PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

Ana Maria Paias

Diagnóstico dos erros sobre a Operação Potenciação aplicado a alunos dos Ensinos Fundamental e Médio

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo
2009

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

Ana Maria Paias

Diagnóstico dos erros sobre a Operação Potenciação aplicado a alunos dos Ensinos Fundamental E Médio

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação do **Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud.***

São Paulo

2009

Banca Examinadora

Dedico este trabalho...

...a meu pai Francisco, que me ensinou o amor aos estudos....

a minha mãe, Maria, meu esteio sempre...

...a meu filho, Marcelo que me proporciona sempre momentos de emoção e alegria...

... até aqui nos ajudou o Senhor...

(I Samuel 7:12)

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me guiado em Seu caminho, pelas bênçãos derramadas em minha vida e por seu constante conforto e auxilio em todos os momentos.

A minha família pela compreensão de minha ausência em ocasiões alegres de confraternização.

Em especial, a meus irmãos Francimar e José Márcio, que em momentos difíceis estiveram a meu lado.

Ao Professor Doutor Saddo Ag. Almouloud pela atenção, paciência e dedicação demonstradas na orientação deste trabalho.

Às Professoras Doutoras Bárbara Lutaif Bianchini e Elizabeth Adorno de Araujo, que, gentilmente, aceitaram participar da banca examinadora e pelas valiosas contribuições.

A todos os mestres que passaram em minha vida, em especial, aos professores do Programa de Mestrado em Educação Matemática da PUC-SP.

A todos os colegas do curso de mestrado, em especial, minha amizade e meu carinho ao Gil e ao Mil, pessoas especiais que moram em meu coração.

A direção da E. E. Dr. Alberto Cardoso de Mello Neto, na pessoa da Diretora Cecília Regina Bigattão e aos alunos que participaram da pesquisa de uma maneira correta e ética.

Finalmente, à Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, pela bolsa que propiciou esta pesquisa.

Meu carinho a todos!

RESUMO

A matemática ensinada na escola implica sobretudo desenvolver o pensamento matemático e as habilidades do aluno. Estes dois itens são necessários para a compreensão de diferentes situações, inclusive, aquelas do cotidiano e também, para suporte como ferramenta a outros campos do conhecimento. Observa-se que desde o ensino básico, a Matemática mostra-se como uma área em que os alunos demonstram dificuldades de aprendizagem. Assim, esta pesquisa teve como objetivo realizar um estudo e um diagnóstico a respeito da operação potenciação com alunos da 8ª. Série do Ensino Fundamental e 1ª. Série do Ensino Médio de uma escola pública da rede estadual de ensino do Estado de São Paulo. Para tanto, realizamos um estudo sobre o erro e sua importância no processo de ensino e aprendizagem. Trata-se de uma pesquisa descritiva, quanti-qualitativa com a realização de um diagnóstico sobre os erros dos alunos referentes à operação potenciação, classificar e interpretá-los. A fundamentação teórica foi apoiada na Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1999); nos Registros de Representação Semiótica de Duval (2003) e nos estudos sobre o erro de Cury (2007). O resultado das análises das respostas dos alunos indicou que, grande parte dos alunos, não domina a concepção de potenciação, decorrendo disso muitos entendem a operação potenciação como multiplicação. Assim, vários fatos agravam o erro em relação a esse tópico. Os fatores mais relevantes foram os casos de potência que envolvem números inteiros negativos e expoentes fracionários. O *zero* e o *um* também se constituem em grande causa de erros, sobretudo quando eles são expoentes, pois o aluno não observa a convenção de modo correto.

Palavras-Chave: potenciação, erro, Teoria Antropológica do Didático e Teoria de Registros de Representação Semiótica.

ABSTRACT

Mathematics taught at school implies mainly in developing the mathematical thinking and the student's skills. These two items are necessary for the comprehension of different situations, including, those from the daily life and also, for support as a tool to other fields of knowledge. It is observed that since Elementary School, Mathematics is shown as an area where students have learning difficulties. Thus, the purpose of this research was to do a study and a diagnosis in respect to the power operation with 9^{th} and 10^{th} graders from a state school in São Paulo. For such, a study was done about the mistake and its importance in the teaching-learning process. It is a descriptive research, quanti-qualitative with the construction of a diagnosis about the students' mistakes referring to the power operation, classifying and interpreting them. The theoretical foundation was based on the Anthropological Theory of the Didactic (1999) in the Register of Semiotic Representation from Duval (2003) and in the mistake studies from Cury (2007) The result of the analysis from the students' answers indicated that, a great amount of the students does not know the power concept and as a result many understand the power operation as multiplication. Therefore, many facts aggravate the mistake in relation to this topic. The most important factors were the power cases that involved whole negative numbers and fractionary exponents. Categories were created for the analyzed mistakes. Zero also constitutes in a great mistake cause, manly, when it is an exponent because the student does not realize the convention in the right way. As for the exponent 1, it is perceived that the same problem appears in relation to the Mathematical convention, it is also observed that the student does not know how to justify it correctly.

Keywords: power, mistake, Anthropological Theory of the Didactic, Theory of Registers of Semiotic Representation.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO[1]

O objetivo deste trabalho é realizar um estudo e diagnóstico a respeito da operação potenciação com alunos da 8ª série do Ensino Fundamental e 1ª série do Ensino Médio de uma escola pública da rede estadual do Estado de São Paulo, observando e analisando as concepções e os erros dos alunos referentes a este tópico, além de apontar possíveis obstáculos que fazem parte da aprendizagem do tema.

Na literatura, encontramos importantes contribuições sobre os conceitos de representações semióticas, organização de técnicas e tarefas e erros apoiados nas ideias de Chevallard (1999): Duval (2003), e Cury (2007).

No decorrer de alguns anos de magistério, como professora de Ensino Médio, observo que o aluno ao fazer a operação potenciação, muitas vezes, erra e isto nos traz inquietações. Desse modo, resolvi realizar esta pesquisa para melhor conhecer essa problemática.

Durante muitos anos, trabalhei como professora autônoma, em casa, ministrando aulas particulares a alunos do Ensino Fundamental e Médio, período no qual adquiri uma experiência considerável em conteúdos matemáticos. Já nessa fase, percebia as dificuldades que alunos tinham nos conteúdos de Matemática.

Em 2004, ingressei como professora efetiva no quadro de docentes do Governo do Estado de São Paulo no cargo de Professor de Ensino Básico II. Fiz escolha pela Escola Estadual Dr. Alberto Cardoso de Mello Neto, Diretoria Norte

[1] A revisão da Língua Portuguesa desta dissertação foi realizada de acordo com a nova ortografia vigente no País.

2, onde realizo meu trabalho até hoje. Nosso teste com alunos foi aplicado nesta escola que funciona com 19 salas de aulas em cada um dos três períodos: manhã, tarde e noite. O ingresso como docente titular de cargo de Professor de Ensino Fundamental II na Prefeitura da cidade de São Paulo foi, em 2008. Na Prefeitura de São Paulo, estou lotada na Escola Municipal de Ensino Fundamental Martin Francisco Ribeiro de Andrada, Diretoria Regional de Educação – Jaçanã /Tremembé, ambos os cargos foram atribuídos por meio de concurso público.

Hoje, trabalhando com alunos do Ensino Fundamental e Médio em escolas da Rede Estadual e Municipal de ensino, percebo que os erros cometidos pelos alunos não são apenas dos conteúdos específicos de seu atual nível de ensino, mas também são ligados a conteúdos de séries anteriores.

Em 2006, ingressei no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica e integrei-me no grupo de pesquisa PEA-MAT[2].

Já no primeiro trabalho da disciplina Metodologia da Pesquisa Científica definiu-se o desejo de pesquisar sobre o tema *Operação Potenciação*. Assim, projetei e comecei a delinear o que seria esta pesquisa.

Como pesquisadora na área de Educação Matemática, prossegui interessada em pesquisar as possíveis dificuldades em relação à aprendizagem no tópico da operação potenciação que ainda persistem nos alunos de 8ª série do Ensino Fundamental e 1ª série do Ensino Médio, período em que, segundo os PCN (Brasil, 1998), o aluno já deveria ter domínio desse conteúdo e ser capaz de mobilizá-lo para compreender o significado e as propriedades dessa operação.

A pesquisa iniciou-se com um piloto realizado no início do curso de Mestrado Acadêmico do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP e evoluiu aos estudos como os de Sierra (2000) e o de Feltes (2007) sobre o mesmo tema.

[2] PEAMAT – Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática. PUCSP

A metodologia é de cunho descritiva e quanti-qualitativa, com a análise dos erros dos alunos. Inicialmente, compreendeu o estudo sobre o objeto matemático com visão histórica, análise epistemológica, análise dos guias curriculares: Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) , Proposta Curricular do Estado de São Paulo (PCESP) e livros didáticos; fundamentação teórica, aplicação de um instrumento diagnóstico[3]; análise e discussão dos resultados e conclusões do estudo.

O estudo está dividido em quatro capítulos, organizados da seguinte maneira:

Capitulo 1: Neste capítulo, apresentamos a problemática e a justificativa, da pesquisa e os procedimentos metodológicos adotados no trabalho.

Capítulo 2: Fundamentação Teórica – Neste capítulo, apresentamos um estudo sobre a importância do erro na produção do aluno com leitura dos trabalhos de Cury (2005).

Capítulo 3: Neste capítulo, o objeto matemático é descrito e é apresentada a operação potenciação no ensino por meio de sua definição, de suas propriedades, as convenções adotadas em relação a este tópico e sua representação. Para o estudo da representação da operação potenciação apresentamos a Teoria dos Registros de representação Semiótica de Duval (2003). Mostramos, também, uma visão histórica sobre a operação potenciação e uma análise epistemológica do tema. Realizamos a análise de documentos oficiais da educação brasileira: PCN (1998), PCESP (2008) e livros didáticos selecionados. Os livros são analisados com fundamentação teórica na Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1999).

Capítulo 4: Neste capítulo, descrevemos o instrumento diagnóstico realizado com alunos da 8ª. série do Ensino Fundamental e alunos da 1ª. série do Ensino Médio, bem como suas análises prévias e posteriores e a classificação dos erros relacionados à operação potenciação.

---

[3] Série de questões aplicadas a alunos de 8ª. Série do Ensino Fundamental e 1ª. Série do Ensino Médio com o objetivo de verificar quais as técnicas e justificativas os alunos utilizam para resolver problemas com potenciação.

Finalizando, apresentamos as considerações finais, nas quais tecemos comentários sobre os resultados das análises feitas sobre o diagnóstico.

Com o diagnóstico realizado por meio desta pesquisa, escolhemos responder à questão: **Quais erros os alunos cometem em relação à operação potenciação e que possíveis fatores conduzem a esses erros?**

CAPÍTULO 1

PROBLEMÁTICA E JUSTIFICATIVA

1.1 Considerações Iniciais

A matemática ensinada na escola implica sobretudo desenvolver o pensamento matemático e habilidades do aluno. Estes dois itens são necessários para a compreensão de diferentes situações, inclusive, aquelas do cotidiano e, também, para suporte como ferramenta a outros campos do conhecimento.

Desde o ensino básico, a Matemática mostra-se como uma área em que os alunos demonstram dificuldades de aprendizagem. Muitas vezes, o professor na tentativa de solucionar esse problema recorre a propostas diferentes em sala de aula. No entanto, no transcorrer da disciplina, observamos o uso e o reforço de regras prontas cuja memorização, repetição e utilização de algoritmos são o máximo que se exige dos alunos.

Em geral, o aluno tem o primeiro contato com a operação potenciação na 5ª série do Ensino Fundamental, quando se ensina a definição da operação. Nas séries seguintes, a operação aparece com expoente de número racional e na 1ª série do Ensino Médio é usada como ferramenta para trabalhar a Função Exponencial e Logarítmica. Na disciplina Física, a operação potenciação aparece na Notação Científica.

Durante observações que fizemos como docentes, a respeito das questões de ensino e aprendizagem de Matemática, constatamos que, até para um aluno do Ensino Médio, existe certa dificuldade na operação potenciação. Na ânsia de procurar respostas, ficamos frente a nosso problema de pesquisa.

Desde o início, poucas foram as referências encontradas em relação a esse tópico e dentro de nossas leituras destacamos a pesquisa realizada no México por Gustavo Martinez Sierra (2000), com tema semelhante. O autor analisa as respostas dos alunos de vários níveis escolares, inclusive, de Ensino Superior, sobre expoentes não naturais, visando a elaborar explicações a respeito das influências do sistema didático sobre as respostas dos estudantes. A pesquisa leva em consideração as "convenções matemáticas", como um fator de construção do conhecimento e, portanto, o consequente erro do aluno ao efetuar a operação. Sierra (2000) considera em seu trabalho a Teoria das Situações Didáticas[4] e a Teoria da Transposição Didática[5].

No início de 2008, tivemos contato com uma pesquisa realizada na Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, de autoria de Rejane Zeferino Feltes sob orientação da Profª Dra. Helena Noronha Cury com o título: *"Análise de erros em potenciação e radiciação: Um estudo com alunos do ensino Fundamental e Médio".* Este trabalho foi realizado com alunos de 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e com alunos do Ensino Médio. Questionários foram aplicados também a professores sobre as razões que fazem o aluno errar quando se trata das operações potenciação, radiciação e equações exponenciais. A autora classificou os erros em 17 categorias, que, ao longo do trabalho iremos destacar e concluiu que as maiores dificuldades estão relacionadas às operações numéricas e às propriedades da potenciação.

1.2 Antecedentes da Investigação

No intuito de delimitarmos nosso problema e questão de pesquisa, elaboramos e aplicamos um "Piloto", que nos fez levantar hipóteses e possíveis relações com a Fundamentação Teórica. Este procedimento foi feito para apontar as possíveis respostas dos alunos e quantificar informalmente os erros que

[4] Teoria desenvolvida por Guy Brousseau com o intuito de modelar o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos, considerando o triângulo didático fundamental formado por: professor, aluno e saber. (Almouloud, 2007, p. 31).

[5] O conceito de Transposição Didática, segundo Yves Chevallard, nasce da relatividade do saber no interior do qual se apresenta. Mais especificamente, Chevallard refere-se à adaptação do conhecimento matemático pra transformá-lo em "conhecimento para ser ensinado". (D'Amore, 2007, p. 225).

pudessem aparecer no momento do diagnóstico que será feito neste trabalho. O procedimento foi realizado no início de nosso curso de mestrado, com a intenção de nortear a pesquisa.

O piloto constou de duas questões: a primeira continha cálculos de potências. Nesta questão, foram colocados 11 itens com o objetivo de levantar quantitativamente as dificuldades e erros dos alunos. Na segunda questão, foi proposto o uso da linguagem natural com a finalidade de verificar se o aluno reconhecia a nomenclatura da operação potenciação.

Este piloto foi aplicado a nossos alunos, de uma mesma classe, do 2º. ano do Ensino Médio, da Rede Pública Estadual, Dr. Alberto Cardoso de Mello Neto, para observar quais os tipos de respostas que aparecem nas atividades. No momento da aplicação do teste, não havia ainda escolha para a pesquisa como metodologia ou fundamentação teórica.

A aplicação do teste individual foi feita com 36 alunos, com duração de 45 minutos, tempo de uma aula. Os alunos foram esclarecidos que a atividade consistiria de um teste para levantar possíveis respostas sobre o tema potenciação. O aluno, também, não precisou identificar-se. Todos aceitaram participar, logo os 36 documentos foram analisados, uma vez que todos realizaram a atividade. Aqui faremos apenas uma análise quantitativa das respostas dos alunos. Os resultados desse piloto foram utilizados na elaboração do diagnóstico que serviu de base para nossa pesquisa.

Em sua íntegra, a atividade foi a seguinte:

1) Calcular o valor das potências:

a) $2^3 =$

b) $5^1 =$

c) $4^0 =$

d) $3^3 =$

e) $(-5)^2 =$

f) $(-2)^3 =$

g) $\left(\frac{-1}{5}\right)^2 =$

h) $\left(\frac{+2}{3}\right)^2 =$

i) $-2^2 =$

j) $(-2)^2 =$

l) $5^{-2} =$

2) Representar na forma de potência e calcular o valor:

a) O quadrado de 3

b) O cubo de 2

c) 1 elevado ao quadrado

d) 2 elevado ao cubo

Objetivos das Questões

Questão 1:

- A questão teve como objetivo levantar a concepção[6] dos alunos sobre a operação potenciação. Por meio dela, observamos se os alunos entendem essa operação, se conseguem efetuá-la e se utilizam as regras de sinais e convenções quando a resolvem.

Questão 2:

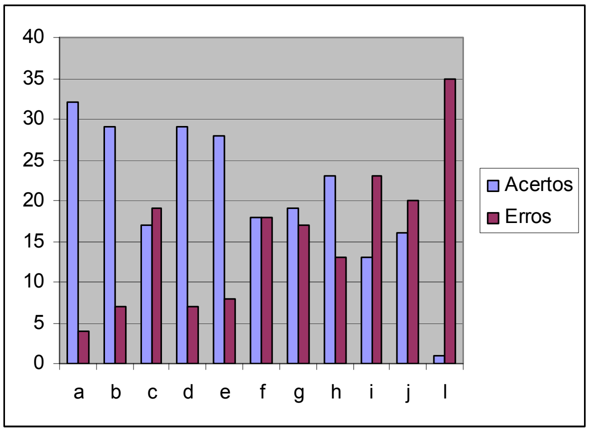
- O objetivo desta questão foi perceber se o aluno tem conhecimento da linguagem natural e da notação em relação à operação potenciação Verificamos também se reconhece a nomenclatura e a representação da operação potenciação.

[6] Artigue define concepção sob um ponto de vista local e relacionada a um dado objeto, caracterizado por: situações que lhe servem de ponto de partida; situações ligadas à aparição da concepção, ou para as quais ela constitui um ponto de vista particularmente bem adequado; – sistemas de representações mentais, icônicas, simbólicas, propriedades, invariantes, técnicas de tratamento, métodos específicos (implícitos ou explícitos). (Almouloud, 2007, p. 131)

Quantificando as respostas dos alunos no Piloto

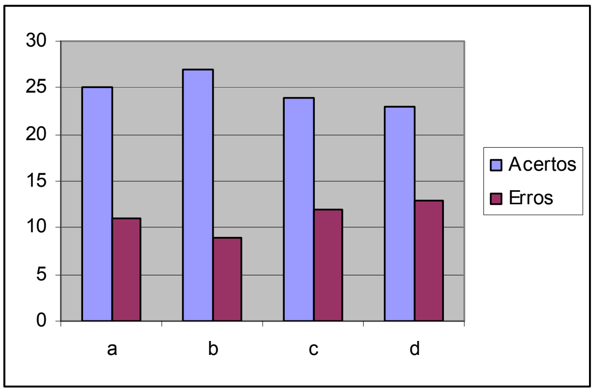
Questão 1:

Item	Acertos	Erros
a	32	4
b	29	7
c	17	19
d	29	7
e	28	8
f	18	18
g	19	17
h	23	13
i	13	23
j	16	20
l	1	35



Questão 2:

Item	Acertos	Erros
a	25	11
b	27	9
c	24	12
d	23	13



Análise do Piloto

Ao ler os protocolos desses alunos, pudemos conjecturar que parte deles comete erros e não domina a noção da potenciação.

Dentre as respostas da questão 1, citaremos exemplos daquelas que alunos cometeram erros mais frequentes:

Questão 1, item b

$5^1 = 0$ (7 respostas)

Questão 1, item c

$4^0 = 0$ (10 respostas) $4^0 = 4$ (9 respostas)

Questão 1, item f e item i

$(-2)^3 = -6$ (18 respostas) $-2^2 = 4$ (23 respostas)

Questão 1, item g e item h

$\left(\frac{-1}{5}\right)^2 = \left(\frac{-2}{10}\right)$ (16 respostas) $\left(\frac{+2}{3}\right)^2 = \left(\frac{4}{6}\right)$ (13 respostas)

$\left(\frac{-1}{5}\right)^2 = \frac{25}{2}$ (1 resposta)

Questão 1, item l

$5^{-2} = -25$ (18 respostas) $5^{-2} = \frac{1}{10}$ (13 respostas) $5^{-2} = 10$ (4 respostas)

Na questão 2, os erros assemelham-se aos da 1. O aluno não representa a potência e acaba efetuando simplesmente a multiplicação da base pelo expoente. Apareceram também respostas com relação à linguagem natural do tipo:

1 ao quadrado = 1^4 (2 respostas)

1.3 O Problema de Investigação e sua Justificativa

Durante o tempo que pensamos e concebemos a pesquisa, levantamos questões que nos fizeram refletir em torno do trabalho e como elaborar uma análise que possibilitasse entender o porquê do erro do aluno quando realiza a operação potenciação.

Embora soubéssemos que teríamos de delinear a questão de pesquisa, fizemos muitas perguntas, como:

- Quais os tipos de erros cometidos pelos alunos?
- Qual a frequência desses erros?
- Por que o aluno efetua a operação de multiplicação entre a base e o expoente?
- O erro seria apenas uma falta de atenção do aluno?
- Se o aluno conhecesse as propriedades da operação potenciação, resolveria corretamente à questão?
- Se o exercício fosse apresentado em linguagens diferentes, ele teria sucesso na resposta?
- O aluno relaciona as propriedades quando efetua a operação?
- As “regras matemáticas” ou convenções, como por exemplo, *todo número real e diferente de zero elevado a zero é 1*, ou *o zero elevado a qualquer número diferente de zero é igual a zero,* interferem quando o aluno resolve uma questão?
- O aluno entende as regras de sinal para a operação potenciação?
- O livro didático e/ou a maneira que o professor expõe o objeto potenciação influencia na compreensão da operação pelo aluno?
- O aluno observa a presença de regularidades na operação potenciação?
- Qual é a concepção do aluno em relação à operação potenciação?

Com bases nesses questionamentos, responderemos à seguinte questão de pesquisa: **quais erros os alunos cometem em relação à operação potenciação e que possíveis fatores conduzem a esses erros?**

Para tanto, buscamos uma metodologia de pesquisa que pudesse esclarecer a questão.

1.4 Metodologia

O caráter da pesquisa, as escolhas para o instrumento diagnóstico, o nível escolar e as reflexões teóricas indicaram as opções metodológicas escolhidas.

Optamos por uma pesquisa descritiva e quanti-qualitativa com a realização de um diagnóstico, porque entendemos ser relevante, além de quantificar os erros dos alunos referentes à operação potenciação, classificá-los e interpretá-los.

Garnica e Pereira descrevem o que é uma pesquisa quanti-qualitativa:

> O lado quantitativo refere-se aos dados numéricos dos quais lançamos mão para direcionar nossas conclusões – ainda que estas não sejam e nem mesmo a pretendemos definitivas. A quantidade, nesse caso, manteve-se como guia, nunca como determinante e em nenhum momento lançamos mão do rigor como classicamente conhecido pelas abordagens positivistas. [...] O pesquisador coloca-se, pergunta, faz variações imaginativas, ordena e reordena seus dados com a intenção de compreendê-los, comprometendo-se com e por eles: é essa a face qualitativa da metodologia usada. (GARNICA e PEREIRA, 1997, p. 61).

Além disso, encontramos nos PCN um relato sobre a importância de se fazer um diagnóstico:

> [...] ocorre muitas vezes que esses alunos não conseguem exprimir suas idéias usando a linguagem matemática; isto não significa que não tenham construído nenhum tipo de conceito ou desenvolvido procedimentos. Por isso é fundamental diagnosticar o domínio que cada aluno tem sobre os diferentes conteúdos que serão explorados e identificar quais são as suas possibilidades e dificuldades diante da aprendizagem desses conteúdos. (BRASIL, 1998, p. 62)

Rudio (1992) cita que o diagnóstico faz parte de uma pesquisa descritiva, na qual o pesquisador procura conhecer e interpretar a realidade sem interferir ou modificá-la e aponta que os dados obtidos, além de serem representados de maneira quantitativa por meio de gráficos ou tabelas serão analisados qualitativamente.

Conforme Lüdke e André (2006), a pesquisa qualitativa difere da quantitativa, pois nesta o questionário não precisa ser aplicado a uma grande amostra que é característica de análises experimentais.

Bogdan e Biklen (*apud* Ludke e André, 2006) apresentam cinco particularidades de uma pesquisa qualitativa:

- O instrumento mais importante do pesquisador é a fonte de dados;
- A preocupação deve ser com o processo e não com o produto;
- O foco do pesquisador deve dar importância ao que tem significado para o sujeito;
- Os dados colhidos têm caráter descritivo; e
- O estudo a princípio tem questões amplas, tornando-se específicas ao final.

Nossa metodologia está de acordo com as características de uma pesquisa qualitativa na qual utilizaremos o recurso de protocolo para aprofundar as informações. Para as autoras citadas, o uso de protocolos tem inúmeras vantagens:

- Podem ser consultados várias vezes;
- Servem de bases a diferentes estudos;
- Não sofrem influências do pesquisador;
- Tem um baixo custo e a demanda é somente o tempo para interpretação das informações;
- Acesso às informações quando há dificuldade de interação com o sujeito; e

- Exploração e também complementação dos dados por meio de outros métodos.

Holsti (*apud* Lüdke e André 2006) afirma que o emprego de protocolos é conveniente quando o pesquisador tem como objetivo estudar a questão a partir da expressão do sujeito, ou seja, quando a linguagem ou produção do sujeito é importante para a análise dos dados.

Partindo da hipótese que os erros dos alunos são inerentes a algum tipo de obstáculo, analisaremos os protocolos obtidos por meio do instrumento diagnóstico aplicado a um grupo de alunos da 8ª série do Ensino Fundamental e alunos do 1º Ano do Ensino Médio. Esta análise será feita apoiada na Teoria Antropológica do Didático (Chevallard, 1999), entendendo a maneira como são resolvidas as tarefas baseadas nas técnicas e nos discursos tecnológico-teóricos e também, nos Registros de Representação Semiótica (Duval, 2003), além das observações das várias representações que o aluno utiliza ao resolver questões de potenciação. Os erros serão analisados e criadas categorias para eles

.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Sabemos que os alunos cometem erros ao resolver problemas em questões matemáticas. Neste capítulo, tomaremos como referência a operação potenciação e faremos um estudo do erro e sua função na aprendizagem matemática.

Segundo Almouloud (2007), precisamos analisar os erros dos alunos que resistem na aprendizagem dos conceitos e identificar suas concepções a respeito desses erros.

Em sua tese de doutorado, Bianchini (2001) "*Estudo sobre uma aplicação de uma Seqüência Didática para o Ensino de Decimais",* baseia-se em questões apontadas na literatura da Didática da Matemática. Assim, estuda questões de aprendizagem na escola relativas ao conceito de números decimais. Relata os vários tipos de erros, suas causas e utilidades além de se nortear por meio de obstáculos e registros de representação. Idealizou uma sequência didática para a construção do conceito de números decimais. Este trabalho serviu de inspiração inicial para minha pesquisa.

2.1 Erros

Em nossa sociedade, o erro sempre foi visto de modo culposo, como algo que deveria ser evitado. Na maioria das situações, é tomado como algo negativo.

Se consultarmos um dicionário, em particular, o de Sacconi (1998, p. 290), o erro tem como definição: 1) ação ou efeito de errar. 2) qualquer desacerto, praticado por desconhecimento, inaptidão ou ignorância. 3) falta leve, falha. 4) tudo o que se desvia de um original.

Para Luckesi (1998), ao erro tem sido relacionada a ideia de culpa e castigo. Desta forma, começa a ser encarado como algo vergonhoso e censurável.

2.1.1 O erro no contexto Escolar e na Matemática

No ensino e no contexto escolar, o erro é encarado como uma ação a ser retificada e quando surge sempre vem acompanhado de uma correção ou punição, sobretudo, quando se trata de uma avaliação. O erro, portanto, é apresentado como algo que deve ser evitado. Sendo assim o aluno, muitas vezes, é classificado como desatencioso.

É normal presenciarmos uma situação em que o aluno, erra e o professor apenas informa que errou. Perguntas surgem, como por exemplo, por que eu errei? Onde eu errei? Agora o que eu faço? Situações, assim, mostram um aluno impotente sem muito que fazer para resolver sua dúvida.

Na maioria das vezes, o professor observa o erro, mas não gera uma discussão, ou seja, um diálogo para que se propicie um conhecimento matemático. Sobre este diálogo, Pinto (2000, p. 12) pontua: *"a não concretização desse diálogo na sua plenitude empobrece a utilização didática do erro, prejudicando significativamente, o desempenho dos alunos".*

No processo de ensino e aprendizagem, quando o erro acontece, o problema, muitas vezes, é atribuído ao aluno.

Para Luckesi:

> ...o erro é sempre fonte de condenação e castigo porque decorre de uma culpa e esta, segundo os padrões correntes de entendimento, deve ser reparada. Esta é uma compreensão e uma forma de agir, que configuram o nosso cotidiano de ser. (LUCKESI, 1994, p. 35).

Neste clima, muitas vezes, o aluno retrai-se, inibindo sua interação em sala de aula por medo de passar por situações vexatórias, revelando mais a situação, ou seja, o erro do que a própria aprendizagem.

Acreditamos ser preciso assinalar aos alunos aquilo que eles têm de conhecimento, valorizar os acertos e não estimar o erro que ele comete ou aquilo que está fazendo falta no conhecimento que eles têm e não pelo que lhe falta.

A nosso ver, o erro faz parte do processo de ensino e aprendizagem e pode ser trabalhado de maneira construtiva do conhecimento. As produções escritas do aluno e seus erros servem como pontos de partida para uma compreensão do processo de ensino e aprendizagem

Almouloud apoiado nos trabalhos de Guy Brousseau, afirma que:

> O erro seria a expressão ou manifestação explícita de um conjunto de concepções espontâneas[7] ou reconstruídas integradas numa rede coerente de representações cognitivas, que se torna um obstáculo à aquisição e dominação de um conceito. A superação seria o projeto de ensino e o erro a passagem operatória. (ALMOULOUD, 2007, p. 131).

Conforme o ditado popular, nós aprendemos com os erros que cometemos, sabemos que isso pode ser verdade em qualquer disciplina, mas em Matemática a idéia acentua-se pois, normalmente, é instigante para o aluno saber a resposta correta de um problema. Isto pode ser verdadeiro em qualquer nível de aprendizagem e mesmo com professores ou pesquisadores.

Em seu trabalho, Moura (2006) relata que 50 % dos alunos do Curso de Pedagogia têm uma relação ao longo de sua trajetória escolar marcada pela rejeição, incapacidade e medo da Matemática. A autora afirma que esta relação negativa com a Matemática é justificada pelos seguintes fatos: os processos avaliativos com ênfase em resultados e no julgamento quantitativo, a aprovação ou reprovação por média das provas ou testes, ou seja, com características da avaliação somativa.

[7] Segundo Artigue, concepções espontâneas são as concepções desenvolvidas pelos alunos, antes que elas sejam oficialmente objeto de aprendizagem.(ALMOULOUD, 2007, p. 154).

Acreditamos que o destaque no erro e na nota baixa do aluno em Matemática ao lugar de estimular o aluno a desenvolver métodos de validação dos resultados que obtém nos exercícios e situações-problema, torna-o cada vez mais dependente da validação do professor.

2.1.2 Causas dos erros em Matemática

As causas dos erros podem ser muitas e o aluno pode não estar preparado para aquele tipo de problema ou questão matemática, pode estar simplesmente desatento à questão e, muitas vezes, pode nem ter entendido o enunciado do exercício, também, alguns professores não estão preocupados em discutir o papel do erro e sua função na construção do conhecimento na sala de aula.

Segundo Rico (1995, *apud* Feltes, 2007), o aparecimento de erros nas produções dos alunos acontece por várias causas, entre elas, as concepções inadequadas dos aspectos fundamentais da Matemática, os resultados de uso de procedimentos imperfeitos que, às vezes, não podemos reconhecer ou exemplos de métodos e estratégias inventadas, não formais mas originais, para solução de alguns problemas propostos.

Segundo Lorenzato:

> O erro pode ter distintas causas: falta de atenção, pressa, chute, falha de raciocínio, falta de estudo, mau uso ou má interpretação da linguagem oral ou escrita da matemática, deficiência de conhecimento da língua materna ou de conceitos matemáticos. (LORENZATO, 2006, p. 50).

Temos conhecimento de que detectar o erro e interpretá-lo é uma tarefa difícil, mas é uma oportunidade que o professor tem para mostrar seu interesse pela aprendizagem do aluno.

2.1.3 A relevância do Erro

Fundamentados nos PCN, registramos a importância do erro:

> Na aprendizagem escolar o erro é inevitável e, muitas vezes, pode ser interpretado como um caminho para buscar o acerto. Quando o aluno ainda não sabe como acertar, faz tentativa, à sua maneira, construindo uma lógica própria para encontrar a solução. (BRASIL, 1998).

Na aprendizagem, a importância do erro depende de como ele acontece e como é analisado. Para auxiliar os alunos de uma forma mais adequada, ou seja, corrigi-los, é fundamental que os professores aprendam a identificar os erros e saber qual sua natureza, entendendo por que o aluno errou em determinada questão. Assim, ao proceder desse modo, poderá orientá-lo naquela situação; para que acerte, além do aluno ter oportunidade de errar sem ser punido.

Quando um erro é usado de modo construtivo, entendemos que poderá despertar atenção para algo que antes não tivesse sido considerado relevante pelo aluno, podendo ser uma relação importante na construção do conhecimento.

Nesse sentido, a análise de erros pode ser uma rica extensão para um processo na prática pedagógica.

Como Costa (1988) acreditamos que ao analisar os erros dos alunos, valorizamos o processo de respostas não apenas como um produto, mas verificando o que há de positivo, em sua construção lógica, não observando somente seus pontos negativos.

Pinto (2000) avalia que em um contexto de mudanças do ensino leva-se em consideração o fato da sociedade firmar o compromisso com a garantia de conhecimentos básicos pela população e pela nova deliberação sobre avaliação de alunos, a progressão continuada[8] é um questionamento importante a respeito do erro que o aluno comete. Para a autora, essa nova visão sobre o erro traz ao professor uma nova oportunidade de organização do ensino e destaca: “o erro apresenta-se como uma pista para o professor organizar a aprendizagem do aluno”.

Atualmente, o erro é visto não apenas como uma possível falha na aprendizagem, mas serve como fundamentação a metodologias e identificação de problemas de currículo.

[8] Deliberação 11/96.

Conforme Cury:

> Se estamos interessados no processo de aprendizagem da Matemática o erro pode ser visto como instrumento de identificação dos problemas do currículo e da metodologia, e, ao resolvê-los, os erros serão eliminados; se, no entanto, queremos explorar o erro, esse pode constituir-se em instrumento para a compreensão dos processos cognitivos. (CURY, 1995, p. 9).

2.1.4 Estudos sobre Erros

Cury (2007) realiza em sua obra uma retrospectiva histórica das pesquisas sobre erros, seus precursores e as perspectivas atuais na análise de erros.

- Edward Thorndike (1936) – desenvolveu suas teorias quando trabalhava na Universidade de Colúmbia, nos Estados Unidos da América e preocupou-se com a formação de hábitos e com a repetição dos exercícios. Enfatizou que não se deveria “cansar” o aluno com dificuldades que não fossem úteis. Thorndike e seus colaboradores propunham o uso de exercícios que estabelecessem hábitos que se converteriam em reforço para o aluno.
- Hadarmard (1945) – considera que os matemáticos erram como os estudantes, mas corrigem seus erros. Seus estudos contribuíram no sentido de fazer uma reflexão sobre como aproveitar os erros dos alunos em lugar de eliminá-los. Foi um dos pioneiros na análise de erros.
- Krutetskii (1976) – concentrou seus estudos nas habilidades matemáticas em um trabalho pioneiro com professores, alunos e pais de alunos na União Soviética. Acreditava na construção do conhecimento por meio de investigações realizadas pelos questionamentos e aproveitamento de erros. Para ele, também, era importante o processo como o aluno resolvia um exercício e não apenas a resposta como produto final.
- Newell e Simon (1972) – o trabalho destes pesquisadores foi no intuito de simular o comportamento de um indivíduo ao resolver um problema por intermédio de um programa de computador. Não seria uma

comparação entre a estrutura do computador e o cérebro humano, mas, uma analogia entre os dois. Analisaram três propostas de tarefas com alunos que estes deveriam verbalizar, ou seja, pensar em voz alta a solução. As falas eram gravadas e tornavam-se protocolos. O trabalho dos pesquisadores mostra a importância de se trabalhar em pesquisa com protocolos verbais.

- Brousseau também estuda o erro e o associa à noção de obstáculos. Para ele:

> O erro não é somente o efeito da ignorância, de incerteza de azar, mas o efeito de um conhecimento anterior que teve seu interesse, seu sucesso, mas que agora se revela falso ou simplesmente inadaptado. Os erros deste tipo são imprevisíveis e constituem os obstáculos. (BROUSSEAU, 1983, p.171 apud CURY, 2007, p. 33).

- Rafaella Borasi (1996) – sugere ambientes de aprendizagem nos quais o aluno possa aproveitar um determinado erro para questioná-lo, tentando assim explorar e verbalizar suas ideias. O professor não seria apenas um transmissor de conhecimentos, mas, um colaborador e incentivador do aluno a usar mais o raciocínio e argumentar suas ideias. Sua maior contribuição foi a "*Taxionomia de Erros",* esta classificação científica apresentada na forma de um quadro serve para base de pesquisas. A autora classifica como objetivos da aprendizagem: a *Remediação,* a *Descoberta* e a *Pesquisa.* Como níveis de discurso matemático: *realização de uma tarefa matemática específica, compreensão de algum conteúdo técnico-matemático e compreensão sobre a natureza matemática.* O entrelaçamento dessas maneiras pode surgir combinado ou não para que o professor dependendo do objetivo possa analisar o erro do aluno.

Cury (2007), também, traz a classificação de trabalhos de autores estrangeiros e brasileiros, que realizaram estudos com o erro, considerando cada autor, seu país de origem, ano de divulgação do trabalho, ano de escolaridade dos participantes e conteúdo abordado. Entre os autores citados, destacamos a pesquisa realizada por Freitas (2002) com o título: "*Equações do Primeiro Grau: Métodos de Resolução e Análise de Erros no Ensino Médio*". Neste trabalho, Freitas analisa os erro dos alunos referente ao tópico Equações de primeiro grau, elaborando categorias de erros apresentados por meio de um instrumento investigativo com 24 questões sobre o tópico e entrevistas com alunos.

Esta retrospectiva histórica aponta a importância da observação do erro, como um processo de entendimento do conhecimento do aluno. Para nossa pesquisa, destacamos a relevância de extrair do aluno o porquê das respostas, o que leva o aluno a errar, que será feito por meio de instrumento diagnóstico.

2.1.5 Análise e Classificação de Erros

Existe uma preocupação de integrar o erro ao processo de ensino e aprendizagem. Davis e Espósito afirmam que:

> Aceitar soluções “erradas” como pertinentes, desde que indicadoras de progressos na atividade cognitiva; fazer com que os alunos tomem consciência dos erros cometidos, percebendo-os como problemas a serem superados, sem que se lhes imponha caminhos previamente traçados. (DAVIS e ESPÓSITO, 1990, p. 7).

Ao ter em vista algumas classificações sobre erros, analisaremos o instrumento diagnóstico, classificando os erros cometidos pelos alunos.

Cury (1994) revisou as pesquisas realizadas nos Estados Unidos da América e Europa até o final de 1970 sobre a análise dos erros, aponta a importância dos erros no sentido de organizar o diagnóstico das dificuldades de aprendizagem e criar condições para avaliar o desempenho individual dos alunos. A autora defende que a análise de erros também serve como “ponto de partida para a pesquisa sobre o processo de ensino-aprendizagem matemático” e “como estratégia de pesquisa propícia a elucidar algumas questões da aprendizagem matemática”.

