

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

PONTOS FIXOS COMUNS PARA  
DIFEOMORFISMOS DA 2-ESFERA  
QUE COMUTAM

*Fábio Corrêa de Castro*

Orientador: Prof. Dr. Sebastião Firmo

NITERÓI

AGOSTO DE 2006

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

PONTOS FIXOS COMUNS PARA  
DIFEOMORFISMOS DA 2-ESFERA  
QUE COMUTAM

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

PONTOS FIXOS COMUNS PARA  
DIFEOMORFISMOS DA 2-ESFERA  
QUE COMUTAM

*por*

Fábio Corrêa de Castro  
faccast@impa.br

*Sob a orientação do Professor*

**Dr. Sebastião Firmo**  
firmo@mat.uff.br

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da UFF como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

NITERÓI

AGOSTO DE 2006

*À minha mãe,  
que passou pelo fundo de muitas agulhas  
para hoje eu beijar os céus,  
dedico.*

Desejo expressar a minha gratidão àqueles que  
estiveram comigo até aqui.

À minha família (Bárbara e Dholly),  
base das minhas vitórias.

À Beth, minha companheira, flor, amor e paz.

Às minhas mães cariocas, Dulce, Hermínea e Ana que  
me deram colo, pais, irmãos ... Amo vocês.

Aos amigos que com amor nos abraçamos.

À Professora e amiga Rosane Ferreira,  
pelos “ouvidos” e lições.

Ao meu orientador, ao qual devo este novo  
conhecimento e muitas dúvidas.

Ao Prof. Abramo Hefez pela  
confiança e sorrisos que muito motivaram.

Aos Funcionários, Alunos e Educadores (IM-UFF),  
meus novos amigos.

Muito obrigado!

*“Deixo o meu apêlo:  
—Por favor ajudem, a  
Terra está morrendo!”*

*faccast*

## RESUMO

O objetivo deste trabalho é fazer uma exposição detalhada do Teorema de C. Bonatti que afirma a existência de um ponto fixo comum entre difeomorfismos em  $S^2$  que comutam e estão  $C^1$ -próximos da identidade.

## ABSTRACT

The goal of this work is to make a detailed exposition of Bonatti's Theorem that guarantee the existence of common fixed points for commuting diffeomorphisms on the 2-sphere which are  $C^1$ -close to the identity.

## Sumário

INTRODUÇÃO	1
Capítulo 1. CAMPOS EM $S^2$	3
1. PRELIMINARES	3
2. COMUTATIVIDADE ENTRE CAMPOS	7
Capítulo 2. O TEOREMA DE BONATTI	11
1. DIFEOMORFISMOS NA ESFERA $S^2$	11
2. A TOPOLOGIA $C^1$	12
3. DIFEOMORFISMOS $C^1$ -PRÓXIMOS DA IDENTIDADE: A BOLA $B\left(\text{Id}, \frac{1}{25}\right)_1$	14
4. DIFEOMORFISMOS QUE COMUTAM	22
5. DIFEOMORFISMOS QUE COMUTAM EM $B\left(\text{Id}, \frac{1}{25}\right)_1$ E A PROVA DO TEOREMA	23
CONCLUSÃO	29
Referências Bibliográficas	31

## INTRODUÇÃO

Em 1964, Elon Lima [4] provou que dois campos de classe  $C^1$  que comutam em  $S^2$  possuem uma singularidade em comum. A prova do teorema faz uso essencial do Teorema de Poincaré-Bendixson em  $S^2$ . Em geral, se  $n$  campos de vetores de classe  $C^1$  em  $S^2$  comutam dois a dois, então possuem um ponto fixo comum. No mesmo artigo, Lima afirma a veracidade desses resultados para fluxos contínuos em  $S^2$ .

A mesma questão para difeomorfismos em  $S^2$  é falsa; para isto basta considerar as reflexões nos eixos cartesianos.

Assim, só a comutatividade entre difeomorfismos não garante a existência de um ponto fixo comum. Que hipótese a mais deve ser acrescentada para garantir tal existência?

Em 1972, H. Rosenberg [7] coloca a seguinte questão: dois difeomorfismos que comutam em  $S^2$  e  $C^1$ -próximos da identidade, possuem um ponto fixo comum?

Em 1989, Christian Bonatti [1] responde positivamente à questão acima, mais ainda, Bonatti exhibe uma vizinhança da identidade segundo a topologia- $C^1$ , na qual todo par de difeomorfismos que comutam possui um ponto fixo comum. A vizinhança apresentada por Bonatti possuía raio igual a  $\frac{1}{60}$  o qual aqui, é ampliado para  $\frac{1}{25}$ .

Em sua resposta, Bonatti estende para difeomorfismos as idéias de Lima para campos, criando também uma versão do Teorema de Poincaré-Bendixson.

Em 1992, M. Handel [2] generaliza o Teorema de Bonatti provando que o mesmo vale para homeomorfismos que comutam em  $S^2$  e  $C^0$ -próximos da identidade.

Aqui será apresentado o desenvolvimento destes fatos, desde o Teorema de Lima até o Teorema de Bonatti.

O Capítulo 1 trata de Campos em  $S^2$  dando todos os conceitos e fundamentos para a prova do Teorema de Lima, fundamental no entendimento da prova do Teorema de Bonatti.

O Capítulo 2 tem por objetivo a prova do Teorema de Bonatti, assim como uma introdução ao estudo de difeomorfismos em  $S^2$ .

Para o entendimento do texto é necessário um conhecimento básico acerca de Análise no  $\mathbb{R}^n$  e Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias.

## CAPÍTULO 1

### CAMPOS EM $S^2$

#### 1. PRELIMINARES

$S^2$  denota a 2-esfera unitária do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$  com a métrica usual, ou seja,  $S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3; \|v\| = 1\}$ .

Um **campo em  $S^2$**  é uma função  $X : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que para cada  $p \in S^2$ , tem-se  $X(p) \in TS_p^2$ , onde  $TS_p^2$  denota o espaço vetorial tangente à  $S^2$  em  $p$  que, mais precisamente, é o conjunto dos vetores  $v \in \mathbb{R}^3$  tais que existe uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S^2$ , de classe  $C^1$ , com  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = v$ . Em particular, para  $S^2$  tem-se  $TS_p^2 = \{v \in \mathbb{R}^3; \langle v, p \rangle = 0\}$ , onde  $\langle \cdot \rangle$  denota o produto interno usual em  $\mathbb{R}^3$ .

Uma **singularidade** de um campo  $X$  em  $S^2$  é um ponto  $p \in S^2$  tal que  $X(p) = 0$ . O conjunto das singularidades de  $X$  será denotado **Sing(X)**.

Todo campo  $X$  em  $S^2$  induz uma função  $f_X : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por:

$$(1) \quad f_X(x) = X\left(\frac{x}{\|x\|}\right).$$

De (1), é claro que  $f_X|_{S^2} = X$ . Com isso,  $f_X$  é uma extensão de  $X$ .

Um campo  $X$  em  $S^2$  é dito **contínuo, diferenciável** ou de **classe  $C^r$**  ( $r \geq 1$ ), se  $f_X$  é contínua, diferenciável ou de classe  $C^r$  no aberto  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , respectivamente. Denota-se  $\mathfrak{X}^1(S^2)$ , o conjunto dos campos de vetores de classe  $C^1$  em  $S^2$ .

Uma **curva integral** de um campo  $X \in \mathfrak{X}^1(S^2)$  passando por um ponto  $p \in S^2$  é uma curva parametrizada de classe  $C^2$   $\alpha : I \rightarrow S^2$  tal que  $I \subset \mathbb{R}$  é um intervalo contendo zero,  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$ , para todo  $t \in I$ . O conjunto  $\alpha(I)$  é chamado **órbita de  $p$** .

O seguinte resultado mostra que, dado  $X \in \mathfrak{X}^1(S^2)$ , cada ponto  $p \in S^2$  possui uma órbita, imagem de uma curva integral com  $I = \mathbb{R}$ , mais ainda,

**TEOREMA 1.1.** *Dado  $X \in \mathfrak{X}^1(S^2)$ , existe uma aplicação de classe  $C^1$   $\phi : \mathbb{R} \times S^2 \rightarrow S^2$  tal que  $\phi(0, p) = p$  e  $\frac{\partial}{\partial t}\phi(t, p) = X(\phi(t, p))$ , quaisquer que sejam  $t \in \mathbb{R}$  e  $p \in S^2$ .*

A função  $\phi$  acima é chamada **fluxo do campo  $X$** .

Denotando  $X_t(p)$  em vez de  $\phi(t, p)$ , a órbita de  $p$  pode ser representada por  $\gamma = \{X_t(p); t \in \mathbb{R}\}$  e a curva integral passando por  $p$  é  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow S^2$  dada por  $\alpha(t) = X_t(p)$ . Por abuso de notação, o símbolo  $X_t(p)$  denotará tanto a órbita de  $p$  quanto um elemento desta órbita, sem que haja confusão.

Uma outra caracterização de singularidade é  $\phi(t, p) = p$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Se  $p$  não é uma singularidade sua órbita é dita **regular**.

Considerando uma seqüência  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de números reais tal que  $\lim t_n = +\infty$ , a seqüência  $\{X_{t_n}(p)\}$  possui uma subseqüência convergente, que converge para um ponto  $q$ , por exemplo. O conjunto de todos os pontos de  $S^2$  construídos desta forma é chamado  **$\omega$ -limite de  $p$**  e é denotado  **$\omega(p)$** ; em particular  $\omega(p) \neq \emptyset$ . É fácil verificar que para qualquer ponto  $\tilde{p}$  na órbita de  $p$  vale  $\omega(\tilde{p}) = \omega(p)$ ; esta independência permite criar o termo  **$\omega$ -limite da órbita de  $p$**  que será denotado  **$\omega(\gamma)$** , caso  $\gamma$  seja a órbita de  $p$ .

