, para Simon (apud Pires, 2009, p.15), pressupõe a importância da relação entre a meta pretendida e o raciocínio sobre decisões de ensino e a hipótese sobre esse percurso. Para ele, o desenvolvimento de um processo hipotético de aprendizagem e o desenvolvimento de atividades dessa aprendizagem têm uma relação simbólica. A geração de ideias para atividades de aprendizagem é subordinada à hipótese do professor sobre o desenvolvimento do pensamento e aprendizagem de seus alunos. A escolha da palavra “trajetória” é significativa para designar um caminho. Simon nos convida a uma analogia:

> *Façamos uma analogia: considere que você tenha decidido viajar ao redor do mundo para visitar, na seqüência, lugares que você nunca tinha visto. Ir para a França, depois Havaí, depois Inglaterra, sem uma série de itinerário a seguir. Antes, você adquire conhecimento relevante para planejar sua possível jornada. Você faz um plano. Você pode inicialmente planejar toda a viagem ou uma única parte dela. Você estabelece sua viagem de acordo com seu plano. No entanto, você deve fazer constantes ajustes, por causa das condições*

que irá encontrar. Você continua a adquirir conhecimento sobre a viagem e sobre as regiões que você deseja visitar. Você muda seus planos a respeito da seqüência do seu destino. Você modifica o tamanho e a natureza de sua visita, de acordo com o resultado da interação com as pessoas no decorrer do caminho. Você adiciona os destinos à sua viagem e que não eram de seu conhecimento. O caminho que você utilizará para viajar é sua "trajetória". O caminho que você antecipa em algum ponto é a sua "trajetória hipotética". (SIMON, 1995, p.35)

1.6 A geração de uma trajetória hipotética de aprendizagem

Pires (2009) explica que para Simon (1995) a geração de uma THA prioriza buscar a forma pela qual o professor desenvolve seu planejamento em atividades de sala de aula, mas também ajuda a identificar como o professor interage com as observações dos alunos, coletivamente, constituindo uma experiência e construindo novos conhecimentos.

Esta experiência pela essência da sua construção social é diferente das primeiras antecipações dos professores. Simultaneamente ocorre uma construção social de atividades em sala de aula e a modificação das idéias e conhecimento do professor, que ele vai construir em função do que está acontecendo ou do que aconteceu na sala de aula. (SIMON, 1995, p.36)

O diagrama da figura 1, apresentado anteriormente, indica que a avaliação do pensamento do aluno, pode trazer muitas adaptações a respeito de qualquer conhecimento do professor, o que possibilita uma nova ou modificada trajetória hipotética de aprendizagem.

Simon destaca a relação entre os vários domínios do conhecimento do professor, a trajetória hipotética de aprendizagem, e as interações com os alunos (figura 2). O conhecimento matemático do professor contribui para a identificação de um objetivo de ensino. Estes domínios de conhecimento, a meta de ensino e o conhecimento da representação das atividades matemáticas para o professor, seu conhecimento sobre a aprendizagem individual do aluno, bem como a concepção de aprendizagem e ensino (ambos em geral dentro da Matemática) contribuem para o desenvolvimento das atividades de aprendizagem e processos de aprendizagens hipotéticas.

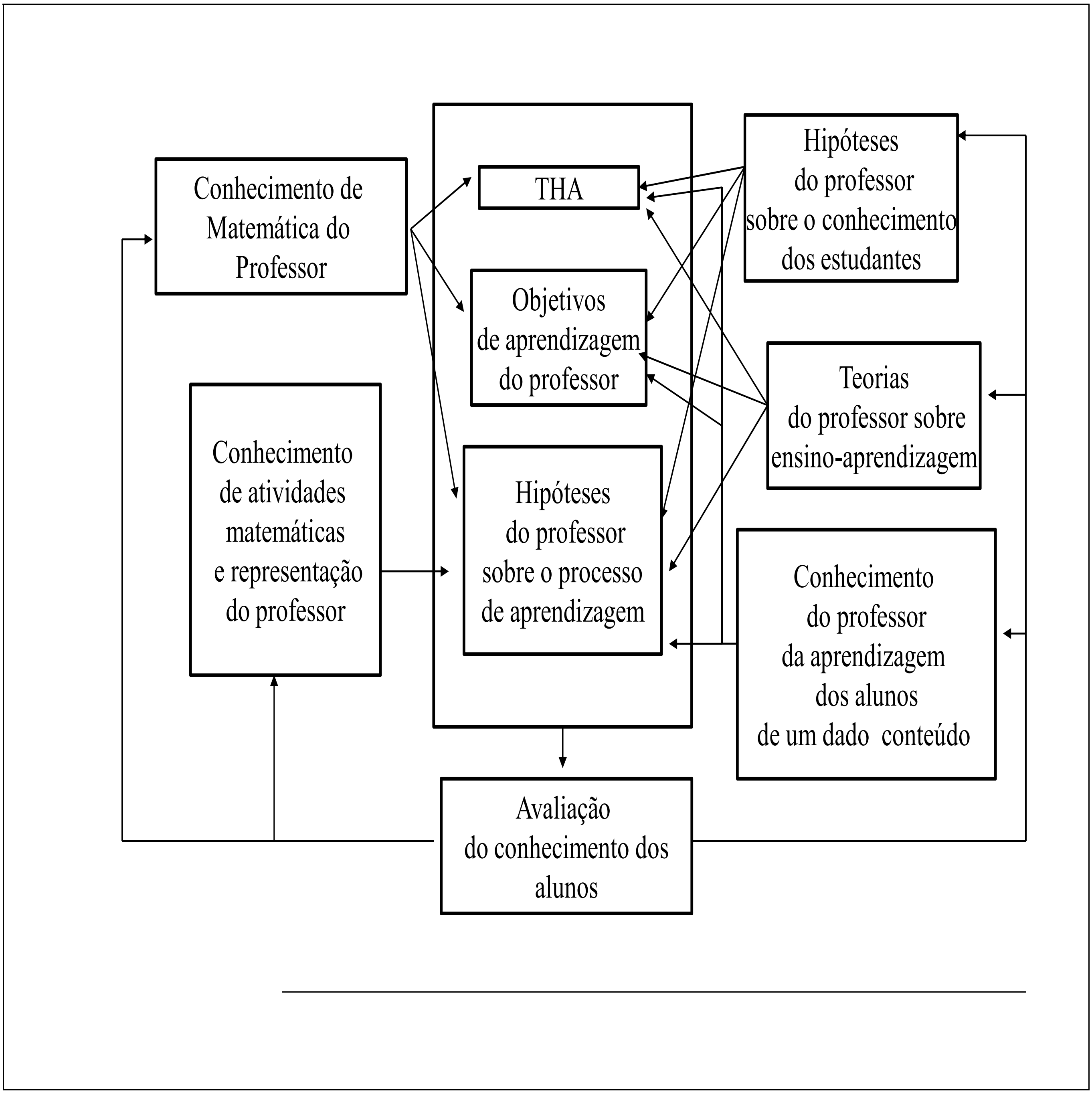


Figura 2: Domínios do conhecimento do professor, trajetória hipotética de aprendizagem e interações com os alunos.

Simon afirma ainda que a modificação da trajetória hipotética de aprendizagem não é alguma coisa que somente ocorre durante o planejamento entre aulas.

> *O professor está constantemente comprometido em ajustar a trajetória de aprendizagem que "hipotetizou", para melhor refletir seu aumento de conhecimento. Ele está constantemente percebendo a extensão das modificações e transformações que podem ser construídas por algum ou todos os componentes da trajetória hipotética de aprendizagem: o método, as atividades e o processamento hipotético da aprendizagem.* (apud Pires, 2009, p. 19)

1.7 Outras contribuições para a reflexão sobre THAs

No artigo de Pedro Gómez e José Luis Lupiáñez (2007), "Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria", os autores fazem uma análise sobre o interesse de diferentes pesquisadores sobre a noção de THAs, especialmente no que se refere ao processo de formação inicial de professores.

Os autores começam destacando que o interesse pelas THAs foi reconhecido com a publicação de um número de *Mathematicas Thinking and Learning*, dedicado à sua discussão (CLEMENTS Y SARAMA,2004). Steffe que ressalta a relevância desta noção dentro da Educação Matemática da seguinte forma:

> *A construção de THAs dos alunos é um dos desafios mais urgentes que a educação matemática enfrenta atualmente. É também um dos problemas mais apaixonantes, pois é ali onde podemos construir nossa compreensão da matemática dos alunos e, de que forma, nós professores, podemos influir nessa matemática. (apud Gomez y Lupiánez, 2004, p.130).*

Não obstante, esses autores revelam, que mesmo diversos investigadores reconheçam os três elementos centrais da THA (objetivos de aprendizagem, tarefas matemática e hipóteses sobre o processo de aprendizagem) e aceitem os quatro pressupostos mencionados anteriormente, cada qual interpretando e utilizando a noção com propósitos e maneiras distintas. Para Gomez e Lupiáñez (2007) são perceptíveis dois usos claramente diferenciados: ferramenta de investigação e ferramenta para planejamento.

> *Os trabalhos de Steffe (2004), Lesh e Yoon (2004) e Clements, Wilson e Sarama (2004) são trabalhos essencialmente de investigação nos quais se explora a THA para temas específicos. Por outro lado, os trabalhos de Gravemeijer (2004) e Simon e Tzur (2004),mesmo explorando também THA, preocupam-se com maior ênfase por seu uso no planejamento do professor. Finalmente, o trabalho de Batista (2004) centra-se na avaliação. (Gómez y Lupiáñez, 2007, p.81)*

Gómez e Lupiáñez afirmam que em todos os trabalhos analisados se desenvolveram exemplos de THA em temas específicos. Para tanto, os investigadores assumiram o papel de professores em aulas reais:

> *Mesmo que haja professores que participam de alguns projetos, não são eles que produzem os resultados das explorações. De fato, alguns destes trabalhos, como o de Steffe (2004) e de Gravemeijer (2004), vêem a construção de THAs como um trabalho do investigador, cujos resultados podem apoiar o trabalho do professor. (Gómez y Lupiáñez, 2007, p.82)*

E destacam que uma das principais diferenças de interpretação da noção entre esses investigadores tem a ver com o nível de concretização com que a utilizam, desde o planejamento de aulas até ao trabalho com atividades específicas numa parte de uma aula. Vejamos algumas análises feitas por Gómez e Lupiáñez:

Gravemeijer (2004) indica que sua proposta de teorias locais de ensino é a “descrição e a fundamentação para o caminho da aprendizagem prevista em sua relação a uma coleção de atividades de ensino para um tema” (p. 107).Steffe (2004), Lesh e Yoon (2004) também utilizam a noção para descrever a aprendizagem dos estudantes ao longo de várias sessões, nas quais se trabalha um tema. Simon e Tzur (2004) veem a THA como uma ferramenta para o planejamento de atividades matemáticas no dia- a- dia de uma aula. Finalmente, Baroody, Cibulskis, Lai y Li (2004) sugerem que a noção de THA pode ser utilizada para promover o “desenvolvimento micro-conceitual”, sendo esta a atividade central do ensino na aula.

Uma questão importante discutida por Gómez e Lupiáñez (2007) indaga sobre a relação que existe entre a atividade diária do professor e a noção de THA. Para eles, um aspecto ligado à atuação do professor tem a ver com o caráter reflexivo inerente à noção de THA: "(...) *Há uma relação reflexiva em que a THA é o subsídio de juízos e decisões locais que, por sua vez, modificam a THA (Gravemeijer, Cobb, Bowers e Whitenack, 2000, pp.249-250, apud Gómez e Lupiáñez).*

Gómez e Lupiáñez destacam que em seus trabalhos, Simon e Tzur (2004, p.93) também enfatizam o papel do professor na construção e revisão permanente da THA. Mas colocam um desafio: Como tornar compatível o propósito de o professor ser o construtor da revisão da THA com o fato de a totalidade dos exemplos que se tem de THA serem desenvolvidos por investigadores que assumiram o papel de professor?

Para Gómez e Lupiáñez (2007), propostas como as desenvolvidas por Steffe (2004), Lesh e Yoon (2004) são tão complexas e técnicas que acabam sendo pouco estudadas pelos professores. Por outro lado, as propostas de Simon e Tzur (2004) e Gravemeijer (2004) têm um caráter essencialmente prático.

Gómez e Lupiáñez lembram que outro ponto essencial é referenciado por Baroody, Cibulskis, Lai e Li (2004, p.233). Pois, esses nos alertam para o fato de que a validade ecológica se conquista à custa da falta de universalidade: Se é comprovado que uma THA é válida em uma circunstância particular (em um contexto, com alguns estudantes e um professor particular), isto não quer dizer que essa THA tenha sentido em outras circunstâncias.

Gómez e Lupiáñez trazem ao debate preocupações como as expressas por Gravemeijer (2004, p. 107) que reconhecem a dificuldade que teriam os professores para construir THA como as que são produzidas pelos investigadores. No entanto, isso não quer dizer que a única coisa que se pode entregar aos professores sejam meras seqüências de ensino para usar. O autor sugere dois elementos que podem ser úteis para os professores: (a) um marco de referência e (b) seqüências de atividades que lhes sirvam de exemplo. Mas questiona: Que pode fazer um professor com esta informação?

Como pode usá-la para produzir e revisar sistematicamente sua própria THA para um tema, um contexto e alunos reais?

1.8 Considerações e reflexões do grupo de pesquisa

Em seu artigo, Pires (2009) faz uma síntese de algumas das reflexões que fizemos, também, em nosso grupo de pesquisa.

Com relação às questões relacionadas à compatibilização de perspectivas construtivistas de aprendizagem com a planificação do ensino e do resultado dessas contribuições para as pesquisas na área de Educação Matemática, observou-se que essas questões podem contribuir para a organização de um ensino que potencialize boas situações de aprendizagem dos alunos. O grupo encontrou no trabalho de Simon elementos importantes:

1) A afirmação de que as visões construtivistas da aprendizagem têm dado sustentação a fundamentos teóricos na pesquisa no campo da Educação Matemática

2) Sugestões importantes para que os professores possam compreender e antecipar a forma de construção dos conhecimentos matemáticos de seus alunos.

Nosso grupo de pesquisa considera particularmente importante o alerta de Simon no sentido de que o construtivismo também aponta para um desafio à Educação Matemática, qual seja o de desenvolver modelos de ensino em que a construção dos conhecimentos seja vista como perspectiva teórica.

Simon adverte também que a Educação Matemática não produzirá métodos com ideias fixas ou plataformas para as ações docentes. Adverte ainda, que as estruturas metodológicas deverão sempre suportar transformações experimentais. Para ele, o Ciclo de Ensino Matemático retrata uma visão das resoluções construídas pelo professor, a respeito do conteúdo e das tarefas modeladas pelo encontro de uma perspectiva do construtivismo social com o desafio das aulas de Matemática. Nesse ciclo, são particularmente importantes, algumas premissas:

> *a) O pensamento/entendimento dos estudantes é especialmente considerado e tem o lugar central na formatação e implementação de instruções. O pensamento/entendimento é*

> *um processo contínuo do conjunto de dados e hipóteses construídas.*
> *b) O conhecimento do professor envolve-se simultaneamente com o crescimento do conhecimento do aluno. Como os alunos estão aprendendo Matemática, o professor está aprendendo sobre Matemática, também aprendendo e ensinando a respeito do pensamento matemático dos seus alunos.*
> *c) O planejamento das instruções é parecido com a inclusão, a criação de uma trajetória hipotética de aprendizagem. Esta visão reconhece e valida o método de ensino do professor e a importância de hipóteses sobre o processamento da aprendizagem dos alunos (idéias nas quais eu espero ter demonstrado que não estão em conflito com o construtivismo).*
> *d) A transformação continuada do conhecimento do professor cria mudanças contínuas na sua própria trajetória hipotética de aprendizagem.* (PIRES, 2009, p.22-23)

Pires avalia que a leitura dos textos motivou a ampliação das discussões sobre a atuação do professor de Matemática quanto às atividades de planejamento do ensino e que deve-se levar em conta que o aluno desempenha papel central na construção de suas aprendizagens.

Ressalta que a esse respeito, Simon comenta que indicações sobre a importância da interação de pequenos grupos e a manipulação de materiais, por exemplo, podem ser instrumentos valiosos nas mãos dos professores de Matemática.

No entanto, estes instrumentos não são suficientes para permitir que os professores sejam arquitetos da produção de situações de aprendizagens que resultariam em crescimento conceitual de seus alunos. Professores novatos, por exemplo, muitas vezes questionam o conhecimento de seus alunos (consciente ou inconscientemente), esperando que no mínimo um aluno esteja habilitado a explicar sua ideia para os outros. E perguntam o que devem fazer com um grupo de alunos para que construam conceitos matemáticos.

Pires comenta que essas situações são bastante comuns, hoje, no Brasil. Nos cursos de formação inicial, a chamada “Prática de Ensino” e mesmo as atividades de estágio, de modo geral, estão muito defasadas quanto aos estudos que possibilitem ao futuro professor a construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem, tanto em termos teóricos como em termos práticos.

Assim, o jovem professor tende a usar modelos ultrapassados, sem perceber a necessidade de conhecer e de construir modelos de ensino consistentes e construídos de forma coerente, com teorias – como é o caso das teorias de perspectiva construtivista. Para mudanças significativas, os jovens professores precisariam conhecer melhor seus alunos, para construir trajetórias hipotéticas de aprendizagem e analisar os resultados de seu trabalho com os alunos.

2. Algumas pesquisas sobre ensino e aprendizagem de função exponencial

Em função do nosso tema de pesquisa, buscamos estudos realizados sobre o tema Função Exponencial. Para tanto, fizemos uma pesquisa, pela internet, no Banco de Teses da Capes, na PUC-SP e UEL (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática de Londrina). Pesquisamos os títulos das dissertações produzidas no Brasil entre 1997 a 2007.

Selecionamos duas dissertações de mestrado que fizeram o estudo do tema. São eles: são Dominoni (2005) e Araújo (2005).

Dominoni (2005), em sua dissertação, propôs verificar se a utilização de uma sequência didática que considere o tratamento, a conversão e a coordenação dos diferentes registros de representação da Função Exponencial contribui para a apreensão do objeto matemático Função Exponencial. A autora fundamenta sua seqüência didática na Teoria dos Registros de Representação Semióticos de Raymond Duval, e como metodologia utiliza os princípios da Engenharia Didática proposta por Artigue (1996). Os objetivos dessa seqüência consistem em propor atividades que permitam ao aluno compreender Função Exponencial, e lidar com diferentes registros de representação desta função (linguagem natural, registro tabular, registro gráfico e registro algébrico).

A sequência didática foi aplicada com alunos da 1ª Série do Ensino Médio, em uma escola particular da cidade de Arapongas no Paraná. Participaram da pesquisa 27 alunos, na faixa etária de 13 a 15 anos. Os alunos trabalharam em doze duplas e um trio, porém foram analisadas as atividades, apenas, de 8 duplas, devido os mesmos terem participado de todos os encontros. A experimentação ocorreu durante as aulas de Matemática, com o objetivo de iniciar o conteúdo de Função Exponencial.

As atividades foram desenvolvidas em duas fases: na 1ª fase, foram realizados seis encontros para o desenvolvimento das atividades. Durante a realização das atividades, os alunos puderam ter o auxílio e intervenção da pesquisadora sempre que necessário, além disso, ao final de cada atividade a pesquisadora fez uma sistematização dos conteúdos abordados em cada atividade. A 2ª fase foi constituída por um único encontro e as atividades foram desenvolvidas em duplas, sem o auxílio da pesquisadora, pois o objetivo era o de verificar a apreensão dos alunos quanto ao objeto matemático, Função Exponencial.

Dominoni (2005) percebeu na análise da sequência didática, que os alunos apresentaram dificuldades nas conversões do registro algébrico para o registro gráfico. As dificuldades apresentadas foram de diferentes tipos, entretanto o que mais se observou foi que em alguns momentos, o registro gráfico não correspondia ao registro algébrico, devido ao uso inadequado das escalas para as variáveis, acarretando a não associação do gráfico à equação algébrica. Em geral, as conversões foram mediadas pelo registro tabular que auxiliou a interpretar o registro algébrico e gráfico obtendo assim, sucesso nas respostas.

Contudo, a autora aborda que o processo de ensino e aprendizagem é complexo e afirma, ainda, que é pretensioso fazer qualquer afirmação a respeito do que o aluno aprendeu sobre o conceito de Função Exponencial. Mas, com base nos resultados obtidos, Dominoni relata que os alunos participantes da sequência didática identificaram a Função Exponencial nos diferentes registros de representação e realizaram a coordenação entre eles. Assim, de uma forma aparentemente contraditória, Dominoni (2005) conclui que levando-se em conta o tratamento, a conversão e a coordenação entre diferentes registros de representação de um objeto matemático, como um dos meios que permitem a apreensão de um conceito, pode-se considerar que o conceito de Função Exponencial foi apreendido pelos alunos que participaram do desenvolvimento da sequência didática.

De modo geral, a autora acredita que poderia amenizar as dificuldades encontradas no desenvolvimento das atividades, se na 1ª fase incluísse mais atividades que proporcionassem a conversão entre o registro em linguagem natural e o registro algébrico, e a conversão do registro gráfico para o algébrico.

Na segunda dissertação, a de Araujo (2005), a pesquisa em questão teve como objetivo desenvolver um software educativo que proporcionasse aos alunos do 1º Ano do Ensino Médio, da rede pública mais uma ferramenta pedagógica de estudo que contribua na construção do conhecimento de forma não-linear para as funções exponenciais e logarítmicas.

Araújo (2005) buscou em sua pesquisa responder em que medida a utilização de um software educativo, como ferramenta didática no estudo de conteúdos matemáticos, relacionados com as funções exponenciais e logarítmicas contribui para a aprendizagem do aluno.

O software que ele desenvolveu foi baseado na estrutura lógica do primeiro software educacional elaborado para utilização do computador em educação, Instrução Auxiliada por Computador (CAI – Computer Assisted Instruction) (cf. p.33). O objetivo do CAI é a aprendizagem. Nele as atividades são elaboradas com uma sequência rígida e apresentadas de maneira encadeada. Assim, as atividades são organizadas de forma que possibilitem o treinamento do aluno. O professor poderá selecionar atividades de acordo com a necessidade e a capacidade dos seus alunos, fazendo com que eles reflitam sobre as questões e as operações do programa. De maneira geral, a finalidade do programa é a de que as atividades sejam apresentadas independentemente dos procedimentos de ensino.

O software que Araújo desenvolveu objetivava proporcionar ao usuário uma aprendizagem agradável e interativa sobre função exponencial e logarítmica. No software, o autor elaborou ícones em que o usuário escolhia o assunto a ser estudado, como problemas, texto com teorias, dicas para a resolução do problema com vídeo-aulas, animações com utilizações dos dados das atividades e gráficos produzidos no software Cabri-Géomètre, Winplot ou Graphmatica, cujos conteúdos básicos visavam solidificar os conhecimentos já adquiridos.

Para a construção e desenvolvimento do software educativo, o autor utilizou muitos softwares como: o Macromedia Flash MX, que auxilia na estrutura lógico e visual; o Cabri-Geometre, para auxiliar na construção dos gráficos e objetos geométricos; Graphmatica e Winplot, para auxiliar na construção dos gráficos.

Com o objetivo de elaborar as atividades, Araújo (2005) realizou uma pesquisa quantitativa que envolveu 27 professores do Ensino Fundamental, Médio e Superior da rede pública e privada. Eles responderam a um questionário que tinha como objetivo identificar as dificuldades de aprendizagem dos alunos, nos conteúdos de funções exponenciais e logarítmicas. Após a análise do questionário, o autor elaborou as atividades para desenvolver o conceito de função exponencial e logarítmica.

Com relação à equação exponencial, Araújo (2005) relata que 70% dos professores participantes alegaram que o aluno tem dificuldade algébrica, ou seja, apresenta dúvidas com relação à manipulação da equação. Além disso, apontaram a dificuldade de os alunos operarem com expoente negativo.

As atividades foram desenvolvidas no laboratório de informática da Escola Técnica Carlos de Campos, no Brás, em São Paulo e aplicado a um grupo de 20 alunos de umas das três séries do Ensino Médio. As atividades foram realizadas em duplas.

Na realização das atividades, os alunos responderam a três questionários. O primeiro tinha como objetivo identificar quais alunos tinham familiaridade no uso do computador e se já haviam utilizado algum Software Educativo de Matemática. O segundo foi o de aplicação de questões teóricas retiradas do próprio software de funções do primeiro e do segundo grau, função exponencial e logarítmica. O último tinha o objetivo de identificar quais eram as dificuldades em interagir com o sistema e os pontos negativos ou positivos do Software Educacional.

No segundo questionário, em uma primeira fase, alguns alunos responderam às questões de funções do primeiro e segundo grau, enquanto outras duplas responderam questões referentes à função exponencial e logarítmica utilizando lápis e papel. Após a execução dessa fase, os alunos realizaram uma segunda fase com o auxilio do software e as questões respondidas foram trocadas pelas duplas. Assim, quem respondeu a priori, utilizando lápis e papel as questões de funções de primeiro e segundo grau posteriormente iriam resolver as funções exponenciais e logarítmicas no software e vice-versa. Os questionários foram analisados de maneira quantitativa.

Contudo, o autor relata que houve diversas contribuições à aprendizagem dos alunos, referente aos conteúdos pesquisados com a utilização do software: 1) acesso às diversas formas da apresentação de uma teoria; 2) agilização na procura de informações; 3) reflexão/depuração constante da informação recebida após a introdução de dados; 4) agilização do tempo de estudo; 5) o aluno como elemento ativo no processo de aprendizagem; 6) acesso às teorias das funções, de forma rápida, auxiliando a formação de uma base de conhecimento e a interferência didática na construção de "linhas" de raciocínios, possibilitando assim, a sedimentação do conhecimento.

Além dessas contribuições, Araújo (2005) fez a observação de que os professores poderiam trabalhar com as três séries em um mesmo ambiente, a sala de informática, sem apresentar restrições.

Com a revisão bibliográfica referente ao tema função exponencial, podemos perceber que em ambas as dissertações os autores relataram a dificuldade que o aluno apresenta em operar com expoente negativo. Com isso, identificamos que alguns conceitos matemáticos não são bem assimilados ao decorrer da vida escolar e que ocasiona dificuldades na apreensão de novos conceitos.

CAPITULO 2
CONSTRUÇÃO DA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM SOBRE FUNÇÃO EXPONENCIAL

Neste capítulo, apresentamos o processo de construção da primeira versão da THA.

Antes, porém, fazemos alguns comentários que consideramos importantes. A discussão inicial do grupo de pesquisa foi a de que seria interessante que os professores das turmas que iriam desenvolver a THA junto aos seus alunos, elaborassem, eles próprios, a primeira versão de uma THA sobre funções exponenciais, com base nos seus conhecimentos como professores. Essa versão, posteriormente seria discutida com a professora pesquisadora. Contudo, a opção logo se mostrou inviável, em função de dificuldades alegadas pelos professores.

Assim, encaminhou-se a proposta de que cada professor pesquisador, integrante do grupo de pesquisa, elaboraria a primeira versão da THA, fazendo uso de sua experiência profissional e também de seus estudos realizados no curso de pós-graduação. Essa primeira versão serviria de ponto de partida para a discussão com o grupo de professores do Ensino Médio, que por sua vez deveriam propor alterações que julgassem importantes e necessárias, formulando a segunda versão da THA.

No desenvolvimento das atividades em sala de aula, a professora pesquisadora passou a ser observadora do processo, e para isso, elaborou instrumentos para coletar seus dados (Anexo C). Nas reuniões semanais do grupo de pesquisa, a professora pesquisadora foi relatando ao grupo, o andamento de seu trabalho, as dificuldades que foram se apresentando e as soluções encontradas. Nessa etapa da pesquisa, também foram coletados dados referentes à aprendizagem dos alunos, por meio de avaliações elaboradas pela professora pesquisadora e os professores da turma.

2.1 O processo de construção da THA sobre função exponencial

Com base no conhecimento, enquanto professora, e ampliados pelas leituras realizadas referente ao ensino de Função Exponencial, construímos uma trajetória hipotética de aprendizagem considerando o aluno como o agente principal de sua aprendizagem e, além disso, desenvolvemos uma THA com vistas a que o professor pudesse trabalhar com o aluno de uma forma interativa e investigativa.

Ao construir uma THA sobre função exponencial apoiados em nossa experiência profissional, sabíamos que tal tema era abordado nas aulas não valorizando a utilidade da função em outras áreas de conhecimento e muito menos como um instrumento que proporciona buscar a regularidade nos fenômenos naturais e sociais.

Antes de iniciar a construção da THA optamos por verificar como é feita a abordagem desse tema nos livros didáticos adotados no Ensino Médio. Verificamos alguns livros que os professores participantes do projeto usam como apoio, como: Iezzi (2004), Smole & Diniz (2005) e Giovanni; Bonjorno; Jr. (1994).

Percebemos que dois destes livros, Iezzi (2004) e Gionanni et.(1994), iniciam o estudo da função exponencial com revisão de potências e suas propriedades. Já o livro das autoras Smole & Diniz (2005) iniciam o capítulo com um texto que traz a história da multiplicação e da divisão de potências de mesma base. Em seguida, apresentam o conteúdo da função exponencial com uma situação-problema e o estudo das propriedades de potência. Dos três livros verificados, percebemos que o único que não aborda, em nenhum momento, o tema pesquisado como situação-problema é o livro dos autores Giovani et.(1994).

O estudo realizado sobre a abordagem de função exponencial nos livros didáticos possibilitou uma reflexão em construir uma trajetória hipotética de aprendizagem com diferentes situações-problema do tema, visando favorecer a apreensão do conceito de função exponencial pelos alunos.

Na construção da trajetória, outras fontes de pesquisa foram utilizadas, como a internet entre outras. Procuramos entender a maneira com que o tema proposto era abordado. Para isso, pesquisamos em sites educativos e artigos que relatassem a importância desse estudo.

Em uma dessas buscas encontramos o livro *Bilhões e Bilhões* de Carl Sagan (2008) que foi de grande utilidade para a construção da nossa THA. O livro apresenta diversos textos que se relacionam ao tema de nossa pesquisa. Com isso, direcionamos a construção de nossa THA com atividades que proporcionassem ao aluno a leitura e a interpretação de textos.

Os textos apresentados no livro de Sagan possibilitaram-nos traçar algumas etapas para a aprendizagem que favorecessem a compreensão do nosso objeto de estudo e, a nosso ver, permitiram aos alunos identificar a função exponencial como uma ferramenta de análise de problemas de outras áreas de conhecimento.

Optamos por iniciar a THA com atividades em que, por meio da investigação, o aluno retomasse o conceito de potenciação e suas propriedades. Essa iniciativa teve como motivação enfrentar as possíveis dificuldades do aluno em potência com expoente negativo, apontadas nas pesquisas de Dominoni (2005) e Araújo(2005).

Na segunda etapa, por meio de textos de várias áreas, abordamos situações reais em que a ideia de *crescimento exponencial* estivesse presente, pois o nosso objetivo era o de fazer com que os alunos discutissem o assunto e procurassem relacionar a expressão com “crescimento rápido”.

Com relação às representações gráficas, optamos por trabalhar com gráficos de diferentes funções para que o aluno, por meio da investigação, pudesse conhecer a curva que representa a função exponencial, além de perceber algumas de suas características. Para estimular comparações, os gráficos apresentados foram da Função do 1º Grau, Função Quadrática e Função Exponencial.

A terceira etapa objetivou iniciar o estudo de função exponencial, a partir de um texto do livro *Bilhões e Bilhões*. A situação apresentada pelo texto nos proporcionou que o tornássemos uma situação-problema investigativa, por meio da qual o aluno se aproximaria da lei de uma função exponencial.

Na sequência, utilizamos ainda, textos e situações-problema para abordar características da função, juntamente com sua representação gráfica e a resolução de equações exponenciais.

Para finalizar a nossa trajetória hipotética de aprendizagem sobre função exponencial, optamos em trabalhar com o tema em uma área da própria Matemática, ou seja, na Matemática Financeira. Nosso objetivo foi o de que o aluno pudesse perceber mais uma vez as aplicações do objeto de estudo em outros assuntos da própria Matemática e, no caso, com largo uso em situações do cotidiano, como o cálculo de juros simples e compostos.

O processo de construção da THA foi um verdadeiro desafio. De modo geral, nós professores estamos habituados a trabalhar com sequências prontas, sem refletir sobre objetivos de aprendizagem e hipóteses sobre conhecimentos dos alunos. Ficou bem evidente a discussão de Simon, no sentido de que elaboração de uma trajetória hipotética de aprendizagem permite ao professor a possibilidade de construir seu projeto de decisões, baseado em suas melhores suposições de como o conhecimento poderia ser processado. Planejar um caminho que viabilize a compreensão de um conceito, utilizando o conhecimento do aluno e as nossas hipóteses para suas aprendizagens é uma situação desafiadora e intrigante.

2.2 Objetivos para a aprendizagem dos alunos

Embora o tema função exponencial seja amplo, definimos alguns objetivos de aprendizagem para os alunos do 1º ano do Ensino Médio, identificados a seguir:

- ✓ Reconhecer e utilizar em situações problema variações de grandeza expressas por leis do tipo $y = a^x$.
- ✓ Identificar gráficos que descrevem funções exponenciais e reconhecer uma função exponencial a partir de seu gráfico.
- ✓ Identificar o gráfico de uma função polinomial do primeiro grau como um gráfico que representa os juros simples em função do tempo e o gráfico

de uma função exponencial, como um gráfico que representa o montante quando se utilizam juros compostos.

- ✓ Determinar a lei de uma função exponencial que expressa o montante numa situação de juros compostos e calcular acréscimos e descontos sucessivos em situações problema, identificando lucros ou prejuízos em operações comerciais.

2.3 Hipóteses da professora pesquisadora sobre o processo de aprendizagem dos alunos

Como já mencionamos anteriormente, nossa pesquisa sobre função exponencial tem por objetivo analisar como podem ser organizadas e desenvolvidas propostas didáticas (THA) em sala de aula, considerando que algumas metodologias e/ou estratégias possam contribuir para a aprendizagem deste objeto matemático, sendo elas: uma abordagem interdisciplinar dos conhecimentos, a exploração de situações contextualizadas a serem trabalhadas por meio da resolução de problemas e a utilização de recursos de simulações de softwares.

Nosso interesse em buscar e investir em diferentes estratégias didáticas está relacionado à maneira pela qual a Matemática é trabalhada com alunos do ensino médio. Ao longo dos anos, como aluna, e agora como professora, foi possível perceber que na maior parte das experiências, o conhecimento é oferecido como algo pronto e acabado, cabendo aos estudantes memorizar regras e técnicas, por meio da repetição. As discussões mais recentes sobre o papel da Matemática na formação do aluno parecem não chegar facilmente às salas de aula e seu aspecto instrumental fica bastante distante da percepção dos alunos, embora seja recomendado por documentos oficiais:

> No que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional. (PCNEM, Brasil, 2002, p. 251)

Sabemos que a Função Exponencial está ligada a outras áreas do conhecimento, como a: Física, Biologia, Economia entre outras, em que esse objeto matemático é utilizado em fenômenos naturais, buscando regularidades em seus acontecimentos.

De acordo com Pozo (1998), "*quanto mais diversificados forem os campos nos quais apresenta uma mesma tarefa, mais possibilidade há de que as técnicas e habilidades utilizadas sejam generalizadas a novos campos do conhecimento*". (p.50-51).

Essa perspectiva também é destacada também em documentos oficiais:

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência. (PCNEM, Brasil, 2002, p. 255)

No que se refere a articulações interdisciplinares, procuramos relacionar o assunto com a Biologia, com a Informática, considerando que articulações interdisciplinares podem contribuir para que o aluno possa melhor compreender o objeto matemático em questão. Consideramos interessante também destacar que essas articulações disciplinares não serão vistas como meros complementos, mas como parte integrante da construção de conceitos e procedimentos pelos alunos:

> Essa articulação interdisciplinar, promovida por um aprendizado com contexto, não deve ser vista como um produto suplementar a ser oferecido eventualmente se der tempo, porque sem ela o conhecimento desenvolvido pelo aluno estará fragmentado e será ineficaz. (PCN+, Brasil, 2002, p. 31)

Vemos na interdisciplinaridade uma possibilidade de proporcionar ao aluno, um caminhar por trilhas entrecruzadas em que observe a contribuição de diferentes áreas do conhecimento, articulando e integrando conhecimentos disciplinares e percebendo como a Matemática interage com diversas áreas do conhecimento, deixando, assim, de ser isolada e fragmentada.

No que se refere à contextualização, consideramos que a busca de situações para que o aluno construa significados sobre o assunto que está aprendendo pressupõe não apenas evidenciar aplicações em outras áreas, mas também mostrar sua inserção na História da Matemática, sua relação com outros temas matemáticos, formas de representação (algébrica, geométrica), comparações com outras formas de variação de grandezas, dentre outras possibilidades.

Abordagens interdisciplinares e exploração de diferentes contextos podem ser potencializadas pela adoção de um trabalho que contemple a perspectiva da resolução de problemas e das investigações. Parece-nos pouco coerente que a exploração de contextos significativos seja realizada nos moldes tradicionais de aulas expositivas realizadas pelo professor, em que os estudantes são meros ouvintes. Assim, vamos propor atividades em que, por meio de resoluções de problemas, os estudantes possam trabalhar com a função exponencial em diferentes situações.

> A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajando ativamente no enfrentamento de desafios. (PCN+, Brasil, 2002, p.112)

Adotamos o recurso à resolução de problemas e à investigação como vem sendo sugerido nas pesquisas de Educação Matemática e em documentos oficiais.

> Não somente na Matemática, mas até particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema, novas mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar a experimentar, a organizar dados, sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação. (PCNEM, Brasil, 2002, p. 266)

Na resolução de problemas, o importante é que a estratégia de resolução não seja apresentada ao aluno, pois a finalidade deste recurso de ensino é fazer com que o aluno mobilize seus conhecimentos adquiridos e busque estratégias que o leve à resolução do problema, sem o auxílio constante do professor.

> Ensinar os alunos a resolver problemas supõe dotá-los da capacidade de aprender a aprender, no sentido de habituá-los a encontrar por si mesmos respostas às perguntas que os inquietam ou que precisam responder, ao invés de esperar uma resposta já elaborada por outros e transmitidas pelo livro-texto ou professor. (Pozo, 1998, p.14-15)

Se consideramos que, no ensino da Matemática o fundamental é proporcionar situações de aprendizagem que estimulem o aluno a enfrentar diferentes problemas que exijam dele a aprendizagem de novos conhecimentos, sabendo buscar novas estratégias para resolver problemas, a “resolução de problemas” deve ter lugar privilegiado nas aulas de matemática.

> Na resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução. E, para isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido. (PCN+, Brasil, 2002, p.113)

No que se refere ao trabalho com investigações, Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas e Ferreira (1999) definiram quatro etapas características de uma investigação matemática: (1) Formular a questão a ser investigada; (2) formular conjecturas relativamente a essa questão; (3) Testar as conjecturas e, eventualmente, reformulá-las; (4) Validar e comunicar os resultados.

Para Ponte (2003), por sua vez, uma tarefa de investigação tem quatro dimensões básicas: (a) O grau de dificuldade, (b) a estrutura, (c) o contexto referencial e (d) o tempo requerido para a sua resolução. Nesta perspectiva, e para este autor, faz sentido considerar tarefas de vários tipos e de natureza diferentes, como os exercícios, os problemas, as explorações e as investigações.

Ponte destaca que os exercícios são tarefas de dificuldade reduzida e de estrutura fechada. Os problemas também têm uma estrutura fechada, mas têm um grau de dificuldade mais elevado. As explorações são tarefas que têm um grau de dificuldade reduzida, mas têm uma estrutura aberta, à semelhança das investigações. Estas são tarefas de estrutura aberta, mas com um grau de dificuldade elevada.

Segundo esse autor, podemos distinguir exploração de investigação conforme o grau de dificuldade da tarefa, designando por exploração uma investigação fácil, tendo em conta que o que as distingue é o seu grau de dificuldade. Quando o objetivo de uma aula é promover a investigação matemática, o professor pode escolher apenas uma situação e deixar para os seus alunos a definição dos próprios problemas dentro da situação que, posteriormente, tentarão resolver seguindo um determinado caminho.

Finalmente, apoiando-nos em leituras e em algumas experiências pessoais, inserimos dentre as hipóteses de aprendizagem dos alunos, o fato de que o uso de recursos tecnológicos pode contribuir para a realização de investigações, formulação de conjecturas e validação de hipóteses.

Sintetizando, nossas hipóteses iniciais sobre aprendizagem dos alunos podem ser assim formuladas:

H1: envolver áreas afins, aplicações em diferentes ciências, contribuir para que o aluno perceba que conhecimentos matemáticos estão relacionados a acontecimentos naturais e sociais, em diferentes contextos da realidade (perspectivas da interdisciplinaridade e da contextualização).

H2: uma THA deve contemplar, sempre que possível, em diferentes momentos e dependendo dos objetivos pretendidos, tarefas como a de: resolução de problemas, a de investigações e a de exercícios com a finalidade de sistematização e mesmo, treino de alguns procedimentos.

H3: nas situações de aprendizagem (em particular, no caso de funções exponenciais) é importante explorar diferentes registros, tais como o registro em língua natural, o registro gráfico, o registro tabular e o registro algébrico, como forma de potencializar a construção de conhecimento do aluno referente a este objeto matemático; particularmente, consideramos fundamental trabalhar um pouco mais com o registro na linguagem natural, enfocando a leitura e interpretação de textos, estratégia presumivelmente pouco usual nas aulas de Matemática no Ensino Médio.

> Para que um aluno possa reconhecer a Função Exponencial num registro de linguagem materna, ele precisa ler e interpretar o texto, identificar as variáveis e características da função, assim como o tipo de variação que está ocorrendo, possibilitando não somente representar matematicamente esta situação, como se fosse um sistema de códigos, mas encontrar o significado do conceito de Função Exponencial, numa situação problema a resolver. (Dominoni, 2005, p.38)

2.4 Primeira versão da THA referente à escolha de atividades de aprendizagem

Com base em nossos objetivos de aprendizagem e em nossas hipóteses sobre aprendizagem dos alunos, o passo seguinte foi o de elaborar um plano de atividades de aprendizagem.

Essa etapa foi bastante difícil, pois como já mencionamos anteriormente não estamos habituados a construir sequências de atividades em função de objetivos a serem alcançados e, menos ainda, formulando hipóteses de aprendizagem dos alunos.

Organizamos a THA em três situações com diferentes expectativas de aprendizagem. Apresentaremos a seguir as situações de aprendizagem com as respectivas tarefas, cada uma com os objetivos de aprendizagens e sugestões de como o professor poderia desenvolvê-las.

- **Etapa 1** - Buscamos por meio de situações-problema e de textos abordar “números grandes”, a potenciação e suas propriedades. Nosso objetivo nessa etapa foi retomar conceitos trabalhados no Ensino Fundamental e que são necessários para uma boa compreensão do novo objeto de estudo.

Etapa 1: Números “grandes”

<u>Objetivo</u>: *existência de números grandes e refletir sobre sua representação em forma de potência.*

<u>Estratégia para o desenvolvimento da atividade</u>: *Fazer a leitura com os alunos ou deixar que eles leiam. Proporcionar um debate entre os textos, visando à discussão da existência de números grandes e a notação exponencial.*

<u>Tempo previsto</u> *– 3 aulas*

Atividade I

Pensar na sequência de números naturais como uma sequência infinita constituiu um grande desafio para a humanidade. O autor Carl Sagan, no livro Bilhões e Bilhões faz referência a um texto de Arquimedes (cerca de 287 – 212 a.C.).

> *"Há alguns para quem o número de grãos de areia é infinito. Há outros que, mesmo sem considerá-lo infinito, acham que ainda não foi definido o número que seja bastante grande".*

Esse trecho nos faz refletir da existência de números com elevada ordem de grandeza mesmo que seja quase impossível imaginar e até mesmo contar. No texto a seguir adaptado do livro Bilhões e Bilhões, vamos verificar que números grandes podem ser escritos em forma de potência e até operar com eles.

"Assim, 1 trilhão é 1.000.000.000.000 ou 1 000 000 000 000. (Nos Estados Unidos, colocam-se vírgulas no lugar dos pontos). Para números maiores que 1 trilhão, é preciso contar quantos grupos de três números existem. Seria ainda mais fácil se, ao nomear um número grande, pudéssemos apenas dizer diretamente quantos zeros existem depois do número 1.

Como são pessoas práticas, os cientistas e os matemáticos fazem exatamente isso. Chama-se notação exponencial. Você escreve o número 10; depois um número pequeno, alçado à direita do 10 como um sobrescrito, informa quantos zeros existem depois do número 1. Assim, 10^6 = 1 000 000; 10^9 é descrito como "10 elevado à potência 9"ou, equivalente, "10 elevado à nona"(à exceção de 10^2 e 10^3, que são chamados "10 ao quadrado" e "10 ao cubo", respectivamente). Essa expressão, "à potência" – como "parâmetro" e vários outros termos científicos e matemáticos -, está entrando na linguagem de todos os dias, mas com o significado cada vez mais obscuro e distorcido.

