



COPPE/UFRJ

ANÁLISE NÃO-LINEAR ASSINTÓTICA MODAL DA INSTABILIDADE DE  
ESTRUTURAS RETICULADAS

Adcleides Araújo da Silva

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Orientador(es): Ronaldo Carvalho Battista  
Ricardo Valeriano Alves

Rio de Janeiro  
Março de 2009

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

ANÁLISE NÃO-LINEAR ASSINTÓTICA MODAL DA INSTABILIDADE DE  
ESTRUTURAS RETICULADAS

Adcleides Araújo da Silva

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ  
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM  
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

---

Prof. Ronaldo Carvalho Battista, Ph.D.

---

Prof. Ricardo Valeriano Alves, D.Sc.

---

Prof<sup>ª</sup>. Michèle Schubert Pfeil, D.Sc.

---

Prof. Paulo Batista Gonçalves, D.Sc.

---

Prof. Raul Rosas e Silva, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2009

Silva, Adcleides Araújo da

Análise Não-Linear Assintótica Modal da Instabilidade de Estruturas Reticuladas/Adcleides Araújo da Silva. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2009.

XXIV, 215 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: Ronaldo Carvalho Battista

Ricardo Valeriano Alves

Tese (doutorado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Civil, 2009.

Referencias Bibliográficas: p. 188-200.

1. Instabilidade Estrutural. 2. Análise Modal. 3. Análise não-linear. 4. Estruturas Reticuladas. I. Battista, Ronaldo Carvalho et al. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil. III. Título.

*Ao meu mestre Jesus e à minha família:  
Ellem Sefra, Antonio, Sebastiana, Haniely,  
Érica, Daniel e à minha sobrinha que  
brevemente nascerá.*

## AGRADECIMENTOS

Sobretudo a Deus que me deu essa grande oportunidade, ânimo e esperança durante os momentos mais áridos.

Aos meus pais, à minha irmã e à minha esposa que sempre me motivaram a prosseguir na conquista de meus ideais;

Ao professor Ricardo Valeriano Alves, por seus ensinamentos, generosidade, compreensão e principalmente pelo privilégio de sua amizade;

Ao professor Ronaldo Carvalho Battista, por suas lições de engenharia, de ética e de vida e pela honra de sua orientação e amizade desde o curso de mestrado;

Aos amigos e irmãos Daniel Petitinga de Miranda, Tiago José Limoeiro de Oliveira, Emerson Figueiredo dos Santos, Walber da Luz Correa e George Oliveira Ainsworth Jr. pelo companheirismo;

Aos amigos e companheiros do LABEST Carlos Eduardo Rossigali, Miguel Pimenta, Flávio Sarquis, Janine Domingos Vieira, Eugênia Fonseca da Silva, Anderson de Souza Matos Gadéa, Alexandre Landesmann, Carlos Frederico M. Cortês, Wendell D. Varella, Ana Maria Teixeira, Guilherme Chagas Cordeiro, Reila Vargas Velasco, Cintia Maria A. Fontes, Margareth da Silva Magalhães, Maria Rita P. de Carvalho, Paulo Anderson S. Rocha e aos demais colegas da COPPE que tive a honra de conhecer e de desfrutar o convívio;

Aos amigos do laboratório de computação e da secretaria da coordenação do PEC, Thelmo, Célio, Orlando, Jairo, Rita, Wilma e Beth;

As secretárias do LABEST, Luzidele e Sandra pela amizade e por todas as gentilezas.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES pelo apoio financeiro e a todos que colaboraram direta e indiretamente para que este trabalho pudesse ser realizado.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

## ANÁLISE NÃO-LINEAR ASSINTÓTICA MODAL DA INSTABILIDADE DE ESTRUTURAS RETICULADAS

Adcleides Araújo da Silva

Março/2009

Orientadores: Ronaldo Carvalho Battista

Ricardo Valeriano Alves

Programa: Engenharia Civil

Apresenta-se neste trabalho a descrição de uma formulação matemática para a solução modal, num referencial lagrangeano atualizado, das equações algébricas não-lineares associadas ao problema de instabilidade elástica de estruturas reticuladas. O sistema de equações não-lineares de equilíbrio é escrito em termos de combinações lineares de modos assintóticos, críticos ou ainda combinação de ambos. Os modos críticos são obtidos a partir de um problema de autovalor e os modos assintóticos são obtidos por meio de expansões em séries de potência da relação parametrizada força-deslocamento. O procedimento numérico proposto permite a avaliação automática das formas modais mais significativas. Resultados numéricos de exemplos clássicos são utilizados na validação deste modelo matemático-numérico para análise não-linear da instabilidade elástica de estruturas reticuladas.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

## NONLINEAR ASYMPTOTIC MODAL ANALYSIS OF INSTABILITY OF FRAMED STRUCTURES

Adcleides Araújo da Silva

March/2009

Advisor: Ronaldo Carvalho Battista

Ricardo Valeriano Alves

Department: Civil Engineering

This work presents a description of a mathematical formulation for modal solution in an updated lagrangean reference of the non linear algebraic equations associated to the elastic instability problem of frame structures. The system of nonlinear equilibrium equations is written in terms of linear combinations of asymptotic or critical modes, or yet combinations of both. The critical modes are obtained from an eigenvalue problem and the asymptotic modes arise from power series of parameterized load-displacement relationships. The proposed numerical procedure allows evaluating the most significant modal forms automatically. Numerical results drawn from classic examples are used to validate this mathematical-numerical model for performing geometrically nonlinear and instability analysis of elastic frame structures.

# SUMÁRIO

<b>1 Introdução .....</b>	<b>1</b>
1.1 Breve Histórico.....	3
1.1.1 <i>Recentes Pesquisas</i> .....	5
1.1.2 <i>Formulações para análise não-linear</i> .....	8
1.2 Desenvolvimento da Linha de Pesquisa .....	10
1.3 Motivação .....	13
1.4 Escopo do Trabalho .....	14
<b>2 Análise da Instabilidade de Sistemas Estruturais .....</b>	<b>15</b>
2.1 Trajetórias de Equilíbrio e Pontos Críticos .....	15
2.2 Modelos Matemáticos para Análise Não-Linear .....	18
2.3 Técnicas Usuais para Análise Não-Linear.....	19
2.4 Estudo das Deformações .....	20
<b>3 Energia Potencial Total de Sistemas Estruturais Discretizados no RLA.....</b>	<b>24</b>
3.1 Potencial de Cargas em Elementos Finitos no RLA.....	25
3.2 Energia de Deformação em Elementos Finitos no RLA .....	26
3.2.1 <i>Energia de Deformação em Termos de Matrizes</i> .....	28
3.2.2 <i>Formulação das Matrizes de Rigidez</i> .....	30
3.3 EPT de Elementos Finitos no RLA .....	33

3.4	EPT do Sistema Discretizado no RLA .....	35
<b>4 Equilíbrio e Estabilidade de Sistemas Estruturais .....</b>		<b>37</b>
4.1	Condição de Equilíbrio .....	37
4.2	Equilíbrio Estável .....	39
4.3	Estabilidade de Pontos Críticos .....	40
4.3.1	<i>Análise Linearizada da Estabilidade</i> .....	41
<b>5 Estabilidade de Sistemas Imperfeitos .....</b>		<b>45</b>
5.1	Caracterização de Pontos Críticos .....	50
5.1.1	<i>Distinção de Pontos Críticos</i> .....	54
5.1.2	<i>Demonstração da Influência de Imperfeições Geométricas</i> .....	55
5.2	Metodologias para Consideração de Imperfeições .....	56
<b>6 Equações de Equilíbrio de Sistemas Estruturais Discretizados no RLA .....</b>		<b>59</b>
6.1	Formulação das Equações de Equilíbrio .....	59
6.2	Equações Incrementais de Equilíbrio .....	61
6.2.1	<i>Solução das Equações de Equilíbrio Incrementais Linearizadas</i> .....	63
6.3	Equações Assintóticas de Equilíbrio .....	65
6.3.1	<i>Solução das Equações Assintóticas de Equilíbrio</i> .....	67
6.4	Formulação das Equações Modais de Equilíbrio .....	69
6.4.1	<i>Escolha da Base para Análise Assintótica Modal</i> .....	71
6.4.2	<i>Solução das Equações Modais de Equilíbrio no RLA</i> .....	78

<b>7 Matrizes de Rigidez de Elementos de Pórtico .....</b>	<b>82</b>
7.1 Matrizes de Rigidez do Elemento de Pórtico Plano .....	83
7.1.1 <i>Funções de Interpolação para Elementos de Pórticos Planos.....</i>	83
7.1.2 <i>Deformações em Elementos de Pórticos Planos .....</i>	86
7.1.3 <i>Matriz de Rigidez Elástica.....</i>	89
7.1.4 <i>Matriz de Rigidez <math>K_{\sigma}</math>.....</i>	90
7.1.5 <i>Matriz de Rigidez <math>K_1</math>.....</i>	92
7.1.6 <i>Matriz de Rigidez <math>K_2</math>.....</i>	93
7.2 Matrizes de Rigidez do Elemento de Pórtico Tridimensional .....	98
7.2.1 <i>Funções de Interpolação para Pórticos Tridimensionais .....</i>	98
7.2.2 <i>Deformações em Elementos de Pórticos Tridimensionais .....</i>	102
7.2.3 <i>Matriz de Rigidez Elástica.....</i>	105
7.2.4 <i>Matriz de Rigidez <math>K_{\sigma}</math>.....</i>	107
7.2.5 <i>Matriz de Rigidez <math>K_1</math>.....</i>	109
7.2.6 <i>Matriz de Rigidez <math>K_2</math>.....</i>	111
<b>8 Programas de Análises Assintóticas.....</b>	<b>133</b>
<b>9 Estudo de Casos .....</b>	<b>139</b>
9.1 Pórtico Abatido.....	140
9.2 Coluna Imperfeita Biapoiada.....	150
9.3 Arco Sob Pressão Radial .....	156

9.4	Arco Abatido Birrotulado.....	160
9.5	Pórtico de Roorda.....	166
9.6	Pórtico de Três Barras.....	172
9.7	Pórtico de Cinco Barras.....	181
	<b>10 Conclusões e Comentários Finais.....</b>	<b>185</b>
	<b>Referências Bibliográficas.....</b>	<b>188</b>
	<b>Apêndice A.....</b>	<b>201</b>
A.1	Coluna Perfeita.....	201
A.2	Coluna com Imperfeição de Geometria.....	206
A.3	Coluna com Imperfeição de Carga.....	210

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 Estrutura reticulada espacial da cobertura do centro de convenções Riocentro, Rio de Janeiro/RJ.....	1
Figura 1.2 Estrutura reticulada espacial da cobertura do Estádio Poliesportivo Nilson-Nelson, Brasília/DF [1] e [2]......	2
Figura 2.1 Ilustração de alguns possíveis caminhos de equilíbrio de uma estrutura.....	16
Figura 2.2 Deformação de um sólido no RLT.....	21
Figura 2.3 Deformação de um sólido no RLA. ....	22
Figura 3.1 Representação dos eixos de rotação para um elemento de pórtico plano. ....	36
Figura 5.1 Sensibilidade às imperfeições de sistemas estruturais caracterizados pela presença de bifurcação simétrica instável. ....	46
Figura 5.2 Trajetórias de equilíbrio de sistemas estruturais assíntotas às trajetórias com bifurcação assimétrica. ....	47
Figura 5.3 Trajetórias de equilíbrio de estruturas imperfeitas.....	48
Figura 5.4 Ilustração da representatividade da análise linearizada em estruturas reais. ....	49
Figura 6.1 Representação das matrizes secante, tangente e não-linear. ....	62
Figura 6.2 algoritmo para montagem iterativa da matriz modal. ....	73
Figura 6.3 algoritmo do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt Modificado... ..	77
Figura 6.4 Representação da restrição do comprimento de arco.....	79
Figura 7.1 Deslocamentos nodais do elemento de pórtico plano. ....	83
Figura 7.2 Esforços nodais atuantes no elemento com um prévio estado de tensões.....	86

Figura 7.3 Variação linear do momento $M_z(x)$ ao longo do elemento e das deformações nas seções extremas do mesmo. ....	87
Figura 7.4 Deslocamentos nodais do elemento de pórtico tridimensional. ....	98
Figura 7.5 Esforços nodais atuantes no elemento com um prévio estado de tensões...	103
Figura 7.6 Variações dos momentos $M_z(x)$ , $M_y(x)$ ao longo do elemento e das deformações nas seções extremas do mesmo. ....	104
Figura 8.1 Fluxograma do programa principal para as análises assintóticas. ....	136
Figura 8.2 Fluxograma para análise assintótica por expansões em séries de potência.	137
Figura 8.3 Fluxograma para análise assintótica modal. ....	138
Figura 9.1 Modelo estrutural unifilar do Pórtico de Williams [119]. ....	140
Figura 9.2 Evolução da solução assintótica com o aumento da série. ....	141
Figura 9.3 Soluções assintóticas (modelos discretizado em 2, 4, 10 e 40 elementos).	142
Figura 9.4 Soluções assintóticas com variações do parâmetro de perturbação. ....	143
Figura 9.5 Soluções do Pórtico de Williams. ....	144
Figura 9.6 Comparação entre a solução modal de Alves [97] e a presente. ....	145
Figura 9.7 Soluções assintóticas modais variando a discretização do modelo. ....	146
Figura 9.8 Soluções assintóticas modais variando o comprimento de arco. ....	149
Figura 9.9 Modelo estrutural unifilar de uma coluna imperfeita. ....	151
Figura 9.10 Solução assintótica - modelo discretizado em 10 e em 40 elementos. ....	152
Figura 9.11 Solução da coluna biapoiada imperfeita. ....	153
Figura 9.12 Soluções da coluna de Euler. ....	155
Figura 9.13 Arco abatido biengastado uniformemente comprimido. ....	156

Figura 9.14 Soluções do arco abatido biengastado uniformemente comprimido.....	157
Figura 9.15 Geometria da estrutura imperfeita (sem escala).....	159
Figura 9.16 Soluções modais do arco abatido biengastado imperfeito. ....	160
Figura 9.17 Possíveis trajetória de equilíbrio de um arco abatido [11]. ....	161
Figura 9.18 Arco abatido biapoiado com carga centrada. ....	161
Figura 9.19 Soluções para o arco abatido representado na Figura 9.18. ....	162
Figura 9.20 Geometria imperfeita do arco abatido birrotulado (sem escala). ....	164
Figura 9.21 Trajetórias de equilíbrio do arco abatido birrotulado imperfeito. ....	165
Figura 9.22 Representação do Pórtico de Roorda. ....	167
Figura 9.23 Soluções do Pórtico de Roorda. ....	168
Figura 9.24 Representação unifilar do Pórtico de Roorda com carga excêntrica.....	170
Figura 9.25 Soluções do Pórtico de Roorda com carga excêntrica. ....	171
Figura 9.26 Exemplos de modos de instabilidades de pórticos. ....	172
Figura 9.27 Representação unifilar do pórtico de três barras birrotulado. ....	173
Figura 9.28 Trajetória de equilíbrio do pórtico com a carga no ponto <b>a</b> . ....	174
Figura 9.29 Trajetória de equilíbrio do pórtico com a carga no ponto <b>b</b> . ....	177
Figura 9.30 Modelo estrutural do pórtico de cinco barras.....	181
Figura 9.31 Trajetória de equilíbrio do pórtico de cinco barras. ....	182
Figura A.1 Coluna engastada e apoiada carregada axialmente. ....	201
Figura A.2 Carga e modo crítico bifurcacional da coluna engastada e apoiada.....	202
Figura A.3 Representação de $\beta_1$ e $\lambda_1$ para a coluna perfeita. ....	205

Figura A.4 Autovalores $\lambda_1$ da coluna imperfeita (imperfeição geométrica aleatória). 209
Figura A.5 Representação de $\beta_1$ e $\lambda_1$ da coluna imperfeita (imperfeição aleatória)... 210
Figura A.6 Autovalores $\lambda_1$ da estrutura com imperfeição de carga incremental. .... 214
Figura A.7 Relação $\beta_1$ x $\lambda_1$ da estrutura com imperfeição geométrica aleatória. .... 215

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 Valores de ponto limite do pórtico abatido obtidos nas análises.....	146
Tabela 2 Modos ortonormalizados - análise assintótica modal.....	147
Tabela 3 Modos ortonormalizados da coluna birrotulada imperfeita.....	154
Tabela 4 Ponto de bifurcação do arco comprimido radialmente.....	158
Tabela 5 Formas modais do arco biengastado uniformemente comprimido.....	158
Tabela 6 Parâmetro da carga correspondente à flambagem do arco abatido imperfeito comprimido uniformemente.....	159
Tabela 7 Modos ortonormalizados usados na análise modal do arco abatido biapoado com carga centrada.....	163
Tabela 8 Comparação de resultados do ponto limite do arco abatido birrotulado.....	164
Tabela 9 Deslocamento ( $v$ ) e carga limite (flambagem) do arco abatido birrotulado..	166
Tabela 10 Valores de ponto limite do Pórtico de Roorda obtidos nas análises.....	167
Tabela 11 Deformada do Pórtico de Roorda sob influência dos modos assintóticos ortonormalizados.....	168
Tabela 12 Carga de flambagem do Pórtico de Roorda.....	171
Tabela 13 Deformada do pórtico sob influência dos modos ortonormalizados.....	175
Tabela 14 Deformada do pórtico sob influência dos modos assintóticos.....	178
Tabela 15 Ponto de bifurcação do Pórtico de três barras com carga no meio do vão..	180
Tabela 16 Carga P de bifurcação do Pórtico de cinco barras.....	182
Tabela 17 Geometria deformada do pórtico sob influência das formas modais.....	183

Tabela A.1 Representação dos três primeiros modos da matriz $T$ da coluna perfeita... 204	204
Tabela A.2 Representação dos três primeiros modos da matriz $T$ da coluna com imperfeição de geometria aleatória..... 208	208
Tabela A.3 Representação dos três primeiros modos da matriz $T$ da coluna com imperfeição de carga..... 213	213

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Grandezas Escalares:

- $A$  Área da seção transversal do elemento.
- $a_i$  Amplitude do  $i$ -ésimo modo utilizado na combinação modal.
- $a_0, a_1$  Coeficientes da função de interpolação do campo de deslocamentos  $u$ .
- $b_0, \dots, b_3$  Coeficientes da função de interpolação do campo de deslocamentos  $v$ .
- $c_0, \dots, c_3$  Coeficientes da função de interpolação do campo de deslocamentos  $w$ .
- $d_0, d_1$  Coeficientes da função de interpolação para as rotações de torção  $\theta$ .
- $e$  Excentricidade de carga.
- $E$  Módulo de elasticidade longitudinal.
- $G$  Módulo de elasticidade transversal.
- $gl$  Deslocamentos generalizados, ou graus de liberdade, de um elemento.
- $I_z, I_y$  Momentos de segunda ordem da seção em relação aos eixos principais.
- $I_{zz}, I_{yy}$  Momentos de quarta ordem da seção transversal em relação aos eixos principais.
- $L$  Comprimento do elemento.
- $U$  Energia de deformação.
- $U_{00}$  Parcela constante de  $U$  decorrente das tensões/deformações iniciais.
- $U_{01}$  Parcela linear de  $U$  decorrente das deformações  $\varepsilon_0$  e  $\varepsilon_1$ .
- $U_{02}$  Parcela quadrática de  $U$  decorrente das deformações  $\varepsilon_0$  e  $\varepsilon_2$ .

- $U_{11}$  Parcela quadrática de  $U$  decorrente das deformações  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_1$ .
- $U_{12}$  Parcela cúbica de  $U$  decorrente das deformações  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ .
- $U_{22}$  Parcela quártica de  $U$  decorrente das deformações  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_2$ .
- $u, v, w$  Campos de deslocamentos nas direções  $x, y$  e  $z$  dos eixos dos elementos.
- $u_1, u_2$  Deslocamentos nodais na direção local  $x$ .
- $v_1, v_2$  Deslocamentos nodais na direção local  $y$ .
- $V$  Energia Potencial Total.
- $V^*$  Energia Potencial Total Reduzida.
- $w_1, w_2$  Deslocamentos nodais na direção local  $z$ .
- $\alpha$  Parâmetro de perturbação.
- $\beta_m$  Amplitude do  $m$ -ésimo autovetor da matriz de rigidez tangente.
- $\Delta L$  Comprimento de arco que restringe o avanço ao longo da trajetória de equilíbrio.
- $\Delta V$  Variação total da Energia Potencial Total em torno de  $U$ .
- $\delta^n V$  Corresponde a  $n$ -ésima variação de  $V$  em torno de  $U$ .
- $\delta_{ij}$  Delta de Kronecker.
- $\varepsilon$  Deformação longitudinal.
- $\varepsilon_0$  Deformação inicial.
- $\varepsilon_1$  Componente linear do tensor de deformações Green-Lagrange.
- $\varepsilon_2$  Componente quadrática do tensor de deformações Green-Lagrange.
- $\varepsilon_T$  Deformação total.

$\varphi_{y1}, \varphi_{y2}$  Rotações nodais em torno do eixo y local.

$\varphi_{z1}, \varphi_{z2}$  Rotações nodais em torno do eixo z local.

$\gamma$  Ângulo de rotação entre eixos locais e globais.

$\lambda$  Parâmetro de controle do carregamento.

$\theta_1, \theta_2$  Rotações nodais em torno do eixo x local.

$\xi$  Valor da tolerância para convergência do método iterativo de Newton-Raphson.

$\zeta_k$  Magnitude de imperfeições iniciais.

$\Omega$  Potencial das cargas externas.

$\Omega_v^n$  Potencial das cargas externas de volume no n-ésimo elemento.

$\Omega_s^n$  Potencial das cargas externas de superfície no n-ésimo elemento.

Vetores:

$f$  Carregamento total atuante no sistema estrutural.

$F$  Vetor que define a distribuição do carregamento na estrutura.

$F^n$  Vetor de cargas nodais de volume e de superfície agindo no elemento.

$M_y, M_z$  Momentos fletores na seção, segundo os planos xy ou xz, respectivamente.

$P_c$  Carga crítica de um sistema estrutural.

$P$  Força axial agindo no elemento.

$U$  Vetor de deslocamentos.

- $U_i$  Aproximações lineares, quadráticas, cúbicas, etc. dos deslocamentos.
- $\Delta \bar{F}$  Vetor de força incremental do sistema diagonalizado.
- $\Delta \bar{U}_{imp}$  Vetor de deslocamento incremental imperfeito.
- $\Delta \bar{F}_{imp}$  Vetor de carregamento incremental imperfeito.
- $\Delta \bar{U}$  Vetor de deslocamento incremental do sistema diagonalizado.
- $\delta U$  Variação de deslocamentos a partir de uma configuração de equilíbrio.
- $\varphi_i$  Vetor correspondente ao i-ésimo modo utilizado na combinação modal.
- $\phi$  Vetor de deslocamentos incrementais infinitesimais.
- $\Phi_m$  Correspondente ao m-ésimo autovetor da matriz de rigidez tangente.

#### Matrizes:

- $A_{ij}^\sigma$  Parâmetro modal calculado a partir da matriz de rigidez  $K_\sigma$  e os modos i e j.
- $A_{ij}^0$  Parâmetro modal calculado a partir da matriz de rigidez  $K_0$  e os modos i e j.
- $B$  Matriz das relações deformação-deslocamento.
- $B_1$  Parcela constante da matriz  $B$ .
- $B_2$  Parcela da matriz  $B$  que é dependente linearmente dos deslocamentos.
- $B_{ijk}$  Parâmetro modal calculado a partir da matriz de rigidez  $K_1$  e os modos i, j e k.
- $C_{ijkl}$  Parâmetro modal calculado a partir da matriz de rigidez  $K_2$  e os modos i, j, k e l.
- $D$  Matriz de relações constitutivas do material.

$D_i$	Parâmetro modal calculado a partir do vetor de forças e o modo $i$ .
$I_n$	Matriz identidade de ordem $n$ .
$K_0$	Matriz de rigidez elástica.
$K_\sigma$	Matriz de rigidez de tensões iniciais.
$K_1$	Matriz de rigidez de primeira ordem.
$K_2$	Matriz de rigidez de segunda ordem.
$K_S^E$	Matriz de rigidez secante na configuração de equilíbrio conhecido.
$K_{NL}^E$	Matriz de rigidez não-linear na configuração de equilíbrio conhecido.
$K_T^E$	Matriz de rigidez tangente na configuração de equilíbrio conhecido.
$\bar{K}_T^E$	Matriz de rigidez tangente diagonalizada para uma configuração de equilíbrio.
$M$	Matriz formada pelos modos linearmente independentes.
$N$	Matriz para interpolação de deslocamentos nodais
$r^p$	Matriz de transformação de referencial do elemento de pórtico plano.
$T$	Matriz de transformação para o sistema diagonalizado.
$\bar{\beta}_i$	Amplitude do $i$ -ésimo autovetor de $K_T^E$ para estruturas imperfeitas.
$\nabla$	Matriz Jacobiana do sistema de equações modais de equilíbrio.
$\sigma$	Tensor de tensões.

### Índices Superiores:

- $(\bullet)^a$  Relativo ao vetor de deslocamento A.
- $(\bullet)^b$  Relativo ao vetor de deslocamento B.
- $(\bullet)^E$  Relativo à configuração de equilíbrio.
- $^i(\bullet)$  Relativo à i-ésima configuração de equilíbrio.
- $(\bullet)^n$  Relativo ao n-ésimo elemento.
- $(\bullet)^T$  Transposto.
- $(\bullet)^{\sigma, 0}$  Relativo à matriz de rigidez de tensões iniciais ou elástica, respectivamente.
- $(\bullet)^{1, 2}$  Relativo à matriz de rigidez de primeira ou de segunda ordem, respectivamente.

### Índices Inferiores:

- $(\bullet)_b$  Relativo ao ponto de bifurcação.
- $(\bullet)_{i,j}$  Relativos às direções do eixo local i ou j do elemento.
- $(\bullet)_G$  Relativo ao referencial global da estrutura.
- $(\bullet)_L$  Relativo ao referencial local do elemento.
- $(\bullet)_{RLT}$  Relativo ao Referencial Lagrangeano Total.
- $(\bullet)_{RLA}$  Relativo ao Referencial Lagrangeano Atualizado.
- $(\bullet)_u$  Relativo às translações nas direções x.

- $(\bullet)_v$  Relativo às translações nas direções y.
- $(\bullet)_w$  Relativo às translações nas direções z.
- $(\bullet)_{1,2}$  Relativo ao nó 1 ou 2 do elemento, respectivamente.

#### Abreviações:

EPT Energia Potencial Total.

EPTR Energia Potencial Total Reduzida.

LI Relativo a Vetores Linearmente Independentes.

MEF Método dos Elementos Finitos.

RLA Referencial Lagrangeano Atualizado.

RLT Referencial Lagrangeano Total.

## Capítulo 1

### *Introdução*

Assim como nos diversos ramos do conhecimento humano, na engenharia estrutural observou-se um acentuado grau de desenvolvimento no último século, em virtude das evoluções dos materiais, técnicas numéricas e principalmente da informática. Com isso pode-se cada vez mais conceber estruturas de grande arrojado: vãos extensos, alta capacidade portante, leveza, esbelteza e de grande beleza.

A concepção reticulada espacial é frequentemente utilizada em estruturas esbeltas especiais como de coberturas de grandes vãos (*e.g.* Figura 1.1). Nestas estruturas tem sido observada a ocorrência de instabilidades localizadas e não raramente o fenômeno de colapso progressivo associado à instabilidade estrutural sucessiva dos elementos estruturais (*e.g.* Figura 1.2), ocasionando grandes perdas materiais e, por vezes, humanas.



A avaliação da possibilidade de ocorrência do fenômeno de colapso progressivo em estruturas reticuladas esbeltas é, portanto, uma etapa de projeto de fundamental importância. Apesar do avançado estágio de desenvolvimento da engenharia estrutural, esta etapa de análise ainda não é uma prática usual nos escritórios de projeto. Isto se

deve tanto à complexidade deste tipo de problema, quanto à natural inércia na introdução de novos conhecimentos na prática da engenharia e, ainda, pelo grau de especialização necessário para utilização de ferramentas computacionais sofisticadas capazes de simular aproximadamente esse fenômeno.



A consideração da não-linearidade geométrica tem se mostrado decisiva para o estudo do comportamento e da estabilidade de estruturas de elevada esbelteza. Assim, para se estudar o fenômeno do colapso progressivo, faz-se necessário o desenvolvimento de ferramentas numérico-computacionais especializadas que viabilizem e facilitem a investigação do comportamento não-linear geométrico e das possíveis formas de instabilidade.

Programas computacionais baseados no Método dos Elementos Finitos (MEF) são utilizados durante a fase de análise estrutural e projeto de estruturas. Porém, a utilização destes programas para realização de estudos de problemas de instabilidade não-linear

resulta em um grande esforço computacional. A técnica usual (incremental/iterativa) em geral requer numerosas soluções de grandes sistemas de equações.

Uma alternativa para diminuir o custo computacional no estudo deste problema é o emprego de funções de forma global. Tal procedimento pode ser denominado técnica de redução de base através da combinação de formas modais, ou análise assintótica modal que, nesse sentido, poderá ser vantajosa dependendo da facilidade de obtenção de formas modais adequadas à solução do problema.

Este trabalho de pesquisa teve como principal objetivo desenvolver uma formulação matemática-numérica e implementá-la computacionalmente visando construir uma ferramenta modal alternativa para a análise não-linear de estruturas reticuladas.

## **1.1 Breve Histórico**

O estudo da estabilidade estrutural foi iniciado com o trabalho do físico e matemático suíço EULER [3] *apud* BAZANT [5], quando calculou a carga crítica de bifurcação de uma coluna elástica, inclusive sujeita a várias condições de apoio em suas extremidades. Embora fosse reconhecido o rigor matemático de Euler, surgiram questionamentos quando as cargas de colapso obtidas de ensaios experimentais não foram capazes de validar a carga crítica prevista teoricamente. Mais tarde, o inglês YOUNG [4] deu uma grande contribuição, quando percebeu a importante influência das imperfeições iniciais (geometria e/ou carregamento) no comportamento das estruturas, mediante a qual foi possível justificar as diferenças entre os referidos ensaios e os cálculos de Euler (BAZANT, [5]). Estas diferenças eram devidas, principalmente, à formação de mecanismos plásticos (flambagem elasto-plástica) em colunas robustas.

Deve-se salientar que, embora Euler tenha também levado em consideração o comportamento das colunas no domínio pós-crítico, esse conhecimento foi por muito tempo menosprezado, pois se acreditava que, em geral, a carga crítica correspondia em absoluto à resistência última da estrutura, inverte-se que muito mais tarde foi esclarecida com os ensaios realizados em placas finas solicitadas nos próprios planos apresentados nos trabalhos de WAGNER [6], COX[7] e MARGUERRE e TREFFTZ [8], conforme relatam REIS e CAMOTIM [9].

A tese de doutorado do holandês KOITER [10] apresentada em Delft em 1945 foi seguramente um marco no desenvolvimento da teoria da estabilidade, pois a partir da mesma foi possível a compreensão do comportamento pós-crítico dos sistemas estruturais em regime elástico, constituindo então a base da moderna Teoria Não-linear da Estabilidade.

A teoria de Koiter tornou possível avaliar o comportamento de sistemas estruturais em regime pós-crítico, inclusive contemplando a sensibilidade de uma estrutura às imperfeições geométricas iniciais e os efeitos sobre o comportamento de instabilidade, tal como observado experimentalmente. Salienta-se que o trabalho de Koiter somente começou a se tornar conhecido a partir de 1967, quando a *National Aeronautics and Space Administration* - NASA fez a tradução de sua tese para o idioma inglês (BATTISTA, [11]).

Seguindo a teoria de Koiter, merecem destaque os pioneiros trabalhos desenvolvidos nos Estados Unidos por HUTCHINSON [12], BUDIANSKY [13], BUDIANSKY e HUTCHINSON [14] e na Inglaterra por CHILVER[15], CROLL e WALKER [16], ROORDA [17] e [18] e, THOMPSON e HUNT [19] e [20], devendo-se aos ingleses o mérito de aplicar a teoria de Koiter em sistemas estruturais discretos (REIS e CAMOTIN,[9]).

Após a divulgação da versão traduzida da tese de Koiter e dos primeiros trabalhos baseados em sua teoria e, com o grande avanço da informática (surgimento de computadores de grande capacidade e velocidade de processamento) nas três últimas décadas foram desenvolvidos muitos trabalhos no campo da análise da estabilidade estrutural, principalmente metodologias numérico-computacionais. Seguramente, o grande impulso no desenvolvimento dessa teoria deve-se à aplicação da teoria de Koiter em sistemas discretos, tendo como consequência imediata a aplicação de métodos aproximados, tal como o método dos elementos finitos (MEF), nas aproximações das soluções dos problemas contínuos.

Para a avaliação da estabilidade estrutural, são comumente utilizadas análises não-lineares, que podem ser de dois tipos, ou mesmo associadas: **não-linearidade física**, que considera a relação não-linear tensão-deformação é, portanto, propriedade

intrínseca do material que não obedece à lei de Hooke e **não-linearidade geométrica**, abordada neste trabalho e que tem seus fundamentos na teoria da elasticidade não-linear e surge com a consideração das relações não-lineares deformação-deslocamento na formulação das equações de equilíbrio da configuração deformada da estrutura.

Entretanto, embora as análises não-lineares sejam etapas importantíssimas, não encerram em si o estudo da estabilidade estrutural, sendo então necessária a realização de criteriosa avaliação dos resultados numéricos obtidos com base nos conceitos da teoria da estabilidade estrutural.

Embora a análise não-linear física não faça parte do escopo do presente trabalho, vale ressaltar a lacuna existente de uma consistente teoria geral capaz de descrever o comportamento pós-crítico em regime inelástico de sistemas estruturais com imperfeições geométricas, sendo que atualmente a investigação desses problemas é obtida somente por meio de métodos numérico-computacionais [9].

Apesar disso, deve-se ressaltar o trabalho pioneiro de SHANLEY[21] que calculou a carga crítica de uma coluna em regime plástico e também do trabalho de HILL [22] e [23] que a partir do trabalho de Shanley pôde formular uma teoria capaz de descrever a bifurcação de sistemas estruturais elastoplásticos submetidos a forças conservativas.

Devido à grande importância da análise não-linear para avaliação da estabilidade estrutural, como mencionado anteriormente, o desenvolvimento de metodologias desse tipo de análise se constitui em objeto de pesquisa e tem resultado na publicação de muitos trabalhos. Neste contexto, a análise não-linear geométrica, afim com a teoria geral de Koiter, se destaca como uma frutífera linha de pesquisa, haja visto os fenômenos de instabilidade serem intrinsecamente de natureza não-linear geométrica.

### *1.1.1 Recentes Pesquisas*

Nas teses de doutorado de ANTONINI [24], ALVES [25] e RODRIGUES [26] são fornecidas várias referências bibliográficas sobre a análise não-linear geométrica. A seguir são referenciadas algumas dentre as principais contribuições nesta linha de pesquisa, além de serem citadas pesquisas mais recentes sobre o tema.

TURNER *et al.* [27] publicou o primeiro trabalho com aplicação do MEF na análise não-linear de estruturas, sendo este trabalho também pioneiro no uso da técnica incremental. ARGYRIS [28] também fez uso da técnica incremental e mais tarde ODEN [29] e MALLET *et al* [30] publicaram estudos sobre a utilização do método de Newton-Raphson. Entretanto, BREBBIA e CONNOR [31] e MURRAY e WILSON [32] introduziram o conceito da combinação do método incremental (preditor) - e iterativo (corretor). ODEN [33], HAISLER *et al.* [34] e ZIENKIEWICZ [35] apontam em seus trabalhos a vantagem do uso do método de Newton-Raphson sem a constante atualização da matriz de rigidez, que ficou conhecido como método de Newton-Raphson Modificado. Além dos métodos de Newton, foi desenvolvido inicialmente por FOX e STATON [36] o método Quase-Newton, que se diferencia do método de Newton por atualizar uma aproximação secante da matriz de rigidez ao invés de atualizar a matriz de rigidez tangente.

Atualmente, na grande maioria dos trabalhos desenvolvidos no campo da análise não-linear, física e/ou geométrica, utiliza-se a técnica incremental iterativa. Dentre os desenvolvidos no PEC/COPPE citam-se aqui os de ALVES [25] que aplicou essa estratégia na análise não-linear geométrica de estruturas discretizadas em elementos de pórtico tridimensionais, RODRIGUES [26] que também a utilizou com modelagem em elementos de pórtico tridimensionais na análise estrutural não-linear geométrica e física, OLIVEIRA [37] utilizou-a na análise não-linear geométrica de tenso-estruturas têxteis com modelagem em elementos finitos triangulares de membrana e elementos de cabos. LIMA [38] utilizou o Método das Diferenças Finitas Energéticas para demonstrar a importante influência da consideração dos ângulos de torção no âmbito de grandes rotações, ao invés de rotações moderadas, na análise não-linear geométrica de hastes de paredes delgadas com seção aberta sob flexo-torção.

Apesar das técnicas incrementais iterativas com uso dos métodos de Newton-Raphson proporcionarem bons resultados, são incapazes de representar a completa trajetória de equilíbrio incluindo regiões instáveis. Assim, muitos estudos foram dirigidos à obtenção das mesmas com as chamadas **técnicas de continuação**. Dentre os principais trabalhos pode-se citar o de BATOZ e DHATT [39] que apresentaram o método do controle de deslocamento, os de WEMPNER [40] e RIKS [41] e [42] que propuseram o método do

controle do comprimento de arco e os de YANG e SHIEH [43] que apresentaram o método do deslocamento generalizado.

Destacam-se aqui ainda os trabalhos de CRISFIELD [44] e [45], YANG e SHIEH [43], RAMM [46] e [47], GIERLINSKI [48], SCHWEIZERHOF [49], FORD [50], BELLENI e CHULYA [51] e SIMO *et al* [52] que apresentaram algumas variações do método do controle do comprimento de arco (arco esférico, cilíndrico ou linearizado). Além destes deve-se citar o trabalho de HELLWEG e CRISFIELD [53] que apresentaram uma modificação do método do comprimento de arco capaz de detectar pontos do tipo ponto limite agudo reverso (*sharp snap-back*) apenas com a mudança do critério de escolha das raízes (ao invés do critério do menor ângulo usa-se o critério mínimo residual).

RODRIGUES [26] realizou um estudo paramétrico para qualificar a eficiência de algumas dessas técnicas (Controle de Carga, Controle de Deslocamento, Controle de Deslocamento Tangente, Controle do Comprimento de Arco Constante Cilíndrico e Controle do Deslocamento Generalizado), onde afirma que o Método do Controle de Arco Constante é superior aos Métodos de Controle de Carga e do Controle de Deslocamento, entretanto, o Método do Deslocamento Generalizado é o mais eficaz dentre os estudados, embora apresente um maior número de incrementos – o que torna o processo computacionalmente lento em alguns casos.

LIMA [38] realizou estudos comparativos entre as técnicas do Controle de Deslocamento Generalizado, Controle do Comprimento de Arco Cilíndrico e o Método do Controle de Deslocamentos, e chegou às mesmas conclusões que RODRIGUES [26] recomendando o uso do Método do Controle de Deslocamento Generalizado somente em casos em que o Método de Newton-Raphson, considerado um caso particular do Método dos Deslocamentos Generalizados, seja ineficiente após uma primeira tentativa.

CRISFIELD [45] apresentou um trabalho em que utiliza a técnica de Controle do Comprimento de Arco associado à técnica de busca “*Line Searches*” que, segundo JACOB [54], é o mais eficiente acelerador de convergência. Os aceleradores de convergência são métodos que tornam mais rápido o processo de redução do resíduo na análise incremental/iterativa.

Além do Método dos Elementos Finitos, Diferenças Finitas, Faixas Finitas, Galerkin, Rayleigh-Ritz e Integrais Finitas, um método que vem sendo bastante estudado, principalmente pela escola portuguesa, é a *Generalised Beam Theory* (GBT). Este método foi inicialmente desenvolvido por Schardt em 1989, mas somente difundido após os trabalhos de DAVIES *et al.* [55], LEACH e DAVIES [56].