Sobre propriedades básicas de  $\omega(p)$  tem-se:

**PROPOSIÇÃO 1.2.** *Seja  $X \in \mathfrak{X}^1(S^2)$ . Então,*

- (1)  $\omega(p)$  é fechado;
- (2)  $\omega(p)$  é invariante pelo fluxo de  $X$ ;
- (3)  $\omega(p)$  é conexo.

Um fato importante sobre  $\omega(p)$  é o

TEOREMA 1.3 (Poincaré-Bendixson). *Seja  $X$  um campo de vetores de classe  $C^1$  na esfera  $S^2$  com uma quantidade finita de singularidades. Então, para cada  $p \in S^2$  ocorre um dos seguintes itens:*

- (1)  $\omega(p)$  é uma singularidade;
- (2)  $\omega(p)$  é uma órbita periódica;
- (3)  $\omega(p)$  é composto por órbitas regulares e singularidades, com cada órbita tendendo a uma dessas singularidades quando  $t \rightarrow \pm\infty$ .

As provas destes resultados podem ser encontradas em [6].

É importante ressaltar o seguinte fato topológico em  $S^2$ , fundamental para as provas dos teoremas deste e do próximo capítulo.

TEOREMA 1.4 (Teorema da Curva de Jordan). *Toda curva  $\lambda$  contínua, fechada e simples, na esfera  $S^2$ , divide  $S^2$  em duas partes homeomorfas a discos que têm a curva como interseção e fronteira.*

A prova deste teorema foge do objetivo deste texto, sendo também demasiadamente longa; portanto, o teorema é apresentado sem prova.

Em particular, uma curva contínua com extremidades no interior de cada disco limitado por  $\lambda$ , intersecta a fronteira  $\lambda$ .

Agora será apresentado um resultado que terá uma versão para o Teorema de Bonatti.

LEMA 1.5. *Sejam  $X$  um campo vetorial em  $S^2$  de classe  $C^1$  e  $\gamma$  uma órbita de  $X$ . Se  $\gamma$  não é uma singularidade nem uma órbita periódica, então  $\omega(\gamma) \cap \alpha(\gamma) = \emptyset$  ou  $\omega(\gamma) \cap \alpha(\gamma)$  é uma singularidade de  $X$ .*

**Demonstração.** Se  $\omega(\gamma)$  só possui pontos singulares, pelo Teorema de Poincaré-Bendixson  $\omega(\gamma)$  é uma singularidade, donde segue a tese. Do contrário, tomando um ponto regular  $p \in \omega(\gamma)$  (i.é,  $X(p) \neq 0$ ), é sabido que existe uma seção transversal

orientada  $\Sigma_p$  e uma seqüência  $\gamma(t_n) \in \Sigma_p$  tendendo a  $p$  com  $t_n \rightarrow +\infty$ . Tal seqüência é injetiva pois  $\gamma$  não é periódica e portanto, não tem auto-interseções. Considerando-se a Curva de Jordan  $J$ , dada pela união de  $A = \{\gamma(t); t_1 \leq t \leq t_2\}$  com o intervalo  $B = [\gamma(t_1), \gamma(t_2)]$  de  $\Sigma_p$  (ver figura 1), pelo Teorema da Curva de Jordan esta curva define duas regiões disjuntas (excluindo  $\gamma$ ). O conjunto  $\{\gamma(t); t > t_2\}$  não intersecta a curva  $J$  e o conjunto  $A$ , pois  $\gamma$  é simples; não intersecta  $B$  pois contraria o sentido do campo (ver figura 2). Como  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = p$ , o conjunto  $\{\gamma(t); t > t_2\}$  está contido na região  $R_p$  que contém  $p$  e portanto, contém também  $\omega(\gamma)$ . Analogamente, o conjunto  $\{\gamma(t); t < t_1\}$  não intersecta os conjuntos  $A$  e  $B$  e não está contida na região  $R_p$ . Com isso,  $\alpha(\gamma)$  e  $\omega(\gamma)$  estão contidos em regiões distintas e não intersectam a fronteira  $J$ . Logo possuem interseção vazia.  $\square$

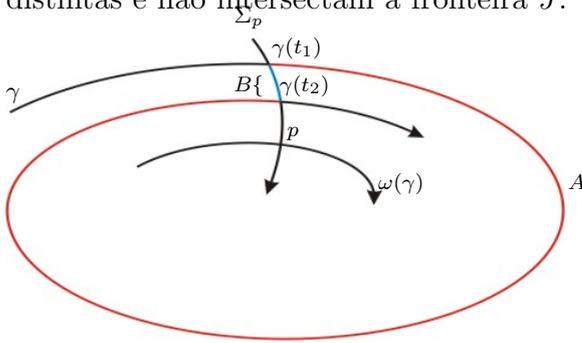


FIGURA 1

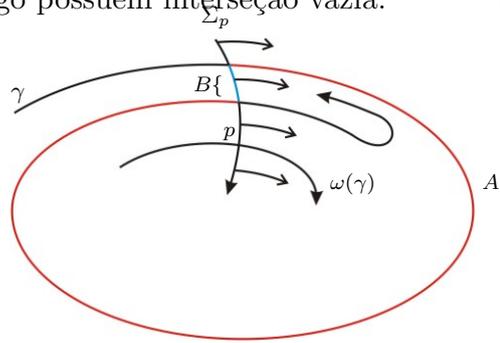


FIGURA 2

Uma bela aplicação do Teorema de Poincaré-Bendixson é o seguinte teorema.

**TEOREMA 1.6.** *Todo campo de vetores de classe  $C^1$  na esfera  $S^2$  possui uma singularidade.*

**Demonstração.** Por contradição, seja  $X$  um campo de vetores de classe  $C^1$  em  $S^2$ , sem singularidades. Fixando  $p \in S^2$ , pelo Teorema de Poincaré-Bendixson, o conjunto  $\omega(p)$  é uma órbita fechada limitando um disco fechado  $D_p$  que é invariante por  $X$ . Seja  $\Sigma$  o conjunto das órbitas fechadas de  $X$  contidas em  $D_p$ , munido da seguinte ordem parcial:

$$\gamma_a \leq \gamma_b \iff D_b \subseteq D_a,$$

onde  $a, b \in S^2$ .  $\Sigma$  é indutivo. De fato,  $\Sigma \neq \emptyset$  pois  $\gamma_p \in \Sigma$  e dado  $S \subseteq \Sigma$  totalmente ordenado, definindo-se

$$D = \bigcap_{\gamma_q \in S} D_q,$$

segue que  $D$  é a interseção de compactos não vazios, encaixados e invariantes por  $X$  e portanto,  $D \neq \emptyset$  (Teorema de Cantor) e invariante por  $X$ . Dado  $q_0 \in D$ , pelo Teorema de Poincaré-Bendixson,  $\omega(q_0)$  é uma órbita fechada contida em  $D$ , ou seja,  $\omega(q_0)$  é uma cota superior de  $S$ .

Pelo Lema de Zorn, existe um elemento maximal  $\gamma_k$  em  $\Sigma$  que limita um disco fechado  $D_k$ . Tomando  $x \in \overset{\circ}{D}_k$ ,  $\alpha(x)$  e  $\omega(x)$  são órbitas fechadas (pelo Teorema de Poincaré-Bendixson) contidas em  $D_k$  (pois este é invariante por  $X$ ). Como  $\gamma_x$  não é uma singularidade (pela hipótese do campo) e não é uma órbita periódica (pois  $\gamma_k$  é maximal e  $\gamma_x \subset \overset{\circ}{D}_k$ ), o Lema 1.5 garante que  $\alpha(x) \cap \omega(x) = \emptyset$ . Com isto,  $\alpha(x)$  ou  $\omega(x)$  está contido em  $\overset{\circ}{D}_k$ , o que contraria a maximalidade de  $\gamma_k$ .  $\square$

**COROLÁRIO 1.7** (da prova do teorema).  *$X$  tem uma singularidade no interior de uma região limitada por uma órbita fechada.*

## 2. COMUTATIVIDADE ENTRE CAMPOS

Dois campos  $X, Y \in \mathfrak{X}^1(S^2)$  **comutam** se  $X_s(Y_t(p)) = Y_t(X_s(p))$ , para quaisquer  $p \in S^2$  e  $t \in \mathbb{R}$ . Diz-se que  $n$  campos comutam se comutam dois a dois.

Uma consequência importante da comutatividade é o conteúdo do

**LEMA 1.8.** *Sejam  $X$  e  $Y$  dois campos de vetores de classe  $C^1$  em  $S^2$  que comutam. Se  $p$  é uma singularidade de  $X$ , então a órbita  $Y_t(p)$  e o conjunto  $\omega(Y_t(p))$  são compostos somente por singularidades de  $X$ .*

**Demonstração.** Dado  $t \in \mathbb{R}$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$  tem-se  $X_s(Y_t(p)) = Y_t(X_s(p)) = Y_t(p)$ ; a primeira igualdade segue da comutatividade dos campos e a segunda do fato

que  $p$  é singularidade de  $X$ . Com isso, para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,  $Y_t(p)$  é uma singularidade de  $X$ .

