



COPPE/UFRJ

UMA FORMULAÇÃO PARA O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
APLICADA A PROBLEMAS VISCOELÁSTICOS LINEARES,
QUASI-ESTÁTICOS E DINÂMICOS, NO DOMÍNIO DO TEMPO.

Flavio Cezario

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Orientadores: José Antonio Fontes Santiago
Roberto Fernandes de Oliveira

Rio de Janeiro
Junho de 2009

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

UMA FORMULAÇÃO PARA O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
APLICADA A PROBLEMAS VISCOELÁSTICOS LINEARES,
QUASI-ESTÁTICOS E DINÂMICOS, NO DOMÍNIO DO TEMPO.

Flavio Cezario

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

Prof. José Antonio Fontes Santiago, D.Sc.

Prof. Roberto Fernandes de Oliveira, D.Sc.

Prof. José Claudio de Faria Telles, Ph.D.

Prof. Webe João Mansur, Ph.D.

Prof. Delfim Soares Júnior, D.Sc.

Prof. Carlos Friedrich Loeffler Neto, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
JUNHO DE 2009

Cezario, Flavio

Uma Formulação para o Método dos Elementos de Contorno Aplicada a Problemas Viscoelásticos Lineares, Quasi-Estáticos e Dinâmicos, no Domínio do Tempo/ Flavio Cezario. - Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2009.

XV, 118 p.: il.; 29,7cm.

Orientadores: José Antonio Fontes Santiago

Roberto Fernandes de Oliveira

Tese (doutorado) - UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Civil, 2009.

Referências Bibliográficas: p. 89-94.

1. Método dos Elementos de Contorno. 2. Viscoelasticidade Linear. 3. Análise Quasi-Estática e Dinâmica I. Santiago, José Antonio Fontes et al. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil. III. Título.

*A Deus, eterno companheiro
e a Sebastião e Tereza,
meus pais amados.*

Agradecimentos

Agradeço ao Santiago e Roberto, professores e orientadores, pela crença depositada, pela amizade cultivada, pela esperança confirmada.

Agradeço a minha Luciana, futura esposa, pela paciência, por seu apoio, por sua presença, por seu amor.

Agradeço aos meus amigos a compreensão pelas minhas ausências, aos sentimentos fraternos desejados, a confiança depositada.

Agradeço aos colegas do Lamec e demais colegas pelos anos de companheirismo, pela troca de informações, de impressões, de saberes.

Agradeço ao apoio financeiro a mim fornecido pelo CNPq e pela FAPERJ, sem os quais a realização desta seria extremamente difícil.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

UMA FORMULAÇÃO PARA O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
APLICADA A PROBLEMAS VISCOELÁSTICOS LINEARES,
QUASI-ESTÁTICOS E DINÂMICOS, NO DOMÍNIO DO TEMPO.

Flavio Cezario

Junho/2009

Orientadores: José Antonio Fontes Santiago
Roberto Fernandes de Oliveira

Programa: Engenharia Civil

O presente trabalho fornece, com auxílio do Método dos Elementos de Contorno, uma formulação efetiva para análise de problemas viscoelásticos isotérmicos, em estado plano de tensão e estado plano de deformação, quasi-estática e dinâmica, construída a partir de uma reciprocidade viscoelástica. Para tanto, novas soluções fundamentais são definidas e empregadas em todo o trabalho.

O sistema final resultante é discretizado através do Método da Colocação e avaliado por meio da adoção de estratégias numéricas simples e eficientes para a integração numérica das convoluções de Stieltjes, para a resolução da integral de domínio e para o processo de marcha no tempo. Por fim, resultados numéricos encontrados, pelas análises de alguns exemplos, constataam o êxito da formulação desenvolvida.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

A BOUNDARY ELEMENT FORMULATION APPLIED TO LINEAR
VISCOELASTICITY PROBLEMS, QUASI-STATIC AND DYNAMIC, IN THE
TIME DOMAIN.

Flavio Cezario

June/2009

Advisors: José Antonio Fontes Santiago
Roberto Fernandes de Oliveira

Department: Civil Engineering

This work deals with a Boundary Element formulation applied to plane stress and plane strain isothermal viscoelastic problems. The quasi-static and dynamic analyses are built from a viscoelastic reciprocity, using novel fundamental solutions.

The final system is discretized by means of the Colocation Method. Simple and efficient numerical schemes are adopted for the Stieltjes integral, the domain integral and the time step procedure. Finally, numerical results are presented in order to assess the developed formulation.

Sumário

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xv
1 Aspectos Introdutórios	1
1.1 Introdução	1
1.2 Breve Histórico	3
1.3 Revisão Bibliográfica	6
1.4 Considerações Finais	9
2 Viscoelasticidade Linear	10
2.1 Conceitos Preliminares	10
2.2 O Problema Viscoelástico	12
2.3 Equações Constitutivas	14
2.3.1 Forma integral da relação constitutiva	15
2.3.2 Forma diferencial da relação constitutiva	19
3 Método dos Elementos de Contorno: Formulação Quasi-Estática	22
3.1 Equação Integral no Contínuo	22
3.2 Soluções Fundamentais Viscoelásticas	24
3.2.1 Soluções fundamentais segundo Carini e DeDonato	25
3.2.2 Soluções fundamentais segundo Syngellakis	26
3.2.3 Soluções fundamentais segundo Sternberg e Al-Khozaie	29
3.3 Tensões no Domínio	31
3.4 Tensões no Contorno	32
3.5 Procedimentos Numéricos	33
3.5.1 Métodos numéricos para avaliação das convoluções	33
3.5.2 Método incremental para avaliação das convoluções temporais	37

SUMÁRIO

4 Exemplos Numéricos	39
4.1 Tubo de Parede Espessa Submetido à:	42
4.1.1 Pressão interna	42
4.1.2 Deslocamento externo	49
4.2 Viga Bi-apoiada Submetida a Carregamento Uniformemente Distribuído	51
4.3 Viga Engastada Submetida a uma Solicitação Concentrada em seu Extremo Livre	55
4.3.1 Força concentrada	55
4.3.2 Deslocamento concentrado	56
5 Método dos Elementos de Contorno: Formulação Dinâmica	59
5.1 Equação Integral no Contínuo	59
5.2 Procedimentos Numéricos	61
5.2.1 Avaliação da integral de domínio	62
5.2.1.1 Integração singular	63
5.2.1.2 Integração não singular	66
5.2.2 Métodos de integração direta no tempo	69
5.2.2.1 Método das Diferenças Centrais	69
5.2.2.2 Método de Houbolt	70
5.2.2.3 Método da 4ª ordem	71
6 Exemplos Numéricos	72
6.1 Viga Bi-apoiada Submetida a Carregamento Uniformemente Distribuído	72
6.2 Barra Engastada Sujeita a Carga Axial no Bordo Livre	78
6.3 Faixa Retangular Sujeita a uma Carga Cisalhante	83
7 Conclusões e Sugestões	86
Referências Bibliográficas	89
A Equação Integral de Contorno para Deslocamentos Internos	95
B Expressões dos Termos das Soluções Fundamentais	97
B.1 Solução Fundamental para um Modelo Reológico Generalizado	97
B.2 Solução Fundamental para um Modelo Reológico de Boltzmann	99
C Teorema do Estado Viscoelástico de Kelvin	101
D Tensões Viscoelásticas em Pontos Internos	104

SUMÁRIO

E	Tensões Viscoelásticas em Nós do Contorno	106
F	Método de Simpson Modificado Aplicado às Convoluções Temporais	111
G	Soluções Analíticas Viscoelásticas dos Exemplos Quasi-Estáticos	113
G.1	Tubo de Parede Espessa Submetido à Pressão Interna	113
G.1.1	Solução elástica	113
G.1.2	Solução viscoelástica	113
G.1.2.1	Solicitação do tipo 1 (fig. 4.1)	114
G.1.2.2	Solicitação do tipo 3 (fig. 4.3)	114
G.1.2.3	Solicitação do tipo 4 (fig. 4.4)	115
G.2	Viga Bi-apoiada Submetida a Carregamento Uniformemente Distribuído	116
G.2.1	Solução elástica	116
G.2.2	Solução viscoelástica	116
G.3	Viga Engastada Submetida a uma Solicitação Concentrada em seu Ex- tremo Livre	117
G.3.1	Solução elástica	117
G.3.2	Solução viscoelástica	117

Lista de Figuras

1.1	Deformação assumida por Boltzmann em um corpo prismático	5
2.1	Resposta de um material viscoelástico submetido à aplicação de uma tensão axial constante	11
2.2	Ilustração das equações de linearidade	12
2.3	Distribuição temporal da deformação	16
2.4	Modelos reológicos simples	20
2.5	Modelos generalizados de Maxwell e Kelvin-Voigt	20
3.1	Modelo reológico de Boltzmann para um sólido viscoelástico	26
4.1	Variação da solicitação tipo 1	40
4.2	Variação da solicitação tipo 2	40
4.3	Variação da solicitação tipo 3	41
4.4	Variação da solicitação tipo 4	41
4.5	Tubo de parede espessa	42
4.6	Comparação entre os valores obtidos pela análise analítica e a numérica para 22 e 44 elementos, empregando o método de Simpson Modificado .	44
4.7	Influência do número de pontos de Gauss nos deslocamentos obtidos pela configuração de 22 elementos	45
4.8	Influência do número de pontos de Gauss nos deslocamentos obtidos pela configuração de 44 elementos	45
4.9	Comparação dos resultados alcançados pelos métodos de integração numérica (Gauss), analítica e incremental	46
4.10	Deslocamentos viscoelásticos obtidos para a solicitação tipo 2 (fig. 4.2) usando o método incremental	47
4.11	Deslocamentos viscoelásticos obtidos para a solicitação tipo 3 (fig. 4.3) usando o método incremental	47

LISTA DE FIGURAS

4.12	Deslocamentos viscoelásticos obtidos para a solicitação tipo 4 (fig. 4.4) usando o método incremental	48
4.13	Comparação entre os modelos viscoelásticos adotados usando o método incremental	48
4.14	Comparação das histórias das tensões para os modelos reológicos, baseados no sólido de três parâmetros (modelo de Boltzmann)	49
4.15	Relaxação das tensões para o modelo reológico 4	50
4.16	Histórias das tensões para as histórias prescritas de deslocamentos (figs. 4.2, 4.3 e 4.4) para o modelo reológico 1	50
4.17	Viga bi-apoiada submetida a um carregamento uniformemente distribuído	51
4.18	Comparação entre os métodos de integração das convoluções temporais aplicados a discretização de 52 elementos no contorno com a solicitação do tipo 1 (fig. 4.1)	52
4.19	Comparação entre os métodos de integração das convoluções temporais aplicados a discretização de 244 elementos no contorno com a solicitação do tipo 1 (fig. 4.1)	53
4.20	Deslocamentos na direção x , obtidos no ponto interno P , para as duas discretizações e para as cargas dos tipos 1 e 2 (figs. 4.1 e 4.2)	53
4.21	Deslocamentos na direção y , obtidos no ponto interno P , para as duas discretizações e para as cargas dos tipos 1 e 2 (figs. 4.1 e 4.2)	54
4.22	Tensões obtidas para o ponto $P(50, 0)$, com a carga do tipo 1 (fig. 4.1): comparação entre as discretizações empregadas	54
4.23	Tensões obtidas para o ponto $P(50, 0)$, com a carga do tipo 2 (fig. 4.2): discretização de 244 elementos.	55
4.24	Viga engastada submetida a uma força concentrada no bordo livre	55
4.25	Comparação das histórias dos deslocamentos, na direção x , obtidos para três diferentes tempos de relaxação	56
4.26	Comparação das histórias dos deslocamentos, na direção y , obtidos para três diferentes tempos de relaxação	57
4.27	Relaxação das tensões na direção x	57
4.28	Relaxação das tensões na direção y	58
5.1	Célula triangular linear	62
5.2	Célula triangular singular	64
5.3	Célula triangular não singular	66

LISTA DE FIGURAS

6.1	Modelo adotado para as malhas da viga analisada e, similarmente, para os demais exemplos	73
6.2	Deslocamentos dinâmicos obtidos pelo método da Diferença Central para $\Delta t = 0,5s$ e $n = 1000$ intervalos de tempo e a solicitação do tipo 1 (fig. 4.1)	73
6.3	Deslocamentos dinâmicos obtidos pelo método da Diferença Central para $\Delta t = 0,5s$ e $n = 3000$ intervalos de tempo	74
6.4	Verificação da perda de estabilidade no método de Houbolt para $\Delta t \leq 0,1s$	75
6.5	Comparação entre os três métodos de marcha no tempo	75
6.6	Verificação do amortecimento viscoelástico para $\Delta t = 2,5s$	76
6.7	Deslocamentos dinâmicos obtidos para a variação do carregamento tipo 2 (fig. 4.2)	76
6.8	Deslocamentos dinâmicos obtidos para a variação do carregamento tipo 3 (fig. 4.3)	77
6.9	Deslocamentos dinâmicos obtidos pelo método de quarta ordem para os modelos reológicos descritos	77
6.10	Barra sujeita a carregamento axial uniformemente distribuído	78
6.11	Resultados numéricos obtidos para as duas discretizações com o uso da Diferença Central	78
6.12	Comparação dos deslocamentos obtidos pelos três métodos diretos	79
6.13	Evolução do amortecimento dos resultados dinâmicos ao longo do tempo, para $\Delta t = 0,5s$	80
6.14	Deslocamentos viscoelásticos para $\Delta t = 2,5s$, obtidos pelo método de Houbolt	80
6.15	Deslocamentos dinâmicos obtidos para a variação do carregamento tipo 2 (fig. 4.2)	81
6.16	Deslocamentos dinâmicos obtidos para a variação do carregamento tipo 3 (fig. 4.3)	81
6.17	Resultados para p_x obtidos pelo método da Diferença Central, para a solicitação do tipo 1 (fig. 4.1)	82
6.18	Comparação dos resultados obtidos para p_x pelos métodos da Diferença Central e de Houbolt, para a solicitação do tipo 1 (fig. 4.1)	82
6.19	Faixa retangular viscoelástica sujeita a carregamento cisalhante	83
6.20	Comparativo entre os quatro modelos reológicos analisados pelo método da Diferença Central	84
6.21	Comparativo entre os três métodos de integração direta adotados	84

LISTA DE FIGURAS

6.22	Efeito do amortecimento viscoelástico nos resultados obtidos pelo método de Houbolt para 0,5s e 1,5s	85
E.1	Sistema de referência local ao elemento considerado	106

Lista de Tabelas

2.1	Propriedades da integral de Stieltjes	17
4.1	Modelo 1	39
4.2	Modelo 2	40

Capítulo 1

Aspectos Introdutórios

1.1 Introdução

Na análise de corpos deformáveis, a importância do conhecimento das propriedades mecânicas dos materiais empregados está no estabelecimento das equações de constituição, que governam, com as equações de movimento, cinemática e relações de compatibilidade, seus comportamentos na natureza. Desta forma, a correta avaliação dos parâmetros pertinentes, em testes experimentais, e a modelagem matemática adequada das propriedades representadas, possibilitam a obtenção de uma relação entre as tensões e deformações, atuantes e resultantes, nestes corpos.

Para casos correntes em engenharia, a teoria da elasticidade, pela lei de Hooke, fornece à análise mecânica uma equação independente do tempo, com parâmetros materiais simplesmente determinados. Os resultados, obtidos por esta, são satisfatórios apenas em um campo muito limitado de aplicação. A lei de Hooke, todavia, não é capaz de interpretar precisamente fenômenos presentes em uma variedade de materiais, prestando-se apenas a uma avaliação introdutória. Neste contexto, a viscoelasticidade se apresenta como uma teoria mais completa, capaz de representar fenômenos além daqueles modelados pela elasticidade, introduzindo ao assunto do estudo dos corpos deformáveis uma relação no tempo entre a história dos campos de tensões e deformações presentes no corpo, característica esta que confere a estes materiais o título de materiais com memória.

É indiscutível o fato de que as modernas abordagens, respaldadas em teorias mais complexas, descritoras de comportamentos não lineares, necessitam, muitas vezes, das ferramentas computacionais para a realização das análises numéricas dos problemas tratados. Inúmeros trabalhos dedicados a aplicação de métodos numéricos lembram,

CAPÍTULO 1. ASPECTOS INTRODUTÓRIOS

habitualmente, esta realidade, o que torna interessante e de grande valia os estudos teóricos aliados aos métodos numéricos que surgem no contexto da mecânica dos sólidos. Entre todos, o Método dos Elementos Finitos é o que mais suscita estudos e pesquisas numéricas e, obviamente, o que mais trabalhos executados possui. Todavia, a infinidade de possibilidades latentes nos demais métodos numéricos exige a constante atenção dos estudiosos e os esforços necessários ao seus desenvolvimentos.

Neste contexto, o presente trabalho tenciona fornecer, ao estudo do Método dos Elementos de Contorno, uma formulação efetiva para análise de problemas viscoelásticos isotérmicos, em estado plano de tensão e estado plano de deformação, quasi-estáticos e dinâmicos. As equações integrais resultantes deste processo relacionam, adequadamente, as funções espaciais e temporais representantes do comportamento viscoelástico a ser modelado, evidenciando, através da integral de Stieltjes, a dependência das histórias envolvidas. Para encontrar os deslocamentos e forças de superfícies procuradas, necessária é a construção de soluções fundamentais viscoelásticas, associadas aos modelos reológicos adotados, que sejam de fácil manuseio e as mais gerais possível. A esta questão, o Princípio da Correspondência já se notabiliza pela possibilidade de se obter as soluções procuradas a partir de soluções elásticas conhecidas. Bastante eficiente, este princípio gera expressões corretas, porém trabalhosas, sempre que se associa a modelos suficientemente complexos. Aqui, são apresentadas expressões novas, obtidas por meio alternativo, porém mais rigoroso, escritas em uma forma mais elegante e mais manipulável, sem perder a generalidade requerida. As análises desenvolvidas seguem à frente com estas soluções e são discretizadas no contorno e domínio do problema empregando o Método da Colocação e técnicas numéricas simples e satisfatórias para a procura das respostas desejadas.

Descrito assim o objeto deste, o desenvolvimento segue a seguinte organização: o *Capítulo 1* ainda aborda uma breve história da viscoelasticidade, baseando-se no artigo de MARKOVITZ [1]. Desta forma, fala-se sobre o início da teoria, citando as contribuições mais relevantes até a época da publicação da formulação de Boltzmann, considerada, de fato, a primeira formulação viscoelástica. Uma revisão bibliográfica é realizada a fim de fornecer o panorama das pesquisas em Viscoelasticidade e Elementos de Contorno. O *Capítulo 2* apresenta as equações constitutivas, começando pela forma integral. A idéia física e analítica da obtenção desta é mostrada, assim como a conceituação do termo material com memória presente na definição das funções integrantes. Não se deixa de lado a forma diferencial, embora não empregada neste trabalho. O *Capítulo 3* cuida da formulação integral para problemas quasi-estáticos, descrevendo o processo de obtenção, muito similar ao da formulação da elastostática. Comentários sobre as

CAPÍTULO 1. ASPECTOS INTRODUTÓRIOS

soluções fundamentais, encontradas na literatura, são realizados, deixando para último a apresentação das soluções empregadas neste trabalho. Os procedimentos numéricos utilizados na discretização das equações integrais fecham este capítulo. O *Capítulo 4* é inteiramente dedicado a discussão dos resultados obtidos na análise quasi-estática. No *Capítulo 5* é desenvolvida a formulação dinâmica, nos moldes da desenvolvida no *Capítulo 3*. Os procedimentos numéricos enfatizam a integração de domínio e os processos de marcha no tempo, que são testados e os resultados obtidos discutidos no *Capítulo 6*. Finalmente, o *Capítulo 7* conclui o trabalho realizado e apresenta algumas sugestões para trabalhos futuros.

1.2 Breve Histórico

A origem da teoria da viscoelasticidade remonta ao início do século XIX e deve seu desenvolvimento aos esforços isolados de vários estudiosos. A primeira contribuição relevante do comportamento mecânico destes materiais foi dada por Wilhelm Weber, em 1835. Estudando os fios de seda, usados em instrumentos elétricos e magnéticos por sua baixa rigidez a torção, Weber observou que este material, quando cru, não era perfeitamente elástico, pois, quando solicitado axialmente, não só apresentava deformação elástica instantânea, mas também uma deformação adicional que aumentava gradualmente com o tempo; a remoção da carga provocava uma contração imediata de valor igual ao da extensão instantânea, seguida por uma diminuição gradual de seu comprimento, recuperando, o material, sua geometria original. Ele concluiu, então, que este comportamento não podia ser definido somente pelas leis da elasticidade, e que o mesmo dependia da duração da força aplicada. Assim sendo, nomeou-o de *Elastische Nachwirkung*, ou conforme MARKOVITZ [1], *Elastic Aftereffect*. Weber também conseguiu deduzir a existência do fenômeno recíproco da relaxação de tensões, e que o mesmo era responsável pelo amortecimento de vibrações e pela determinação dos materiais que produziam sons quando excitados.

Contribuições posteriores foram fornecidas por R. Kohlrausch e seu filho Friederich, através de testes feitos no laboratório de Weber, notando que outros materiais, como o vidro e a prata, também exibiam este comportamento. Foram também capazes de observar a sensibilidade à temperatura e de mostrar, em 1863, a linearidade do comportamento.

Enquanto investigações eram feitas na Alemanha, entre os anos de 1835 e 1876, nas ilhas Britânicas, Sir William Thomson (Lord Kelvin), em seu laboratório na universidade de Glasgow, concluía, por volta de 1865, a existência de uma fricção molecular em

CAPÍTULO 1. ASPECTOS INTRODUTÓRIOS

sólidos elásticos que funcionava como resistência interna à mudança de forma, o qual chamou de viscosidade do sólido. Estas pesquisas foram motivadas por seu interesse em termodinâmica e permitiram uma importante distinção entre viscosidade de sólidos e fluidos. Entretanto, foi James Clerk Maxwell quem propôs, sem muita explicação, uma descrição para o fenômeno da viscosidade, independente de hipóteses, em termos de uma equação diferencial de primeira ordem,

$$\frac{dF}{dt} = E \frac{dS}{dt} - \frac{F}{T},$$

em seu trabalho "On the Dynamical Theory of Gases", publicado em 1867. Nesta equação, os termos são definidos como: F , a tensão; S , a deformação correspondente; E , o módulo elástico; e T , a temperatura. Maxwell também fez alguns comentários sobre sua aplicabilidade em viscoelasticidade, porém, observou que um decaimento exponencial simples de tensões não explicava a ampla escala de tempo encontrada nos experimentos realizados.

Uma descrição matemática mais efetiva do comportamento viscoelástico foi fornecida por Oskar E. Meyer de Breslau, em 1874, a fim de explicar os experimentos da família Kohlrausch. Ele propôs uma expressão para a tensão como a soma de dois termos, sendo o primeiro, a usual dependência linear da deformação e , e o segundo, uma contribuição viscosa proporcional à taxa temporal da deformação. Assim, para a tensão cisalhante, ele escreveu que

$$-X_y = -Y_x = \mu \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) + \eta \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right),$$

onde μ e η são constantes materiais e as expressões dentro dos parênteses, as deformações cisalhantes. Esta expressão é atualmente associada aos nomes de Kelvin e Voigt, por terem sido os primeiros a publicá-la anos mais tarde.

As diversas colaborações fornecidas à teoria, até então, eram apenas qualitativas e não conseguiam representar completamente o fenômeno, assim chamado de *aftereffect*, que os materiais experimentados demonstravam, permanecendo, ainda, na penumbra da ignorância. Foi então que em 1874 surgiu o trabalho de LUDWIG EDWARD BOLTZMANN [2], considerado a mais importante contribuição à teoria. A fim de generalizar o problema estudado e fornecer uma expressão que fosse capaz de representar o fenômeno, não só qualitativamente, mas também quantitativamente, ele partiu da teoria da elasticidade, considerando uma barra isotrópica, elástica, deformada homogeneamente, tal que o aumento de comprimento ao longo dos eixos X , Y e Z fossem

CAPÍTULO 1. ASPECTOS INTRODUTÓRIOS

α , β e γ , respectivamente, conforme figura 1.1. Para cada força de superfície normal à

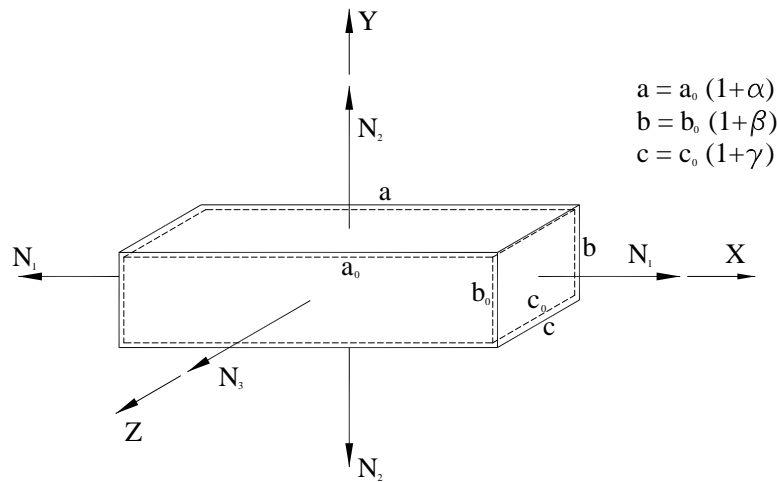


Figura 1.1: Deformação assumida por Boltzmann em um corpo prismático

barra, a teoria da elasticidade fornecia à Boltzmann uma fórmula linear em termos das constantes de Lamé λ e μ , como por exemplo para

$$N_1 = \lambda(\alpha + \beta + \gamma) + 2\mu\alpha.$$

A esta acrescentou duas novas parcelas que representavam o fenômeno dependente do tempo. Para isto, ele partiu da premissa que as forças de superfícies em um determinado tempo não só dependiam das deformações correntes, mas também de todas as deformações em instantes passados, de tal forma que o efeito da deformação se tornasse menor quanto mais distante fosse o instante daquela. Ainda, aliada a esta premissa, ele acrescentou a hipótese do *Prinzip der Superposition*, válida desde que a deformação fosse suficientemente pequena. Assim, a expressão viscoelástica para a tensão normal $N_1(t)$ obtida foi:

$$N_1(t) = \lambda\theta(t) + 2\mu\alpha(t) - \int_0^\infty \phi(\omega)\theta(t-\omega)d\omega - 2\int_0^\infty \psi(\omega)\alpha(t-\omega)d\omega,$$

para

$$\theta(t) = \alpha(t) + \beta(t) + \gamma(t),$$

onde as funções temporais ϕ e ψ representam propriedades dos materiais e a função θ a dilatação do corpo. Na atual nomenclatura, a função ψ é definida como $\frac{dG(t)}{dt}$, onde

CAPÍTULO 1. ASPECTOS INTRODUTÓRIOS

G é a função ou módulo de relaxação de tensões cisalhantes, e a constante μ é o valor limitante de G em $t = 0$. Continuando com sua análise, ele apresentou uma relação entre tensões e deformações para qualquer forma do corpo e todo tipo de deformação, descrita, por exemplo, em termos de tensões cisalhantes, como:

$$T_1 = \mu \left[\frac{dv(t)}{dz} + \frac{dw(t)}{dy} \right] - \int_0^\infty \psi(\omega) \left[\frac{dv(t-\omega)}{dz} + \frac{dw(t-\omega)}{dy} \right] d\omega,$$

onde os termos no interior dos colchetes representam a deformação cisalhante, com v e w deslocamentos nas direções y e z respectivamente. Em seu trabalho Boltzmann ainda indicou que a função ψ poderia ser encontrada por experimentos de torção, sugerindo seis formas diferentes de executar este experimento.

Após o trabalho de BOLTZMANN [2], VOLTERRA [3], em 1909, estendeu a teoria proposta ao campo da anisotropia. Outros trabalhos também surgiram sobre o assunto, mas parece ter sido o de Boltzmann o último trabalho de relevância a ser publicado na época, permanecendo a teoria da viscoelasticidade adormecida durante algumas décadas.

1.3 Revisão Bibliográfica

O avanço tecnológico dos materiais poliméricos e o seu emprego crescente, a partir de 1940, trouxeram de novo a atenção dos cientistas à teoria da viscoelasticidade. As contribuições que surgiram a partir de então focaram, basicamente, o estudo da equação constitutiva e das propriedades reológicas dos materiais, o estudo do comportamento linear e não linear, e a análise das soluções dos problemas de valores de contorno e inicial. Neste contexto, pretende-se apresentar nesta seção uma revisão bibliográfica dos trabalhos de maior relevância sobre viscoelasticidade encontrados e utilizados pelo autor na confecção desta tese.

Os trabalhos de ALFREY [4] e [5], bastante citados na literatura referente, propõem, respectivamente, o uso de modelos reológicos finitos na representação do comportamento observado em laboratório, permitindo a ligação entre os parâmetros físicos presentes na equação constitutiva e nos modelos mecânicos, e uma solução para o problema diferencial de valor de contorno e inicial empregando resultados conhecidos de uma solução elástica do problema viscoelástico correspondente. Para este, o método proposto discute a possibilidade da separação de variáveis, assumindo que a função dependente da variável espacial seja conhecida pela análise elástica prévia, restando conhecer a função transiente. Assim, ele define e introduz o *Princípio da Correspondência*

CAPÍTULO 1. ASPECTOS INTRODUTÓRIOS

Elástica-Viscoelástica. Um procedimento distinto empregado na obtenção da solução do problema de valor de contorno e inicial é encontrado no trabalho de LEE [6], que discute o uso das transformadas de Laplace na análise das soluções, fazendo corresponder no domínio transformado, por meio do Princípio da Correspondência, o problema viscoelástico e o seu análogo elástico. Ainda, LEE faz uso do domínio de Laplace a fim de relacionar as formas integral e diferencial, representantes da mesma equação constitutiva. Nesta mesma vertente, mas dedicado ao comportamento dinâmico e as relações representativas dos fenômenos de relaxação e deformação lenta, encontra-se o trabalho de ALFREY e GURNEE [52]. Neste, os autores realizam um comparativo entre o comportamento mecânico e elétrico, definindo funções complexas representativas em termos da frequência. O comportamento molecular também é discutido, além de vibrações e ondas em materiais viscoelásticos. De certa forma, a contribuição destes trabalhos é resumidamente apresentada pelo livro de FLÜGGE [7], com uma abordagem bastante didática e introdutória sobre a teoria linear unidimensional, tridimensional, quasi-estática e dinâmica, focando a análise da equação constitutiva pelo uso da transformada de Laplace.

Em uma outra vertente, GURTIN e STERNBERG [8], fornecem à teoria viscoelástica linear uma visão matemática rigorosa para a obtenção e compreensão do funcionamento da equação constitutiva. As definições e teoremas encontrados neste trabalho analisam precisamente desde a construção das formas integrais e diferenciais da equação constitutiva até a existência das soluções do problema de valor de contorno e inicial, levantando como hipóteses condições de continuidade e suavidade das funções envolvidas. Seguindo esta linha mais formal na abordagem do tema, mais trabalhos, de interesse, podem ser citados, como o livro de CHRISTENSEN [9] que apresenta uma discussão geral sobre a teoria da viscoelasticidade linear e não linear, sob condições isotérmicas e não isotérmicas, para problemas quasi-estáticos ou dinâmicos, além de fornecer fontes bibliográficas riquíssimas sobre o tema; o trabalho de COLEMAN e NOLL [10], que consideram a teoria não linear no contínuo como ponto de partida para a teoria linear; as contribuições de GREEN e RIVLIN [11], [13], e GREEN et al [12] sobre uma formulação constitutiva para o problema viscoelástico não linear; e por fim, o livro de FINDLEY et al. [14] que aborda, também, as formulações não lineares da viscoelasticidade. O intento, em citar as contribuições para problemas não lineares, tem apenas o objetivo de fornecer uma visão geral sobre o universo amplo e rico existente, embora este trabalho restrinja-se aos limites da linearidade.

O uso dos métodos numéricos e de ferramentas computacionais na análise dos problemas viscoelásticos pode ser encontrado em uma série de trabalhos recentes sobre

CAPÍTULO 1. ASPECTOS INTRODUTÓRIOS

aplicações da teoria. Basicamente, discutem sobre as formulações dos métodos mais usuais, os procedimentos de marcha no tempo, as soluções numéricas para as integrais de convolução e os processos de inversão das respostas no domínio de Laplace para o domínio do tempo. Sobre o método dos Elementos de Contorno, podem ser citados alguns trabalhos relevantes: no trabalho de RIZZO e SHIPPY [15], a formulação integral viscoelástica é montada a partir da transformada de Laplace do sistema de equações do problema elástico, empregando o Princípio da Correspondência. As integrais são avaliadas como se fossem elásticas, obtendo os deslocamentos e tensões, em nós do contorno e domínio, dependentes da variável de Laplace. Para a solução final no domínio do tempo, é utilizado um procedimento de transformação inversa numérica da solução no domínio de Laplace, proposto por SCHAPERLY [16]. Outros procedimentos para inversão numérica da transformada de Laplace podem ser encontrados nos trabalhos de DURBIN [17] e COST [18]. NEVES [41] desenvolve uma formulação de contorno no domínio transformado, mas, diferentemente de RIZZO e SHIPPY [15], emprega na inversão numérica o método apresentado por DURBIN [17]. SYNGELLAKIS [19] e SINGELLAKIS e WU [22] explanam sobre a formulação viscoelástica linear de contorno, quasi-estática ou dinâmica, no domínio do tempo, usando o princípio da reciprocidade, cuja validade é provada por GURTIN e STERNBERG [8]. Para esta formulação de SYNGELLAKIS [19], uma solução fundamental viscoelástica no domínio do tempo é empregada. Uma discussão interessante sobre a obtenção destas soluções para 3D, estado plano de deformação e estado plano de tensão, empregando o Princípio da Correspondência e as soluções fundamentais de problemas elásticos correspondentes, pode ser encontrada no trabalho de CARINI e DeDONATO [20], que fornecem, ainda, um algoritmo para obtenção das soluções em diversas combinações, em série ou em paralelo, de elementos viscoelásticos de Kelvin e Maxwell. Diante das dificuldades encontradas na obtenção de soluções fundamentais viscoelásticas no tempo, para uso no método dos Elementos de Contorno, e do custo das inversões numéricas, SCHANZ e alguns colaboradores contribuem com uma série de trabalhos [21], [31], [32], [33], [34], [35] e [36] em que o emprego de uma quadratura proposta por LUBICH [23] e [24], para convoluções de Riemann, permite tratar toda a formulação no tempo com, apenas, as soluções fundamentais definidas no domínio transformado de Laplace, que servem ao processo numérico como peso da integração avaliada. Discussões e análises dinâmicas viscoelásticas são realizadas por PÉREZ-GRAVILÁM e ALIABADI [53] para o domínio da frequência e pelos trabalhos de SCHANZ e colaboradores já citados, para o domínio do tempo. Particularmente, estes últimos avaliam o problema dinâmico viscoelástico empregando a formulação da elastodinâmica e suas respectivas soluções

CAPÍTULO 1. ASPECTOS INTRODUTÓRIOS

fundamentais, fato este que suscitou dúvidas e o interesse por uma formulação escrita inteiramente dentro da teoria viscoelástica, sem o uso do Princípio da Correspondência.

Existem muitos outros trabalhos que poderiam ter sido citados no escopo desta seção, porém, a seleção deu-se a fim de permitir o vislumbre das pesquisas básicas no tema. As seções seguintes se responsabilizarão pela introdução mais detalhada das equações constitutivas e do problema de análise de tensões em corpos viscoelásticos, citando, quando necessárias, outras publicações importantes.