Em sua investigação, Sierra (2000) relata que à luz da análise didática e epistemológica feita com alunos de diversos níveis escolares em torno de expoentes interpretou que todos os fenômenos encontrados estão relacionados às concepções dos alunos, dos professores e do livro didático. Citamos alguns fenômenos nomeados por Sierra e ilustramos com exemplos do próprio autor.

- Persistência de operações simples: respostas que recorrem à multiplicação entre a base e o expoente para estabelecer o valor da expressão 2^x.

Exemplo: $2^4=8$, porque $2.4=8$

- Persistência do modelo de multiplicação reiterada: quando o aluno utiliza a multiplicação para estabelecer valores para a expressão 2^x, por exemplo

Exemplo: $2^{-4}=(-2).(-2).(-2).(-2)=-16$

- Ausência de argumentos para estabelecer as igualdades corretas.

Exemplo: $2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$, o aluno não sabe argumentar essa igualdade.

- Evolução com respostas corretas.

Exemplo: $2^{\frac{-3}{2}}=-3$, porque $2.\left(\frac{-3}{2}\right)=-3$

- O zero como representação do nada

Exemplo: $2^0=2$, porque não há nada (zero) como expoente.

- Deslizamento da memória: respostas que são ocasionadas por recordar equivocadamente as convenções relativas aos expoentes negativos.

Exemplo: $2^{-3}=0,002$

Feltes (2007) em seu trabalho separa e classifica o erro em 16 categorias a seguir:

- A: aquele que envolve operações erradas sobre as bases das potências.
- B: aquele que o aluno confunde a própria definição de potenciação.
- C: envolve erros em operações com conjuntos numéricos;
- D: envolve propriedades das operações em conjuntos numéricos;

- E: envolve a desconsideração do expoente ou o não–entendimento do expoente negativo.
- F: envolve dificuldades na adição de radicais, operando incorretamente com os coeficientes ou com os radicandos.
- G: mostra que o aluno tende a resolver as operações na ordem em que aparecem os números envolvidos, independente das regras;
- H: traz dificuldades de compreensão de propriedades das operações com radicais;
- I: envolve erros relacionados com os expoentes das potências.
- J: mostra que o aluno confunde-se no trabalho com radicais, de maneira geral, criando falsas regras.
- L: evidencia dificuldades com potenciação de frações.
- M: é específico, pois o aluno parece conhecer apenas a potência com expoente 2.
- N: indica dificuldades na escrita da linguagem matemática
- O: aquele em que não conseguimos entender a resolução.
- P: indica um lapso de escrita ou leitura;
- Q: não é um resultado incorreto, apenas indica que o aluno não sabe finalizar a solução de um exercício.

A classificação dos fenômenos encontrados por Sierra (2000) e a classificação dos erros na pesquisa de Feltes (2007) servirão de suporte para a classificação dos erros que apresentaremos em nosso diagnóstico.

2.1.6 O Erro Construtivo (Jean Piaget)

Diante do que relatamos, a importância de analisar erros é ímpar. Para Piaget, a aprendizagem acontece por meio de fatores hereditários e pelas interações do sujeito com o meio, destacando a importância dos erros no processo, segundo Davis e Espósito:

> A finalidade da ação educativa, na visão piagetiana, reside, assim, em estimular os mecanismos estruturantes da criança, de forma que esta possa modificar seus sistemas de organização e compreensão da realidade, alcançando um equilíbrio superior. Adota-se o pressuposto de que as crianças, ao partirem de suas próprias concepções a respeito da realidade e ao seguirem seus próprios procedimentos, cometerão, necessariamente, uma série de erros e julgamentos inadequados, considerados inerentes a toda construção intelectual. Tais erros recebem, na terminologia piagetiana, um nome especial: são erros construtivos, isto é, aqueles que sinalizam o fato de que uma outra estrutura de pensamento está se formando, ou seja, de que se encontra em processo de elaboração. (DAVIS e ESPÓSITO, 1998, p. 130).

No processo de aprendizagem, surgem ocasiões em que o aluno precisa lidar com novas situações, gerando desequilíbrios. Para Piaget, a equilibração das estruturas cognitivas consiste em uma passagem constante de um *estado de equilíbrio* a um *estado de desequilíbrio*. É um processo necessário de autorregulação interna. Segundo o autor, o desenvolvimento cognitivo é um processo de construção que ocorre entre sujeito e objeto.

Segundo Pozo, para Piaget:

> O progresso cognitivo não é conseqüência da soma de pequenas aprendizagens pontuais, mas está regido por um processo de equilibração. Assim, a aprendizagem produzir-se-a quando ocorresse um desequilíbrio ou um conflito cognitivo. (POZO, 1988, p. 179).

Para Zazkis; Chernoff (2006), o conflito cognitivo é uma analogia ao processo de desequilibração, sendo invocado quando um aluno enfrenta uma contradição ou inconsistência de suas ideias. Segundo os autores, usar técnicas de conflitos cognitivos é uma estratégia para resolver certas interpretações errôneas de conceitos. Esta abordagem permite ao aluno desorganizar seus próprios pensamentos e por meio desse conflito desenvolver uma estratégia. Quando ocorre um erro, vindo de uma interpretação errada é conveniente expor o conflito e ajudar o aluno a alcançar uma solução.

A teoria da equilibração trata de um ponto de equilíbrio entre assimilação e acomodação e, assim, é considerada como um mecanismo autorregulador, necessário para assegurar uma interação eficiente dele com o meio-ambiente. Todo novo conhecimento, que é assimilado, modifica o indivíduo, enriquecendo-o. A assimilação é o processo cognitivo pelo qual uma pessoa classifica um novo dado, ou seja, quando a criança tem novas experiências, vendo e ouvindo coisas novas, tenta adaptar esses novos estímulos às estruturas cognitivas que já possui. A acomodação caracteriza-se pela modificação de elementos já assimilados.

Sob o ponto de vista de Piaget, o erro pode ser o gerador do conhecimento. Segundo Cury:

> A perspectiva construtivista, portanto apresenta uma visão bem mais aberta, aceitando os erros cometidos pelos alunos e até estimulando a sua ocorrência, considerando as possibilidades que se abrem para o sujeito construtor do conhecimento. (CURY, 1994, p. 82).

Almouloud (2007) ressalta a importância do erro sob uma perspectiva piagetiana. Segundo esse olhar e de acordo com a Teoria de Piaget, os conhecimentos passam por fases transitórias de desequilíbrio após fases de equilíbrio e, assim, sucessivamente significando que novas aquisições foram integradas ao conhecimento.

Para Bianchini (2001), no momento da aprendizagem quando o aluno tem uma dificuldade, é o instante importante em que ele por meio de contradições pode sofrer uma adaptação e ter um conhecimento antigo, transformando-se em um novo conhecimento.

Essas reflexões e estudos sobre o erro vêm ao encontro ao objetivo de nossa pesquisa, pois mostra a importância da observação do erro. Este trabalho preocupa-se justamente em verificar o processo no qual o aluno responde e resolve questões relativas à operação potenciação e a maneira que ele resolve. Acreditamos que o erro apresentado pelo aluno seja de suma relevância para futuros trabalhos, sobretudo para a elaboração de atividades que de alguma maneira facilitem o processo de ensino e aprendizagem desse tópico.

CAPÍTULO 3

O OBJETO MATEMÁTICO

Desde o início de nossos trabalhos, com o Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica, a operação potenciação foi o objeto-alvo de interesse de estudos. A fim de compreender o objeto matemático escolhido, desenvolveremos neste capítulo alguns de seus aspectos. Iniciamos com um estudo da operação potenciação no ensino, estudando seu conceito, propriedades, convenções e sua representação, segundo a Teoria de Registros de representação Semiótica de Raymond Duval (2003). Em um segundo momento, traremos uma visão histórica sobre a potenciação e sua representação com o objetivo de ajudar na análise epistemológica. Finalmente, a análise da forma e do tratamento dos manuais didáticos: Parâmetros Curriculares Nacional (PCN), Proposta Curricular do Estado de São Paulo (PCESP) e Livros Didáticos para a operação potenciação. Esta análise levará em conta o referencial teórico que adotamos além de considerar a Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Yves Chevallard (1999).

3.1 A operação Potenciação

Este item do capítulo contempla em sua primeira parte o estudo do objeto, conceito e propriedades e, na segunda, as convenções matemáticas que julgamos importantes para o estudo e análise da operação potenciação.

3.1.1 Definição e Propriedades da Operação Potenciação

Este item será baseado no livro *"Conceitos Fundamentais da Matemática",* de Bento de Jesus Caraça (2003), escrito em 1948. Dele extraímos a definição e propriedades da operação potenciação.

Podemos considerar na aritmética, no Conjunto dos Números Naturais, além das quatro operações fundamentais: adição, subtração, multiplicação, divisão, outras três relacionadas; potenciação, radiciação e logaritmação.

A potência a^n, com a $\in$ IN e n $\in$ IN , é definida como um produto de fatores iguais no qual a^n = a.a.a.a (n vezes) Temos também que $a^1 = a$ e $a^0 = 1$.

Ao número *a* damos o nome de base, ao número *n* chamamos de expoente e o resultado de potência. Conforme Caraça, a base desempenha um papel passivo e o expoente um papel ativo.

As propriedades da operação potenciação são separadas em dois grupos:

- Primeiro Grupo
  - 1ª. –Unicidade...... $a = b,\ n = m \Rightarrow a^n = b^m$
  - 2ª.– Monotônica.... $n > m,\ a > 1 \Rightarrow a^n > a^m; a > b \Rightarrow a^n > b^n$, com *b* e *n* $\in$ IN.
  - 3ª. – $1^n = 1,\ 0^n = 0.$
- Segundo Grupo
  - 4ª. – Multiplicativa... $a^m.a^n = a^{n+m}$
  - 5ª. – Distributiva...... $(a.b)^n = a^n.b^n$
  - 6ª. – $(a^m)^n = a^{mn}$

Existem duas operações inversas à potenciação; essa inversão consiste em determinar a base ou o expoente quando é dado o valor da potência.

Radiciação: quando são dadas a potência e o expoente, podemos determinar a base. O símbolo da operação radiciação é $\sqrt[n]{a}$, no qual lemos *raiz de índice n de a.*

$$a = b^n \;\Rightarrow b = \sqrt[n]{a},$$

O número a é chamado de radicando; o sinal $\sqrt{\ }$ de radical, ao número n atribuímos o nome de índice do radical e ao número b raiz.

A operação potenciação somente é possível quando *a* for uma potência de expoente *n* de outro número. O autor cita o exemplo: é possível o cálculo de $\sqrt{4}$ porque temos os quadrados 1, 4, 9, 16,.... ou dos cubos que são 1, 8, 27, 81.... ou quartas potências. Neste caso, seria impossível o cálculo de $\sqrt{5}$.

Em Caraça, as propriedades da radiciação são separadas em dois grupos:

- Primeiro Grupo
  - 1ª. – Unicidade.... $a = b,\; n = m \;\Rightarrow \sqrt[n]{a} = \sqrt[m]{b}$
  - 2ª. – Monotônica $a > b$ $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$
  - $n > m\,,\;\; a > 1 \;\Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[m]{a}$
  - 3ª. – $\sqrt[n]{1} = 1,\;\; \sqrt[n]{0} = 0$
- Segundo Grupo
  - 4ª. – Distributiva $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$
  - 5ª. – $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$
  - 6ª. – $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n.q]{a^{p.q}} = \sqrt[n:q]{a^{p:q}}$
  - 7ª. – $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n.p]{a}$

Logaritmação: dadas a potência e a base podemos determinar o expoente. Seja *a* uma potência *n* de outro número. O símbolo da operação logaritmação é $\log_b a$, onde lemos *logaritmo de* a *na base* b.

$$a = b^n \Leftrightarrow n = \log_b a \text{ , com } b > 1$$

O número *a* é chamado de logaritmando, *b* é a base e *n* o valor do logaritmo.

A operação somente é possível quando *a* é uma potência de base *b*. Caraça cita como exemplo $\log_7 49$, já que $49 = 7^2$. Já no caso de $\log_3 20$, nos casos do Conjunto dos Números Naturais, é impossível resolver com potenciação.

As propriedades da logaritmação são separadas em dois grupos:

Primeiro Grupo

1ª – Unicidade $a = a^1, b = b^1 \Rightarrow \log_b a = \log_{b^1} a^1$

2ª – Monotônica $a > a^1 \Rightarrow \log_b a > \log_b a^1$

3ª – $\log_a a = 1$

Segundo Grupo

4ª – $\log_b (a.c) = \log_b a + \log_b c$

5ª– $\log_b (a : c) = \log_b a - \log_b c$

6ª.– $\log_b (a^n) = n . \log_b a$

Caraça trata, em um item de sua obra, do zero como dado operatório, relatando que o zero provoca perturbações nas operações.

O caso da potência a^0, usando a própria definição da operação, não teria significado, uma vez que não existe produto por nenhum fator. Entendemos que a definição não dá conta de explicar o expoente zero. Caraça (2003) baseado no Princípio da Extensão procura uma nova definição que, no decorrer de um cálculo algébrico, possa anular um expoente. Sugere, também, que deva haver uma economia do pensamento e que mesmo nas construções e cálculos matemáticos mais elevados devemos procurar o caminho mais simples de resolução. Por meio das propriedades formais da operação e generalizando sua aplicação, dizemos que novas definições podem ser formuladas. Este princípio recebe o nome de *Princípio de Hankel* ou *Princípio da permanência das leis formais.*

A potenciação possui a propriedade $a^m.a^n = a^{n+m}$. Podemos chamar $X = a^0$, mantendo a lei formal. Se fizermos $X.\ a^n$ teremos $a^o.a^n = a^{0+n}$, mas $0 + n = n$ logo, deve ser $a^0.a^n = a^n$ e pela propriedade 4ª(multiplicativa) da operação temos $a^0 = 1$.

No campo dos números racionais, temos a operação potenciação com expoentes inteiros e expoentes fracionários.

De acordo com a definição da operação potenciação com expoentes inteiros, dada por Caraça, temos que:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n = \frac{p}{q}.\frac{p}{q}.\frac{p}{q}.\dots.\frac{p}{q}\ (n \quad vezes),$$

com $n \in$ IN, resultando imediatamente: $\left(\frac{p}{q}\right)^n = \frac{p^n}{q^n}$.

As operações inversas radiciação e logaritmação mantêm as mesmas propriedades.

Por analogia a $a = b^n \Rightarrow b = \sqrt[n]{a}$, temos que: $x^n = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{p}{q}} = x$

Utilizando *o princípio da manutenção das leis formais* definimos a operação $r^{\frac{p}{q}}$. Se chamamos $X = r^{\frac{p}{q}}$ e operando com as leis formais habituais temos, portanto, $X^q = (r^{\frac{p}{q}})^q = r^{\frac{p}{q}.q}$. Então $\frac{p}{q}.q = \frac{pq}{q} = p$, logo $X^q = r^p$. Pela definição de raiz, obtemos $X = \sqrt[q]{r^p}$. A nova operação fica definida como: $r^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{r^p}$.

A logaritmação tem um tratamento análogo e as mesmas propriedades e casos de impossibilidades quando com números inteiros.

3.1.2 As Convenções Matemáticas

Buscando o sentido da palavra convenção no dicionário, encontramos em Ferreira (1995, p. 135) um sentido geral ajuste, acordo, determinação sobre um fato, aquilo que só tem valor ou sentido, mediante acordo recíproco, explicação prévia ou tudo aquilo que é aceito por uso geral ou norma de agir, costume.

No contexto escolar e mais especificamente na disciplina Matemática a noção de convenção é considerada como regras pré-estabelecidas e que o aluno precisa aceitar como algo imposto ou sem explicação e normas que ele deve acatar.

Segundo Sierra (2000): O termo convenção matemática é utilizado para especificar acordos que se apresentam necessários para dar coerência a uma teoria matemática e às suas respectivas representações simbólicas e algorítmicas.

Sierra (2002) estudou o uso de convenções como um mecanismo de construção do conhecimento. Dentro do processo de ensino e aprendizagem, as convenções são objetos matemáticos, muitas vezes, considerados como meio didático para memorização e construção do conhecimento.

Sierra (2000) relaciona a análise epistemológica de uma convenção matemática que pode se caracterizar pela evolução de uma teoria, considerada inicial (T_0), até uma teoria final (T_1). Para o autor, uma convenção matemática é um instrumento teórico que satisfaz certos pré-requisitos, ou seja, conhecimentos anteriores dentro de uma nova organização de conhecimentos, sendo importante as considerações metamatemáticas que estão no processo de construção do conhecimento.

Conforme o autor explica, uma noção é do tipo *metamatemática* quando funciona como organizadora das noções *protomatemáticas*, que são noções cujas propriedades servem para resolver certos problemas, mas não são reconhecidas como objetos de estudo e sim como instrumento para estudo de outros objetos matemáticos. Como exemplo, podemos citar a fatoração ou as propriedades da potenciação; *paramatemáticas,* noções que são instrumentos usados de maneira natural para descrever outros objetos. O autor cita, como exemplo, quando é solicitado ao aluno que seja feita uma demonstração, sem que ela seja o objeto de ensino e *objetos matemáticos* são noções designadas, normalmente, pelo currículo e são objetos de conhecimento construídos, ensinados e utilizados em aplicações práticas.

Sierra (2000), considera que a caracterização da convenção matemática pode ser representada por meio da figura:

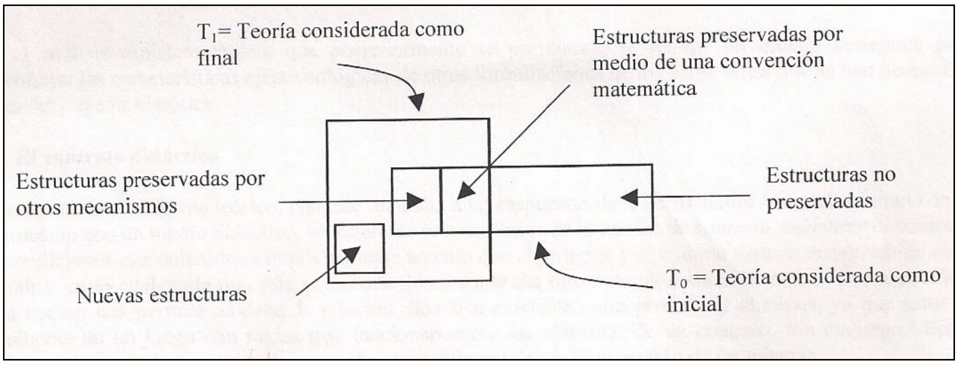


Figura 1: Caracterização da convenção matemática.

Fonte: Sierra (2000, p. 8)

A idéia de noções metamatemáticas pode ser relacionada à potenciação. Por exemplo, o aluno pode dispor de um discurso que corresponde ao uso de convenções relacionadas a expoente zero e 1, e usá-lo como um instrumento quando ele já tem conhecimento da definição da operação potenciação, que é uma teoria inicial até chegar a um pleno conhecimento da operação.

Em nosso trabalho, consideramos importante o uso das convenções matemáticas, pois na sala de aula o professor, muitas vezes, emprega esse recurso, apresentando a noção do que é uma convenção, ou seja, algo que o aluno não deve discordar e, muito menos, questionar. Nos livros didáticos, também, são usados esses termos quando se define, por exemplo, que todo número diferente de zero, elevado a zero é igual a um ou que todo número elevado a um tem como resultado o próprio número. Nos dois casos de potenciação, entendemos que lidamos com definições que são particulares ou especiais, advindas das propriedades da operação potenciação. Veja as figuras:

Figura 2: Definição sistematizada para potência com expoente 0.
Fonte: Barroso (2006, p. 59, 6ª.série)

> De modo geral define-se:
> - Toda potência de expoente zero que tem como base um número inteiro não-nulo é igual a 1.
> - Toda potência de expoente 1 que tem como base um número inteiro é igual à própria base.

Figura 3: Definição sistematizada para potência com expoente 0 e 1.
Fonte: Barroso (2006, p. 59, 6ª.série)

É, nesse sentido, o mesmo de Sierra (2000) que utilizaremos a idéia de convenção matemática, como uma regra especial, uma sistematização da definição, ou seja, um acordo que dá coerência à definição de potenciação e que o aluno evoca como justificativa para responder a uma questão com expoente *0* ou *1.*

Para este trabalho, então, consideraremos como convenção matemática, na operação potenciação as seguintes regras especiais que comumente são falas do professor em sala de aula.

- *Todo número, diferente de zero, elevado a zero é igual a 1.*
- *Todo número elevado a um é igual a ele mesmo.*

3.1.3 Regras de Sinais

Da mesma forma que consideramos as convenções matemáticas, como regras especiais para expoentes 1 e 0, disponibilizamos também as regras de sinais especiais utilizadas em relação à operação potenciação. Estas regras de sinais são aquelas que são pertinentes à resolução ou às técnicas utilizadas pelos alunos quando resolvem questões relacionadas à operação potenciação.

- Números negativos elevados a expoente par têm como resultado um número positivo.
- Números negativos elevados a expoente ímpar têm como resultado um número negativo
- Números positivos elevados a expoente par têm como resultado um número positivo.
- Números positivos elevados a expoente ímpar têm como resultado um número positivo.

No caso da operação potenciação, as regras de sinais especiais são apresentadas nos livros didáticos, nos quais as análises foram feitas.

Os sinais da potência de um número inteiro podem ser analisados considerando-se o **sinal da base** e verificando-se se o **expoente é par ou ímpar**.

- Base positiva e expoente par

$(+3)^2 = (+3) \cdot (+3) = +9$ (potência positiva)

$(+5)^4 = (+5) \cdot (+5) \cdot (+5) \cdot (+5) = +625$ (potência positiva)

- Base positiva e expoente ímpar

$(+3)^3 = (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) = +27$ (potência positiva)

$(+2)^5 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +32$ (potência positiva)

Quando a base é positiva, a potência é sempre um número positivo, independentemente de o expoente ser par ou ímpar.

- Base negativa e expoente par

$(-5)^4 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = +625$ (potência positiva)

$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9$ (potência positiva)

- Base negativa e expoente ímpar

$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$ (potência negativa)

$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$ (potência negativa)

Quando a base é negativa, a potência será positiva se o expoente for par, e negativa se ele for ímpar.

Figura 4: Sistematização e regras de sinais para a operação potenciação.
Fonte: Barroso (2006, p. 60, 6ª.série)

Na conclusão deste item do capítulo e no estudo sobre o objeto matemático, operação potenciação, ressaltamos cinco aspectos que julgamos relevantes no momento que o aluno efetua a operação:

- A busca de um padrão matemático para o cálculo de algumas potências, como por exemplo, 2^{-3}. Com esta técnica, o aluno poderia calcular esta potência a partir da potência $2^2=4$. Ao diminuir 1 no expoente, ele poderá verificar que o valor da potência divide por 2. Se ele observar isso sucessivamente encontrará uma regularidade
- Uso das propriedades para facilitar o cálculo tipo $2^{100} : 2^{99}$.
- Uso da operação inversa à potenciação, pois seria uma possibilidade de justificativa para o aluno, por exemplo $3^2= 9$, uma vez que $\sqrt{9}=3$.
- A utilização de regras de sinais ou convenções matemáticas pelo aluno como justificativa do cálculo de uma potência.

- A importância da representação na aprendizagem da operação potenciação, item que estudaremos a seguir.

3.1.4 Potenciação e sua Representação

Neste trabalho, também, consideramos o papel das representações como importante no estudo da operação potenciação. Para tanto, servir-nos-emos das ideias de Raymond Duval sobre Registros de Representação Semiótica.

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica foi proposta por Raymond Duval, que se preocupou com uma abordagem cognitiva, para compreender porque muitos alunos apresentam dificuldade de aprendizagem em Matemática

Duval (1995, *apud* Bianchini, 2001) afirma que não existe conhecimento a ser mobilizado sem um registro de representação. Para ele, um registro de representação é uma maneira peculiar de conceber um objeto matemático e existem vários registros que são possíveis para um mesmo objeto, sempre considerando que as representações semióticas materiais servem de suporte às representações mentais.

Segundo Duval:

> A originalidade da abordagem cognitiva está em procurar inicialmente descrever o funcionamento cognitivo que possibilite a um aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situações de ensino. (DUVAL, 2003, p. 12).

Duval (2003) analisa as questões sobre as condições da aprendizagem Matemática e ressalta duas considerações: na primeira, questiona quais sistemas cognitivos o aluno precisa para mobilizar os objetos matemáticos e fazer os tratamentos necessários aos processos de aprendizagem Matemática e, na segunda, se os sistemas cognitivos são os únicos mobilizáveis em qualquer outro domínio científico ou se esse conhecimento é próprio da atividade matemática?

Ainda segundo o autor, o que caracteriza a atividade Matemática do ponto de vista cognitivo são:

- A importância das representações semióticas é uma condição fundamental para a evolução da Matemática. O acesso aos números está ligado a um sistema de representação, ou seja, o objeto matemático necessita de uma representação.
- Há uma grande variedade de representações semióticas utilizadas na Matemática. Para Duval (2003, p. 14), "além do sistema de numeração, existem as figuras geométricas, as escritas algébricas e formais, as representações gráficas e a língua natural, mesmo se ela é utilizada de outra maneira que não a da linguagem corrente".

O conceito de representações semióticas é importante para o desenvolvimento do pensamento matemático, pois os objetos matemáticos são abstratos e precisamos de um registro de representação; para que aconteça uma aprendizagem significativa, precisamos transitar em, pelo menos, dois registros de representação.

Para Duval (2003): A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação.

Conforme a teoria de Duval, temos dois tipos de transformações semióticas:

Tratamentos: são transformações de uma representação em uma outra no mesmo registro. Como exemplo, temos:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}$$

Conversões: são transformações de representação mudando o registro de representação. Como exemplo de conversão, temos:

$$2^{-2} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25.\ 10^{-2}.$$

As conversões dos registros de representação semiótica são necessárias ao funcionamento do pensamento humano, pelo próprio custo de tratamento, pois esta troca de registros tem como objetivo efetuar tratamentos de forma mais econômica.

Para considerarmos o estudo dos processos de aprendizagem, precisamos colocar em evidência os mecanismos próprios da compreensão em Matemática.

Concordamos com Duval quando afirma que:

> A aprendizagem matemática ressalta fenômenos complexos, pois é necessário ao mesmo tempo levar em conta as exigências científicas próprias dos conteúdos matemáticos e o funcionamento cognitivo do pensamento humano. (DUVAL, 2003, p. 24).

Conforme Souza (2008), o professor precisa estar consciente para trabalhar não só os tratamentos, mas, as conversões, pois elas fornecem uma ferramenta importante na análise de uma representação sobretudo no uso da língua natural e das figuras geométricas. Souza traz uma classificação cognitiva das representações. Segundo Duval, a representação denota o objeto matemático, representando-o com um registro que pode ser discursivo ou não discursivo. Os registros discursivos estão relacionados à expressão, como a língua natural e a linguagem simbólica ou formal e os registros não discursivos, à *visualização* e podem ser icônicos, como desenhos e esboços ou não icônicos, como gráficos, figuras e esquemas.

Em nossa pesquisa, a teoria de Duval é relevante, pois julgamos que seja importante o aluno perceber a operação potenciação pelos registros de representações diferenciados. Para tanto, em nosso diagnóstico, usamos questões elaboradas com o uso de língua natural, a linguagem simbólica ou formal, tratamentos, conversões e questões nas quais o aluno também possa usar o recurso da visualização, como técnicas para resolver questões relativas à operação potenciação. O objetivo de usar diferentes tipos de registros de representação é verificar se esse recurso faz parte do repertório cognitivo dos alunos e se vem sendo trabalhado com eles.

3.2 Visão Histórica

O objetivo deste item é estudar a evolução do conceito de potência. Para isso, realizamos um estudo histórico no qual pesquisamos a evolução do conceito e, também, o desenvolvimento das representações desde os primórdios até os dias atuais.

A ideia de potência surgiu da necessidade do homem exprimir quantidades maiores ou números grandes daí, então, encontrar uma maneira para representá-las.

A representação da operação potenciação de um número parece um assunto simples, mas, fundamental. No entanto, foi necessário muito tempo e habilidade criadora para se chegar ao simbolismo do conceito de potência que hoje conhecemos. Muitos matemáticos de diversas civilizações contribuíram para o desenvolvimento e sistematização desse conceito, bem como para a simplicidade de sua representação por meio de símbolos adequados.

Segundo Boyer (2003), quanto à operação potenciação temos uma das primeiras referências no final do Império Médio (cerca de 1890 a.C) no Papiro de Moscou, que destaca um problema que apresentava o volume de um tronco de pirâmide. Relata que os babilônicos construíram tabelas contendo potências sucessivas que se assemelham às nossas tabelas de logaritmos. Os babilônicos trazem um problema no qual uma potência deve ser elevada a um certo número para fornecer um outro número dado. Essas tabelas não serviam exatamente para cálculos, mas, para situações-problema que se quisesse resolver.

Hipócrates de Chios viveu em 470 a. C e deduziu a primeira quadratura rigorosa de uma área de círculo, começando com triângulo isósceles e retângulo inscrito em um semicírculo, usou o Teorema de Pitágoras para enunciar o que parece ser o mais antigo teorema sobre áreas de círculos.

Segundo Guelli (1993), Arquimedes (250 a. C), escreveu um livro chamado *Psammit* que significa *Computador de Areia*, no qual mostra que uma quantidade de objetos que na época, era considerada “não calculável”, mas, poderia ser expressa por meio de dois números:

10^4 = uma miríada

10^8 = uma miríada de miríadas

Para Arquimedes, os números poderiam ser agrupados de 1 a 10^8 e, nesse intervalo, seriam considerados de primeira ordem, chamadas de *oitavas*, como os números de 10^8 a 10^{16}, de segunda ordem ou segunda *oitava,* e assim, por diante. Arquimedes dentro desse sistema faz um cálculo complicado e determina na época que no universo cabem, aproximadamente 10^{63}, grãos de areia expressando, segundo seu sistema, este número: mil miríadas dos números oitavos representadas da seguinte forma por ele: $10^3 . 10^4 . 10^{56}$.

Garbi (2006) relata que, os gregos, por volta de 200 a.C., utilizavam um sistema de numeração denominado sistema jônico que é aditivo, de base dez, e emprega 27 símbolos, em que 24 são letras do alfabeto grego e três do fenício. Para expressar números grandes, como múltiplos de 1.000 até 9.000, alguns recursos como um traço ou um acento colocado antes de cada uma das nove primeiras letras, abaixo ou acima.

α	alpha	1	ι	iota	10	ρ	rho	100
β	beta	2	κ	kappa	20	σ	sigma	200
γ	gamma	3	λ	lambda	30	τ	tau	300
δ	delta	4	μ	mu	40	υ	upsilon	400
ϵ	epsilon	5	ν	nu	50	ϕ	phi	500
ϛ	digamma	6	ξ	ksi	60	χ	chi	600
ζ	zeta	7	ο	omicron	70	ψ	psi	700
η	eta	8	π	pi	80	ω	omega	800
ϑ	theta	9	ϙ	koppa	90	ϡ	san	900

Figura 5: Sistema Jônico de Numeração.
Fonte: Garbi (2006, p. 323)

A *Arithmetica* de Diofanto de Alexandria (cerca 250 d.C) era um tratado que tinha como característica um nível alto de habilidade matemática. Nos seis volumes, existe um uso sistemático de abreviações para potências.

Diofanto, considerado o maior teórico dos números da Antiguidade, colaborou de maneira decisiva na simbolização da Álgebra. Utilizava o sistema jônico e criou vários símbolos algébricos.

De acordo com Ponte

> No caso de Diofanto, Δ^y seguido de K^y,representava ΔK^y (tal como para nós n^2 seguido de n^3 representa n^5). Mas para os hindus *varga-g'hana* (quadrado-cubo) indicava a multiplicação dos índices (e portanto n^2 seguido de n^3 significava n^6). Consequemente, este processo de construção de potências tornava-se inoperativo para representar potências com expoentes primos. Então, por exemplo, n^5 era escrito como *varga-g'hana-gháta*, em que *gháta* significava produto, ou seja, neste caso $n^2 . n^3 = n^5$. (PONTE, 1999, p. 3):

Com essa notação, Diofanto poderia escrever polinômios tão facilmente como nós nos dias de hoje. A diferença apenas estaria na falta de símbolos especiais para operações e relações. Esta contribuição foi importante entre os séculos XV e XVII.

Segundo Boyer:

> Um número desconhecido é representado por um símbolo parecido com a letra grega Δ: o quadrado disto aparece como Δ^y, o cubo como K^y, a quarta potência dita quadrado-quadrado, como $\Delta^y \Delta$, a quinta potência como quadrado-cubo, como ΔK^y, e a sexta potência como cubo-cubo como $K^y k$. (BOYER, 2003, p. 133).

O autor ainda destaca que: *Lilavati*, obra do matemático hindu Bhaskara (1150 d.C), que completava obras hindus anteriores, encontramos referência à construção das potências superiores, usando como solução potências ao quadrado e cubo.

Conforme Ponte (1999, p.4), entre os séculos XIII a XVII, os árabes e os europeus adotam os dois sistemas, tanto o hindu (multiplicativo) e o Diofanto (aditivo) existindo, assim, diversas notações para conceitos semelhantes e notações parecidas para conceitos bastante diferentes.

Por volta de 1360, em *De proportionibus proportionum,* Nicole Oresme generalizou a teoria de proporção de Bradwardine[9] que incluía potências com expoentes racionais e definiu regras para as potências que são nossas propriedades usadas hoje nas quais expressamos $x^m . x^n = x^{m+n}$ ou $(x^m)^n = x^{m.n}$. Em outra parte de sua obra, *Algorismos proportonium*, Oresme sugere também uma notação especial para expoentes fracionários. Há expressões como $\frac{1.p.1}{4.2.2}$ para $\sqrt[4]{2\frac{1}{2}}$. Oresme ainda tenta representar $x^{\sqrt{2}}$, mas, por falta de notações específicas efetivamente é impedido de fazê-lo.

Boyer (2003) cita Nicolas Chuquet em *La triparty em la science des Nombres* (1484) que estabeleceu uma noção de expoente zero e negativo, não sendo possível determinar as razões que o levaram a estabelecer as regras operativas, mas a maneira que se faz a operação supõe-se uma relação com progressão aritmética e geométrica. Chuquet criou uma notação para potenciação muito importante. Para ele, a potência era indicada por um expoente associado ao coeficiente do termo de modo que expressões como 5x, $6x^2$ e $9x^0$ apareciam em sua obra como $.5.^1$,$.6.^2$, e$.9.^0$. Os expoentes negativos também apareciam com as potências inteiras positivas como $9x^{-2}$ ficando $.9.^{2.m}$, onde 2m *seconds moins*[10].

Rafael Bombelli (1526-1572), algebrista italiano, nascido em Bologna forneceu uma contribuição à renovadora notação de potenciação, empregando símbolos em expressões matemáticas em que utilizou um pequeno arco para representar o expoente, conforme os dados do Quadro 1 a seguir:

---

[9] Bradwardine (1290-1349), inglês, escreveu o *Tractatus de proportionibus.* Ele verificou, bem como outros estudiosos antes dele, que não era correta a forma dada pela lei de movimento de Aristóteles, V = KF/R, na qual a velocidade era proporcional à força e inversamente proporcional à resistência, e K uma constante de proporcionalidade não nula. Em seu Tratado, Bradwardine faz uso de uma teoria generalizada de proporções e propõe que, para dobrar a velocidade, a razão F/R deveria ser elevada ao quadrado. De modo geral, sua teoria das proporções inclui tanto quantidades que variavam como potências, como quantidades que variavam como raízes.(Bernal, 2004, p. 36).

[10] seconds–segundo, moins – segundo, sinal de menos.

Quadro 1: Representação de Bombelli de potências[11]

Notação Moderna	Publicado por Bombelli	Escrito por Bombelli
$5x$	$\overset{\overset{1}{\smile}}{5}$	$\overset{\overset{1}{\smile}}{5}$
$5x^2$	$\overset{\overset{2}{\smile}}{5}$	$\overset{\overset{2}{\smile}}{5}$
$\sqrt{4+\sqrt{6}}$	Rq⌊4pRq6⌋	R⌊4pR6⌋
$\sqrt[3]{2+\sqrt{0-121}}$	Rc⌊2pRq⌊0m121⌋⌋	R³⌊2pR⌊0m121⌋⌋

Fonte: http://www.brasilescola.com/imagens/biografia/RafaBnot.jpg

Garbi (2006) retrata a notação que Fibonacci (1175-1250) usava para escrever as equações. que denominava a incógnita de *radix* (raiz) ou *res* (raiz), *census* (quadrado) e *cubus* o seu cubo. Na obra *Summa de arithmetica* de Luca Pacioli (1494), livro muito lido na época, o autor abreviou os termos usados por Fibonacci para *co.* (cosa), *ce.* (census) e *cu.* (cubus). O autor relata também que, para Cardano (1545), a notação usada para escrever a equação $20x^3 + 5x = 17$ era *2cub”p:5 reb”aeqlis17.*

Boyer (2003) relata que Simon Stevin (1548-1620) preferia uma linguagem simbólica para representar potência. Adaptando a notação posicional para frações decimais, ele escrevia ② em vez de Q para quadrado, ③ em vez de C (para cubo), ④ em vez de QQ(ou quadrado–quadrado) e assim por diante.

Baungart (1992) narra que, por volta de 1593, o escritor holandês Adrianus Romanus usou 1(45) para representar x^{45}. Pietro Cataldi, em 1910, representava x^0, x^1, x^2, x^3 como: 0, 1, 2, 3. Outra representação também foi a do matemático suíço, Jobst Bürgui, em 1619, usou numerais romanos como expoentes.

[11] http://www.brasilescola.com/imagens/biografia/RafaBnot.jpg

Representou o polinômio $8x^6 + 12x^5 - 9x^4 + 10x^3$,como $\begin{matrix} VI & V & IV & III \\ 8+ & 12- & 9+ & 10 \end{matrix}$. O autor relata também que J. Buteo (1559) adotou uma notação pictórica de expoentes e que não contribui para nosso sistema atual. Sua representação era feita por meio de figuras, por exemplo: $7x, 7x^2, 7x^3$ como 7ρ, 7◊, 7□.

Na França, em 1591, François Viète inseriu novidades no simbolismo matemático. No livro *In artem analyticam isagoge* (Introdução à arte analítica), ele formalizou o uso de letras maiúsculas para as incógnitas e as conhecidas para os coeficientes. Embora tenha sido uma contribuição importante a representação de Viète era retrógrada. Como exemplo, temos $4AB^2 - DA + A^3 = Z$, que era escrita por ele na forma:

$$B4 in A quad - D plan in A + A cubo aequator Z sólido .$$

Sierra (2000) apresenta a notação que Marco Aurel , em 1610, estabeleceu, na qual aparecem símbolos relacionando-se com a forma atual de representação das potências.

Quadro 2: Notação usada por Marco Aurel em 1610.

x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9
φ	χ	ξ	ζ	ξξ	β	ξζ	bβ	ξξξ	ζζ

Fonte: Sierra (2000, p. 1).

Depois de ter estabelecido a relação entre potência e símbolo, Aurel destaca a relação entre símbolo e número, baseando-se no comportamento das sucessões (relação entre Progressão Aritmética e Progressão Geométrica).