Uma vantagem do Método GBT é que o mesmo possibilita determinar isoladamente a contribuição de cada modo de instabilidade que compõe o modo de flambagem, o que é bastante interessante em problemas que apresentam interações modais (NAGAHAMA, [57]). Cita-se, dentre os mais recentes trabalhos nessa linha, SILVESTRE *et al.* [58], SILVESTRE e CAMOTIM [59] e [60], SILVESTRE e CAMOTIM [61], SILVESTRE [62], BASAGLIA *et al.* [63], CAMOTIM *et al.* [64] dentre outros.

### *1.1.2 Formulações para análise não-linear*

Algumas pesquisas apontaram a grande importância do tipo de referencial utilizado nas formulações não-lineares. Basicamente é possível distinguir três tipos de referenciais utilizados em análise não-linear de estruturas com grandes deslocamentos:

- Formulações no **Referencial Lagrangeano Total (RLT)** abordado nos trabalhos de MALLETT *et al.* [30], BATHE e BOLOURCHI [65], ATTARD [66], entre outros;
- Formulações no **Referencial Lagrangeano Atualizado (RLA)**, utilizado nos trabalhos de BATHE e BOLOURCHI [65], CARDONA e GERADIN [67], MEEK e LOGANATHAN [68], dentre outros;
- Formulações no **Sistema Co-rotacional**, abordados pioneiramente nos trabalhos de WEMPNER [69], ARGYRIS *et al.* [28] e o trabalho de CRIESFIELD e MOITA [70] que descrevem uma metodologia co-rotacional unificada para sólidos, cascas e vigas. Pode-se ainda citar, dentre outros, os trabalhos nacionais de JOUGLARD [71], RODRIGUES [26], JÚNIOR e SOUZA [72] que utilizaram a formulação co-rotacional.

O sistema de referência co-rotacional possui a peculiaridade de poder ser utilizado em associação com os dois outros sistemas de referência, pois se trata de um sistema auxiliar, chamado sistema base, fixado nos nós do elemento e que são utilizados para cálculo, no nível do elemento, dos deslocamentos, mediante o qual os deslocamentos são separados em duas parcelas: uma correspondente ao movimento de corpo rígido e a outra referente à deformação do elemento. Depois destes cálculos, realiza-se a transformação dos deslocamentos para o sistema global da estrutura, que pode ser referido à configuração inicial indeformada (RLT) ou à última configuração calculada (RLA).

Além das clássicas formulações incrementais iterativas, existem as formulações baseadas na aproximação assintótica clássica e assintótica modal. A formulação assintótica clássica resulta da aplicação direta da teoria clássica da estabilidade e consiste numa forma paramétrica das equações de equilíbrio escritas em termos de expansões de séries de potência, citam-se os trabalhos de ROORDA e CHILVER [73], THOMPSON e HUNT [19]. A análise assintótica modal foi primeiramente abordada via MEF no trabalho de CARNOY [74] e [75], e no PEC/COPPE citam-se os trabalhos de ANTONINI [24], ALVES [76] e [25]. A análise assintótica modal consiste, como será visto no decorrer deste trabalho, na solução do problema não-linear geométrico por meio de combinações modais com um número reduzido de equações em relação ao método incremental clássico.

Quanto à metodologia de obtenção de pontos críticos, existem em geral duas maneiras:

- **Métodos indiretos**, em que por meio da técnica incremental acompanha-se o traçado da trajetória de equilíbrio, obtido com a solução das equações de equilíbrio, e nele observa-se a mudança de direção da trajetória;
- **Métodos diretos**, nos quais se utiliza um sistema estendido composto pelas equações de equilíbrio além de outras que caracterizam os pontos calculados (tal como a da condição de equilíbrio crítico), assim os pontos críticos surgem como solução direta do sistema estendido.

Em geral, os métodos diretos são mais precisos, entretanto, são de convergência restrita e por isso tem sido usada uma metodologia que consiste no retorno para a trajetória

principal, utilizando o sistema formado apenas pelas equações de equilíbrio, sempre que a solução se afasta da mesma quando utilizado o sistema estendido. São referências desse último tipo de metodologia os trabalhos de WRIGGERS *et al.* [77] que pela primeira vez utilizou esse tipo de análise com elementos finitos, seguiram-se os trabalhos de CARDONA e HUESPE [78], PLANINC e SAJE [79], IBRAHIMBEGOVIC e MIKDAD [80], BATTINI *et al.* [81], NETO *et al.* [82], dentre outros.

Deve-se ressaltar, entretanto, que uma mera estimativa da carga crítica e do modo crítico associado, pode ser obtida com a análise linearizada de estabilidade, que consiste na solução de um problema de autovalor e não no traçado da trajetória de equilíbrio por meio da solução do sistema de equações não-lineares.

Nesse sentido, ANTONINI [24] recomenda a solução do problema de autovalor atualizado, que permite uma estimativa mais precisa da carga crítica que o problema de autovalor clássico, já que considera a atualização das matrizes de rigidez e mudança de comprimento dos elementos a partir da mudança de coordenadas nodais. Entretanto, a utilização do problema de autovalor clássico demanda menor esforço computacional.

JÚNIOR [83] considera a influência de imperfeições na estimativa de cargas limite, BURGOS *et al.* [84] também consideram esta influência, sendo as imperfeições na forma do modo de flambagem, além disso, apresentam um elemento de pórtico plano com quatro nós, que possibilita comprovação da possibilidade de obtenção de uma boa aproximação de cargas críticas com a utilização de poucos elementos, em alguns casos bastando a discretização de um elemento por barra.

## **1.2 Desenvolvimento da Linha de Pesquisa**

O presente trabalho pertence a uma linha de pesquisa do Programa de Engenharia Civil - PEC/COPPE, cujo objeto de investigação é a estabilidade das estruturas.

Após defender sua tese de doutorado em 1979 e enquanto prepara a monografia sobre Instabilidade Estrutural, BATTISTA [85] iniciou a orientação de uma série de pesquisas no PEC sobre o desenvolvimento analítico de cascas a partir de critérios energéticos,

sendo a dissertação de mestrado de ANTONINI [86] um dos primeiros trabalhos, apresentado em 1981. Depois deste, seguiram-se nesta mesma linha: JUSTINO[87] em 1982, GONÇALVES [88] em 1983, BERTOLINO[89] em 1984, PFEIL[90] em 1985, GONÇALVES[91] em 1987, FIGUEIREDO[92] em 1988 e o último trabalho com enfoque analítico foi o de CHAMBERLAIN [93] em 1990.

Em 1982, BATTISTA [11], em uma monografia sobre Instabilidade Estrutural apresentou uma formulação assintótica com base em expansões em séries de potência para análise da instabilidade de sistemas estruturais discretos que motivou uma nova série de pesquisas em sistemas discretizados via MEF. Ainda em 1982, BENJAMIN [94] deu uma importante contribuição de aplicação do MEF na análise do comportamento não-linear de estruturas apertadas tridimensionais. Porém, fundamental para análise do problema de instabilidade estrutural elástica foi a contribuição de ANTONINI [24] em 1986, quando apresenta em sua tese de doutorado toda a formulação para aplicação do MEF em problemas não-lineares de estabilidade, possibilitando: a aproximação de cargas críticas ao longo de caminhos/trajetórias não-lineares de equilíbrio e as análises assintótica e modal de estruturas planas perfeitas e imperfeitas.

Dando prosseguimento a esta linha de pesquisa, ALVES [76] em 1989 apresentou sua dissertação de mestrado na qual a formulação de Antonini foi estendida e aplicada à análise da estabilidade de estruturas reticuladas tridimensionais. Embora os resultados tenham sido coerentes com o trabalho de Antonini, Alves não obteve êxito na detecção de acoplamento de bifurcações múltiplas ou próximas ao aplicar a análise modal em sua forma original. Em 1993, OLIVEIRA [95] utilizando a formulação de Antonini desenvolveu um elemento finito para análise de cascas poliédricas. JOUGLARD [71] em 1993 elaborou uma proposta de emprego das aproximações assintóticas como preditor de alta ordem numa análise não-linear incremental/iterativa. As mais recentes evoluções na linha de pesquisa da análise assintótica e modal, em problemas não-lineares, foram apresentadas por ALVES [96], [97] e [25] em seus trabalhos de doutorado. Nestes últimos trabalhos foi estudada a estabilidade estrutural via análises assintótica, modal e incremental/iterativa, formulando-se o problema não-linear no RLT e sugerindo a utilização de formulações no RLA. O trabalho de doutorado foi concluído com a técnica incremental/iterativa em referencial atualizado, devido aos melhores

resultados encontrados. Daí surgiram importantes contribuições que podem ser estendidas para as demais técnicas de solução, tais como:

- Incorporação da técnica do comprimento de arco constante para controle do avanço ao longo do caminho de equilíbrio não-linear;
- Consideração dos movimentos de corpo rígido no cálculo das forças absorvidas por um elemento deformado;
- Aplicação mais precisa do tensor de Green-Lagrange para as relações deformação-deslocamentos não-lineares;
- Utilização de uma matriz de orientação de nó (tridimensional) permitindo considerar a superposição precisa das sucessivas rotações;
- Influência de tensões iniciais considerando-se as solicitações de flexão;
- Formulação de um elemento de ligação elástica não-linear sem dimensão física;
- Uma formulação para análise assintótica (de qualquer ordem) e modal (com qualquer número de modos) no RLT.

OLIVEIRA [99] em 2002 realiza na COPPE o primeiro estudo da propagação do colapso em estruturas reticuladas espaciais por meio de simulações numérico-computacionais num eficiente e consagrado programa de análise por elementos finitos (ANSYS) e em 2003, OLIVEIRA [37] apresentou o penúltimo trabalho desenvolvido nesta linha de pesquisa, onde desenvolve uma ferramenta numérico-computacional baseada na formulação não-linear incremental/iterativa com um elemento finito de membrana e de cabos para análise e projeto de estruturas tenso-têxteis de forma qualquer.

### **1.3 Motivação**

O vasto uso de reticulados como estrutura ou subestruturas de obras de grandes vãos, tais como: ginásios e estádios esportivos, aeroportos, salões de convenções etc., deve-se principalmente à possibilidade da combinação de leveza, elevada capacidade portante, facilidade de montagem e agradável estética.

Entretanto, o projeto de estruturas reticuladas esbeltas requer análises criteriosas para investigação do risco de ocorrência de instabilidade estrutural, inclusive do fenômeno de colapso progressivo. Cuidados especiais no projeto estrutural são também necessários com respeito às ligações dos elementos, exigindo um bom detalhamento executivo, já que tensões residuais ou pequenos desvios geométricos podem desencadear, dependendo da sensibilidade às imperfeições da estrutura, instabilidades localizadas e colapso de grandes estruturas reticuladas.

Este trabalho tem por objetivo aperfeiçoar formulações numéricas apresentadas em trabalhos anteriores (ANTONINI [24], ALVES [76], [97] e [25]) e com isto desenvolver uma ferramenta computacional para análise da instabilidade não-linear elástica em sistemas estruturais apertados (reticulados). A principal contribuição deste trabalho é a aplicação da técnica da análise modal considerada promissora por diversas razões, tais como: possibilidade de se evidenciar a participação dos modos fundamentais e secundários, a facilidade de se estudar a sensibilidade às imperfeições iniciais em determinadas formas modais e reduzir o número de equações não-lineares a serem resolvidas. Outra contribuição relevante deste trabalho é a re-escrita de maneira mais consistente da formulação matemática no que se refere à determinação e qualificação dos pontos críticos.

## 1.4 Escopo do Trabalho

No capítulo II é realizada uma breve revisão de conceitos pertinentes à estabilidade de sistemas estruturais com a análise de trajetórias de equilíbrio obtidas por meio da análise não-linear geométrica. No capítulo III são apresentadas as formulações da energia potencial total de sistemas estruturais discretizados e conseqüentemente no capítulo IV são apresentadas as condições para caracterização do estado de equilíbrio e da estabilidade. No capítulo V faz-se uma discussão sobre a estabilidade de sistemas estruturais imperfeitos, sendo deduzidas equações incrementais modais para avaliação do tipo de estado crítico de estruturas ideais ou imperfeitas. No capítulo VI são apresentadas as equações algébricas de equilíbrio de sistemas estruturais discretizados via MEF e também, neste mesmo capítulo, são descritas algumas técnicas para solução das mesmas. No capítulo VII são determinadas as matrizes de rigidez de elementos de pórtico plano e pórtico tridimensional a partir do tensor de Green-Lagrange completo com uniformização de deformações. No capítulo VIII apresentam-se os algoritmos, na forma de fluxogramas, para as análises por aproximações em série de potência (assintótica) e assintótica modal no RLA. No capítulo IX, alguns problemas geometricamente não-lineares são resolvidos por meio do emprego de programas computacionais implementados segundo as formulações incremental/iterativa, assintótica modal com referencial móvel (RLA) e análise por aproximações assintóticas. Por fim, no capítulo X são apresentadas as conclusões sobre este trabalho, bem como são sugeridos alguns estudos para prosseguimento e consolidação da técnica aqui apresentada.

## Capítulo 2

# *Análise da Instabilidade de Sistemas Estruturais*

Neste trabalho os problemas de instabilidade elástica são considerados como problemas estáticos, ou melhor, pseudo-estáticos com não-linearidade geométrica. Este tratamento é sustentado pela hipótese de o carregamento ser imposto à estrutura de maneira lenta e crescente. Desta maneira, este trabalho é pautado na teoria não-linear da estabilidade elástica apresentada por KOITER [10], ou mais tarde por THOMPSON e HUNT [100] na Inglaterra e por HUTCHINSON e KOITER [101] nos Estados Unidos da América.

Neste capítulo são apresentadas algumas definições básicas no tocante ao traçado das trajetórias de equilíbrio de sistemas estruturais que apresentem forte comportamento não-linear geométrico em regime elástico.

### **2.1 Trajetórias de Equilíbrio e Pontos Críticos**

O comportamento não-linear geométrico de uma estrutura pode ser descrito por meio do seu caminho ou trajetória de equilíbrio, obtido a partir do gráfico carga–deslocamento de um ou dois graus de liberdade representativos. Portanto, o caminho de equilíbrio é formado pela associação de pontos que representam configurações de equilíbrio da estrutura deformada.

É possível observar num caminho de equilíbrio não-linear, dependendo evidentemente do carregamento imposto e das características da estrutura, pelo menos dois segmentos: **caminho fundamental**, que é caracterizado pelo trecho que vai desde a origem até o ponto crítico e **caminhos secundários**, os quais constituem os trechos que ultrapassam os pontos críticos (Figura 2.1).

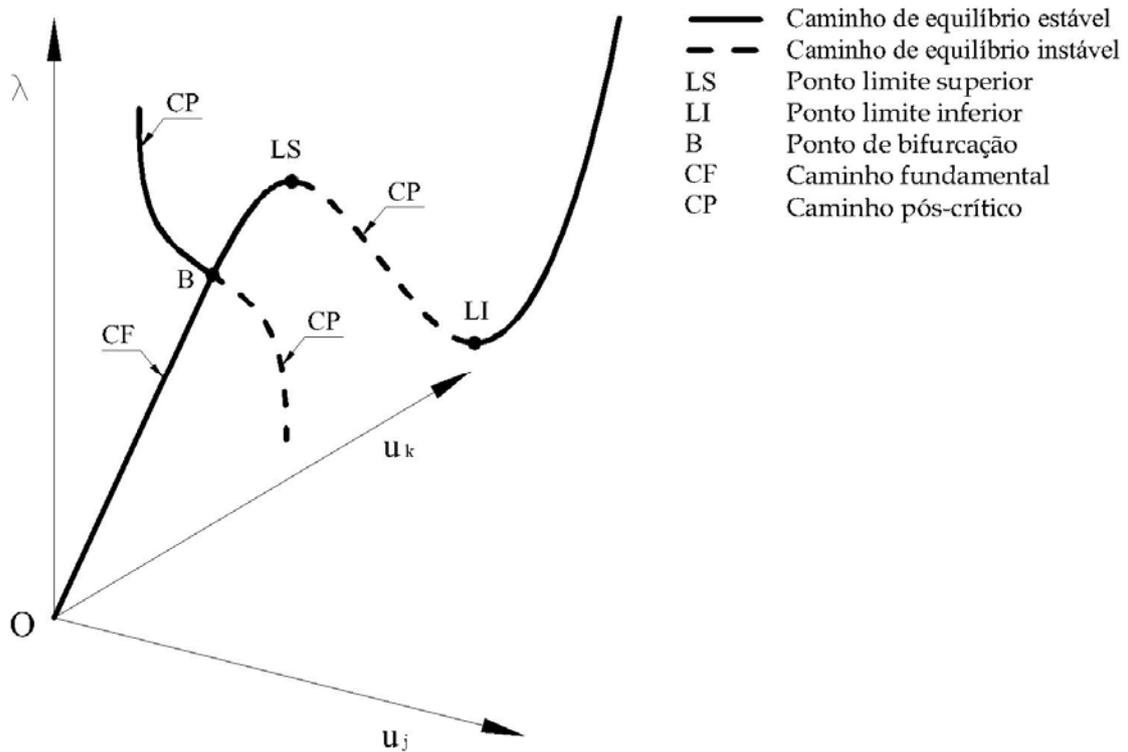


Figura 2.1 Ilustração de alguns possíveis caminhos de equilíbrio de uma estrutura.

Na Figura 2.1, o parâmetro de carga ( $\lambda$ ) vem da seguinte definição:

$$f = \lambda F \quad (2.1)$$

sendo  $f$  a carga atuante na estrutura,  $F$  o vetor que define a distribuição do carregamento na estrutura e  $\lambda$  o parâmetro de controle do carregamento, ou seja, descreve a intensidade do carregamento aplicado para um dado estado de equilíbrio.

Pontos críticos são pontos de equilíbrio a partir dos quais é possível a ocorrência de grandes deslocamentos com pouco acréscimo de carga e podem ser:

- **Ponto de bifurcação**, que é caracterizado pela presença de mais de uma trajetória de equilíbrio secundário e ocorre mais facilmente em estruturas perfeitas. Neste ponto existe mais de uma tangente ao caminho de equilíbrio e, além disso, ocorre mudança súbita do modo de deformação da estrutura;
- **Ponto limite**, que é característico de estruturas imperfeitas, podendo ainda ocorrer em estruturas perfeitas, apresenta apenas uma trajetória secundária de

equilíbrio e o parâmetro de carga apresenta um limite máximo local (carga limite). Neste ponto a tangente à trajetória de equilíbrio é horizontal (derivada nula) e ocorre a passagem de configurações de equilíbrio estável para equilíbrio instável. Caso seja mantida a carga, a estrutura dispara dinamicamente até romper ou atingir outra configuração de equilíbrio estável.

Com relação à caracterização dos diferentes tipos de caminho de equilíbrio, têm-se: caminho de equilíbrio estável, que apresenta tangente positiva; caminho de equilíbrio instável, que apresenta tangente negativa. Define-se **equilíbrio estável** como sendo o estado em que a estrutura tem capacidade de absorver os carregamentos sobre ela atuantes por meio de seus esforços internos (ou rigidez) extensionais, sendo esforços de membrana no caso de placas e cascas e compressão/tração axial no caso de barras.

A configuração de equilíbrio de uma estrutura é caracterizada pelos deslocamentos de seus pontos, e sua estabilidade pode ser avaliada através do comportamento da estrutura após sofrer uma perturbação causada por uma pequena ação externa arbitrária. Assim, quando cessada a perturbação o equilíbrio será estável se a estrutura regressar à configuração original, caso contrário o equilíbrio será instável.

Atualmente, para estudo do comportamento não-linear geométrico, usualmente se empregam técnicas incrementais, que têm apresentado satisfatórios resultados, inclusive ultrapassando pontos limites quando utilizadas técnicas de continuação, ou de controle do avanço do caminho de equilíbrio, tais como: técnica do controle de deslocamento e técnicas do controle do comprimento de arco (comprimento de arco esférico, cilíndrico ou linearizado), dentre outras.

Entretanto, em problemas que apresentam caminhos de equilíbrio com pontos de bifurcação, normalmente utiliza-se o artifício de destruir esta singularidade por meio da imposição de imperfeições na estrutura, já que as técnicas incrementais convencionais não são capazes de descrever o caminho pós-bifurcação. Já uma mera estimativa das cargas e modos críticos associados - sem o fornecimento de informações quanto à trajetória pós-crítica - pode ser obtida por meio da solução de um problema de autovalor resultante da linearização das equações de equilíbrio, como será demonstrado no decorrer deste trabalho.

## 2.2 Modelos Matemáticos para Análise Não-Linear

No Capítulo 6 deste trabalho são definidas as equações não-lineares de equilíbrio para a análise incremental/iterativa, análise assintótica clássica e análise assintótica modal. Porém, antes de apresentar a formulação matemática para determinação das referidas equações não-lineares de equilíbrio, aqui são feitas descrições conceituais sobre estes três distintos modelos para análise não-linear, que se seguem:

- **Análise incremental/iterativa** – este modelo é sem dúvida o mais difundido na comunidade científica para análise não-linear de sistemas estruturais e consiste na aplicação fracionada do carregamento, chamado incremento de carga, cumulativamente ao longo da análise até que o carregamento seja todo aplicado. Em cada passo da análise, correspondente a um incremento de carga, as equações algébricas de equilíbrio são resolvidas por meio de métodos iterativos tal como os de Newton-Raphson. Podem ser utilizadas técnicas de continuação, que são equações de restrição adicionais ao sistema algébrico, com o intuito de ultrapassar pontos críticos.
- **Análise assintótica** – no modelo matemático da análise assintótica, utilizado inclusive por Koiter em sua tese de doutorado em 1945, os deslocamentos e a carga são expressos por séries de potência de um único escalar, chamado parâmetro de perturbação, associado a vetores de deslocamento e parâmetro de carga, respectivamente. Os vetores de deslocamentos e parâmetros de carga são resolvidos de maneira direta, sequencial e alternadamente a partir de uma primeira aproximação. Cita-se o recente trabalho desenvolvido por GARCEA *et al* [102] que utilizaram expansões com modos assintóticos pré-críticos e pós-críticos com discretizações em elemento finito de barra tridimensional e formulação com referencial corrotacional tendo obtido boas aproximações inclusive para trajetória pós-crítica. Segundo [102], são também referências recentes os trabalhos de GARCEA [103], GARCEA *et al* [104], ABICHOU *et al* [105], BOUTYOUR [106], CASCIARO [107], SILVESTRE e CAMOTIM [108], SCHAFFER e GRAHAM-BRADY [109].

- **Análise Modal** – neste modelo os deslocamentos são escritos como uma combinação linear de modos “formas de deformações admissíveis à estrutura”, que, quando aplicados na equação de equilíbrio, geram um sistema de equações algébricas não-lineares modais, com dimensão igual ao número de modos considerados. Este sistema é resolvido por meio de métodos iterativos como o de Newton-Raphson. Uma vez fixada a intensidade de carga, as amplitudes modais são determinadas solucionando-se o sistema não-linear. Em referencial fixo este processo não é necessariamente incremental. Os trabalhos mais recentes sobre análise assintótica modal foram justamente os elaborados na presente linha de pesquisa do PEC/COPPE, conforme as citações feitas no capítulo anterior, que utilizaram formas modais assintóticas.

### 2.3 Técnicas Usuais para Análise Não-Linear

Na mecânica das estruturas as formulações baseiam-se no Referencial Lagrangeano, no qual o movimento se refere a uma determinada configuração de equilíbrio anterior aos deslocamentos. Contudo, existem dois tipos de referenciais Lagrangeano, a saber:

- **Referencial Lagrangeano Total - RLT**, em que o referencial sempre corresponde à configuração da estrutura indeformada e descarregada, ou seja, trata-se de um referencial fixo. Este referencial limita-se à aplicação de problemas com pequenas rotações, devido o erro da agregação de deformações oriundas de movimento de rotação de corpo rígido;
- **Referencial Lagrangeano Atualizado - RLA**, no qual o referencial corresponde à última configuração de equilíbrio calculada e, portanto, apresenta um estado inicial de tensões, ou seja, trata-se de um referencial variável ou “referencial móvel”, já que o mesmo está em constante mudança ao longo da análise.

A adoção do RLA no cálculo da energia de deformação, conseqüentemente na formulação das equações de equilíbrio não-lineares, implica numa significativa melhoria das aproximações na medida em que é utilizado um maior número de configurações de equilíbrio.

## 2.4 Estudo das Deformações

A relação não-linear deformação-deslocamento é expressa pelo tensor de Green-Lagrange:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Nota-se que este tensor é formado pela soma de duas parcelas, sendo a primeira linear e a outra não-linear em termos de deslocamentos. Será visto em capítulos posteriores que a adoção do tensor de Green-Lagrange nas formulações, com a última parcela da soma expressa em (2.2), resulta na obtenção de sistemas de equações algébricas não-lineares que descrevem o equilíbrio dos sistemas estruturais.

O tensor de deformações de Green-Lagrange na forma indicial é escrito como:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad 2.3a$$

$$\varepsilon_{1,ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad 2.3b$$

$$\varepsilon_{2,ij} = \frac{1}{2} (u_{k,i} u_{k,j}) \quad 2.3c$$

Na Figura 2.2 representa-se a deformação de um sólido tomando como origem a posição (0) até a posição final (i) no RLT, sendo as i-ésimas posições indicadas em superescrito.

Na referida figura são representados os eixos coordenados locais em cada posição  $(x^i, y^i, z^i)$  bem como os eixos globais  $(X, Y, Z)$ .

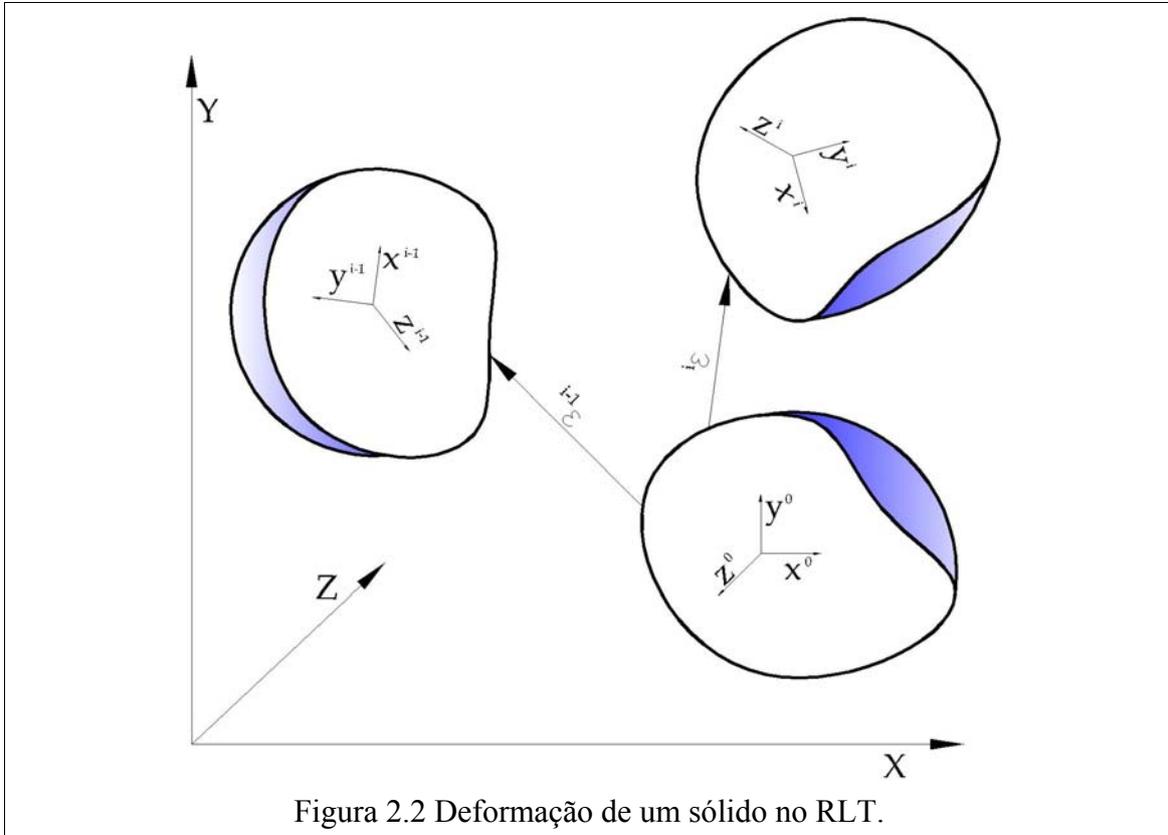


Figura 2.2 Deformação de um sólido no RLT.

Nota-se que as deformações em qualquer posição referem-se à origem, ou seja, à posição (0) indeformado.

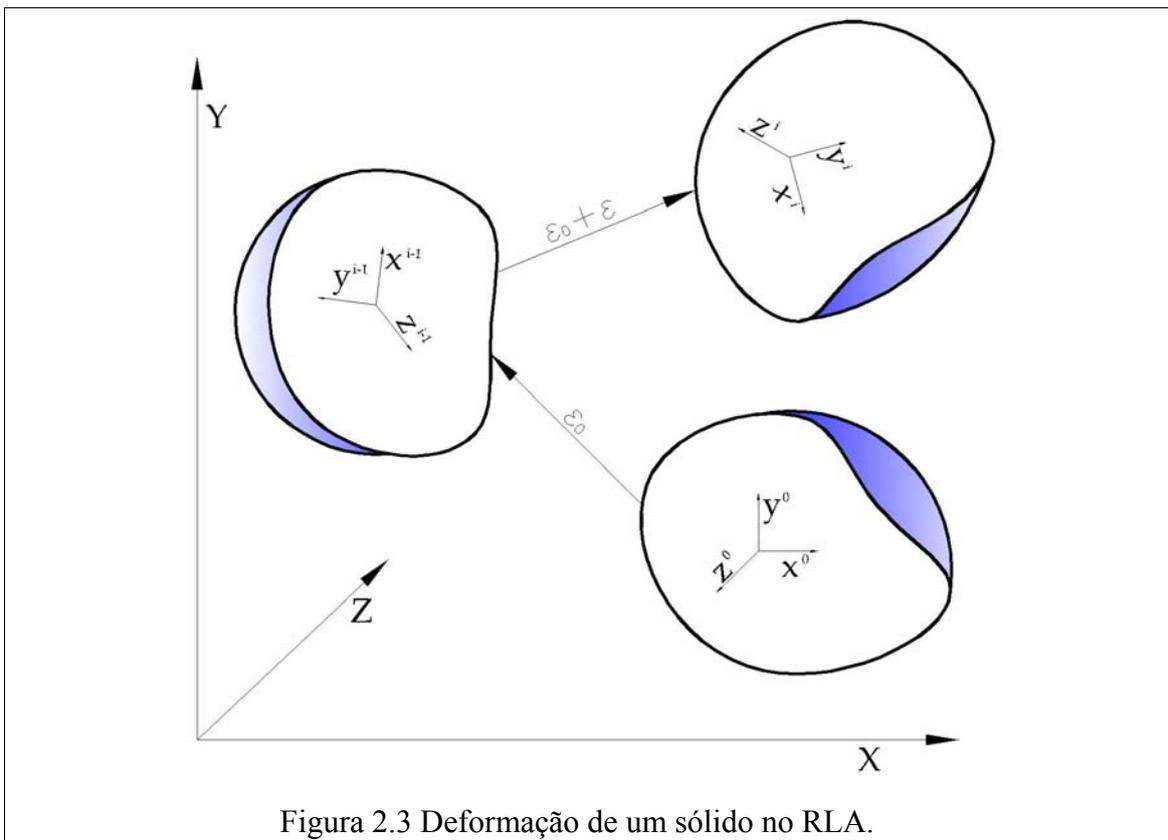
Entretanto, ao se adotar o RLA para cálculo das deformações do mesmo sólido de comportamento elástico em sua  $i$ -ésima posição, verifica-se que nesta a deformação total será composta pela parcela de deformação inicial ( $\epsilon_0$ ) correspondente ao estado da última posição calculada ( $i-1$ ) e pela parcela ( $\epsilon$ ) resultante de um incremento de carga a partir do estado de deformação inicial. Então, a deformação total do sólido na  $i$ -ésima posição é escrita como:

$$\epsilon_{Tij} = \epsilon_0 + \epsilon \tag{2.4}$$

Substituindo 2.3 em (2.4), tem-se:

$$\varepsilon_{Tij} = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (2.5)$$

Na Figura 2.3 é representada a composição da deformação no RLA de um sólido desde uma posição inicial (0) até a posição final (i). Assim sendo, a deformação acumulada até a penúltima posição ( $i-1$ ) é considerada como deformação inicial ( $\varepsilon_0$ ) no cálculo da deformação total para a  $i$ -ésima posição.



A relação deformação-deslocamento, definida anteriormente em 2.3a), pode ainda ser escrita de outra maneira, segundo a notação para sistemas discretos comumente usada no MEF. É oportuno ressaltar que a utilização do MEF para discretização do contínuo tem se mostrado eficiente quando aplicado à mecânica. Neste método, pressupõe-se a hipótese do contínuo (domínio) ser dividido em um número finito de elementos (subdomínios) interligados em alguns pontos, denominados nós. Por meio de funções que interpolam as incógnitas nodais, a influência de cada elemento no sistema global é avaliada e acumulada em um sistema de equações algébricas, cuja solução conduz, por sua vez, à resolução do problema do contínuo.

Assim, tratando-se de um sistema discreto, utiliza-se comumente a matriz  $N$  para interpolação de deslocamentos, tal que para um elemento de  $gl$  graus de liberdade (deslocamentos generalizados) pode-se escrever:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_u^l & \dots & N_u^{gl} \\ N_v^l & \dots & N_v^{gl} \\ N_w^l & \dots & N_w^{gl} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u^l \\ \vdots \\ u^{gl} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

ou ainda

$$u = N U^n \quad (2.7)$$

sendo  $u$  o vetor de deslocamentos em qualquer ponto no interior do elemento e  $U^n$  o vetor de deslocamentos nodais. Semelhantemente a discretização do campo de deformações pode ser escrita na forma:

$$\varepsilon = B U^n \quad (2.8)$$

Neste caso a matriz de deformação  $B$  também possibilita a obtenção das deformações em qualquer ponto do elemento a partir dos deslocamentos nodais.

Seguindo a forma dada em (2.8), as duas parcelas, linear e não linear, do tensor de deformações totais no RLA, ficam definidas como:

$$\varepsilon_1 = B_1 \cdot U^n \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_2 = B_2(U^n) \cdot U^n \quad (2.10)$$

Nota-se em (2.10) que  $B_2$  deverá depender linearmente dos deslocamentos, já que a parcela  $\varepsilon_2$  é função não linear dos mesmos.

## Capítulo 3

# *Energia Potencial Total de Sistemas Estruturais Discretizados no RLA*

Neste capítulo será apresentada a formulação do funcional de Energia Potencial Total – EPT de sistemas estruturais discretizados no RLA por meio do MEF e, posteriormente, a partir do estudo das variações do referido funcional, serão estabelecidas as condições para o equilíbrio e estabilidade desses sistemas. Portanto, no decorrer deste trabalho aplica-se a teoria geral da estabilidade em sistemas discretos e conseqüentemente as expressões desenvolvidas são similares às utilizadas na clássica análise da estabilidade de sistemas contínuos de Koiter.

Sabe-se da mecânica que num problema conservativo - sistema elástico sob ação de forças conservativas - a energia potencial de um sistema estrutural corresponde ao trabalho realizado pelos esforços atuantes para levar o sistema estrutural da posição final (deformada) à posição inicial [110]. Em outras palavras, a energia potencial total ( $V$ ) corresponde à uma soma da energia de deformação ( $U$ ), que é a energia potencial interna, com a energia potencial das cargas externas ( $\Omega$ ). Portanto, a formulação da EPT no RLA para um sistema discretizado segue como conseqüência das formulações, no RLA, do potencial das cargas e da energia de deformação interna do referido sistema discretizado. Entretanto, para determinação do potencial das cargas e da energia de deformação do sistema discretizado, faz-se necessário primeiro a determinação destas no nível do elemento, o que é feito nos subitens 3.2 a 3.4 deste capítulo.

### 3.1 Potencial de Cargas em Elementos Finitos no RLA

O potencial das cargas agindo sobre um sólido é definido como o produto escalar da força pelo deslocamento, ou seja, é o produto do módulo da componente da força pelo módulo do deslocamento na direção da força. Assim, para o caso de adotar o RLA, o potencial das cargas agindo em um elemento é escrito como:

$$\Omega^n = \Omega_V^n + \Omega_S^n \quad (3.1)$$

onde os trabalhos das cargas externas, de volume e de superfície, agindo no n-ésimo elemento podem ser escritos, respectivamente, como:

$$\Omega_V^n = -\lambda_T U_T^{nT} \int_V N^T f_V dV \quad (3.2)$$

$$\Omega_S^n = -\lambda_T U_T^{nT} \int_S N^T f_S dS \quad (3.3)$$

Nas expressões (3.2) e (3.3)  $N$  é a matriz de interpolação de deslocamentos nodais,  $f_V$  e  $f_S$  as respectivas distribuições de cargas de volume e de superfície,  $\lambda_T$  corresponde à magnitude do vetor de forças agindo até a posição atual,  $U_T^n$  é o vetor de deslocamentos acumulados correspondentes, os quais semelhantemente a expressão da deformação total (2.4) devem ser escritos da seguinte forma:

$$\lambda_T = \lambda + \lambda_0 \quad (3.4)$$

$$U_T^n = U^n + U_0^n \quad (3.5)$$

sendo  $\lambda_0$  e  $U_0^n$ , respectivamente o nível de carga e os deslocamentos referentes ao estado de tensões iniciais.

A expressão (3.1) pode ainda ser escrita como:

$$\Omega^n = -(\lambda_T F^n)^T \cdot U_T^n \quad (3.6)$$

Neste caso, o vetor  $F^n$ , que é o vetor de cargas nodais de volume e de superfície agindo no elemento, equivale à seguinte soma:

$$F^n = \int_V N^T f_V dV + \int_S N^T f_S dS \quad (3.7)$$

Substituindo (3.4) e (3.5) em (3.6), obtém-se a expressão da energia potencial das cargas agindo no elemento no RLA:

$$\Omega^n = -(\lambda + \lambda_0) F^{nT} \cdot (U^n + U_0^n) \quad (3.8)$$

### 3.2 Energia de Deformação em Elementos Finitos no RLA

Num sistema em regime elástico, a variação da energia de deformação corresponde ao trabalho realizado pelas forças internas, portanto, seu valor depende diretamente da configuração deformada do sistema.

A energia interna de deformação total armazenada no n-ésimo elemento na nova configuração de equilíbrio em regime linear pode ser escrita como:

$$U^n = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T \sigma dV \quad (3.9)$$

Sendo o tensor de tensões definido como:

$$\sigma = D \varepsilon \quad (3.10)$$

onde  $D$  é a matriz da relação constitutiva. Já o tensor de Green ( $\varepsilon$ ) corresponde às deformações totais no RLA, conforme a expressão (2.5) do capítulo anterior.