1.4 Considerações Finais

Para encerrar este capítulo introdutório, algumas considerações finais são necessárias para a correta leitura deste trabalho. Assim sendo, notar-se-á ao longo de todo o texto o emprego de duas notações: a tensorial e a indicial. Os tensores de primeira e segunda ordem serão representados por letras minúsculas e maiúsculas, em negrito, respectivamente, e suas conceituações, assim como as relações estabelecidas entre estes, seguirão os preceitos impostos pela Mecânica dos Meios Contínuos [28]. Excessão será encontrada na representação das soluções fundamentais que seguirão a terminologia adotada por BREBBIA et al [27]. A notação indicial será empregada para a designação das componentes dos tensores, que surgirão em letras minúsculas ou maiúsculas, sempre regulares, conforme a literatura empregada como referência.

Toda a análise aqui realizada não ultrapassará os limites da linearidade assumida. Desta forma, assumir-se-á o vetor \mathbf{x} como a posição de todo ponto localizado em um espaço Euclidiano. A posição \mathbf{x} e o tempo t serão as variáveis independentes dos tensores e vetores representativos do comportamento viscoelástico. A fixação da posição \mathbf{x} ou do tempo t , em uma função $f(\mathbf{x}; t)$, poderá ser representada por $f(\mathbf{x}; \cdot)$ ou $f(\cdot; t)$, respectivamente. Para as derivadas serem avaliadas, as seguintes terminologias serão empregadas:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = f_{i,j} \text{ e } \frac{\partial f_i}{\partial t} = \dot{f}_i.$$

Por fim, a menos que qualquer menção seja feita, a sobreposição de uma barra nas funções denotará a sua transformada de Laplace.

Capítulo 2

Viscoelasticidade Linear

2.1 Conceitos Preliminares

Uma definição apropriada dos materiais viscoelásticos pode ser formulada em função da análise de suas propriedades reológicas. CHRISTENSEN [9] observa que estes materiais têm propriedades elásticas e viscosas, principalmente por serem capazes de tanto armazenar quanto dissipar energia mecânica. FINDLEY et al [14] observam, alternativamente, por meio da resposta de um elemento unidimensional, quando sujeito à aplicação rápida de uma força, que seu comportamento instantâneo é elástico, seguido de um aumento lento e contínuo da deformação, com decréscimo de sua taxa temporal. Mais detalhadamente, conforme descrito por LEE [25], um material viscoelástico, sob um estado de tensões e deformações nulas em $t < 0$, quando solicitado subitamente por uma tensão axial constante σ_0 , em $t = 0$, que se mantém desta forma até um tempo t' , apresenta resposta elástica instantânea, seguida de resposta elástica retardada (*delayed elasticity*), acompanhada de fluxo viscoso contínuo, como ilustrados na figura 2.1, respectivamente, pelos trechos OA , AB e BC . A retirada da tensão no tempo t' mostra que a resposta elástica é recuperada imediatamente (trecho CD), seguida da recuperação gradual da resposta elástica retardada (trecho DE), permanecendo, por fim, uma deformação referente ao fluxo viscoso (trecho EF). A curva da figura 2.1, assim fornecida por LEE [25], ilustra o fenômeno da deformação lenta (*creep*) de um determinado material viscoelástico, sujeito à ação de uma tensão constante aplicada; este fenômeno, juntamente com o de relaxação de tensões (*stress relaxation*), quando da aplicação súbita de uma deformação ε_0 , no instante $t = 0$, demonstram e definem o comportamento viscoelástico.

Para concluir, uma fundamentação adequada da linearidade do comportamento do

CAPÍTULO 2. VISCOELASTICIDADE LINEAR

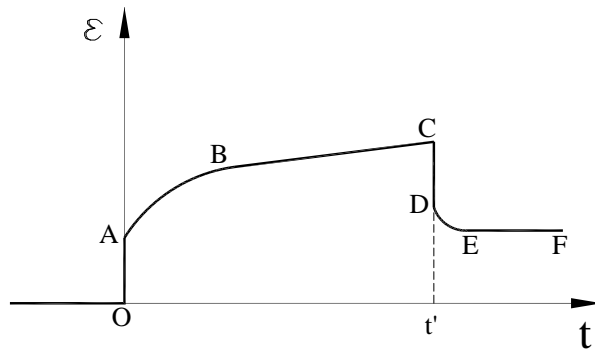


Figura 2.1: Resposta de um material viscoelástico submetido à aplicação de uma tensão axial constante

material [14] é fornecida pela proporcionalidade existente entre as tensões e as deformações, em um determinado tempo, e a validade do *Princípio da Superposição Linear*, também conhecido como *Princípio da Superposição de Boltzmann*. Com efeito, estes conceitos podem ser representados, analiticamente, pelas seguintes igualdades:

$$\varepsilon [c \sigma (x; t)] = c \varepsilon [\sigma (x; t)] \quad (2.1)$$

e

$$\varepsilon [\sigma_1 (x; t) + \sigma_2 (x; t - t_1)] = \varepsilon [\sigma_1 (x; t)] + \varepsilon [\sigma_2 (x; t - t_1)], \quad (2.2)$$

onde ε , σ e c representam a deformação específica e a tensão axiais, e uma constante qualquer, respectivamente; ou ainda, ilustradas graficamente como na figura 2.2. Esta representação aditada à conceituação do material apresenta o comportamento aqui estudado, modelado e esperado.

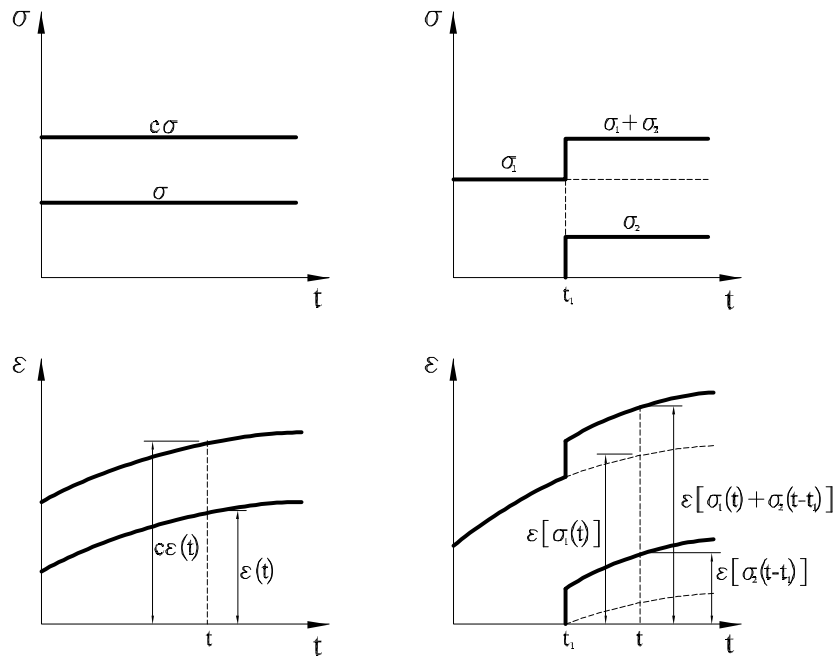


Figura 2.2: Ilustração das equações de linearidade

2.2 O Problema Viscoelástico

Na seção anterior foram comentadas algumas generalidades sobre a viscoelasticidade linear, definindo e caracterizando-a pelo comportamento de materiais portadores de propriedades elásticas e viscosas, e pela fundamentação de sua linearidade. Agora será apresentado o problema viscoelástico a ser analisado.

Em um problema viscoelástico linear com valores iniciais e de contorno conhecidos, o sistema de equações regente, que define as variáveis envolvidas, não difere muito do sistema definidor do problema elástico associado, conforme ressalta CHRISTENSEN [9]. De fato, as relações cinemática, de compatibilidade e de movimento são as mesmas para os dois problemas, diferindo apenas na lei constitutiva e na dependência do tempo de cada variável. Sendo assim, apresentam-se, à seguir, as relações governantes para o problema à analisar, omitindo, por ora, a relação constitutiva viscoelástica:

- Relação deformação - deslocamento

$$2\mathbf{E}(\mathbf{x}; t) = \nabla\mathbf{u}(\mathbf{x}; t) + \nabla\mathbf{u}^T(\mathbf{x}; t), \quad (2.3)$$

sendo \mathbf{E} o tensor de Green-Lagrange, \mathbf{u} o vetor dos deslocamentos e o operador

CAPÍTULO 2. VISCOELASTICIDADE LINEAR

linear

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}; \quad (2.4)$$

- Equação de movimento

$$\nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}; t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}; t) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}; t)}{\partial t^2}, \quad (2.5)$$

para \mathbf{T} o tensor de tensões de Cauchy, \mathbf{b} o vetor das forças de volume e ρ a densidade;

- Condições de compatibilidade

$$\nabla^T \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}; t); \quad (2.6)$$

- Princípio da tensão de Euler e Cauchy

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}; t) = \mathbf{T}(\mathbf{x}; t) \mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad (2.7)$$

sendo \mathbf{n} um vetor normal unitário, externo ao contorno Γ ;

- Condições de contorno

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}; t) = \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}; t) \text{ em } \Gamma_1 \quad (2.8)$$

e

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}; t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}; t) \text{ em } \Gamma_2, \quad (2.9)$$

onde $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ e $\bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}; t)$ e $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}; t)$ são valores prescritos da força de superfície e deslocamento, respectivamente;

- Condições iniciais

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}; t) = \varepsilon(\mathbf{x}; t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}; t) = \mathbf{0}, \text{ para todo } t < 0, \quad (2.10)$$

tais como definidas por CHRISTENSEN [9].

Observa-se, oportunamente, que a similaridade existente entre os problemas elásticos e viscoelásticos permite a formatação de uma correlação entre os mesmos, o que

CAPÍTULO 2. VISCOELASTICIDADE LINEAR

institui o *Princípio da Correspondência Elástica-Viscoelástica*. Este princípio é de grande valia em uma análise viscoelástica, uma vez que auxilia a determinação das variáveis através do conhecimento da solução elástica do problema associado. Em síntese, este princípio permite a adoção de resultados conhecidos da análise elástica, para as funções atemporais, produto do processo de separação de variáveis aplicado, restando a determinação da variável temporal para a solução do problema [5]. Outrossim, empregando a transformada de Laplace, é possível a associação dos parâmetros elásticos com as transformadas de Laplace dos parâmetros viscoelásticos à determinar; na inversão da transformada, os parâmetros viscoelásticos são, então, obtidos como função do tempo.

Na seção seguinte será apresentada detalhadamente a equação constitutiva viscoelástica.

2.3 Equações Constitutivas

Para um material viscoelástico linear, homogêneo e isotrópico, sob condições isotérmicas, a lei constitutiva apresenta-se, basicamente, sob duas formas correlacionadas: uma integral e outra diferencial. Em ambos os casos fica evidenciada não só a dependência do tempo, mas também a relação entre as histórias dos campos de tensões e deformações atuantes, explicitando quer seja matematicamente, ou fisicamente, o comportamento viscoelástico.

A associação entre as histórias dos acontecimentos mecânicos em um corpo viscoelástico segue o princípio denominado de *fading memory*. Neste, determinadas restrições as quais a relação tensão-deformação é submetida, permitem a adequação do comportamento à hipótese do efeito de memória do material. Em suma, o efeito medido em um dado instante deve ter maior influência que os efeitos medidos em acontecimentos passados. CHRISTENSEN [9] examina resumidamente o efeito da memória em materiais viscoelásticos, citando algumas referências de estudos sobre o assunto.

Antes de definir as formas da equação constitutiva, cabe ressaltar que, no uso da teoria da viscoelasticidade, é comum a decomposição das tensões e deformações em suas partes desviatórias e volumétricas, sendo que, consoante afirmação de LEE [25], a influência das propriedades viscoelásticas é mais marcante nas respostas desviatórias. À seguir, apresentam-se as decomposições dos tensores de tensão e deformação nas

CAPÍTULO 2. VISCOELASTICIDADE LINEAR

respectivas partes:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}' + \frac{tr \mathbf{T}}{3} \mathbf{I} \quad (2.11)$$

e

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \frac{tr \mathbf{E}}{3} \mathbf{I}, \quad (2.12)$$

sendo \mathbf{I} o tensor identidade.

2.3.1 Forma integral da relação constitutiva

A relação constitutiva viscoelástica, entre as formas nas quais pode ser escrita, tem na representação integral a sua forma mais geral, não restrita a qualquer modelo reológico predefinido, mas sempre relacionada a algum, através da função que representa a característica mecânica do material. Esta forma é definida por uma integral de convolução de Duhamel, ou ainda, de Stieltjes, onde fica aparente a dependência da história dos campos de tensão e deformação atuantes, característica esta que confere a essa forma o nome de *integral hereditária*.

Para a construção desta integral, FLÜGGE [7] afirma que a hipótese de linearidade e as propriedades mecânicas dos materiais viscoelásticos levam a uma relação proporcional entre a tensão $\sigma(x; t)$ e a deformação $\varepsilon(x; t)$, aplicadas em $t = 0$. Definindo, então, uma deformação axial, a partir da função de Heaviside $h(t)$, na forma de

$$\varepsilon(x; t) = \varepsilon(x; 0) h(t), \quad (2.13)$$

a tensão axial resultante será representada por

$$\sigma(x; t) = \varepsilon(x; 0) G(t), \quad (2.14)$$

onde a função G é a tensão por unidade de deformação aplicada no instante $t = 0$, conhecida como função de relaxação de tensão. A equação (2.14) descreverá o comportamento viscoelástico caso a deformação permaneça a mesma durante todo o tempo t . Entretanto, se em um dado instante $t = \tau$, for aplicado um incremento de deformação

$$\Delta\varepsilon(x; t) = \Delta\varepsilon(x; \tau) h(t - \tau), \quad (2.15)$$

a validade da condição de proporcionalidade e o princípio da superposição conduzirão

CAPÍTULO 2. VISCOELASTICIDADE LINEAR

a uma tensão resultante

$$\sigma(x; t) = \varepsilon(x; 0) G(t) + \Delta\varepsilon(x; \tau) G(t - \tau). \quad (2.16)$$

A sucessiva aplicação de incrementos de deformações em tempos posteriores a τ acarretará em uma equação para a tensão, em função da deformação inicial, mais uma série de incrementos de deformações. Sob esta idéia, a aplicação de uma deformação $\varepsilon(x; t)$, qualquer, representada pela figura 2.3, fornecerá a equação de relaxação de tensões em

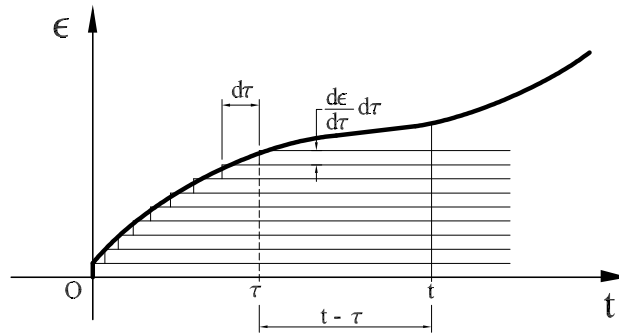


Figura 2.3: Distribuição temporal da deformação

termos da integral de Duhamel

$$\sigma(x; t) = \varepsilon(x; 0) G(t) + \int_0^t G(t - \tau) \frac{d\varepsilon(x; \tau)}{d\tau} d\tau. \quad (2.17)$$

Segundo CHRISTENSEN [9], uma construção analítica da integral de convolução pode, também, ser obtida através do uso de um funcional linear $\overset{\infty}{\underset{\tau=0}{\psi}}(\cdot)$, de valor tensorial, que põe em correspondência com o campo de tensões resultantes em um tempo t , as deformações atuantes no tempo corrente e em tempos anteriores τ , com $\tau < t$. A expressão

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}; t) = \overset{\infty}{\underset{\tau=0}{\psi}}[\mathbf{E}(\mathbf{x}; t - \tau), \mathbf{E}(\mathbf{x}; t)] \quad (2.18)$$

formaliza esta relação, para a qual o funcional linear é fornecido pelo *Teorema de Representação de Riesz*, que toma como condição necessária a continuidade de $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$, para todo $t \in [0, \infty)$. A expressão final resultante é dada na forma da convolução de Stieltjes, na qual a tensão

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}; t) = \int_0^t \mathbf{E}(\mathbf{x}; t - \tau) d\mathbf{G}(\tau) = \mathbf{E}(\mathbf{x}; t) * d\mathbf{G}(t). \quad (2.19)$$

CAPÍTULO 2. VISCOELASTICIDADE LINEAR

Em (2.19), a função de relaxação

$$G_{ijkl}(t) = \frac{1}{3} [G_2 - G_1](t) \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2} G_1(t) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (2.20)$$

constitui um tensor de quarta ordem isotrópico definido em $(-\infty, \infty)$, de variação limitada em todo subintervalo fechado, tal que $\mathbf{G}(t) = \mathbf{0}$, para todo $t < 0$. As funções G_1 e G_2 representam, respectivamente, as partes desviatória e volumétrica da função \mathbf{G} .

A conexão entre as expressões (2.17) e (2.19) pode ser encontrada pela integração da função delta de Dirac envolvida na derivação da função \mathbf{G} em $t = 0$, ou conforme GURTIN e STERNBERG [8], pela relação entre as integrais de convolução de Riemann e Stieltjes. Esta última forma é um meio rigoroso de conexão entre as duas integrais e constitui uma propriedade da integral de Stieltjes. Outras propriedades podem ser vistas na tabela 2.1, considerando as funções representativas φ, ψ, ω de classe de Heaviside [8], definidas em $(-\infty, \infty)$, ou seja, φ, ψ, ω são identicamente nulas em $(-\infty, 0)$, φ é contínua em $[0, \infty)$ e ψ, ω são continuamente diferenciáveis em $[0, \infty)$.

Tabela 2.1: Propriedades da integral de Stieltjes

a) $\varphi * d\psi = \psi * d\varphi$;
b) $\varphi * d(\psi * d\omega) = (\varphi * d\psi) * d\omega = \varphi * d\psi * d\omega$;
c) $\varphi * d(\psi + \omega) = \varphi * d\psi + \varphi * d\omega$;
d) $\varphi * d\psi \equiv 0 \Rightarrow \varphi \equiv 0$ ou $\psi \equiv 0$;
e) $\varphi * dh \equiv \varphi$, onde h é a função de Heaviside;
f) $\varphi * d\psi = \dot{\psi} \varphi + \varphi * \dot{\psi}$, onde $\dot{\psi} = \psi(0)$, $\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt}$;

De forma análoga, é possível encontrar uma relação constitutiva que represente o comportamento da deformação lenta (*creep*) na forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}; t) = \int_0^t \mathbf{T}(\mathbf{x}; t - \tau) d\mathbf{J}(\tau) = \mathbf{T}(\mathbf{x}; t) * d\mathbf{J}(t), \quad (2.21)$$

onde a função \mathbf{J} é a função de deformação lenta (*creep*), definida da mesma forma que a função \mathbf{G} . FLÜGGE [7] também a define como a deformação por unidade de tensão aplicada. Ainda, segundo GURTIN e STERNBERG [8], é possível definir

$$\mathbf{J}(t) = \mathbf{G}^{-1}(t), \quad (2.22)$$

o que valida as seguintes relações:

$$\mathbf{J}(t) * d\mathbf{G}(t) = h(t) \quad (2.23)$$

CAPÍTULO 2. VISCOELASTICIDADE LINEAR

e

$$\bar{\mathbf{G}}(s) \bar{\mathbf{J}}(s) = \frac{1}{s^2}, \quad (2.24)$$

desde que \mathbf{G} e \mathbf{J} sejam $O[\exp(s_0 t)]$ quando $t \rightarrow \infty$, com $s_0 > 0$. As funções $\bar{\mathbf{G}}$ e $\bar{\mathbf{J}}$ representam as transformadas de Laplace de \mathbf{G} e \mathbf{J} , sendo s a variável transformada.

As equações (2.19) e (2.21) representam a forma integral da equação constitutiva de um problema viscoelástico em que tanto tensões e deformações podem ser encontradas para um instante t . As tensões e deformações, desviatórias e volumétricas, das decomposições representadas pelas equações (2.11) e (2.12), são dadas por

$$\sigma'_{ij}(\mathbf{x}; t) = \int_0^t G_1(t - \tau) d\varepsilon'_{ij}(\mathbf{x}; \tau), \quad (2.25)$$

$$\sigma_{kk}(\mathbf{x}; t) = \int_0^t G_2(t - \tau) d\varepsilon_{kk}(\mathbf{x}; \tau), \quad (2.26)$$

$$\varepsilon'_{ij}(\mathbf{x}; t) = \int_0^t J_1(t - \tau) d\sigma'_{ij}(\mathbf{x}; \tau), \quad (2.27)$$

$$\varepsilon_{kk}(\mathbf{x}; t) = \int_0^t J_2(t - \tau) d\sigma_{kk}(\mathbf{x}; \tau), \quad (2.28)$$

onde as funções J_1 e J_2 representam as partes desviatórias e volumétricas da função de deformação lenta; σ'_{ij} e ε'_{ij} são as componentes dos tensores de tensão e deformação desviadores; σ_{kk} e ε_{kk} os traços dos tensores de tensão e deformação, respectivamente.

Para finalizar os comentários sobre a forma integral, cabe aqui citar algumas relações entre as funções que representam o comportamento viscoelástico dos materiais (*funções materiais*). De acordo com CHRISTENSEN [9], têm-se:

$$\mu(t) = \frac{G_1(t)}{2}, \quad (2.29)$$

$$k(t) = \frac{G_2(t)}{3} \quad (2.30)$$

e

$$\lambda(t) = \frac{1}{3}[G_2(t) - G_1(t)] = k(t) - \frac{2}{3}\mu(t), \quad (2.31)$$

CAPÍTULO 2. VISCOELASTICIDADE LINEAR

no domínio do tempo, e

$$\bar{E}(s) = \frac{3\bar{G}_1(s)\bar{G}_2(s)}{\bar{G}_1(s) + 2\bar{G}_2(s)} = \frac{9\bar{\mu}(s)\bar{k}(s)}{\bar{\mu}(s) + 3\bar{k}(s)} \quad (2.32)$$

e

$$\bar{\nu}(s) = \frac{\bar{G}_2(s) - \bar{G}_1(s)}{s[\bar{G}_1(s) + 2\bar{G}_2(s)]} = \frac{3\bar{k}(s) - 2\bar{\mu}(s)}{2s[\bar{\mu}(s) + 3\bar{k}(s)]}, \quad (2.33)$$

no domínio de Laplace. Para estas expressões define-se: $\mu(t)$, $\lambda(t)$ e $k(t)$ funções viscoelásticas análogas às constantes de Lamé e ao módulo elástico volumétrico; $\bar{E}(s)$ e $\bar{\nu}(s)$ as transformadas de Laplace da função de relaxação de um estado de extensão uniaxial e o coeficiente de Poisson viscoelástico, respectivamente.

2.3.2 Forma diferencial da relação constitutiva

A representação da equação constitutiva viscoelástica linear pode ser feita através de uma forma alternativa àquela descrita na seção anterior. De fato, é possível modelar o fenômeno viscoelástico por uma relação diferencial entre os campos de tensão e deformação atuantes, expressada pela equação geral

$$P \mathbf{T}(\mathbf{x}; t) = Q \mathbf{E}(\mathbf{x}; t), \quad (2.34)$$

onde P e Q são operadores diferenciais lineares, com respeito ao tempo, definidos por

$$P = \sum_{i=0}^N p_i \frac{\partial^i(\cdot)}{\partial t^i} \quad e \quad Q = \sum_{i=0}^N q_i \frac{\partial^i(\cdot)}{\partial t^i}, \quad (2.35)$$

e p_i e q_i são parâmetros reológicos do material, independentes de $\mathbf{T}(\mathbf{x}; t)$ e $\mathbf{E}(\mathbf{x}; t)$.

Diferente da forma integral, a forma diferencial necessita de analogias com modelos mecânicos, os quais permitem uma interpretação física do fenômeno modelado e a obtenção dos coeficientes da equação diferencial por meio de uma relação destes com os parâmetros dos modelos estabelecidos [4]. Estes modelos, tais como ilustrados na figura 2.4, são construídos por associação em série ou em paralelo de elementos que representam o comportamento elástico (mola) e o comportamento viscoso (amortecedor), presentes no material viscoelástico. Novas associações, em série ou em paralelo, entre os modelos assim construídos, formam modelos ainda mais complexos, capazes de melhor modelar o comportamento real de um dado material, fornecendo respostas cada

CAPÍTULO 2. VISCOELASTICIDADE LINEAR

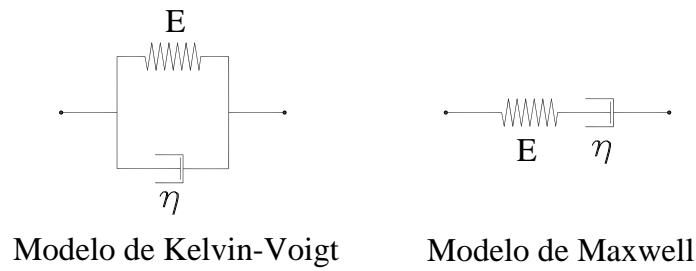


Figura 2.4: Modelos reológicos simples

vez mais precisas. Exemplos plausíveis são aqueles ilustrados na figura 2.5, denominados de modelos generalizados de Maxwell e Kelvin-Voigt, formados pelas associações em paralelo e em série de n modelos simples de Maxwell e Kelvin-Voigt, respectivamente. A resposta fornecida por este modelo melhor se adequa a de um material real viscoelástico quanto maior é o valor que se toma para n , isto é, para uma situação em que $n \rightarrow \infty$. É claro que quanto maior o valor de n mais difícil se torna a computação dos coeficientes da equação (2.34). Este fato reforça a idéia de que a equação hereditária é mais geral do que a forma diferencial, além de mais conveniente em uma análise real.

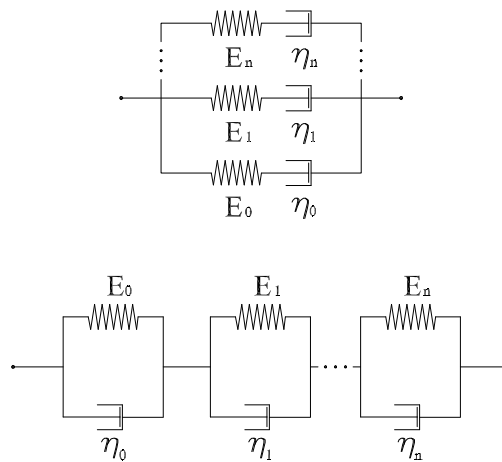


Figura 2.5: Modelos generalizados de Maxwell e Kelvin-Voigt

Qualquer que seja a escolha da forma empregada é sempre possível associar os parâmetros reológicos p 's e q 's com as funções $\mathbf{G}(t)$ e $\mathbf{J}(t)$ de relaxação e deformação

CAPÍTULO 2. VISCOELASTICIDADE LINEAR

lenta, respectivamente. Para isso toma-se a transformada de Laplace da equação (2.34):

$$\begin{aligned} \bar{P}(s) \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{x}; s) - \frac{1}{s} \sum_{k=1}^N p_k \sum_{r=1}^k s^r \mathbf{T}^{(k-r)}(\mathbf{x}; 0) = \\ \bar{Q}(s) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{x}; s) - \frac{1}{s} \sum_{k=1}^N q_k \sum_{r=1}^k s^r \mathbf{E}^{(k-r)}(\mathbf{x}; 0), \end{aligned} \quad (2.36)$$

para $\bar{P}(s)$ e $\bar{Q}(s)$ definidos como

$$\bar{P}(s) = \sum_{i=0}^N p_i s^i \quad e \quad \bar{Q}(s) = \sum_{i=0}^N q_i s^i, \quad (2.37)$$

s a variável de Laplace e $\mathbf{T}^{(k-r)}(\mathbf{x}, 0)$ e $\mathbf{E}^{(k-r)}(\mathbf{x}, 0)$ designam a $(k-r)$ -ésima derivada de $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$, em relação ao tempo, avaliadas em $t = 0$. A transformada de Laplace de (2.19) é

$$\bar{\mathbf{T}} = s \bar{\mathbf{G}}(s) \bar{\mathbf{E}}. \quad (2.38)$$

Então, desde que

$$\sum_{k=1}^N p_k \sum_{r=1}^k s^r \mathbf{T}^{(k-r)}(\mathbf{x}; 0) = \sum_{k=1}^N q_k \sum_{r=1}^k s^r \mathbf{E}^{(k-r)}(\mathbf{x}; 0) \quad (2.39)$$

seja satisfeita, obtém-se a seguinte relação

$$s \bar{\mathbf{G}}(s) = \frac{\bar{Q}(s)}{\bar{P}(s)}. \quad (2.40)$$

Ainda, como feito para a integral hereditária, é possível separar as tensões e deformações em suas partes desviatórias e volumétricas e tratá-las separadamente.

Capítulo 3

Método dos Elementos de Contorno: Formulação Quasi-Estática

3.1 Equação Integral no Contínuo

De acordo com GURTIN e STERNBERG [8], definindo-se dois sistemas viscoelásticos $(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \mathbf{b})$ e $(\mathbf{u}^*, \mathbf{p}^*, \mathbf{b}^*)$, bidimensionais, homogêneos, isotrópicos e isotérmicos, cujos elementos

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\cdot; t), \mathbf{p}(\cdot; t), \mathbf{b}(\cdot; t) \in H^0(-\infty, \infty) \text{ e} \\ \mathbf{u}^*(\cdot; t), \mathbf{p}^*(\cdot; t), \mathbf{b}^*(\cdot; t) \in H^1(-\infty, \infty), \end{cases}$$

tais que satisfaçam as equações governantes, é possível relacioná-los através da expressão

$$\int_{\Omega} \mathbf{T}(\mathbf{x}; t) * d\mathbf{E}^*(\mathbf{x}; t) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{T}^*(\mathbf{x}; t) * d\mathbf{E}(\mathbf{x}; t) d\Omega, \quad (3.1)$$

que define o *Teorema da Reciprocidade Viscoelástica*, na forma da convolução de Stieltjes, em todo o domínio do problema. Consequentemente, como descrito no apêndice A, substituindo as expressões (2.3) e (2.5), da relação deformação-deslocamento e da equação de equilíbrio estático (termo inercial nulo), respectivamente, e procedendo com as manipulações algébricas [27] necessárias, fazendo uso da relação (2.7) e da

CAPÍTULO 3. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO: FORMULAÇÃO QUASI-ESTÁTICA

propriedade distributiva da convolução de Stieltjes [8], chega-se a

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} p_j(\mathbf{x}; t) * du_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) d\Gamma + \int_{\Omega} b_j(\mathbf{x}; t) * du_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) d\Omega = \\ \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) * du_j(\mathbf{x}; t) d\Gamma + \int_{\Omega} b_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) * du_j(\mathbf{x}; t) d\Omega, \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde $\boldsymbol{\xi}$ e \mathbf{x} são denominados de ponto fonte e campo, respectivamente e Γ o contorno do domínio Ω . A aplicação, em um ponto $\boldsymbol{\xi}$ do domínio infinito $\Omega \subset \Omega^*$, de uma força de volume [22] definida por

$$\mathbf{b}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) = \Delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) h(t) \mathbf{e} \quad (3.3a)$$

ou em notação indicial

$$b_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) = \Delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) h(t) \delta_{ij}, \quad (3.3b)$$

transforma a última integral do lado direito (Eq.3.2) em

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) h(t) \delta_{ij} * du_j(\mathbf{x}; t) d\Omega &= \int_{\Omega} \delta_{ij} \Delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) [h(t) * du_j(\mathbf{x}; t)] d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \delta_{ij} \Delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) u_j(\mathbf{x}; t) d\Omega \\ &= u_i(\boldsymbol{\xi}; t), \end{aligned} \quad (3.4)$$

sendo $\Delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$ a função delta de Dirac, δ_{ij} o delta de Kronecker e \mathbf{e} um vetor unitário, na direção da força de volume \mathbf{b}^* . Por fim, considerando a comutação da integral de Stieltjes, chega-se a equação integral para deslocamentos viscoelásticos

$$\begin{aligned} u_i(\boldsymbol{\xi}; t) &= \int_{\Gamma} p_j(\mathbf{x}; t) * du_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) d\Gamma + \int_{\Omega} b_j(\mathbf{x}; t) * du_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma} u_j(\mathbf{x}; t) * dp_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) d\Gamma, \end{aligned} \quad (3.5)$$

definida para os pontos internos ao domínio Ω . Para estas, \mathbf{u}^* e \mathbf{p}^* são as soluções fundamentais viscoelásticas, devidas à aplicação da força unitária em Ω^* de dimensão infinita.

CAPÍTULO 3. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO: FORMULAÇÃO QUASI-ESTÁTICA

A consideração do ponto fonte ξ no contorno Γ , através de um processo de limite em que o raio ε de um setor circular excluído tende a zero, conduz à equação integral de contorno para deslocamentos viscoelásticos, definida por

$$\begin{aligned}
 u_j(\xi; t) * dC_{ij}(\xi; t) &= \int_{\Gamma} p_j(\mathbf{x}; t) * du_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}; t) d\Gamma \\
 &+ \int_{\Omega} b_j(\mathbf{x}; t) * du_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}; t) d\Omega \\
 &- \int_{\Gamma} u_j(\mathbf{x}; t) * dp_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}; t) d\Gamma, \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

onde

$$C_{ij}(\xi; t) = h(t) \delta_{ij} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}; t) d\Gamma \tag{3.7}$$

e $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ é o contorno do setor circular. A equação (3.7), diferente da utilizada pelos demais trabalhos, é avaliada temporalmente. Maiores explicações não são fornecidas acerca desta diferença, que, aparentemente, não afeta o resultado final. De qualquer forma, este trabalho opta por esta representação por acreditar estar mais de acordo com toda a Teoria Viscoelástica.

Nota-se nas equações (3.5) e (3.6), que as derivadas foram aplicadas às soluções fundamentais e não às funções vetoriais \mathbf{u} e \mathbf{p} , embora se saiba ser válida a comutatividade das integrais de Stieltjes. A conveniência em se trabalhar desta forma reside no fato de não haver necessidade em requerer questões de continuidade e diferenciabilidade das funções \mathbf{u} e \mathbf{p} , que são as incógnitas procuradas; a mesma preocupação não ocorre para as soluções fundamentais viscoelásticas, uma vez ser possível encontrar, a priori, funções analíticas em termos de exponenciais temporais, garantindo, assim, os requisitos exigidos.

3.2 Soluções Fundamentais Viscoelásticas

A grande dificuldade em se analisar um problema viscoelástico, através do Método dos Elementos de Contorno, está na construção das soluções fundamentais \mathbf{u}^* e \mathbf{p}^* . É sabível que a literatura correspondente não emprega uma solução formalizada como aquela aplicada aos problemas elásticos; ao contrário, utiliza a correspondência

CAPÍTULO 3. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO: FORMULAÇÃO QUASI-ESTÁTICA

elástica-viscoelástica para a construção destas. Embora notabilizada por sua praticidade, principalmente quando do uso da transformada de Laplace, em muitos casos o trabalho de transformação e inversão das soluções de Kelvin pode se tornar bastante fastidioso, de forma que procedimentos numéricos sejam necessários para sua análise. Na seção referente aos procedimentos numéricos serão comentados alguns deles. Por ora, apresenta-se as soluções encontradas na literatura e experienciadas neste trabalho, finalizando a seção com a exposição de uma nova, e mais precisa, versão das soluções fundamentais.