Quadro 3: Relação entre símbolo e número para expressar a relação entre as progressões.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
φ	χ	ξ	ζ	ξξ	β	ξζ	bβ	ξξξ	ζζ

Fonte: Sierra (2000, p. 11).

Associamos a notação de Aurel à decomposição em fatores primos; por exemplo, ζ = 3 e $\zeta\zeta$ = 3.3= 9. Para o 0 e 1 e os demais números primos, usava-se um símbolo diferente.

Harriot (1631) aproveitou a ideia de Stifel que já havia escrito o cubo da incógnita como AAA. Em seu livro póstumo *Ars analyticae práxis,* usa por exemplo 6AA, 6AAA para designar $6x^2 e\ 6x^3$ (BOYER, 2003).

Em Garbi (2006), temos que a obra *Géométrie* (1637) escrita por Descartes traz equações, consolidando uma notação que é usada até nossos dias.

- As primeiras letras minúsculas do alfabeto (a, b, c...) para representar as grandezas conhecidas.
- As últimas letras do alfabeto para representar as grandezas desconhecidas.
- As potências acima de 2 foram expressas por meio de expoentes.
- Os sinais de soma e subtração já foram os atuais.
- O símbolo da raiz passou a ter um prolongamento horizontal superior de modo a indicar claramente o que era abrangido.

Conforme Ponte:

> Descartes, todavia, limitou-e a trabalhar com expoentes inteiros positivos. Antes dele, já Hume (1636) e Hérigone (1634) tinham escrito representações bastante próximas da atual: por exemplo, designavam, respectivamente, $5a^4$ por $5a^{\text{iv}}$ e 5*a*4. Note-se que a notação de Hume seria pouco cômoda devido à utilização da numeração romana. Por sua vez, a notação de Hérigone seria mais econômica para o trabalho de tipografia, mas a de Descartes oferecia certas vantagens quanto à interpretação, tal como o seu uso, até aos nossos dias, tem evidenciado. (PONTE, 1993, p. 8):

Sierra (2000) relata que Wallis (1616) de Oxford escreveu sobre as séries infinitas, baseou-se em resolver problemas de áreas e superfícies por meio de razões aritméticas da forma: $\frac{0^k + 1^k + 2^k + ... + n^k}{n^k + n^k + n^k + ... + n^k}$. Investigou o comportamento dessas razões para k = 1, 2, 3, 4 e 5 sugerindo, assim, a noção de expoentes fracionários.

Garbi (2006) descreve que Newton também interessou-se por pesquisar séries infinitas. No período de 1664-1665, sua primeira façanha foi descobrir como expressar potências racionais usando séries. Esta lei de formação não foi demonstrada por Newton e sim por Gauss, no século XIX, e pode ser resumida da forma, onde *m* e *n* são inteiros positivos ou negativos.

$$(1+x)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{\frac{m}{n}}{1!}x + \frac{(\frac{m}{n})(\frac{m}{n}-1)}{2!}x^2 + \frac{(\frac{m}{n})(\frac{m}{n}-1)(\frac{m}{n}-2)}{3!}x^3 + \frac{(\frac{m}{n})(\frac{m}{n}-1)(\frac{m}{n}-2)(\frac{m}{n}-3)}{4!}x^4 + \dots$$

Figura 6: Lei de formação que expressa potências racionais criada por Newton.
Fonte: Garbi (2006, p. 62)

O caminho da notação da operação potenciação foi lento e gradativo, e seu conceito ganha seus retoques finais quando acontece no século XIX a construção do conjunto dos números reais. A importância desse trajeto é destacada por Cajori:

> A nossa notação para representar potências foi uma grande ajuda para o avanço da álgebra para um nível que não teria sido possível com as notações alemãs antigas ou com outras notações do passado. Em mais nenhum lado é a importância de uma boa notação para o desenvolvimento da Matemática tão bem evidenciada como no simbolismo das potências usado na álgebra. (CAJORI, apud PONTE, 1993, p. 360).

3.2.1 Análise Epistemológica

Após a visão histórica, apresentamos a análise epistemológica apontando situações e momentos da história nas quais o desenvolvimento geral do conceito de potenciação foi relevante. Segundo Almouloud (2007, p. 149): “a análise epistemológica pode auxiliar o pesquisador a ter uma atitude crítica a respeito das concepções que um indivíduo possa construir a partir de sua convivência e de sua vivência com a matemática e suas ferramentas”.

- Desde os tempos de Arquimedes, já havia o anseio e a procura em se expressar números muito grandes[12]. Até então, as potências eram trabalhadas pelos babilônicos com o uso de tabelas de potências sucessivas. Essas tabelas eram utilizadas para resolução de uma situação-problema, constatando, assim, a dificuldade em se trabalhar com valores mais altos. Arquimedes cria um sistema no qual intervalos são designados como miríadas, que têm o intuito de agrupar números, demonstrando também a preocupação com números grandes.
- Ao longo da história, nota-se o problema de encontrar uma representação para a potenciação. Várias foram as tentativas até obtermos a representação que temos hoje. Letras gregas, símbolos, abreviações e figuras, entre outros foram usadas. Diofanto indica símbolos algébricos especiais para representar potência uma contribuição importante ao longo do tempo.
- Durante a história da operação potenciação, houve a necessidade de expressar potências com expoentes fracionários, desde Oresme (1360) até as pesquisas de Newton (1660) e a demonstração de Gauss no século XIX, das séries infinitas.
- Ao longo da história, houve também a necessidade de representação para os expoentes zero e negativos. Chuquet, em 1484, estabelece uma noção a respeito desse assunto.
- Outro aspecto relevante da história é a definição de regras, ou seja, o que para nós hoje são as propriedades de potência. Nicole Oresme, em torno de 1360, já sugere estas regras quando resolve problemas de proporção.

[12] Quando nos expressamos por meio de "números muito grandes", estamos nos referindo a um número com muitas casas decimais e que tem uma difícil representação.

3.3 Documentos Oficiais da Educação Brasileira

Neste item do capítulo apresentaremos uma análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio ($PCNEM_+$) e da Proposta Curricular do Estado de São Paulo (PCESP).

3.3.1 Potenciação e os PCN – PCN do Ensino Fundamental e PCNEM

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) na disciplina Matemática oferecem uma orientação para que o aluno seja favorecido no conhecimento matemático e que possa estar inserido no mundo, no trabalho, na cultura, relações sociais, participação como cidadão e compreensão da realidade em que está inserido. *"A Matemática caracteriza-se como uma forma de compreender e atuar no mundo e o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural".* (BRASIL, 1998, p. 24).

Os PCN (1998) ressaltam a importância de que o processo de aprendizagem não seja por meio de atividades mecânicas na resolução de problemas, mas sim com atividades alternativas elaboradas que permitam desenvolver nos alunos suas capacidades cognitivas e a confiança em enfrentar desafios, sendo assim a atividade matemática escolar deve favorecer a construção e a apropriação do conhecimento pelo aluno.

Os PCN (1998) relatam que o aluno deve ser participante em seu processo de aprendizagem. Essa participação deve ser orientada pelo professor que deve ser um mediador em um trabalho que deve valorizar o pensamento do aluno. O professor deverá selecionar meios e formas para organizar conteúdos levando em conta a importância social e a contribuição para o desenvolvimento intelectual do aluno.

A questão do erro também é vista nos PCN (1998), como algo inerente ao processo de aprendizagem e a relação entre aluno e um objeto, servindo também como uma adequação da ação do professor.

Conforme os PCN:

> Nesse processo de interação do sujeito com o objeto a ser conhecido, o primeiro constrói representações, que funcionam como verdadeiras explicações e que se orientam por uma lógica interna que faz sentido para o sujeito. Essas idéias, construídas e transformadas ao longo do desenvolvimento, fruto de aproximações sucessivas, são expressões de uma construção inteligente por parte do sujeito. No entanto, muitas vezes são incoerentes aos olhos de outros sujeitos que as interpretam como erros. (BRASIL, 1998, p. 71).

Os $PCNEM_+$ (Brasil, 2004) são documentos complementares dos PCNEM que são os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e estão voltados diretamente ao professor por meio da organização de cada disciplina. Nele, o conhecimento é dividido em três grandes áreas:

- Linguagens e Códigos
- Ciências da Natureza e Matemática
- Ciências Humanas

Na primeira competência mais específica, que é a representação e comunicação, temos como objetivo geral o reconhecimento e utilização adequados, tanto na forma oral como na forma escrita de símbolos, códigos e nomenclatura da linguagem científica. O documento ressalta, em relação aos objetivos específicos da Matemática e pertinentes à operação potenciação, a compreensão do significado dos dados apresentados com potências.

Os PCNEM traçam um conjunto de temas que podem contemplar as competências aspiradas com uma relevância científica e cultural: álgebra, números e funções, geometria e medidas e análise de dados. Em álgebra, temos como objeto de estudo os campos numéricos dos números reais, suas operações e propriedades.

Neste trabalho, estudamos os erros dos alunos em relação à operação potenciação, baseando-nos também nos PCNEM que relatam a importância do erro na aprendizagem ao expor que:

> Na escola, uma das características mais importantes do processo de aprendizagem é a atitude reflexiva e autocrítica diante dos possíveis erros. Essa forma de ensino auxilia na formação das estruturas de raciocínio, necessárias para uma aprendizagem efetiva, que permita ao aluno gerenciar os conhecimentos adquiridos. (BRASIL, 2004, p. 46).

O conhecimento matemático deve favorecer ao aluno um desenvolvimento de competências e habilidades para que ele possa trabalhar situações e desafios capacitando-o para compreender, tomar decisões e generalizar ações. O aluno deve ser colocado frente a problemas ou atividades, nas quais ele não tenha receio de escolher caminhos para resolvê-las.

> Nesse caso, percebemos, que mesmo quando possuem informações e conceitos os alunos não os mobilizam, não os combinam eficientemente, desanimam, esperam a explicação do professor, não se permitem tentar, errar, não confiam em suas próprias formas de pensar. (BRASIL, 2004, p. 113).

Conforme os PCN (Brasil, 1998), ao longo da história, a Matemática tem convivido com as vertentes epistemológicas e lógicas, na qual a demonstração e o formal têm sido aceitos como única forma de validação de seus resultados. A Matemática não é uma ciência empírica e seu papel heurístico tem desempenhado fontes de teorias matemáticas.

Estas características admitem o saber matemático como algo flexível e maleável, relacionando-se com várias áreas científicas e diferentes modos de representação. Ainda, conforme o documento (p. 26), “Um saber matemático desse tipo pode ser um motor de inovações e de superação dos obstáculos, desde os mais simples até aqueles que significam verdadeiras barreiras epistemológicas no seu desenvolvimento”. O documento traz sugestões de como trabalhar a operação potenciação com números naturais por meio de situações que envolvam multiplicações sucessivas.

As potências de expoente 1 e expoente zero podem ser compreendidas por meio de observações feitas em tabelas que mostrem as regularidades das sequências, conforme os dados do Quadro 4 a seguir:

Quadro 4: Potenciação com expoentes naturais

4^5	4^4	4^3	?	?
1024	256	64	16	....

Fonte: (Brasil, 1998, p. 113)

Os expoentes negativos seriam uma consequência da tabela anterior, na qual o aluno poderá também notar a regularidade, conforme os dados do Quadro 5 a seguir:

Quadro 5: Potências com expoentes negativos

4^4	4^3	4^2	4^1	4^0	4^{-1}	4^{-2}	4^{-3}	4^{-4}
256	64	16	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	......

Fonte: (Brasil, 1998, p. 113)

Outra sugestão relevante que os PCN (Brasil, 1998) trazem está relacionada à notação científica que é utilizada para representar números muito grandes ou muito pequenos. Normalmente, essa representação é inserida no conteúdo da 8ª série do Ensino Fundamental e da 1ª série do Ensino Médio.

3.3.2 Potenciação e a proposta Curricular do Estado de São Paulo (PCESP)

A Secretaria de Educação do Estado de São Paulo tem um projeto em que propôs, em 2008, um currículo para os níveis de ensino Fundamental – Ciclo II e Médio. A proposta tem por objetivo contribuir para uma melhor aprendizagem dos alunos da rede pública estadual, por meio de uma ação integrada e articulada dentro de todo sistema educacional de São Paulo.

O documento apresenta orientações para que a escola promova as competências imprescindíveis a fim de que o aluno enfrente o mundo contemporâneo.

A proposta contém diretrizes que traçam uma escola que também *aprende a ensinar,* utilizando o currículo como espaço de cultura e as competências, como referências, relatando a articulação dessas competências para aprender e a articulação com o mundo do trabalho. O documento apresenta a Matemática, como uma área específica e destaca sua exploração mais adequada, servindo a outras áreas transformando a informação em conhecimento em todos as suas formas de manifestação.

Sendo assim, após a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e o estabelecimento do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) destacou-se o que era relevante, como competências básicas nas propostas curriculares.

A Proposta Curricular do Estado de São Paulo (PCESP, 2008) registra que o processo da sua concepção partiu de experiências práticas prévias, revisão de documentos, diagnósticos e análise de projetos anteriormente realizados.

A PCESP (2008) é composta de cadernos do professor que são bimestrais e separados por série e disciplina, são sugeridos exercícios denominados Situações de Aprendizagem.

O papel da Matemática, segundo a proposta, é servir como meio de compreensão da realidade. Considera que o aluno se interessa por números e letras, utilizados como instrumento para o desenvolvimento do raciocínio lógico e abstração para objetos matemáticos.

Na proposta, a Matemática é apresentada como um sistema simbólico que se articula diretamente com a língua materna, nas formas oral e escrita, com a utilização de outras linguagens e diferentes recursos. Considera como conteúdos fundamentais: números; geometria; grandezas e medidas e tratamento da informação.

No conteúdo de Matemática, a operação potenciação é estudada nos dois ciclos, como vemos a seguir:

Ensino Fundamental:

- 5ªsérie – Introdução às Potências;
- 6ª série – Como Operações – (números negativos);
- 7ª série – Propriedades para expoentes inteiros;
- 8ªsérie – Potenciação e Radiciação em IR.

Ensino Médio:

- 1ªsérie como *Funções Exponencial e Logarítmica.*

A potenciação é tratada no caderno do primeiro bimestre da 5ª série de forma análoga à operação multiplicação, ou seja, uma multiplicação de fatores iguais. Sugere como situações de aprendizagem, problemas de contagem e construção de árvores de possibilidades para que o aluno generalize e escreva-as na forma de potência. Indica, também, a resolução de expressões numéricas com potências.

No caderno de 6ª série, existe a indicação de se trabalhar potenciação de expoentes negativos com a utilização de regularidades e equivalências, como por exemplo, dividir por 10^1 é equivalente a multiplicar por 10^{-1}, dividir por 10^2 é equivalente a multiplicar por 10^{-2} e assim por diante. Na situação de aprendizagem, é dado o exemplo de representar o número 4735,8902 com o uso de potência de base 10. O exemplo é dado na forma de representação do Quadro 6:

Quadro 6: Representação do número 4735,8902.

4	7	3	5	8	9	0	2
$\times\ 10^3$	$\times 10^2$	$\times 10^1$	$\times 10^0$	$\div\ 10^1$	$\div\ 10^2$	$\div\ 10^3$	$\div\ 10^4$
4 milhares	7 centenas	3 dezenas	5 unidades	8 décimos	9 centésimos	0 milésimos	2 décimos de milésimos

Fonte: (PCESP, 2008, p. 18)

Na 7ª série, a orientação dada ao estudo das potências é ampliar o conceito de potenciação, utilizando expoentes negativos e discutindo-se as propriedades de potências.

Para o primeiro bimestre, as situações de aprendizagem utilizam o recurso de trabalhar potências desenvolvido por meio da idéia de números muito grandes ou muito pequenos. São sugeridas atividades de comparação entre potências, como por exemplo, dentre os números 2^{10}, 10^3, 10^7, qual o número escrito com maior quantidade de dígitos, no qual o aluno possa ser motivado a descobrir e compreender a potência.

O objeto é contextualizado com informações apresentadas em uma tabela com exemplos de números muito grandes e pequenos, dando exemplos como número de moléculas em 1g de água (3.10^{22}), número de células do corpo humano (10^{11}), massa da molécula de água (3.10^{-23}) e outros.

Apresenta sugestão, para uso da calculadora com a construção de um quadro, relacionando os expoentes da potência de base 2 com o número de casas do resultado da potência escrito por extenso. O exercício pede que se use expoentes naturais de 0 a 26, conforme a figura a seguir:

n	2 elevado a *n*	número de algarismos
0	1	1
1	2	1
2	4	1
3	8	1
4	16	2
5	32	2
6	64	2
7	128	3
8	256	3
9	512	3
10	1024	4
11	2048	4
12	4096	4
13	8192	4
14	16384	5
15	32768	5
16	65536	5
17	131072	6
18	262144	6
19	524288	6
20	1048576	7
21	2097152	7
22	4194304	7
23	8388608	7
24	16777216	8
25	33554432	8
26	67108864	8

Figura 6: Exercício que relaciona os expoentes da potência 2 com o número de casas do resultado da potência escrita.

Fonte: PCESP (2008, 7ª. Série, 1º. Bimestre, p. 29)

A proposta oferece também um exercício em que é solicitada a construção de um gráfico, a partir do quadro anterior, relacionando o expoente 2 e número de algarismos da escrita por extenso do resultado das potências. Em outro item, é solicitado que o aluno observe o padrão e o gráfico, determinando o número de algarismos da escrita por extenso de 2^{100}, conforme a figura a seguir apresenta:

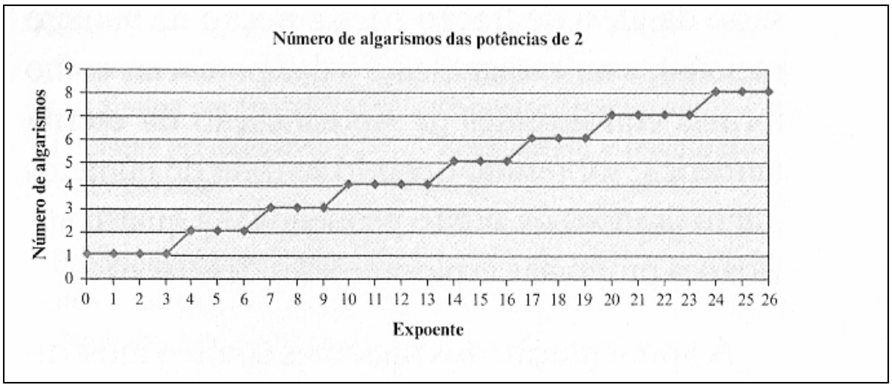


Figura 7: Exercício com objetivo de observação dos padrões por meio de gráfico.
Fonte: PCESP (2008, 7ª. Série, 1º. Bimestre, p. 29)

O caderno traz também problemas que provocam a curiosidade do aluno, mesmo que irreais, como por exemplo, o diâmetro de um fio de cabelo é aproximadamente $2{,}54.10^{-5}$m. Quantos fios de cabelo humano teriam de ser colocados lado a lado para formar 1m?

Na situação de aprendizagem oferecida no caderno da 8ª série, existe a proposta de uma abordagem significativa para a notação científica, na qual o professor deve ressaltar as vantagens e aplicação dessa forma de representar números. As questões colocadas são cálculos em que o aluno pode observar as regularidades em relação ao deslocamento da vírgula, segundo os expoentes da base, como por exemplo, calcular o produto $3{,}16 \times 10$ e verificar o deslocamento da vírgula no produto. A sugestão também é dada para expoentes negativos, como por exemplo, calcular o produto $85{,}2 \times 10^{-1}$ e verificar o deslocamento da vírgula no produto. São sugeridas questões do tipo: quando multiplicamos um número por 10^{-1}, desloca-se a vírgula, da direita para esquerda, de quantas casas decimais?

O caderno de 1ª série do Ensino Médio trata da Função Exponencial por meio da Situação de Aprendizagem que tem por objetivo a consolidação da ideia de potenciação e apresentando a função exponencial $f(x) = a^x$, sendo a base a um número positivo e diferente de 1. A proposta sugere que o professor realize com os alunos revisão dos conhecimentos sobre potências, já estudados no Ensino Fundamental. O texto apresenta as propriedades de potências como $a^m . a^n = a^{m+n}$ e $a^m : a^n = a^{m-n}$. Inclui os casos de a^0 *e* a^{-n} e trata de expoentes racionais.

Nesta pesquisa, esses documentos serão utilizados com o propósito de obter referências sobre o ensino de Matemática, mais pontualmente em relação à potenciação, cuja análise consideramos relevante, pois apresentam um modelo de conteúdo do programa, trazendo orientações didáticas e procedimentos matemáticos que podem auxiliar o professor em sala de aula.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais atribuem grande importância ao processo de aprendizagem por meio de questões que coloquem o aluno frente às situações desafiadoras e inovadoras. Quanto à operação potenciação, notamos a importância que os documentos dão à observação de regularidades.

Consideramos as sugestões trazidas na PCESP (2008), por meio das Situações de Aprendizagem, compatíveis com o conteúdo proposto para o ensino sem propor questões inusitadas, ou seja, a potenciação é abordada inicialmente pela definição e suas propriedades sempre usam a idéia de números pequenos e números grandes.

A questão da observação de regularidade é tratada com alguma ênfase. Esta apreciação da PCESP (2008) foi realizada com o objetivo de verificar o que está sendo sugerido pelos órgãos competentes da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, no tema potenciação, como subsídio e aprimoramento do currículo, aos profissionais docentes.

3.4 Potenciação e o Livro Didático

Ao longo do tempo, o livro didático vem notadamente passando por mudanças significativas, tanto em seu conteúdo como em sua abordagem.

Entendemos que o livro didático é o principal instrumento utilizado pelo professor de Matemática na elaboração de suas aulas. Portanto, exerce grande influência sobre o processo de ensino e aprendizagem, na medida que a partir dele o professor seleciona os conteúdos que vão ser ministrados e o modo como serão abordados.

Conforme o PNLD[13]:

> O livro didático contribui para o processo ensino-aprendizagem como mais um interlocutor que passa a dialogar com o professor e o aluno. Nesse diálogo, tal texto é portador de uma perspectiva sobre o saber a ser estudado e sobre o modo de conseguir aprendê-lo mais eficazmente, que devem ser explicitados no manual do professor. (BRASIL, 2008, p. 9).

A análise dos livros didáticos possibilitará observar a forma, como o objeto potenciação está exposto, bem como os vários tipos de exercícios apresentados sobre essa operação que estão propostos no Ensino Fundamental e Médio, pois levaremos em conta a influência do livro didático na sala de aula e na prática do professor.

3.4.1 Análise do Livro Didático

Para análise do livro didático, também, relacionaremos a apresentação dos exercícios, ou seja, as tarefas ligadas aos seguintes tópicos:

a. Relacionados à definição de potenciação

b. Relacionados às propriedades da operação potenciação

c. Uso de referências a fatos do cotidiano por meio de problemas

d. Uso de tratamento e conversões

e. Uso de quadros, figuras e tabelas

f. Uso de convenções matemáticas

Com base nesses critérios, analisaremos os livros didáticos, apresentando como o conteúdo potenciação é abordado, segundo a Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard (1999). Consideramos os tipos de tarefas que estão propostas, assim como as técnicas, ou seja, os métodos de resolução, tecnologias e teorias relacionados a problemas ou cálculos com a operação potenciação.

[13] PNLD – Programa Nacional do Livro Didático.

O estudo do homem (aluno e professor) frente à Matemática é chamado de Antropologia do Didático. Almouloud (2007, p. 113) destaca: uma razão ao uso do termo "antropológico", é que a Teoria Antropológica do Didático situa a atividade matemática e, em consequência o estudo da Matemática no conjunto de atividades humanas e de instituições sociais.

Segundo Almouloud (2007) em Didática da Matemática, no campo da antropologia do conhecimento considera-se que tudo é objeto, distinguindo os objetos particulares: as instituições e as posições que os indivíduos ocupam nas instituições, pois estes são os sujeitos da instituição.

A TAD estuda o conhecimento matemático com base nas organizações que podem ser: matemática ou didática. A organização matemática está relacionada com o cotidiano da sala de aula quando se trata de um objeto matemático. A organização didática refere-se ao modo de apresentação desse objeto.

A palavra praxeologia é formada por dois termos gregos, práxis que significa prática e logos, razão.

Praxeologia ou Organização Praxeológica é o conjunto de técnicas, teorias e tecnologias necessárias para responder a um objeto de estudo. A função do professor é criar uma organização praxeológica que possibilite ao aluno ter acesso à organização matemática.

Para modelizar as práticas sociais e, em particular, a atividade Matemática, temos as noções, segundo Chevallard (1999), de:

- Tarefa: designa uma ação, o que é para fazer: calcular, verificar e demonstrar;
- Técnica: jeito de fazer sistemático e explícito que permite realizar tarefas;
- Tecnologia: discurso que interpreta e justifica a técnica; e
- Teoria: discurso que justifica a tecnologia.

Para resolver uma questão matemática, Chevallard (1999) relaciona com a *práxis* as tarefas e as técnicas. A *práxis* é o saber-fazer.

Para justificar as técnicas, necessitamos de um discurso e uma razão. Esse discurso é o *logos* que é formado pela tecnologia e pela teoria. Assim, o *logos* é o saber.

Em nosso trabalho, designamos como *discurso tecnológico-teórico* a integração entre tecnologia e teoria.

Segundo Chevallard:

> Ao redor de um tipo de tarefa T, se encontra em princípio, um trio formado por uma técnica (uma pelo menos), τ, por uma tecnologia, θ e por uma teoria, Θ. No total indicado por $[T, \tau, \theta, \Theta]$, constituindo uma praxeologia pontual, onde este último qualificativo significa que se trata de uma praxeologia relativa a um único tipo de tarefa, T. Tal praxeologia ou organização praxeológica está constituída por um bloco prático-técnico $[T / \tau]$ e por um bloco tecnológico $[\theta / \Theta]$. (CHEVALLARD, 1999, p. 6).

Na teoria antropológica do didático, o conhecimento e o saber entram em jogo com a noção de “rapport”, ou seja, um objeto existe se um sujeito ou uma instituição o reconhece. Na verdade, tal noção está imersa nas práticas sociais que se realizam na instituição que envolvem o objeto em questão, sendo assim um objeto pode existir em uma época e em outra, não. O mesmo ocorre na Matemática, existem objetos que foram reconhecidos em certa época, mas, que desapareceram (por exemplo, alguns conteúdos da Matemática Moderna), sendo assim, certas técnicas somem (recursos tecnológicos substituem a técnica).

Conforme Chevallard (1999), para fazer uso dessa teoria, três postulados são exigidos: toda prática institucional pode ser analisada de diferentes maneiras, em sistema de tarefas relativamente bem delineadas; o cumprimento de toda tarefa decorre do desenvolvimento de uma técnica e a ecologia das tarefas, quer dizer, as condições e entraves permitem sua produção e sua utilização nas instituições.

Bosh e Chevallard (1999, apud ALMOULOUD, 2007) relatam que o fato dos objetos matemáticos possuírem uma “natureza” um tanto própria, levou a uma dicotomia de dois tipos de objetos: os ostensivos e os não-ostensivos. Os *objetos ostensivos* referem-se a todo objeto, tendo uma natureza sensível, certa materialidade que tem para o sujeito uma realidade perceptível como palavras e gestos, e os objetos não ostensivos são os que, como conceitos, existem institucionalmente sem que, no entanto sejam vistos, ditos, escutados ou percebidos.

A potência *dois elevado ao cubo* é uma representação em língua natural, pode servir de exemplo a um objeto ostensivo e pode ser representada por 2^3.

Para esclarecer e tratar um objeto matemático relativo a uma prática, deve-se analisá-lo por meio de duas categorias: a *organização matemática* relacionada à realidade matemática e a *organização didática* relacionada à maneira como se pode construir essa realidade.

A TAD e a potenciação

Em nossa pesquisa, a TAD será utilizada para a análise da organização didática que faremos do livro didático e a análise do instrumento diagnóstico aplicado. Para que isso seja feito de modo simplificado nomeamos as tarefas, técnicas e discursos tecnológico-teóricos nos quais empregaremos as seguintes notações:

T: Tarefa: o que se pede para realizar em uma questão.

τ: Técnica: a maneira como se faz uma tarefa.

[θ / Θ]: Discursos tecnológico-teóricos: são os discursos tecnológico-teóricos como os conhecimentos mobilizáveis que estão presentes e são utilizados pelos alunos quando eles têm um saber explícito ou não a respeito do que justifica uma técnica utilizada.

Sobre o tipo de questão:

φ: Questão com uma atividade matemática com foco no conteúdo matemático.

β: Questão com foco em uma situação-problema na qual o aluno pode verificar e aplicar seus conhecimentos.

As tarefas, as técnicas, o discurso tecnológico-teórico serão representados com o uso de um índice que serão assim classificados:

Tipos de Tarefas:

T_1 = Tarefa do tipo calcular, efetuar.

Nesta tarefa, solicita-se que se calcule o valor de uma potência, como por exemplo, calcule o valor de $(-2)^3$.

T_2 = Tarefa do tipo transformar, representar.

Este tipo de tarefa é conveniente a vários tipos de questões e problemas, é bastante empregada quando se trabalha com propriedades de potências, que se pede para representar em uma única potência, como por exemplo, represente em uma só potência o produto $2^3 . 2^5$.

T_3 = Tarefa do tipo encontrar, descobrir e completar.

Tarefa em que, de maneira geral, aparecem quadros e lacunas a completar. É muito utilizada quando se tem a observação de regularidades.

T_4 = Tarefa do tipo resolver.

Tarefa empregada quando se quer resolver alguma situação-problema.

Tipos de Técnicas:

τ_1 – *técnica na qual o aluno resolve a potenciação por meio da definição*. Quando se utiliza o recurso desta técnica, se faz o uso da multiplicação sucessiva, por tantas vezes quanto for o expoente.

$$2^3 = 2.\ 2.\ 2$$

τ_2 – *técnica na qual o aluno evoca e utiliza a regra de sinais*. Consideramos o uso desta técnica quando o aluno responde corretamente à questão sem fazer o uso da multiplicação sucessiva. O aluno pode também justificar lembrando que, por exemplo, todo número negativo elevado a um expoente ímpar resulta em um resultado com sinal negativo.

$$(-2)^3 = -8$$

τ_3 – *técnica na qual o aluno utiliza as convenções matemáticas com expoentes zero e 1 e base zero*. Quando essa técnica é utilizada, entendemos que se empregou o recurso de regras ou convenções matemáticas. Podemos considerar que o aluno entende, por exemplo, que todo número elevado a zero é igual a 1.

$$(-5)^0 = 1$$

τ_4 – *técnica de resolução por tentativa e erro.* Normalmente essa técnica é sugerida subjetivamente nas questões. De maneira geral, situações nas quais o aluno deve observar regularidades. Nesta técnica, o aluno precisa apresentar alguma maneira própria para resolver o problema.

τ_5 – *técnica na qual o aluno usa a operação inversa à potenciação, radiciação.*

Esta técnica mostra uma possibilidade de justificativa do aluno, na qual ele pode recorrer à operação inversa.

$3^2 = 9$, porque a raiz quadrada de nove é igual a 3.

τ_6 – *técnica que resolve potência com expoente negativo.* Nesta técnica, o aluno faz automaticamente a inversão do numerador e do denominador da fração, ou seja, inverte a base mudando, assim, o sinal do expoente.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

τ_7 – *técnica na qual o aluno utiliza de forma incorreta a operação multiplicação, fazendo o produto da base pelo expoente.* Muitas vezes, o aluno utiliza esse recurso e efetua de maneira errada a potenciação. Convém lembrar também que consideramos o uso dessa técnica ao longo de toda análise, como um uso inadequado da definição de potenciação.

$2^3 = 6$, porque 2.3 = 6

τ_8 – *técnica na qual o aluno utiliza o recurso da visualização.* Consideramos a visualização, como técnica a partir do momento em que o sujeito consegue extrair de uma figura, que é um tipo de representação, a noção de um objeto e obtém outra representação desse objeto. O aluno pode representar a figura acima como 3^2 .

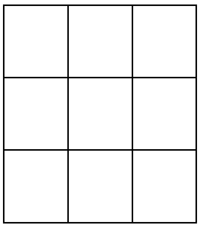


Figura 8: Representação figural da potência 3^2, em um quadrado de lado 3 unidades.

τ_9 – *técnica que utiliza as operações para o cálculo existente nas propriedades da potenciação.* Quando se aplicam as propriedades da potenciação, empregam-se algumas operações para efetivá-las. A adição dos expoentes refere-se à multiplicação de potências de mesma base. Consideramos essa operação de adição como uma técnica.

$$2^3.2^4 = 2^7.$$

τ_{10} – técnica na qual o expoente fracionário, o numerador passa a ser expoente do radicando e o denominador, o índice do radical.

$$r^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{r^2}$$

τ_{11} – técnica na qual se utiliza o recurso de regularidades e padrões numéricos.

$$2^2 = 4$$

$$2^1 = 2$$

$$2^0 = 1 \ldots\ldots\ldots$$

τ_{12} – técnica na qual o aluno utiliza conversões matemáticas.

$$0{,}01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$$

τ_{13} – técnica na qual o aluno utiliza a distributiva do expoente para a base.

$$(2 \,.\, 3)^3 = 2^3 \,.\, 3^3$$

Tipos de Discursos tecnológico-teóricos:

$[\theta / \Theta]_1$ – Definição de potenciação.

$[\theta / \Theta]_2$ – Propriedades da potenciação.

$[\theta / \Theta]_3$ – Busca de padrões numéricos matemáticos ou regularidades.

$[\theta / \Theta]_4$ –Uso da operação inversa à potenciação, radiciação.

$[\theta / \Theta]_5$ – Regras de sinal.

$[\theta / \Theta]_6$ – Convenções matemáticas do tipo $a^0 = 1$, $a \neq 0$ e $a^1 = a$.

$[\theta / \Theta]_7$ – Potência com expoente negativo.

$[\theta / \Theta]_8$ – Potência com expoente fracionário.

$[\theta / \Theta]_9$ – Conversões matemáticas entre números e potências.

Nosso critério de escolha foi selecionar as coleções utilizadas e adotadas pela escola onde realizamos o diagnóstico, lembrando que é a mesma escola na qual o piloto foi aplicado e, por entender, a necessidade de responder a nossa questão de pesquisa decidimos por eleger estas duas coleções de livros didáticos para análise.

A primeira, de 5ª a 8ª série “Matemática na Medida Certa” que foi adotada na escola, até 2007, tem como autores José Jakubovic, Marcelo Lellis e Marília Centurión. O livro não é consumível e cada aluno recebe o seu, devolvendo-o ao final do ano. A coleção foi usada nos últimos 4 anos, razão de nossa escolha para análise.

A segunda coleção faz parte do Projeto Araribá, é uma obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna. A autora responsável é Juliana Matsubara Barroso, professora em escolas públicas e particulares da cidade de São Paulo, licenciada pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. O livro não é consumível e cada aluno recebe o seu, devolvendo-o ao final do ano. Os alunos receberam-na a partir de 2008, motivo pelo qual também escolhemos esta obra.

De igual modo, escolhemos o livro da 1ª série do Ensino Médio de autoria de Edwaldo Bianchini e Herval Paccola. O livro não é consumível e todos os alunos recebem seu exemplar, devolvendo-o ao final do ano. Este livro foi adotado, desde 2006, e está em uso até o presente ano, razão de nossa escolha para análise. Optamos apenas pelo livro da 1ª série, uma vez que o conteúdo relacionado à operação potenciação está contido nesse volume.

Os livros didáticos adotados na escola foram escolhidos pelos próprios professores e sugeridos à Secretaria Estadual da Educação do Estado de São Paulo que, em conjunto com as editoras, fornecem o material aos alunos.

3.4.1.1 Livros do Ensino Fundamental

A análise dos livros didáticos será feita para cada série, trazendo informações gerais sobre como a potenciação é apresentada e uma análise específica para questões selecionadas.

<u>**Matemática na Medida Certa**</u>

O livro de **5ª série** traz a potenciação em três momentos: com números naturais, frações e números decimais. O estudo da potenciação inicia-se com um capítulo chamado *Potenciação e os números grandes*.

A princípio a definição de potenciação aparece com o uso do recurso de dobraduras. É proposto ao aluno que usando uma folha de papel, faça dobras ao meio, inúmeras vezes que assim possa notar em quantas partes a folha ficou dividida. Após esta atividade, o livro traz a definição de potência com exemplos do tipo $2^5 = 2.2.2.2.2$, que classificamos por a τ_1[14] e o discurso tecnológico-teórico

$[\theta / \Theta]_1$[15].

[14] τ_1 – técnica na qual o aluno resolve a potenciação através da definição.

[15] $[\theta / \Theta]_1$ – Definição de potenciação.

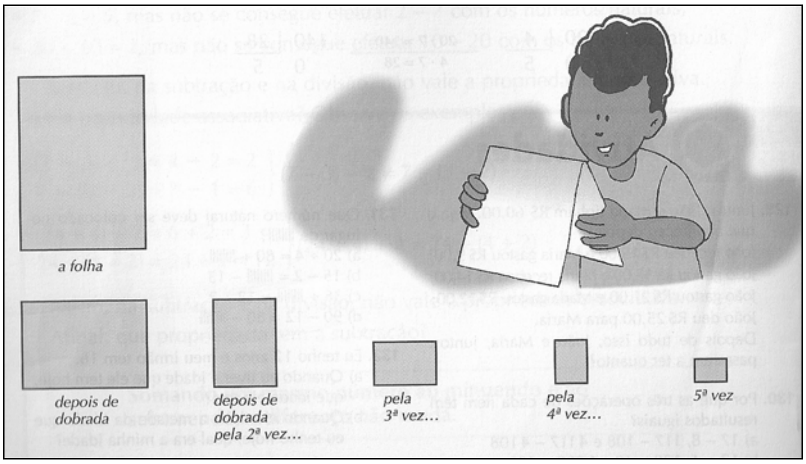


Figura 9: Potências de 2 por meio de dobraduras.

Fonte: Jakubovic et al. (2002, p. 48)

O livro traz um capítulo sobre potências com expoentes: 3, 2, 1 e 0. Apresenta a relação entre o termo *quadrado* e o expoente 2 e *cubo* e o expoente 3. Para entender a expressão quadrado e cubo, os autores apresentam figuras.

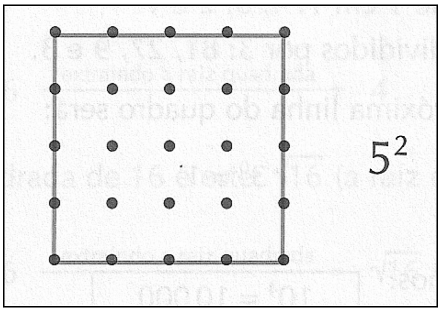


Figura 10: Representação de 5^2.

Fonte: Jakubovic et al. (2002, p. 55).

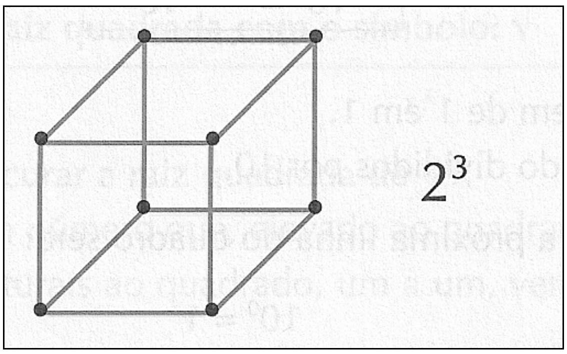


Figura 11: Representação de 2^3.