Pelo parágrafo anterior, todo elemento de  $\omega(Y_t(p))$  é limite de singularidades de  $X$ . Porém, pela continuidade do campo  $X$ , se  $q$  é limite de singularidades  $q_n$  de  $X$ , então  $q$  é uma singularidade de  $X$  pois tem-se

$$X(q) = X(\lim q_n) = \lim X(q_n) = \lim 0 = 0.$$

Isto conclui a prova do lema. □

O principal resultado deste capítulo é o

**TEOREMA 1.9 (E. Lima).** *Se dois campos de vetores de classe  $C^1$  em  $S^2$  comutam, então possuem uma singularidade comum.*

**Demonstração.** A prova seguirá por absurdo. Sendo assim, sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}^1(S^2)$  sem singularidades em comum, ou seja,  $\text{Sing}(X) \cap \text{Sing}(Y) = \emptyset$ . Com isso, sendo  $\text{Sing}(X)$  e  $\text{Sing}(Y)$  compactos, existe  $r > 0$  tal que  $d(x, y) > r$ , quaisquer que sejam  $x \in \text{Sing}(X)$  e  $y \in \text{Sing}(Y)$ . Pelo Teorema 1.6, pode-se tomar  $x_1 \in \text{Sing}(X)$  donde  $x_1 \notin \text{Sing}(Y)$ . Pelo Lema 1.8 e pelo Teorema de Poincaré-Bendixson, o conjunto  $\omega(Y_t(x_1))$  é uma órbita fechada que está contida em  $\text{Sing}(X)$ . O Corolário 1.7 garante a existência de um ponto fixo  $y_2$  de  $Y$  no interior de um disco  $D_1$  limitado por  $\omega(Y_t(x_1))$  conforme o Teorema da Curva de Jordan. Novamente, pelo Lema 1.8 e pelo Teorema de Poincaré-Bendixson, o conjunto  $\omega(X_s(y_2))$  é uma órbita fechada que está contida em  $\text{Sing}(Y)$ . Além disto,  $\omega(X_s(y_2))$  não intersecta  $\omega(Y_t(x_1))$ , mais ainda, a distância  $d(\omega(X_s(y_2)), \omega(Y_t(x_1))) > r$ . Com isso,  $\omega(X_r(y_2))$  limita um disco  $D_2$  inteiramente contido em  $\overset{\circ}{D}_1$  com  $\overset{\circ}{D}_1 - D_2$  contendo um disco de raio  $\frac{r}{3}$ . Prosseguindo dessa forma, constrói-se uma seqüência de discos fechados (compactos) encaixados e não vazios, em  $S^2$ ,

$$D_1 \supset D_2 \supset D_3 \supset \dots$$

tais que  $\overset{\circ}{D}_n \supset D_{n+1}$  e  $\overset{\circ}{D}_n - D_{n+1}$  contendo um disco de raio  $\frac{r}{3}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Um absurdo pois  $D_1$  tem medida (área) finita, não podendo conter uma infinidade de discos disjuntos todos com raio  $\frac{r}{3}$ .  $\square$

O teorema acima pode ser estendido para  $n$  campos. Para isto, precisa-se do

**LEMA 1.10.** *Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n, Y \in \mathfrak{X}^1(S^2)$  campos que comutam. Se  $\gamma$  é uma órbita fechada de  $Y$ , então  $X_1, X_2, \dots, X_n, Y$  têm uma singularidade comum no interior de cada disco limitado por  $\gamma$ .*

**Demonstração.** Por indução em  $n$ . O caso  $n = 1$  segue da prova do Teorema 1.9.

Supondo-se o resultado válido para  $n$  campos, será provado por absurdo que o mesmo vale para  $n + 1$  campos, além do campo  $Y$ . Seja  $\gamma$  uma órbita fechada de  $Y$ .

Supõe-se para um absurdo que  $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}, Y \in \mathfrak{X}^1(S^2)$  são campos que comutam sem singularidade em comum. Com isso,

$$\left[ \bigcap_{i=1}^{n+1} \text{Sing}(X_i) \right] \cap \left[ \left( \bigcap_{i=2}^{n+1} \text{Sing}(X_i) \right) \cap \text{Sing}(Y) \right] = \emptyset.$$

Da igualdade acima e pela compacidade dos conjuntos, existe  $r > 0$  tal que a distância entre os conjuntos satisfaz

$$d \left( \left[ \bigcap_{i=1}^{n+1} \text{Sing}(X_i) \right], \left[ \left( \bigcap_{i=2}^{n+1} \text{Sing}(X_i) \right) \cap \text{Sing}(Y) \right] \right) > r.$$

Por hipótese de indução  $X_2, \dots, X_n, X_{n+1}, Y$  têm uma singularidade  $x_1$  no interior de um disco  $D$  limitado por  $\gamma$ . Pela suposição,  $\omega(x_1)$ , segundo  $X_1$ , não possui singularidade de  $X_1$  donde, pelo Teorema de Poincaré-Bendixson,  $\omega(x_1)$  é uma curva fechada que limita um disco  $D_1 \subset \overset{\circ}{D}$  tal que, pelo Lema 1.8,  $\omega(x_1) = \partial D_1 \subset \left( \bigcap_{i=2}^{n+1} \text{Sing}(X_i) \right) \cap \text{Sing}(Y)$ . Pela hipótese de indução, existe uma singularidade  $x_2 \in \overset{\circ}{D}_2$  comum aos campos  $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$ . Pela suposição,  $\omega(x_2)$ , segundo  $Y$ , não contém singularidade de  $Y$  donde, pelo Teorema de Poincaré-Bendixson,  $\omega(x_2)$  é uma órbita fechada que limita um disco fechado  $D_2 \subset \overset{\circ}{D}_1$  com  $\omega(x_2) = \partial D_2 \subset$

$\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} \text{Sing}(X_i)\right)$ , pelo Lema 1.8. Com isso, a distância  $d(\omega(x_1), \omega(x_2)) > r$  donde  $\overset{\circ}{D}_1 - D_2$  contém uma bola de raio  $\frac{r}{3}$ .

Prosseguindo desta forma, constrói-se (existe) uma seqüência  $\{D_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  de discos fechados (compactos) encaixados e não vazios tais que:  $\overset{\circ}{D}_k \supset D_{k+1}$ , e  $\overset{\circ}{D}_k - D_{k+1}$  contém um disco de raio  $\frac{r}{3}$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Um absurdo pois  $D$  tem medida finita. □

Agora pode-se generalizar o Teorema 1.9.

**TEOREMA 1.11** (E. Lima). *Se  $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathfrak{X}^1(S^2)$  ( $n \geq 2$ ) comutam, então possuem uma singularidade comum.*

**Prova.** Por indução em  $n$ . O caso  $n = 2$  segue diretamente do Teorema 1.9. Supondo o teorema válido para um certo  $n \geq 2$ , sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1} \in \mathfrak{X}^1(S^2)$  que comutam. Por hipótese, seja  $x$  uma singularidade comum aos campos  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Se  $\omega(x)$ , segundo  $X_{n+1}$ , possui uma singularidade, então pelo Lema 1.8 termina a prova; do contrário, pelo Teorema de Poincaré-Bendixson  $\omega(x)$  é uma órbita fechada de  $X_{n+1}$  donde, pelo Lema 1.10,  $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$  possuem uma singularidade comum no interior de um dos discos limitados por  $\omega(x)$ . □

## CAPÍTULO 2

### O TEOREMA DE BONATTI

Pelo Teorema 1.9 (E. Lima), é suficiente que dois campos em  $S^2$  (de classe  $C^1$ ) comutem, para que tenham uma singularidade em comum. Para difeomorfismos em  $S^2$  esta condição não é suficiente, conforme mostra o exemplo 2.1 adiante; porém, com uma hipótese a mais, pode-se garantir a existência de um ponto fixo comum entre difeomorfismos que comutam. Isto é o conteúdo do Teorema de Bonatti que garante a existência do ponto fixo se, além da comutatividade, os difeomorfismos estiverem suficientemente próximos da identidade segundo a topologia- $C^1$ .

O objetivo deste capítulo é fazer com que, após sua leitura, se tenha total compreensão do que foi dito e destacado no parágrafo acima, além dos detalhes que precedem a demonstração do Teorema, que também será apresentada.

#### 1. DIFEOMORFISMOS NA ESFERA $S^2$

Toda função  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  induz, como para campos, uma função  $\hat{f} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dita extensão de  $f$ , da seguinte maneira:

Dado  $x \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ ,

$$(2) \quad \hat{f}(x) = f\left(\frac{x}{\|x\|}\right).$$

De (2), segue imediatamente que  $\hat{f}|_{S^2} = f$ ; daí o nome extensão.

Diferente do que se encontra em alguns livros de análise, de forma mais natural diz-se que a função  **$f$  é contínua** se sua extensão  $\hat{f}$  é contínua em  $S^2 \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ .

Também define-se diferenciabilidade para  $f$  a partir de  $\hat{f}$ .

$f$  é dita **diferenciável em  $p \in S^2$**  se  $\hat{f}$  é diferenciável em  $p$  e ainda  $df(p) = d\hat{f}(p)|_{TS_p^2}$ .

Se  $f$  é diferenciável em qualquer ponto de  $S^2$  diz-se, simplesmente, que  $f$  é diferenciável. Portanto, se  $f$  é diferenciável então  $f$  é contínua; pois o mesmo vale para  $\hat{f}$ .

As idéias apresentadas até aqui para funções de  $S^2$  em  $\mathbb{R}^3$  podem ser, analogamente, estendidas para funções de  $S^2$  em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 3$ .

Um **difeomorfismo**  $f$  em  $S^2$ , é uma aplicação  $f : S^2 \rightarrow S^2$  bijetora, diferenciável e com inversa  $f^{-1}$  diferenciável. O conjunto dos difeomorfismos em  $S^2$  é denotado **Dif**( $S^2$ ).

Um ponto  $p \in S^2$  é dito **ponto fixo** de uma função  $f : S^2 \rightarrow S^2$  se  $f(p) = p$ . O conjunto dos pontos fixos de  $f$  será denotado **Fix**( $f$ ).

