

Genericidade de funções holomorfas selvagens e
vetores hipercíclicos comuns

Genilson Ferreira da Silva

12 de Abril de 2006

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Índice

Índice	1
Agradecimentos	3
Introdução	5
1 Preliminares	8
1.1 Definições Básicas	8
1.2 Resultados Clássicos	9
2 Genericidade de Funções Inteiras com Comportamento Selvagem	11
2.1 Funções Selvagens	11
3 Um Critério de Universalidade/Hiperciclicidade Comum	26
3.1 O Critério	26
3.2 Aplicações do Critério	32
3.2.1 O Operador Shift	33
3.2.2 O Operador Shift Ponderado	36
4 Outros Exemplos de Comportamentos Selvagens	40
4.1 O Operador Derivada	41
4.2 Um Caso Patológico	50

Referências Bibliográficas

Agradecimentos

Primeiramente a Deus por ter me dado a vida, saúde e inteligência.

A minha esposa Alice, razão da minha vida, pelo amor, carinho, paciência e compreensão a mim dedicados.

Aos meus sogros, Emanuel e Leila pelo carinho e pela confiança em mim depositados.

A minha professora orientadora Prof^a. Isabel Lugão Rios, pela escolha de um tema tão interessante, pela amizade, apoio e confiança a mim dispensados durante a elaboração deste trabalho.

Ao pessoal da Secretaria da Pos-Graduação em Matemática, Dona Lea, Mariana e Renato pela acolhida, paciência e por serem sempre muito prestativos. Aos funcionários da Biblioteca da Pos-Graduação.

À Coordenação de Auxílio à Pesquisa CAPES pelo apoio financeiro.

Ao Prof. Dinamérico Pombo Júnior por ter sido mais que um grande professor, um grande amigo.

Aos meus professores; Francisco Fontenele, Maria Lúcia Villela, Nilson Bernardes,

Nivaldo, Paulo Gusmão, Sebastião Firmo (Saponga), que contribuíram para a minha formação.

Aos meus pais Adão e Nelcy.

Toda pessoa que tenha amigos nunca fracassará, porque não está sozinho jamais. A vocês meus amigos: Abigail, Ana Tércia, André, Anita, Átila, Cristiane, Delmara, Fernanda, Ivan, Julius, Laura, Loisi Carla, Mariana, Mehan, Napoleon, Renata, Rogério, Vanussa e quem eu tenha omitido (involuntariamente), levo todos vocês no meu coração.

Niterói, Rio de Janeiro

Genilson Ferreira da Silva

Abril 12, 2006

Introdução

Esta dissertação é baseada no artigo “Genericity of wild holomorphic functions and common hypercyclic vectors” de George Costakis e Martin Sambarino [3]. Esse artigo trata da existência de conjuntos genéricos de vetores hipercíclicos comuns para algumas famílias não enumeráveis de operadores lineares. Dizemos que um vetor é hipercíclico para um operador T se sua órbita por T é densa. Um operador é hipercíclico se possui vetores hipercíclicos.

Durante a primeira metade do último século, Birkhoff [4] e MacLane [5] mostraram que certas funções inteiras podem aproximar qualquer função inteira por um processo adequado de limite, isto é, que certas funções inteiras possuem um comportamento “selvagem”. Mais especificamente, Birkhoff construiu uma função inteira f tal que qualquer função inteira pode ser obtida como limite (uniforme em conjuntos compactos) de translações $f(z + c_n)$ para alguma sequência $c_n \in \mathbb{C}$ e MacLane provou a existência de uma função inteira tal que a sequência de suas derivadas é densa em $\mathcal{H}(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ é holomorfa}\}$ com a topologia usual de convergência

uniforme em conjuntos compactos. Birkhoff essencialmente já havia provado a hiperciclicidade do operador $T_\alpha f(z) = f(z + \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$. No caso do operador translação é conhecido que se tomarmos uma subfamília enumerável em α existe um conjunto residual de vetores hipercíclicos comuns para essa subfamília. Em seu trabalho, Costakis e Sambarino [3] provam a existência de um conjunto residual de vetores hipercíclicos comuns para a família não enumerável de operadores $\{T_\alpha : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{C}) : \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$.

No capítulo 1 colocamos algumas definições e resultados que são pré-requisito para o desenvolvimento deste trabalho.

No capítulo 2 provamos a existência de um conjunto genérico de vetores hipercíclicos para os operadores translação, conjunto esse que é comum para qualquer $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

No Capítulo 3 é apresentado um critério a partir do qual é possível decidir se uma família de operadores possui um vetor hipercíclico comum, ou também se um operador tem um vetor hipercíclico. A recíproca desse critério é um problema ainda em aberto segundo Martin Sambarino. Também nesse capítulo fazemos aplicações bem simples do critério a famílias modificadas do operador shift no espaço das sequências de quadrados somáveis ℓ^2 .

No capítulo 4 provamos a existência de um conjunto genérico de vetores hipercíclicos para o operador derivação composto com o operador reescalamiento do domínio. Ainda nesse capítulo provamos a existência de uma função selvagem que se aproxima de zero

para $z = re^{2\pi i\theta} \in \mathbb{C}$, r muito grande, $\theta \neq 1$.

Capítulo 1

Preliminares

Este primeiro capítulo é dedicado às definições básicas e teoremas que serão utilizados neste trabalho. As demonstrações dos teoremas deste capítulo são omitidas por serem clássicas ou por exigirem conceitos que não serão utilizados no decorrer dos capítulos.

1.1 Definições Básicas

Definição 1.1.1. Seja $T : X \rightarrow X$ um operador linear contínuo agindo sobre um espaço vetorial topológico. É chamado de órbita de um elemento $x \in X$ o conjunto

$$Orb(T, x) = \{T^n(x) : n \geq 0\}.$$

Definição 1.1.2. Seja $T : X \rightarrow X$ um operador linear contínuo agindo sobre um espaço vetorial topológico X . Um vetor $x \in X$ é chamado de hipercíclico se sua órbita $Orb(T, x)$ é densa em X .

Definição 1.1.3. Um operador linear contínuo $T : X \longrightarrow X$ agindo sobre um espaço vetorial topológico X é chamado de hipercíclico se T possui um vetor hipercíclico.

Definição 1.1.4. Seja $T : X \longrightarrow X$ um operador linear contínuo agindo sobre um espaço vetorial topológico X . Será denotado por $\mathcal{HC} = \mathcal{HC}(T)$ o conjunto de todos os vetores que são hipercíclicos para T .

1.2 Resultados Clássicos

Teorema 1.2.1. [1] Denote por $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ o plano complexo estendido. Seja $F \subset \mathbb{C}$ um conjunto fechado tal que $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ é conexo e localmente conexo no ∞ . Suponha que $\epsilon(t)$ é uma função contínua positiva para $t \geq 0$ que satisfaz

$$\int_1^{\infty} t^{-\frac{3}{2}} \log \epsilon(t) dt > -\infty. \quad (1.1)$$

Então para toda função $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, contínua em F e holomorfa em seu interior, existe uma função inteira f tal que

$$|f(z) - g(z)| < \epsilon(|z|), \quad \forall z \in F.$$

Teorema 1.2.2. [8] Sejam X um espaço localmente convexo, M um subespaço de X e $x_0 \in X$. Se $x_0 \notin \overline{M}$ então existe $\phi \in X^*$ tal que $\phi(x_0) = 1$ e $\phi(x) = 0$ para todo $x \in M$.

Teorema 1.2.3 (Baire). [9] *Se X é um espaço métrico completo, então a interseção de toda coleção enumerável de conjuntos abertos e densos de X é densa em X .*

Teorema 1.2.4 (Runge). [7] *Sejam G um conjunto aberto em \mathbb{C} e E um subconjunto de $\overline{\mathbb{C}}$, tal que o fecho de E intersecta cada componente de $\mathbb{C}_\infty \setminus G$. Sejam f uma função analítica em G , K um subconjunto compacto de G e $\epsilon > 0$. Então existe uma função racional $R(z)$ com todos os pólos em E tal que*

$$|f(z) - R(z)| < \epsilon$$

para todo $z \in K$.

Muitos dos resultados apresentados neste trabalho são provados no espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ das funções inteiras (holomorfas em \mathbb{C}). Recordemos que $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ munido da topologia compacto-aberta, é um espaço localmente convexo metrizável, completo e separável.

Capítulo 2

Genericidade de Funções Inteiras com Comportamento Selvagem

Neste capítulo apresentamos uma generalização do resultado obtido por Birkhoff. Mostramos a existência de um conjunto genérico de vetores hipercíclicos comuns para a família não enumerável dos operadores translação por complexos não nulos. A demonstração desse fato é feita em duas etapas: primeiro consideramos as translações por números complexos de módulo um e depois translações em cada direção fixada.

2.1 Funções Selvagens

Definição 2.1.1. Dizemos que uma função $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tem um comportamento selvagem no ∞ em qualquer direção se qualquer função $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ pode ser aproximada em compactos por translações de f em qualquer direção.

Como $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ é um espaço vetorial topológico separável, podemos tomar uma

sequência $\{\phi_j; j \geq 1\}$ densa em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Considere o conjunto

$$E(s, j, k, m) = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}); \forall \theta, 0 \leq \theta \leq 1, \exists n = n(\theta) \leq m \text{ tal que} \right. \\ \left. \sup_{|z| \leq k} |f(z + ne^{2\pi i \theta}) - \phi_j(z)| < \frac{1}{s} \right\},$$

onde $s, j, k, m \in \mathbb{N}$.