Substituindo a expressão (3.10) e (2.5) em (3.9) obtém-se:

$$\begin{aligned}
U^n &= \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_T^T \sigma) dV = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_T^T D \varepsilon_T) dV \\
&= \frac{1}{2} \int_V [(\varepsilon_0^T + \varepsilon_1^T + \varepsilon_2^T) D (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)] dV
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Desenvolvendo os produtos e agrupando os termos recorrentes da expressão (3.11) percebe-se a possibilidade de se efetuar a integração por partes dos seguintes termos componentes da deformação total:

$$U_{00}^n = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_0^T \cdot D \cdot \varepsilon_0) dV \tag{3.12}$$

$$U_{01}^n = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_0^T \cdot D \cdot \varepsilon_1 + \varepsilon_1^T \cdot D \cdot \varepsilon_0) dV \tag{3.13}$$

$$U_{02}^n = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_0^T \cdot D \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_2^T \cdot D \cdot \varepsilon_0) dV \tag{3.14}$$

$$U_{11}^n = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_1^T \cdot D \cdot \varepsilon_1) dV \tag{3.15}$$

$$U_{12}^n = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_1^T \cdot D \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_2^T \cdot D \cdot \varepsilon_1) dV \tag{3.16}$$

$$U_{22}^n = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_2^T \cdot D \cdot \varepsilon_2) dV \tag{3.17}$$

Esta forma de escrita das parcelas da energia de deformação foi utilizada na tese de doutorado de ALVES [25]. Outra forma, mais familiar ao MEF, de escrever as referidas parcelas discretizadas da energia de deformação pode ser feita com a aplicação da forma discretizada das parcelas do tensor de Green usando as matrizes ( $B_1$  e  $B_2(U^n)$ ), que resulta em:

$$U_{01}^n = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_0^T \cdot D \cdot B_1 \cdot U^n + U^{nT} \cdot B_1^T \cdot D \cdot \varepsilon_0) dV \tag{3.18}$$

$$U_{02}^n = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_0^T \cdot D \cdot B_2(U^n) \cdot U^n + U^{nT} \cdot B_2^T(U^n) \cdot D \cdot \varepsilon_0) dV \tag{3.19}$$

$$U_{11}^n = \frac{1}{2} \int_V \left[ U^{nT} (B_1^T \cdot D \cdot B_1) U^n \right] dV \quad (3.20)$$

$$U_{12}^n = \frac{1}{2} \int_V \left[ U^{nT} (B_1^T \cdot D \cdot B_2(U^n) + B_2^T(U^n) \cdot D \cdot B_1) U^n \right] dV \quad (3.21)$$

$$U_{22}^n = \frac{1}{2} \int_V \left[ U^{nT} (B_2^T(U^n) \cdot D \cdot B_2(U^n)) U^n \right] dV \quad (3.22)$$

Observa-se que a parcela  $U_{00}^n$  não se altera, já que independe dos deslocamentos.

Portanto, a energia interna de deformação total no RLA do n-ésimo elemento pode então ser escrita como o seguinte somatório:

$$U^n = U_{00}^n + U_{01}^n + U_{02}^n + U_{11}^n + U_{12}^n + U_{22}^n \quad (3.23)$$

### 3.2.1 Energia de Deformação em Termos de Matrizes

A energia de deformação pode ainda ser expressa em função de matrizes de rigidez e do vetor de deslocamento ( $U^n$ ) correspondente aos graus de liberdade do elemento, conforme será realizado nesta seção.

No MEF também é bastante conhecida a seguinte notação matricial para a energia de deformação de um n-ésimo elemento finito para o caso linear:

$$U^n = \frac{1}{2} U^{nT} \cdot K^n \cdot U^n \quad (3.24)$$

Seguindo esta notação cada parcela da energia de deformação, equações (3.13) a (3.17), de um n-ésimo elemento finito pode ser escrita como:

$$U_{02}^n = \frac{1}{2} U^{nT} \cdot K_\sigma^n \cdot U^n \quad (3.25)$$

$$U_{11}^n = \frac{1}{2} U^{nT} \cdot K_0^n \cdot U^n \quad (3.26)$$

$$\mathbf{U}_{12}^n = \frac{1}{3!} U^{nT} \cdot K_1^n (U^n) \cdot U^n \quad (3.27)$$

$$\mathbf{U}_{22}^n = \frac{1}{4!} U^{nT} \cdot K_2^n (U^n, U^n) \cdot U^n \quad (3.28)$$

$$\mathbf{U}_{01}^n = F_0^{nT} \cdot U^n \quad (3.29)$$

Nota-se que, de acordo com a expressão (3.12), o termo  $\mathbf{U}_{00}^n$  é o único independente dos deslocamentos  $U^n$ , conseqüentemente este termo não pode ser escrito na forma (3.24) e fisicamente não influencia na energia de deformação. Ressalta-se ainda que os coeficientes respectivos de cada parcela da energia de deformação - expressões (3.25) a (3.28) - resultam simplesmente da busca de escrevê-las semelhantemente a uma série de potência, tal como feito nos já mencionados trabalhos anteriores desta linha de pesquisa.

A partir da última expressão (3.29) percebe-se a possibilidade do vetor de forças associado ao estado de deformação inicial poder ser escrito em função de derivadas da parcela  $\mathbf{U}_{01}^n$  com respeito à respectiva posição do vetor de deslocamentos  $U^n$ , ou seja:

$$F_0^{nT} = \frac{\partial \mathbf{U}_{01}^n}{\partial U^n} \quad (3.30)$$

Finalmente, com base nas expressões (3.25) a (3.30), a energia de deformação total no RLA no n-ésimo elemento finito pode ser escrita sob a notação matricial da seguinte maneira:

$$\mathbf{U}^n = U^{nT} \cdot \left\{ \left[ \frac{1}{2!} (K_0^n + K_\sigma^n) + \frac{1}{3!} K_1^n (U^n) + \frac{1}{4!} K_2^n (U^n, U^n) \right] \cdot U^n + F_0^n \right\} + \mathbf{U}_{00}^n \quad (3.31)$$

sendo  $U^n$  o vetor de deslocamentos nodais, já descrito anteriormente. As matrizes  $K_0^n$ ,  $K_\sigma^n$ ,  $K_1^n$  e  $K_2^n$  são, respectivamente, a matriz de rigidez elástica, de tensões iniciais, de primeira e de segunda ordem com respeito aos deslocamentos. A determinação destas matrizes é uma fase importante para a aplicação do MEF na análise estrutural, portanto, na próxima seção são definidas as expressões gerais para as mesmas.

### 3.2.2 Formulação das Matrizes de Rigidez

A rigidez estrutural é entendida como a força, por unidade de deslocamento, que é necessária para produzir um deslocamento unitário na estrutura. Assim, um termo  $k_{ij}$  da matriz de rigidez é, portanto, um coeficiente de rigidez que representa a ação, por unidade de deslocamento, na direção  $i$  causada por um deslocamento unitário na direção  $j$ , mantendo-se todos os outros deslocamentos impedidos.

Como visto anteriormente, a energia de deformação elástica é expressa em termos dos deslocamentos do elemento e de acordo com o Primeiro Teorema de Castigliano a derivada parcial da energia de deformação com respeito ao deslocamento nodal  $u_i$  é igual à força nodal correspondente  $F_i$  [116], ou seja,

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial u_i} \quad (3.32)$$

Desta maneira, a matriz de rigidez linear do elemento corresponde exatamente às derivadas parciais da energia de deformação em relação aos deslocamentos generalizados do elemento, ou seja:

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_i \partial u_j} \quad (3.33)$$

sendo  $u_i$  e  $u_j$  os deslocamentos nodais referentes respectivamente aos graus de liberdade  $i$  e  $j$  do elemento finito.

Portanto, a determinação das matrizes de rigidez com base na expressão (3.33) consiste no cálculo individual de cada termo da matriz de forma direta a partir das derivadas das parcelas da energia de deformação.

Entretanto, para o caso das matrizes de segunda e quarta ordem (geradas pelas parcelas  $U_{12}^n$  e  $U_{22}^n$ ), além de calcular as derivadas das respectivas parcelas da energia de deformação, ainda resta realizar os produtos das referidas derivadas com os vetores de deslocamento definidos para o elemento. Portanto, ficam definidos os termos das quatro matrizes de rigidez, via cálculo por derivação, da seguinte maneira:

$$k_{0ij}^n = \frac{\partial^2 \mathbf{U}_{11}}{\partial u_i \partial u_j} \quad (3.34)$$

$$k_{\sigma ij}^n = \frac{\partial^2 \mathbf{U}_{02}}{\partial u_i \partial u_j} \quad (3.35)$$

$$k_1^n(U^n)_{ij} = \frac{\partial^3 \mathbf{U}_{12}}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k} \cdot u_i \quad (3.36)$$

$$k_2(U_a^n, U_b^n)_{ij} = \frac{\partial^4 \mathbf{U}_{22}}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k \partial u_l} \cdot u_i^a \cdot u_j^b \quad (3.37)$$

Nota-se em (3.37) a possibilidade de se escrever a matriz  $K_2$  em função de dois distintos vetores de deslocamentos ( $u_i^a, u_j^b$ ) e que não restam maiores dificuldades para obtenção das referidas matrizes de rigidez, inclusive de tensões iniciais, além do prévio cálculo das correspondentes parcelas da energia de deformação. No capítulo 7 são determinadas as matrizes de rigidez de elementos de pórticos planos e tridimensionais utilizando este procedimento.

Outra forma mais comumente utilizada no MEF para definição das matrizes de rigidez dá-se por meio de expressões integrais, que resultam da aplicação do método do deslocamento unitário que por sua vez deriva do Princípio do Trabalho Virtual. Usando a matriz de deformação ( $B$ ) pode-se escrever a matriz de rigidez para o caso linear da seguinte maneira:

$$K = \int_V (B^T \cdot D \cdot B) dV \quad (3.38)$$

Baseado nesta formulação e a partir das expressões (3.18) a (3.22) pode-se ainda chegar às seguintes definições das matrizes de rigidez:

$$K_0 = \int_V (B_1^T \cdot D \cdot B_1) dV \quad (3.39)$$

$$K_1(U^n) = \int_V (B_1^T \cdot D \cdot B_2(U^n) + B_2^T(U^n) \cdot D \cdot B_1) dV \quad (3.40)$$

$$K_2(U^n, U^n) = \int_V (B_2^T(U^n) \cdot D \cdot B_2(U^n)) dV \quad (3.41)$$

Entretanto, percebe-se na expressão (3.19) que a matriz de tensões iniciais não poderá ser escrita tal como as anteriores, este fato também foi evidenciado e solucionado pioneiramente no trabalho de ZIENKIEWICZ [112] *apud* ALVES [25] por meio da seguinte expressão demonstrada em [25]:

$$K_\sigma = \int_V (\eta^T \cdot \tau_0 \cdot \eta) dV \quad (3.42)$$

sendo  $\eta$  e  $\tau_0$  definidos a seguir:

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \\ \frac{\partial N}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} \sigma_x^0 \cdot I_3 & \tau_{xy}^0 \cdot I_3 & \tau_{xz}^0 \cdot I_3 \\ \tau_{yx}^0 \cdot I_3 & \sigma_y^0 \cdot I_3 & \tau_{yz}^0 \cdot I_3 \\ \tau_{zx}^0 \cdot I_3 & \tau_{zy}^0 \cdot I_3 & \sigma_z^0 \cdot I_3 \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

Nas quais  $I_3$  é a matriz identidade de ordem três,  $N$  a matriz de interpolação de deslocamentos e  $\sigma_i^0$  tensões normais iniciais na direção  $i$  e  $\tau_{ij}^0$  tensões cisalhantes iniciais no plano  $ij$ .

Portanto, embora neste último procedimento as matrizes sejam determinadas cada uma de maneira completa, diferentemente do processo anterior em que cada termo da matriz é determinado separadamente, há o inconveniente de se realizar o prévio cálculo das matrizes (3.43) e (3.44) além das matrizes  $B$  e  $B_2(U^n)$ . Já a forma da expressão (3.33) requer a prévia determinação das parcelas da energia de deformação.

Segundo [24], além da característica de simetria, ainda podem ser verificadas as propriedades a seguir descritas para as matrizes de rigidez  $K_1$  e  $K_2$ .

Propriedade distributiva na soma de parâmetros:

$$K_1(A+B) = K_1(A) + K_1(B) \quad (3.45)$$

$$K_2(A+B, C) = K_2(A, C) + K_2(B, C) \quad (3.46)$$

onde A, B e C são vetores com a mesma ordem das matrizes.

Propriedade comutativa na multiplicação por vetores:

$$K_1(A).B = K_1(B).A \quad (3.47)$$

$$K_2(A, B).C = K_2(A, C).B = K_2(C, B).A \quad (3.48)$$

A matriz de segunda ordem apresenta ainda as seguintes propriedades:

Propriedade comutativa em relação aos parâmetros:

$$K_2(A, B) = K_2(B, A) \quad (3.49)$$

Propriedade associativa no produto por escalar ( $\alpha$ ):

$$\alpha K_2(A, B) = K_2(\alpha A, B) = K_2(A, \alpha B) \quad (3.50)$$

### **3.3 EPT de Elementos Finitos no RLA**

A energia potencial total de um elemento finito é expressa pela soma da energia de deformação definida em (3.31) com o potencial das cargas definido em (3.8).

Portanto, a energia potencial total no RLA para o n-ésimo elemento é:

$$V^n = U^{nT} \cdot \left\{ \left[ \frac{1}{2!} (K_0^n + K_\sigma^n) + \frac{1}{3!} K_1^n(U^n) + \frac{1}{4!} K_2^n(U^n, U^n) \right] U^n + F_0^n \right\} + U_{00}^n - (\lambda + \lambda_0) F^{nT} \cdot (U^n + U_0^n) \quad (3.51)$$

ou,

$$V^n = U^{nT} \cdot \left\{ \left[ \frac{1}{2!} (K_0^n + K_\sigma^n) + \frac{1}{3!} K_1^n(U^n) + \frac{1}{4!} K_2^n(U^n, U^n) \right] U^n \right\} + U_{00}^n - \lambda F^{nT} U^n - \lambda F^{nT} U_0^n - \lambda_0 F^{nT} U^n - \lambda_0 F^{nT} U_0^n + U^{nT} F_0^n \quad (3.52)$$

Utilizando a operação (3.53) pode-se escrever (3.52) na forma da expressão (3.54).

$$\lambda F^{nT} \cdot U^n = U^{nT} \lambda F^n \quad (3.53)$$

Desenvolvendo os termos de forças:

$$V^n = U^{nT} \cdot \left\{ \left[ \frac{1}{2!} (K_0^n + K_\sigma^n) + \frac{1}{3!} K_1^n(U^n) + \frac{1}{4!} K_2^n(U^n, U^n) \right] U^n \right\} + U_{00}^n - U^{nT} (\lambda F^n + \lambda_0 F^n - F_0^n) - (\lambda F^{nT} + \lambda_0 F^{nT}) U_0^n \quad (3.54)$$

Agrupando os termos dependentes de  $U^n$ , tem-se:

$$V^n = U^{nT} \cdot \left\{ \left[ \frac{1}{2!} (K_0^n + K_\sigma^n) + \frac{1}{3!} K_1^n(U^n) + \frac{1}{4!} K_2^n(U^n, U^n) \right] U^n - (\lambda F^n + \lambda_0 F^n - F_0^n) \right\} + U_{00}^n - (\lambda F^{nT} + \lambda_0 F^{nT}) U_0^n \quad (3.55)$$

Considerando a igualdade (3.56), que pode ser demonstrada através do princípio dos trabalhos virtuais tal como realizado em [98] e desprezando as parcelas independentes dos deslocamentos  $U^n$ , a EPT no n-ésimo elemento finito é definida em (3.57).

$$\lambda_0 F^n = F_0^n \quad (3.56)$$

$$V^n = U^{nT} \cdot \left\{ \left[ \frac{1}{2!} (K_0^n + K_\sigma^n) + \frac{1}{3!} K_1^n(U^n) + \frac{1}{4!} K_2^n(U^n, U^n) \right] U^n - \lambda F^n \right\} \quad (3.57)$$

### 3.4 EPT do Sistema Discretizado no RLA

A EPT de um sistema estrutural discretizado no RLA com  $M$  elementos é composta pela EPT de todos os elementos do sistema no RLA, portanto, resulta no somatório:

$$V(U) = \sum_{n=1}^M V^n(U^n) = U^T \cdot \left\{ \left[ \frac{1}{2}(K_\sigma + K_0) + \frac{1}{6}K_1(U) + \frac{1}{24}K_2(U, U) \right] \cdot U - \lambda F \right\} \quad (3.58)$$

Salienta-se que cada uma das matrizes de rigidez presentes em (3.58) devem ser formados pela contribuição de cada elemento previamente transformada para o referencial global da estrutura, assim como os vetores de força. Portanto, uma etapa necessária é a transformação do referencial local (do elemento) para o referencial global (da estrutura) antes de se fazer a montagem das matrizes presentes em (3.58).

A transformação de referencial local ( $L$ ) para global ( $G$ ) ou vice-versa é feita por meio de produtos com matrizes ortogonais, chamadas matrizes de rotação ( $R$ ) ou de cossenos diretores, tal como expressos a seguir:

Para força ou deslocamentos

$$X_G^n = R^T \cdot X_L^n \quad (3.59)$$

$$X_L^n = R \cdot X_G^n \quad (3.60)$$

onde ( $X$ ) são vetores de forças ou de deslocamentos.

Para matrizes de rigidez

$$K_G^n = R^T \cdot K_L^n \cdot R \quad (3.61)$$

$$K_L^n = R \cdot K_G^n \cdot R^T \quad (3.62)$$

Depois de realizadas as transformações, de referencial local para global, as matrizes de rigidez e o vetor de forças da expressão (3.58) são montados com os somatórios:

$$K = \sum_{n=1}^M K_G^n \quad (3.63)$$

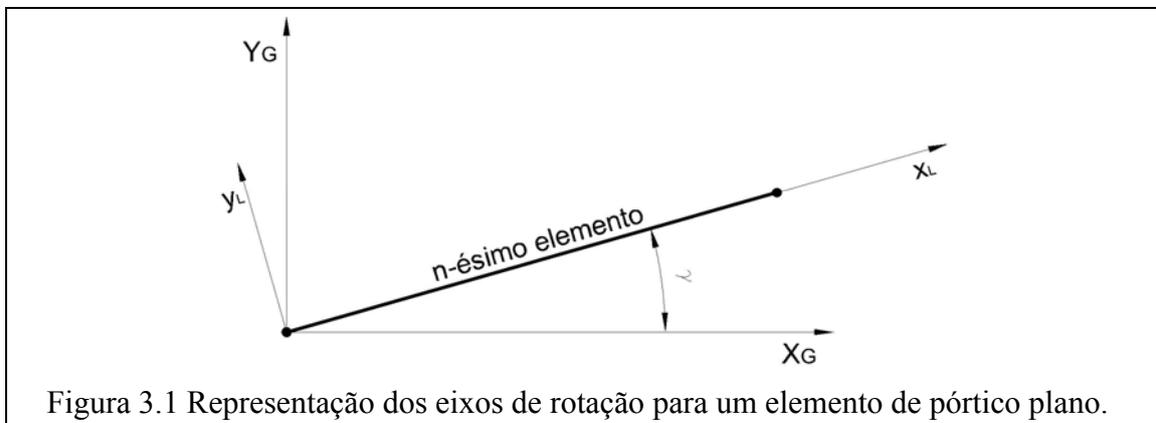
$$F = \sum_{n=1}^M F_G^n + F_N \quad (3.64)$$

Na expressão (3.64), o vetor  $F_N$  corresponde às forças, em referencial global, aplicadas nos nós da estrutura. Portanto, na expressão (3.58) devem ser utilizadas as matrizes de rigidez e vetor de forças montados tal como em (3.63) e (3.64).

Como exemplo de matriz de transformação de referencial, a seguir apresenta-se a matriz de transformação para elementos de pórticos planos ( $r^p$ ) amplamente divulgados na literatura (e.g. GERE e WAVER [113]).

$$r^p = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \text{sen} \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen} \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \gamma & \text{sen} \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen} \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

Os eixos locais ( $x_L, y_L$ ) do elemento de pórtico, eixos globais ( $x_G, y_G$ ) da estrutura e o ângulo  $\gamma$  de rotação entre eixos são representados na Figura 3.1 a seguir:



## Capítulo 4

# *Equilíbrio e Estabilidade de Sistemas Estruturais*

Neste capítulo são apresentadas as condições para caracterização do estado de equilíbrio e estabilidade de sistemas estruturais em regime elástico. Ressalta-se que as formulações que se seguirão são embasadas na teoria geral da estabilidade que utiliza como ferramenta fundamental o estudo das variações da EPT.

### 4.1 Condição de Equilíbrio

Aplicam-se aqui os critérios de energia para exame do equilíbrio e estabilidade em que por meio da extremização do funcional da EPT, são obtidas variações de até a quarta ordem do mesmo. Assim, estudando a variação da EPT na vizinhança de um suposto ponto de equilíbrio  $(U, \lambda F)$ , considerando deslocamentos incrementais infinitesimais e cinematicamente admissíveis  $(\phi)$ , tem-se:

$$V(U + \phi) = (U + \phi)^T \cdot \left\{ \left[ \frac{1}{2}(K_\sigma + K_0) + \frac{1}{6}K_1(U + \phi) + \frac{1}{24}K_2((U + \phi), (U + \phi)) \right] \cdot (U + \phi) - \lambda F \right\} \quad (4.1)$$

Aplicando as propriedades das matrizes de primeira e segunda ordem pode-se reescrever (4.1) como:

$$\begin{aligned}
V(U + \phi) = & U^T \cdot \left\{ \left[ \frac{1}{2} (K_\sigma + K_0) + \frac{1}{6} K_1(U) + \frac{1}{24} K_2(U, U) \right] \cdot U - \lambda F \right\} + \\
& + \phi^T \cdot \left\{ \left[ (K_\sigma + K_0) + \frac{1}{2} K_1(U) + \frac{1}{6} K_2(U, U) \right] \cdot U - \lambda F \right\} + \\
& + \phi^T \cdot \left[ \frac{1}{2} (K_\sigma + K_0) + \frac{1}{2} K_1(U) + \frac{1}{4} K_2(U, U) \right] \cdot \phi + \\
& + \phi^T \cdot \left[ \frac{1}{6} K_1(\phi) + \frac{1}{6} K_2(U, \phi) \right] \cdot \phi + \\
& + \phi^T \cdot \left[ \frac{1}{24} K_2(\phi, \phi) \right] \cdot \phi
\end{aligned} \tag{4.2}$$

A primeira parcela do lado direito da expressão (4.2) corresponde exatamente a  $V(U)$ , já as demais parcelas representam, respectivamente, as variações de primeira, segunda, terceira e quarta ordem. Pode-se escrever a partir da expressão (4.2):

$$\begin{aligned}
\Delta V(U) = & V(U + \phi) - V(U) = \\
& \delta^1 V(U) + \frac{1}{2!} \delta^2 V(U) + \frac{1}{3!} \delta^3 V(U) + \frac{1}{4!} \delta^4 V(U)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

onde  $\Delta V$  é a variação total da EPT em torno de  $U$ . As parcelas  $\delta^1 V$ ,  $\delta^2 V$ ,  $\delta^3 V$  e  $\delta^4 V$  correspondem respectivamente à primeira, segunda, terceira e quarta variação de  $V$  em torno de  $U$  e apresentam, respectivamente, termos lineares, quadráticos, cúbicos e quárticos em função  $\phi$ . Observando as equações (4.2) e (4.3), são percebidas as correspondentes definições:

$$\delta^1 V(U) = \phi^T \cdot \left\{ \left[ (K_\sigma + K_0) + \frac{1}{2} K_1(U) + \frac{1}{6} K_2(U, U) \right] \cdot U - \lambda F \right\} \tag{4.4}$$

$$\delta^2 V(U) = \phi^T \cdot \left[ (K_\sigma + K_0) + K_1(U) + \frac{1}{2} K_2(U, U) \right] \cdot \phi \tag{4.5}$$

$$\delta^3 V(U) = \phi^T \cdot [K_1(\phi) + K_2(U, \phi)] \cdot \phi \tag{4.6}$$

$$\delta^4 V(U) = \phi^T \cdot K_2(\phi, \phi) \cdot \phi \tag{4.7}$$

O princípio da energia potencial total estacionária estabelece que, para que os deslocamentos  $U$  correspondam a uma situação de equilíbrio estático, a primeira variação do funcional de energia deve ser nula, ou seja:

$$\delta^1 V(U) = 0 \quad (4.8)$$

## 4.2 Equilíbrio Estável

Os deslocamentos obtidos a partir das equações de equilíbrio representarão um ponto de equilíbrio estável, caso o valor da EPT correspondente seja um mínimo relativo e completo com respeito às energias potenciais totais associadas a todos os estados vizinhos cinematicamente admissíveis.

Portanto, com esta condição, caso um estado de equilíbrio caracterizado por  $(\lambda^E, U^E)$  seja perturbado por deslocamentos infinitesimais e cinematicamente admissíveis  $(\phi)$ , o valor da energia na configuração adjacente  $(\lambda^E, U^E + \phi)$  será menor que a respectiva ao deslocamento  $U^E$ , ou seja,

$$\Delta V(U^E) = V(U^E + \phi) - V(U^E) > 0 \quad (4.9)$$

Como se trata de um ponto de equilíbrio, a equação (4.8) é naturalmente atendida. Além disso, como os deslocamentos  $\phi$  são infinitesimais, tem-se apenas a seguinte condição para o estabelecimento de um ponto de equilíbrio estável:

$$\delta^2 V(U^E) > 0 \quad (4.10)$$

ou seja,

$$\phi^T \cdot \left[ (K_\sigma + K_0) + K_1(U^E) + \frac{1}{2} K_2(U^E, U^E) \right] \cdot \phi > 0 \quad (4.11)$$

Defini-se aqui a matriz de rigidez tangente no ponto de equilíbrio como a soma entre colchetes da expressão (4.11), portanto,

$$K_T^E = (K_\sigma + K_0) + K_1(U^E) + \frac{1}{2}K_2(U^E, U^E) \quad (4.12)$$

Pode-se ainda escrever (4.11) simplesmente como:

$$\phi^T \cdot K_T^E \cdot \phi > 0 \quad (4.13)$$

Sabe-se da álgebra que, se a matriz  $K_T^E$  puder ser escrita como em (4.13) para todo deslocamentos infinitesimal não nulo ( $\phi \neq 0$ ), a mesma é positiva definida. Portanto, a condição para que um ponto de equilíbrio seja estável é de que a matriz de rigidez tangente neste ponto seja positiva definida.

Se a segunda variação da energia potencial total for negativa definida, negativa semidefinida ou indefinida o estado de equilíbrio é instável.

### 4.3 Estabilidade de Pontos Críticos

Por meio da condição expressa em (4.13) obtém-se a seguinte equação correspondente ao estado de equilíbrio crítico:

$$K_T^E \phi = 0, \forall \phi \neq 0 \quad (4.14)$$

sendo  $K_T^E$  a matriz de rigidez tangente definida em (4.12) e  $\phi$  os modos críticos.

A estabilidade dos pontos críticos de um caminho de equilíbrio pode ser definida de acordo com os conceitos da teoria geral da estabilidade, que diz: caso a segunda variação da energia potencial total seja nula, não se pode tirar nenhuma conclusão quanto à estabilidade desse estado crítico e precisa-se recorrer à investigação de termos de mais alta ordem. Investigando termos de mais alta ordem, têm-se os seguintes casos: quando a terceira variação não for nula, tem-se um caso de bifurcação assimétrica, que é considerado uma situação de equilíbrio instável. Se a terceira variação for nula, deve-se estender a investigação até a quarta variação e se esta for positiva trata-se de uma

bifurcação simétrica estável. Sendo negativa a quarta variação, tem-se uma bifurcação simétrica instável [11].

#### 4.3.1 *Análise Linearizada da Estabilidade*

Foi apresentada anteriormente, por meio da segunda variação do funcional de energia potencial total, a condição de estabilidade de um sistema estrutural discretizado. Também foi apresentada a condição necessária e suficiente para o estado de equilíbrio crítico definida em (4.14). Apresenta-se a seguir, ainda por meio do estudo da segunda variação do funcional de energia potencial total, a formulação matemática para definição dos problemas de autovalores para aproximação das cargas críticas e dos modos de instabilidade associados.

Aplicando uma variação de deslocamentos  $\delta U$  a partir de uma configuração de equilíbrio  $(\lambda^E, U^E)$  a condição (4.14) fica:

$$\left[ (K_o + K_\sigma) + K_1(U^E + \delta U) + \frac{1}{2} K_2(U^E + \delta U, U^E + \delta U) \right] \phi = 0 \quad (4.15)$$

A variação dos deslocamentos  $\delta U$ , correspondente à variação do carregamento a partir de um estado de equilíbrio, pode ser considerado proporcional a uma aproximação para os deslocamentos da equação de equilíbrio linearizada, ou seja,

$$\delta U = (\lambda - \lambda^E) U_1^L \quad (4.16)$$

sendo,

$$U_1^L = (K_T^E)^{-1} F \quad (4.17)$$

Os termos em função de  $K_1$  e  $K_2$  de (4.15) podem ser desenvolvidos, por meio do uso das propriedades dessas matrizes, resultando em:

$$K_1(U^E + \delta U) = K_1(U^E) + \Lambda K_1(U_1^L) \quad (4.18)$$

$$\frac{1}{2} K_2(U^E + \delta U, U^E + \delta U) = \frac{1}{2} \left[ K_2(U^E, U^E) + 2\Lambda K_2(U^E, U_1^L) + \Lambda^2 K_2(U_1^L, U_1^L) \right] \quad (4.19)$$

sendo em (4.18) e (4.19),

$$\Lambda = (\lambda - \lambda^E) \quad (4.20)$$

Substituindo (4.18) e (4.19) em (4.15):

$$\left[ (K_0 + K_\sigma) + K_1(U^E) + \frac{1}{2} K_2(U^E, U^E) + \Lambda \left[ K_1(U_1^L) + K_2(U^E, U_1^L) \right] + \frac{\Lambda^2}{2} K_2(U_1^L, U_1^L) \right] \phi = 0 \quad (4.21)$$

Interessante observar que a expressão (4.21) pode ainda ser escrita como:

$$\left[ K_T^E + \Lambda \left[ K_1(U_1^L) + K_2(U^E, U_1^L) \right] + \frac{\Lambda^2}{2} K_2(U_1^L, U_1^L) \right] \phi = 0 \quad (4.22)$$

Nota-se que a expressão (4.22) trata-se de um problema não-linear de autovalor no RLA. A solução deste problema  $(\Lambda, \phi)$  deve fornecer boas aproximações de cargas críticas  $\lambda$ , aplicando a expressão (4.20), e de modos críticos  $\phi$ , autovetores associados aos autovalores  $\Lambda$ , para sistemas estruturais com comportamento pré-crítico linear ou não-linear. Entretanto, pode-se ainda linearizar este problema desprezando a última parcela, ou seja,

$$\left\{ (K_0 + K_\sigma) + K_1(U^E) + \frac{1}{2} K_2(U^E, U^E) + \Lambda \left[ K_1(U_1^L) + K_2(U^E, U_1^L) \right] \right\} \phi = 0 \quad (4.23)$$

Portanto, a expressão (4.23) trata-se do problema de autovalor linearizado no RLA. Este problema pode ainda ser mais simplificado caso se tome a origem  $(\lambda^E = 0, U^E = 0)$  como referência, ficando:

$$\left[ (K_0 + K_\sigma) + \lambda K_I (U_2^L) \right] \phi = 0 \quad (4.24)$$

sendo neste caso,

$$U_2^L = (K_0 + K_\sigma)^{-1} F \quad (4.25)$$

O problema de autovalor linearizado apresentado em (4.24) é também chamado de problema de autovalor consistente no RLA. Entretanto, a diferença do mesmo para o apresentado em (4.23) é que em (4.23) pode-se considerar a origem a partir de qualquer ponto da trajetória de equilíbrio, ou seja, já sob a influência de certo nível de carga e de tensões iniciais, enquanto que em (4.24) a origem é tomada para a situação da estrutura descarregada, embora também possa estar sujeita a um estado de tensões iniciais (e.g. tensões residuais em elementos estruturais advindos do processo de fabricação).

Por último, caso se despreze a influência de tensões iniciais, o problema de autovalor apresentado em (4.24) fica escrito no RLT simplesmente como:

$$\left[ K_0 + \lambda K_I (U_3^L) \right] \phi = 0 \quad (4.26)$$

onde

$$U_3^L = (K_0)^{-1} F \quad (4.27)$$

Notar que as expressões (4.25) e (4.27) são equivalentes à expressão (4.17) com as considerações de mudança da matriz de rigidez tangente nos respectivos casos: a) Referencial Lagrangeano Atualizado a partir da origem e b) Referencial Lagrangeano Total.

O problema linearizado de autovalor expresso em (4.26) é chamado de problema de autovalor consistente em RLT e também fornece boas aproximações para cargas críticas, principalmente de sistemas estruturais caracterizados por comportamento linear em regime pré-crítico, tal como demonstrado em [24].

Em [25], é demonstrada a formulação do problema clássico de autovalor (4.28), a qual utiliza como base não deslocamentos proporcionais a uma primeira análise linearizada ( $U_i^L$ ), mas proporções de esforços internos armazenados na matriz de tensões iniciais decorrentes de uma primeira análise com um carregamento total aplicado.

$$(K_0 + \lambda K_\sigma)\phi = 0 \quad (4.28)$$

Contudo, deve-se observar que a análise linearizada da estabilidade, resultante da linearização da equação de equilíbrio crítico, somente fornece aproximações de cargas críticas e modos críticos (de instabilidade), não fornecendo nenhuma informação sobre a trajetória pós-crítica. Além disso, a utilização da análise linearizada perde a eficácia quando aplicada a problemas com comportamento não-linear pré-crítico, portanto devendo ser usada criteriosamente [24].

### *Estabilidade de Sistemas Imperfeitos*

A partir do estudo da estabilidade estrutural tornou-se evidente a grande importância das imperfeições no comportamento das estruturas, sendo em alguns casos decisiva a influência das mesmas na compreensão dos problemas, já que na prática todas as estruturas são imperfeitas, pois sempre existirão imperfeições iniciais, mesmo em casos de rigoroso controle de fabricação, transporte e montagem. Em contrapartida, como discutido mais adiante, os estudos de estruturas idealmente perfeitas tem grande importância, já que possibilitam avaliar a influência das imperfeições impostas aos sistemas estruturais, ou seja, a sensibilidade das estruturas às imperfeições.

A avaliação da sensibilidade das estruturas às imperfeições é uma etapa necessária para o estabelecimento de parâmetros restritivos de imperfeição, de maneira que o comportamento estrutural não se distancie das previsões do projeto.

Basicamente existem dois tipos de imperfeições geométricas:

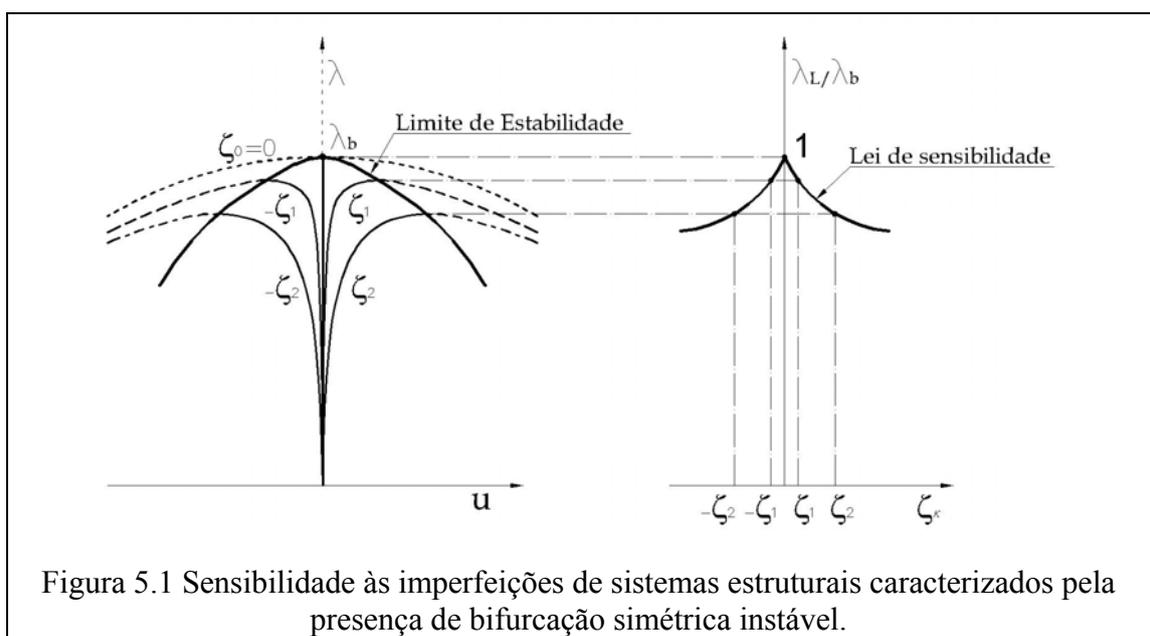
- **Deformação inicial**, correspondentes aos desvios geométricos presentes nos elementos estruturais, resultantes de falhas do material ou desaprumos decorrentes dos processos construtivos. Salienta-se que neste caso não se consideram tensões iniciais para carregamento nulo ( $\lambda = 0$ );
- **Imperfeição de carregamento**, correspondentes às excentricidades das cargas aplicadas nos elementos estruturais.

Numa análise não-linear geométrica, ambas as imperfeições interagem e ocasionam efeitos associados ao longo da análise, o que em geral resulta num comportamento

diferente do obtido com a análise linear, na qual esta associação de efeitos não é considerada.

Evidentemente as imperfeições produzem efeitos distintos de acordo com cada sistema estrutural. Portanto, torna-se interessante avaliar a sensibilidade às imperfeições das estruturas idealizadas ainda na fase de projeto, que normalmente é feito por meio de simulações numéricas, o que torna necessário o desenvolvimento de confiáveis ferramentas numérico-computacionais capazes de avaliar o comportamento não-linear da estrutura.

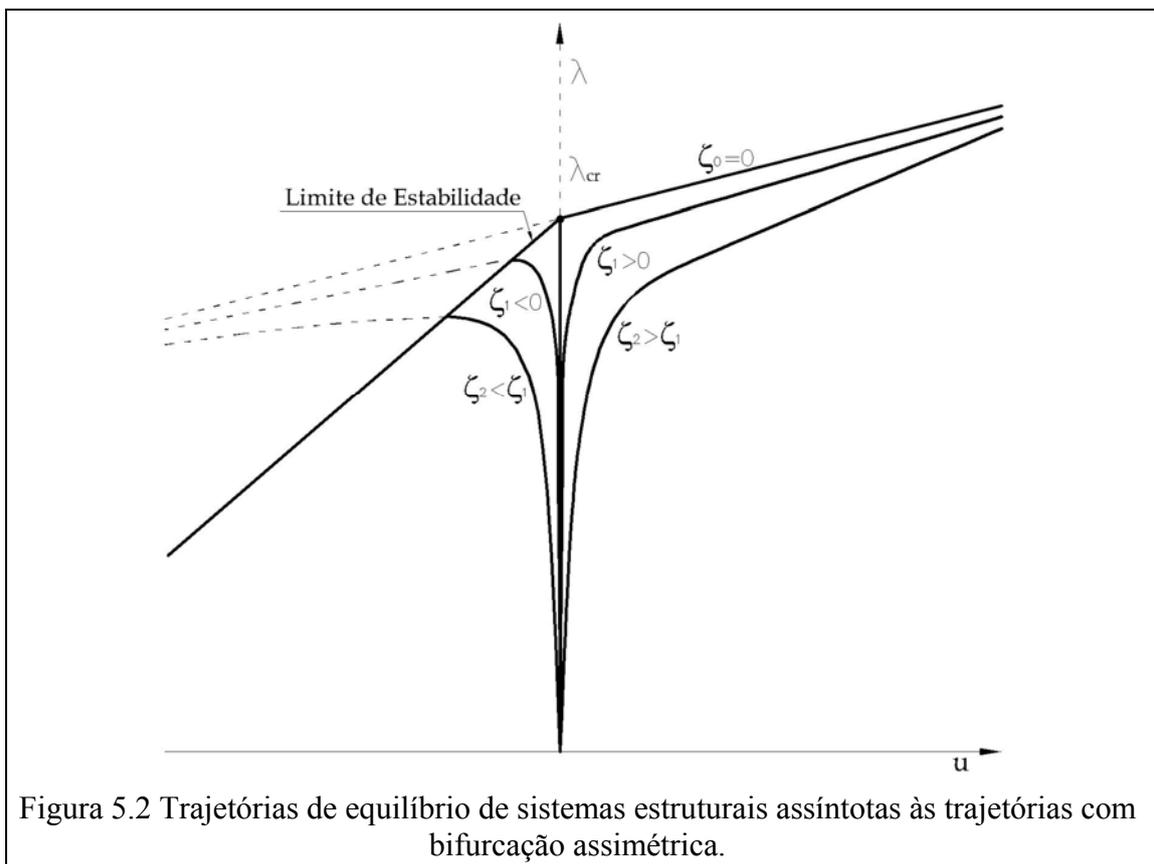
A avaliação da sensibilidade às imperfeições normalmente é verificada por meio de linhas de tendência traçadas a partir das trajetórias de equilíbrio da estrutura considerando aumento gradativo de imperfeições. Na Figura 5.1 representa-se esquematicamente a sensibilidade às imperfeições iniciais de sistemas estruturais caracterizados teoricamente por bifurcação simétrica instável.