## 2. A TOPOLOGIA $C^1$

Se  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é diferenciável, então fica definida uma função  $df : S^2 \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ , chamada **derivada de  $f$** , que associa cada  $p \in S^2$  a  $d\hat{f}(p) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ , onde  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  é o espaço vetorial das transformações lineares de  $\mathbb{R}^3$  em  $\mathbb{R}^3$ , munido da norma  $\|T\| = \sup T(S^2)$ . Tal espaço é isomorfo ao espaço euclidiano  $\mathbb{R}^9$ , donde  $df$  pode ser entendida como uma aplicação de  $S^2$  em  $\mathbb{R}^9$ . Se  $df$  é contínua, diz-se que  $f$  é de **classe  $C^1$**  ou, simplesmente, uma **função- $C^1$** .

Denota-se  $C^1(S^2, \mathbb{R}^3)$  o conjunto das funções- $C^1$  em  $S^2$ .

$C^1(S^2, S^2)$  será o conjunto das funções- $C^1$  da forma  $f : S^2 \rightarrow S^2$ .

O conjunto dos difeomorfismos de  $C^1(S^2, S^2)$  será denotado **Dif**<sup>1</sup>( $S^2$ ) e seus elementos serão chamados **difeomorfismos- $C^1$** . Assim, tem-se:

$$\text{Dif}^1(S^2) = \left( \text{Dif}(S^2) \cap C^1(S^2, S^2) \right) \subset C^1(S^2, \mathbb{R}^3).$$

Dadas  $f, g \in C^1(S^2, \mathbb{R}^3)$ , as aplicações  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  e  $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , também pertencem a  $C^1(S^2, \mathbb{R}^3)$ , isto é,  $C^1(S^2, \mathbb{R}^3)$  é um espaço vetorial real.

Dado  $f \in C^1(S^2, \mathbb{R}^3)$ , fazendo

$$\|df(p)\| = \sup_{v \in S^2} \{\|df(p) \cdot v\|\},$$

é sabido que isto define uma norma no conjunto  $\{df(p); p \in S^2\}$ .

PROPOSIÇÃO 2.1. *Para cada  $f \in C^1(S^2, \mathbb{R}^3)$ , definindo-se*

$$\|f\|_1 = \sup_{p \in S^2} \{\|f(p)\| + \|df(p)\|\},$$

*tem-se uma norma no espaço vetorial  $C^1(S^2, \mathbb{R}^3)$ .*

**Demonstração.** É claro que  $\|f\|_1 \geq 0$  para toda  $f \in C^1(S^2, \mathbb{R}^3)$ . Se  $\|f\|_1 = 0$ , então  $\|f(p)\| = 0$ , para todo  $p \in S^2$ , isto é,  $f \equiv 0$ .

Finalmente, dadas  $f, g \in C^1(S^2, \mathbb{R}^3)$  tem-se

$$\begin{aligned} \|f + g\|_1 &= \sup_{p \in S^2} \{\|f(p) + g(p)\| + \|d(f + g)(p)\|\} \\ &\leq \sup_{p \in S^2} \{\|f(p)\| + \|g(p)\| + \|df(p)\| + \|dg(p)\|\} \\ &\leq \sup_{p \in S^2} \{\|f(p)\| + \|df(p)\|\} + \sup_{p \in S^2} \{\|g(p)\| + \|dg(p)\|\} \\ &= \|f\|_1 + \|g\|_1, \end{aligned}$$

o que conclui a prova. □

Esta norma induz uma métrica em  $C^1(S^2, \mathbb{R}^3)$  dada por

$$(3) \quad d(f, g) = \|f - g\|_1.$$

Em particular,  $C^1(S^2, S^2)$  é um espaço métrico com a métrica induzida, assim como  $\text{Dif}^1(S^2)$ . A partir desta métrica pode-se dizer que, de agora em diante,  $\text{Dif}^1(S^2)$  é um espaço topológico de difeomorfismos de  $S^2$ . A topologia de  $\text{Dif}^1(S^2)$  é chamada **topologia- $C^1$** . Dois difeomorfismos- $C^1$   $f$  e  $g$  são ditos  **$C^1$ -próximos** se

$$\|f - g\|_1$$

é suficientemente pequeno (próximo de zero).

### 3. DIFEOMORFISMOS $C^1$ -PRÓXIMOS DA IDENTIDADE: A BOLA $B\left(\text{Id}, \frac{1}{25}\right)_1$

Dado  $r \geq 0$ , o conjunto

$$B(\text{Id}, r)_1 = \{f \in C^1(S^2, \mathbb{R}^3); \|f - \text{Id}\|_1 < r\}$$

denota a bola aberta com centro na função identidade (em  $S^2$ )  $\text{Id}$  e raio  $r$ , da topologia  $C^1$  em  $C^1(S^2, \mathbb{R}^3)$ . Analogamente,

$$B[\text{Id}, r]_1 = \{f \in C^1(S^2, \mathbb{R}^3); \|f - \text{Id}\|_1 \leq r\}$$

denota a bola fechada.

Dados dois pontos  $x$  e  $y$  em  $S^2$ , o comprimento do arco geodésico com extremos nestes pontos será denotado  $\mathbf{d}(x, y)$ . Tal comprimento, visto como distância entre  $x$  e  $y$ , determina uma métrica  $d$  em  $S^2$  além, é claro, da métrica induzida pela norma usual  $\|\cdot\|$  do  $\mathbb{R}^3$ . Essas métricas se relacionam da seguinte forma:

PROPOSIÇÃO 2.2. *Dados  $x, y \in S^2$ ,*

$$(4) \quad \|x - y\| \leq d(x, y) \leq \frac{\pi}{2} \|x - y\|.$$

**Demonstração.** Se  $x = y$  nada tem-se a demonstrar; do contrário, é suficiente provar que  $1 \leq \frac{d(x, y)}{\|x - y\|} \leq \frac{\pi}{2}$ . Porém, o problema reduz-se à circunferência  $S^1 = \{v \in \mathbb{R}^2; \|v\| = 1\}$ , mais ainda, sem perda de generalidade pode-se supor  $x = (1, 0)$  e  $y = (\cos(\theta), \text{sen}(\theta))$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , donde  $d(x, y) = \theta$  e  $\|x - y\| = \|(\cos(\theta) - 1, \text{sen}(\theta))\| = \sqrt{2 - 2\cos(\theta)}$ .

Seja

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{\theta}{\sqrt{2-2\cos(\theta)}}, & \text{se } 0 < \theta \leq \pi; \\ 1, & \text{se } \theta = 0. \end{cases}$$

donde  $f$  é contínua em  $[0, \pi]$  e de classe  $C^\infty$  em  $(0, \pi)$ . Deseja-se provar que para todo  $0 \leq \theta \leq \pi$  ocorre  $1 \leq f(\theta) \leq \frac{\pi}{2}$ . Isto de fato ocorre pois  $f$  é estritamente crescente. Com efeito, é suficiente provar que no intervalo  $(0, \pi)$  a função

$g = 2f^2 = \frac{\theta^2}{(1-\cos(\theta))}$  é estritamente crescente, donde basta provar que  $g' > 0$  em  $(0, \pi)$ . Como  $g'(\theta) = [2\theta(1 - \cos(\theta)) - \theta^2\text{sen}(\theta)]/(1 - \cos(\theta))^2$ , é suficiente provar que  $[2\theta(1 - \cos(\theta)) - \theta^2\text{sen}(\theta)] > 0$ , ou melhor, que

$$h(\theta) = 2(1 - \cos(\theta)) - \theta\text{sen}(\theta) > 0.$$

Para isto é só observar que  $h(0) = h'(0) = h''(0) = 0$  e  $h''' > 0$  no intervalo  $(0, \pi)$ .  $\square$

Para  $x \in S^2$  e  $r > 0$ , o símbolo  $\mathbf{B}[\mathbf{x}, \mathbf{r}]$  (resp.  $B(x, r)$ ) denotará a bola fechada (resp. aberta) contida em  $S^2$ , centrada em  $x$  e raio  $r$ , segundo a métrica  $d$  em  $S^2$ .

Dados um ponto  $x \in S^2 - \text{Fix}(f)$  e  $f \in \text{Dif}^1(S^2)$ ,  $[\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})]$  denotará um segmento geodésico orientado de  $x$  para  $f(x)$  e com extremidades nestes pontos. Se  $f(x) \neq -x$  então o segmento  $[x, f(x)]$  fica unicamente determinado.

No que segue, será visto algumas propriedades adquiridas por  $f \in \text{Dif}^1(S^2) \cap B(\text{Id}, r)$ , quando  $r$  é suficientemente pequeno, ou seja, quando  $f$  está  $C^1$ -próximo da identidade.

Como primeiro resultado tem-se uma propriedade local dos difeomorfismos. Tal propriedade afirma que, quanto mais próximo da identidade está  $f$ , maior (relativo a  $d(x, f(x))$ ) é o raio de uma vizinhança  $V_x$  em torno de cada  $x \in S^2$ , onde é cada vez menor a distância em  $\mathbb{R}^3$  entre os vetores  $f(y) - y$  e  $f(x) - x$ , para  $y \in V_x$ .

Para simplificar a notação, todo  $\epsilon$  citado adiante é um número real positivo,  $n$  é um número natural com  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ .

**LEMA 2.3.** *Seja  $f \in \text{Dif}^1(S^2)$ . Se  $f \in B(\text{Id}, \frac{\epsilon}{n})_1$ , então, dado  $x \in S^2$ , para todo  $y$  na bola  $B[x, n \cdot d(x, f(x))]$  tem-se:*

$$(5) \quad \|(f(y) - y) - (f(x) - x)\| \leq \frac{\epsilon\pi}{2} \|f(x) - x\|.$$

**Demonstração.** Com efeito,

$$\begin{aligned}
\|(f - \text{Id})(y) - (f - \text{Id})(x)\| &\leq \|f - \text{Id}\|_1 \cdot \|x - y\| \quad (\text{Desig. do V. Médio}) \\
&\leq \|f - \text{Id}\|_1 \cdot d(x, y) \quad (\text{ineq. 4}) \\
&\leq \frac{\epsilon}{n} \cdot n \cdot d(x, f(x)) \quad (\text{hipótese}) \\
&\leq \frac{\epsilon\pi}{2} \|f(x) - x\|. \quad (\text{ineq. 4}),
\end{aligned}$$

e o lema está provado.  $\square$

**COROLÁRIO 2.4.** *Em particular, se  $f(x) \neq x$  e  $\epsilon\pi < 2$ , então  $f(y) \neq y$ , para todo  $y \in B(x, n \cdot d(x, f(x)))$ ; ou seja,  $f$  não tem ponto fixo na bola  $B(x, n \cdot d(x, f(x)))$ .*

**Demonstração1.**(direta) Com efeito,

$$\begin{aligned}
\|f(y) - y\| &\geq \|f(x) - x\| - \|f(y) - [y + (f(x) - x)]\| \quad (\text{desig. triang.}) \\
&\geq \|f(x) - x\| - \frac{\epsilon\pi}{2} \|f(x) - x\| \quad (\text{inequação (5)}) \\
&= \|f(x) - x\| \left(1 - \frac{\epsilon\pi}{2}\right) \\
&> 0. \quad (\text{hipóteses})
\end{aligned}$$

$\square$

**Demonstração2.**(contraposição) Se  $y \in B(x, n \cdot d(x, f(x)))$ ,  $f(y) = y$  e  $f(x) \neq x$  então, por (5), tem-se  $\|f(x) - x\| \leq \frac{\epsilon\pi}{2} \|f(x) - x\|$  donde  $1 \leq \frac{\epsilon\pi}{2}$  que contraria a hipótese  $\epsilon\pi < 2$ .  $\square$

Nas hipóteses do Lema acima observa-se que

$$\begin{aligned}
d(f(y), y + (f(x) - x)) &\leq \frac{\pi}{2} \|f(y) - (y + (f(x) - x))\| \quad (\text{pela ineq. 4}) \\
&= \frac{\pi}{2} \|(f(y) - y) - (f(x) - x)\| \\
&\leq \frac{\epsilon\pi^2}{4} \|f(x) - x\| \quad (\text{pelo Lema acima}).
\end{aligned}$$

Com isso, pode-se afirmar que

$$(6) \quad f(y) \in B\left[y + (f(x) - x), \frac{\epsilon\pi^2}{4} \|f(x) - x\|\right].$$

Dados  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ , o símbolo  $\mathbf{ang}(v_1, v_2)$  denotará o ângulo entre estes vetores donde  $0 \leq \mathbf{ang}(v_1, v_2) \leq \pi$ .

Como pode-se limitar a diferença entre os vetores  $f(y) - y$  e  $f(x) - x$  numa vizinhança de cada  $x \in S^2$ , espera-se o controle da variação angular de direções que aproximam-se de  $[y, f(y)]$  nesta vizinhança; isto é o conteúdo do

**LEMA 2.5.** *Dados um ângulo  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  e  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $\epsilon \in ]0, \frac{2}{\pi}[$  tal que, para quaisquer  $f \in \text{Dif}^1(S^2)$ ,  $x \in S^2 - \text{Fix}(f)$  e  $y \in B(x, n \cdot d(x, f(x)))$ ; se  $f \in B\left(\text{Id}, \frac{\epsilon}{n}\right)_1$ , então, para todo vetor  $v$  positivamente tangente ao arco geodésico  $[y, f(y)]$ , tem-se*

$$\mathbf{ang}(v, f(x) - x) < \frac{\alpha}{2}.$$

**Demonstração.** Investigando critérios para escolha de  $\epsilon$  tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{ang}(v, f(x) - x) &\leq \mathbf{ang}(v, f(y) - y) + \mathbf{ang}(f(y) - y, f(x) - x) \\ &\leq \arcsen\left(\frac{\|f(y) - y\|}{2}\right) + \arcsen\left(\frac{\epsilon\pi}{2}\right) \\ &\leq \arcsen\left(\frac{\|f - \text{Id}\|_1}{2}\right) + \arcsen\left(\frac{\epsilon\pi}{2}\right) \\ &< \arcsen\left(\frac{\epsilon}{2n}\right) + \arcsen\left(\frac{\epsilon\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Portanto, para que ocorra  $\mathbf{ang}(v, f(x) - x) < \frac{\alpha}{2}$ , basta tomar  $\epsilon$  de maneira que

$$\arcsen\left(\frac{\epsilon}{2n}\right) + \arcsen\left(\frac{\epsilon\pi}{2}\right) < \frac{\alpha}{2},$$

ou melhor,

$$\arcsen\left(\frac{\epsilon}{2n}\right) < \frac{\alpha}{4} \text{ e } \arcsen\left(\frac{\epsilon\pi}{2}\right) < \frac{\alpha}{4}.$$

Com isso, é suficiente tomar  $\epsilon \in ]0, \frac{2}{\pi}[$  tal que

$$\frac{\epsilon}{2n} < \text{sen}\left(\frac{\alpha}{4}\right) \text{ e } \frac{\epsilon\pi}{2} < \text{sen}\left(\frac{\alpha}{4}\right),$$

ou seja,

$$\epsilon < 2n \cdot \text{sen}\left(\frac{\alpha}{4}\right) \text{ e } \epsilon < \frac{2}{\pi} \cdot \text{sen}\left(\frac{\alpha}{4}\right).$$

Como  $\frac{2}{\pi} \cdot \text{sen}\left(\frac{\alpha}{4}\right) < 2n \cdot \text{sen}\left(\frac{\alpha}{4}\right)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , pode-se resumir a escolha de  $\epsilon$  em apenas,

$$(7) \quad 0 < \epsilon < \frac{2}{\pi} \cdot \text{sen}\left(\frac{\alpha}{4}\right).$$

Esta possibilidade de escolha conclui a prova.  $\square$

**COROLÁRIO 2.6.** *Nas hipóteses do Lema acima, se  $v_1$  e  $v_2$  são positivamente tangentes aos respectivos arcos  $[y_1, f(y_1)]$  e  $[y_2, f(y_2)]$ , onde  $y_1, y_2 \in B(x, n \cdot d(x, f(x)))$ , então*

$$\text{ang}(v_1, v_2) < \alpha$$

**Demonstração.** É só observar que

$$\begin{aligned} \text{ang}(v_1, v_2) &\leq \text{ang}(v_1, f(x) - x) + \text{ang}(v_2, f(x) - x) \\ &< \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha \quad (\text{Lema 2.5}). \end{aligned}$$

$\square$

Fazendo uso do Lema 2.5, dados  $n = 4$  e  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ , deve-se tomar

$$\epsilon < \frac{2}{\pi} \text{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) \approx 0.1647693215775.$$

Assim, será tomado  $\epsilon = 0.16 = \frac{4}{25}$  donde

$$\|f - \text{Id}\|_1 < \frac{\epsilon}{n} = \frac{4/25}{4} = \frac{1}{25}.$$

A vizinhança  $B(\text{Id}, \frac{1}{25})$  da identidade, será o centro dos estudos seguintes. É nesta vizinhança que os difeomorfismos que comutam possuem ponto fixo comum e onde se encontra uma versão para difeomorfismos, do Teorema de Poincaré-Bedixson.

Dado  $x \in S^2$  e  $f \in \text{Dif}^1(S^2)$ , a órbita de  $x$  denotada  $\mathcal{O}_f(x)$  é o conjunto  $\{f^n(x); n \in \mathbb{Z}\}$  com  $x := f^0(x)$ .

O conjunto  $\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots\}$  é chamado **órbita positiva de  $x$**  e é denotado  $\mathcal{O}_f^+(x)$ .

$\overline{\mathcal{O}_f^+}(x)$  denotará o conjunto dos pontos aderentes da seqüência  $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ .

Se  $f^n(x) = x$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ , então  $x$  é dito **periódico**.

Um ponto  $x \in S^2$  é chamado  **$\omega$ -recorrente** por  $f$  se  $x$  é um ponto aderente da seqüência  $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ .

Um ponto  $p \in S^2$  é **antípoda** de  $f$  se  $f(x) = -x$ .

Se  $f$  não possui antípodas então fica bem definido o segmento geodésico  $[x, f(x)]$ , para todo  $x \in S^2$ . Neste caso, será denotado  $\gamma_f^x$  a curva contínua obtida pela união dos arcos geodésicos  $[x, f(x)]$  e  $[f^n(x), f^{n+1}(x)]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Para que uma função  $f \in \text{Dif}^1(S^2)$  não possua antípodas é suficiente que  $\|f - \text{Id}\|_1 < c < 2$ , em particular,  $f \in \text{Dif}^1(S^2) \cap B(\text{Id}, \frac{1}{25})$  não tem antípodas.

**LEMA 2.7.** *Sejam  $f \in \text{Dif}^1(S^2) \cap B(\text{Id}, \frac{1}{25})_1$  e  $x \in S^2 - \text{Fix}(f)$  um ponto  $\omega$ -recorrente por  $f$ . Então, a curva  $\gamma_f^x$  possui auto-interseção.*

**Demonstração.** Se  $x$  é periódico nada tem-se a demonstrar. Do contrário, a prova seguirá por absurdo, isto é, será admitido que  $\gamma_f^x$  é uma curva simples com  $x$  satisfazendo às hipóteses do Lema.