Além da clareza, a notação exponencial tem um maravilhoso benefício colateral: é possível multiplicar dois números quaisquer simplesmente somando-se os expoentes apropriados. Assim, 1000 x 1 000 000 000 é $10^3 \times 10^9 = 10^{12}$.

Porém, ainda há resistência à notação exponencial por parte de pessoas um pouco assustadas com a matemática (embora a notação não complique, mas simplifique, a nossa compreensão) e por parte dos compositores de texto, que parecem ter uma necessidade compulsiva de imprimir 10^9 como 109.

Depois de se dominar a notação exponencial, pode-se lidar sem esforço com números imensos. Isso não significa que se possa *imaginar* 1 bilhão ou 1 quintilhão de objetos – ninguém pode. Mas, com a notação exponencial, podemos *pensar* sobre esses números e operar com eles”. (p.15-17, 1998)

Vamos refletir sobre essas informações e responder às questões abaixo:

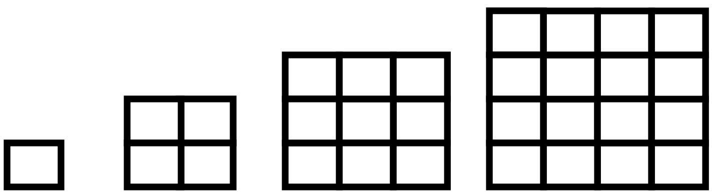
1. Lendo esses textos, que comentários você gostaria de fazer a respeito dessas informações? Quais foram as informações novas para você?
2. Como você escreveria, em forma de notação exponencial cem mil, 1 000 000 000 000?
3. Vimos que 1000 x 1 000 000 000 é $10^3 \times 10^9 = 10^{12}$. Como você explicaria esse resultado? E como você calcularia $10^9 : 10^3$?
4. O texto nos mostrou apenas notação exponencial na base 10. Com isso, como podemos escrever o número 1024 na base 2? E o número 625 na base 5?
5. Como abreviar a escrita do número 40 000 000, recorrendo à notação exponencial? E do número 350 000 000 000?

Atividade II

Objetivo: identificar conhecimentos prévios dos alunos sobre potenciação.

Estratégia para desenvolver a atividade: o professor proporcionará alguns minutos para a resolução individual e em seguida discutirá com os alunos as estratégias de resolução visando retomar o conceito da potenciação.

1) Observe cada figura e responda:



f.1 f.2 f.3 f.4

a) Quantos □ há na figura 2, na figura 3 e na figura 4?
b) Sem desenhar, quantos □ há na figura 5?
c) Quantos □ há na figura 7?
d) Qual o total de □ na figura 9?
e) Escrevas as potências indicadas em cada figura.

- **Etapa 2 -** Buscamos trabalhar com notícias tiradas da internet e com a análise de gráficos de diferentes funções para explorar o termo “crescimento exponencial”. Nosso objetivo é que o aluno compreenda que fenômenos com crescimento rápido podem representar um crescimento exponencial. Nessa atividade o aluno identificará uma mesma situação utilizando diferentes registros.

Etapa 2: Crescimento Exponencial

Objetivo: Compreender o significado da expressão “crescimento exponencial” por meio de diferentes textos e diferentes representações gráficas. Além disso, proporcionar a conversão do registro gráfico para o registro algébrico.

Estratégia para o professor desenvolver a atividade: Propor grupos para trabalharem com cada texto e após o término da atividade abrir uma discussão para que os alunos socializem o assunto que cada texto traz e percebam que o termo crescimento exponencial, nos textos, tem o mesmo significado.

Tempo previsto – 3 aulas

Atividade III

Trechos extraídos da internet e do livro Bilhões e Bilhões.

Grupo1 - Epidemia da AIDS

No momento, em muitos países o número de pessoas com sintomas de Aids está crescendo exponencialmente. O tempo de duplicação é mais ou menos de um ano. Isto é, a cada ano há duas vezes mais casos de Aids do que havia no ano anterior. (Adaptado do livro Bilhões e Bilhões de Carl Sagan, p. 23)

- ✓ Em seu grupo, elabore uma discussão referente ao assunto abordado nesta informação, para discutir com os outros grupos a respeito do termo “crescimento exponencial”.

Grupo 2 - Adwares e Spywares

“Um estudo divulgado pela McAfee revelou um crescimento exponencial de adwares[1] e spywares[2] distribuídos na internet. Entre 2000 e 2002, existiam apenas 40 famílias de adwares na internet.

---

[1]Adware são programas que têm o intuito de mostrar propaganda nos computadores. Eles não captam informações, só mostram anúncios

[2] Spywares são programas que funcionam como espiões, coletando informações dos usuários, como sites, senhas etc.

Em quatro anos, porém, este número subiu para 450, com aproximadamente 4.000 variantes. Este crescimento estaria ligado ao lucro de sites que vêem estes softwares como uma forma mais simples de ganhar dinheiro do que com anúncios e formas não invasivas de publicidade. Cada computador de visitante que recebe um adware rende ao seu distribuidor algo em torno de US$ 0,15, o que torna mais fácil arrecadar mais em menos tempo.”
(http://magnet.pro.br/cosmonet/estudo-divulga-crescimento-exponencial-de-adwares/ acessado em 20/11/2006)

- ✓ Em seu grupo, elabore uma discussão referente ao assunto abordado nesta informação, para discutir com os outros grupos a respeito do termo “crescimento exponencial”.

Grupo 3 - Capacidade de Viralidade

“Imagina-se que a capacidade de algo se tornar extremamente viral é diretamente proporcional ao tamanho do ambiente. Existem talvez centenas de casos de crescimento viral exponencial em sites de língua inglesas, como Wikipedia, Google, You Tube, etc. No Brasil, ficamos em apenas algumas dezenas de casos no qual ocorre um grande crescimento, como o Orkut. Este site é um dos pouquíssimos casos de crescimento extremamente viral de um site comercial. Talvez possamos citar também Fotolog.net e Flogão.com.br. Mas, podemos concluir que quanto maior o tamanho do ambiente, maior é a probabilidade de vírus serem espalhados. É o que ocorre com sites da língua inglesa. Com um ambiente maior a disposição do vírus, *fica muito mais propício que ele encontre um caminho de crescimento exponencial*. O caso Orkut mostra que existe espaço para outros casos ocorram no Brasil com a mesma magnitude. A questão é: Por que são tão poucos os casos de sites com crescimento exponencial no Brasil? Por que mesmo nos casos em que isso aconteceu, ocorreram com sites estrangeiros e não com sites nacionais? Será que não somos nacionalistas no quesito “serviços de internet”?
(http://blog.fabioseixas.com.br/archives/2006/07/capacidade_de_v.html, acessado em 20/11/2006)

- ✓ Em seu grupo, elabore uma discussão referente ao assunto abordado nesta informação, para discutir com os outros grupos a respeito do termo “crescimento exponencial”.

Atividade IV

Estratégia para o professor desenvolver a atividade: Poderá manter os alunos em grupos, dar um tempo para que os grupos analisem as representações gráficas e respondam as atividades. Ao final, o professor socializa as idéias e analisa com os alunos o comportamento de cada gráfico, associando ao significado da expressão "crescimento exponencial" discutido na atividade anterior, com o gráfico que cresce mais rápido, no caso, o gráfico da função exponencial. Além disso, investigar a expressão algébrica das funções.

1) Os gráficos mostrados abaixo foram construídos com o auxílio de um software matemático. Observe cada representação gráfica e em seguida responda:

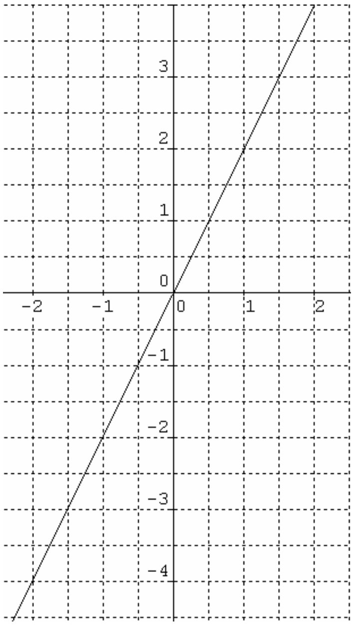


Gráfico 1

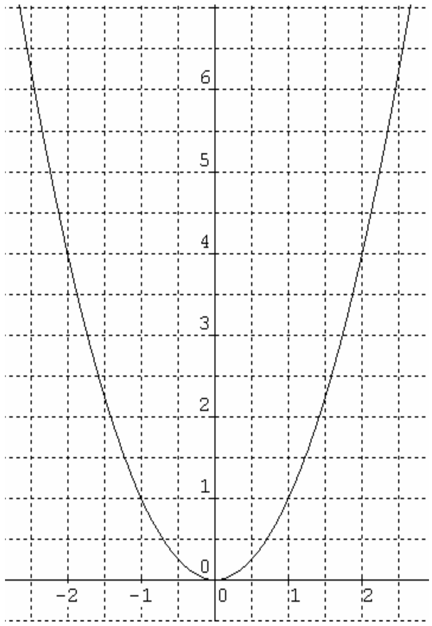


Gráfico 2

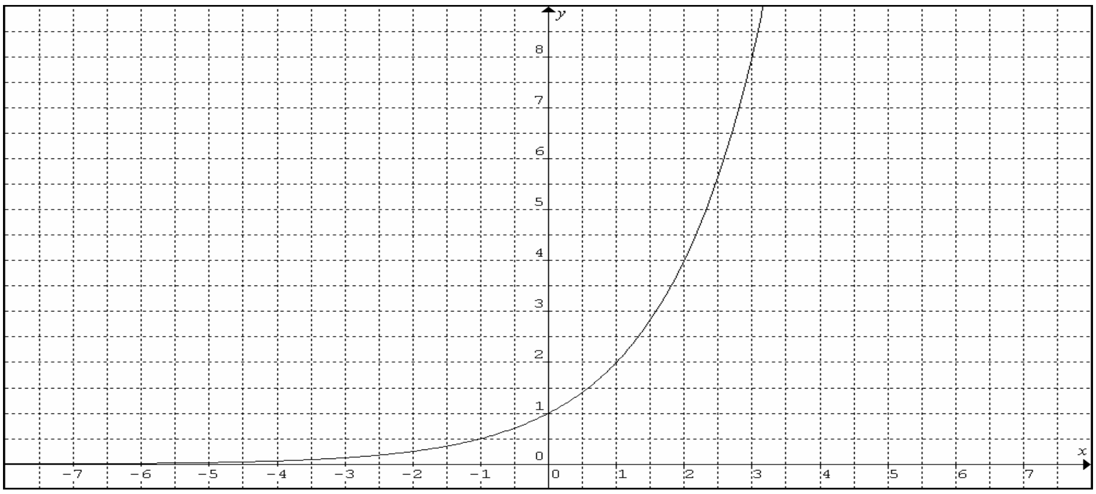


Gráfico 3

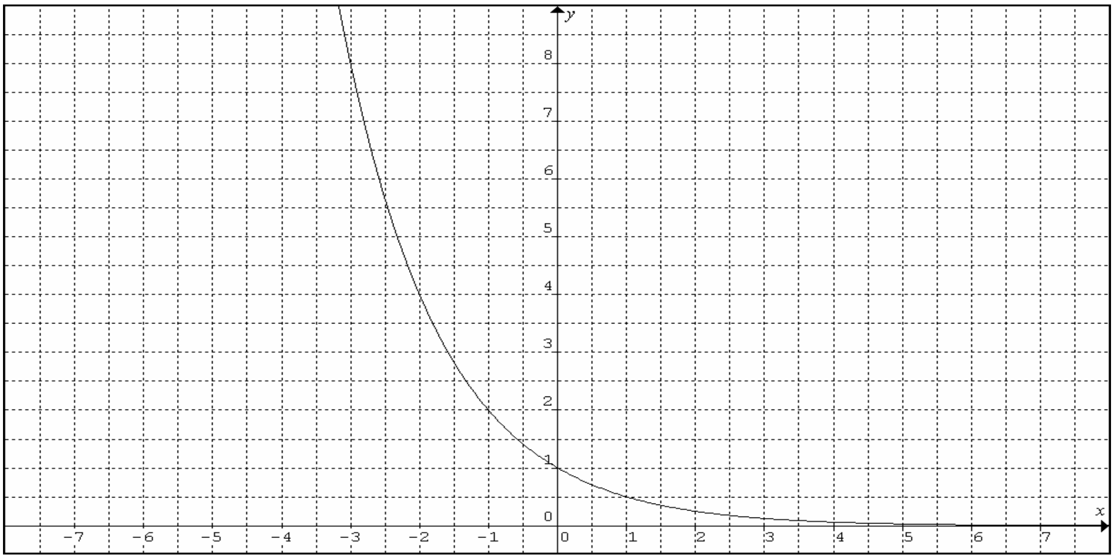


Gráfico 4

a) Quais os gráficos que você já conhece? Destes, saberia dizer qual a função que cada gráfico representa?

b) Observando cada gráfico, qual é a relação existente entre os valores de x e y?

c) Comparando os gráficos, em qual deles podemos dizer que “ocorre um crescimento mais rápido”?

d) Dizemos que uma função y = f(x) é crescente quando os valores de y aumentam conforme os valores de x aumentam. Caso acontece ao contrário, a função é decrescente. Sabendo disso, o que podemos dizer em relação ao comportamento (crescente ou decrescente) das funções representadas nos gráficos 3 e 4? Justifique sua resposta.

e) Um desafio: Encontre a expressão algébrica que representa a função do gráfico 3 e a expressão algébrica que representa a função do gráfico 4.

- **Etapa 3 -** Buscamos, com o auxílio de situações-problema contextualizadas, internas e externas à Matemática, de um software matemático, e contextos interdisciplinares possibilitar a compreensão do nosso objeto de estudo *função exponencial*, sua construção gráfica e suas propriedades. Além disso, por meio de situações-problema em outras ciências e da própria Matemática como Matemática Financeira, vamos mostrar aplicações dessa função. Nessa etapa também vamos proporcionar ao aluno a compreensão do conceito, por meio de diferentes registros: do algébrico para o gráfico, da linguagem natural para o algébrico e do gráfico para o algébrico, pois, de acordo com os estudos de Dominoni (2005), diferentes representações de um mesmo objeto contribuem para a compreensão do conceito de função exponencial.

Etapa 3 – Função Exponencial

Objetivo: As atividades da Aula 3 têm como objetivo o estudo mais detalhado da função exponencial $y=a^x$, propriedades e gráficos. Os alunos irão utilizar um software matemático (Graphmatica) para a construção gráfica da função exponencial, e por meio de resolução de problemas, trabalhar com situações envolvendo matemática financeira.

Estratégia para o professor desenvolver a atividade: Deixar alguns minutos para que os alunos possam resolver as atividades e, em seguida, promover uma discussão das questões institucionalizando o conceito. Espera-se que o aluno utilize os conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores para encontrar a função exponencial e o gráfico que representa a situação-problema. É importante estar em contato com o aluno tanto para mediar suas ideias como para conhecer seus pensamentos e estratégias.

Tempo previsto – 8 Aulas

Atividade V

Trecho tirado do Livro Bilhões e Bilhões.

“Todo mundo tem dois pais, quatro avós, oito bisavós, dezesseis trisavôs, etc. A cada geração que retrocedemos, temos duas vezes mais antepassados sem linha direta. Assim, cada um de nós que está vivo hoje tinha, no ano 400, uns 18,5 quintilhões de ancestrais – ou é o que parece.” (p.27 e 28, 1998)

Refletindo sobre este trecho:

1) Qual é o número de ascendentes na terceira geração de sua família? E o número da quinta geração?

2) O número de ascendentes de uma família corresponde a 128, qual seria a geração dessa família?

3) Construa o gráfico que representa o número de ascendentes em função da geração.

4) O que podemos dizer em relação ao comportamento do gráfico que representa essa situação?

5) Para cada geração *x* que se escolha há um número *f(x)* de ascendentes. Sabendo disso, encontre uma lei que expressa f(x) em função de x, ou seja, encontre uma função que indique essa situação.

Vocês já estudaram leis que expressavam f(x) em função de x como: a Função Afim (função do 1º Grau) e a Função Quadrática (função do 2º Grau). Podemos observar no último item acima, que agora temos a variável *x* sendo o expoente, definindo assim, a ***função exponencial***.

A função exponencial é uma das mais importantes funções da matemática. Ela desempenha papéis fundamentais na Matemática e nas ciências envolvidas com ela, como: Física, Química, Engenharia, Astronomia, Economia, Biologia, Psicologia e outras, pois essa função é uma importante ferramenta que facilita o estudo de fenômenos naturais e sociais.

A seguir, vamos trabalhar com a função exponencial na Matemática Financeira envolvendo cálculo de juros e, em outra área de conhecimento como, Biologia.

A representação gráfica da função exponencial já foi apresentada na atividade III, nos seguintes casos: f(x) = 2^x e f(x) = $\left(\frac{1}{2}\right)^x$, respectivamente. Agora, vamos explorar um pouco mais a representação gráfica.

Atividade VI

Estratégia para o professor desenvolver a atividade: Propor a execução das atividades em duplas ou grupos, pois após a segunda atividade os alunos irão resolver os demais exercícios na sala de informática. Antes de iniciar a resolução com o auxílio do software, explicar aos alunos como o programa reconhece uma função.

1) Discuta com um colega, a seguinte situação-problema:
   Um recado precisa ser passado o mais rápido possível a várias escolas. Para isso, montou-se uma rede da seguinte forma:

1° momento: um diretor passa o recado para cinco diretores.

2º momento: cada diretor avisa outros cinco diretores, que ainda não tinham sido avisados, e assim sucessivamente.

a) Quantos diretores receberão o recado no quarto momento?

b) Qual o total até o sexto momento?

c) Qual a lei que representa essa situação?

d) Construa o gráfico que representa o número de diretores que recebem o recado em função de cada momento.

e) Essa situação representa uma função crescente ou decrescente?

2) Construa o gráfico de cada função:

a) $f(x) = 3^x$

b) $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

c) $y = 5^x$

d) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

3) Analisando cada gráfico do exercício anterior, o que podemos dizer em relação aos valores de y=f(x) quando x aumenta?

4) Analisando os valores da base de cada função, que conjecturas você pode fazer em relação ao crescimento e decrescimento de funções exponenciais? Se necessário faça a representação com outras funções exponenciais, como: $f(t) = \left(\frac{5}{2}\right)^t$, $h(x) = 4^x$, $j(v) = \left(\frac{3}{4}\right)^v$, $k(z) = \left(\frac{2}{3}\right)^z$.

5) Descreva o que ocorre com o gráfico dessas funções ao comparar com os gráficos construídos do exercício 2:

a) $k(x) = 3^x + 1$

b) $l(x) = 3^x + 2$

c) $n(x) = 3 + 3^x$

d) $m(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$

e) $o(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2$

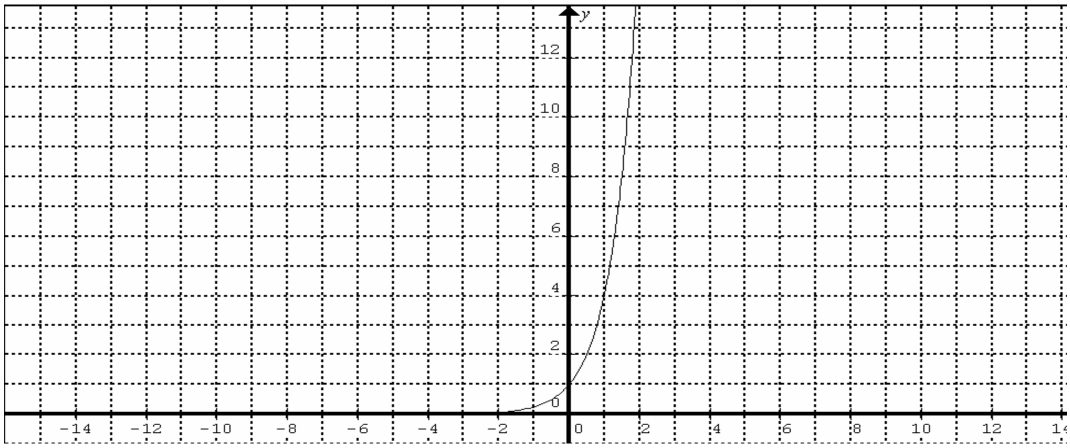
f) $p(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x +3$

6) Observe as seguintes funções exponenciais $y = 10^x$ e $y = 10^{-x}$ e responda:

a) Qual função é crescente? Por quê?

b) Qual função é decrescente? Por quê?

7) A figura abaixo mostra um esboço do gráfico da função real $y = a^x$, com a e b Є R, a>0 e a≠1. Determine o valor de a.



8) Podemos trabalhar com equação exponencial, como $3^x = 81$.

Uma equação exponencial é aquela que apresenta a incógnita no expoente de pelo menos uma potência. O resultado dessa equação é x = 4. Como resolver uma equação exponencial, ou ainda, como chegar a esse resultado?

<u>*Estratégia para o desenvolvimento da atividade*</u>*: Nesse momento, o professor deve proporcionar ao aluno um espaço para que ele elabore sua estratégia de resolução. Após alguns minutos, discutir com os alunos as estratégias utilizadas e institucionalizar o método de resolver equação exponencial. É importante a compreensão deste conceito, para resolver a próxima situação-problema.*

9) Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $2^x = 64$ b) $3^x = \left(\frac{1}{81}\right)$ c) $9^x = 81$ d) $2^{3x+2} = 32$

Aplicação de função exponencial na área de Biologia.

Agora que já conhecemos a função exponencial, vamos explorar um pouco mais a ideia de *crescimento exponencial,* lendo um trecho adaptado do livro *Bilhões e Bilhões* de Carl Sagan, que está relacionado com a área de biologia.

"A circunstância mais comum em que ocorrem repetidas duplicações, e, portanto crescimento exponencial, é na reprodução biológica. Vamos considerar primeiro o simples caso de uma bactéria que se reproduz dividindo-se em duas. Depois de certo tempo, cada uma das duas bactérias filhas também se divide. Desde que exista bastante alimento e não haja veneno no ambiente, a colônia de bactérias vai crescer exponencialmente. Em circunstâncias muito favoráveis, pode haver uma duplicação a cada quinze minutos aproximadamente. Isso significa quatro duplicações numa hora e 96 duplicações num dia. Embora uma bactéria só pese aproximadamente um trilionésimo de grama, as suas descendentes, depois de um dia de selvagem abandono sexual, vão pesar coletivamente o mesmo que uma montanha; em pouco mais que um dia e meio, o mesmo que a Terra; em dois dias, mais que o Sol e em breve tudo no universo será composto de bactérias. Isso não é uma perspectiva nada agradável, não é? Pois se for uma bactéria que causa danos fatais a saúde o número de mortos seria desastroso. Mas felizmente isso nunca acontece. Por que não? Porque o crescimento populacional desse tipo sempre bate em algum obstáculo natural. Os micróbios ficam sem alimento, ou se envenenam mutuamente, ou têm vergonha de se reproduzir quando não tem privacidade." (p. 21 e 22, 1998).

Refletindo sobre este trecho:

a) Como você interpreta o caso das bactérias, descrito por Sagan?

b) Se uma bactéria duplica a cada t minuto e inicialmente havia 300 bactérias, responda:

c) Expresse a função f(t) em t, sendo t o minuto e f(t) o número de bactéria.

d) Após quantos minutos esta população será constituída de 76800 indivíduos?

e) Quando temos o tempo t = 0, quantas bactérias existem?

f) Essa função é crescente ou decrescente? Justifique sua resposta.

g) Construa o gráfico que representa o número de bactérias em função do tempo.

Atividade VII - **Matemática Financeira**

Estratégia para o professor desenvolver a atividade: Propor a atividade individualmente. Fazer uma discussão com os alunos referente às respostas nos itens abaixo. Em seguida, o professor pode pedir que cada aluno leia um trecho do texto e na medida em que as questões apareçam deixar que o aluno responda. Em seguida, fazer uma discussão sobre as resoluções encontradas e institucionalizar o conceito. Nas atividades finais é importante o reconhecimento dos juros simples como uma função afim e a dos juros compostos como uma função exponencial.

Antes de iniciar a leitura, responda cada item:

a) O que vocês entendem por Matemática Financeira?

b) Para vocês, onde utilizamos a Matemática Financeira?

c) O que vocês entendem por juros? Como eles surgiram?

d) Como podemos representar a taxa de porcentagem?

A Matemática Financeira analisa alternativas de investimentos, financiamentos de bens de consumo ou créditos bancários, nos quais a função exponencial está presente. O componente essencial para que tenhamos a representação exponencial nesta área da Matemática é a taxa de juros.

O juro não é uma prática moderna, pois há indícios históricos de que nos tempos remotos, mais precisamente na era pré-urbana, quando a atividade econômica era fundamentalmente agrícola, a cobrança de juros já existia. Tal cobrança passou a existir devido à necessidade de se emprestar algo.

Naquela época, suponhamos que uma pessoa tivesse um cavalo disponível e pudesse emprestá-lo a quem precisasse, para ajudar na colheita. O cavalo era emprestado por um tempo e no momento da devolução do animal o proprietário queria uma parte dos grãos colhidos com a ajuda do cavalo, ou seja, os grãos representavam a cobrança dos juros sobre o empréstimo do cavalo. Quando se tratava de empréstimos de dinheiro, as pessoas emprestavam e cobravam juros de acordo com o cliente.

Atualmente, se uma pessoa deseja comprar algo ou até mesmo precisa pagar uma conta e não tem dinheiro imediato, existe a facilidade do empréstimo, tanto recorrendo-se aos bancos como para agências financiadoras. A pessoa paga uma quantia, além do valor adquirido a um título de *juros* em um determinado período (mês, dia, ano). A cobrança de juros é a remuneração do empréstimo feito, ou melhor, funciona como um aluguel do dinheiro emprestado.

A quantidade em dinheiro que se pede emprestada é chamada capital, o que se paga de “aluguel” pelo dinheiro são os juros, e a soma do capital com os juros é o montante

Existem outras situações em que temos juros, como em aplicações de cadernetas de poupança ou em algum outro investimento. Neste caso, ao término de certo tempo o aplicador receberá o valor aplicado acrescido de um valor referente aos juros da aplicação.

Um jornaleiro emprestou a um amigo R$ 600,00 para ser pago no final de 2 meses, à taxa de juros de 4% a.m. (ao mês). Ao final do empréstimo o jornaleiro recebeu R$ 648,00. Assim podemos perceber que os juros foram de R$ 48,00. Você saberia explicar como fazer o cálculo para obter esse valor? E se o prazo do pagamento se estendesse por mais 3 meses, quanto o jornaleiro iria receber?

Nesta situação temos uma taxa de juros simples, isto é, os juros correspondentes a cada um dos períodos sempre será calculado sobre o valor inicial, podendo ser pago de acordo com o combinado entre as pessoas. Devido a isso temos:

- Em um mês, os juros serão de: 4% de R$ 600,00 = 0,04 . 600 = 24,00.
- No segundo mês, os juros são de: (0,04 + 0,04).600 = 48,00.
- Assim, ao final de 5 meses o jornaleiro irá receber : 600 + (5 . 24) = 720,00.
  O valor recebido é chamado de Montante.

Podemos perceber que o valor recebido (M) = valor inicial (Capital) + Juros (J)

$$M = C + J$$

- ➢ Proponha uma situação-problema para um colega envolvendo juros simples.
- ➢ Observe o anúncio da loja

Promoção

Sony Ericsson W580 White - GSM – STDN

Á prazo: 12 x 89,99

Á vista: R$ 879,00

Inclui Kit musical completo

Características do produto: Câmera 2MP, gravação de vídeo, zoom digital de 4x. Tons musicais MP3, AAC. Bluetooth estéreo. Memória de 12 MB. Mais informações pelo site www.juronao.com.br

Temos hoje duas oportunidades de pagamento, à vista ou a prazo, em qualquer mercadoria que gostaríamos de comprar, mas será que realmente um produto tem desconto se for pago à vista?

- ➢ Quais seriam os juros desse produto caso fosse comprado a prazo?
- ➢ Você concorda que o desconto são os juros que seriam cobrados se a compra fosse feita à prazo?

Agora vamos conhecer os juros em uma aplicação financeira de uma caderneta de poupança.

- ➢ Suponhamos que no ano de 2006 a correção da caderneta de popança tenha sido de 50% em cada um dos 6 primeiros meses do ano. Uma pessoa depositou R$ 200,00 em 01/01/06. Observe o crescimento do dinheiro em 6 meses e responda:

Tempo	Data	Valor Inicial	Montante
0	01/01/07	200,00	200,00
1	01/02/07	200,00	300,00
2	01/03/07	300,00	450,00
3	01/04/07	450,00	675,00
4	01/05/07	675,00	1012,25
5	01/06/07	1012,25	1518,37
6	01/07/07	1518,37	2277,75

Tabela 1

a) Essa aplicação financeira foi realizada a juros simples? Caso negativo faça essa aplicação a juros simples.
b) Observando a tabela 1, qual foi o rendimento baseado na aplicação ao final do segundo mês e do quinto mês? E ao final do semestre?
c) Se o tempo da aplicação foi prorrogado para mais 3 meses, quanto renderia após o 9º mês?

Nessa aplicação financeira, temos os juros compostos nos quais a taxa de juros incide sempre sobre o Capital Inicial, acrescido dos juros acumulados até o período anterior, ou seja, juros sobre juros.

Os juros no 1º mês: 200 . 50% = 200 . 0,5 = 100,00. Assim, ao final do 1º mês obteve-se o montante de: 200,00 + 100,00 = C +J = 300,00.

No 2º mês os juros calculados são referentes ao montante anterior: 300 . 0,5 = 150,00.

Assim, ao final do mês o montante é de: 300,00 + 150 = 450,00.

Nos dias atuais as transações comercias e financeiras utilizam o sistema de *juros compostos*. Isso ocorre em compras a prazo (com cartão de crédito ou boleto bancário), empréstimos bancários, aplicações entre outras.

Podemos perceber que a caderneta rendeu mais no sistema de juros composto do que no juro simples, por isso os juros compostos é o sistema mais utilizado.

Agora, propomos que você resolva as seguintes situações-problema:

1) Considere um capital de R$ 70,00 aplicado a taxa de 3% ao mês.

a) Calcule o montante (mês a mês) acumulado num período de 3 meses à taxa de juros simples? Qual a quantia acumulada após n meses com a mesma taxa?

b) Calcule o montante (mês a mês) acumulado num período de 3 meses a taxa de juros compostos? Qual a quantia acumulada após n meses a mesma taxa?
c) Os gráficos representam o montante em função do período investido em cada sistema de juros. Qual representação está indicando o sistema de juros simples. E a de juros compostos?
d) Podemos associar cada representação gráfica alguma função? Caso positivo, qual função?

2) Você irá fazer uma aplicação financeira de R$80,00 que rende ao mês 4% a.m., durante 4 meses. Nessa aplicação, você não pode retirar nenhum valor ao decorrer no tempo.
a) Calcule o montante deste capital aplicado no sistema de juros simples.
b) Calcule o montante deste capital aplicado no sistema de juros compostos.
c) Expresse a lei que permite calcular o montante deste capital, aplicado no sistema de juros composto por n meses.
d) Podemos afirmar que a lei encontrada acima é uma função exponencial? Por quê?
e) Faça uma representação gráfica do montante, em função do período investido em cada sistema de juros.

3) João deseja comprar um carro cujo preço à vista, com todos os descontos possíveis, é de R$ 21.000,00, e esse valor não será reajustado nos próximos meses. Ele tem R$ 20.000,00 que podem ser aplicados a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, e escolhe deixar todo o seu dinheiro aplicado até que o montante atinja o valor do carro.

Para ter o carro, João deverá aguardar:
a) Dois meses, e terá a quantia exata.
b) Três meses, e terá a quantia exata.
c) Três meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R$ 225,00.
d) Quatro meses, e terá a quantia exata.
e) Quatro meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R$ 430,00.
f) Construa o gráfico que expressa essa relação do montante em função do período.

Organizamos a THA para ser trabalhada em 14 aulas de 50 minutos. Para cada situação de aprendizagem sugerimos ao professor uma estratégia de como desenvolver as atividades, pois, elaboramos de acordo com as nossas perspectivas construtivistas e, temos como hipótese, que se o desenvolvimento das atividades for realizado dessa maneira, o aluno terá mais facilidade para a compreensão do conceito e o professor desenvolverá a THA com a mesma perspectiva. Em cada atividade também sugerimos o tempo previsto para que o professor possa se planejar e se organizar para concluir a THA no período previsto.

2.5 A aproximação com os professores envolvidos no projeto

Os professores participantes da pesquisa trabalham numa mesma escola estadual da Diretoria de Ensino de Osasco, localizada no centro de Osasco, São Paulo. Com o objetivo de melhor conhecer o trabalho dos professores aplicadores, elaboramos um questionário que se encontra no Anexo B. A seguir, vamos descrever o perfil de cada professor que serão identificados como P1, P2 e P3, respectivamente.

Professor P1

Sexo feminino, 45 anos, 24 anos de magistério, leciona no ensino fundamental e médio em escolas da rede estadual e privada e, sempre participa de capacitação para professores.

Focalizando o trabalho colaborativo, ela diz que sempre participa de atividades extra-curriculares em sua escola, principalmente, da semana cultural, que envolve projetos interdisciplinares.

Em relação à sua estratégia de ensino ela relata que utiliza a aula expositiva, para abordar os conteúdos, seguidos de: fichamento de conteúdo, atividades em duplas e resolução de exercícios. Quanto ao uso de recursos didáticos, diz que utiliza, além do livro didático, jornais e livros paradidáticos.

Com relação ao ensino de função exponencial, a professora disse que costuma trabalhar com o conceito iniciando uma revisão sobre potenciação; e, em seguida, por meio de exercícios interdisciplinares e contextualizados, aborda o conceito de função exponencial, de construção e análise de gráficos, resolução de equações e de inequações.

A professora deixa claro que a maior dificuldade apresentada pelos alunos, neste estudo, está relacionada às regras de potências, construção de gráficos e resolução de equações e inequações.

No que diz respeito ao uso de softwares, a professora alega que não fez uso de nenhum software, devido ao seu desconhecimento sobre programas educativos que proporcionassem a construção de gráficos.

Professor P2

Sexo masculino, 56 anos, leciona no ensino fundamental e médio na rede pública há 7 anos, fez especialização em Educação Matemática e sempre faz cursos de capacitação para os professores.

Focalizando o trabalho colaborativo, ele diz que sempre desenvolve projetos com as 8^{as} séries, trabalhando com coleta de dados, tabulações e gráficos de contextos interdisciplinares.

Em relação à sua metodologia de ensino, ele disse que costuma usar a história da matemática, situações-problema contextualizadas e também as sugestões do caderno da Secretaria da Educação.

Quanto ao ensino da função exponencial, o professor relata que abordaria esse conceito primeiramente com uma revisão de potências (com expoentes inteiros e fracionários), equações exponenciais e em seguida, apresentaria uma situação-problema com crescimento/decrescimento exponencial.

O professor citou as mesmas dificuldades apresentadas pelo professor P1, sendo elas: propriedades das potências, construção e análise de gráficos e resolução de equações e inequações exponenciais.

No que diz respeito ao uso do software para a construção gráfica, ele alega não ter usado a sala de informática de sua escola por falta de motivação e devido ao número de computadores ser inferiores à quantidade de alunos por turma.

Professor P3

Sexo masculino, 38 anos, leciona no ensino médio há 13 anos e fez especialização em Educação Matemática.

Em relação a trabalhos colaborativos, o professor disse que não costuma participar de projetos que visem esse fim e focalizando a sua estratégia de ensino, relata que trabalha de forma tradicional, valendo-se dos exemplos e dos diversos exercícios do livro didático.

Quanto ao ensino da função exponencial, ele diz que costuma abordar o conceito com resolução de problemas, aulas teóricas e práticas.

Analisando as dificuldades deste estudo, o professor afirma que elas ocorrem em situações de resolução com equações e inequações exponenciais. Relata ainda, que não tem o hábito de trabalhar com softwares e com situações contextualizadas para a aplicação da função exponencial.

As turmas em que os professores aplicadores (P1, P2 e P3) desenvolveram a THA é composta por 39 alunos frequentes em cada turma do período diurno, totalizando 117 alunos, com faixa etária entre 15 e 16 anos. Todos residem nas proximidades do centro de Osasco.

2.6 Análise da THA pelos professores e modificações sugeridas

Para análise da primeira versão da THA pelos professores, organizamos reuniões que tinham o objetivo de, partindo do conhecimento que os professores têm de seus estudantes, pudessem reelaborar, acrescentar e/ou modificar as propostas de atividades da THA, antes de ela ser trabalhada com os alunos.

As reuniões foram realizadas na escola em que os professores lecionavam, para que os três pudessem participar ao mesmo tempo do encontro.

O nosso encontro foi dividido em dois momentos para que pudéssemos analisar a THA detalhadamente, questão por questão, em reuniões realizadas no dias 5 e 6 de agosto de 2008, que passamos a apresentar.

2.6.1 Discussões realizadas no dia 5 de agosto.

Etapa 1 - Atividade II

Ao analisar as tarefas da Atividade II, os professores consideraram interessantes as sequências apresentadas, o assunto do texto abordado na

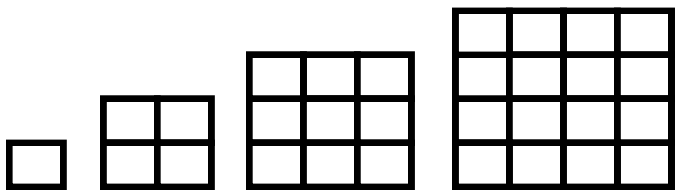
THA e os exercícios propostos. Disseram, ainda, que as atividades eram possíveis de serem realizadas por seus alunos, mas sugeriram acrescentar mais exercícios referentes ao cálculo de potências envolvendo expoente negativo, pois, segundo eles, os alunos sentem dificuldades em trabalhar com tais expoentes.

Com isso, o professor P2 mostrou sugestões de alguns exercícios que poderiam ser acrescentados referentes à potência com expoente negativo. Assim, os demais professores analisaram os exercícios propostos e acharam pertinente acrescentá-los à THA.

Após uma reflexão sobre os problemas apresentados em relação ao conceito de potências citado pelos professores, concordamos que seja necessário adicionar exercícios de potências com expoentes negativos. Pois como vimos, a pesquisa de Dominoni (2005) mostra que realmente os alunos apresentam dificuldades em operar com potência de expoente negativo sendo assim, há necessidade de ampliarmos nossas atividades sobre o assunto para que o aluno não tivesse dificuldades ao longo da THA, principalmente, com a construção de gráficos que envolvem números negativos.

A seguir, mostramos as atividades, sugeridas pelos professores, que serão acrescentadas na Atividade II da Etapa 1 relacionadas ao cálculo de potências com expoente negativo. Além disso, modificamos algumas questões do exercício 1.

1) Observe cada figura e responda:



f.1 f.2 f.3 f.4

a) Quantos □ há a figura 3 e na figura 4?
b) Faça o desenho da figura 5 e encontre quantas □ essa figura possui.
c) Você saberia dizer quantos □ possui a figura 6 sem continuar a sequência? E a figura 7?
d) Represente na forma de potência a quantidade de □ existente em cada figura.

2) Qual é a diferença na representação das potências 4^2 e 4^{-2}?

3) Complete a tabela indicando o valor de cada potência.

Potência	$(\frac{1}{3})^4$	3^4	3^3	3^2	3^1	3^0	3^{-1}	3^{-2}	3^{-3}	3^{-4}	$(-\frac{1}{3})^{-4}$	$(-\frac{1}{3})^{-3}$
Valor												

Etapa 2 - Crescimento exponencial

Analisando os textos da Atividade III, o professor P2 questionou sobre a necessidade de se manter algumas questões apresentadas no texto do Grupo 3, pois ele acreditara que o aluno iria desviar o foco principal da discussão, dando mais ênfase às questões do texto do que ao objetivo central: a ideia de crescimento exponencial. Nesse momento houve reflexões sobre esse assunto, pelos professores, que se basearam no conhecimento que eles mesmos têm do comportamento de seus alunos. Assim, decidiram retirar as questões do texto para que os alunos buscassem um único ponto de estudo na leitura.

Como foi de comum acordo entre os professores, adaptamos o texto do Grupo 3, retirando as questões consideradas desnecessárias para este momento. Segue texto adaptado.

Grupo 3 - Capacidade de Viralidade

"Imagina-se que a capacidade de algo se tornar extremamente viral é diretamente proporcional ao tamanho do ambiente. Existem talvez centenas de casos de crescimento viral exponencial em sites de língua inglesas, como Wikipedia, Google, You Tube, etc. No Brasil, ficamos em apenas algumas dezenas de casos no qual ocorre um grande crescimento, como o Orkut. Este site é um dos pouquíssimos casos de crescimento extremamente viral de um site comercial. Talvez possamos citar também Fotolog.net e Flogão.com.br. Mas, podemos concluir que quanto maior o tamanho do ambiente, maior é a probabilidade de vírus serem espalhados. É o que ocorre com sites da língua inglesa. Com um ambiente maior a disposição do vírus, fica muito mais propício que ele encontre um caminho de crescimento exponencial. O caso Orkut mostra que existe espaço para outros casos ocorram no Brasil com a mesma magnitude". (http://blog.fabioseixas.com.br/archives/2006/07/capacidade_de_v.html, acessado em 20/11/2006)

Quanto à Atividade IV dessa aula, os professores gostaram de como a análise gráfica foi sendo proposta e mantiveram a atividade.

Etapa 3 – Função Exponencial

Na análise da atividade V, os professores gostaram do texto e, além disso, acharam interessante o contexto interdisciplinar envolvendo a leitura e o conhecimento de outra área como a Biologia. Nesse momento, o professor P2 informou que costumava trabalhar com uma situação-problema envolvendo a mesma área, mas abordando outro assunto. Ele disse que seria interessante mostrar ao aluno que a aplicabilidade desta função está presente em situações diferentes de uma mesma ciência. Assim, ele se comprometeu em trazer na próxima reunião a situação-problema para que os demais professores pudessem analisar e, juntos, decidirem se iriam acrescentá-la.

Analisando ainda esta atividade, o professor P2 sugeriu que na questão 3 solicitássemos ao aluno a construção da tabela e em seguida, a construção do gráfico. Tal sugestão foi aceita pelos demais professores que argumentaram ser importante para o aluno conhecer as diferentes representações de uma mesma situação.

Finalizamos a análise desse dia, refletindo sobre a importância de se trabalhar com diferentes registros, pois para que o aluno possa ter uma aprendizagem mais significativa é necessário que ele interaja com os diferentes registros de representação (registro tabular, gráfico, algébrico e da linguagem natural).

> Ao que observamos, no ensino atual, é que quando o conteúdo é abordado, os diferentes registros de representação são trabalhados separadamente, sem que o aluno realize a coordenação entre os mesmos. Essa ausência impede que o aluno tenha uma visão global do conteúdo que está sendo estudado. (Dominoni, 2005, p.28)

Com isso, percebemos que apenas uma das atividades propostas na THA solicitava a construção da representação tabular e, como sugestão do professor P2, acrescentamos atividades que requeriam esse registro para facilitar a compreensão do objeto de estudo.

Apresentamos a seguir, a **questão 3** da Atividade V modificada, pois a atividade solicitava apenas a construção do gráfico e, como sugestão dos professores, foi proposto que o aluno construísse, além do gráfico, uma tabela. Além dessa modificação, acrescentamos a construção da tabela na atividade relacionada a aplicação da função exponencial na situação-problema envolvendo Biologia.

Atividade V – Questão 3

Construa uma tabela que represente a relação do número de ascendentes em função da geração e, em seguida, faça o gráfico.

Aplicação de função exponencial na área de Biologia – Item c

h) Expresse a função f(t) em t, sendo t o minuto e f(t) o número de bactéria e elabore uma tabela indicando o número de bactérias existentes até o 5º minuto.

2.6.2 Discussões realizadas no dia 6 de agosto.

Iniciamos nossa reunião, analisando a situação-problema sugerida pelo professor P2 na reunião anterior. A situação-problema trazida por ele está relacionada com fenômenos da área de Biologia e foi tirada do livro didático, Matemática - Ensino Médio de Smole & Diniz (2005). Analisando a atividade trazida pelo professor aplicador P2, os demais professores acharam importante acrescentá-la.

Nova situação-problema

Tirado do Livro Matemática Ensino Médio (Smole & Diniz, p. 199, 2005)

Um biólogo acompanhou o crescimento da folha com forma circular de uma planta aquática. Durante suas observações, percebeu que a cada mês o diâmetro da folha triplicava. Se no início das suas observações o biólogo mediu a folha e obteve 1 cm de diâmetro, qual será o diâmetro que ela terá ao final de seu prazo máximo de sobrevivência, que é de 4 meses? Construa uma tabela e um gráfico que representa o diâmetro da planta em função do tempo.

Quanto às atividades que utilizariam o auxílio do software, os professores alegaram que consideram importante trabalhar com um software matemático, pois auxilia o aluno a visualizar melhor a construção de um gráfico. Mas afirmaram, que até o momento, ainda não tinham feito uso de nenhum software, devido a algumas dificuldades, tais como: quantidade de computadores inferiores ao número de alunos por turma, ausência de suporte técnico e a falta de softwares que possibilitassem a realização desse trabalho na escola.