Lema 2.1.1. *O conjunto $E(s, j, k, m)$ é aberto em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ quaisquer que sejam s, j, k e m em \mathbb{N} .*

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ e denote por S^1 o círculo unitário. Considere os conjuntos

$$C_l = \left\{ \alpha \in S^1 : \sup_{|z| \leq k} |f(z + l\alpha) - \phi_j(z)| < \frac{1}{s} \right\}, \quad l = 1, \dots, m.$$

Afirmamos que cada conjunto C_l é aberto em S^1 . De fato sejam $\alpha_0 \in C_l$ e $B_k[0] = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq k\}$. Então existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$\sup_{|z| \leq k} |f(z + l\alpha_0) - \phi_j(z)| < \delta_0 < \frac{1}{s}.$$

Sejam $\varepsilon = (\frac{1}{s} - \delta_0)\frac{1}{2}$ e $h : B_k[0] \times S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $h(z, \alpha) = f(z + l\alpha)$. Como f é contínua e $B_k[0] \times S^1$ é compacto, usando a norma do máximo, $\exists \delta > 0$ tal que, se $\alpha \in S^1$ e $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ então $|f(z + l\alpha) - f(z + l\alpha_0)| < \varepsilon \quad \forall z \in B_k[0]$. Por outro

lado, temos que:

$$\begin{aligned} |f(z + l\alpha) - \phi_j(z)| &\leq |f(z + l\alpha) - f(z + l\alpha_0)| + |f(z + l\alpha_0) - \phi_j(z)| \\ &\leq \varepsilon + \delta_0 \\ &< \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Logo C_l é aberto e $S^1 \subset \bigcup_{l=1}^m C_l$. Isto é, $\bigcup_{l=1}^m C_l$ é uma cobertura aberta e finita de S^1 . Portanto existem compactos $I_l \subset C_l$ tais que $S^1 \subset \bigcup_{l=1}^m I_l$. Encontraremos $\varepsilon > 0$ tal que o conjunto

$$A = \{g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) : \sup_{|z| \leq k+m} |g(z) - f(z)| < \varepsilon\}$$

esteja contido em $E(s, j, k, m)$. Observe que A é aberto em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Para cada $l = 1, \dots, m$, como I_l é compacto, $\exists \varepsilon_l > 0$ tal que, se

$$\sup_{|z| \leq k+m} |g(z) - f(z)| < \varepsilon_l \text{ e } \alpha \in I_l \text{ então } \sup_{|z| \leq k} |g(z + l\alpha) - \phi_j(z)| < \frac{1}{s}.$$

Tome $\varepsilon < \min\{\varepsilon_l : 1 \leq l \leq m\}$.

Com isso mostramos que dada $f \in E(s, j, k, m)$, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(f) \subset E(s, j, k, m)$. Logo $E(s, j, k, m)$ é aberto para cada s, j, k, m .

□

Lema 2.1.2. *O conjunto $\bigcup_{m \geq 1} E(s, j, k, m)$ é denso em $\mathcal{H}(\mathbb{C}) \forall s, j, k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Sejam s, j, k fixados, $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, um compacto C e $\varepsilon > 0$. Queremos

mostrar que existe $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ e $m \geq 1$ tais que $f \in E(s, j, k, m)$ e

$$\sup_{z \in C} |f(z) - g(z)| < \varepsilon.$$

Como C é compacto, existe $k' \in \mathbb{Z}$ tal que $C \subset B_{k'}[0]$. Observemos que se $k' > k$ então $E(s, j, k', m) \subset E(s, j, k, m)$, logo sem perda de generalidade, assumiremos que $C \subset B_k[0]$. Para simplificar a notação, seja $\phi = \phi_j$. Como ϕ é contínua, existe $\delta < \frac{1}{2}$ tal que se $|z| \leq k$ e $|z - w| < \delta$ então $|\phi(z) - \phi(w)| < \frac{1}{2s}$.

Considere uma partição $0 < \theta_0 < \dots < \theta_l = 1$. Faça $t = 2k + 1$ e $B = B_{k+\delta}[0]$. Para $d = 0, 1, \dots, l$ defina os conjuntos

$$B_d = B + e^{2\pi i \theta_d} (d + 1)t.$$

Os conjuntos B_0, B_1, \dots, B_l são dois a dois disjuntos, pois dados $0 \leq d_1 < d_2 \leq l$ inteiros, temos:

$$\begin{aligned} |e^{2\pi i \theta_{d_1}} (d_1 + 1)t - e^{2\pi i \theta_{d_2}} (d_2 + 1)t| &\geq (d_2 + 1)t - (d_1 + 1)t \\ &\geq t \\ &= 2(k + 1) \\ &> 2(k + \delta), \end{aligned}$$

isto é, a distância do centro de B_{d_2} ao centro de B_{d_1} é maior que duas vezes os seus raios. Logo

$$B_{d_1} \cap B_{d_2} = \emptyset, \quad \forall d_1, d_2, \quad 0 \leq d_1 < d_2 \leq l.$$

Agora defina a função h no conjunto compacto $R = B \cup \bigcup_{d=1}^l B_d$ (que tem complementar conexo), dada por

$$h(z) = \begin{cases} g(z) & \text{se } z \in B \\ \phi(z - e^{2\pi i \theta_d} (d+1)t) & \text{se } z \in B_d, d = 0, \dots, l \end{cases} \quad (2.1)$$

Pelo Teorema de Runge 1.2.4, existe uma função inteira f (polinomial) tal que

$$\sup_{z \in R} |h(z) - f(z)| < \min\left\{\frac{1}{2s}, \varepsilon\right\}. \quad (2.2)$$

De 2.1 e 2.2 temos:

$$\sup_{z \in C} |f(z) - g(z)| \leq \sup_{z \in B} |f(z) - g(z)| < \varepsilon$$

pois $C \subset B \subset R$. Logo $\sup_{z \in C} |f(z) - g(z)| \leq \varepsilon$.

Para encontrar a partição acima escolha $l \geq 1$ tal que $\eta = \frac{\delta}{2\pi t} (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{l}) > 1$ e para $d = 1, \dots, l-1$ faça $\theta_{d+1} - \theta_d = \frac{1}{\eta} (\frac{\delta}{2\pi(d+1)t})$ que teremos $\theta_{d+1} - \theta_d < \frac{\delta}{2\pi(d+1)t}$.

Observe que

$$2\pi(\theta_{d+1} - \theta_d)(d+1)t < \delta \Leftrightarrow \theta_{d+1} - \theta_d < \frac{\delta}{2\pi(d+1)t}$$

e

$$2\pi(\theta_{d+1} - \theta_d)(d+1)t < \delta \Rightarrow |e^{2\pi i \theta_{d+1}} - e^{2\pi i \theta_d}| (d+1)t < \delta.$$

Segue então que se $\theta_d \leq \theta \leq \theta_{d+1}$ e $|z| < k$ então $z + (d+1)te^{2\pi i \theta} \in B_d$. Logo para $z, \theta_d \leq \theta \leq \theta_{d+1}$ e $|z| \leq k$ temos

$$|f(z + (d+1)te^{2\pi i \theta}) - \phi(z)| \leq$$

$$| f(z+(d+1)te^{2\pi i\theta}) - \phi(z+(d+1)t(e^{2\pi i\theta} - e^{2\pi i\theta_d})) | + | \phi(z+(d+1)t(e^{2\pi i\theta} - e^{2\pi i\theta_d})) - \phi(z) | .$$

De 2.1 e 2.2 temos

$$\begin{aligned} & | f(z + (d+1)te^{2\pi i\theta}) - \phi(z + (d+1)t(e^{2\pi i\theta} - e^{2\pi i\theta_d})) | = \\ & | \underbrace{f(z + (d+1)te^{2\pi i\theta})}_{\in B_d} - \underbrace{\phi(z + (d+1)te^{2\pi i\theta} - (d+1)te^{2\pi i\theta_d})}_{\in B_d} | < \frac{1}{2s}. \end{aligned}$$

Temos também que

$$| \phi(z + (d+1)t(e^{2\pi i\theta} - e^{2\pi i\theta_d})) - \phi(z) | < \frac{1}{2s}.$$

Logo

$$| f(z + (d+1)te^{2\pi i\theta}) - \phi(z) | < \frac{1}{s}.$$

□

Proposição 2.1.1. *Seja*

$$\begin{aligned} T_{e^{2\pi i\theta}} : \mathcal{H}(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{C}) \\ f(z) &\longmapsto f(z + e^{2\pi i\theta}) \end{aligned}$$

Então existe um conjunto \mathcal{G}_δ denso $G \subset \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $G \subset \mathcal{HC}(T_{e^{2\pi i\theta}})$ para todo θ ,

$$0 < \theta < 1.$$

Demonstração. Seja $G = \bigcap_s \bigcap_j \bigcap_k \bigcup_m E(s, j, k, m)$. Então pelo Teorema de Baire 1.2.3 e pelos lemas 2.1.1 e 2.1.2 temos que G é um conjunto \mathcal{G}_δ denso.

Provaremos agora que G satisfaz às condições da proposição. Seja $f \in G$ e fixe θ , $0 \leq \theta \leq 1$. Queremos provar que f é hipercíclico para $T_{e^{2\pi i\theta}}$. Para isso seja

$g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}), L \subset \mathbb{C}$ um conjunto compacto e $\varepsilon > 0$. Tome $s > 1$ tal que $\frac{1}{s} < \frac{\varepsilon}{2}$ e k tal que $L \subset \{|z| \leq k\}$. Escolha também ϕ_j tal que $\sup_{|z| \leq k} |g(z) - \phi_j(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $f \in G$, então $f \in E(s, j, k, m)$ para algum m . Então existe $n = n(\theta) \leq m$ tal que

$$\begin{aligned}
 \sup_{|z| \leq k} |T_{e^{2\pi i\theta}}^n(f)(z) - g(z)| &= \sup_{|z| \leq k} |f(z + e^{2\pi i\theta}) - g(z)| \\
 &\leq \sup_{|z| \leq k} |f(z + e^{2\pi i\theta}) - \phi_j(z)| + \sup_{|z| \leq k} |\phi_j(z) - g(z)| \\
 &\leq \frac{1}{s} + \frac{\varepsilon}{2} \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
 &= \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Como g é qualquer, segue que $G \subset \mathcal{HC}(T_{e^{2\pi i\theta}})$. □

Lema 2.1.3. *Se T é um operador hipercíclico em um espaço localmente convexo X , então $T - \lambda I$ tem imagem densa em X para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que existe um escalar λ tal que $\overline{Im(T - \lambda I)} \neq X$. Então, pelo teorema 1.2.2, existe $\phi \in X^*$ não identicamente nulo tal que $\phi(y) = 0 \forall y \in Im(T - \lambda I)$. Portanto

$$\phi(T(x)) = \lambda\phi(x) \forall x \in X.$$

Por indução temos que

$$\phi(T^j(x)) = \lambda^j\phi(x) \forall x \in X \text{ e } \forall j \geq 0.$$

Logo

$$\phi(\text{Orb}(T, x)) = \phi(x)\{\lambda^j : j \geq 0\} \forall x \in X.$$

Agora seja $y \in X$ um vetor hipercíclico para T . Então

$$\overline{\phi(\text{Orb}(T, y))} \supset \phi(\overline{\text{Orb}(T, y)}) = \phi(X) = \mathbb{K},$$

onde \mathbb{C} é o corpo de escalares. Logo, $\phi(\text{Orb}(T, y))$ é denso em \mathbb{C} . Mas o conjunto

$$\phi(\text{Orb}(T, y)) = \phi(y)\{\lambda^j; j \geq 0\}$$

é discreto, logo chegamos a uma contradição. □

Este fato é usado para demonstrar o seguinte lema:

Lema 2.1.4. *Sejam X um espaço vetorial topológico, $T : X \rightarrow X$ um operador linear hipercíclico, $y \in \mathcal{HC}(T)$ e $M = \{p(T)y : p \in \mathbb{C}[X]\}$. Então $M \setminus \{0\} \subset \mathcal{HC}(T)$.*

Demonstração. Seja y um vetor hipercíclico para T . Note que $M = \{p(T)y : p \in \mathbb{C}[X]\}$ é um subespaço invariante por T e denso em X pois contém a órbita de y .