Seja  $\Sigma$  um segmento geodésico ortogonal ao segmento  $[x, f(x)]$  no ponto  $a$ , e comprimento menor que o comprimento de  $[x, f(x)]$ . Sendo  $x$   $\omega$ -recorrente e  $f$  contínua, a curva  $\gamma_f^x$  intersecta  $\Sigma$  infinitas vezes com segmentos geodésicos da forma  $[f^i(x), f^{i+1}(x)]$  para  $f^i(x)$  suficientemente próximo de  $x$ . Seja  $i_0$  o menor  $i \in \mathbb{N}$  tal que  $[f^i(x), f^{i+1}(x)]$  intersecta  $\Sigma$ , em um ponto  $b$ , por exemplo. Denotando  $\gamma$  a união dos segmentos geodésicos

$$[a, f(x)], [f(x), f^2(x)], [f^2(x), f^3(x)], \dots, [f^{i_0-1}(x), f^{i_0}(x)], [f^{i_0}, b], [b, a];$$

$\gamma$  é uma curva fechada, simples (pela hipótese sobre  $\gamma_f^x$ ) e limita um disco fechado  $D$  (Teorema da Curva de Jordan) (veja a figura 1).

Com isso,

$$\begin{aligned}
 d(x, f^i(x)) &\leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, f^i(x)) \\
 &\leq d(x, f(x)) + d(x, f(x)) + d(f^i(x), f^{i+1}(x)) \\
 (8) \qquad &\leq 3 \sup(d(x, f(x)), d(f^i(x), f^{i+1}(x))).
 \end{aligned}$$

Logo,

$$x \in B(f^i(x), 4d(f^i(x), f^{i+1}(x))) \text{ ou } f^i(x) \in B(x, 4d(x, f(x))),$$

conforme  $d(x, f(x)) \leq d(f^i(x), f^{i+1}(x))$  ou  $d(x, f(x)) \geq d(f^i(x), f^{i+1}(x))$ , respectivamente.

O Corolário 2.6 assegura que o ângulo entre os vetores positivamente tangentes a  $a$  e  $b$ , aos segmentos geodésicos  $[x, f(x)]$  e  $[f^{i_0}(x), f^{i_0+1}(x)]$ , respectivamente, é inferior a  $\frac{\pi}{3}$ ; donde conclui-se que  $[x, f(x)]$  e  $[f^{i_0}(x), f^{i_0+1}(x)]$  apontam para um mesmo hemisfério determinado pelo prolongamento de  $\Sigma$ , diferente do que mostra a figura 1. Disto, conclui-se que a curva  $\gamma$  separa os pontos  $x$  e  $f^{i_0}(x)$ . Sem perda de generalidade pode-se supor que  $f^{i_0} \in D$ , donde  $x \notin D$ .

Sendo  $x$   $\omega$ -recorrente por  $f$ , existe  $j \geq i_0+1$  tal que  $f^j(x) \in D$  e  $f^{j+1} \notin D$ . Pelo Teorema da Curva de Jordan,  $[f^j(x), f^{j+1}]$  intesecta a fronteira  $\gamma$  de  $D$ . Sendo  $\gamma_f^x$  simples, tal interseção se dá entre  $[f^j(x), f^{j+1}]$  e  $]a, b[ \subset \Sigma$ , num ponto  $c$  por exemplo. Tomando  $c$  em vez de  $b$  nas inequações (8), pelo mesmo argumento conclui-se que  $[f^j(x), f^{j+1}]$  e  $[x, f(x)]$  apontam para o mesmo hemisfério determinado por  $\Sigma$ , i. é,  $f^j(x) \notin D$  e  $f^{j+1} \in D$ , o que é uma contradição com a escolha de  $j$ . Com isto,  $\gamma_f^x$  deve ser simples e portanto, segue a tese.  $\square$

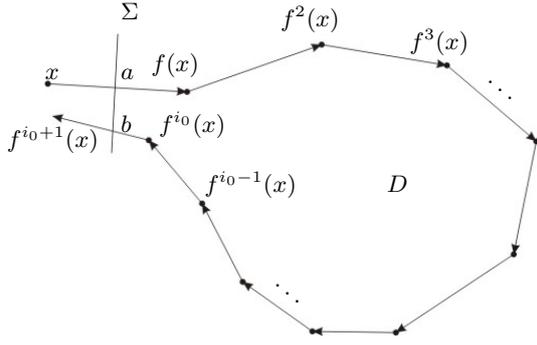


FIGURA 1

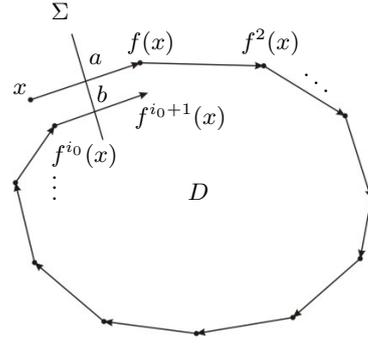


FIGURA 2

LEMA 2.8. *Sejam  $f \in \text{Dif}^1(S^2)$  e  $x_0 \in S^2$ . Então, o compacto minimal invariante por  $f$  contido em  $\overline{\mathcal{O}_f^+(x_0)}$  é composto por pontos  $\omega$ -recorrentes por  $f$ . Em particular,  $\overline{\mathcal{O}_f^+(x_0)}$  contém um ponto  $\omega$ -recorrente por  $f$ .*

**Demonstração.** Seja  $K$  o menor compacto invariante por  $f$ , contido em  $\overline{\mathcal{O}_f^+(x_0)}$ . Da invariância de  $K$ , se  $x \in K$  então  $\mathcal{O}_f^+(x) \subset K$  e portanto  $\overline{\mathcal{O}_f^+(x)} \subset K$  pois  $K$  é fechado. O conjunto  $\overline{\mathcal{O}_f^+(x)}$  é invariante por  $f$ . De fato, se  $a \in \overline{\mathcal{O}_f^+(x)}$ , isto é,  $a = \lim_{i \rightarrow +\infty} f^{n_i}(x)$  ( $n_i \in \mathbb{N}$ ), tem-se  $f(a) = f(\lim_{i \rightarrow +\infty} f^{n_i}(x)) = \lim_{i \rightarrow +\infty} f(f^{n_i}(x)) = \lim_{i \rightarrow +\infty} f^{n_i+1}(x)$  e portanto  $f(a) \in \overline{\mathcal{O}_f^+(x)}$ . Com isso, o conjunto  $\overline{\mathcal{O}_f^+(x)}$  é fechado, invariante por  $f$  e contido em  $K$ . Logo,  $K = \overline{\mathcal{O}_f^+(x)}$  donde  $x \in \overline{\mathcal{O}_f^+(x)}$ .  $\square$

PROPOSIÇÃO 2.9. *Sejam  $f \in \text{Dif}^1(S^2) \cap B(Id, \frac{1}{25})_1$  e  $x \in S^2 - \text{Fix}(f)$  um ponto  $\omega$ -recorrente por  $f$ . Então, existe uma curva  $\lambda_f^x \subset \gamma_f^x$  fechada, simples, sem pontos fixos de  $f$  e que limita dois discos fechados nos quais  $f$  possui ponto fixo em seus interiores.*

**Demonstração.** Seja  $x \in S^2 - \text{Fix}(f)$  um ponto  $\omega$ -recorrente por  $f$ . Do Lema 2.7,  $\gamma_f^x$  possui auto-interseção; com isso, existem  $t_1 < t_2$  tais que  $\gamma_f^x(t_1) = \gamma_f^x(t_2)$  e o arco  $\lambda_f^x = \{\gamma_f^x(t); t_1 \leq t \leq t_2\}$  seja uma curva fechada simples. Do Corolário 2.4 conclui-se que  $\gamma_f^x$  não contém pontos fixos de  $f$  e portanto, em particular,  $\lambda_f^x$  não contém pontos fixos de  $f$ . Além disso, se  $a \in \lambda_f^x$  então existem  $i, j \in \mathbb{N}$  tais que  $a \in [f^i(x), f^{i+1}(x)] \cap [f^j(x), f^{j+1}(x)]$ , donde  $d(f^i(x), f^j(x)) \leq d(f^i(x), a) + d(a, f^j(x)) \leq$

$2 \cdot \sup(d(f^i(x), f^{i+1}), d(f^j(x), f^{j+1}))$  e portanto, pelo Corolário 2.6, o ângulo entre vetores positivamente tangentes aos arcos geodésicos  $[f^i(x), f^{i+1}(x)]$  e  $[f^j(x), f^{j+1}]$ , é inferior a  $\frac{\pi}{3}$ .

Seja  $X$  um campo em  $S^2$  que associa cada  $y \in S^2$  ao vetor  $X_y$  positivamente tangente ao arco geodésico  $[y, f(y)]$  no ponto  $y$ , com  $\|X_y\| = d(y, f(y))$ .

Pela definição de  $X$ ,  $y \in S^2$  é uma singularidade de  $X$  se, e somente se, é um ponto fixo de  $f$ . Assim, como  $\lambda_f^x$  não contém ponto fixo de  $f$ , também não contém singularidade de  $X$ . Também, pelo Corolário 2.4, o ângulo entre  $X_y$  e um vetor positivamente tangente à  $\lambda_f^x$  em  $y$  é não negativo e inferior a  $\frac{\pi}{3}$ . Com isso, sendo  $\lambda_f^x$  simples, pode-se afirmar que o índice da curva  $\lambda_f^x$  em relação ao campo  $X$ , é igual a 1 e portanto  $X$  possui uma singularidade no interior de cada disco limitado por  $\lambda_f^x$  (Teorema de Poincaré).  $\square$

Daqui em diante,  $\lambda_f^x$  denotará a curva fechada simples contida em  $\gamma_f^x$ , obtida de acordo com a construção ocorrida na demonstração da Proposição acima. Para isto é necessário que  $x \notin \text{Fix}(f)$  e  $x$  seja  $\omega$ -recorrente por  $f$ .