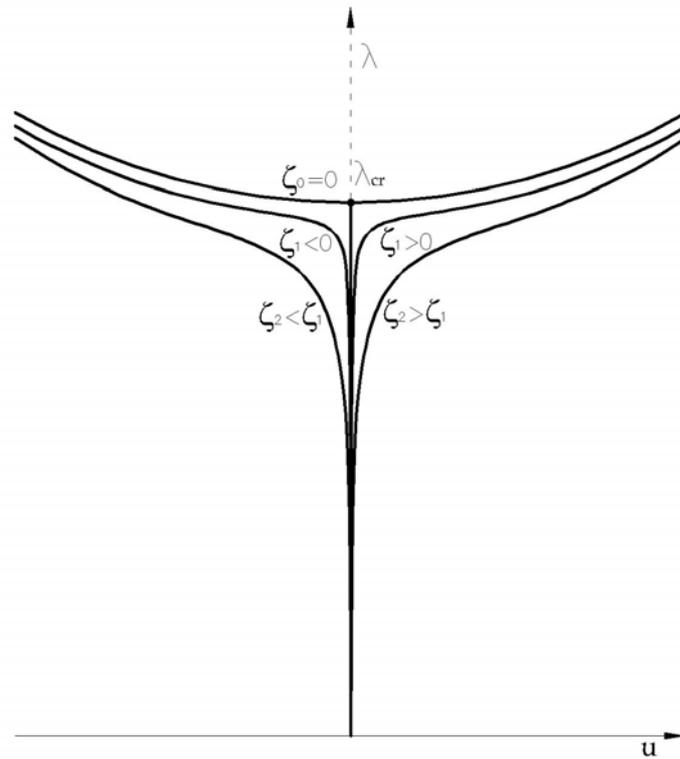


Um fato interessante é que as estruturas imperfeitas geralmente não apresentam, em sua trajetória de equilíbrio, pontos críticos de bifurcação  $(u_b, \lambda_b)$  e sim pontos do tipo limite  $(u_L, \lambda_L)$ , que, nesse caso, passam a ser chamados de pontos de flambagem. Portanto, estruturas reais normalmente não apresentam trajetória de equilíbrio bifurcada, como se verifica teoricamente em estruturas perfeitas, conforme detalhado mais adiante. Além

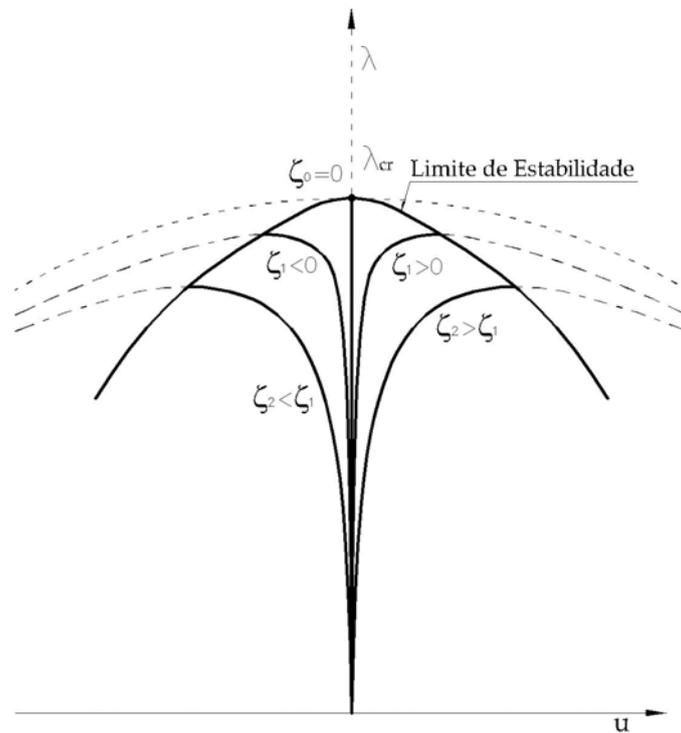
disso, também foi demonstrado que o efeito das imperfeições geométricas é mais relevante em estruturas que apresentam teoricamente ponto de bifurcação que em estruturas que apresentam ponto limite [11].

Nas Figura 5.2 e Figura 5.3, representam-se esquematicamente algumas trajetórias de equilíbrio de estruturas imperfeitas (imperfeição de carga ou de geometria), onde se pode notar que as mesmas são assintóticas às trajetórias de equilíbrio de estruturas teoricamente perfeitas com ponto de bifurcação. Nestas representações a imperfeição geométrica é quantificada pelo parâmetro  $\zeta_k$ . De acordo com as representações nas referidas figuras, a consideração de imperfeições em sistemas estruturais caracterizados teoricamente pela presença de pontos de bifurcação promove grandes alterações na trajetória de equilíbrio na medida em que as imperfeições são amplificadas.





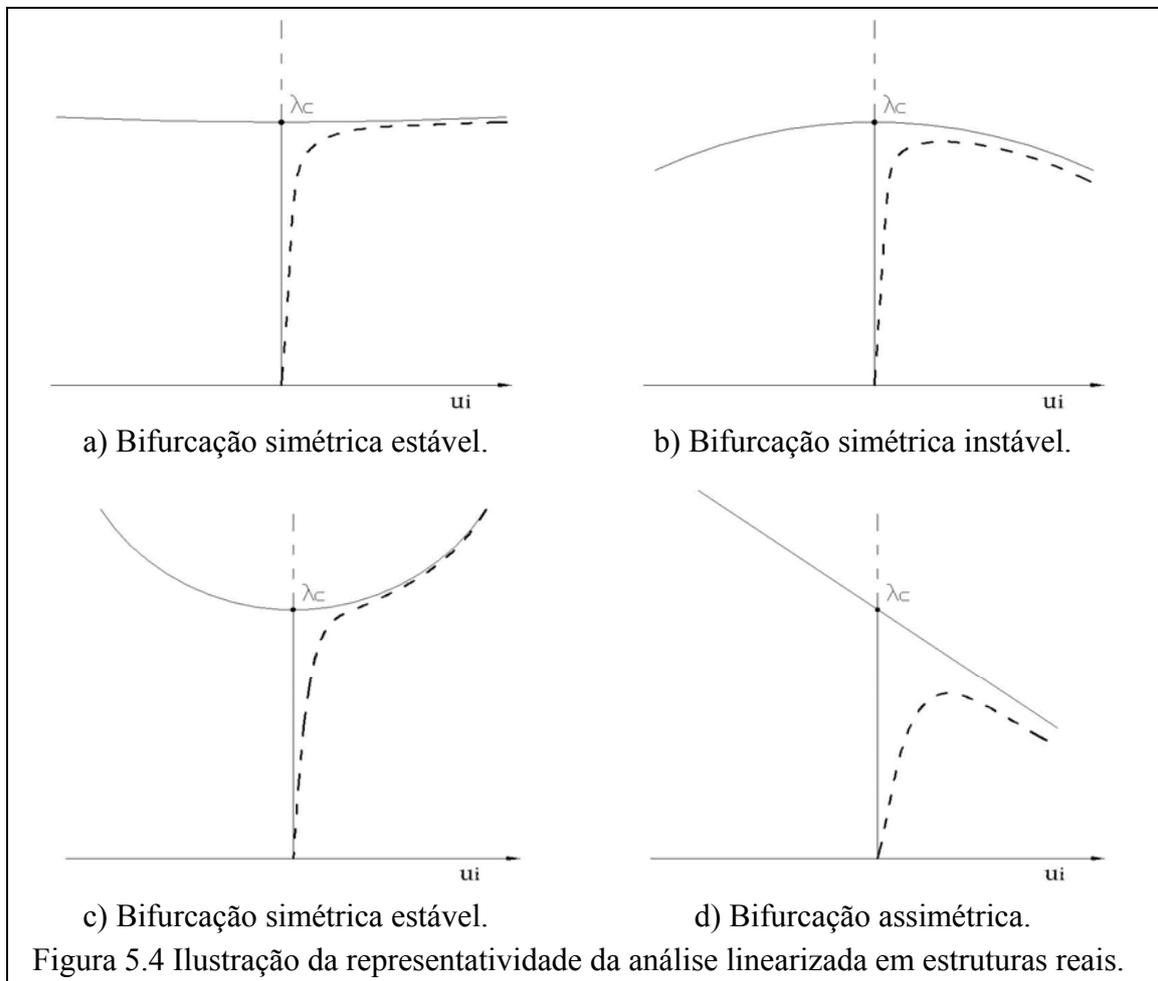
**a)** Assintótico a trajetória com bifurcação simétrica estável



**b)** Assintótico a trajetória com bifurcação simétrica instável  
 Figura 5.3 Trajetórias de equilíbrio de estruturas imperfeitas.

Existe na literatura (ex. [11] e [9]) a dedução analítica da lei de sensibilidade às imperfeições para alguns problemas contínuos de geometria simples. Entretanto, de maneira geral, recorre-se às soluções numéricas para avaliação da sensibilidade de problemas mais complexos.

Embora as estimativas de cargas críticas, obtidas com a análise linearizada, resolvam a maior parte dos problemas práticos, por vezes em problemas reais com trajetórias assintóticas às trajetórias com presença de bifurcações, a simples aproximação de cargas críticas pode ser insuficiente e resultar em conclusões equivocadas. Para exemplificar este fato utilizam-se aqui os exemplos representados na Figura 5.4, na qual as linhas tracejadas representam às referidas trajetórias de estruturas reais (imperfeitas).



Nota-se que no **caso a**, a linearização conduz a resultados bem aproximados para a carga de flambagem da estrutura imperfeita; nos **casos b e d** pode resultar em resultados desfavoráveis a segurança, já que é incapaz de diagnosticar o caráter instável ou a perda

de rigidez provocada precocemente pelas imperfeições e; no **caso c**, a análise linearizada resultaria em resultados conservadores para uma estimativa de colapso.

Outra maneira de se obter os valores correspondentes às cargas críticas é por meio do acompanhamento do sinal do determinante da matriz tangente ( $K_T^E$ ) ao longo da trajetória de equilíbrio, já que no ponto crítico esta matriz deixará de ser positiva definida e assim a carga correspondente àquela configuração será a carga crítica.

O acompanhamento da trajetória de equilíbrio é a maneira mais eficiente de análise da estabilidade, já que uma vez traçada fornece melhores aproximações para pontos críticos e informações da estabilidade dos caminhos pós-críticos. Entretanto, para obtenção da mesma se faz necessária a solução de sistemas de equações algébricas (equações de equilíbrio) não lineares advindos da aplicação da condição (4.8), conforme formulações apresentadas no capítulo 6.

## 5.1 Caracterização de Pontos Críticos

Como demonstrado anteriormente, a qualificação do equilíbrio crítico dos sistemas estruturais é intrinsecamente relacionada à matriz de rigidez dos mesmos. Portanto, é natural o desenvolvimento de estudos da referida matriz com a finalidade de qualificar os pontos críticos existentes ao longo das trajetórias de equilíbrio, tal como se segue.

Será demonstrado, no próximo capítulo, que as equações de equilíbrio incremental linearizada para um sistema estrutural discretizado pode ser escrita como:

$$K_T^E \cdot \Delta U = \Delta \lambda F \quad (5.1)$$

onde  $K_T^E$ ,  $\Delta \lambda F$  e  $\Delta U$  são, respectivamente, a matriz de rigidez tangente do sistema estrutural, o incremento de força e o incremento de deslocamento a partir de uma configuração de equilíbrio conhecida.

Pode-se escrever a partir das equações (5.1) um sistema equivalente com a propriedade de ser diagonalizado, da seguinte maneira:

$$\Delta \bar{F} = \bar{K}_T^E \cdot \Delta \bar{U} \quad (5.2)$$

Para este caso, utiliza-se em (5.1) como parâmetro de carga a unidade, ou seja,  $\lambda = 1$ , o que é perfeitamente possível.

Para tanto, faz-se necessária a obtenção de uma matriz de transformação que satisfaça as seguintes condições:

$$\Delta F = T \cdot \Delta \bar{F} \quad (5.3)$$

$$\Delta U = T \cdot \Delta \bar{U} \quad (5.4)$$

supondo que a matriz  $T$  seja ortogonal então é válido:

$$T^{-1} \cdot T = T^T \cdot T = I \quad (5.5)$$

sendo  $T^{-1}$  a inversa de  $T$ ,  $T^T$  a transposta de  $T$  e  $I$  a matriz identidade.

Pré-multiplicando (5.3) e (5.4) por  $T^T$ :

$$\Delta \bar{F} = T^T \cdot \Delta F \quad (5.6)$$

$$\Delta \bar{U} = T^T \cdot \Delta U \quad (5.7)$$

Substituindo (5.6) e (5.7) em (5.2) tem-se:

$$T^T \cdot \Delta F = \bar{K}_T^E \cdot T^T \cdot \Delta U \quad (5.8)$$

Pré-multiplicando (5.8) por  $T$  obtém-se:

$$\Delta F = T \cdot \bar{K}_T^E \cdot T^T \cdot \Delta U \quad (5.9)$$

Comparando-se o sistema linearizado, sistema (6.9) formado apenas com a parcela (6.10), com o sistema (5.9) observa-se que:

$$K_T^E = T \cdot \bar{K}_T^E \cdot T^T \quad (5.10)$$

Como visto em (5.5) a matriz  $T$  deve ser ortogonal, o que é satisfeito caso a mesma seja formada por vetores linearmente independentes (ortogonais). Os autovetores da própria matriz  $K_T^E$  formam uma base ortogonal. Portanto, podem ser utilizados para composição da matriz de transformação. Os referidos autovetores são calculados por meio do problema de autovalor definido em (5.11).

$$(K_T^E - \lambda I)\Phi = 0 \quad (5.11)$$

A solução deste problema de autovalor é dada pelos autovalores  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m$  associados aos autovetores ortonormais  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m$ , sendo  $m$  a ordem da matriz de rigidez tangente ( $K_T^E$ ).

Assim, a matriz de transformação  $T$  utilizada em (5.9) atende as condições de (5.5), (5.6), e (5.7) se for a matriz modal  $T$  formada pelo autovetores de (5.11), ou seja,

$$T = \{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m\} \quad (5.12)$$

A matriz modal  $T$  diagonaliza a matriz de rigidez tangente. Assim definida, a expressão (5.10) é chamada de decomposição espectral da matriz  $K_T^E$ .

Deve-se salientar que a matriz  $\bar{K}_T^E$  é uma matriz diagonal formada pelos autovalores do problema (5.11) dispostos em ordem crescente em sua diagonal principal.

O vetor de forças pode ser escrito na base dos autovetores como uma combinação linear dos mesmos, ou seja,

$$\Delta F = \beta_1 \Phi_1 + \beta_2 \Phi_2 + \dots + \beta_m \Phi_m \quad (5.13)$$

Que corresponde na forma matricial a:

$$\Delta F = T \cdot \beta \quad (5.14)$$

sendo  $T$  a matriz modal definida em (5.12) e  $\beta = (\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_m)^T$  o vetor formado pelos coeficientes da expressão (5.14).

Substituindo-se (5.14) e (5.10) no sistema linearizado, segue-se:

$$T \cdot \beta = T \cdot \bar{K}_T^E \cdot T^T \cdot \Delta U \quad (5.15)$$

Pré-multiplicando ambos os lados da expressão (5.15) seqüencialmente por  $T^T$ ,  $(\bar{K}_T^E)^{-1}$  e  $T$ , chega-se finalmente em

$$\Delta U = T \cdot (\bar{K}_T^E)^{-1} \cdot \beta \quad (5.16)$$

Lembrando que a matriz  $\bar{K}_T^E$  é formada pelos autovalores do problema (5.11) em sua diagonal, pode-se escrever sua inversa como:

$$(\bar{K}_T^E)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_m} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Já os coeficientes ( $\beta_i$ ) são obtidos pré-multiplicando (5.14) pela transposta da matriz modal  $T$ , sendo evidentemente conhecido o vetor de forças  $\Delta F$ , ou seja,

$$\beta = T^T \cdot \Delta F \quad (5.18)$$

Finalmente observando-se (5.17) pode-se reescrever (5.16) como:

$$\Delta U = \sum_{i=1}^m \frac{\beta_i}{\lambda_i} \Phi_i \quad (5.19)$$

Portanto, fica assim demonstrado que o escalar ( $\beta_i/\lambda_i$ ) obtido a partir de (5.18) e (5.11) quantifica a participação do  $i$ -ésimo modo ( $\Phi_i$ ) na resposta da estrutura.

### 5.1.1 *Distinção de Pontos Críticos*

Para qualificar o tipo de ponto crítico presente numa trajetória de equilíbrio é necessário observar as seguintes condições que diferenciam os mesmos:

- **Ponto de Bifurcação:** numa trajetória de equilíbrio com presença de bifurcação observa-se que, no processo incremental, uma trajetória distinta intercepta abruptamente a trajetória fundamental, ou seja, sem que existam deslocamentos dominados pelo modo crítico ( $\Phi_i$ ) antes do ponto de bifurcação. Com isso observa-se que em (5.19) deve ser satisfeita a condição  $\beta_i = 0$ ;
- **Ponto Limite:** numa trajetória de equilíbrio com presença de ponto limite, o modo correspondente ao ponto crítico ( $\Phi_i$ ) é despertado desde a origem, ou seja, a aproximação de um ponto limite caracteriza-se pelo aumento progressivo dos deslocamentos segundo o modo dominante ( $\Phi_i$ ). Portanto, tem-se a condição de que  $\beta_i \neq 0$  em (5.19).

Além destas condições, observando-se a expressão (5.19) pode ser percebido que no ponto crítico, em que a influência do modo crítico ( $\Phi_i$ ) é a mais considerável dentre os

modos que compõem o deslocamento incremental ( $\Delta U$ ), tem-se a condição de que  $\lambda_i \rightarrow 0$ , já que no sistema diagonalizado  $\lambda_i$  representa a rigidez segundo a direção  $i$ . Lembrando que os autovalores estão dispostos em ordem crescente, conclui-se que o modo crítico ( $\Phi_i$ ) está associado ao menor autovalor, portanto, associado a  $\lambda_1$ , que deve ser pequeno.

Ressalta-se que se for imposto um carregamento que desperte o modo crítico  $\Phi_i$  desde o início do processo, o respectivo coeficiente de carga deixa de ser nulo ( $\beta_i \neq 0$ ), correspondendo à condição de Ponto Limite. É o que ocorre no caso de imposição de imperfeição de carga, onde a bifurcação é destruída.

Em resumo, têm-se as seguintes condições que qualificam o equilíbrio crítico no primeiro ponto de singularidade ao longo da trajetória:

Tipo de Ponto Crítico	Comportamento de $\lambda_1$	Comportamento de $\beta_1$
Ponto Limite	$\lambda_1 \rightarrow 0$	$\beta_1 \neq 0$
Ponto de Bifurcação	$\lambda_1 \rightarrow 0$	$\beta_1 = 0$

A abordagem do estudo da instabilidade estrutural apresentada neste capítulo segue a formulação teórica apresentada por ALVES [25] em sua tese de doutorado, exceto quanto ao desenvolvimento matemático para determinação de pontos críticos, o qual é aqui posto de maneira mais consistente, por meio das novas expressões (5.13), (5.16), (5.17), (5.18) e (5.19).

### 5.1.2 Demonstração da Influência de Imperfeições Geométricas

No caso de estruturas que apresentam imperfeições geométricas de deformações iniciais, utiliza-se a seguinte metodologia:

Considera-se que as imperfeições geométricas sejam associadas a um vetor de deslocamentos,  $\Delta \bar{U}_{imp}$ , que surge de um carregamento  $\Delta \bar{F}_{imp}$ , assim a expressão linearizada passa a ser escrita como:

$$K_T^E . \Delta \bar{U}_{imp} = \Delta \bar{F}_{imp} \quad (5.20)$$

Escrevendo o vetor de forças na base dos autovetores, tem-se:

$$\Delta F + \Delta \bar{F}_{imp} = \bar{\beta}_1 \Phi_1 + \bar{\beta}_2 \Phi_2 + \dots + \bar{\beta}_m \Phi_m \quad (5.21)$$

Neste caso os coeficientes  $\bar{\beta}_i$  correspondem aos coeficientes da resultante das parcelas de força (perfeita e imperfeita).

Como em geral as imperfeições são aleatórias, então a contribuição de  $\Delta \bar{F}_{imp}$  provavelmente acarretará a seguinte condição:

$$\bar{\beta}_i \neq 0 \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5.22)$$

Observa-se que esta é exatamente a condição para ponto limite.

Portanto, em estruturas com imperfeições geométricas iniciais os pontos críticos provavelmente serão do tipo limite. Além disso, imperfeições na forma do modo crítico de bifurcação despertam deslocamentos associados ao caminho pós-bifurcação, o que ocasiona a destruição da bifurcação e o surgimento do ponto limite.

No apêndice são apresentados alguns exemplos de aplicações das formulações demonstradas nesta seção que comprovam a eficiência das mesmas para a caracterização de pontos críticos, tanto de estruturas perfeitas como imperfeitas.

## 5.2 Metodologias para Consideração de Imperfeições

Em termos de análise numérica de sensibilidade de imperfeições, observam-se duas distintas metodologias de acordo com o tipo de formulação discretizada: empregando o RLT ou o RLA.

Em se tratando da adoção do RLT, normalmente parte-se do princípio que os deslocamentos nodais são compostos por duas parcelas: deslocamentos perfeitos ( $U$ ) e uma parcela decorrente de imperfeições iniciais ( $\bar{U}_{imp}$ ), ou seja:

$$U_{RLT} = U + \bar{U}_{imp} \quad (5.23)$$

A partir de então é feito todo o desenvolvimento das formulações para sistemas imperfeitos levando em conta a expressão (5.23), desde o desenvolvimento de expressões para as relações deformação-deslocamento, formulação de matrizes de rigidez até finalmente na formulação da EPT de sistemas imperfeitos ( $V(U + \bar{U}_{imp})$ ), tal como realizado em [24].

No caso de se adotar o RLA, como no presente trabalho, uma específica formulação da EPT para sistemas imperfeitos é dispensável, já que normalmente se utiliza o simples artifício de considerar imperfeições diretamente na geometria da estrutura. Desta forma a influência das imperfeições é transferida desde a primeira configuração de equilíbrio calculada por meio das “deformações imperfeitas” da estrutura.

Dentre as metodologias atualmente utilizadas para imposições de imperfeições em sistemas estruturais discretizados no RLA destacam-se:

- Imposição de imperfeição de carregamento, como já dito anteriormente, trata-se da imposição de pequenas excentricidades no carregamento aplicado na estrutura. Esta metodologia, que também é bastante utilizada na solução de problemas analíticos, tem como desvantagem a necessidade de uma estimativa prévia do comportamento da estrutura, pois a excentricidade deve ser capaz de despertar os modos de instabilidade da estrutura;
- Imposição de imperfeições geométricas aleatórias, nesta metodologia utiliza-se o artifício da aplicação de imperfeições geométricas nas coordenadas nodais dos elementos. Esta metodologia é bastante coerente, já que também são aleatórias as imperfeições ocorridas nas estruturas reais;

- Imposição de imperfeições geométricas modais, que se trata da aplicação de imperfeições geométricas na forma de um determinado modo crítico, ou combinação de modos críticos, nas coordenadas nodais da estrutura perfeita. A principal desvantagem desta metodologia consiste na necessidade da prévia determinação das formas modais da estrutura, o que é conseguido com a solução de um problema de autovalor. Além disso, também possui a desvantagem de necessitar de uma escolha criteriosa dos modos, sendo somente aconselhados modos associados a autovalores positivos;
- Variação do módulo de elasticidade, conhecido como técnica do módulo tangente, esse procedimento consiste na variação do módulo de elasticidade dos elementos de maneira proporcional aos esforços axiais atuantes nos mesmos. Este procedimento é normalmente empregado quando se utiliza análise não-linear física, onde o módulo tangente começa a variar na medida em que certo nível de tensão normal (esforço axial) é atingido individualmente em cada elemento.

Outra maneira de considerar coerentemente pequenas imperfeições geométricas seria com a aplicação de um pequeno deslocamento proveniente da ação de cargas térmicas ou de recalque diferencial em alguns poucos elementos da estrutura. Neste caso, a desvantagem seria a necessidade de realização de uma prévia análise estrutural com uma dessas condições de contorno, portanto somente interessante quando o estudo dessas condições já faz parte do objetivo da análise.

## Capítulo 6

# *Equações de Equilíbrio de Sistemas Estruturais Discretizados no RLA*

Neste capítulo são reapresentadas algumas formulações de equações de equilíbrio de sistemas estruturais discretizados em elementos finitos, que foram inicialmente desenvolvidas por ANTONINI[24] e mais tarde por ALVES[25], sempre utilizando os critérios de energia apresentados nos capítulos anteriores.

Destaca-se que embora sejam mostradas algumas das formulações no RLT nesta pesquisa, os resultados obtidos segundo as mesmas servem apenas como instrumentos de comparação dos resultados obtidos com as formulações no RLA, ou seja, na atual fase de desenvolvimento dessa linha de pesquisa tem-se investido no desenvolvimento e aplicação de formulações no RLA.

### 6.1 Formulação das Equações de Equilíbrio

As equações de equilíbrio são formuladas a partir da aplicação da condição definida em (4.8). Portanto, se um ponto caracterizado pelas variáveis de controle  $(\lambda, U)$  é de equilíbrio o mesmo satisfaz a seguinte condição:

$$\phi^T \cdot \left\{ \left[ (K_\sigma + K_0) + \frac{1}{2} K_1(U) + \frac{1}{6} K_2(U, U) \right] \cdot U - \lambda F \right\} = 0 \quad (6.1)$$

Esta condição (6.1) deve ser atendida para todos os vetores de deslocamentos incrementais não nulos, ou seja,  $\forall \phi \neq 0$ . Portanto, a expressão (6.1) se resume simplesmente na expressão (6.2) a seguir, que corresponde à equação de equilíbrio para sistemas estruturais discretizados:

$$\left[ (K_\sigma + K_0) + \frac{1}{2}K_1(U) + \frac{1}{6}K_2(U,U) \right] \cdot U = \lambda F \quad (6.2)$$

A expressão (6.2) leva em consideração a presença de tensões iniciais por meio da matriz  $K_\sigma$ , caso de se adotar o RLA.

Costuma-se utilizar a seguinte expressão equivalente a (6.2):

$$K_S \cdot U = \lambda F \quad (6.3)$$

onde  $K_S$  é a chamada matriz secante, pois representa a inclinação de uma reta que cruza o ponto da configuração de equilíbrio inicial e o ponto da configuração de equilíbrio incógnita.

Por sua vez, a matriz secante é composta de duas outras parcelas: uma dependente dos deslocamentos e a outra não, sendo respectivamente chamadas de matriz de rigidez tangente ( $K_T$ ) e matriz de rigidez não linear ( $K_{NL}$ ), sendo esta última dependente dos deslocamentos e, portanto, responsável pela não-linearidade algébrica da equação de equilíbrio. Assim, as expressões equivalentes (6.2) e (6.3) podem ainda ser escritas como:

$$(k_T + k_{NL}) \cdot U = \lambda F \quad (6.4)$$

sendo evidentemente,

$$K_T = K_\sigma + K_0 \quad (6.5)$$

$$K_{NL} = \frac{1}{2}K_1(U) + \frac{1}{6}K_2(U,U) \quad (6.6)$$

A matriz de rigidez tangente representa a inclinação de uma reta tangente à trajetória de equilíbrio no ponto conhecido (configuração inicial). Por sua vez, a matriz de rigidez

não-linear representa justamente o erro, ou melhor, a diferença entre as inclinações da reta tangente e da reta secante.

Entretanto, deve-se observar que, ao se adotar o RLT a equação de equilíbrio deve ser modificada, já que não são consideradas tensões iniciais, portanto, a matriz de rigidez tangente no RLT ( $K_T^{RLT}$ ) equivale simplesmente à matriz de rigidez elástica, ou seja,

$$K_T^{RLT} = K_0 \quad (6.7)$$

## 6.2 Equações Incrementais de Equilíbrio

Nesta seção é determinada a equação de equilíbrio incremental para solução com processos iterativos. Para o desenvolvimento da mesma, inicialmente considera-se uma configuração de equilíbrio conhecida, caracterizada pelas variáveis ( $U^E, \lambda^E$ ).

A análise incremental baseia-se em que a partir da configuração de equilíbrio conhecida seja aplicado um incremento de carga ( $\Delta\lambda F$ ), o que naturalmente desencadeará um correspondente acréscimo de deslocamentos ( $\Delta U$ ). Desta maneira a nova configuração de equilíbrio é descrita com a aplicação destes incrementos, a partir da configuração conhecida, na equação geral de equilíbrio (6.4). Deve-se observar que a matriz de rigidez tangente definida em (6.5) não se altera, já que é independente dos deslocamentos, portanto, a equação (6.4) na nova configuração pode ser escrita como:

$$\left[ K_T + \frac{I}{2} K_1 (U^E + \Delta U) + \frac{I}{6} K_2 (U^E + \Delta U, U^E + \Delta U) \right] \cdot (U^E + \Delta U) = (\lambda^E + \Delta\lambda) F \quad (6.8)$$

Separando as parcelas independentes de ( $\Delta U$ ) e aplicando as propriedades das matrizes de rigidez definidas no capítulo 3, após algumas poucas manipulações algébricas, a expressão (6.3) pode finalmente ser escrita como:

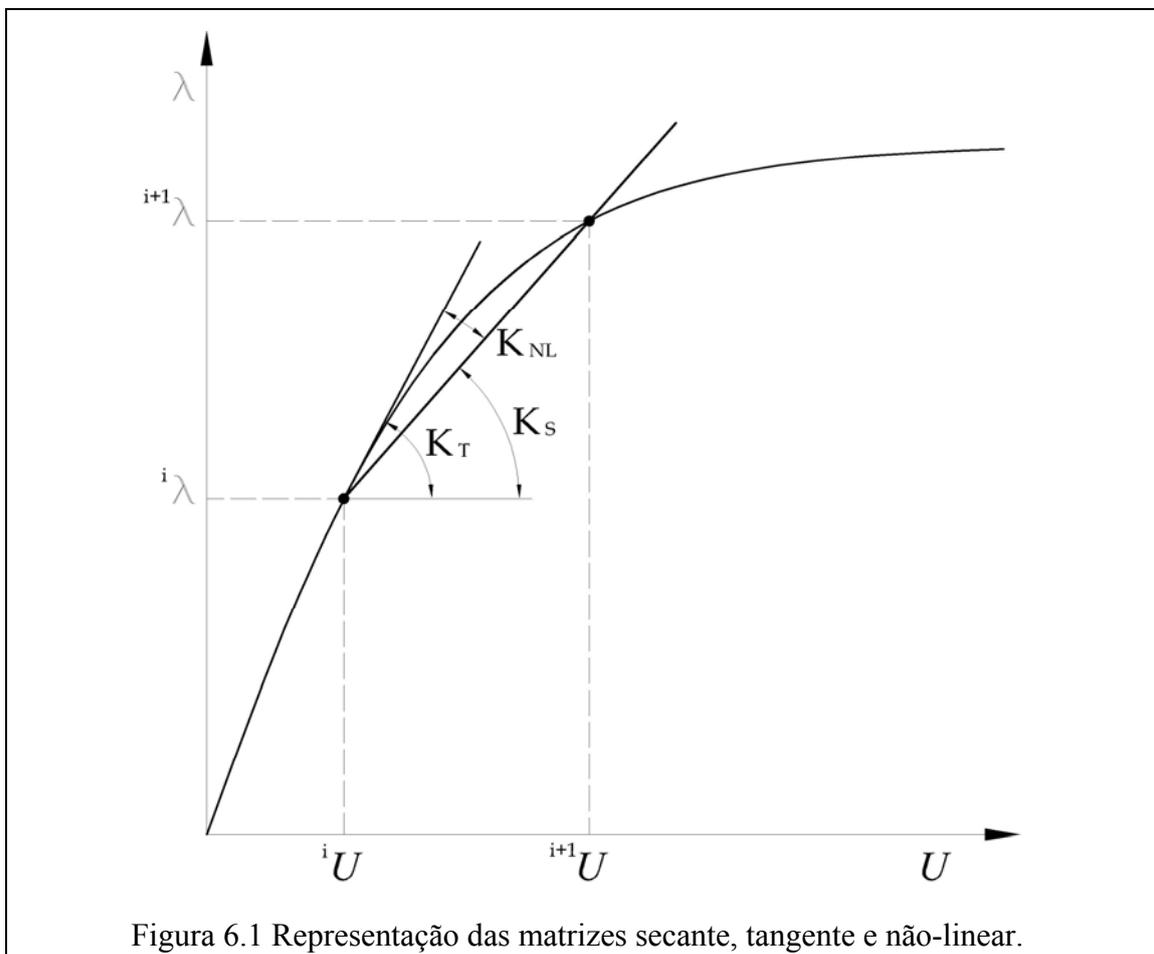
$$K_S^E \Delta U = (K_T^E + K_{NL}^E) \Delta U = \Delta\lambda F \quad (6.9)$$

onde,

$$K_T^E = (K_\sigma + K_0) + K_I(U^E) + \frac{1}{2} K_2(U^E, U^E) \quad (6.10)$$

$$K_{NL}^E = \frac{1}{2} K_1(\Delta U) + \frac{1}{6} K_2(\Delta U, \Delta U) + \frac{1}{2} K_2(\Delta U, U^E) \quad (6.11)$$

Na Figura 6.1 são representadas “geometricamente” as matrizes secante, tangente e não-linear.



Deve-se notar que neste caso o incremento de deslocamento ( $\Delta U$ ) é a variável incógnita que diferencia a matriz de rigidez tangente da matriz de rigidez não-linear, já que os deslocamentos ( $U^E$ ) da configuração de equilíbrio inicial são conhecidos.

No caso de adotar o RLT, os deslocamentos do ponto  $E$  são medidos desde a origem e são desconsideradas as tensões iniciais, resultando na seguinte matriz tangente:

$$K_{T_{RLT}}^E = K_0 + K_1(U^E) + \frac{1}{2}K_2(U^E, U^E) \quad (6.12)$$

Deve-se ressaltar que é possível a obtenção de boas aproximações somente com a utilização da matriz tangente, o que se constitui na chamada análise incremental linearizada. Neste caso, torna-se de grande importância a utilização de técnicas iterativas que corrijam, ou melhor, diminuam os erros que seriam evidentemente propagados.

No caso da análise incremental linearizada os incrementos de deslocamentos ( $\Delta\bar{U}$ ) resultariam de aproximações lineares do incremento de deslocamento  $\Delta U$ , portanto, a expressão (6.9) fica escrita como:

$$\left[ (K_\sigma + K_0) + K_1(U^E) + \frac{1}{2}K_2(U^E, U^E) \right] \Delta\bar{U} = \Delta\lambda F \quad (6.13)$$

Portanto, fica assim demonstrada a equação de equilíbrio incremental linearizada previamente apresentada na expressão (5.1) do capítulo anterior. A vantagem da utilização da equação de equilíbrio incremental linearizada é que na mesma, as matrizes de rigidez  $K_1$  e  $K_2$  são calculadas com os deslocamentos conhecidos ( $U^E$ ), já nas expressões anteriores (6.4) e (6.9) as mesmas ou não seriam utilizadas - no caso da linearização de (6.4) - ou teriam que ser calculadas de maneira iterativa com o próprio deslocamento incógnita do problema.

### 6.2.1 Solução das Equações de Equilíbrio Incrementais Linearizadas

Como dito anteriormente, a solução puramente incremental da expressão (6.13) não é rigorosamente precisa. O procedimento adota para solução puramente incremental consiste sequencialmente em:

- Calcula-se o incremento de carga ( $\Delta\lambda$ );
- Calcula-se a matriz tangente linearizada;

- Calcula-se o incremento de deslocamento que é a solução da equação (6.13), ou melhor,  $\Delta U = (K_T^E)^{-1} \Delta \lambda F$  ;
- Adiciona-se o incremento de deslocamento, ou seja  $U = U^E + \Delta U$  ;
- Atualiza-se o referencial (caso do RLA).

Ainda assim para se obter melhores resultados é necessário utilizar pequenos incrementos de deslocamentos.

Resultados muito melhores podem ser obtidos por meio de técnicas iterativas, em que são avaliados e minimizados os resíduos gerados em cada incremento. Dentre os métodos iterativos mais usados destaca-se o método de Newton-Raphson.

A aplicação do método de Newton-Raphson na solução incremental baseia-se na adoção da matriz de rigidez tangente linearizada como sendo a matriz Jacobiana utilizada nesse método - o que pode ser visto caso se realize a expansão do sistema de equações em série de Taylor, conforme demonstrado e utilizado em [25]. Já o critério de convergência normalmente adotado é um valor máximo (tolerância) para a relação entre a norma euclidiana do vetor resíduo e do vetor de forças aplicadas, sendo o resíduo definido como:

$$R = (\lambda^E + \Delta \lambda) F - K_T^{-1} \cdot U \quad (6.14)$$

Caso se adote o RLA, as atualizações de referencial são feitas ao final de cada incremento.

Contudo a utilização do método anteriormente citado não possibilita a determinação de configurações de equilíbrio instável, devido o constante acréscimo de carga. Para obtenção de pontos de equilíbrio instáveis faz-se necessária a utilização de técnicas de controle do avanço da trajetória, tal como de deslocamentos ou de comprimento de arco.

### 6.3 Equações Assintóticas de Equilíbrio

Conhecida como técnica de perturbação, esta formulação foi primeiramente desenvolvida na COPPE no trabalho de doutorado de ANTONINI [24]. Consiste em uma maneira de determinar o caminho não-linear de um sistema estrutural a partir de uma série que combina parâmetros de perturbação e modos fundamentais, críticos e pós-críticos.

Supondo que seja conhecida uma configuração de equilíbrio caracterizada por  $(\lambda^E, U^E)$ , a partir dessa configuração os deslocamentos  $U$  e o parâmetro de carga  $\lambda$  são escritos de forma paramétrica em termos de série de potência como:

$$U = U^E + \alpha U_1 + \alpha^2 U_2 + \alpha^3 U_3 + \dots + \alpha^n U_n = U^E + \sum_{i=1}^n \alpha^i U_i \quad (6.15)$$

$$\lambda = \lambda^E + \alpha \lambda_1 + \alpha^2 \lambda_2 + \alpha^3 \lambda_3 + \dots + \alpha^n \lambda_n = \lambda^E + \sum_{i=1}^n \alpha^i \lambda_i \quad (6.16)$$

sendo:  $\alpha$  o parâmetro de perturbação usado para medir o avanço ao longo da trajetória de equilíbrio;  $U_i$  as aproximações lineares, quadráticas, cúbicas, etc. dos deslocamentos e  $\lambda_i$  as respectivas magnitudes do carregamento.