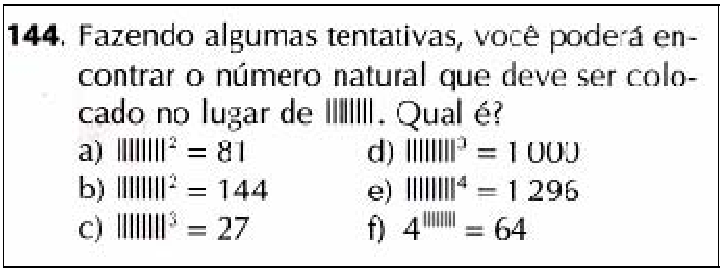
Fonte: Jakubovic et al. (2002, p. 55).

Observamos poucas questões relacionadas a situações-problema (β[16]) e ao cotidiano do aluno. De maneira geral, as atividades solicitam tarefas como calcular (T_1[17]) e representar (T_2[18]). Em algumas questões, é solicitada uma tarefa do tipo completar (T_3[19]), que pode utilizar a técnica por tentativas (τ_4[20]) .

Seguindo a definição de potências **[θ / Θ]$_1$** com números naturais, o livro traz a definição como uma analogia a primeira parte, com frações e números decimais apenas. Os exemplos empregam tarefas e técnicas do tipo efetue ou calcule (T_1). Como, por exemplo:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3}\bullet\frac{2}{3}\bullet\frac{2}{3} = \frac{8}{27} \qquad \text{e} \qquad 1{,}4^3 = 1{,}4 \bullet 1{,}4 \bullet 1{,}4 = 2{,}744$$

As atividades escolhidas e oferecidas aos alunos seguem os exemplos dados. Escolhemos uma atividade para análise com abordagem baseada na organização didática de Chevallard (1999).


144. Fazendo algumas tentativas, você poderá encontrar o número natural que deve ser colocado no lugar de ▮▮▮. Qual é?

a) ▮▮▮^{2} = 81
b) ▮▮▮^{2} = 144
c) ▮▮▮^{3} = 27
d) ▮▮▮^{3} = 1 000
e) ▮▮▮^{4} = 1 296
f) 4$^{▮▮▮}$ = 64

Figura 12: Potências de números naturais.
Fonte: Jakubovic et al.: (2002, p. 50).

16 β: Questão com foco numa situação–problema onde o aluno pode verificar e aplicar os seus conhecimentos.

17 T_1 = Tarefa do tipo calcular, efetuar.

18 T_2 = Tarefa do tipo transformar, representar.

19 T_3 = Tarefa do tipo encontrar, descobrir e completar.

20 τ_4 – técnica de resolução por tentativa e erro

É uma questão com uma atividade matemática com foco no conteúdo matemático φ[21]. Consideramos para essa questão: tarefa, as técnicas e os discursos tecnológico-teóricos abaixo:

T_3 – encontrar o número

τ_4 – técnica de resolução por tentativas

τ_5 – técnica na qual o aluno usa a operação inversa à potenciação, radiciação.

[θ / Θ]$_1$ – utilização da definição de potenciação

[θ / Θ]$_3$ – utilização do uso da operação inversa à potenciação, radiciação.

Na **6ª série**, o volume apresenta a operação potenciação em dois capítulos: o primeiro com números inteiros e depois com números racionais.

Na primeira parte, no cálculo de potência com números inteiros, é aplicado o uso de tabelas nas quais é sugerida a observação de padrões e regularidades **(τ_{11}[22])**. Como exemplo, temos um quadro onde o aluno é chamado a observar o padrão, utilizando o discurso tecnológico-teórico **[θ / Θ]$_3$** :

Quadro 7: Potências de (–5).

$(-5)^4 = 625$
$(-5)^3 = -125$
$(-5)^2 = 25$
$(-5)^1 = -5$
$(-5)^0 =$ **IIIII**

Fonte: Jakubovic et al. (2002, p. 104).

[21] φ : Questão com uma atividade matemática com foco no conteúdo matemático.

[22] τ_{11} – técnica na qual se utiliza o recurso de regularidades e padrões numéricos.

Neste exercício, são solicitadas as técnicas τ_1 e τ_{11} e o discurso tecnológico-teórico **[θ / Θ]$_3$** , e o uso da busca de padrões matemáticos.

O autor sugere a resposta $(-5)^0 = 1$ e explica que os resultados são divididos sempre por –5. Desta maneira, conclui também que "para todo número inteiro *a*, com $a \neq 0$, tem-se: $a^0 = 1$.

Diversas atividades são apresentadas na forma de tarefas do tipo calcular, efetuar **(T_1)** e representar **(T_2)**. O autor do mesmo modo que no livro de **5ª série**, usa alguns exercícios com situações-problema **(β)** relacionados ao cotidiano do aluno e utiliza algumas figuras, valendo-se do recurso da técnica da visualização **(τ_8[23])**. Um dos exercícios pede ao aluno que utilize a calculadora para completar um quadro de potências, sugerindo, assim, o emprego da calculadora como ferramenta.

Um capítulo a parte apresenta as propriedades de potências **[θ / Θ]$_2$**, os exemplos com números inteiros. As atividades relativas às propriedades da operação potenciação são variadas. A maioria é para escrever ou representar em uma potência, só utilizando as propriedades conhecidas. Outras são exercícios de completar com expoentes ou bases lacunas que estejam vazias e exercícios que exigem comparações de potências.

No capítulo referente à potenciação de racionais, o autor indica o cálculo com expoentes negativos. Como exemplo de potências de expoentes negativos, no Quadro 8 abaixo, solicita-se que o aluno observe que o resultado segue uma regularidade.

[23] τ_8 – técnica na qual o aluno utiliza o recurso da visualização.

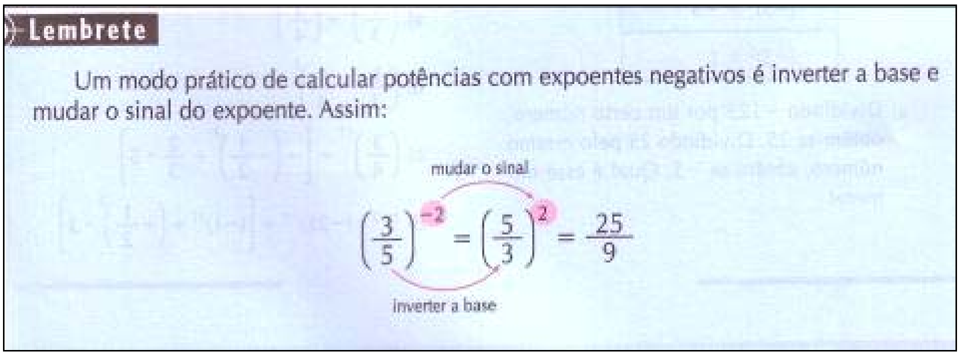
Quadro 8: Potência com expoente inteiro negativo.

$2^3 = 8$
$2^2 = 4$
$2^1 = 2$
$2^0 = 1$
$2^{-1} = \frac{1}{2}$
$2^{-2} = \frac{1}{4}$
$2^{-3} = \frac{1}{8}$

Fonte: Jakubovic et al.: (2002, p. 102).

Dessa maneira, é definido que “para todo número racional não nulo *a* e para todo o número inteiro negativo *–n,* tem-se: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ”.

Um modo prático de calcular potências com expoentes negativos é apresentado no livro, com um lembrete para o aluno. Sugere que ele inverta a base e mude o sinal do expoente. Ver figura 13:


Lembrete

Um modo prático de calcular potências com expoentes negativos é inverter a base e mudar o sinal do expoente. Assim:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^{2} = \frac{25}{9}$$

Figura 13: Regra prática para cálculo de potências com expoentes negativos.
Fonte: Jakubovic (2002, p. 103, 6ª. série)

Os exercícios que seguem são semelhantes àqueles com potência de números racionais e expoentes positivos. De maneira geral, as atividades solicitam o uso de tarefa do tipo calcular **(T_1)** e uso da técnica τ_1, empregando a definição de potenciação. Aparecem poucos exercícios, também, com uso de tabelas, comparação e situação-problema.

O livro de **7ª série** traz a potenciação relativa a monômios. Como exemplo, o autor cita que:

$(2x^3y^4)^3 = (2x^3y^4) \cdot (2x^3y^4) \cdot (2x^3y^4) = 8\,x^9y^{12}$, na qual se nota a resolução pelas técnicas τ_1 e τ_9, sugere o uso da propriedades da potenciação τ_{13}, como um meio mais rápido de resolução:

$(2x^3y^4)^3 = 2^3.(X^3)^3.\,(y^4)^3 = 8\,x^9y^{12}$. O autor usa o discurso tecnológico-teórico $[\theta / \Theta]_2$[24].

Em sua maioria, as atividades deste capítulo contêm questões com tarefas do tipo T_1, com o uso das técnicas τ_1, τ_9[25] e τ_{13}[26] e discurso tecnológico-teórico $[\theta / \Theta]_1$ e $[\theta / \Theta]_2$.

O livro de **8ª série** traz o primeiro capítulo intitulado “Potências com expoentes inteiros” exemplos utilizando o mesmo recurso que está apontado no livro de 5ª. série, com o recurso de dobraduras ou material manipulável.

Os exemplos seguintes são dados a título de recordação e utilizam a técnica τ_1.

Na página 9, o autor usa convenções matemáticas do tipo:

Atenção

Convenciona-se que -3^2 significa $-(3^2) = -(3 \cdot 3) = -9$.
Portanto, não se deve confundir -3^2 com $(-3)^2$, que é igual a $(-3) \cdot (-3) = 9$.

Figura 14: cálculo $-3^{\,2}$
Fonte: Jakubovic et al. (2002, p. 9)

[24] $[\theta / \Theta]_2$ – Propriedades da potenciação.
[25] τ_9 – técnica que utiliza as operações para o cálculo existentes nas propriedades da potenciação
[26] τ_{13} – técnica na qual o aluno utiliza a distributiva do expoente para a base.

O livro relata o uso das potências em textos científicos, apresentando a notação científica. Ressalta que a representação de um número racional em notação científica é sempre um número entre 1 e 10 (incluindo o 1) multiplicado por uma potência de base 10. Consideramos fundamental a notação científica, quando o aluno conhece esse tipo de notação e ele faz uso de conversão ou tratamento, como por exemplo:

$$2{,}5.\ 10^3 = 2{,}5.\ 1000 = 2500$$

Selecionamos uma questão do livro para análise, segundo a TAD.

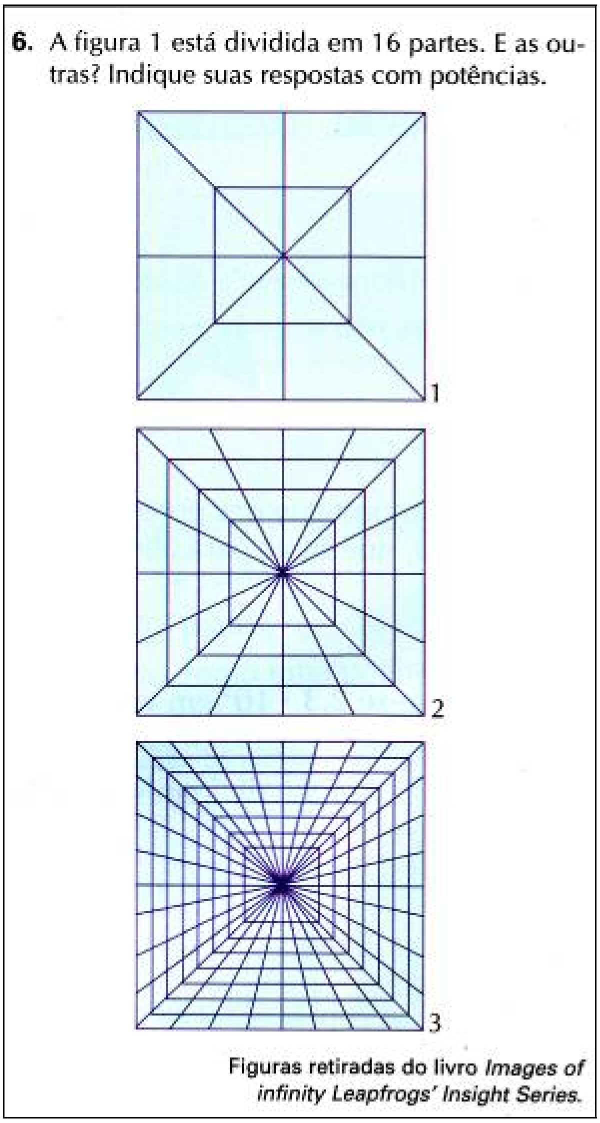


Figura15: Visualização de potências em registro figural.

Fonte: Jakubovic et al. (2002, p. 10)

Nesta questão, é solicitada uma tarefa do tipo T_2 e T_3, pois o aluno deverá representar cada figura por meio de uma potência relativa. A questão poderá ser resolvida com a técnica τ_8, uso da técnica de visualização e discurso tecnológico-teórico $[\theta / \Theta]_1$.

Na conclusão da análise dessa coleção, de livros didáticos observamos que a sistemática dos conceitos é atingida de forma objetiva. Segundo o PNLD (2008 p. 120), "de modo geral, a distribuição dos campos matemáticos é satisfatória ao longo da coleção, apesar de haver uma atenção excessiva ao campo dos números e operações na 5ª. série".

Em sua maioria, as atividades são questões com tarefas do tipo T_1, com a possível resolução por meio de diferentes técnicas. Algumas questões trazem o recurso de figuras que representam visualizações e outras com tarefas do tipo T_2.

Ao longo da apresentação do tópico sobre a operação potenciação, observamos situações em que são colocados os registros figurais.

Registramos que os autores não abordam no volume de 8ª série potenciação com expoentes fracionários.

Ainda, conforme o PNLD (2008, p. 118), "a coleção oferece várias situações em que os conhecimentos matemáticos aparecem ligados ao cotidiano, o que propicia a articulação destes às práticas sociais atuais e favorece a construção da cidadania".

No entanto, observamos que, ao longo do conteúdo potenciação, temos poucos registros relacionados a esse foco. A coleção traz seções *Desafios e Surpresas* e *Ação* com sugestões diferentes de atividades como jogos e experimentos. No final do livro, as respostas são fornecidas e também existem sugestões bibliográficas para os aluno.

Projeto Araribá

A coleção oferece os livros de 5ª, 6ª, 7ª, e 8ª. Séries, divididos em unidades que, por sua vez, são divididas em tópicos. A coleção dá ênfase à resolução de problemas e a cada tópico novo, é apresentada ao aluno uma situação em que ele poderá refletir e resolver um problema na maioria das vezes ligado a seu cotidiano. Segundo nossa observação, o livro traz ilustrações atraentes o que significa ser um livro agradável aos olhos do leitor.

O livro da **5ª série** traz potenciação apenas em um momento, potenciação com números naturais. Quando trata das ideias associadas à fração e números decimais em outras unidades, somente, são abordadas as quatro operações fundamentais e a operação potenciação não é retomada.

Inicialmente, a noção de potenciação é introduzida com uma situação-problema e ilustrada ao aluno. Ver Figura 16.

Marcos vai começar o programa de condicionamento físico que sua professora de Educação Física recomendou.
Esse programa consiste em caminhadas na pista do clube.
O número de voltas na pista deve dobrar a cada semana, até que a professora dê outra orientação.

Período	Número de voltas na pista
1ª semana	2
2ª semana	$2 \cdot 2 = 4$
3ª semana	$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
4ª semana	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

Há outra forma de representar multiplicações de fatores iguais?

Figura 16: Introdução ao conceito de potência.

Fonte: Barroso (2006, p. 63, 5ª. série)

A partir daí, o livro utiliza a nomenclatura da potenciação em exemplos dados, ressaltando a definição **[θ / Θ]$_1$**, como 3.3.3.3.3 = 3^5 = 243 e utilizando-se da técnica τ_1. Como temos cinco fatores iguais, o expoente é 5 para uma base 3 e 243 é uma potência de 3.

O capítulo traz como “regras especiais” o cálculo com expoentes *0* e *1* e exemplos representativos dessas convenções **$[\theta / \Theta]_6$**[27].

Os autores salientam a leitura da potenciação, trabalhando com a língua natural de forma aparente, muitos exemplos e algumas atividades relacionadas a esta abordagem são oferecidos. Já as propriedades de potência **$[\theta / \Theta]_2$**, são apresentadas de forma direta e com alguns exemplos.

As atividades proporcionadas são diversificadas. Em nenhum momento, foi solicitada a tarefa do tipo T_1**,** na qual ao aluno é pedido apenas o cálculo de uma potência. As atividades trabalham bastante a língua natural e apresentam exercícios do tipo:

- Qual é o dobro de 2^{17}?
- Qual é o triplo de 3^5?
- $3^2 + 5^2$ é diferente de $(3+5)^2$? Justifique a resposta.

O livro apresenta muitas questões e situações-problema do tipo β, nas quais o aluno pode verificar seu conhecimento por meio de situações de seu cotidiano.

Para análise, escolhemos uma atividade (ver Figura 17) que consideramos diferente e original, por apresentar variáveis significativas, como por exemplo, a base 6, além de pedir a interação entre os alunos.

3. Identifique a regularidade da seqüência numérica e descubra os três próximos termos.

46.656	7.776	1.296	216

- Agora, escreva em seu caderno esses 7 termos e associe-os com uma potência.
- Converse com um colega para saber como cada um pensou para resolver essa atividade.

Figura 17: Regularidades e potência.

Fonte: Barroso (2006, p. 64)

[27] $[\theta / \Theta]_6$ – Convenções matemáticas do tipo $a^0 = 1$, $a \neq 0$ e $a^1 = a$.

A questão é uma atividade matemática do tipo φ, com foco no conteúdo matemático. A tarefa relacionada a essa atividade é do tipo T_3, na qual o aluno deve descobrir termos de uma sequência. O aluno resolverá utilizando-se da técnica τ_4 em que ele vai tentar descobrir o próximo termo. Além disso, terá de empregar a técnica τ_1, descobrindo, assim, o valor das potências do quadro. Precisará dispor de conhecimentos relacionados aos discursos tecnológico-teóricos dos tipos **$[\theta / \Theta]_1$** e **$[\theta / \Theta]_3$**[28].

O livro de **6ª série** traz potenciação em dois capítulos: potenciação com números inteiros e potenciação com números racionais. Como introdução ao capítulo de potenciação de números inteiros, é apresentado o Triângulo de Sierpinski[29] .Ver figura 18.

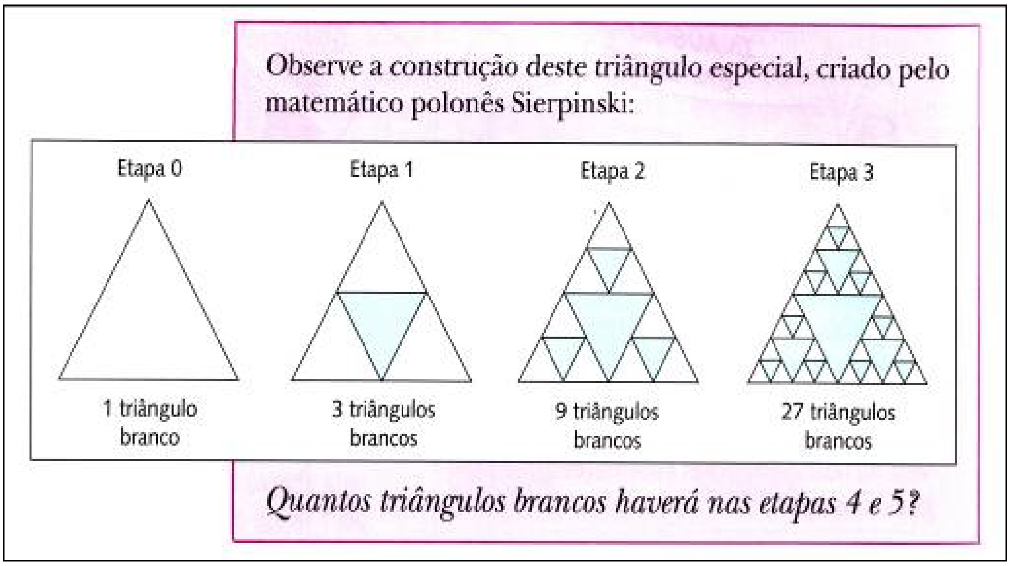


Figura 18: Triângulo de Sierpinski e as potências.
Fonte: Barroso (2006, p. 58, 6ª. série)

A partir da ideia do exemplo do triângulo, o item *Potências de base positiva e base negativa* é apresentado e mostra que, para qualquer número inteiro *a* e natural *n*, em que n>1, temos: $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n fatores), utilizando-se da técnica τ_1 e do discurso tecnológico-teórico **$[\theta / \Theta]_1$**. O livro segue o exemplo do

[28] $[\theta / \Theta]_3$ – Busca de padrões numéricos matemáticos ou regularidades.

[29] Waclaw Sierpinski (1882-1969) foi um grande matemático polonês. Em 1916, criou uma curva muito interessante, chamada triângulo de Sierpinski. (BIANCHINI, 2004, p. 106, 3ª. série).

triângulo para definir as potências de expoentes *1* e *zero,* **[θ / Θ]$_6$**. Para isso, apresenta as potências de base 3, mostrando que $3^5 = 243$ e que essa potência dividida sucessivamente por 3 resultará nas igualdades $3^1 = 3$ e $3^0 = 1$. Neste caso, o autor emprega o uso das técnicas τ_1 e τ_{11} e os discursos tecnológico-teóricos **[θ / Θ]$_1$** e **[θ / Θ]$_3$**.

Quanto ao sinal de uma potência não nula, o livro traz como regra os casos de bases positiva e negativa com expoentes par ou ímpar. Dá ênfase à leitura de potenciação, apresentando a língua natural e aborda as propriedades de potenciação de uma forma objetiva. No livro de 5ª série, as atividades são bastante variadas com tarefas dos quatro tipos: T_1, T_2, T_3, e T_4[30]. Existem questões do tipo φ e β onde o aluno além de focar o conteúdo matemático pode resolver situações-problema que aplicam o conhecimento matemático. Muitas dessas questões são relacionadas ao cotidiano do aluno. Para cada tarefa, existem diferentes técnicas que podem ser empregadas pelos alunos.

O livro também traz a noção da operação potenciação por meio de figuras.

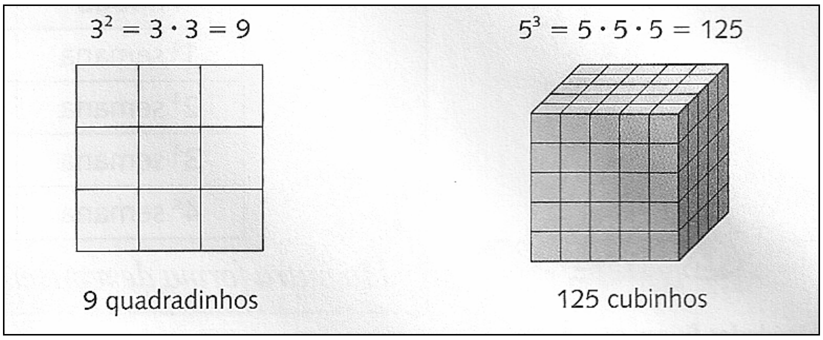


Figura 19: Potências por meio de linguagem figural.
Fonte: (Barroso, 2006, p. 64)

Escolhemos uma questão para análise, que está na página 63, exercício 15.

[30] T_4 = Tarefa do tipo resolver.

15. Observe a potência e resolva as questões.

$$(-4)^x$$

Substituindo *x* por números naturais, obtemos uma seqüência.

a) Para qual valor de *x* a potência é igual a −64?

b) Para qual valor de *x* a potência é igual a +256?

c) Analise a seqüência e determine para quais valores de *x* os termos da seqüência são positivos.

d) Determine para quais valores de *x* os termos são negativos.

Figura 20: Observação de regularidades em potência.
Fonte: (Barroso, 2006, p. 63)

A questão é uma atividade matemática do tipo φ, com foco no conteúdo matemático. Todos os itens são questões com tarefa do tipo T_3 que poderão ser resolvidas com as técnicas τ_1, τ_2[31], τ_4. Os discursos tecnológico-teóricos são dos tipos **$[\theta / \Theta]_1$**, **$[\theta / \Theta]_3$** e **$[\theta / \Theta]_5$**[32].

No capítulo sobre potenciação com números racionais, é feita uma abordagem equivalente à potenciação com números inteiros.

No volume de **7ª série**, localizamos um item sobre potenciação de números irracionais. O autor utiliza o recurso da visualização, como uma técnica τ_8 para definir o valor de $(\sqrt{2})^2 = \sqrt{2}.\sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$, ver Figura 21.

[31] τ_2 – técnica na qual o aluno evoca e utiliza a regra de sinais.

[32] $[\theta / \Theta]_5$ – Regras de sinal.

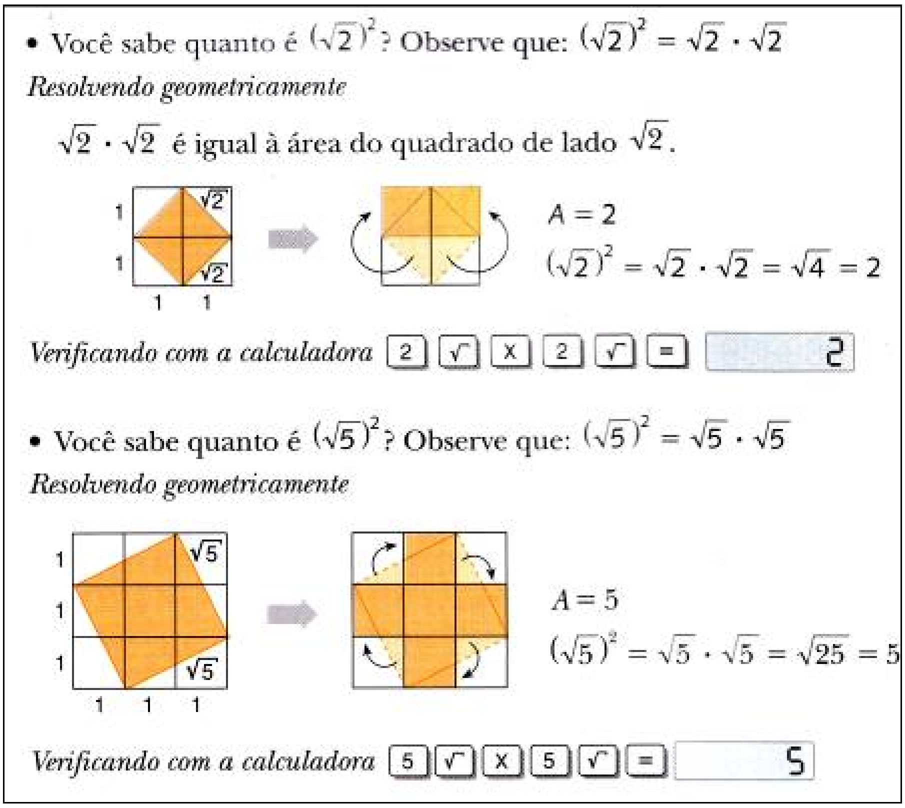


Figura 21: Resolução geométrica da potência de um número irracional.

Fonte: Barroso (2006, p. 26)

As atividades propostas aos alunos seguem o exemplo dado, apresentando a figura para visualização, na qual o aluno pode ter à disposição a técnica τ_8 e o discurso tecnológico-teórico **$[\theta$ / $\Theta]_1$,** ou apenas, pede o cálculo da potência com uma tarefa do tipo T_1.

O autor trabalha a potenciação de monômios, apresenta exemplos e atividades que se utilizam da definição de potenciação por meio de tarefas do tipo T_1, técnicas do tipo τ_1 e discurso teórico-tecnológico do tipo **$[\theta$ / $\Theta]_1$**.

O livro de **8ª série** apresenta a operação potenciação, como uma abordagem de recordação, trabalhando a definição, regras de sinais e convenções para expoente um e zero. Apresenta um item de potências com expoente racional. Registramos o número de 43 questões relativas à potenciação dos tipos φ e β abordadas que contemplam todos os tipos de tarefas, técnicas e discursos tecnológico-teóricos.

Escolhemos uma questão para análise, segundo a TAD. Ver Figura 22.

16. Reproduza a tabela, em seu caderno, e complete-a.

Potência	Base	Expoente	Desenvolvimento	Valor
2^6	■	■	■	■
■	■	-3	$3 \cdot 3 \cdot 3$	■
■	$\frac{3}{5}$	■	■	$\frac{125}{27}$
■	■	■	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$	■

- Há alguma linha dessa tabela que permita duas soluções? Comente com seu colega em que casos isso será possível.

Figura 22: Notação de potenciação.

Fonte: Barroso (2006, p. 17)

A questão é uma atividade matemática do tipo φ, com foco no conteúdo matemático. A tarefa é do tipo T_3, exige em sua resolução o emprego das técnicas τ_1, τ_2, τ_6[33]. Os discursos tecnológico-teóricos são do tipo **$[\theta / \Theta]_1$**, **$[\theta / \Theta]_3$** e **$[\theta / \Theta]_7$** exigem que o aluno tenha conhecimento da representação da operação potenciação e sua notação.

No livro de 8ª série, trabalha a idéia de notação científica e sugere o uso da calculadora como ferramenta, explicando ao aluno a possibilidade de escrever na calculadora científica números em notação cientifica e realizar cálculos com esses valores.

Ao concluir a análise desta coleção, podemos registrar a obra como uma importante ferramenta para o professor na escolha de atividades, uma vez que é bastante rica nesse aspecto. Quanto à operação potenciação, concordamos com o PNLD na análise desta obra, destacando:

[33] τ_6 – técnica que resolve potência com expoente negativo

> Os números e suas operações são abordados em seus diferentes significados. Porém há excessiva formalização de regras e procedimentos, muitas vezes, realizada de forma rápida, sem que o aluno tenha a oportunidade de observar regularidades e estabelecer suas próprias conclusões. (BRASIL, 2008, p. 103).

A coleção é bastante rica na diversidade de questões. Em sua maioria, as atividades são exercícios com tarefas de todos os tipos T_1, T_2, T_3 e T_4, com a possível resolução por meio de distintas técnicas. Algumas questões trazem o recurso de figuras que representam visualizações.

De maneira geral, os livros da coleção trazem uma metodologia na qual seus capítulos são sempre iniciados com questionamentos aos alunos que estabelecem sempre uma relação entre o que o aluno tem de conhecimento prévio e o assunto que será abordado.

3.4.1.2 Livro do Ensino Médio

O livro da **1ª série** do Ensino Médio *Matemática* traz no primeiro capítulo uma revisão dos conhecimentos básicos *de* aritmética e álgebra. Um dos itens é a operação potenciação, no qual é feita apenas uma revisão da operação.

O autor revê o conceito apresentando a operação potenciação com definições:

$$\begin{array}{|l|}
\hline
\text{Sendo } a \in \mathbb{R} \text{ e } m \in \mathbb{N}^*, \text{ definimos:} \\
a^m = a.a.a.a.a.....a, \text{ se } m > 2 \\
a^1 = a \\
a^0 = 1 \\
a^{-1} = \dfrac{1}{a} \\
a^{-m} = \dfrac{1}{a^m} \\
a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ se } a \in R_+^* \text{ e } n \in N^* \\
\hline
\end{array}$$

Figura 23: Definição da operação potenciação

Fonte: Bianchini (2004, p. 11)

São dados exemplos com o uso de tarefa do tipo T_1, técnicas τ_1 e discurso tecnológico-teórico **[θ / Θ]$_1$**, como no exemplo:

Efetuar:

$$\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{9} \; ou \; \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5^2}{3^2} = \frac{25}{9}$$

$$6^{-3} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1^3}{6^3} = \frac{1}{216}$$

O autor apresenta as propriedades das potências **[θ / Θ]$_2$** e, como exemplos, usa tarefas T_2 e técnicas τ_1 e τ_9. Ainda pede tarefas do tipo reduzir $2^x . 2^y = 2^{x+y}$ e expressar o modo que se pede $2^{x+5} = 2^x . 2^5$.

O item faz referência à notação científica e potências de base 10 de seu uso em números muito grandes ou muito pequenos e como representá-los.

Nos exercícios propostos, aparecem apenas tarefas do tipo T_1 e T_2: calcule o que se pede, reduza a uma só potência, represente com notação científica e efetue.

O autor não utiliza quadros, tabelas, gráficos e língua natural, nem faz referências às regras de sinais, nem convenções matemáticas relacionadas aos discursos tecnológico-teóricos **[θ / Θ]$_5$**[34] e **[θ / Θ]$_6$**.

Na conclusão da análise do livro, observamos que, em relação ao tema potenciação, a obra oferece ao aluno poucas oportunidades de mobilizar seus conceitos e conhecimentos, visto que as diferentes técnicas e discursos teórico-tecnológicos não são evocados.

Conforme a análise do PNLEM a respeito da obra

> A maioria dos exercícios limita–se à aplicação de regras e fórmulas vistas na parte teórica do livro. Situações–problema são pouco presentes na coleção e o aluno tem poucas oportunidades de inferir conceitos ou procedimentos, pois estes, em geral, já são apresentados em forma sistematizada. (PNLEM, 2006, p. 25).

---

[34] [θ / Θ]$_5$ – Regras de sinal.

O livro didático é considerado uma importante ferramenta para o professor, por isso julgamos relevante sua análise dentro de nossa pesquisa, pois pudemos ponderar, sobre a abordagem metodológica que as duas coleções consideradas tomam como princípios para apropriação adequada do conhecimento pelo aluno.

Elaboramos um quadro que representa uma síntese dos critérios escolhidos e observados e o livro didático.

Quadro 9: Critérios observados nos livros didáticos

Livros Didáticos									
	Matemática na Medida Certa				Projeto Araribá				Matemática
Critérios Observados	5a. série	6a. série	7a. série	8a. série	5a. série	6a. série	7a. série	8a. série	1a. série
Definição de potenciação	♦	♦	♦	♦	♦	♦	♦	♦	♦
Propriedades da potenciação	♦♦	♦♦	♦♦	♦♦	♦♦♦	♦♦♦	♦♦♦	♦♦♦	♦
Problematização	♦	♦	♦	♦	♦♦♦	♦♦♦	♦♦♦	♦♦♦	
Tratamento e conversões	♦	♦	♦	♦	♦♦	♦♦	♦♦	♦♦	♦
Quadros, figuras e tabelas	♦♦	♦♦	♦♦	♦♦	♦♦♦	♦♦♦	♦♦♦	♦♦♦	
Convenções ou regras especiais	♦♦	♦♦	♦♦	♦♦	♦♦♦	♦♦♦	♦♦♦	♦♦♦	♦
Tipos de Questões	♦	♦	♦	♦	♦♦♦	♦♦♦	♦♦♦	♦♦♦	♦
Tarefas	♦♦	♦♦	♦♦	♦♦	♦♦♦	♦♦♦	♦♦♦	♦♦♦	♦
Técnicas	♦♦	♦♦	♦♦	♦♦	♦♦♦	♦♦♦	♦♦♦	♦♦♦	♦
Discursos tecnológico - teóricos	♦♦	♦♦	♦♦	♦♦	♦♦♦	♦♦♦	♦♦♦	♦♦♦	♦

Para assinalar os critérios observados para a análise do livro didático, utilizaremos a seguinte legenda:

♦ ocorrência baixa – significa que o critério relacionado em relação à operação potenciação foi apresentado de modo não significativo no livro didático, com pouca variedade de exemplos e exercícios

♦♦ ocorrência média – significa que o critério relacionado em relação à operação potenciação foi apresentado de modo constante e uniforme no livro didático, com média variedade de exemplos e exercícios

♦♦♦ ocorrência alta – significa que o critério relacionado em relação à operação potenciação foi apresentado de modo muito significativo no trabalho, com grande variedade de exemplos e exercícios.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DE ERROS

4.1 O Instrumento Diagnóstico

A leitura de pesquisas correlatas, como Feltes (2007) e Sierra (2000) e a realização do piloto no momento inicial da pesquisa foram bastante apropriados, pois assinalaram e apontaram as possíveis respostas dos alunos em relação a cálculos com potenciação. A leitura desses autores foi significativa, pois direcionaram a confecção do instrumento diagnóstico.

Segundo Feltes:

> Nesta pesquisa, tive como objetivos analisar e classificar os erros em exercícios sobre potenciação e radiciação, no Ensino Fundamental, e na resolução de equações exponenciais, no 1º. ano do Ensino Médio. Estes dois objetivos foram alcançados com a ampla listagem de erros e as classes nas quais eles foram categorizados. Nos dois níveis de ensino, os erros mais freqüentes foram os das classes C – que envolve os erros em operações com conjuntos numéricos – e E, em que os estudantes desconsideram o expoente da potência ou não entendem a propriedade que envolve expoente negativo. (FELTES, 2007, p. 73).

Consideramos a pesquisa de Sierra (2000) e a classificação dos fenômenos relacionados em seu trabalho importantes na elaboração das questões do instrumento diagnóstico. As categorias ou fenômenos encontrados pelo autor foram usadas como referência e, de certa maneira, distribuídas nas questões do instrumento diagnóstico. A partir desse momento, pudemos ponderar que o teste serviu como instrumento para realizar um diagnóstico sobre como os alunos resolvem questões relacionadas à operação potenciação.

À luz destas pesquisas, sabemos que os alunos cometem erros quando efetuam a operação potenciação.

Consideramos que não seja suficiente saber como funciona um algoritmo, ou como o aluno efetua a potenciação mas sim por meio da análise epistemológica realizada articulada a uma organização matemática e didática, teremos como alvo um teste que ampliará a experimentação sobre o objeto de estudo.

Esta experimentação tem como ferramenta de pesquisa o instrumento diagnóstico, cujo objetivo é observar os possíveis erros e a justificativa das respostas dadas pelos alunos. A análise e a escolha das atividades do teste, levaram em consideração os seguintes critérios:

1. Variáveis de Situação e de Contrato – são as características que formam a aplicação do diagnóstico, observando a escolha das atividades, a forma de trabalho e a determinação do tempo da experimentação.

2. A pesquisa foi realizada com 30 alunos da 8ª série do Ensino Fundamental e 30 alunos do 1ª série do Ensino Médio da Escola estadual Dr. Alberto Cardoso de Mello. Decidimos trabalhar com alunos de 8ª série do Ensino Fundamental e de 1ª série, porque nestas séries os alunos já tiveram o contato com a potenciação e contribuirão de forma expressiva para a pesquisa. Os alunos dessa escola e de toda rede estadual têm na 8ª série do Ensino Fundamental seis aulas de Matemática por semana e os de 1ª série do Ensino Fundamental, cinco aulas de Matemática por semana na grade curricular do curso, todas as aulas com 50 minutos de duração.

Antes da aplicação do teste, houve uma preparação. A primeira providência foi a autorização pela direção de nossa pesquisa na escola, permitindo a entrada nas salas e o convite aos alunos.

A 1ª série do Ensino Médio realizou o teste no período da manhã e a 8ª série do Ensino Fundamental, à tarde. Uma sala foi disponibilizada onde os alunos sentaram sem lugar previamente marcado.

Duas sessões foram realizadas com diálogo, esclarecendo a razão do trabalho e como ele deveria ser feito.

Para garantir a representatividade do grupo escolhido para esta pesquisa, solicitamos autorização aos professores que estavam nas salas na primeira aula do dia da concretização do diagnóstico e entramos para falar com os alunos ressaltando a importância da pesquisa e solicitando aos que se dispusessem a fazer o teste, manifestassem seu desejo. Isto nos garantiu que os primeiros 30 alunos que realizaram o experimento, fizeram-no com responsabilidade e com seriedade.