3.2.1 Soluções fundamentais segundo Carini e DeDonato

Empregando o Princípio da Correspondência, por meio da transformada de Laplace, CARINI e DeDONATO [20] apresentam para o domínio bidimensional, estado plano de deformações e estado plano de tensões, as seguintes expressões para o deslocamento e a força de superfície fundamentais:

$$u_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}; t) = u_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) \left[1 + \sum_{k=1}^{m+2n} \frac{\frac{(e^{t\alpha_k} - 1)}{\alpha_k} \sum_{l=0}^{m+2n-1} R_l \alpha_k^l}{(m+2n) \alpha_k^{m+2n-1} + \sum_{l=1}^{m+2n-1} l P_l \alpha_k^{l-1}} \right] \quad (3.8)$$

e

$$p_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}; t) = p_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) \left[1 + \sum_{k=1}^{m+n} \frac{\frac{(e^{t\alpha_k} - 1)}{\alpha_k} \sum_{l=0}^{m+n-1} R_l \alpha_k^l}{(m+n) \alpha_k^{m+n-1} + \sum_{l=1}^{m+n-1} l P_l \alpha_k^{l-1}} \right] \quad (3.9)$$

obtidas a partir de modelos designados por SLS (*Standard Linear Solids*), que se constituem de modelos generalizados de Kelvin-Voigt em série, ou de Maxwell em paralelo, podendo, ou não, combinarem-se com uma mola e/ou um amortecedor (*dashpot*). Os termos que aparecem nas equações são definidos para uma quantidade m de parâmetros representantes da parte volumétrica e n parâmetros da parte desviatória. Suas expressões estão definidas na seção B.1 do Apêndice B.

Nota-se nas expressões (3.8) e (3.9), acima, a complexidade de sua forma. A substituição dos termos definidos em apêndice mostra, também, outro inconveniente: sua extensão. SYNGELLAKIS [19] alerta ao leitor sobre inconveniências em se

CAPÍTULO 3. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO: FORMULAÇÃO QUASI-ESTÁTICA

trabalhar com estas equações quando se deseja uma análise viscoelástica por modelos simples, mas não as pormenoriza, de forma que não se sabe, além do que está aparente, de que tipo são. Pelas experiências alcançadas durante a execução deste trabalho, pôde-se observar o surgimento de expressões em arco-tangentes e integrais exponenciais na avaliação analítica das componentes das matrizes \mathbf{C} e \mathbf{G} , e uma indeterminação na avaliação das componentes da matriz \mathbf{H} . Estas dificuldades encontradas motivaram o abandono desta solução.

3.2.2 Soluções fundamentais segundo Syngellakis

Para uma análise através de um modelo mais simples, diga-se um modelo de três parâmetros, ou modelo de Boltzmann, representado por uma mola em série com um modelo de Kelvin-Voigt (Fig.3.1), pode-se obter soluções fundamentais viscoelásticas

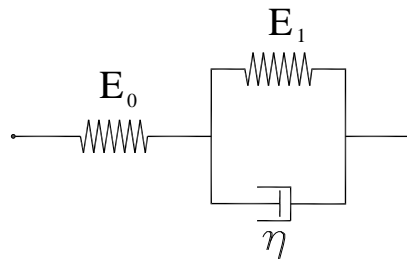


Figura 3.1: Modelo reológico de Boltzmann para um sólido viscoelástico

mais simples. A construção das soluções fundamentais viscoelásticas, recomendada por SYNGELLAKIS [19], toma as soluções elásticas reescritas nas formas

$$u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) = \frac{3 - 4\nu}{(1 - \nu)\mu} f_{ij}^u(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) + \frac{1}{(1 - \nu)\mu} g_{ij}^u(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \quad (3.10)$$

e

$$p_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} f_{ij}^p(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) + \frac{1}{1 - \nu} g_{ij}^p(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}), \quad (3.11)$$

sendo

$$f_{ij}^u(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) = \frac{-\delta_{ij} \ln(r)}{8\pi}, \quad (3.12)$$

$$g_{ij}^u(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) = \frac{r_{,i} r_{,j}}{8\pi}, \quad (3.13)$$

CAPÍTULO 3. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO: FORMULAÇÃO QUASI-ESTÁTICA

$$f_{ij}^p(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi r} \left[(r_{,i} n_j - r_{,j} n_i) - \delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} \right] \quad (3.14)$$

e

$$g_{ij}^p(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) = \frac{r_{,i} r_{,j}}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n}. \quad (3.15)$$

Complementando as equações (3.10) e (3.11), a teoria da elasticidade valida a seguinte relação entre o coeficiente de Poisson ν , o módulo volumétrico K e o coeficiente de Lamé μ :

$$\nu = \frac{1}{2} \frac{3K - 2\mu}{3K + \mu}. \quad (3.16)$$

A equação constitutiva viscoelástica geral, separada em suas partes desviatória e volumétrica, respectivamente, é definida pelas equações (2.25) e (2.26), onde os parâmetros viscoelásticos $G_1(t)$ e $G_2(t)$ se relacionam com $\mu(t)$ e $K(t)$ através das expressões (2.29) e (2.30). Para a análise desejada, assume-se que a função $K(t)$ esteja definida pelo módulo volumétrico elástico K_0 , e que $\mu(t)$ seja definida pelo modelo escolhido, resultando na expressão

$$\mu(t) = \frac{\mu_0}{\mu_2} (\mu_1 + \mu_0 e^{-\beta t}), \quad (3.17)$$

obtida da solução da equação diferencial do modelo reológico. Os valores de μ_0 e μ_1 correspondem às duas molas existentes no modelo e

$$\mu_2 = \mu_0 + \mu_1 \quad e \quad \beta = \frac{\mu_2}{\eta}, \quad (3.18)$$

com η o coeficiente de viscosidade do amortecedor e β o tempo de relaxação.

Tomando, então, as transformadas de Laplace das soluções elásticas, acha-se

$$\bar{u}_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; s) = \frac{u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})}{s} \quad e \quad \bar{p}_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; s) = \frac{p_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})}{s}; \quad (3.19)$$

o mesmo é feito para a equação constitutiva viscoelástica e a função de relaxação desviatória $\mu(t)$, encontrando-se

$$\bar{\sigma}'_{ij}(s) = 2 s \bar{\mu}(s) \bar{\varepsilon}'_{ij}(s), \quad \bar{\sigma}_{kk}(s) = 3 s \bar{K}(s) \bar{\varepsilon}_{kk}(s) \quad (3.20)$$

CAPÍTULO 3. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO: FORMULAÇÃO QUASI-ESTÁTICA

e

$$\bar{\mu}(s) = \frac{\mu_0}{\mu_2} \left(\frac{\mu_1}{s} + \frac{\mu_0}{(s + \beta)} \right), \quad (3.21)$$

respectivamente. O passo seguinte é aplicar o Princípio da Correspondência às constantes elásticas da solução fundamental \mathbf{u}^* , obtendo-se as expressões

$$\bar{A}^{u^*}(s) = \frac{2 [3\bar{K}(s) - 7\bar{\mu}(s)]}{s^2\bar{\mu}(s) [3\bar{K}(s) + 4\bar{\mu}(s)]} \quad e \quad \bar{B}^{u^*}(s) = \frac{2 [3\bar{K}(s) + \bar{\mu}(s)]}{s^2\bar{\mu}(s) [3\bar{K}(s) + 4\bar{\mu}(s)]} \quad (3.22)$$

para o estado plano de deformações e

$$\bar{A}^{u^*}(s) = \frac{15\bar{K}(s) + 8\bar{\mu}(s)}{2s^2\bar{\mu}(s) [3\bar{K}(s) + \bar{\mu}(s)]} \quad e \quad \bar{B}^{u^*}(s) = \frac{9\bar{K}(s)}{2s^2\bar{\mu}(s) [3\bar{K}(s) + \bar{\mu}(s)]} \quad (3.23)$$

para o estado plano de tensões. Analogamente, têm-se para \mathbf{p}^* , estado plano de deformações,

$$\bar{A}^{p^*}(s) = \frac{6\bar{\mu}(s)}{s [3\bar{K}(s) + 4\bar{\mu}(s)]} \quad e \quad \bar{B}^{p^*}(s) = \frac{2 [3\bar{K}(s) + \bar{\mu}(s)]}{s [3\bar{K}(s) + 4\bar{\mu}(s)]} \quad (3.24)$$

e estado plano de tensões,

$$\bar{A}^{p^*}(s) = \frac{3\bar{K}(s) + 4\bar{\mu}(s)}{2s [3\bar{K}(s) + \bar{\mu}(s)]} = \quad e \quad \bar{B}^{p^*}(s) = \frac{9\bar{K}(s)}{2s [3\bar{K}(s) + \bar{\mu}(s)]}. \quad (3.25)$$

Prosseguindo com a construção das soluções desejadas, as expressões de $\bar{K}(s)$ e $\bar{\mu}(s)$ são substituídas nas equações (3.22), (3.23), (3.24), (3.25) e realizadas as operações algébricas convenientes para que se possa efetuar a transformada inversa destas, obtendo-se, no domínio do tempo, as expressões finais de

$$u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) = (b_{01} - b_1 e^{-\beta_1 t}) [f_{ij}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) + g_{ij}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})] + (b_{02} - b_2 e^{-\beta_2 t}) [f_{ij}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) - g_{ij}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})] \quad (3.26)$$

e

$$p_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) = [a_{01} (1 - e^{-\beta_3 t}) + a_1 e^{-\beta_3 t}] f_{ij}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) + [a_{02} (1 - e^{-\beta_3 t}) + a_2 e^{-\beta_3 t}] g_{ij}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}), \quad (3.27)$$

para as quais os termos estão definidos na seção B.2 do Apêndice B.

3.2.3 Soluções fundamentais segundo Sternberg e Al-Khozaie

A solução empregada neste trabalho, diferentemente das apresentadas, não utiliza o Princípio da Correspondência na sua geração e, tão pouco, a solução elástica bidimensional como ponto de partida. O processo adotado para sua geração é o processo clássico de solução de um sistema de equações diferenciais de valor de contorno e inicial singular definida pela expressão

$$\mu(t) * d \nabla^2 \mathbf{u}^*(\mathbf{x}; t) + [\lambda + \mu](t) * d \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^*)(\mathbf{x}; t) + \mathbf{b}^*(\mathbf{x}; t) = \mathbf{0}, \quad (3.28)$$

para uma força de volume concentrada em um ponto ξ , de uma esfera de dimensões infinitas. STERNBERG e AL-KHOZAIE [43] definem este sistema de equações (3.28) como uma generalização da equação de Navier para problemas viscoelásticos e fornecem como solução única do problema as seguintes expressões para os deslocamentos e as tensões tridimensionais :

$$u_{\alpha i}^*(\xi, \mathbf{x}; t) = \frac{1}{8 \pi r} \left\{ 2 J_1(t) \left[\delta_{\alpha i} + \frac{r_\alpha r_i}{r^2} \right] + 3 Q_1(t) \left[\delta_{\alpha i} - \frac{r_\alpha r_i}{r^2} \right] \right\}, \quad (3.29)$$

e

$$\sigma_{\alpha ij}^*(\xi, \mathbf{x}; t) = \frac{-3}{8 \pi r^3} \left\{ \begin{array}{l} \frac{r_\alpha r_i r_j}{r^2} [2 h(t) - 3 Q_2(t)] + \\ Q_2(t) [\delta_{\alpha i} r_j + \delta_{\alpha j} r_i - \delta_{ij} r_\alpha] \end{array} \right\}, \quad (3.30)$$

onde define-se

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{r_k r_k} \quad (3.31)$$

e

$$J_1(t) = G_1^{-1}(t), \quad (3.32)$$

$$Q_1(t) = [2G_1(t) + G_2(t)]^{-1}, \quad (3.33)$$

$$Q_2(t) = Q_1(t) * dG_1(t), \quad (3.34)$$

como de classe de Heaviside, válidas em $(-\infty, \infty)$, como definição apresentada na subseção 2.3.1 para as propriedades da convolução de Stieltjes.

Para a bidimensionalização da equação (3.29) é empregado o mesmo procedimento utilizado para solução elástica [27], no qual se faz necessária a integração do desloca-

CAPÍTULO 3. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO: FORMULAÇÃO QUASI-ESTÁTICA

mento fundamental, subtraído de um movimento de corpo rígido, em relação a coordenada x_3 . Portanto, de acordo com definição em [27], pode-se escrever que

$$\begin{aligned} \hat{u}_{\alpha i}^* (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) &= u_{\alpha i}^* (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) - \tilde{u}_{\alpha i}^* (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) \\ &= \frac{1}{8\pi} \left\{ \begin{array}{l} 2 J_1 (t) \left[\delta_{\alpha i} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\tilde{r}} \right) + \frac{r_{\alpha} r_i}{r^3} \right] + \\ 3 Q_1 (t) \left[\delta_{\alpha i} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\tilde{r}} \right) - \frac{r_{\alpha} r_i}{r^3} \right] \end{array} \right\}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

sendo

$$\tilde{r} = (r_3^2 + 1)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.36)$$

Efetuada a integração de $\hat{u}_{\alpha i}^* (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t)$ (eq. 3.35) com respeito a x_3 , no intervalo $(-\infty, \infty)$, para $r = (r_1^2 + r_2^2)^{\frac{1}{2}}$, obtém-se o seguinte deslocamento fundamental:

$$u_{\alpha i}^* (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) = \frac{1}{4\pi} \{ 2 J_1 (t) [r_{,\alpha} r_{,i} - \ln(r) \delta_{\alpha i}] - 3 Q_1 (t) [r_{,\alpha} r_{,i} + \ln(r) \delta_{\alpha i}] \}. \quad (3.37)$$

A relação deformação-deslocamento, a partir da equação (3.37), fornece

$$\varepsilon_{\alpha ij}^* (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) = \frac{1}{4\pi r} \left\{ \begin{array}{l} 2 J_1 (t) [r_{,\alpha} \delta_{ij} - 2 r_{,\alpha} r_{,i} r_{,j}] - \\ 3 Q_1 (t) (r_{,\alpha} \delta_{ij} + r_{,i} \delta_{\alpha j} + r_{,j} \delta_{\alpha i} - 2 r_{,\alpha} r_{,i} r_{,j}) \end{array} \right\} \quad (3.38)$$

e, conseqüentemente, pela equação constitutiva (2.19), a tensão fundamental

$$\sigma_{\alpha ij}^* (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) = \frac{1}{4\pi r} \left\{ \begin{array}{l} [3 Q_2 (t) - 2 h (t)] (2 r_{,\alpha} r_{,i} r_{,j}) + \\ 3 Q_2 (t) (r_{,\alpha} \delta_{ij} - r_{,i} \delta_{\alpha j} - r_{,j} \delta_{\alpha i}) \end{array} \right\}. \quad (3.39)$$

Por fim, chega-se a força de superfície fundamental a partir do princípio da tensão de Euler e Cauchy

$$p_{\alpha i}^* (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) = \frac{1}{4\pi r} \left\{ \begin{array}{l} [3 Q_2 (t) (2 r_{,\alpha} r_{,i} - \delta_{\alpha i}) - 4 h (t) r_{,\alpha} r_{,i}] \frac{\partial r}{\partial n} \\ + 3 Q_2 (t) (r_{,\alpha} n_i - r_{,i} n_{\alpha}) \end{array} \right\}. \quad (3.40)$$

O processo adotado para obtenção da solução bidimensional de STERNBERG e AL-KHOZAIE [43] faz uso, apenas, de conceitos físicos, sem maior rigor matemático ao qual é submetida a solução tridimensional. Contudo, quando posta em comparação com as soluções construídas com o Princípio da Correspondência, verifica-se a igualdade de seus termos. STERNBERG e AL-KHOZAIE [43] também fazem comentário análogo

CAPÍTULO 3. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO: FORMULAÇÃO QUASI-ESTÁTICA

quanto às expressões (3.29) e (3.30), mas alertam quanto a não validação do Teorema 1 (Apêndice C), quando se faz uso da Correspondência Elástica-Viscoelástica. Segundo estes, é deste teorema que procede o significado físico intrínseco do estado singular viscoelástico em questão. De qualquer forma, as soluções apresentadas para três e duas dimensões possuem uma forma mais elegante e compacta que as demais apresentadas, facilitando sua manipulação nas avaliações do método. De outra forma, parece que assim tem-se uma solução genuinamente viscoelástica e tão geral quanto as expressões (3.8) e (3.9).

Uma pequena modificação na função $G_2(t)$ permite a transformação do estado plano de deformação para o estado plano de tensão. Esta modificação é verificada a partir da aplicação do Princípio da Correspondência ao coeficiente de Lamé elástico [28]

$$\hat{\lambda} = \frac{2\lambda\mu}{(\lambda + 2\mu)} \quad (3.41)$$

no estado plano de tensão. Novamente, λ e μ são os coeficientes de Lamé elásticos, no estado plano de deformação e $\mu = \hat{\mu}$. Desta forma, basta que se considere o seguinte, no domínio de Laplace:

$$\hat{G}_2(s) = \frac{\bar{G}_1(s) [4\bar{G}_2 - \bar{G}_1](s)}{[\bar{G}_2 + 2\bar{G}_1](s)}, \quad (3.42)$$

onde $\hat{G}_2(s)$ representa a transformada da parte volumétrica da função de relaxação no estado plano de tensão.

3.3 Tensões no Domínio

Semelhante ao processo descrito em [27], as tensões viscoelásticas em pontos no domínio podem ser obtidas por meio da equação constitutiva (eq. 2.19) bastando, para isso, calcular as deformações \mathbf{E} através da derivada dos deslocamentos em pontos internos (eq. 3.5), em relação às coordenadas do ponto fonte ξ . As soluções viscoelásticas bidimensionais (eqs. 3.37 e 3.40) obtidas a partir das soluções de STERNBERG e AL-KHOZAIE [43] (eqs. 3.29 e 3.30) são usadas neste processo. A expressão resultante é

$$\sigma_{ij}(\xi; t) = \int_{\Gamma} p_k(\mathbf{x}; t) * du_{ijk}^*(\xi, \mathbf{x}; t) d\Gamma - \int_{\Gamma} u_k(\mathbf{x}; t) * dp_{ijk}^*(\xi, \mathbf{x}; t) d\Gamma, \quad (3.43)$$

CAPÍTULO 3. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO: FORMULAÇÃO QUASI-ESTÁTICA

onde

$$u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) = \frac{1}{4\pi r} \left\{ \begin{array}{l} 2h(t) [2r_{,i}r_{,j}r_{,k}] - \\ 3Q_2(t) [2r_{,i}r_{,j}r_{,k} - r_{,i}\delta_{jk} + r_{,k}\delta_{ij} - r_{,j}\delta_{ik}] \end{array} \right\} \quad (3.44)$$

e

$$p_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) = \frac{1}{4\pi r^2} \left\{ \begin{array}{l} 3Q_3(t) \left[\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} 8r_{,i}r_{,j}r_{,k} + 2r_{,k}\delta_{ij} \\ -2r_{,i}\delta_{jk} - 2r_{,j}\delta_{ik} \end{array} \right) \frac{\partial r}{\partial n} + \\ 2(r_{,i}r_{,j}n_k - r_{,i}r_{,k}n_j - r_{,j}r_{,k}n_i) + \\ (n_i\delta_{jk} + n_j\delta_{ik} - 3n_k\delta_{ij}) \end{array} \right] - \\ 2G_1(t) \left[\begin{array}{l} (8r_{,i}r_{,j}r_{,k} - r_{,i}\delta_{jk} - r_{,j}\delta_{ik}) \frac{\partial r}{\partial n} - \\ r_{,k}(r_{,i}n_j + r_{,j}n_i) - n_k\delta_{ij} \end{array} \right] \end{array} \right\}. \quad (3.45)$$

A função temporal $Q_3(t)$ é definida como:

$$Q_3(t) = G_1(t) * dQ_2(t). \quad (3.46)$$

O apêndice D mostra todas as etapas do processo de obtenção da equação (3.43).

3.4 Tensões no Contorno

Da mesma forma que [27], obtêm-se as tensões no contorno a partir do conhecimento das forças de superfície e deslocamentos nodais. As expressões são, inicialmente, obtidas no referencial local ao elemento do contorno e, posteriormente, transformadas para o sistema de referência global. As tensões finais, no referencial global, são definidas, matricialmente, por:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}; t) = \frac{f_1(t)}{3L^4} \left[\begin{array}{cccc} L_1^3 & -L_1^2L_2 & -L_1^3 & L_1^2L_2 \\ -L_1^2L_2 & L_1L_2^2 & L_1^2L_2 & -L_1L_2^2 \\ L_1L_2^2 & -L_2^3 & -L_1L_2^2 & L_2^3 \end{array} \right] * d \left\{ \begin{array}{l} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{array} \right\} + \frac{1}{L^3} \left[\begin{array}{cc} [f_2(t) + 2h(t)] L_1^2L_2 + h(t) L_2^3 & f_2(t) L_1^3 - h(t) L_1L_2^2 \\ h(t) L_1^3 - f_2(t) L_1L_2^2 & h(t) L_2^3 - f_2(t) L_1^2L_2 \\ f_2(t) L_2^3 - h(t) L_1^2L_2 & [f_2(t) + 2h(t)] L_1L_2^2 + h(t) L_1^3 \end{array} \right] * d \left\{ \begin{array}{l} p_1^r \\ p_2^r \end{array} \right\}, \quad (3.47)$$

CAPÍTULO 3. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO: FORMULAÇÃO QUASI-ESTÁTICA

onde L_1 e L_2 são as projeções do comprimento L do elemento nos eixos de referência global, e

$$f_1(t) = 2G_1(t) + 4Q_2(t) * dG_2(t) - Q_3(t) \quad (3.48)$$

e

$$f_2(t) = h(t) - 3Q_2(t). \quad (3.49)$$

Todo o processo é relatado no apêndice E.

3.5 Procedimentos Numéricos

Para iniciar este tópico sobre os procedimentos numéricos adotados pelo método dos Elementos de Contorno neste trabalho, cabe aqui um rápido comentário quanto às análises encontradas na literatura. Em sumo, o sistema de equações integrais do método é avaliado de três formas distintas, quais sejam: no tempo, com soluções fundamentais temporais; no tempo, com soluções fundamentais no domínio transformado de Laplace, como funções de ponderação do esquema numérico de integração [21], [31] e [32]; no domínio de Laplace, com inversão numérica das soluções finais [15] e [41]. Em todos os casos, o Princípio da Correspondência é utilizado para geração da versão viscoelástica das soluções empregadas. Para a análise desenvolvida neste trabalho é adotado o esquema de análise no tempo, com soluções temporais.

A questão que demanda maior atenção nesta análise é a avaliação das convoluções temporais e da história das variáveis envolvidas no comportamento viscoelástico, visto que a discretização dos sistemas (3.5) e (3.6), quanto à variação no espaço, segue as mesmas premissas numéricas adotadas para o problema elástico [27]. Assim sendo, e por simplicidade numérica, adotam-se elementos lineares para interpolação das variáveis no contorno; avaliação numérica das integrais não singulares, através da quadratura Gaussiana e avaliação analítica das integrais singulares. Para o tempo, os comentários a seguir apresentam alguns esquemas numéricos encontrados na literatura e experienciados neste trabalho.

3.5.1 Métodos numéricos para avaliação das convoluções

SIM e KWAK [29] recomendam, para a resolução das integrais temporais, uma discretização do intervalo de tempo $[0, t]$, em pontos $T_n = n \Delta t$, para $n \in \mathbb{N}$, equidistantes

CAPÍTULO 3. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO: FORMULAÇÃO QUASI-ESTÁTICA

de um passo Δt . Sem perda de generalidade, as integrais na equação (3.6) podem ser postas em equivalência com a soma de duas integrais efetuadas em dois subintervalos de $[0, T_n]$, ou seja, $[0, T_{n-1}]$ e $[T_{n-1}, T_n]$. No primeiro intervalo são computadas as integrais dos valores conhecidos em instantes anteriores, correspondendo à história passada das solicitações e deslocamentos sofridos; no segundo intervalo, referente aos acontecimentos atuais, determinam-se as incógnitas do problema. As funções temporais incógnitas são interpoladas por funções constantes no tempo, representadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t) = \sum_{n=1}^N u^n \psi_n(t), \\ p(t) = \sum_{n=1}^N p^n \psi_n(t), \\ \psi_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } (n-1)\Delta t < t < n\Delta t \\ 0, & \text{para os demais casos} \end{cases} \end{array} \right\}, \quad (3.50)$$

e as integrais resultantes avaliadas analiticamente.

Ainda que esta interpretação numérica forneça valores satisfatórios [29], LEE e WESTMANN [30] advertem que esta estratégia numérica, também aplicada a problemas de elastodinâmica, proelasticidade, consolidação e transferência de calor, conduz a resultados numéricos muito sensíveis ao tamanho do passo de tempo. Por esta razão sugerem outra abordagem das integrais temporais, através de quadraturas numéricas de ordem elevadas, adotando o método de Simpson Modificado, por julgarem o mais eficiente dos métodos experimentados. Segundo os mesmos, esta interpretação também conduz a uma melhor modelagem dos acontecimentos passados. Então, considerando as seguintes transformações das convoluções da equação (3.6):

$$u_j(\mathbf{x};t) * dp_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) = p_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; 0) u_j(\mathbf{x};t) + \int_0^t u_j(\mathbf{x};t-\tau) \dot{p}_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; \tau) d\tau \quad (3.51)$$

e

$$p_j(\mathbf{x};t) * du_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) = u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; 0) p_j(\mathbf{x};t) + \int_0^t p_j(\mathbf{x};t-\tau) \dot{u}_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; \tau) d\tau, \quad (3.52)$$

conforme propriedade descrita na tabela 2.1 (página 17), para $\mathbf{b} = \mathbf{0}$; a aplicação do método, de acordo com LEE e WESTMANN [30] reescreve as convoluções transfor-

CAPÍTULO 3. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO: FORMULAÇÃO QUASI-ESTÁTICA

mas (eqs. 3.51 e 3.52) das seguintes formas discretizadas:

$$p_{ij}^* (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; 0) u_j (\mathbf{x}; n\Delta t) + \sum_{m=0}^n \Delta t w_{n,m} u_j (\mathbf{x}, (n-m) \Delta t) \dot{p}_{ij}^* (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; m\Delta t) \quad (3.53)$$

e

$$u_{ij}^* (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; 0) p_j (\mathbf{x}; n\Delta t) + \sum_{m=0}^n \Delta t w_{n,m} p_j (\mathbf{x}; (n-m) \Delta t) \dot{u}_{ij}^* (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; m\Delta t), \quad (3.54)$$

para $n \geq q$, onde q é um inteiro fixo. Nas expressões discretizadas, $w_{n,m}$ representa as constantes referentes ao método de integração; n o instante atual e m o instante de avaliação, e

$$\dot{p}_{ij}^* (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; \tau) = \left[\frac{\partial p_{ij}^* (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t)}{\partial t} \right]_{t=\tau} \quad \text{e} \quad \dot{u}_{ij}^* (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; \tau) = \left[\frac{\partial u_{ij}^* (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t)}{\partial t} \right]_{t=\tau}, \quad (3.55)$$

sendo o mesmo válido para $\dot{p}_{ij}^* (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; m\Delta t)$ e $\dot{u}_{ij}^* (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; m\Delta t)$. Separando os termos conhecidos dos a serem avaliados, as discretizações (eqs. 3.53 e 3.54) transformam-se em:

$$u_j (\mathbf{x}; n\Delta t) [p_{ij}^* (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; 0) + \Delta t w_{n,0} \dot{p}_{ij}^* (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; 0)] \quad (3.56)$$

e

$$p_j (\mathbf{x}; n\Delta t) [u_{ij}^* (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; 0) + \Delta t w_{n,0} \dot{u}_{ij}^* (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; 0)], \quad (3.57)$$

para computação das incógnitas do problema. Os demais termos conhecidos compõem o vetor da história conhecida do comportamento $R_i (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; (n-1) \Delta t)$, definido no Apêndice F. Os valores de $w_{n,0}$ serão iguais a $1/3$ e $3/8$, quando $n \neq 3$ e $n = 3$, respectivamente. $\dot{p}_{ij}^* (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; 0)$ e $\dot{u}_{ij}^* (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; 0)$ seguem a mesma idéia de (3.55).

O método de Simpson Modificado [30] gera um número grande de parcelas a ser considerado no processo numérico e requer, além de um passo Δt reduzido, uma inicialização por meio do método do Trapézio. Este processo, aplicado a esta análise, não forneceu resultados aceitáveis, e necessitou de um passo muito pequeno para apresentar resultados que antevisse o comportamento de deformação lenta esperado. Não se sabe se o uso de algum procedimento numérico na abordagem das variáveis espaciais influenciou o insucesso do método; de qualquer forma, os maus resultados bastaram para a procura de métodos mais eficientes.

CAPÍTULO 3. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO: FORMULAÇÃO QUASI-ESTÁTICA

Uma solução eficiente encontrada, para análise no tempo destas integrais, foi o uso da Quadratura Gaussiana. Para tanto, através de uma partição do intervalo $[0, t]$ em N partes iguais, uma interpolação linear no tempo das variáveis envolvidas, pode ser escrita da seguinte forma, para $(n - 1) \Delta t \leq t \leq n\Delta t$, por exemplo:

$$u_j(\mathbf{x};t) = u_j^{(n-1)\Delta t}(\mathbf{x}) \psi_1 + u_j^{n\Delta t}(\mathbf{x}) \psi_2 \quad (3.58)$$

e

$$p_j(\mathbf{x};t) = p_j^{(n-1)\Delta t}(\mathbf{x}) \psi_1 + p_j^{n\Delta t}(\mathbf{x}) \psi_2, \quad (3.59)$$

sendo ψ_1 e ψ_2 as funções de interpolação referidas. Substituindo, então, as variáveis interpoladas nas transformações definidas em (3.51) e (3.52) e operando mudança nos limites de integração, têm-se:

$$p_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; 0) u_j^{N\Delta t}(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^N \left\{ u_j^{(n-1)\Delta t}(\mathbf{x}) \frac{\Delta t}{2} \int_{-1}^1 \dot{p}_{ij}^* \left[\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; \left(\frac{1-\gamma}{2} n\Delta t \right) \right] \psi_1 d\gamma \right. \\ \left. + u_j^{n\Delta t}(\mathbf{x}) \frac{\Delta t}{2} \int_{-1}^1 \dot{p}_{ij}^* \left[\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; \left(\frac{1-\gamma}{2} n\Delta t \right) \right] \psi_2 d\gamma \right\} \quad (3.60)$$

e

$$u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; 0) p_j^{N\Delta t}(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^N \left\{ p_j^{(n-1)\Delta t}(\mathbf{x}) \frac{\Delta t}{2} \int_{-1}^1 \dot{u}_{ij}^* \left[\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; \left(\frac{1-\gamma}{2} n\Delta t \right) \right] \psi_1 d\gamma \right. \\ \left. + p_j^{n\Delta t}(\mathbf{x}) \frac{\Delta t}{2} \int_{-1}^1 \dot{u}_{ij}^* \left[\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; \left(\frac{1-\gamma}{2} n\Delta t \right) \right] \psi_2 d\gamma \right\}, \quad (3.61)$$

onde γ representa as coordenadas naturais e n o instante atual de avaliação. Os valores $u_j^{(n-1)\Delta t}$ e $p_j^{(n-1)\Delta t}$ são conhecidos em um instante anterior ao instante atual avaliado, em outras palavras, estes valores representam a história passada do comportamento viscoelástico estudado. Para avaliação das integrais resultantes do processo, a quadratura Gaussiana é aplicada satisfatoriamente. Para modelos reológicos simples, também é válida a avaliação analítica das integrais, fornecendo bons resultados para um custo

CAPÍTULO 3. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO: FORMULAÇÃO QUASI-ESTÁTICA

computacional pequeno.

O uso de funções interpolantes lineares para as variáveis no tempo produz o seguinte sistema final:

$$\mathbf{A}^{t+\Delta t} \mathbf{x}^{t+\Delta t} = \mathbf{y}^{t+\Delta t} + \mathbf{r}^t, \quad (3.62)$$

onde \mathbf{A} é a matriz dos coeficientes, \mathbf{x} o vetor das variáveis, \mathbf{y} o vetor dos valores prescritos e \mathbf{r} o vetor da história viscoelástica conhecida. Diferente das expressões trabalhadas obtidas para \mathbf{r} pelo método de Simpson modificado, esta abordagem reduz suas componentes a apenas uma única integral, a ser avaliada em cada passo de tempo. Os resultados obtidos, aliados a simplicidade na implementação computacional e o custo final, mostram que esta abordagem é mais satisfatória que as anteriores apresentadas.

3.5.2 Método incremental para avaliação das convoluções temporais

Uma forma alternativa para a abordagem destas integrais é baseada na construção da equação constitutiva hereditária, comentada por FLÜGGE [7] e apresentada na subseção 2.3.1 deste trabalho. Neste processo, entende-se que as convoluções das equações integrais (3.5) e (3.6) podem ser reescritas como uma superposição de incrementos de \mathbf{p} ou de \mathbf{u} , aplicados em intervalos de tempo constantes. Assim sendo, têm-se:

$$p_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}; t) * du_j(\mathbf{x}, t) \simeq u_j(\mathbf{x}, 0) p_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}; t) + \sum_{m=1}^N \Delta u_j(\mathbf{x}, t_m) p_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}; t - t_m) \quad (3.63)$$

e

$$u_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}; t) * dp_j(\mathbf{x}, t) \simeq p_j(\mathbf{x}, 0) u_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}; t) + \sum_{m=1}^N \Delta p_j(\mathbf{x}, t_m) u_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}; t - t_m). \quad (3.64)$$

Desta forma, o sistema final, após a consideração dos valores prescritos é escrito como

$$\mathbf{A}^n \mathbf{x}^0 + \sum_{m=1}^n \mathbf{A}^{n-m} \Delta \mathbf{x}^m = \mathbf{y}^0 + \sum_{m=1}^n \Delta \mathbf{y}^m, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (3.65)$$

CAPÍTULO 3. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO: FORMULAÇÃO QUASI-ESTÁTICA

onde N é o número total de incrementos, n o instante atual e m o instante de avaliação. A equação (3.65) pode ser bem mais custosa computacionalmente, dependendo da variação no tempo que as funções \mathbf{u} e \mathbf{p} possam ter. Entretanto, a consideração da história do comportamento é automaticamente atendida neste processo, não ficando dúvidas sobre o procedimento executado.

Capítulo 4

Exemplos Numéricos

Para verificação da formulação quasi-estática desenvolvida, este capítulo apresenta os resultados numéricos obtidos nas análises dos problemas selecionados na literatura. Basicamente, dois modelos reológicos distintos, para a representação do comportamento viscoelástico, são empregados. O primeiro, e o mais simples, é um sólido de três parâmetros (Fig. 3.1), cuja função de relaxação, que caracteriza a parte desviatória, é definida em [29] por:

$$\mu(t) = G [\alpha + (1 - \alpha) e^{-\beta t}], \quad (4.1)$$

sendo G o módulo transversal da mola, α uma constante e β o tempo de relaxação. O outro modelo, fornecido por CHRISTENSEN [9], caracteriza a parte desviatória através da seguinte função de relaxação:

$$\mu(t) = G_0 + \sum_{j=1}^{N=8} G_j e^{-\beta_j t}, \quad (4.2)$$

onde $\beta_j = 1/t_j$. Os valores dos respectivos parâmetros são encontrados nas tabelas 4.1 e 4.2.

Tabela 4.1: Modelo 1

G (kN/cm^2)	K (kN/cm^2)	α	β (1/s)
480	1280	0,25	0,40

Para finalizar essa apresentação inicial, ilustram-se nas figuras 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4 as variações das tensões ou deslocamentos utilizados nas análises.