Em relação às atividades que envolvem Matemática Financeira, os professores aplicadores relataram que a proposta é interessante, e além disso proporcionava a investigação, possibilitando ao aluno buscar estratégias para relacionar função do primeiro grau com o sistema de juros simples e a função exponencial com o sistema de juros compostos.

Durante a discussão da THA, observamos que os três professores hesitavam em trabalhar em grupo com seus alunos, alegando que o trabalho tornava-se desgastante devido ao elevado número de alunos por turma. Tal fato acarretaria a dispersão dos alunos com assuntos que não estariam relacionados com o conteúdo estudado, comprometendo o tempo disponível para as atividades.

Também foi muito perceptível que o professor P2 realmente estava participando da elaboração das atividades, usando seus conhecimentos sobre a aprendizagem dos alunos e contribuindo para a construção de um melhor caminho de aprendizagem.

Depois das reuniões, das sugestões de atividades, pelos professores, e reflexões que fizemos no grupo de pesquisa, organizamos uma nova versão da THA que identificamos como segunda versão. Finalizada a nova versão, distribuímos a THA do professor e a THA do aluno. A THA do aluno é igual à do professor, mas a do professor continha também a resolução das atividades e sugestões de estratégias para o seu desenvolvimento. A THA entregue ao professor e desenvolvida em sala de aula consta no Anexo A.

CAPÍTULO 3
A TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM EM SALAS DE AULA: ATUAÇÃO DOS PROFESSORES E DOS ALUNOS

Neste capítulo, inicialmente faremos uma breve caracterização dos alunos envolvidos no projeto. Na sequência, selecionamos alguns dados do relatório de observações de cada aula. O relatório detalhado de observação de cada aula desenvolvida pelos professores P1 e P2 encontram-se no Anexo D. Finalmente, apresentamos alguns dados de avaliação do conhecimento dos estudantes após o desenvolvimento da THA.

Nesta etapa do desenvolvimento da pesquisa, o professor P3 comunicou que não poderia desenvolver as atividades com sua turma porque “estava atrasado com o conteúdo de funções, principalmente com a função quadrática”, e, por isso, não poderia garantir tempo suficiente para desenvolver o estudo de função exponencial com a THA. Com isso, a coleta de dados foi feita com os professores P1 e P2. Optamos por não incluir um novo professor, pois seria difícil recuperar com ele as discussões já realizadas sobre as THAs, em função do tempo previsto para a nossa pesquisa.

De acordo com a Proposta Curricular do Estado de São Paulo, o conteúdo de Função Exponencial está proposto no 3° Bimestre da 1ª Série do Ensino Médio. Por esse motivo, o desenvolvimento da THA teria início no 2º Semestre de 2008.

O desenvolvimento da THA iniciou-se em agosto de 2008, com os alunos da professora P1 e no final de outubro com os alunos do professor P2. Os professores iniciaram a THA em momentos diferentes porque a turma da professora P1 já havia estudado as funções do 1º e 2º Grau e o professor P2 ainda estava fazendo o estudo desse conteúdo.

3.1 Os alunos do Ensino Médio que participaram da pesquisa

Participaram da pesquisa, um total de 77 alunos, sendo 33 do sexo masculino e 44 do sexo feminino. Com relação à faixa etária, tínhamos a seguinte distribuição: 51 com 15 anos, 25 alunos com 16 anos e 1 aluno com 18 anos (que havia sido reprovado pela segunda vez, no 1º. Ano do Ensino Médio). São estudantes do período diurno e em sua totalidade, não trabalhavam. Alguns faziam curso de línguas, na própria escola, em outro turno.

3.2 O desenvolvimento da THA pelos professores P1 e P2

Optamos em realizar uma observação direta no desenvolvimento da THA em sala de aula, com a finalidade de melhor apreensão da atuação do professor e das perspectivas, comportamentos, dificuldades dos alunos em relação aos conhecimentos que estavam sendo explorados.

Consideramos que um fator que contribuiu para a coleta de dados foi o de que a nossa presença como observador na sala de aula não provocou grandes alterações no ambiente ou no comportamento dos alunos, pelo fato de lecionarmos nessa escola e eles já nos conheceram; isso fez com que a tarefa de coleta de dados em um ambiente natural tenha sido facilitada.

Na sequência, apresentamos nossas observações das salas de aula, que organizamos em dez categorias que foram emergindo da leitura dos relatórios. Para cada categoria, trazemos as ocorrências das duas turmas, ou seja, a turma de P1 e a turma de P2.

3.2.1 Organização da classe e “clima” dominante

A professora P1, durante o desenvolvimento da THA, trabalhou a maior parte do tempo com os alunos individualmente. Apenas na atividade que estava sugerindo para ser realizada em grupo a aplicadora organizou os alunos desta maneira. O clima estabelecido por ela na sala de aula proporcionou diálogo entre ela e os alunos e entre os próprios alunos. A professora manteve-se sempre na lousa explicando e anotando a resposta de cada atividade, de maneira clara e organizada. Mesmo tendo uma atitude mais diretiva, de modo geral, a professora buscou envolver os alunos em todas as atividades, para que eles participassem da aula e juntos, buscassem a resposta correta.

O professor P2 em suas aulas desenvolveu a THA, na maioria das vezes, com os alunos trabalhando individualmente e, quando a THA sugeria a atividade em grupo, o professor não organizava a turma como era esperado. Mas em uma das atividades, ao perceber que os alunos estavam interessados, permitiu que realizassem a atividade em trios. O clima estabelecido por ele em sala favoreceu a troca de idéias entre os alunos, mas percebemos que os alunos poucas vezes dialogavam ou tiravam dúvidas com o professor sobre as atividades. Embora possa parecer que o professor P2 quisesse dar mais autonomia aos alunos, ele acabou se "ausentando" das discussões o que acabou dificultando o trabalho e dando a impressão que os alunos se sentissem inseguros. Somente no momento da sua resolução, é que os alunos perguntavam ou procuravam tirar dúvidas com o professor.

3.2.2. Consignas do professor sobre a tarefa, explicitação dos objetivos de aprendizagem e combinados.

Ao longo do desenvolvimento da trajetória, os professores mostraram domínio sobre o assunto trabalhado e foram claros em suas explicações.

Os objetivos de aprendizagem das atividades não foram apresentados aos alunos em nenhum momento das aulas. Embora tenhamos conversado sobre a explicitação dos objetivos de cada tarefa para os alunos, na aula isso não foi feito, talvez pela ansiedade dos professores em logo iniciar a tarefa.

Ao iniciar o trabalho, os professores combinaram com suas alunos alguns itens importantes e necessários para o desenvolvimento do trabalho, como a informação de que a participação nas aulas seria avaliada e que havia um cronograma previsto para o desenvolvimento de cada atividade que deveria ser respeitado.

Além disso, os professores combinaram outras coisas. A professora P1 combinou com sua turma que trazer o material em todas as aulas fazia parte da avaliação e era para fazer toda anotação referente às atividades no verso da folha, ou seja, deviam registrar no verso da folha suas estratégias de solução e as resposta encontradas. O professor P2 fez mais três acordos com seus alunos: (1) eles iriam resolver as atividades individualmente e entregá-las; (2) após as atividades serem entregues os alunos juntamente com o professor discutiriam sobre as atividades e resolveriam cada atividade; (3) cada atividade entregue seria avaliada.

Em ambas as turmas observamos que a "avaliação" é utilizada como forma de fazer com que os alunos realizem as tarefas.

3.2.3. Atitude dos alunos durante o desenvolvimento das tarefas e implicação dos alunos na busca de solução.

Durante o desenvolvimento das atividades, percebemos que a maioria dos alunos da professora P1 executava as atividades participando sempre das discussões e fazendo questionamentos sobre elas. As discussões eram promovidas na sala de aula pela professora que mediava constantemente as ideias dos alunos e, também auxiliava-os na busca de estratégias para a solução.

Observamos que os alunos do professor P2, no início do desenvolvimento da THA, mostraram interesse nas atividades porque tinham conhecimento do assunto que estava sendo abordado (potenciação). Mas, nas atividades que envolvia a construção de novos conhecimentos, alguns deles pareciam não se sentirem motivados em resolver as atividades e preferiam esperar pela correção para copiar as respostas da lousa. Outros debatiam suas estratégias de resolução e, juntos, procuravam a resposta mais adequada e, no momento da discussão das atividades, eles participavam efetivamente.

Temos como hipótese que essa atitude passiva por parte de alguns alunos pode ter sido provocada pela forma com que o professor havia proposto o desenvolvimento das atividades, pois ele pedira aos alunos que resolvessem todas as tarefas e as entregassem, sem nenhuma discussão prévia sobre o assunto e sem intervenções propositivas, durante o decorrer das atividades. Desse modo, observamos que os alunos sentiram-se inseguros em resolver sozinhos a tarefa, além de demonstrar que não se sentiam à vontade em perguntar ou tirar dúvidas com o professor.

No entanto, durante o desenvolvimento da THA, os alunos começaram a conversar e a discutir suas estratégias de resolução entre si e com o professor. Com isso, temos como hipótese, que as discussões propostas por alguns alunos da sala fizeram com que os outros começassem a confiar mais no professor e ficar mais à vontade em apresentar suas ideias.

Outra observação que fizemos foi com relação à atitude dos alunos em relação à leitura de textos. No caso dos alunos de P1, a professora orientou a leitura coletiva dos textos, o que acabou levando todos eles a se engajarem na compreensão dos textos. No caso dos alunos de P2, eles manifestaram logo de início, que achavam o texto muito longo e perguntavam se era preciso ler o texto para resolver as questões.

Desse modo, alguns não entregaram a atividade e outros procuraram copiar a resposta do colega para não ter que ler o texto. Mas nas atividades III, V e VII os alunos não tiveram a mesma postura, pois realizaram a leitura e discutiram suas ideias participando muito das aulas. O professor P2 comentou que talvez o desinteresse por algumas leituras devesse ao fato de que o assunto (caso do trecho tirado do livro Bilhões e Bilhões da Etapa I: Números grandes) estava "fora da realidade" dos alunos, argumento comumente usado para explicar diferentes questões que ocorrem em sala de aula.

Com relação às atividades que envolviam o uso de softwares, P1 levou os alunos ao laboratório de informática como havia sido combinado. Os alunos ficaram bastante animados com a proposta e os únicos problemas aconteceram em função do número reduzido de máquinas para a quantidade de alunos. Mesmo assim, trabalharam em trios. Para a professora também foi bastante difícil auxiliar os grupos e, certamente, muitas dúvidas dos alunos permaneceram sem resposta.

O professor P2 pediu a seus alunos que construíssem com papel e lápis todos os gráficos que apareciam na THA. A justificativa dele era a de que só depois disso é que eles usariam o computador. Como eram muitas as construções dos gráficos e das atividades, a maioria dos alunos não se interessou em resolver. O professor decidiu então levar à sala de informática apenas os alunos que fizeram ou tentaram resolver todos os exercícios. Os demais alunos deveriam ficar na sala de aula para a discussão das mesmas atividades que os outros alunos estavam fazendo na sala de informática, mas sem o computador. Além disso, o professor P2 solicitou-nos que trabalhássemos com eles no laboratório de informática, enquanto ele trabalharia com os demais na sala. Percebemos que os estudantes ficaram tristes com a atitude do professor.

No momento da discussão das atividades com os alunos que ficaram com o professor P2 não pudemos observar diretamente o que aconteceu, mas o professor relatou que os mesmos não participaram e ele apenas explicou e resolveu na lousa, para eles fazerem a cópia.

3.2.4. Eventuais problemas relacionados à leitura e compreensão dos textos.

Em todas as atividades que envolviam a leitura de textos, os alunos da professora P1 mostraram-se interessados e atentos à leitura. A professora realizava leitura coletiva com os alunos explicando e discutindo a idéia central do texto. Assim, não foi possível identificar problemas relacionados à leitura.

Em relação aos alunos do professor P2 foi difícil diagnosticar se houve problemas relacionados à leitura e compreensão do texto, pois os alunos realizavam suas leituras individualmente e no momento da discussão dessa atividade o professor e os alunos questionavam apenas a idéia central abordada no texto.

Foi possível observar apenas que em uma atividade relacionada ao texto os alunos dos professores apresentaram uma dúvida comum: se a contagem dos ascendentes iniciaria com a geração deles ou com a de seus pais. Tal dúvida gerou um debate interessante. Dessa forma, podemos conjecturar que é muito importante viabilizar um espaço para que o aluno leia e argumente suas ideias com outros, pois, assim, o aluno desenvolve seu senso crítico tornando-se um cidadão capaz de se comunicar e de argumentar sobre seus pontos de vista.

3.2.5. Interação entre alunos na realização das tarefas

Percebemos que os alunos da professora P1 participaram ativamente em todas as atividades, pois houve uma grande interação entre eles e a professora. Mas houve uma atividade que contou com uma maior interação dos alunos. Foi a Atividade III da Etapa 2. Nessa atividade, a professora propôs uma nova tarefa que fez com que eles buscassem exemplos de situações do cotidiano que apresentassem um crescimento exponencial. Nesse momento, os alunos discutiam em grupo e procuravam uma situação que exemplificasse um acontecimento com essas características. Os alunos da professora P1 participaram das tarefas durante todo tempo, envolvendo-se coletivamente na solução das atividades.

Com os alunos do professor P2, observamos que no início do desenvolvimento das atividades os alunos não se sentiam muito à vontade em discutir suas ideias com os colegas. Isso ocorreu, talvez pelo fato de estarem vivenciando uma situação nova em sala de aula, pois as atividades sugeriam que os alunos debatessem suas ideias. Outra possibilidade pode estar relacionada à maneira pela qual o professor sugeriu a realização das atividades. Mas no decorrer da THA, houve uma evolução quanto à participação e interesse dos alunos do professor P2 e, em particular, no que se refere a discutir com os colegas.

3.2.6. Dificuldades observadas e possíveis causas

No decorrer das atividades, observamos algumas dificuldades apresentadas pelos alunos de ambos os professores, em especial no que se referia a potências de expoente negativo, analisar o comportamento (crescimento/decrescimento) de um gráfico e compreender a translação dos gráficos construídos com o auxílio do software.

Diagnosticar as causas de tais dificuldades é difícil, pois não conhecemos a trajetória escolar do aluno, nem sabemos como esses conceitos foram trabalhos anteriormente.

Mas, por exemplo, com relação à dificuldade em visualizar e compreender a translação das representações gráficas, isso pode ter ocorrido em função da pouca familiaridade que os alunos demonstravam em realizar tarefas de investigação, em formular conjecturas.

Além disso, percebemos por meio das atividades entregues, que os alunos do professor P2 não respondiam todas as questões das atividades propostas, principalmente as atividades relacionadas à construção gráfica da função exponencial, por insegurança com relação ao novo objeto de estudo.

Isso nos mostra que quando trabalhamos com metodologias como a da resolução de problemas ou a de investigações, que pressupõem um papel mais ativo do aluno, isso não significa que o professor não deva fazer intervenções que sejam problematizadoras, mas que permitam ao aluno avançar na construção de novos conhecimentos.

3.2.7. Interesse dos alunos nas atividades que envolvem contextualização de situações, situações de investigação e recursos tecnológicos.

Ao observar as atividades que foram executadas em sala de aula pela professora P1, percebemos que os alunos demonstraram interesse em todas as atividades propostas, principalmente, nas situações contextualizadas e de investigação. Nessas situações, percebemos que os alunos debatiam suas ideias e suas estratégias para melhor apresentá-las à professora. Nas situações relacionadas à Biologia, eles comentaram que era interessante ver um assunto de outra disciplina ser explicado por um conceito matemático. Além disso, nas situações que envolviam o uso do software, os alunos, apesar de não terem conseguido responder algumas perguntas, realizaram as atividades com entusiasmo e de forma bem interativa entre eles mesmos, pois se comunicavam com os outros grupos e conversavam sobre a representação gráfica buscando a solução. Temos como hipótese que os alunos não conseguiram responder adequadamente algumas questões que envolviam o uso do software devido a alguns fatores, tais como: o tempo insuficiente, excesso de pessoas na sala de informática, pouca ou nenhuma familiaridade com construções gráficas por meio de um software e a curiosidade em conhecer outros programas existentes no computador da escola.

Em relação aos alunos do professor P2, observamos que as atividades com abordagens contextualizadas e de investigação causaram mais discussão entre eles, pois nessas tarefas percebemos que eles defendiam com muito entusiasmo suas estratégias de resolução. Apesar das situações que envolviam o uso de software não terem sido desenvolvidas como o sugerido e planejado, causaram muita empolgação aos alunos, pelo fato de eles nunca terem visitado a sala de informática. Mas ao manusearem o software e visualizarem a construção gráfica da função exponencial, a atividade foi muito surpreendente, especialmente no caso dos alunos que haviam desenhado retas para representar as funções exponenciais.

Tal fato ocorreu porque os alunos, como já mencionamos, construíram primeiro os gráficos das funções exponenciais no papel quadriculado sem o uso do software e traçaram retas em suas representações gráficas. Após visualizarem que a construção gráfica dessa função era uma curva houve polêmica entre eles. A ideia trazida do estudo gráfico da função polinomial do 1º grau, fez com que eles considerassem que, em qualquer situação, deveriam traçar o gráfico com régua.

3.2.8. Adequação do tempo previsto para a atividade

O tempo previsto para o desenvolvimento de cada aula foi atingido com êxito pela professora P1, pois percebemos que tanto os alunos quanto a professora conseguiram realizar as propostas dentro do tempo previsto inicialmente. Somente na Atividade II da Etapa 3, o tempo previsto para a execução da atividade que era de 2 aulas de 50 minutos cada, reduzido a uma aula de 50 minutos. No caso da turma do professor P2, as atividades ocorreram no tempo previsto, mas devido a alguns eventos que ocorreram na escola, como Feira Cultural e Saresp (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo) não foi possível finalizar as atividades propostas. Isso aconteceu porque esses eventos ocorreram no final da 1ª quinzena do mês de novembro até o início de dezembro. Em dezembro, frequentaram as aulas os alunos que precisavam realizar provas para a recuperação de notas. Com isso, o professor não conseguiu finalizar a THA.

Este é um problema freqüente nas escolas em que o planejamento das atividades, embora importantes, muitas vezes desrespeita o planejamento das aulas elaborado pelos professores que não chegam a concluir o que pretendiam e traz prejuízos consideráveis à aprendizagem dos estudantes.

3.2.9. Intervenções do professor durante a realização das atividades, socialização e sistematização das conclusões

Ao longo do desenvolvimento da THA, pela professora P1 percebemos que constantemente ela fazia intervenções durante a realização das atividades, mas suas intervenções ocorriam de forma a mediar as opiniões dos alunos e juntos, encontrarem a resposta adequada. Quanto ao professor P2, ao desenvolver a THA em sala de aula observamos que ele interviu muito pouco nas resoluções dos alunos. Na maioria das vezes, apenas auxiliava aqueles alunos que traziam suas dúvidas e ideias.

Mesmo assim os dois professores buscavam, em suas intervenções, estimular os alunos, por meio de indagações, a buscarem novas estratégias de resolução. As intervenções, porém era mais no sentido de estimular os alunos a não desistirem e menos no sentido de fazer perguntas que contribuíssem para conduzir o raciocínio, contrapor hipóteses.

A professora P1, em suas aulas, interagiu positivamente com os alunos, pois ela sempre ouvia suas opiniões para depois socializar e sistematizar a resposta correta. Apenas em um momento muito importante da THA a sistematização não ocorreu da forma como estava prevista, pois a professora, depois de ter estudado a situação-problema que estava relacionada ao número de ascendentes em relação à geração, não relacionou o fato à função exponencial e logo passou ao estudo da representação gráfica dessa função.

O professor P2 optou por sistematizar cada atividade com os alunos após eles terem entregue as tarefas. Mesmo procurando incentivar a participação dos alunos na sistematização, poucos alunos se envolviam e, com isso, o professor sistematizava sozinho o assunto com explicações e anotações na lousa.

3.2.10. A opinião dos alunos sobre as atividades

Ao final do desenvolvimento da THA, entrevistamos alguns alunos das duas turmas com o objetivo de observar suas opiniões quanto as atividades da THA, e sobre as interações ocorridas com o professor e os demais alunos e sobre atividades que envolviam leitura de textos e utilização do software.

Dos que aceitaram participar da entrevista 7 alunos da turma da professora P1 foram entrevistados, sendo 4 meninas e 3 meninos, e 12 alunos da sala do professor P2, sendo eles: 5 meninas e 7 meninos. Vamos identificar os alunos do professor P1 como: **A1**, **A2**, **A3**, **A4**, **A5**, **A6** e **A7**. Os alunos do professor P2 como: **B1**, **B2**, **B3**, **B4**, **B5**, **B6**, **B7**, **B8**, **B9**, **B10**, **B11** e **B12**.

A seguir, vamos apresentar algumas opiniões dos alunos, das duas turmas, em relação à *interação aluno x professor* e *aluno x atividades*.

A1: "*Eu acho que as aulas ficaram mais interativas porque envolveu a professora e a gente e não ficou só ela falando durante toda a aula".*

A2: *"Percebi que a aula está sendo mais proveitosa do que estudar com a abordagem do livro didático, pois no livro não temos a apresentação de conteúdos de forma clara e nesse trabalho está fácil de compreender cada conteúdo".*

A3: *"A professora sempre foi muito legal, atenciosa e clara em suas explicações, mas ficou melhor com o novo trabalho e as atividades não são de repetições como sempre temos."*

A4: *"Eu achei que no decorrer das atividades eu melhorei muito quanto à leitura dos problemas e até de textos porque ao longo das atividades a professora nos ajudou bastante em como ler um problema e buscar o necessário para a gente resolver, então quando chegamos mais para o final da apostila, muita coisa eu conseguia resolver sozinha."*

A5: "*Eu acho que as atividades são interessantes porque, em muitas delas, nós precisamos pensar um pouco mais para resolver*".

A6: *"Eu percebi que a professora está sendo mais compreensiva quanto a ouvir a nossa opinião, pois existem momentos em que ela precisa ouvir a opinião dos alunos para depois apresentar a maneira correta de resolver."*

A7: *“Em alguns momentos, como na revisão de potências, acho que os exercícios estavam legais, porém acredito que poderia ter mais exercícios para praticar.”*

B1: *“As atividades são legais e eu acho que as atividades fizeram com que a gente discutisse mais as nossas ideias.”*

B2: *“Deu para entender, mas nem tudo. Na minha opinião, o professor poderia ter participado mais, assim, eu acho que teria ficado mais fácil.”*

B3: *“Gostei da proposta e das atividades, mas eu achei que deveria ter mais atividades que cobrassem o que foi aprendido, igual no livro que a gente tem. Sempre que estudamos algum assunto ou fórmula tem um monte de exercícios para fazer. São mais ou menos iguais, mas a gente sempre faz.”*

B5: *“As atividades são interessantes porque eu nunca tinha estudado exercícios de outra disciplina junto com matemática.”*

B6: *“Eu gostei muito de trabalhar com essas atividades porque os exercícios eram diferentes do que a gente estava acostumado a fazer, aqui, a gente tinha atividades diferentes umas das outras e isso foi bom.”*

B8: *“Eu acho que as atividades são boas e diferentes, mas eu não gostei muito de como o professor trabalhou. Eu não gostei de fazer as atividades primeiro, entregar para a nota e só depois discutir a atividade e corrigir, porque em alguns exercícios eu tinha dúvidas e acabava não perguntando a ele e entregando incompleto. Eu acho que assim desmotivou um pouco a classe.”*

B9: *“Eu gostei da “apostila”, de como a função exponencial foi abordada. O professor é muito bom eu percebo que ele sabe bastante, mas não gostei muito de fazer sozinha as atividades.”*

Podemos perceber que os alunos de ambos os professores gostaram e acharam interessantes as atividades propostas. Além disso, notamos que nas duas turmas, alguns alunos, sentiram falta de “aplicar o que foi aprendido”, ou seja, sentiram falta de exercícios. Ficou claro que os alunos estão mais acostumados a trabalhar com exercícios que requerem a prática do cálculo e não com situações que exigem investigações.

Não se trata evidentemente de abolir os exercícios mesmo porque, eles têm sua função, mas a proposta é a de que outras tarefas como as de resolução de problemas e investigações sejam também parte integrante do processo de construção de conhecimento dos alunos.

Quanto à *interação aluno x professor* temos duas percepções. Os alunos da professora P1, de uma maneira geral, relataram que essa interação já era boa antes do trabalho, mas melhorou muito com o desenvolvimento da THA, pois na entrevista e até nas aulas, percebemos que os alunos gostaram do modo como a professora os incentivava para realizarem as atividades e os motivava para participarem das aulas. Acreditamos que tal motivação e incentivo possibilitou que o aluno sentisse mais interesse nas aulas. Grande parte dos alunos do professor P2 disseram que essa interação não foi melhor por causa da maneira de como o professor propôs a realização das atividades, de alguma forma interagindo pouco com a classe.

Quanto à *leitura dos textos*, alguns comentários feitos pelos alunos estão registrados a seguir:

A1: *"Todos os textos trabalhados até agora são claros e objetivos com a sua abordagem, além disso, o assunto* abordado faz parte da nossa realidade *o que facilita para que os alunos se interessem em ler".*

A2: *"Apesar de serem assuntos interessantes eu achei que os textos estavam longos o que levou um pouco de desinteresse da minha parte."*

A4: *"Eu achei que o assunto de cada texto facilitava na compreensão do conteúdo."*

A5: *"Nós nunca lemos textos em matemática como lemos nesses dias e achei muito legal, porque são textos que abordam conteúdos de matemática e que falam de coisas que estão no nosso dia a dia."*

A7: *"Apesar de não gostar de ler, senti interesse por esses textos porque nunca li um texto que estivesse ligado a algum conteúdo matemático."*

B2: *"Assim... quando eu vi aqueles textos eu achei ruim ter que ler, mas li e percebei que não eram tão ruins. Na verdade, é muito difícil a gente ter que ler tanto em matemática como fizemos nessas últimas aulas."*

B3: *"Gostei dos textos, mas o professor poderia ter sido um pouco mais flexível nas respostas, pois eram opiniões pessoais."*

B4: *"As atividades com textos eu achei mais elaboradas porque eu nunca tinha estudado assim nas aulas de matemática."*

B8: *"Dificultou um pouco os textos porque eram muito longos e para responder, tinha que ler tudo porque a resposta não estava tão direta assim."*

B11: *"Eu achei que com os textos o entendimento ficou mais fácil porque o texto nos ajudou a entender um pouco mais e, além disso, ficou mais interessante de se estudar."*

B12: *"Eu, particularmente, gosto de ler e sempre senti falta disso nessa disciplina, então pra mim foi muito bom esses textos. Sem contar que senti mais interesse em ler porque os assuntos envolviam outros assuntos diferentes."*

Dos entrevistados nas duas turmas, percebemos que a maioria dos alunos achou os assuntos interessantes o que os levou realmente a querer ler os textos. Além disso, ficou perceptível que alguns alunos ainda não têm o hábito de ler, ou porque não gostam ou porque o texto é longo e que a leitura precisa ser estimulada por nós professores.

No que diz respeito ao *auxílio do software* para a construção dos gráficos, os alunos fizeram os seguintes comentários:

A1: *"Eu achei que o software ajudou muito na visualização do gráfico e a ter uma melhor compreensão da curva que representa a função exponencial."*

A4: *"Eu nunca entendi direito como construir um gráfico. Fazendo no computador foi muito bom porque pude visualizar cada ponto do gráfico e perceber que é muito mais do que a gente imagina."*

A5: *"Não gosto de gráfico, mas depois de ir à sala de informática percebi que não é tão ruim assim construir gráficos."*

A6: "F*oi muito mais fácil resolver as atividades com a ajuda do computador porque a gente podia comparar cada gráfico porque as representações ficavam na tela e de cores diferentes."*

A7: *"Achei muito legal a atividade que nos possibilitou o uso de um software porque eu acho que a construção no caderno deixa o gráfico um pouco diferente do que ele é realmente."*

B1: *"Eu gostei muito de ter conhecido a sala de informática, eu acho que deveríamos ir mais vezes lá quando for para construir gráficos."*

B3: *"Não gosto de construir gráficos porque sempre me atrapalho, mas com o uso do computador e da tabela de pontos que tinha na tela facilitou a minha construção no caderno."*

B7: *"Com o software ficou muito mais fácil, porque lá, eu pude analisar ponto a ponto e comparar vários gráficos desenhados no mesmo plano cartesiano. Isso foi o melhor!"*

B9: *"As aulas ficaram mais dinâmicas depois que utilizamos o software porque na hora da discussão a gente participava mais, discutíamos mais sobre como os gráficos ficavam desenhados."*

Observamos nos relatos das duas turmas, que o uso do software pode favorecer até aquele aluno que não gostava de construir gráficos, pois ele sentiu-se interessado em visualizar sua construção e de inclusive analisar seus pontos. Assim, podemos dizer que, dentre os alunos entrevistados, todos acharam importante e gostaram muito do auxílio do software para a construção gráfica.

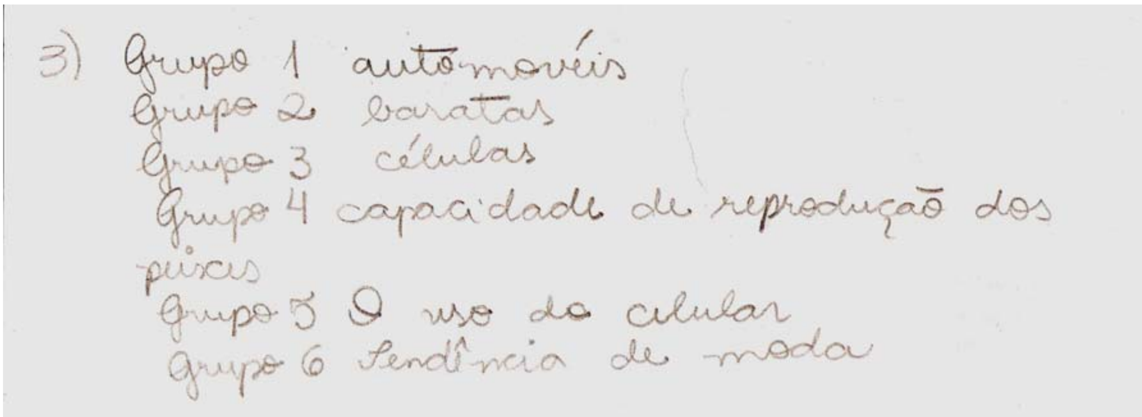
Percebemos que, de modo geral, os alunos gostaram da proposta da THA, principalmente pela maneira de abordar o conteúdo de uma forma diversificada, com situações interativas, com contextos interdisciplinares e com o auxílio de um software.

3.3 A aprendizagem dos alunos com as atividades envolvendo Função Exponencial

Com base nas observações em sala de aula pudemos identificar algumas situação de como as aprendizagens iam, ou não, se constituindo e fizemos alguns apontamentos a respeito.

Analisando a retomada e operacionalização com potências, na atividade I, percebemos que os alunos da professora P1 ficaram muito interessados na leitura e no assunto do texto, pois eles fizeram comentários a respeito do método de resolução das potências, como: *"As pessoas erram mais na forma de resolver a potência do que na escrita, como mostra o texto, exemplo: resolvem a potência 10^9 como 10×9"*; e, além disso, não apresentaram dificuldades em suas resoluções.

Observamos também que na atividade III, os alunos de ambas as turmas mostraram interesse em sugerir eles próprios, acontecimentos que julgavam ter crescimento exponencial. Numa das turmas surgiram exemplos ligados à fabricação de automóveis, à reprodução de baratas, células, peixes, ao uso do celular, à propagação de tendências de moda, como vemos no registro de um aluno:


3) Grupo 1 automóveis
Grupo 2 baratas
Grupo 3 células
Grupo 4 capacidade de reprodução dos peixes
Grupo 5 O uso do celular
Grupo 6 tendência de moda

Com relação à análise dos gráficos de diferentes funções (Função do 1º Grau, Função Quadrática e até mesmo a Função Exponencial), apenas os alunos da professora P1 realizaram a atividade como uma investigação. Nesse trabalho revelaram-se alguns pontos de maior dificuldade como identificar a expressão algébrica que representa cada função e o crescimento e decrescimento de funções. Para que houvesse uma compreensão desses conceitos, a professora precisou intervir e explicar cada item de dúvidas. Vejamos algumas respostas apresentadas pelos alunos em relação à expressão algébrica do gráfico que representa uma função exponencial:

"Professora, eu acho que a lei pode ser (x+1)."
"Não, eu acredito que seja 2x."
"Ou então, a lei é (x+x)."

Na atividade V, percebemos que os alunos não tiveram muitas dificuldades para compreender a situação em uso e destacaram suas surpresas:

"Puxa, que interessante, nunca pensei que pudesse existir tanto parentesco mesmo com um certo grau de distância."

"É engraçado imaginar que podemos ser primos bem distantes. Será que é possível?"

"Será que há a possibilidade de eu estar a namorar com uma prima?" risos

O exercício 2 da atividade VI feito na sala de informática, causou muita empolgação por parte do alunos, primeiro porque eles não sabiam da existência da sala de informática na escola e, segundo, pelo fato de estarem fazendo uma atividade muito diferente na aulas de matemática.

As dificuldades observadas já foram mencionadas e relacionaram-se a não identificar para quais valores da base a função é crescente ou decrescente (exercício 4) e a observar a translação do gráfico em relação ao eixo das ordenadas (exercício 5). O aspecto gráfico prevaleceu mas não houve maior investigação na expressão algébrica da função e à analise da base. Assim, entendemos que o software auxiliou os alunos a terem uma melhor visualização da curva exponencial, mas percebemos que o proposto na atividade 4 e na atividade 6, não foi suficiente para o objetivo pretendido e que deveríamos procurar novas tarefas para uma próxima situação de aprendizagem.

Mesmo assim, alguns formularam suas conjecturas.

"Quanto mais expoente é acrescentado em uma potência, o crescimento é mais rápido, como nos itens A, B e C."

"O valor de y vai aumentando sempre uma unidade."

"Somando-se um número a função cresce mais rápido."

"A função cresce mais rápido e, consequentemente, o gráfico também."

"As funções continuam com o mesmo desenho, crescente ou decrescente, mas com acontecimentos diferentes: a crescente cresce mais rápido e a decrescente diminui mais rápido."

Em relação à identificação da expressão algébrica por meio do gráfico, na atividade 7, percebemos que os alunos não encontraram dificuldades em identificar a função exponencial, $f(x) = 4^x$.

Vimos também que parte das dificuldades dos alunos estão ligadas a conhecimentos que supomos que já têm, como é o caso da decomposição de um número em fatores primos, por exemplo. Observamos que a professora P1 precisou intervir e esclarecer diversas dúvidas dos alunos.

3.4 Uma avaliação do conhecimento dos estudantes após o desenvolvimento da THA

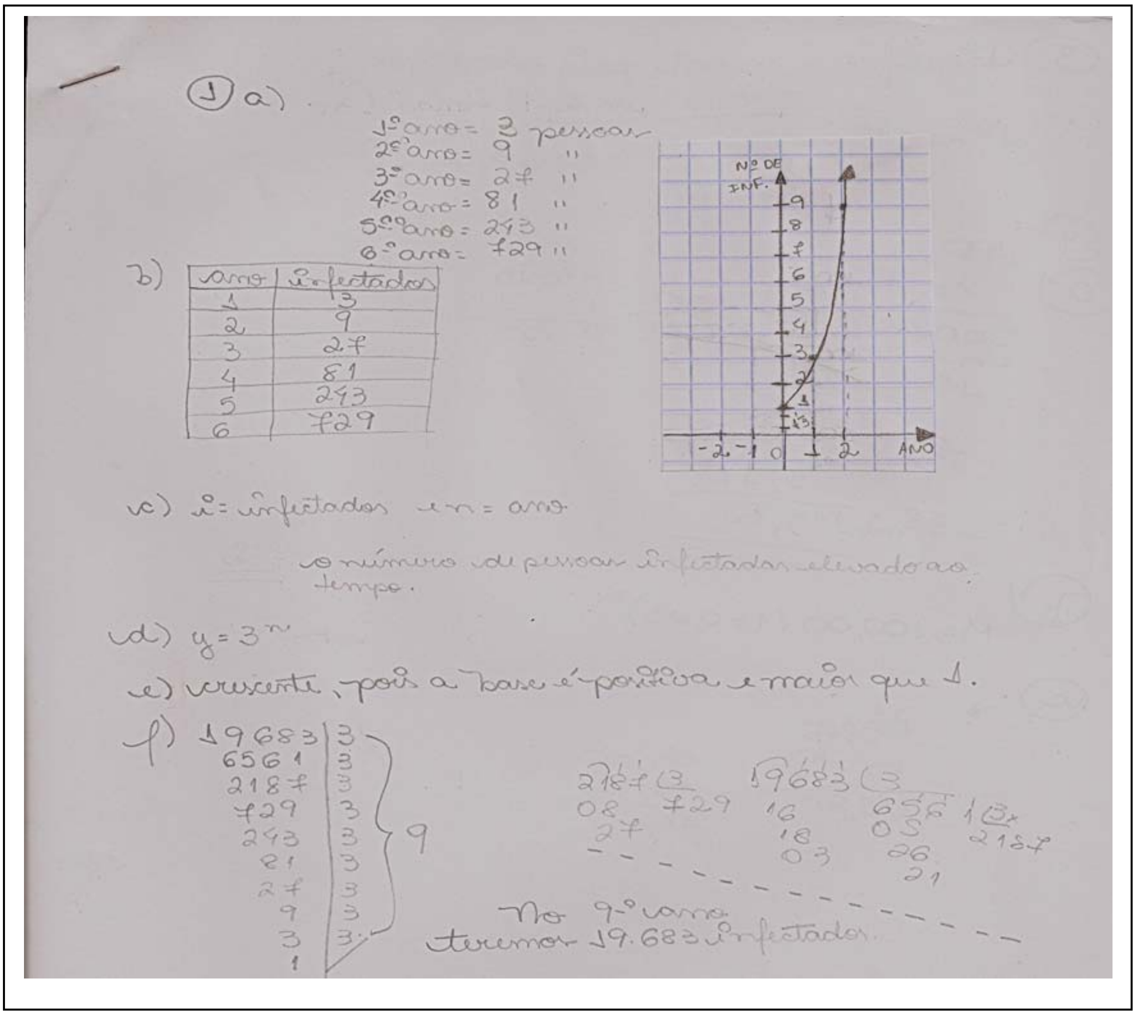
Após o desenvolvimento da THA em sala de aula foi elaborado, pela professora pesquisadora e os professores P1 e P2, um instrumento de avaliação com a finalidade de verificar em que medida os objetivos de aprendizagem haviam sido alcançados. A opção dos professores foi a de realizar uma prova escrita, que consta no Anexo E. Como os alunos do professor P2 não concluíram as atividades previstas, fato que já mencionamos anteriormente, eles não responderam à questão que abordava Matemática Financeira.

Estavam presentes no dia da avaliação 32 alunos da professora P1 e 38 alunos do professor P2. Os alunos realizaram a avaliação em suas respectivas classes e aulas, sendo que os professores acharam melhor realizar a avaliação em duas aulas seguidas, sem interrupção. Com isso, os alunos tiveram cerca de uma hora e meia para trabalhar.

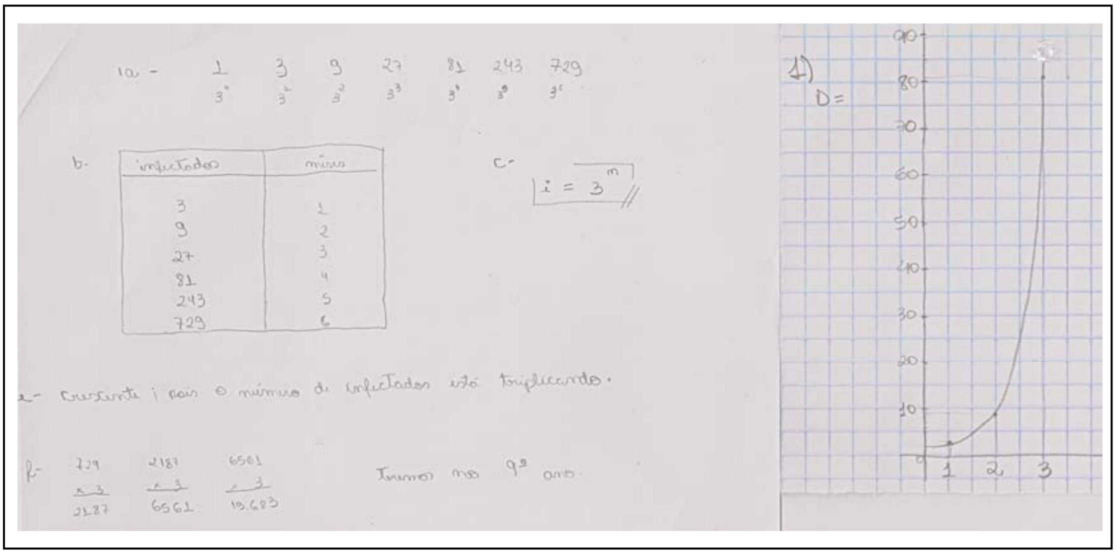
Terminada a avaliação, nos reunimos para analisá-las.

Com a finalidade de verificar a nossa primeira expectativa de aprendizagem, ou seja, o aluno deveria reconhecer e utilizar em situações problema, variações de grandeza expressas por lei do tipo $y = a^x$, percebemos que na atividade 1, grande parte dos alunos (71,5%) reconheceu de forma adequada na situação-problema a lei que expressa uma função exponencial, e além disso, mostraram compreensão na construção gráfica.

A título de exemplo, vamos apresentar duas resoluções da atividade 1. A primeira resolução é de um aluno da professora P1 e a segunda, de um aluno do professor P2.



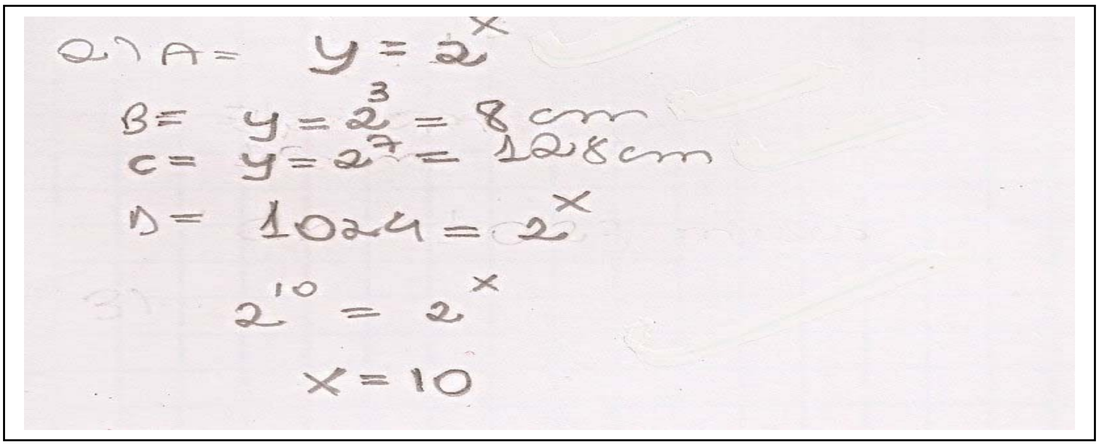
Resposta de um aluno da turma da Professora P1



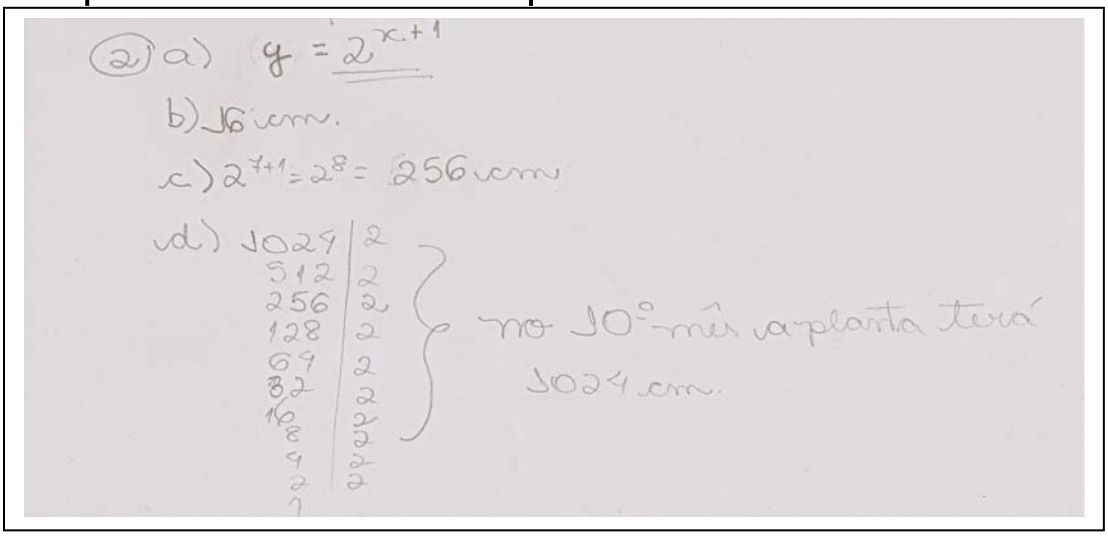
Resposta de um aluno da turma do Professor P2

Em relação ao segundo objetivo de aprendizagem, ou seja, reconhecer uma função exponencial a partir do seu gráfico, 57% alunos conseguiram resolver adequadamente a questão. Cerca de 18% dos alunos apresentaram dificuldades em solucionar a atividade.