**COROLÁRIO 2.10.** *Se  $f \in \text{Dif}^1(S^2) \cap B(\text{Id}, \frac{1}{25})_1$ , então  $f$  possui um ponto fixo.*

**Demonstração.** Dado  $x \in S^2$ , se  $x$  é ponto fixo de  $f$ , então vale a tese. Do contrário, pelo Lema 2.8, existe um ponto  $\bar{x} \in \overline{\mathcal{O}_f^+(x)}$   $\omega$ -recorrente por  $f$ . Se  $\bar{x}$  é ponto fixo de  $f$  segue a tese; se não, pela Proposição 2.9, a curva  $\lambda_f^x$  limita um disco cujo interior contém um ponto fixo de  $f$ . Isto conclui a prova.  $\square$

#### 4. DIFEOMORFISMOS QUE COMUTAM

Dados  $f, g \in \text{Dif}(S^2)$ , diz-se que  $f$  e  $g$  são **difeomorfismos que comutam** se, para todo  $p \in S^2$ , tem-se  $f(g(p)) = g(f(p))$ .

LEMA 2.11. *Sejam  $f, g \in \text{Dif}^1(S^2)$  difeomorfismos que comutam. Se  $x$  é um ponto fixo de  $g$ , então os conjuntos  $\mathcal{O}_f^+(x)$  e  $\overline{\mathcal{O}_f^+(x)}$  são compostos somente por pontos fixos de  $g$ .*

**Demonstração.** Por indução em  $n$  será provado que, dado  $x \in \text{Fix}(g)$ ,  $f^{(n)}(x) \in \text{Fix}(g)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Com efeito, o caso  $n = 1$  segue de  $g(f(x)) = f(g(x)) = f(x)$ . Supondo  $f^{(n)}(x) \in \text{Fix}(g)$  ( $n \geq 1$ ) tem-se

$$\begin{aligned} g(f^{(n+1)}(x)) &= g(f(f^{(n)}(x))) \quad (\text{desagrupando}) \\ &= f(g(f^{(n)}(x))) \quad (f \text{ e } g \text{ comutam}) \\ &= f(f^{(n)}(x)) \quad (\text{hipótese de indução}) \\ &= f^{(n+1)}(x), \quad (\text{reagrupando}) \end{aligned}$$

donde  $f^{(n+1)}(x) \in \text{Fix}(g)$ . Com isso,  $\mathcal{O}_f^+(x) \subset \text{Fix}(g)$ .

Pelo parágrafo anterior, todo elemento  $p$  de  $\overline{\mathcal{O}_f^+(x)}$  é limite de pontos fixos de  $g$ . Porém, pela continuidade  $g$ , se  $p$  é limite de pontos fixos  $p_n$  de  $g$ , então  $p$  é um ponto fixo de  $g$  pois,

$$g(p) = g(\lim p_n) = \lim g(p_n) = \lim p_n = p.$$

Isto conclui a prova do lema. □

## 5. DIFEOMORFISMOS QUE COMUTAM EM $B\left(\text{Id}, \frac{1}{25}\right)_1$ E A PROVA DO TEOREMA

Como dito, existem difeomorfismos que comutam, sem pontos fixos comuns.

No exemplo seguinte temos dois difeomorfismos que comutam, com seus respectivos pontos fixos.

EXEMPLO 2.1. Tomemos a reflexão em relação ao eixo  $x$ ,  $R_{x,\pi} : S^2 \rightarrow S^2$  dada por  $R_{x,\pi}(a, b, c) = (a, -b, -c)$  e a reflexão em relação ao eixo  $z$ ,  $R_{z,\pi} : S^2 \rightarrow S^2$  dada por  $R_{z,\pi}(a, b, c) = (-a, -b, c)$ . Podemos conceber tais funções em termos de

rotações, ficando evidente o fato de que ambas são difeomorfismos em  $S^2$ . Estas funções comutam pois, para todo  $p = (a, b, c) \in S^2$  tem-se

$$(a, b, c) \xrightarrow{R_{x,\pi}} (a, -b, -c) \xrightarrow{R_{z,\pi}} (-a, b, -c)$$

e

$$(a, b, c) \xrightarrow{R_{z,\pi}} (-a, -b, c) \xrightarrow{R_{x,\pi}} (-a, b, -c),$$

isto é,  $R_{z,\pi}(R_{x,\pi}(p)) = R_{x,\pi}(R_{z,\pi}(p))$ .

Os pontos fixos de  $R_{x,\pi}$  são  $(1, 0, 0)$  e  $(-1, 0, 0)$ , distintos dos pontos fixos de  $R_{z,\pi}$  que são  $(0, 0, 1)$  e  $(0, 0, -1)$ .

□

Cabe destacar o fato que  $\|R_{x,\pi} - \text{Id}\| \geq 2$  e  $\|R_{z,\pi} - \text{Id}\| \geq 2$ .

Uma propriedade importante na bola  $B(\text{Id}, \frac{1}{25})_1$  é o

**LEMA 2.12 (Bonatti).** *Se  $f, g \in \text{Dif}^1(S^2) \cap B(\text{Id}, \frac{1}{25})_1$  comutam e  $\text{Fix}(f) \cap \text{Fix}(g) = \emptyset$  então para quaisquer  $x \in \text{Fix}(g)$  e  $y \in \text{Fix}(f)$  tem-se:*

- (1)  $\gamma_f^x$  e  $\gamma_g^y$  são curvas disjuntas, mais ainda,
- (2) existe um número real  $r > 0$  tal que  $d(\gamma_f^x, \gamma_g^y) > r$ .

**Demonstração.** (1): Para um absurdo, supõe-se  $\gamma_f^x \cap \gamma_g^y \neq \emptyset$ . Com isso, existem  $i, j \in \mathbb{N}$  tais que  $[f^i(x), f^{i+1}(x)]$  e  $[g^j(y), g^{j+1}(y)]$  intersectam-se num ponto  $c$ . Logo,

$$\begin{aligned} d(f^i(x), g^j(y)) &\leq d(f^i(x), c) + d(c, g^j(y)) \\ &\leq d(f^i(x), f^{i+1}(x)) + d(g^j(y), g^{j+1}(y)) \\ &\leq 2 \sup(d(f^i(x), f^{i+1}(x)), d(g^j(y), g^{j+1}(y))) \end{aligned}$$

e portanto,

$$f^i(x) \in B(g^j(y), 4d(g^j(y), g^{j+1}(y))) \quad \text{ou} \quad g^j(y) \in B(f^i(x), 4d(f^i(x), f^{i+1}(x))).$$

Se  $f^i(x) \in B(g^j(y), 4d(g^j(y), g^{j+1}(y)))$ , então a bola  $B(g^j(y), 4d(g^j(y), g^{j+1}(y)))$  contém um ponto fixo  $f^i(x)$  de  $g$  (Lema 2.11). Isto contraria o Corolário 2.4 que afirma a não existência de pontos fixos de  $g$  na bola  $B(g^j(y), 4d(g^j(y), g^{j+1}(y)))$ .

Analogamente não pode ocorrer  $g^j(y) \in B(f^i(x), 4d(f^i(x), f^{i+1}(x)))$ . Ambas contradições indicam que a suposição inicial é falsa. Logo,  $\gamma_f^x \cap \gamma_g^y = \emptyset$ , concluindo a prova do item 1.

(2): Da hipótese  $\text{Fix}(f) \cap \text{Fix}(g) = \emptyset$ , o compacto  $f(\text{Fix}(g))$  não intersecta o compacto  $\text{Fix}(f)$  donde, existe um número real  $r_1 > 0$  tal que  $d(f^i(x), f^{i+1}(x)) > r_1$ , para quaisquer  $x \in \text{Fix}(g)$  e  $i \in \mathbb{N}$ . Analogamente, existe  $r_2 > 0$  tal que  $d(g^j(y), g^{j+1}(y)) > r_2$  para todo  $y \in \text{Fix}(f)$  e  $j \in \mathbb{N}$ . Tomando  $r = \min\{r_1, r_2\}$  tem-se

$$d(f^i(x), f^{i+1}(x)) > r \text{ e } d(g^j(y), g^{j+1}(y)) > r$$

para quaisquer  $x \in \text{Fix}(g)$ ,  $y \in \text{Fix}(f)$  e  $i, j \in \mathbb{N}$ . Tal  $r$  é o desejado. De fato, supondo-se para um absurdo que existam  $a \in [f^i(x), f^{i+1}(x)]$  e  $b \in [g^j(y), g^{j+1}(y)]$ , para algum  $i \in \mathbb{N}$  e  $j \in \mathbb{N}$  tal que  $d(a, b) \leq r$ , tem-se

$$\begin{aligned} d(f^i(x), g^j(y)) &\leq d(f^i(x), a) + d(a, b) + d(b, g^j(y)) \\ &\leq d(f^i(x), f^{i+1}(x)) + r + d(g^j(y), g^{j+1}(y)) \\ &\leq 3 \sup(d(f^i(x), f^{i+1}(x)), d(g^j(y), g^{j+1}(y))) \end{aligned}$$

que acarreta absurdos por argumentos já vistos. Isto prova o item 2.  $\square$

Agora há resultados suficientes para provar o principal teorema deste texto.

**TEOREMA 2.13 (Bonatti).** *Se  $f, g \in \text{Dif}^1(S^2) \cap B(Id, \frac{1}{25})_1$  comutam, então possuem um ponto fixo comum.*

**Demonstração.** A prova será feita por absurdo, supondo que  $f, g \in \text{Dif}^1(S^2) \cap B(Id, \frac{1}{25})_1$  não possuem ponto fixo comum.