CAPÍTULO 4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Tabela 4.2: Modelo 2

j	G_j (kN/cm^2)	t_j (s)
0	500	-
1	997	1.5×10^{-5}
2	538	1.5×10^{-4}
3	494	1.5×10^{-3}
4	392	1.5×10^{-2}
5	306	1.5×10^{-1}
6	154	1.5
7	119	1.5×10
8	20	1.5×10^2

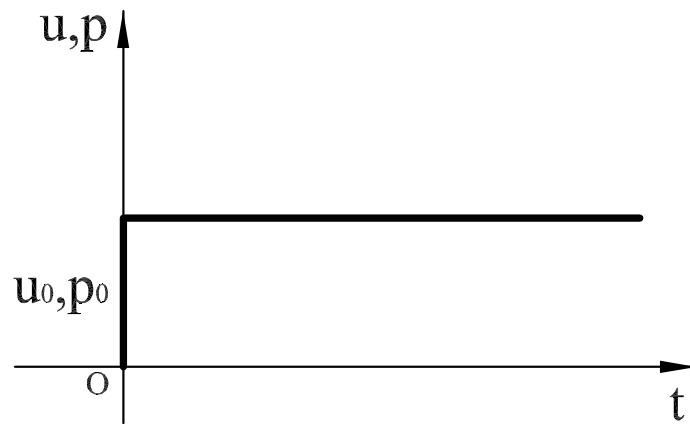


Figura 4.1: Variação da solicitação tipo 1

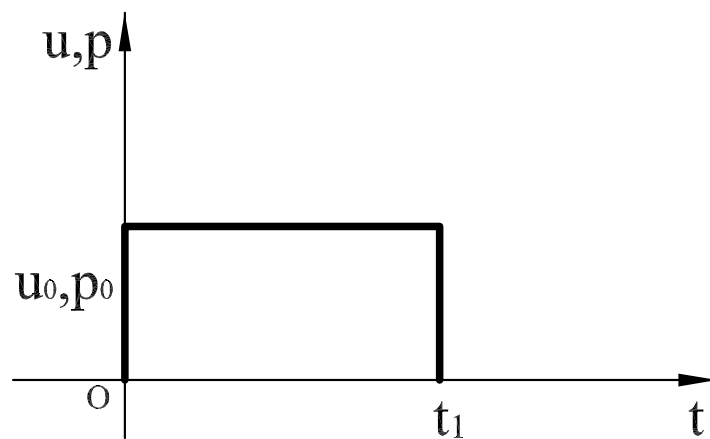


Figura 4.2: Variação da solicitação tipo 2

CAPÍTULO 4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

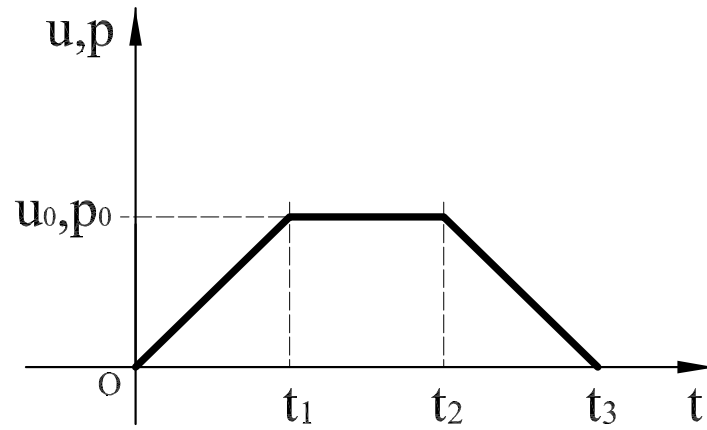


Figura 4.3: Variação da solicitação tipo 3

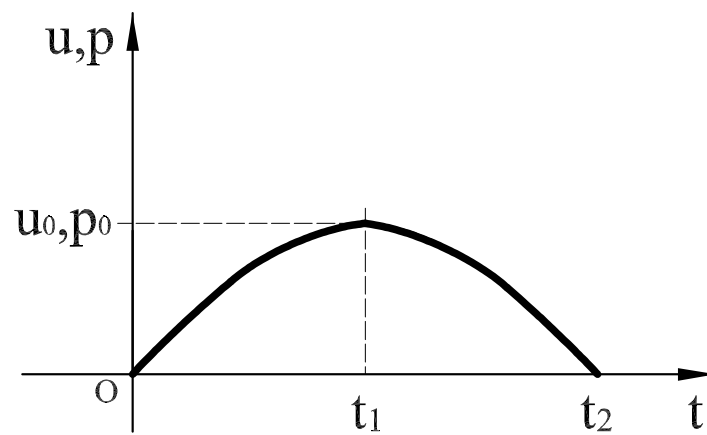


Figura 4.4: Variação da solicitação tipo 4

4.1 Tubo de Parede Espessa Submetido à:

4.1.1 Pressão interna

O primeiro problema a ser analisado é um caso de estado plano de deformação envolvendo um tubo de parede espessa, com raios interno b e externo a , respectivamente, iguais a 50 cm e 100 cm (figura 4.5). Em todos os nós do contorno interno é prescrita uma pressão, de valor máximo $p_0 = 10\text{ kN/cm}^2$, que pode variar, ao longo do tempo, conforme as figuras 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4.

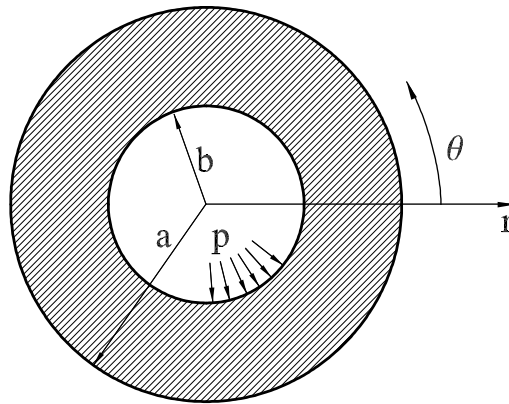


Figura 4.5: Tubo de parede espessa

De acordo com Flügge [7], as expressões analíticas elásticas para o deslocamento e as tensões, em coordenadas cilíndricas, são:

$$u_r = \frac{(1 + \nu) p b^2}{E (a^2 - b^2)} \left[(1 - 2\nu) r + \frac{a^2}{r} \right] \quad (4.3)$$

e

$$\sigma_r = \frac{p b^2}{a^2 - b^2} \left[1 - \frac{a^2}{r^2} \right] \quad e \quad \sigma_\theta = \frac{p b^2}{a^2 - b^2} \left[1 + \frac{a^2}{r^2} \right], \quad (4.4)$$

onde os parâmetros elásticos ν e E são, respectivamente, o coeficiente de Poisson e o módulo de Young. As expressões analíticas para os modelos viscoelásticos adotados podem ser obtidas através do Princípio da Correspondência. Sabe-se que neste processo os parâmetros elásticos são substituídos pelos correspondentes viscoelásticos, portanto, somente as tensões (eq. 4.4) permanecerão as mesmas após a aplicação do princípio. Para o deslocamento radial, considerando uma carga do tipo 1 (fig. 4.1), por exemplo,

CAPÍTULO 4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

tem-se

$$u_r(t) = \frac{p_0 b^2}{(a^2 - b^2)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{3r}{2} \left[\frac{1}{3k + G\alpha} + e^{-\frac{t\beta(3k + G\alpha)}{3k + G}} \left(\frac{1}{3k + G} - \frac{1}{3k + G\alpha} \right) \right] \\ + \frac{a^2}{2G\alpha r} [\alpha e^{-t\beta\alpha} + 1 - e^{-t\beta\alpha}] \end{array} \right\}. \quad (4.5)$$

Resultados semelhantes ao da equação (4.5) podem ser obtidos para as demais histórias de carregamento (figs. 4.2, 4.3 e 4.4), como apresentadas no apêndice G.

A análise numérica do cilindro é realizada em coordenadas cartesianas retangulares, coincidindo a origem dos eixos com o centro geométrico da seção transversal do sólido. Devido a sua simetria, considera-se apenas 1/4 do cilindro para a forma discretizada, que é efetuada para 22 nós e 44 nós no contorno. Os resultados obtidos para estas discretizações são plotados para o nó funcional $N1(100, 0)$. Inicialmente, são apresentadas algumas comparações entre os métodos adotados e as variações das histórias aplicadas, levando em conta o uso da equação (4.1) na caracterização da parte desviatória (modelo 1), apenas. Resultados posteriores mostram o comportamento viscoelástico para outros modelos, que tomam a equação (4.1) para caracterização da parte volumétrica (modelo 2), somente, e para parte volumétrica e desviatória (modelo 3), usando os mesmos valores descritos na tabela 4.1. Ainda, adota-se para a parte desviatória o modelo representado pela equação (4.2) (modelo 4).

A figura 4.6 mostra os deslocamentos obtidos pelo método de Simpson modificado. Para este, dois valores são necessários para iniciá-lo: um no instante t_0 , computado elasticamente e outro no instante t_1 . Neste último instante, o valor é obtido pelo método do Trapézio, computando 10 instantes de tempo, com incrementos de $0,01s$. A partir destes, o método de Simpson computa todos os demais valores até um total de 1000 instantes de tempo, com incrementos de $0,1s$. Observa-se na figura 4.6 que os resultados são aceitáveis até o instante de $8,2s$, aproximadamente, quando o sistema perde estabilidade. Resultados para incrementos menores e para discretizações mais refinadas não foram computados, pois o custo necessário e a qualidade dos valores obtidos não fariam frente aos alcançados pelos demais métodos que serão apresentados.

Para comprovar esta assertiva, as figuras seguintes ilustram o comportamento dos resultados alcançados pelos métodos de integração numérica, através da quadratura Gaussiana; de integração analítica e incremental. Os primeiros resultados ilustrados (figs. 4.7 e 4.8) comparam a influência da quantidade de pontos de Gauss no comportamento dos deslocamentos, nas configurações de 22 e 44 elementos no contorno.

CAPÍTULO 4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

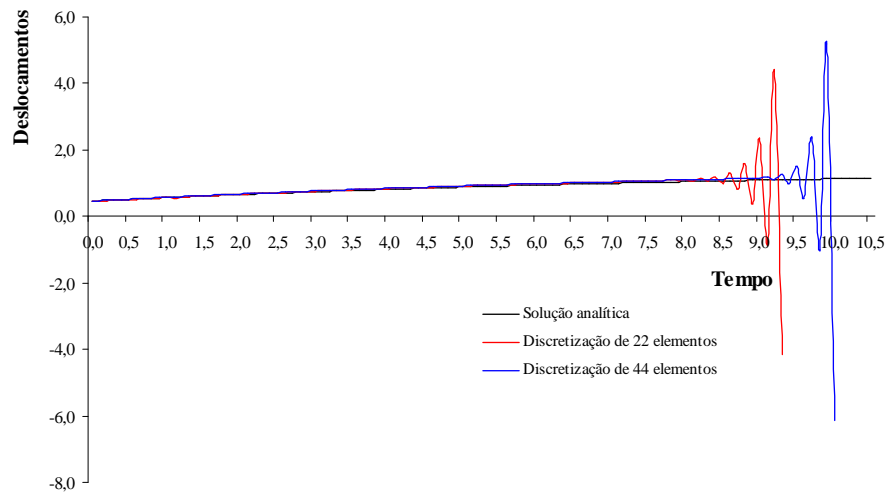


Figura 4.6: Comparação entre os valores obtidos pela análise analítica e a numérica para 22 e 44 elementos, empregando o método de Simpson Modificado

De acordo com os resultados, observa-se uma melhora quando se adota quantidades maiores ou iguais a 6 pontos de Gauss. A melhora também é nítida na configuração mais refinada. Para esta estratégia de integração numérica das parcelas temporais, nota-se todo o fenômeno de *creep*, desde o salto elástico até ao patamar correspondente ao valor do deslocamento para $t \rightarrow \infty$. A figura 4.9 compara os deslocamentos alcançados pelos métodos de integração numérica por Gauss, de integração analítica e o incremental, para a configuração de 44 elementos. Nesta ilustração, os resultados alcançados comprovam a eficiência dos três métodos.

CAPÍTULO 4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

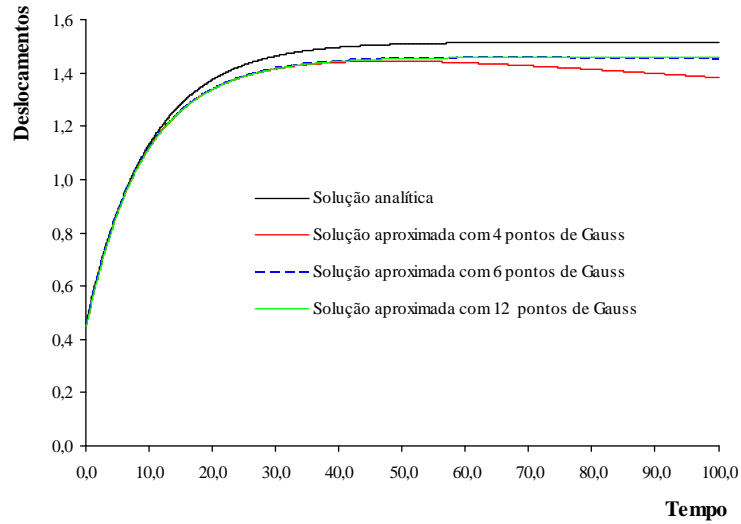


Figura 4.7: Influência do número de pontos de Gauss nos deslocamentos obtidos pela configuração de 22 elementos

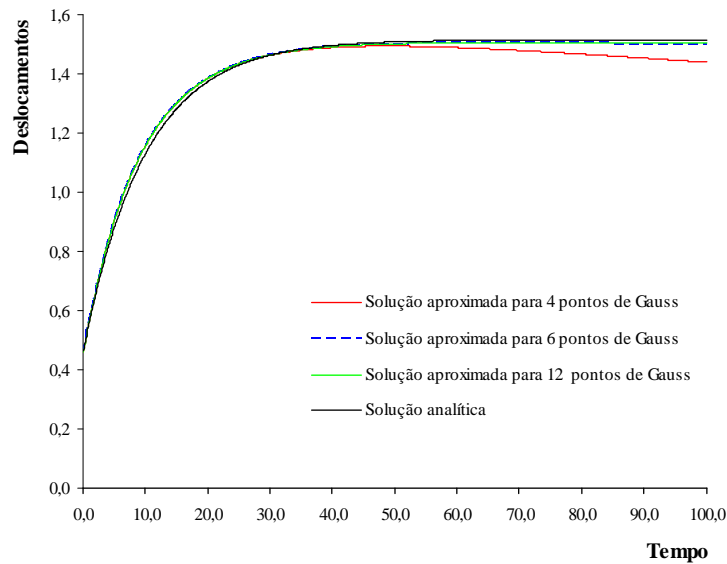


Figura 4.8: Influência do número de pontos de Gauss nos deslocamentos obtidos pela configuração de 44 elementos

CAPÍTULO 4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

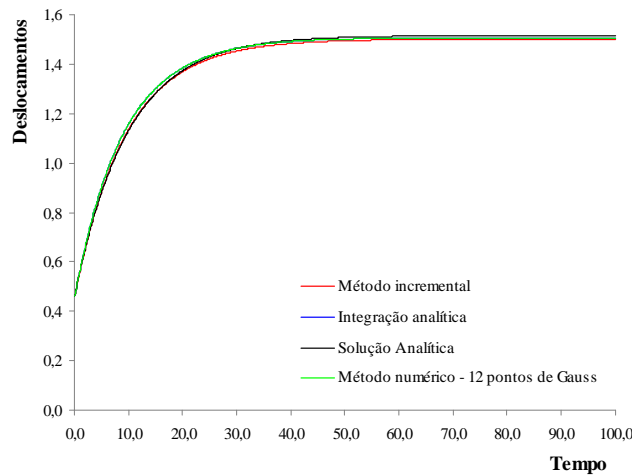


Figura 4.9: Comparação dos resultados alcançados pelos métodos de integração numérica (Gauss), analítica e incremental

Para finalizar esta análise, apresentam-se nas figuras seguintes os resultados alcançados pelo método incremental para as diversas variações temporais de pressão empregadas (figs. 4.2, 4.3 e 4.4), com valores de $t_1 = 50s$, $t_2 = 150s$ e $t_3 = 200s$, e para os demais modelos reológicos adotados para a representação viscoelástica. Nas figuras 4.10, 4.11 e 4.12, atenta-se para o comportamento de creep do tubo após sua despressurização. A figura 4.16 confronta as diferentes histórias de deslocamentos obtidos para os modelos viscoelásticos já comentados.

Notar-se-á pelos exemplos apresentados, e pelos que ainda serão apresentados, a maior ênfase nos resultados obtidos pelo método incremental. Deve-se isto ao fato de que sua forma e sua implementação numérica apresentaram uma maior simplicidade em relação aos demais, além do fato de ter eliminado dúvidas referentes à memória viscoelástica de cada variável envolvida na formulação.

CAPÍTULO 4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

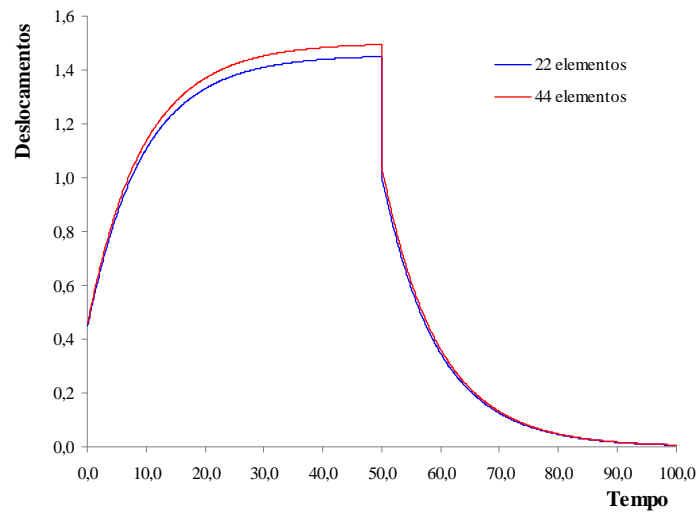


Figura 4.10: Deslocamentos viscoelásticos obtidos para a solicitação tipo 2 (fig. 4.2) usando o método incremental

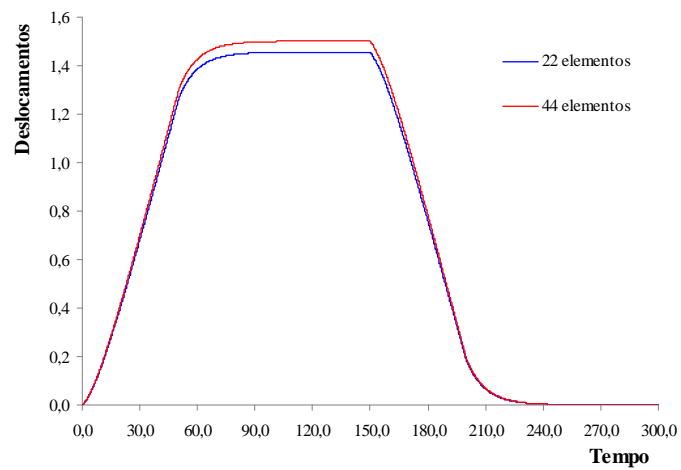


Figura 4.11: Deslocamentos viscoelásticos obtidos para a solicitação tipo 3 (fig. 4.3) usando o método incremental

CAPÍTULO 4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

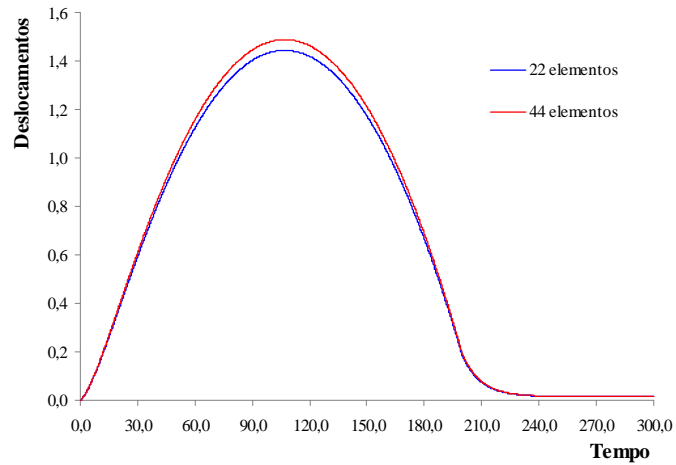


Figura 4.12: Deslocamentos viscoelásticos obtidos para a solicitação tipo 4 (fig. 4.4) usando o método incremental

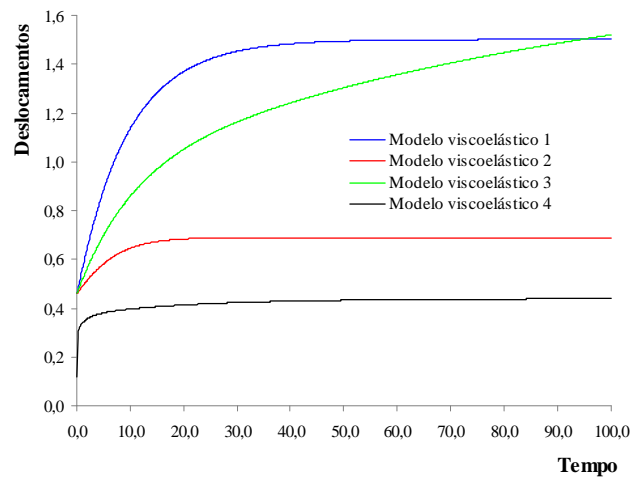


Figura 4.13: Comparação entre os modelos viscoelásticos adotados usando o método incremental

4.1.2 Deslocamento externo

Continuando com a análise do tubo, com as características geométricas já descritas, prescreve-se, agora, deslocamentos radiais, de valor máximo $u_0 = 1\text{cm}$, em todos os nós funcionais do contorno externo. Adota-se, para esta prescrição, as mesmas histórias utilizadas pelo caso da pressão prescrita. A figura 4.14 mostra o comportamento de relaxação das tensões obtidas para $N1(100, 0)$, aplicando os modelos 1, 2 e 3 na caracterização viscoelástica do tubo. As respostas são obtidas para um tempo total de 100s , com incrementos de $0,1\text{s}$. A discretização empregada é a de 44 elementos no contorno e a história dos deslocamentos, àquela representada pela figura 4.1. A figura 4.15

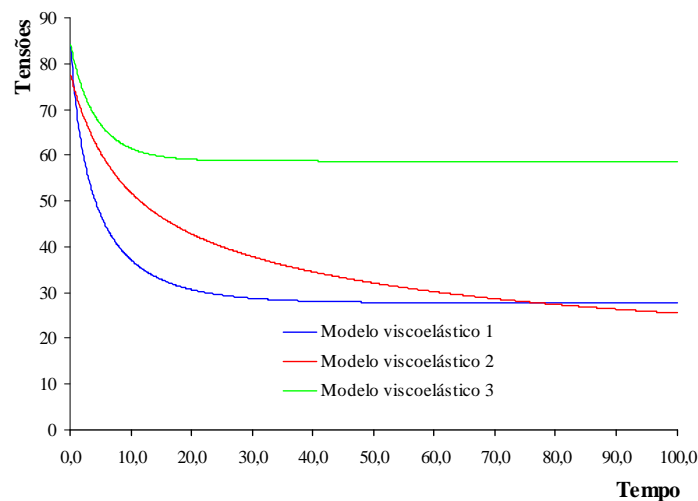


Figura 4.14: Comparação das histórias das tensões para os modelos reológicos, baseados no sólido de três parâmetros (modelo de Boltzmann)

mostra o comportamento das tensões para o modelo reológico 4, empregando a mesma discretização e a mesma história de deslocamento.

Por fim, são representadas na figura 4.16 as histórias das tensões no nó $N1$, para as demais histórias dos deslocamentos. Para esta, emprega-se a discretização de 44 elementos e o modelo viscoelástico 1. Também adotam-se 1000 instantes de tempo totais, com incrementos de $0,1\text{s}$. Nesta e em todas as análises realizadas pelo método incremental, as diferentes cargas ou deslocamentos foram aplicados a cada 5 incrementos de $0,1\text{s}$.

Os resultados dos próximos exemplos corroborarão os resultados já apresentados e os comentários feitos.

CAPÍTULO 4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

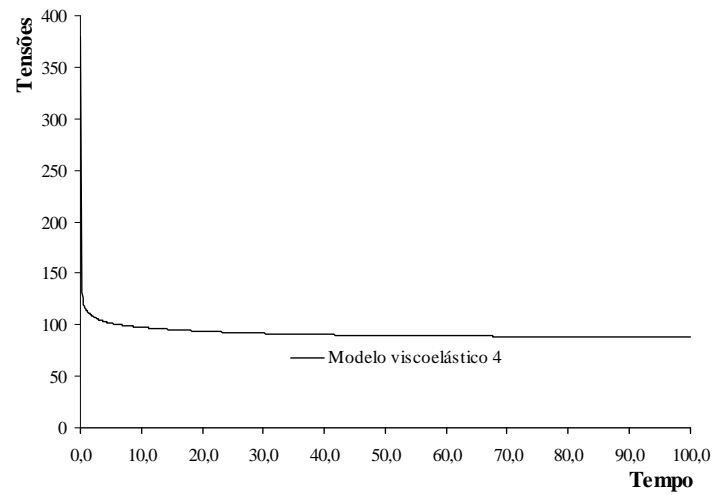


Figura 4.15: Relaxação das tensões para o modelo reológico 4

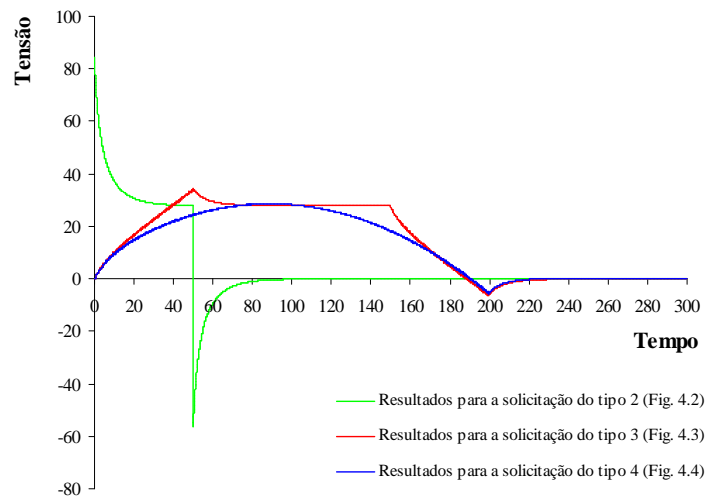


Figura 4.16: Histórias das tensões para as histórias prescritas de deslocamentos (figs. 4.2, 4.3 e 4.4) para o modelo reológico 1

4.2 Viga Bi-apoiada Submetida a Carregamento Uniformemente Distribuído

Para este segundo problema, extraído do livro do TIMOSHENKO e GOODIER [44], uma viga bi-apoiada com as seguintes características geométricas: $c = 10 \text{ cm}$ e $L = 100 \text{ cm}$ (fig. 4.17), é submetida a um carregamento uniformemente distribuído, de valor máximo $q_0 = 1 \text{ kN/m}$, variando conforme as figuras 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4. As

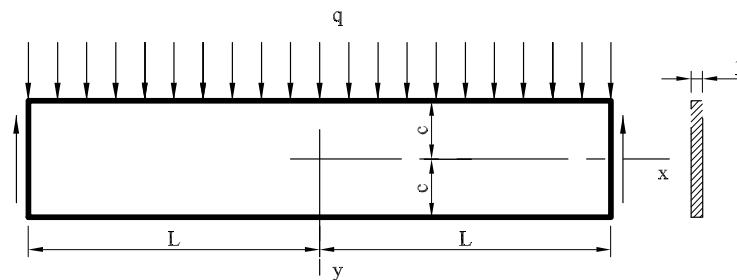


Figura 4.17: Viga bi-apoiada submetida a um carregamento uniformemente distribuído

expressões analíticas elásticas, para os deslocamentos horizontal e vertical, são encontradas em [44] e descritas pelas seguintes expressões

$$u = \frac{q}{2EI} \left[\left(L^2 x - \frac{x^3}{3} \right) y + x \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right) + \nu x \left(\frac{1}{3} y^3 - c^2 y + \frac{2}{3} c^3 \right) \right]$$

e

$$v = -\frac{q}{2EI} \left\{ \frac{y^4}{12} - \frac{c^2 y^2}{2} + \frac{2}{3} c^3 y + \nu \left[(L^2 - x^2) \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{6} - \frac{1}{5} c^2 y^2 \right] \right\} \\ - \frac{q}{2EI} \left[\frac{L^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{5} c^2 x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} \nu \right) c^2 x^2 \right] \\ + \frac{5}{24} \frac{qL^4}{EI} \left[1 + \frac{12}{5} \frac{c^2}{L^2} \left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2} \right) \right],$$

sendo I , E e ν , respectivamente, o momento de inércia, o módulo de Young e o coeficiente de Poisson. Novamente, as expressões viscoelásticas são construídas a partir do Princípio da Correspondência (Apêndice G). Assim como no exemplo do cilindro, as tensões deste problema também não se alteram na versão viscoelástica; é a variação da carga q que conduz a variação das tensões no tempo. Resultados obtidos em pontos internos comprovam esta assertiva.

CAPÍTULO 4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

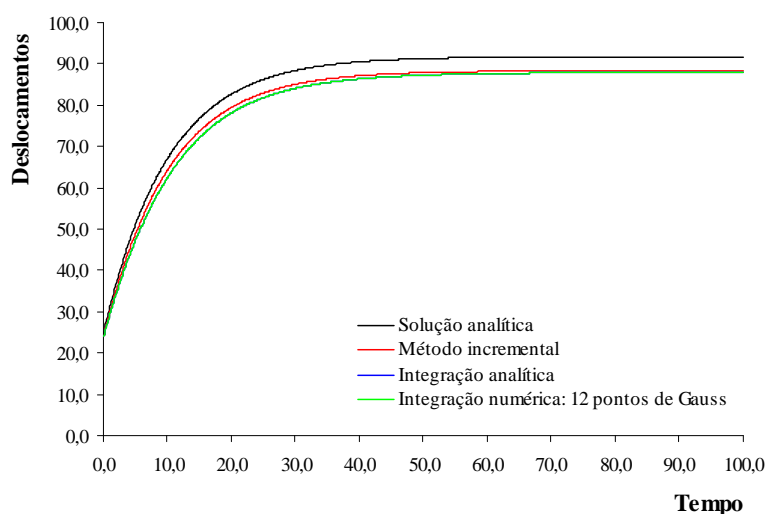


Figura 4.18: Comparação entre os métodos de integração das convoluções temporais aplicados a discretização de 52 elementos no contorno com a solicitação do tipo 1 (fig. 4.1)

Para a análise deste caso em estado plano de tensão, duas discretizações do contorno são realizadas: uma com 52 nós e outra com 244 nós no contorno, valendo-se da simetria da viga em relação a eixo x . Para todos os resultados obtidos foi adotado o modelo reológico 1. As figuras 4.18 e 4.19 mostram os deslocamentos máximos da viga obtidos para o ponto nodal $N(0, 0)$. Nestas figuras é realizada uma comparação entre os métodos empregados para análise das convoluções temporais, utilizando um tempo total de 1000 instantes de tempo e incrementos de $0,1s$. A qualidade é verificada por meio da comparação com a solução analítica do problema. Resultados análogos são obtidos com as duas discretizações para o ponto interno $P(50, 0)$, como ilustram as figuras 4.20 e 4.21. Por fim, ilustrando a afirmativa feita no primeiro parágrafo quanto a variação das tensões no tempo, a figura 4.22 mostra o comportamento para a solicitação do tipo 1 (fig. 4.1), comparando as duas discretizações adotadas, e a 4.23 mostra o comportamento para a solicitação do tipo 2 (fig. 4.2), somente para a configuração de 244 elementos.

CAPÍTULO 4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

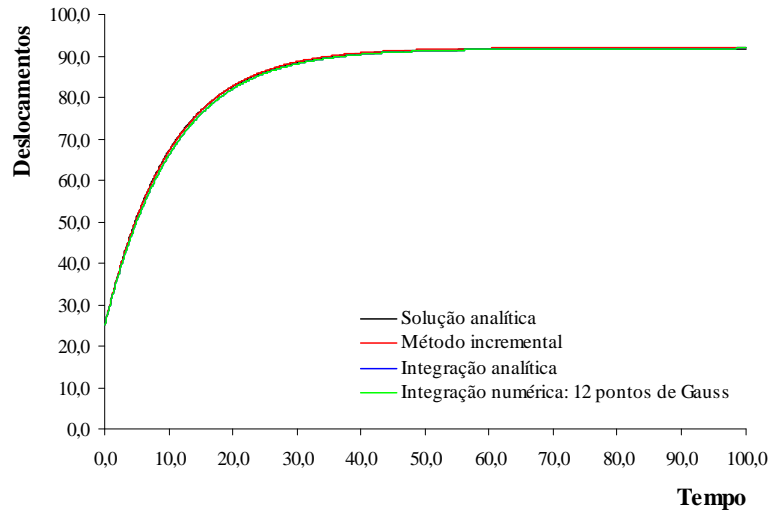


Figura 4.19: Comparação entre os métodos de integração das convoluções temporais aplicados a discretização de 244 elementos no contorno com a solicitação do tipo 1 (fig. 4.1)

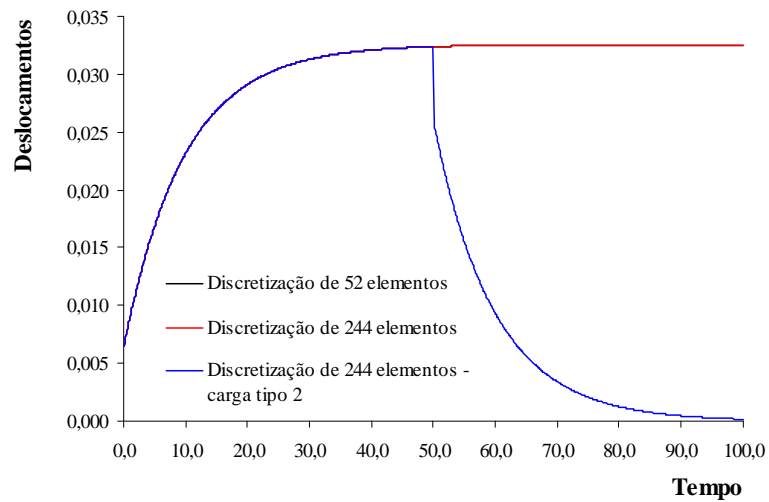


Figura 4.20: Deslocamentos na direção x , obtidos no ponto interno P , para as duas discretizações e para as cargas dos tipos 1 e 2 (figs. 4.1 e 4.2)

CAPÍTULO 4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

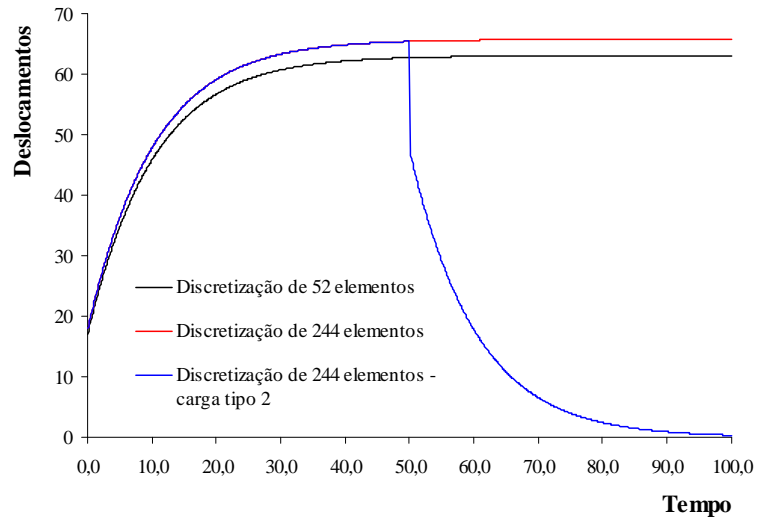


Figura 4.21: Deslocamentos na direção y , obtidos no ponto interno P , para as duas discretizações e para as cargas dos tipos 1 e 2 (figs. 4.1 e 4.2)

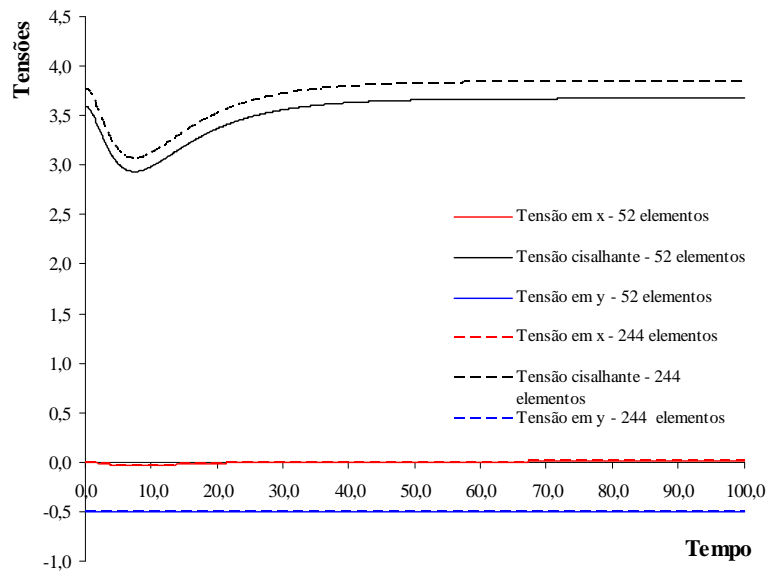


Figura 4.22: Tensões obtidas para o ponto $P(50, 0)$, com a carga do tipo 1 (fig. 4.1): comparação entre as discretizações empregadas

CAPÍTULO 4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

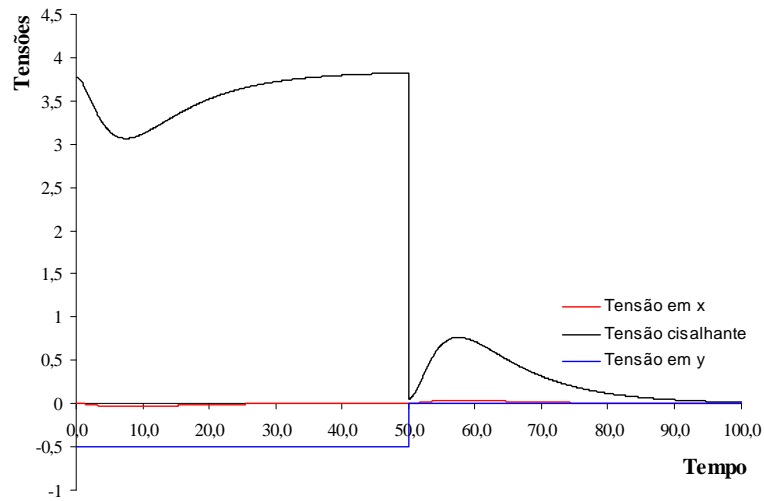


Figura 4.23: Tensões obtidas para o ponto $P(50, 0)$, com a carga do tipo 2 (fig. 4.2): discretização de 244 elementos.