Mostraremos que todo elemento não nulo de M é hipercíclico para T .

Seja $p(T)y$ um elemento não nulo de M . Como T comuta com $p(T)$, temos que $\text{Orb}(T, p(T)y) = p(T)\text{Orb}(T, y)$, isto é, a órbita de $p(T)y$ por T é a imagem de $\text{Orb}(T, y)$ pelo operador $p(T)$. Se $p(T)$ tem imagem densa então $\text{Orb}(T, p(T)y)$ será denso já que é imagem do conjunto $\text{Orb}(T, y)$ que é denso por $p(T)$. Então,

para terminar a demonstração provaremos que $p(T)$ tem imagem densa. Para isso, escrevamos $p(x)$ na forma

$$p(x) = \lambda_0(x - \lambda_1)\dots(x - \lambda_n)$$

pois $p \in \mathbb{C}[X]$. Logo

$$p(T) = (\lambda_0 T - \lambda_0 \lambda_1 I) \circ (T - \lambda_2 I) \circ \dots \circ (T - \lambda_n I)$$

e portanto, por 2.1.3, $Im(p(T))$ é denso em X . □

Proposição 2.1.2. *Seja T um operador hipercíclico sobre um espaço vetorial topológico X e seja n qualquer inteiro positivo. Então T^n também é hipercíclico e, além disso, T e T^n possuem os mesmos vetores hipercíclicos.*

Demonstração. Primeiramente, denotaremos por \overline{B}^X o fecho de um subconjunto B de X em X . Sejam x um vetor hipercíclico para T e $V = \{p(T)x : p \in \mathbb{C}[X]\}$. Então V é conexo e invariante por T . Seja $A = T|_V$. Então A é contínuo sobre V (pois T é contínuo). Logo, segue da demonstração do lema 2.1.4 que o conjunto $\{y, A(y), A^2(y), \dots\}$ é denso em V para todo $y \in V$. Considere agora o conjunto

$$S = \{x, A^n(x), A^{2n}(x), \dots\}.$$

Provaremos que $\overline{S}^V = V$. Observe primeiro que $A^n S \subset S$. Seja

$$S_k = \bigcup \{\overline{A^{i_1} S}^V \cap \dots \cap \overline{A^{i_k} S}^V : 0 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n-1\}, \text{ para } 1 \leq k \leq n. \quad (2.3)$$

Então

i) S_k é invariante por A para cada k . De fato, para cada $0 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n-1$ existem $0 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n-1$ tais que

$$A(\overline{A^{i_1}S^V} \cap \dots \cap \overline{A^{i_k}S^V}) \subset \overline{A^{i_1+1}S^V} \cap \dots \cap \overline{A^{i_k+1}S^V} = \overline{A^{j_1}S^V} \cap \dots \cap \overline{A^{j_k}S^V} \subset S_k.$$

Note que, se $j_k = n$ temos

$$A^n S \subset S = A^0.$$

ii) $0 \in S_n$.

Note que $S_1 = \overline{A^0S^V} \cup \dots \cup \overline{A^{n-1}S^V}$ e $S_n = \overline{A^0S^V} \cap \dots \cap \overline{A^{n-1}S^V}$. Como $0 \in S_1$, temos que $0 \in \overline{A^iS^V}$ para algum i . Como $A(\overline{A^iS^V}) \subset \overline{A^{i+1}S^V}$ e $\overline{A^nS^V} \subset \overline{S^V}$ segue que $0 \in \overline{A^0S^V} \cap \dots \cap \overline{A^{n-1}S^V} = S_n$.

iii) $S_n = V$.

Sabemos que $S_1 = V$. Suponha que $S_k = V$ para algum $k < n$. Provaremos que $S_{k+1} = V$. Suponha por absurdo que $S_{k+1} \neq V$. Nesse caso, mostraremos que $S_{k+1} = \{0\}$. De fato, se existir $v \neq 0, v \in S_{k+1}$ teremos que $S_{k+1} = \{0\}$. Pois se $S_{k+1} \neq \{0\}$ então existe $v \neq 0$ pertencente a S_{k+1} . Então $Orb(A, v) \subset S_{k+1}$ pois S_{k+1} é invariante por A e $Orb(A, v)$ é denso em V , isto é, $S_{k+1} = V$ e estamos supondo $S_{k+1} \neq V$. Note que se $\{i_1, \dots, i_k\} \neq \{j_1, \dots, j_k\}$, então

$$(\overline{A^{i_1}S^V} \cap \dots \cap \overline{A^{i_k}S^V}) \cap (\overline{A^{j_1}S^V} \cap \dots \cap \overline{A^{j_k}S^V}) \subset S_{k+1},$$

pois algum dos elementos de $\{j_1, \dots, j_k\}$, digamos j_l , não pertence a $\{i_1, \dots, i_k\}$

e temos

$$(\overline{A^{i_1}S^V} \cap \dots \cap \overline{A^{i_k}S^V}) \cap (\overline{A^{j_1}S^V} \cap \dots \cap \overline{A^{j_k}S^V}) \subset (\overline{A^{i_1}S^V} \cap \dots \cap \overline{A^{i_k}S^V}) \cap \overline{A^{j_i}S^V} \subset S_{k+1}.$$

Logo,

$$[(\overline{A^{i_1}S^V} \cap \dots \cap \overline{A^{i_k}S^V}) \setminus \{0\}] \cap [(\overline{A^{j_1}S^V} \cap \dots \cap \overline{A^{j_k}S^V}) \setminus \{0\}] \subset S_{k+1} \setminus \{0\} \neq \emptyset.$$

Portanto $S_k \setminus \{0\} = V \setminus \{0\}$ é uma união finita de conjuntos fechados disjuntos (relativos a $V \setminus \{0\}$) da forma $[(\overline{A^{i_1}S^V} \cap \dots \cap \overline{A^{i_k}S^V}) \setminus \{0\}]$. Como $S_k \setminus \{0\}$ é conexo, um dos conjuntos desta forma é $V \setminus \{0\}$ e os outros são vazios. Segue então do argumento em (i) que $A(V \setminus \{0\}) = \emptyset$. Mas isso não pode acontecer pois $A(V \setminus \{0\})$ é denso em V .

□

Voltando ao contexto das funções holomorfas.

Proposição 2.1.3. *Seja f hipercíclico para $T_{e^{2\pi i\theta}}$ para algum θ . Então f também é hipercíclico para $T_{re^{2\pi i\theta}}$ para qualquer número r real positivo.*

Demonstração. Sejam f hipercíclico para $T_{e^{2\pi i\theta}}$, $r > 0$, $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $L \subset \mathbb{C}$ um conjunto compacto e $\varepsilon > 0$ dados. É suficiente provar que existe n tal que

$$\sup_{z \in L} |f(z + nre^{2\pi i\theta}) - g(z)| < \varepsilon \quad (2.4)$$

Partiremos a prova em dois casos: 1º **caso:** r é racional: isto é $r = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$.

Segue do Teorema 2.1.1 que f também é hipercíclico para $T_{e^{2\pi i\theta}}^p$. Portanto, existe algum inteiro m tal que

$$\sup_{z \in L} |f(z + mpe^{2\pi i\theta}) - g(z)| < \varepsilon$$

e o resultado segue da igualdade

$$mqre^{2\pi i\theta} = mpe^{2\pi i\theta}.$$

2º caso: r é irracional:

Como g é contínua, $\exists \delta > 0$ tal que se $z \in L$ e $|z - w| < \delta$ então

$$|g(z) - g(w)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.5)$$

Chame de $L_\delta = \{z : d(z, L) \leq \delta\}$ e escolha um inteiro $k > 2 \sup_{z \in L_\delta} |z|$. Seja $[x]$ a parte inteira de um número real x e $\{x\}$ a parte fracionária de x . Como a órbita de qualquer elemento em S^1 pela rotação irracional $\frac{r}{k}$ é densa em S^1 existe uma sequência crescente de inteiros $n_1 < n_2 < \dots$ tal que

$$0 \leq \left\{n_j \frac{r}{k}\right\} < \frac{\delta}{k}, \quad j = 1, 2, \dots$$

e

$$\sup_j (n_{j+1} - n_j) < \infty.$$

Faça $m_j = [n_j \frac{r}{k}]$, a parte inteira de $n_j \frac{r}{k}$. Então $n_j \frac{r}{k} = \{n_j \frac{r}{k}\} + m_j$. Segue então que

$$n_j r - m_j k = \left\{n_j \frac{r}{k}\right\} k \leq \delta.$$

Como $n_j \frac{r}{k} \geq m_j$ segue que

$$0 \leq n_j r - m_j k \leq \delta,$$

e

$$\sup_j |m_{j+1} - m_j| < m$$

para algum m e para todo j . Seja $L_\delta^l = L_\delta + lke^{2\pi i\theta}$, $l = 1, \dots, m-1$ e considere o conjunto compacto

$$K = L_\delta \cup L_\delta^1 \cup \dots \cup L_\delta^{m-1}.$$

Observe que esta reunião é disjunta pois

$$k > 2 \sup_{z \in L_\delta} |z|.$$

Defina a função h sobre K dada por

$$h(z) = \begin{cases} g(z) & \text{se } z \in L_\delta \\ g(z - lke^{2\pi i\theta}) & \text{se } z \in L_\delta^l, l = 0, \dots, m-1 \end{cases}$$

Então, pelo Teorema de Runge 1.2.4, existe uma função inteira (polinomial) $\xi(z)$ tal que

$$\sup_{z \in K} |\xi(z) - h(z)| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (2.6)$$