Montamos cadernos com as questões numeradas de 1 a 9, que foram distribuídos com lápis e borracha e fizemos a leitura dos enunciados das questões para que cada aluno conferisse seu conteúdo, não houve falha no recebimento. Acertamos que eles poderiam responder e apagar até encontrar a resposta que julgassem adequada. Assim, a partir desse momento nenhuma informação mais seria dada sobre o teste.

A princípio, o tempo estimado foi de 2h30min de realização, embora entendêssemos que se houvesse necessidade de mais tempo por algum aluno, este poderia usá-lo. Os alunos gastaram uma média de 2h para a realização do diagnóstico, tanto na 1ª série como na 8ª série.

Durante a sessão, não houve nenhum registro de problema que pudesse atrapalhar o andamento da pesquisa.

3. A análise epistemológica – no teste diagnóstico, a análise epistemológica teve como objetivo ponderar as possíveis concepções relativas à potenciação ao longo do tempo que influenciam na aprendizagem dessa operação, como também a análise das respostas dos alunos. O teste diagnóstico continha questões com expoentes negativos, fracionários, expoente zero e um. Observamos que houve sempre um conhecimento a respeito dessas potências e necessidade de expressá-las e compreendê-las.

4. A análise didática – para este item, destacamos a análise dos livros didáticos, relacionando como a operação potenciação apresentada ao aluno, como é abordada e os tipos de questões observadas nos livros didáticos, segundo a TAD de Yves Chevallard (1999). Para realizar esta análise, foi usada a mesma notação empregada nas tarefas, técnicas e discursos tecnológico-teóricos utilizada na apreciação do livro didático.
5. Tipos de representação – o instrumento diagnóstico contemplou os tipos de representação presentes na operação potenciação, segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (2003). Nesse teste, usamos conversões de registros, figuras e recursos e técnicas, como a visualização.
6. Regras de Sinais e Convenções Matemáticas – o uso de regras de sinais matemáticos ou convenções matemáticas com expoente zero e 1 nas questões foi colocada para perceber se o aluno evoca esses discursos tecnológico-teóricos ou não.
7. Equilibração – Atividades que contenham momentos de desequilíbrio de Jean Piaget.

Para Piaget, a equilibração das estruturas cognitivas consiste em uma passagem constante de um *estado de equilíbrio* para um *de desequilíbrio*. É um processo necessário de autorregulação interna. Segundo o autor, o desenvolvimento cognitivo é um processo de construção que ocorre entre o sujeito e o objeto.

A teoria da equilibração trata de um ponto de equilíbrio entre assimilação e acomodação e, assim, é considerada como um mecanismo autorregulador, necessário para assegurar ao sujeito uma interação eficiente dela com o meio-ambiente. Todo novo conhecimento, que é assimilado, modifica o indivíduo, enriquecendo-o. A assimilação é o processo cognitivo pelo qual uma pessoa classifica um novo dado, ou seja, quando a criança tem novas experiências, vendo e ouvindo coisas novas, ela tenta adaptar esses novos estímulos às estruturas cognitivas que já possui. A acomodação caracteriza-se pela modificação de elementos já assimilados.

Conforme Pozo (1988), para Piaget, "*o progresso cognitivo não é consequência da soma de pequenas aprendizagens pontuais, mas está regido por um processo de equilibração. Assim, a aprendizagem produzir-se-ia quando ocorresse um desequilíbrio ou um conflito cognitivo.*

<u>Objetivos das Questões do Instrumento Diagnóstico</u>

Objetivo geral das questões do Instrumento Diagnóstico

- Observar se o aluno consegue resolver as tarefas T relacionadas à operação potenciação, considerando: a definição, as propriedades, regras, representações e convenções desse objeto matemático.

Objetivos Específicos das questões do Instrumento Diagnóstico

- Conhecer as técnicas e suas justificativas (discursos tecnológico-teóricos) que o aluno utiliza para resolver exercícios relativos à operação potenciação. Associar as diferentes técnicas de resolução às possíveis respostas dos alunos. Neste momento, o aluno pode, por exemplo, evocar a regra de sinal para efetuar a operação, utilizar a multiplicação sucessiva para resolvê-la, usar de um discurso teórico, como uso de uma propriedade da potenciação ou mesmo recorrer à convenção matemática.
- Verificar qual o comportamento do aluno frente aos diferentes tipos de registros de representação semiótica.
- Analisar os erros que os alunos cometem e associar a possíveis obstáculos.
- Classificar os erros, associando-os às diferentes técnicas e discursos tecnológico-teóricos utilizados pelo aluno.

Na análise de cada questão, foram apresentados os objetivos, as análises específicas das questões e as soluções esperadas. Estas soluções foram fundamentadas no piloto realizado e nas leituras correlatas.

Análise prévia das questões do Instrumento Diagnóstico

Questão 1

Calcular o valor das potências e justificar as respostas, explicando como realizou a operação e o porquê do sinal.

a) 6^2

b) $(-6)^2$

c) -6^2

d) $(-2)^3$

e) -2^3

f) $(-1)^5$

g) 5^0

h) $(-8)^0$

i) 0^5

j) 7^1

k) 1^5

l) 0^0

m) $\left(\frac{1}{2}\right)^0 =$

n) $\left(\frac{-3}{7}\right)^2 =$

o) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 =$

p) $\left(\frac{-1}{5}\right)^3 =$

q) 4^{-2}

r) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} =$

s) $\left(\dfrac{-3}{5}\right)^{-2} =$

t) $(-5)^{-3}$

u) $125^{\frac{1}{3}}$

v) $16^{-\frac{1}{2}}$

Objetivo da questão 1: Analisar o modo como o aluno realiza a tarefa de calcular a potência, qual a técnica que utiliza e verificar qual discurso tecnológico-teórico de que dispõe.

Objetivos Específicos de cada item:

- Itens *a, b, c, d, e, f* – O objetivo é verificar se o aluno efetua a operação potenciação, levando em conta as regras de sinais (τ_2)ou se aplica à definição por meio da multiplicação dos fatores (τ_1). Nosso objetivo também era observar se o aluno reconhecia o expoente como par ou ímpar e se isso influenciava em sua resposta.
- Itens *g, h, i, j, k, m* – O objetivo é verificar se o aluno utilizava o recurso das convenções (τ_3) ou regras de sinais (τ_2) sobre potenciação quando efetuava a operação.
- Item *l* – O objetivo específico deste item é verificar que tipo de resposta era mais forte no aluno, o zero do expoente ou o zero da base.
- Itens *n, o, p* – O objetivo é verificar se o aluno usava as propriedades de potenciação com base racional (τ_{13})
- Itens *q, r, s, t – O* objetivo é verificar se o aluno conseguia identificar a potência com expoente negativo (τ_6), como o inverso da base com expoente positivo.
- Itens *u* e *v* – O objetivo é verificar se o aluno conhecia a relação entre expoente fracionário e a radiciação (τ_{10}).

Análise da questão 1:

A questão 1 é do tipo φ e tem o foco no conteúdo matemático. A tarefa da questão é do tipo T_1.

Nesta questão, abordamos todas as situações que poderiam ocorrer com casos de potenciação, levando em consideração valores e sinais para base e expoente.

As técnicas utilizadas podem ser:

- Itens *a, b, c, d, e, f* – o aluno poderá utilizar as técnicas τ_1 e τ_2 e o discurso tecnológico-teórico $[\theta / \Theta]_1$ e $[\theta / \Theta]_5$.
- Itens *g, h, i, j, k,m* – o aluno poderá utilizar a técnica τ_3 e o discurso tecnológico-teórico $[\theta / \Theta]_5$ e $[\theta / \Theta]_6$.
- Item *l* – o aluno poderá utilizar a técnica τ_3 e o discurso tecnológico-teórico $[\theta / \Theta]_6$.
- Itens *n, o, p* – o aluno poderá utilizar a técnica τ_2 ou τ_{13} e ainda utilizar as propriedades da operação potenciação e o discurso tecnológico-teórico $[\theta / \Theta]_2$.
- Itens *q, r, s, t* – o aluno poderá utilizar a técnica τ_6 e o discurso tecnológico-teórico $[\theta / \Theta]_1$ e $[\theta / \Theta]_7$.
- Itens *u* e *v* – o aluno poderá utilizar a técnica τ_{10} e o discurso tecnológico-teórico $[\theta / \Theta]_8$[35].

Soluções esperadas:

Questão (a): 6^2

- 12, o aluno efetua a operação multiplicação.
- 36, resposta correta.

[35] $[\theta / \Theta]_8$ – Potência com expoente fracionário.

Questão (b): $(-6)^2$

- + 12, o aluno entende as regras de sinais, mas efetua a operação multiplicação.
- – 12, o aluno não entende as regras de sinais e efetua a operação multiplicação.
- – 36, o aluno não entende as regras de sinais, mas efetua a operação potenciação corretamente.
- + 36, resposta correta.

Questão (c): -6^2

- – 12, o aluno não entende as regras de sinais e efetua a multiplicação.
- + 12, o aluno não entende o uso dos parênteses e efetua a multiplicação.
- – 36, resposta correta.
- + 36, o aluno entende que deve utilizar as regras de sinais, não reconhece o uso dos parênteses, embora efetue corretamente a operação potenciação.

Questão (d): $(-2)^3$

- – 6, o aluno efetua a operação multiplicação.
- + 6, o aluno não entende as regras de sinais e também não efetua corretamente a operação potenciação.
- – 8, resposta correta.
- + 8, o aluno não entende as regras de sinais, mas efetua a operação potenciação corretamente.

Questão (e): -2^3

- – 6, o aluno efetua a operação multiplicação.
- + 6, o aluno não entende as regras de sinais e, também, não efetua corretamente a operação potenciação.
- – 8, resposta correta.
- + 8, o aluno entende que deve utilizar as regras de sinais, não reconhece o uso dos parênteses, embora efetue corretamente a operação potenciação.

Questão (f): $(-1)^5$

- –1, resposta correta.
- –5, o aluno efetua a multiplicação.
- 5, o aluno não entende as regras de sinais e também não efetua corretamente a operação potenciação.
- 1, o aluno não entende as regras de sinais, mas efetua a operação potenciação corretamente.

Questão (g): 5^0

- 0, o aluno efetua a operação multiplicação ou usa uma convenção matemática não existente.
- 5, o aluno desconhece as convenções ou regras matemáticas sobre a operação potenciação.
- 1, resposta correta.

Questão (h): $(-8)^0$

- 8, o aluno desconhece as convenções ou regras matemáticas sobre a operação potenciação.
- –8, o aluno desconhece as convenções ou regras matemáticas sobre a operação potenciação.

- 1, resposta correta.
- 0, o aluno efetua a operação multiplicação.

Questão (i): 0^5

- 5, o aluno efetua a operação multiplicação com produto incorreto ou usa uma convenção matemática não existente.
- 1, o aluno utiliza uma convenção matemática não existente.
- 0, resposta correta.

Questão (j): 7^1

- 7, resposta correta.
- 1, o aluno desconhece as convenções ou regras matemáticas sobre a operação potenciação.

Questão (k): 1^5

- 5, o aluno efetua a operação multiplicação ou usa uma convenção matemática não existente.
- 1, resposta correta.

Questão (l): 0^0

- 0, neste caso, o aluno poderá dar esta resposta justificando de várias maneiras: efetuando a operação multiplicação ou utilizando a convenção incorretamente.
- 1, o aluno utiliza a convenção incorretamente.

Questão (m): $\left(\frac{1}{2}\right)^0$

- $\frac{1}{2}$, o aluno desconhece as convenções ou regras matemáticas sobre a operação potenciação.

- 0, o aluno efetua a operação multiplicação.
- 1, resposta correta.

Questão (n): $\left(\frac{-3}{7}\right)^2 =$

- $+\frac{6}{14}$, o aluno entende as regras de sinais, mas efetua a operação multiplicação.
- $-\frac{6}{14}$, o aluno não entende as regras de sinais, mas efetua a operação multiplicação.
- $-\frac{9}{49}$, o aluno não entende as regras de sinais, e efetua a operação potenciação.
- $+\frac{9}{49}$, resposta correta.

Questão (o): $\left(\frac{2}{3}\right)^3 =$

- $\frac{6}{9}$, o aluno efetua a operação multiplicação.
- $\frac{8}{27}$, resposta correta.

Questão (p): $\left(\frac{-1}{5}\right)^3 =$

- $-\frac{3}{15}$, o aluno efetua a operação multiplicação.
- $\frac{3}{15}$, o aluno efetua a operação multiplicação e não entende a regra de sinais.

- $\frac{1}{125}$, o aluno não entende as regras de sinais e efetua a operação potenciação.
- $-\frac{1}{125}$, resposta correta.

Questão (q): 4^{-2}

- – 16, o aluno não entende a operação com expoente negativo.
- – 8, o aluno não entende a operação com expoente negativo.
- 16, o aluno não entende a operação com expoente negativo.
- + 8, o aluno não entende a operação com expoente negativo.
- $\frac{1}{16}$, resposta correta.

Questão(r): $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} =$

- $-\frac{4}{6}$, o aluno não entende a operação com expoente negativo e efetua a multiplicação.
- $\frac{4}{6}$, o aluno não entende a operação com expoente negativo e efetua a multiplicação.
- $\frac{9}{4}$, resposta correta.
- $-\frac{9}{4}$, o aluno reconhece o expoente negativo, mas usa as regras de sinais de maneira incorreta.

Questão (s): $\left(\frac{-3}{5}\right)^{-2} =$

- $-\frac{6}{10}$, o aluno não entende a operação com expoente negativo e efetua a multiplicação.
- $+\frac{6}{10}$, o aluno não entende a operação com expoente negativo e efetua a operação multiplicação.
- $-\frac{9}{25}$, o aluno não entende a operação com expoente negativo e efetua a operação potenciação.
- $-\frac{25}{9}$, o aluno não entende a operação com expoente negativo e efetua a operação potenciação, mas utiliza as regras de sinais de maneira incorreta.
- $+\frac{25}{9}$, resposta correta.

Questão (t): $(-5)^{-3}$

- $+\frac{1}{125}$, o aluno reconhece o expoente negativo, mas não entende as regras de sinais.
- $-\frac{1}{125}$, resposta correta.
- – 125, o aluno não reconhece o expoente negativo e efetua a operação potenciação.
- + 125, o aluno não reconhece o expoente negativo e efetua a operação potenciação.
- – 15, o aluno efetua a operação multiplicação.
- +15, o aluno efetua a operação multiplicação.

Questão (u): $125^{\frac{1}{3}}$

- 375, o aluno efetua a operação multiplicação.
- 5, resposta correta.
- 1/375, o aluno reconhece a operação com expoente fracionário e efetua a operação multiplicação.

Questão (v): $16^{-\frac{1}{2}}$

- 32, o aluno não reconhece a operação com expoente fracionário e efetua a operação multiplicação entre a base e o denominador do expoente.
- –32, o aluno não reconhece a operação com expoente fracionário e efetua a operação multiplicação entre a base e o denominador do expoente.
- 4, o aluno não reconhece a operação com expoente fracionário e efetua a operação radiciação.
- –4, o aluno não reconhece o expoente a operação com expoente fracionário e efetua a operação radiciação.
- 8, o aluno efetua o produto entre 16 e $\left(-\frac{1}{2}\right)$.
- $\frac{1}{4}$, resposta correta.
- –8, o aluno efetua o produto entre 16 e $\left(-\frac{1}{2}\right)$e utiliza alguma regra de sinais de maneira equivocada.

Questão 2

Representar na forma de potência e calcular o valor:

a)

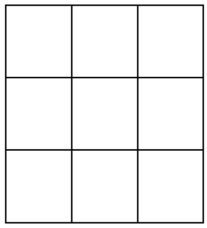


Figura 24: Representação figural da potência 3^2.

b)

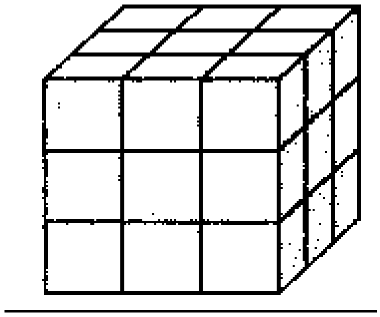


Figura 25: Representação figural da potência 3^3.

Objetivo da questão 2:

Verificar se o aluno consegue ter idéia de potência, usando a técnica de visualização e fazendo o cálculo da potência.

Análise da questão 2:

A questão 2 é do tipo β, uma situação-problema na qual o aluno pode verificar e aplicar seus conhecimentos matemáticos. As tarefas da questão são do tipo: T_2, representar e do tipo T_1, calcular. O aluno deverá usar a técnica de visualização τ_8 e calcular o valor da potência, empregando a nomenclatura de potência do discurso teórico $[\theta / \Theta]_1$ e $[\theta / \Theta]_5$.

Soluções esperadas (item a):

- 2.3 – o aluno não utiliza a técnica da visualização da figura e não registra a nomenclatura de potência.
- 3.3 = 9 - o aluno utiliza a técnica da visualização da figura, não a registra, mas usa a definição de potência.
- 3^2 = 9 - resposta correta, o aluno utiliza a técnica da visualização da figura e registra a nomenclatura de potência.

Soluções esperadas (item b):

- 3.3 = 9 - o aluno não utiliza a técnica da visualização da figura e faz o cálculo de maneira incorreta.
- 3.3.3 = 27 o aluno utiliza a técnica da visualização da figura, embora não a registre, usando a nomenclatura de potência e calcula corretamente a potência.
- 3^3 =27, resposta correta, o aluno utiliza a técnica da visualização da figura, registra a nomenclatura de potência e calcula corretamente o seu valor.

Questão 3

Completar o quadro abaixo:

Quadro 10: Potências de base 2, 3, 4 e 5.

2	**4**	**8**	
3	**9**		
4			
5			

Objetivo da questão 3:

Verificar se o aluno consegue por meio de uma tabela identificar os valores das potências de bases 2, 3, 4 e 5. O aluno poderá também entender que os valores das potências fazem parte de uma sequência de números e perceber regularidades.

A questão é do tipo φ com tarefa do tipo T_4. As possíveis técnicas utilizadas pelos alunos são τ_1, τ_4 e τ_{11}. O discurso tecnológico-teórico $[\theta / \Theta]_1$ e $[\theta / \Theta]_3$.

Soluções esperadas:

As soluções esperadas são variadas para esta questão, sobretudo aquelas que mostram a operação multiplicação. Como exemplo, a sequência 3, 9, 12, 15.

Questão 4:

Representar na forma de uma única potência e calcular o valor:

a) $2^4 . 2^3$

b) $5^{100} : 5^{99}$

c) $(3^2)^3$

d) $(2 . 3)^2$

e) $(6 : 2)^3$

Objetivo da Questão 4:

Verificar se o aluno reconhece as propriedades da operação e as utiliza como facilitadoras de alguns cálculos.

Análise da Questão 4:

A questão 4 é uma questão do tipo φ, com uma tarefa do tipo T_2, representar e T_1 calcular. As possíveis técnicas utilizadas são τ_1, τ_9 ou τ_{13} e uso do recurso tecnológico $[\theta / \Theta]_2$.

Soluções esperadas:

f) Item (a): $2^4 . 2^3$

- 2^7, resposta correta, o aluno adiciona os expoentes.
- 2^{12}, o aluno multiplica os expoentes.

Item (b): $5^{100} : 5^{99}$

- 5^{199}, o aluno adiciona os expoentes.
- 5^1, resposta correta

Item (c): $(3^2)^3$

- 3^5, o aluno adiciona os expoentes.
- 3^6, resposta correta, o aluno multiplica os expoentes.

Item (d): $(2 . 3)^2$

- $2^2.3^2$, resposta correta o aluno aplica a técnica τ_9, relativa às propriedades de potência e faz a distributiva do expoente.
- 6^2, o aluno não aplica as propriedades de potência nem faz a distributiva do expoente, mas efetua, primeiramente, a operação multiplicação, obtendo a resposta correta.

Item (e): $(6 : 2)^3$

- $6^3:2^3$, resposta correta o aluno aplica a técnica τ_9, relativa às propriedades da operação potenciação e faz a distributiva do expoente.

- 3^3, o aluno não aplica as propriedades da operação potenciação nem faz a distributiva do expoente, mas efetua primeiramente a operação divisão, obtendo a resposta correta.

Questão 5:

Representar na potência e calcular o valor:

a) 9 elevado ao quadrado

b) 10 ao quadrado

c) 1 ao quadrado

d) 3 ao cubo

e) 10 ao cubo

Objetivo da questão 5:

Verificar se o aluno reconhece a língua natural e a representação que a operação potenciação pode apresentar.

Análise da Questão 5:

A questão 5 é do tipo φ, com uma tarefa do tipo T_1 e T_2. As possíveis técnicas utilizadas são τ_1 e τ_9 e o discursos tecnológico-teóricos são $[\theta / \Theta]_1$ e $[\theta / \Theta]_6$.

Soluções esperadas:

Item (a): 9 elevado ao quadrado

- $9^2 = 18$, o aluno efetua a operação multiplicação entre base e expoente.
- $9^2 = 81$, resposta correta

Item (b): 10 ao quadrado

- $10^2 = 20$, o aluno efetua a operação multiplicação entre base e expoente.
- $10^2 = 100$, resposta correta.

Item (c): 1 ao quadrado

- $1^2 = 1$, resposta correta.
- $1^2 = 2$, o aluno efetua a operação multiplicação entre base e expoente.
- $1^4 = 1$, o aluno entende o quadrado de um número, como expoente 4 e efetua a operação potenciação.
- $1^4 = 4$, o aluno entende o quadrado de um número como expoente 4 e efetua a operação multiplicação.

Item (d): 3 ao cubo

- $3^3 = 9$, o aluno representa corretamente, mas efetua a operação multiplicação entre base e expoente.
- $3^3 = 27$, resposta correta.

Item (e):10 ao cubo

- $10^3 = 30$, o aluno efetua a operação multiplicação entre base e expoente.
- $10^3 = 1.000$, resposta correta.

Questão 6:

Representar e calcular a potência correspondente:

a) Base 4 e expoente 5

b) Base 5 e expoente 4

Objetivo da questão 6:

Verificar se o aluno reconhece a nomenclatura (base, expoente e potência) da operação potenciação e usa sua simbologia.

Análise da Questão 6:

A questão 6 é do tipo φ, com uma tarefa do tipo T_1 e T_2. A possível técnica utilizada é τ_1, e o discurso tecnológico-teórico $[\theta / \Theta]_1$.

Soluções esperadas

Item (a)

- $4^5 = 1.024$, o aluno reconhece a nomenclatura e efetua corretamente a operação potenciação.
- $4^5 = 20$, o aluno reconhece a nomenclatura da operação potenciação, mas efetua a multiplicação entre a base e o expoente.
- $5^4 = 625$, o aluno não reconhece a nomenclatura da operação potenciação e efetua corretamente a operação.
- $5^4 = 20$, o aluno não reconhece a nomenclatura da operação potenciação e efetua a multiplicação entre base e expoente.

As mesmas soluções são esperadas para o item (b).

Questão 7:

Completar o quadro abaixo:

Quadro 11: Potências de base 4.

EXPOENTE	BASE	REPRESENTAÇÃO	POTÊNCIA
4	4		
3	4		
2	4		
1	4		
0	4		
–1	4		
–2	4		
–3	4		

Objetivo da questão 7:

Verificar se o aluno representa corretamente, entendendo o que é a base e o expoente, ou seja, a nomenclatura da operação potenciação. Verificar se observa regularidades e se faz uso das propriedades.

Análise da Questão 7:

A questão 7 é do tipo φ, com uma tarefa do tipo T_3. As possíveis técnicas utilizadas são τ_1, τ_6 e τ_{11}, e os discursos tecnológico-teóricos $[\theta / \Theta]_1$, $[\theta / \Theta]_3$ e $[\theta / \Theta]_8$.

Soluções esperadas:

Nesta questão, são esperadas respostas variadas. Como exemplo, dois tipos de respostas:

- Resposta correta, aluno representa, reconhece a regularidade e calcula corretamente a operação potenciação

Quadro 12: Resposta correta da questão 7

EXPOENTE	BASE	REPRESENTAÇÃO	POTÊNCIA
4	4	4^4	256
3	4	4^3	64
2	4	4^2	16
1	4	4^1	4
0	4	4^0	1
–1	4	4^{-1}	$\frac{1}{4}$
–2	4	4^{-2}	$\frac{1}{16}$
–3	4	4^{-3}	$\frac{1}{64}$

- O aluno representa corretamente, não reconhece a regularidade e efetua a operação incorretamente, não entendendo a operação potenciação com expoente negativo.

Quadro 13: Resposta incorreta da questão 7

EXPOENTE	BASE	REPRESENTAÇÃO	POTÊNCIA
4	**4**	4^4	256
3	**4**	4^3	64
2	**4**	4^2	16
1	**4**	4^1	4
0	**4**	4^0	1
–1	**4**	4^{-1}	– 4
–2	**4**	4^{-2}	– 16
–3	**4**	4^{-3}	– 64

Questão 8:

Representar os seguintes números em potência de base 2:

a) 8 =

b) –32 =

c) 16 =

d) 0,25 =

Objetivo da Questão 8:

Verificar se o aluno faz uso das técnicas de conversão de potências para sua representação ou utiliza a operação inversa à potenciação, radiciação.

Análise da Questão 8:

É uma questão do tipo φ, com uma tarefa do tipo T_2. As possíveis técnicas utilizadas são τ_5[36] e τ_{12}[37] com discurso tecnológico-teórico $[\theta / \Theta]_9$[38].

Soluções esperadas:

Item (a): 8

- 2^4, o aluno apresenta a representação da potência por meio do produto entre 2 e 4.
- 2^3, resposta correta.

Item (b): – 32

- -2^{16}, o aluno apresenta a representação da potência por meio do produto entre 2 e 16.
- -2^5, resposta correta.
- 2^{-16}, o aluno apresenta a representação da potência por meio do produto entre 2 e 16.

Item (c): 16

- 2^4, resposta correta.
- 2^8, o aluno apresenta a representação da potência por meio do produto entre 2 e 8.
- 4^2, o aluno apresenta a representação da potência, mas com base 4.

Item (d): 0,25

- $2^{0,25}$, o aluno não utiliza a conversão de registros.
- $0,25^2$, o aluno não utiliza a conversão de registros.
- 2^{-2}, resposta correta.

[36] τ_5 – técnica na qual o aluno usa a operação inversa à potenciação, radiciação.
[37] τ_{12} – técnica na qual o aluno utiliza conversões matemáticas.
[38] $[\theta / \Theta]_9$ – Conversões matemáticas entre números e potências.

Questão 9

Resolver o seguinte problema:

Uma mensagem foi enviada por e-mail com um vírus e espalhada entre amigos. Marcelo enviou para Bibi, que a enviou para mais 3 pessoas; cada uma dessas 3 pessoas enviou para outras 3 que, por sua vez, enviaram para outras 3. Representar a resposta como uma adição de potências e calcular quantas mensagens foram enviadas.

Objetivo da Questão 9:

O objetivo desta questão é perceber se ao resolver uma situação-problema que seja mais próxima do cotidiano do aluno, ele obtém uma resposta correta.

Análise da Questão 9:

É uma questão do tipo β com uma tarefa do tipo T_4. A possível técnica utilizada é τ_1 e o discurso tecnológico-teórico $[\theta / \Theta]_1$.

Soluções esperadas:

Nesta questão, esperávamos soluções de diferentes tipos, considerando que o aluno poderia resolver de várias maneiras, representando ou não as respostas em forma de potência ou soma de potências.

- $3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 = 1 + 3 + 9 + 27 = 40$, resposta correta.
- $3^1 + 3^2 + 3^3 = 39$
- 40, resposta correta sem representação da soma de potências.
- 11, o aluno efetua 1 + 1 + 3 + 3+ 3.
- 27, o aluno efetua a potência 3^3.

4.2 Análise Quantitativa dos Erros

O material do experimento foi recolhido e separado de forma a facilitar a análise dos dados. Numeramos cada caderno de 1 até 30 e agrupamos cada folha por questão. Todas as questões número 1 estavam juntas do sujeito 1 ao 30 e, assim, por diante. A partir disso, começamos a analisar as respostas dos alunos, questão por questão e levantar a quantidade de acertos e erros, bem como analisar como o aluno resolveu a questão.

Em nosso diagnóstico, cobramos dos alunos que justificassem a resposta ou a questão, sempre solicitávamos a linha de raciocínio, dando oportunidade ao aluno mostrar como resolveu. Sendo assim, na maioria das respostas tivemos o registro dos alunos de modo como resolveram a questão. Realizamos várias leituras do material, visando a análise das respostas à luz da TAD, de Chevallard (1999) e da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Duval (2003), para, posteriormente, categorizar os erros.

Esta fase é muito trabalhosa, mas sabemos da riqueza do material e da importância desse momento que, com certeza, amadurecemos as idéias de nossa pesquisa.

De acordo com Lüdke e André:

> A construção de categorias não é uma tarefa fácil. Elas brotam num primeiro momento, do arcabouço teórico em que se apóia a pesquisa. Esse conjunto inicial de categorias, no entanto vai ser modificado ao longo do estudo, num processo dinâmico de confronto constante entre teoria e empiría, o que origina novas concepções e, conseqüentemente, novos focos de interesse. (LÜDKE e ANDRE, 2006 p. 42).

A análise das respostas foi realizada item por item e por série. Compusemos também blocos para a questão 1, no qual foram agrupados agrupados os itens com a resolução da mesma técnica. Ao analisarmos as respostas dos alunos, ressaltamos que estamos nos referindo às técnicas utilizadas. Devemos ressaltar que, quando analisamos as respostas dos alunos, estamos nos referindo às técnicas utilizadas por eles e que foram nomeadas, segundo a TAD de Chevallard (1999). Nessa análise, quando nos referimos ao total de alunos ou total de respostas, consideramos os 60 sujeitos de 8ª série do Ensino Fundamental e 1ª série do Ensino Médio que participaram do experimento.

Análise das respostas dos alunos

Questão 1 – Calcular o valor das potências e justificar as respostas, explicando como realizou a operação e o porquê do sinal.

a) 6^2

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
36	26	22 alunos utilizaram a definição 6.6
		4 alunos utilizaram a língua natural
12	3	Os alunos utilizaram a operação multiplicação 6.2
42	1	O aluno usou a definição, mas erra o produto
Branco	0	

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
36	28	27 utilizaram a definição 6. 6
		1 aluno não justificou
12	2	2 alunos efetuaram a operação multiplicação 6.2
Branco	0	

No item (a), verificamos que 22 alunos da 8ª série e 27 da 1ª série fizeram a definição de maneira correta (τ_1) e dispunham do discurso tecnológico-teórico $[\theta\ /\Theta]_1$. O número de respostas corretas significa 81,67% do total das respostas. Entre as duas séries, 5 alunos têm a definição da operação potenciação como o produto da base pelo expoente, efetuando 6.2.

b) $(-6)^2$

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
36	21	6 alunos utilizaram a regra de sinal
		5 alunos utilizaram a definição
		10 utilizaram a definição e a regra de sinal
–36	4	1 aluno efetuou a multiplicação – 6 . 6
		3 alunos afirmaram que sempre que a base era negativa, o resultado era negativo
12	1	O aluno efetuou 6. 2
–12	1	O aluno efetuou –6 .2
42	1	O aluno efetuou 6. 6 , mas errou o produto
Branco	2	

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
36	15	1 aluno usou a regra de sinal
		5 alunos utilizaram a definição
		9 alunos utilizaram a definição e a regra de sinal
–36	12	2 alunos efetuaram a operação multiplicação – 6 . 6
		1 aluno afirmou que sempre que a base é negativa, o resultado é negativo
		7 alunos aplicaram a definição, mas erram a regra de sinal
		2 alunos referiram-se ao uso dos parênteses, mas errara a resposta
12	1	1 aluno efetuou 6.2 e não considerou o sinal
–12	2	os alunos efetuaram o produto 6.2 e afirmam que o resultado é negativo, porque a base era negativa e o expoente, positivo
Branco	0	

No item (b), quando foi solicitado o cálculo de $(–6)^2$, notamos que 36 respostas estavam corretas e destas respostas, 7 utilizaram a regra de sinais, 10 a definição e 19 alunos justificaram com a definição e a regra de sinais. Neste item, portanto, 60 % dos alunos utilizaram a definição e/ou a regra de sinais de maneira correta (τ_1 ou τ_2) e dispunham dos discursos tecnológico-teóricos $[\theta /\Theta]_1$ e/ou $[\theta /\Theta]_5$. Observamos que 16 alunos deram a resposta incorreta, porque não utilizaram a regra de sinais ou a definição de modo conveniente. Pela observação dos protocolos, os mesmos 5 alunos que erraram no item (a), erraram também no item (b), desconhecendo a definição e efetuando o produto entre a base e o expoente.

c) – 6^2

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
–36	10	2 alunos referiram-se ao fato da potência não ter os parênteses e ficar negativa
		8 alunos efetuaram a multiplicação – 6 . 6
36	17	2 alunos usaram a regra de sinal
		11 alunos utilizaram a definição
		4 alunos utilizaram a definição e a regra de sinal
–12	2	Os alunos efetuaram a multiplicação – 6 . 2
–42	1	O aluno efetuou a multiplicação – 6. 6, mas errou o produto
Branco	0	

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
–36	9	2 alunos afirmaram que a resposta era um número negativo por ser um número negativo
		2 aluno referiram-se ao não uso do parênteses
		3 alunos efetuaram a multiplicação (–6).(–6) obtendo o produto – 36
		2 alunos não justificaram
36	19	1 aluno aplicou a regra de sinais: base negativa e expoente par, resultado positivo
		15 alunos aplicaram o produto (–6).(–6) e afirmaram que o produto de 2 números negativos é um número positivo
		1 aluno fez referência ao não uso do parêntese
		2 alunos efetuaram 6.6 e afirmam que base negativa e expoente par tem resultado negativo
12	1	o aluno efetuou 6. 2
–12	1	o aluno afirmou que o resultado era negativo porque a base era negativa e o expoente era positivo
Branco	0	

No item (c), solicitou-se o cálculo de -6^2, observamos que 19 alunos apresentaram uma resposta correta, embora a justificativa não fosse adequada. Entre eles, 4 sujeitos referiram-se ao não uso dos parênteses e colocaram a resposta de pronto; 8 calcularam efetuando –6.6 ao invés de –(6.6). Observamos que 3 alunos não dominavam a técnica da regra de sinais (τ_2) efetuando (–6). (–6) obtendo como produto –36. Nesse momento, percebemos a importância da justificativa para cada questão nesta pesquisa, pois, embora a resposta fosse aparentemente correta, concluímos, que o aluno procedeu de modo incorreto para sua resposta. Neste item, ainda perdurou a resposta com produto entre base e expoente que 5 alunos efetuaram.

d) $(-2)^3$

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
–8	23	4 alunos justificaram (–2). 2 . 2 = – 8, pois havia um sinal negativo
		2 alunos utilizaram a definição de potenciação: (–2).(–2).(–2)= – 8
		2 alunos utilizaram a regra de sinal: base negativa e expoente ímpar, resultado negativo
		15 alunos utilizaram a regra de sinal e a definição
8	4	os alunos utilizaram a definição, mas não a regra de sinal
–6	1	O aluno efetuou a multiplicação – 2. 3
–4	1	O aluno efetuou – 2 . 2
–16	1	O aluno efetuou 2.2= 4 e depois 4.4= –16 mantendo o sinal negativo
Branco	0	

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
–8	15	8 alunos utilizaram a definição de potenciação: (–2).(–2).(–2)= – 8
		4 alunos aplicaram a definição e afirmaram que base negativa e expoente ímpar têm resultado negativo
		1 aluno aplicou a definição
		1 aluno afirmou que a resposta era negativa porque a base era positiva e o expoente negativo
		1 aluno referiu-se sobre uso dos parênteses
8	8	6 alunos efetuaram o produto 2.2.2
		1 aluno afirmou que quando a base era negativa o resultado era positivo
		1 aluno afirmou que quando se multiplicam números negativos obtém-se um número positivo
–6	2	os alunos efetuaram –2.3
6	3	o alunos efetuaram o produto 2.3
–12	1	o aluno afirmou que 2 elevado a 3 é 12 e negativo pela base ser negativa
Branco	1	

O item (d) apresentou 38 respostas certas, das quais 33 têm uma justificativa adequada. Entre as justificativas corretas, 10 alunos utilizaram a técnica da definição, 3 confirmaram a regra de sinais enfatizando o expoente ímpar, 19 utilizaram a técnica da definição e da regra de sinais e 1 aluno referiu-se ao uso dos parênteses como justificativa acertando a resposta. Quando foi utilizada a definição, notamos que (–2).(–2).(–2)= – 8. Alguns alunos utilizaram o discurso (–).(–) é (+) e (+).(–) = (–).

e) -2^3

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
–8	26	19 alunos utilizaram a definição incorretamente (–2).(–2).(–2)
		3 utilizaram o produto –2 . 2 . 2
		4 alunos referiram-se ao não uso dos parênteses e o resultado negativo
8	2	os alunos utilizaram a definição mas erraram o sinal do produto
–6	1	o aluno efetuou a multiplicação – 2 . 3
–16	1	o aluno efetuou a potência : 2 . 2 = 4 e 4 . 4 = – 16 porque o sinal é negativo
Branco	0	

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
–8	18	5 alunos utilizaram a definição
		1 aluno afirmou que a resposta é – 8 porque está elevado a 3
		6 alunos utilizaram a definição e a regra de sinais
		2 alunos referiram–se ao uso dos parênteses
		1 aluno justificou a resposta por ser base negativa e expoente positivo
		2 alunos afirmaram que o resultado era negativo, porque sempre que a base era negativa o resultado era negativo
		1 aluno não justificou a resposta
8	5	1 aluno efetuou 2.2.2
		4 alunos afirmaram que multiplicando números negativos obtém–se um número positivo
6	2	os alunos efetuaram 2.3
4	1	o aluno efetuou 2.2
–6	3	os alunos efetuaram o produto –2 . 3
–12	1	o aluno justificou o sinal por ser base negativa e errou o produto
Branco	0	

O item (e) apresentou 44 respostas –8, das quais apenas 6 alunos referiram-se ao não uso dos parênteses. Notamos que nenhum dos alunos argumentou corretamente com – (2.2.2) = –8. Três alunos efetuaram – 2.2.2 = –8. Dentre o total 50% dos alunos utilizaram a técnica da definição ou a regra de sinais de modo inadequado, obtendo mesmo assim a resposta correta. Sete alunos ignoraram o sinal, 6 aplicaram a definição, mas erraram quando se referiram à regra de sinais. Os demais ora efetuaram o produto entre base e expoente e/ou ao aplicarem a definição erraram na multiplicação.

f) $(-1)^5$

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
–1	20	11 alunos utilizaram a definição: (–1).(–1).(–1).(–1).(–1)
		8 alunos utilizaram a definição e a regra de sinal
		1 aluno justificou da maneira:(–1).1.1.1.1= –1
1	5	2 alunos justificaram usando uma convenção inexistente de base 1
		3 alunos utilizaram a definição, mas erraram o sinal do produto
–5	4	4 alunos utilizaram a multiplicação – 1 . 5
5	1	1 aluno usou a operação multiplicação entre – 1 e. 5 e errou o sinal do produto
Branco	0	

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
–1	14	6 alunos aplicaram a definição de potenciação (–1).(–1).(–1).(–1).(–1)
		1 aluno afirmou que a base é negativa e o expoente é positivo, o resultado foi negativo
		7 alunos aplicaram a definição e a regra de sinal
1	5	3 alunos utilizaram a definição
		2 alunos utilizaram a definição e a regra de sinal
–5	5	os alunos efetuaram o produto –1 . 5
5	4	os alunos efetuaram o produto 1.5 e não consideraram o sinal
Branco	2	

O item (f) é semelhante matematicamente ao item (d). Observamos 34 respostas corretas, dentre as quais 32 alunos dispuseram dos discursos tecnológico-teóricos $[\theta / \Theta]_1$ e/ou $[\theta / \Theta]_5$ e usaram a técnica da definição (τ_1) e/ou a técnica da regra de sinais (τ_2); 14 alunos efetuaram o produto entre base e expoente, obtendo o produto 5 ou –5.