4.3 Viga Engastada Submetida a uma Solicitação Concentrada em seu Extremo Livre

4.3.1 Força concentrada

Neste exemplo, também extraído do livro do TIMOSHENKO e GOODIER [44], uma viga engastada, com geometria $c = 10\text{ cm}$ e $L = 100\text{ cm}$, é submetida a uma força concentrada, de valor máximo $P_0 = 1\text{ kN}$, conforme ilustrado na figura 4.24. Para os

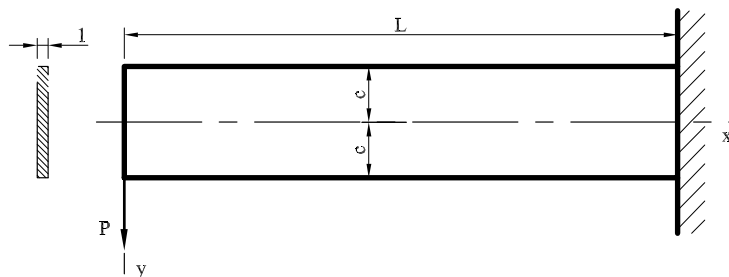


Figura 4.24: Viga engastada submetida a uma força concentrada no bordo livre

CAPÍTULO 4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

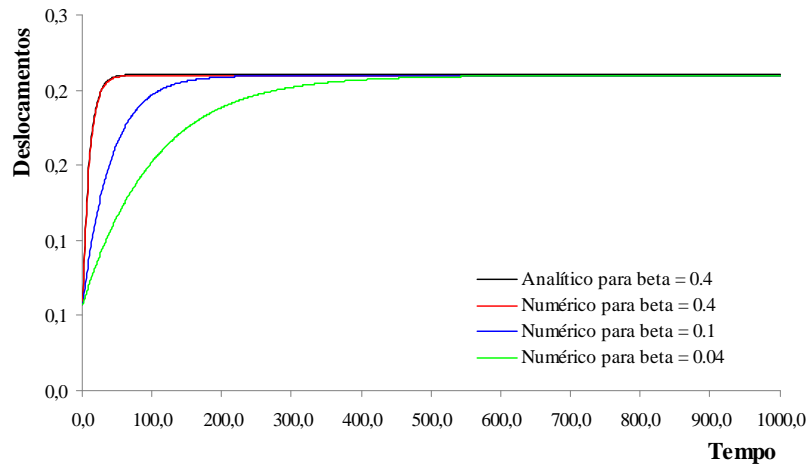


Figura 4.25: Comparação das histórias dos deslocamentos, na direção x , obtidos para três diferentes tempos de relaxação

deslocamentos da viga, a Teoria Elástica [44] fornece as seguintes expressões analíticas:

$$u = -\frac{Px^2y}{2EI} - \frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6IG} + \left(\frac{PL^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2IG} \right) y \quad (4.6)$$

$$v = \frac{\nu Pxy^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} - \frac{PL^2x}{2EI} + \frac{PL^3}{3EI}, \quad (4.7)$$

que podem ser transformadas nas expressões viscoelásticas, através do Princípio da Correspondência, a partir dos modelos reológicos adotados (Apêndice G); neste exemplo somente o modelo 1 é empregado na análise.

Para a análise deste caso, em estado plano de tensão, uma discretização com 100 nós funcionais no contorno é realizada. A avaliação numérica é executada para 1000 instantes de tempo, com incrementos de $1s$, adotando a variação da figura 4.1 para a força concentrada $P(t)$. Os resultados obtidos mostram o comportamento lento dos deslocamentos para o nó $N(0,0)$, e são plotados nas figuras 4.25 e 4.26. Nestes resultados observa-se uma comparação do comportamento das curvas das histórias dos deslocamentos para três diferentes valores do tempo de relaxação β .

4.3.2 Deslocamento concentrado

Para este caso é analisado o comportamento das tensões na viga, quando é solicitada por um deslocamento na direção y , de valor máximo $v_0 = 1,39\text{ cm}$, no mesmo nó

CAPÍTULO 4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

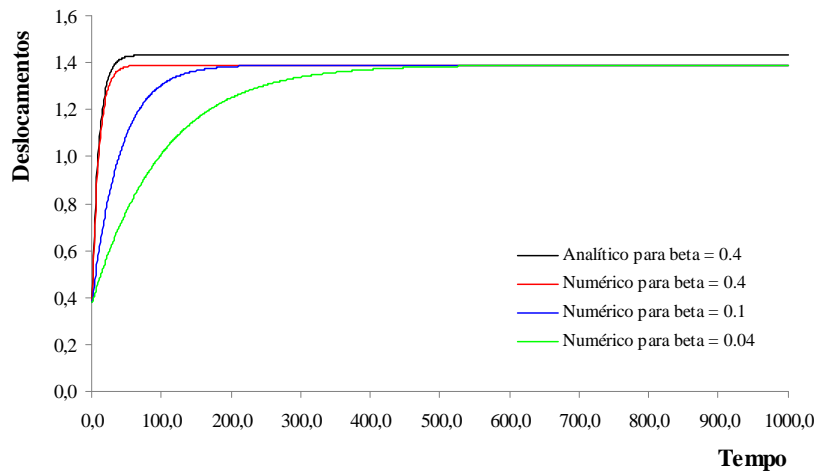


Figura 4.26: Comparação das histórias dos deslocamentos, na direção y , obtidos para três diferentes tempos de relaxação

funcional de aplicação da força concentrada. Neste estudo, tanto para a geometria, quanto para a variação temporal, a discretização e o número de instantes de tempo são os mesmos utilizados pelo estudo anterior. Os resultados obtidos, fazendo uso do modelo 1 e dos valores descritos na tabela 4.1 estão plotados nas figuras 4.27 e 4.28.

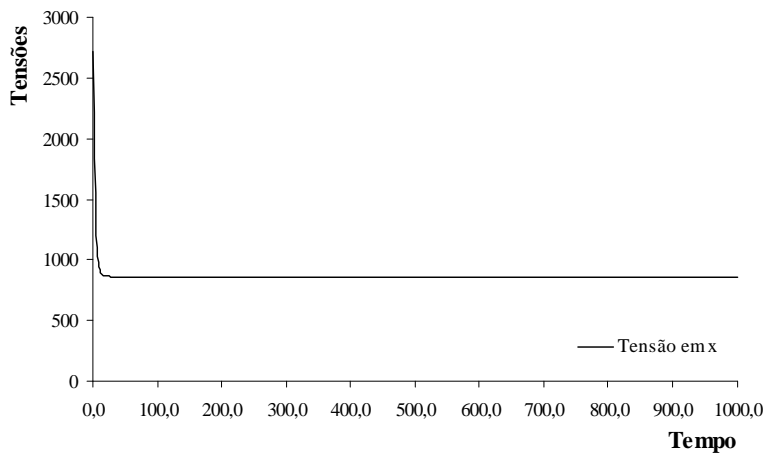


Figura 4.27: Relaxação das tensões na direção x

CAPÍTULO 4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

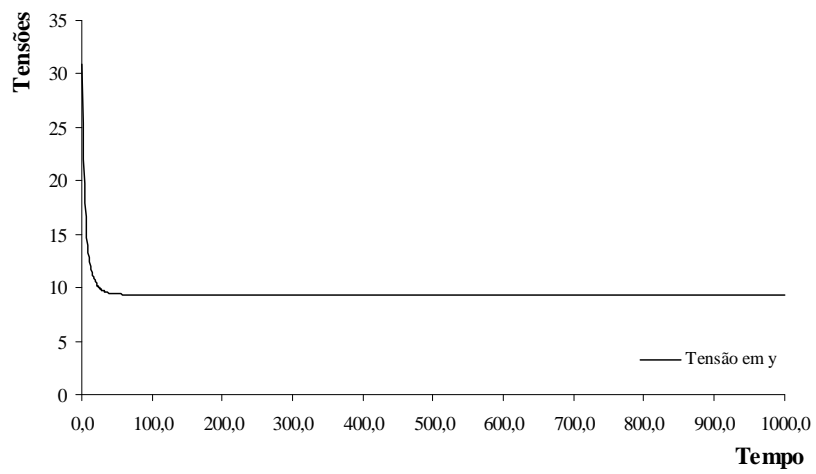


Figura 4.28: Relaxação das tensões na direção y

Capítulo 5

Método dos Elementos de Contorno: Formulação Dinâmica

5.1 Equação Integral no Contínuo

O desenvolvimento das equações integrais para a análise dinâmica segue as premissas enunciadas no capítulo 3, pelas quais os dois sistemas viscoelásticos foram definidos. Ainda assim, a fim de conferir completude a este capítulo, recorda-se que os dois sistemas $(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \mathbf{b})$ e $(\mathbf{u}^*, \mathbf{p}^*, \mathbf{b}^*)$ são supostos bidimensionais, homogêneos, isotrópicos e isotérmicos, com elementos

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\cdot, t), \mathbf{p}(\cdot, t), \mathbf{b}(\cdot, t) \in H^0(-\infty, \infty) \\ \mathbf{u}^*(\cdot, t), \mathbf{p}^*(\cdot, t), \mathbf{b}^*(\cdot, t) \in H^1(-\infty, \infty), \end{cases}$$

tais que satisfaçam as equações governantes enunciadas na seção 2.2. Para esta análise, considera-se apenas a nulidade do termo inercial do sistema $(\mathbf{u}^*, \mathbf{p}^*, \mathbf{b}^*)$, permitindo, desta forma, a validade da generalização quasi-estática da equação de Navier (3.28), na obtenção das soluções fundamentais requeridas.

As expressões das equações integrais, discretizadas pelo Método dos Elementos de Contorno, são obtidas pelo mesmo processo algébrico empregado para as expressões quasi-estáticas, a partir da reciprocidade viscoelástica (3.1). Sendo assim, para \mathbf{b}^*

CAPÍTULO 5. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO: FORMULAÇÃO DINÂMICA

definido pela equação (3.3a) e para $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, obtém-se

$$\begin{aligned}
 u_i(\boldsymbol{\xi}; t) = & \int_{\Gamma} p_j(\mathbf{x}; t) * d u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) d\Gamma - \int_{\Gamma} u_j(\mathbf{x}; t) * d p_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) d\Gamma \\
 & - \rho \int_{\Omega} \ddot{u}_j(\mathbf{x}; t) * d u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) d\Omega
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

para as histórias dos deslocamentos dinâmicos em pontos internos. Analogamente, levando o ponto fonte para o contorno Γ , obtém-se

$$\begin{aligned}
 u_j(\boldsymbol{\xi}; t) * d C_{ij}(\boldsymbol{\xi}; t) = & \int_{\Gamma} p_j(\mathbf{x}; t) * d u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) d\Gamma - \\
 & \int_{\Gamma} u_j(\mathbf{x}; t) * d p_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) d\Gamma - \\
 & \rho \int_{\Omega} \ddot{u}_j(\mathbf{x}; t) * d u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) d\Omega
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

para as histórias dos deslocamentos dinâmicos nos nós funcionais do contorno. As soluções fundamentais presentes nas equações (5.1) e (5.2) são quasi-estáticas, de acordo com a hipótese assumida para o sistema representado por $\Omega^* \cup \Gamma^*$. Serão utilizadas, nesta análise, as soluções bidimensionalizadas de STERNBERG e AL-KHOZAIE [43], apresentadas na subseção 3.2.3.

O teorema da divergência, empregado na construção das equações integrais (5.1) e (5.2), não é capaz de transformar, para o contorno, a integral do termo inercial, que deverá ser avaliada, convenientemente, no domínio Ω . Para o tempo, há a alternativa da simplificação de sua avaliação por meio da eliminação da convolução existente, bastando, para isso, a aplicação do método da integração por partes. Assim, pode-se obter o seguinte:

$$\begin{aligned}
 \ddot{u}_j(\mathbf{x}; t) * d u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) = & u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; 0) \ddot{u}_j(\mathbf{x}; t) + \\
 & [\dot{u}_j(\mathbf{x}; t)]_{t=0} \dot{u}_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) - \\
 & \dot{u}_j(\mathbf{x}; t) [\dot{u}_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t)]_{t=0} .
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Esta simplificação não será empregada neste trabalho, devido ao fato de ser adotado, para a avaliação desta integral, o método incremental discutido na seção 3.5. Como esta estratégia numérica mostrou-se de fácil implementação, achou-se por bem mantê-

la nesta análise.

5.2 Procedimentos Numéricos

As estratégias numéricas descritas aqui dizem respeito somente à integração de domínio e a marcha no tempo realizada no processo dinâmico, uma vez que a avaliação das variáveis no contorno e das convoluções já foram tratadas no capítulo referente a formulação quasi-estática. Nesta etapa do trabalho, adotar-se-á o método incremental para a avaliação das convoluções temporais das equações (5.1) e (5.2). Desta forma, têm-se

$$\begin{aligned}
 u_i(\boldsymbol{\xi}; n \Delta t) = & \\
 & \sum_{e=1}^{NElem} \int_{\Gamma_e} \sum_{\kappa=1}^2 \left\{ \begin{array}{l} p_j^\kappa(\mathbf{x}; 0) u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; n \Delta t) \phi_\kappa + \\ \sum_{m=1}^n \Delta p_j^\kappa(\mathbf{x}; m \Delta t) u_{ij}^*[\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; (n-m) \Delta t] \phi_\kappa \end{array} \right\} d\Gamma - \\
 & \sum_{e=1}^{NElem} \int_{\Gamma_e} \sum_{\kappa=1}^2 \left\{ \begin{array}{l} u_j^\kappa(\mathbf{x}; 0) p_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; n \Delta t) \phi_\kappa + \\ \sum_{m=1}^n \Delta u_j^\kappa(\mathbf{x}; m \Delta t) p_{ij}^*[\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; (n-m) \Delta t] \phi_\kappa \end{array} \right\} d\Gamma - \\
 & \rho \sum_{\alpha=1}^{NCel} \int_{\Omega_\alpha} \sum_{\kappa=1}^3 \left\{ \begin{array}{l} \ddot{u}_j^\kappa(\mathbf{x}; 0) u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; n \Delta t) \eta_\kappa + \\ \sum_{m=1}^n \Delta \ddot{u}_j^\kappa(\mathbf{x}; m \Delta t) u_{ij}^*[\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; (n-m) \Delta t] \eta_\kappa \end{array} \right\} d\Omega, \quad (5.4)
 \end{aligned}$$

para a equação (5.1), discretizada no tempo, no contorno e no domínio, e

$$\begin{aligned}
 u_i(\boldsymbol{\xi}; 0) C_{ij}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; n \Delta t) + \sum_{m=1}^n \Delta u_i(\boldsymbol{\xi}; m \Delta t) C_{ij}[\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; (n-m) \Delta t] = & \\
 & \sum_{e=1}^{NElem} \int_{\Gamma_e} \sum_{\kappa=1}^2 \left\{ \begin{array}{l} p_j^\kappa(\mathbf{x}; 0) u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; n \Delta t) \phi_\kappa + \\ \sum_{m=1}^n \Delta p_j^\kappa(\mathbf{x}; m \Delta t) u_{ij}^*[\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; (n-m) \Delta t] \phi_\kappa \end{array} \right\} d\Gamma - \\
 & \sum_{e=1}^{NElem} \int_{\Gamma_e} \sum_{\kappa=1}^2 \left\{ \begin{array}{l} u_j^\kappa(\mathbf{x}; 0) p_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; n \Delta t) \phi_\kappa + \\ \sum_{m=1}^n \Delta u_j^\kappa(\mathbf{x}; m \Delta t) p_{ij}^*[\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; (n-m) \Delta t] \phi_\kappa \end{array} \right\} d\Gamma - \\
 & \rho \sum_{\alpha=1}^{NCel} \int_{\Omega_\alpha} \sum_{\kappa=1}^3 \left\{ \begin{array}{l} \ddot{u}_j(\mathbf{x}; 0) u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; n \Delta t) \eta_\kappa + \\ \sum_{m=1}^n \Delta \ddot{u}_j(\mathbf{x}; m \Delta t) u_{ij}^*[\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; (n-m) \Delta t] \eta_\kappa \end{array} \right\} d\Omega, \quad (5.5)
 \end{aligned}$$

CAPÍTULO 5. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO: FORMULAÇÃO DINÂMICA

para a equação (5.2). Nas expressões, $n \Delta t$ ($n = 0, 1, \dots, N$) é o intervalo de tempo corrente, atual; $m \Delta t$ é o intervalo de tempo de avaliação; ϕ_κ ($\kappa = 1, 2$) as funções de forma.

5.2.1 Avaliação da integral de domínio

A avaliação da integral de domínio é realizada mediante o uso de células triangulares lineares para a parametrização dos pontos internos. A escolha desta técnica se justifica pela experiência adquirida no desenvolvimento da tese de mestrado [45] do referido autor e da possibilidade da execução de um procedimento de integração semi-analítica apresentada por TELLES [46].

Células triangulares lineares são definidas por meio de coordenadas de área (η_1, η_2, η_3) [27] e [47], pelas quais qualquer ponto P do domínio destas é determinado. A figura 5.1 ilustra esta afirmativa,

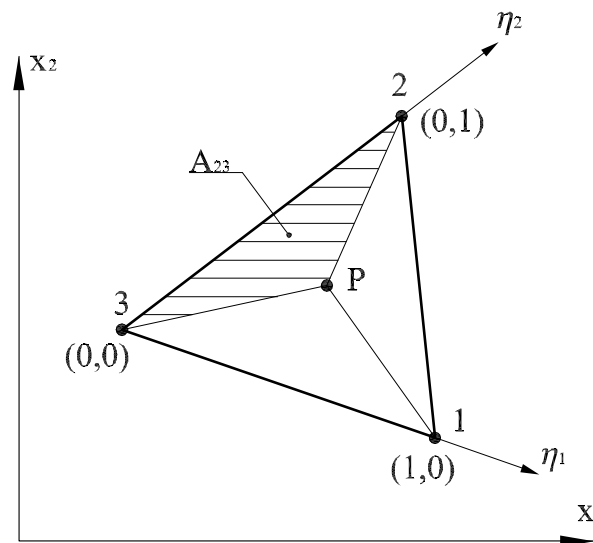


Figura 5.1: Célula triangular linear

que pode ser expressada, matematicamente, por

$$\eta_i^P = \frac{A_{jk}^P}{2A}, \quad (5.6)$$

com $i = 1, 2, 3$, $j = 2, 3, 1$ e $k = 3, 1, 2$, onde o termo

$$A_{jk}^P = 2A_i^0 + b_i x_1 + a_i x_2, \quad (5.7)$$

CAPÍTULO 5. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO: FORMULAÇÃO DINÂMICA

representa a subárea formada pelo ponto P e os vértices j e k , e

$$A = \frac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{2} \quad (5.8)$$

a área total da célula. A figura 5.1 não mostra a coordenada η_3 , pois a mesma é definida como função das outras duas, segundo

$$\eta_3 = 1 - \eta_1 - \eta_2. \quad (5.9)$$

Os termos extras são definidos por

$$a_i = x_1^k - x_1^j, \quad (5.10)$$

$$b_i = x_2^j - x_2^k \quad (5.11)$$

e

$$A_i^0 = \frac{x_1^j x_2^k - x_1^k x_2^j}{2}. \quad (5.12)$$

Sendo assim, qualquer variável é reescrita como a soma de seus valores nos vértices da célula, parametrizados pelas respectivas funções de interpolação, como por exemplo, para

$$u_i = u_i^1 \eta_1 + u_i^2 \eta_2 + u_i^3 \eta_3. \quad (5.13)$$

5.2.1.1 Integração singular

A técnica de integração semi-analítica, apresentada por TELLES [46], é uma estratégia numérica eficaz na avaliação de integrais singulares. Neste processo a singularidade existente é removida por meio de uma avaliação analítica, em coordenadas polares (r, φ) , da integral de domínio. A dependência da variável restante é avaliada numericamente por um processo qualquer, como a quadratura Gaussiana unidimensional. Em CEZARIO [45], por exemplo, é vista uma aplicação desta técnica na avaliação de uma singularidade da ordem de $\frac{1}{r}$. Neste trabalho, a singularidade é mais fraca (da ordem de $\ln r$), como pode ser vista na expressão (3.37) da solução fundamental u_{ij}^* .

Na figura 5.2 está ilustrada uma célula triangular singular, onde é possível, através de uma simples análise geométrica, obter as seguintes componentes de r em coordenadas polares:

CAPÍTULO 5. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO: FORMULAÇÃO DINÂMICA

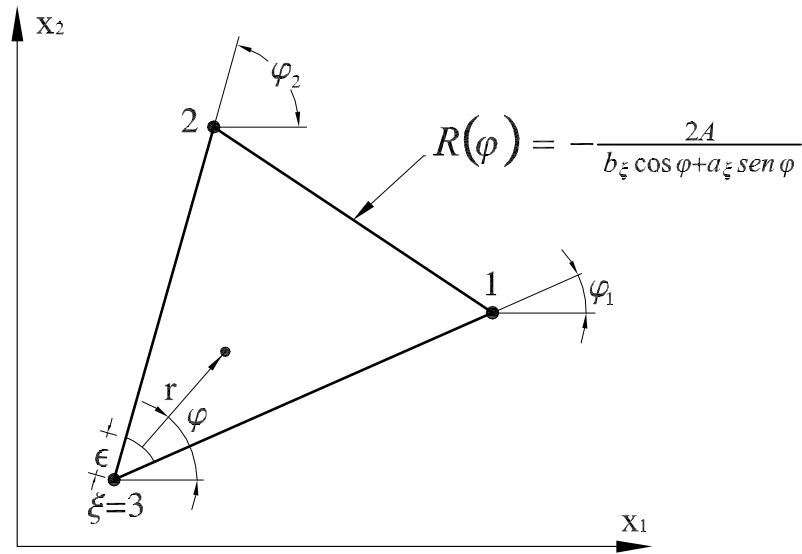


Figura 5.2: Célula triangular singular

$$r_{,1} = \frac{r_1}{r} = \cos \varphi \text{ e } r_{,2} = \frac{r_2}{r} = \text{sen } \varphi. \quad (5.14)$$

Após uma transformação de coordenadas da função (5.6), todo ponto da célula passa a ser parametrizado por

$$\bar{\eta}_i(r, \varphi) = \xi \eta_\iota + \frac{r}{2A} (b_\iota \cos \varphi + a_\iota \text{sen } \varphi), \quad \xi \eta_\iota = \begin{cases} 0, \iota \neq \xi \\ 1, \iota = \xi \end{cases}, \quad (5.15)$$

de forma que a história das acelerações analisada possa ser interpolada, nos vértices da célula, como os deslocamentos na equação (5.13). Tendo-se o necessário, a integral de volume (Eqs. 5.4 e 5.5), pode ser escrita como

$$\rho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left\{ \begin{array}{l} \ddot{u}_j^\iota(0) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{R(\varphi)} \bar{\eta}_\iota(r, \varphi) u_{ij}^* (r, \varphi; n \Delta t) r dr + \\ \sum_{m=1}^n \Delta \ddot{u}_j^\iota(m \Delta t) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{R(\varphi)} \bar{\eta}_\iota(r, \varphi) u_{ij}^* [r, \varphi; (n - m) \Delta t] r dr \end{array} \right\} d\varphi, \quad (5.16)$$

sendo $\iota = 1, 2, 3$, ϵ o raio de uma circunferência centrada em ξ e $R(\varphi)$ a distância

CAPÍTULO 5. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO: FORMULAÇÃO DINÂMICA

definida na figura 5.2. A avaliação analítica da integral em r resulta na expressão

$$\rho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left\{ \ddot{u}_j^t(0) \Psi_{ij}^t(\varphi, n \Delta t) + \sum_{m=1}^n \Delta \ddot{u}_j^t(m \Delta t) \Psi_{ij}^t(\varphi, (n-m) \Delta t) \right\} d\varphi, \quad (5.17)$$

onde a função $\Psi_{ij}^t(\varphi, t)$ guarda do deslocamento fundamental apenas a dependência do ângulo φ , conforme é visto na equação seguinte:

$$\Psi_{ij}^t(\varphi, t) = \frac{1}{4\pi} \left\{ 2J_1(t) [\psi_{ij}^1 + \psi_{ij}^2] - 3Q_1(t) [\psi_{ij}^3 + \psi_{ij}^4] \right\}, \quad (5.18)$$

nos quais os termos são:

$$\psi_{ij}^1 = \xi \eta_l \frac{R^2(\varphi)}{2} \left[r_{,i} r_{,j} - \delta_{ij} \left(\ln R(\varphi) - \frac{1}{2} \right) \right], \quad (5.19)$$

$$\psi_{ij}^2 = \frac{R^3(\varphi)}{3} \frac{1}{2A} (b_l \cos \varphi + a_l \operatorname{sen} \varphi) \left[r_{,i} r_{,j} - \delta_{ij} \left(\ln R(\varphi) - \frac{1}{3} \right) \right], \quad (5.20)$$

$$\psi_{ij}^3 = \xi \eta_l \frac{R^2(\varphi)}{2} \left[r_{,i} r_{,j} + \delta_{ij} \left(\ln R(\varphi) - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (5.21)$$

e

$$\psi_{ij}^4 = \frac{R^3(\varphi)}{3} \frac{1}{2A} (b_l \cos \varphi + a_l \operatorname{sen} \varphi) \left[r_{,i} r_{,j} + \delta_{ij} \left(\ln R(\varphi) - \frac{1}{3} \right) \right]. \quad (5.22)$$

Para a integral restante, assumindo

$$\varphi = \frac{\gamma}{2} (\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{1}{2} (\varphi_2 + \varphi_1), \quad (5.23)$$

um processo de avaliação numérica, baseado na quadratura Gaussiana, fornece a expressão final e discretizada da integral de domínio:

$$\rho \sum_{\beta=1}^{NG} \left\{ \begin{array}{l} \ddot{u}_j^t(0) \Psi_{ij}^t(\hat{x}_\beta, n \Delta t) + \\ \sum_{m=1}^n \Delta \ddot{u}_j^t(m \Delta t) \Psi_{ij}^t(\hat{x}_\beta, (n-m) \Delta t) \end{array} \right\} \left[\frac{(\varphi_2 - \varphi_1)}{2} \right] \omega_\beta, \quad (5.24)$$

onde $\gamma \in [-1, 1]$; φ_1 e φ_2 os ângulos definidos na figura 5.2; NG , \hat{x}_β e ω_β o número total de pontos, as abscissas dos pontos e os pesos, na quadratura Gaussiana, respectivamente.

5.2.1.2 Integração não singular

Para o caso em que não há singularidades, ou seja, não há coincidência entre o ponto fonte e os vértices da célula, a avaliação da integral de domínio não necessita do processo semi-analítico para ser efetuada. Todavia, esta técnica também apresenta resultados satisfatórios para as avaliações não singulares e por esse motivo também é empregada aqui.

A figura 5.3 ilustra a célula não singular, conforme apresentado em [46]. De forma

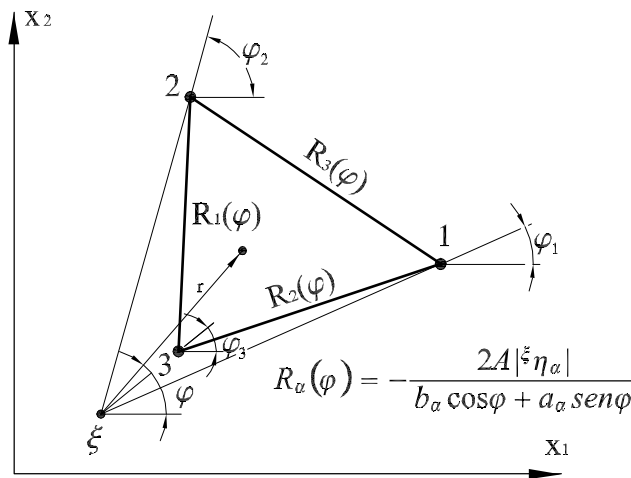


Figura 5.3: Célula triangular não singular

análoga, cientificados das componentes de r (Eq. 5.14) e da função de interpolação (Eq. 5.15), para ξ_{η_l} calculado pela função (5.6), é possível escrever a integral de domínio, em coordenadas polares e com as acelerações já parametrizadas, na forma:

$$\rho \left\{ \begin{array}{l} \int_{\varphi_1}^{\varphi_3} \left[\begin{array}{l} \ddot{u}_j^t(0) \int_{R_2(\varphi)}^{R_3(\varphi)} \bar{\eta}_l(r, \varphi) u_{i,j}^*[r, \varphi; n \Delta t] r dr + \\ \sum_{m=1}^N \Delta \ddot{u}_j^t(m \Delta t) \int_{R_2(\varphi)}^{R_3(\varphi)} \bar{\eta}_l(r, \varphi) u_{i,j}^*[r, \varphi; (n-m) \Delta t] r dr \end{array} \right] d\varphi + \\ \int_{\varphi_3}^{\varphi_2} \left[\begin{array}{l} \ddot{u}_j^t(0) \int_{R_1(\varphi)}^{R_3(\varphi)} \bar{\eta}_l(r, \varphi) u_{i,j}^*[r, \varphi; n \Delta t] r dr + \\ \sum_{m=1}^N \Delta \ddot{u}_j^t(m \Delta t) \int_{R_1(\varphi)}^{R_3(\varphi)} \bar{\eta}_l(r, \varphi) u_{i,j}^*[r, \varphi; (n-m) \Delta t] r dr \end{array} \right] d\varphi \end{array} \right\},$$

CAPÍTULO 5. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO: FORMULAÇÃO DINÂMICA

$$(5.25)$$

com os limites de integração assumidos de acordo com a figura 5.3 e $\iota = 1, 2, 3$. A avaliação analítica das integrais em r fornece o seguinte resultado:

$$\rho \left\{ \begin{array}{l} \int_{\varphi_1}^{\varphi_3} \left[\ddot{u}_j^\iota(0) {}^1\Psi_{ij}^\iota(\varphi, n \Delta t) + \sum_{m=1}^N \Delta \ddot{u}_j^\iota(m \Delta t) {}^1\Psi_{ij}^\iota(\varphi, (n-m) \Delta t) \right] d\varphi + \\ \int_{\varphi_2}^{\varphi_3} \left[\ddot{u}_j^\iota(0) {}^2\Psi_{ij}^\iota(\varphi, n \Delta t) + \sum_{m=1}^N \Delta \ddot{u}_j^\iota(m \Delta t) {}^2\Psi_{ij}^\iota(\varphi, (n-m) \Delta t) \right] d\varphi \end{array} \right\}, \quad (5.26)$$

onde as funções em Ψ são definidas por

$${}^k\Psi_{ij}^\iota(\varphi, t) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} 2J_1(t) [{}^k\psi_{ij}^1(\varphi) + {}^k\psi_{ij}^2(\varphi)] - \\ 3Q_1(t) [{}^k\psi_{ij}^3(\varphi) + {}^k\psi_{ij}^4(\varphi)] \end{array} \right\}, \quad (5.27)$$

$$\psi_{ij}^1 = \xi \eta_\iota \left\{ \delta_{ij} \left[\begin{array}{l} \frac{[R_{k_1}^2 - R_{k_2}^2](\varphi)}{2} r_{,i} r_{,j} - \\ \frac{R_{k_1}^2(\varphi)}{2} \ln R_{k_1}(\varphi) - \\ \frac{R_{k_2}^2(\varphi)}{2} \ln R_{k_2}(\varphi) \\ -\frac{R_{k_1}^2(\varphi)}{4} + \frac{R_{k_2}^2(\varphi)}{4} \end{array} \right] \right\}, \quad (5.28)$$

$$\psi_{ij}^3 = \xi \eta_\iota \left\{ \delta_{ij} \left[\begin{array}{l} \frac{[R_{k_1}^2 - R_{k_2}^2](\varphi)}{2} r_{,i} r_{,j} + \\ \frac{R_{k_1}^2(\varphi)}{2} \ln R_{k_1}(\varphi) - \\ \frac{R_{k_2}^2(\varphi)}{2} \ln R_{k_2}(\varphi) \\ -\frac{R_{k_1}^2(\varphi)}{4} + \frac{R_{k_2}^2(\varphi)}{4} \end{array} \right] \right\}, \quad (5.29)$$

CAPÍTULO 5. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO: FORMULAÇÃO DINÂMICA

$$\psi_{ij}^2 = \frac{1}{2A} (b_i \cos \varphi + a_i \operatorname{sen} \varphi) \left\{ \delta_{ij} \left[\begin{array}{l} \frac{[R_{k_1}^2 - R_{k_2}^2](\varphi)}{2} r_{,i} r_{,j} - \\ \left[\begin{array}{l} \frac{R_{k_1}^3(\varphi)}{3} \ln R_{k_1}(\varphi) - \\ \frac{R_{k_2}^3(\varphi)}{3} \ln R_{k_2}(\varphi) \\ -\frac{R_{k_1}^3(\varphi)}{9} + \frac{R_{k_2}^3(\varphi)}{9} \end{array} \right] \end{array} \right] \right\} \quad (5.30)$$

e

$$\psi_{ij}^4 = \frac{1}{2A} (b_i \cos \varphi + a_i \operatorname{sen} \varphi) \left\{ \delta_{ij} \left[\begin{array}{l} \frac{[R_{k_1}^2 - R_{k_2}^2](\varphi)}{2} r_{,i} r_{,j} + \\ \left[\begin{array}{l} \frac{R_{k_1}^3(\varphi)}{3} \ln R_{k_1}(\varphi) - \\ \frac{R_{k_2}^3(\varphi)}{3} \ln R_{k_2}(\varphi) \\ -\frac{R_{k_1}^3(\varphi)}{9} + \frac{R_{k_2}^3(\varphi)}{9} \end{array} \right] \end{array} \right] \right\}, \quad (5.31)$$

para

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = 3 \text{ e } k_2 = 2, \text{ quando } k = 1 \\ k_1 = 3 \text{ e } k_2 = 1, \text{ quando } k = 2 \end{array} \right.$$

e para as funções de $R_\alpha(\varphi)$ definidas na figura 5.3. Finalmente, com a aplicação da integração numérica, por meio da quadratura Gaussiana, chega-se a

$$\rho \sum_{\beta=1}^{NG} \omega_\beta \left\{ \left[\begin{array}{l} \ddot{u}_j^t(0) \, {}^1\Psi_{ij}^t(\hat{x}_\beta, n \Delta t) + \\ \sum_{m=1}^N \Delta \ddot{u}_j^t(m \Delta t) \, {}^1\Psi_{ij}^t(\hat{x}_\beta, (n-m) \Delta t) \end{array} \right] \frac{(\varphi_3 - \varphi_1)}{2} + \right. \\ \left. \left[\begin{array}{l} \ddot{u}_j^t(0) \, {}^2\Psi_{ij}^t(\hat{x}_\beta, n \Delta t) + \\ \sum_{m=1}^N \Delta \ddot{u}_j^t(m \Delta t) \, {}^2\Psi_{ij}^t(\hat{x}_\beta, (n-m) \Delta t) \end{array} \right] \frac{(\varphi_2 - \varphi_3)}{2} \right\}. \quad (5.32)$$

Os ângulos φ_1 , φ_2 e φ_3 são definidos na figura 5.2; NG , \hat{x}_β e ω_β representam, respectivamente, o número total de pontos, as abscissas dos pontos e os pesos, na quadratura Gaussiana, como já comentado anteriormente.