Pelo Corolário 2.10,  $\text{Fix}(g) \neq \emptyset$ . Tomando um ponto fixo  $x_1$  de  $g$ , por hipótese tem-se  $x_1 \notin \text{Fix}(f)$ . Pelos Lemas 2.8 e 2.11, existe  $\bar{x}_1 \in \overline{\mathcal{O}_f^+(x_1)}$  tal que,  $\bar{x}_1$  é

ponto fixo de  $g$  e  $\omega$ -recorrente por  $f$ . A Proposição 2.9 garante a existência de uma curva fechada simples  $\lambda_f^{\bar{x}_1} \subset \gamma_f^{\bar{x}_1}$  limitando um disco  $D_1$  cujo interior contém um ponto fixo  $y_2$  de  $f$ . Pelo item 2 do Lema 2.12, existe um número real  $r > 0$  tal que  $d(\gamma_g^{y_2}, \gamma_f^{\bar{x}_1}) > r$ . Em particular,  $d(\mathcal{O}_{y_2}(g), \gamma_f^{\bar{x}_1}) > r$  e portanto  $d(\overline{\mathcal{O}_{y_2}(g)}, \gamma_f^{\bar{x}_1}) > r$ . Com isso, passando a um  $\bar{y}_2 \in \overline{\mathcal{O}_{y_2}(g)} \cap \text{Fix}(f)$   $\omega$ -recorrente (Lemas 2.8, 2.11), pela Proposição 2.9, tem-se a existência de uma curva fechada simples  $\lambda_g^{\bar{y}_2}$  limitando um disco  $D_2 \subset \overset{\circ}{D}_1$ , no interior do qual,  $g$  tem um ponto fixo  $x_3$  e tal que  $\overset{\circ}{D}_1 - D_2$  contém uma bola de raio  $k < \frac{r}{2}$  ( $k > 0$ ) pois  $d(D_1, D_2) > r$ . Prosseguindo dessa forma constrói-se uma seqüência  $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de discos encaixados tais que  $D_{n+1} \subset \overset{\circ}{D}_n$  e  $\overset{\circ}{D}_n - D_{n+1}$  contém uma bola de raio  $k < \frac{r}{2}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Um absurdo, pois  $D_1$  tem medida finita e não pode conter uma infinidade de bolas disjuntas e de mesmo raio  $k$  (medida).

□

**COROLÁRIO 2.14** (da demonstração). *Sejam  $f, g \in \text{Dif}^1(S^2) \cap B(\text{Id}, \frac{1}{25})_1$  difeomorfismos que comutam. Se  $x$  é ponto fixo de  $g$  e  $x \notin \text{Fix}(f)$ , então existe  $\bar{x} \in \overline{\mathcal{O}_f(x)}$  tal que  $f$  e  $g$  têm um ponto fixo comum no interior de cada disco limitado pela curva fechada  $\lambda_f^{\bar{x}} \subset \gamma_f^{\bar{x}}$ .*

□

O Teorema 2.13 pode ser estendido para  $n$  difeomorfismos. Para isto tem-se o

**LEMA 2.15.** *Sejam  $f_1, f_2, \dots, f_n, h \in \text{Dif}^1(S^2) \cap B(\text{Id}, \frac{1}{25})_1$  difeomorfismos que comutam. Se  $x$  é ponto fixo comum de  $f_1, \dots, f_n$  e  $x \notin \text{Fix}(h)$ , então existe  $\bar{x} \in \overline{\mathcal{O}_h(x)}$  tal que  $f_1, \dots, f_n, h$  têm um ponto fixo comum no interior de cada disco limitado pela curva fechada  $\lambda_h^{\bar{x}} \subset \gamma_h^{\bar{x}}$ .*

**Demonstração.** Por indução em  $n$ . O caso  $n = 1$  segue do Corolário 2.14 tomando  $f = h$  e  $g = f_1$ .

Supondo-se o resultado válido para  $n$  difeomorfismos, será provado que este também vale para  $n + 1$  difeomorfismos.

De fato, sejam  $f_1, f_2, \dots, f_n, f_{n+1}, h \in \text{Dif}^1(S^2) \cap B\left(\text{Id}, \frac{1}{25}\right)_1$  que comutam e  $x_1 \notin \text{Fix}(h)$  um ponto fixo comum de  $f_1, f_2, \dots, f_n, f_{n+1}$ . Por hipótese de indução, existe um ponto  $\bar{x}_1 \in \overline{\mathcal{O}_h(x_1)}$  tal que  $f_1, \dots, f_n, h$  têm um ponto fixo comum  $x_2$ , no interior de um disco  $D_1$  limitado por uma curva fechada  $\lambda_{\bar{x}_1} \subset \gamma_{\bar{x}_1}$ . Se  $x_2 \in \text{Fix}(f_{n+1})$  então termina a prova, do contrário, pela hipótese de indução, existe um ponto  $\bar{x}_2 \in \overline{\mathcal{O}_{f_{n+1}}(x_2)}$  tal que  $f_2, \dots, f_{n+1}, h$  têm um ponto fixo comum  $x_3$ , no interior de um disco  $D_2 \subset \overset{\circ}{D}_1$  limitado por uma curva fechada  $\lambda_{\bar{x}_2} \subset \gamma_{\bar{x}_2}$ . O item 2 do Lema 2.12 assegura a existência de um número real  $r > 0$  tal que  $\overset{\circ}{D}_1 - D_2$  contém uma bola de raio  $\frac{r}{3}$ . Prosseguindo dessa forma, chega-se a uma solução numa finidade de passos pois, do contrário, contrói-se uma seqüência de bolas fechadas encaixadas  $D_{n+1} \subset \overset{\circ}{D}_n$  tais que  $\overset{\circ}{D}_n - D_{n+1}$  contém uma bola de raio  $\frac{r}{3}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , o que é um absurdo pois  $D_1$  tem medida finita.  $\square$

**TEOREMA 2.16 (Bonatti).** *Se  $f_1, f_2, \dots, f_n \in \text{Dif}^1(S^2) \cap B\left(\text{Id}, \frac{1}{25}\right)_1$  ( $n \geq 2$ ) comutam, então possuem um ponto fixo comum.*

**Demonstração.** Será feita por indução sobre  $n$ . O caso  $n = 2$  é o Teorema 2.13. Supondo o teorema válido para  $n$  difeomorfismos ( $n \geq 2$ ), será provado que o mesmo vale para  $(n + 1)$  difeomorfismos.

Com efeito, sejam  $f_1, \dots, f_n, f_{n+1} \in \text{Dif}^1(S^2) \cap B\left(\text{Id}, \frac{1}{25}\right)_1$  que comutam. Da hipótese de indução, pode-se tomar um ponto fixo  $x_1$  comum a  $f_1, \dots, f_n$ . Se  $x_1$  é ponto fixo de  $f_{n+1}$ , acaba a prova, do contrário, passando a um  $\bar{x}_1 \in \overline{\mathcal{O}_{x_1}(f_{n+1})}$ ,  $\omega$ -recorrente por  $f_{n+1}$  (Lema 2.8) e ainda ponto fixo de  $f_1, \dots, f_n$  (Lema 2.11); pelo Lema 2.15, a curva  $\gamma_{\bar{x}_1}$  contém uma curva fechada e simples  $\lambda_{\bar{x}_1}$  que limita um disco cujo interior, possui um ponto fixo comum a  $f_1, \dots, f_n, f_{n+1}$ . Isto conclui a prova.  $\square$



## CONCLUSÃO

A possibilidade da retirada do Lema de Zorn da prova do Teorema de Lima está ligada somente à prova do Teorema de Poincaré-Bendixson que faz uso deste lema.

Pode-se indagar a existência de uma prova para difeomorfismos  $C^1$ -próximos da identidade, análoga à dos campos, da existência de um ponto fixo no interior de uma curva do tipo  $\lambda_f^x$ , sem o uso de índice de rotação utilizando somente a estrutura das órbitas de  $f \in \text{Dif}^1(f) \cap B(\text{Id}, \epsilon)$ , para  $\epsilon$  suficientemente pequeno.

Dados  $X \in \mathfrak{X}^1(S^2)$  e  $f \in \text{Dif}^1(S^2)$ , com a propriedade  $X_t(f(x)) = f(X_t(x))$ , para todo  $x \in S^2$  e  $t \in \mathbb{R}$ , qual o comportamento do conjunto  $\text{Sing}(X) \cap \text{Fix}(f)$ ? Fixado  $t$ , a aplicação em  $S^2$  dada por  $X_0(x) \mapsto X_t(x)$  é um difeomorfismo que comuta com  $f$ .

Dados dois homeomorfismos  $f$  e  $g$  em  $S^2$  que comutam, pode-se aproximar  $f$  por um difeomorfismo  $f_n$  e  $g$  por um difeomorfismo  $g_m$  tais que  $f_n$  e  $g_m$  comutam?



## Referências Bibliográficas

- [1] C. BONATTI, *Un point fixe commom pour des difféomorphismes commutants de  $S^2$* , Annals of Math. **129** (1989), 61-69.
- [2] M. HANDEL, *Commuting homeomorphisms of  $S^2$* , Topology. **31** (1992), 293-303.
- [3] C.I. DOERING, A.O. LOPES, **Equações Diferenciais Ordinárias**. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. 421p. (Coleção matemática universitária)
- [4] E. LIMA, *Commuting vector field on  $S^2$* , Proc. A.M.S. **15** (1964), 138-141.
- [5] E. LIMA, **Curso de análise, Volume 2**. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. 547p. (Projeto Euclides)
- [6] J. PALIS, W. DE MELO, **Introdução aos sistemas dinâmicos**. Rio de Janeiro: IMPA, 1978. 190p. (Projeto Euclides)
- [7] H. ROSENBERG. Un contre-exemple à la conjecture de Seifert. Séminaire Bourbaki, 25<sup>e</sup> année, 1972/1973, N<sup>o</sup> 434.
- [8] J. SOTOMAYOR. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. Rio de Janeiro: IMPA, 1979. 327p. (Projeto Euclides)

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)