Na sequência, vamos apresentar duas resoluções da atividade 2. A primeira resolução está correta e pertence a um aluno da turma da professora P1. A segunda resposta apresenta a função incorretamente e pertence ao aluno do professor P2.

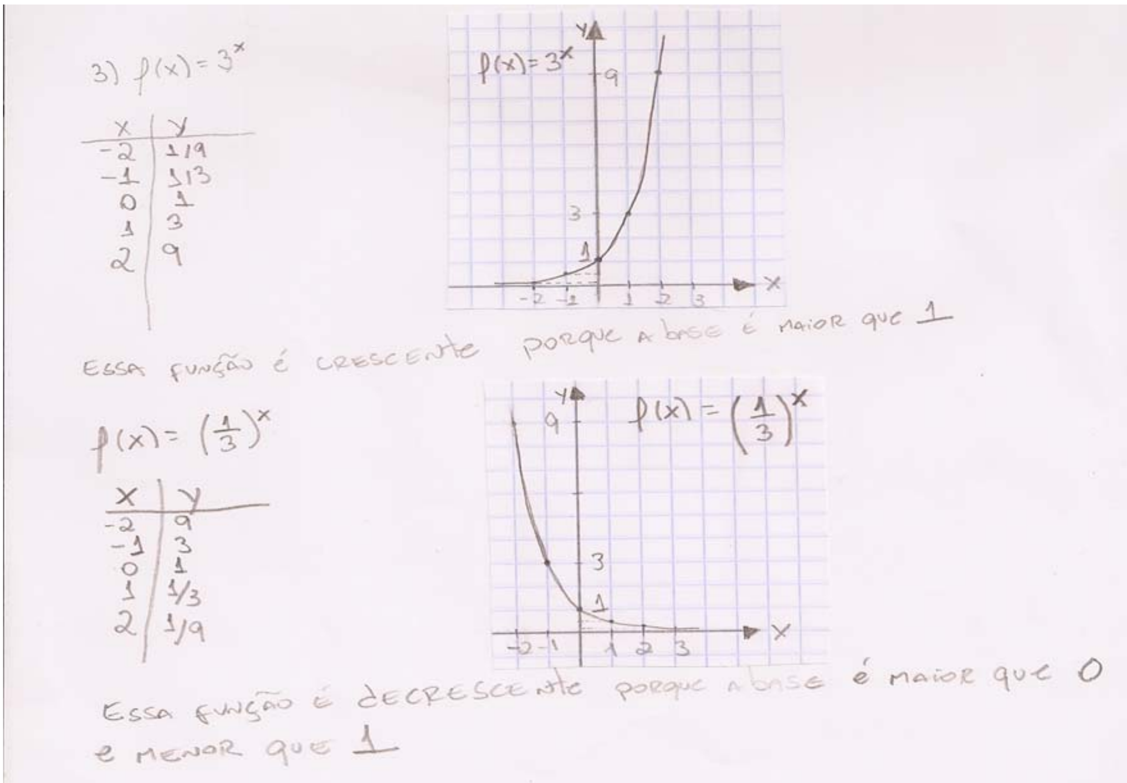

2) A = $y = 2^x$
B = $y = 2^3 = 8$ cm
C = $y = 2^7 = 128$ cm
D = $1024 = 2^x$
$2^{10} = 2^x$
$x = 10$

Resposta de um aluno da turma do professor P1

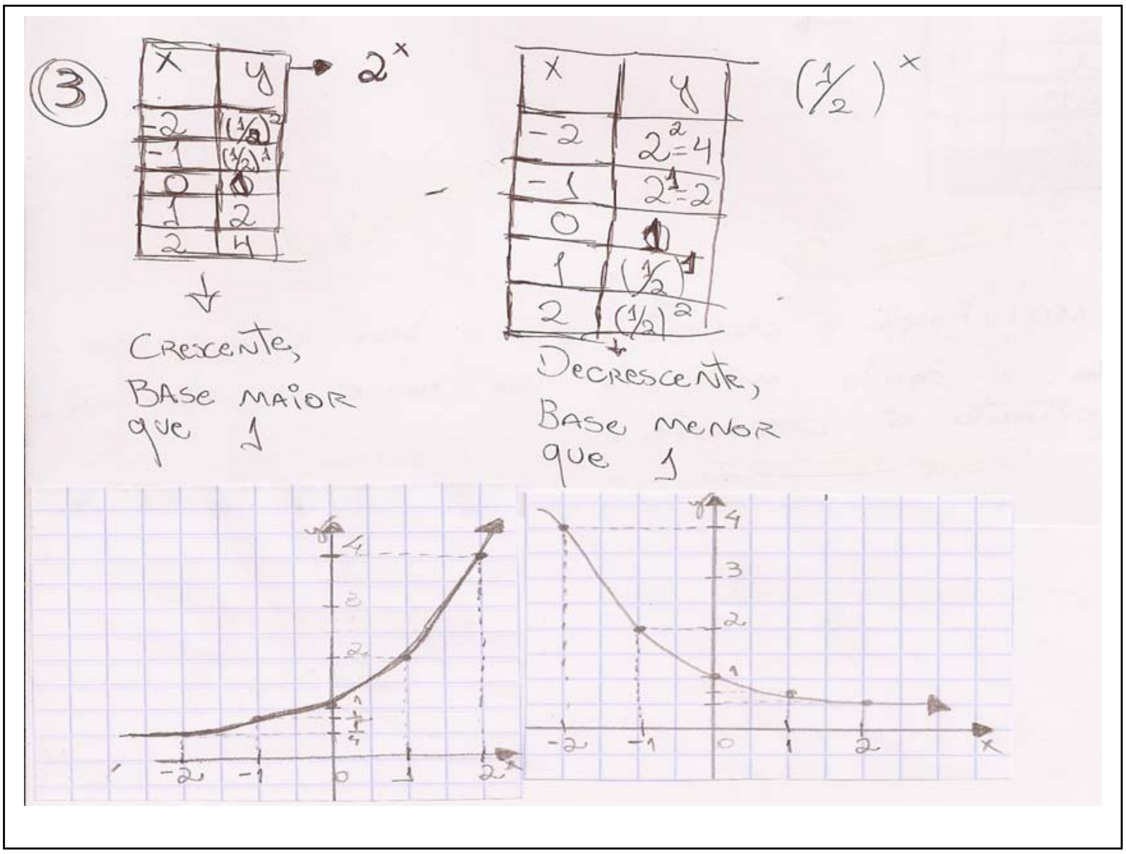

2) a) $y = 2^{x+1}$
b) 16 cm.
c) $2^{7+1} = 2^8 = 256$ cm
d) 1024 | 2
512 | 2
256 | 2
128 | 2
64 | 2
32 | 2
16 | 2
8 | 2
4 | 2
2 | 2
1
no 10º mês a planta terá 1024 cm.

Resposta de um aluno da turma do Professor P2

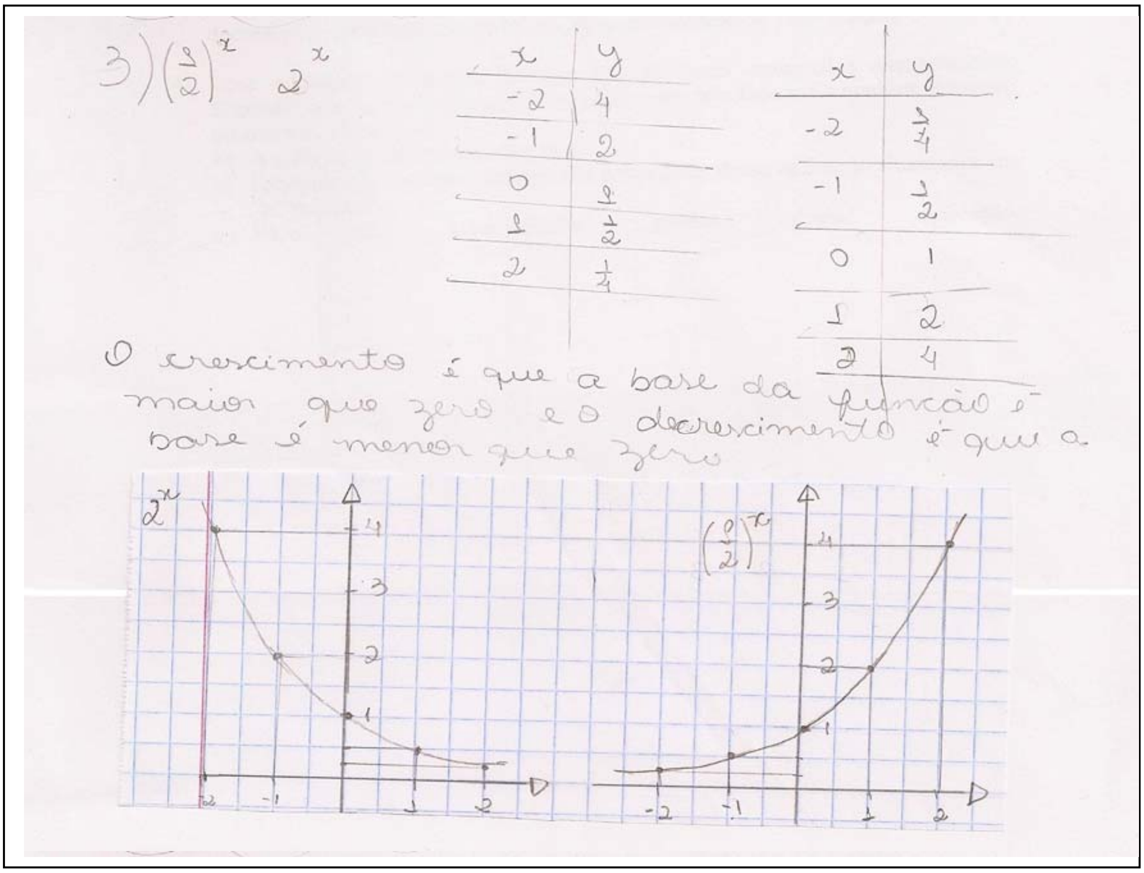
Na atividade 3, que se buscava verificar se houve compreensão dos alunos no sentido de relacionar a “base” à representação gráfica da função exponencial, 85,7% dos alunos embora fazendo corretamente a construção gráfica, não justificaram adequadamente, pois não levaram em conta a restrição de que a base da função exponencial não pode ser negativa. Apenas, 8,5% dos alunos da professora P1 e 5,7% dos alunos do professor P2, justificaram de maneira adequada. Na sequência, apresentamos alguns protocolos de alunos.



Resposta de um aluno da turma do professor P2



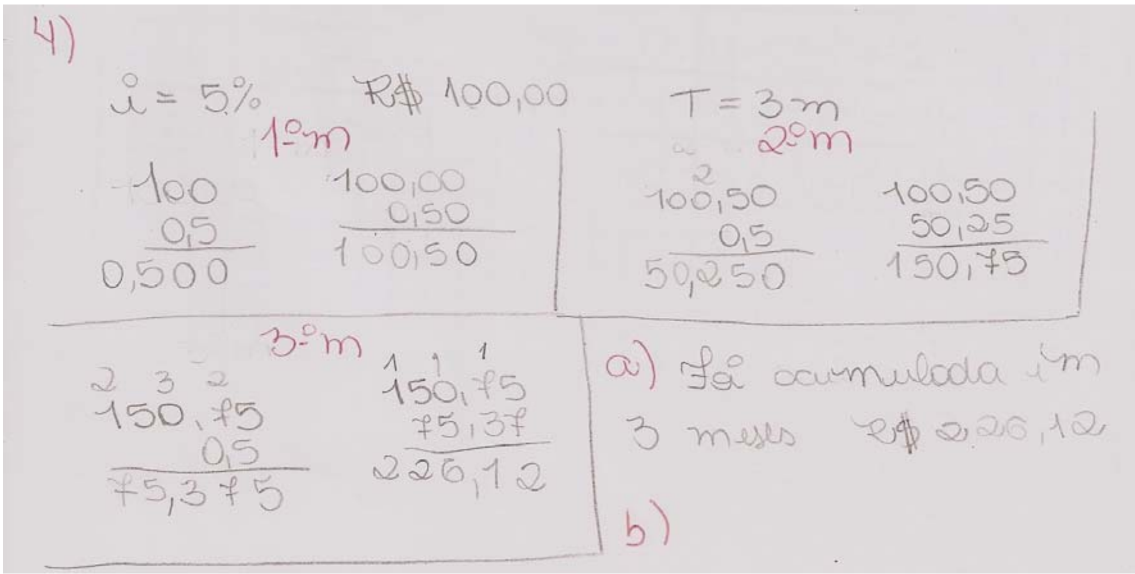
Resposta de um aluno da turma do Professor P1



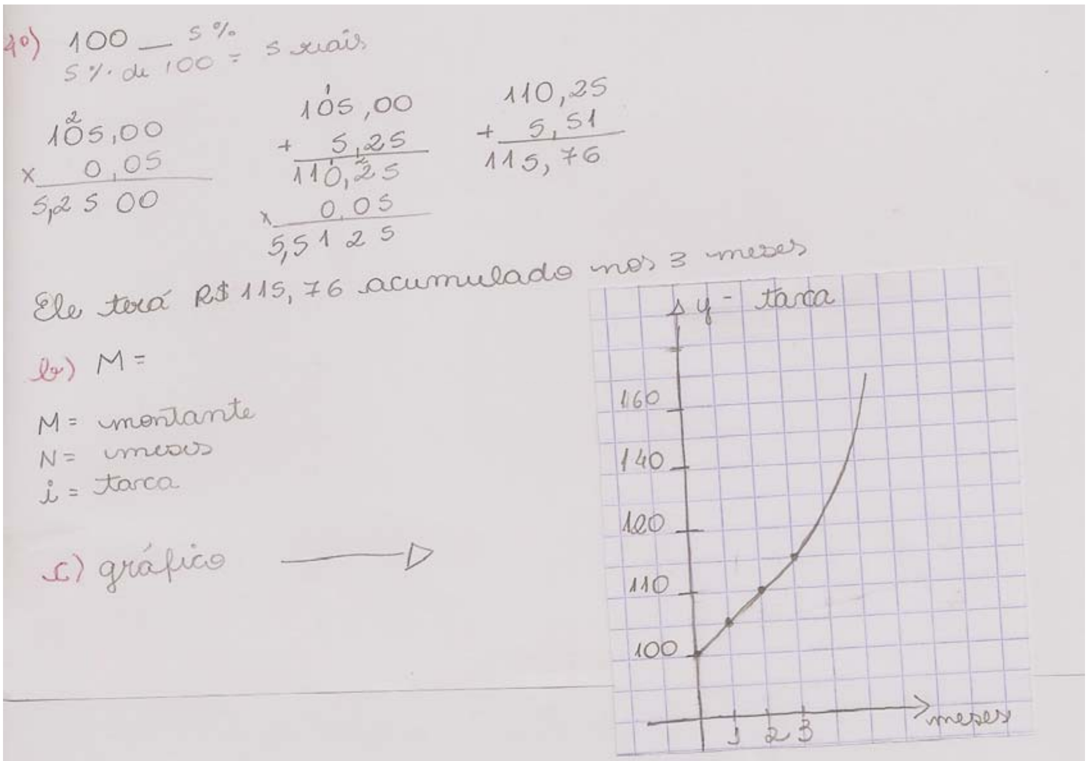
Resposta de um aluno da turma do Professor P2

Quanto à última expectativa de aprendizagem analisada, que era a de determinar a lei de uma função exponencial que expressasse o montante numa situação de juros compostos, percebemos que 37,5% dos alunos de P1 realizaram a atividade de maneira esperada, 50% responderam corretamente a quantia acumulada, mas não souberam formular a lei que representava o montante nos juros compostos e 12,5% não resolveram adequadamente a atividade, cometendo erros no cálculo de porcentagens, ou na formulação da lei que expressa o montante.

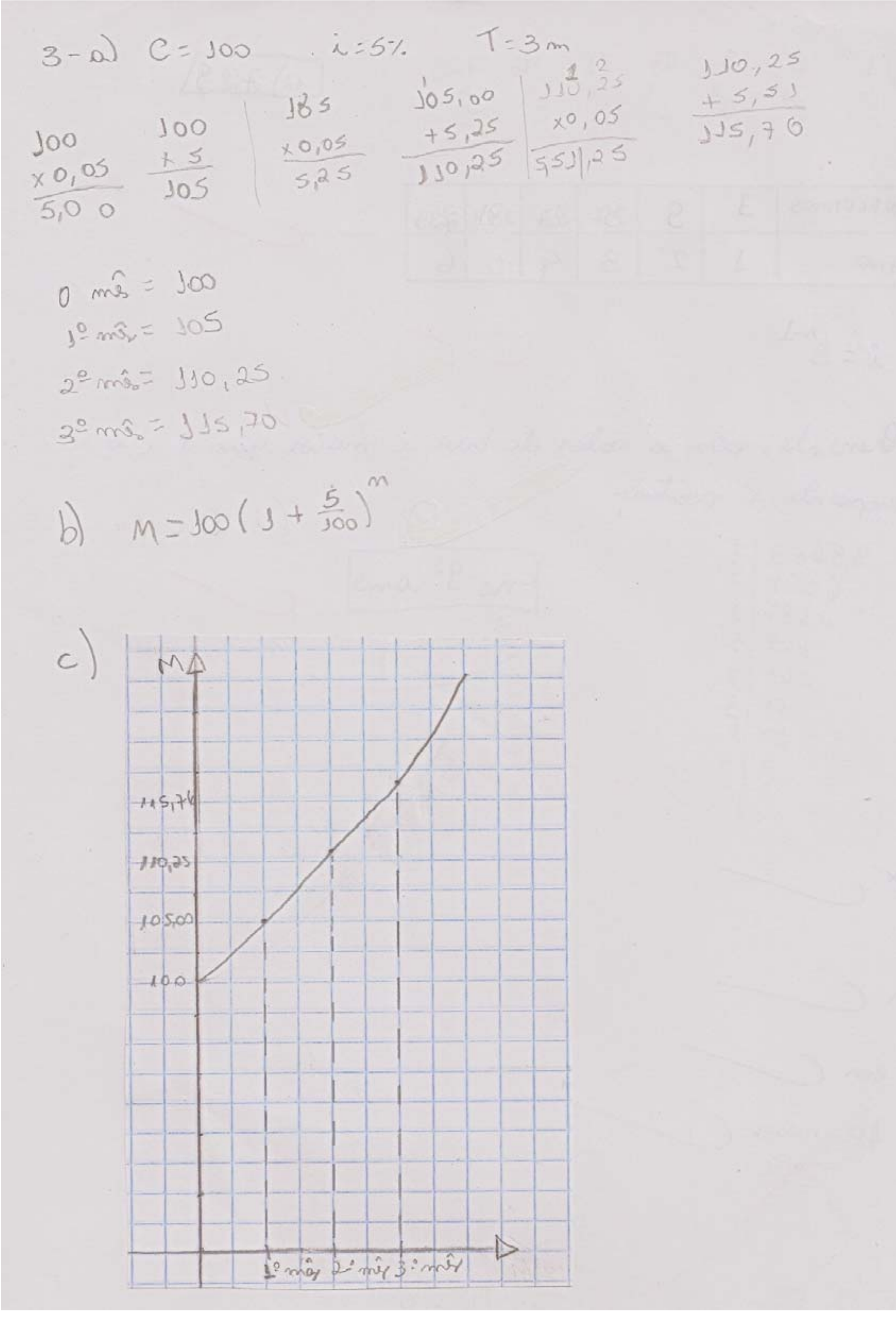
Três resoluções serão apresentadas a seguir: **resolução 1** - erro de cálculo na porcentagem, não identificou a lei que determina o montante e não fez a construção gráfica; **resolução 2** – resolução e a construção gráfica estão corretas, mas não determinou a lei de uma função exponencial que expressa o montante numa situação de juros compostos e; **resolução 3** – resolução adequada.



Resolução 1 – aluno da turma da Professora P1



Resolução 2 – aluno da turma da Professora P1



Resolução 3 – aluno da turma da Professora P1

CAPÍTULO 4
NOVOS CONHECIMENTOS DOS PROFESSORES E DA PROFESSORA PESQUISADORA

Retomando o Ciclo de Ensino de Matemática abreviado (Simon, 1995), apresentado na figura 1 (pág.30), vemos que o "conhecimento do professor" é ponto de partida e também ponto de chegada nesse ciclo.

Assim, neste quarto capítulo, apresentamos nossas reflexões sobre a construção de novos conhecimentos, tanto pelos dois professores do ensino médio que participaram da pesquisa, como dos meus conhecimentos como professora pesquisadora. Além disso, apontamos indicações para mudanças na THA, no caso de realizá-la numa próxima situação.

4.1 Os conhecimentos e reflexões dos professores

Após o desenvolvimento da THA, reunimos os professores participantes, com o objetivo de saber a opinião deles sobre o projeto, o envolvimento dos alunos, possíveis mudanças em seu trabalho e seus conhecimentos sobre a aprendizagem dos alunos.

Discutimos com eles o ciclo proposto por Simon(1995) e eles avaliaram que tiveram participação efetiva na elaboração e no desenvolvimento da THA, na interação como alunos na sala de aula e também realizaram uma avaliação dos conhecimentos dos alunos sobre função exponencial. Na sequência, transcrevo alguns comentários que os professores fizeram nessa reunião:

> **P1:** *"Gostei muito de participar do projeto e poder ter trabalhado de uma maneira diferente a função exponencial."*
>
> **P2:** "*Gostei muito de todo o trabalho, mas em particular, da parte que explora softwares para a elaboração dos gráficos, porque acho que este tipo de aula está mais afinado com os nossos tempos, por isso, certamente farei uso desse recurso. Além disso, apesar de não ter*

tido tempo para trabalhar, gostei da aplicação da função exponencial aos juros compostos que torna o ensino desse conteúdo mais estimulante."

P1: *"Ah sim, trabalhar com o software foi muito interessante por dois motivos: um, percebi que não é tão difícil fazer uso da tecnologia na Matemática e, segundo, os alunos gostaram da atividade. Mas para evitar problemas e viabilizar um espaço maior para que os alunos pudessem discutir suas ideias, não levaria toda a turma como aconteceu, levaria metade dos alunos em cada aula."*

P1: "*Embora essa turma fosse uma sala bem diversificada, do modo deles, todos acabaram se envolvendo bastante e participando de forma significativa. Percebi ainda, que os alunos sentiam-se empolgados nas aulas."*

P2: *"Pedi aos alunos para lerem e fazerem cada lição e depois procedemos as explicações. Constatamos que apenas um ou outro aluno, de fato, tentou resolver os exercícios, enquanto os demais simplesmente copiaram desses. Tenho claro, ainda, que exceções existam, a falta de competência leitora e interpretativa, a defasagem de conhecimentos prévios, além é claro, da enorme falta de interesse, com que nossos alunos chegam ao Ensino Médio. A aplicação do trabalho foi mais uma confirmação e me trouxe a certeza de que antes de iniciar qualquer conteúdo do Ensino Médio é muito importante revisitarmos assuntos do Ensino Fundamental mais diretamente ligados a tal conteúdo. Tudo isso, talvez, possa explicar a quase inexistência de questionamentos nas atividades por parte dos alunos."*

P1: *"Com o projeto percebi que trabalho pouco a teoria, a interdisciplinaridade e foco mais na parte de resolução de exercícios*. T*alvez seja por isso que achei que na THA havia poucos exercícios de fixação de conteúdo e assim, tomei a liberdade de propor exercícios paralelos que enfatizassem mais o assunto."*

P2: *"Não acho que os exercícios são poucos e nem considero isso fundamental, pois você pode aplicar mais ou menos exercícios de acordo com o desenvolvimento de cada turma."*

P2: *“Nas aulas, sou a favor de primeiro pedir para o aluno tentar fazer e depois explicar, assim, o aluno tem a oportunidade de desenvolver suas estratégias de resolução.”*

Ao longo da conversa percebemos que os professores enfatizam mais a questão das condições de trabalho, dos espaços para uso de novas tecnologias, da falta de interesse dos alunos e da falta de “competência”, seja em relação à leitura de textos, seja em relação a conhecimentos matemáticos básicos. Há também preocupação com o tempo que é gasto em função de se trabalhar buscando maior participação dos alunos.

Apesar disso, manifestaram ter gostado da experiência em trabalhar com softwares e com as atividades que aplicações em outras áreas de conhecimento. Também observamos que perceberam a importância de se preparar atividades, entendendo seus objetivos.

Mas, de modo geral, a discussão sobre o processo de construção de conhecimento dos alunos, sobre a importância de fazer emergirem suas hipóteses, de questioná-las, de quando for o caso modificá-las, enfim esses aspectos se mostraram distantes da reflexão sobre a prática docente.

4.2 Os novos conhecimentos da professora pesquisadora e indicações para mudanças na THA

Talvez bem mais difícil seja identificar claramente as transformações em nosso próprio conhecimento de professora. Mas, sem dúvida, a experiência trouxe mudanças radicais na minha forma de analisar a complexidade do “ensinar Matemática para que o outro aprenda”.

Minha experiência como professora é recente e minha inserção no campo da pesquisa em Educação Matemática também. De todo modo, tenho uma situação privilegiada em relação à grande maioria dos professores, pelo fato de cursar um mestrado, de conhecer pesquisas e de me aproximar de teorias nessa área.

A primeira grande aprendizagem foi a de que embora seja muito difícil elaborar THAs para um dos assuntos que desejamos ensinar e que as condições de trabalho praticamente inviabilizam que o professor realize esse trabalho, ficou muito evidente para mim que, sem compreender muito claramente os objetivos de aprendizagem de uma atividade ou de uma sequência delas (mesmo elaboradas por outra pessoa) é muito pouco provável que saiba conduzir a aprendizagem dos alunos em direção a esses objetivos.

Percebi que não é também nada simples, colocar em uso o que aprendemos com as pesquisas da área. No grupo de pesquisa, discutimos muitas vezes que o objetivo de nossos trabalhos não era o de construir uma THA "perfeita", mesmo porque ela não existe. Mas todos nós acabávamos nos referindo à "minha THA", tal era o desejo de encontrar formas muito boas para a aprendizagem dos alunos.

Assim, a experiência de elaborar "a minha primeira THA", de submetê-la às críticas dos colegas de grupo, de submetê-la aos professores que a aplicaram, de acompanhar seu desenvolvimento em salas de aula, de observar as atitudes dos alunos, de submetê-las aos pesquisadores que participaram da banca de qualificação, foi muito significativa para meu desenvolvimento profissional.

De forma mais específica, ao acompanhar o desenvolvimento das atividades em sala de aula e nas discussões com outros professores e pesquisadores, fomos identificando algumas modificações que poderiam ser incorporadas a uma nova versão da THA.

Assim, numa nova versão da THA, nossa intenção é a de propor aos alunos situações-problema que, por meio da taxa de variação, ele perceba que na função linear fenômenos crescem e decrescem a taxas constantes e, na função exponencial as taxas não variam dessa maneira. Assim, nessa elaboração que se inicia, indicamos tarefas que, por meio da investigação, o aluno seja capaz de compreender o crescimento exponencial comparando-o com funções que apresentam algum tipo de proporção.

Quanto ao tema de Matemática Financeira que trabalhamos na THA inicial, resolvemos fazer algumas alterações quanto à maneira de abordar tal tema. Percebemos que particularizamos muito a aplicação da função exponencial a essa área do conhecimento. Ao reorganizar as nossas expectativas de aprendizagem optamos por abordar a matemática financeira como um exemplo de crescimento exponencial.

Como o nosso objetivo nessa nova organização da THA é trabalhar com situações mais reais que proporcionam a compreensão do crescimento exponencial, vamos apresentar ao aluno mais um exemplo de que há um crescimento exponencial, como o número de Euler, o número *e*.

Inicialmente, em nossos objetivos de aprendizagens, não fizemos relação alguma com o número *e*, pois não relacionávamos esse estudo com a 1ª Série do Ensino Médio. Mas com as sugestões dos professores que participaram da banca de qualificação e as observações apontadas pelas pesquisas realizadas sobre esse assunto, achamos interessante investigar como e se a exploração do número “e” nessa fase pode ser interessante para a aprendizagem dos alunos.

No que se refere à retomada do conceito de potenciação e de suas propriedades optamos por abordar o assunto com tarefas que envolvam o uso da potência para identificar e interpretar situações científicas e do cotidiano. Por exemplo, para imaginar números grandes iremos trabalhar no campo da tecnologia, como: a capacidade da memória de aparelhos eletrônicos (MP3, IPOD, HD do computador, memória de celular), e para abordar a ideia de número pequeno, vamos trabalhar com os valores do Sistema Internacional de medidas e outros exemplos relacionados à área de Biologia. Assim, por meio de situações que fazem parte do dia a dia dos alunos iremos proporcionar que eles estudem o significado, notações e a linguagem das potências viabilizando um caminho que o aluno possa perceber que o expoente deixa de ser um número e torna-se uma variável facilitando na compreensão da função exponencial.

Nas tarefas que envolvem o estudo da função exponencial, priorizamos informações que por meio de situações-problema possibilitem o aluno interpretar e aplicar o conceito e explicar fenômenos de diferentes naturezas, utilizando o conceito de função exponencial.

Por fim, no que diz respeito ao estudo da curva exponencial e suas características, mudamos o enfoque, pois na THA inicial percebemos que valorizamos mais a identificação da translação dos gráficos em relação ao eixo vertical do que a identificação dos valores que a base deve assumir para uma função ser crescente ou decrescente. Com isso, utilizando ainda o software Graphmatica, vamos propor atividades que por meio da investigação o aluno identifique que uma função exponencial é crescente quando os valores de $a>1$ e decrescente para $0 < a < 1$.

Em nossas reflexões, observamos que na THA inicial nos preocupamos com dois fatores. Primeiro, trazer para o aluno situações da realidade que baseado nas interpretações das informações ele pudesse identificar a função exponencial. Segundo, mostrar o uso dessa função nas diversas áreas do conhecimento mostrando assim, sua aplicabilidade. Na organização da nova THA, continuamos com os mesmo objetivos, mas procuramos abordar o tema valorizando mais o conceitual matemático.

Vamos apresentar uma nova proposta de THA que foi elaborada da seguinte maneira:

- **Etapa I -** Compreensão da existência de números grandes e pequenos por meio de textos que requerem a interpretação e identificação do uso da potência e suas propriedades em situações tecnológicas e do cotidiano**.**
- **Etapa II –** Estudo da função exponencial por meio de diferentes situações–problema e compreensão do crescimento e decrescimento exponencial por meio da taxa de variação.
- **Etapa III -** Por meio da investigação, conhecer e compreender um exemplo de crescimento exponencial que envolve o número de Euler.
- **Etapa IV –** Estudo da curva exponencial e suas características com tarefas de investigação e com o auxílio de um software matemático, Graphmatica.

Organizamos a THA para ser desenvolvida em 15 aulas de 50 minutos.

Como na THA inicial, sugerimos para cada situação de aprendizagem uma estratégia de como o professor pode desenvolver a atividade, assim como o tempo previsto para a realização de cada atividade.

Terceira versão da THA

Etapa I: Números "grandes" e "pequenos"

<u>Objetivo</u>: Uso da potenciação para compreender, identificar e interpretar situações envolvendo conceitos científicos e do cotidiano.

<u>Estratégia para o desenvolvimento da atividade</u>: Fazer a leitura com os alunos ou deixar que eles leiam. Proporcionar um debate entre os textos visando a discussão da existência de números grandes, números pequenos e utilidade da potência

Pensar na sequência de números naturais como uma sequência infinita constituiu um grande desafio para a humanidade, pois existe alguns números que é difícil imaginar sua existência. No texto abaixo encontrado no livro *Construindo consciências – Matemática de Ribeiro & Soares, 2007, p.208 podemos imaginar ou tentar imaginar o número bem grande.*

> *Em certa ocasião, o matemático americano Edward Kasner perguntou ao seu sobrinho Milton Sirotta, 9 anos, qual era o maior número que existia. A resposta do pequeno Milton, qualquer coisa como guuugol... não foi muito animadora, mas na mente criativa de Kasner isso virou uma bela brincadeira matemática. Em homenagem ao sobrinho, Kasner chamou de gugol ("googol", em inglês) o número 1 seguido de 100 zeros ou, dizendo de outra maneira, o número 10 elevado a 100. Não é tarefa fácil encontrar em nosso mundo real algo em quantidade tão grande quanto 1 gugol. Para ter uma idéia, o número de gotas de chuva que caem na cidade de São Paulo em um século é muito menor que 1 gugol. Também o número total de grãos de areia das praias do litoral brasileiro é menor que 1 gugol, assim como é menor que 1 gugol o número de elétrons em todo o universo (que se estima ser algo em torno de 10 elevado a 79 elétrons). Para não dizer que 1 gugol é um número insuperável, se imaginarmos o universo inteiro ocupado por prótons e elétrons de tal forma que não sobre nenhum espaço livre, então o número dessas partículas será maior que 1 gugol (10 elevado a 110 partículas, aproximadamente). Vencida a barreira do gugol, que tal pensarmos agora em um número ainda maior: "10 elevado a 1 gugol" (Kasner batizou esse número de gugolplex). Se fosse possível escrever um dígito a cada meio segundo, quanto tempo levaríamos para escrever todos os zeros do número 1 gugolplex? A resposta exige apenas algumas contas. Dizer que 1 gugolplez é o número 10 elevado a 1 gugol é equivalente a dizer que esse número tem o primeiro dígito igual a 1, seguido de 1 gugol de dígitos iguais a 0. Nas condições dadas, levaríamos 0,5 x 10 elevado a 100 segundos para escrever por extenso o número de zeros de 1 gugolplex. Levando-se em consideração que esse número é igual a 5 x 10 elevado a 99 segundos e que a idade estimada do universo é igual a 6,32 x 10 elevado a 16 segundos, é possível afirmar que, desde o Big Bang até hoje, não houve tempo suficiente para a empreiteira de escrever todos os zeros de 1 gugolplex. Para o leitor que pensa ter atingido o infinito com o gugolplez, que tal imaginar o número 1 gugolplez elevado a 1 gugolplex? Quanto ao nome desse novo número, fica por conta da imaginação de cada um!*

Você conhece um site de buscas na internet chamado *Google*, que foi inspirado no número googol de Edward Kasner, provavelmente porque esse site traz uma quantidade “muito grande” de informações.

No mundo, hoje, estamos habituados a ouvir e até mesmo lidar com números de elevada ordem de grandeza, que aparecem frequentemente na mídia, como as unidades de memória dos computadores. Os termos como *megabytes, quilobytes, gigabytes* são muito usados para informar a capacidade de memória de aparelhos eletrônicos e esses termos tornou-se tão comuns quanto ao uso de outras medidas, como quilograma. A seguir apresentamos um texto tirado da revista Veja referindo-se a capacidade de um disco rígido.

Revista Veja – 24/01/2007 – Tecnologia
Kilo, mega, giga... tera
A escalada tecnológica dos computadores cruza uma barreira espetacular com o lançamento do disco rígido de 1 terabyte
Rafael Corrêa

Os discos rígidos de computador, os HDs, acabam de cruzar uma barreira tecnológica que vai causar enorme impacto na forma como se armazena informação. A companhia japonesa Hitachi anunciou o lançamento, para março, do Deskstar 7k1000, um HD com capacidade de 1 terabyte – o equivalente a 1.000 gigabytes. Hoje, os computadores usados na maioria das casas e escritórios têm HDs com capacidade entre 40 e 120 gigabytes, o que muitas vezes torna necessário administrar o espaço do disco, apagando arquivos ou fazendo backup em CDs ou DVDs. Com o Deskstar 7k1000, é possível armazenar arquivos praticamente sem se preocupar com o espaço. Ele pode abrigar 250.000 faixas musicais, treze vezes mais que o iPod mais poderoso. Ou ainda 625.000 livros eletrônicos, que em versões impressas em papel consumiriam 20.000 árvores. Com preço anunciado de 399 dólares, o novo HD é mais barato, em termos relativos, do que os discos rígidos hoje utilizados. Nele, cada gigabyte custa 40 centavos de dólar, contra 61 centavos nos HDs convencionais.

Você saberia dizer quanto vale 1 terabyte?

Para conhecer e compreendermos números com elevada ordem de grandeza, como 1 tebabyte, podemos trabalhar com as potências.

Hoje, há muita confusão sobre o significado desses termos na tecnologia. Muitos fabricantes de memória adotam a base decimal na configuração de suas memórias, devido à facilidade de compreensão por parte do usuário. Contudo, a maioria dos sistemas operacionais adota o sistema binário (assumindo apenas dois valores, 0 e 1), o que gera uma discrepância entre a capacidade de memória declarada pelo fabricante e as medidas registradas nos sistemas operacionais.

A seguir, vamos apresentar uma tabela comparando as unidades do sistema decimal (SI) com o sistema binário (bi).

SI – Base decimal	**Quantidade de bytes**	**Base Binária**	**Quantidade de bytes**
quilobyte (Kb)	$10^3 = 1000$	*quibibyte* (Kib)	$2^{10} = 1024$
megabyte (Mb)	$10^6 = 1\ 000\ 000$	*mebibyte* (Mib)	$2^{20} = 1\ 048\ 576$
gigabyte (Gb)	$10^9 = 1\ 000\ 000\ 000$	*gibibyte* (Gib)	$3^{30} = 1\ 073\ 741\ 824$
terabyte (Tb)	$10^{12} =1\ 000\ 000\ 000\ 000$	*Tebibyte* (Tib)	$2^{40} = 1\ 099\ 511\ 627\ 776$
Petabyte (Pb)	$10^{15} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$	*Pebibyte* (Pib)	$2^{50} = 1\ 125\ 899\ 906\ 842\ 624$
Exabyte (Eb)	$10^{18} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$	*Exbibyte* (Eib)	$2^{60} = 1\ 152\ 921\ 504\ 606\ 846\ 976$
Zettabyte	$10^{21} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$	*Zebibyte* (Zib)	$2^{70} = 1\ 180\ 591\ 620\ 717\ 411\ 303\ 424$

Podemos perceber que a adoção pelo sistema binário favorece a uma capacidade maior de memória. Nosso enfoque, não é discutir esses sistemas, mas perceber a importância das potências na representação de números grandes e poder operar com elas.

Atividade I - No Sistema Internacional de medidas, os prefixos quilo, mega e giga expressam diferentes potências de dez. Assim, um quilobyte (Kb) equivale a 10^3 bytes. Sabendo disso, faça as seguintes transformações em potências de dez:

a) 10 *megabytes* em *bytes*
b) 1 *gigabyte* em *quilobytes*
c) *10 quilobytes em bytes*
d) 100 *quilobytes* em *gigabytes*
e) *3 quilobytes* em *gigabytes*
f) 1 *megabyte* em *terabyte*
g) 20 *terabytes* em *megabytes*
h) 1 *exabyte* em *zettabyte*
i) 10 *petabyte* em *gigabyte*

Atividade II – No sistema binário, os prefixos usados expressam potências de dois. Assim, um *quibibyte* (Kib) equivale a 2^{10} *bytes*. Sabendo disso, faça as seguintes transformações em potências de dois:

a) 2 *mebibytes* em *quibibytes*
b) 16 *gibibytes* em *bytes*
c) 10 *tebibytes* em *bytes*
d) 32 *quibibytes* em *gibibytes*
e) 10 *exbibytes* em *zebibyte*
f) 3 *pebibytes* em *mebibytes*

Atividade III – A capacidade de armazenamento de um CD-ROM está baseada no sistema binário, apesar de ser expressa com os prefixos do sistema decimal. Por exemplo: um CD-ROM de 700 Mb (*megabytes*) tem, efetivamente, uma capacidade real de 700 Mib *(mebibytes*). Diferentemente, a capacidade real dos DVDs é calculada com potências de 10. Ou seja, um DVD de 4,7 Gb (*gigabyte*) tem efetivamente uma capacidade de armazenamento de 4,7 *gigabytes*. Com essas informações, responda:

a) Qual é a capacidade real em *megabytes* de um CD-ROM de 700Mb?
b) Qual é a capacidade real em *gibibytes* (Gib) de um DVD de 4,7 *gigabytes*?
c) Qual é a capacidade real em *megabytes* de um disquete de 1,44 Mb? E em Kb?

Depois de trabalhar com números grandes escritos em forma de potência vamos conhecer os números pequenos que também podem ser escritos por meio de uma potência.

Para isso, vamos utilizar o Sistema Internacional de medidas para explorar a ideia de quantidades grandes e pequenas.

No que se refere às quantidades, no SI, também existem prefixos que permitem escrevê-las de maneira mais clara para quem trabalha em uma determinada faixa de valores. Observe na tabela a seguir.

Prefixo	Símbolo	Esacala	Equivalente decimal	10^n
yotta	Y	Septilhão	1 000 000 000 000 000 000 000 000	10^{24}
zetta	Z	Sextilhão	1 000 000 000 000 000 000 000	10^{21}
exa	E	Quintilhão	1 000 000 000 000 000 000	10^{18}
peta	P	Quadrilhão	1 000 000 000 000 000	10^{15}
tera	T	Trilhão	1 000 000 000 000	10^{12}
giga	G	Bilhão	1 000 000 000	10^{9}
mega	M	Milhão	1 000 000	10^{6}
quilo	K	Milhar	1 000	10^{3}
hecto	H	Centena	100	10^{2}
deca	da	Dezena	10	10^{1}
----	---	Unidade	1	10^{0}
deci	d	Décimo	0,1	10^{-1}
centi	c	Centésimo	0,01	10^{-2}
mili	m	Milésimo	0,001	10^{-3}
micro	µ	Milionésimo	0,000 001	10^{-6}
nano	n	Bilionésimo	0,000 000 001	10^{-9}
pico	p	Trilionésimo	0,000 000 000 001	10^{-12}
femto	f	Quadrilionésimo	0, 000 000 000 000 001	10^{-15}
atto	a	Quintilionésimo	0, 000 000 000 000 000 001	10^{-18}
zepto	z	Sextilionésimo	0, 000 000 000 000 000 000 001	10^{-21}
yocto	y	Sepilionésimo	0, 000 000 000 000 000 000 000 001	10^{-24}

Nessas representações de quantidades podemos observar que elas são expressas por diferentes potências de dez, como no sistema da tecnologia visto anteriormente.

Podemos encontrar esses números pequenos em situações na área de Biologia. A maioria das células mede aproximadamente 10 µ (micrômetros), o comprimento de um cordão de DNA na célula é de aproximadamente 10^{-7}, o diâmetro de um fio de cabelo humano é de aproximadamente $2{,}54.\ 10^{-5}$, nossos fios de cabelo crescem, aproximadamente, à taxa de $1{,}06.\ 10^{-5}$m por hora, um caracol de jardim se locomove no ritmo de aproximadamente $3.\ 10^{-2}$. Com isso, sabemos agora porque o cabelo demora a crescer.

Observando esses valores apresentados na tabela, quais conjecturar você pode fazer com relação a representação dos números pequenos?

Atividade IV - Analisando a tabela observamos que as potências com expoentes negativos são associados à sua parte decimal. Mas, além dessa representação, existe outra maneira de representar uma potência com expoente negativo? Qual?

Atividade V – Como podemos representar as potências 4^{-2} e $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$?

Atividade VI - De acordo com sua resposta anterior, faça a representação das potências com expoente negativo encontrados na tabela acima.

Atividade VII – De acordo com a tabela acima, faça as seguintes transformações em potências de10:

a) 2 *trilhões* em *milhões*
b) 1 *quintilhão* em *milhão*
c) 1 micro em nano
d) 10 *yocto* em femto
e) 1 *deci* em micro
f) 5 *sextilionésimo* em *sepitilionésimo*

Etapa II: Função Exponencial – Crescimento e Decrescimento Exponencial

Objetivo: compreender o crescimento e decrescimento exponencial por meio da variação da taxa de diferentes situações. Estudo da função exponencial.

Estratégia para o professor desenvolver a atividade: Deixar alguns minutos para que os alunos possam resolver as atividades e, em seguida, promover uma discussão das questões institucionalizando o conceito. Espera-se que o aluno utilize seus conhecimentos para identificar a função exponencial e suas características em diversas situações-problema.