Para a questão 1 – itens *a, b, c, d, e, f* temos a seguinte análise:

I. 22 % dos alunos de 8ª série e 12% dos alunos de 1ª série utilizaram a definição de maneira correta (τ_1) e dispuseram do discurso tecnológico-teórico $[\theta / \Theta]_1$.

II. 5% dos alunos de 8ª série e 15% utilizaram a técnica τ_7, multiplicando a base pelo expoente, e obtendo uma resposta incorreta, portanto, não dispuseram do discurso tecnológico-teórico $[\theta / \Theta]_1$.

III. 11% dos alunos de 8ª série do Ensino Fundamental justificaram suas respostas corretas, utilizando-se das técnicas de definição da operação potenciação (τ_1) e das regras de sinais (τ_2) e 3,5% utilizaram apenas a regra de sinal sem recorrer à definição.

IV. 6,8% dos alunos da 1ª série justificaram suas respostas utilizando -se das técnicas da definição da operação potenciação (τ_1) e as regras de sinais (τ_2) e dispuseram dos discursos tecnológico-teóricos $[\theta / \Theta]_1$ e $[\theta / \Theta]_5$.

Os itens da questão 1 poderiam ser resolvidos com as técnicas da definição de operação potenciação (τ_1) e das regras de sinais (τ_2), dispondo, assim, dos discursos tecnológico-teóricos $[\theta / \Theta]_1$ e $[\theta / \Theta]_5$.

Ao aplicar a definição, observamos que alunos cometem erros relacionados a essa técnica. Os erros não foram numerosos, quando nos referimos à multiplicação, na qual o aluno multiplicou a base pelo expoente. Nesse bloco, percebemos que os erros apresentaram-se de forma mais acentuada quando a base era um número inteiro negativo. Grande parte dos erros relacionou-se à técnica das regras de sinais (τ_2). Quando se trata de números negativos, sabemos das dificuldades dos alunos.

Estudos como o de Glaeser (1981, *apud* Almouloud, 2007 p. 157) apontam para a compreensão de obstáculos[39] apresentados a partir da evolução da noção dos números inteiros e mais especificamente sobre a regra de sinais. Na análise epistemológica realizada sobre a operação potenciação, registramos a necessidade que Chuquet, em 1484, estabelece para a noção de potências com expoentes zero e negativos.

Nas observações realizadas na análise das respostas dos alunos sobre a operação potenciação, percebemos como o aluno sente dificuldade para assimilar as regras de sinais em relação à operação potenciação.

Poucos alunos trazem as regras prontas, afirmando, por exemplo que um número negativo elevado a um expoente impar resulta em número negativo. Uma boa parte dos alunos que acertou a resposta aplicou a regra de sinal da multiplicação dos números, afirmando que (–) . (–) = (+) e (+) . (–) = (–).

Nas respostas dos alunos na questão 1, quando não existe o sinal negativo envolvido, verificamos que acontece um acerto maior por parte do aluno. Para o item (a), 6^2 temos 54 acertos, item (b), $(-6)^2$, 36 acertos e para o cálculo de -6^2, 19 acertos. O outro aspecto que registramos nesse momento foi o cálculo de potência com uso de parênteses. Percebemos que o aluno ao longo das respostas confunde-se bastante com esses sinais.

g) 5^0

8ª série do Ensino Fundamental

<table>
<tr><th>Respostas apresentadas</th><th>Número de respostas</th><th>Justificativa</th></tr>
<tr><td>1</td><td>9</td><td>9 alunos utilizaram a convenção corretamente</td></tr>
<tr><td rowspan="3">0</td><td rowspan="3">12</td><td>4 alunos efetuaram a multiplicação 0.5 = 0</td></tr>
<tr><td>6 justificaram que qualquer número elevado a zero é zero</td></tr>
<tr><td>2 alunos referiram-se ao zero como "nada"</td></tr>
<tr><td>5</td><td>9</td><td>9 alunos efetuaram a multiplicação 0.5 = 5</td></tr>
<tr><td>Branco</td><td>0</td><td></td></tr>
</table>

[39] Segundo Brousseau (1983, *apud* Almouloud, 2007 p. 133), um obstáculo não deve ser considerado uma falta de conhecimento e sim como um conhecimento que produz respostas adaptadas em certo contexto, produzindo respostas falsas, fora desse contexto.

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
1	9	9 alunos utilizaram a convenção corretamente
5	12	3 alunos citaram a convenção incorretamente
		4 alunos se referiram-se ao zero como "nada"
		5 alunos efetuaram o produto 5.0 = 5
0	8	6 alunos citaram a convenção incorretamente
		2 alunos efetuaram 5.0 = 0
15	1	o aluno não justificou
Branco	0	

No item (g), 18 alunos utilizaram a convenção de modo correto obtendo o resultado correto *1* e 20 alunos de modo incorreto obtiveram o resultado *0*. É importante ressaltar que 6 alunos referiram-se ao zero do expoente como “nada”; 20 alunos do total efetuaram a multiplicação, tendo como produto ou 0 ou 5.

h) $(-8)^0$

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
1	7	7 alunos justificaram, usando a convenção corretamente
8	1	o aluno não justificou
–8	6	4 alunos efetuaram a multiplicação errada –8.0 = – 8
		2 alunos justificaram o zero do expoente como "nada" e como resultado a base – 8
0	13	4 alunos referiram-se ao zero como "nada" e como resultado o zero
		8 alunos utilizaram a convenção de maneira errada
		1 aluno efetuou a multiplicação
–1	2	os alunos usaram a convenção mas consideraram o sinal incorretamente
–0	1	o zero como "nada"
Branco	0	

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
1	5	os alunos utilizaram a convenção corretamente
–1	4	os alunos usaram a convenção mas justificaram o sinal porque a base era negativa
0	9	4 alunos efetuaram o produto –8.0 = 0
		5 alunos utilizaram a convenção incorretamente
–8	12	7 alunos referiram-se ao zero como "nada"
		4 alunos utilizaram a convenção incorretamente
		1 aluno justificou como base negativa e expoente positivo
Branco	0	

i) 0^5

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
0	30	5 alunos utilizaram uma convenção inexistente
		11 alunos justificaram por meio da definição 0.0.0.0.0 = 0
		6 alunos referiram-se ao zero como "nada"
		8 alunos multiplicaram 0 . 5 = 0
Branco	0	

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
0	29	3 alunos utilizaram uma convenção inexistente
		4 alunos efetuaram 0.5 = 0
		22 alunos utilizaram a definição
Branco	1	

Do total de respostas para este item, 59 alunos obtiveram como resposta o 0, embora 33 tenham justificado de modo correto, utilizando a definição. Os demais usaram o produto entre 0 e 5 e uma convenção inadequada.

j) 7^1

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
7	28	6 alunos consideraram a convenção corretamente
		14 alunos efetuaram a multiplicação 7 . 1 = 7
		4 alunos justificaram que, como o expoente era 1, então, não se multiplicava a base
		4 alunos não justificaram a resposta
14	1	O aluno fez a multiplicação 7 . 2
49	1	O aluno efetuou a multiplicação 7 . 7
Branco	0	

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
7	30	6 alunos utilizaram a convenção corretamente
		15 alunos efetuaram o produto de 7.1
		9 alunos justificaram que, como o expoente era 1, então, não se multiplicava a base
Branco	0	

Embora 58 das 60 respostas estivessem com o resultado correto, apenas 12 alunos utilizaram a técnica da convenção corretamente. Praticamente, 50% dos alunos obtiveram a resposta 7, fazendo o produto entre 1 e 7. Do total de respostas, 13 alunos referiram-se ao expoente 1 e à impossibilidade de se multiplicar a base, ou seja, efetuar a operação potenciação.

k) 1^5

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
1	25	16 alunos utilizaram a definição de potenciação 1.1.1.1.1=1 corretamente
		5 alunos utilizaram uma convenção inexistente
		3 alunos efetuaram a operação multiplicação incorretamente 5 . 1 = 1
		1 aluno não justificou a resposta
5	5	5 alunos efetuaram a multiplicação 1 . 5 = 5
Branco	0	

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
1	22	20 alunos utilizaram a definição de potenciação corretamente
		2 alunos utilizaram uma convenção inexistente
5	7	7 alunos efetuaram 5.1 = 5
Branco	1	

No item (k), 47 respostas estavam com o resultado correto e 36 utilizaram a técnica da definição. Os demais justificaram utilizando o produto entre 1 e 5 com multiplicação errada ou usaram uma convenção não adequada.

l) 0^0

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
0	25	3 alunos utilizaram uma convenção inexistente
		12 alunos efetuaram a multiplicação 0.0 = 0
		4 alunos associaram ao zero à idéia do "nada"
		6 alunos não justificaram
1	3	3 alunos utilizaram uma convenção inexistente
Não existe	2	2 alunos justificaram que não existe zero elevado a zero
Branco	0	

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
0	24	5 alunos utilizaram uma convenção inexistente
		10 alunos efetuaram a multiplicação 0.0 = 0
		2 alunos associaram ao zero à idéia do "nada"
		7 alunos não justificaram
1	5	5 alunos utilizaram a convenção incorretamente
Não existe	1	1 aluno justificou que não existe zero elevado a zero
Branco	0	

O objetivo desta questão é observar qual resposta é mais forte no aluno, ou seja, qual a importância do 0 no expoente ou na base? Dentre o total, 49 apresentaram o 0 como resposta: 8 usaram uma convenção inexistente, 22 alunos efetuaram o produto 0.0 e 6 alunos referiram-se que 0 ora é da base, ora é do expoente como nada. Do total de respostas 3, justificaram a inexistência de 0^0.

m) $\left(\frac{1}{2}\right)^0 =$

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
1	9	8 alunos utilizaram a convenção corretamente
		1 aluno dividiu 2 por 1 igual a 1 e 1 elevado a zero é 1
0	11	9 alunos utilizaram a convenção incorretamente
		2 alunos não justificaram
$\frac{1}{2}$	5	4 alunos utilizaram a convenção incorretamente
		1 aluno justificou o expoente zero como "nada", portanto o resultado é a base
2	1	O aluno multiplicou 1.2 = 2 e 2 elevado a zero é 2
0,5	3	3 alunos efetuaram a divisão 1:2 = 0,5 e 0,5 elevado a zero é 0,5
10	1	O aluno não justificou
Branco	0	

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
1	8	os alunos utilizaram a convenção corretamente
0	6	4 alunos utilizaram a convenção incorretamente
		2 alunos efetuaram o produto de 1/2 . 0 = 0
$\frac{1}{2}$	12	7 alunos utilizaram a convenção incorretamente
		2 alunos efetuaram o produto 1/2 . 0 = 1/2
		2 alunos justificam o zero do expoente como "nada"
		1 aluno não justificou
5	1	o aluno efetuou a divisão 1 : 2 obtendo a quociente 5 incorretamente
0,5	2	os alunos efetuaram a divisão 1:2 = 0,5 corretamente, mas afirmaram que 0,5 elevado a 0 é igual a 0,5
2	1	o aluno efetuou a divisão 2:1 = 2
Branco	0	

Para o item (m), 16 alunos utilizaram a técnica da convenção de modo correto e 24 inadequado, obtendo como resultado 0 ou $\frac{1}{2}$. Do total de respostas, 3 referiram-se ao 0 como “nada”. Observa-se que 7 respostas trouxeram a divisão entre numerador e denominador, antes da operação potenciação.

Questão 1 – itens *g, h, i, j,k, m:*

I. 19,4% dos alunos da 8ª série do Ensino Fundamental e 15% dos alunos da 1ª série do Ensino Médio utilizaram a técnica das convenções de maneira correta (τ_3) e dispuseram-se do discurso tecnológico-teórico $[\theta / \Theta]_6$.

II. 16,7% dos alunos da 8ª série do Ensino Fundamental e 14,5% dos alunos de 1ª série do Ensino Médio utilizaram as convenções de modo incorreto (τ_3), portanto, parece que poucos usaram o discurso tecnológico-teórico $[\theta / \Theta]_6$.

III. 27% dos alunos de 8ª série e 21, 6% dos alunos de 1ª série do Ensino Médio utilizaram a técnica $\tau_{7,}$ multiplicando a base e o expoente, portanto, parece que poucos usaram o discurso tecnológico-teórico $[\theta /\Theta]_1$.

IV. 8,7% dos alunos da 8ª série do Ensino Fundamental e 8,7% da 1ª série do Ensino Médio associaram o zero, tanto da base como do expoente como “nada”.

Questão 1 – item *l:*

I. 10% dos alunos da 8ª série do Ensino Fundamental e 16,6% dos alunos da 1ª série do Ensino Médio utilizaram a convenção de modo incorreto, afirmando que qualquer número elevado a zero é zero, o que, neste caso, não é verdade.

II. 40% dos alunos da 8ª série do Ensino Fundamental e 34,6% dos alunos da 1ª série do Ensino Médio utilizaram a técnica $\tau_{7,}$ multiplicando a base e o expoente.

III. 14,5 % dos alunos da 8ª série do Ensino Fundamental associaram ao zero, tanto da base como do expoente como “nada”.

IV. 6,7% dos alunos da 8ª série do Ensino Fundamental e 3,7% dos alunos da 1ª série do Ensino Médio afirmaram que zero elevado a zero não existe.

Nesse bloco de questões, o aluno poderia responder utilizando as técnicas adequadas sobre convenções matemáticas (τ_3) e dispor do discurso tecnológico-teórico $[\theta /\Theta]_6$ nos itens (g), (h), (j) e (m) ou da técnica da definição (τ_1),dispondo do discurso tecnológico-teórico $[\theta /\Theta]_1$ para os itens (i) e (k).

No entanto, percebemos que, muitas vezes, o aluno confunde o que poderia ser usado como uma convenção ou regra especial com aquilo que pode ser resolvido por meio da definição.

Como justificativa para o item (g), 5^0, seria esperado que o aluno afirmasse que todo número elevado a zero é igual a 1, porém apenas 18 dos 60 alunos apresentaram essa resposta. Muitos confundiram afirmando que a resposta é 5 ou 0.

Nesse bloco de questões, observamos que, em relação ao bloco anterior, o número de respostas em que os alunos efetuaram o produto entre base e expoente aumentou consideravelmente.

As questões que apresentam o *zero* como dado, provocam certos problemas.

Caraça (2003) evoca esse assunto afirmando que o *zero* provoca perturbações nas operações que podem ser de duas naturezas. A primeira, está relacionada a uma impossibilidade, por exemplo, a divisão de um número qualquer por *zero* (a : 0). No segundo caso, que nos interessa, está o produto de um número por zero (a . 0) ou um número elevado a zero (a^0). Para o autor, por exemplo, no produto não tem significado a soma de zero parcelas. No caso da potência, não há produtos com nenhum fator.

Um grupo de alunos associa o 0 à ideia do "nada". Conforme Almouloud (2007, p. 140), a associação de zero com "nada desloca esse obstáculo epistemológico[40], para um aspecto psicológico, é a causa de numerosos erros.

Guimarães (2008, p. 19) disserta sobre os sentidos do zero em sua pesquisa. Um dos aspectos que aborda, é a constatação feita por Vergani (1991, p. 38), sobre o sentido do zero como "nada". Conforme a autora: o zero representa "o nada", "o não existente", " a falta de valor" e "a neutralidade".

Sierra (2000) relaciona o zero como "nada" à ideia de obstáculo epistemológico porque, nessa situação, o fato tem uma estreita relação com a construção do conhecimento e não parece estar determinado no processo ensino e aprendizagem.

[40] Brousseau (1983, apud IGLIORI, 1999) afirma que um obstáculo de origem epistemológica é verdadeiramente constitutivo do conhecimento, é aquele do qual não se pode escapar e que se pode, em princípio, encontrar na história do conceito. Ele está ligado à resistência do saber mal-adaptado, e o vê como um meio de interpretar alguns erros recorrentes e não aleatórios, cometidos pelos estudantes, quando lhes são ensinados alguns tópicos da Matemática

Se observarmos as análises das respostas, verificaremos um número pequeno de sujeitos que relacionam o zero ao “nada”, mas podemos inferir no sentido de que muitas respostas estariam “camufladas”, ou seja, embutidas nas em que o aluno não possui esse discurso. Novas pesquisas poderiam ser feitas com o tema proposto.

n) $\left(\frac{-3}{7}\right)^2 =$

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
$\frac{9}{49}$	8	4 alunos utilizaram a definição de potenciação corretamente
		1 aluno usou regra de sinais
		3 alunos utilizaram propriedades de potenciação corretamente
$-\frac{9}{49}$	2	os alunos aplicaram a propriedade de potência, mas erraram o sinal
$\frac{6}{14}$	2	os alunos efetuaram os produtos 3.2 e 7.2
$-\frac{9}{14}$	1	o aluno mesclou multiplicação e potenciação, elevando $3^2 = 9$ e 7.2=14 e errou a regra de sinal
$\frac{9}{14}$	1	o aluno mesclou multiplicação e potenciação, elevando $3^2 = 9$ e 7.2=14
$\frac{6}{49}$	1	o aluno mesclou multiplicação e potenciação, efetuando 3.2=6 e $7^2 = 49$
$\frac{676}{7}$	1	o aluno aplicou a definição, mas determinou o m.m.c
$-\frac{21}{21}$	1	o aluno aplicou a definição, mas fez o produto em “X”[41]
0,183184	1	o aluno efetuou 3:7=0,428 e efetuou o produto 0,428.0,428
4	1	o aluno efetuou –3:7 obtendo –2 e fez o produto –2. 2=4

[41] Denominamos Produto em ”X”, o produto efetuado entre dois números fracionários em que se multiplica o numerador da primeira fração com o denominador da segunda fração e o denominador da primeira fração com o numerador da segunda fração.

0,12	1	o aluno efetua a divisão 3:7=0,4 e fez o produto 0,4.0,4=0,12 incorretamente
–441	1	o aluno efetuou 3.7=21 e fez o produto de 21.21=441, mantendo o sinal da base
1689	1	o aluno efetuou a multiplicação 3.7.3.3.3.3, obtendo o produto 1689
Branco	8	

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
$\frac{9}{49}$	6	os alunos utilizaram a definição de potenciação
$-\frac{9}{49}$	6	os alunos aplicaram a definição de potência mas erram o sinal
$-\frac{6}{14}$	1	o aluno efetuou os produtos 3.2 e 7.2
$\frac{9}{14}$	3	os aluno mesclaram multiplicação e potenciação, efetuando 3^2=9 e 7.2=14
$\frac{6}{49}$	1	o aluno mesclou multiplicação e potenciação, efetuando 3.2=6 e 7^2=49
$-\frac{3}{7}$	2	os alunos não justificaram
$-\frac{6}{21}$	1	o aluno efetuou a multiplicação 2.3=6 e 2.7=21(incorretamente)
$-\frac{21}{7}$	1	o aluno aplicou a definição, fez o produto em X e confirmou a regra de que o produto de 2 números negativos é um resultado negativo incorretamente
$\frac{9}{27}$	1	o aluno não justificou
–42	1	o aluno efetuou –3.7 =–21 e elevou ao quadrado, obtendo –42
1,6	1	o aluno efetuou 3:7= 0,4 e 0,4.0,4=1,6
16	1	o aluno efetuou a divisão –3:4 =–4 e (–4).(–4)=16
1,289	1	o aluno fez 3 elevado ao quadrado igual a 9 e 9:7=1,289
–21	1	o aluno não justificou
–3,2	1	O aluno não justificou
0,84	1	o aluno fez 3:7= 0,42 e multiplicou por 2 mantendo o sinal
Branco	1	

No item (n), notamos que 14 respostas estavam corretas, destas 1 aluno utilizou a regra de sinais, 10 a definição e 3 justificaram sua resposta, empregando a propriedade da operação potenciação, elevando o numerador e o denominador ao expoente, representando essa operação. Observamos que 8 alunos apresentaram a resposta incorreta porque não utilizaram as regras de sinais ou a definição de forma conveniente. Verificamos que os mesmos 13 alunos que não usaram a definição, efetuaram a operação de forma mesclada, ou seja, elevaram o numerador ou denominador ao expoente, mas efetuaram a multiplicação entre base e expoente como o outro. Observamos, também, em algumas respostas que o aluno ao aplicar a definição da operação potenciação efetuava o produto em ”X” ou fazia a tentativa errônea de encontrar um m.m.c entre os denominadores, ou ainda, de alguma forma relacionar numerador e denominador, antes de operar a potenciação.

o) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 =$

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
$\frac{8}{27}$	10	6 alunos aplicaram a definição de potenciação corretamente
		3 alunos aplicaram a propriedade da potenciação corretamente
		1 aluno não justificou
$\frac{6}{9}$	3	Os alunos efetuaram a multiplicação de 2.3 e 3.3
$\frac{8}{9}$	2	Os alunos mesclaram potenciação e multiplicação
$\frac{6}{6}$	1	O aluno aplicou a definição e fez o produto em “X”
$\frac{304}{3}$	1	O aluno aplicou a definição, mas determinou o m.m.c, efetuando o produto $\frac{18}{3}.\frac{18}{3}.\frac{18}{3}$ de maneira incorreta
138^3	1	O aluno fez o produto entre os números 3.9.18 = 138, incorretamente
216	1	O aluno fez o produto de 2.3 e elevou ao cubo

0,216	1	O aluno efetuou a divisão 2:3= 0,6 e aplicou a definição 0,6. 0,6 .0,6=0,216
22,5	1	O aluno efetuou a divisão 3:2 = 1,5 e depois aplicou a definição 1,5. 1,5 não observando o expoente
6	1	O aluno efetuou a divisão 3:2 = 2 e aplicou a definição 2.2.2 = 6 errando o produto
1,86	1	O aluno efetuou a divisão 2:3=0,6 e aplicou a definição, errando o produto 0,6. 0,6. 0,6=1,86
Branco	7	

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
$\frac{8}{27}$	11	6 alunos utilizaram a definição de potenciação corretamente
		5 alunos aplicaram a propriedade da potenciação corretamente
$\frac{6}{9}$	1	o aluno efetuou o produto de 2.3 e 3.3
$\frac{8}{18}$	2	os alunos efetuaram 3.3.3=18
$\frac{24}{6}$	1	o aluno aplicou a definição, mas fez o produto em "X"
$\frac{8}{6}$	2	os alunos mesclaram potenciação e multiplicação
216	1	o aluno efetuou 2.3=6 e elevou a 3
$\frac{12}{27}$	1	o aluno mesclou potenciação e multiplicação
2,4	2	os alunos elevaram o 2 ao cubo e depois efetuaram 8:3=2,4
21,6	1	o aluno efetuou 2:3=0,6 e fez 0,6.0,6.0,6=21,6
7	1	o aluno não justificou
6	1	o aluno fez 2.3
$\frac{9}{14}$	1	o aluno não justificou
$\frac{9}{27}$	1	o aluno inverteu numerador e denominador e elevou ao cubo
$\frac{6}{27}$	2	os alunos mesclaram multiplicação e potenciação
Branco	2	

No item (o), observamos 21 respostas corretas e destas: 12 alunos utilizaram a definição e 8 justificaram suas respostas, aplicando a propriedade da operação potenciação, elevando o numerador e o denominador ao expoente, representando essa operação. Assim, 8 alunos tinham a resposta incorreta por não utilizar a regra de sinais ou a definição de maneira conveniente, ou seja, não dispunham dos discursos tecnológico-teóricos $[\theta /\Theta]_1$ e $[\theta /\Theta]_5$. Verificamos que os mesmos 16 alunos que desconheciam a definição, efetuaram a operação de forma mesclada, ou seja, elevaram o numerador ou denominador ao expoente, mas efetuaram a multiplicação entre base e expoente com o outro. Em algumas respostas, notamos, como item no anterior, que o aluno ao aplicar a definição da operação potenciação efetuou o produto em ”X” ou fez a tentativa errônea de encontrar um m.m.c entre os denominadores, ou ainda, de alguma forma relacionar numerador e denominador, antes de operar a potenciação.

p) $\left(\frac{-1}{5}\right)^3 =$

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
$-\frac{1}{125}$	9	5 alunos utilizaram a definição de potenciação corretamente
		3 alunos utilizaram a definição e as regras de sinais corretamente
		1 aluno usou a propriedade de potenciação
$+\frac{1}{125}$	1	o aluno usou a propriedade mas desconhecia a regra de sinal
$\frac{3}{15}$	1	o aluno efetuou a operação multiplicação
$-\frac{3}{15}$	2	os alunos efetuaram a operação multiplicação
$-\frac{1}{15}$	1	o aluno mesclou multiplicação e potenciação
$-\frac{1}{75}$	1	o aluno mesclou multiplicação e potenciação
$-\frac{1}{725}$	1	o aluno mesclou multiplicação e potenciação

$-\frac{5}{25}$	1	o aluno mesclou multiplicação e potenciação
$\frac{625}{5}$	1	o aluno mesclou multiplicação e potenciação
–125	1	O aluno fez o produto –1.5 e eleva ao cubo
0,8	1	O aluno efetuou 1: 5 = 0,2 e elevou ao cubo
0,008	1	O aluno efetuou 1:5 = 0,2 e elevou ao cubo
–0,8	1	O aluno efetuou 1: 5 = 0,2 e elevou ao cubo mantendo o sinal da base
–1	1	O aluno elevou somente o numerador
Branco	7	

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
$-\frac{1}{125}$	7	5 alunos utilizaram a definição de potenciação corretamente
		2 alunos utilizaram a definição e as regras de sinais corretamente
$+\frac{1}{125}$	10	Os alunos utilizaram a definição de potenciação mas desconheciam as regras de sinais
$\frac{1}{15}$	1	O aluno efetuou 1. 5 e elevou ao cubo
$-\frac{1}{75}$	1	O aluno aplicou a propriedade de potência mas errou a potência
$-\frac{5}{5}$	1	O aluno aplicou a definição, mas fez o produto em X
$-\frac{3}{15}$	2	Os alunos efetuaram a multiplicação de 1.3 e 5.3
–125	1	O aluno efetuou apenas a potência do denominador
–8	1	O aluno efetuou –1:5= –2 e –2 ao cubo igual a –8
–2	1	O aluno efetuou –1 ao cubo = –1 e dividiu por 5, dando resultado –2
–5	1	O aluno não justificou
5	1	O aluno faz –1 ao quadrado e efetuou a divisão de 1:por 5 = –2
–25	1	O aluno justificou que deveria inverter a base
Brancos	2	

Do total de respostas, 16 foram apresentadas com resultado correto, 10 alunos aplicaram a técnica da definição, 7 utilizaram as técnica das regras de sinais e de definição. Apenas um dos alunos referiu-se às propriedades da operação potenciação, indicando a distributiva para o numerador e o denominador. Em algumas respostas, observamos que o aluno ao aplicar a definição da operação efetuou o produto em “X” ou fez a tentativa errônea de encontrar um m.m.c entre os denominadores, ou ainda, de alguma forma relacionou numerador e denominador, antes de operar a potenciação.

d) Questão 1 – Itens *n, o, p:*

I. 16,7% dos alunos da 8ª série do Ensino Fundamental e 19% dos alunos da 1ª série do Ensino Médio utilizaram a definição da operação potenciação (τ_1) X do discurso tecnológico-teórico $[\theta /\Theta]_1$.

II. 7,7% dos alunos da 8ª série do Ensino Fundamental e 4,5% dos alunos da 1ª série do Ensino Médio utilizaram as propriedades da operação potenciação (τ_{13}) e dispuseram-se do discurso tecnológico-teórico $[\theta /\Theta]_2$.

III. 10% dos alunos de 8ª série do Ensino Fundamental e 7,7% dos alunos de 1ª série do Ensino Médio efetuaram a potenciação mesclando potenciação e multiplicação, portanto, não dispuseram do discursos tecnológico-teórico $[\theta /\Theta]_1$ e $[\theta /\Theta]_2$.

Para esse bloco, agrupamos questões nas quais a base é um número racional e o expoente um número natural. Nestes casos, os erros apresentados foram diversos. Alguns alunos aplicaram a técnica da definição (τ_1) e evocaram técnicas errôneas ao operar com números racionais. Muitas vezes, o erro está no modo em que ele efetua o produto de dois números fracionários. Observamos que grande parte não dominava a técnica das regras de sinais (τ_2), justificando incorretamente o sinal da resposta. Alguns sujeitos tinham como forte na resolução das questões com números racionais primeiro realizar a divisão entre numerador e denominador, antes da operação potenciação.

q) 4^{-2}

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
–16	12	9 alunos efetuaram o produto –4. 4 = –16
		2 alunos afirmaram que quando o expoente era negativo, a resposta era negativa
		1 aluno não justificou
16	10	4 alunos efetuaram 4.4
		4 alunos efetuaram (–4).(–4)
		2 alunos aplicaram propriedade de potência incorretamente: $4^{-2} \cdot 4^{-2} = 4^{+4} = 16$
8	2	1 aluno fez o produto (–4).(–4)= 8
		1 aluno não justificou
–8	1	o aluno não justificou
–2	1	o aluno não justificou
Branco	2	

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
–16	13	2 alunos justificaram que base negativa e expoente negativo obtêm-se valores negativos
		7 alunos afirmaram que quando o expoente era negativo, a resposta é negativa
		4 alunos não justificaram
16	10	4 alunos efetuaram 4.4
		2 alunos efetuaram (–4).(–4)
		1 aluno usou a definição e a regra de sinal incorretamente
8	2	2 alunos justificaram o sinal positivo pela conservação do sinal do número maior
–8	1	1 aluno justificou que expoente negativo sempre é resultado negativo
–4	1	o aluno não justificou
4^{+4}	1	O aluno aplicou propriedade de potência incorretamente $4^{-2} .4^{-2} = 4^{+4}$
Branco	2	

Para o item (q), nenhuma resposta correta foi apresentada. Assim, do total de respostas percebemos várias noções que os alunos apresentam quando se trata de expoente negativo. Os alunos desconheciam a técnica que trata de expoente negativo (τ_6). Neste item, tivemos apenas 4 respostas em branco e percebemos que o aluno tentou de alguma forma aplicar a definição da operação potenciação, utilizando-se de uma maneira própria de fazê-lo ou outros justificaram por meio de uma regra de sinal inadequada.

r) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
$\frac{4}{9}$	5	Os alunos efetuaram a potenciação e ignoraram o expoente negativo
$-\frac{4}{9}$	4	Os alunos efetuaram a potenciação e afirmaram que o resultado era negativo pelo negativo do expoente
$-\frac{4}{6}$	1	O aluno fez a multiplicação 2.2 e 3.2
$-\frac{4}{6}$	5	Os alunos efetuaram a operação multiplicação 2.2 e 3.2 e afirmaram que o resultado era negativo pelo negativo do expoente
$\frac{-4}{-9}$	1	O aluno fez $2^{-2} = -4$ e $3^{-2} = -9$
$\frac{-6}{-6}$	1	O aluno ignorou o sinal do expoente, aplicou a definição e fez produto em “X”
36	1	O aluno fez 2.3 = 6 e elevou ao quadrado
$-$ 0,36	1	O aluno efetuou 2:3 = 0,6 e fez 0,6.0,6 =0,36, mantendo o sinal negativo
$\left(\frac{4}{9}\right)^{+4}$	1	O aluno aplicou a definição e efetuou a multiplicação dos expoentes
0,36	1	O aluno efetuou 2:3 = 0,6 e fez 0,6.0,6 =0,36
$-$ 1	1	O aluno não justificou
Branco	8	

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
$\frac{4}{9}$	6	Os alunos efetuaram a operação potenciação e ignoraram o expoente negativo
$-\frac{4}{9}$	3	Os alunos efetuaram a potenciação e afirmaram que o resultado era negativo pelo negativo do expoente
$\frac{-3}{-2}$	1	O aluno recordou inverter numerador e denominador
$\left(\frac{4}{9}\right)^{+4}$	1	O aluno aplicou a definição e efetuou a multiplicação dos expoentes
$\frac{-4}{-9}$	3	Os alunos efetuaram $2^{-2} = -4$ e $3^{-2} = -9$
$-\frac{6}{6}$	1	O aluno ignorou o sinal do expoente, aplicou a definição e fez produto em “X”
$-\frac{4}{6}$	1	O aluno efetuou a multiplicação e manteve o sinal do expoente
$-\frac{2}{3}$	1	O aluno não justificou
1	1	O aluno não justificou
–36	1	O aluno efetuou 2.3=6 e elevou ao quadrado
3,6	1	O aluno efetuou 2:3 = 0,6 e fez 0,6.0,6 obtendo 3,6
–43,56	1	O aluno efetuou 2:3=0,66 e elevou ao quadrado, obtendo o resultado
12	1	O aluno efetuou 2.3=6 e multiplicou por 2
Branco	8	

No item (r), nenhum dos alunos calculou corretamente o valor da potência, pois não utilizou a técnica que relaciona expoente negativo. As respostas foram variadas e, em grande parte, percebeu-se a intenção do aluno para aplicar a técnica da definição ou encontrar uma regra que justificasse o sinal da resposta. Neste item, o número de respostas em branco foi 16.

s) $\left(\dfrac{-3}{5}\right)^{-2} =$

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
$\frac{9}{25}$	7	6 alunos aplicaram a definição e ignoraram o sinal do expoente
		1 aluno aplicou a definição e justificou o sinal positivo fazendo a regra de sinal entre a base e o expoente
$-\frac{9}{25}$	2	2 alunos aplicaram a definição e ignoraram o sinal do expoente
$\frac{6}{10}$	1	O aluno efetuou o produto 3.2 e 5.2
$\frac{9}{10}$	1	O aluno mesclou multiplicação e potenciação e ignorou o sinal do expoente
$\frac{3}{5}$	2	Os alunos aplicaram a definição e fizeram a regra de sinal entre expoente e base, simplificando o resultado
$\frac{-9}{-25}$	1	O aluno efetuou –3 ao quadrado e –5 ao quadrado
$-\frac{9}{5}$	2	Os alunos mesclaram multiplicação e potenciação e ignoraram o sinal do expoente
$\frac{-15}{-15}$	1	O aluno aplicou a definição e fez o produto em “X”, ignorando o sinal do expoente
$\frac{6}{25}$	1	O aluno mesclou multiplicação e potenciação e ignorou o sinal do expoente
– 0,36	1	O aluno efetuou 3:5 = 0,6 e elevou ao quadrado, mantendo o sinal do expoente
0,36	1	O aluno efetua 3:5 = 0,6 e eleva ao quadrado, fazendo a regra de sinais entre expoente e base
3,6	1	O aluno efetuou 3:5 = 0,6 e elevou ao quadrado fazendo regra de sinal entre expoente e base
–1	1	O aluno efetuou 5:3 = 1 e –1 ao quadrado igual a –1
Branco	8	

1^a série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
$-\frac{9}{25}$	7	Os alunos aplicaram a definição, ignoraram o sinal do expoente e fizeram a regra de sinal incorretamente
$\frac{9}{25}$	6	Os alunos aplicaram a definição, ignoraram o sinal do expoente e fizeram a regra de sinal: menos com menos, resultado positivo
$-\frac{5}{3}$	2	Os alunos recordaram inverter, mas não sabiam efetuar a potenciação
$\left(\frac{-3}{5}\right)^4$	1	O aluno aplicou a definição e fez o produto dos expoentes
$\frac{-15}{-15}$	2	1 aluno inverteu uma das frações e fez o produto, confundindo o procedimento de divisão entre frações
		1 aluno aplicou a definição e fez o produto em X
$\frac{-9}{-25}$	1	O aluno fez –3 ao quadrado e –5 ao quadrado
225	1	O aluno efetuou 3.5= 15 e elevou ao quadrado
3,6	1	O aluno efetuou 3:5 = 0,6 e elevou ao quadrado obtendo 3,6
1,8	1	O aluno efetua 3^2 = 9 e 9:5= 1,8
– 15	1	O aluno não justificou
– 2	1	O aluno não justificou
Branco	6	

Neste item (s), nenhuma resposta correta foi apresentada. Do total de respostas, percebemos novamente as várias noções que os alunos apresentam quando se trata de expoente negativo. Os alunos desconhecem, portanto, a técnica que trata de expoente negativo (τ_6). Neste item, tivemos 14 respostas em branco e observamos que o aluno tenta de alguma forma aplicar a definição da operação potenciação, utilizando-se de um modo próprio de fazê-lo ou outros justificara m por meio de uma regra de sinal inadequada.

t) $(-5)^{-3}$

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
+125	10	3 alunos aplicaram a definição, ignorando o sinal do expoente (–5).(–5).(–5)
		4 alunos fizeram 5.5.5
		3 alunos efetuaram a potência 5^3=125 e justificaram o sinal, fazendo regra de sinais entre base e expoente
– 125	9	3 alunos aplicaram a definição ignorando o sinal do expoente (–5).(–5).(–5)= –125
		3 alunos não justificaram a resposta
		1 aluno fez a potenciação 5.5.5 e justificou o sinal negativo porque a base e o expoente eram números ímpares
		3 alunos efetuaram – 5.5.5 = –125
25	2	Os alunos não justificaram a respostas
– 100	1	O aluno aplicou a definição ignorando o sinal do expoente (–5).(–5).(–5) = –100
+625	2	Os alunos efetuaram a potência incorretamente e justificaram o sinal como: (–) com (–) sinal positivo
75	1	O aluno não justificou a resposta
Branco	5	

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
–125	10	2 alunos aplicaram a definição incorretamente ignorando o sinal do expoente (–5).(–5).(–5)
		4 alunos utilizaram a definição e justificaram a regra de sinal base negativa e expoente impar, resposta negativa
		2 alunos afirmaram que o resultado vai ser sempre negativo, porque o expoente era negativo
		2 alunos justificaram o sinal porque a base e o expoente são negativos
		3 alunos aplicaram a definição incorretamente ignorando o sinal do expoente

125	12	(–5).(–5).(–5)=+125
		7 alunos justificaram o sinal da resposta fazendo regra de sinal entre base e expoente
		2 alunos não justificaram a resposta
–5	1	O aluno não justificou a resposta
625	1	O aluno efetuou 5.5 e 25.25
15	2	Os alunos efetuaram 5.3 e justificam o sinal positivo, fazendo regra de sinais entre a base e o expoente
–75	1	O aluno efetuou a definição incorretamente e errou no produto
–10	1	O aluno não justificou
$(-5)^{-27}$	1	O aluno fez $(-3)^3 = -27$ para justificar o expoente
Branco	1	

No item (t), nenhum dos alunos calculou corretamente o valor da potência, pois não utilizou a técnica que relaciona expoente negativo (τ_6). As respostas foram variadas e em grande parte percebeu-se a intenção do aluno para aplicar a técnica da definição ou encontrar uma regra que justificasse o sinal da resposta. Neste item, 6 respostas estavam em branco.

Questão 1 – Itens *q,r,s,t:*

> Nenhum dos alunos da 8ª série do Ensino Fundamental nem os da 1ª série do Ensino Médio utilizaram a técnica que relaciona potenciação com expoente negativo (τ_6), portanto, não dispuseram do discurso tecnológico-teórico $[\theta / \Theta]_7$.