Como f é hipercíclica para $T_{e^{2\pi i\theta}}$, segue da proposição 2.1.2 que f também é hipercíclica para $T_{e^{2\pi i\theta}}^k$. Portanto, existe algum inteiro n tal que

$$\sup_{z \in K} |f(z + nke^{2\pi i\theta}) - \xi(z)| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (2.7)$$

Como $\sup |m_{j+1} - m_j| < m \forall j$, segue que para n acima existe j tal que

$$nk \leq m_j k \leq nk + (m-1)k$$

e existe também l , $0 \leq l \leq m-1$, tal que

$$m_j k = nk + lk.$$

Faça

$$w = (n_j r - m_j k)e^{2\pi i \theta}.$$

Note que se $0 \leq n_j r - m_j k \leq \delta$, então $|w| < \delta$. Temos então, para $z \in L$ e de 2.5, 2.6 e 2.7 que:

$$\begin{aligned} |f(z + n_j r e^{2\pi i \theta}) - g(z)| &= |f(z + (n_j r + m_j k)e^{2\pi i \theta} - m_j k e^{2\pi i \theta}) - g(z)| \\ &\leq |f(z + w) + (lk + nk)e^{2\pi i \theta} - \xi(z + w + lke^{2\pi i \theta})| \\ &\quad + |\xi(z + w + lke^{2\pi i \theta}) - g(z + w)| + |g(z + w) - g(z)| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo vale 2.4. □

Teorema 2.1.1. *Existe um conjunto G_δ denso $G \subset \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $G \subset \mathcal{HC}(T_\alpha)$ para todo $\alpha \in \mathbb{C} \setminus 0$.*

Demonstração. O conjunto G obtido na proposição 2.1.1 satisfaz ao teorema, já que para qualquer função $f \in G$, f é hipercíclica para $T_{e^{2\pi i \theta}}$ para todo $0 \leq \theta \leq 1$ e pela

proposição 2.1.3, f também é hipercíclica para para $T_{re^{2\pi i\theta}}$ onde r é qualquer número real positivo, isto é f é hipercíclico para T_α para todo $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$. \square

Com esse teorema concluímos que o conjunto das funções holomorfas com comportamento selvagem é genérico.

Capítulo 3

Um Critério de

Universalidade/Hiperciclicidade

Comum

3.1 O Critério

Nesta parte daremos condições que garantem a existência de vetores universais (hipercíclicos) comuns para algumas famílias (sequências) de operadores. Relembremos que um F -espaço é um espaço vetorial topológico cuja topologia é induzida por uma métrica completa ρ . Embora em geral ρ não provenha de uma norma, para simplificar a notação, escreveremos $\|x\| = \rho(x, 0)$.

Definição 3.1.1. Seja X um F -espaço. Um vetor $x \in X$ é chamado de universal para uma sequência de operadores lineares $T_n : X \rightarrow X$ se a sequência $\{T_n(x) : n = 1, 2, \dots\}$ é densa em X . O conjunto dos vetores universais será denotado por $\mathcal{U}(\{T_n : n \geq 1\})$.

Teorema 3.1.1. *Seja X um F -espaço separável, $I \subset \mathbb{R}^+$ um intervalo e $\mathcal{F} = \{T_{n,\lambda} : n \in \mathbb{N}, \lambda \in I\}$ uma família de operadores lineares em X e satisfazendo $T_{n+k,\lambda} = T_{n,\lambda} \circ T_{k,\lambda}$, tal que para cada n fixado a função $\lambda \in I \mapsto T_{n,\lambda} \in \mathcal{F}$ é contínua. Assuma que existe um conjunto denso $\{x_j : j \geq 0\}$ em X e uma família de operadores $\{S_{n,\lambda} : n \in \mathbb{N}, \lambda \in I\}$ tal que $T_{n,\lambda} \circ S_{n,\lambda} = Id$, $S_{n+k,\lambda} = S_{n,\lambda} \circ S_{k,\lambda}$ e as seguintes propriedades se verificam*

1. Dado x_j e um conjunto compacto $K \subset I$ existe uma sequência de números positivos c_k tal que

$$(a) \sum_k c_k < \infty,$$

$$(b) \|T_{n+k,\lambda} \circ S_{n,\alpha}(x_j)\| \leq c_k \quad \forall n, k \geq 0 \text{ e } \lambda, \alpha \in K,$$

$$(c) \|T_{n,\lambda} \circ S_{n+k,\alpha}(x_j)\| \leq c_k \quad \forall n, k \geq 0 \text{ e } \lambda, \alpha \in K, \lambda \leq \alpha.$$

Note em particular que $\|T_{n,\lambda}(x_j)\| \leq c_n$ e $\|S_{n,\lambda}(x_j)\| \leq c_n$.

2. Dado $\varepsilon > 0$, x_j e um compacto $K \subset I$, existe $0 < C(\varepsilon) < 1$ tal que para

$\lambda, \alpha \in K$ vale o seguinte:

$$\text{se } 1 \geq \frac{\lambda}{\alpha} > C(\varepsilon)^{\frac{1}{n}}, \text{ então } \|T_{n,\lambda} \circ S_{n,\alpha}(x_j) - x_j\| < \varepsilon.$$

Então existe um conjunto residual $G \subset X$ tal que $\overline{\{T_{n,\lambda}(x) : n \geq 0\}} = X \forall \lambda \in I, \forall x \in G$. Em outras palavras $G \subset \mathcal{U}(\{T_{n,\lambda}(x) : n \geq 0\}) \forall \lambda \in I$.

Demonstração. Seja $K = [\lambda_1, \lambda_2] \subset I$. Defina o conjunto

$$E_k(s, j, m) = \{x \in X : \forall \lambda \in K \exists n = n(\lambda) \leq m \text{ tal que } \|T_{n,\lambda}(x_j) - x_j\| < \frac{1}{s}\}.$$

Afirmção 1: $E_k(s, j, m)$ é aberto.

Demonstração. Seja $x \in E_k(s, j, m)$. Então para todo $\lambda \in K$ existe $n = n(\lambda) \leq m$ tal que $\|T_{n,\lambda}(x_j) - x_j\| < \delta$ para algum $\delta \in (0, \frac{1}{s})$. Seja $\varepsilon = (\frac{1}{s} - \delta)\frac{1}{2}$. Como $T_{n,\lambda}$ é contínua, existe δ_2 tal que

$$\text{se } \|x - y\| < \delta_2 \text{ então } \|T_{n,\lambda}(x) - T_{n,\lambda}(y)\| < \varepsilon.$$

Logo

$$\begin{aligned} \|T_{n,\lambda}(y) - x_j\| &\leq \|T_{n,\lambda}(y) - T_{n,\lambda}(x)\| + \|T_{n,\lambda}(x) - x_j\| \\ &\leq \varepsilon + \delta \\ &< \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Logo $B_{\delta_2} \subset E_k(s, j, m)$ provando que $E_k(s, j, m)$ é aberto.

Afirmção 2: $\bigcup_m E_k(s, j, m)$ é denso em X .

Demonstração. Sejam $w = x_p$ para algum inteiro positivo p e $\delta > 0$. Encontraremos algum $m \geq 1$ e $y \in E_k(s, j, m)$ tal que $\|y - w\| < \delta$. Fixe $k \in \mathbb{Z}$ suficientemente

grande tal que

$$\|T_{n,\lambda}(w)\| < \frac{1}{4s}, \quad (3.1)$$

para todo $n \geq k$, $\lambda \in K$ e

$$\sum_{n \geq k} c_n < \min\{\delta, \frac{1}{4s}\}.$$

Considere uma partição $\lambda_1 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_l = \lambda_2$ do intervalo $[\lambda_1, \lambda_2]$ e defina o vetor

$$y = w + S_{k,\alpha_0}(x_j) + S_{2k,\alpha_1}(x_j) + \dots + S_{(l+1)k,\alpha_l}(x_j).$$

Afirmamos que l e $\lambda_1 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_l = \lambda_2$ podem ser escolhidos tais que $\|y - w\| < \delta$ e $y \in E_k(s, j, m)$ para algum m . De fato mostraremos que

$$\text{se } \alpha_{i-1} < \lambda < \alpha_i, \quad i = 1, \dots, l, \quad \text{então } \|T_{(i+1)k,\lambda}(j) - x_j\| < \frac{1}{s}.$$

Portanto, se $m = (l+1)k$ temos que $y \in E_k(s, j, m)$. Vamos primeiro estimar $\|y - w\|$:

$$\begin{aligned} \|y - w\| &= \|S_{k,\alpha_0}(x_j) + S_{2k,\alpha_1}(x_j) + \dots + S_{(l+1)k,\alpha_l}(x_j)\| \\ &\leq \|S_{k,\alpha_0}(x_j)\| + \|S_{2k,\alpha_1}(x_j)\| + \dots + \|S_{(l+1)k,\alpha_l}(x_j)\| \\ &\leq c_k + c_{2k} + \dots + c_{(l+1)k} \\ &\leq \sum_{n \geq k} c_n < \delta. \end{aligned}$$

Segue então que

$$\|y - w\| \leq \frac{1}{\min_{\|x\|=1} \|T_{0,\lambda_1}(x)\|} (c_k + c_{2k} + \dots + c_{(l+1)k}) \leq \frac{1}{\eta} \sum_{n \geq k} c_n < \delta.$$

Seja λ , $\alpha_{i-1} < \lambda < \alpha_i$. Então

$$T_{(i+1)k,\lambda}(y) = T_{(i+1)k,\lambda}(w) + T_{(i+1)k,\lambda} \circ S_{k,\alpha_0}(x_j) + \dots + T_{(i+1)k,\lambda} \circ S_{(l+1)k,\alpha_l}(x_j).$$

Então

$$\begin{aligned} \|T_{(i+1)k,\lambda}(y) - x_j\| &\leq \|T_{(i+1)k,\lambda}(w)\| \\ &+ \|T_{(i+1)k,\lambda} \circ S_{k,\alpha_0}(x_j)\| + \dots + \|T_{(i+1)k,\lambda} \circ S_{ik,\alpha_{i-1}}(x_j)\| \\ &+ \|T_{(i+1)k,\lambda} \circ S_{(i+1)k,\alpha_i}(x_j) - x_j\| \\ &+ \|T_{(i+1)k,\lambda} \circ S_{(i+2)k,\alpha_{i+1}}(x_j)\| + \dots + \|T_{(i+1)k,\lambda} \circ S_{(l+1)k,\alpha_l}(x_j)\|. \end{aligned}$$