As aparências (ou melhor, as potências) enganam

Proponha ao seu colega de classe a seguinte proposta e responda as questões abaixo: *"Durante 5 dias, a partir de hoje, vou depositar 100 reais por dia, e a cada dia até o último, mais três reais do dia anterior. Em compensação, você depositará 10 reais hoje e, a cada dia até o último dia, o triplo do dia anterior." (Adaptado do livro Matemática e suas tecnologias de Rubió & Freitas, 2005)*

a) Faça uma tabela mostrando o valor recebido dia a dia durante os 5 dias.

b) Ao final desse período, quem levou a vantagem, você ou seu colega?

c) Se a proposta se estendesse por mais cinco dias, será que a pessoa que foi beneficiada na questão anterior continuaria levando vantagem?

d) Na tabela já construída, continue mostrando o valor recebido, dia a dia, nos próximos 5 dias. Quem está em vantagem agora?

e) A partir de que momento a segunda proposta passa a ser mais vantagem?

f) Para cada situação, construa em um mesmo plano cartesiano e marque os pares ordenados que representa o valor recebido a cada dia até o final de 10 dias.

g) Observando gráficos construídos acima, qual situação cresce mais rápido?

h) Como você pode observar, em cada situação, o valor recebido sofre uma variação diariamente. Calcule essas variações.

i) De acordo com o estudo feito nos itens anteriores, quais conjecturas você pode fazer em relação ao aumento do valor recebido em cada situação?

Essa situação é facilmente resolvida com o uso das potências e, principalmente, com um tipo de função muito especial*, a* **função exponencial.**

Uma função exponencial tem características diferentes das demais funções, pois ela possui uma capacidade de crescer mais rápido do que as outras. Vimos um exemplo de crescimento rápido na atividade anterior, pois podemos observar que o valor recebido a cada dia na primeira situação cresce a uma taxa constante e na segunda situação, cresce a uma taxa crescente, assim, a taxa de variação triplica a cada taxa anterior.

O gráfico que representa a segunda situação descreve o gráfico de uma função exponencial, chamada curva exponencial. Nessa situação a curva exponencial é crescente, pois observamos que à medida que aumenta o número de dias, aumenta o valor recebido.

A seguir, por meio de outra situação-problema, vamos conhecer outra característica da função exponencial.

- ✓ A temperatura de uma substância é 70°C e um aparelho diminui a temperatura de uma substância no decorrer do tempo em minutos. Vamos analisar as situações e em seguida responda as questões abaixo:

Situação 1 – A temperatura diminui 20% a cada minuto

t (min)	0	1	2	3	4	5
T (ºC)	70	44,8	35,8	28,7	18,3	11,8

Situação 2 – A temperatura diminui de maneira uniforme a cada minuto.

t (min)	0	1	2	3	4	5
T (ºC)	70	60	50	40	30	20

a) Para cada situação, construa um plano cartesiano e marque os pares ordenados que representa a temperatura em função do tempo.

b) Observando os pontos marcados, qual situação diminui mais rápido?

c) Como você pode observar, em cada situação, a temperatura diminui ao passar do tempo. Calcule as variações entre as temperaturas.

d) Quais conjecturas você pode fazer em relação ao decrescimento da situação 1 e da situação 2?

Na situação proposta inicialmente (as potências enganam) vimos que fenômenos que crescem rapidamente é uma das características da função exponencial e, nessa situação, podemos identificar mais uma, o fato de decrescer rapidamente.

Nessa situação percebemos que a maneira de como a temperatura diminui na situação 1 é mais rápida do que na situação 2 e, além disso, na variação da temperatura podemos observar que na situação 2 a taxa decresce a uma taxa constante e na situação 1, a taxa decresce a taxas decrescentes. Assim, a taxa de variação diminui a cada taxa anterior.

A representação gráfica encontrada na primeira situação descreve o gráfico de uma função exponencial, que também é chamada de curva exponencial, mas nesse caso, é decrescente. Podemos observar que à medida que o tempo aumenta a temperatura diminui muito rápido.

De modo geral, chamamos de ***função exponencial*** toda função real cuja potência a^x seja definida para qualquer valor real do expoente *x.* Por isso, estudaremos sempre a potência com base positiva. Podemos definir uma função exponencial, sendo:

$$f(x) = y = a^{x}$$

$x \rightarrow$ expoente

$a \rightarrow$ base ($a>0$ e $a \neq 1$)

A função exponencial desempenha papéis fundamentais na Matemática e nas ciências envolvidas com ela, como: Física, Química, Engenharia, Economia, Biologia, Psicologia e outras, pois essa função é uma importante ferramenta que facilita o estudo de fenômenos naturais e sociais.

Agora que você já conhece a função exponencial, um pouco das suas características e as áreas que utilizam essa função como instrumento de estudo, resolva as situações a seguir.

1) Retorne as situações iniciais que estudamos sobre crescimento e decrescimento de uma função exponencial e identifique a função de cada situação que representa uma função exponencial

2) Um biólogo acompanhou o crescimento da folha com forma circular de uma planta aquática. Durante suas observações, percebeu que a cada mês o diâmetro da folha triplicava. Se no início das suas observações o biólogo mediu a folha e obteve 1 cm de diâmetro.

a) Qual será o diâmetro que ela terá ao final de seu prazo máximo de sobrevivência, que é de 4 meses
b) Determine a função exponencial que representa essa situação.
c) Complete a tabela e, em um plano cartesiano, construa o gráfico que representa o diâmetro da planta em função do tempo
d) Essa situação é crescente ou decrescente? Justifique sua resposta.

Mês	Altura
0	1
1	
2	
3	
4	

3) Constatou-se que uma doença epidêmica triplica o número de vítimas a cada ano. Em determinada região existe hoje 1 infectado. Supondo que a doença não foi contida, determine:

a) O número de infectados nos 6 anos seguintes (ano a ano).
b) Construa uma tabela relacionando o número de infectados em relação ao ano.
c) Sendo "i" o número de infectados e "n"o ano. Escreva uma relação matemática que nos permita calcular o número de infectados em função ao ano.

d) Faça uma representação gráfica dessa situação.
e) Em que ano teremos 19683 infectados?

4) Uma população P de micróbios cresce exponencialmente de acordo com a expressão $P = 5000 \cdot 3^t$ (t em horas).

a) Indique o valor de P para t sendo: 2h; 0,5h e $\left(\frac{2}{3}\right)$ h.
b) Esboce o gráfico de P como função de t.

5) Em seu livro Bilhões e Bilhões, Carl Sagan destaca:

"A circunstância mais comum em que ocorrem repetidas duplicações, e, portanto crescimento exponencial, é na reprodução biológica. Vamos considerar primeiro o simples caso de uma bactéria que se reproduz dividindo-se em duas. Depois de certo tempo, cada uma das duas bactérias filhas também se divide. Desde que exista bastante alimento e não haja veneno no ambiente, a colônia de bactérias vai crescer exponencialmente. Em circunstâncias muito favoráveis, pode haver uma duplicação a cada quinze minutos aproximadamente. Isso significa quatro duplicações numa hora e 96 duplicações num dia. Embora uma bactéria só pese aproximadamente um trilionésimo de grama, suas descendentes, depois de um dia de selvagem abandono sexual, vão pesar coletivamente o mesmo que uma montanha; em pouco mais que um dia e meio, o mesmo que a Terra; em dois dias, mais que o Sol e em breve tudo no universo será composto de bactérias. Isso não é uma perspectiva nada agradável, não é? Pois se for uma bactéria que causa danos fatais a saúde o número de mortos seria desastroso. Mas felizmente isso nunca acontece. Por que não? Porque o crescimento populacional desse tipo sempre bate em algum obstáculo natural. Os micróbios ficam sem alimento, ou se envenenam mutuamente, ou têm vergonha de se reproduzir quando não tem privacidade. (p. 21 e 22, 1998).

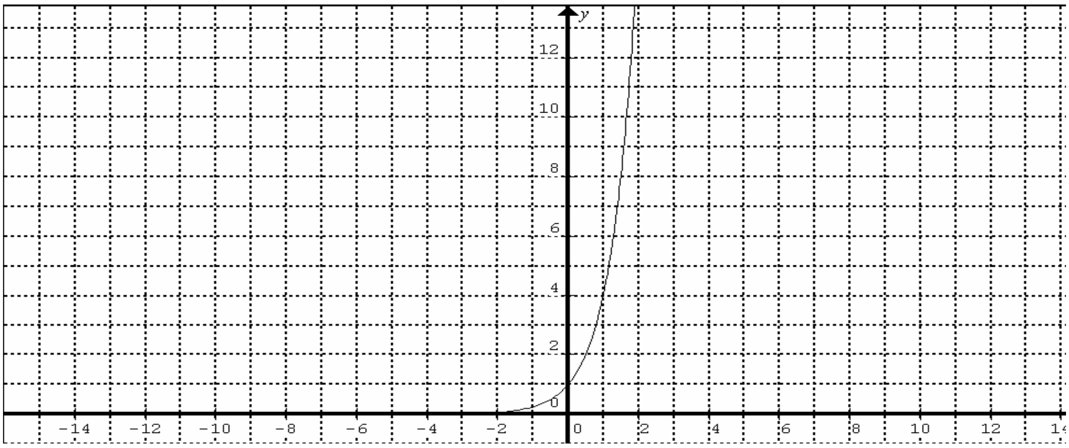
Refletindo sobre este trecho:

a) Como você interpreta o caso das bactérias, descrito por Sagan?
b) Se uma bactéria duplica a cada t minuto e inicialmente havia 300 bactérias, responda:
c) Expresse a função f(t) em t, sendo t o minuto e f(t) o número de bactérias e elabore uma tabela indicando o número de bactérias existente até o 5º minuto..
d) Após quantos minutos esta população será constituída por 19200 indivíduos?
e) Quando temos o tempo t = 0, quantas bactérias existem?
f) Essa função é crescente ou decrescente? Justifique sua resposta.
g) Construa um gráfico que represente o número de bactérias em função do tempo.

6) Em uma situação fictícia, um medicamento é ministrado por via intravenosa em um paciente portador de câncer. Suponha que, a cada mês, a aplicação do medicamento se reduza à metade da dose anterior. Sabendo disso, responda:

a) Para você, esse modelo fictício representa um crescimento exponencial ou decrescimento exponencial? Justifique.
b) Determine a função para esse modelo sabendo que o tempo em meses é *t* e *V* é a quantidade de substância.
c) Determine o gráfico que representa a quantidade do medicamento (em miligramas) em função do tempo (em meses).

7) A figura abaixo mostra um esboço do gráfico da função real $y = a^x$. Determine o valor de a.



8) (UFPA - Adaptado) Uma das práticas mais prazerosas da relação humana – o beijo – pode ser, paradoxalmente, um dos maiores meios de transmissão de bactérias. Supondo que o número de bactérias (N) por beijo (b) é determinado pela expressão $N(b) = 500 \cdot 2^b$, responda:

a) Se você der 3 beijos, qual será o número de bactérias transmitido?
b) Para que o número de bactérias seja de 512000, quantos beijos você terá que dar?

9) Fernando fez um empréstimo de R$1 000,00, pagando a uma taxa de 5% ao mês. Mas, no final de cada mês, sua dívida é acrescida dos juros relativos àquele mês, ou seja, a cada mês o valor do empréstimo é acrescido dos juros relativos ao mês anterior. Essa operação é chamada de sistema de juros compostos. Sendo assim, no 1º mês ele pagará: $M_1 = 1000 \cdot 1{,}05 = 1\,050{,}00$ e, no segundo mês irá pagar:

$M_2 = 1000 . (1{,}05)^2$. Sabendo disso, responda:

a) Se o empréstimo foi realizado para ser pago em 6 meses, quanto Fernando pagará em seu último pagamento?
b) Considerando M como Montante e t os meses, encontre uma lei que expresse essa situação.
c) Faça o gráfico do Montante em função do tempo.

10) A população N de determinado município cresce exponencialmente, desde sua fundação, há 20 anos, de acordo com a expressão $N = 3\ 000 . 10^{0,1t}$, sendo t em anos. Calcule:

a) O valor de N quando o município foi fundado (t=0).
b) O valor de N 10 anos após a fundação.
c) O valor de N nos dias atuais.
d) Depois de quanto tempo, após a fundação, a população atingirá a marca de 3 000 000 de habitante, se o ritmo de crescimento continuar assim.

Etapa III - Conhecendo um número interessante

<u>Objetivo</u>: Compreender o crescimento exponencial por meio do estudo do número e

<u>Estratégia para o professor desenvolver a atividade</u>: Proporcionar ao aluno que utilize a calculadora para fazer a atividade I, pois nesse momento o aluno, através da investigação, identificará o número e. Com isso, viabilize alguns minutos para que eles possam executar a atividade e, em seguida, fazer uma discussão para a institucionalização do estudo.

Atividade I – Considere função exponencial y = $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$, sendo n natural. Se preferir, com o auxílio de uma calculadora responda:

a) Calcule o valor de y para *n* = 1, 5, 8, 10, 15,17, 20, 22, 30, 40, 55, ..., 99, 100, 300, 500, ...,900, 1000.
b) O que ocorre com a base dessa potência, à medida que *n* aumenta?
c) Podemos perceber que quanto mais *n* cresce, mais essa potência se aproxima de um número. Saberia identificá-lo?

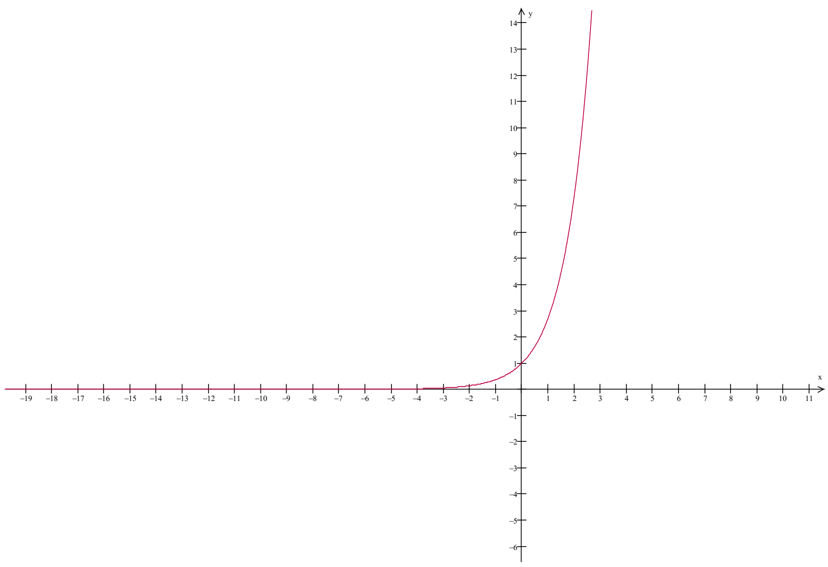
Comentário da Atividade I

Notamos que à medida que *n* cresce, a potência $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ se aproxima a um determinado número 2, 718281828459... Entre outros números fascinantes, como o π, esse número é também encantado pelos matemáticos e físicos.

Esse número que foi simbolizado pela letra *e* designa-se número de Jonh Neper, embora tenha sido o matemático suíço Leonhard Euler que o estudou intensamente tendo sua primeira aparição em um trabalho publicado em 1736.

> Por que teria sido a letra *e*. Não existe um consenso geral. De acordo com um ponto de vista, Euler a escolheu porque *e* é a primeira letra da palavra *exponencial*. Mais provavelmente a escolha ocorreu-lhe naturalmente, como a primeira letra "não usada" do alfabeto, já que as letras *a, b, c* e *d* aparecem frequentemente em outras partes da matemática. Parece improvável que Euler tenha escolhido a letra *e* por ser a inicial de seu próprio nome. Ele era um homem muito modesto e amiúde atrasava a publicação de seu trabalho para que um colega estudante pudesse receber o devido crédito. De qualquer forma sua escolha do símbolo *e*, como vários de seus símbolos, foi aceita universalmente. (Maor, 2008, p.203)

O número *e* está presente na resolução de equações em que as incógnitas aparecem no expoente, como acontece na função exponencial. Sendo assim, temos a função exponencial y = e^x. A seguir, o gráfico que representa essa função.



Essa função exponencial f(x) = e^x cuja base é o número de Neper modela fenômenos de importância vital, nos mais variados campos da ciência: físico-químicas, biológicas, econômicas, agronômicas, geográficas, médicas, sociais.

Construa, em um mesmo plano cartesiano, as funções $y = 2^x$, $y = e^x$ e $y = 3^x$. Quais conjecturas você pode fazer comparando as representações gráficas.

Para que você conheça mais sobre essa função exponencial, a seguir vamos apresentar uma situação que nos deparamos com o número *e*

Situação I

(FGV-SP) Curva de Aprendizagem é um conceito criado por psicólogos que constataram a relação existente entre a eficiência de um indivíduo e a quantidade de treinamento ou experiência possuída por esse indivíduo. Um exemplo de Curva de Aprendizagem é dado pela expressão $Q = 700 - 400e^{-0,5t}$, onde

Q = quantidade de peças produzidas mensalmente por um funcionário

T = meses de experiência

$e = 2,71828$

Com isso, responda:

a) De acordo com essa expressão, quantas peças um funcionário com dois meses de experiência deverá produzir mensalmente?
b) E um funcionário sem qualquer experiência, quantas peças deverá produzir mensalmente?

Etapa IV - Estudo do gráfico da Função Exponencial

<u>Objetivo</u>: Compreender por meio da investigação as características de uma curva exponencial do tipo $y= a^x$.

<u>Estratégia para o professor desenvolver a atividade</u>: Proporcionar aos alunos que possam, em duplas, utilizar a sala de informática para realizarem a atividade. Antes de iniciar a resolução da atividade, explicar aos alunos como o programa reconhece uma função. É importante deixar alguns minutos para que os alunos possam resolver a atividade para que após a finalização o professor promova uma discussão com a finalidade de institucionalizar conceitos gráficos dessa função (vale ressaltar que o professor pode mediar às discussões no momento da execução da atividade).

Vamos agora estudar as características de uma curva exponencial utilizando um software matemático, chamado Graphmatica.

Nesse estudo que iremos fazer a seguir, é importante ressaltar que o domínio é R (Conjunto dos números Reais) e sua imagem é R^*_+.

Atividade I – Construa em um mesmo plano cartesiano os gráficos das funções:

a) $y = 3^x$ b) $y = (0,7)^x$ c) $y = \left(\frac{7}{2}\right)^x$

Após a observação das representações gráficas das funções encontre mais três funções (no mínino) que sejam semelhantes ao gráfico de cada função acima.

y = ____ y = ____

y = ____ y = ____

y = ____ y = ____

Atividade II - Observe cada função e calcule os valores para y.

x / a^x	-3	-2	-1	0	1	$\frac{1}{2}$	2	3
2^x								
3^x								
4^x								
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$								
$\left(\frac{1}{3}\right)^x$								
$\left(\frac{1}{4}\right)^x$								

Com base na Atividade I e na Atividade II, responda:

a) Indique, pelo menos três funções, que você julga ser crescente.

b) Indique, pelo menos três funções, que você julga ser decrescente.

c) Na atividade II, analise, para cada função, o que acontece com os valores de y quando o valor de *x* aumenta.

d) Com base nas atividades I e II, que conjecturas você pode fazer em relação ao crescimento e decrescimento das funções exponenciais? Justifique sua resposta.

e) Retome as atividades da Etapa II (crescimento e decrescimento exponencial) e observe cada função das situações propostas para confirmar sua conjectura anterior.

f) É correto afirmar que o gráfico de uma função exponencial nunca chegará a 0, mas se aproximará cada vez mais dele? Por quê?

g) Os gráficos dessas funções exponenciais têm algum ponto em comum? Se sim, qual é esse ponto e explique por que isso acontece. (Se julgar necessário, faça a verificação com outras funções exponenciais).

Atividade III – É possível construir o gráfico de uma função do tipo $y = 2^{kx}$ de modo análogo ao de $y = 2^x$, quando k é positivo. Para compreender melhor esse fato, com o auxílio do software, construa o gráfico das funções $y = 2^x$ e $y = 2^{3x}$ e responda:

a) Existe alguma mudança nos gráficos? Caso afirmativo, qual?
b) Seria possível, de modo análogo a essa situação, para k negativo? Por quê? Dê exemplos.
c) Que conjecturas você pode fazer quanto a construir uma função do tipo $y = a^{kx}$?

Atividade IV - Identifique a base de cada uma das funções exponenciais elementares. A partir dela, indique se a função é crescente ou decrescente.

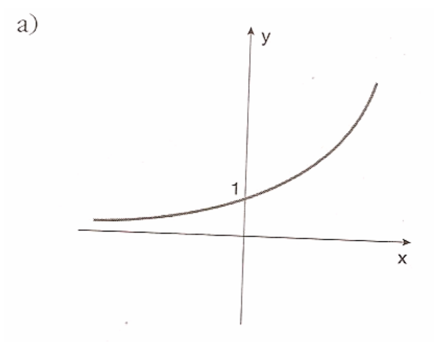
a) $f(x) = 10^x$ b) $f(x) = (\pi - 3)^x$ c) $f(x) = 5^{\frac{x}{2}}$

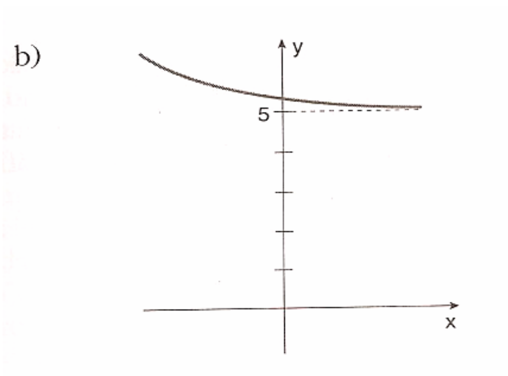
a) $f(x) = (0,3)^x$ e) $f(x) = (\sqrt{5} - 1)^x$ f) $f(x) = 5^{-x}$

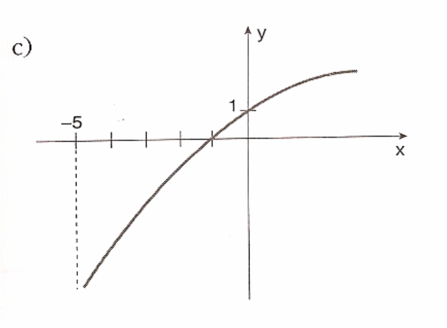
Atividade V – Determine quais valores reais de *k* a função exponencial $f(x) = (k - 3)^x$ é decrescente?

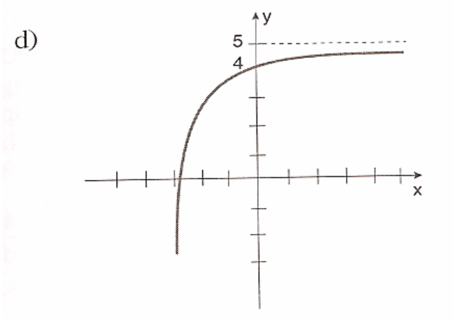
Atividade VI – Determine quais valores reais de *k* a função exponencial $f(x) = (2k + 1)^x$ é crescente?

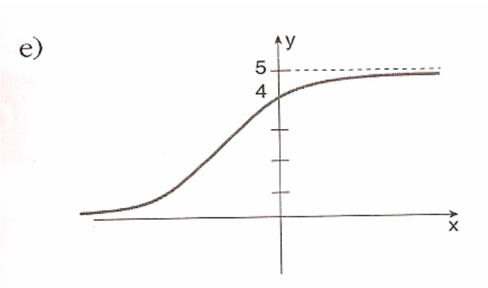
Atividade VII – (Unifor-CE) O gráfico que melhor corresponde à função de R em R dada por $y = 5 - 2^x$ é:



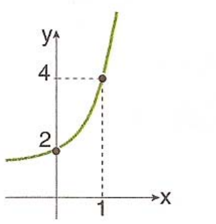




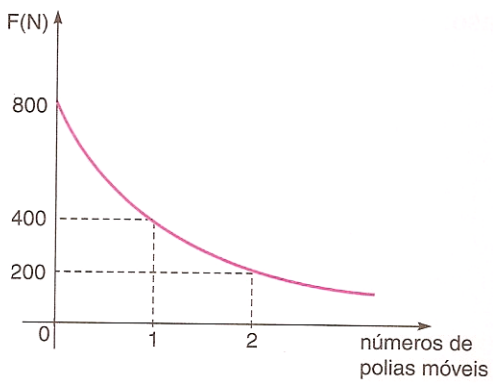




Atividade VIII – A figura mostra o gráfico da função $y = a^x + b$. Calcule o valor de a e b.



Atividade IX – A figura a seguir mostra uma associação de polias, chamada "Talha Exponencial", que facilita o levantamento de pesos. O gráfico abaixo representa a força $F = a \cdot b^n$. Observe o gráfico e determine os valores de *a* e *b*.



CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao apresentar nossa pesquisa formulamos três questões que a norteariam. No caso particular das funções exponenciais,

- Como compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com a planificação do ensino?
- Como as pesquisas na área de Educação Matemática, que trazem resultados importantes sobre a aprendizagem, podem contribuir para a organização de um ensino que potencialize boas situações de aprendizagem dos alunos?
- Que atuação pode ter um professor de Matemática, no que se refere às atividades de planejamento do ensino, de forma compatível com uma perspectiva construtivista de aprendizagem?

Embora possa parecer muito óbvio que a **aprendizagem** dos alunos depende em grande parte do **ensino** que seu professor propõe e que, com as contribuições das teorias construtivistas, temos possibilidades de melhorar as aprendizagens dos alunos, ainda circulam ideias equivocadas como, por exemplo, a de que "os alunos constroem sues conhecimentos sozinhos desde que tenham interesse em aprender um dado assunto".

Durante o desenvolvimento do trabalho, as afirmações contidas no texto de Simon, foram se tornando cada vez mais significativas:

> *"embora o construtivismo tenha apresentado aos professores de Matemática caminhos proveitosos para o entendimento de como se processam as aprendizagens, a tarefa da reconstrução de uma 'Pedagogia da Matemática' baseada na visão construtivista é um desafio considerável, no qual a comunidade de Educação Matemática tem apenas começado a trabalhar"* (apud PIRES, 2009, p.6)

Outro ponto que gostaríamos de destacar é o de que quando se fala em planejamento na escola, logo vem a ideia daquele documento elaborado no início do ano e que, em geral, é pouco usado pelo professor. Mas a planificação de trajetórias hipotéticas de aprendizagem como um desdobramento desse plano global inicial não faz parte das práticas escolares. È o professor que solitariamente vai percorrendo trilhas junto com seus alunos, geralmente sem um mapa que o conduza.

Desse modo, consideramos que a noção da trajetória hipotética de aprendizagem, formulada por Simon é muito interessante e pertinente ao momento atual da Educação Matemática, especialmente pelo fato de que a "geração de ideias para atividades de aprendizagem é subordinada à hipótese do professor sobre o desenvolvimento do pensamento e aprendizagem de seus alunos". Isso nos leva à reflexão de que o professor não poderá nunca ser mero aplicador de atividades, das quais não conhece os objetivos nem os fundamentos didáticos que as sustentam. Aprendemos que a THA não é o principal instrumento para proporcionar uma aprendizagem com perspectivas construtivista: sua efetivação depende da atuação do professor.

Nesse aspecto, gostaríamos de retomar as preocupações que Gómez e Lupiáñez trazem ao debate como as expressas por Gravemeijer (2004, p. 107). Esses autores reconhecem a dificuldade que teriam os professores para construir THA como as que são produzidas pelos investigadores. No entanto, afirmam que isso não quer dizer que a única coisa que se pode entregar aos professores sejam meras seqüências de ensino para usar. Gravemeijer sugere dois elementos que podem ser úteis para os professores: (a) um marco de referência e (b) seqüências de atividades que lhes sirvam de exemplo. Mas questiona: Que pode fazer um professor com esta informação? Como pode usá-la para produzir e revisar sistematicamente sua própria THA para um tema, um contexto e alunos reais?

Também destacamos que o termo "trajetória hipotética" é bastante significativo e a analogia da viagem, proposta por Simon foi muito explicativa do meu próprio percurso:

> *Façamos uma analogia: considere que você tenha decidido viajar ao redor do mundo para visitar, na seqüência, lugares que você nunca tinha visto. Ir para a França, depois Havaí,*

> *depois Inglaterra, sem uma série de itinerário a seguir. Antes, você adquire conhecimento relevante para planejar sua possível jornada. Você faz um plano. Você pode inicialmente planejar toda a viagem ou uma única parte dela. Você estabelece sua viagem de acordo com seu plano. No entanto, você deve fazer constantes ajustes, por causa das condições que irá encontrar. Você continua a adquirir conhecimento sobre a viagem e sobre as regiões que você deseja visitar. Você muda seus planos a respeito da seqüência do seu destino. Você modifica o tamanho e a natureza de sua visita, de acordo com o resultado da interação com as pessoas no decorrer do caminho. Você adiciona os destinos à sua viagem e que não eram de seu conhecimento. O caminho que você utilizará para viajar é sua "trajetória". O caminho que você antecipa em algum ponto é a sua "trajetória hipotética".* (SIMON, 1995, p.35)

Outro aspecto interessante a destacar refere-se ao momento em que o professor realiza as atividades que planejou em sala de aula, em que ele interage com os alunos.

> *Esta experiência pela essência da sua construção social é diferente das primeiras antecipações dos professores. Simultaneamente ocorre uma construção social de atividades em sala de aula e a modificação das idéias e conhecimento do professor, que ele vai construir em função do que está acontecendo ou do que aconteceu na sala de aula.* (SIMON, 1995, p.36)

Em nossa pesquisa vimos como nosso olhar de professores para o que está acontecendo ou aconteceu em sala de aula é pouco "treinado". Como observadora pude perceber quanto é difícil captar o que está acontecendo para além do fato de os alunos se mostrarem interessados ou se fazem perguntas. Por isso fizemos entrevistas com alguns deles para ter mais alguns dados. Na conversa com os professores também verificamos que a análise fica em pontos mais superficiais e menos na formulação de hipóteses sobre a pertinência das atividades ou sobre as dificuldades dos alunos

Desse modo, não aproveitamos muito de cada experiência e a tendência é percorrer o ciclo muitas vezes sem procurar fazer ajustes na trajetória.

Com relação ao fato de como as pesquisas na área de Educação Matemática, que trazem resultados importantes sobre a aprendizagem, podem contribuir para a organização de um ensino que potencialize boas situações de aprendizagem dos alunos, consideramos que no caso do Ensino Médio, por exemplo, ainda há grandes lacunas a serem preenchidas.

Como destacamos no trabalho, antes de iniciar a elaboração das tarefas da THA, fizemos um levantamento das pesquisas na área de Educação Matemática, com a finalidade de buscar resultados sobre o ensino e aprendizagem de Função Exponencial. Embora tenhamos nos apoiado em seus resultados, consideramos que ainda não há uma significativa contribuição a respeito e que os que já foram elaborados, não chegam ao conhecimento dos professores. Assim, muitas dúvidas foram surgindo e ficaram sem resposta, como por exemplo: que conexões deveriam ser feitas com os conhecimentos que os alunos já têm? o que seria necessário trabalhar antes para que eles pudessem compreender o que estamos querendo comunicar? Como potencializar o uso de um software nas atividades de investigação?

Com relação a que atuação pode ter um professor de Matemática, no que se refere às atividades de planejamento do ensino, de forma compatível com uma perspectiva construtivista de aprendizagem, destacamos inicialmente que não foi simples "comunicar" intenções aos colegas professores do Ensino Médio, sobre que se pretendia com a THA, mesmo realizando reuniões com eles. Cada professor tem suas concepções sobre as melhores formas de ensinar. Vimos que a mesma THA desenvolvida por dois professores tem resultados muito diferentes. Percebemos que na turma em que o professor constantemente proporcionou um espaço maior de comunicação em sala de aula criou-se um ambiente em que os alunos puderam interagir com o professor e com as atividades, mostrando assim, o caráter reflexivo do professor em relação á aprendizagem do aluno. No entanto, na turma do outro professor, a maneira como desenvolveu a THA provocou, em alguns momentos, o desinteresse dos alunos em resolver as atividades, pois sentiam-se inseguros e até mesmo desmotivados em realizá-las sem auxílio do professor.

Podemos dizer que ficou bastante forte a idéia de que não basta ter em mãos um planejamento de ensino com uma perspectiva construtivista se o professor que irá desenvolvê-la em sala de aula não atuar de maneira adequada com essa perspectiva, se não for capaz de desafiar os alunos na medida certa, de fazer intervenções adequadas, de dar informações quando elas são necessárias, de não apenas socializar, mas também de sistematizar o que foi aprendido.

Também consideramos que embora atividades envolvendo a resolução de problemas, investigação, contextos interdisciplinares, o uso de softwares e aplicação de conceitos e procedimentos matemáticos a situações do cotidiano e em outras áreas de conhecimento possam favorecer a compreensão dos temas de estudo, ainda há muita dificuldade dos professores em trabalhar dessa forma em sala de aula, pois predomina a idéia de que os alunos só podem aprender mediante exposições/explicações dos professores.

Desse modo, consideramos que as pesquisa sobre formação de professores podem ter elementos importantes na formulação de trajetórias hipotéticas de aprendizagem.

No quadro em que Simon destaca a relação entre os vários domínios do conhecimento do professor, a trajetória hipotética de aprendizagem, e as interações com os alunos é possível ver com clareza as relações com o que Shulman (1996) discute sobre o conhecimento do professor.

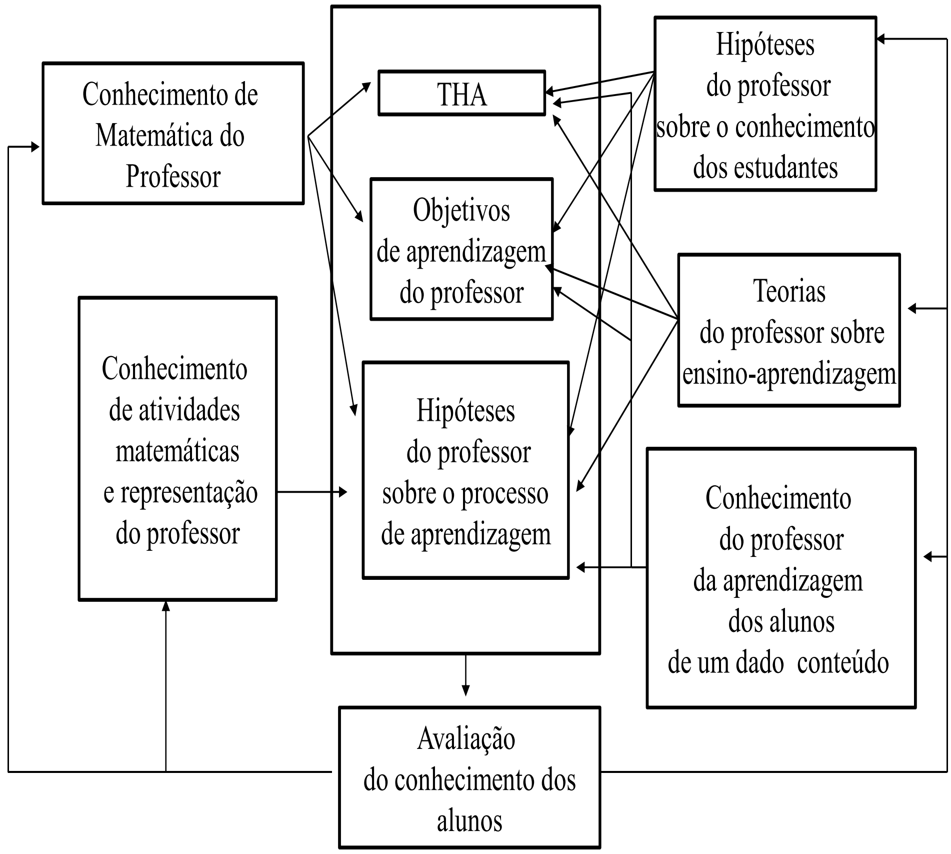


Figura 2: Domínios do conhecimento do professor, trajetória hipotética de aprendizagem e interações com os alunos.

No se refere ao conhecimento do conteúdo da disciplina a ser ensinada, Shulman (1986) considera que o professor deve compreender a disciplina que vai ensinar a partir de diferentes perspectivas e estabelecer relações entre vários tópicos do conteúdo disciplinar e entre sua disciplina e outras áreas do conhecimento. Esse autor destaca a expressão "pedagogical content knowledge" que é denominada por alguns autores como "conhecimento pedagógico disciplinar" ou "conhecimento didático do conteúdo". Shulman define esta expressão como uma combinação entre o conhecimento da disciplina e o conhecimento do "modo de ensinar" e de tornar a disciplina compreensível para o aluno. Ele defende que esse tipo de conhecimento é uma forma de conhecimento característica dos professores que os distingue da maneira de pensar dos especialistas de uma disciplina; é um conjunto de conhecimentos e capacidades que caracteriza o professor como tal e que inclui aspectos de racionalidade técnicas associados a capacidades de improvisação, julgamento e intuição; é um processo de raciocínio e ação pedagógica que permite aos professores recorrer aos conhecimentos e compreensão requeridos para ensinar algo num dado contexto, para elaborar planos de ação, mas também para improvisar perante uma situação não prevista. No que se refere ao conhecimento do currículo, Shulman aponta que esse conhecimento engloba a compreensão do programa, não só de objetivos e conteúdos, mas o programa como um todo, defende também o conhecimento de materiais que o professor disponibiliza para ensinar sua disciplina, a capacidade de fazer articulações horizontais e verticais do conteúdo a ser ensinado, a história da evolução curricular do conteúdo a ser ensinado. Segundo o autor, há necessidade de os professores construírem pontes entre o significado do conteúdo curricular e a construção desse significado por parte dos alunos conforme destaca:

> *"... os professores realizam esta tarefa mediante uma compreensão profunda, flexível e aberta do conteúdo; compreendendo as dificuldades mais prováveis que os alunos podem ter com essas idéias...; compreendendo as variações dos métodos e modelos de ensino para ajudar os alunos na sua construção do conhecimento; e estando abertos para rever os seus objetivos, planos e procedimentos à medida que se desenvolve a interação com os estudantes. Este tipo de compreensão não é exclusivamente técnico, nem apenas reflexivo. Não é apenas o conhecimento do conteúdo, nem o domínio genérico de métodos de ensino. É uma mescla de tudo, e é principalmente pedagógico". (Shulman, 1992)*

Para finalizar, esperamos que as reflexões apresentadas nessa pesquisa possam incentivar futuros estudos que se interessem em investigar a atuação do professor frente a planos de ensino e a novas perspectivas de implementação curriculares na prática de ensino.

Referências Bibliográficas

ARAÚJO, E. de . **A concepção de um software de Matemática para auxiliar na aprendizagem dos alunos da primeira série do ensino médio no estudo das funções exponenciais e logarítmicas**. Dissertação (Programa de Pós – Graduação em Educação Matemática – Mestrado Profissional) – PUC/SP, São Paulo, 2005.

BARRODY, A. J., Cibulskis, M., Lai, M. y Li, X. (2004). **Comments on the use of learning trajectories in curriculum development and research**. Mathematical Thinking and Learning, 6(2), 227-260.

BISHOP, A. J. **Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural**. Barcelona: Paidós.1991.

BOAVIDA, M.A & PONTE,J.P **Investigação Colaborativa: Potencialidades e problemas**. Disponível em: http://wwww.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt%5C02-Boavida-Ponte(GTI).pdf. Acessado em 15 de Ago.2008.

CLEMENTS, D. H. y Sarama, J. (2004). **Learning trajectories in mathematics education**. Mathematical Thinking and Learning, 6(2), 81-89.

COLL, C. **Psicologia e Currículo: uma aproximação psicopedagógica à elaboração do currículo escolar** - tradução de Cláudia Schilling. São Paulo: Ed. Ática, 1997.

CORRÊA, R. **Tecnologia: kilo, mega, giga... tera**. Disponível em: http://wwww.eecis.udel.edu/~portnoi/classroom/sistemas_computacao/2007_1/articles/hitachi_lanca_hg_1terabyte.pdf. Revista Veja on-line, Acesso em: 17 de Nov. 2008.

CURI, E. **Formação de professores de Matemática: realidade presente e perspectivas futuras**. Dissertação de Mestrado, PUC/SP, 2000.

DOLL JR., W.E. **Currículo: uma perspectiva pós moderna**. Tradução de Maria Adriana Veríssimo Veronese. Porto Alegre: Artes Médicas,1997.

DOMINONI, N. R. F. **Utilização de diferentes registros de representação: um estudo envolvendo funções exponenciais**. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática – Mestrado e Doutorado) – Universidade Estadual de Londrina, Paraná, 2005. 122 f.

FAZENDA, I.C. **A Interdisciplinaridade no ensino brasileiro**. São Paulo, Edições Loyola, 1979.

GIOVANNI, J.R et al. **Matemática Fundamental, 2º grau.** São Paulo: FTD, 1994.

GÓMEZ, P. y LUPIÁÑEZ, J. L. (2007). **Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria**. PNA, 1(2), 79-98.

GRAVEMEIJER, K. (2004). **Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education**. Mathematical Thinking and Learning, 6(2), 105-128.

GRAVEMEIJER, K., Cobb, P., Bowers, J. y Whitenack, J. W. (2000). **Symbolizing, modeling, and instructional design**. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (Eds.), Symbolizing and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools, and instructional design (pp. 225-273). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

LESH, R. y YOON, C. (2004). **Evolving communities of mind –In which development involves several interacting and simultaneously developing strands**. Mathematical Thinking and Learning, 6(2), 205-226.

MACEDO, L. de. **Competências e habilidades: elementos de uma reflexão pedagógica**. In paper de palestra na Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas em 1998).

MACEDO, R. M. **Estudo divulga crescimento exponencial de adwares**. Disponível em: http://magnet.pro.br/cosmonet/estudo-divulga-crescimento-exponencial-de-adwares/, Acesso em: 20 nov. 2006.

MACHADO, N.J. **Epistemologia e didática: a alegoria como norma e o conhecimento como rede**. Tese de Livre Docência. Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. São Paulo, USP, 1994.

MAOR, E. **e: a história de um número**. Tradução de Jorge Calife. Rio de Janeiro: Record, 2008.

MENEZES, L. C. **O Brasileiro está chegando ao ensino médio**. Programa de Melhoria e Expansão do ensino médio no Estado de São Paulo. mimeo. Governo do Estado de São Paulo, São Paulo, 2001.

MORAN, J. Massetto, M. e Behrens, M. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. Papirus. São Paulo. 2000

PERRENOUD, P. **Dez novas competências para Ensinar**. Porto Alegre. Artes Médicas Sul. 2000.

PERRENOUD, P. **A formação de competências na escola**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PERRENOUD, P. **Formação contínua e obrigatoriedade de competência na profissão do professor**. Revista Idéias, São Paulo, n.30, 1998.

PERRENOUD, P. **Novas competências para ensinar**. Tradução Patrícia C. Ramos. Artmed, Porto Alegre, 2000.

PIRES, C.M.C. **Educação Matemática e sua influência no processo de organização e desenvolvimento curricular no Brasil.** Bolema (Rio Claro), v. 1, p. 1, 2008.

PIRES, C.M.C. **Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações** de Martin Simon. 2009. (artigo submetido para publicação e aprovado – Educação Matemática Pesquisa).

PIRES, C.M.C. **Formulações basilares e reflexões sobre a inserção da matemática no currículo visando à superação do binômio máquina e produtividade**. Educação Matemática Pesquisa. São Paulo, EDUC, 2004.

PIRES, C.M.C. **Currículos de Matemática: da organização linear à idéia de rede**. São Paulo, FTD, 2000.

PIRES, C.M.C. **Orientações Curriculares para a Educação Básica: qual o caminho?** Revista de Educação PUC-Campinas, Campinas, v. 18, p. 25-34, 2005.

PONTE, J. P. **Perspectivas de desenvolvimento profissional de professores de Matemática**. In: João Pedro Ponte et al org). Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática: Que Formação?. Lisboa, SPCE 1995.

POZO, J. I. et. al. **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. Tradução Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

SAGAN,C. **Bilhões e Bilhões – reflexões sobre a vida e morte da virada do milênio**. Tradução Rosaura Eichemberg. São Paulo: Companhia das Letras, 2008.

SÃO PAULO (ESTADO) SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. **Avaliação dos concluintes do ensino médio/97**. Programa de Expansão e Melhoria do ensino médio. vol 1. São Paulo,2000.

SÃO PAULO (ESTADO) SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Proposta Educacional: Currículo e Avaliação**. São Paulo, SE/CENP, 1992.

SÃO PAULO (ESTADO) SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Proposta Curricular para o ensino de Matemática no segundo grau**. São Paulo, SE/CENP, 1992.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio- Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília, 1999.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio- bases legais**. Brasília, 1999.

SEIXAS, F. **Capacidade de Viralidade**. Disponível em: http://blog.fabioseixas.com.br/archives/2006/07/capacidade_de_v.html, Acesso em: 20 nov. 2006.

SIMON, M. A. (1995). **Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective**. Journal for Research in Mathematics Education, 26(2), 114-145.

SIMON, M. A. y Tzur, R. (2004). **Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory**. Mathematical Thinking and Learning, 6(2), 91-104.

STEFFE, L. P. (2004). **On the construction of learning trajectories of children: The case of conmensurable fractions**. Mathematical Thinking and Learning, 6(2), 129-162.

SHULMAN, L. **Those who understand: knowledge growth in teaching**. Educational Research, n. 15 (2), p. 4-14, 1986.

———. **Knowledge and teaching: foundation of the new reform**. Harvard Educational Review, n. 57 (1), p. 1-22, 1987.

———. **Renewing the pedagogy of teacher education: the impact of subject-specific conceptions of teaching**. In: MESA, L. Montero; JEREMIAS, J. M. Vaz. *Las didácticas específicas en la formación del profesorado*. Santiago de Compostela; Tórculo, 1992.