Aplicando essas formas paramétricas, pode-se escrever a equação de equilíbrio (6.2) como:

$$\left[ (K_\sigma + K_0) + \frac{I}{2} K_1 \left( U^E + \sum_{i=1}^n \alpha^i U_i \right) + \frac{I}{6} K_2 \left( U^E + \sum_{i=1}^n \alpha^i U_i, U^E + \sum_{i=1}^n \alpha^i U_i \right) \right] \cdot \left( U^E + \sum_{i=1}^n \alpha^i U_i \right) = \left[ \lambda^E + \sum_{i=1}^n \alpha^i \lambda_i \right] \cdot F \quad (6.17)$$

Após a utilização das propriedades das matrizes de rigidez definidas no capítulo 3 e da realização de várias manipulações algébricas a expressões (6.17) poderá ser escrita como:

$$\sum_{i=1}^n \alpha^i \left\{ K_T^E U_i - \lambda_i F + \frac{I}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \left[ \left( K_1(U_j) + K_2(U^E, U_j) + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{I}{3} K_2(U_k, U_{j-k}) \right) U_{i-j} \right] \right\} = 0 \quad (6.18)$$

em que para cada potência do parâmetro  $\alpha$ , tem-se as seguintes equações:

$$\alpha(K_T^E U_1 - \lambda_1 F) = 0 \quad (6.19a)$$

$$\alpha^2(K_T^E U_2 + K_1^* U_2 - \lambda_2 F) = 0 \quad (6.19b)$$

$$\alpha^3(K_T^E U_3 + K_1^* U_2 + K_2^* U_1 - \lambda_3 F) = 0 \quad (6.19c)$$

⋮

$$\alpha^i \left[ K_T^E U_i + \left( \sum_{j=1}^{i-1} K_j^* U_{i-j} \right) - \lambda_i F \right] = 0 \quad (6.20)$$

sendo

$$K_1^* = \frac{1}{2} K_1(U_1) + \frac{1}{2} K_2(U^E, U_1) \quad (6.21a)$$

$$K_2^* = \frac{1}{2} K_1(U_2) + \frac{1}{2} K_2(U^E, U_2) + \frac{1}{6} K_2(U_1, U_1) \quad (6.21b)$$

⋮

$$K_j^* = \frac{1}{2} K_1(U_j) + \frac{1}{2} K_2(U^E, U_j) + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{j-1} K_2(U_k, U_{j-k}) \quad (6.22)$$

Portanto, desta maneira a equação de equilíbrio (6.20) corresponde a uma série de potências em termos do parâmetro de perturbação e deve ser atendida para qualquer número ( $i$ ) de termos considerados. No caso de ser adotado o RLT a matriz tangente ( $K_T^E$ ) não conta com a participação da matriz de tensões iniciais ( $K_\sigma$ ).

### 6.3.1 Solução das Equações Assintóticas de Equilíbrio

Aqui será exposto um procedimento de solução dos sistemas apresentados anteriormente (6.20). Salienta-se que este procedimento foi apresentado primeiramente por ANTONINI [24] e consiste na busca de obtenção de termos ortogonais, e que resultará na solução direta do sistema como a seguir descrito:

A primeira consideração do procedimento é de que o primeiro sistema atenda a seguinte condição de partida,

$$\lambda_1 = 1 \quad (6.23)$$

consequentemente o termo linear para a aproximação assintótica dos deslocamentos é obtido pela simples expressão:

$$U_1 = (K_T^E)^{-1} \cdot F \quad (6.24)$$

Daí em diante, nas demais equações, usa-se uma condição adicional de ortogonalidade, entre os deslocamentos a serem calculados  $U_i$  e os já obtidos  $U_{i-1}$ , segundo a expressão:

$$U_{i-1}^T \cdot K_T^E \cdot U_i = 0 \quad (6.25)$$

Portanto, a expressão corresponde à condição de vetores  $K_T^E$  ortogonais.

A condição (6.25) não garante a ortogonalidade entre todos os vetores, o que seria considerado ideal, entretanto facilita a solução das equações, como será visto adiante.

Assim, utilizando-se esse processo para cada equação formada por  $n$  termos ( $n = 1, 2, \dots, i$ ) é obtido o seguinte sistema formado pelas equações (6.20) e (6.25):

$$\begin{bmatrix} K_T^E & -F \\ (U_{i-1})^T \cdot F_T^E & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ \lambda_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sum_{j=1}^{i-1} K_j^* \cdot U_{i-j} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.26)$$

Observa-se que o sistema (6.26) pode ser facilmente triangularizado ficando na forma:

$$\begin{bmatrix} K_T^E & -F \\ 0 & (U_{i-1})^T \cdot F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ \lambda_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sum_{j=1}^{i-1} K_j^* \cdot U_{i-j} \\ (U_{i-1})^T \cdot \left( \sum_{j=1}^{i-1} K_j^* \cdot U_{i-j} \right) \end{Bmatrix} \quad (6.27)$$

Finalmente, por meio do sistema triangularizado (6.27) as expressões gerais para  $\lambda_i$  e  $U_i$  (incógnitas dos sistemas de equações) são definidas respectivamente nas equações (6.28) e (6.29) a seguir:

$$\lambda_i = \frac{(U_{i-1})^T \cdot \left( \sum_{j=1}^{i-1} K_j^* \cdot U_{i-j} \right)}{(U_{i-1})^T \cdot F} \quad (6.28)$$

$$U_i = (K_T^E)^{-1} \cdot \left( \lambda_i F - \sum_{j=1}^{i-1} K_j^* \cdot U_{i-j} \right) \quad (6.29)$$

Portanto, neste procedimento, após o cálculo do primeiro vetor de deslocamentos ( $U_1$ ) com a expressão (6.24) obtida a partir da condição (6.23), calcula-se a próxima amplitude do carregamento ( $\lambda_2$ ) o que por sua vez possibilitará o cálculo do segundo vetor de deslocamentos ( $U_2$ ) e assim sucessivamente até o cálculo de todas as incógnitas do sistema ( $\lambda_i, U_i$ ). O último passo do procedimento, para obtenção das aproximações, consiste no cálculo das séries definidas em (6.15) e (6.16). Interessante notar que, neste procedimento não se utilizam métodos iterativos, já que as incógnitas são obtidas sequencialmente num sistema de equações determinado.

## 6.4 Formulação das Equações Modais de Equilíbrio

A partir de modos de deformações pré-determinados, normalizados e linearmente independentes, obtidos quer seja pela resolução do problema de autovalor (modos críticos), ou com expansões assintóticas (modos assintóticos), ou com a decomposição espectral da matriz de rigidez tangente ou de outra origem, pretende-se estabelecer uma combinação linear dos mesmos de maneira a chegar a uma aproximação de deslocamentos.

Assim a aproximação para os deslocamentos aqui desenvolvida é dada pela seguinte combinação proposta em [97], que se constitui em uma variação da proposta por Antonini [24] que por sua vez foi baseada nos trabalhos apresentados por CARNOY [74] e [75]:

$$U = a_i \cdot \varphi_i \quad (6.30)$$

onde,  $a_i$  são as amplitudes dos modos e  $\varphi_i$  são os respectivos modos linearmente independentes e normalizados, portanto, formam uma base – essa propriedade é de fundamental importância para a solução das equações que aqui serão definidas, conforme evidenciado mais adiante.

Com essa aproximação de deslocamentos, pode-se obter uma nova expressão para a EPT de sistemas discretos, chamada de Energia Potencial Total Reduzida (EPTR). Assim, substituindo a aproximação de deslocamentos (6.30) em (3.58) e obedecendo a regra de repetição indicial se obtém:

$$V^* = a_i \varphi_i^T \cdot \left\{ \left[ \frac{1}{2} (K_\sigma + K_o) + \frac{1}{6} K_1 (a_j \varphi_j) + \frac{1}{24} K_2 (a_j \varphi_j, a_k \varphi_k) \right] \cdot a_l \varphi_l - \lambda F \right\} \quad (6.31)$$

em que  $i, j, k, l = 1, 2, \dots$ , número de modos.

Aplicando as propriedades das matrizes de rigidez, e respeitando a regra de multiplicidade de índices, a equação (6.31) pode ser facilmente escrita como:

$$V^* = \frac{I}{2} a_i a_j \varphi_i^T \cdot (K_\sigma + K_0) \cdot \varphi_j + \frac{I}{6} a_i a_j a_k \left[ \varphi_i^T \cdot K_1(\varphi_j) \cdot \varphi_k \right] + \frac{I}{24} a_i a_j a_k a_l \left[ \varphi_i^T \cdot K_2(\varphi_j, \varphi_k) \cdot \varphi_l \right] - \lambda a_i (\varphi_i^T \cdot F) \quad (6.32)$$

Agora extremizando a EPTR em relação às amplitudes modais obtém-se a equação de equilíbrio modal:

$$\frac{\partial V^*}{\partial a_i} = a_j \varphi_i^T \cdot (K_\sigma + K_0) \cdot \varphi_j + \frac{I}{2} a_j a_k \left[ \varphi_i^T \cdot K_1(\varphi_j) \cdot \varphi_k \right] + \frac{I}{6} a_j a_k a_l \left[ \varphi_i^T \cdot K_2(\varphi_j, \varphi_k) \cdot \varphi_l \right] - \lambda (\varphi_i^T \cdot F) = 0 \quad (6.33)$$

Nos trabalho anteriores ([24],[25], [96], [97]) desta linha de pesquisa do PEC, normalmente a equação de equilíbrio modal é escrita em termos de parâmetros como:

$$h_i(a, \lambda) = a_j (A_{ij}^\sigma + A_{ij}^0) + \frac{1}{2} a_j a_k B_{ijk} + \frac{1}{6} a_j a_k a_l C_{ijkl} - \lambda D_i = 0 \quad (6.34)$$

sendo neste caso,

$$A_{ij}^\sigma = \varphi_i^T \cdot K_\sigma \cdot \varphi_j \quad (6.35)$$

$$A_{ij}^0 = \varphi_i^T \cdot K_0 \cdot \varphi_j \quad (6.36)$$

$$B_{ijk} = \varphi_i^T \cdot K_1(\varphi_j) \cdot \varphi_k \quad (6.37)$$

$$C_{ijkl} = \varphi_i^T \cdot K_2(\varphi_j, \varphi_k) \cdot \varphi_l \quad (6.38)$$

$$D_i = \varphi_i^T \cdot F \quad (6.39)$$

$$a_n = (a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n)^T \quad (6.40)$$

Portanto, utilizando-se o nível de carga ( $\lambda$ ) como parâmetro de controle, as equações de equilíbrio fornecem as amplitudes dos modos ( $a$ ). São ainda observadas as seguintes características de simetria para os parâmetros modais definidos em (6.35) a (6.38):

$$A_{ij}^\sigma = A_{ji}^\sigma \quad (6.41)$$

$$A_{ij}^0 = A_{ji}^0 \quad (6.42)$$

$$B_{ijk} = B_{ikj} = B_{jik} = B_{jki} = B_{kij} = B_{kji} \quad (6.43)$$

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} = C_{ikjl} = \dots = C_{lkji} \quad (6.44)$$

Estas características surgem como conseqüência das propriedades das matrizes de rigidez. Nota-se facilmente a importância dessas características, pois reduzem significativamente os esforços para cálculo dos termos na medida em que o número de modos aumenta.

A equação de equilíbrio no RLT pode ser obtida simplesmente com a retirada do termo correspondente à matriz de rigidez de tensões iniciais e assim tem-se:

$$h_i(a, \lambda)_{RLT} = a_j A_{ij}^0 + \frac{1}{2} a_j a_k B_{ijk} + \frac{1}{6} a_j a_k a_l C_{ijkl} - \lambda D_i = 0 \quad (6.45)$$

Neste caso, durante o processo de solução não é feita a atualização de referencial.

Ressalta-se ainda que os últimos resultados apresentados por ALVES [97] com a análise assintótica modal foram obtidos com a utilização de sistemas de equações no RLT e os parâmetros modais foram formados com matrizes definidas a partir de um truncamento do tensor de Green-Lagrange. Além disso, eram considerados somente modos assintóticos em número limitado, já que na prática poucos modos assintóticos são linearmente independentes e conseqüentemente resultando também em poucos modos ortogonais.

#### 6.4.1 Escolha da Base para Análise Assintótica Modal

Como mencionado anteriormente, o fundamento da análise assintótica modal é de que os deslocamentos possam ser aproximados por combinações de modos ortogonais

normalizados (vetores ortonormais), portanto, pressupõe-se a utilização de uma base ortonormal na combinação modal.

Caso sejam utilizados modos assintóticos, termos  $U_i$  definidos em (6.29), na combinação modal, faz-se necessária a verificação da dependência linear dos mesmos, já que como visto anteriormente a partir da expressão (6.25) não há qualquer garantia da independência linear dos pares de modos não imediatamente consecutivos, ou seja, não se pode afirmar que  $U_i$  é ortogonal a  $U_k$  para  $k > i+1$ , sendo  $i = 1, 2, \dots, n - \text{modos}$ .

Além disso, caso seja considerada uma combinação de modos assintóticos com outras formas modais, mesmo que estas sejam advindas de um problema de autovalor, faz-se necessária a determinação e seleção dos modos que são linearmente independentes (LI) nesse conjunto de vetores. Neste trabalho propõe-se exatamente isto: uso de uma combinação de modos assintóticos e de modos críticos advindos respectivamente das expansões em série de potência e de um problema de autovalor.

Quanto ao problema de autovalor adotado, neste trabalho opta-se pelo problema de autovalor consistente no RLT, por dois motivos:

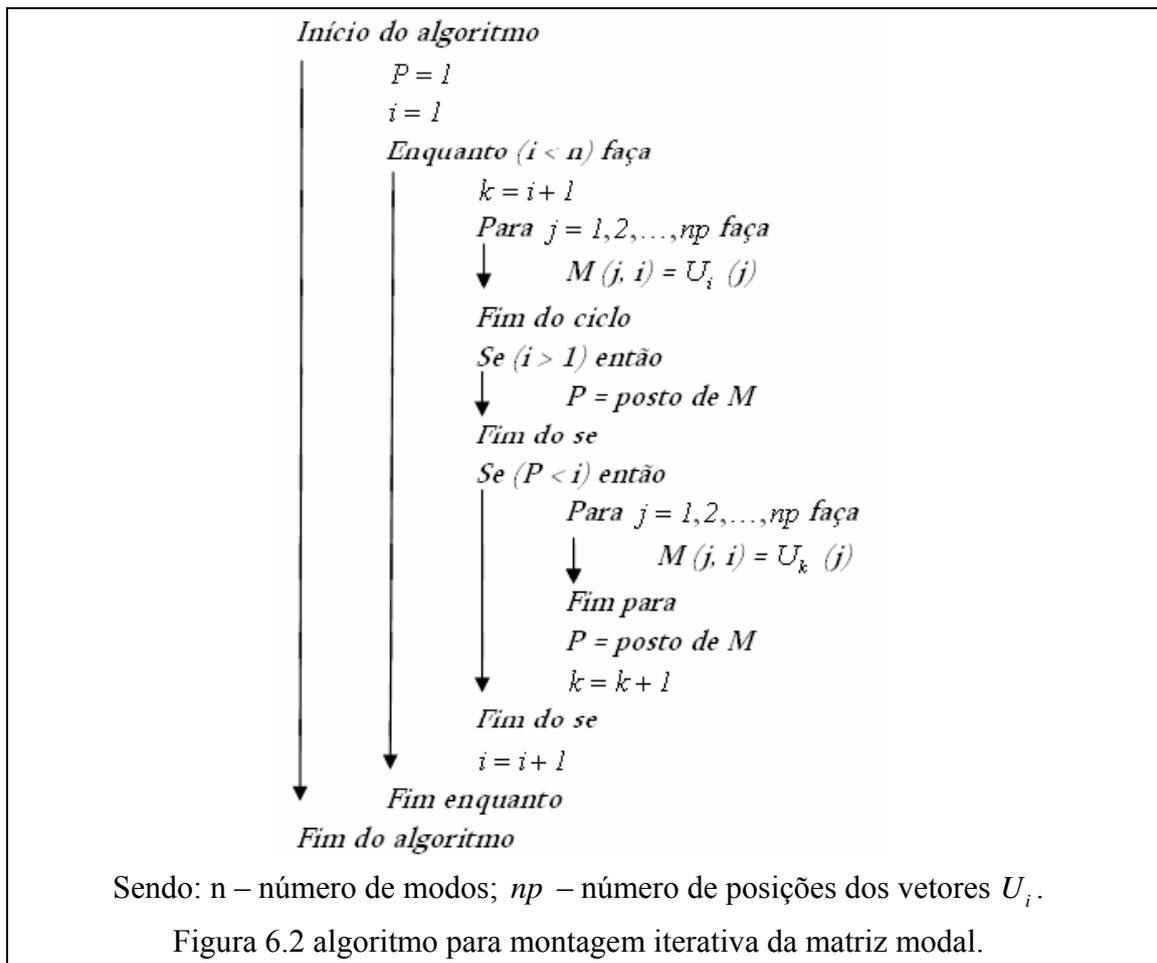
- O referido problema de autovalor fornece melhores aproximações que o problema clássico para estruturas com comportamento pré-crítico não-linear, já que a matriz  $K_l$ , que é dependente de deslocamentos, melhor considera as contribuições de esforços de flexão que a matriz  $K_\sigma$  e, portanto, podendo resultar em modos mais significativos;
- O custo computacional para solução do problema de autovalor no RLA é maior, além disso, o que aqui são almejadas são as formas modais e não a precisão na estimativa do valor da carga crítica.

Uma maneira de verificar a dependência linear desse conjunto de vetores, a ser utilizado nas análises assintóticas modais, se dá por meio do cálculo do posto da matriz composta pelo mesmo com os vetores dispostos em coluna ou linha (aqui chamada de matriz modal). Neste caso o valor do posto da matriz modal corresponde ao número de vetores

LI dessa matriz. Este método de determinação do número de vetores LI tem como desvantagem a não identificação dos respectivos vetores.

Uma forma de contornar este problema se dá pela construção iterativa da matriz modal, ou seja, primeiramente a mesma é constituída de dois vetores e então é feita a verificação do valor do seu posto, caso este seja igual ao número de vetores acrescenta-se mais um vetor na matriz e recalcula-se o posto e assim sucessivamente. Caso o posto seja menor que o número de vetores da matriz modal, o último vetor é substituído pelo próximo da sequência até que todos os vetores tenham sido analisados. Recomenda-se o procedimento da prévia normalização de todos os vetores a serem analisados, de maneira que os mesmos não apresentem ordens de grandeza muito diferenciadas.

A seguir é apresentado, na Figura 6.2, o algoritmo de montagem iterativa da matriz modal  $M$  com os vetores  $U_i$  linearmente independentes, previamente normalizados, dispostos em suas colunas:



Deve-se notar que, como o valor máximo do posto de uma matriz de dimensão  $m \times n$  é o menor valor entre o número de linhas e o número colunas da mesma e, sendo a quantidade de vetores menor que o número de posições (graus de liberdade) destes vetores, fica garantido que o posto da matriz  $M$  será no máximo igual ao número de vetores (formas modais) considerados.

#### 6.4.1.1 Cálculo do Posto da Matriz Modal

O cálculo do posto da matriz modal ( $M$ ) pode ser feito contando o número de linhas não nulas de sua forma escada. Outra maneira, inclusive numericamente mais precisa, dá-se por meio da decomposição da mesma em valores singulares.

A decomposição em valores singulares de uma matriz  $M$  de dimensão  $m \times n$  consiste em fatorá-la no produto  $USV^T$ . O posto da matriz  $M$  é igual ao número de valores singulares não nulos dessa decomposição, os quais estão presentes na diagonal principal da matriz  $S$ . As matrizes  $U$  e  $V$  são matrizes quadradas ortogonais e de ordem  $m \times m$  e  $n \times n$ , respectivamente. A matriz  $S$  possui apenas os valores singulares da matriz  $M$ , os quais são dispostos ordenadamente em sua diagonal principal, ou seja,

$$S = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_n \end{pmatrix}, \text{ Com } \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n \geq 0 \quad (6.46)$$

A decomposição em valores singulares da matriz  $M$  de ordem  $m \times n$  possui, dentre outras, as seguintes características demonstradas na literatura (e.g. LAY[114] e LEON[115]):

- Os valores singulares de  $M$  são calculados como:  $\mu_j = \sqrt{\lambda_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , sendo  $\lambda_j$  os autovalores da matriz  $M^T M$ ;
- Os valores singulares de  $M$   $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$  são únicos, portanto a matriz  $S$  é única. Toda via não ocorre o mesmo com as matrizes  $U$  e  $V$ ;

- A matriz  $V$  diagonaliza a matriz  $M^T M$  ;
- Como  $V$  diagonaliza  $M^T M$  , os elementos  $v_j$  são autovetores de  $M^T M$  ;
- $MM^T = USS^T U^T$  , o que implica que  $U$  diagonaliza  $MM^T$  e conseqüentemente os  $u_j$  são autovetores de  $MM^T$  ;
- Os  $v_j$  e  $u_j$  são chamados respectivamente de valores singulares à direita e à esquerda da matriz modal  $M$ .

Portanto, a determinação do posto da matriz modal  $M$  é feita por meio do cálculo dos autovalores da matriz  $M^T M$  . Uma vez determinados os vetores  $U_i$  que são LI, por meio da decomposição da matriz modal em valores singulares, o passo seguinte é a ortogonalização dos mesmos, o que pode ser feito com o emprego dos processos de Gram-Schmidt, tal como a seguir descritos.

#### 6.4.1.2 Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

O processo de Gram-Schmidt consiste na ortonormalização de um conjunto de vetores LI  $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$  pertencentes a um espaço  $S$  de dimensão  $n$  munido de produto interno. O processo utiliza projeções ortogonais para construção de uma base ortonormal.

Considerando que  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$  é a base ortonormal de  $S$  que se queira construir a partir da base  $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$  de  $S$  . A projeção ortogonal  $P_i$  do vetor  $\varphi_{i+1}$  com  $i = 1, 2, \dots, n$  sobre a base  $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$  é definida como:

$$P_i = \langle \varphi_{i+1}, U_1 \rangle U_1 + \langle \varphi_{i+1}, U_2 \rangle U_2 + \dots + \langle \varphi_{i+1}, U_i \rangle U_i \quad (6.47)$$

O primeiro vetor da base ortonormal  $\varphi_1$  é definido como:

$$\varphi_1 = \left( \frac{1}{\|U_1\|} \right) U_1, \quad (6.48)$$

Os demais vetores por sua vez são:

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \left( \frac{1}{\|U_2 - p_1\|} \right) (U_2 - p_1) \\ \varphi_3 &= \left( \frac{1}{\|U_3 - p_2\|} \right) (U_3 - p_2) \\ &\vdots \\ \varphi_{i+1} &= \left( \frac{1}{\|U_{i+1} - p_i\|} \right) (U_{i+1} - p_i) \text{ para } i = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (6.49)$$

Desta maneira a base ortonormal formada pelo conjunto de vetores  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$  foi construída a partir da base  $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$  do espaço  $S$  de dimensão  $n$ .

#### 6.4.1.3 Processo de Gram-Schmidt Modificado

O processo anteriormente apresentado possui o inconveniente de ser impreciso quando computacionalmente aplicado, e os erros gerados podem resultar na perda de ortogonalidade dos vetores  $\varphi_i$ . Uma alternativa para contornar este problema dá-se por meio de uma modificação nos vetores  $U_i$  para  $i = 2, 3, \dots, n$ . O primeiro vetor  $\varphi_1$  é calculado igualmente ao processo original de Gram-Schmidt, ou seja,

$$\varphi_1 = \left( \frac{1}{\|U_1\|} \right) U_1 \quad (6.50)$$

Agora subtraindo dos vetores  $U_i$  a respectiva projeção do mesmo sobre  $\varphi_1$  e utilizando a notação  $^{(k)}U_i$  para a  $k$ -ésima modificação do vetor  $U_i$ , tem-se:

$${}^1U_i = U_i - (\varphi_1^T U_i) U_1 \text{ com } i = 2, 3, \dots, n \quad (6.51)$$

Daí são definidos:

$$\varphi_2 = \left( \frac{I}{\|{}^{(1)}U_2\|} \right) {}^{(1)}U_2 \quad (6.52)$$

Agora ortogonalizando  $U_i$  em relação ao vetor  $\varphi_2$ , tem-se:

$${}^2U_i = {}^1U_i - (\varphi_2^T {}^1U_i) \varphi_2 \text{ com } i = 3, 4, \dots, n \quad (6.53)$$

Repetindo o processo tem-se até o último passo:

$$\varphi_n = \left( \frac{I}{\|{}^{(n-1)}U_n\|} \right) {}^{(n-1)}U_n \quad (6.54)$$

A seguir, na Figura 6.3 apresenta-se o algoritmo do processo de Gram-Schmidt Modificado, que determina a base ortonormal  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$  a partir dos vetores LI  $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$  do espaço vetorial  $S$  de dimensão  $n$  (LEON [115]).

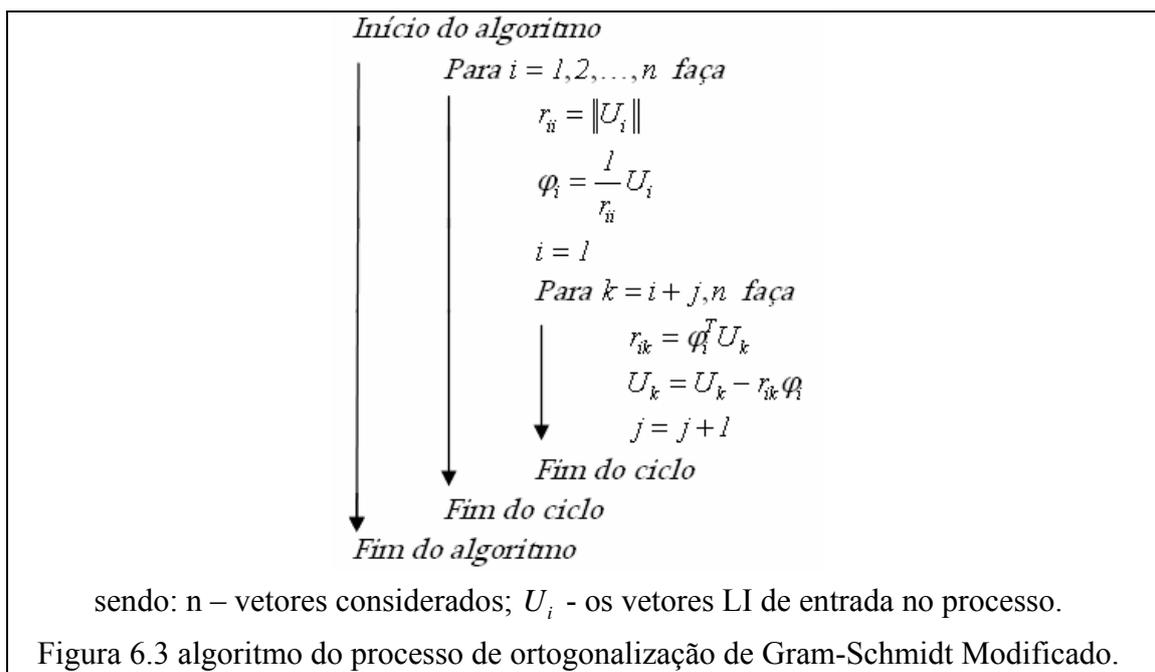


Figura 6.3 algoritmo do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt Modificado.

Pode-se perceber que o processo de Gram-Schmidt aqui exposto é simples e resulta numa base ortonormal determinada a partir de uma base não ortogonal de vetores. Portanto, seu uso é conveniente na determinação de uma base vetorial para a análise modal assintótica, inclusive com vetores de diferentes origens - como proposto neste trabalho com a utilização de combinação mista de modos assintóticos e modos críticos - desde que haja garantia de serem LI.

Já os vetores (modos) linearmente independentes podem ser determinados através do posto da matriz modal, o qual é calculado com a decomposição da referida matriz em valores singulares, tal como descrito anteriormente. Assim, a base ortonormal para análise modal assintótica terá dimensão igual ao número de vetores (modos) LI, determinados segundo o critério de seleção aqui apresentado.

O processo de determinação da base para análise modal exposto nesta sessão constitui-se numa inovação nesta linha de pesquisa. Nos trabalhos anteriores, ou não era assegurada a ortonormalidade dos modos usados na combinação modal (trabalho de Antonini [24]), ou a combinação era limitada a pouquíssimos modos assintóticos, já que não era utilizada uma maneira eficaz de seleção dos modos a serem ortonormalizados.

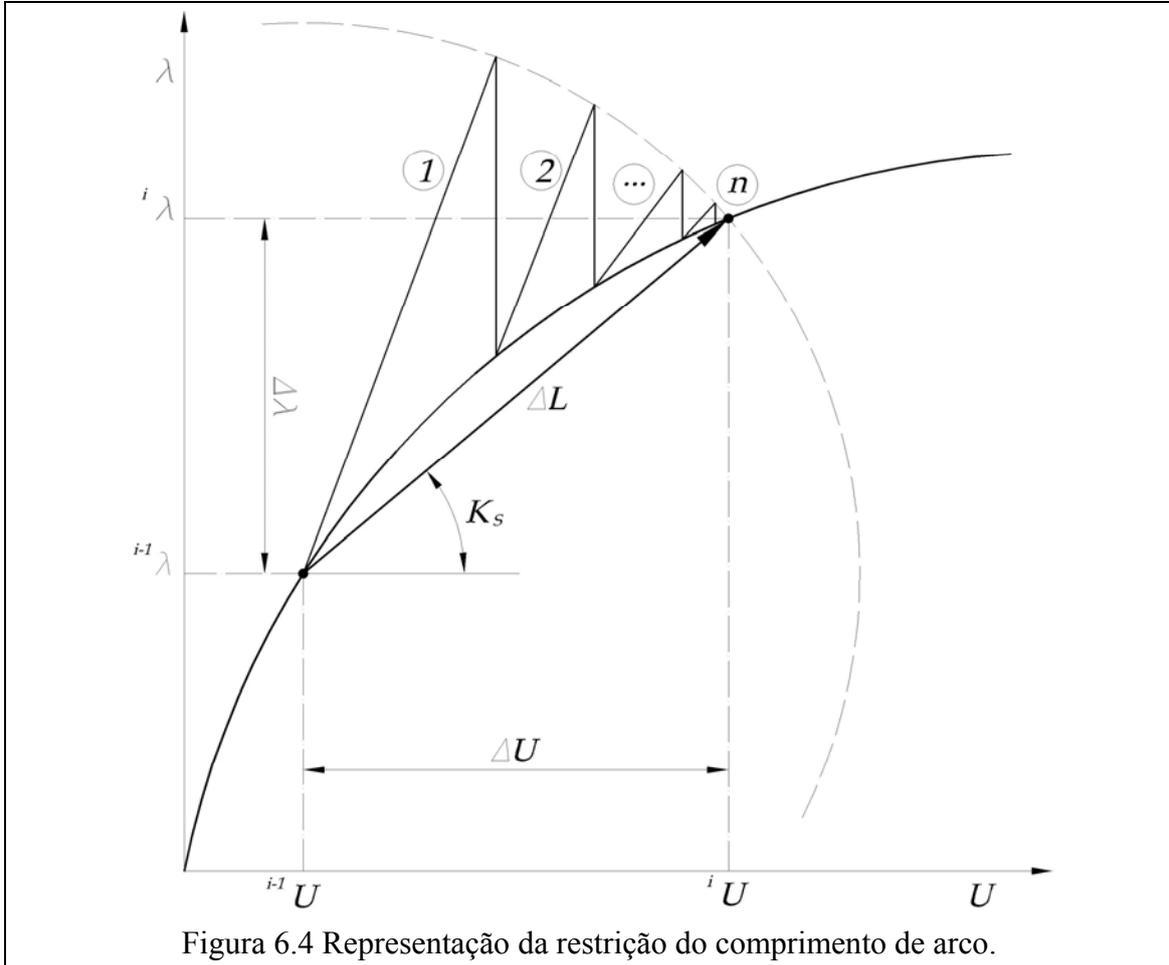
#### *6.4.2 Solução das Equações Modais de Equilíbrio no RLA*

Geralmente são empregados métodos iterativos para solução de sistemas não-lineares, sendo os de Newton-Raphson (método padrão ou método modificado) os mais empregados em análise estrutural.

Nesta seção são descritas as equações relativas à aplicação do Método de Newton-Raphson associado à técnica de controle do comprimento de arco para solução do sistema não-linear formado pelas equações modais de maneira a determinar o completo traçado das trajetórias de equilíbrio de sistemas estruturais.

Ressalta-se que ao se adotar como condição adicional a restrição do comprimento de arco ( $\Delta L$ ), obtém-se uma equação a mais e assim todas as amplitudes juntamente com a intensidade do carregamento são tomadas como incógnitas. Na Figura 6.4 é feita uma representação da técnica do controle de comprimento de arco, que a rigor representa o comprimento da corda do arco. Na referida figura, a curva tracejada representa o espaço

de busca da solução  $({}^iU, {}^i\lambda)$ , que é definida pelo comprimento  $\Delta L$  e os números  $(1, 2, \dots, n)$  representam as iterações.



Por relação geométrica, e lembrando que os deslocamentos  $U$  são grandezas vetoriais e  $\lambda$  escalares, tem-se a seguinte expressão:

$$\Delta L^2 = \Delta \lambda^2 + \Delta U^T \cdot \Delta U \quad (6.55)$$

onde,

$$\Delta U = {}^iU - {}^{i-1}U = ({}^i a_n \cdot \varphi_n) - ({}^{i-1} a_n \cdot \varphi_n) = ({}^i a_n - {}^{i-1} a_n) \varphi_n \quad (6.56)$$

$$\Delta \lambda = ({}^i \lambda_1 - {}^{i-1} \lambda_1)^2 + ({}^i \lambda_2 - {}^{i-1} \lambda_2)^2 + \dots + ({}^i \lambda_n - {}^{i-1} \lambda_n)^2 \quad (6.57)$$

como os modos são ortonormalizados, tem-se:

$$\Delta U^T . \Delta U = \left( {}^i a_i - {}^{i-1} a_i \right) \varphi_i^T \left( {}^i a_j - {}^{i-1} a_j \right) \varphi_j = \left( {}^i a_i - {}^{i-1} a_i \right) \left( {}^i a_j - {}^{i-1} a_j \right) \delta_{ij} \quad (6.58)$$

ou,

$$\Delta U^T . \Delta U = \left( {}^i a_1 - {}^{i-1} a_1 \right)^2 + \left( {}^i a_2 - {}^{i-1} a_2 \right)^2 \cdots + \left( {}^i a_n - {}^{i-1} a_n \right)^2 \quad (6.59)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o Delta de Kronecker.

Substituindo (6.59) e (6.57) em (6.55) obtém-se a condição de restrição de comprimento de arco constante, que é escrita como:

$$C = \sum_{n=1}^N \left( {}^i \lambda_n - {}^{i-1} \lambda_n \right)^2 + \sum_{n=1}^N \left( {}^i a_n - {}^{i-1} a_n \right)^2 - \Delta L^2 = 0 \quad (6.60)$$

Outra forma mais simples e de melhor convergência do método do controle de arco é o chamado de controle de arco cilíndrico o qual é simplesmente escrito como a seguir:

$$\Delta L^2 = \Delta U^T . \Delta U \quad (6.61)$$

Neste caso a equação de restrição se resume em:

$$C = \sum_{n=1}^N \left( {}^i a_n - {}^{i-1} a_n \right)^2 - \Delta L^2 = 0 \quad (6.62)$$

Portanto, uma forma de se ter o completo caminho de equilíbrio, no Método Iterativo de Newton-Raphson, dá-se com a restrição do comprimento de arco e assim o sistema não-linear na forma modal além de ser composto pelas equações de equilíbrio (6.34), ainda deve conter adicionalmente a restrição definida em (6.60) ou (6.62).

Para aplicação do Método de Newton-Raphson na análise incremental/iterativa utiliza-se a matriz de rigidez tangente como sendo a Matriz Jacobiana do sistema. No caso de utilização do sistema modal, a Matriz Jacobiana é definida a partir das derivadas das

equações de equilíbrio (modais e de restrição do comprimento de arco) em relação às amplitudes modais e ainda do parâmetro de força (no caso da equação de restrição do comprimento de arco). Portanto, a lei de formação da Matriz Jacobiana ( $\nabla$ ) fica:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial a_1} & \frac{\partial h_1}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial a_n} & \frac{\partial h_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial h_2}{\partial a_1} & \frac{\partial h_2}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial h_2}{\partial a_n} & \frac{\partial h_2}{\partial \lambda} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial a_1} & \frac{\partial h_n}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial a_n} & \frac{\partial h_n}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial C}{\partial a_1} & \frac{\partial C}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial C}{\partial a_n} & \frac{\partial C}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \quad (6.63)$$

onde as derivadas parciais são:

$$\frac{\partial h_i}{\partial a_j} = (A_{ij}^\sigma + A_{ij}^0) + a_k B_{ijk} + \frac{1}{2} a_k a_l C_{ijkl} \quad (6.64)$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial \lambda} = -D_i \quad (6.65)$$

$$\frac{\partial C}{\partial a_j} = 2({}^i a_j - {}^{i-1} a_j) \quad (6.66)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \lambda} = 2({}^i \lambda_j - {}^{i-1} \lambda_j) \quad (6.67)$$

Caso seja utilizada a expressão (6.62) para a restrição do comprimento de arco, a última expressão (6.67) será nula.

Fica assim definido o sistema de equações e a Matriz Jacobiana para aplicação do método de Newton-Raphson na solução assintótica modal.

## Capítulo 7

### *Matrizes de Rigidez de Elementos de Pórtico*

Como visto no capítulo anterior, o comportamento não-linear de estruturas esbeltas é regido por um sistema algébrico de equações, chamadas equações de equilíbrio e de estabilidade. Estas equações são formadas por matrizes de rigidez ( $K_\sigma, K_0, K_1, K_2$ ) e pelos vetores de força e de deslocamento, sendo o primeiro as ações previamente conhecidas atuantes na estrutura e o último a incógnita do problema. Também foi observado que as referidas matrizes de rigidez, que surgem quando as parcelas da energia de deformação são escritas matricialmente, são expressas em termos de até a quarta ordem dos deslocamentos, ou seja, os deslocamentos são os responsáveis pela não-linearidade do sistema algébrico. Para que o problema seja resolvido, observa-se a necessidade da determinação das matrizes de rigidez, conforme realizado oportunamente neste capítulo.

Para determinação das matrizes de rigidez do sistema estrutural discretizado, pode-se utilizar um dos dois distintos caminhos apresentados no capítulo 3: a) por meio do Método do Deslocamento Unitário, derivado do Princípio do Trabalho Virtual, com cálculo das integrais definidas nas expressões (3.39) a (3.42); b) por meio da energia de deformação com aplicação do Primeiro Teorema de Castigliano que recai no cálculo das derivadas parciais das parcelas da energia de deformação do elemento, conforme as expressões (3.34) a (3.37).

Neste trabalho o cálculo das matrizes de rigidez é feito por meio das derivadas das parcelas da energia de deformação do elemento (aplicação do Primeiro Teorema de Castigliano), pois dessa maneira todas as matrizes são calculadas sem prévios cálculos algébricos além das respectivas parcelas da energia de deformação, diferentemente do

que ocorre quando se determina a matriz de tensões iniciais usando o cálculo por integração resultante do Método do Deslocamento Unitário.