Nesse bloco, agrupamos questões com números racionais na base e expoentes inteiros negativos. Observamos que só um aluno tinha como discurso inverter a posição do numerador e do denominador (τ_6), embora não tivesse efetuado após isso a operação potenciação e obtido a resposta correta. Nesse sentido, inferimos que o aluno não domina o conhecimento sobre expoentes negativos. Em relação a isso, podemos deixar como sugestão, a realização de um estudo no futuro com mais profundidade, com o objetivo de esclarecer tal fato.

u) $125^{\frac{1}{3}}$

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
375	1	O aluno efetuou 3.125
3275	1	O aluno efetuou 125.125.125=3275
37,5	1	O aluno efetuou 1:3=0,3 e 125.0,3=37,5
80950	1	O aluno efetuou 125.125.125= 80950
$125^{0,25}$	1	O aluno não justificou a resposta
$\frac{375}{3}$	1	O aluno efetuou 125.O aluno efetuou 125 . 1/3 e inverteu o numerador e o denominador
$\frac{125}{1}$	1	O aluno fez $\frac{125^1}{1^3}$
Não aprendi	2	Os alunos afirmaram que não aprenderam
Não sei	9	Os alunos afirmaram que não sabiam
Branco	12	

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
$\frac{125}{3}$	3	3 alunos efetuaram o produto entre base e expoente
375	2	2 alunos efetuaram produto em “X” entre base e expoente
78120	1	O aluno efetuou 125.125.125 e errou o produto
$\frac{125^1}{125^3}$	1	O aluno elevou a base ao numerador e ao denominador
125	3	Os alunos não justificaram a resposta
$125^{0,33}$	1	O aluno efetuou 1:3 =0,33
625	1	O aluno não justificou a resposta
$\frac{125}{375}$	2	Os alunos efetuaram 125.1 e 125.3
Não sei	14	Os alunos afirmaram que não sabiam
Branco	2	

O item (u)não recebeu nenhuma resposta correta. Entendemos que os alunos não disponibilizam a técnica que relaciona operação potenciação com expoente fracionário (τ_{10}). 67% dos alunos deixaram a questão em branco, justificando em algumas das respostas “não ter aprendido” ou “não saber fazer” o exercício. Os demais tentaram responder aplicando a definição de uma forma inadequada ou relacionando os sinais da base e do expoente, justificando a resposta erroneamente.

v) $16^{-\frac{1}{2}}$

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
32	1	O aluno efetuou 16.2
–32	1	O aluno efetuou 16 . (–2)
–16	2	O alunos efetuaram $-\frac{-16^1}{1^2}$
256	1	O aluno efetuou 16.16
$16^{-0,5}$	1	O aluno efetuou 1:2 no expoente
$\frac{-16}{-256}$	1	O aluno fez $\frac{-16^1}{-16^2}$
$\frac{-16}{256}$	2	O alunos efetuaram $\frac{-16^1}{16^2}$
Não sei	11	Os alunos afirmaram que não sabiam
Não aprendi	2	Os alunos afirmaram que não aprenderam
Branco	8	

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
– 8	7	Os alunos efetuaram 16 . $\frac{1}{2}$ e justificaram o sinal da resposta pelo expoente negativo
134	1	O aluno efetuou 16:2 =8 e 16. 8= 134
$\frac{16}{256}$	1	O aluno fez $16^1 = 16$ e $16^2 = 256$
8	2	Os alunos efetuaram 16:2 = 8

– 128	2	O alunos efetuaram 16 . (–8) = –128
– 16	3	Os alunos não justificaram a resposta
0	1	O aluno afirmou que o resultado era zero, pois o expoente era negativo
$-\frac{16}{32}$	1	O aluno efetuou 16. 1=16 e 16 . 2=32
$-\frac{1}{32}$	1	O aluno efetuou 16 . $\frac{1}{2}$, faz produto em "X" e justificou o sinal da resposta pelo expoente negativo
Não sei	6	Os alunos afirmaram que não sabem
Branco	5	

Os itens (v) como o (u) não receberam nenhuma resposta correta. Entendemos que os alunos não disponibilizam a técnica que relaciona operação potenciação com expoente fracionário (τ_{10}). 55% dos alunos responderam à questão em branco, justificando em algumas dessas respostas "não ter aprendido" ou "não saber fazer" o exercício. Os demais, de alguma forma, tentaram aplicar a definição de modo inadequado ou relacionar os sinais da base e do expoente, justificando a resposta erroneamente.

Questão 1 – Itens *u,v:*

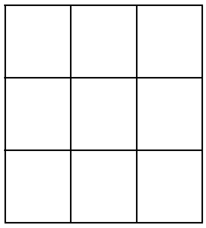
> Nenhum dos alunos da 8ª série do Ensino Fundamental nem os da 1ª série do Ensino Médio utilizaram a técnica que relaciona potenciação com expoente fracionário (τ_{10}), portanto, não dispõem do discurso tecnológico-teórico $[\theta / \Theta]_8$.

Nos itens *u* e *v*, observamos a dificuldade do aluno quando se trata de um expoente racional. O aluno não domina a técnica (τ_{10}). Os motivos do erro em relação a esse caso, podem ser muito diferentes. Inferimos no sentido de que talvez os alunos, assim como nos expoentes inteiros negativos, sofram uma ruptura na concepção que eles têm do que é a operação potenciação, pois nesses casos, não seguem a própria definição da operação.

Questão 2

Representar na forma de potência o número de quadrados e calcular o valor:

a)



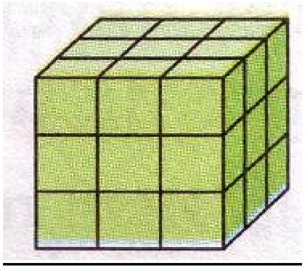
8ª série do Ensino Fundamental

Representação	Cálculo da potência	Quantidade de respostas
3^2	9	14
9^3	81	2
$\frac{9}{2}$	Não calculou	1
9^3	729	4
9^2	81	3
$\frac{9}{9}$	Não calculou	1
9^1	Não calculou	1
$\frac{3}{3}$	Não calculou	1
9^4	3.601	1
Branco		2

1ª série do Ensino Médio

Representação	Cálculo da potência	Quantidade de respostas
3^2	9	13
	Não calculou	1
9^3	729	2
1^9	1	2
3+3+3	9	1
9^1	9	4
9^3	81	1
$\frac{1}{9}$	Não calculou	1
Branco		5

b)



8ª série do Ensino Fundamental

Representação	Cálculo da potência	Quantidade de respostas
3^3	27	9
27^1	Não calculou	1
27^3	729	3
6^2	Não calculou	2
24^3	13.824	1
27^2	828	2
$\frac{30}{30}$	1	1
9^9	Não calculou	1
9^3	729	2
9^4	Não calculou	1
Não entendi		3
Branco		4

1ª série do Ensino Médio

Representação	Cálculo da potência	Quantidade de respostas
3^3	27	6
	9	1
	Não calculou	1
27^1	27	1
3^9	19.683	1
9^2	81	1
9^3	729	2
27^3	19.683	1
	Não calculou	1
9+9+9+9+9	54	1
1^{27}	27	3
6^2	36	1
9^6	17.697(cálculo incorreto)	1
$\left(\frac{1}{27}\right)^3$	Não calculou	1
Branco		8

Questão 2:

38,3% dos alunos de 8ª série do Ensino Fundamental e 32,3% dos alunos de 1ª série do Ensino Médio realizaram, favoravelmente, as tarefas T_1 e T_2 e utilizaram a técnica da visualização (τ_8) e o discurso tecnológico-teórico $[\theta / \Theta]_1$, apresentando uma resposta com uma representação de potência para a figura dada.

Na questão, o objetivo é que o aluno relacione a figura do quadrado ao expoente 2 e a figura do cubo ao expoente 3. Registramos que este tipo de questão é frequente em livros didáticos, ou seja, exercícios que relacionem figuras a potências. Na análise das duas coleções didáticas, observamos a presença da representação figural. Nas respostas, como justificativas, temos registros figurais, e os alunos registraram a contagem dos quadradinhos marcando um a um para obter a resposta correta.

Questão 3

Completar o quadro abaixo:

2	**4**	**8**	
3	**9**		
4			
5			

8ª série do Ensino Fundamental

Completou o quadro totalmente correto	Completou o quadro parcialmente correto	Completou o quadro totalmente incorreto
10	11	9

1ª série do Ensino Médio

Completou o quadro totalmente correto	Completou o quadro parcialmente correto	Completou o quadro totalmente incorreto
8	9	13

<u>Questão 3</u>:

34,5% dos alunos de 8ª série do Ensino Fundamental e 26,7% da 1ª série do Ensino Médio completaram o quadro correto, correspondendo à tarefa do tipo T_4, aplicando as técnicas da definição (τ_1) a técnica da tentativa e erro (τ_4) e a técnica da observação de regularidades (τ_{11}). Os discursos tecnológico-teóricos $[\theta / \Theta]_1$ e $[\theta / \Theta]_3$ foram também usados.

Na questão utilizamos três critérios para verificar a resposta do aluno. Na primeira, quando ele completa o quadro de um modo totalmente correto, é notado que observa a regularidade apresentada na questão e calcula corretamente as lacunas do quadro. Alguns alunos apresentaram inclusive os cálculos no próprio quadro, justificando, assim, sua resposta. O segundo critério foi o aluno completar parcialmente o quadro, isto é, notamos que uma parte dos alunos percebeu a regularidade e iniciou a questão, utilizando a técnica da observação de regularidades, mas acabou errando em algumas das lacunas por diversos motivos. Alguns multiplicaram a base e o expoente em lugar de fazer a operação potenciação. Outros simplesmente colocaram como respostas “não sei’ e vários citaram simplesmente valores errados às potências. O terceiro critério foi aquele que o aluno completou totalmente o quadro errado. Percebemos que esses alunos não dominam a técnica da observação de regularidades (τ_{11}).

Questão 4

Representar na forma de potência e calcular o valor:

a) $2^4 \cdot 2^3$

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	Quantidades de respostas
$2^7 = 128$	6
2^7	1
4^7	7
16.8 = 128	6
16^6	1
4^{12}	5
4^1	1
Branco	3

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Quantidades de respostas
$2^7 = 128$	6
2^7	2
16.8 = 128	5
4^7	4
$2^8 = 256$	1
2^{12}	3
4^{12}	1
2.2.2.2 + 2.2.2 = 24	2
8 . 6 = 48	2
Branco	4

No item (a), 12 alunos apresentaram respostas favoráveis às tarefas T_1 e T_2 e utilizaram as técnicas das propriedades da operação potenciação (τ_9), ou seja, o aluno usou a propriedade da operação, potenciação, relacionando o produto de mesma base, efetuando a adição dos expoentes e realizando o cálculo da potência. Observamos três respostas favoráveis à técnica T_2, ou seja, o aluno apenas aplicou a técnica da propriedade da operação potenciação, não fazendo seu cálculo. Do total de respostas, tivemos 11 em que eles acertaram a questão, obtendo a resposta correta, embora não aplicassem a propriedade, resolvendo diretamente a potência. Nas demais respostas, houve erros diversos, relacionados às propriedades da operação potenciação, como por exemplo, quando o aluno adicionou os expoentes (4+3=7), porém multiplicou as bases, obtendo 4 e, portanto, resposta 4^7. Houve 7 respostas em branco.

b) $5^{100} : 5^{99}$

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	Quantidades de respostas
$5^1 = 5$	7
$1^{199} = 1$	4
$1^1 = 1$	4
0^1	1
0^{199}	1
10^{199}	1
500:495	1
5^{199}	1
Brancos	10

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Quantidades de respostas
$5^1 = 5$	5
$1^{199} = 1$	3
5^{199}	2
5:5=1 , 100–99=1 então 1^1=1	5
500:495	2
25^1	2
Brancos	11

Neste item, tivemos 12 alunos com respostas favoráveis às tarefas T_1 e T_2, nas quais utilizavam as técnicas: da definição (τ_1) e a das propriedades da operação potenciação (τ_9), ou seja, o aluno aplicou a propriedade da operação potenciação que relacionou o quociente de mesma base, efetuando a subtração dos expoentes, realizando o cálculo. Neste item diferente do anterior, percebemos que, por se tratar de um cálculo de difícil resolução, apenas 3 alunos tentaram fazê-lo, tendo como resposta 500:495 de maneira incorreta. 21 respostas foram apresentadas em branco, um número superior ao do item anterior. Os demais alunos justificaram suas respostas com algum tipo de propriedade incorreta.

c) $(3^2)^3$

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	**Quantidades de respostas**
$3^6 = 729$	5
3^6	6
9^3	4
9^5	1
$6^3 = 216$	2
3^5	2
3^3	1
27^5	2
$3^2 + 3^2 + 3^2 = 9^2$	1
27	2
Branco	4

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	**Quantidades de respostas**
$3^6 = 729$	3
3^6	1
9^3	3
729	1
9.9.9 = 729	2
$3^5 =243$	4
$9^3 = 27$	2
27^3	2
$6^3 = 216$	4
27	2
9^6	1
9	1
Branco	4

No item (c), 8 alunos apresentaram respostas favoráveis às tarefas T_1 e T_2 e utilizaram as técnicas das propriedades da operação potenciação (τ_9), ou seja, o aluno aplicou a propriedade da operação potenciação, relacionando a "potência de potência", efetuando o produto dos expoentes e realizando o cálculo da potência. Observamos 7 respostas favoráveis à técnica T_2, ou seja, o aluno apenas aplicou a técnica da propriedade da operação potenciação, representando corretamente a potência e, não realizando seu cálculo. Do total de respostas, tivemos 10, nas quais os alunos acertaram a questão, obtendo a resposta correta, embora não tivessem aplicado a propriedade, resolvendo a potência .

d) $(2.\ 3)^2$

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	Quantidades de respostas
$2^2 .\ 3^2 = 36$	1
$6^2 = 36$	6
$6^2 = 6.6 = 36$	14
$5^2 = 25$	1
$6^2 = 12$	2
(2. 3). (2.3) =36	1
48	1
$6^2 + 6^2 = 12^4$	1
Branco	3

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Quantidades de respostas
$2^2 .\ 3^2 = 36$	1
$6^2 = 36$	16
$6^2 = 6.6 = 36$	3
36	5
$5^2 = 25$	1
Branco	4

Neste item, tivemos 47 respostas corretas com diferentes justificativas. Apenas 2 alunos aplicaram a distributiva em relação à base e realizaram o cálculo da potência corretamente. Do total de respostas, 39 alunos efetuaram primeiramente o produto da base 2.3 = 6 e depois elevaram ao quadrado, obtendo a resposta correta e 5 alunos colocaram a resposta imediata 36, realizando a tarefa diretamente. Observamos uma resposta curiosa (2. 3). (2.3) =36.

e) $(6 : 2)^3$

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	Quantidades de respostas
$3^3 = 27$	4
$3^3 = 3.3.3 = 27$	13
(6:2).(6:2) = 3.3=9	1
2^3	1
9^3	1
729	1
$3^3 = 9$	3
4^3	1
$3^3 + 3^{3\,+}\, 3^3 = 9^9$	1
3	1
Branco	3

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Quantidades de respostas
$3^3 = 27$	10
$3^3 = 3.3.3 = 27$	2
3^3	2
27	3
$6^2 : 2^3$	1
$8^3 = 512$	1
9^3	1
108	1
3.3	3
12^3	1
Branco	5

No item (e), houve 34 respostas corretas com diferentes justificativas. Nenhum dos alunos aplicou a distributiva em relação à base e realizou o cálculo da potência corretamente. Do total de respostas, 26 alunos primeiro efetuaram o quociente 6:2= 3, depois elevaram ao cubo, obtendo a resposta correta; 3 alunos colocaram a resposta imediata 27, realizando a tarefa diretamente e 2 alunos mostraram a representação da potência sem efetuar o cálculo. Observamos a mesma resposta (6:2).(6:2) = 3.3=9 na qual o aluno efetuou incorretamente a operação potenciação, pois desconsiderou o expoente 3, utilizando-se do expoente 2.

Questão 4:

I. 12,7% dos alunos de 8ª série do Ensino Fundamental e 7,5% de 1ª série do Ensino Médio corresponderam favoravelmente às tarefas T_1 e T_2, utilizando as técnicas: da definição (τ_1), a técnica das propriedades da operação potenciação (τ_9) ou a técnica da distributiva da operação potenciação (τ_{12}). O discurso tecnológico-teórico empregado foi o $[\theta / \Theta]_1$, apresentando uma resposta com uma representação de potência para a questão dada.

II. 22,3% dos alunos de 8ª série do Ensino Fundamental e 32,6% de 1ª. série do Ensino Médio acertaram a resposta por diversas técnicas, como por exemplo a definição.

Na questão 4, observamos e registramos um grande número de erros, pela desordem ou confusão que causam quando se trata de propriedades da potenciação. Pelo não domínio dessas propriedades, o aluno tenta de alguma maneira aplicá-las, apresentando respostas erradas. Neste aspecto, inferimos que talvez a língua natural seja importante. Muitas vezes, o aluno sabe que, ao multiplicar bases iguais, devemos fazer alguma operação com os expoentes e realizar algo com as bases, mas, por não se recordarem da regra, resolveram de forma inadequada.

Questão 5

Representar a potência e calcular o valor:

a) 9 elevado ao quadrado

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	**Quantidades de respostas**
$9^2 = 81$	12
$9^2 = 9 . 9 =81$	9
$9^2 = 18$	1
$9^4 = 6561$	2
81	1
$9^1 = 9$	1
Representação figural	2
Branco	2

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	**Quantidades de respostas**
$9^2 = 9.9 =81$	3
$9^2 = 81$	14
9^2	2
$9^2 = 18$	1
$9^4 = 6561$	3
81	1
$9^2 = 27$	2
36	2
$9^2 = 72$	1
Branco	1

Do total de respostas, 38 estão corretas, dentre as quais 36, os alunos realizaram as tarefas de representar e calcular e 2 apresentaram a resposta correta e 1 de forma direta, com a resposta 81. Registramos a resposta de 5 alunos que entenderam que elevar ao quadrado é elevar a potência ao expoente 4.

b) 10 elevado ao quadrado

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	**Quantidades de respostas**
10^2 = 10.10=100	10
10^2 = 100	10
100	1
10^4 = 10000	1
10^2 = 200	1
10^2 = 20	2
10^1 = 10	1
Representação figural	2
Branco	2

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	**Quantidades de respostas**
10^2 = 10.10=100	4
10^2 = 100	16
10^2	2
100	1
10^4 = 10000	2
10^2 = 20	1
5^{10}	1
10^4 = 40	1
Branco	2

No item (b) do total de respostas, 42 estão corretas, dentre as quais 40 os alunos realizaram as tarefas de representar e calcular e 2 apresentaram a resposta correta 100 de forma direta. Registramos a resposta de 4 alunos que entenderam que elevar ao quadrado é elevar a potência ao expoente 4.

c) 1 ao quadrado

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	Quantidades de respostas
$1^2 = 1.1 = 1$	7
$1^2 = 1$	16
$1^2 = 2$	1
$1^4 = 1.1.1.1 = 1$	2
1	1
Representação figural	2
Branco	1

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Quantidades de respostas
$1^2 = 1.1 = 1$	4
$1^2 = 1$	15
1^2	3
$1^4 = 1.1.1.1 = 1$	2
1	3
$1^2 = 2$	1
$1^2 = 10$	1
Branco	1

O item (b) apresenta 46 respostas corretas, dentre as quais 42 os alunos realizaram as tarefas de representar e calcular e 4 apresentaram a resposta correta 1 de forma direta. Registramos a resposta de 4 alunos que entenderam que elevar ao quadrado é elevar a potência ao expoente 4. Do total de respostas, 3 alunos apresentaram somente a representação da potência sem efetuá-la.

d) 3 ao cubo

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	Quantidades de respostas
$3^3 = 3.3.3 = 27$	8
$3^3 = 27$	9
27	1
$3^4 = 12$	1
$3^2 = 9$	1
$3^3 = 81$	1
$3^3 = 9$	3
$3^4 = 3.3.3.3 = 81$	1
9	1
$3^3 = 18$	1
Representação figural	1
Branco	2

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Quantidades de respostas
$3^3 = 3.3.3 = 27$	4
$3^3 = 27$	14
3^3	2
$3^4 = 12$	1
$3^3 = 9$	2
$3^4 = 3.3.3.3 = 81$	1
9	3
$3^3 = 72$	1
3	1
Branco	1

No item (d) do total de respostas, 36 estão corretas, dentre as quais 35 os alunos realizaram as tarefas de representar e calcular e 1 apresenta a resposta correta 27 de forma direta.

e) 10 ao cubo

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	Quantidades de respostas
10^3 = 10.10.10= 1000	7
10^3 = 1000	10
1000	1
10^4 = 40	1
10^2 = 10	1
10^3 = 300	1
10^4=10000	1
10^3=30	1
10^3 = 100	1
10^{10}	1
Representação figural	2
Branco	3

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Quantidades de respostas
10^3 = 10.10.10= 1000	3
10^3 = 1000	15
10^3	1
10^4 = 40	1
10^2 = 10	1
10^3 = 300	3
10^4=10000	1
10^3=30	1
3	1
100	1
Branco	2

O item (e) apresenta 36 respostas corretas, dentre as quais 35 os alunos realizaram as tarefas de representar e calcular e 1 apresentou a resposta correta 1.000 de forma direta.

Questão 5:

66,7% dos alunos de 8ª série do Ensino Fundamental e 61,5% dos alunos da 1ª série do Ensino Médio corresponderam favoravelmente às tarefas do tipo T_1 e T_2, aplicando a técnica da definição (τ_1). Utilizaram também o discurso tecnológico-teórico $[\theta / \Theta]_1$.

Na questão 5, registramos a relação que o aluno fez entre o "quadrado" de um número e o expoente 4. Boa parte dos alunos acertou a questão, embora um pequeno grupo mesmo representando a potência de forma correta ainda não dominava o conceito de potenciação, efetuando, por exemplo, o produto entre base e expoente.

Questão 6

Representar e calcular a potência correspondente:

a) base 4 e expoente 5

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	Quantidades de respostas
4^5 = 4.4.4.4.4= 1024	9
4^5 = 1024	3
4^5	4
1024	1
4^5=256	4
4^5= 4096	3
4^5=128	1
$\frac{4}{5}$	3
$\frac{5}{4}$	1
Branco	1

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Quantidades de respostas
$4^5 = 4.4.4.4.4 = 1024$	1
$4^5 = 1024$	7
4^5	2
$4^5=256$	2
$4^5= 512$	3
$4^5=81$	1
$4^5= 4096$	3
$5^4 = 625$	4
$\frac{5}{4}$	2
Branco	5

Do total de respostas, 20 alunos realizaram as tarefas de representar e calcular satisfatoriamente. Seis alunos apresentaram somente a representação mas não efetuaram o cálculo e 1 aluno apresentou a resposta correta de modo direto. Verificamos 17 respostas cuja representação estava correta e o cálculo errado. Registramos 6 respostas cuja nomenclatura da operação potenciação foi confundida com a nomenclatura de número fracionário, numerador e denominador.

b) base 5 e expoente 4

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	Quantidades de respostas
$5^4 = 5.5.5.5=625$	11
$5^4 = 625$	3
625	1
$5^4= 1125$	3
$5^4=3125$	4
$5^4=500$	1
$5^4=325$	1
$5^4=50$	1
$\frac{5}{4}$	3
$\frac{4}{5}$	1
Branco	1

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Quantidades de respostas
$5^4 = 5.5.5.5=625$	3
$5^4 = 625$	7
5^4	2
$5^4= 250$	1
$5^4=3125$	6
$5^4=256$	1
$5^4=225$	2
$\frac{4}{5}$	2
Branco	6

Entre as respostas, 25 alunos realizaram as tarefas de representar e calcular satisfatoriamente. Dois alunos apresentaram somente a representação mas não efetuaram o cálculo e 1 aluno apresentou a resposta correta de modo direto. Verificamos 21 respostas nas quais a representação estava correta e o cálculo realizado errado. Nesse item, novamente registramos 6 respostas cuja nomenclatura da operação potenciação foi confundida com a nomenclatura de número fracionário, numerador e denominador.

Questão 6:

43,3% dos alunos de 8ª série do Ensino Fundamental e 30,7% dos alunos da 1ª série do Ensino Médio corresponderam favoravelmente às tarefas do tipo T_1 e T_2, aplicando a técnica da definição (τ_1). Utilizaram também os discursos tecnológico-teóricos $[\theta /\Theta]_1$.

Na questão 6, uma parte dos alunos mesmo representando de forma adequada a potência, ou seja, entendendo o que é a base e o expoente, não calculou corretamente o valor da potência.

Questão 7

8ª série do Ensino Fundamental

Apresentação das respostas	**Quantidade de respostas**
Representação totalmente correta e cálculo incorreto	13
Representação totalmente incorreta e calculo incorreto totalmente incorreta e calculo incorreto	15
Branco	2

1ª série do Ensino Médio

Apresentação das respostas	**Quantidade de respostas**
Representação totalmente correta e cálculo incorreto	12
Representação totalmente incorreta e calculo incorreto	17
Branco	1

Na questão 7, 25 alunos representaram totalmente de modo correto a tabela e efetuaram o cálculo da potência incorreto. Registramos a observação de 20 dessas respostas em que o aluno errou exclusivamente os itens da tabela que se referiam ao expoente negativo. Assim, 32 respostas foram apresentadas com a representação incorreta e o cálculo da potência também incorreto.

Questão 7:

44,3% dos alunos da 8ª série do Ensino Fundamental e 41,4% dos alunos da 1ª série do Ensino Médio completaram o quadro corretamente na representação, embora com resposta errada quando a potência tinha o expoente negativo. Nesta questão, concluímos que o aluno respondeu convenientemente e de forma parcial às tarefas do tipo T_1 e T_2, utilizando as técnicas: de definição (τ_1) e de observação de regularidades e padrões numéricos (τ_{11}).

Quando analisamos as respostas referentes à questão 7, estabelecemos dois critérios. O primeiro observou que a representação da potência solicitada foi feita totalmente correta, mas o cálculo foi incorreto, ou seja, o aluno entendeu o que é a base e o que é o expoente, mas não fez o cálculo correto da operação potenciação. Assim grande parte dessas respostas erradas deveu-se ao expoente inteiro negativo utilizado na questão. Nenhuma resposta do experimento estava totalmente correta, daí concluirmos que o aluno também não dispôs da observação de regularidade proposta na questão. O segundo critério para análise das respostas foi a representação totalmente incorreta e o cálculo incorreto. Observamos que muitos alunos confundem expoente e base, decorrendo, portanto, no erro do cálculo da potência.

Questão 8

Representar os seguintes números em potência de base 2:

a) 8

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	**Quantidades de respostas**
2^3	5
2^8	9
8^2	10
8.8	1
8^{64}	1
64	1
4^2	1
Branco	2

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Quantidades de respostas
2^3	13
2^8	3
8^2	8
$\frac{16}{2}$	1
4	1
8^{16}	1
Branco	3

Do total de respostas, 18 alunos, representaram o valor na representação correta de base 2. Registramos 5 respostas em branco, e as demais foram diferentes tentativas de representação incorretas.

b) –32

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	Quantidades de respostas
-2^5	3
2^5	1
-32^2	8
32^2	2
2^{-32}	1
1024	3
– 1024	2
-4^7	1
2^{32}	6
Branco	3

1^a série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	**Quantidades de respostas**
-2^5	6
2^5	1
-32^2	7
32^{-1}	1
2^{-32}	3
2^{-5}	5
$-\frac{64}{2}$	1
-32	2
Branco	4

Do total de respostas, 9 alunos fizeram o potência na representação correta de base 2. Registramos 7 respostas em branco e as demais foram diferentes tentativas de representações incorretas.

c) 16

8^a série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	**Quantidades de respostas**
2^4	4
4^2	2
16^2	11
2^{16}	7
256	1
32	1
16^{256}	1
8^8	1
Branco	2

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Quantidades de respostas
2^4	11
4^2	1
16^2	4
2^{16}	4
256	1
32	1
16^{256}	1
4^4	1
16	1
$\frac{32}{2}$	1
Branco	4

Do total de respostas, 15 alunos representaram o valor na representação correta de base 2. Três alunos representaram como 4^2. Registramos 6 respostas em branco e as demais foram diferentes tentativas de representações incorretas.

d) 0,25

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	Quantidades de respostas
$0,25^2$	10
$0,5^2$	2
$2^{0,25}$	6
$0,25^{0,0625}$	1
$2^{2/5}$	2
Branco	9

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	**Quantidades de respostas**
$0{,}25^2$	3
2^{-5}	1
$2^{0,25}$	3
$0{,}25^{0,0625}$	1
$2^{1/2}$	2
0,75	1
$2^{-0,5}$	3
$0{,}25^2$	5
2	2
$1^{1/4}$	1
0,25	1
0,5	1
Branco	6

Do total de respostas, nenhum aluno representou o valor correto de base 2. Consideramos que os alunos não utilizam a técnica de conversões matemáticas. Registramos um aumento nas respostas em branco que passaram nesse item para 15 e as demais foram diferentes tentativas de representações incorretas.

Questão 8:

> 10% dos alunos da 8ª série do Ensino Fundamental e 25% de 1ª série do Ensino Médio responderam convenientemente à tarefa do tipo T_2, utilizando a técnica da operação inversa à operação potenciação (τ_5) e discurso tecnológico-teórico $[\theta\ /\Theta]_4$ e nenhum dos alunos utilizou-se da técnica de conversões (τ_{12}) e discurso tecnológico teórico $[\theta\ /\Theta]_{9.}$

Na questão 8, quando se trata de base com número natural, observamos que uma parte dos alunos não tem problemas, mas quando a base é um número decimal, o aluno não domina a técnica de conversão de registros. Na tentativa de responder, ele utiliza algum recurso em que apresenta a potência na representação de uma base e expoente com respostas variadas.

Questão 9

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	**Quantidades de respostas**
1+3+9+27=40	1
1+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3=40	1
3+3+3+3+3+3+3= 21	1
3^3 = 27	4
1 + 3.3.3 = 28	1
17	1
$1+3^3+3^3$ = 55	1
$3^2+3^2+3^2$ = 27	1
$1^3+3^3+3^3=7^3$	1
9^3=27	1
13	1
3^3+3^3= 18	1
3+3+3+3+3+3+3+3= 24	1
1+81= 82	1
1+3+3+3+3=13	2
$3^2+3^2+3^3$= 48	1
1+3+3+3=10	2
3+3+3=9	2
1+3+9+9=22	1
3+3+3+3+3+3+3+3+3= 27	1
1+1+3+3+3=11	1
3^2=9	2
Branco	1

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	**Quantidades de respostas**
1+3+9+27=40	1
3+3+3+3+3+3+3= 21	2
1+3+9+9=22	2
1+3+3+3+3=13	3
3^4=243	2
2^{12}	1
1+1+3+3+3=11	5
3^3=27	1
3^2=9	2
$1+1+3^3+3^3$=56	2
3+3+3+3=12	1
23	2
1+3+9+3=16	1
Registro Figural	2
Branco	3

Questão 9:

Só 1 aluno da 8ª série do Ensino Fundamental e 1 aluno da 1ª série do Ensino Médio responderam adequadamente à tarefa do tipo T_4, utilizando as técnicas: da definição (τ_1) e discurso tecnológico-teórico $[\theta\ /\Theta]_1$, representando a solução do problema por meio da soma de potências.

Na situação-problema, questão 9, registramos 2 respostas corretas. Apenas 4 alunos deixaram a resposta em branco. Dentre as demais, 90% dos alunos tentaram registrar a resposta por meio de uma soma de potências, mas não entenderam o enunciado da questão de modo correto.

4.2.1 A padronização dos Erros-Categorias

Neste item, apresentamos as categorias de erros que se relacionam com as técnicas utilizadas pelos alunos no instrumento diagnóstico. Cada item foi acompanhado por um protocolo relativo àquele erro. No caso das categorias aqui catalogadas, serão relacionadas às categorias de erros estabelecidas por Sierra (2000) e Feltes (2007).

As categorias foram as seguintes:

Categoria I

Erros relacionados à técnica da definição (τ_1):

a) O aluno aplica a técnica τ_1, mas efetua o produto em "X" dos fatores, portanto, não dispõe do discurso tecnológico-teórico $[\theta\ /\Theta]_1$.

$$\frac{2}{3} \text{ X } \frac{2}{3} = \frac{2.3}{2.3} = \frac{6}{6}$$

Figura 26: Aluno 22 – 8ª. Série - Ensino fundamental - Questão 1, item (o).

b) O aluno aplica a técnica da definição da operação potenciação τ_1, mas determina o *m.m.c*. O aluno realiza o mesmo procedimento em três itens.

$$\frac{3}{7}\ \ \frac{3}{7} = \ \frac{\ }{7}$$

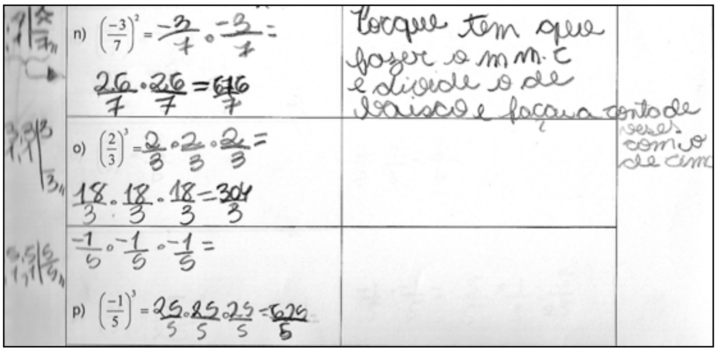


Figura 27: Aluno 21 – 8ª. Série – Ensino fundamental - Questão 1, item (n), (o) e (p).

c) O aluno aplica a técnica τ_7, e multiplica a base pelo expoente, portanto, não dispõe do discurso tecnológico-teórico $[\theta\ /\Theta]_1$. Este tipo de erro está relacionado nos trabalhos de Sierra (2000) e Feltes (2007).

$$6^2 = 6\ .\ 2 = 12$$

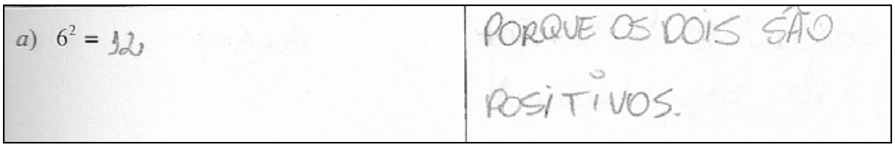


Figura 28: Aluno 11 – 1ª. Série Ensino Médio - Questão 1, item (a).

d) Quando o aluno aplica a definição da operação potenciação só utiliza o sinal no primeiro fator.

$$(-\ 6)^2 = -6.\ 6 = -\ 36$$

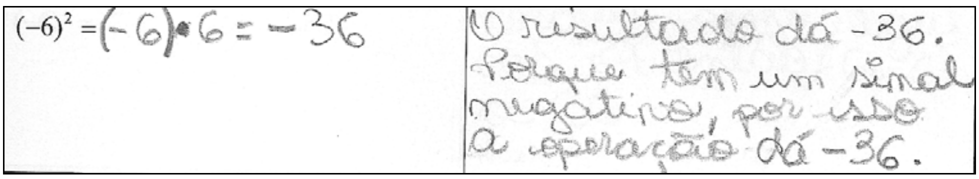


Figura 29: Aluno 20 – 8ª. Série Ensino Fundamental - Questão 1, item (b).

e) Quando se trata de potência com base fracionária, o aluno aplica a definição, mas mescla as operações potenciação e multiplicação ora no numerador, ora no denominador.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{6}{27} \qquad \text{ou} \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{9}$$

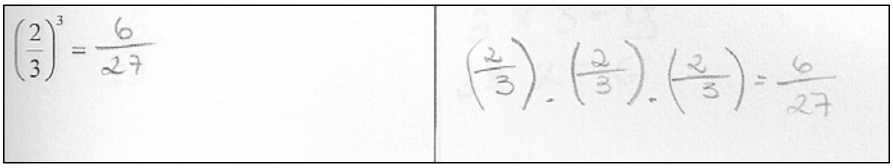


Figura 30: Aluno 24 – 1ª. Série Ensino Médio - Questão 1, item (o).

<u>Categoria II</u>

<u>Erros relacionados à técnica de regra de sinal</u> (τ_2):

a) O aluno afirma que o produto de 2 números negativos tem como resultado um número negativo.

$$(-6).(-6) = -36$$

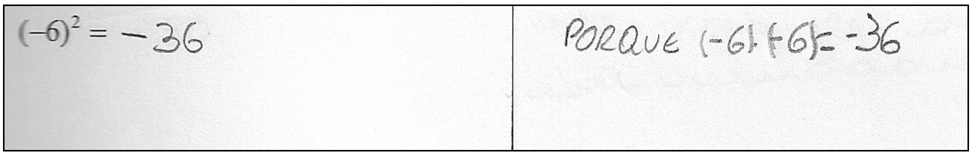


Figura 31: Aluno 15 – 1ª. Série Ensino Médio - Questão 1, item (b).

b) O aluno aplica a regra do sinal inexistente entre o sinal da base e o sinal do expoente.

$$(-1)^5 = -1$$

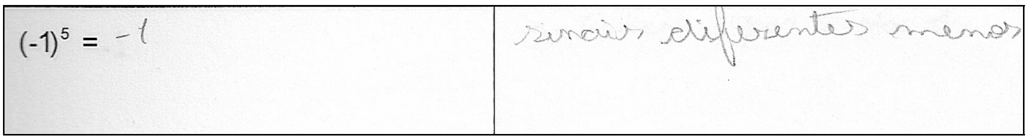


Figura 32: Aluno 9 – 1ª. Série Ensino Médio - Questão 1, item (f).

$$(-2)^3 = -8$$

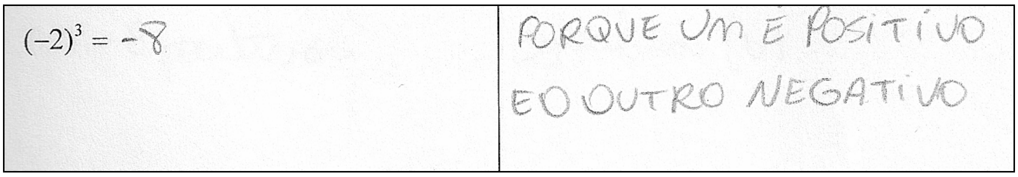


Figura 33: Aluno 11 – 1ª. Série Ensino Médio - Questão 1, item (d).

c) O aluno afirma que a resposta é negativa porque o sinal da base é negativo.

$$(-8)^0 = -1$$

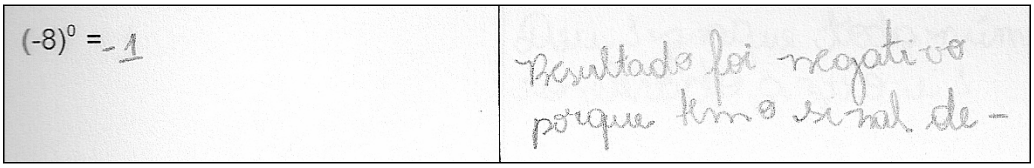


Figura 34: Aluno 26 – 1ª. Série Ensino Médio - Questão 1, item (h).

d) O aluno afirma que o resultado é negativo porque o número é negativo (base).

$$(-6)^2 = -36$$

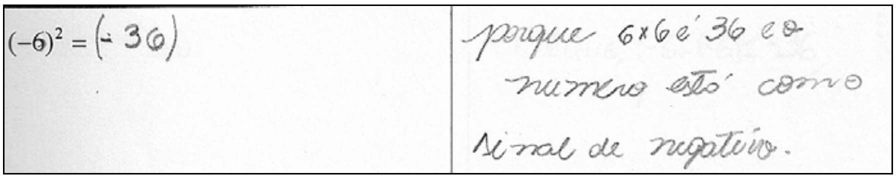


Figura 35: Aluno 14 – 1ª. Série Ensino Médio - Questão 1, item (b).

e) o aluno afirma que quando se multiplicam números negativos, o resultado é positivo.

$$(-2)^3 = (-2).(-2).(-2) = +8$$

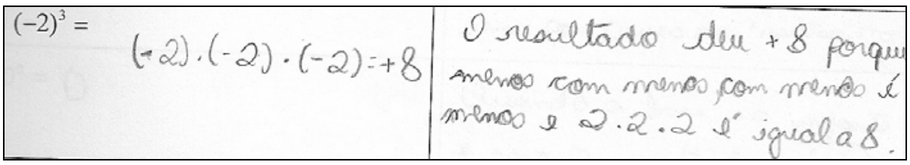


Figura 36: Aluno 30 – 8a. Série Ensino Fundamental - Questão 1, item (d).

f) o aluno afirma que quando a base e o expoente são negativos, o sinal da potência é negativo.