ANEXOS

Anexo A – Segunda versão da THA

Etapa 1: Números “grandes”

<u>Atividade I</u>

<u>Objetivo</u>: existência de números grandes e refletir sobre sua representação em forma de potência.

<u>Estratégia para o desenvolvimento da atividade</u>: Fazer a leitura com os alunos ou deixar que eles leiam. Proporcionar um debate entre os textos visando a discussão da existência de números grandes e a notação exponencial.

<u>Tempo previsto</u> – 3 aulas

Pensar na sequência de números naturais como uma sequência infinita constituiu um grande desafio para a humanidade. O autor Carl Sagan, no livro Bilhões e Bilhões faz referência a um texto de Arquimedes (cerca de 287 – 212 a.C.).

> *“Há alguns para quem o número de grãos de areia é infinito. Há outros que, mesmo sem considerá-lo infinito, acham que ainda não foi definido o número que seja bastante grande”.*

Esse trecho nos faz refletir da existência de números com elevada ordem de grandeza mesmo que seja quase impossível imaginar e até mesmo contar. No texto a seguir adaptado do livro Bilhões e Bilhões, vamos verificar que números grandes podem ser escritos em forma de potência e até operar com eles.

“Assim, 1 trilhão é 1.000.000.000.000 ou 1 000 000 000 000. (Nos Estados Unidos, colocam-se vírgulas no lugar dos pontos). Para números maiores que 1 trilhão, é preciso contar quantos grupos de três números existem. Seria ainda mais fácil se, ao nomear um número grande, pudéssemos apenas dizer diretamente quantos zeros existem depois do número 1.

Como são pessoas práticas, os cientistas e os matemáticos fazem exatamente isso. Chama-se notação exponencial. Você escreve o número 10; depois um número pequeno, alçado à direita do 10 como um sobrescrito, informa quantos zeros existem depois do número 1. Assim, 10^6 = 1 000 000; 10^9 é descrito como “10 elevado à potência 9”ou, equivalente, “10 elevado à nona”(à exceção de 10^2 e 10^3, que são chamados “10 ao quadrado” e “10 ao cubo”, respectivamente). Essa expressão, “à potência” – como “parâmetro” e vários outros termos científicos e matemáticos -, está entrando na linguagem de todos os dias, mas com o significado cada vez mais obscuro e distorcido.

Além da clareza, a notação exponencial tem um maravilhoso benefício colateral: é possível multiplicar dois números quaisquer simplesmente somando-se os expoentes apropriados. Assim, 1000 x 1 000 000 000 é $10^3 \times 10^9 = 10^{12}$.

Porém, ainda há resistência à notação exponencial por parte de pessoas um pouco assustadas com a matemática (embora a notação não complique, mas simplifique, a nossa compreensão) e por parte dos compositores de texto, que parecem ter uma necessidade compulsiva de imprimir 10^9 como 109.

Depois de se dominar a notação exponencial, pode-se lidar sem esforço com números imensos. Isso não significa que se possa *imaginar* 1 bilhão ou 1 quintilhão de objetos – ninguém pode. Mas, com a notação exponencial, podemos *pensar* sobre esses números e operar com eles". (p.15-17, 1998)

Vamos refletir sobre essas informações respondendo as questões abaixo:

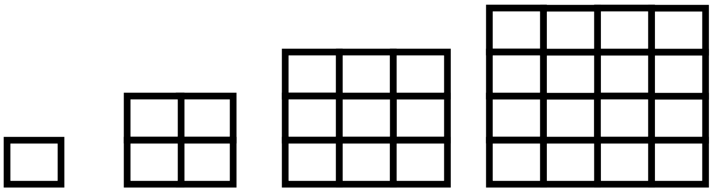
1. Lendo esses textos, que comentários você gostaria de fazer a respeito dessas informações. Quais foram informações novas para você?
2. Como você escreveria, em forma de notação exponencial cem mil, 1 000 000 000 000?
3. Vimos que 1000 x 1 000 000 000 é $10^3 \times 10^9 = 10^{12}$. Como você explicaria esse resultado? E como você calcularia $10^9 : 10^3$?
4. O texto nos mostrou apenas notação exponencial na base 10. Com isso, como podemos escrever o número 1024 na base 2? E o número 625 na base 5?
5. Como abreviar a escrita do número 40 000 000, recorrendo à notação exponencial? E do número 350 000 000 000?

<u>Atividade II</u>

<u>Objetivo</u>: identificar conhecimentos prévios dos alunos sobre potenciação.

<u>Estratégia para desenvolver a atividade</u>: o professor proporcionará alguns minutos para a resolução individual e em seguida discutirá com os alunos as estratégias de resolução visando retomar o conceito de potência e enfatizando a variação do expoente.

1) Observe cada figura e responda:



f.1 f.2 f.3 f.4

a) Quantos □ tem a figura 3 e na figura 4?

b) Quantos □ tem na figura 5?

c) Faça o desenho da figura 6 e diga quantas □ possui.

d) Sem desenhar, quantos □ tem na figura 7? E na figura 9?

e) Represente na forma de potência a quantidade de □ existente em cada figura.

2) Qual é a diferença na representação das potências 4^2 e 4^{-2}?

3) Complete a tabela indicando o valor de cada potência.

Potência	$(\frac{1}{2})^4$	3^4	3^3	3^2	3^1	3^0	3^{-1}	3^{-2}	3^{-3}	3^{-4}	$(-\frac{1}{2})^{-4}$	$(-\frac{1}{3})^{-3}$
Valor												

Etapa 2: Crescimento Exponencial

<u>Objetivo</u>: Compreender o significado de "crescimento exponencial" por meio de diferentes textos e diferentes representações gráficas. Além disso, proporcionar a conversão do registro gráfico para o registro algébrico.

<u>Estratégia para o professor desenvolver a atividade</u>: Propor grupos para trabalharem com cada texto e após o término da atividade abrir uma discussão para que os alunos socializem o assunto que cada texto traz e percebam que o termo crescimento exponencial nos textos tem o mesmo significado.

<u>Tempo previsto</u> – 3 aulas

<u>Atividade III</u>

Trechos tirados da internet e do livro Bilhões e Bilhões.

Grupo1 - Epidemia da AIDS

“No momento, em muitos países o número de pessoas com sintomas de Aids está crescendo exponencialmente. O tempo de duplicação é mais ou menos de um ano. Isto é, a cada ano há duas vezes mais casos de Aids do que havia no ano anterior. Essa doença já nos cobrou um tributo desastroso em mortos. Podemos considerar que se não houvessem impedimentos desenvolvidos cientificamente, o crescimento seria maior a cada ano.” (Adaptado do livro Bilhões e Bilhões de Carl Sagan, p. 23)

- ✓ Em seu grupo, elabore uma discussão referente ao assunto abordado nesta informação para discutir com os outros grupos a respeito do termo “crescimento exponencial”.

Grupo 2 - Adwares e Spywares

“Um estudo divulgado pela McAfee revelou um crescimento exponencial de adwares[1] e spywares[2] distribuídos na internet. Entre 2000 e 2002, existiam apenas 40 famílias de adwares na internet. Em quatro anos, porém, este número subiu para 450, com aproximadamente 4.000 variantes. Este crescimento estaria ligado ao lucro de sites que vêem estes softwares como uma forma mais simples de ganhar dinheiro do que com anúncios e formas não invasivas de publicidade. Cada computador de visitante que recebe um adware rende ao seu distribuidor algo em torno de US$ 0,15, o que torna mais fácil arrecadar mais em menos tempo.” (http://magnet.pro.br/cosmonet/estudo-divulga-crescimento-exponencial-de-adwares/ acessado em 20/11/2006)

- ✓ Em seu grupo, elabore uma discussão referente ao assunto abordado nesta informação para discutir com os outros grupos a respeito do termo “crescimento exponencial”.

Grupo 3 - Capacidade de Viralidade

“Imagina-se que a capacidade de algo se tornar extremamente viral é diretamente proporcional ao tamanho do ambiente. Existem talvez centenas de casos de crescimento viral exponencial em sites de língua inglesas, como Wikipedia, Google, You Tube, etc. No Brasil, ficamos em apenas algumas dezenas de casos no qual ocorre um grande crescimento, como o Orkut.

---

1. Adware são programas que tem o intuito de mostrar propaganda nos computadores, eles não captam informações, só mostram anúncios
2. Spywares são programas que funcionam como espiões, coletando informações dos usuários, como sites, senhas e etc

Este site é um dos pouquíssimos casos de crescimento extremamente viral de um site comercial. Talvez possamos citar também Fotolog.net e Flogão.com.br. Mas, podemos concluir que quanto maior o tamanho do ambiente, maior é a probabilidade de vírus serem espalhados. É o que ocorre com sites da língua inglesa. Com um ambiente maior a disposição do vírus, fica muito mais propício que ele encontre um caminho de crescimento exponencial. O caso Orkut mostra que existe espaço para outros casos ocorram no Brasil com a mesma magnitude. (http://blog.fabioseixas.com.br/archives/2006/07/capacidade_de_v.html, acessado em 20/11/2006)

- ✓ Em seu grupo, elabore uma discussão referente ao assunto abordado nesta informação para discutir com os outros grupos a respeito do termo "crescimento exponencial".

Atividade IV

Estratégia para o professor desenvolver a atividade: Poderá manter os alunos em grupos, ceder alguns minutos para que os grupos analisem as representações gráficas e respondam as atividades. Ao final, o professor deverá socializar as idéias e institucionalizar o comportamento de cada gráfico, e associar o significado do termo "crescimento exponencial" discutido na atividade anterior, com o gráfico que cresce mais rápido, no caso, o gráfico da função exponencial. Além disso, investigar a expressão algébrica das funções.

1) Os gráficos mostrados abaixo foram construídos com o auxílio de um software matemático. Observe cada representação gráfica e em seguida responda:

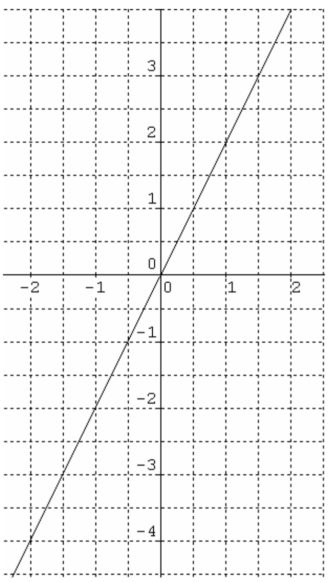


Gráfico 1

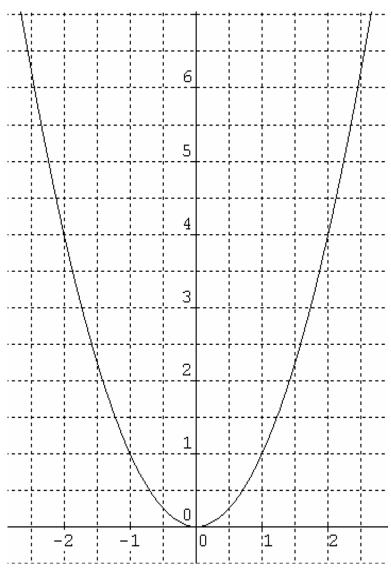


Gráfico 2

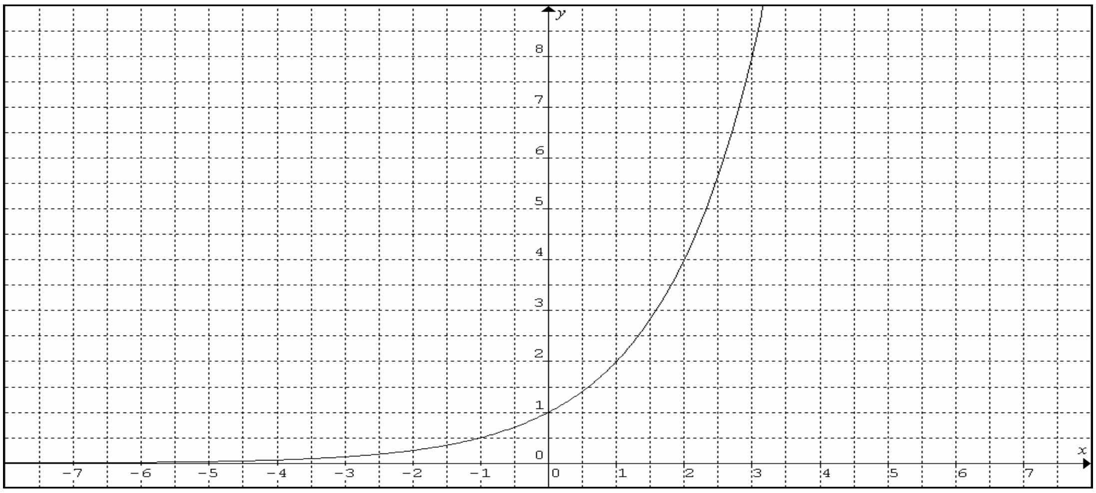


Gráfico 3

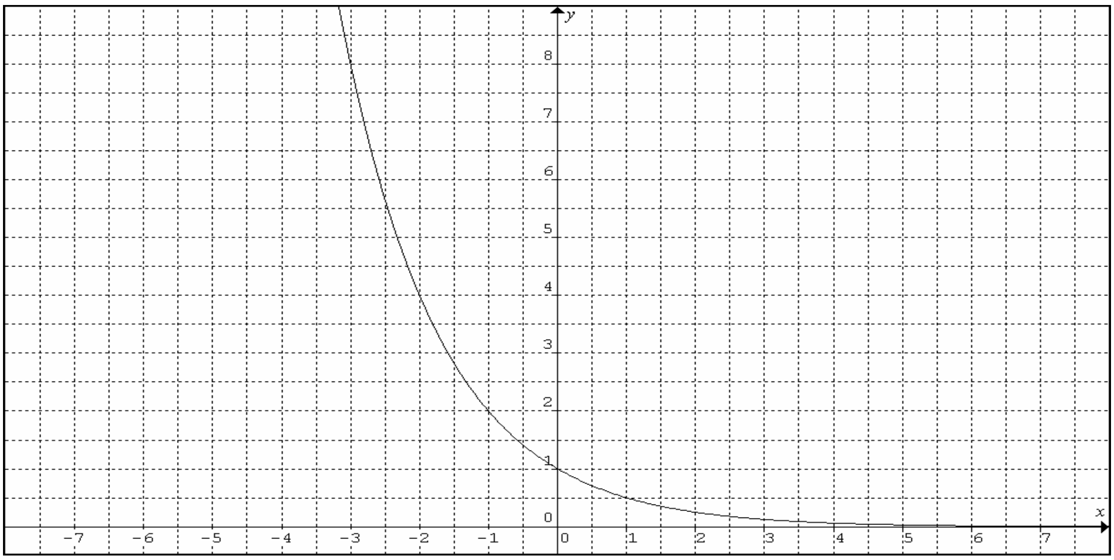


Gráfico 4

a) Quais os gráficos que você já conhece? Destes, saberia dizer qual a função que cada gráfico representa?

b) Observando cada gráfico, qual é a relação existente entre os valores de x e y?

c) Comparando os gráficos, em qual deles podemos dizer que “ocorre um crescimento mais rápido”?

d) Dizemos que uma função y = f(x) é crescente quando os valores de y aumentam conforme os valores de x aumentam. Caso acontece ao contrário, a função é decrescente. Sabendo disso, o que podemos dizer em relação ao comportamento (crescente ou decrescente) das funções representadas nos gráficos 3 e 4? Justifique sua resposta.

e) Um desafio: Encontre a expressão algébrica que representa a função do gráfico 3 e a expressão algébrica que representa a função do gráfico 4.

Etapa 3 – Função Exponencial

<u>Objetivo</u>*: As atividades da Aula 3 têm como objetivo estudo mais detalhado da função exponencial, sua forma $y=a^x$, propriedades e gráficos. Os alunos irão utilizar um software matemático (Graphmatica) para a construção gráfica da função exponencial, e por meio de resolução de problemas, trabalhar com temas de matemática financeira.*

<u>Estratégia para o professor desenvolver a atividade</u>*: Deixar alguns minutos para que os alunos possam resolver as atividades e, em seguida, promover uma discussão das questões institucionalizando o conceito. Espera-se que o aluno utilize dos conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores para encontrar a função exponencial e o gráfico que representa a situação-problema.*

<u>Tempo previsto</u> *– 8 Aulas*

<u>Atividade V</u>

Trecho tirado do Livro Bilhões e Bilhões.

"Todo mundo tem dois pais, quatro avós, oito bisavós, dezesseis trisavôs, etc. A cada geração que retrocedemos, temos duas vezes mais antepassados sem linha direta. Assim, cada um de nós que está vivo hoje tinha, no ano 400, uns 18,5 quintilhões de ancestrais – ou é o que parece." (p.27 e 28, 1998)

Refletindo sobre este trecho:

1) Qual é o número de ascendentes na terceira geração de sua família?E o número da quinta geração?
2) O número de ascendentes de uma família corresponde a 128, qual seria a geração dessa família?
3) Construa uma tabela que representa a relação do número de ascendentes em função da geração e, em seguida, faça o gráfico.
4) Para cada geração *x* que se escolha há um número *f(x)* de ascendentes. Sabendo disso, encontre uma lei que expressa f(x) em função de x, ou seja, encontre uma função que indique essa situação.

Vocês já estudaram leis que expressavam f(x) em função de x como: a Função Afim (função do 1º Grau) e a Função Quadrática (função do 2º Grau). Podemos observar no último item acima, que agora temos a variável *x* sendo o expoente, definindo assim, a ***função exponencial***.

A função exponencial é uma das mais importantes funções da matemática. Ela desempenha papéis fundamentais na Matemática e nas ciências envolvidas com ela, como: Física, Química, Engenharia, Astronomia, Economia, Biologia, Psicologia e outras, pois essa função é uma importante ferramenta que facilita o estudo de fenômenos naturais e sociais.

A seguir, vamos trabalhar com a função exponencial na Matemática Financeira envolvendo cálculo de juros e, em outra área de conhecimento como, Biologia.

A representação gráfica da função exponencial já foi apresentada na atividade III, nos seguintes casos: f(x) = 2^x e f(x) = $\left(\frac{1}{2}\right)^x$, respectivamente. Agora, vamos explorar um pouco mais a representação gráfica.

<u>Atividade VI</u>

<u>Estratégia para o professor desenvolver a atividade</u>: Propor a execução das atividades em duplas ou grupos, pois após a segunda atividade os alunos irão resolver os demais exercícios na sala de informática. Antes de iniciar a resolução com o auxílio do software, explicar aos alunos como o programa reconhece uma função.

1) Discuta com um colega, a seguinte situação-problema:

Um recado precisa ser passado o mais rápido possível a várias escolas. Para isso, montou-se uma rede da seguinte forma:

1° momento: um diretor passa o recado para cinco diretores.

2º momento: cada diretor avisa outros cinco diretores, que ainda não tinham sido avisados, e assim sucessivamente.

a) Quantos diretores receberão o recado no quarto momento?
b) Qual o total até o sexto momento?
c) Qual a lei que representa essa situação?
d) Construa o gráfico que representa o número de diretores que recebem o recado em função de cada momento.
e) Essa situação representa uma função crescente ou decrescente?

2) Construa o gráfico de cada função:

a) f(x) = 3^x c) y = 5^x

b) g(x) = $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ d) y = $\left(\frac{1}{5}\right)^x$

3) Analisando cada gráfico do exercício anterior, o que podemos dizer em relação aos valores de y=f(x) quando x aumenta?

4) Analisando os valores da base de cada função, que conjecturas você pode fazer em relação ao crescimento e decrescimento de funções exponenciais? Se necessário faça a representação com outras funções exponenciais, como: f(t) = $\left(\frac{5}{2}\right)^t$, h(x) = 4^x, j(v) = $\left(\frac{3}{4}\right)^v$, k(z) = $\left(\frac{2}{3}\right)^z$.

5) Descreva o que ocorre com o gráfico dessas funções ao comparar com os gráficos construídos no exercício 2:

a) k(x) = $3^x + 1$

b) l(x) = $3^x + 2$

c) n(x) = $3 + 3^x$

d) m(x) = $\left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$

e) o(x) = $\left(\frac{1}{3}\right)^x + 2$

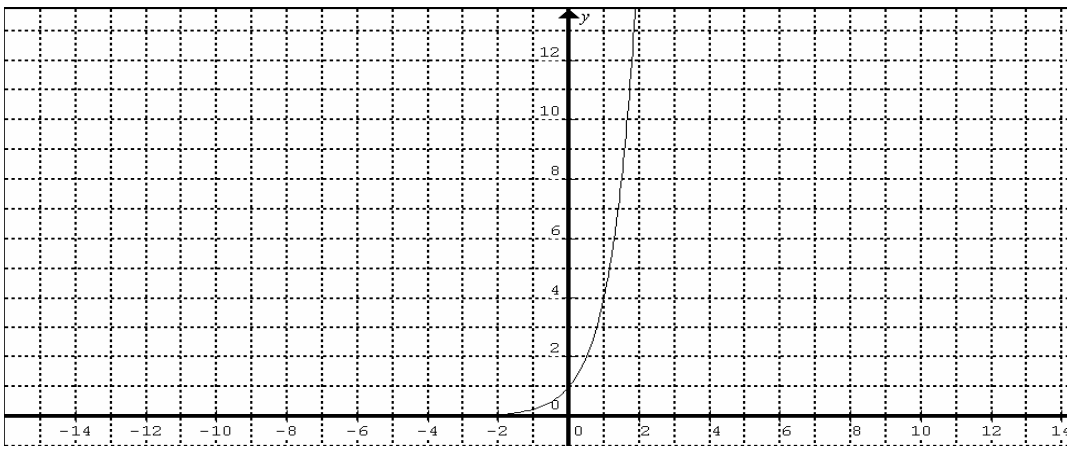
f) p(x) = $\left(\frac{1}{3}\right)^x + 3$

6) Observe as seguintes funções exponenciais y = 10^x e y = 10^{-x} e responda:

a) Qual função é crescente? Por quê?

b) Qual função é decrescente? Por quê?

7) A figura a baixo mostra um esboço do gráfico da função real y = a^x, com a e b Є R, a>0 e a≠1. Determine o valor de a.



8) Podemos trabalhar com equação exponencial, como $3^x = 81$.

Uma equação exponencial é aquela que apresenta a incógnita no expoente de pelo menos uma potência. O resultado dessa equação é x = 4. Como resolver uma equação exponencial, ou ainda, como chegar a esse resultado?

Estratégia para o desenvolvimento da atividade: *Nesse momento o professor deve proporcionar ao aluno um espaço para que o mesmo elabore sua estratégia de resolução. Após alguns minutos discutir com os alunos as estratégias utilizadas e institucionalizar o método de resolver equação exponencial. É importante a compreensão deste conceito para resolver a próxima situação-problema.*

9) Resolva as seguintes equações exponenciais:

b) $2^{x =} 64$ b) $3^x = \left(\frac{1}{81}\right)$ c) $9^x = 81$ d) $2^{3x + 2} = 32$

Aplicação de função exponencial na área de Biologia.

Agora que já conhecemos a função exponencial, vamos explorar um pouco mais a idéia de *crescimento exponencial,* lendo duas situações: uma adaptada do livro *Bilhões e Bilhões* de Carl Sagan e, outra, uma situação-problema. As situações estão relacionados com a área de biologia.

"A circunstância mais comum em que ocorrem repetidas duplicações, e, portanto crescimento exponencial, é na reprodução biológica. Vamos considerar primeiro o simples caso de uma bactéria que se reproduz dividindo-se em duas. Depois de certo tempo, cada uma das duas bactérias filhas também se divide. Desde que exista bastante alimento e não haja veneno no ambiente, a colônia de bactérias vai crescer exponencialmente. Em circunstâncias muito favoráveis, pode haver uma duplicação a cada quinze minutos aproximadamente. Isso significa quatro duplicações numa hora e 96 duplicações num dia. Embora uma bactéria só pese aproximadamente um trilionésimo de grama, as suas descendentes, depois de um dia de selvagem abandono sexual, vão pesar coletivamente o mesmo que uma montanha; em pouco mais que um dia e meio, o mesmo que a Terra; em dois dias, mais que o Sol e em breve tudo no universo será composto de bactérias. Isso não é uma perspectiva nada agradável, não é? Pois se for uma bactéria que causa danos fatais a saúde o número de mortos seria desastroso. Mas felizmente isso nunca acontece. Por que não? Porque o crescimento populacional desse tipo sempre bate em algum obstáculo naturas. Os micróbios ficam sem alimento, ou se envenenam mutuamente, ou têm vergonha de se reproduzir quando não tem privacidade.” (p. 21 e 22, 1998).

Refletindo sobre este trecho:

a) Como você interpreta o caso das bactérias, descrito por Sagan?

b) Se uma bactéria duplica a cada t minuto e inicialmente havia 300 bactérias, responda:

c) Expresse a função f(t) em t, sendo t o minuto e f(t) o número de bactéria e elabore uma tabela indicando o número de bactérias existente até o 5º minuto.

d) Após quantos minutos esta população será constituída de 76800 indivíduos?

e) Quando temos o tempo t = 0, quantas bactérias existem?

f) Essa função é crescente ou decrescente? Justifique sua resposta.

g) Construa o gráfico que representa o número de bactérias em função do tempo.

Tirado do Livro Matemática Ensino Médio (Smole & Diniz, p. 199, 2005)

Um biólogo acompanhou o crescimento da folha com forma circular de uma planta aquática. Durante suas observações, percebeu que a cada mês o diâmetro da folha triplicava. Se no início das suas observações o biólogo mediu a folha e obteve 1 cm de diâmetro, qual será o diâmetro que ela terá ao final de seu prazo máximo de sobrevivência, que é de 4 meses? Construa uma tabela e um gráfico que representa o diâmetro da planta em função do tempo.

Atividade VII - **Matemática Financeira**

Estratégia para o professor desenvolver a atividade: Propor a atividade individualmente. Fazer uma discussão com os alunos referente às respostas nos itens abaixo. Em seguida, o professor pode pedir que cada aluno leia um trecho do texto e na medida em que questões aparecem deixar que o mesmo responda e, depois, fazer uma discussão das resoluções encontradas e institucionalizar o conceito. Nas atividades finais é importante o reconhecimento dos juros simples como uma função afim e a dos juros compostos como uma função exponencial.

Antes de iniciar a leitura, responda cada item:

a) O que vocês entendem por Matemática Financeira?

b) Para vocês, onde utilizamos a Matemática Financeira?

c) O que vocês entendem por juros? Como ele surgiu?

d) Como podemos representar a taxa de porcentagem?

A Matemática Financeira analisa alternativas de investimentos, financiamentos de bens de consumo ou créditos bancários, nos quais a função exponencial está presente. O componente essencial para que tenhamos a representação exponencial nesta área da Matemática é a taxa de juros.

O juro não é uma prática moderna, pois há indícios históricos de que nos tempos remotos, mais precisamente na era pré-urbana, quando a atividade econômica era fundamentalmente agrícola, a cobrança de juros já existia. Tal cobrança passou a existir devido à necessidade de se emprestar algo.

Naquela época, suponhamos que uma pessoa tivesse um cavalo disponível e pudesse emprestá-lo a quem precisasse, para ajudar na colheita. O cavalo era emprestado por um tempo e no momento da devolução do animal o proprietário queria uma parte dos grãos colhidos com a ajuda do cavalo, ou seja, os grãos representavam a cobrança dos juros sobre o empréstimo do cavalo. Quando se tratava de empréstimos de dinheiro, as pessoas emprestavam e cobravam juros de acordo com o cliente.

Atualmente, se uma pessoa deseja comprar algo ou até mesmo precisa pagar uma conta e não tem dinheiro imediato, existe a facilidade do empréstimo, tanto recorrendo-se aos bancos como para agências financiadoras. A pessoa paga uma quantia, além do valor adquirido a um título de *juros* em um determinado período (mês, dia, ano). A cobrança de juros é a remuneração do empréstimo feito, ou melhor, funciona como um aluguel do dinheiro emprestado.

A quantidade em dinheiro que se pede emprestada é chamada capital, o que se paga de "aluguel" pelo dinheiro são os juros, e a soma do capital com os juros é o montante

Existem outras situações em que temos juros, como em aplicações de cadernetas de poupança ou em algum outro investimento. Neste caso, ao término de certo tempo o aplicador receberá o valor aplicado acrescido de um valor referente aos juros da aplicação.

Um jornaleiro emprestou a um amigo R$ 600,00 para ser pago no final de 2 meses, à taxa de juros de 4% a.m. (ao mês). Ao final do empréstimo o jornaleiro recebeu R$ 648,00. Assim podemos perceber que os juros foram de R$ 48,00. Você saberia explicar como fazer o cálculo para obter esse valor? E se o prazo do pagamento se estendesse por mais 3 meses, quanto o jornaleiro iria receber?

Nesta situação temos uma taxa de juros simples, isto é, os juros correspondentes a cada um dos períodos sempre será calculado sobre o valor inicial, podendo ser pago de acordo com o combinado entre as pessoas. Devido a isso temos:

- Em um mês, os juros serão de: 4% de R$ 600,00 = 0,04 . 600 = 24,00.
- No segundo mês, os juros são de: (0,04 + 0,04).600 = 48,00.
- Assim, ao final de 5 meses o jornaleiro irá receber : 600 + (5 . 24) = 720,00.

  O valor recebido é chamado de Montante.

Podemos perceber que o valor recebido (M) = valor inicial (Capital) + Juros (J)

$$M = C + J$$

- Proponha uma situação-problema para um colega envolvendo juros simples.
- Observe o anúncio da loja

Promoção

Sony Ericsson W580 White - GSM – STDN

Á prazo: 12 x 89,99

Á vista: R$ 879,00

Inclui Kit musical completo

Características do produto: Câmera 2MP, gravação de vídeo, zoom digital de 4x. Tons musicais MP3, AAC. Bluetooth estéreo. Memória de 12 MB. Mais informações pelo site www.juronao.com.br

Temos hoje duas oportunidades de pagamento, à vista ou a prazo, em qualquer mercadoria que gostaríamos de comprar, mas será que realmente um produto tem desconto se for pago à vista?

- Quais seriam os juros desse produto caso fosse comprado a prazo?
- Você concorda que o desconto são os juros que seriam cobrados se a compra fosse feita à prazo?

Agora vamos conhecer os juros em uma aplicação financeira de uma caderneta de poupança.

- Suponhamos que no ano de 2006 a correção da caderneta de popança tenha sido de 50% em cada um dos 6 primeiros meses do ano. Uma pessoa depositou R$ 200,00 em 01/01/06. Observe o crescimento do dinheiro em 6 meses e responda:

Tempo	Data	Valor Inicial	Montante
0	01/01/07	200,00	200,00
1	01/02/07	200,00	300,00
2	01/03/07	300,00	450,00
3	01/04/07	450,00	675,00
4	01/05/07	675,00	1012,25
5	01/06/07	1012,25	1518,37
6	01/07/07	1518,37	2277,75

Tabela 1

a) Essa aplicação financeira foi realizada a juros simples? Caso negativo faça essa aplicação a juros simples.
b) Observando a tabela 1, qual foi o rendimento baseado na aplicação ao final do segundo mês e do quinto mês? E ao final do semestre?
c) Se o tempo da aplicação foi prorrogado para mais 3 meses, quanto renderia após o 9º mês?

Nessa aplicação financeira, temos os juros compostos nos quais a taxa de juros incide sempre sobre o Capital Inicial, acrescido dos juros acumulados até o período anterior, ou seja, juros sobre juros.

Os juros no 1º mês: 200 . 50% = 200 . 0,5 = 100,00. Assim, ao final do 1º mês obteve-se o montante de: 200,00 + 100,00 = C +J = 300,00.

No 2º mês os juros calculados são referentes ao montante anterior: 300 . 0,5 = 150,00.

Assim, ao final do mês o montante é de: 300,00 + 150 = 450,00.

Nos dias atuais as transações comercias e financeiras utilizam o sistema de *juros compostos*. Isso ocorre em compras a prazo (com cartão de crédito ou boleto bancário), empréstimos bancários, aplicações entre outras.

Podemos perceber que a caderneta rendeu mais no sistema de juros composto do que no juro simples, por isso o juro composto é o sistema mais utilizado.

Agora, propomos que você resolva as seguintes situações-problema:

1) Considere um capital de R$ 70,00 aplicado a taxa de 3% ao mês.

e) Calcule o montante (mês a mês) acumulado num período de 3 meses à taxa de juros simples? Qual a quantia acumulada após n meses com a mesma taxa?

f) Calcule o montante (mês a mês) acumulado num período de 3 meses a taxa de juros compostos? Qual a quantia acumulada após n meses a mesma taxa?

g) Os gráficos representam o montante em função do período investido em cada sistema de juros. Qual representação está indicando o sistema de juros simples. E a de juros compostos?

h) Podemos associar cada representação gráfica alguma função? Caso positivo, qual função?

2) Você irá fazer uma aplicação financeira de R$80,00 que rende ao mês 4% a.m., durante 4 meses. Nessa aplicação, você não pode retirar nenhum valor ao decorrer no tempo.

f) Calcule o montante deste capital aplicado no sistema de juros simples.

g) Calcule o montante deste capital aplicado no sistema de juros compostos.

h) Expresse a lei que permite calcular o montante deste capital, aplicado no sistema de juros composto por n meses.

i) Podemos afirmar que a lei encontrada acima é uma função exponencial? Por quê?

j) Faça uma representação gráfica do montante, em função do período investido em cada sistema de juros.

3) João deseja comprar um carro cujo preço à vista, com todos os descontos possíveis, é de R$ 21.000,00, e esse valor não será reajustado nos próximos meses. Ele tem R$ 20.000,00 que podem ser aplicados a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, e escolhe deixar todo o seu dinheiro aplicado até que o montante atinja o valor do carro.

Para ter o carro, João deverá aguardar:

g) Dois meses, e terá a quantia exata.

h) Três meses, e terá a quantia exata.

i) Três meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R$ 225,00.

j) Quatro meses, e terá a quantia exata.

k) Quatro meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R$ 430,00.

l) Construa o gráfico que expressa essa relação do montante em função do período.

Anexo B – Questionário para os professores aplicadores

1) Nome

____

2) Formação (Graduação Plena em Matemática ou Complementação/ Ano)

____

____

3) Tempo de magistério. ____________________

4) Segmento que leciona: (   ) E.F.II   (   ) E.M.

5) Pós-Graduação cursada e/ou em andamento

   a) (   ) Extensão

   b) (   ) Aperfeiçoamento

   c) (   ) Especialização

   d) (   ) Mestrado

   e) (   ) Doutorado

6) Já participou de algum trabalho colaborativo em sua escola? Qual?

____

____

____

7) Em suas aulas costuma utilizar alguma metodologia ou estratégia de ensino? Qual?

____

____

____

8) Utiliza outro recurso além do livro didático? Qual?

____

____

____

9) Levando em consideração a sua experiência e o seu conhecimento, como você abordaria o ensino de Função Exponencial?

____

____

____

10) Quais são as dificuldades que os alunos apresentam ao estudar este assunto?

____

11) Costuma trabalhar com resolução de problemas para desenvolver e/ou aplicar o conceito de Função Exponencial?

12) Já fez o uso de algum software matemático para o estudo de gráficos em suas aulas? Por quê?

13) Você costuma contextualizar com a Função Exponencial? Por quê?

Anexo C - ROTEIRO DE OBSERVAÇÃO DO DESENVOLVIMENTO DA THA

Turma	Número de alunos presentes
Data	Professor(a)
Identificação da Aula	Assunto

1. Organização da classe e “clima” dominante

2. Consignas do professor sobre a tarefa e explicitação dos objetivos de aprendizagem

3. Combinados com a classe

4. Atitude dos alunos no desenvolvimento das tarefas e implicação dos alunos na busca de solução

5. Eventuais problemas relacionados à leitura e compreensão do texto

6. Interação entre alunos na realização das tarefas

7. Dificuldades observadas e possíveis causas

8. Interesse dos alunos nas atividades que envolvem contextualização de situações, situações de investigação e recursos tecnológicos.

9. Adequação do tempo previsto para a atividade.

10. Intervenções do professor durante a realização da atividade.

11. Socialização e sistematização das conclusões.

12. Perguntas, explicações, depoimentos do professor que merecem destaque.

13. Opinião dos alunos

Anexo D - Relatórios da professora pesquisadora sobre as aulas

A seguir vamos apresentar relatórios das aulas que foram desenvolvidas a THA. Os relatórios foram realizados de acordo com cada aula da THA, ou seja, relatório da Etapa 1 (linguagem das potências de suas propriedades), relatório da Etapa 2 (crescimento exponencial) e relatório da Etapa 3 (conceito e aplicação da função exponencial). Em cada relatório vamos descrever algumas considerações que julgamos importantes para o desenvolvimento da THA, como: as interações do aluno nas atividades e com o professor, as dificuldades apresentadas e outros.

Relatórios sobre as aulas do Professor P1

O tempo previsto para o desenvolvimento da THA era de 14 aulas, mas a professora P1 conseguiu desenvolver em 13 aulas. Infelizmente o desenvolvimento foi interrompido um mês devido a Licença Prêmio tirada pela professora assim, o desenvolvimento da THA iniciou em Agosto e terminou em Outubro. Como mencionamos acima, fizemos um relatório de cada aula observada e apenas em 1 aula não foi possível a pesquisadora estar presente então, o relatório foi realizado a partir da descrição da professora P1 . Nos relatórios vamos relatar conversas e falas dos alunos que aconteceram nas aulas.

Relatório da Etapa 1 – Linguagem das potências e de suas propriedades

A professora P1 desenvolveu a Etapa 1 da THA no dia 12/02/08 em duas aulas, cada aula com duração de 50 minutos. Para iniciar as atividades dessa aula os alunos não precisaram de uma explicação prévia do conteúdo, pois antes de iniciar a THA a professora já havia trabalhado com operações envolvendo potências.

Na Atividade **I** a professora deixou que os alunos refletissem sobre os textos e, em seguida, fez a seguinte pergunta aos alunos:

"De acordo com os assuntos abordados no texto, o que será que iremos estudar? Alguém tem alguma sugestão?"

Após essa pergunta, alguns comentários foram apresentados pelos alunos:

"Espero aprender sobre potências."

"Acho que veremos algo que está relacionado a números grandes e modos de encontrar resultado mais rápido sem precisar fazer muitos cálculos."

"*Acredito que seja números infinitos ou até mesmo números com potência."*

"Nesse conteúdo, acho que vou trabalhar com fração, potência e outros tipos de cálculos."

"Algumas coisas como encontrar métodos para a resolução de contas grandes.

Em seguida, a professora com o intuito de ampliar a idéia de potência e conseqüentemente auxiliar a compreensão de números grandes, contou aos alunos a história dos grãos de trigo desenhando na lousa o tabuleiro de xadrez e anotando quantos grãos teriam em cada casa do tabuleiro. Nesse momento os alunos mostraram interesse em saber da história.

Nas questões dessa atividade observamos que os alunos interagiram muito bem com o texto, pois eles começaram a questionar os valores apresentados, como 10^{57}.

"Esse número é tão grande que fica até difícil de imaginá-lo."

"Além disso, me parece que existem muitos mais de grãos de areia do que o texto mostra. Tudo bem que o número 1000000000000000000000 é bem grande, mas eu acho que existe mais."

"Agora em relação à potência percebo que em sua resolução é comum multiplicarem o expoente com a base do que errarem na escrita.

Nesse momento da atividade a professora pediu para que o aluno esclarecesse melhor sua idéia.

"As pessoas erram mais na forma de resolver a potência do que na escrita como mostra o texto, exemplo: resolvem a potência 10^9 como 10 x 9."

Após esse exemplo, os alunos discutiram esse acontecimento e defenderam a idéia de isso acontecer pelo fato de a resolução da uma potência estar associada à multiplicação e, talvez sem conhecer a função do expoente, visualmente é fácil associar a multiplicação do expoente com a base e rapidamente responder que $10^9 = 90$. Com isso, a professora ressaltou que o expoente indica a quantidade de vezes que a base deve ser multiplicada e não multiplicarmos o expoente pela base.

Os alunos não apresentaram dificuldades no exercício 1 da Atividade **II** em analisar a sequência e escrever em forma de potência a quantidade de quadrados existentes. Mas, nos demais exercícios eles sentiram dificuldades em resolver potências com expoente negativo. Com isso, a professora precisou intervir e explicar o método da resolução.

Durante todo o desenvolvimento dessa Etapa notamos que o envolvimento dos alunos com as atividades favoreceu a participação e interesse dos alunos durante a aula. Além disso, a professora proporcionou um ambiente no qual o aluno pode ser ativo em sua aprendizagem.

Relatório da Etapa 2 - Crescimento exponencial

A professora P1 iniciou a Etapa 2 no dia 13/08/08 e desenvolveu as atividades propostas em duas aulas, cada aula com 50 minutos de duração.

Ao iniciar a Atividade **III** a professora não pretendia seguir a estratégia sugerida para o desenvolvimento da atividade que seria separar os alunos em grupos, pois ela argumentava que o ficava mais difícil em manter o controle da sala. Mas, como dito anteriormente, a professora propôs a realização da atividade em grupo e combinou com os alunos se os mesmos não se comportassem não iriam mais executar tarefas dessa maneira.

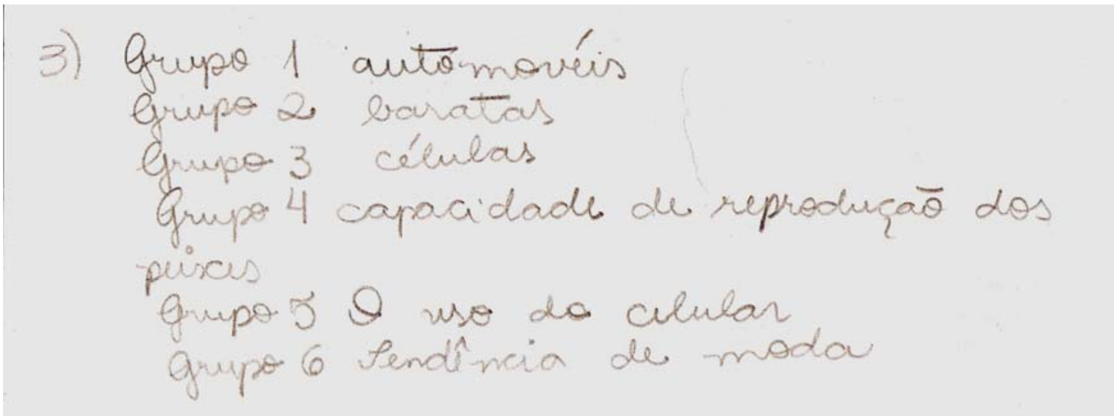
A interação dos alunos com cada texto foi muito boa, pois percebemos que eles discutiam sobre o assunto e ao final, socializaram e compreenderam corretamente que idéia de crescimento exponencial abordado em cada tema é algo que cresce rapidamente. Além disso, observamos que os alunos, de alguns grupos, buscaram exemplos da sua realidade que retratassem o texto.

A seguir vamos relatar um exemplo que um grupo apresentou.

Grupo 1: *"Dentro desse texto sobre a Epidemia da AIDS podemos citar que na década de 80 as pessoas contaminadas com o vírus não tinham muito tempo de vida e, nos dias atuais, chegam a viver mais de 10 anos devido à ciência que a cada dia desenvolve novas drogas para prolongar a vida e diminuir a resistência do vírus.*

Assim, a ciência acaba sendo um impedimento para que esse vírus não cresça de forma catastrófica.”

Ainda nessa atividade, a professora percebeu a empolgação dos alunos e propôs uma nova tarefa no qual eles precisariam encontrar exemplos de situações que eles achavam que poderia crescer exponencialmente. Para a execução dessa atividade os alunos mantiveram-se em grupos. Ao observar os grupos, percebemos que essa atividade os motivou muito gerando discussões sobre assuntos do cotidiano que poderiam crescem exponencialmente. O mais interessante foi que nas discussões, às vezes, percebemos que o assunto mudava de foco, mas no meio da conversa surgiu um tema que pudessem abordar em crescimento exponencial. A seguir apresentaremos as situações encontradas pelos alunos e suas justificativas.


3) Grupo 1 automóveis
Grupo 2 baratas
Grupo 3 células
Grupo 4 capacidade de reprodução dos peixes
Grupo 5 O uso do celular
Grupo 6 tendência de moda

Grupo 1: *“Temos como exemplo o crescimento de automóveis. Temos que criar algo mais eficaz para combater o crescimento de automóveis visando uma melhoria no ar da nossa cidade e no trânsito. Sabemos que isso está sendo controlado um pouco pelo rodízio de carros, mas as pessoas sempre acabam comprando outro carro para ter mais uma opção em se locomover.”*

Grupo 2: *“Tomamos como exemplo o que estudamos em Biologia, o crescimento das baratas porque a reprodução desse inseto é muito rápida e elas possuem um longo tempo de vida.”*

Grupo 3: *“A reprodução das células e bactérias também é um exemplo de crescimento rápido.”*

Grupo 4: *“A grande capacidade de reprodução dos peixes.”*

Grupo 5: *"O uso do celular também está crescendo muito rápido. Hoje até criança tem."*

Grupo 6: *"Além do celular tem algo que cresce muito rápido também, a tendência de moda. Acreditamos que ambas situações crescem rapidamente porque à mídia influência as pessoas. Com isso, fica difícil encontrar algo que impeça esse crescimento, pois muitas pessoas pensam que estar na moda é vesti-se igual a um ator ou atriz que está na novela das oito."*

Na realização desta atividade notamos que todos os alunos foram ativos em sua aprendizagem sem o auxílio da professora e foi a que mais proporcionou interação entre a atividade e entre eles. Observamos que nesse momento o aluno sentiu-se a vontade e, o mais importante, não sentiu-se constrangido em defender suas idéias.