Note que $\|T_{(i+1)k,\lambda}(w)\| < \frac{1}{4s}$ e por 1b temos que

$$\begin{aligned} &\|T_{(i+1)k,\lambda} \circ S_{k,\alpha_0}(x_j)\| + \dots + \|T_{(i+1)k,\lambda} \circ S_{ik,\alpha_{i-1}}(x_j)\| \\ &\leq c_{ik} + c_{(i-1)k} + \dots + c_k < \frac{1}{4s}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Da mesma forma, por 1c temos que

$$\begin{aligned} \|T_{(i+1)k,\lambda} \circ S_{(i+2)k,\alpha_{i+1}}(x_j)\| + \dots + \|T_{(i+1)k,\lambda} \circ S_{(l+1)k,\alpha_l}(x_j)\| &\leq c_k + c_{2k} + \dots + c_{(l+1)k} \\ &< \frac{1}{4s}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Portanto temos que encontrar l e $\lambda_1 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_l = \lambda_2$ tal que para λ , $\alpha_{i-1} < \lambda < \alpha_i$ tenhamos

$$\|T_{(i+1)k,\lambda} \circ S_{(i+1)k,\alpha_i}(x_j) - x_j\| < \frac{1}{4s} \quad (3.4)$$

para todo $i = 1, \dots, l$. Faça $\varepsilon = \frac{1}{4s}$ e seja $C(\varepsilon)$ como no ítem (2) do teorema. Então se $\frac{\lambda}{\alpha_i} > C(\varepsilon)^{\frac{1}{(i+1)k}}$, $i = 1, \dots, l$ então $\|T_{(i+1)k,\lambda} \circ S_{(i+1)k,\alpha_i}(x_j) - x_j\| < \varepsilon = \frac{1}{4s}$. Como $\alpha_{i-1} < \lambda < \alpha_i$ é suficiente mostrar que

$$\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} > C(\varepsilon)^{\frac{1}{(i+1)k}}, \quad i = 1, \dots, l. \quad (3.5)$$

Fazendo $\beta_i = \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}$ temos que 3.5 é equivalente a

$$\beta_i > C(\varepsilon)^{\frac{1}{(i+1)k}}, \quad i = 1, \dots, l.$$

Portanto é suficiente encontrar l números positivos $\beta_1, \dots, \beta_l < 1$ tais que $\beta_i > C(\varepsilon)^{\frac{1}{(i+1)k}}$, $i = 1, \dots, l$ e que

$$\prod_{i=1}^l \beta_i = \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \dots \frac{\alpha_{l-1}}{\alpha_l} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \quad (3.6)$$

Escolha $l \geq 1$ tal que $\eta = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} C(\varepsilon)^{-\frac{1}{k}(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{l+1})} > 1$ e fazendo

$$N = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{l+1} \right),$$

defina

$$\beta_i = \eta^{\frac{1}{N(i+1)k}} (C(\varepsilon))^{\frac{1}{(i+1)k}}.$$

Logo 3.6 vale e fazendo

$$\alpha_l = \lambda_2 \quad e \quad \alpha_i = \lambda_2 \prod_{r=i+1}^l \beta_r, \quad i = 0, \dots, l-1$$

teremos a partição que satisfaz 3.5. Logo de 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 temos

$$\|T_{i+1,k}(y) - x_j\| < \frac{1}{4s} + \frac{1}{4s} + \frac{1}{4s} + \frac{1}{4s} = \frac{1}{s}.$$

Isto é, $\|x - y\| < \delta$ e $\|T_{i+1,k}(y) - x_j\| < \frac{1}{s}$. Logo $y \in E_k(s, j, m)$ onde $m = (i + 1)k$, $i = 1, \dots, l$. Logo $\bigcup_m E_k(s, j, m)$ é denso em X .

Escrevendo I como uma reunião enumerável de intervalos compactos K_n teremos que o conjunto

$$G = \bigcap_n \bigcap_s \bigcap_j \bigcup_m E_{k_n}(s, j, m)$$

satisfaz à conclusão do teorema.

□

3.2 Aplicações do Critério

Sejam $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ o espaço de Hilbert das sequências de quadrados somáveis com valores complexos munido da norma usual

$$x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2 \mapsto \|x\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

e $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ dada por $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$ o operador "Shift". Seja também

$$D = \{(x_n) \in \ell^2; x_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \text{ e } \exists k_0 > 0 \text{ tal que } x_k = 0 \ \forall k \geq k_0\}.$$

No contexto de operadores lineares em espaços de Banach, Rolewics[13] foi o primeiro a provar a existência de operadores hipercíclicos nesses espaços. Sabemos

que o operador shift não admite vetores hipercíclicos em ℓ^2 , pois

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n(x)\| = 0, \quad \forall x \in \ell^2.$$

Logo a sequência $(T^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ não pode ser densa em ℓ^2 .

3.2.1 O Operador Shift

Embora o operador Shift não seja hipercíclico, Rolewics [13] provou que seus múltiplos, λT com $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > 1$ são hipercíclicos. Salas [6] questionou se essa família admite um vetor hipercíclico comum. Recentemente Abakumov e Gordon [2] responderam a essa pergunta. A prova deles consiste de uma construção esperta de um vetor hipercíclico comum para essa família de operadores. Como consequência do critério apresentado no parágrafo anterior apresentamos uma prova não construtiva desse fato, mostrando ainda que o conjunto de vetores hipercíclicos comuns para essa classe de operadores é residual. A prova segue das duas proposições a seguir.

Proposição 3.2.1. *Existe um conjunto G_δ -denso $G \subset l^2$ tal que $G \subset \mathcal{HC}(\lambda T)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 1$.*

Demonstração. Para provarmos esse teorema usaremos o teorema 3.1.1. Seja $T_{n,\lambda} = (\lambda T)^n$ e $S_{n,\lambda} = (\frac{1}{\lambda} S)^n$ onde $S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$. Note que: $T_{n,\lambda} \circ S_{n,\lambda} = Id$.

Vamos verificar o ítem 1 do teorema 3.1.1. Fixe $x = (x_n) \in D$ e um intervalo compacto $[\lambda_1, \lambda_2] \subset (1, \infty)$. Seja $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_k = 0$ para todo $k \geq k_0$. Observe

que $T_{n+k,\alpha} \circ S_{n,\alpha} = 0$ para $k \geq k_0$. Para $\alpha, \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$, $\lambda \leq \alpha$ temos:

$$\|T_{n,\lambda} \circ S_{n+k,\alpha}(x)\| = \|T_{n,\lambda}(\frac{1}{\alpha^{n+k}}\|x\|)\| = \frac{\lambda^n}{\alpha^{n+k}}\|x\| = (\frac{\lambda}{\alpha})^n \frac{1}{\alpha^k}\|x\| \leq \frac{1}{\alpha^k}\|x\| \leq \frac{1}{\lambda_1^k}\|x\|.$$

Portanto fazendo $c_k = \frac{1}{\lambda_1^k}\|x\|$; $k \geq k_0$ as condições a, b e c do ítem 1 do teorema

3.1.1 são satisfeitas.

Agora vamos verificar o ítem 2 do teorema 3.1.1: Seja $\epsilon > 0$ dado. Então:

$$\|T_{n,\lambda} \circ S_{n,\alpha}(x) - x\| = |(\frac{\lambda}{\alpha})^n - 1|\|x\|.$$

Escolha $C(\epsilon)$, $0 < C(\epsilon) < 1$ tal que $C(\epsilon) > 1 - \frac{\epsilon}{\|x\|}$ e o ítem 2 será satisfeito. Logo pelo teorema 3.1.1, existe um conjunto G_δ -denso $G \subset \ell^2$ tal que

$$G \subset \mathcal{U}\{T_{n,\lambda}(x) : n \geq 0\} \quad \forall \lambda \in (1, \infty), \quad \forall x \in G,$$

isto é,

$$G \subset \mathcal{HC}(\lambda T) \quad \forall \lambda \in (1, \infty).$$

□

Proposição 3.2.2. *Seja x um vetor hipercíclico para λT (onde T é o operador Shift) para algum $\lambda > 1$. Então x também é hipercíclico para $\lambda e^{2\pi i\theta} T$ para todo θ , $0 \leq \theta \leq 1$.*

Demonstração. Seja x hipercíclico para λT e fixe θ , $0 < \theta < 1$. Queremos mostrar que a órbita de x sob $\lambda e^{2\pi i\theta} T$ é densa. Temos então duas possibilidades:

- Se $\theta = \frac{p}{q}$ (racional) segue que a sequência $(\lambda e^{2\pi i\theta} T)^n(x)$ é densa em ℓ^2 pois pela proposição 2.1.2, a sequência $\{(\lambda T)^{nq}(x); n \geq 0\}$ é densa em ℓ^2 e o resultado vale pois $(\lambda e^{2\pi i\theta} T)^{nq}(x) = (\lambda T)^{nq}(x)$.

- Se θ é irracional:

Sejam $z \in l^2$ e $\epsilon > 0$ dados. Seja $\delta > 0$ tal que se $\|\alpha - z\| < \frac{\epsilon}{2}$ e $0 \leq \beta \leq \delta$ então $\|e^{2\pi i\theta}\alpha - z\| < \epsilon$.