5.2.2 Métodos de integração direta no tempo

Solucionadas as integrais do problema viscoelástico aqui tratado, o sistema resultante, na forma da convolução de Stieltjes, é expressado por

$$\mathbf{u} * d\mathbf{H} = \mathbf{p} * d\mathbf{G} - \rho \ddot{\mathbf{u}} * d\mathbf{Q}. \quad (5.33)$$

Diferentemente da análise quasi-estática, onde somente as variáveis do contorno eram as incógnitas procuradas, calculando, posteriormente, os deslocamentos em pontos internos, o problema dinâmico apresentado pelo sistema (5.33) revela-se, também, dependente das variáveis definidas em pontos do domínio, estendendo o número de equações necessárias para a solução do sistema. Assim sendo, em conformidade com um caso similar tratado por TELLES e CARRER [48], o sistema (5.33) pode ser reescrito, na sua forma matricial, como

$$\begin{bmatrix} H^{cc} & 0 \\ H^{dc} & I \end{bmatrix} * d \begin{Bmatrix} u^c \\ u^d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{cc} & 0 \\ G^{dc} & 0 \end{bmatrix} * d \begin{Bmatrix} p^c \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} Q^{cc} & Q^{cd} \\ Q^{dc} & Q^{dd} \end{bmatrix} * d \begin{Bmatrix} \ddot{u}^c \\ \ddot{u}^d \end{Bmatrix}, \quad (5.34)$$

onde os superíndices c e d denotam a contribuição do contorno e do domínio respectivamente, e a matriz identidade representa os coeficientes $C_{ij}(\xi; t)$ relacionados aos pontos internos. Relembra-se aqui a possibilidade de tratar o mesmo problema adotando técnica alternativa, baseada no conhecimento prévio dos valores das variáveis de domínio, em instante imediatamente anterior aquele da análise, como empregado por CEZARIO [45]. Esta estratégia foi experienciada na análise do sistema (5.33), mas não se mostrou eficiente em face dos resultados obtidos pela estratégia empregada em (5.34).

O problema instaurado pelo sistema (5.33) exige um procedimento de marcha no tempo para ser adequadamente avaliado. A princípio, a análise que se apresenta de implementação imediata é aquela baseada nos métodos de integração direta. Sendo assim, sabendo ser possível, por meio destes, efetuar os cálculos matriciais no intervalo $[t, t + \Delta t]$, verificando simultaneamente a condição de equilíbrio, adota-se para esta análise dinâmica os métodos a seguir descritos.

5.2.2.1 Método das Diferenças Centrais

Segundo BATHE [47], o método das Diferenças Centrais é caracterizado por um processo explícito de marcha no tempo, em que todo o sistema avaliado é considerado no instante t . Ao contrário do que é preconizado, adota-se, aqui, estratégia análoga a usada por SOUZA et al [49] na avaliação do problema discretizado pelo Método

CAPÍTULO 5. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO: FORMULAÇÃO DINÂMICA

dos Elementos de Contorno, para o qual o processo assume um caráter alternativo ou modificado. Assim sendo, recorrendo às expressões das diferenças finitas para aproximar a segunda derivada temporal do deslocamento (eq. 5.33), tem-se que

$$\ddot{\mathbf{u}}^t = \frac{1}{\Delta t^2} (\mathbf{u}^{t-\Delta t} - 2\mathbf{u}^t + \mathbf{u}^{t+\Delta t}), \quad (5.35)$$

assegurando um erro $O(\Delta t^2)$. Logo, o sistema (5.33), discretizado para o tempo $t + \Delta t$, com aceleração avaliada no instante imediatamente anterior t , é reescrita, após substituição de (5.35), da seguinte forma

$$\mathbf{u}^{t+\Delta t} * d \left(\mathbf{H} + \rho \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{Q} \right) - \mathbf{p}^{t+\Delta t} * d\mathbf{G} = -\rho \frac{1}{\Delta t^2} (\mathbf{u}^{t-\Delta t} - 2\mathbf{u}^t) * d\mathbf{Q}. \quad (5.36)$$

A obtenção dos valores dos deslocamentos e forças de superfícies no instante $t + \Delta t$, pelo sistema (5.36), necessitará dos valores dos deslocamentos nos instantes t e $t - \Delta t$. Uma vez assumidas, na seção 2.2, as condições iniciais (eq. 2.10), sabe-se que são nulos os deslocamentos em todos os instantes negativos. Desta forma, iniciando a análise para o instante $t = 0$, as soluções procuradas são facilmente encontradas.

5.2.2.2 Método de Houbolt

O método de Houbolt, semelhante ao método das Diferenças Centrais, também emprega diferenças finitas na aproximação das variáveis. Neste esquema, a aproximação da aceleração é realizada com uma diferença retroativa, com erro $O(\Delta t^2)$, como pode ser visto na expansão

$$\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t^2} (2\mathbf{u}^{t+\Delta t} - 5\mathbf{u}^t + 4\mathbf{u}^{t-\Delta t} - \mathbf{u}^{t-2\Delta t}). \quad (5.37)$$

Assumindo a discretização do sistema (5.33) no instante $t + \Delta t$, a substituição da aproximação (eq. 5.37) gera o seguinte:

$$\mathbf{u}^{t+\Delta t} * d \left(\mathbf{H} + \rho \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{Q} \right) - \mathbf{p}^{t+\Delta t} * d\mathbf{G} = -\rho \frac{1}{\Delta t^2} (-5\mathbf{u}^t + 4\mathbf{u}^{t-\Delta t} - \mathbf{u}^{t-2\Delta t}) * d\mathbf{Q}. \quad (5.38)$$

Novamente, conforme discutido no método das Diferenças Centrais, as soluções do sistema (5.38) são facilmente encontradas, iniciando o processo de marcha no tempo no instante $t = 0$.

5.2.2.3 Método da 4ª ordem

Visando uma maior precisão para os resultados, o método de quarta ordem, segundo SOUZA et al [49] e SOUZA e MOURA [50], é baseado na interpolação de quarta ordem de Lagrange [51] do deslocamento do tempo $t - 3\Delta t$ ao tempo $t + \Delta t$. A segunda derivada com respeito a variável interpolada fornece

$$\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \frac{1}{12\Delta t^2} (35\mathbf{u}^{t+\Delta t} - 104\mathbf{u}^t + 114\mathbf{u}^{t-\Delta t} - 56\mathbf{u}^{t-2\Delta t} + 11\mathbf{u}^{t-3\Delta t}), \quad (5.39)$$

donde o sistema (5.33), avaliado no tempo $t + \Delta t$, segue facilmente, substituindo a expressão (5.39). Contudo, conforme comentários de SOUZA et al [49], a fim de se obter resultados melhores, recomenda-se reescrever o sistema (5.33) com \mathbf{u} e \mathbf{p} no tempo $t + \Delta t$, e $\ddot{\mathbf{u}}$ no tempo t . Assim, recalculando a interpolação para a aceleração $\ddot{\mathbf{u}}^t$, tem-se

$$\ddot{\mathbf{u}}^t = \frac{1}{\Delta t^2} \left(\frac{11}{12}\mathbf{u}^{t+\Delta t} - \frac{5}{3}\mathbf{u}^t + \frac{1}{2}\mathbf{u}^{t-\Delta t} - \frac{1}{3}\mathbf{u}^{t-2\Delta t} + \frac{1}{12}\mathbf{u}^{t-3\Delta t} \right). \quad (5.40)$$

Desta forma tem-se, finalmente,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{t+\Delta t} * d \left(\mathbf{H} + \rho \frac{11}{12\Delta t^2} \mathbf{Q} \right) - \mathbf{p}^{t+\Delta t} * d\mathbf{G} = \\ -\rho \frac{1}{\Delta t^2} \left(-\frac{5}{3}\mathbf{u}^t + \frac{1}{2}\mathbf{u}^{t-\Delta t} - \frac{1}{3}\mathbf{u}^{t-2\Delta t} + \frac{1}{12}\mathbf{u}^{t-3\Delta t} \right) * d\mathbf{Q}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Capítulo 6

Exemplos Numéricos

A verificação da formulação dinâmica viscoelástica se fará aqui, nos moldes da apresentada no capítulo 4, ou seja, serão adotados os mesmos modelos reológicos na descrição do comportamento e as mesmas variações para as forças ou deslocamentos aplicados. Infelizmente, pelo menos a tempo, não foram encontradas soluções analíticas para as comparações dos problemas seguintes. Somente para o caso do segundo exemplo foi encontrada uma solução analítica dinâmica [54], porém a aplicação do Princípio da Correspondência, no domínio transformado, mostrou-se de difícil avaliação.

6.1 Viga Bi-apoiada Submetida a Carregamento Uniformemente Distribuído

Para dar início a verificação da formulação dinâmica, foi escolhido o exemplo ilustrado pela figura 4.17, já analisado pela formulação quasi-estática. Nesta análise, entretanto, a viga bi-apoiada assume uma geometria distinta. Adota-se para esta $L = 100 \text{ cm}$ e $c = 25 \text{ cm}$. O carregamento distribuído, ao qual é submetida, pode variar de acordo com as figuras 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4, assumindo valor máximo $q_0 = 1 \text{ kN/m}$. Sua densidade é $\rho = 1, 5$.

Considerando a simetria existente, são realizadas três discretizações espaciais para a efetuação da análise numérica. A primeira é composta de 16 nós funcionais no contorno e 16 células no domínio; a segunda compõe-se de 34 nós no contorno e 100 células no domínio; a terceira, e última, compõe-se de 64 nós no contorno e 400 células no domínio. A figura 6.1 ilustra um modelo das discretizações realizadas para esta análise e daquelas usadas nos exemplos seguintes. Os resultados encontrados são plotados para o nó $N(0, -25)$ e, até menção contrária, para o modelo reológico 1.

CAPÍTULO 6. EXEMPLOS NUMÉRICOS

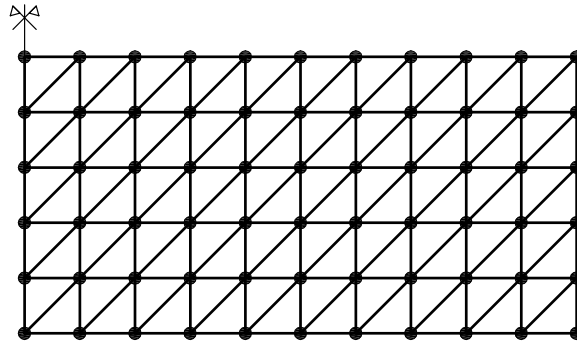


Figura 6.1: Modelo adotado para as malhas da viga analisada e, similarmente, para os demais exemplos

Os primeiros resultados dos deslocamentos dinâmicos, obtidos para o ponto descrito, são aqueles ilustrados pela figura 6.2, para um intervalo de tempo $\Delta t = 0,5s$,

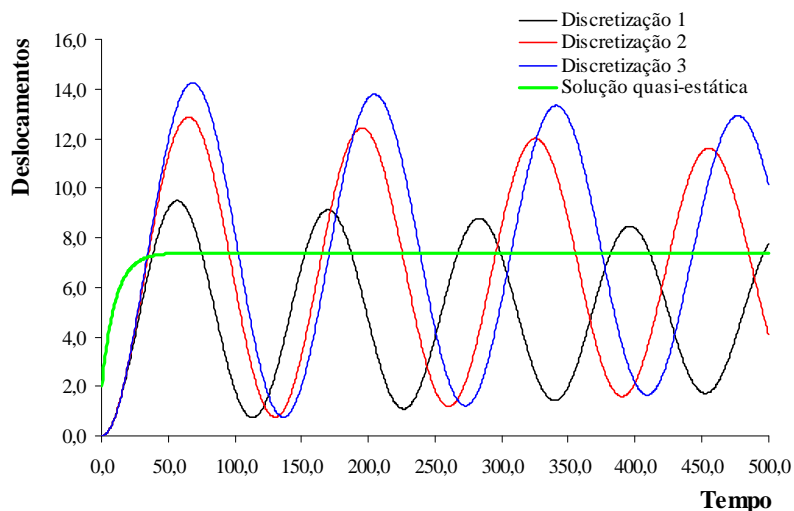


Figura 6.2: Deslocamentos dinâmicos obtidos pelo método da Diferença Central para $\Delta t = 0,5s$ e $n = 1000$ intervalos de tempo e a solicitação do tipo 1 (fig. 4.1)

onde é realizada uma comparação entre as três discretizações adotadas, para o método da Diferença Central, e a resposta quasi-estática deste problema. A fim de melhor visualizar o amortecimento natural do material viscoelástico, é estendido o número total de intervalos de tempo para 3000, e os deslocamentos resultantes plotados na figura 6.3, para as três discretizações. Valores maiores e menores de Δt foram experimentados para o método da Diferença Central e a estabilidade dos resultados requerida foi atendida em todas as análises. O método de 4ª ordem mostrou um desempenho bas-

CAPÍTULO 6. EXEMPLOS NUMÉRICOS

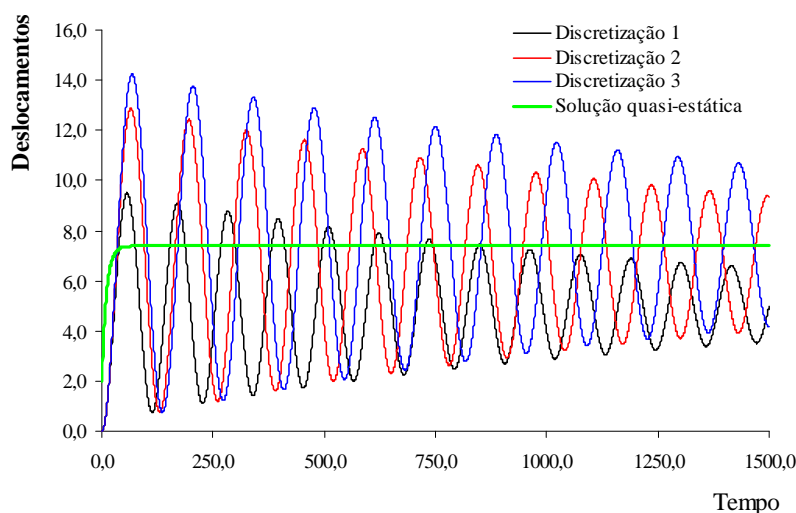


Figura 6.3: Deslocamentos dinâmicos obtidos pelo método da Diferença Central para $\Delta t = 0,5s$ e $n = 3000$ intervalos de tempo

tante parecido com o da Diferença Central, o que dificulta, enormemente, a escolha do melhor. As figuras seguintes mostrarão isto.

O método de Houbolt, mesmo sendo incondicional, perde estabilidade para valores de $\Delta t \leq 0,1s$ e não converge para o valor esperado (fig. 6.4). Outro fato importante a ser considerado para o método de Houbolt, que possui amortecimento numérico, é a verificação tardia do amortecimento natural viscoelástico. Em comparação com os resultados alcançados pelo método da Diferença Central e do método da aproximação de 4ª ordem, verifica-se que somente estes últimos demonstram o comportamento desejado, convergindo para seu valor quando $t \rightarrow \infty$, em um curto espaço de tempo (fig. 6.5). O amortecimento do método de Houbolt somente é observado para valores de $\Delta t > 1s$, como é visto na figura 6.6. O motivo deste fenômeno não foi verificado, mas é possível especular, em vista do demonstrado pelos métodos da Diferença Central e de aproximação de 4ª ordem, que a pequena falta de equilíbrio, aliada a um valor adequadamente pequeno de Δt , possa ser favorável não só a estabilidade, quanto à qualidade dos valores finais, conforme comenta SOUZA et al [49] para a aproximação de 4ª ordem.

Para finalizar este exemplo, são apresentados os deslocamentos obtidos para as variações de carregamento ilustradas nas figuras 4.2 e 4.3 (figs. 6.7 e 6.8), e para os modelos 2, 3 e 4, analisados pelo método de 4ª ordem (fig. 6.9), com valores de $t_1 = 250s$, $t_2 = 750s$ e $t_3 = 1000s$.

CAPÍTULO 6. EXEMPLOS NUMÉRICOS

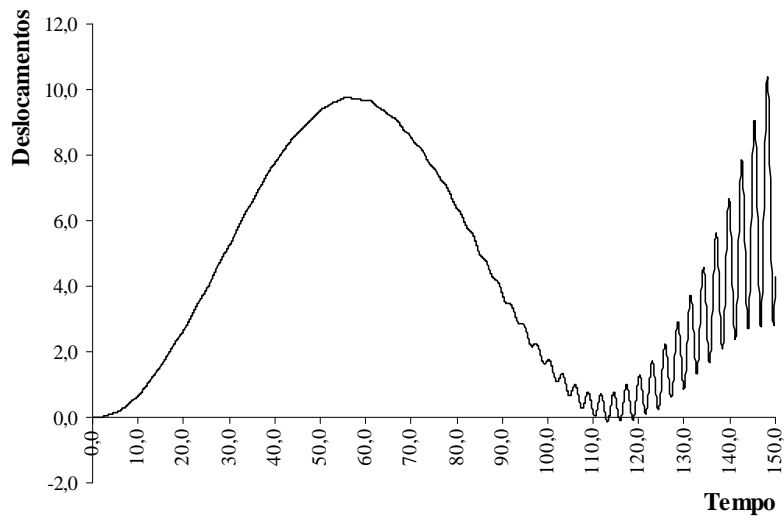


Figura 6.4: Verificação da perda de estabilidade no método de Houbolt para $\Delta t \leq 0,1s$

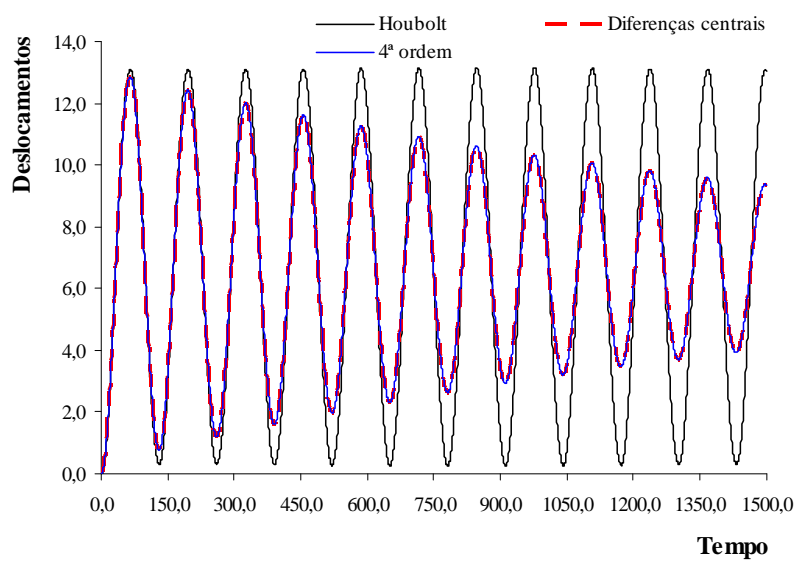


Figura 6.5: Comparação entre os três métodos de marcha no tempo

CAPÍTULO 6. EXEMPLOS NUMÉRICOS

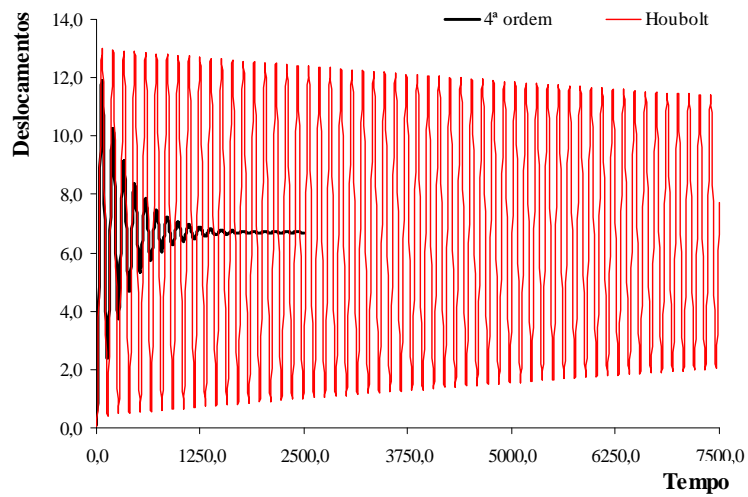


Figura 6.6: Verificação do amortecimento viscoelástico para $\Delta t = 2,5s$

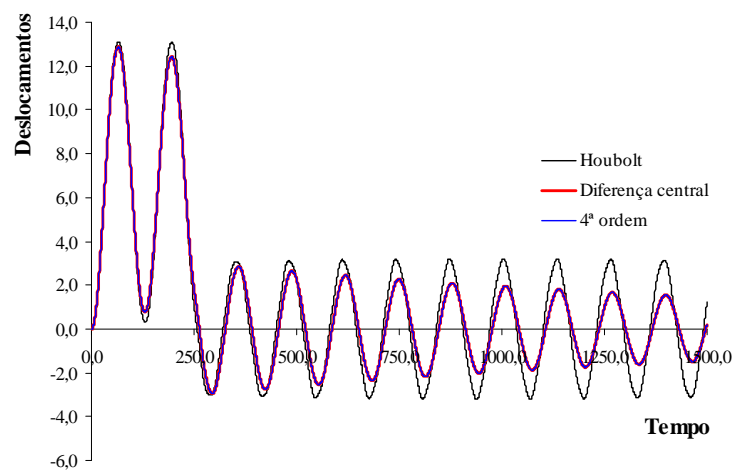


Figura 6.7: Deslocamentos dinâmicos obtidos para a variação do carregamento tipo 2 (fig. 4.2)

CAPÍTULO 6. EXEMPLOS NUMÉRICOS

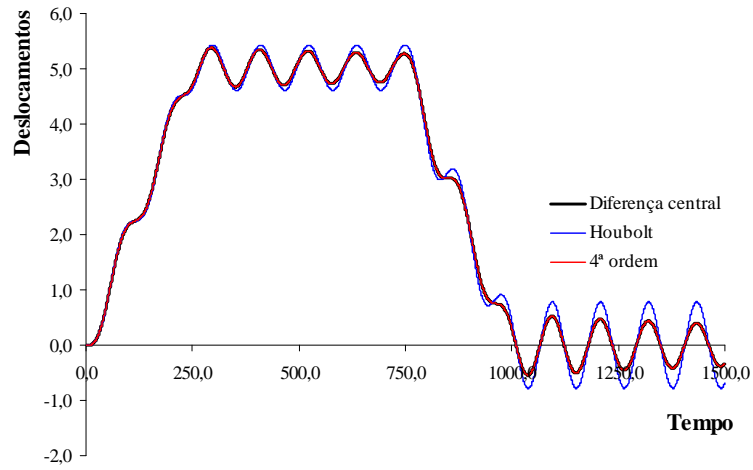


Figura 6.8: Deslocamentos dinâmicos obtidos para a variação do carregamento tipo 3 (fig. 4.3)

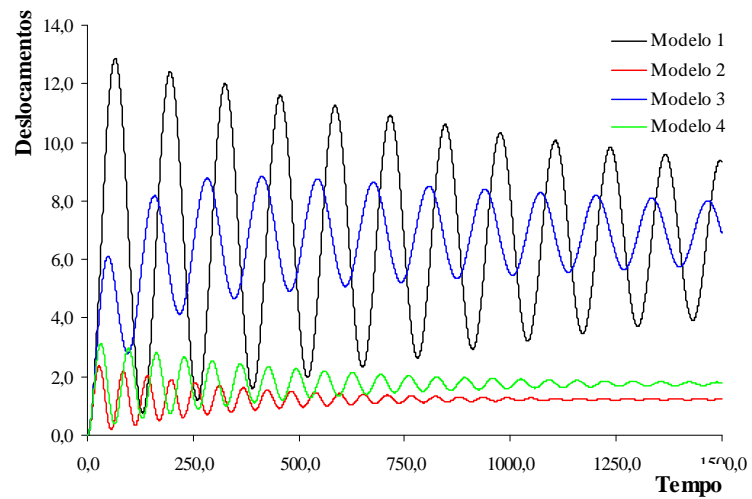


Figura 6.9: Deslocamentos dinâmicos obtidos pelo método de quarta ordem para os modelos reológicos descritos

6.2 Barra Engastada Sujeita a Carga Axial no Bordo Livre

O problema a ser analisado agora é o de uma barra de dimensões $L = 100\text{ cm}$ e $h = 50\text{ cm}$, sujeita a um carregamento axial, uniformemente distribuído, conforme ilustração da figura 6.10. O carregamento, de variação temporal, atinge o valor

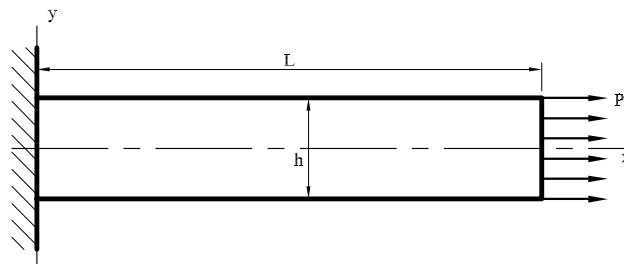


Figura 6.10: Barra sujeita a carregamento axial uniformemente distribuído

máximo $q_0 = 10\text{ kN/cm}^2$. Iniciando a análise com duas discretizações: uma com 28 nós no contorno e 64 células de domínio, outra com 52 nós no contorno e 256 células de domínio, para o nó $N(100, 0)$ coincidente com o eixo x e a face carregada da barra, utilizando o modelo reológico 1 e densidade $\rho = 15$. Os resultados comparativos entre as duas discretizações adotadas podem ser vistos na figura 6.11, para o método da Diferença Central. Os deslocamentos plotados não diferem o suficiente para que se

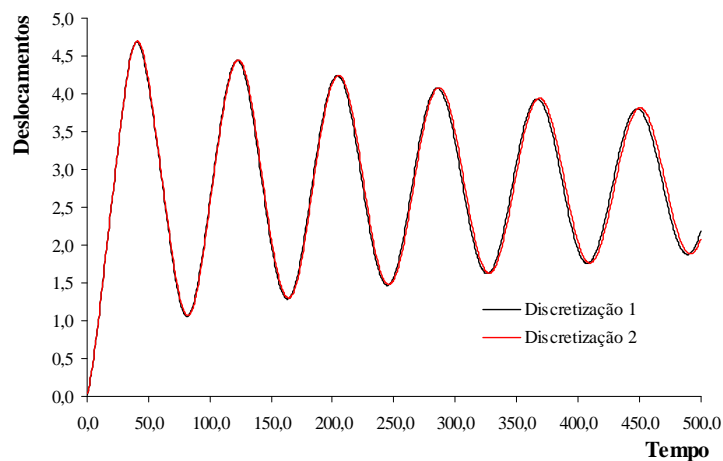


Figura 6.11: Resultados numéricos obtidos para as duas discretizações com o uso da Diferença Central

CAPÍTULO 6. EXEMPLOS NUMÉRICOS

assuma o custo computacional da análise da discretização mais refinada. Para os resultados que se seguem, somente, a primeira discretização é empregada.

Avaliando os resultados apresentados pela figura 6.12 é possível visualizar o amortecimento viscoelástico na evolução dos resultados dos três métodos, confrontando-os com a solução quasi-estática da barra. Neste exemplo o método de Houbolt parece se comportar melhor do que no problema da viga, mesmo que o amortecimento aconteça mais lentamente do que nos casos da Diferença Central e de 4ª ordem, que se identificam ao longo de toda a análise. Nos resultados encontrados para valores maiores de t

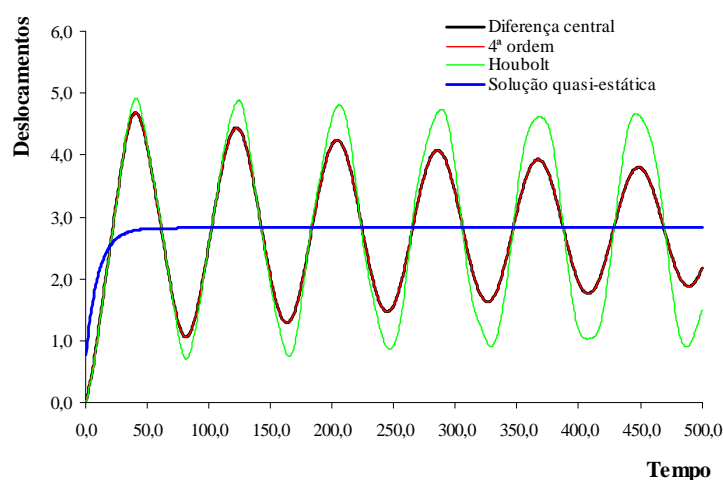


Figura 6.12: Comparação dos deslocamentos obtidos pelos três métodos diretos

(figs. 6.13 e 6.14) observa-se uma certa oscilação na evolução dos deslocamentos encontrados pelo método de Houbolt; para $\Delta t > 1$, o amortecimento é realmente efetivo como se pode notar na figura 6.14. Os resultados que se seguem (figs. 6.15 e 6.16) mostram o desempenho da barra quando solicitada axialmente por variações de carga do tipo 2 (fig. 4.2) e tipo 3 (fig. 4.3), com valores de $t_1 = 250s$, $t_2 = 750s$ e $t_3 = 1000s$. Poucos comentários são necessários, uma vez que os resultados obtidos se comportam similarmente aos encontrados para o exemplo da viga bi-apoiada, para as mesmas variações. Por fim, realiza-se uma verificação quanto ao comportamento no tempo da força de superfície p_x no nó $N(0,0)$ no engaste da barra. A figura 6.17 ilustra os resultados para os primeiros 80s obtidos para $\Delta t = 0,5s$, pelo método da Diferença Central. A figura 6.18 compara, novamente, o desempenho do amortecimento nos resultados obtidos pelo método da Diferença Central e de Houbolt, para a solicitação do tipo 1 (fig. 4.1), em um tempo total 1500s, com $\Delta t = 0,5s$.