Para a próxima atividade, a THA sugeria como estratégia para desenvolver a Atividade IV mantê-los com os mesmos grupos, mas a professora desfez devido à excessiva conversa entre os alunos.

Ao iniciar a análise dos gráficos a professora permite que os alunos consultem o caderno e/ou o livro caso não se recordem dos gráficos e, em seguida, a professora questiona a questão **a**.

Na questão **a**, os alunos sem dificuldades reconheceram que o gráfico 1 e o gráfico 2 representa a Função do 1º Grau e a Função do 2º grau, respectivamente. Porém, eles não souberam dizer qual função representa cada gráfico e, com isso, foi necessária a intervenção da professora esclarecendo a função para cada representação gráfica, sendo elas: $f(x) = 2x$ e $f(x) = x^2$, respectivamente.

No que se refere a relação dos valores de x e y, questão **b**, os alunos não apresentaram dificuldades em identificar a relação existente entre as variáveis.

Para a resolução da questão **c**, os alunos responderam rapidamente que o maior crescimento ocorria no gráfico 2 que representa a Função do 2º Grau. Com isso, a professora fez a representação gráfica na lousa do gráfico 1 e do gráfico 2 que representam respectivamente, a Função do 1º Grau e a Função do 2º Grau e, juntamente com os alunos, analisou cuidadosamente alguns pontos que, sem precisar analisar o gráfico 3, as alunos descartaram a resposta anterior e responderam que o maior crescimento ocorre no gráfico 3.

Na questão **d**, os alunos, sem dúvidas, identificaram que o gráfico 3 é crescente e o gráfico 4 é decrescente e, além disso, houve um aluno que justificou sua escolha afirmando que o gráfico 3 cresce exponencialmente porque a lei que expressa esse gráfico está ligado a uma potência.

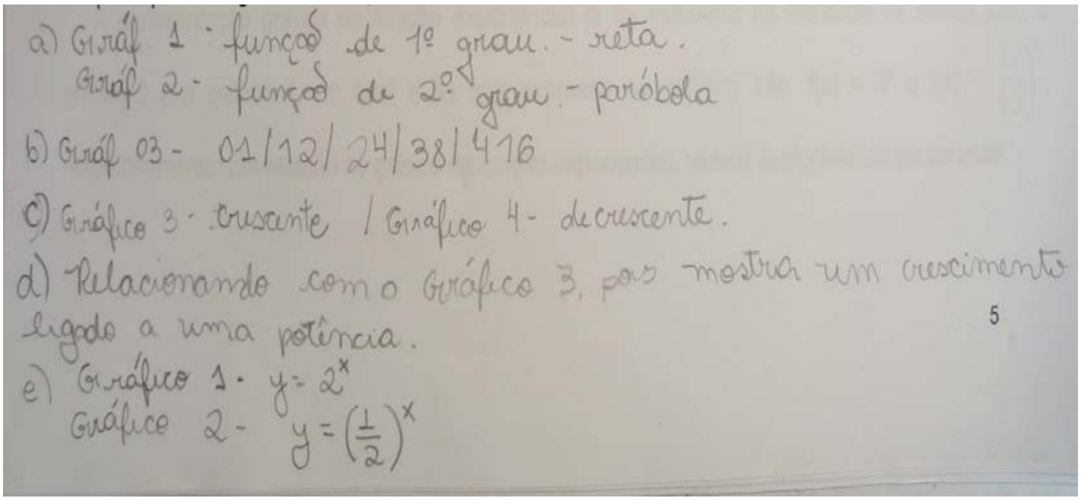
O aluno argumentou-se tão confiante que os demais logo perceberam que ele estava correto e o aplaudiram. Em seguida, a professora aproveitou a discussão da questão e iniciou a alternativa **e**, questionando com os demais alunos, qual seria essa potência que representa o gráfico 3. Por alguns instantes os alunos mantiveram-se em silêncio analisando juntamente com a professora alguns pares ordenados e opinaram por algumas leis.

> *"Professora, eu acho que a lei pode ser (x+1)."*
> *"Não, eu acredito que seja 2x."*
> *"Ou então, a lei é (x+x)."*

Ao observar às respostas a professora questionou os alunos se essas leis que eles falaram se são escritas em forma de potência, e eles perceberam que não estavam associando ao que foi respondido na questão anterior. E novamente, o mesmo aluno que respondeu corretamente a discussão anterior, respondeu que a potência era 2^x. Depois de encontrada a solução, os alunos começam a validar a lei atribuindo valores a x e analisando o gráfico.

Posteriormente, os alunos deram apenas uma sugestão para encontrar a lei que representa o gráfico 4, sendo ela: $(-2)^x$. Por meio de uma intervenção da professora, a mesma questionou aos alunos: *"Que número elevado a -2 resulta em 4?"*. Após alguns minutos, uma aluna respondeu que a lei que expressa o gráfico seria $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ e, em seguida, começaram a comparar pontos do gráfico com a lei encontrada.

Nessas duas aulas, temos como ponto positivo, a interação dos alunos em todas as atividades e sua participação ativa. Percebemos também, que mesmo os alunos terem estudado o comportamento do gráfico nas funções do 1º Grau e 2º Grau, eles apresentaram um pouco de dificuldade nessa análise precisando do auxílio da professora. Além disso, notamos outra dificuldade apresentada pelos alunos que é a conversão do registro gráfico para o algébrico e a localização dos pontos no gráfico. A seguir vamos apresentar uma resposta de um aluno para essa questão.


a) Gráf 1 - função de 1º grau. - reta.
Gráf 2 - função de 2º grau - parábola
b) Gráf 03 - 01/12/24/38/416
c) Gráfico 3 - crescente / Gráfico 4 - decrescente.
d) Relacionando com o Gráfico 3, pois mostra um crescimento ligado a uma potência.
5
e) Gráfico 1 - $y = 2^x$
Gráfico 2 - $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Relatório da Etapa 3 – Conceito e aplicação da Função Exponencial

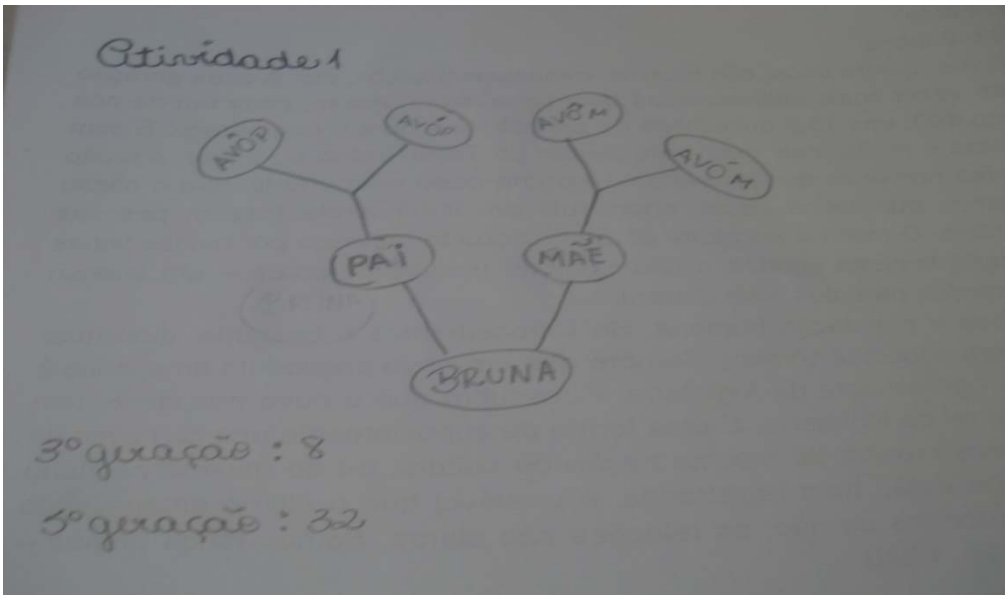
A professora P1 iniciou a Etapa 3 no dia 20/08/08 e desenvolveu as atividades propostas em 2 aulas, cada aula com 50 minutos de duração.

Nesse dia a professora dividiu a aula em duas partes, sendo elas: a primeira aula realizando a Atividade **V** e a segunda aula, realizando a Atividade **VI** exercícios 2 ao 5.

A aplicadora decidiu antecipar a atividade que utilizaria o software matemático para a construção e análise dos gráficos porque na próxima semana seria apenas uma aula e a professora-pesquisadora não estaria presente para auxiliá-la no uso do software.

No início da Atividade **V**, a professora não seguiu a sugestão de estratégia para desenvolver a atividade, pois percebemos que ela estava interessada em cumprir o planejado para a aula, então em vez de ceder alguns minutos para que os alunos pudessem fazer a leitura do texto sozinhos a professora combina com os alunos que cada um iria ler um parágrafo.

Após a leitura, a professora incentivou os alunos para que fizessem uma árvore genealógica no caderno para melhor compreensão das gerações. A seguir, vamos apresentar uma das árvores construídas pelos alunos.



Nesse momento, percebemos que os alunos tiveram dificuldade em saber se eles eram ou não a primeira geração. A professora precisou intervir e explicou que eles só entrariam na geração se tivessem filhos, assim, o correto é começar com a geração dos pais.

Em seguida, os alunos começaram a conversar sobre a origem de cada um e, os alunos que conheceram seus de seus avôs e bisavôs, diziam seus nomes, sua idade e entre outras coisas. A seguir vamos apresentar alguns comentários realizados pelos alunos.

“Poxa que interessante, nunca pensei que pudesse existir tanto parentesco mesmo com um certo grau de distância.”

“É engraçado imaginar que podemos ser primos bem bem distantes. Será que é possível?”

“Será que há a possibilidade de eu estar namorar com uma prima?” risos

Os alunos acharam engraçado tal acontecimento e iniciaram uma investigação familiar para verificar a possibilidade de serem parentes. Com isso, logo surgiram brincadeiras que talvez alguém pudesse estar namorando parente.

Percebemos que o texto fez com que os alunos participassem da aula, interagissem com o texto e entre eles e, além disso, voltassem para a sua realidade e refletissem que todos têm algo em comum.

A professora precisou intervir após alguns minutos para que pudessem começar a responder as questões propostas porque os alunos estavam se sentindo tão empolgados com o assunto que se esqueceram de continuar a atividade.

Nas questões **1** e **2**, os alunos não apresentaram dificuldades em encontrar as gerações e o número de ascendentes de uma família.

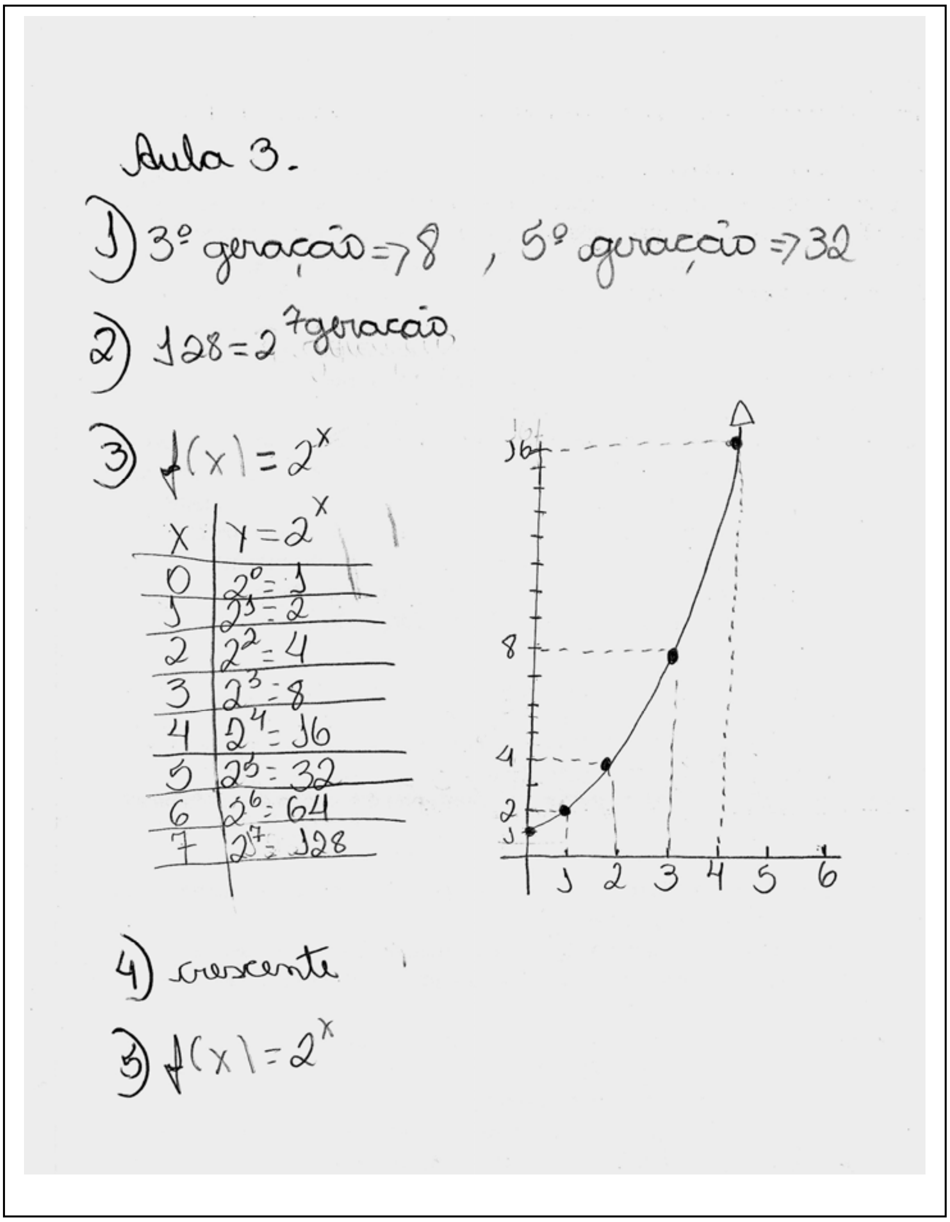
Na questão **3**, a professora auxiliou os alunos na construção da tabela e do gráfico, pois ela disse que antes de realizar o gráfico era preciso encontrar a função que representasse essa situação. Além disso, a professora sugeriu aos alunos que identificassem o comportamento do gráfico. Observamos que os alunos não apresentaram dificuldades nessa questão.

Ao finalizar a atividade, refletimos um pouco sobre a estratégia apresentada pela professora na questão anterior, pois para construir a tabela relacionando o número de ascendentes a cada geração não era preciso encontrar a função antes porque o aluno ao responder as questões **1** e **2** já havia compreendido a maneira de como a situação estava acontecendo. Talvez o alunos sentisse dificuldade em se organizar, mas saberia identificar quais os números de ascendentes em determinada geração.

Notamos aqui, que o aluno não pôde ser ativo em sua aprendizagem e, por meio da investigação, buscar estratégias que o levassem a construir sozinho uma tabela e a partir desta, o gráfico. Enfatizamos ainda que, nesse momento seria muito importante que o aluno agisse sozinho, para diagnosticarmos se realmente houve compreensão da situação pelos alunos.

Na questão 4, como a professora já havia respondido essa questão anteriormente, a mesma modificou a pergunta no qual criou uma situação hipotética, sendo ela: “Se cada um de nós tivéssemos 3 ascendentes, qual seria a função?”. Os alunos não apresentaram dificuldades em responder que a função seria $y = 3^x$.

O desenvolvimento dessa atividade durou cerca de 40 minutos e a seguir vamos apresentar uma resolução executada pelo aluno.


Aula 3.

1) 3º geração ⇒ 8 , 5º geração ⇒ 32

2) $128 = 2^7$ geração

3) $f(x) = 2^x$

x	$y = 2^x$
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$
4	$2^4 = 16$
5	$2^5 = 32$
6	$2^6 = 64$
7	$2^7 = 128$

4) crescente

5) $f(x) = 2^x$

A interação dos alunos com esta atividade foi muito satisfatória, pois após a leitura da situação-problema os mesmos discutiram a idéia do texto e conversaram sobre seus familiares, número de filhos de cada tio, avós e questionaram até a nacionalidade de seus parentes.

Terminado a Atividade **V** a professora não institucionaliza o conceito de função exponencial que segue na THA e acompanha os alunos até a sala de informática para a execução dos exercícios 2, 3, 4 e 5 da Atividade **VI**.

Antes de iniciar a atividade na sala de informática os alunos foram orientados pela professora P1 da postura que deveriam ter na sala de informática, como: não comer e não beber, não bagunçar, realizar as atividades com o auxílio do software e como o programa reconhece uma função.

A sala de informática é composta por 18 computadores no qual 4 não estavam funcionando, assim, os alunos se organizaram em 10 trios e quatro duplas para a realização das atividades.

Os alunos mostraram-se muito empolgados para a realização dessa atividade pelo fato de não conhecerem a sala de informática.

A professora permitiu alguns minutos aos alunos para que eles pudessem conhecer o software e fazer tentativas com qualquer função e, em seguida, iniciou a atividade.

Durante o desenvolvimento das atividades percebemos que os alunos construíam os gráficos, mas apresentavam dificuldades para responder o que foi proposto precisando assim, do constante auxílio da professora.

Percebemos que a maior dificuldade dos alunos foi responder a questão **4**. Vamos apresentar a seguir, algumas dúvidas dessa atividade que eram comum nos grupos.

Grupo 1: *"Professora, a função é decrescente sempre quando a base for menor do que 1, não é?"*

Grupo 2: *"A função é decrescente quando a base é uma fração."*

Grupo 5: *"Sempre a função será crescente quando o x aumenta e y também, mas não sei determinar o valor da base."*

Grupo 2: *"A função é crescente quando a base não for fração e decrescente quando for fração."*

Grupo 7: *"A função é crescente para valores maiores que zero."*

Grupo 9: *"Nós também achamos que é crescente quando a* ***a*** *for maior que 1."*

De acordo com essas dúvidas e outras observamos que os alunos associaram que uma função exponencial é decrescente quando a base for uma fração qualquer. Acreditamos que grande parte dos alunos ficou preso ao aspecto visual da fração colocado no exercício com o desenho gráfico, ou seja, associaram que a base sendo uma fração a função será decrescente e não valorizaram o valor decimal que representa essa fração. Sendo assim, os alunos não conseguiram concluir que a função exponencial é crescente para valores de $a > 1$ e decrescente quando, $0<a<1$. Nesse momento, o professor não conseguiu esclarecer tal questão para os grupos por falta de tempo.

Na questão **5,** notamos também que os alunos associaram a soma de um número real à função com o crescimento mais rápido e não notaram a translação do gráfico.

Grupo 2: *"Quanto mais expoente é acrescentado em uma potência, o crescimento é mais rápido, como nos itens A, B e C."*

Grupo 3: *"Crescem no mesmo ritmo, mas conforme ela vai aumentando vai aumentando 1 número a mais."*

Grupo 7: *" O valor de y vai aumentando sempre uma unidade."*

Grupo 10: *"Somando-se um número a função cresce mais rápido."*

Acreditamos que a causa dessa dificuldade decorreu da grande quantidade de alunos na sala, pois a professora não conseguiu auxiliar todos os grupos e nem fazer questionamentos que os levassem a buscar novas estratégias que proporcionasse a solução correta. Além disso, outra dificuldade foi manter a curiosidade de conhecer os recursos do computador pelos alunos, pois os mesmos a todo instante que a professora estava em outro grupo fugiam do software e tentavam acessar jogos do computados, internet, Messenger e até mesmo, Orkut. Essa curiosidade é compreensível, pois alguns alunos sabiam da existência da sala, mas nunca foram e outros, não sabiam de sua existência.

Apesar de a aula ter sido um pouco desorganizada devido ao grande número de alunos, temos dois pontos positivos nessa atividade: o primeiro, que os alunos tiveram a oportunidade de conhecer a sala de informática e o segundo, os alunos sentiram-se interessados em fazer a atividade com o uso do software e além disso, os alunos na entrevista, relataram que a visualização gráfica ficou mais fácil ajudando a solucionarem a questão.

Assim, podemos perceber que o software auxiliou o aluno a compreender melhor a representação gráfica dessa função e, acreditamos que eles só não conseguiram responder adequadamente algumas questões devido a sala estar com muitos alunos e a professora não ter conseguido dar maior atenção.

Ao finalizar a aula a professora P1 solicitou aos alunos que fizessem em papel quadriculado os mesmos exercícios feitos no software e entregassem na próxima aula. Seu objetivo com essa tarefa foi verificar a compreensão da construção gráfica.

Após o término da atividade, a professora relatou que os alunos não conseguiram desenvolver mais devido ao grande número de alunos que estavam presentes e afirmou que o ideal seria para cada computador dois alunos. Assim, os alunos estariam mais participativos, teriam um melhor auxílio dela e um melhor desempenho.

A próxima aula foi realizada no dia 25/08/08 e desenvolveu as atividades em 1 aula com 50 minutos de duração.

Nessa aula o professora P1 retomou o texto relacionado aos ascendentes para institucionalizar o conceito de função exponencial.

Assim, P1 explica a importância da função exponencial como ferramenta que viabiliza estudar fenômenos naturais e sociais e ainda, destacou algumas características dessa função o que já foi estudou ao longo das atividades, como: sua escrita como uma potência, rápido crescimento e sua representação gráfica.

A estratégia de desenvolvimento da atividade para o professor-aplicador sugeria que essa institucionalização deveria ser realizada após o estudo da situação-problema de ascendentes que tinha o objetivo de reconhecer a função exponencial, pois a nossa finalidade era valorizar o reconhecimento de um novo objeto de estudo. Além disso, a situação-problema deveria ser realizada pelo aluno com o mínimo auxílio da professora-aplicadora, e como já vimos, não ocorreu dessa maneira dificultando ainda mais analisar nossa hipótese de aprendizagem por meio de situações contextualizadas.

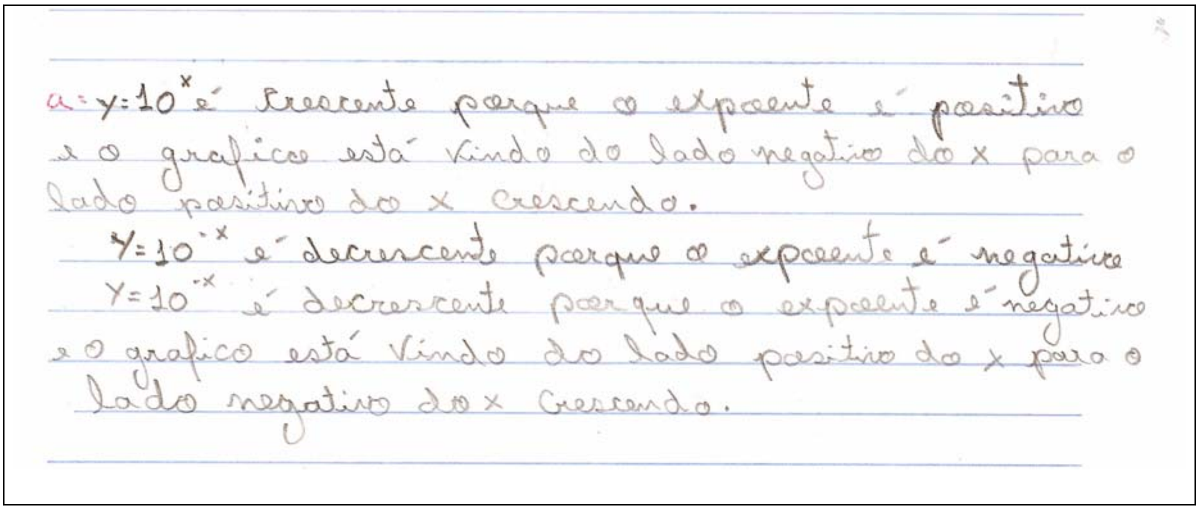
Após a institucionalização a professora P1 resolve na lousa, com o auxílio dos alunos, os exercícios da Atividade **VI** que não foram resolvidos na sala de informática.

Na resolução do exercício 1, antes que os alunos respondessem, a professora relembra como a função exponencial é escrita, sendo $y= a^x$, e em seguida, explica o problema e, os alunos sem dificuldades, encontram a função $f(x) = 5^x$.

Percebemos nesse momento que o aluno foi passivo em sua aprendizagem. Tal situação não favorece a uma aprendizagem com perspectivas construtivista.

No exercício 6 os alunos não levaram muito tempo para apresentarem suas respostas, sendo elas:

"A função crescente é y = 10^x e a decrescente é y=10^{-x} porque o expoente é negativo."



a: y=10^x é crescente porque o expoente é positivo e o grafico está vindo do lado negativo do x para o lado positivo do x crescendo.
Y=10^{-x} é decrescente porque o expoente é negativo
Y=10^{-x} é decrescente porque o expoente é negativo e o grafico está vindo do lado positivo do x para o lado negativo do x crescendo.

Notamos nesse momento que os alunos, mais uma vez, respondem pelo aspecto visual, pois os alunos acreditam que o fato do expoente ser negativo a função é decrescente. Percebemos que os alunos não compreenderam o papel da base no comportamento da função exponencial. Para que ficasse claro, a professora retomou uma das propriedades de potência no qual o expoente negativo a base é invertida, ou seja, y = $10^{-x} = \left(\frac{1}{10}\right)^x$. Com isso, a professora retomou as atividades realizadas no laboratório com o objetivo de esclarecer aos alunos o papel da base na função exponencial esclarecendo assim, a associação dos alunos com a base fracionária e decrescimento da função.

No exercício 7, os alunos não apresentaram dúvidas em identificar a função exponencial y = 4^x.

Ao término da aula a professora conversou com os alunos sobre a continuidade do projeto, pois no mês de Setembro ela estaria de Licença Prêmio (é um benefício que todo servido público tem direito depois de 5 anos trabalhados com no máximo 30 faltas) e voltaria no mês de Outubro para continuar com o projeto, explicou ainda, que era fundamental os alunos continuarem estudando o assunto com o próximo professor que iria substituí-la e guardarem a apostila para quando retornar dar sequência ao trabalho.

Com isso, o desenvolvimento do projeto foi interrompido. Não é interessante no nosso projeto continuar o desenvolvimento da THA com um outro professor que não participou desde o início do projeto e, além disso, as hipóteses de um professor para outro podem ser diferentes. Assim, retomamos no mês de Outubro o desenvolvimento da THA com a professora P1.

A professora retornou à sua turma e deu sequência a THA no dia 14/10/2008, com 2 aulas de 50 minutos cada. Nesse dia iniciou-se o estudo de equação exponencial.

A professora propôs essa atividade em dupla para que eles pudessem, a partir do enunciado, buscar estratégias e resolver as equações exponenciais propostas. Vamos apresentar algumas idéias e questões colocadas pelos alunos.

Dupla 1: *"Professora, para encontrar esse valor tenho que pensar quantas vezes devo multiplicar a base para encontrá-lo, estou certo?"*

Dupla 5: *"Para determinar o número precisamos fazer o m.m.c, professora?"*

Dupla 6: *"Ah, é verdade, o m.m.c vai dá quantas vezes multiplicamos o mesmo número."*

Dupla 4: *"Então, tanto faz fazer o m.m.c ou fatorar?"*

Dupla 5 : *" E tem diferença, eu não lembro?"*

A professora nesse momento precisou intervir e esclarecer as dúvidas dos alunos quanto à fatoração e m.m.c. Percebemos que os alunos lembram alguns conceitos do Ensino Fundamental pelo seu nome e não pela sua utilização, ou seja, não recordam mais que o m.m.c é usado para encontrar o menor múltiplo comum entre dois ou mais valores e o processo que se faz para encontrar esse valor é a fatoração, e com isso, faz-se a decomposição em fatores primos.

A professora propôs outras equações exponenciais, além das que estavam na THA, com o objetivo de trabalhar com números racionais. Na resolução dessas equações percebemos que os alunos sentiram dificuldades em resolver as equações que apresentavam base com radicais e expoente fracionário. Eles sentiram dificuldades em transformar o radical em forma de fração e, nesse momento, foi preciso o auxílio da professora.

Ao final da aula, com a finalidade de corrigir as equações propostas, a professora chamou alguns alunos para resolverem as equações exponenciais na lousa. Grande parte dos alunos queria ir à lousa e mostrar sua resolução para saber se estava certa. Notamos que essa atitude da professora incentivou os alunos a participarem da aula, pois eles se sentiram a vontade de resolver e não ter medo de errar. Posições como essa são importantes para que o aluno confie no professor e possa sempre perguntar e trocar idéias com ele.

A professora P1 iniciou a atividade de aplicação exponencial na área de Biologia no dia 21/10/2008 e desenvolveu as atividades propostas em 2 aulas, cada aula com 50 minutos de duração.

Nessa atividade a professora cedeu alguns minutos aos alunos para que eles executassem sozinhos a tarefa. A seguir, vamos apresentar alguns comentários dos alunos sobre a atividade.

"Olha que legal nós já vimos isso esse ano em Biologia, mas não calculamos nada."

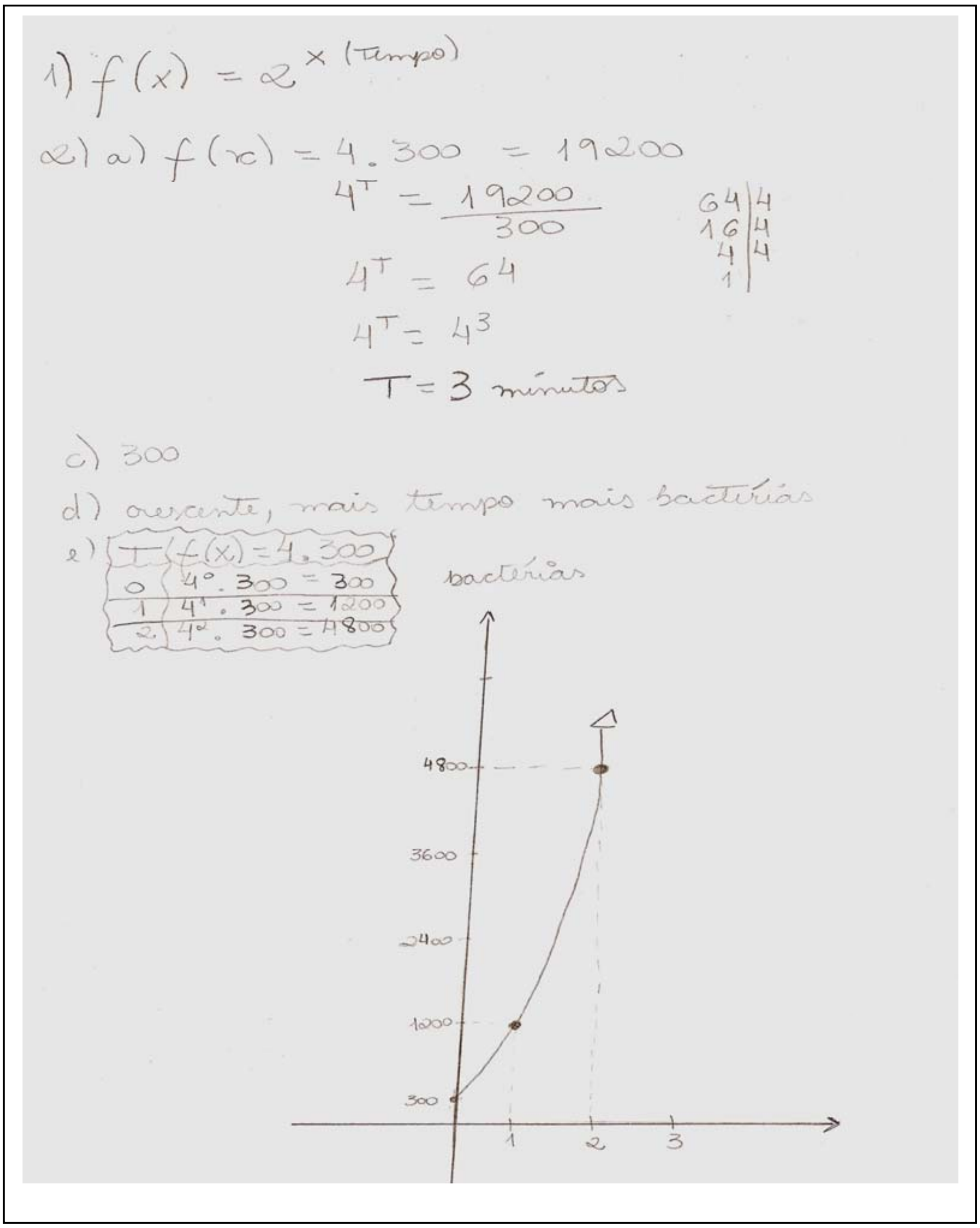
"A gente estudou sobre as bactérias, mas nada sobre o crescimento delas pelo menos eu não me lembro."

"Professora, é por isso que quando alguém está com conjuntivite na escola não vem né? É porque as bactérias crescem muito rápido e com as pessoas por perto fica mais fácil o contagio, não é?

"O exercício 2 diz que a bactéria quadruplica, mas no texto diz que duplica. Existe alguma que quadruplica professora?"

"A função exponencial é $y = 2^x$*, professora?"*

Após alguns comentários e visto que a maioria dos alunos havia respondido, a professora iniciou a correção e alguns alunos se propuseram a responder a questão. Percebemos que os alunos não encontraram dificuldades em resolver o que lhe foi proposto. Com isso, temos como hipótese, que o aluno compreendeu o conceito da função exponencial e, além disso, sentiu-se motivado em resolver uma situação-problema envolvendo outra área de conhecimento. Apresentaremos abaixo uma das resoluções executada por aluno.



Essa atividade utilizou apenas uma aula de 50 minutos. Assim, a atividade VII que envolve o reconhecimento da função exponencial na Matemática Financeira foi iniciada em 1 aula com a mesma duração.

A professora P1 modificou a estratégia para o desenvolvimento da atividade, pois a sugestão era para que os alunos resolvessem individualmente, mas ela propôs a atividade em dupla alegando que os alunos iriam se envolver mais por se tratar de um assunto do interesse deles e de todos.

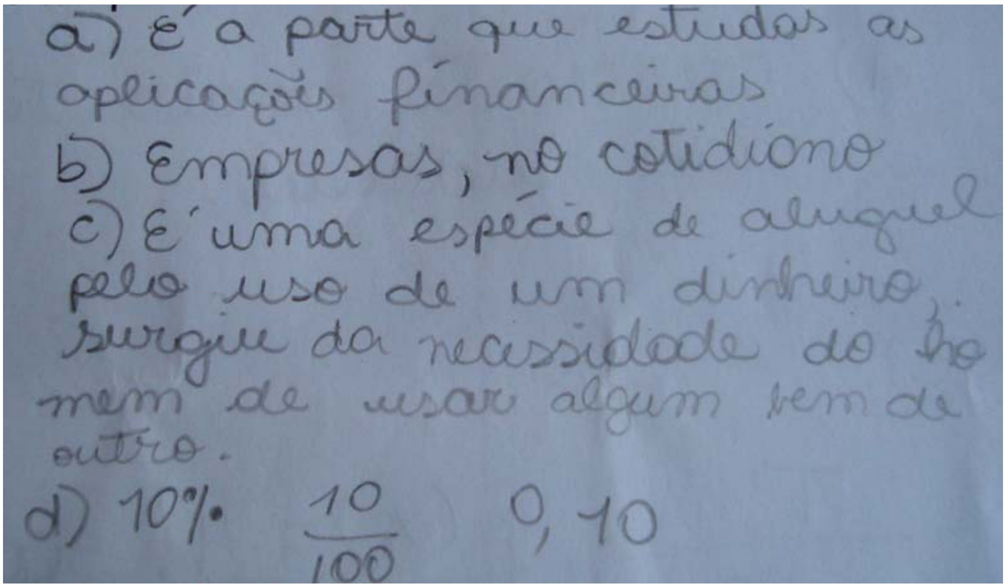
Os alunos iniciaram a atividade discutindo as questões propostas. A seguir apresentaremos algumas idéias que os alunos apresentaram sobre Matemática Financeira.

“Matemática Financeira é o mundo onde se discute o rumo do dinheiro.”

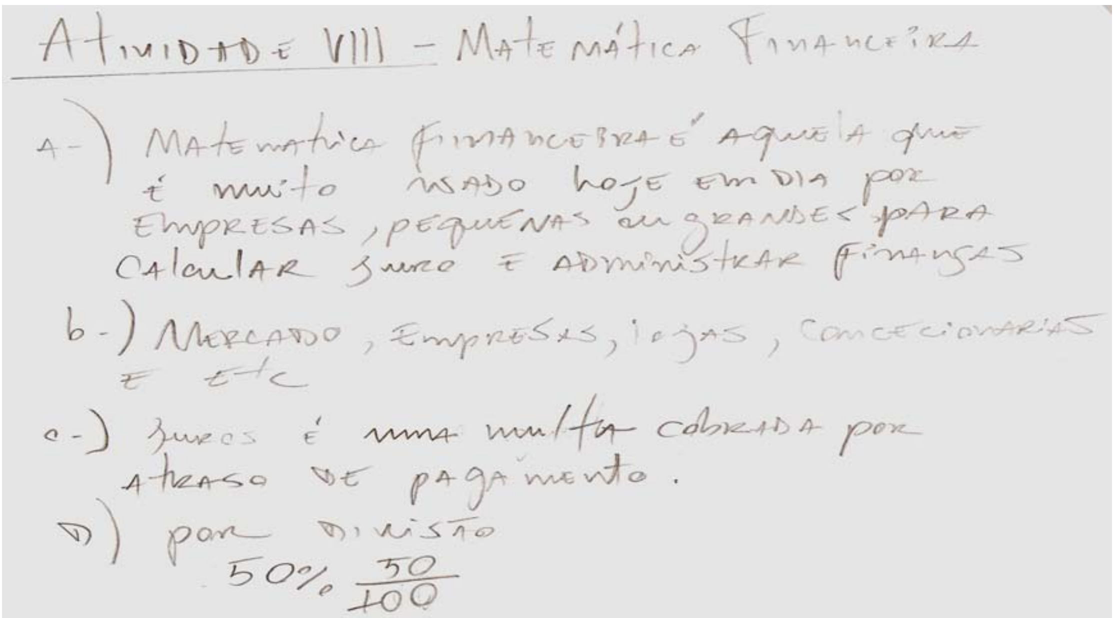
“Eu acho que a Matemática Financeira é muito usada nos bancos.”

“Ela nos ajuda a calcular os juros das compras nas Casas Bahia.”

“Normalmente nessas comprar a gente nunca sabe realmente de quanto são os juros e nem como calculá-los.”



a) É a parte que estudas as
aplicações financeiras
b) Empresas, no cotidiono
c) É uma espécie de aluguel
pelo uso de um dinheiro.
surgiu da necessidade do ho
mem de usar algum bem de
outro.
d) 10% $\frac{10}{100}$ 0,10



ATIVIDADE VIII – MATEMÁTICA FINANCEIRA

A-) MATEMATICA FINANCEIRA É AQUELA QUE
É MUITO USADO HOJE EM DIA POR
EMPRESAS, PEQUENAS OU GRANDES PARA
CALCULAR JURO E ADMINISTRAR FINANÇAS

b-) MERCADO, EMPRESAS, LOJAS, CONCECIONARIAS
E ETC

c-) JUROS É UMA MULTA COBRADA POR
ATRASO DE PAGAMENTO.

D) POR DIVISÃO
50% $\frac{50}{100}$

Após os alunos terem discutido sobre o que eles entendiam por Matemática Financeira, iniciaram a leitura. A professora propôs que cada aluno iria ler um parágrafo e, em determinados momentos do texto, ela explicava com suas palavras a ideia apresentada. As atividades presentes ao longo do texto, ela incentivava os alunos a buscarem juntos a melhor resolução assim, os alunos sentiam empolgados em participar e interessados na atividade.

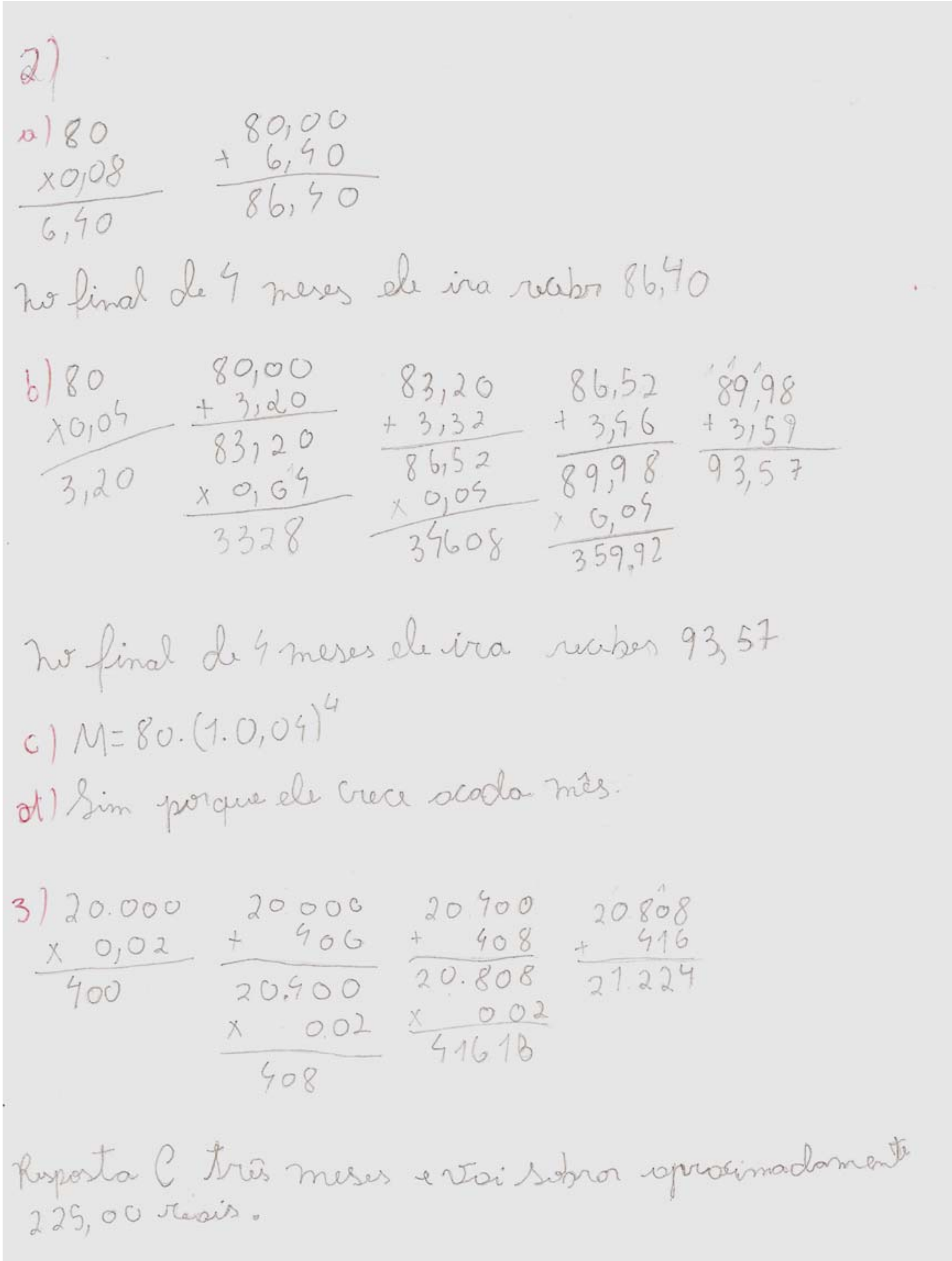
Os alunos não apresentaram dificuldades em compreender o Montante no cálculo dos juros simples, já no cálculo dos juros compostos eles demoraram um pouco mais para identificar a função exponencial devido à taxa de juros. Nesse momento a professora fez algumas perguntas relacionadas a porcentagens e percebemos que alguns alunos sentiam dificuldades em efetuar os cálculos. Com isso, a professora optou em propor alguns exercícios para o cálculo de porcentagem sem envolver juros, exercícios simples para saber o desconto ou acréscimo porcentual.

No dia seguinte, dia 22/10/2008, a professora desenvolveu as atividades propostas de Matemática Financeira em 2 aulas, cada aula com 50 minutos de duração.

Nos exercícios 1 e 2, os alunos não sentiram dificuldades em calcular o montante dos sistemas de juros, mas apresentaram um pouco de dificuldade em encontrar a fórmula para os mesmos. Com isso, a professora auxiliou os alunos para que eles percebessem que o sistema de juros simples representa uma função polinomial do 1º Grau e que o sistema de juros compostos representa uma função exponencial. Além disso, os alunos ainda apresentavam um pouco de dificuldade em calcular os juros.