Seja $y = \{y_j\} \in l^2$ tal que $\|y - z\| < \frac{\epsilon}{6}$ tal que existe um inteiro l satisfazendo

$$y_j = 0 \text{ para } j \geq l \text{ e } \sum_{j \geq 1} \left\| \left(\frac{1}{\lambda}S\right)^j(y) \right\| < \frac{\epsilon}{6}.$$

Da minimalidade da rotação irracional e procedendo como na demonstração da proposição 2.1.3 escolhemos uma sequência de inteiros positivos $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ tal que

$$0 \leq \{n_k l \theta\} < \delta \text{ e } \sup |n_{k+1} - n_k| < m.$$

Seja

$$w = y + \left(\frac{1}{\lambda}S\right)^l(y) + \dots + \left(\frac{1}{\lambda}S\right)^{(m-1)l}(y).$$

Como T^j é uniformemente contínua e $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ podemos tomar ϵ_1 tal que se

$$\|v - u\| < \epsilon_1 \text{ então } \|(\lambda T)^j(v) - (\lambda T)^j(u)\| < \frac{\epsilon}{6}, \quad 0 \leq j \leq ml.$$

Usando o teorema 2.1.2, escolha algum n tal que

$$\|(\lambda T)^{nl}(x) - w\| < \epsilon_1.$$

Existe algum n_k tal que $n_k l = nl + jl$ para algum j , $0 \leq j \leq (m-1)$. Portanto

$$\begin{aligned}
\|(\lambda T)^{n_k l}(x) - z\| &\leq \|(\lambda T)^{nl+jl}(x) - (\lambda T)^{jl}(w)\| + \|(\lambda T)^{jl}(w) - y\| + \|y - z\| \\
&= \|(\lambda T)^{jl}(\lambda T^{nl}(x) - w)\| + \|\lambda T^{jl}(w - (\frac{1}{\lambda}S)^{jl}(y))\| + \|y - z\| \\
&= \|(\lambda T)^{jl}(\lambda T^{nl}(x) - w)\| + \|(\frac{1}{\lambda}S)^{(j+1)l}(y) + \dots + (\frac{1}{\lambda}S)^{(m-1)l}(y)\| \\
&\quad + \|y - z\| \\
&\leq \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6} \\
&= \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Fazendo $\alpha = (\lambda T)^{n_k l}(x)$ temos então que

$$\begin{aligned}
\|(\lambda e^{2\pi i\theta} T)^{n_k l}(x) - z\| &= \|e^{2\pi i n_k l \theta} (\lambda T)^{n_k l}(x) - z\| \\
&= \|e^{2\pi i([n_k l] + \{n_k l\})\theta} (\lambda T)^{n_k l}(x) - z\| \\
&= \|e^{2\pi i\{n_k l\}\theta} (\lambda T)^{n_k l}(x) - z\| < \epsilon
\end{aligned}$$

e a demonstração está completa. □

Usando as proposições 3.2.1 e 3.2.2 obtemos o

Teorema 3.2.1. *Existe um conjunto residual $R \subset l^2$ tal que $R \subset \mathcal{HC}(\lambda T) \forall \lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > 1$.*

3.2.2 O Operador Shift Ponderado

Seja $T : l^2 \rightarrow l^2$ definido por $T(x_1, x_2, \dots) = (a_1 x_2, a_2 x_3, a_3 x_4, \dots)$ o operador Shift

Ponderado com uma sequência de pesos $\{a_i; i \geq 1\}$.

No nosso estudo, usaremos uma sequência de pesos particular, a saber:

$$a_i(\lambda) = 1 + \frac{\lambda}{i}, \text{ onde } \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 1.$$

Denotaremos por T_λ o operador Shift Ponderado com a sequência de pesos $(a_i(\lambda))_{i \in \mathbb{N}}$.

Então vale o seguinte resultado:

Teorema 3.2.2. *Existe um conjunto residual $R \subset l^2$ tal que $R \subset \mathcal{HC}(T_\lambda)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 1$.*

Demonstração. Para demonstrar esse resultado usaremos o teorema 3.1.1.

Para cada $\lambda > 1$ defina o operador S_λ dado por $S_\lambda(x_1, x_2, \dots) = (0, \frac{x_1}{a_1(\lambda)}, \frac{x_2}{a_2(\lambda)}, \dots)$ e faça $T_{n,\lambda} = (T_\lambda)^n$ e $S_{n,\lambda} = (S_\lambda)^n$. Segue que $T_{n,\lambda} \circ S_{n,\lambda} = Id$. Fixe $x = \{x_i\} \in D$ e um intervalo compacto $[\lambda_1, \lambda_2] \subset (1, \infty)$. Então existe k_0 tal que $T_{k,\lambda}(x) = 0 \forall k \geq k_0, \forall \lambda > 1$. Para $k > k_0$ faça

$$c_k = \frac{1}{\prod_{i=k}^{k+k_0} a_i(\lambda_1)} \|x\|.$$

Seja $\{e_n\}$ a base canônica de l^2 . Agora, para $\lambda \leq \alpha$ temos

$$\begin{aligned}
\|T_{n,\lambda} \circ S_{n+k,\alpha}(x)\| &= \left\| \sum_{j=k}^{k+k_0} \left(\frac{\prod_{i=j+1}^{n+j} a_i(\lambda)}{\prod_{i=j+1-k}^{n+j} a_i(\alpha)} \right) x_{i+j-k} e_{j+1} \right\| \\
&= \left\| \sum_{j=k}^{k+k_0} \left(\frac{\prod_{i=j+1}^{n+j} a_i(\lambda)}{\prod_{i=j+1-k}^j a_i(\alpha) \cdot \prod_{i=j+1}^{n+j} a_i(\alpha)} \right) x_{i+j-k} e_{j+1} \right\| \\
&\leq \left\| \sum_{j=k}^{k+k_0} \left(\frac{1}{\prod_{i=j+1-k}^j a_i(\alpha)} \right) x_{i+j-k} e_{j+1} \right\| \\
&\leq \left(\frac{1}{\prod_{i=k}^{k+k_0} a_i(\alpha)} \right) \left\| \sum_{j=1}^{k+k_0} x_{i+j-k} e_{j+1} \right\| \\
&\leq \left(\frac{1}{\prod_{i=k}^{k+k_0} a_i(\lambda_1)} \right) \|x\| \\
&= c_k.
\end{aligned}$$

Provaremos agora que $\sum_k c_k < \infty$. Nos cálculos a seguir, $a_n \sim b_n$ significa que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Note que

$$\log\left(\prod_{i=1}^k a_i(\lambda)\right) = \sum_{i=1}^k \log\left(1 + \frac{\lambda_1}{i}\right) \sim \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_1}{i} \sim \lambda_1 \log(k).$$

Logo $c_k \sim \frac{1}{k^{\lambda_1}} \|x\|$ e $\sum c_k < \infty$, e as condições a, b e c do item 1 do teorema 3.1.1 são satisfeitas. Vamos agora verificar o item 2 do teorema 3.1.1: Note que

$$\|t_{n,\lambda} \circ S_{n,\alpha}(x) - x\| \leq \left| \frac{\prod_{i=1}^n a_i(\lambda)}{\prod_{i=1}^n a_i(\alpha)} - 1 \right| \|x\|.$$

Seja $\epsilon > 0$ e fixe a , $0 < a < 1$. Observe que $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - a^{\frac{1}{n}}) \cdot \log n = 0$. Então, para n suficientemente grande temos

$$|n^{\lambda_2(1-a^{\frac{1}{n}})} - 1| < \frac{\epsilon}{\|x\|}.$$

Logo, se n é grande e $\lambda, \alpha \in [\lambda_1, \lambda_2]$ satisfazem $1 > \frac{\lambda}{\alpha} > a^{\frac{1}{n}}$, então

$$\left| \frac{n^\lambda}{n^\alpha} - 1 \right| \leq \left| \frac{n^\alpha}{n^\lambda} - 1 \right| = |n^{\alpha(1-\frac{\lambda}{\alpha})} - 1| < \frac{\epsilon}{\|x\|}.$$

Como $\prod_{i=1}^n a_i(\lambda) \sim n^\lambda$ segue que o ítem 2 vale para n suficientemente grande ($n \geq n_0$) com $1 > C(\epsilon) > a$. Portanto, escolha $C(\epsilon)$ tal que o item 2 também vale para $n \leq n_0$. □

Capítulo 4

Outros Exemplos de Comportamentos Selvagens

Na primeira seção deste capítulo provamos a existência de um conjunto genérico de vetores hipercíclicos comuns para a família de operadores dados pela composta do operador derivada com o operador multiplicação por escalar (reescalamiento do domínio). Na segunda seção mostramos a existência de um caso patológico de uma função que é hipercíclica apenas para T_1 , e se aproxima da função nula em qualquer outra direção.

4.1 O Operador Derivada

Seja $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ munido da métrica usual

$$\rho(f, g) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{\sup_{|z| \leq n} |f(z) - g(z)|}{1 + \sup_{|z| \leq n} |f(z) - g(z)|} \right) \frac{1}{2^n}, \quad \text{para } f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}).$$

Como no capítulo anterior escreveremos $\|f\| = \rho(f, 0)$. Seja $D : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{C})$ o operador derivação e $R_\lambda : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{C})$ dado por $R_\lambda(f)(z) = f(\lambda z)$.

Teorema 4.1.1. *Existe um conjunto residual $F \subset \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que para qualquer $f \in F$ e qualquer número real positivo λ , a função h definida por $h(z) = f(\lambda z)$ pertence ao conjunto $\mathcal{HC}(D)$.*

Demonstração. Para provar esse teorema aplicaremos o teorema 3.1.1 à família de operadores $T_{n,\lambda} = D^n \circ R_\lambda$ onde $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Defina os operadores $S_{n,\lambda} : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{C})$ dados por $S_{n,\lambda}(f)(z) = f^{(-n)}(\frac{z}{\lambda})$, onde $f^{(-1)}$ é a antiderivada de f tal que o valor em 0 é 0 e $f^{(-n)} = (f^{-(n-1)})^{-1}$. Vamos verificar que as condições do teorema 3.1.1 são satisfeitas. Primeiro observe que

$$T_{n,\lambda} \circ S_{n,\lambda}(f)(z) = T_{n,\lambda}(f^{(-n)}(\frac{z}{\lambda})) = \lambda^n \left(\frac{1}{\lambda^n} f(\lambda \frac{z}{\lambda}) \right) = f(z). \quad (4.1)$$

Isto é, $T_{n,\lambda} \circ S_{n,\lambda} = Id$. Para verificar os itens (1) e (2) do teorema 3.1.1 usaremos como um subconjunto denso de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ o conjunto dos polinômios $\{\mathcal{P}_n\}$ com coeficientes em $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Seja p um polinômio fixado. Então $T_{n+k,\lambda} \circ S_{n,\alpha}(p) = 0$ para $k \geq \text{grau}(p)$.