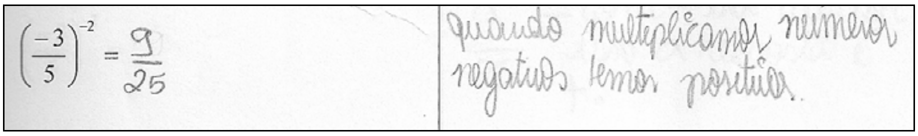


Figura 37: Aluno 07 – 1ª. Série Ensino Médio - Questão 1, item (s).

<u>Categoria III</u>

<u>Erros relacionados às convenções matemáticas (τ_3):</u>

a) O aluno afirma que qualquer número elevado a zero, é 0.

$$5^0 = 0$$

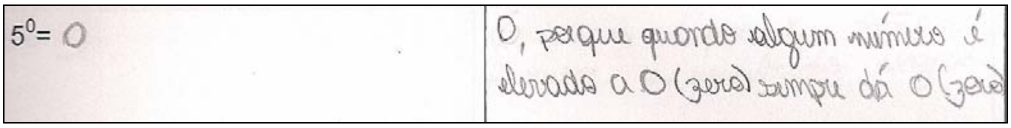


Figura 38: Aluno 02 – 1ª. Série Ensino Médio - Questão 1, item (g).

b) O aluno afirma que qualquer número elevado a zero, é ele mesmo.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{2}$$

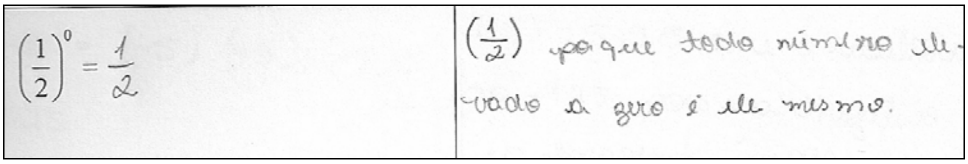


Figura 39: Aluno 07 – 1ª. Série Ensino Médio - Questão 1, item (s).

c) o aluno refere-se ao zero do expoente como “nada”, mantendo–se a base. Este tipo de erro está relacionado no trabalho de Sierra (2000), na categoria *o zero como representação do nada.*

$$(-8)^0 = -8$$

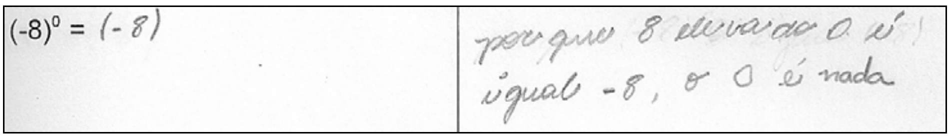


Figura 40: Aluno 13 – 1ª. Série Ensino Médio - Questão 1, item (h).

d) o aluno refere-se ao zero do expoente como “nada”, e o resultado é zero. Este tipo de erro está relacionado no trabalho de Sierra (2000), na categoria *o zero como representação do nada.*

$$(-8)^0 = 0$$

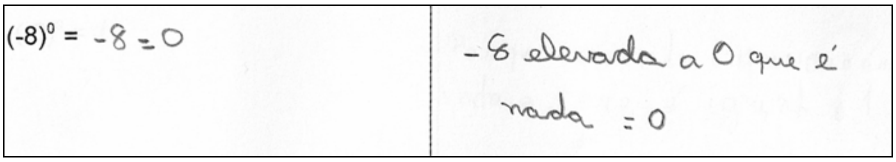


Figura 41: Aluno 26 – 8ª. Série Ensino Fundamental - Questão 1, item (h).

Categoria IV

Erros relacionado a expoentes negativos (τ_6):.

a) O aluno entende que inverte a posição do numerador e do numerador no caso da potência com base fracionária, mas não efetua a potenciação.

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \frac{-5}{3}$$

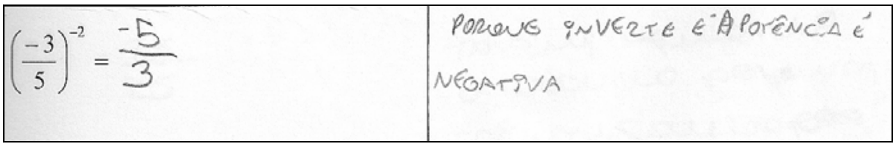


Figura 42: Aluno 15 – 1ª. Série Ensino Médio - Questão 1, item (r).

b) Quando o expoente é negativo, inverte a posição do numerador e do denominador no caso da potência com base fracionária, e a base toda fica com sinal negativo.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{--2} = \frac{-3}{-2}$$

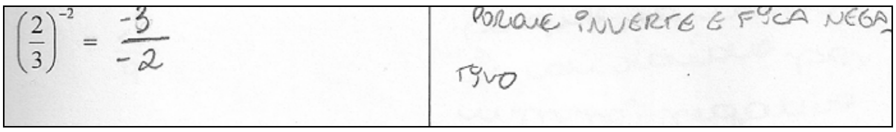


Figura 43: Aluno 15 – 1ª. Série Ensino Médio - Questão 1, item (s).

c) o aluno afirma que se o expoente é negativo, o resultado também será negativo.

$$4^{-2} = -16$$

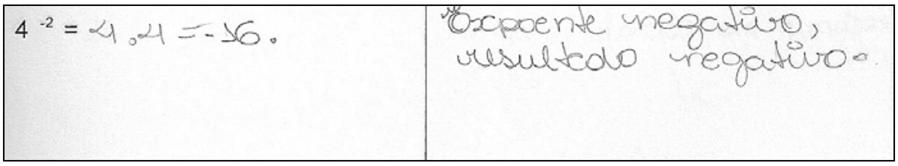


Figura 44: Aluno 15 – 8ª. Série Ensino Fundamental - Questão 1, item (q).

d) o aluno relaciona o expoente negativo com divisão entre frações.

$$\left(\frac{-3}{5}\right)^{-2} = \frac{-3}{5} \cdot \frac{5}{-3} = \frac{-15}{-15}$$

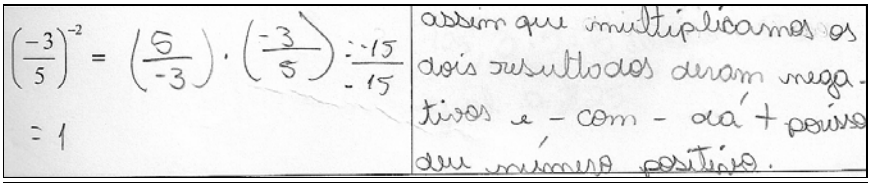


Figura 45: Aluno 01 – 1ª. Série Ensino Médio - Questão 1, item (s).

<u>Categoria V</u>

<u>Erros relacionados às propriedades de potenciação(τ_9):</u>

a) O aluno eleva o numerador à potência e não faz o mesmo com o denominador. Neste tipo de procedimento, mescla as operações potenciação e multiplicação. No exemplo abaixo, o aluno efetua 2.3 = 6 e $3^3 = 27$.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \frac{8}{9}$$

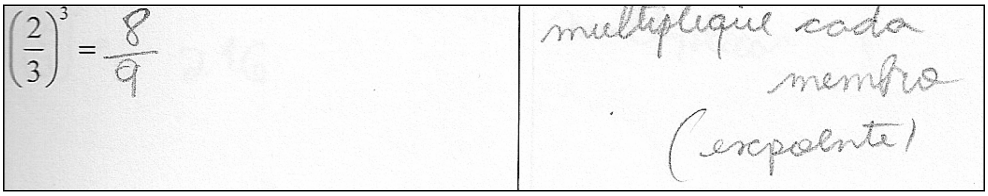


Figura 46: Aluno 10 – 8ª. Série Ensino Fundamental - Questão 1, item (o).

b) ao multiplicar potências de mesma base o aluno multiplica os expoente.

$$2^4 \cdot 2^3 = 2^{12}$$

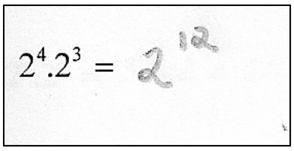


Figura 47: Aluno 13 – 1ª. Série Ensino Médio – Questão 4, item (a).

c) ao multiplicar potências de mesma base, o aluno multiplica as bases e multiplica os expoentes.

$$2^4 \cdot 2^3 = 4^{12}$$

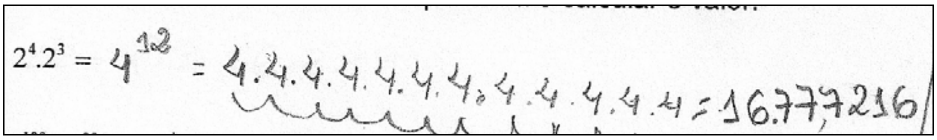


Figura 48: Aluno 06 – 8ª. Série Ensino Fundamental – Questão 4, item (a).

d) ao multiplicar potências de mesma base, o aluno adiciona as potências.

$$2^4 \cdot 2^3 = 2^4 + 2^3 = 16 + 8 = 24$$

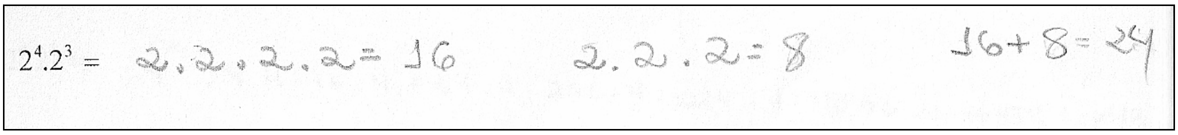


Figura 49: Aluno 19 – 1ª. Série Ensino Médio – Questão 4, item (a).

e) ao dividir potências de mesma base o aluno adiciona as bases e os expoentes.

$$5^{100} : 5^{99} = 10^{199}$$

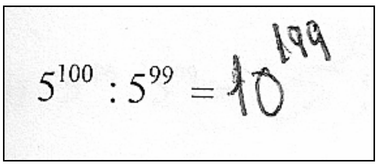


Figura 50: Aluno 18 – 8ª. Série Ensino Fundamental – Questão 4, item (b).

f) ao dividir potências de mesma base, o aluno mantém a base e adiciona os expoentes.

$$5^{100} : 5^{99} = 5^{199}$$

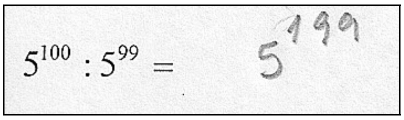


Figura 51: Aluno 30 – 8ª. Série Ensino Fundamental – Questão 4, item (b).

g) ao resolver potência de outra potência, o aluno adiciona os expoentes.

$$(3^2)^3 = 3^5$$

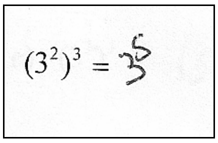


Figura 52: Aluno 02 – 8ª. Série Ensino Fundamental – Questão 4, item (a).

h) ao multiplicar potências de mesma base, os alunos efetuaram o produto das bases e somam os expoentes.

$$2^4 . 2^3 = 4^7$$

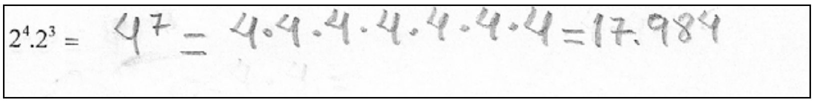


Figura 53: Aluno 18 – 8ª. Série Ensino Fundamental – Questão 4, item (c).

i) ao dividir potências de mesma base, o aluno divide as bases e subtrai os expoentes.

$$5^{100} : 5^{99} = 1^1$$

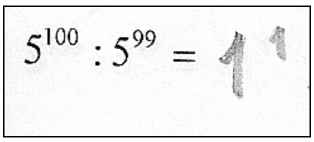


Figura 54: Aluno 18 – 8ª. Série Ensino Fundamental – Questão 4, item (b).

j) ao dividir potências de mesma base, o aluno divide as bases e adiciona os expoentes.

$$5^{100} : 5^{99} = 1^{199}$$

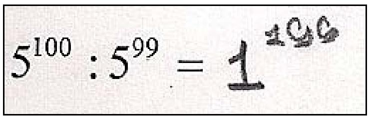


Figura 55: Aluno 29 – 8ª. Série Ensino Fundamental – Questão 4, item (b).

l) ao resolver a distributiva de potência, o aluno efetua a operação que existe nos parênteses, adiciona as bases e os expoentes.

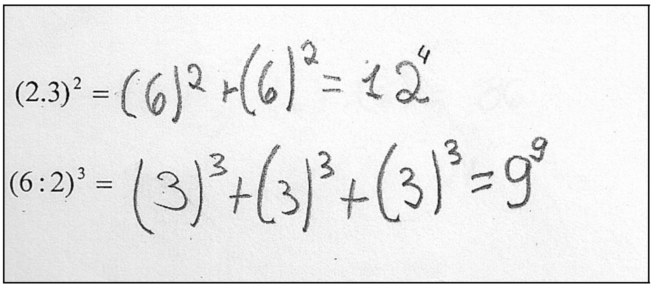


Figura 56: Aluno 29 – 8ª. Série Ensino Fundamental – Questão 4, itens (d) e (e).

Categoria VI

Erros relacionados às bases fracionárias

a) o aluno efetua a multiplicação entre numerador e denominador e depois faz a potenciação.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = (2.3)^3 = 6^3 = 216$$

Figura 57: Aluno 06 – 1ª. Série Ensino Médio – Questão 1, item (o).

b) o aluno efetua a divisão entre numerador e denominador, considerando, muitas vezes, um valor aproximado e depois faz a potenciação incorretamente.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = (2:3)^3 = 0,6.\ 0,6.\ 0,6 = 21,6$$

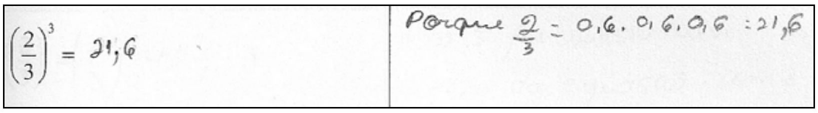


Figura 58: Aluno 04 – 1ª. Série Ensino Médio – Questão 1, item (o).

<u>Categorias VII</u>

<u>Erros relacionados à nomenclatura da operação potenciação</u>:

a) O aluno entende que elevar ao quadrado, é elevar a quarta potência.

10 ao quadrado – 10^4

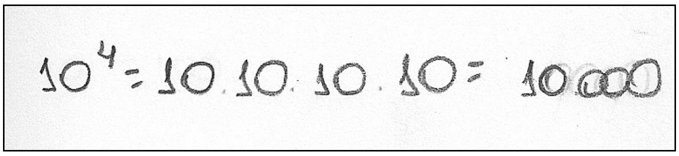


Figura 59: Aluno 206 – 8ª. Série Ensino Fundamental – Questão 5, item (b).

b) O aluno troca base por expoente.

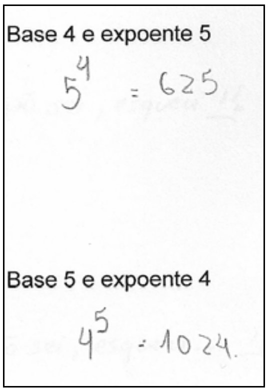


Figura 60: Aluno 22 – 1ª. Série Ensino Médio – Questão 6, item (a) e (b).

EXPOENTE	BASE	REPRESENTAÇÃO	POTÊNCIA
4	4	4^4	256
3	4	3^4	81
2	4	2^4	16
1	4	1^4	1
0	4	0^4	0
-1	4	-1^4	-1
-2	4	-2^4	-16
-3	4	-3^4	-81

Figura 61: Aluno 22 – 8ª. Série Ensino Fundamental – Questão 7.

c) O aluno associa a nomenclatura da operação potenciação à fração.

Base 4 e expoente 5

$\frac{5}{4} = 1,25$

Base 5 e expoente 4

$\frac{4}{5} = 0,8$

Figura 62: Aluno 1 – 1ª. Série Ensino Médio – Questão 6, item (a) e (b).

Categoria VIII

Erros relativos às conversões matemáticas (τ_{12}):

a) quando é solicitado escrever certa potência em representação de base e expoente, o aluno afirma que a potência é a base ou o expoente.

$$0{,}25 = 0{,}25^2 \text{ ou } 0{,}25 = 2^{0{,}25}$$

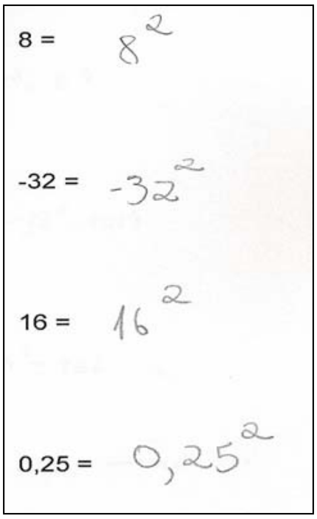


Figura 63: Aluno 22 – 1ª. Série Ensino Médio – Questão 8.

Categoria IX

Erros relacionados a expoentes fracionários (τ_{10}):

a) o aluno eleva a base ao numerador e ao denominador.

$$16^{-\frac{1}{2}} = \frac{16^1}{16^2}$$

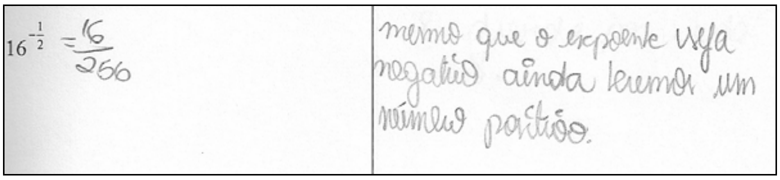


Figura 64: Aluno 07 – 1ª. Série Ensino Médio – Questão 1 item (v).

Categoria X

Erros relativos à operação multiplicação- o aluno efetua de maneira incorreta a operação multiplicação.

$$6 \, . \, 6 = 42$$

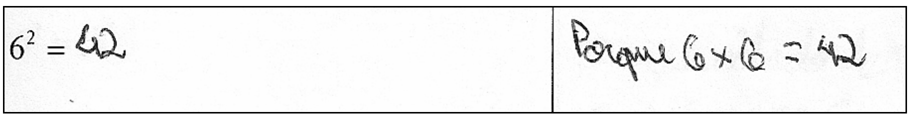


Figura 65: Aluno 18 – 1ª. Série Ensino fundamental – Questão 1 item (a).

Categoria XI

Erros relativos à técnica da visualização (τ_8):

O aluno não relaciona a figura do quadrado ao expoente 2 nem a figura do cubo ao expoente 3.

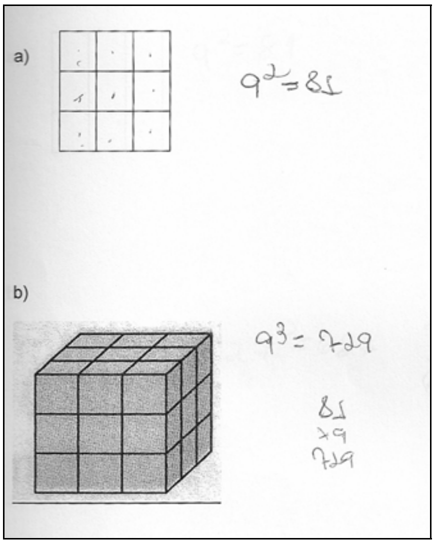


Figura 66: Aluno 08 – 8ª. Série Ensino Fundamental – Questão 2, itens (a) e (b).

Categoria XII

Erros relativos à observação de regularidades e padrões numéricos em situações em que o aluno resolve a questão por tentativa e erro (τ_4 e τ_{11}).

a) o aluno percebe a existência da regularidade, mas não efetua a operação potenciação quando os expoentes são negativos.

EXPOENTE	BASE	REPRESENTAÇÃO	POTÊNCIA
4	4	4^4	256
3	4	4^3	64
2	4	4^2	16
1	4	4^1	0
0	4	4^0	0
-1	4	4^{-1}	0
-2	4	4^{-2}	-16
-3	4	4^{-3}	-64

Figura 67: Aluno 02 – 8ª. Série Ensino Fundamental – Questão 7.

b) o aluno percebe a regularidade, mas efetua o cálculo incorretamente.

2	4	8	32
3	9	27	243
4	16	64	1024
5	25	125	3.125

Figura 68: Aluno 06 – 8ª. Série Ensino Fundamental – Questão 3.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossa pesquisa teve como objetivo estudar por meio do instrumento diagnóstico as respostas de alunos de 8ª. Série do Ensino Fundamental e 1ª. Série do Ensino Médio de uma escola pública da rede estadual de São Paulo, questões relacionadas à operação potenciação. A fundamentação teórica baseou-se nas pesquisas de Chevallard (1999); Duval (2003) e Cury (2007) visando a responder à seguinte questão :

Quais erros os alunos cometem em relação à operação potenciação e que possíveis fatores conduzem a esses erros?

Na tentativa de responder nossa questão de pesquisa, primeiro realizamos um estudo sobre o erro e sua importância.

Em meio às diferenças entre a Matemática Acadêmica e a Matemática Escolar, entendemos que o erro pode ser visto em ambos os modos, com suas respectivas características. O primeiro, uma perspectiva acadêmica, na qual pode ser tratado como uma metodologia, na medida que favorece estudos como o nosso em análises de erros. Na Matemática escolar, o erro envolve processos psicológicos que estão relacionados aos processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Nesse aspecto, também, ressaltamos a importância do erro como subsídio para a elaboração e implementação de atividades para a sala de aula. Entendemos que o erro também para o aluno tem caráter formativo, sendo caminho para um conhecimento mais significativo.

Com essa compreensão sobre o erro, passamos a estudar o objeto matemático, alvo de nossa pesquisa, a operação potenciação. Assim, este estudo visou conhecê-lo mais profundamente, quanto à definição, propriedades e representação, utilizando para isso os Registros de Representação Semiótica de Duval (2003). Um estudo histórico sobre a operação potenciação foi feito e percebemos a necessidade de representar potências ao longo do tempo.

Sob o ponto de vista construtivista, o erro pode ser utilizado no processo de aprendizagem com o objetivo de ampliar o conhecimento do aluno. No momento em que o aluno lida com situações novas, gerando desequilíbrios. Isso pode acontecer por meio de conflitos presentes em atividades ou seqüências de exercícios que gerem essa situação.

Comprometidos em responder à questão de pesquisa, elaboramos e aplicamos um instrumento diagnóstico, que os alunos responderam questões referentes ao tópico. O teste foi elaborado e analisado previamente e, depois, posteriormente, com a TAD, (Teoria Antropológica do Didático) de Chevallard (1999) que também foi utilizada na análise dos Documentos Oficiais e Livros Didáticos.

Consideramos o emprego da TAD, importante, principalmente nas análises das respostas dos alunos, pois, baseou-se na organização matemática mobilizada pelos alunos em torno das concepções da operação potenciação. Sierra (2000) e Feltes (2007) também elaboraram estudo abordando esta temática que nos foi de grande valia na direção desta pesquisa.

O método da pesquisa empregado considerou os aspectos quantitativos e qualitativos para a análise dos dados do teste aplicado.

Como ponto positivo, registramos a maneira como os alunos participaram de forma comprometida no experimento, assim como, o perfeito entendimento por parte da direção da escola em torno da pesquisa.

De um modo geral, os livros didáticos atendem às perspectivas. As coleções analisadas contemplam a operação potenciação de forma adequada, embora tenhamos registrado a falta da abordagem de potências com expoente fracionário em uma delas.

Registramos como significante, a presença do estudo da operação potenciação na PCESP(2008), sobretudo no que diz respeito à observação de regularidades.

O resultado das análises das respostas dos alunos indicou que, grande parte dos alunos, não tem o domínio da concepção sobre a operação potenciação; decorrendo disso, muitos a entendem como multiplicação. Assim, vários fatores agravam o erro em relação a este tópico.

Os fatores que julgamos mais relevantes foram os casos de potências, que envolvem números inteiros negativos. O aluno erra, pois não considera a definição e as regras de sinais, poucos se lembram ou afirmam regras que são sistematizadas, criando uma grande confusão em suas justificativas.

Assim, observamos também que, muitos alunos confundem expoente e base, decorrendo daí o erro da potência.

Percebemos também que o aluno não domina a técnica de conversão de registros. Na tentativa de responder, o aluno utiliza algum recurso no qual apresenta potência na representação de uma base e o expoente, com respostas variadas. Verificou-se um aumento de respostas em branco

O *zero* também é uma causa de um grande números de erros, mas entendemos antecipadamente, que a convenção matemática a que nos referimos nesta pesquisa, com potências de expoente 0 é uma das causas que levam ao erro, uma vez que o aluno na maioria das vezes, não a observa de modo correto. Não podemos associar esse fato à sala de aula ou ao professor, pois para isso seria importante um esclarecimento maior.

Para o expoente 1, temos a mesma problemática em relação à convenção matemática. O aluno por não conseguir justificar recorre na maior parte à operação multiplicação, efetuando base e expoente.

No que diz respeito às propriedades de potenciação, observamos que grande parte dos alunos confunde as operações que devem ser resolvidas em relação ao expoente das potências.

Os aspectos que consideramos muito fortes nos casos de erros, são os de expoentes inteiros negativos e os fracionários. Nos dois casos, o total de erros foi 100%, acreditamos ser uma importante matéria para um estudo futuro.

De modo geral, acreditamos ter respondido à questão de pesquisa. As análises em relação às teorias, técnicas e discursos teóricos possibilitaram uma visão relevante de como o aluno resolve e justifica questões referentes à operação potenciação. Julgamos esta contribuição, como relevante e original. Esperamos que este trabalho possa contribuir para outros estudos sobre o ensino da operação potenciação.

A análise feita nas respostas dos alunos nos faz refletir em alguns aspectos. Se tivéssemos elaborado uma sequência didática que trabalhasse expoentes negativos ou fracionários, teríamos obtido resultados diferentes no sentido de ampliar o conhecimento do aluno a respeito de expoentes negativos ou fracionários?

Se pensarmos em um estudo com a operação potenciação com expoentes *zero* e *um,* no qual realizássemos entrevista com o aluno para compreender realmente o porquê da resposta incorreta, entenderíamos de melhor modo, qual a concepção do aluno a respeito da operação potenciação com esses expoentes?

Outro ponto interessante que serve de sugestão para um estudo posterior é o estabelecimento de obstáculos em relação a esse tema, principalmente os casos da operação potenciação com expoentes, 0, 1, expoentes fracionários e expoentes inteiros negativos.

Assim, concluindo nosso trabalho, entendemos como é importante valorizar a produção do aluno, correta ou não. Que esta seja uma forma de rever e propor melhor qualidade ao ensino e aprendizagem de Matemática.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S A. Fundamentos da didática da matemática. Primeira edição Curitiba: UFPR, 2007. 217 p.

BACHELARD, G.; A Formação do Espírito Científico*;* Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BARROSO, J. M. Projeto Araribá. Coleção de 5ª. a 8ª. séries. São Paulo. Moderna. 2006.

BAUNGART, J. K., Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula. Tradução de Hygino H Domingues, São Paulo: Atual, 1992.

BERNAL. M. M.; Estudo do objeto proporção: elementos de sua organização matemática como objeto a ensinar e como objeto ensinado. Dissertação de Mestrado. UFSC. Santa Catarina, 2004.

BERTONI, Neuza. O erro como estratégia didática. Campinas: Papirus, 2000.

BIANCHINI, B. L. Estudo sobre a aplicação de uma sequência didática para o ensino dos números decimais. Tese doutorado em Psicologia da Educação. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. S.P, 2001.

BIANCHINI, E.; PACCOLA, H. Matemática.1.série, São Paulo: Moderna, 2004.

BOYER, C. B. História da matemática. 2º ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2003.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quartos ciclos do Ensino Fundamental: introdução aos parámetros curriculares nacionais, Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/ SEF, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica, Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio (PCNEM), Matemática, 2004.

BRASIL, Ciências da naturaza, matemática e suas tecnologias. / Secretaria de Educação Média e Tecnológica, PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Brasília: MEC; SEMTEC, 2004.

BRASIL, Ministério da Educação. Guia de Livros Didáticos PNLEM 2006: Matemática / Ministério da Educação. – Brasília: MEC, 2006.

BRASIL, Ministério da Educação. Guia de Livros Didáticos PNLD 2008: Matemática / Ministério da Educação. – Brasília: MEC, 2007.

CARAÇA, B. J. Conceitos Fundamentais da Matemática. São Paulo: Gradiva. 2003

CHEVALLARD, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 19, n. 2, p. 221–266. Tradução em espanhol de Ricardo Barroso Campos. <http://www.uaq.mx/matematicas/redm/art/a1005.pdf (acesso em 25/04/2008).

COSTA, D. Anita Freire. A análise do erro como caminho de Descoberta do Pensamento da Criança. AMAE Educando. v. 21, n.199, p. 14-20, out. 1988.

CURY, H. N. As concepções de Matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos. 1994. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1994.

CURY, H. N. Retrospectiva histórica e perspectivas atuais da análise de erros em Educação Matemática. Zetetiké, v.3, n.4, p. 39–50, nov. 1995.

CURY, H. N. Análise de Erros – o que podemos aprender com as respostas dos alunos. São Paulo. Ed. Autêntica. 2007.

D' AMORE, B. Elementos de Didática da Matemática. São Paulo. Ed. Livraria da Física. 2007.

DAVIS, C., ESPÓSITO, Y. L. Papel e função do erro na avaliação escolar. *Cadernos de Pesquisa.* São Paulo: Fundação Carlos Chagas, nº. 74, pp. 71-75. 1990.

DAVIS, C., ESPÓSITO, Y.L. Algumas Considerações Sobre a Teoria Psicogenética na Escola . série Idéias n. 8. São Paulo: FDE, p.127 a 132, 1998. http://www.crmariocovas.sp.gov.br/dea_a.php?t=008

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In. Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica. Silvia Alcântara Machado(org.). Campinas, SP: Papirus, 2003(coleção papirus), p. 11–33.

EVES, H. Introdução à história da matemática. 2º ed. Campinas: UNICAMP, 2004.

FARIAS, K. S. C. S. A representação do espaço nos anos iniciais do Ensino Fundamental : um estudo em livros didáticos, nos PCN de matemática e no guia do PNLD/2007. UFMS, 2007.

FELTES, R. Z.; Análise de Erros em Potenciação e Radiciação: um Estudo com Alunos de Ensino Fundamental e Médio. Dissertação de Mestrado. PUCRS, 2007.

FERREIRA, A. B. H. Dicionário básico da língua portuguesa. São Paulo: Nova Fronteira,1995.

FREITAS, M. A. de; Equação do 1º. Grau: Métodos de Resolução e análise de erros no Ensino Médio. Dissertação de Mestrado. PUCSP, 2002.

GARBI, G. G. A Rainha das Ciências. São Paulo. Livraria da Física. 2006.

GARNICA, A. V. M.; PEREIRA, M. E.F. A pesquisa em Educação Matemática no Estado de São Paulo: um possível perfil. In: Bolema – Boletim de Educação Matemática, ano 11, n.12, pp.59-74, 1997.

GUELLI, O. Contando a História da Matemática. São Paulo: Ática, 1993.

GUIMARÃES, F. ; Sentido do Zero. Dissertação de Mestrado. PUCSP, 2008.

GUNDLACH, B. H.Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula – Números e Numerais. São Paulo: Atual,1992.

IFRAH, G. Os números: a história de uma grande invenção. Rio de Janeiro: Globo, 2001. 367 p.

IGLIORI, S. B. C. A noção de obstáculo epistemológico e a educação matemática. In: MACHADO, S. de A. et al. Educação matemática: uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999, p. 89-113.

JAKUBOVIC, J.; LELLIS, M.; CENTURION, M. Matemática na medida certa. Coleção de 5ª. A 8ª. séries. São Paulo: Scipione, 2002.

LOPES, A. R. C. Contribuições de Gaston Bachelard ao ensino de ciências. Enseñanza de las ciencias, 11(3). 324–330, 1993.

LORENZATO, S. Para aprender matemática. Campinas: Autores asociados, 2005.

LUCKESI. C. C.Prática escolar: do erro como fonte de castigo ao erro como fonte de virtude. In: Revista Idéias. N. 08.São Paulo: FDE, 1998.

LUCKESI, C. C. Avaliação e Educação. São Paulo: Cortez, 1994.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E.D.A. Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 2006.

MARANHÃO M. C.; IGLIORI, S. Registros de representação e números racionais. In: MACHADO, S. D. A. (Org.) Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p. 57-70.

MOURA, A. R. L. A avaliação em matemática: lembranças da trajetória escolar de alunos de pedagogia. Campinas. UNICAMP, 2006.

PIAGET, Jean. A equilibração das estruturas cognitivas. Rio de Janeiro: Zahar, 1975.

PINTO, N. B. O Erro como Estratégia Didática. Campina: Papirus. 2000.
POZO, J. I. Teorias cognitivas da aprendizagem. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

PONTE, J. P., OLIVEIRA, H. Marcos históricos no desenvolvimento do conceito de potência. Centro de Investigação em Educação. Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Revista de Educação e Matemática n. 52. março/abril,1999.

Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática (Ensino Fundamental e Médio) – Estudo e Ensino / Coord. Maria Inês Fini. – São Paulo: SEE, 2008.

RUDIO, F. V. Introdução ao projeto de pesquisa. 17ª ed.São Paulo: Vozes, 1992.

BRASIL (1997).Brasília. MEC. Vol.3. Disponível em 10.02.08
http://www.bibvirt.futuro.usp.br/textos/humanas/educacao/pcns/medio/index.html

SIERRA, G. M. Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales. Dissertação de Mestrado. México, 2000.

SIERRA, G. M. Explicación Sistêmicas de Fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes. Relime. Vol. 5, nu. 1, março 2002.

SILVA, M. J. F. Investigando Saberes de Professores do Ensino Fundamental com Enfoque em Números Fracionários para a Quinta série. Tese de Doutorado. PUCSP, 2005.

SOUZA, V. H. G. O uso de vários registros na resolução de inequações - uma abordagem funcional gráfica. Tese de Doutorado. PUCSP. São Paulo, 2008.

ZAZKIS, R.; CHERNOFF, E. Cognitive Conflict and its Resolution Via Pivotal/Bridging Example. *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 5, pp. 465-472. Prague: PME. 2006.
http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/viewArticle/21303/0 (acesso em 23/09/2007)
http://www.bibvirt.futuro.usp.br/textos/humanas/educacao/pcns/medio/index.html (PCN/MEC) (acesso em 12/08/2007)

__________. Oficio de aluno e sentido do trabalho escolar. Porto:Porto Editora,1994.
http://www.brasilescola.com/imagens/biografia/RafaBnot.jpg - tabela (acesso em 25/06/2007)

__________. Organiser l´etude. 1. Structures & Fonctions. Actes de la 11 École d´Été de Didactique des Mathématiques. France: La Pensée Sauvage. 2002.(acesso em 15/01/2007).
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organiser_l_etude_1.pdf (acesso em 26/02/2008).

ANEXO

Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica – PUC/SP

Mestrado Acadêmico

Mestrando: Ana Maria Paias

Orientador: Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud

Prezado Aluno (a):

O objetivo deste diagnóstico é analisar as respostas produzidas sobre o tema potenciação.

Você não precisará se identificar.

Responda as questões a lápis e corrija se necessário.

Agradecemos a participação.

Questão 1

Calcular o valor das potências e justifique as respostas, explicando como realizou a operação e o porquê do sinal.

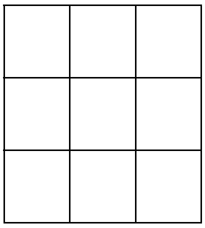
Calcular:	**Justificativa**
$a)\ \ 6^2 =$	
$b)\ \ (-6)^2 =$	
$c)\ \ -6^2 =$	
$d)\ \ (-2)^3 =$	
$e)\ \ -2^3 =$	
f) $(-1)^5 =$	
g) $5^0 =$	
h) $(-8)^0 =$	
i) $0^5 =$	
j) $7^1 =$	

k) $1^5 =$	
l) $0^0 =$	
m) $\left(\frac{1}{2}\right)^0 =$	
n) $\left(\frac{-3}{7}\right)^2 =$	
o) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 =$	
p) $\left(\frac{-1}{5}\right)^3 =$	
q) $4^{-2} =$	
r) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} =$	
s) $\left(\frac{-3}{5}\right)^{-2} =$	
t) $(-5)^{-3} =$	
u) $125^{\frac{1}{3}}$	
v) $16^{-\frac{1}{2}}$	

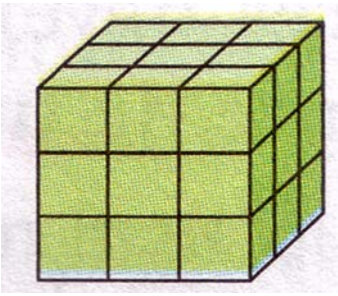
Questão 2

Representar na forma de potência e calcule o valor:

a)



b)



Questão 3

Completar o quadro abaixo:

2	**4**	**8**	
3	**9**		
4			
5			

Questão 4:

Representar na forma de uma única potência e calcular o valor:

$a)\ \ 2^4.2^3 =$

$b)\ \ 5^{100} : 5^{99} =$

$c)\ \ (3^2)^3 =$

$d)\ \ (2.3)^2 =$

$e)\ \ (6:2)^3 =$

Questão 5:

Representar a potência e calcular o valor:

a) 9 elevado ao quadrado

b) 10 ao quadrado

c) 1 ao quadrado

d) 3 ao cubo

e) 10 ao cubo

Questão 6:

Representar e calcular a potência correspondente:

a) Base 4 e expoente 5

b) Base 5 e expoente 4

Questão 7:

Completar o quadro abaixo:

EXPOENTE	BASE	REPRESENTAÇÃO	POTÊNCIA
4	4		
3	4		
2	4		
1	4		
0	4		
-1	4		
-2	4		
-3	4		

Questão 8:

Representar os seguintes números em potência de base 2:

a) 8 =

b) -32 =

c) 16 =

d) 0,25 =

Questão 9

Resolver o seguinte problema:

Uma mensagem foi enviada por email com um vírus e espalhada entre amigos. Marcelo enviou para Bibi, que enviou para mais 3 pessoas; cada uma dessas três pessoas enviou para outras 3, que por sua vez, enviaram para outras três. Representar a resposta como uma adição de potências e calcular quantas mensagens foram enviadas.