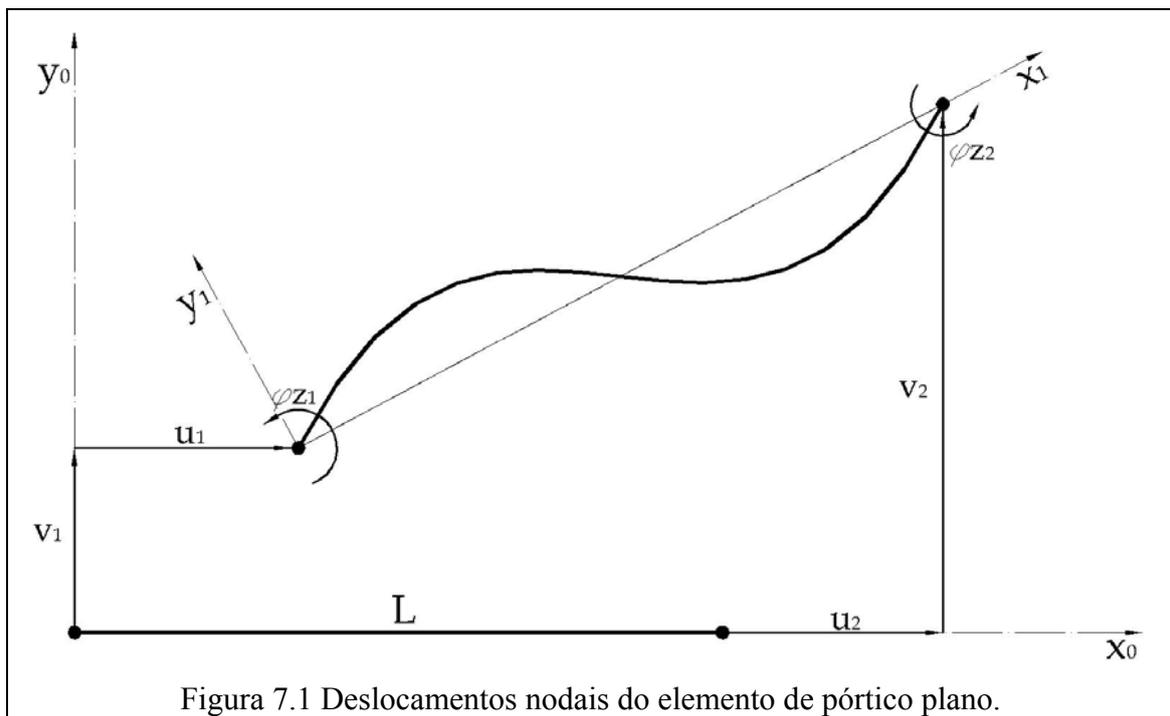
Nos subitens a seguir são determinadas as matrizes de rigidez de elementos de pórticos planos e tridimensionais, ou espaciais, sob ação de cargas nodais.

## 7.1 Matrizes de Rigidez do Elemento de Pórtico Plano

### 7.1.1 Funções de Interpolação para Elementos de Pórticos Planos

Os graus de liberdade para elementos de pórticos planos são os definidos em (7.1), conforme os possíveis deslocamentos nodais, em relação a uma configuração inicial, representados na Figura 7.1.

$$U^{nT} = (u_1 \quad v_1 \quad \varphi_{z1} \quad u_2 \quad v_2 \quad \varphi_{z2}) \quad (7.1)$$



Em busca de funções de interpolação para os deslocamentos nodais de um elemento de pórtico plano são verificadas as seguintes condições de fronteira a serem atendidas:

Para as translações na direção  $x$ :

$$u(x=0) = u_1 \quad (7.2)$$

$$u(x=L) = u_2 \quad (7.3)$$

Para as translações na direção  $y$  e rotações no plano  $xy$ :

$$v(x=0) = v_1 \quad (7.4)$$

$$v(x=L) = v_2 \quad (7.5)$$

$$v'(x=0) = \varphi_{z1} \quad (7.6)$$

$$v'(x=L) = \varphi_{z2} \quad (7.7)$$

Adotando funções polinomiais pode-se facilmente perceber que para os deslocamentos  $u$  e  $v$  polinômios de primeira e de terceira ordem, como a seguir escritos, atendem as condições anteriores:

$$u(x) = a_0 + a_1 x \quad (7.8)$$

$$v(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \quad (7.9)$$

Aplicando as condições (7.2) e (7.3) em (7.8) e (7.4) a (7.7) em (7.9) e resolvendo os sistemas de equações daí gerados são obtidas as seguintes soluções para as constantes dos polinômios:

Constantes da função  $u(x)$  :

$$a_0 = u_1 \quad (7.10)$$

$$a_1 = \frac{(u_2 - u_1)}{L} \quad (7.11)$$

Constantes da função  $v(x)$  :

$$b_0 = v_1 \quad (7.12)$$

$$b_1 = \varphi_{z1} \quad (7.13)$$

$$b_2 = \frac{(3\varphi_{z0} - 2\varphi_{z1} - \varphi_{z2})}{L} \quad (7.14)$$

$$b_3 = -\frac{(2\varphi_{z0} - \varphi_{z1} - \varphi_{z2})}{L^2} \quad (7.15)$$

sendo o deslocamento rotacional da corda no plano xy ( $\varphi_{z0}$ ) presente nas expressões (7.14) e (7.15) definido como:

$$\varphi_{z0} = \frac{(v_2 - v_1)}{L} \quad (7.16)$$

Ou seja, têm-se as seguintes funções polinomiais para interpolação dos deslocamentos nodais de um elemento de pórtico plano:

$$u(x) = u_1 + \frac{(u_2 - u_1)}{L} x \quad (7.17)$$

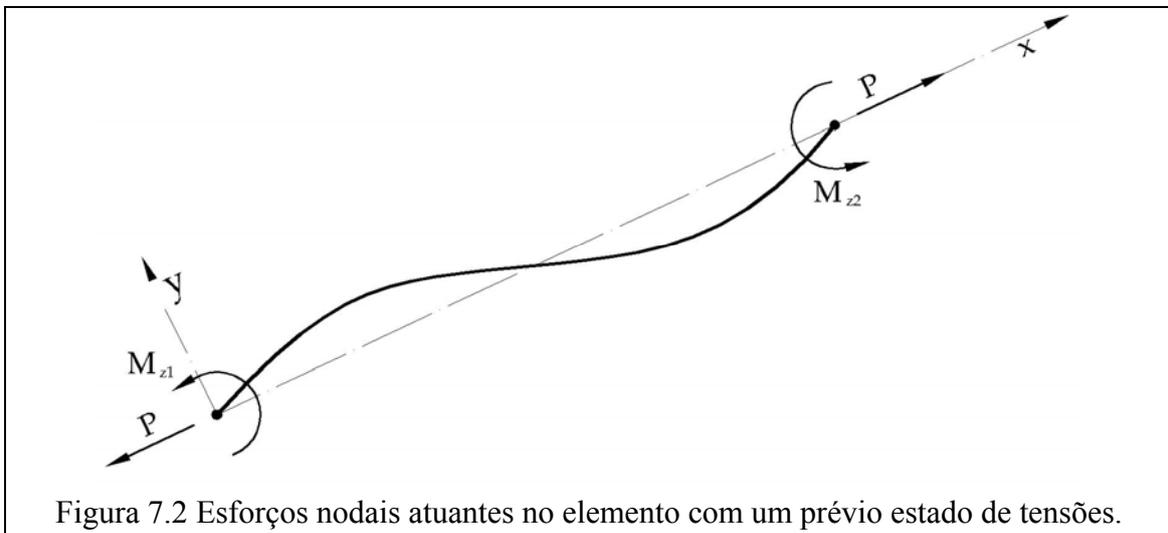
$$v(x) = v_1 + \varphi_{z1} x + \frac{(3\varphi_{z0} - 2\varphi_{z1} - \varphi_{z2})}{L} x^2 - \frac{(2\varphi_{z0} - \varphi_{z1} - \varphi_{z2})}{L^2} x^3 \quad (7.18)$$

Ressalta-se que embora o polinômio para a interpolação de deslocamentos nodais  $u$  do elemento, expresso em (7.17), atenda as condições de fronteira e forneça boas

aproximações, o mesmo não é exato, já que corresponde a uma função linear e os deslocamentos são, a rigor, não-lineares (ver Figura 7.1). Uma maneira de reduzir satisfatoriamente o erro gerado com o uso do referido polinômio consiste no aumento da discretização do modelo, que é o procedimento adotado neste trabalho.

### 7.1.2 Deformações em Elementos de Pórticos Planos

A partir dos esforços nodais (ver Figura 7.2) de um elemento de pórtico plano, calcula-se as parcelas de deformação do tensor de Green no RLA  $\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  como:



O estado inicial de deformação ( $\varepsilon_0$ ) é composto pelas parcelas:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{\text{extensional}} + \varepsilon_{\text{flexão}} \quad (7.19)$$

Que de acordo com a teoria da elasticidade são definidas como:

$$\varepsilon_{\text{extensional}} = \frac{P}{EA} \quad (7.20)$$

$$\varepsilon_{\text{flexão}}(x, y) = -\frac{M_z(x)}{EI_z} y \quad (7.21)$$

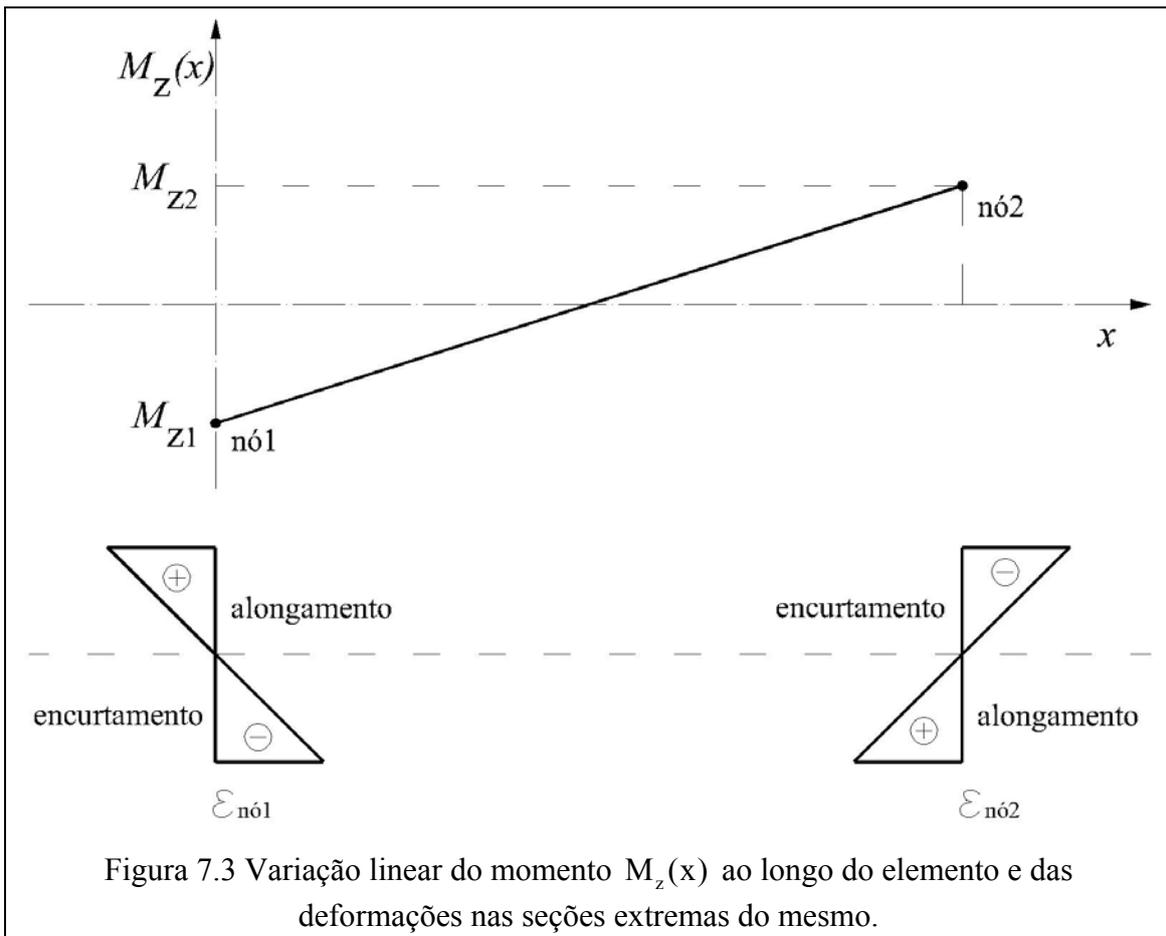
sendo  $M_z(x)$  o momento fletor atuante na seção segundo os planos  $xy$ , a uma distância  $x$  do nó inicial (origem do eixo local). Aqui se utiliza a convenção de sinais: deformações positivas para esforços de tração.

Considerando-se que as variações do momento  $M_z(x)$  sejam lineares (ver Figura 7.3), tem-se a seguinte função:

$$M_z(x) = -M_{z1} + \frac{(M_{z2} + M_{z1})}{L}x \quad (7.22)$$

Finalmente pode-se escrever (7.19) como:

$$\varepsilon_0 = \frac{P}{EA} + \frac{y}{EI_z} \left[ M_{z1} - \frac{(M_{z2} + M_{z1})}{L}x \right] \quad (7.23)$$



O tensor de Green-Lagrange pode então ser escrito como:

$$\varepsilon = \frac{d(u_{total})}{dx} + \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{d(u_{total})}{dx} \right]^2 + \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \right\} \quad (7.24)$$

sendo o deslocamento longitudinal ( $u_{total}$ ) composto por: uma parcela extensional, decorrente das flexões em torno z e por uma constante, como se vê em (7.25).

$$u_{total} = u - y \frac{dv}{dx} \quad (7.25)$$

Pode-se ainda realizar a uniformização das deformações com a seguinte consideração:

$$\left( \frac{dv}{dx} \right)^2 = \frac{1}{L} \int_0^L \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx \quad (7.26)$$

Substituindo (7.25) e (7.26) em (7.24) obtém-se:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} - y \cdot \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{du}{dx} \right)^2 - 2y \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{d^2v}{dx^2} + y^2 \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 + \frac{1}{L} \int_0^L \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx \right) \quad (7.27)$$

Sendo u e v as funções polinomiais definidas em (7.17) e (7.18). Aplicando estas funções de interpolação em (7.27), calculam-se as parcelas  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  em termos das constantes das funções de interpolação de deslocamentos, como a seguir escritas:

$$\varepsilon_1 = a_1 - 6y b_3 x - 2y b_2 \quad (7.28)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 = & 18y^2 b_3^2 x^2 + 12y^2 b_2 b_3 x - 6y a_1 b_3 x \\ & + 2y^2 b_2^2 - 2y a_1 b_2 + \frac{9}{10} b_3^2 L^4 + \frac{3}{2} b_2 b_3 L^3 \\ & + \frac{2}{3} b_2^2 L^2 + b_1 b_3 L^2 + b_1 b_2 L + \frac{1}{2} (a_1^2 + b_1^2) \end{aligned} \quad (7.29)$$

O passo seguinte, para obtenção dos termos das matrizes de rigidez do elemento de pórtico plano, consiste do calculo das parcelas da energia de deformação ( $U_{11}, U_{12}, U_{02}, U_{22}$ ) utilizando para tanto as correspondentes parcelas do tensor de Green

envolvidas ( $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ ). Deve-se salientar que no caso de elementos de barra de material isotrópico a matriz de relações constitutivas (D) corresponde ao módulo de Young (E).

### 7.1.3 Matriz de Rigidez Elástica

Para calcular a matriz de rigidez elástica ( $K_0$ ) faz-se necessário obter a expressão da parcela  $U_{11}^n$  para o elemento de pórtico plano, conforme a seguir:

$$U_{11} = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_1 \cdot E \cdot \varepsilon_1) \cdot dV = \frac{1}{2} \int_A \int_0^l (\varepsilon_1 \cdot E \cdot \varepsilon_1) \cdot dA \cdot dx \quad (7.30)$$

Que pode ser escrito como:

$$U_{11}^n = \frac{E}{2} \int_A \int_0^L (S_1)^2 dA dx \quad (7.31)$$

onde,

$$S_1 = [a_1 - y(6b_3 x + 2b_2)] \quad (7.32)$$

Utilizando os conceitos de momento de segunda e quarta ordem de área da seção transversal e considerando que o eixo de referência em cada elemento passa pelo plano médio das seções, as quais são admitidas simétricas, tem-se:

$$I_z = \int_A y^2 dA \quad (7.33)$$

$$I_{zz} = \int_A y^4 dA \quad (7.34)$$

$$\int_A y^{2n+1} dA = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (7.35)$$

Estas definições são também usadas mais adiante na determinação das demais matrizes de rigidez do elemento de pórtico tridimensional.

Efetuada-se as integrais da expressão (7.30) com utilização das definições (7.33), (7.34), e (7.35) pode-se calcular os termos da matriz a partir das derivadas definidas em (3.34). Desta maneira, em (7.36) tem-se a matriz de rigidez elástica  $K_0^n$  do elemento de pórtico plano.

$$K_0^n = \begin{bmatrix} R_5^0 & 0 & 0 & -R_5^0 & 0 & 0 \\ 0 & R_4^0 & R_3^0 & 0 & -R_4^0 & R_3^0 \\ 0 & R_3^0 & R_2^0 & 0 & -R_3^0 & R_1^0 \\ -R_5^0 & 0 & 0 & R_5^0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_4^0 & -R_3^0 & 0 & R_4^0 & -R_3^0 \\ 0 & R_3^0 & R_1^0 & 0 & -R_3^0 & R_2^0 \end{bmatrix} \quad (7.36)$$

onde,

$$R_1^0 = \frac{2EI_z}{L} \quad (7.37)$$

$$R_2^0 = \frac{4EI_z}{L} \quad (7.38)$$

$$R_3^0 = \frac{6EI_z}{L^2} \quad (7.39)$$

$$R_4^0 = \frac{12EI_z}{L^3} \quad (7.40)$$

$$R_5^0 = \frac{EA}{L} \quad (7.41)$$

#### 7.1.4 Matriz de Rigidez $K_\sigma$

A matriz de rigidez geométrica é originada da parcela  $U_{02}^n$ , esta por sua vez é:

$$U_{02}^n = \frac{1}{2} \int_0^l \int_A (\varepsilon_0 \cdot E \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \cdot E \cdot \varepsilon_0) \cdot dA \cdot dx \quad (7.42)$$

Ou em termos dos coeficientes das funções polinomiais de interpolação:

$$U_{02}^n = \frac{E}{2} \int_A \int_0^L [(S_1)^2 + S_2] \cdot S_3 \, dA \, dx \quad (7.43)$$

sendo,

$$S_2 = \frac{1}{L} \left( \frac{9}{5} b_3^2 L^5 + 3b_2 b_3 L^4 + 2b_1 b_3 L^3 + \frac{4}{3} b_2^2 L^3 + 2b_1 b_2 L^2 + b_1^2 L \right) \quad (7.44)$$

$$S_3 = \frac{P}{EA} + \frac{y}{EI_z} \left( M_{z1} - \frac{M_{z2} + M_{z1}}{L} x \right) \quad (7.45)$$

Após as integrações na área e no comprimento do elemento, definidas em (7.42), utilizando sempre as definições (7.33), (7.34) e (7.35) pode-se calcular os coeficientes da matriz a partir das derivadas definidas em (3.35). Desta maneira, em (7.46) tem-se a matriz de rigidez geométrica  $K_\sigma^n$  do elemento de pórtico.

$$K_\sigma^n = \begin{bmatrix} R_5^\sigma & R_8^\sigma & R_6^\sigma & -R_5^\sigma & -R_8^\sigma & R_7^\sigma \\ R_8^\sigma & R_4^\sigma & R_3^\sigma & -R_8^\sigma & -R_4^\sigma & R_3^\sigma \\ R_6^\sigma & R_3^\sigma & R_2^\sigma & -R_6^\sigma & -R_3^\sigma & R_1^\sigma \\ -R_5^\sigma & -R_8^\sigma & -R_6^\sigma & R_5^\sigma & R_8^\sigma & -R_7^\sigma \\ -R_8^\sigma & -R_4^\sigma & -R_3^\sigma & R_8^\sigma & R_4^\sigma & -R_3^\sigma \\ R_7^\sigma & R_3^\sigma & R_1^\sigma & -R_7^\sigma & -R_3^\sigma & R_2^\sigma \end{bmatrix} \quad (7.46)$$

onde

$$R_1^\sigma = \frac{2 I_z P}{AL} - \frac{PL}{30} \quad (7.47)$$

$$R_2^\sigma = \frac{4 I_z P}{AL} + 2 \frac{PL}{15} \quad (7.48)$$

$$R_3^\sigma = \frac{6 I_z P}{AL^2} + \frac{P}{10} \quad (7.49)$$

$$R_4^\sigma = \frac{12 I_z P}{AL^3} + \frac{6P}{5L} \quad (7.50)$$

$$R_5^\sigma = \frac{P}{L} \quad (7.51)$$

$$R_6^\sigma = -\frac{M_{z1}}{L} \quad (7.52)$$

$$R_7^\sigma = -\frac{M_{z2}}{L} \quad (7.53)$$

$$R_8^\sigma = -\frac{(M_{z1} + M_{z2})}{L^2} \quad (7.54)$$

Na literatura pesquisada esta matriz é normalmente chamada de matriz de rigidez geométrica, ou ainda de matriz de tensões iniciais. Esta última nomenclatura se deve, como se pode observar, ao fato da mesma representar a influência dos esforços iniciais na composição das deformações do elemento.

#### 7.1.5 Matriz de Rigidez $K_1$

A matriz de rigidez  $K_1(U^n)$  é obtida a partir da expressão (3.36) definida com as derivadas da parcela  $U_{12}^n$  da energia de deformação, que por sua vez é expressa como:

$$U_{12}^n = \frac{1}{2} \int_A \int_0^l (\varepsilon_1 \cdot E \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \cdot E \cdot \varepsilon_1) \cdot dA \cdot dx \quad (7.55)$$

Aplicando-se as expressões (7.28) e (7.29) em (7.55) fica:

$$U_{12}^n = \frac{E}{2} \int_A \int_0^L [(S_1)^2 + S_2] \cdot S_1 \, dA \, dx \quad (7.56)$$

com  $S_1$  e  $S_2$  definidos em (7.32) e (7.44) respectivamente.

Após realização da integração da expressão (7.55) e com a aplicação da expressão (3.36) obtém-se a seguinte matriz:

$$K_1^n(U^n) = \begin{bmatrix} R_8^1 & R_7^1 & R_6^1 - R_8^1 - R_7^1 & R_5^1 \\ R_7^1 & R_4^1 & R_3^1 - R_7^1 - R_4^1 & R_3^1 \\ R_6^1 & R_3^1 & R_2^1 - R_6^1 - R_3^1 & R_1^1 \\ -R_8^1 - R_7^1 - R_6^1 & R_8^1 & R_7^1 & -R_5^1 \\ -R_7^1 - R_4^1 - R_3^1 & R_7^1 & R_4^1 & -R_3^1 \\ R_5^1 & R_3^1 & R_1^1 - R_5^1 - R_3^1 & R_2^1 \end{bmatrix} \quad (7.57)$$

onde

$$R_1^1 = \frac{6EI_z}{L^2}(u_2 - u_1) - \frac{EA}{30}(u_2 - u_1) \quad (7.58)$$

$$R_2^1 = \frac{12EI_z}{L^2}(u_2 - u_1) + \frac{2EA}{15}(u_2 - u_1) \quad (7.59)$$

$$R_3^1 = \frac{18EI_z}{L^3}(u_2 - u_1) + \frac{EA}{10L}(u_2 - u_1) \quad (7.60)$$

$$R_4^1 = \frac{36EI_z}{L^4}(u_2 - u_1) + \frac{6EA}{5L^2}(u_2 - u_1) \quad (7.61)$$

$$R_5^1 = \frac{6EI_z}{L^2}(3\varphi_{z0} - \varphi_{z1} - 2\varphi_{z2}) + \frac{EA}{30}(3\varphi_{z0} + \varphi_{z1} - 4\varphi_{z2}) \quad (7.62)$$

$$R_6^1 = \frac{6EI_z}{L^2}(3\varphi_{z0} - 2\varphi_{z1} - \varphi_{z2}) + \frac{EA}{30}(3\varphi_{z0} - 4\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) \quad (7.63)$$

$$R_7^1 = \frac{EA}{10L}(12\varphi_{z0} - \varphi_{z1} - \varphi_{z2}) + \frac{18EI_z}{L^3}(2\varphi_{z0} - \varphi_{z1} - \varphi_{z2}) \quad (7.64)$$

$$R_8^1 = \frac{3EA}{L^2}(u_2 - u_1) \quad (7.65)$$

### 7.1.6 Matriz de Rigidez $K_2$

A parcela  $U_{22}^n$ , com a qual se obtém os elementos da matriz  $K_2^n$ , é obtida com aplicação da expressão (3.37), conforme feito a seguir:

$$U_{22} = \frac{1}{2} \int_0^l \int_A (\varepsilon_2 \cdot E \cdot \varepsilon_2) \cdot dA \cdot dx \quad (7.66)$$

A expressão (7.66) pode então ser reescrita como:

$$U_{22}^n = \frac{E}{2} \int_0^L \int_A \left[ \frac{1}{2} (S_1)^2 + \frac{1}{2} S_2 \right]^2 dA dx \quad (7.67)$$

sendo  $S_1$  e  $S_2$  definidos ainda em (7.32) e (7.44) respectivamente.

Após realizar as integrações (7.67), utilizando ainda as definições (7.33), (7.34) e (7.35), pode-se realizar as derivadas da parcela  $U_{22}^n$  e assim realizar o cálculo dos termos da matriz por meio de (3.37), que inclusive possibilita a consideração de distintos vetores de deslocamento  $U_a^n$  e  $U_b^n$ . Desta maneira se tem a seguinte matriz de segunda ordem de deslocamentos:

$$K_2^n (U_a^n, U_b^n) = \begin{bmatrix} R_1^2 & R_2^2 & R_3^2 - R_1^2 - R_2^2 & R_4^2 \\ R_2^2 & R_5^2 & R_6^2 - R_2^2 - R_5^2 & R_7^2 \\ R_3^2 & R_6^2 & R_8^2 - R_3^2 - R_6^2 & R_9^2 \\ -R_1^2 - R_2^2 - R_3^2 & R_1^2 & R_2^2 - R_4^2 \\ -R_2^2 - R_5^2 - R_6^2 & R_2^2 & R_5^2 - R_7^2 \\ R_4^2 & R_7^2 & R_9^2 - R_4^2 - R_7^2 & R_{10}^2 \end{bmatrix} \quad (7.68)$$

sendo os seguintes coeficientes:

$$R_1^2 = \frac{3EA}{L} \delta^a \delta^b + \frac{EA}{30L} [36\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 4\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b - \varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b - \varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 4\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b] + \frac{6EI_z}{L^3} [6\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 2\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + \varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + \varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 2\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b] \quad (7.69)$$

$$R_2^2 = \frac{EA}{10L} \delta^a (12\varphi_{z0}^b - \varphi_{z1}^b - \varphi_{z2}^b) + \frac{EA}{10L} \delta^b (12\varphi_{z0}^a - \varphi_{z1}^a - \varphi_{z2}^a) + \frac{18EI_z}{L^3} \delta^a (2\varphi_{z0}^b - \varphi_{z1}^b - \varphi_{z2}^b) + \frac{18EI_z}{L^3} \delta^b (2\varphi_{z0}^a - \varphi_{z1}^a - \varphi_{z2}^a) \quad (7.70)$$

$$R_3^2 = \frac{EA}{30} \delta^a (3\varphi_{z0}^b - 4\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) + \frac{EA}{30} \delta^b (3\varphi_{z0}^a - 4\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + \frac{6EI_z}{L^3} \delta^a (3\varphi_{z0}^b - 2\varphi_{z1}^b - \varphi_{z2}^b) + \frac{6EI_z}{L^3} \delta^b (3\varphi_{z0}^a - 2\varphi_{z1}^a - \varphi_{z2}^a) \quad (7.71)$$

$$R_4^2 = \frac{EA}{30} \delta^a (3\varphi_{z0}^b + \varphi_{z1}^b - 4\varphi_{z2}^b) + \frac{EA}{30} \delta^b (3\varphi_{z0}^a + \varphi_{z1}^a - 4\varphi_{z2}^a) + \frac{6EI_z}{L^2} \delta^a (3\varphi_{z0}^b - \varphi_{z1}^b - 2\varphi_{z2}^b) + \frac{6EI_z}{L^2} \delta^b (3\varphi_{z0}^a - \varphi_{z1}^a - 2\varphi_{z2}^a) \quad (7.72)$$

$$R_5^2 = \frac{6EA}{5L} \delta^a \delta^b + \frac{36EI_z}{L^3} \delta^a \delta^b + \frac{EA}{50L} [216\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 18\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 18\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 9\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b - \varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b - \varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 9\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b] + \frac{2EI_z}{5L^3} [216\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 63\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 63\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 22\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + 11\varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + 11\varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 22\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b] + \frac{72EI_z}{5L^5} [54\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 27\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 27\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 16\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + 11\varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + 11\varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 16\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b] \quad (7.73)$$

$$R_6^2 = \frac{EA}{10} \delta^a \delta^b + \frac{18EI_z}{L^2} \delta^a \delta^b + \frac{EA}{150} [54\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (9\varphi_{z1}^b - \varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (9\varphi_{z1}^a - \varphi_{z2}^a) + 6\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + \varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + \varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + \varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b] + \frac{2EI_z}{5L^2} [63\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 11\varphi_{z0}^a (2\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 11\varphi_{z0}^b (2\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 9\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + 3\varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + 3\varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 3\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b] + \frac{36EI_z}{5L^4} [54\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 2\varphi_{z0}^a (16\varphi_{z1}^b + 11\varphi_{z2}^b) - 2\varphi_{z0}^b (16\varphi_{z1}^a + 11\varphi_{z2}^a) + 21\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + 11\varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + 11\varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 11\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b] \quad (7.74)$$

$$R_7^2 = \frac{EA}{10} \delta^a \delta^b + \frac{18EI_z}{L^2} \delta^a \delta^b + \frac{EA}{150} [54\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b + 3\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b - 9\varphi_{z2}^b) + 3\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a - 9\varphi_{z2}^a) + \varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + \varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + \varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 6\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b] + \frac{2EI_z}{5L^2} [63\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 11\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + 2\varphi_{z2}^b) - 11\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + 2\varphi_{z2}^a) + 3\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + 3\varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + 3\varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 9\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b] + \frac{36EI_z}{5L^4} [54\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 2\varphi_{z0}^a (11\varphi_{z1}^b + 16\varphi_{z2}^b) - 2\varphi_{z0}^b (11\varphi_{z1}^a + 16\varphi_{z2}^a) + 11\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + 11\varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + 11\varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 21\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b] \quad (7.75)$$

$$R_8^2 = \frac{2EAL}{15} \delta^a \delta^b + \frac{12EI_z}{L} \delta^a \delta^b + \frac{EAL}{150} [27\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - \varphi_{z0}^a (6\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - \varphi_{z0}^b (6\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 8\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b - 2\varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b - 2\varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 3\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b] + \frac{2EI_z}{5L} [22\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (3\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (3\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 8\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + \varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + \varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 2\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b] + \frac{12EI_z}{5L^3} [96\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (21\varphi_{z1}^b + 11\varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (21\varphi_{z1}^a + 11\varphi_{z2}^a) + 44\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + 19\varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + 19\varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 14\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b] \quad (7.76)$$

$$R_9^2 = -\frac{EAL}{30} \delta^a \delta^b + \frac{6EI_z}{L} \delta^a \delta^b - \frac{EAL}{150} [3\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b + \varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) + \varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 2\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b - 3\varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b - 3\varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 2\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b] + \frac{2EI_z}{5L} [11\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + \varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + 2\varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + 2\varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + \varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b] + \frac{12EI_z}{5L^3} [66\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 33\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 33\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 19\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + 14\varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + 14\varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 19\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b] \quad (7.77)$$

$$R_{10}^2 = \frac{2EAL}{15} \delta^a \delta^b + \frac{12EI_z}{L} \delta^a \delta^b + \frac{EAL}{150} [27\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - \varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + 6\varphi_{z2}^b) - \varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + 6\varphi_{z2}^a) + 3\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b - 2\varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b - 2\varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 8\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b] + \frac{2EI_z}{5L} [22\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + 3\varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + 3\varphi_{z2}^a) + 2\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + \varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + \varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 8\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b] + \frac{12EI_z}{5L^3} [96\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (11\varphi_{z1}^b + 21\varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (11\varphi_{z1}^a + 21\varphi_{z2}^a) + 14\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + 19\varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + 19\varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 44\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b] \quad (7.78)$$

sendo,

$$\delta^a = \frac{(u_2^a - u_1^a)}{L} \quad (7.79)$$

$$\delta^b = \frac{(u_2^b - u_1^b)}{L} \quad (7.80)$$

$$\phi_{z0}^a = \frac{(v_2^a - v_1^a)}{L} \quad (7.81)$$

$$\phi_{z0}^b = \frac{(v_2^b - v_1^b)}{L} \quad (7.82)$$

Caso se considere um único vetor de deslocamento, ou seja,  $U_a^n = U_b^n = U^n$  os termos da matriz de rigidez  $K_2^n(U^n, U^n)$  são:

$$\begin{aligned} R_1^2 &= \frac{3EA}{L} \delta^2 \\ &+ \frac{EA}{15L} [18\varphi_{z0}^2 - 3\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + 2\varphi_{z1}^2 - \varphi_{z1}\varphi_{z2} + 2\varphi_{z2}^2] \\ &+ \frac{12EI_z}{L^3} [3\varphi_{z0}^2 - 3\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + \varphi_{z1}^2 + \varphi_{z1}\varphi_{z2} + \varphi_{z2}^2] \end{aligned} \quad (7.83)$$

$$R_2^2 = \frac{EA}{5L} \delta(12\varphi_{z0} - \varphi_{z1} - \varphi_{z2}) + \frac{36EI_z}{L^3} \delta(2\varphi_{z0} - \varphi_{z1} - \varphi_{z2}) \quad (7.84)$$

$$R_3^2 = \frac{EA}{15} \delta(3\varphi_{z0} - 4\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + \frac{12EI_z}{L^2} \delta(3\varphi_{z0} - 2\varphi_{z1} - \varphi_{z2}) \quad (7.85)$$

$$R_4^2 = \frac{EA}{15} \delta(3\varphi_{z0} + \varphi_{z1} - 4\varphi_{z2}) + \frac{12EI_z}{L^2} \delta(3\varphi_{z0} - \varphi_{z1} - 2\varphi_{z2}) \quad (7.86)$$

$$\begin{aligned} R_5^2 &= \frac{6EA}{5L} \delta^2 + \frac{36EI_z}{L^3} \delta^2 \\ &+ \frac{EA}{50L} [216\varphi_{z0}^2 - 36\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + 9\varphi_{z1}^2 - 2\varphi_{z1}\varphi_{z2} + 9\varphi_{z2}^2] \\ &+ \frac{4EI_z}{5L^3} [108\varphi_{z0}^2 - 63\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + 11(\varphi_{z1}^2 + \varphi_{z1}\varphi_{z2} + \varphi_{z2}^2)] \\ &+ \frac{144EI_{zz}}{5L^5} [27\varphi_{z0}^2 - 27\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + 8\varphi_{z1}^2 + 11\varphi_{z1}\varphi_{z2} + 8\varphi_{z2}^2] \end{aligned} \quad (7.87)$$

$$\begin{aligned}
R_6^2 &= \frac{EA}{10} \delta^2 + \frac{18EI_z}{L^2} \delta^2 \\
&+ \frac{EA}{150} [54\varphi_{z0}^2 - 6\varphi_{z0}(9\varphi_{z1} - \varphi_{z2}) + 6\varphi_{z1}^2 + 2\varphi_{z1}\varphi_{z2} + \varphi_{z2}^2] \\
&+ \frac{2EI_z}{5L^2} [63\varphi_{z0}^2 - 22\varphi_{z0}(2\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + 3(3\varphi_{z1}^2 + 2\varphi_{z1}\varphi_{z2} + \varphi_{z2}^2)] \\
&+ \frac{36EI_{zz}}{5L^4} [54\varphi_{z0}^2 - 4\varphi_{z0}(16\varphi_{z1} + 11\varphi_{z2}) + 21\varphi_{z1}^2 + 22\varphi_{z1}\varphi_{z2} + 11\varphi_{z2}^2]
\end{aligned} \tag{7.88}$$

$$\begin{aligned}
R_7^2 &= \frac{EA}{10} \delta^2 + \frac{18EI_z}{L^2} \delta^2 \\
&+ \frac{EA}{150} [54\varphi_{z0}^2 + 6\varphi_{z0}(\varphi_{z1} - 9\varphi_{z2}) + \varphi_{z1}^2 + 2\varphi_{z1}\varphi_{z2} + 6\varphi_{z2}^2] \\
&+ \frac{2EI_z}{5L^2} [63\varphi_{z0}^2 - 22\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + 2\varphi_{z2}) + 3(\varphi_{z1}^2 + 2\varphi_{z1}\varphi_{z2} + 3\varphi_{z2}^2)] \\
&+ \frac{36EI_{zz}}{5L^4} [54\varphi_{z0}^2 - 4\varphi_{z0}(11\varphi_{z1} + 16\varphi_{z2}) + 11\varphi_{z1}^2 + 22\varphi_{z1}\varphi_{z2} + 21\varphi_{z2}^2]
\end{aligned} \tag{7.89}$$

$$\begin{aligned}
R_8^2 &= \frac{2EAL}{15} \delta^2 + \frac{12EI_z}{L} \delta^2 \\
&+ \frac{EAL}{150} [27\varphi_{z0}^2 - 2\varphi_{z0}(6\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + 8\varphi_{z1}^2 - 4\varphi_{z1}\varphi_{z2} + 3\varphi_{z2}^2] \\
&+ \frac{4EI_z}{5L} [11\varphi_{z0}^2 - 3\varphi_{z0}(3\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + 4\varphi_{z1}^2 + \varphi_{z1}\varphi_{z2} + \varphi_{z2}^2] \\
&+ \frac{24EI_{zz}}{5L^3} [48\varphi_{z0}^2 - 3\varphi_{z0}(21\varphi_{z1} + 11\varphi_{z2}) + 22\varphi_{z1}^2 + 19\varphi_{z1}\varphi_{z2} + 7\varphi_{z2}^2]
\end{aligned} \tag{7.90}$$

$$\begin{aligned}
R_9^2 &= -\frac{EAL}{30} \delta^2 + \frac{6EI_z}{L} \delta^2 \\
&- \frac{EAL}{150} [3\varphi_{z0}^2 + 2\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + 2(\varphi_{z1}^2 - 3\varphi_{z1}\varphi_{z2} + \varphi_{z2}^2)] \\
&+ \frac{2EI_z}{5L} [11\varphi_{z0}^2 - 6\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + \varphi_{z1}^2 + 4\varphi_{z1}\varphi_{z2} + \varphi_{z2}^2] \\
&+ \frac{12EI_{zz}}{5L^3} [66\varphi_{z0}^2 - 66\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + 19\varphi_{z1}^2 + 28\varphi_{z1}\varphi_{z2} + 19\varphi_{z2}^2]
\end{aligned} \tag{7.91}$$

$$\begin{aligned}
R_{10}^2 &= \frac{2EAL}{15} \delta^2 + \frac{12EI_z}{L} \delta^2 \\
&+ \frac{EAL}{150} [27\varphi_{z0}^2 - 2\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + 6\varphi_{z2}) + 3\varphi_{z1}^2 - 4\varphi_{z1}\varphi_{z2} + 8\varphi_{z2}^2] \\
&+ \frac{4EI_z}{5L} [11\varphi_{z0}^2 - 3\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + 3\varphi_{z2}) + \varphi_{z1}^2 + \varphi_{z1}\varphi_{z2} + 4\varphi_{z2}^2] \\
&+ \frac{24EI_{zz}}{5L^3} [48\varphi_{z0}^2 - 3\varphi_{z0}(11\varphi_{z1} + 21\varphi_{z2}) + 7\varphi_{z1}^2 + 19\varphi_{z1}\varphi_{z2} + 22\varphi_{z2}^2]
\end{aligned} \tag{7.92}$$

Salienta-se que na literatura pesquisada não se verificam as matrizes aqui definidas, as quais se diferenciam por considerarem o tensor completo de Green-Lagrange com uniformização de deformações.