Por outro lado, $T_{n,\lambda} \circ S_{n+k,\alpha}(p) = \frac{\lambda^n}{\alpha^n} p^{(-k)}(\frac{\lambda}{\alpha} z)$. Então, para $\lambda \leq \alpha$,

$$\| T_{n,\lambda} \circ S_{n+k,\alpha}(p) \| \leq \| p^{(-k)} \| .$$

Defina $c_k = \|p^{(-k)}\|$ e faça $m = \text{grau}(p)$. Seja c o máximo dos módulos dos coeficientes de p . Então

$$\sup_{|z| \leq n} |p^{(-k)}(z)| \leq \frac{m+1}{k!} c n^{m+k}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} c_k &= \|p^{-k}\| \\ &= \sum_{n \geq 1} \left(\frac{\sup_{|z| \leq n} |p^{-k}(z)|}{1 + \sup_{|z| \leq n} |p^k(z)|} \right) \frac{1}{2^n} \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \left(\frac{\frac{n+1}{k!} c n^{m+k}}{1 + \left(\frac{m+1}{k!}\right) c n^{m+k}} \right) \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Precisamos então mostrar que $\sum_k c_k < \infty$. Para isso é suficiente mostrar que

$$\sum_k \sum_{n \geq 1} \left(\frac{\frac{n+1}{k!} c n^{m+k}}{1 + \left(\frac{m+1}{k!}\right) c n^{m+k}} \right) \frac{1}{2^n} < \infty.$$

Seja $l = [2 \log k]$ a parte inteira de $2 \log k$. Então

$$\begin{aligned} c_k &\leq \sum_{n \geq 1} \left(\frac{\frac{n+1}{k!} c n^{m+k}}{1 + \left(\frac{m+1}{k!}\right) c n^{m+k}} \right) \frac{1}{2^n} \\ &\leq \sum_{n=1}^l \left(\frac{\frac{n+1}{k!} c n^{m+k}}{1 + \left(\frac{m+1}{k!}\right) c n^{m+k}} \right) \frac{1}{2^n} + \sum_{n \geq l+1} \left(\frac{\frac{n+1}{k!} c n^{m+k}}{1 + \left(\frac{m+1}{k!}\right) c n^{m+k}} \right) \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^l \left(\frac{\frac{n+1}{k!} c n^{m+k}}{1 + \left(\frac{m+1}{k!}\right) c n^{m+k}} \right) \frac{1}{2^n} &\leq l \frac{m+1}{k!} c l^{m+k} \\ &\leq \left(\frac{m+1}{k!} \right) c l^{m+k+1} \\ &\leq \left(\frac{m+1}{k!} \right) c (2 \log k)^{m+k+1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq l+1} \left(\frac{\frac{n+1}{k!} c n^{m+k}}{1 + \left(\frac{m+1}{k!}\right) c n^{m+k}} \right) \frac{1}{2^n} &\leq \sum_{n \geq l+1} \frac{1}{2^n} \\
&= \frac{1}{2^{l+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) \\
&= \frac{2}{2^{l+1}} \\
&\leq \frac{2}{2^{2 \log k}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$c_k \leq c \frac{m+1}{k!} (2 \log k)^{m+k+1} + \frac{2}{2^{\log k}}.$$

Note que $\sum_k \frac{2}{2^{2 \log k}} < \infty$. Falta mostrar então que $\sum_k \left(\frac{m+1}{k!}\right) (2 \log k)^{m+k+1} < \infty$.

Usando o teste da razão obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{(2 \log(k+1))^{m+k+2}}{(k+1)!} \frac{k!}{(2 \log k)^{m+k+1}} &= \frac{2 \log(k+1)}{k+1} \left(\frac{\log(k+1)}{\log k} \right)^{m+k+1} \\
&= \frac{2 \log(k+1)}{k+1} \left(\frac{\log(k+1)}{\log k} \right)^{m+1} \left(\frac{\log(k+1)}{\log k} \right)^k \\
&= \frac{2 \log(k+1)}{k+1} \left(\frac{\log(k+1)}{\log k} \right)^{m+1} \left(1 + \frac{\log(1 + \frac{1}{k})}{\log k} \right)^k \\
&\leq \frac{2 \log(k+1)}{k+1} \left(\frac{\log(k+1)}{\log k} \right)^{m+1} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k \\
&\leq \frac{2 \log(k+1)}{k+1} \left(\frac{\log(k+1)}{\log k} \right)^{m+1} e.
\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2 \log(k+1)}{k+1} \left(\frac{\log(k+1)}{\log k} \right)^{m+1} e = 0,$$

temos $\sum_k c_k < \infty$ e com isto completamos a verificação do ítem 1 do teorema 3.1.1.

Sejam p um polinômio e $\epsilon > 0$ dados. Escolha ϵ_1, l e depois δ de modo que

$$\|\epsilon_1 p\| < \frac{\epsilon}{2} \text{ e } \sum_{n \geq l} \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{4}$$

e se $|w - z| < \delta, |z|, |w| \leq l$ então $|p(w) - p(z)| < \frac{\epsilon}{4}$. Finalmente, seja $0 < C(\epsilon) < 1$

tal que

$$0 < 1 - C(\epsilon) < \epsilon_1 e(1 - C(\epsilon))l < \delta \quad (4.2)$$

Seja $\lambda < \alpha$ tal que $1 \geq \frac{\lambda}{\alpha} > C(\epsilon)^{\frac{1}{n}}$. Faça $p_1(z) = p(\frac{\lambda}{\alpha}z)$. Note que

$$T_{n,\lambda} \circ S_{n,\alpha}(p)(z) = \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^n p_1(z).$$

Então temos

$$\begin{aligned} \|T_{n,\lambda} \circ S_{n,\alpha}(p) - p\| &\leq \|T_{n,\lambda} \circ S_{n,\alpha}(p) - p_1\| + \|p_1 - p\| \\ &\leq \left\| \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^n p_1 - p_1 \right\| + \|p_1 - p\| \\ &\leq \left\| \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^n\right) p_1 \right\| + \|p_1 - p\| \\ &\leq \|(1 - C(\epsilon))p\| + \|p_1 - p\| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \|p_1 - p\|. \end{aligned}$$

Além do mais, por 4.2 temos que

$$\left| \frac{\lambda}{\alpha} z - z \right| = \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right) |z| < (1 - C(\epsilon))l < \delta.$$

Portanto, concluímos que

$$\|p_1 - p\| \leq \sup_{|z| \leq l} |p_1(z) - p(z)| + \sum_{n \geq l} \frac{1}{2^n}$$

$$\leq \sup_{|z| \leq l} \left| p\left(\frac{\lambda}{\alpha} z\right) - p(z) \right| + \frac{\epsilon}{4} < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4}.$$

Logo, pelo teorema 3.1.1 existe um conjunto residual $F \subset \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $\overline{\{T_{n,\lambda}(f) : n \geq 0\}} = \mathcal{H}(\mathbb{C})$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}_+$ e para toda $f \in F$. Isto é: para toda $f \in F$, $h(z) = f(\lambda z) \in \mathcal{HC}(D)$ onde D é o operador derivação.

□

Teorema 4.1.2. *Se uma função $f \in \mathcal{HC}(D)$ então para todo θ , $0 < \theta < 1$ a função definida por $h(z) = f(e^{2\pi i \theta} z)$ também pertence a $\mathcal{HC}(D)$.*

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{HC}(D)$ e fixe θ , $0 < \theta < 1$. Queremos mostrar que a função $h(z) = f(e^{2\pi i \theta} z)$ também é hipercíclica para o operador D . Seja $g \in \mathcal{HC}(D)$, L um compacto e $\epsilon > 0$ dados. É suficiente encontrarmos n tal que

$$\sup_{z \in L} |h^{(n)}(z) - g(z)| < \epsilon.$$

Note que

$$h^{(n)}(z) = e^{2\pi i n \theta} f^{(n)}(e^{2\pi i \theta} z).$$

Vamos considerar dois casos:

- θ é racional:

Suponha que $\theta = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Como f é hipercíclico para D , segue do teorema 2.1.2 que f também é hipercíclico para D^q , isto é, a sequência de funções

$\{D^{nq}(f) : n \geq 1\}$ é densa em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Portanto, a sequência

$$\begin{aligned} \{R_{e^{2\pi i\theta}} \circ D^{nq}(f) : n \geq 1\} &= \{D^{nq}(f(e^{2\pi i\theta}z)) : n \geq 1\} \\ &= \{e^{2\pi inq\theta}(f^{nq}(e^{2\pi i\theta}z)) : n \geq 1\} \\ &= \{e^{2\pi inp}(f^{nq}(e^{2\pi i\theta}z)) : n \geq 1\} \\ &= \{(f^{(nq)}(e^{2\pi i\theta}z)) : n \geq 1\} \end{aligned}$$

é densa em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Escolha n_0 grande tal que

$$\sup_{z \in L} |R_{e^{2\pi i\theta}} \circ D^{n_0q}(f)(z) - g(z)| < \epsilon.$$

Então

$$\sup_{z \in L} |h^{n_0q}(z) - g(z)| < \epsilon,$$

e assim $n = n_0q$ é o instante n procurado.

- θ é irracional:

Seja B_1 uma bola centrada na origem tal que $L \subset B_1$ e faça $g_1(z) = g(e^{-2\pi i\theta}z)$.

Seja p um polinômio satisfazendo

$$\sup_{z \in B_1} |p(z) - g_1(z)| < \frac{\epsilon}{4}. \quad (4.3)$$

Escolha $l > \text{grau}(p)$ tal que

$$\sum_{n \geq l} \sup_{z \in B_1} |p^{(-n)}(z)| < \frac{\epsilon}{4}. \quad (4.4)$$

Seja $\delta > 0$ tal que para qualquer $0 \leq \beta \leq \delta$,

$$|e^{2\pi i\theta} - 1| \sup_{z \in B_1} |g_1(z)| < \frac{\epsilon}{4}. \quad (4.5)$$

Pela minimalidade da rotação por $l\theta$, existe uma sequência de inteiros $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ tal que

$$0 \leq \{n_k l\theta\} < \delta \quad (4.6)$$

e

$$\sup_k |n_{k+1} - n_k| < m \text{ para algum inteiro } m. \quad (4.7)$$

Seja B uma bola fechada tal que $B_1 \subset \text{int}(B)$. Pela Estimativa de Cauchy[7], podemos encontrar $\epsilon_1 > 0$ tal que se $\xi, \psi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ e $\sup_{z \in B} |\xi(z) - \psi(z)| < \epsilon_1$ então

$$\sup_{z \in B_1} |\xi^{(j)}(z) - \psi^{(j)}(z)| < \frac{\epsilon}{4}, \quad j = 0, 1, \dots, ml. \quad (4.8)$$

Suponha $B = B(0, R)$, $R > 1$, tal que $B_1 \subset \text{int}(B)$. Seja $r = \text{dist}(B_1, \text{int}(B))$. Logo, se $\sup_{z \in B} |\xi(z) - \psi(z)| < \epsilon_1$ então para todo $z \in B_1$ temos que

$$|\xi^{(n)}(z) - \psi^{(n)}(z)| = |(\xi - \psi)^{(n)}| < \frac{n! \epsilon_1}{r^n}.$$

Então tomando $\epsilon_1 = \frac{r^{ml} \epsilon}{4(ml)!}$ temos que $\sup_{z \in B} |\xi(z) - \psi(z)| < \epsilon_1$ donde $\sup_{z \in B_1} |\xi^{(j)}(z) - \psi^{(j)}(z)| < \frac{\epsilon}{4}$, $j = 0, 1, \dots, ml$. Faça $\xi(z) = p(z) + p^{(-l)}(z) + p^{(-2l)}(z) + \dots + p^{(-(m-1)l)}(z)$.