No que diz respeito aos gráficos, os alunos não apresentaram dificuldade em identificar que o montante em função do tempo no sistema de juros compostos é uma curva exponencial.

Vamos apresentar a seguir uma atividade respondida de um dos alunos, mas sem a construção gráfica, pois os alunos não fizeram a representação gráfica na folha de resposta.



2)

a) 80 × 0,08 = 6,40 80,00 + 6,40 = 86,40

no final de 4 meses ele ira receber 86,40

b) 80 × 0,04 = 3,20 80,00 + 3,20 = 83,20 83,20 × 0,04 = 3328 83,20 + 3,32 = 86,52 86,52 × 0,04 = 34608 86,52 + 3,46 = 89,98 89,98 × 0,04 = 359,92 89,98 + 3,59 = 93,57

no final de 4 meses ele ira receber 93,57

c) $M = 80 . (1 . 0,04)^4$

d) Sim porque ele crece acada mês.

3) 20.000 × 0,02 = 400 20000 + 400 = 20.400 20.400 × 0.02 = 408 20.400 + 408 = 20.808 20.808 × 0.02 = 41616 20.808 + 416 = 21.224

Resposta C três meses e vai sobrar aproximadamente 225,00 reais.

Ao final dos exercícios propostos na THA a professora elaborou mais exercícios envolvendo o cálculo de juros no sistema dos juros compostos.

Além disso, como o desenvolvimento da THA havia chegado ao fim, agradeci aos alunos pela participação e colaboração juntamente com a professora e isso fez com que os alunos fizessem alguns comentários.

"Professor, nós nos saímos bem ou mal?"

"Acho que não foi como você esperava, mas nos esforçamos."

"O próximo bimestre teremos outro projeto?"

"A escola podia sempre proporcionar esse trabalho com os alunos, é legal."

"Mesmo você não sendo nossa professora percebemos que você tentou nos ajudar. Obrigada! E quero dizer também que gostei muito da sua iniciativa e do projeto."

Entre muitas falas, infelizmente não foi possível entender todas, mas percebi que os alunos gostaram de participar do projeto. Foi muito gratificante perceber que eles sentiram-se motivados a participarem de mais projetos. Isso nos mostra como o professor deve investir na pesquisa, pois é um investimento à sua prática e motivador ao aluno.

Relatórios sobre as aulas do Professor P2

O tempo previsto para o desenvolvimento da THA eram de 14 aulas, mas o professor P2 desenvolveu em 10 aulas. A THA teve início em Novembro porque os alunos ainda não haviam estudado função polinomial do 1º Grau e a Função Quadrática e devido a isso, o professor precisou fazer o estudo dessas funções para, em seguida, iniciar o desenvolvimento da THA com Função Exponencial.

A cada aula observada do professor fizemos um relatório buscando apresentar relatos e/ou estratégias realizadas pelos alunos durante do desenvolvimento da THA. Devido à metodologia adotada pelo professor, pedir aos alunos lerem e fazerem cada lição (na sala ou em casa) para depois proceder às explicações das atividades, foi difícil registrar grande parte das discussões dos alunos ao realizaram as atividades na sala de aula, pois no momento que o professor deixava eles fazerem na sala de aula muitos não faziam e, com isso, nas explicações eles quase não discutiam suas ideias aceitando apenas a explicação do professor.

Devido a isso, no relatório vamos apresentar mais as estratégias de resolução que os alunos fizeram do que relatos de suas ideias. Esses registros foram retirados das atividades dos alunos que a cada execução da tarefa entregavam ao professor.

Os relatos que iremos apresentar foram coletados a partir de uma observação muito cautelosa com aqueles alunos que executavam as tarefas e em, algumas conversas particulares buscamos investigar suas hipóteses, suas estratégias, suas dúvidas e entre outros.

Relatório da Etapa 1 – Linguagem das potências e de suas propriedades

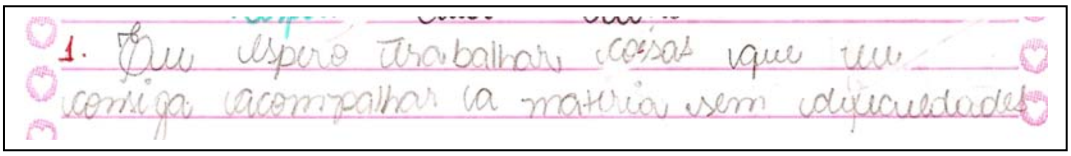
O professor P2 desenvolveu a Etapa 1 da THA no dia 03/11/08 em 1 aulas com duração de 50 minutos.

Uma aula antes de iniciar o desenvolvimento da THA, o professor já havia feito uma revisão do estudo de potências com sua turma por isso, os alunos não precisaram de uma explicação prévia e fizeram a atividade em apenas uma aula. Assim, no final da primeira aula o professor pediu para os alunos devolverem a atividade para iniciarem uma discussão do que eles haviam respondido.

No momento proporcionado pelo professor para a execução das atividades, percebemos que grande parte dos alunos realmente estava fazendo as atividades. Acreditamos que tal fato aconteceu porque os alunos já tinham conhecimento do assunto assim, eles puderam resolver sem maiores dúvidas e com confiança em suas resoluções.

Como sugestão da professora P1, o professor propôs aos seus alunos que respondessem a seguinte pergunta: *“Após a leitura dos textos, o que vocês esperam conhecer nas aulas a partir de hoje?”*

Após a entrega das atividades, os alunos começaram a fazer comentários sobre a Atividade **I** no que diz respeito à expectativa de aprendizagem nas aulas. Observamos que muitos tinham expectativas comuns, aprender matemática. A seguir vamos apresentar relatos dos alunos sobre essa atividade.


1. Eu espero trabalhar coisas que eu consiga acompalhar a matéria sem dificuldades

Atividade I

Eu espero conseguir entender a matemática, pois tenho dificuldades.

---

01) trabalhar com números altos porem com escrita menor.

1.) Eu espero trabalhar a partir de hoje nas aulas de matemática coisas que me ajudem a entender melhor a matéria e que eu me expresse sem ter medo de errar as respostas e poder mostrar o que já sei sobre a matéria.

1= Apesar da matematica para mim ser muito complicada, quero aprender e quero mostrar que sei, e assim participar mais das aulas dadas.

---

a espero a partir de hoje começar a trabalhar com números muitos maiores, e calculos mais rapidos

---

Pelos relatos, podemos perceber que alguns alunos não sentiram vergonha em expor suas dificuldades com a disciplina e, o mais importante, mostraram interesse em aprender. Temos como hipótese, que o aluno disposto em aprender facilita para que ele possa buscar meios que o ajude a compreender os conceitos matemáticos percebendo assim, que ele tem capacidade de solucionar suas dificuldades.

No que se refere ao texto dessa atividade, os alunos mostraram resistência à leitura. Percebemos, em relatos, que os alunos não estavam muito interessados em fazer a atividade porque precisava ler o texto.

"Oh, você precisou ler o texto para fazer as atividades?"

“Professor, porque tem esse texto aqui não estávamos na aula de Português para ler e interpretar.”

“Além de ter que ler professor o texto são muitas questões não vai dar tempo de fazer na sala de aula. Deixa a gente entregar amanhã?”

“Deixa de ser preguiçoso é interessante o assunto do texto.”

Percebendo a atitude dos alunos, o professor deixou que os alunos resolvessem em casa e trouxessem na próxima aula.

No dia 04/11/2008 em 2 aula com duração de 50 minutos o professor retomou a atividade da aula passada e ficou surpreso. Pouquíssimos alunos fizeram a atividade. Com isso, o professor cedeu alguns minutos da aula para que os demais realizassem a tarefa.

Para que o professor pudesse começar a discussão cedeu 20 minutos da aula para eles resolverem e entregarem a atividade. Com isso, os alunos rapidamente começaram a fazer.

Nesse momento os alunos estavam resolvendo a atividade em grupos porque eles se comunicavam a todo instante procurando saber à resposta. Podemos conjecturar, pelos relatos apresentados acima, que a maioria deles não leu o texto por falta de interesse devido o texto ser longo.

Ao esgotar-se o tempo o professor recolheu as atividades e iniciou a discussão. Durante a explicação, percebemos que os alunos que estavam participando e não apresentavam dificuldade eram aqueles que haviam feito a atividade em casa, os demais não participaram muito da aula.

O professor solicitou que alguns alunos resolvessem as questões na lousa e percebemos que os alunos apresentaram dificuldades em escrever na forma de notação exponencial, pois eles não tinham o conhecimento que para se escrever em notação exponencial o número precisaria estar entre 1 e 10. Identificado a dificuldade do aluno, o professor interviu e explicou o uso da notação exponencial.

Vamos apresentar a seguir uma resolução dessa atividade realizada por alguns alunos.

$$350.000.000.000 = 35 \times 10^{10}$$

Nas atividades envolvendo potências percebemos que os alunos sentiram um pouco de dificuldade em operar com expoente negativo, semelhante aos alunos da professora P1. Com isso, o professor explicou o método de resolução na lousa e prosseguiu com alguns exercícios que operassem com potências de expoente negativo.

Percebemos nessas aulas que os alunos inicialmente ficaram interessados em resolver as atividades envolvendo potências e participaram da aula, mas observamos que essa atitude ocorreu porque os alunos já haviam estudado o assunto. Mas, não sentiram motivados na leitura do texto. Percebemos também nesse momento, que eles não tiveram o compromisso de fazer a atividade em casa o que os atrapalhou em sua participação na aula.

Relatório da Etapa 2 - Crescimento exponencial

O professor P2 desenvolveu a Etapa 2 da THA no dia 05/11/2008 em uma aula de 50 minutos.

Para o desenvolvimento dessa atividade sugerimos na THA que o professor organizasse a sala em grupos, mas ele não seguiu a sugestão e propôs a atividade individualmente afirmando que não costuma trabalhar com os alunos em grupo porque a classe fica desorganizada e os alunos acabam não produzindo muito. Essa atitude foi semelhante a da professora P1, mas com uma conversa da importância de se trabalhar em grupo ela decidiu desenvolver a atividade como sugeria. No entanto, com o professor P2, a nossa conversa não teve sucesso e ele permaneceu com a sua proposta de fazer a tarefa individualmente.

Como os alunos estavam trabalhando individualmente o professor pediu a eles que escolhessem apenas um texto para ler e responder as atividades, mas comentou que seria importante ler todos os textos para ter uma ideia melhor do assunto e para isso, cedeu alguns minutos da aula.

Os alunos durante a atividade permaneceram em silêncio para a leitura e começaram a discutir entre eles sobre o assunto do texto que cada um havia lido.

Eles procuravam conversar com o colega que havia lido o texto diferente do seu e tentavam achar algo que tivesse ligação. O professor percebeu que os alunos estavam discutindo e organizou a sala para que todos pudessem compartilhar suas ideias e propôs a eles que fizessem trios, mas a condição era que cada integrante não tivesse lido o mesmo assunto.

Essa proposta durou alguns minutos e o professor abriu a apresentação e discussão das ideias. Vamos apresentar a seguir alguns comentários dos alunos.

"Nós percebemos que todos os textos estão se referindo a coisas que acontecem em números muito grandes e nó conseguimos entender mais com o texto porque, realmente, quando a gente faz uma brincadeira pelo Orkut nem consigo imaginar quantas pessoas irão receber."

"O termo crescimento exponencial quer dizer, pelo menos foi isso que a gente entendeu, que certos acontecimento crescem muito rápido gerando assim um número grande, como no exemplo do vírus. Quanto mais as pessoas acessam mais fácil é dela contaminar seu computador e mais rápido o número de prejudicados aumenta."

"Em todos os textos percebemos que o crescimento exponencial é um aumento muito rápido de certas coisas e que é preciso algo para se controlar esse crescimento."

"Professor, nós achamos que o crescimento exponencial comentado em cada texto quer dizer que um número, ou melhor, que um fato cresce em uma quantidade enorme podendo até não controlar e perder a noção do tamanho."

Após alguns comentários o professor fechou a discussão afirmando que a ideia de crescimento exponencial de cada um estava correta, pois fenômenos que crescem exponencialmente significa que em pouco tempo o número de acontecimentos aumentam muito.

Percebemos nessa aula que os alunos mostraram-se e mantiveram-se interessados em participar da aula e discutir suas ideias. Além disso, eles não manifestaram nenhuma rejeição quanto à leitura dos textos como aconteceu na atividade I. Temos como hipótese, que na atividade anterior os alunos não sentiram-se muito interessados pela leitura por não estarem acostumando a trabalhar dessa maneira nas aulas assim, nesse segundo contado com a leitura, o impacto foi mais aceitável.

O professor mostrou-se satisfeito com o resultado da atividade e com a participação dos alunos relatando que os alunos sentiram-se interessados porque o contexto dos textos não estava fora da sua realidade como na atividade anterior. Assim, ele acredita que o desinteresse pela atividade anterior era pelo contexto estar distante da realidade deles e também, porque o texto era longo.

Para fazer o estudo da atividade **IV** o professor interrompeu a sequência do desenvolvimento da THA para explicar aos alunos sobre crescimento e decrescimento gráfico de uma função. Para iniciar com esse estudo ele utilizou essa atividade. Sendo assim, a realização da tarefa não ocorreu conforme o sugerido, mas julgamos importante que o comportamento gráfico seja explorado para que ao iniciarem o estudo da função exponencial os alunos saibam identificar o comportamento da curva.

Relatório da Etapa 3 – Conceito e aplicação da Função Exponencial

O professor P2 iniciou a Etapa 3 no dia 10/11/2008 e desenvolveu as atividades propostas em 2 aulas com duração de 50 minutos cada aula.

Para a realização da atividade **V** o professor propôs aos alunos que fizessem a atividade na sala para ser entregue ao final da aula. Assim, os alunos rapidamente começaram a se organizar para iniciar a atividade.

Observamos que os alunos tiveram interesse na atividade e a cada momento conversavam sobre o contexto envolvido. Além disso, percebemos que alguns alunos tiveram dúvidas e recorreram ao professor.

Apresentamos a seguir algumas dúvidas e comentários que surgiram na aula.

"Qual seria a 1ª geração, eu ou meus pais?"

"Professor, isso pode acontecer mesmo? Será que aquele que tem o sobrenome igual ao meu pode ser meu parente distante?"

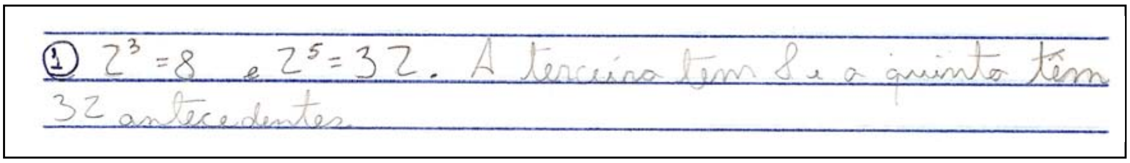
"Para saber a minha geração o correto é começar a contar a partir dos meus pais, não é professor?"

"Mas isso é muito fácil porque para cada geração só pode ter duas pessoas, então temos que multiplicar sempre por 2."

Após alguns minutos de discussão entre o professor e os alunos sobre as dúvidas que surgiram, os alunos, ao desenvolver a atividade, procuravam trocar ideias entre eles buscando uma melhor estratégia de resolução.

Percebemos que eles não apresentaram dificuldades em resolver essa atividade, pois antes mesmo de acabar a aula os alunos entregaram suas atividades e o professor iniciou a correção na lousa. Para a surpresa do professor, os alunos se ofereceram a responder na lousa sem que ele precisasse chamá-los.

Na questão **1** os alunos não apresentaram dúvidas em identificar o número de ascendentes em cada geração, pois tanto na discussão em sala de aula e analisando as respostas que foram entregue ao professor, eles responderam corretamente a atividade como mostra abaixo uma resolução efetuada por um aluno.


1 $2^3 = 8$ e $2^5 = 32$. A terceira tem 8 e a quinta tem 32 antecedentes

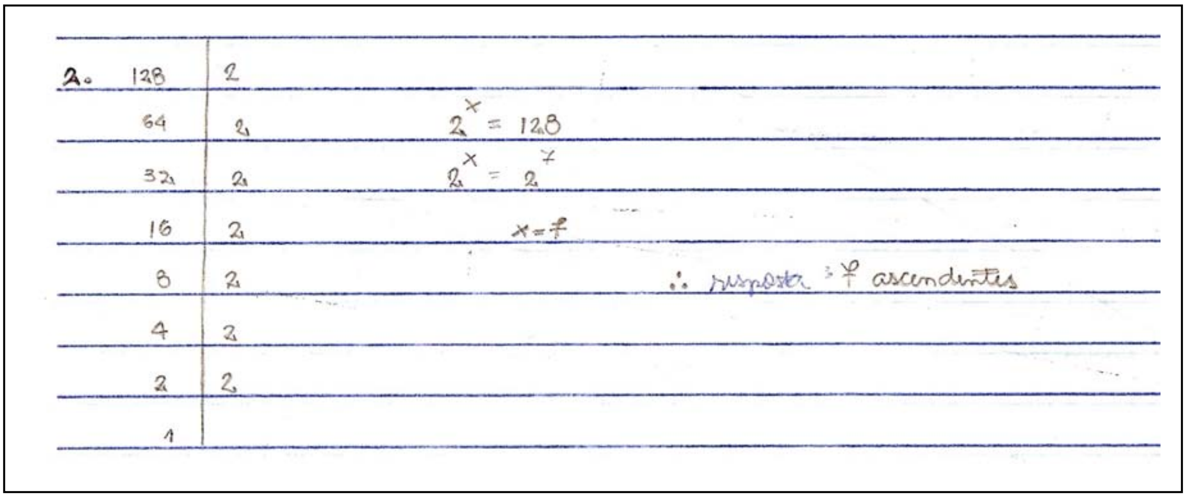
Para responder a questão **2** outro aluno dirigiu-se a lousa e de maneira clara e confiante apresentou sua resolução.

“Como temos para cada geração dois ascendentes é só multiplicar o número de ascendentes de cada geração por 2. Assim, multiplicando 7 vezes o número 2 teremos o número 128. E a questão está resolvida.”

Assim que este aluno terminou a resolução, o professor perguntou aos alunos se alguém havia feito diferente e alguns alunos afirmaram não ter respondido como foi feito e foi até a lousa para mostrar sua resolução.

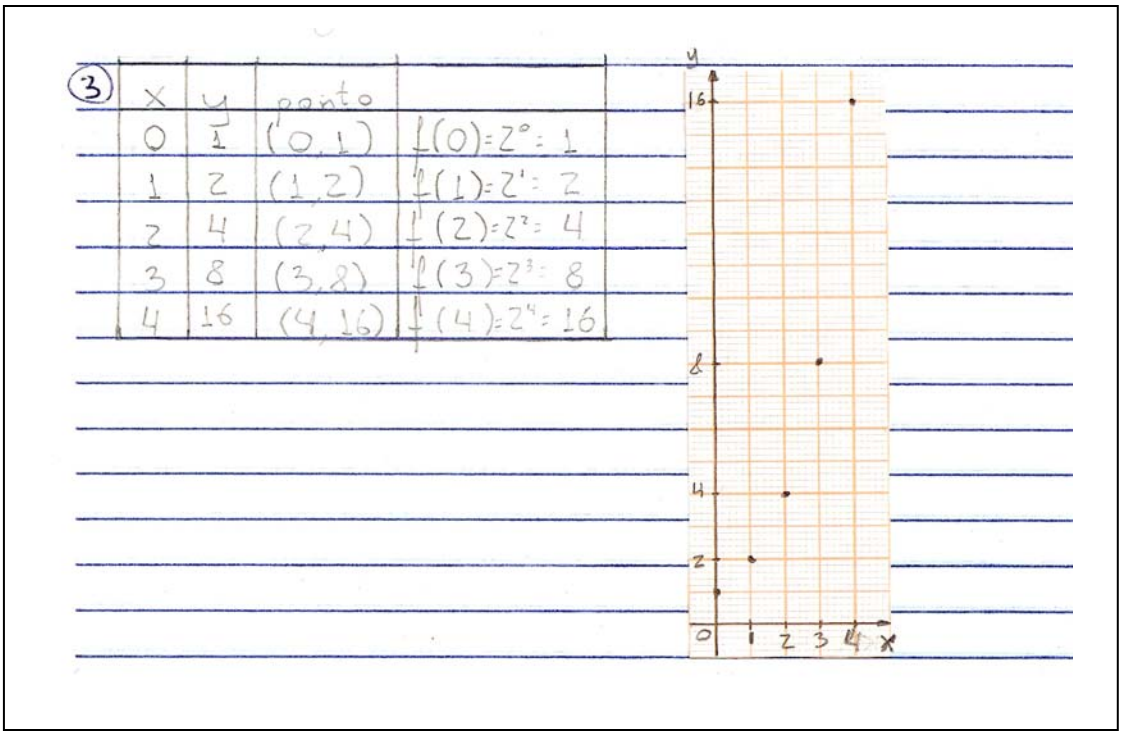
“Eu montei uma equação exponencial para resolver a questão, já que eu sabia que para cada geração temos dois ascendentes a base é 2 e com isso fiz a equação exponencial.”

A seguir vamos apresentar a resolução desse aluno.



Nesse momento o professor finalizou a questão enfatizando que ambos responderam corretamente e parabenizou os alunos pela participação e envolvimento tanto com a atividade quanto com a aula, seguiu para a próxima atividade.

Para resolver a questão **3** o professor construiu uma tabela na lousa com as variáveis envolvidas, geração e o número de ascendentes, e, com a ajuda dos alunos, preenche a tabela e faz a construção gráfica na lousa. No momento que o professor estava resolvendo essa atividade percebemos que os alunos não mostraram muito interesse em ir à lousa para responder essa questão. Acreditamos que tal fato ocorreu porque alguns alunos apresentaram dúvidas ao traçar o gráfico, pois como consta em algumas atividades eles apenas marcaram os pares ordenados e não ligaram os pontos, como podemos ver em uma resolução abaixo.



Após a construção do gráfico os alunos começaram a responder a sobre o comportamento do gráfico.

"Professor, esse gráfico é crescente porque ao analisarmos dois valores de x, sendo um maior que o outro como x = 3 e x = 4, percebemos que seus correspondentes crescem."

"Ele quer dizer professor que se pegarmos qualquer $x_1 > x_2$ iremos ter $y_1 > y_2$. E quando isso acontece a função é crescente."

Percebemos que os alunos haviam compreendido corretamente como identificar se o gráfico de uma função é crescente ou decrescente sem observar a base da função.

Na questão 4 os alunos rapidamente responderam que a função que representa essa situação é $y = 2^x$.

Ao finalizar a atividade o professor explica aos alunos o conceito de função exponencial, sua escrita e da importância da base em identificar se a função é crescente ou decrescente e solicita aos alunos que tragam para a próxima aula a atividade VI resolvida para discutirem sobre as questões.

Percebemos que nessa aula os alunos tiveram muito interesse em participar da aula e executar todas as atividades. Temos como hipótese, que a situação-problema abordada favoreceu para que ocorresse esse clima e, além disso, observamos que os alunos estavam se sentindo mais a vontade com o professor, pois nessa aula não apresentaram receio em perguntar ao professor e manifestarem suas dúvidas.

O professor P2 iniciou a Atividade **VI** no dia 11/11/2008 e desenvolveu as atividades propostas em 1 aula com duração de 50 minutos.

Ao iniciar a aula o professor solicitou aos alunos que entregassem a atividade e grande parte dos alunos não havia feito a tarefa justificando que eram muitos exercícios. Com o objetivo de os alunos responderem e em manter o ritmo de participação dos alunos na aula, o professor deixou que eles fizessem na sala e entregassem ao final da aula. Mas, ao decorrer da aula, percebemos que os alunos não mostraram muito entusiasmo em executar a tarefa proposta, pois nem todos discutiam sobre as atividades e dirigiam-se ao professor para tirar dúvidas. Observamos que apenas os alunos que haviam tentado responder em casa, que foram poucos, perguntavam e tiravam dúvidas com o professor.

Ao final da aula o professor pediu que os alunos entregassem e poucos alunos haviam terminado a atividade. Com isso, o professor deixou que eles levassem para casa, terminassem a atividade e entregassem amanhã.

No dia seguinte, dia 12/11/2008 em 1 aula de 50 minutos , o professor solicitou aos alunos que entregassem a atividade e novamente a maioria dos alunos não havia feito e somente aqueles que estavam esclarecendo dúvidas, na aula anterior, que entregaram a atividade. Com isso, o professor avisou aos alunos que da atividade 2 até a atividade 5 eles iriam a sala de informática utilizar um software matemático para a visualização gráfica de cada função, mas devido a muitos alunos não terem feito a tarefa só realizariam a tarefa com o auxílio do software os alunos que fizeram a atividade.

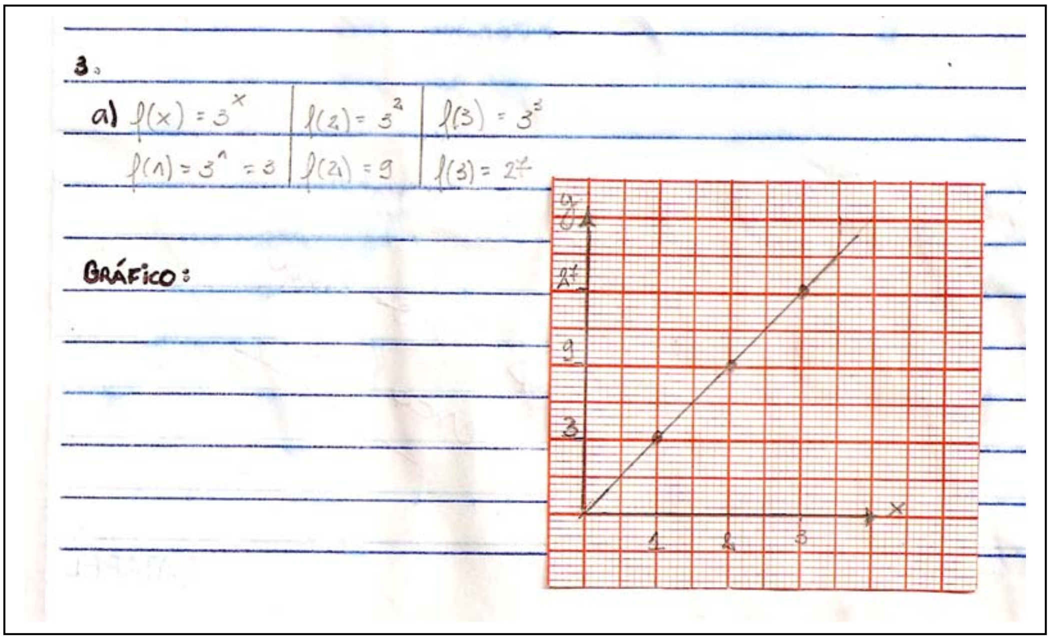
Nesse momento os alunos reclamaram com o professor de sua atitude e alegaram não terem conseguido fazer algumas atividades, mas ele manteve sua atitude e iniciou a explicação das atividades. Devido a essa decisão, o professor P2 solicitou a pesquisadora observadora que acompanhasse os alunos à sala de informática para a realização da tarefa, pois, como a maioria dos alunos não iria ao laboratório, ele precisaria ficar com o resto da turma na sala de aula resolvendo as mesmas atividades.

Com a atitude tomada pelo professor os alunos hesitaram em fazer e participar da aula, mas logo começaram a fazer, sem participar apenas copiando da lousa as respostas.

Ao iniciar a explicação da atividade III o professor solicitou aos alunos que dirigissem a sala de informática para continuarem a atividade. Participaram da atividade 10 alunos formando assim, cinco duplas.

A pesquisadora observadora dirigiu as atividades na sala de informática, mas manteve cautela em suas observações e interações com os alunos, pois procurou não intervir nas resoluções, mas, em alguns momentos, questionou os alunos com o intuito de fazê-los buscarem outra solução. Com isso, a pesquisadora buscou observar as discussões de cada dupla podendo ter mais informações de suas estratégias de resolução. Apenas na explicação do uso do software a pesquisadora observadora conversou abertamente com os alunos.

Iniciamos a atividade 2 na sala de informática e logo alguns alunos manifestaram-se assustados com a representação gráfica que visualizaram na tela do computador, pois eles, em sua resolução individual, haviam traçado retas em algumas de suas construções gráfica como podemos ver abaixo.


3.
a) f(x) = 3^x
f(2) = 3^2
f(3) = 3^3
f(1) = 3^1 = 3
f(2) = 9
f(3) = 27
GRÁFICO:
y
27
9
3
x
1
2
3

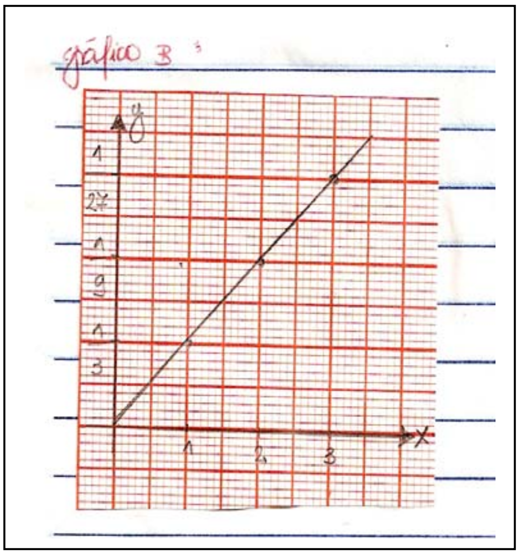


gráfico B:
y
27
9
3
x
1
2
3

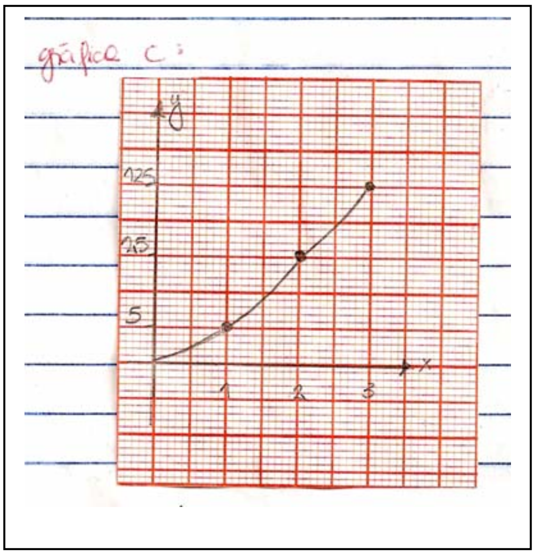


gráfico C:
y
125
25
5
x
1
2
3

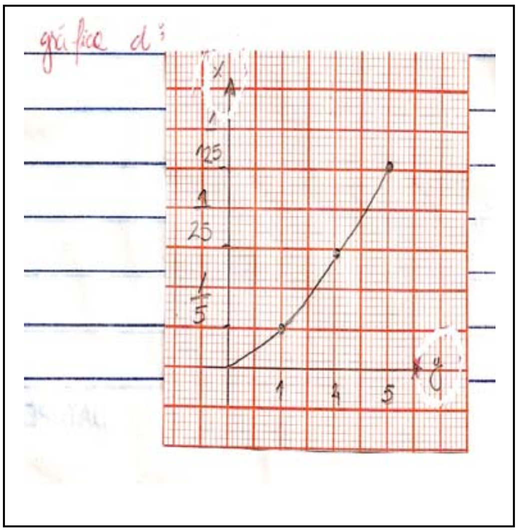


gráfico d:
x
125
25
1/5
y

Os alunos que fizeram dessa maneira alegaram que não sabiam como era a representação gráfica por isso traçaram retas. Mas, temos que lembrar que o gráfico da função exponencial já havia sido estudado e explicado pelo professor em aulas anteriores.

Podemos observar que, em sua resolução, o aluno construiu o gráfico da função $y = 3^x$ e $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ sendo uma reta devido à representação dos pontos do eixo y, pois o aluno não respeitou a escala numérica encontrando pontos alinhados que acarretou em uma representação incorreta do gráfico. Da mesma forma, aconteceu nas funções $y = 5^x$ e $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, pois o aluno não soube fazer a escala corretamente construindo assim, uma representação gráfica errada. Podemos perceber que no gráfico b, que representa a função $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, a aluna coloca $\frac{1}{27}$ sendo maior que $\frac{1}{9}$, por isso que em sua representação gráfica liga os pontos sem o auxílio da régua, pois verifica que os pontos não estão alinhados e não é possível traçar uma reta.

Na questão **3**, os alunos não apresentaram dificuldades em analisar os valores de x e y e concluírem que os valores da função aumenta a medida que o valor de x aumenta e, além disso, nessa atividade já identificaram quais funções eram crescentes e decrescentes. Como mencionamos anteriormente, em relação ao comportamento de uma função eles compreenderam de maneira muito satisfatória como identificar se uma função é crescente ou decrescente analisando os valores correspondentes.

No que diz respeito à atividade 4, observamos que os alunos não compreenderam o papel da base da função exponencial quanto ao comportamento de seu gráfico.

A seguir vamos apresentar alguns relatos realizados pelos alunos na discussão dessa atividade.

"No exercício 3 as funções que são crescentes a base são números naturais e as que são decrescentes são escritas em fração.Então a função é decrescente quando a base for uma fração."

“O que a gente percebeu é que a função é crescente quando o valor da base é um número maior que 1. Agora não estou entendendo qual seria o valor da base para ser decrescente porque tem um exemplo aqui nessa questão que a base é fração e a função é crescente. Então o que estão falando não vale.”

Foram essas duas ideias que os alunos ficaram discutindo e não conseguiram identificar para quais valores da base a função é decrescente. Nesse momento a pesquisadora observadora manteve-se apenas a observar as discussões e investigar as opiniões dos alunos. Lembramos que o professor havia explicado o conceito de função exponencial e da sua representação gráfica na aula do dia 10/11/08. Com isso, observamos que a compreensão do comportamento de uma função exponencial por meio da sua base não foi assimilado pelos alunos.

Na atividade 5, os alunos não apresentaram dificuldades em compreender a translação do gráfico em relação ao eixo y, como podemos observar em alguns comentários dessa atividade realizado pelos alunos.

“A medida que a função é somado com algum valor se ela é crescente continua sendo crescente porém o valor do correspondente ao x aumenta. E o da função decrescente diminui.”

“A função cresce mais rápido e consequentemente o gráfico também.”

“O gráfico da função sobe uma unidade de acordo com a função que estamos comparando. Mas só os valores de y mudam”.

“As funções continuam com o mesmo desenho, crescente ou decrescente, mas com acontecimentos diferentes: a crescente cresce mais rápido e a decrescente diminui mais rápido.”

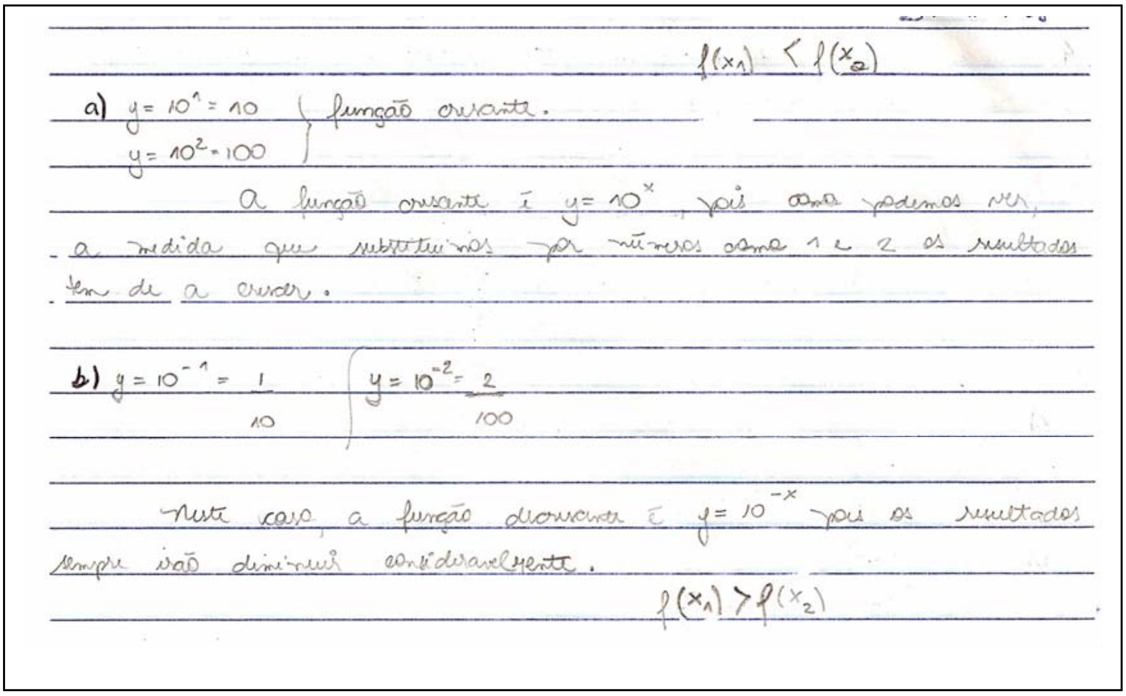
Os alunos, após terem respondido rapidamente a atividade 5, iniciaram uma discussão da atividade 6 e sem analisar muito, alguns afirmavam que a função decrescente era $y = 10^{-x}$ porque o expoente é negativo, mas uma aluna logo interrompeu a discussão e apresentou sua opinião.

“Vocês estão certos, a função decrescente é $y = 10^{-x}$, mas a justificativa está errada porque não analisamos o expoente da função, mas a o valor da base para dizer se é crescente ou decrescente e nesse caso, o expoente negativo temos que inverter

a base e vamos perceber que quanto maior o valor de x menor será seu correspondente o que torna a função ser decrescente."

Nesse momento, os alunos inverteram a base e começaram a analisar os valores da função na tabela apresenta pelo programa e verificaram que os valores de y realmente diminuem à medida que x aumenta.

A seguir vamos apresentar a resolução que essa aluna fez em sua atividade.



$f(x_1) < f(x_2)$

a) $y = 10^1 = 10$ função crescente.
$y = 10^2 = 100$

A função crescente é $y = 10^x$, pois como podemos ver, a medida que substituímos por números como 1 e 2 os resultados tem de a crescer.

b) $y = 10^{-1} = \frac{1}{10}$ | $y = 10^{-2} = \frac{2}{100}$

Neste caso, a função decrescente é $y = 10^{-x}$ pois os resultados sempre vão diminuir consideravelmente.

$f(x_1) > f(x_2)$

Podemos perceber que a aluna efetuou o exercício de maneira adequada porque ela tem compreensão de potências e principalmente, em operar com potências.

Após essa atividade a aula terminou e os alunos não queriam sair da sala de informática.

"Professora deixa a gente acabar as outras questões. A gente conversa com o professor e explica que estávamos fazendo um trabalho."

"Amanhã a gente pode vir de novo?"

"poxa, gostei muito de ter vindo aqui, conhecido a sala de informática e o software."

"Eu acho que poderíamos falar com o professor para nos trazer mais vezes aqui. È muito melhor estudar gráfico assim."

“Ah eu também acho, é a primeira vez que entendo alguma coisa sobre gráficos. Eu nunca gostei muito de estudar isso.”

Podemos conjecturar, que o software favoreceu para o envolvimento dos alunos nas tarefas porque eles mostraram muito entusiasmo durante as atividades e, em todo minuto na sala de informática, os alunos não se distraíram com outras coisas procurando sempre responder as questões utilizando o software. Até outras funções, como a função quadrática, os alunos fizeram sua representação gráfica para compreender e visualizar melhor a parábola. Além disso, percebemos que os alunos sentem falta de uma aula mais dinâmica e interativa, pois pediram muito para que pudessem vir outras vezes na sala de informática.

No dia seguinte, 13/11/2008 em 1 aula de 50 minutos, voltamos à observação dos alunos na sala de aula. O professor P2 relatou que durante a ausência dos alunos que estavam na sala de informática, os demais alunos preocuparam-se apenas em copiar as resoluções da lousa e não participaram da aula. Com isso, ele solicitou aos alunos que para a próxima aula trouxessem alguns exercícios do livro referente à construção gráfica da função exponencial e dependendo do retorno dos alunos levaríamos o restante à sala de informática.

Ao iniciar a aula o professor solicitou aos alunos que entregassem as atividades da aula passada e os alunos não entregaram. Assim, o professor informou que para ter uma melhor compreensão do gráfico exponencial eles teriam que ter uma ideia, ou pelo menos, ter um conhecimento sobre esse gráfico, pois assim, o trabalho com o software seria mais fácil, mas como eles não fizeram a atividade seria melhor fazer sem o auxílio do software. Os alunos não reclamaram da postura do professor.

Percebemos que os alunos estavam um pouco desmotivados, acreditamos que o motivo disso tenha sido a atitude do professor na aula passada quanto aos alunos que foram a sala de informática, mas pudemos perceber também que eles não estavam muito interessados em fazer as atividades contidas nessa parte da THA.

O professor P2 retomou a correção das atividades que na aula passada acabou na atividade 6, mas o professor retomou a correção da mesma devido aos alunos que haviam discutido até essa atividade na sala de informática.

Na atividade 7, percebemos que os alunos identificaram rapidamente a função representada no gráfico. O professor aproveitou a representação gráfica para discutir mais um pouco sobre o comportamento da função através de sua base e esclareceu aos alunos que quando $a>1$ a função é crescente e quando tivermos um valor na base que se enquadre nessa situação, $0< a < 1$, a função é decrescente. Nesse momento alguns alunos compreenderam que a base ser uma fração, independentemente do valor, não diz respeito ao comportamento do gráfico, mas sim, o valor que essa fração representa.

Com relação as equações exponenciais que seguem na THA os alunos resolveram com facilidade sem o professor precisar explicar porque eles estudaram equação exponencial antes de iniciar o desenvolvimento da THA. Assim, o professor não precisou intervir em suas resoluções fazendo apenas a correção oralmente.

O desenvolvimento da THA com o professor P2 finalizou nessa atividade, pois, como já expomos a situação anteriormente, no mês de Novembro ocorreram atividades extras na unidade escolar, como: Semana Cultural e aplicação do SARESP. Com isso, não houve mais tempo para o professor prosseguir com o desenvolvimento da THA e trabalhar com a situação-problema relacionada à outra área de conhecimento, sendo a Matemática Financeira.

Contudo, percebemos que os alunos em alguns momentos mostraram-se participativos e interessados nas aulas, mas, em outros momentos, constatamos muita falta de interesse. Acreditamos que isso tenha acontecido pela maneira de como o professor propôs aos alunos o desenvolvimento de algumas atividades no início do desenvolvimento da THA, pois percebemos que os alunos sentiam-se um pouco inseguros em fazer as atividades e entregar (valendo nota), para depois procederem com a correção. Temos como hipótese que, essa metodologia utilizada dificultou a interação entre os alunos e o professor acarretando em desmotivação. Mas, ao longo da THA, observamos que essa interação foi melhorando favorecendo a mais participação dos alunos na aula e interação com o professor.

Anexo E – Avaliação aplicada após o desenvolvimento da THA

1) Constatou-se que uma doença epidêmica triplica o número de vítimas a cada ano. Em determinada região existe hoje 1 infectado. Supondo que a doença não foi contida, determine:

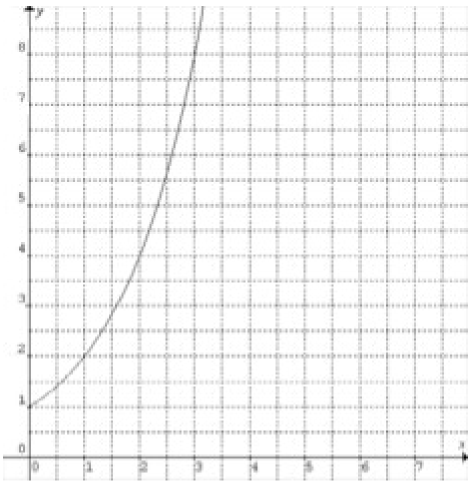
a) O número de infectados nos 6 anos seguintes (ano a ano).
b) Construa uma tabela relacionando o número de infectados em relação ao ano.
c) Sendo “i” o número de infectados e “n”o ano. Escreva uma relação matemática que nos permita calcular o número de infectados em função do ano.

d) Faça uma representação gráfica dessa situação.

e) Essa função é crescente ou decrescente? Justifique sua resposta.

f) Em que ano teremos 19683 infectados?

2) A representação gráfica abaixo representa o crescimento, em centímetros, de uma planta a cada mês. No início da observação, percebeu-se que a planta estava com uma altura de 1 cm. Analise o gráfico e responda:



a) Qual a função que representa essa situação sabendo que “x” representa o mês e “y” o crescimento da planta em cm?

b) Qual a altura da planta em 3 meses?

c) Qual a altura da planta em 7 meses?

d) Em quanto tempo a planta alcançará 1024 cm?

3) Faça a representação gráfica de duas funções, sendo uma crescente e uma decrescente. Justifique o crescimento e decrescimento de cada função.

4) Uma aplicação financeira fornece 5% de juros compostos mensalmente. Supondo que hoje você deposite 100 reais e que não faça mais nenhum depósito ou retirada, determine:

a) A quantia acumulada em 3 meses.

b) Expresse a lei que permite calcular o montante dessa aplicação financeira em “n” meses.

c) Faça a representação gráfica dessa aplicação.