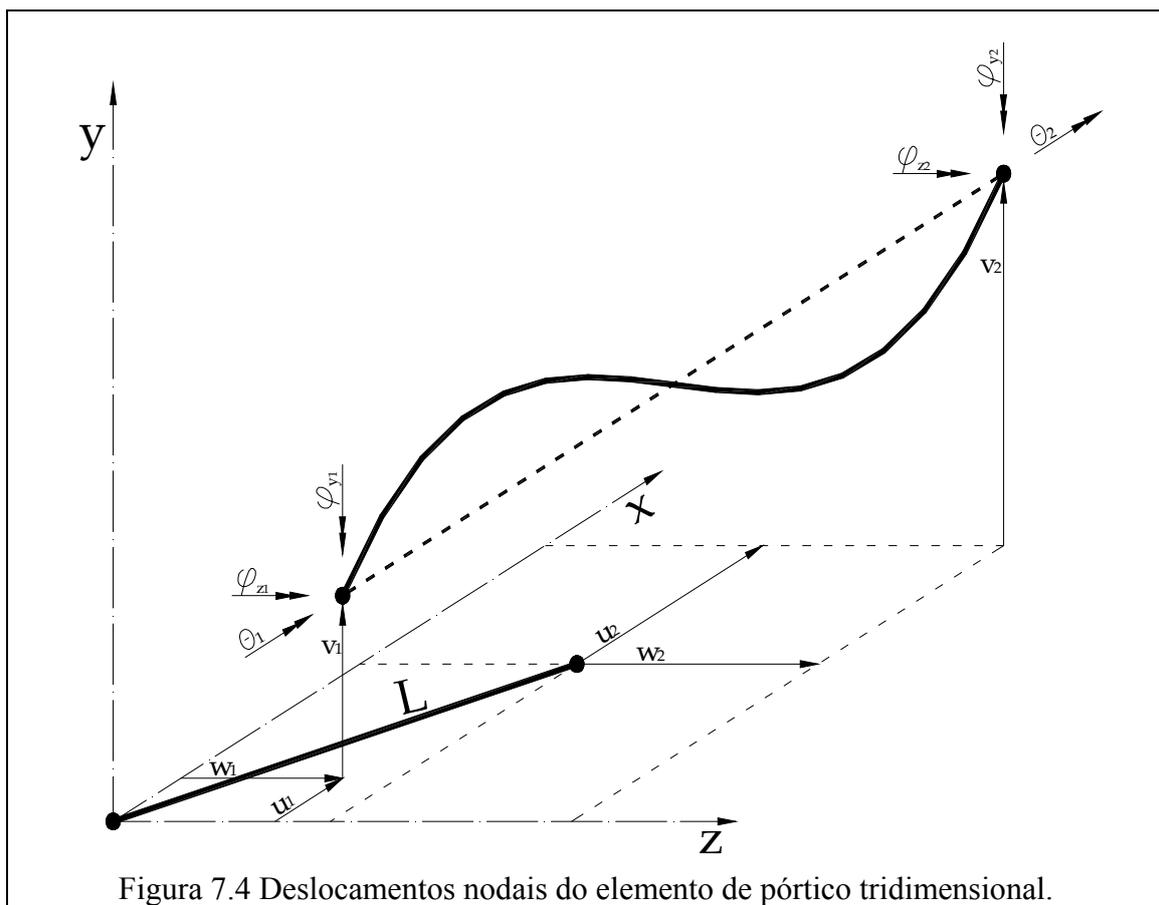
## 7.2 Matrizes de Rigidez do Elemento de Pórtico Tridimensional

### 7.2.1 Funções de Interpolação para Pórticos Tridimensionais

Na determinação das matrizes de rigidez do elemento de pórtico tridimensional consideram-se os graus de liberdade definidos em (7.93).

$$U^{nT} = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \theta_1 \quad \varphi_{y1} \quad \varphi_{z1} \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \theta_2 \quad \varphi_{y2} \quad \varphi_{z2}] \quad (7.93)$$

Uma representação destes graus de liberdade é realizada por meio dos deslocamentos nodais na Figura 7.4.



As condições de fronteira a serem atendidas pelas funções de interpolação de deslocamentos nodais são:

Para as translações na direção x

$$u(x=0) = u_1 \quad (7.94)$$

$$u(x=L) = u_2 \quad (7.95)$$

Para as translações na direção y e rotações no plano xy

$$v(x=0) = v_1 \quad (7.96)$$

$$v(x=L) = v_2 \quad (7.97)$$

$$v'(x=0) = \varphi_{z1} \quad (7.98)$$

$$v'(x=L) = \varphi_{z2} \quad (7.99)$$

Para as translações na direção z e rotações no plano xz

$$w(x=0) = w_1 \quad (7.100)$$

$$w(x=L) = w_2 \quad (7.101)$$

$$w'(x=0) = -\varphi_{y1} \quad (7.102)$$

$$w'(x=L) = -\varphi_{y2} \quad (7.103)$$

Para as rotações na direção x (torção)

$$\theta(x=0) = \theta_1 \quad (7.104)$$

$$\theta(x=L) = \theta_2 \quad (7.105)$$

Adotando funções polinomiais pode-se facilmente perceber que para os deslocamentos  $u, v, w, \theta$  bastam polinômios de primeira ou de terceira ordem, ou seja:

$$u(x) = a_0 + a_1 x \quad (7.106)$$

$$v(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \quad (7.107)$$

$$w(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \quad (7.108)$$

$$\theta(x) = d_0 + d_1 x \quad (7.109)$$

Aplicando as condições (7.94) e (7.95) em (7.106), (7.96) a (7.99) em (7.107), (7.100) a (7.103) em (7.108) e (7.104) a (7.105) em (7.109), e resolvendo os sistemas de equações daí gerados são obtidas as seguintes soluções para as constantes:

Constantes da função  $u(x)$

$$a_0 = u_1 \quad (7.110)$$

$$a_1 = \frac{(u_2 - u_1)}{L} \quad (7.111)$$

Constantes da função  $v(x)$

$$b_0 = v_1 \quad (7.112)$$

$$b_1 = \varphi_{z1} \quad (7.113)$$

$$b_2 = \frac{(3\varphi_{z0} - 2\varphi_{z1} - \varphi_{z2})}{L} \quad (7.114)$$

$$b_3 = -\frac{(2\varphi_{z0} - \varphi_{z1} - \varphi_{z2})}{L^2} \quad (7.115)$$

Constantes da função  $w(x)$

$$c_0 = w_1 \quad (7.116)$$

$$c_1 = -\varphi_{y1} \quad (7.117)$$

$$c_2 = -\frac{(3\varphi_{y0} - 2\varphi_{y1} - \varphi_{y2})}{L} \quad (7.118)$$

$$c_3 = \frac{(2\varphi_{y0} - \varphi_{y1} - \varphi_{y2})}{L^2} \quad (7.119)$$

Constantes da função  $\theta(x)$

$$d_0 = \theta_1 \quad (7.120)$$

$$d_1 = \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{L} \quad (7.121)$$

sendo os deslocamentos rotacionais da corda no plano xy ( $\phi_{z0}$ ) e no plano xz ( $\phi_{y0}$ ) presentes nas expressões (7.114), (7.115), (7.118) e (7.119) definidos como:

$$\varphi_{z0} = \frac{(v_2 - v_1)}{L} \quad (7.122)$$

$$\varphi_{y0} = -\frac{(w_2 - w_1)}{L} \quad (7.123)$$

Portanto, ficam assim estabelecidas as seguintes funções polinomiais para interpolação dos deslocamentos nodais de um elemento de pórtico tridimensional:

$$u(x) = u_1 + \frac{(u_2 - u_1)}{L}x \quad (7.124)$$

$$v(x) = v_1 + \varphi_{z1}x + \frac{(3\varphi_{z0} - 2\varphi_{z1} - \varphi_{z2})}{L}x^2 - \frac{(2\varphi_{z0} - \varphi_{z1} - \varphi_{z2})}{L^2}x^3 \quad (7.125)$$

$$w(x) = w_1 - \varphi_{y1}x - \frac{(3\varphi_{y0} - 2\varphi_{y1} - \varphi_{y2})}{L}x^2 + \frac{(2\varphi_{y0} - \varphi_{y1} - \varphi_{y2})}{L^2}x^3 \quad (7.126)$$

$$\theta(x) = \theta_1 + \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{L}x \quad (7.127)$$

Observa-se que, a função de interpolação aqui adotada para os deslocamentos  $u$  do elemento de pórtico tridimensional é uma função linear, assim como a adotada para o elemento de pórtico plano. Portanto, também se faz necessário o procedimento de enriquecimento da discretização do modelo para redução de erros de aproximação.

Deve-se ainda salientar que, as rotações nodais para o elemento de pórtico tridimensional não são grandezas vetoriais, quando assumem valores finitos. Porém, ao se adotar o RLA o erro fica reduzido já que os valores destas rotações são fracionados em parcelas (incrementos) suficientemente pequenas para a serem tratadas como vetores.

### 7.2.2 Deformações em Elementos de Pórticos Tridimensionais

Com base nos esforços nodais considerados na Figura 7.5 para um elemento de pórtico tridimensional, pode-se calcular no RLA as parcelas de deformação  $\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  conforme a seguir.

O estado inicial de deformação ( $\varepsilon_0$ ), desconsiderando deformações tangenciais é composto pelas parcelas:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{\text{extensional}} + \varepsilon_{\text{flexão}} \quad (7.128)$$

sendo,

$$\varepsilon_{\text{extensional}} = \frac{P}{E A} \quad (7.129)$$

$$\varepsilon_{\text{flexão}}(x, y, z) = -\frac{M_z(x)}{EI_z}y + \frac{M_y(x)}{EI_y}z \quad (7.130)$$

onde  $M_z(x)$  e  $M_y(x)$  são os momentos fletores atuantes na seção segundo os planos **xy** e **xz** respectivamente, a uma distância  $x$  do nó inicial (origem do eixo local). Aqui se utiliza a convenção de sinais: deformações positivas para esforços de tração.

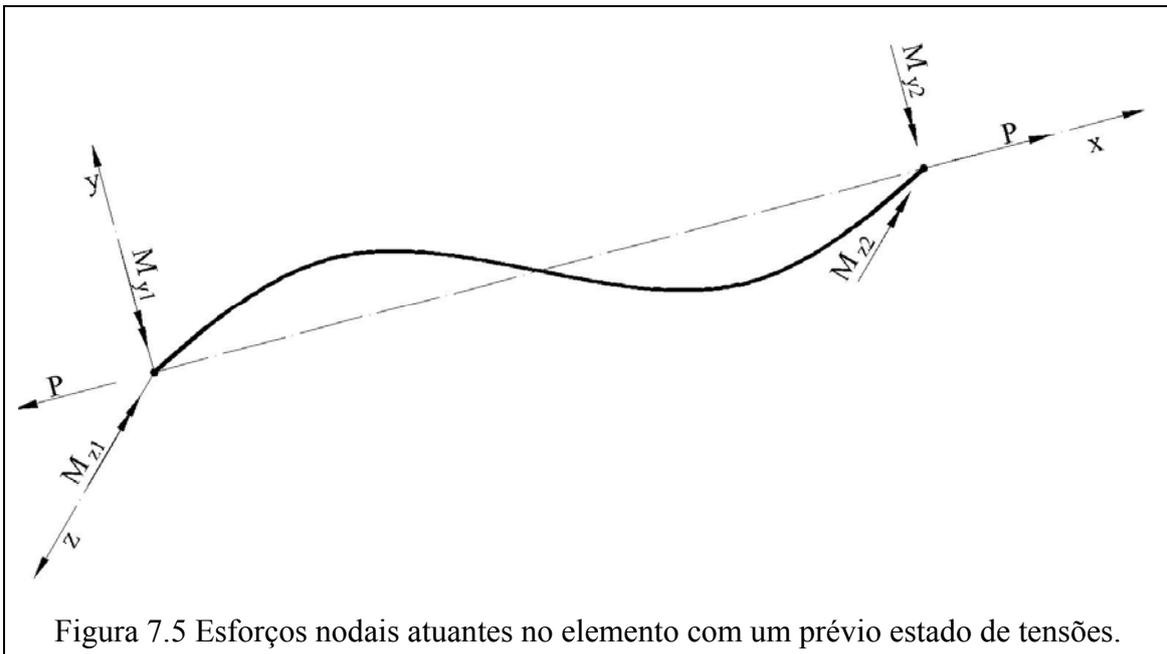


Figura 7.5 Esforços nodais atuantes no elemento com um prévio estado de tensões.

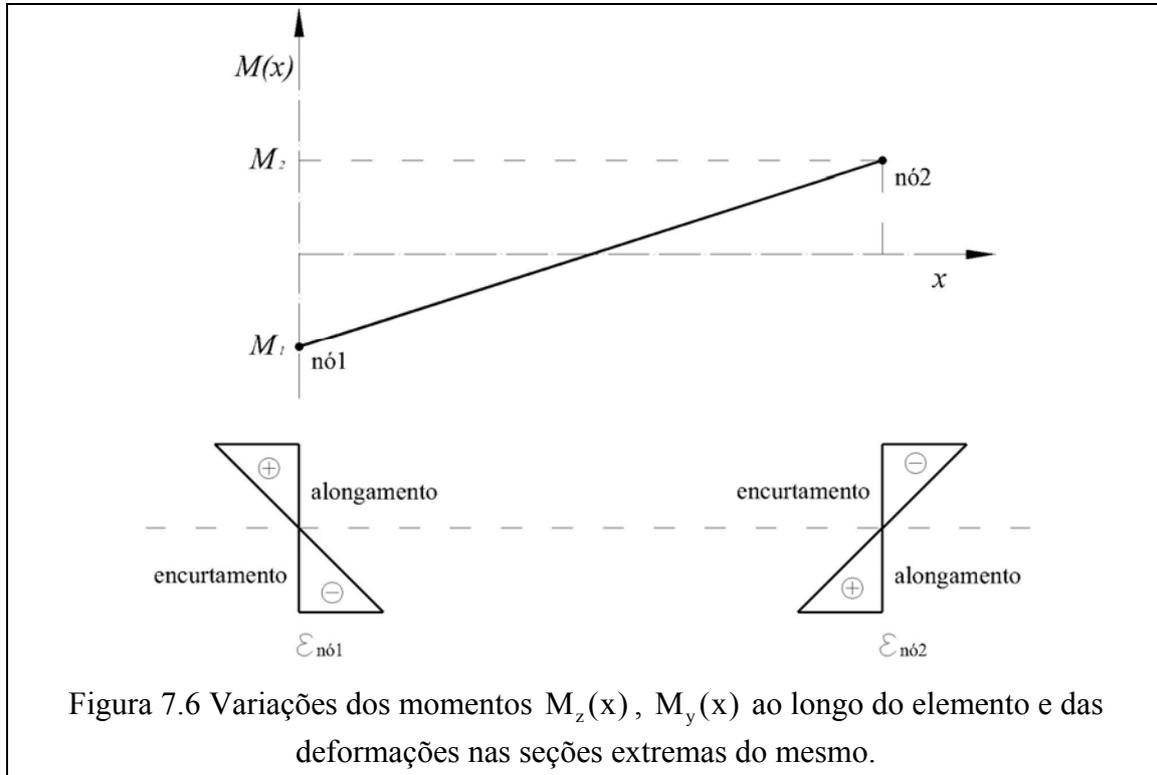
Considerando-se que as variações dos momentos  $M_z(x)$  e  $M_y(x)$  sejam lineares (ver Figura 7.6), tem-se as seguintes funções:

$$M_z(x) = -M_{z1} + \frac{(M_{z2} + M_{z1})}{L}x \quad (7.131)$$

$$M_y(x) = -M_{y1} + \frac{(M_{y2} + M_{y1})}{L}x \quad (7.132)$$

Finalmente pode-se escrever (7.108) como:

$$\varepsilon_0 = \frac{P}{EA} + \frac{y}{EI_z} \left[ M_{z1} - \frac{(M_{z2} + M_{z1})}{L} x \right] - \frac{z}{EI_y} \left[ M_{y1} - \frac{(M_{y2} + M_{y1})}{L} x \right] \quad (7.133)$$



O tensor de Green-Lagrange pode então ser escrito como:

$$\varepsilon = \frac{d(u_{total})}{dx} + \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{d(u_{total})}{dx} \right]^2 + \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \right\} \quad (7.134)$$

O deslocamento longitudinal ( $u_{total}$ ) é composto por: uma parcela extensional, parcelas decorrentes das flexões em torno de y e z e por uma constante, como se vê em (7.135).

$$u_{total} = u - yv_{,x} + zw_{,x} \quad (7.135)$$

Substituindo (7.135) em (7.134) e uniformizando as deformações se tem:

$$\varepsilon = u_{,x} - yv_{,xx} + zw_{,xx} - yu_{,x}v_{,xx} + zu_{,x}w_{,xx} - yzv_{,xx}w_{,xx} + \frac{1}{2} \left[ (u_{,x})^2 + y^2(v_{,xx})^2 + z^2(w_{,xx})^2 + \frac{1}{L} \int_0^L (v_{,x})^2 dx + \frac{1}{L} \int_0^L (w_{,x})^2 dx \right] \quad (7.136)$$

Aplicando as funções de interpolação (7.124), (7.125), (7.126) e (7.127) em (7.136), bem como suas respectivas derivadas, obtêm-se as parcelas  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  em termos das constantes das funções de interpolação de deslocamentos, como a seguir escritas:

$$\varepsilon_1 = a_1 - y(2b_2 + 6b_3x) + z(2c_2 + 6c_3x) \quad (7.137)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 = & 18x^2(yb_3 - zc_3)^2 + 12x(yb_3 - zc_3)(yb_2 - zc_2) - 6xa_1(yb_3 - zc_3) + \\ & + 2(yb_2 - zc_2)^2 - 2a_1(yb_2 - zc_2) + \frac{9}{10}L^4(b_3^2 + c_3^2) + \frac{3}{2}L^3(b_2b_3 + c_2c_3) + \\ & + \frac{2}{3}L^2(b_2^2 + c_2^2) + L^2(b_1b_3 + c_1c_3) + (b_1b_2 + c_1c_2) + \frac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) \end{aligned} \quad (7.138)$$

### 7.2.3 Matriz de Rigidez Elástica

Como visto anteriormente os termos da matriz de rigidez elástica ( $K_0$ ) são obtidos a partir das derivadas da parcela  $U_{11}$  da energia de deformação (7.30). Esta parcela pode ainda ser acrescida da energia de deformação relativa à torção de acordo com TIMOSHENKO e GERE [116], ficando neste caso,

$$U_{11}^n = \frac{E}{2} \int_A \int_0^L [S_1]^2 dA dx + \frac{GJ}{2} \int_0^L (\theta_{,x})^2 dx \quad (7.139)$$

onde,

$$S_1 = [a_1 - 6x(yb_3 - zc_3) - 2yb_3 + 2zc_3] \quad (7.140)$$

Utilizando os conceitos de momento de segunda e quarta ordem e do produto de inércia de quarta ordem da área da seção transversal e considerando que o eixo de referência em cada elemento passa pelo plano médio das seções, as quais são admitidas simétricas, além das propriedades (7.33), (7.34) e (7.35) são válidas as seguintes propriedades:

$$\int_A z^{2n+1} dA = 0, \text{ para } n=0, 1, 2, 3, \dots \quad (7.141)$$

$$I_y = \int_A z^2 d_A \quad (7.142)$$

$$I_{yy} = \int_A z^4 d_A \quad (7.143)$$

$$I_{yz} = \int_A y^2 z^2 d_A \quad (7.144)$$

Após realização da integração (7.140) e das derivações apresentadas em (3.34) obtém-se os termos da matriz linear  $K_0^n$ , como a seguir expostos:

$$K_0^n = \begin{bmatrix} R_1^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_1^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2^0 & 0 & 0 & 0 & R_3^0 & 0 & -R_2^0 & 0 & 0 & 0 & R_3^0 \\ 0 & 0 & R_4^0 & 0 & -R_5^0 & 0 & 0 & 0 & -R_4^0 & 0 & -R_5^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_6^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_6^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_5^0 & 0 & R_7^0 & 0 & 0 & 0 & R_5^0 & 0 & R_8^0 & 0 \\ 0 & R_3^0 & 0 & 0 & 0 & R_9^0 & 0 & -R_3^0 & 0 & 0 & 0 & R_{10}^0 \\ -R_1^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_1^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2^0 & 0 & 0 & 0 & -R_3^0 & 0 & R_2^0 & 0 & 0 & 0 & -R_3^0 \\ 0 & 0 & -R_4^0 & 0 & R_5^0 & 0 & 0 & 0 & R_4^0 & 0 & R_5^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_6^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_6^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_5^0 & 0 & R_8^0 & 0 & 0 & 0 & R_5^0 & 0 & R_7^0 & 0 \\ 0 & R_3^0 & 0 & 0 & 0 & R_{10}^0 & 0 & -R_3^0 & 0 & 0 & 0 & R_9^0 \end{bmatrix} \quad (7.145)$$

onde,

$$R_1^0 = \frac{EA}{L} \quad (7.146)$$

$$R_2^0 = \frac{12EI_z}{L^3} \quad (7.147)$$

$$R_3^0 = \frac{6EI_z}{L^2} \quad (7.148)$$

$$R_4^0 = \frac{12EI_y}{L^3} \quad (7.149)$$

$$R_5^0 = \frac{6EI_y}{L^2} \quad (7.150)$$

$$R_6^0 = \frac{GJ}{L} \quad (7.151)$$

$$R_7^0 = \frac{4EI_y}{L} \quad (7.152)$$

$$R_8^0 = \frac{2EI_y}{L} \quad (7.153)$$

$$R_9^0 = \frac{4EI_z}{L} \quad (7.154)$$

$$R_{10}^0 = \frac{2EI_z}{L} \quad (7.155)$$

#### 7.2.4 Matriz de Rigidez $K_\sigma$

Semelhantemente ao realizado com a parcela  $U_{11}^n$ , pode-se adicionar à parcela  $U_{02}^n$  da energia de deformação (7.42) a parcela de energia referente à torção uniformizada, ou seja:

$$U_{02}^n = \frac{1}{2} \int_A^l \int_0^L [(S_1)^2 + (S_2 + S_3)] \cdot S_4 \cdot dA \cdot dx + \frac{GJ}{2} \int_0^L (\theta_{,x})^2 dx \quad (7.156)$$

onde,

$$S_2 = \frac{1}{L} \left( \frac{9}{5} b_3^2 L^5 + 3b_2 b_3 L^4 + 2b_1 b_3 L^3 + \frac{4}{3} b_2^2 L^3 + 2b_1 b_2 L^2 + b_1^2 L \right) \quad (7.157)$$

$$S_3 = \frac{1}{L} \left( \frac{9}{5} c_3^2 L^5 + 3c_2 c_3 L^4 + 2c_1 c_3 L^3 + \frac{4}{3} c_2^2 L^3 + 2c_1 c_2 L^2 + c_1^2 L \right) \quad (7.158)$$

$$S_4 = \frac{P}{EA} + \frac{y}{EI_z} \left( Mz_1 - \frac{Mz_2 + Mz_1}{L} x \right) \quad (7.159)$$

Após a determinação de  $U_{02}^n$  por meio da integração de (7.156), pode-se aplicar o cálculo definido em (3.35) resultando nos termos da matriz  $K_\sigma^n$  do elemento de pórtico plano:

$$K_{\sigma}^n = \begin{bmatrix} R_1^{\sigma} & R_2^{\sigma} & R_3^{\sigma} & 0 & R_4^{\sigma} & R_5^{\sigma} & -R_1^{\sigma} & -R_2^{\sigma} & -R_3^{\sigma} & 0 & R_6^{\sigma} & R_7^{\sigma} \\ R_2^{\sigma} & R_8^{\sigma} & 0 & 0 & 0 & R_9^{\sigma} & -R_2^{\sigma} & -R_8^{\sigma} & 0 & 0 & 0 & R_9^{\sigma} \\ R_3^{\sigma} & 0 & R_{10}^{\sigma} & 0 & -R_{11}^{\sigma} & 0 & -R_3^{\sigma} & 0 & -R_{10}^{\sigma} & 0 & -R_{11}^{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_4^{\sigma} & 0 & -R_{11}^{\sigma} & 0 & R_{12}^{\sigma} & 0 & -R_4^{\sigma} & 0 & R_{11}^{\sigma} & 0 & R_{13}^{\sigma} & 0 \\ R_5^{\sigma} & R_9^{\sigma} & 0 & 0 & 0 & R_{14}^{\sigma} & -R_5^{\sigma} & -R_9^{\sigma} & 0 & 0 & 0 & R_{15}^{\sigma} \\ -R_1^{\sigma} & -R_2^{\sigma} & -R_3^{\sigma} & 0 & -R_4^{\sigma} & -R_5^{\sigma} & R_1^{\sigma} & R_2^{\sigma} & R_3^{\sigma} & 0 & -R_6^{\sigma} & -R_7^{\sigma} \\ -R_2^{\sigma} & -R_8^{\sigma} & 0 & 0 & 0 & -R_9^{\sigma} & R_2^{\sigma} & R_8^{\sigma} & 0 & 0 & 0 & -R_9^{\sigma} \\ -R_3^{\sigma} & 0 & -R_{10}^{\sigma} & 0 & R_{11}^{\sigma} & 0 & R_3^{\sigma} & 0 & R_{10}^{\sigma} & 0 & R_{11}^{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_6^{\sigma} & 0 & -R_{11}^{\sigma} & 0 & R_{13}^{\sigma} & 0 & -R_6^{\sigma} & 0 & R_{11}^{\sigma} & 0 & R_{12}^{\sigma} & 0 \\ R_7^{\sigma} & R_9^{\sigma} & 0 & 0 & 0 & R_{15}^{\sigma} & -R_7^{\sigma} & -R_9^{\sigma} & 0 & 0 & 0 & R_{14}^{\sigma} \end{bmatrix} \quad (7.160)$$

onde,

$$R_1^{\sigma} = \frac{P}{L} \quad (7.161)$$

$$R_2^{\sigma} = -\frac{(M_{z1} + M_{z2})}{L^2} \quad (7.162)$$

$$R_3^{\sigma} = -\frac{(M_{y1} + M_{y2})}{L^2} \quad (7.163)$$

$$R_4^{\sigma} = \frac{M_{y1}}{L} \quad (7.164)$$

$$R_5^{\sigma} = -\frac{M_{z1}}{L} \quad (7.165)$$

$$R_6^{\sigma} = \frac{M_{y2}}{L} \quad (7.166)$$

$$R_7^{\sigma} = -\frac{M_{z2}}{L} \quad (7.167)$$

$$R_8^{\sigma} = \frac{6P}{5L} + \frac{12PI_z}{AL^3} \quad (7.168)$$

$$R_9^{\sigma} = \frac{P}{10} + \frac{6PI_z}{AL^2} \quad (7.169)$$

$$R_{10}^{\sigma} = \frac{6P}{5L} + \frac{12PI_y}{AL^3} \quad (7.170)$$

$$R_{11}^{\sigma} = \frac{P}{10} + \frac{6PI_y}{AL^2} \quad (7.171)$$

$$R_{12}^{\sigma} = 2\frac{PL}{15} + \frac{4PI_y}{AL} \quad (7.172)$$

$$R_{13}^{\sigma} = -\frac{PL}{30} + \frac{2PI_y}{AL} \quad (7.173)$$

$$R_{14}^{\sigma} = 2\frac{PL}{15} + \frac{4PI_z}{AL} \quad (7.174)$$

$$R_{15}^{\sigma} = -\frac{PL}{30} + \frac{2PI_z}{AL} \quad (7.175)$$

### 7.2.5 Matriz de Rigidez $K_1$

A parcela da energia de deformação  $U_{12}^n$  conforme definição (7.55) é definida para o caso de elemento de pórtico tridimensional como:

$$U_{12}^n = \frac{1}{2} \int_0^l \int_A [(S_1)^2 + (S_2 + S_3)] \cdot S_1 \, dA \cdot dx \quad (7.176)$$

Sendo também válidas as expressões (7.140), (7.157) e (7.158) na a integral (7.176).

Após o cálculo da integral (7.176), sendo aplicadas as propriedades (7.33), (7.34), (7.35), (7.141), (7.142), (7.143), (7.144) além das funções polinomiais (7.25), (7.26), (7.27) e (7.28) pode-se realizar o cálculo dos termos de  $K_I^n(U^n)$  definido em (3.36), conforme expressões a seguir:

$$K_1^n(U) = \begin{bmatrix} R_1^1 & R_2^1 & R_3^1 & 0 & R_4^1 & R_5^1 & -R_1^1 & -R_2^1 & -R_3^1 & 0 & R_6^1 & R_7^1 \\ R_2^1 & R_8^1 & 0 & 0 & 0 & R_9^1 & -R_2^1 & -R_8^1 & 0 & 0 & 0 & R_9^1 \\ R_3^1 & 0 & R_{10}^1 & 0 & -R_{11}^1 & 0 & -R_3^1 & 0 & -R_{10}^1 & 0 & -R_{11}^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_4^1 & 0 & -R_{11}^1 & 0 & R_{12}^1 & 0 & -R_4^1 & 0 & R_{11}^1 & 0 & R_{13}^1 & 0 \\ R_5^1 & R_9^1 & 0 & 0 & 0 & R_{14}^1 & -R_5^1 & -R_9^1 & 0 & 0 & 0 & R_{15}^1 \\ -R_1^1 & -R_2^1 & -R_3^1 & 0 & -R_4^1 & -R_5^1 & R_1^1 & R_2^1 & R_3^1 & 0 & -R_6^1 & -R_7^1 \\ -R_2^1 & -R_8^1 & 0 & 0 & 0 & -R_9^1 & R_2^1 & R_8^1 & 0 & 0 & 0 & -R_9^1 \\ -R_3^1 & 0 & -R_{10}^1 & 0 & R_{11}^1 & 0 & R_3^1 & 0 & R_{10}^1 & 0 & R_{11}^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_6^1 & 0 & -R_{11}^1 & 0 & R_{13}^1 & 0 & -R_6^1 & 0 & R_{11}^1 & 0 & R_{12}^1 & 0 \\ R_7^1 & R_9^1 & 0 & 0 & 0 & R_{15}^1 & -R_7^1 & -R_9^1 & 0 & 0 & 0 & R_{14}^1 \end{bmatrix} \quad (7.177)$$

onde,

$$R_1^1 = \frac{3EA}{L^2}(u_2 - u_1) \quad (7.178)$$

$$R_2^1 = \frac{EA}{10L}(12\phi_{z0} - \phi_{z1} - \phi_{z2}) + \frac{18EI_z}{L^3}(2\phi_{z0} - \phi_{z1} - \phi_{z2}) \quad (7.179)$$

$$R_3^1 = -\frac{EA}{10L}(12\phi_{y0} - \phi_{y1} - \phi_{y2}) - \frac{18EI_y}{L^3}(2\phi_{y0} - \phi_{y1} - \phi_{y2}) \quad (7.180)$$

$$R_4^1 = \frac{EA}{30}(3\phi_{y0} - 4\phi_{y1} + \phi_{y2}) + \frac{6EI_y}{L^2}(3\phi_{y0} - 2\phi_{y1} - \phi_{y2}) \quad (7.181)$$

$$R_5^1 = \frac{EA}{30}(3\phi_{z0} - 4\phi_{z1} + \phi_{z2}) + \frac{6EI_z}{L^2}(3\phi_{z0} - 2\phi_{z1} - \phi_{z2}) \quad (7.182)$$

$$R_6^1 = \frac{EA}{30}(3\phi_{y0} + \phi_{y1} - 4\phi_{y2}) + \frac{6EI_y}{L^2}(3\phi_{y0} - \phi_{y1} - 2\phi_{y2}) \quad (7.183)$$

$$R_7^1 = \frac{EA}{30}(3\phi_{z0} + \phi_{z1} - 4\phi_{z2}) + \frac{6EI_z}{L^2}(3\phi_{z0} - \phi_{z1} - 2\phi_{z2}) \quad (7.184)$$

$$R_8^1 = \frac{6EA}{5L^2}(u_2 - u_1) + \frac{36EI_z}{L^4}(u_2 - u_1) \quad (7.185)$$

$$R_9^1 = \frac{EA}{10L}(u_2 - u_1) + \frac{18EI_z}{L^3}(u_2 - u_1) \quad (7.186)$$

$$R_{10}^1 = \frac{6EA}{5L^2}(u_2 - u_1) + \frac{36EI_y}{L^4}(u_2 - u_1) \quad (7.187)$$

$$R_{11}^1 = \frac{EA}{10L}(u_2 - u_1) + \frac{18EI_y}{L^3}(u_2 - u_1) \quad (7.188)$$

$$R_{12}^1 = \frac{2EA}{15}(u_2 - u_1) + \frac{12EI_y}{L^2}(u_2 - u_1) \quad (7.189)$$

$$R_{13}^1 = -\frac{EA}{30}(u_2 - u_1) + \frac{6EI_y}{L^2}(u_2 - u_1) \quad (7.190)$$

$$R_{14}^1 = \frac{2EA}{15}(u_2 - u_1) + \frac{12EI_z}{L^2}(u_2 - u_1) \quad (7.191)$$

$$R_{15}^1 = -\frac{EA}{30}(u_2 - u_1) + \frac{6EI_z}{L^2}(u_2 - u_1) \quad (7.192)$$

### 7.2.6 Matriz de Rigidez $K_{\mathcal{Q}}$

A parcela da energia de deformação  $U_{22}^n$  do elemento de pórtico tridimensional pode ser escrita a partir do seguinte somatório:

$$U_{22}^n = \frac{1}{2} \int_A \int_0^l \left[ \frac{1}{2}(S_1)^2 + (S_2 + S_3) \right]^2 dA \cdot dx \quad (7.193)$$

Também sendo válidas as expressões (7.140), (7.157) e (7.158) na integral (7.193).

Após o cálculo da parcela  $U_{22}^n$  por meio da integral (7.193), pode-se calcular, por meio da expressão (3.37), a matriz  $K_2^n(U_a^n, U_b^n)$  sendo definidos os distintos vetores de deslocamentos  $U_a^n$  e  $U_b^n$  como a seguir:

$$U_a^n = \left[ u_1^a \quad v_1^a \quad w_1^a \quad \theta_1^a \quad \varphi_{y1}^a \quad \varphi_{z1}^a \quad u_2^a \quad v_2^a \quad w_2^a \quad \theta_2^a \quad \varphi_{y2}^a \quad \varphi_{z2}^a \right]^T \quad (7.194)$$

$$U_b^n = \left[ u_1^b \quad v_1^b \quad w_1^b \quad \theta_1^b \quad \varphi_{y1}^b \quad \varphi_{z1}^b \quad u_2^b \quad v_2^b \quad w_2^b \quad \theta_2^b \quad \varphi_{y2}^b \quad \varphi_{z2}^b \right]^T \quad (7.195)$$

A matriz de 2ª ordem tem a seguinte forma:

$$K_2^n(A, B) = \begin{bmatrix} R_1^2 & R_2^2 & R_3^2 & 0 & R_4^2 & R_5^2 & -R_1^2 & -R_2^2 & -R_3^2 & 0 & R_6^2 & R_7^2 \\ R_2^2 & R_8^2 & -R_9^2 & 0 & R_{10}^2 & R_{11}^2 & -R_2^2 & -R_8^2 & R_9^2 & 0 & R_{12}^2 & R_{13}^2 \\ R_3^2 & -R_9^2 & R_{14}^2 & 0 & -R_{15}^2 & -R_{16}^2 & -R_3^2 & R_9^2 & -R_{14}^2 & 0 & -R_{17}^2 & -R_{18}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_4^2 & R_{10}^2 & -R_{15}^2 & 0 & R_{19}^2 & R_{20}^2 & -R_4^2 & -R_{10}^2 & R_{15}^2 & 0 & R_{21}^2 & R_{22}^2 \\ R_5^2 & R_{11}^2 & -R_{16}^2 & 0 & R_{20}^2 & R_{23}^2 & -R_5^2 & -R_{11}^2 & R_{16}^2 & 0 & R_{24}^2 & R_{25}^2 \\ -R_1^2 & -R_2^2 & -R_3^2 & 0 & -R_4^2 & -R_5^2 & R_1^2 & R_2^2 & R_3^2 & 0 & -R_6^2 & -R_7^2 \\ -R_2^2 & -R_8^2 & R_9^2 & 0 & -R_{10}^2 & -R_{11}^2 & R_2^2 & R_8^2 & -R_9^2 & 0 & -R_{12}^2 & -R_{13}^2 \\ -R_3^2 & R_9^2 & -R_{14}^2 & 0 & R_{15}^2 & R_{16}^2 & R_3^2 & -R_9^2 & R_{14}^2 & 0 & R_{17}^2 & R_{18}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_6^2 & R_{12}^2 & -R_{17}^2 & 0 & R_{21}^2 & R_{24}^2 & -R_6^2 & -R_{12}^2 & R_{17}^2 & 0 & R_{26}^2 & R_{27}^2 \\ R_7^2 & R_{13}^2 & -R_{18}^2 & 0 & R_{22}^2 & R_{25}^2 & -R_7^2 & -R_{13}^2 & R_{18}^2 & 0 & R_{27}^2 & R_{28}^2 \end{bmatrix} \quad (7.196)$$