Então pelo teorema 2.1.2 a sequência $\{D^{(nl)}(f); n \geq 0\}$ é densa em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Segue então que para algum n temos

$$\sup_{z \in B} |D^{(nl)}(f)(z) - \xi(z)| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Já que a sequência $\{n_k; k \geq 1\}$ satisfaz 4.7, devemos encontrar n_k tal que $n_k l = nl + jl$

para algum j , $0 \leq j \leq m - 1$. Teremos então por 4.3, 4.4, 4.8 e a definição de ξ :

$$\begin{aligned}
\sup_{z \in L} |f^{(n_k l)}(e^{2\pi i \theta} z) - g_1(z)| &= \sup_{z \in B_1} |D^{n_k l}(f)(z) - g_1(z)| \\
&\leq \sup_{z \in B_1} |D^{n_k l}(f)(z) - \xi^{(j l)}(z)| + \sup_{z \in B_1} |\xi^{(j l)}(z) - g_1(z)| \\
&= \sup_{z \in B_1} |D^{n l + j l}(f)(z) - \xi^{(j l)}(z)| + \sup_{z \in B_1} |\xi^{(j l)}(z) - g_1(z)| \\
&\leq \frac{\epsilon}{4} + \sup_{z \in B_1} |p(z) - g(z)| + \sum_{n \geq l} \sup_{z \in L} |p^{(-n)}(z)| \\
&= \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} \\
&= \frac{3\epsilon}{4}.
\end{aligned}$$

Finalmente, por 4.5, 4.6, pela Estimativa de Cauchy e fazendo $w = e^{2\pi i \theta} z$ concluímos que:

$$\begin{aligned}
\sup_{z \in L} |D^{n_k l}(h)(z) - g(z)| &= \sup_{z \in L} |e^{2\pi i n_k l \theta} f^{(n_k l)}(e^{2\pi i \theta} z) - g(z)| \\
&\leq \sup_{z \in B_1} |e^{2\pi i n_k l \theta} f^{(n_k l)}(e^{2\pi i \theta} z) - e^{2\pi i n_k l \theta} g(z)| \\
&\quad + \sup_{z \in B_1} |e^{2\pi i n_k l \theta} g(z) - g(z)| \sup_{w \in B_1} |f^{(n_k)} - g_1(z)| \\
&\quad + \sup_{w \in B_1} |e^{2\pi i n_k \theta} - 1| |g_1(w)| \\
&< \frac{3\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon
\end{aligned}$$

□

Usando os teoremas 4.1.1 e 4.1.2 obtemos o:

Teorema 4.1.3. *Para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, considere a sequência de operadores $T_{n,\lambda} = D^n \circ R_\lambda$. Então existe um conjunto residual $F \subset \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $F \subset \mathcal{U}(\{T_{n,\lambda} : n \geq 1\})$ para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Em outras palavras, para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $f \in F$ a sequência de funções inteiras $h_n(z) = \lambda^n f^{(n)}(\lambda z)$ é densa em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$*

Agora observemos que:

- Qualquer automorfismo R em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ manda um conjunto denso em outro denso.
- Um conjunto residual de vetores hipercíclicos comuns é obtido para a família de operadores λD no teorema acima.
- A identidade $(\lambda D)^n = R_\lambda^{-1} \circ D^n \circ R_\lambda$ é verdadeira.
- Uma função hipercíclica inteira f comum para a família de operadores λD tem a seguinte propriedade: $\{f^{(n)}(z)\}$ e $\{\lambda^n f^{(n)}\}$ são sequências densas em \mathbb{C} para todo $z \in \mathbb{C}$ e para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- Se f é hipercíclico para λD (respectivamente T_α) então f' é também hipercíclico para λD (respectivamente T_α).

Portanto as observações acima, juntamente com o Teorema de Baire[9], e os teoremas 2.1.1 e 4.1.3 obtemos o seguinte Teorema sobre "Funções Inteiras Selvagens".

Teorema 4.1.4. *Existe um conjunto residual $G \subset \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que para toda $f \in G$ e todo $j \in \mathbb{N}$ temos que*

$$f^{(j)} \in \bigcap_{\alpha, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}} \mathcal{HC}(T_\alpha) \cap \mathcal{HC}(\lambda D).$$

Equivalentemente, $\forall f \in G, \forall \lambda, \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $\forall j \in \mathbb{N}$ valem:

$$1) \overline{\{f^{(j)}(z + n\alpha); n \geq 0\}} = \mathcal{H}(\mathbb{C}).$$

$$2) \overline{\{\lambda^n f^{(j+n)}(z); n \geq 0\}} = \mathcal{H}(\mathbb{C}).$$

4.2 Um Caso Patológico

Em vista do teorema 2.1.1 a função descrita abaixo pode ser considerada "patológica".

Teorema 4.2.1. *Seja $T_1 : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{C})$ o operador translação por 1. Isto, é $T_1(f)(z) = f(z + 1)$. Então existe uma função inteira f hipercíclica para T_1 que também satisfaz*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(z + re^{2\pi i\theta}) = 0, \quad \forall \theta, \quad 0 < \theta < 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Além do mais, o limite acima existe uniformemente em $\{\theta; \epsilon \leq \theta \leq 1 - \epsilon\}$, $\forall z$ em um conjunto compacto qualquer.

Demonstração. Sejam $S = \mathbb{C} \setminus \{z = x + iy; x > 1, -\log x < y < \log x\}$, $B_k = \{|z| \leq k\}$ e n_1 tal que $B_1^1 = B_1 + n_1$ não intersecta S , isto é, $B_1^1 \cap S = \emptyset$. Para começar tome $n_1 = 4$.

Para $k \geq 2$ seja n_k tal que $B_k^k = B_k + n_k$ não intersecta $S \cup B_1^1 \cup B_2^2 \dots \cup B_{k-1}^{k-1}$. Defina então o conjunto $F = S \cup \bigcup_k B_k^k$. Temos que F é fechado e $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ é conexo e localmente conexo no ∞ . Seja $\{p_k; k \geq 1\}$ um conjunto enumerável de polinômios

com coeficientes em $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Considere uma função $h : S \rightarrow \mathbb{C}$ contínua em S e holomorfa no interior de S tal que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} h(z) = 0.$$

Por exemplo, tome $h(z) = 0$. Finalmente, seja $g : F \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$g(z) = \begin{cases} h(z) & \text{se } z \in S \\ p_k(z - n_k) & \text{se } z \in B_k^k \end{cases}$$

Tomando $\epsilon(t) = e^{-t^{\frac{1}{4}}}$, temos que

$$\begin{aligned} \int_1^\infty t^{-\frac{3}{2}} \log(\epsilon(t)) dt &= \int_1^\infty t^{-\frac{3}{2}} (-t^{\frac{1}{4}}) dt = - \int_1^\infty t^{-\frac{7}{4}} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(- \int_1^s t^{-\frac{7}{4}} dt \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{4t^{-\frac{3}{4}}}{3} \Big|_1^s = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{4}{3} \left(\frac{1}{s^{\frac{3}{4}}} - 1 \right) = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Logo, pelo teorema 1.2.1, existe uma função inteira f tal que

$$|f(z) - g(z)| < \epsilon(|z|), \quad \forall z \in F.$$

Logo, dado um compacto L , temos que existe k_0 tal que $L \subset B_{k_0}$ e para todo $k > k_0$ temos que $(L + n_k) \subset B_k^k$. Daí temos que se $z \in L$,

$$\|T_1^{n_k}(z) - g(z + n_k)\| = \|f(z + n_k) - p_k(z)\| \leq \epsilon(|z + n_k|).$$

Portanto f é hipercíclica para T_1 .

Para $0 < \theta < 1$, temos que $z + r_0 e^{2\pi i \theta} \in S$ para algum $r_0 > 0$ pois

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{ax} = 0, \quad \forall a \neq 0,$$

ou seja,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(z + re^{2\pi i\theta}) = 0, \quad \forall \theta, \quad 0 < \theta < 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Se $\{\theta; \epsilon \leq \theta \leq 1 - \epsilon\}$, existe $r_0 > 0$ tal que $z + r_0 e^{2\pi i\theta} \in S$, $\forall r > r_0$, e portanto o limite acima vale uniformemente em todo compacto. \square

Referências Bibliográficas

- [1] D. Gaier, *Lectures on Complex Approximation*, translated from the German by Renate McLaughlin, Birkhäuser, Boston, Inc. Boston, MA, (1987), xvi + 166pp. ISBN: 0-8176-3147-X.
- [2] E. Abakumov and J. Gordon, Common Hypercyclic Vectors for Multiples of Backward Shift, *J. Funct. Anal.*, (to appear).
- [3] G. Costakis and M. Sambarino, Genericity of Wild Holomorphic Functions and Common Hypercyclic Vectors, *Advances in Mathematics* **182** (2004), 278–306.
- [4] G. D. Birkhoff, Démonstration d'un Théorème Élémentaire sur les Fonctions Entières, *C. R. Acad. Sci. Paris* **189** (1929), 473–475.
- [5] G. R. MacLane, Sequences of Derivatives and Normal Families, *J. anal. Math.*, **2** (1952), 72–87.
- [6] H. N. Salas, Supercyclicity and Weighted Shifts, *Studia Math.*, **135** (1) (1999), 55–74.

- [7] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable* , Springer International Student Edition, 1973.
- [8] J. Horevath, *Topological Vector Spaces and Distributions* , Addison–Wesley Series in Mathematics, 1966.
- [9] J. R. Munkres, *Topology, A First Course* , Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
- [10] P. S. Bourdon, Invariant Manifolds of Hypercyclic Vectors, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **118 (3)** (1993), 845–847.
- [11] R. M. Gethner and J. H. Shapiro, Universal Vectors for Operators on Spaces of Holomorphic Functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **100 (2)** (1987), 281–288.
- [12] S. I. Ansari, Hypercyclic and Cyclic Vectors , *J. Funct. Anal.*, **128 (2)** (1995), 374–383.
- [13] S. Rolewicz, On Orbits of Elements, *Studia Math.*, **32** (1969), 17–22.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)