CAPÍTULO 6. EXEMPLOS NUMÉRICOS

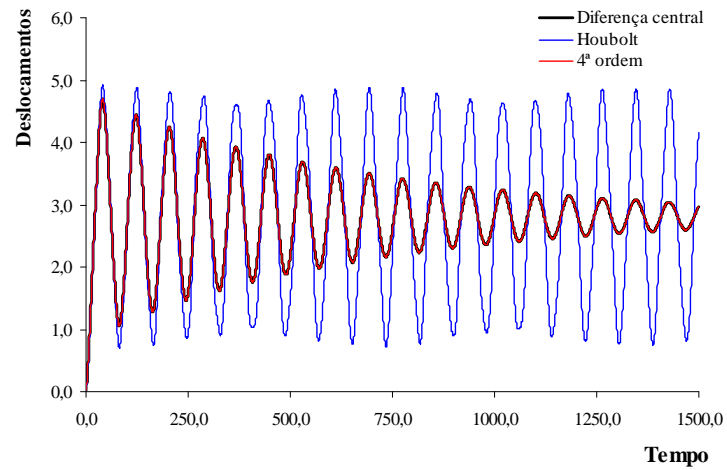


Figura 6.13: Evolução do amortecimento dos resultados dinâmicos ao longo do tempo, para $\Delta t = 0,5s$

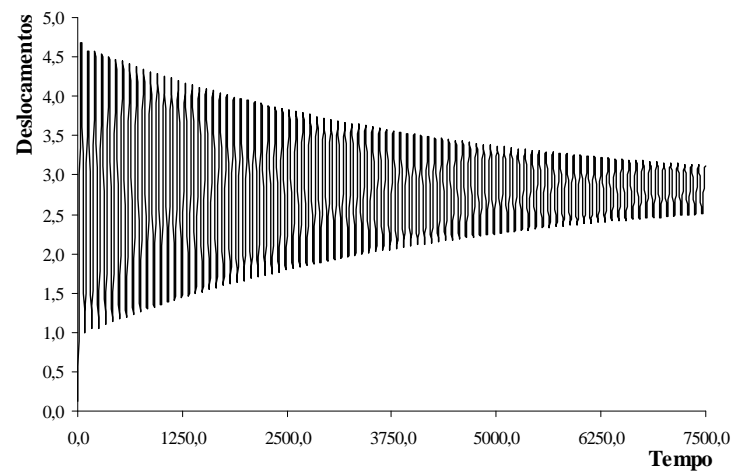


Figura 6.14: Deslocamentos viscoelásticos para $\Delta t = 2,5s$, obtidos pelo método de Houbolt

CAPÍTULO 6. EXEMPLOS NUMÉRICOS

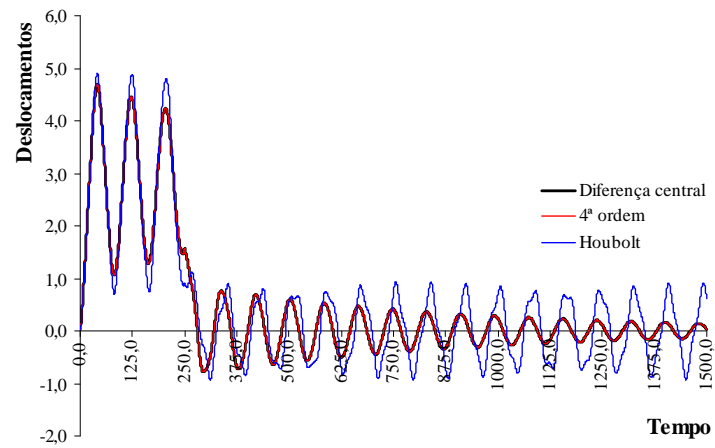


Figura 6.15: Deslocamentos dinâmicos obtidos para a variação do carregamento tipo 2 (fig. 4.2)

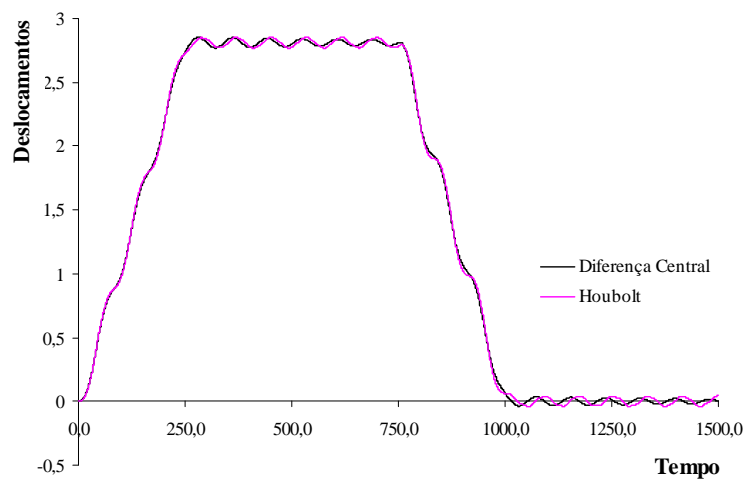


Figura 6.16: Deslocamentos dinâmicos obtidos para a variação do carregamento tipo 3 (fig. 4.3)

CAPÍTULO 6. EXEMPLOS NUMÉRICOS

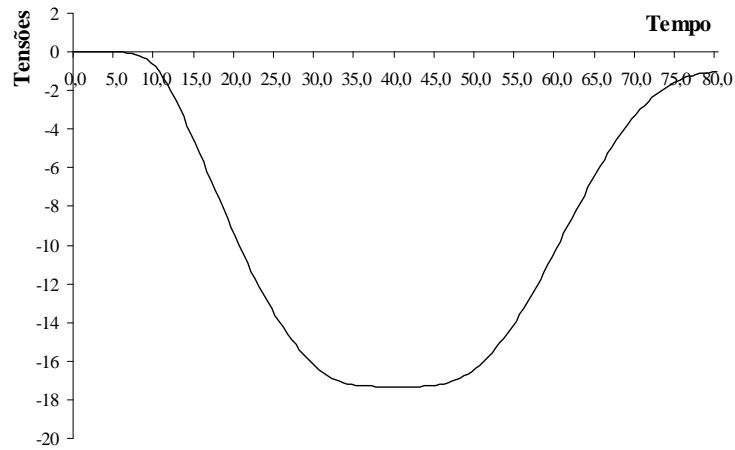


Figura 6.17: Resultados para p_x obtidos pelo método da Diferença Central, para a solicitação do tipo 1 (fig. 4.1)

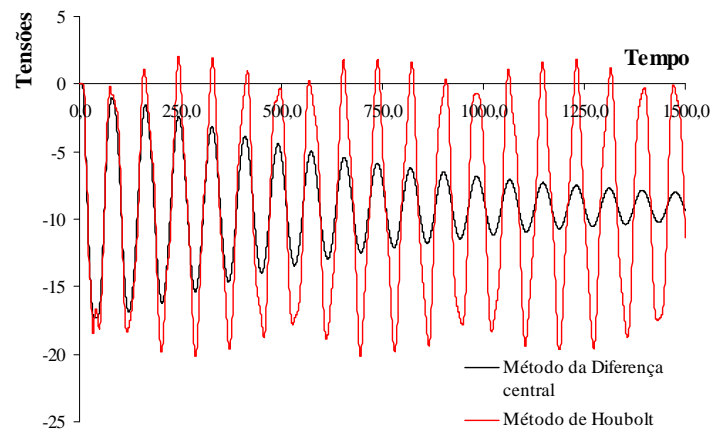


Figura 6.18: Comparação dos resultados obtidos para p_x pelos métodos da Diferença Central e de Houbolt, para a solicitação do tipo 1 (fig. 4.1)

6.3 Faixa Retangular Sujeita a uma Carga Cisalhante

O último exemplo, avaliado pela formulação dinâmica, consta de uma faixa retangular de material viscoelástico, com seção transversal definida por $b = 400 \text{ cm}$ e $a = 200 \text{ cm}$, de comprimento infinito e sujeita a um carregamento cisalhante transiente (fig. 4.1), de valor máximo $q = 1 \text{ kN/cm}$, como ilustrado na figura 6.19. Restringindo

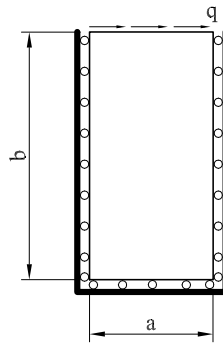


Figura 6.19: Faixa retangular viscoelástica sujeita a carregamento cisalhante

seu movimento em três das suas faces e adotando uma densidade $\rho = 1,0$, são analisados os deslocamentos dinâmicos para um nó central de seu contorno livre, considerando os quatro modelos reológicos já apresentados.

Somente uma discretização é analisada, com 28 nós de contorno e 64 células de domínio. Para um intervalo de tempo $\Delta t = 0,5s$, vê-se os resultados para os quatro modelos (fig. 6.20), obtidos pelo método da Diferença Central. Devido a magnitude dos parâmetros adotados, os deslocamentos são rapidamente amortecidos e os valores para $t \rightarrow \infty$ logo alcançados. A figura 6.21 apresenta um comparativo entre os resultados obtidos pelos três métodos de integração direta e a análise quasi-estática do problema. Novamente, os resultados encontrados pela Diferença Central e a aproximação de 4ª ordem seguem coincidentes ao longo de todo intervalo de tempo analisado. A performance do método de Houbolt segue o mesmo comportamento dos demais exemplos. O amortecimento natural para método de Houbolt somente é observado para valores de incremento de tempo maiores do que $1s$. Figura 6.22 apresenta estes resultados, confrontando os valores de $\Delta t = 0,5s$ e $\Delta t = 1,5s$, obtidos por meio do método de Houbolt.

CAPÍTULO 6. EXEMPLOS NUMÉRICOS

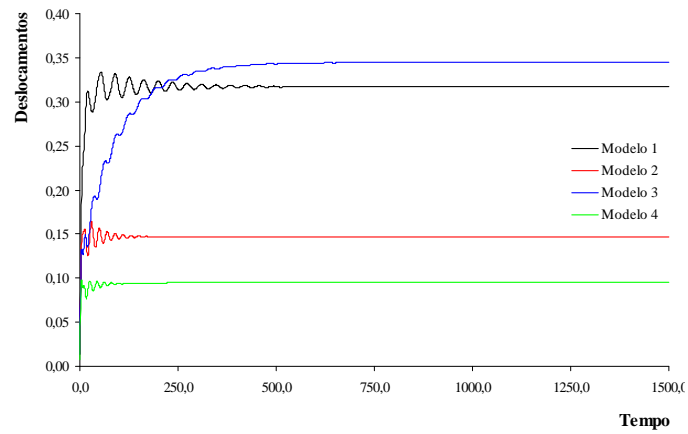


Figura 6.20: Comparativo entre os quatro modelos reológicos analisados pelo método da Diferença Central

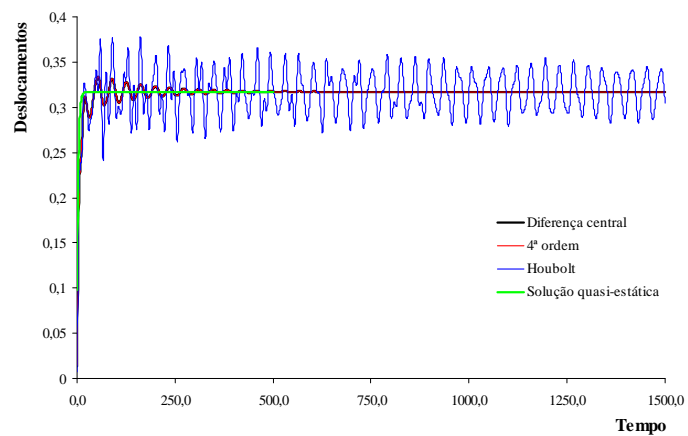


Figura 6.21: Comparativo entre os três métodos de integração direta adotados

CAPÍTULO 6. EXEMPLOS NUMÉRICOS

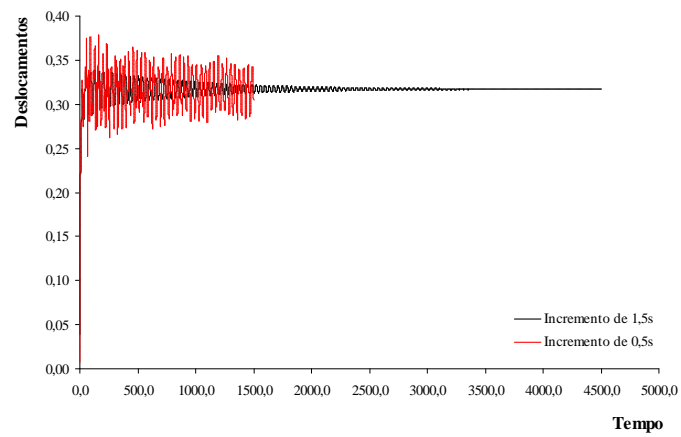


Figura 6.22: Efeito do amortecimento viscoelástico nos resultados obtidos pelo método de Houbolt para 0,5s e 1,5s

Capítulo 7

Conclusões e Sugestões

Os capítulos desenvolvidos neste trabalho apresentaram conceitos básicos e fundamentais da teoria da Viscoelasticidade, versando, principalmente, sobre características reológicas norteantes dos fenômenos comportamentais descritos por esta. Longe de ensinar o conhecimento completo da teoria, os conceitos e propriedades apreendidos foram necessários ao estudo teórico e numérico de problemas de estado plano de deformação e estado plano de tensão, quasi-estáticos e dinâmicos, por meio do Método dos Elementos de Contorno.

A generalização do *Teorema da Reciprocidade* para a viscoelasticidade, executada precisamente por GURTIN e STERNBERG [8], serviu de ponto de partida para a construção das equações integrais para os problemas quasi-estáticos e dinâmicos, na forma da convolução de Stieltjes. Embora não forneçam grandes novidades ao estudo do Método dos Elementos de Contorno, principalmente no que diz respeito às análises quasi-estáticas, as equações geradas apresentaram uma nova perspectiva para problemas dinâmicos, uma vez que a grande quantidade dos trabalhos encontrados abordava o problema por meio das equações da elastodinâmica, associadas ao Princípio da Correspondência, motivadas talvez pela dificuldade em se encontrar soluções fundamentais práticas e pela existência de uma quadratura numérica para convoluções, obtida por LUBICH [23] e [24].

O item referente às soluções fundamentais expôs a importância da correspondência elástica-viscoelástica na obtenção de suas expressões, mas também as dificuldades em se obter uma generalização e os obstáculos encontrados nas experiências vivenciadas com as expressões citadas. Todavia, foi através deste estudo oportuno que se deparou com as soluções fundamentais viscoelásticas de STERNBERG e AL-KHOZAIE [43], obtidas pela solução do problema generalizado de Kelvin e posteriormente bidimen-

CAPÍTULO 7. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

sionalizadas para uso neste trabalho. Apresentadas em uma forma mais compacta, estas soluções facilitaram as manipulações algébricas realizadas e permitiram a análise dinâmica através da convolução de Stieltjes. Não seria incorreto afirmar, quiçá, que estas representaram parte fundamental deste trabalho.

A discretização das equações integrais exigiu esquemas numéricos eficientes de interpolação das variáveis, avaliação das convoluções, avaliação da integral de domínio e de marcha no tempo. As escolhas realizadas foram norteadas pelas ideias de simplicidade e na medida do possível foram alcançadas neste trabalho. Para tanto, interpolações lineares das variáveis temporais e espaciais foram adotadas, utilizou-se a quadratura Gaussiana e um processo incremental e de superposição, comentado por FLÜGGE[7], para a avaliação das convoluções. Para a integral de domínio foi empregado método semi-analítico [46], já experienciado em trabalhos passados [45], e métodos diretos de integração para a marcha no tempo. Os resultados quasi-estáticos alcançados foram considerados satisfatórios e adequados à análise realizada; já os resultados dinâmicos, devido a complexidade da análise, mostraram a necessidade de estudos mais detalhados para a averiguação da eficiência dos métodos de integração direta empregados e da qualidade dos resultados alcançados pela formulação apresentada.

As expectativas que recaíram sobre esta pesquisa não puderam ser totalmente atendidas por conta das limitações existentes e dos obstáculos encontrados. Contudo, uma das prerrogativas de um projeto de pesquisa não é a obtenção de todas as respostas, mas construção de novas perguntas e a visualização de futuras perspectivas. Dentro deste contexto, e com o fim de permitir a continuação deste trabalho, são deixadas ao futuro algumas sugestões. No que tange às soluções fundamentais, seria de grande valia a obtenção de expressões viscoelásticas dinâmicas, solucionando a equação diferencial dinâmica não homogênea, como meio alternativo aquele baseado no Princípio da Correspondência.

Métodos de integração indireta deveriam ser testados na análise de problemas dinâmicos, além de estudo mais preciso quanto a estabilidade numérica e ao intervalo de variação dos incrementos de tempo ideais para cada método. Um trabalho neste âmbito não deveria prescindir do compartilhamento de resultados experimentais, da caracterização computacional e laboratorial de modelos reológicos e na aplicação a exemplos práticos, o que exigiria a implementação de uma formulação tridimensional, no uso de elementos isoparamétricos de ordem superior e de estratégias numéricas mais avançadas. Para exemplificar possíveis aplicações da viscoelasticidade vide trabalhos de EVANGELISTA et al [42] e WANG e BIRGISSON [40]. Finalizando este capítulo, não poderia deixar de sugerir a consideração dos efeitos da temperatura [26] e [39], e

CAPÍTULO 7. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

da não linearidade geométrica, uma vez que os mesmos movimentaram as primeiras iniciativas de pesquisa neste assunto.

Referências Bibliográficas

- [1] MARKOVITZ, H., 1977, "Boltzmann and the Beginnings of Linear Viscoelasticity", *Transactions of the Society of Rheology*, vol.21, n.3, pp.381-398.
- [2] BOLTZMANN, L. E., 1874, "Zur Theorie der Elastischen Nachwirkung", *Sitzungsberichte der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Classe der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften*, vol.70, n.2, pp.275.
- [3] VOLTERRA, V., 1909, "Sulle Equazioni Integro-Differenziali della Teoria Dell'elasticità", *Atti della Reale Accademia dei Lincei*, vol.18, n.2, pp.295.
- [4] ALFREY, T., 1945, "Methods of Representing the Properties of Viscoelastic Materials", *Quarterly of Applied Mathematics*, vol.3, pp.143-150.
- [5] ALFREY, T., 1944, "Non-Homogeneous Stresses in Visco-Elastic Media", *Quarterly of Applied Mathematics*, vol.2, pp.113-119.
- [6] LEE, E. H., 1955, "Stress Analysis in Visco-Elastic Bodies", *Quarterly of Applied Mathematics*, vol.13, pp.183-190.
- [7] FLÜGGE, W., 1975, *Viscoelasticity*. 2 ed. Berlin, Springer-Verlag.
- [8] GURTIN, M. E., STERNBERG, E., 1962, "On the Linear Theory of Viscoelasticity", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol.11, pp.291-356.
- [9] CHRISTENSEN, R. M., 1971, *Theory of Viscoelasticity: An Introduction*. 1 ed. New York, Academic Press.
- [10] COLEMAN, B. D., NOLL, W., 1961, "Foundations of Linear Viscoelasticity", *Reviews of Modern Physics*, vol. 33, n.2, pp.239-249.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [11] GREEN, A. E., RIVLIN, R. S., 1957, "The Mechanics of Non-Linear Materials with Memory: Part I", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol.1, n.1, pp.1-21.
- [12] GREEN, A. E., RIVLIN, R. S., SPENCER, A. J. M., 1959, "The Mechanics of Non-Linear Materials with Memory: Part II", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol.3, n.1, pp.82-90.
- [13] GREEN, A. E., RIVLIN, R. S., 1959, "The Mechanics of Non-Linear Materials with Memory: Part III", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol.4, n.1, pp.387-404.
- [14] FINDLEY, W. N., LAI, J. S., ONARAN, K., 1976, *Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials*, New York, North-Holland Publishing Company.
- [15] RIZZO, F. J., SHIPPY, D. J., 1971, "An Application of the Correspondence Principle of Linear Viscoelasticity Theory", *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol.21, n.2, pp.321-330.
- [16] SCHAPERLY, R. A., 1962, "Approximate methods of transform inversion for viscoelastic stress analysis", *Proceedings Fourth US National Congress of Applied Mechanics*, n.2, pp.1075-1085.
- [17] DURBIN, F., 1974, "Numerical Inversion of Laplace Transforms: an Efficient Improvement to Dubner and Abate's Method", *Computer Journal*, vol.17, pp.371-376.
- [18] COST, T. L., 1964, "Approximate Laplace Transforms Inversions in Viscoelastic Stress Analysis", *AIAA Journal*, vol.2, n.12, pp.2157-2166.
- [19] SYNGELLAKIS, S., 2003, "Boundary Element Methods for Polymer Analysis", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol.27, pp.125-135.
- [20] CARINI, A., DeDONATO, O., 1992, "Fundamental Solutions for Linear Viscoelastic Continua", *International Journal of Solids and Structures*, vol.29, n.23, pp.2989-3009.
- [21] SCHANZ, M., 1999, "A Boundary Element Formulation in Time Domain for Viscoelastic Solids", *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol.15, pp.799-809.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [22] SYNGELLAKIS, S., WU, J., 2004, "Evaluation of Various Schemes for Quasi-Static Boundary Element Analysis of Polymers, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol.28, pp.733-745.
- [23] LUBICH, C., 1988, "Convolution Quadrature and Discretized Operational Calculus. I", *Numerische Mathematik*, vol.52, pp.129-145.
- [24] LUBICH, C., 1988, "Convolution Quadrature and Discretized Operational Calculus. II", *Numerische Mathematik*, vol.52, pp.413-425.
- [25] LEE, E. H., 1962, "Viscoelasticity". In: FLÜGGE, W. (ed.), *Handbook of Engineering Mechanics*, 1 ed., chapter 53, New York, USA, McGraw-Hill Book Company.
- [26] MORLAND, W., LEE, E. H., 1960, "Stress Analysis for Linear Viscoelastic Materials with Temperature Variation", *Transactions of the Society of Rheology*, vol.4, pp.233-263.
- [27] BREBBIA, C. A., TELLES, J. C. F., WROBEL, L. C., 1984, *Boundary Element Techniques, Theory and Applications in Engineering*. New York, Springer-Verlag.
- [28] MALVERN, L.E., 1969, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. New Jersey, Prentice Hall.
- [29] SIM, W. J., KWAK, B. M., 1988, "Linear Viscoelastic Analysis in Time Domain by Boundary Element Method", *Computers and Structures*, vol. 29, n. 4, pp.531-539.
- [30] LEE, S. S., WESTMANN, R. A., 1995, "Application of High-Order Quadrature Rules to Time-Domain Boundary Element Analysis of Viscoelasticity", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 38, pp.607-629.
- [31] SCHANZ, M., ANTES, H., 1997, "Applications of Operational Quadrature Methods in Time Domain Boundary Element Analysis", *Meccanica*, vol.32, pp.179-186.
- [32] SCHANZ, M., ANTES, H., RÜBERG, T., 2005, "Convolution Quadrature Boundary Element Method for Quasi-Static Visco- and Proelastic Continua", *Computers and Structures*, vol.83, pp.673-684.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [33] GAUL, L., SCHANZ, M., 1994, "Dynamics of viscoelastic solids treated by boundary element approaches in time domain", *European Journal of Mechanics, A/Solids*, vol.13, n.4, pp.43-59.
- [34] GAUL, L., SCHANZ, M., 1997, "Boundary Element Calculation of Transient Response of Viscoelasticity Solids Based on Inverse Transformation", *Meccanica*, vol.32, pp.171-178.
- [35] SCHANZ, M., ANTES, H., 1997, "A New Visco- and Elastodynamic Time Domain Boundary Element Formulation", *Computational Mechanics*, vol.20, pp.452-459.
- [36] GAUL, L., SCHANZ, M., 1999, "A Comparative Study of Three Boundary Element Approaches to Calculate the Transient Response of Viscoelastic Solids with unbounded Domains", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol.179, pp.111-123.
- [37] FERRY, J. D., 1970, *Viscoelastic Properties of Polymers*, 3 ed., New York, Wiley.
- [38] LEE, S. S., 1995, "Boundary Element Analysis of a Viscoelastic Thin-Walled Cylinder Subjected to Thermal Transient", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol.63, pp.195-198.
- [39] EL-KARAMANY, A. S., EZZAT, M. A., 2002, "On The Boundary Integral Formulation of Thermo-Viscoelasticity Theory", *International Journal of Engineering Science*, vol.40, pp.1943-1956.
- [40] WANG, J., BIRGISSON, B., 2006, "A Time Domain Boundary Element Method for modeling the Quasi-Static Viscoelastic Behavior of Asphalt Pavements", *Engineering Analysis with Boundary Elements*.
- [41] NEVES, A. C., 1988, *Resolução de Problemas Viscoelásticos Utilizando o Método dos Elementos de Contorno*, Tese de M.Sc., COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- [42] EVANGELISTA Jr., F., PARENTE Jr., E., HOLANDA, A. S., et al., 2006, "Análise Quasi-Estática e Dinâmica de Pavimentos Asfálticos". XX Congresso de Pesquisa e Ensino em Transportes, 1364-76, Brasília, Goiás, Brasil, 6-10 de Novembro de 2006.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [43] STERNBERG, E., AL-KHOZAIE, S., 1964, "On Green's Functions and Saint-Venant's Principle in the Linear Theory of Viscoelasticity", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol.15, n.2, pp.112-146.
- [44] TIMOSHENKO, S. P., GOODIER, J. N., 1970, *Theory of Elasticity*, 3 ed., New York, McGraw-Hill.
- [45] CEZARIO, F., 2004, *Formulação Clássica do Método dos Elementos de Contorno Baseada na Mecânica do Meio Contínuo para Não-Linearidade Geométrica*. Tese de M. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- [46] TELLES, J. C. F., 1983, *The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems*. New York, Springer-Verlag.
- [47] BATHE, K. J., 1996, *Finite Element Procedures*. New Jersey, Prentice Hall.
- [48] TELLES, J. C. F., CARRER, J. A. M., 1994, "Static and Transient Dynamic Nonlinear Stress Analysis by the Boundary Element Method with Implicit Techniques", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, n.14, pp.65-74.
- [49] SOUZA, L. A., CARRER, J. A. M., MARTINS, C. J., 2004, "A Fourth Order Finite Difference Method Applied to Elastodynamics: Finite Element and Boundary Element Formulations", *Structural Engineering Analysis and Mechanics*, vol.17, n.6, pp.735-749.
- [50] SOUZA, L. A., MOURA, C. A., 1997, "Diferença Finita de Quarta Ordem para Integração Explícita no Domínio do Tempo de Problemas Elastodinâmicos", XVIII CILAMCE, Brasília, n.1, pp.263-272.
- [51] ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I. A., 1984, *Handbook of Mathematical Functions*. New York, Dover.
- [52] ALFREY, T. Jr., GURNEE, E. F., 1956, "Dynamics of Viscoelastic Behavior". In: Eirich, F. R. (ed), *Rheology: Theory and Applications*, vol. 1, chapter 11, New York, Academic Press.
- [53] PÉREZ-GRAVILÁN, J. J., ALIABADI, M. H., 2001, "A Symmetric Galerkin Boundary Element Method for Dynamic Frequency Domain Viscoelastic Problems", *Computers and Structures*, vol.79, pp.2621-2633.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [54] MILES, J. W., 1961, "Integral Transforms". In: *Modern Mathematical for the Engineer*, vol.2, *University of California Engineering and Sciences Extensions Series*, McGraw Hill, pp.68-99.

Apêndice A

Equação Integral de Contorno para Deslocamentos Internos

Neste apêndice é apresentado o desenvolvimento algébrico, a partir do Teorema da Reciprocidade Viscoelástica, das equações integrais de contorno. Esta apresentação tem o fim de ilustrar o emprego das propriedades de Stieltjes (tabela 2.1) na obtenção das equações finais, sendo todos os procedimentos adicionais baseados nos mesmos empregados para a versão elástica destas equações integrais [27].

Assim sendo, a aplicação do Teorema da Reciprocidade para todo o domínio avaliado Ω é descrito no contínuo por:

$$\int_{\Omega} \mathbf{T}(\mathbf{x}; t) * d\mathbf{E}^*(\mathbf{x}; t) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{T}^*(\mathbf{x}; t) * d\mathbf{E}(\mathbf{x}; t) d\Omega. \quad (\text{A.1})$$

Trabalhando na forma indicial, a mesma equação (eq. A.1) pode ser reescrita em função de suas componentes na seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{x}; t) * d\varepsilon_{ij}^*(\mathbf{x}; t) d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^*(\mathbf{x}; t) * d\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}; t) d\Omega. \quad (\text{A.2})$$

Avaliando, separadamente, a integral do lado esquerdo do sinal de igualdade, obtém-se, considerando a relação deformação-deslocamento (eq. 2.3) em notação indicial, o seguinte:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{x}; t) * \frac{1}{2} d[u_{i,j}^*(\mathbf{x}; t) + u_{j,i}^*(\mathbf{x}; t)] d\Omega, \quad (\text{A.3})$$

APÊNDICE A. EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO PARA
DESLOCAMENTOS INTERNOS

que após consideração da propriedade de distribuição da integral de Stieltjes é escrita como

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} [\sigma_{ij}(\mathbf{x}; t) * du_{i,j}^*(\mathbf{x}; t) + \sigma_{ij}(\mathbf{x}; t) * du_{j,i}^*(\mathbf{x}; t)] d\Omega. \quad (\text{A.4})$$

Analisando cada parcela da expressão (A.4) é possível reescrevê-las na forma

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \begin{array}{l} [\sigma_{ij}(\mathbf{x}; t) * du_i^*(\mathbf{x}; t)]_{,j} - \sigma_{ij,j}(\mathbf{x}; t) * du_i^*(\mathbf{x}; t) + \\ [\sigma_{ij}(\mathbf{x}; t) * du_j^*(\mathbf{x}; t)]_{,i} - \sigma_{ij,i}(\mathbf{x}; t) * du_j^*(\mathbf{x}; t) \end{array} \right\} d\Omega, \quad (\text{A.5})$$

que permite a aplicação do teorema da divergência e o teorema da tensão de Euler e Cauchy (eq. 2.7) a fim de obter a expressão seguinte:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \{ [\sigma_{ij}(\mathbf{x}; t) * du_i^*(\mathbf{x}; t)] n_j(x) + [\sigma_{ij}(\mathbf{x}; t) * du_j^*(\mathbf{x}; t)] n_i(x) \} d\Gamma - \\ & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ b_i(\mathbf{x}; t) * du_i^*(\mathbf{x}; t) + b_i(\mathbf{x}; t) * du_j^*(\mathbf{x}; t) \} d\Omega. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Após a realização de procedimento análogo para a integral do lado direito do sinal de igualdade, obtém-se a equação seguinte:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} p_i(\mathbf{x}; t) * du_i^*(\mathbf{x}; t) d\Gamma - \int_{\Omega} b_i(\mathbf{x}; t) * du_i^*(\mathbf{x}; t) d\Omega = \\ & \int_{\Gamma} p_i^*(\mathbf{x}; t) * du_i(\mathbf{x}; t) d\Gamma - \int_{\Omega} b_i^*(\mathbf{x}; t) * du_i(\mathbf{x}; t) d\Omega, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

que, finalmente, fornece a equação (3.2), considerando

$$u_i^*(\mathbf{x}; t) = u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) e_j \quad \mathbf{e} p_i^*(\mathbf{x}; t) = p_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) e_j. \quad (\text{A.8})$$

A força de volume (3.3b) aplicada a equação (A.7) fornece a equação integral para deslocamentos em pontos internos do domínio Ω (eq. 3.5). Procedimento bem análogo também é empregado para a obtenção da equação integral dinâmica para deslocamentos em pontos internos (eq. 5.1). Para encontrar as equações integrais quasi-estática e dinâmica para deslocamentos no contorno Γ , o procedimento descrito por BREBBIA et al [27], para a equação elástica, é usado, empregando as propriedades de Stieltjes conforme desenvolvimento acima.

Apêndice B

Expressões dos Termos das Soluções Fundamentais

A seguir são descritas as expressões dos termos presentes nas soluções fundamentais viscoelásticas comentadas no texto, segundo o trabalho de CARINI e DeDONATO [20], obtidas para um modelo generalizado, e o trabalho de SYNGELLAKIS [19], para um modelo de Boltzmann.

B.1 Solução Fundamental para um Modelo Reológico Generalizado

As expressões de R_l e P_l são definidas como

$$R_l = \frac{M_l}{M_{m+2n}} - \frac{N_l}{N_{m+2n}}, \quad (\text{B.1})$$

$$P_l = \frac{N_l}{N_{m+2n}}. \quad (\text{B.2})$$

APÊNDICE B. EXPRESSÕES DOS TERMOS DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

Os valores de M_l e N_l são definidos para ${}^v u^*$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} L_l &= \sum_{\alpha=1}^{l+1} M_{(\alpha-1),(l-\alpha+1)}^* \quad \text{se } 0 \leq l \leq n; \\ L_l &= \sum_{\alpha=1}^{n+1} M_{(\alpha-1),(l-\alpha+1)}^* \quad \text{se } n+1 \leq l \leq n+m; \\ L_l &= \sum_{\alpha=1-m-n+l}^{n+1} M_{(\alpha-1),(l-\alpha+1)}^* \quad \text{se } n+m+1 \leq l \leq 2n+m, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

onde $L_l = M_l, N_l$. As componentes $M_{\alpha\beta}^*$ e $N_{\alpha\beta}^*$, que aparecem na expressão, são obtidas para estado plano de deformação e estado plano de tensões, respectivamente, por

$$M_{\alpha\beta}^* = p_{\alpha}^d (h_1 B_{\beta} + h_2 A_{\beta}) \quad , \quad N_{\alpha\beta}^* = q_{\alpha}^d (B_{\beta} - A_{\beta}) \quad (\text{B.4})$$

e

$$M_{\alpha\beta}^* = p_{\alpha}^d (h_1 B_{\beta} + h_2 A_{\beta}) \quad , \quad N_{\alpha\beta}^* = q_{\alpha}^d B_{\beta}. \quad (\text{B.5})$$

Para a expressão da força de superfície fundamental, as componentes de M_l e N_l são dadas por

$$M_l = h_1 B_l + h_2 A_l \quad , \quad N_l = B_l - A_l \quad (\text{B.6})$$

para estado plano de deformações, e

$$M_l = h_1 B_l + h_2 A_l \quad , \quad N_l = B_l \quad (\text{B.7})$$

para estado plano de tensões. Os valores de h_1 e h_2 são dependentes dos vetores posição do ponto fonte e do ponto campo. Ainda, têm-se

$$A_l = \sum_{\alpha=N}^M (q_{\alpha}^h p_{l-\alpha}^d - p_{\alpha}^h q_{l-\alpha}^d) \quad e \quad B_l = \sum_{\alpha=N}^M (2 q_{\alpha}^h p_{l-\alpha}^d + p_{\alpha}^h q_{l-\alpha}^d), \quad (\text{B.8})$$

onde q_{α}^h e p_{α}^h representam a parte volumétrica dos coeficientes da equação diferencial (2.32), e q_{α}^d e p_{α}^d representam a parte desviatória dos coeficientes da mesma equação.

APÊNDICE B. EXPRESSÕES DOS TERMOS DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

Por fim, os valores α_k são soluções (reais ou complexas) da equação polinomial

$$s^{m+\beta n} + \sum_{k=0}^{m+\beta n-1} P_k s^k, \quad (\text{B.9})$$

definida na variável de Laplace s e para o qual β assume valores iguais a 2, ou a 1, em caso de deslocamento ou força de superfície fundamental, respectivamente.

B.2 Solução Fundamental para um Modelo Reológico de Boltzmann

Os termos estão assim definidos para estado plano de deformação

$$\beta_1 = \frac{\mu_1}{\mu_2} \beta, \quad \beta_2 = \frac{3K_0\mu_2 + 4\mu_0\mu_1}{(3K_0 + 4\mu_0)\mu_2} \beta, \quad (\text{B.10})$$

$$\beta_3 = \frac{3K_0\mu_2 + 4\mu_0\mu_1}{4\mu_0^2 + 3K_0\mu_2 + 4\mu_0\mu_1} \beta, \quad (\text{B.11})$$

$$b_{01} = \frac{2}{\mu_0}, \quad a_{01} = \frac{\mu_0\mu_1}{3K_0\mu_2 + 4\mu_0\mu_1}, \quad (\text{B.12})$$

$$b_{02} = \frac{6}{3K_0 + 4\mu_2}, \quad a_{02} = \frac{2\mu_0\mu_1 + 6K_0\mu_2}{3K_0\mu_2 + 4\mu_0\mu_1}, \quad (\text{B.13})$$

$$b_1 = \frac{2\mu_1}{\mu_0\mu_2}, \quad b_2 = \frac{24\mu_1}{(3K_0 + 4\mu_0)(3K_0 + 4\mu_2)}, \quad (\text{B.14})$$

$$a_1 = \frac{\mu_0(\mu_0 + \mu_1)}{4\mu_0^2 + 3K_0\mu_2 + 4\mu_0\mu_1}, \quad a_2 = \frac{2\mu_0^2 + 6K_0\mu_2 + 2\mu_0\mu_1}{4\mu_0^2 + 3K_0\mu_2 + 4\mu_0\mu_1} \quad (\text{B.15})$$

e estado plano de tensões

$$\beta_1 = \frac{\mu_1}{\mu_2} \beta, \quad \beta_2 = \frac{3K_0\mu_2 + \mu_0\mu_1}{(3K_0 + \mu_0)\mu_2} \beta, \quad (\text{B.16})$$

$$\beta_3 = \frac{3K_0\mu_2 + \mu_0\mu_1}{\mu_0^2 + 3K_0\mu_2 + \mu_0\mu_1} \beta, \quad (\text{B.17})$$

$$b_{01} = \frac{\mu_2}{2\mu_0\mu_1}, \quad a_{01} = \frac{3K_0\mu_2 + 4\mu_0\mu_1}{6K_0\mu_2 + 2\mu_0\mu_1}, \quad (\text{B.18})$$

APÊNDICE B. EXPRESSÕES DOS TERMOS DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

$$b_{02} = \frac{3\mu_2}{2(3K_0\mu_2 + \mu_0\mu_1)}, \quad a_{02} = \frac{9K_0\mu_2}{6K_0\mu_2 + 2\mu_0\mu_1}, \quad (\text{B.19})$$

$$b_1 = \frac{1}{2\mu_1}, \quad b_2 = \frac{3\mu_0^2}{2(3K_0 + \mu_0)(3K_0\mu_2 + 4\mu_0\mu_1)}, \quad (\text{B.20})$$

$$a_1 = \frac{4\mu_0^2 + 3K_0\mu_2 + 4\mu_0\mu_1}{2\mu_0^2 + 6K_0\mu_2 + 2\mu_0\mu_1}, \quad a_2 = \frac{9K_0\mu_2}{2\mu_0^2 + 6K_0\mu_2 + 2\mu_0\mu_1}. \quad (\text{B.21})$$

Apêndice C

Teorema do Estado Viscoelástico de Kelvin

Neste apêndice são apresentados uma definição e dois teoremas, empregados para caracterizar o estado viscoelástico de Kelvin, enunciados por STERNBERG e AL-KHOZAIE [43] na dedução das soluções aqui empregadas. Ressalta-se a importância do Teorema 1, uma vez que o processo elementar executado com o Princípio da Correspondência não verifica sua veracidade.

Para auxiliar a leitura da definição e dos teoremas abaixo, define-se:

- E – espaço Euclidiano tridimensional;
- \mathcal{R} – região aberta de E , $\bar{\mathcal{R}}$ – região fechada de E ;
- \mathcal{T} – Intervalo de tempo;
- As funções empregadas são de valor real na posição e no tempo, definidas em $\mathcal{R} \times \mathcal{T}$.
- $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ – vetor posição dos pontos em \mathcal{R} ;
- t – tempo definido em \mathcal{T} ;
- H – Classe de funções de Heaviside. Os sobreíndices dizem respeito a posição e ao tempo, na ordem que aparecem;
- Ω_δ – esfera aberta de raio δ centrada em \mathbf{x}^0 ;
- E'_{x_o} – Região aberta constituída de todos os pontos de E , com exceção do ponto x_o . Quando $x_o = 0$, escreve-se simplesmente E' , em lugar de E'_{x_o} ;

APÊNDICE C. TEOREMA DO ESTADO VISCOELÁSTICO DE KELVIN

- \mathcal{V} - conjunto de funções.

Definition 1 (*Limite de uma carga concentrada*) Diz-se que $\{\mathbf{F}^n\}$ é uma seqüência de distribuições de força de volume que tende a uma carga concentrada \mathbf{L} aplicada em \mathbf{x}^0 se $\mathbf{x}^0 \in E$ e $\mathbf{L} \in H^1$ é de valor vetorial, enquanto $\{\mathbf{F}^n\}$ têm as seguintes propriedades:

- a) Para todo n ($n = 1, 2, \dots$) \mathbf{F}^n é uma função de valor vetorial com

$$\mathbf{F}^n \in H^{2,1}(E), \quad \mathbf{F}^n = 0 \text{ em } (E - \Omega^n) \times (-\infty, \infty),$$

onde $\{\Omega^n\}$ é uma seqüência de "regiões carregadas" caracterizada por

$$\Omega^n = \Omega_{\delta^n}(\mathbf{x}^0), \quad \delta^n \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty;$$

- b) $\int_{\Omega^n} \mathbf{F}^n(\mathbf{x}, \cdot) dV \rightarrow \mathbf{L}$ quando $n \rightarrow \infty$, uniformemente em $[0, T]$ para todo $T \in [0, \infty)$;

- c) A seqüência de funções $\{\Phi^n\}$, definida por

$$\Phi^n = \int_{\Omega^n} |\mathbf{F}^n(\mathbf{x}, \cdot)| dV \text{ em } (-\infty, \infty) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

é uniformemente limitada em $[0, T]$ para todo $T \in [0, \infty)$.

Theorem 1 (*Estado viscoelástico de Kelvin*) Seja $\{\mathbf{F}^n\}$ uma seqüência de distribuições de forças de volume que tende a uma carga concentrada \mathbf{L} aplicada em \mathbf{x}^0 . Seja $G_v \in H^2$ com $G_v(0) > 0$ ($v = 1, 2$). Então:

- a) Existe uma única seqüência de estados $\{\mathfrak{S}^n\}$ tal que

$$\mathfrak{S}^n = [\mathbf{u}^n, \boldsymbol{\epsilon}^n, \boldsymbol{\sigma}^n] \in \mathcal{V}(E, G_1, G_2, \mathbf{F}^n) \quad (n = 1, 2, \dots);$$

- b) \mathfrak{S}^n converge para um estado limite \mathfrak{S} quando $n \rightarrow \infty$, uniformemente em $\bar{\mathcal{R}} \times (-\infty, T]$ para todo $\bar{\mathcal{R}}$ limitado, tal que $\mathbf{x}^0 \notin \bar{\mathcal{R}}$ e todo $T \in (-\infty, \infty)$;

- c) O estado limite $\mathfrak{S} = [\mathbf{u}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}]$ é independente da escolha particular da seqüência $\{\mathbf{F}^n\}$ e é gerado pelas funções tensões φ, ψ definidas através de

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \psi(\mathbf{x}, t) = -\frac{\mathbf{f}(t)}{8\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|}$$

APÊNDICE C. TEOREMA DO ESTADO VISCOELÁSTICO DE KELVIN

para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0$ e todo $t \in (-\infty, \infty)$, onde

$$\mathbf{f} = \mathbf{L} * dG_1^{-1} * d(2G_1 + G_2)^{-1} \text{ em } (-\infty, \infty).$$

Chama-se \mathfrak{S} de o estado viscoelástico de Kelvin correspondente à uma carga concentrada \mathbf{L} aplicada em \mathbf{x}^0 e às funções de relaxação G_1 e G_2 .

Theorem 2 (Propriedades do estado de Kelvin) O estado de Kelvin Normalizado $S^\alpha(\mathbf{x}, t; 0)$ tem as propriedades:

a) $\mathbf{u}^\alpha, \epsilon^\alpha, \sigma^\alpha \in H^{\infty,1}(E')$ e $\mathfrak{S}^\alpha = [\mathbf{u}^\alpha, \epsilon^\alpha, \sigma^\alpha] \in \mathcal{V}(E', G_1, G_2)$;

b) $\int_{\Pi} S^\alpha(\mathbf{x}, \cdot, 0) dA = e_\alpha h$ em $(-\infty, \infty)$,

onde Π é uma superfície regular fechada em torno da origem e S^α é o vetor força de superfície de \mathfrak{S}^α no lado do qual Π faceia a origem;

c) $\int_{\Pi} \mathbf{x} \wedge S^\alpha(\mathbf{x}, \cdot, 0) dA = 0$ em $(-\infty, \infty)$;

d) $\mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x}, \cdot, 0) = O(x^{-1})$, $\sigma^\alpha(\mathbf{x}, \cdot, 0) = O(x^{-2})$ quando $x \rightarrow 0$, uniformemente em $[0, T]$ para todo $T \in [0, \infty)$.

Apêndice D

Tensões Viscoelásticas em Pontos Internos

Tomando a derivada das componentes do vetor dos deslocamentos internos (eq. 3.5) em relação às coordenadas do ponto fonte ξ , tem-se:

$$u_{i,j}(\xi; t) = \int_{\Gamma} p_k(\mathbf{x}; t) * d u_{ik,j}^*(\xi, \mathbf{x}; t) d\Gamma - \int_{\Gamma} u_k(\mathbf{x}; t) * d p_{ik,j}^*(\xi, \mathbf{x}; t) d\Gamma, \quad (\text{D.1})$$

para as quais as derivadas das soluções fundamentais \mathbf{u}^* e \mathbf{p}^* (eqs. 3.37 e 3.40) são fornecidas por

$$u_{ik,j}^*(\xi, \mathbf{x}; t) = \frac{1}{4\pi r} \left\{ \begin{array}{l} 2J_1(t) [2r_{,i}r_{,j}r_{,k} - r_{,i}\delta_{jk} - r_{,k}\delta_{ij} + r_{,j}\delta_{ik}] - \\ 3Q_1(t) [2r_{,i}r_{,j}r_{,k} - r_{,i}\delta_{jk} - r_{,k}\delta_{ij} - r_{,j}\delta_{ik}] \end{array} \right\} \quad (\text{D.2})$$

e

$$p_{ik,j}^*(\xi, \mathbf{x}; t) = \frac{1}{4\pi r^2} \left\{ \begin{array}{l} 3Q_2(t) \left[\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} 8r_{,i}r_{,j}r_{,k} - 2r_{,k}\delta_{ij} - \\ 2r_{,i}\delta_{jk} - 2r_{,j}\delta_{ik} \end{array} \right) \frac{\partial r}{\partial n} + \\ 2(r_{,i}r_{,j}n_k - r_{,i}r_{,k}n_j - r_{,j}r_{,k}n_i) + \\ (n_j\delta_{ik} - n_i\delta_{jk} - n_k\delta_{ij}) \end{array} \right] - \\ 4h(t) \left[\begin{array}{l} (4r_{,i}r_{,j}r_{,k} - r_{,i}\delta_{jk} - r_{,k}\delta_{ij}) \frac{\partial r}{\partial n} - \\ r_{,i}r_{,k}n_j \end{array} \right] \end{array} \right\}. \quad (\text{D.3})$$

APÊNDICE D. TENSÕES VISCOELÁSTICAS EM PONTOS INTERNOS

As deformações viscoelásticas são obtidas a partir da equação (2.3) e da (D.1), definidas pela expressão:

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\xi}; t) = \int_{\Gamma} p_k(\mathbf{x}; t) * d \underbrace{\left\{ \frac{1}{2} [u_{ik,j}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) + u_{jk,i}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t)] \right\}}_{A_{ikj}} d\Gamma - \int_{\Gamma} u_k(\mathbf{x}; t) * d \underbrace{\left\{ \frac{1}{2} [p_{ik,j}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) + p_{jk,i}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t)] \right\}}_{B_{ikj}} d\Gamma, \quad (\text{D.4})$$

onde

$$A_{ikj}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) = \frac{1}{4\pi r} \left\{ \begin{array}{l} 2J_1(t) [2r_{,i}r_{,j}r_{,k} - r_{,k}\delta_{ij}] - \\ 3Q_1(t) [2r_{,i}r_{,j}r_{,k} - r_{,i}\delta_{jk} - r_{,k}\delta_{ij} - r_{,j}\delta_{ik}] \end{array} \right\} \quad (\text{D.5})$$

e

$$B_{ikj}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; t) = \frac{1}{4\pi r^2} \left\{ \begin{array}{l} 3Q_2(t) \left[\begin{array}{l} \left(\frac{8r_{,i}r_{,j}r_{,k} - 2r_{,k}\delta_{ij} - 2r_{,i}\delta_{jk} - 2r_{,j}\delta_{ik}}{\partial n} + \right. \\ \left. 2(r_{,i}r_{,j}n_k - r_{,i}r_{,k}n_j - r_{,j}r_{,k}n_i) + \right. \\ \left. (n_j\delta_{ik} + n_i\delta_{jk} - n_k\delta_{ij}) \right] - \\ 2h(t) \left[\begin{array}{l} (8r_{,i}r_{,j}r_{,k} - r_{,i}\delta_{jk} - r_{,j}\delta_{ik} - 2r_{,k}\delta_{ij}) \frac{\partial r}{\partial n} - \\ r_{,k}(r_{,i}n_j + r_{,j}n_i) \end{array} \right] \end{array} \right\}. \quad (\text{D.6})$$

Aplicando os resultados obtidos para as deformações internas na equação constitutiva (eq. 2.19) e fazendo uso da equação (2.20), chega-se por fim à expressão das tensões internas:

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{\xi}; t) = \int_{\Gamma} p_k(\mathbf{x}, t) * du_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t) d\Gamma - \int_{\Gamma} u_k(\mathbf{x}, t) * dp_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t) d\Gamma. \quad (\text{D.7})$$

Observa-se que todas as operações algébricas realizadas com as convoluções de Stieltjes têm em conta suas propriedades enunciadas na tabela 2.1.

Apêndice E

Tensões Viscoelásticas em Nós do Contorno

Neste apêndice são apresentadas as expressões das componentes das tensões viscoelásticas dos nós funcionais do contorno, para o problema bidimensional. O procedimento de obtenção empregado segue o discutido por BREBBIA et al [27].

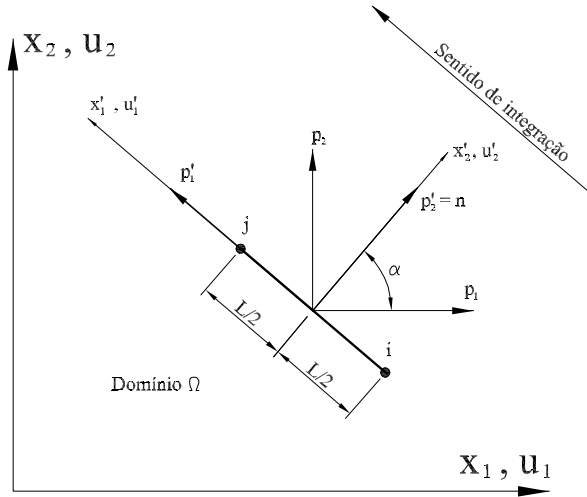


Figura E.1: Sistema de referência local ao elemento considerado

De acordo com a representação da figura E.1, opera-se a transformação dos deslocamentos e forças de superfícies, no sistema de referência global, para um sistema de referência local a um elemento considerado. Sendo assim, tem-se

$$\mathbf{u}^m = \mathbf{R} \mathbf{u}^n \text{ e } \mathbf{p}^m = \mathbf{R} \mathbf{p}^n, \quad (\text{E.1})$$

APÊNDICE E. TENSÕES VISCOELÁSTICAS EM NÓS DO CONTORNO

onde

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -\text{sen } \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & \text{sen } \alpha \end{bmatrix}, \quad (\text{E.2})$$

é uma matriz ortogonal de transformação dos vetores, \mathbf{u}' e \mathbf{p}' são os deslocamentos e forças de superfícies referentes a um sistema local e n o ponto nodal do elemento considerado. Pela mesma figura (fig. E.1), chega-se a

$$\text{sen } \alpha = \frac{L_1}{L} \text{ e } \cos \alpha = \frac{L_2}{L} \quad (\text{E.3})$$

e

$$L_1 = x_1^i - x_1^j \text{ e } L_2 = x_2^j - x_2^i. \quad (\text{E.4})$$

Nas equações (E.3 e E.4), L representa o comprimento do elemento, L_1 e L_2 as projeções de L em relação ao sistema de referência global, e x_1 e x_2 as coordenadas globais dos pontos nodais no elemento considerado. As tensões no elemento, ou seja, referente ao sistema local, serão obtidas pela equação (2.7) e pela equação constitutiva generalizada viscoelástica:

$$\sigma'_{ij}(t) = \frac{1}{3} [G_2 - G_1](t) * d\varepsilon'_{kk} + G_1(t) * d\varepsilon'_{ij}. \quad (\text{E.5})$$

Desta forma, sabendo que o vetor normal \mathbf{n} , externo ao elemento considerado, possui componentes

$$\mathbf{n} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

então, têm-se:

$$\sigma_{11}^m(t) = \frac{1}{3} \varepsilon_{11}^m(t) * d(G_2 + 2G_1)(t) + \sigma_{22}^m(t) * d[(G_2 - G_1)(t) * dQ_1(t)] - \frac{1}{3} \varepsilon_{11}^m(t) * d\{(G_2 - G_1)(t) * d[(G_2 - G_1)(t) * dQ_1(t)]\}, \quad (\text{E.6})$$

$$\sigma_{12}^m(t) = p_1^m(t) \text{ e } \sigma_{22}^m(t) = p_2^m(t). \quad (\text{E.7})$$

APÊNDICE E. TENSÕES VISCOELÁSTICAS EM NÓS DO CONTORNO

A deformação específica nodal ε_{11}^n é descrita pela expressão

$$\varepsilon_{11}^n = \frac{\partial u_1^n}{\partial x_1'} \quad (\text{E.8})$$

Tendo em vista que u_1^n é interpolado linearmente no elemento, na seguinte forma:

$$u_1^n = \phi^1 u_1^1 + \phi^2 u_1^2, \quad (\text{E.9})$$

encontra-se para a deformação nodal o seguinte:

$$\varepsilon_{11}' = \frac{u_1^2 - u_1^1}{L}. \quad (\text{E.10})$$

Logo, substituindo a equação (E.10) na equação (E.6) e juntando o resultado final a equação (E.7), têm-se as expressões finais para as tensões no sistema de referência local.

O passo seguinte, após terminadas as operações a nível de elemento, opera-se a transformação para o sistema de referência global a fim de se obter as tensões finais nos pontos nodais. Para tanto, a transformação de um tensor de 2ª ordem é representada, para as tensões, como

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\sigma}' \mathbf{R}. \quad (\text{E.11})$$

As operações matriciais realizadas para a equação (E.11) conduzem à seguinte relação entre as tensões nos referenciais globais e locais:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11}^n \\ \sigma_{12}^n \\ \sigma_{22}^n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen}^2 \alpha & -2 \text{sen} \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha \\ -\text{sen} \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha & \text{sen} \alpha \cos \alpha \\ \cos^2 \alpha & 2 \text{sen} \alpha \cos \alpha & \text{sen}^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^m \\ \sigma_{12}^m \\ \sigma_{22}^m \end{Bmatrix}. \quad (\text{E.12})$$

Utilizando as relações (eq. E.3) e as expressões das tensões no referencial local, chega-se, através de (E.12), às tensões finais

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^n(t) = & \frac{1}{3} \left[\frac{L_1 L_2^2}{L^4} (u_2^2 - u_2^1)(t) - \frac{L_1^3}{L^4} (u_1^2 - u_1^1)(t) \right] * df_1(t) + \\ & \left[\frac{L_2 L_1^2}{L^3} p_1^n(t) + \frac{L_1^3}{L^3} p_2^n(t) \right] * df_2(t) - \\ & \left[2 \frac{L_1 L_2^2}{L^3} p_2^n(t) - 2 \frac{L_2 L_1^2}{L^3} p_1^n(t) \right] + \\ & \left[\frac{L_2^3}{L^3} p_1^n(t) + \frac{L_1 L_2^2}{L^3} p_2^n(t) \right] \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

APÊNDICE E. TENSÕES VISCOELÁSTICAS EM NÓS DO CONTORNO

$$\begin{aligned}
 \sigma_{12}^n(t) = & -\frac{1}{3} \left[\frac{L_1 L_2^2}{L^4} (u_2^2 - u_2^1)(t) - \frac{L_2 L_1^2}{L^4} (u_1^2 - u_1^1)(t) \right] * df_1(t) - \\
 & \left[\frac{L_1 L_2^2}{L^3} p_1^n(t) + \frac{L_2 L_1^2}{L^3} p_2^n(t) \right] * df_2(t) + \\
 & \left[\left(\frac{L_2^3}{L^3} - \frac{L_2 L_1^2}{L^3} \right) p_2^n(t) - \left(\frac{L_1 L_2^2}{L^3} - \frac{L_1^3}{L^3} \right) p_1^n(t) \right] + \\
 & \left[\frac{L_1 L_2^2}{L^3} p_1^n(t) + \frac{L_2 L_1^2}{L^3} p_2^n(t) \right]
 \end{aligned} \tag{E.14}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{22}^n(t) = & \frac{1}{3} \left[\frac{L_2^3}{L^4} (u_2^2 - u_2^1)(t) - \frac{L_2^2 L_1}{L^4} (u_1^2 - u_1^1)(t) \right] * df_1(t) + \\
 & \left[\frac{L_2^3}{L^3} p_1^n(t) + \frac{L_1 L_2^2}{L^3} p_2^n(t) \right] * df_2(t) + \\
 & \left[2 \frac{L_1 L_2^2}{L^3} p_2^n(t) - 2 \frac{L_2 L_1^2}{L^3} p_1^n(t) \right] + \\
 & \left[\frac{L_2 L_1^2}{L^3} p_1^n(t) + \frac{L_1^3}{L^3} p_2^n(t) \right],
 \end{aligned} \tag{E.15}$$

no referencial global; na forma matricial as expressões se resumem a

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^n \\ \sigma_{12}^n \\ \sigma_{22}^n \end{Bmatrix} = & \frac{f_1(t)}{3L^4} \begin{bmatrix} L_1^3 & -L_1^2 L_2 & -L_1^3 & L_1^2 L_2 \\ -L_1^2 L_2 & L_1 L_2^2 & L_1^2 L_2 & -L_1 L_2^2 \\ L_1 L_2^2 & -L_2^3 & -L_1 L_2^2 & L_2^3 \end{bmatrix} * d \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} + \\
 \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} [f_2(t) + 2h(t)] L_1^2 L_2 + h(t) L_2^3 & f_2(t) L_1^3 - h(t) L_1 L_2^2 \\ h(t) L_1^3 - f_2(t) L_1 L_2^2 & h(t) L_2^3 - f_2(t) L_1^2 L_2 \\ f_2(t) L_2^3 - h(t) L_1^2 L_2 & [f_2(t) + 2h(t)] L_1 L_2^2 + h(t) L_1^3 \end{bmatrix} * d \begin{Bmatrix} p_1^n \\ p_2^n \end{Bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{E.16}$$

As funções temporais são descritas por

$$f_1(t) = 2G_1(t) + 4Q_2(t) * dG_2(t) - Q_3(t) \tag{E.17}$$

e

$$f_2(t) = h(t) - 3Q_2(t). \tag{E.18}$$

As funções temporais presentes são definidas como: $h(t)$, a função de Heaviside; $G_1(t)$ e $G_2(t)$, as partes desviatória e volumétrica da função de relaxação, definidas pelo

APÊNDICE E. TENSÕES VISCOELÁSTICAS EM NÓS DO CONTORNO

modelo reológico adotado; e $Q_2(t)$ e $Q_3(t)$, funções definidas pelas equações (3.34) e (3.46), respectivamente.

Apêndice F

Método de Simpson Modificado Aplicado às Convoluções Temporais

Neste apêndice são fornecidas as expressões do vetor $R_i(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; (n-1)\Delta t)$ para valores de n pares e ímpares, conforme apresentação feita por LEE e WESTMANN [30].

Sendo assim, têm-se para:

- n par

$$\begin{aligned} R_i(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; (n-1)\Delta t) = & \\ & -\frac{4}{3}\Delta t \sum_{m=1}^{\frac{n}{2}} u_j[\mathbf{x}, n-(2m-1)\Delta t] \dot{p}_{ij}^*[\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; (2m-1)\Delta t] \\ & -\frac{2}{3}\Delta t \sum_{m=1}^{\frac{n}{2}-1} u_j[\mathbf{x}, (n-2m)\Delta t] \dot{p}_{ij}^*[\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; 2m\Delta t] \\ & -\frac{\Delta t}{3} u_j(\mathbf{x}, 0) \dot{p}_{ij}^*[\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; n\Delta t] \\ & +\frac{4}{3}\Delta t \sum_{m=1}^{\frac{n}{2}} p_j[\mathbf{x}, n-(2m-1)\Delta t] \dot{u}_{ij}^*[\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; (2m-1)\Delta t] \\ & -\frac{4}{3}\Delta t \sum_{m=1}^{\frac{n}{2}-1} p_j[\mathbf{x}, (n-2m)\Delta t] \dot{u}_{ij}^*[\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; 2m\Delta t] \\ & -\frac{\Delta t}{3} p_j(\mathbf{x}, 0) \dot{u}_{ij}^*[\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; n\Delta t]; \end{aligned} \tag{F.1}$$

APÊNDICE F. MÉTODO DE SIMPSON MODIFICADO APLICADO ÀS CONVOLUÇÕES TEMPORAIS

- n ímpar, respectivamente, para $n = 3$ e para $n \geq 5$

$$\begin{aligned}
 R_i(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; 2\Delta t) = & -\frac{9}{8}\Delta t \{u_j(\mathbf{x}, 2\Delta t) \dot{p}_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; \Delta t)\} \\
 & -\frac{9}{8}\Delta t \{u_j(\mathbf{x}, \Delta t) \dot{p}_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; 2\Delta t)\} \\
 & -\frac{3}{8}\Delta t \{u_j(\mathbf{x}, 0) \dot{p}_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; 3\Delta t)\} \\
 & +\frac{9}{8}\Delta t \{p_j(\mathbf{x}, 2\Delta t) \dot{u}_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; \Delta t)\} \\
 & +\frac{9}{8}\Delta t \{p_j(\mathbf{x}, \Delta t) \dot{u}_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; 2\Delta t)\} \\
 & +\frac{3}{8}\Delta t \{p_j(\mathbf{x}, 0) \dot{u}_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; 3\Delta t)\}; \tag{F.2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_i(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; (n-1)\Delta t) = & \\
 & -\frac{4}{3}\Delta t \sum_{m=1}^{\frac{n-3}{2}} u_j[\mathbf{x}, n - (2m-1)\Delta t] \dot{p}_{ij}^*[\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; (2m-1)\Delta t] \\
 & -\frac{2}{3}\Delta t \sum_{m=1}^{\frac{n-3}{2}-1} u_j[\mathbf{x}, (n-2m)\Delta t] \dot{p}_{ij}^*[\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; 2m\Delta t] \\
 & -\frac{17}{24}\Delta t \{u_j(\mathbf{x}, 3\Delta t) \dot{p}_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; (n-3)\Delta t)\} \\
 & -\frac{9}{8}\Delta t \{u_j(\mathbf{x}, 2\Delta t) \dot{p}_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; (n-2)\Delta t)\} \\
 & -\frac{9}{8}\Delta t \{u_j(\mathbf{x}, \Delta t) \dot{p}_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; (n-1)\Delta t)\} \\
 & -\frac{3}{8}\Delta t \{u_j(\mathbf{x}, 0) \dot{p}_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; n\Delta t)\} + \frac{3}{8}\Delta t \{p_j(\mathbf{x}, 0) \dot{u}_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; n\Delta t)\} \\
 & +\frac{4}{3}\Delta t \sum_{m=1}^{\frac{n-3}{2}} p_j[\mathbf{x}, n - (2m-1)\Delta t] \dot{u}_{ij}^*[\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; (2m-1)\Delta t] \\
 & +\frac{2}{3}\Delta t \sum_{m=1}^{\frac{n-3}{2}-1} p_j[\mathbf{x}, (n-2m)\Delta t] \dot{u}_{ij}^*[\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; 2m\Delta t] \\
 & +\frac{17}{24}\Delta t \{p_j(\mathbf{x}, 3\Delta t) \dot{u}_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; (n-3)\Delta t)\} \\
 & +\frac{9}{8}\Delta t \{p_j(\mathbf{x}, 2\Delta t) \dot{u}_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; (n-2)\Delta t)\} \\
 & +\frac{9}{8}\Delta t \{p_j(\mathbf{x}, \Delta t) \dot{u}_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; (n-1)\Delta t)\}. \tag{F.3}
 \end{aligned}$$

Apêndice G

Soluções Analíticas Viscoelásticas dos Exemplos Quasi-Estáticos

Apresenta-se, neste apêndice, as soluções viscoelásticas obtidas pelo uso do Princípio da Correspondência e da transformada de Laplace nas soluções elásticas obtidas da literatura. Para a obtenção destas, emprega-se apenas o modelo reológico 1, definido no texto, que consiste na representação da parte volumétrica por parâmetro elástico e da parte desviatória por parâmetro viscoelástico (modelo de Boltzmann).

G.1 Tubo de Parede Espessa Submetido à Pressão Interna

G.1.1 Solução elástica

$$u_r = \frac{(1 + \nu) p b^2}{E (a^2 - b^2)} \left[(1 - 2\nu) r + \frac{a^2}{r} \right] \quad (\text{G.1})$$

e

$$\sigma_r = \frac{p b^2}{a^2 - b^2} \left[1 - \frac{a^2}{r^2} \right] \quad e \quad \sigma_\theta = \frac{p b^2}{a^2 - b^2} \left[1 + \frac{a^2}{r^2} \right], \quad (\text{G.2})$$

G.1.2 Solução viscoelástica

Para este problema foram geradas as soluções viscoelásticas para os três tipos de solicitações temporais adotados (figs. 4.1, 4.3 e 4.4). As expressões obtidas são apre-

APÊNDICE G. SOLUÇÕES ANALÍTICAS VISCOELÁSTICAS DOS EXEMPLOS QUASI-ESTÁTICOS

sentadas à seguir:

G.1.2.1 Solicitação do tipo 1 (fig. 4.1)

$$u_r(t) = \frac{p_0 b^2}{(a^2 - b^2)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{3r}{2} \left[\frac{1}{3k + G\alpha} + e^{-\frac{t\beta(3k + G\alpha)}{3k + G}} \left(\frac{1}{3k + G} - \frac{1}{3k + G\alpha} \right) \right] \\ + \frac{a^2}{2G\alpha r} [\alpha e^{-t\beta\alpha} + 1 - e^{-t\beta\alpha}] \end{array} \right\}. \quad (G.3)$$

G.1.2.2 Solicitação do tipo 3 (fig. 4.3)

- Para $t < t_1$

$$u_r(t) = \frac{b^2 p_0}{2(a^2 - b^2) r t_1} \left\{ \begin{array}{l} \frac{a^2}{G\alpha^2 \lambda} [(1 - \alpha) e^{-t\alpha\lambda} + (-1 + \alpha + t\alpha\lambda)] - \\ \frac{3r^2}{(3K + G\alpha)^2 \lambda} \left[e^{-\frac{t(3K + G\alpha)\lambda}{G + 3K}} \frac{G(-1 + \alpha) - t\lambda(3K + G\alpha) - G(-1 + \alpha)}{G + 3K} \right] \end{array} \right\} \quad (G.4)$$

- Para $t_1 \leq t < t_2$

$$u_r(t) = \frac{b^2 p_0}{2(a^2 - b^2) Gr} \left[\begin{array}{l} \frac{a^2 [e^{-t\alpha\lambda} (-1 + \alpha) + 1]}{\alpha} + \\ \frac{3Gr^2}{3K + G\alpha} \left(1 + \frac{e^{-\frac{t(3K + G\alpha)\lambda}{G + 3K}} \frac{G(-1 + \alpha)}{G + 3K}}{G + 3K} \right) \end{array} \right] \quad (G.5)$$

APÊNDICE G. SOLUÇÕES ANALÍTICAS VISCOELÁSTICAS DOS EXEMPLOS QUASI-ESTÁTICOS

- Para $t_2 \leq t < t_3$

$$\begin{aligned}
 u_r(t) = & \frac{b^2 p_0}{2r(a^2 - b^2)(t_2 - t_3)} \left\{ \frac{-a^2}{G\lambda\alpha^2} \left[\begin{array}{l} 1 - \alpha - (t - t_3)\alpha\lambda + \\ e^{-t\alpha\lambda}(-1 + \alpha)(1 + t_3\alpha\lambda) \end{array} \right] - \right. \\
 & \frac{3r^2}{\lambda(G + 3K)(3K + G\alpha)^2} \left[- (G + 3K) \left[\begin{array}{l} G(-1 + \alpha) + \\ (t - t_3)(3K + G\alpha)\lambda \end{array} \right] + \right. \\
 & \left. \left. e^{-\frac{t(3K + G\alpha)\lambda}{G + 3K}} \frac{t(3K + G\alpha)\lambda}{G + 3K} G(-1 + \alpha) [(G + 3K) + t_3\lambda(G\alpha + 3K)] \right] \right\} \quad (G.6)
 \end{aligned}$$

G.1.2.3 Solicitação do tipo 4 (fig. 4.4)

$$\begin{aligned}
 u_r(t) = & \frac{b^2 p_0}{2(a^2 - b^2)rt_1(t_1 - t_2)} \\
 & \left\{ \frac{3r^2}{(3K + G\alpha)^3 \lambda^2} \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} -2G(G + 3K)(-1 + \alpha) + \\ G(2t - t_2)(-1 + \alpha)(3K + G\alpha)\lambda + \\ t(t - t_2)(3K + G\alpha)^2 \lambda^2 \end{array} \right] + \\ e^{-\frac{t(3K + G\alpha)\lambda}{G + 3K}} G(-1 + \alpha) \left[\begin{array}{l} 2(3K + G) + \\ t_2\lambda(3K + G\alpha) \end{array} \right] \end{array} \right] + \quad (G.7) \\
 & \left. \frac{a^2}{G\alpha^3 \lambda^2} \left[\begin{array}{l} e^{-t\alpha\lambda}(-1 + \alpha)(2 + t_2\alpha\lambda) + \\ [2 + \alpha(-2 + (2t - t_2)(-1 + \alpha)\lambda + t(t - t_2)\alpha\lambda^2)] \end{array} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

As expressões obtidas para as solicitações 3 e 4 (figs. 4.3 e 4.4) falham na modelagem do comportamento assintótico após a despressurização do cilindro. Por este motivo não foram geradas, para estas solicitações, as expressões viscoelásticas dos demais exemplos.

G.2 Viga Bi-apoiada Submetida a Carregamento Uniformemente Distribuído

G.2.1 Solução elástica

$$u = \frac{q}{2EI} \left[\left(L^2 x - \frac{x^3}{3} \right) y + x \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right) + \nu x \left(\frac{1}{3} y^3 - c^2 y + \frac{2}{3} c^3 \right) \right] \quad (\text{G.8})$$

e

$$\begin{aligned} v = & -\frac{q}{2EI} \left\{ \frac{y^4}{12} - \frac{c^2 y^2}{2} + \frac{2}{3} c^3 y + \nu \left[(L^2 - x^2) \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{6} - \frac{1}{5} c^2 y^2 \right] \right\} \quad (\text{G.9}) \\ & -\frac{q}{2EI} \left[\frac{L^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{5} c^2 x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} \nu \right) c^2 x^2 \right] \\ & + \frac{5}{24} \frac{qL^4}{EI} \left[1 + \frac{12}{5} \frac{c^2}{L^2} \left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2} \right) \right], \end{aligned}$$

G.2.2 Solução viscoelástica

$$u(t) = \frac{qx}{540GIK\alpha} \left\{ \begin{array}{l} 5y \left[\frac{2G\alpha(3L^2 - x^2 + y^2) + 3K(6L^2 - 2x^2 + 5y^2)[(-1 + \alpha)e^{-t\alpha\lambda} + 1]}{3K(6L^2 - 2x^2 + 5y^2)[(-1 + \alpha)e^{-t\alpha\lambda} + 1]} \right] + \\ 10c^3 [3Ke^{-t\alpha\lambda}(-1 + \alpha) + (3K - 2G\alpha)] - \\ 9c^2 y [9Ke^{-t\alpha\lambda}(-1 + \alpha) + (9K - 2G\alpha)] \end{array} \right\} \quad (\text{G.10})$$

APÊNDICE G. SOLUÇÕES ANALÍTICAS VISCOELÁSTICAS DOS EXEMPLOS QUASI-ESTÁTICOS

e

$$v(t) = -\frac{q}{1080GIK\alpha} \left\{ \begin{array}{l} -9c^2 \left[\begin{array}{l} 2G(L^2 - x^2 + y^2)\alpha + \\ 3K(7L^2 - 7x^2 + 4y^2)(-1 + \alpha)e^{-t\alpha\lambda} + \\ 3K(7L^2 - 7x^2 + 4y^2) \end{array} \right] - \\ 5 \left[\begin{array}{l} G\alpha \left[\begin{array}{l} 5L^4 - 6L^2x^2 + x^4 + \\ 6(L-x)(L+x)y^2 + y^4 \end{array} \right] + \\ 3K \left[\begin{array}{l} 5L^4 + x^4 + 3x^2y^2 - \\ 2y^4 - 3L^2(2x^2 + y^2) \end{array} \right] (-1 + \alpha)e^{-t\alpha\lambda} \\ + 3K \left[\begin{array}{l} 5L^4 + x^4 + 3x^2y^2 - \\ 2y^4 - 3L^2(2x^2 + y^2) \end{array} \right] \end{array} \right] + \\ 40c^3y(3Ke^{-t\alpha\lambda}(-1 + \alpha) + (3K + G\alpha)) \end{array} \right\} \quad (G.11)$$

G.3 Viga Engastada Submetida a uma Solicitação Concentrada em seu Extremo Livre

G.3.1 Solução elástica

$$u = -\frac{Px^2y}{2EI} - \frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6IG} + \left(\frac{PL^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2IG} \right) y \quad (G.12)$$

e

$$v = \frac{\nu Pxy^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} - \frac{PL^2x}{2EI} + \frac{PL^3}{3EI}, \quad (G.13)$$

G.3.2 Solução viscoelástica

$$u(t) = \frac{py}{108GIK\alpha} \left\{ \begin{array}{l} 2G(3l^2 - 3x^2 + y^2)\alpha - \\ 54c^2K [(-1 + \alpha)e^{-t\alpha\lambda} + 1] + \\ 3K(6l^2 - 6x^2 + 5y^2) [(-1 + \alpha)e^{-t\alpha\lambda} + 1] \end{array} \right\} \quad (G.14)$$

APÊNDICE G. SOLUÇÕES ANALÍTICAS VISCOELÁSTICAS DOS EXEMPLOS
QUASI-ESTÁTICOS

e

$$v(t) = \frac{p}{108GIK\alpha} \left\{ \begin{array}{l} 2G [(l-x)^2(2l+x) + 3xy^2] \alpha + \\ 3K [2(l-x)^2(2l+x) - 3xy^2] [(-1+\alpha)e^{-t\alpha\lambda} + 1] \end{array} \right\} \quad (\text{G.15})$$

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)