Os coeficientes da matriz (7.196) são os seguintes:

$$\begin{aligned} R_1^2 &= \frac{3EA}{L} \delta^a \delta^b \\ &+ \frac{EA}{30L} \left[ 36\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 3\varphi_{y0}^a (\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) - 3\varphi_{y0}^b (\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) + 4\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b - \varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b - \varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 4\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b \right] \\ &+ \frac{EA}{30L} \left[ 36\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 4\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b - \varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b - \varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 4\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\ &+ \frac{6EI_y}{L^3} \left[ 6\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 3\varphi_{y0}^a (\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) - 3\varphi_{y0}^b (\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) + 2\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b + \varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b + \varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 2\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b \right] \\ &+ \frac{6EI_z}{L^3} \left[ 6\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 2\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + \varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + \varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 2\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right] \end{aligned} \quad (7.197)$$

$$\begin{aligned} R_2^2 &= \frac{EA}{10L} \delta^a (12\varphi_{z0}^b - \varphi_{z1}^b - \varphi_{z2}^b) + \frac{EA}{10L} \delta^b (12\varphi_{z0}^a - \varphi_{z1}^a - \varphi_{z2}^a) \\ &+ \frac{18EI_z}{L^3} \delta^a (2\varphi_{z0}^b - \varphi_{z1}^b - \varphi_{z2}^b) + \frac{18EI_z}{L^3} \delta^b (2\varphi_{z0}^a - \varphi_{z1}^a - \varphi_{z2}^a) \end{aligned} \quad (7.198)$$

$$\begin{aligned} R_3^2 &= -\frac{EA}{10L} \delta^a (12\varphi_{y0}^b - \varphi_{y1}^b - \varphi_{y2}^b) - \frac{EA}{10L} \delta^b (12\varphi_{y0}^a - \varphi_{y1}^a - \varphi_{y2}^a) \\ &- \frac{18EI_y}{L^3} \delta^a (2\varphi_{y0}^b - \varphi_{y1}^b - \varphi_{y2}^b) - \frac{18EI_y}{L^3} \delta^b (2\varphi_{y0}^a - \varphi_{y1}^a - \varphi_{y2}^a) \end{aligned} \quad (7.199)$$

$$\begin{aligned} R_4^2 &= \frac{EA}{30} \delta^a (3\varphi_{y0}^b - 4\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) + \frac{EA}{30} \delta^b (3\varphi_{y0}^a - 4\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) \\ &+ \frac{6EI_y}{L^2} \delta^a (3\varphi_{y0}^b - 2\varphi_{y1}^b - \varphi_{y2}^b) + \frac{6EI_y}{L^2} \delta^b (3\varphi_{y0}^a - 2\varphi_{y1}^a - \varphi_{y2}^a) \end{aligned} \quad (7.200)$$

$$\begin{aligned} R_5^2 &= \frac{EA}{30} \delta^a (3\varphi_{z0}^b - 4\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) + \frac{EA}{30} \delta^b (3\varphi_{z0}^a - 4\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) \\ &+ \frac{6EI_z}{L^2} \delta^a (3\varphi_{z0}^b - 2\varphi_{z1}^b - \varphi_{z2}^b) + \frac{6EI_z}{L^2} \delta^b (3\varphi_{z0}^a - 2\varphi_{z1}^a - \varphi_{z2}^a) \end{aligned} \quad (7.201)$$

$$R_6^2 = \frac{EA}{30} \delta^a (3\varphi_{y0}^b + \varphi_{y1}^b - 4\varphi_{y2}^b) + \frac{EA}{30} \delta^b (3\varphi_{y0}^a + \varphi_{y1}^a - 4\varphi_{y2}^a) + \frac{6EI_y}{L^2} \delta^a (3\varphi_{y0}^b - \varphi_{y1}^b - 2\varphi_{y2}^b) + \frac{6EI_y}{L^2} \delta^b (3\varphi_{y0}^a - \varphi_{y1}^a - 2\varphi_{y2}^a) \quad (7.202)$$

$$R_7^2 = \frac{EA}{30} \delta^a (3\varphi_{z0}^b + \varphi_{z1}^b - 4\varphi_{z2}^b) + \frac{EA}{30} \delta^b (3\varphi_{z0}^a + \varphi_{z1}^a - 4\varphi_{z2}^a) + \frac{6EI_z}{L^2} \delta^a (3\varphi_{z0}^b - \varphi_{z1}^b - 2\varphi_{z2}^b) + \frac{6EI_z}{L^2} \delta^b (3\varphi_{z0}^a - \varphi_{z1}^a - 2\varphi_{z2}^a) \quad (7.203)$$

$$R_8^2 = \frac{6EA}{5L} \delta^a \delta^b + \frac{36EI_z}{L^3} \delta^a \delta^b + \frac{EA}{25L} [36\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 3\varphi_{y0}^a (\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) - 3\varphi_{y0}^b (\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) + 4\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b - \varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b - \varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 4\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b] + \frac{EA}{50L} [216\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 18\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 18\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 9\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b - \varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b - \varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 9\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b] + \frac{12EI_y}{5L^3} [6\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 3\varphi_{y0}^a (\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) - 3\varphi_{y0}^b (\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) + 2\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b + \varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b + \varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 2\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b] + \frac{2EI_z}{5L^3} [36\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 3\varphi_{y0}^a (\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) - 3\varphi_{y0}^b (\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) + 4\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b - \varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b - \varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 4\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b] + \frac{2EI_z}{5L^3} [216\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 63\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 63\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 22\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + 11\varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + 11\varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 22\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b] + \frac{72EI_{yz}}{5L^5} [54\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 27\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 27\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 16\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + 11\varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + 11\varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 16\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b] + \frac{72EI_{yz}}{5L^5} [54\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 27\varphi_{y0}^a (\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) - 27\varphi_{y0}^b (\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) + 16\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b + 11\varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b + 11\varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 16\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b] \quad (7.204)$$

$$R_9^2 = \frac{EA}{100L} (12\varphi_{y0}^a - \varphi_{y1}^a - \varphi_{y2}^a)(12\varphi_{z0}^b - \varphi_{z1}^b - \varphi_{z2}^b) + \frac{EA}{100L} (12\varphi_{y0}^b - \varphi_{y1}^b - \varphi_{y2}^b)(12\varphi_{z0}^a - \varphi_{z1}^a - \varphi_{z2}^a) + \frac{3EI_y}{5L^3} (2\varphi_{y0}^a - \varphi_{y1}^a - \varphi_{y2}^a)(12\varphi_{z0}^b - \varphi_{z1}^b - \varphi_{z2}^b) + \frac{3EI_y}{5L^3} (2\varphi_{y0}^b - \varphi_{y1}^b - \varphi_{y2}^b)(12\varphi_{z0}^a - \varphi_{z1}^a - \varphi_{z2}^a) + \frac{3EI_z}{5L^3} (12\varphi_{y0}^a - \varphi_{y1}^a - \varphi_{y2}^a)(2\varphi_{z0}^b - \varphi_{z1}^b - \varphi_{z2}^b) + \frac{3EI_z}{5L^3} (12\varphi_{y0}^b - \varphi_{y1}^b - \varphi_{y2}^b)(2\varphi_{z0}^a - \varphi_{z1}^a - \varphi_{z2}^a) + \frac{72EI_{yz}}{5L^5} [54\varphi_{y0}^a \varphi_{z0}^b - 27\varphi_{y0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 27\varphi_{z0}^a (\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b)] + \frac{72EI_{yz}}{5L^5} [54\varphi_{y0}^b \varphi_{z0}^a - 27\varphi_{y0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) - 27\varphi_{z0}^b (\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a)] + \frac{72EI_{yz}}{5L^5} [16(\varphi_{y1}^a \varphi_{z1}^b + \varphi_{y2}^a \varphi_{z2}^b) + 11(\varphi_{y1}^a \varphi_{z2}^b + \varphi_{y2}^a \varphi_{z1}^b)] + \frac{72EI_{yz}}{5L^5} [16(\varphi_{y1}^b \varphi_{z1}^a + \varphi_{y2}^b \varphi_{z2}^a) + 11(\varphi_{y1}^b \varphi_{z2}^a + \varphi_{y2}^b \varphi_{z1}^a)] \quad (7.205)$$

$$\begin{aligned}
R_{10}^2 = & \frac{EA}{300}(3\varphi_{y0}^a - 4\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a)(12\varphi_{z0}^b - \varphi_{z1}^b - \varphi_{z2}^b) + \frac{EA}{300}(3\varphi_{y0}^b - 4\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b)(12\varphi_{z0}^a - \varphi_{z1}^a - \varphi_{z2}^a) \\
& + \frac{EI_y}{5L^2}(3\varphi_{y0}^a - 2\varphi_{y1}^a - \varphi_{y2}^a)(12\varphi_{z0}^b - \varphi_{z1}^b - \varphi_{z2}^b) + \frac{EI_y}{5L^2}(3\varphi_{y0}^b - 2\varphi_{y1}^b - \varphi_{y2}^b)(12\varphi_{z0}^a - \varphi_{z1}^a - \varphi_{z2}^a) \\
& + \frac{EI_z}{5L^2}(3\varphi_{y0}^a - 4\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a)(2\varphi_{z0}^b - \varphi_{z1}^b - \varphi_{z2}^b) + \frac{EI_z}{5L^2}(3\varphi_{y0}^b - 4\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b)(2\varphi_{z0}^a - \varphi_{z1}^a - \varphi_{z2}^a) \\
& + \frac{36EI_{yz}}{5L^4} \left[ 54\varphi_{y0}^a \varphi_{z0}^b - 2\varphi_{y0}^a (16\varphi_{z1}^b + 11\varphi_{z2}^b) - 2\varphi_{z0}^a (16\varphi_{y1}^b + 11\varphi_{y2}^b) \right] \\
& + \frac{36EI_{yz}}{5L^4} \left[ 54\varphi_{y0}^b \varphi_{z0}^a - 2\varphi_{y0}^b (16\varphi_{z1}^a + 11\varphi_{z2}^a) - 2\varphi_{z0}^b (16\varphi_{y1}^a + 11\varphi_{y2}^a) \right] \\
& + \frac{36EI_{yz}}{5L^4} \left[ 21\varphi_{y1}^a \varphi_{z1}^b + 11\varphi_{y1}^a \varphi_{z2}^b + 11\varphi_{y2}^a \varphi_{z1}^b + 11\varphi_{y2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{36EI_{yz}}{5L^4} \left[ 21\varphi_{y1}^b \varphi_{z1}^a + 11\varphi_{y1}^b \varphi_{z2}^a + 11\varphi_{y2}^b \varphi_{z1}^a + 11\varphi_{y2}^b \varphi_{z2}^a \right]
\end{aligned} \tag{7.206}$$

$$\begin{aligned}
R_{11}^2 = & \frac{EA}{10} \delta^a \delta^b + \frac{18EI_z}{L^2} \delta^a \delta^b \\
& + \frac{EA}{300} \left[ 36\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 3\varphi_{y0}^a (\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) - 3\varphi_{y0}^b (\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) + 4\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b - \varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b - \varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 4\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b \right] \\
& + \frac{EA}{150} \left[ 54\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (9\varphi_{z1}^b - \varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (9\varphi_{z1}^a - \varphi_{z2}^a) + 6\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + \varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + \varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + \varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{EI_y}{5L^2} \left[ 6\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 3\varphi_{y0}^a (\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) - 3\varphi_{y0}^b (\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) + 2\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b + \varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b + \varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 2\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b \right] \\
& + \frac{EI_z}{5L^2} \left[ 36\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 3\varphi_{y0}^a (\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) - 3\varphi_{y0}^b (\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) + 4\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b - \varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b - \varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 4\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b \right] \\
& + \frac{2EI_z}{5L^2} \left[ 63\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 11\varphi_{z0}^a (2\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 11\varphi_{z0}^b (2\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 9\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + 3\varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + 3\varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 3\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{36EI_{yz}}{5L^4} \left[ 54\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 2\varphi_{z0}^a (16\varphi_{z1}^b + 11\varphi_{z2}^b) - 2\varphi_{z0}^b (16\varphi_{z1}^a + 11\varphi_{z2}^a) + 21\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + 11\varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + 11\varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 11\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{36EI_{yz}}{5L^4} \left[ 54\varphi_{z0}^b \varphi_{z0}^a - 2\varphi_{z0}^b (16\varphi_{z1}^a + 11\varphi_{z2}^a) - 2\varphi_{z0}^a (16\varphi_{z1}^b + 11\varphi_{z2}^b) + 21\varphi_{z1}^b \varphi_{z1}^a + 11\varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 11\varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + 11\varphi_{z2}^b \varphi_{z2}^a \right]
\end{aligned} \tag{7.207}$$

$$\begin{aligned}
R_{12}^2 = & \frac{EA}{300}(3\varphi_{y0}^a + \varphi_{y1}^a - 4\varphi_{y2}^a)(12\varphi_{z0}^b - \varphi_{z1}^b - \varphi_{z2}^b) + \frac{EA}{300}(3\varphi_{y0}^b + \varphi_{y1}^b - 4\varphi_{y2}^b)(12\varphi_{z0}^a - \varphi_{z1}^a - \varphi_{z2}^a) \\
& + \frac{EI_y}{5L^2}(3\varphi_{y0}^a - \varphi_{y1}^a - 2\varphi_{y2}^a)(12\varphi_{z0}^b - \varphi_{z1}^b - \varphi_{z2}^b) + \frac{EI_y}{5L^2}(3\varphi_{y0}^b - \varphi_{y1}^b - 2\varphi_{y2}^b)(12\varphi_{z0}^a - \varphi_{z1}^a - \varphi_{z2}^a) \\
& + \frac{EI_z}{5L^2}(3\varphi_{y0}^a + \varphi_{y1}^a - 4\varphi_{y2}^a)(2\varphi_{z0}^b - \varphi_{z1}^b - \varphi_{z2}^b) + \frac{EI_z}{5L^2}(3\varphi_{y0}^b + \varphi_{y1}^b - 4\varphi_{y2}^b)(2\varphi_{z0}^a - \varphi_{z1}^a - \varphi_{z2}^a) \\
& + \frac{36EI_{yz}}{5L^4} \left[ 54\varphi_{y0}^a \varphi_{z0}^b - 2\varphi_{y0}^a (11\varphi_{z1}^b + 16\varphi_{z2}^b) - 2\varphi_{z0}^a (11\varphi_{y1}^b + 16\varphi_{y2}^b) \right] \\
& + \frac{36EI_{yz}}{5L^4} \left[ 54\varphi_{y0}^b \varphi_{z0}^a - 2\varphi_{y0}^b (11\varphi_{z1}^a + 16\varphi_{z2}^a) - 2\varphi_{z0}^b (11\varphi_{y1}^a + 16\varphi_{y2}^a) \right] \\
& + \frac{36EI_{yz}}{5L^4} \left[ 11\varphi_{y1}^a \varphi_{z1}^b + 11\varphi_{y1}^a \varphi_{z2}^b + 11\varphi_{y2}^a \varphi_{z1}^b + 21\varphi_{y2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{36EI_{yz}}{5L^4} \left[ 11\varphi_{y1}^b \varphi_{z1}^a + 11\varphi_{y1}^b \varphi_{z2}^a + 11\varphi_{y2}^b \varphi_{z1}^a + 21\varphi_{y2}^b \varphi_{z2}^a \right]
\end{aligned} \tag{7.208}$$

$$\begin{aligned}
R_{13}^2 = & \frac{EA}{10} \delta^a \delta^b + \frac{18EI_z}{L^2} \delta^a \delta^b \\
& + \frac{EA}{300} \left[ 36\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 3\varphi_{y0}^a (\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) - 3\varphi_{y0}^b (\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) + 4\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b - \varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b - \varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 4\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b \right] \\
& + \frac{EA}{150} \left[ 54\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b + 3\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b - 9\varphi_{z2}^b) + 3\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a - 9\varphi_{z2}^a) + \varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + \varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + \varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 6\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{EI_y}{5L^2} \left[ 6\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 3\varphi_{y0}^a (\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) - 3\varphi_{y0}^b (\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) + 2\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b + \varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b + \varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 2\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b \right] \\
& + \frac{EI_z}{5L^2} \left[ 36\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 4\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b - \varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b - \varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 4\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{2EI_z}{5L^2} \left[ 63\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 11\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + 2\varphi_{z2}^b) - 11\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + 2\varphi_{z2}^a) + 3\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + 3\varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + 3\varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 9\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{36EI_{zz}}{5L^4} \left[ 54\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 2\varphi_{z0}^a (11\varphi_{z1}^b + 16\varphi_{z2}^b) - 2\varphi_{z0}^b (11\varphi_{z1}^a + 16\varphi_{z2}^a) + 11\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + 11\varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + 11\varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 21\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{36EI_{yz}}{5L^4} \left[ 54\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 2\varphi_{y0}^a (11\varphi_{y1}^b + 16\varphi_{y2}^b) - 2\varphi_{y0}^b (11\varphi_{y1}^a + 16\varphi_{y2}^a) + 11\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b + 11\varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b + 11\varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 21\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b \right]
\end{aligned} \tag{7.209}$$

$$\begin{aligned}
R_{14}^2 = & \frac{6EA}{5L} \delta^a \delta^b + \frac{36EI_y}{L^3} \delta^a \delta^b \\
& + \frac{EA}{50L} \left[ 216\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 18\varphi_{y0}^a (\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) - 18\varphi_{y0}^b (\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) + 9\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b - \varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b - \varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 9\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b \right] \\
& + \frac{EA}{25L} \left[ 36\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 4\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b - \varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b - \varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 4\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{2EI_y}{5L^3} \left[ 216\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 63\varphi_{y0}^a (\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) - 63\varphi_{y0}^b (\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) + 22\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b + 11\varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b + 11\varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 22\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b \right] \\
& + \frac{2EI_y}{5L^3} \left[ 36\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 4\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b - \varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b - \varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 4\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{12EI_z}{5L^3} \left[ 6\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 2\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + \varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + \varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 2\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{72EI_{yy}}{5L^5} \left[ 54\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 27\varphi_{y0}^a (\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) - 27\varphi_{y0}^b (\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) + 16\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b + 11\varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b + 11\varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 16\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b \right] \\
& + \frac{72EI_{yz}}{5L^5} \left[ 54\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 27\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 27\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 16\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + 11\varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + 11\varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 16\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right]
\end{aligned} \tag{7.210}$$

$$\begin{aligned}
R_{15}^2 = & \frac{EA}{10} \delta^a \delta^b + \frac{18EI_y}{L^2} \delta^a \delta^b \\
& + \frac{EA}{150} \left[ 54\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 3\varphi_{y0}^a (9\varphi_{y1}^b - \varphi_{y2}^b) - 3\varphi_{y0}^b (9\varphi_{y1}^a - \varphi_{y2}^a) + 6\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b + \varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b + \varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + \varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b \right] \\
& + \frac{EA}{300} \left[ 36\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 4\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b - \varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b - \varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 4\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{2EI_y}{5L^2} \left[ 63\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 11\varphi_{y0}^a (2\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) - 11\varphi_{y0}^b (2\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) + 9\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b + 3\varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b + 3\varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 3\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b \right] \\
& + \frac{EI_y}{5L^2} \left[ 36\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 4\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b - \varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b - \varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 4\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{EI_z}{5L^2} \left[ 6\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 2\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + \varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + \varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 2\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{36EI_{yy}}{5L^4} \left[ 54\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 2\varphi_{y0}^a (16\varphi_{y1}^b + 11\varphi_{y2}^b) - 2\varphi_{y0}^b (16\varphi_{y1}^a + 11\varphi_{y2}^a) + 21\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b + 11\varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b + 11\varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 11\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b \right] \\
& + \frac{36EI_{yz}}{5L^4} \left[ 54\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 2\varphi_{z0}^a (16\varphi_{z1}^b + 11\varphi_{z2}^b) - 2\varphi_{z0}^b (16\varphi_{z1}^a + 11\varphi_{z2}^a) + 21\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + 11\varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + 11\varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 11\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right]
\end{aligned} \tag{7.211}$$

$$\begin{aligned}
R_{16}^2 = & \frac{EA}{300} (12\varphi_{y0}^a - \varphi_{y1}^a - \varphi_{y2}^a) (3\varphi_{z0}^b - 4\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) + \frac{EA}{300} (12\varphi_{y0}^b - \varphi_{y1}^b - \varphi_{y2}^b) (3\varphi_{z0}^a - 4\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) \\
& + \frac{EI_y}{5L^2} (2\varphi_{y0}^a - \varphi_{y1}^a - \varphi_{y2}^a) (3\varphi_{z0}^b - 4\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) + \frac{EI_y}{5L^2} (2\varphi_{y0}^b - \varphi_{y1}^b - \varphi_{y2}^b) (3\varphi_{z0}^a - 4\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) \\
& + \frac{EI_z}{5L^2} (12\varphi_{y0}^a - \varphi_{y1}^a - \varphi_{y2}^a) (3\varphi_{z0}^b - 2\varphi_{z1}^b - \varphi_{z2}^b) + \frac{EI_z}{5L^2} (12\varphi_{y0}^b - \varphi_{y1}^b - \varphi_{y2}^b) (3\varphi_{z0}^a - 2\varphi_{z1}^a - \varphi_{z2}^a) \\
& + \frac{36EI_{yz}}{5L^4} [54\varphi_{y0}^a \varphi_{z0}^b - 2\varphi_{y0}^a (16\varphi_{z1}^b + 11\varphi_{z2}^b) - 2\varphi_{z0}^a (16\varphi_{y1}^b + 11\varphi_{y2}^b)] \\
& + \frac{36EI_{yz}}{5L^4} [54\varphi_{y0}^b \varphi_{z0}^a - 2\varphi_{y0}^b (16\varphi_{z1}^a + 11\varphi_{z2}^a) - 2\varphi_{z0}^b (16\varphi_{y1}^a + 11\varphi_{y2}^a)] \\
& + \frac{36EI_{yz}}{5L^4} [21\varphi_{y1}^a \varphi_{z1}^b + 11\varphi_{y1}^a \varphi_{z2}^b + 11\varphi_{y2}^a \varphi_{z1}^b + 11\varphi_{y2}^a \varphi_{z2}^b] \\
& + \frac{36EI_{yz}}{5L^4} [21\varphi_{y1}^b \varphi_{z1}^a + 11\varphi_{y1}^b \varphi_{z2}^a + 11\varphi_{y2}^b \varphi_{z1}^a + 11\varphi_{y2}^b \varphi_{z2}^a]
\end{aligned} \tag{7.212}$$

$$\begin{aligned}
R_{17}^2 = & \frac{EA}{10} \delta^a \delta^b + \frac{18EI_y}{L^2} \delta^a \delta^b \\
& + \frac{EA}{150} [54\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b + 3\varphi_{y0}^a (\varphi_{y1}^b - 9\varphi_{y2}^b) + 3\varphi_{y0}^b (\varphi_{y1}^a - 9\varphi_{y2}^a) + \varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b + \varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b + \varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 6\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b] \\
& + \frac{EA}{300} [36\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 4\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b - \varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b - \varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 4\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b] \\
& + \frac{2EI_y}{5L^2} [63\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 11\varphi_{y0}^a (\varphi_{y1}^b + 2\varphi_{y2}^b) - 11\varphi_{y0}^b (\varphi_{y1}^a + 2\varphi_{y2}^a) + 3\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b + 3\varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b + 3\varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 9\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b] \\
& + \frac{EI_y}{5L^2} [36\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 4\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b - \varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b - \varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 4\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b] \\
& + \frac{EI_z}{5L^2} [6\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 2\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + \varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + \varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 2\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b] \\
& + \frac{36EI_{yy}}{5L^4} [54\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 2\varphi_{y0}^a (11\varphi_{y1}^b + 16\varphi_{y2}^b) - 2\varphi_{y0}^b (11\varphi_{y1}^a + 16\varphi_{y2}^a) + 11\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b + 11\varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b + 11\varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 21\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b] \\
& + \frac{36EI_{yz}}{5L^4} [54\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 2\varphi_{z0}^a (11\varphi_{z1}^b + 16\varphi_{z2}^b) - 2\varphi_{z0}^b (11\varphi_{z1}^a + 16\varphi_{z2}^a) + 11\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + 11\varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + 11\varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 21\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b]
\end{aligned} \tag{7.213}$$

$$\begin{aligned}
R_{18}^2 = & \frac{EA}{300} (12\varphi_{y0}^a - \varphi_{y1}^a - \varphi_{y2}^a) (3\varphi_{z0}^b + \varphi_{z1}^b - 4\varphi_{z2}^b) + \frac{EA}{300} (12\varphi_{y0}^b - \varphi_{y1}^b - \varphi_{y2}^b) (3\varphi_{z0}^a + \varphi_{z1}^a - 4\varphi_{z2}^a) \\
& + \frac{EI_y}{5L^2} (2\varphi_{y0}^a - \varphi_{y1}^a - \varphi_{y2}^a) (3\varphi_{z0}^b + \varphi_{z1}^b - 4\varphi_{z2}^b) + \frac{EI_y}{5L^2} (2\varphi_{y0}^b - \varphi_{y1}^b - \varphi_{y2}^b) (3\varphi_{z0}^a + \varphi_{z1}^a - 4\varphi_{z2}^a) \\
& + \frac{EI_z}{5L^2} (12\varphi_{y0}^a - \varphi_{y1}^a - \varphi_{y2}^a) (3\varphi_{z0}^b - \varphi_{z1}^b - 2\varphi_{z2}^b) + \frac{EI_z}{5L^2} (12\varphi_{y0}^b - \varphi_{y1}^b - \varphi_{y2}^b) (3\varphi_{z0}^a - \varphi_{z1}^a - 2\varphi_{z2}^a) \\
& + \frac{36EI_{yz}}{5L^4} [54\varphi_{y0}^a \varphi_{z0}^b - 2\varphi_{y0}^a (11\varphi_{z1}^b + 16\varphi_{z2}^b) - 2\varphi_{z0}^a (11\varphi_{y1}^b + 16\varphi_{y2}^b)] \\
& + \frac{36EI_{yz}}{5L^4} [54\varphi_{y0}^b \varphi_{z0}^a - 2\varphi_{y0}^b (11\varphi_{z1}^a + 16\varphi_{z2}^a) - 2\varphi_{z0}^b (11\varphi_{y1}^a + 16\varphi_{y2}^a)] \\
& + \frac{36EI_{yz}}{5L^4} [11\varphi_{y1}^a \varphi_{z1}^b + 11\varphi_{y1}^a \varphi_{z2}^b + 11\varphi_{y2}^a \varphi_{z1}^b + 21\varphi_{y2}^a \varphi_{z2}^b] \\
& + \frac{36EI_{yz}}{5L^4} [11\varphi_{y1}^b \varphi_{z1}^a + 11\varphi_{y1}^b \varphi_{z2}^a + 11\varphi_{y2}^b \varphi_{z1}^a + 21\varphi_{y2}^b \varphi_{z2}^a]
\end{aligned} \tag{7.214}$$

$$\begin{aligned}
R_{19}^2 = & \frac{2EAL}{15} \delta^a \delta^b + \frac{12EI_y}{L} \delta^a \delta^b \\
& + \frac{EAL}{150} \left[ 27\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - \varphi_{y0}^a (6\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) - \varphi_{y0}^b (6\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) + 8\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b - 2\varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b - 2\varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 3\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b \right] \\
& + \frac{EAL}{225} \left[ 36\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 4\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b - \varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b - \varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 4\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{2EI_y}{5L} \left[ 22\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 3\varphi_{y0}^a (3\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) - 3\varphi_{y0}^b (3\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) + 8\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b + \varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b + \varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 2\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b \right] \\
& + \frac{2EI_y}{15L} \left[ 36\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 4\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b - \varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b - \varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 4\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{4EI_z}{15L} \left[ 6\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 2\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + \varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + \varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 2\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{12EI_{yy}}{5L^3} \left[ 96\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 3\varphi_{y0}^a (21\varphi_{y1}^b + 11\varphi_{y2}^b) - 3\varphi_{y0}^b (21\varphi_{y1}^a + 11\varphi_{y2}^a) + 44\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b + 19\varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b + 19\varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 14\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b \right] \\
& + \frac{12EI_{yz}}{5L^3} \left[ 96\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (21\varphi_{z1}^b + 11\varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (21\varphi_{z1}^a + 11\varphi_{z2}^a) + 44\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + 19\varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + 19\varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 14\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right]
\end{aligned} \tag{7.215}$$

$$\begin{aligned}
R_{20}^2 = & \frac{EAL}{900} (3\varphi_{y0}^a - 4\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a)(3\varphi_{z0}^b - 4\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) + \frac{EAL}{900} (3\varphi_{y0}^b - 4\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b)(3\varphi_{z0}^a - 4\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) \\
& + \frac{EI_y}{15L} (3\varphi_{y0}^a - 2\varphi_{y1}^a - \varphi_{y2}^a)(3\varphi_{z0}^b - 4\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) + \frac{EI_y}{15L} (3\varphi_{y0}^b - 2\varphi_{y1}^b - \varphi_{y2}^b)(3\varphi_{z0}^a - 4\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) \\
& + \frac{EI_z}{15L} (3\varphi_{y0}^a - 4\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a)(3\varphi_{z0}^b - 2\varphi_{z1}^b - \varphi_{z2}^b) + \frac{EI_z}{15L} (3\varphi_{y0}^b - 4\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b)(3\varphi_{z0}^a - 2\varphi_{z1}^a - \varphi_{z2}^a) \\
& + \frac{12EI_{yz}}{5L^3} \left[ 96\varphi_{y0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{y0}^a (21\varphi_{z1}^b + 11\varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{y0}^b (21\varphi_{z1}^a + 11\varphi_{z2}^a) \right] \\
& + \frac{12EI_{yz}}{5L^3} \left[ 96\varphi_{y0}^b \varphi_{z0}^a - 3\varphi_{y0}^b (21\varphi_{z1}^a + 11\varphi_{z2}^a) - 3\varphi_{y0}^a (21\varphi_{z1}^b + 11\varphi_{z2}^b) \right] \\
& + \frac{12EI_{yz}}{5L^3} \left[ 44\varphi_{y1}^a \varphi_{z1}^b + 19\varphi_{y1}^a \varphi_{z2}^b + 19\varphi_{y2}^a \varphi_{z1}^b + 14\varphi_{y2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{12EI_{yz}}{5L^3} \left[ 44\varphi_{y1}^b \varphi_{z1}^a + 19\varphi_{y1}^b \varphi_{z2}^a + 19\varphi_{y2}^b \varphi_{z1}^a + 14\varphi_{y2}^b \varphi_{z2}^a \right]
\end{aligned} \tag{7.216}$$

$$\begin{aligned}
R_{21}^2 = & -\frac{EAL}{30} \delta^a \delta^b + \frac{6EI_y}{L} \delta^a \delta^b \\
& - \frac{EAL}{150} \left[ 3\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b + \varphi_{y0}^a (\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) + \varphi_{y0}^b (\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) + 2\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b - 3\varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b - 3\varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 2\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b \right] \\
& - \frac{EAL}{900} \left[ 36\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 4\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b - \varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b - \varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 4\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{2EI_y}{5L} \left[ 11\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 3\varphi_{y0}^a (\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) - 3\varphi_{y0}^b (\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) + \varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b + 2\varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b + 2\varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + \varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b \right] \\
& + \frac{EI_y}{15L} \left[ 36\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 4\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b - \varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b - \varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 4\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& - \frac{EI_z}{15L} \left[ 6\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 2\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + \varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + \varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 2\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{12EI_{yy}}{5L^3} \left[ 66\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 33\varphi_{y0}^a (\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) - 33\varphi_{y0}^b (\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) + 19\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b + 14\varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b + 14\varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 19\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b \right] \\
& + \frac{12EI_{yz}}{5L^3} \left[ 66\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 33\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 33\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 19\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + 14\varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + 14\varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 19\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right]
\end{aligned} \tag{7.217}$$

$$\begin{aligned}
R_{22}^2 = & \frac{EAL}{900} (3\varphi_{y0}^a - 4\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) (3\varphi_{z0}^b + \varphi_{z1}^b - 4\varphi_{z2}^b) + \frac{EAL}{900} (3\varphi_{y0}^b - 4\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) (3\varphi_{z0}^a + \varphi_{z1}^a - 4\varphi_{z2}^a) \\
& + \frac{EI_y}{15L} (3\varphi_{y0}^a - 2\varphi_{y1}^a - \varphi_{y2}^a) (3\varphi_{z0}^b + \varphi_{z1}^b - 4\varphi_{z2}^b) + \frac{EI_y}{15L} (3\varphi_{y0}^b - 2\varphi_{y1}^b - \varphi_{y2}^b) (3\varphi_{z0}^a + \varphi_{z1}^a - 4\varphi_{z2}^a) \\
& + \frac{EI_z}{15L} (3\varphi_{y0}^a - 4\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) (3\varphi_{z0}^b - \varphi_{z1}^b - 2\varphi_{z2}^b) + \frac{EI_z}{15L} (3\varphi_{y0}^b - 4\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) (3\varphi_{z0}^a - \varphi_{z1}^a - 2\varphi_{z2}^a) \\
& + \frac{12EI_{yz}}{5L^3} \left[ 66\varphi_{y0}^a \varphi_{z0}^b - 33\varphi_{y0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 33\varphi_{z0}^a (\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) \right] \\
& + \frac{12EI_{yz}}{5L^3} \left[ 66\varphi_{y0}^b \varphi_{z0}^a - 33\varphi_{y0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) - 33\varphi_{z0}^b (\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) \right] \\
& + \frac{12EI_{yz}}{5L^3} \left[ 19\varphi_{y1}^a \varphi_{z1}^b + 14\varphi_{y1}^a \varphi_{z2}^b + 14\varphi_{y2}^a \varphi_{z1}^b + 19\varphi_{y2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{12EI_{yz}}{5L^3} \left[ 19\varphi_{y1}^b \varphi_{z1}^a + 14\varphi_{y1}^b \varphi_{z2}^a + 14\varphi_{y2}^b \varphi_{z1}^a + 19\varphi_{y2}^b \varphi_{z2}^a \right]
\end{aligned} \tag{7.218}$$

$$\begin{aligned}
R_{23}^2 = & \frac{2EAL}{15} \delta^a \delta^b + \frac{12EI_z}{L} \delta^a \delta^b \\
& + \frac{EAL}{225} \left[ 36\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 3\varphi_{y0}^a (\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) - 3\varphi_{y0}^b (\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) + 4\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b - \varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b - \varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 4\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b \right] \\
& + \frac{EAL}{150} \left[ 27\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - \varphi_{z0}^a (6\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - \varphi_{z0}^b (6\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 8\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b - 2\varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b - 2\varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 3\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{4EI_y}{15L} \left[ 6\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 3\varphi_{y0}^a (\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) - 3\varphi_{y0}^b (\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) + 2\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b + \varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b + \varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 2\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b \right] \\
& + \frac{2EI_z}{15L} \left[ 36\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 3\varphi_{y0}^a (\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) - 3\varphi_{y0}^b (\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) + 4\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b - \varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b - \varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 4\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b \right] \\
& + \frac{2EI_z}{5L} \left[ 22\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (3\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (3\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 8\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + \varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + \varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 2\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{12EI_{yz}}{5L^3} \left[ 96\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (21\varphi_{z1}^b + 11\varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (21\varphi_{z1}^a + 11\varphi_{z2}^a) + 44\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + 19\varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + 19\varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 14\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{12EI_{yz}}{5L^3} \left[ 96\varphi_{z0}^b \varphi_{z0}^a - 3\varphi_{z0}^b (21\varphi_{z1}^a + 11\varphi_{z2}^a) - 3\varphi_{z0}^a (21\varphi_{z1}^b + 11\varphi_{z2}^b) + 44\varphi_{z1}^b \varphi_{z1}^a + 19\varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 19\varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + 14\varphi_{z2}^b \varphi_{z2}^a \right]
\end{aligned} \tag{7.219}$$

$$\begin{aligned}
R_{24}^2 = & \frac{EAL}{900} (3\varphi_{y0}^a + \varphi_{y1}^a - 4\varphi_{y2}^a) (3\varphi_{z0}^b - 4\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) + \frac{EAL}{900} (3\varphi_{y0}^b + \varphi_{y1}^b - 4\varphi_{y2}^b) (3\varphi_{z0}^a - 4\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) \\
& + \frac{EI_y}{15L} (3\varphi_{y0}^a - \varphi_{y1}^a - 2\varphi_{y2}^a) (3\varphi_{z0}^b - 4\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) + \frac{EI_y}{15L} (3\varphi_{y0}^b - \varphi_{y1}^b - 2\varphi_{y2}^b) (3\varphi_{z0}^a - 4\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) \\
& + \frac{EI_z}{15L} (3\varphi_{y0}^a + \varphi_{y1}^a - 4\varphi_{y2}^a) (3\varphi_{z0}^b - 2\varphi_{z1}^b - \varphi_{z2}^b) + \frac{EI_z}{15L} (3\varphi_{y0}^b + \varphi_{y1}^b - 4\varphi_{y2}^b) (3\varphi_{z0}^a - 2\varphi_{z1}^a - \varphi_{z2}^a) \\
& + \frac{12EI_{yz}}{5L^3} \left[ 66\varphi_{y0}^a \varphi_{z0}^b - 33\varphi_{y0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 33\varphi_{z0}^a (\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) \right] \\
& + \frac{12EI_{yz}}{5L^3} \left[ 66\varphi_{y0}^b \varphi_{z0}^a - 33\varphi_{y0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) - 33\varphi_{z0}^b (\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) \right] \\
& + \frac{12EI_{yz}}{5L^3} \left[ 19\varphi_{y1}^a \varphi_{z1}^b + 14\varphi_{y1}^a \varphi_{z2}^b + 14\varphi_{y2}^a \varphi_{z1}^b + 19\varphi_{y2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{12EI_{yz}}{5L^3} \left[ 19\varphi_{y1}^b \varphi_{z1}^a + 14\varphi_{y1}^b \varphi_{z2}^a + 14\varphi_{y2}^b \varphi_{z1}^a + 19\varphi_{y2}^b \varphi_{z2}^a \right]
\end{aligned} \tag{7.220}$$

$$\begin{aligned}
R_{25}^2 = & -\frac{EAL}{30} \delta^a \delta^b + \frac{6EI_z}{L} \delta^a \delta^b \\
& - \frac{EAL}{900} \left[ 36\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 3\varphi_{y0}^a (\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) - 3\varphi_{y0}^b (\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) + 4\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b - \varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b - \varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 4\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b \right] \\
& - \frac{EAL}{150} \left[ 3\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b + \varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) + \varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 2\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b - 3\varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b - 3\varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 2\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& - \frac{EI_y}{15L} \left[ 6\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 3\varphi_{y0}^a (\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) - 3\varphi_{y0}^b (\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) + 2\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b + \varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b + \varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 2\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b \right] \\
& + \frac{EI_z}{15L} \left[ 36\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 3\varphi_{y0}^a (\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) - 3\varphi_{y0}^b (\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) + 4\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b - \varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b - \varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 4\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b \right] \\
& + \frac{2EI_z}{5L} \left[ 11\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + \varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + 2\varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + 2\varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + \varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{12EI_{zz}}{5L^3} \left[ 66\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 33\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 33\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 19\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + 14\varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + 14\varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 19\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{12EI_{yz}}{5L^3} \left[ 66\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 33\varphi_{y0}^a (\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) - 33\varphi_{y0}^b (\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) + 19\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b + 14\varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b + 14\varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 19\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b \right]
\end{aligned} \tag{7.221}$$

$$\begin{aligned}
R_{26}^2 = & \frac{2EAL}{15} \delta^a \delta^b + \frac{12EI_y}{L} \delta^a \delta^b \\
& + \frac{EAL}{150} \left[ 27\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - \varphi_{y0}^a (\varphi_{y1}^b + 6\varphi_{y2}^b) - \varphi_{y0}^b (\varphi_{y1}^a + 6\varphi_{y2}^a) + 3\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b - 2\varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b - 2\varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 8\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b \right] \\
& + \frac{EAL}{225} \left[ 36\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 4\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b - \varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b - \varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 4\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{2EI_y}{5L} \left[ 22\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 3\varphi_{y0}^a (\varphi_{y1}^b + 3\varphi_{y2}^b) - 3\varphi_{y0}^b (\varphi_{y1}^a + 3\varphi_{y2}^a) + 2\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b + \varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b + \varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 8\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b \right] \\
& + \frac{2EI_y}{15L} \left[ 36\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 4\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b - \varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b - \varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 4\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{4EI_z}{15L} \left[ 6\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + \varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + \varphi_{z2}^a) + 2\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + \varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + \varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 2\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{12EI_{yy}}{5L^3} \left[ 96\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 3\varphi_{y0}^a (11\varphi_{y1}^b + 21\varphi_{y2}^b) - 3\varphi_{y0}^b (11\varphi_{y1}^a + 21\varphi_{y2}^a) + 14\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b + 19\varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b + 19\varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 44\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b \right] \\
& + \frac{12EI_{yz}}{5L^3} \left[ 96\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (11\varphi_{z1}^b + 21\varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (11\varphi_{z1}^a + 21\varphi_{z2}^a) + 14\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + 19\varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + 19\varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 44\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right]
\end{aligned} \tag{7.222}$$

$$\begin{aligned}
R_{27}^2 = & \frac{EAL}{900} (3\varphi_{y0}^a + \varphi_{y1}^a - 4\varphi_{y2}^a) (3\varphi_{z0}^b + \varphi_{z1}^b - 4\varphi_{z2}^b) + \frac{EAL}{900} (3\varphi_{y0}^b + \varphi_{y1}^b - 4\varphi_{y2}^b) (3\varphi_{z0}^a + \varphi_{z1}^a - 4\varphi_{z2}^a) \\
& + \frac{EI_y}{15L} (3\varphi_{y0}^a - \varphi_{y1}^a - 2\varphi_{y2}^a) (3\varphi_{z0}^b + \varphi_{z1}^b - 4\varphi_{z2}^b) + \frac{EI_y}{15L} (3\varphi_{y0}^b - \varphi_{y1}^b - 2\varphi_{y2}^b) (3\varphi_{z0}^a + \varphi_{z1}^a - 4\varphi_{z2}^a) \\
& + \frac{EI_z}{15L} (3\varphi_{y0}^a + \varphi_{y1}^a - 4\varphi_{y2}^a) (3\varphi_{z0}^b - \varphi_{z1}^b - 2\varphi_{z2}^b) + \frac{EI_z}{15L} (3\varphi_{y0}^b + \varphi_{y1}^b - 4\varphi_{y2}^b) (3\varphi_{z0}^a - \varphi_{z1}^a - 2\varphi_{z2}^a) \\
& + \frac{12EI_{yz}}{5L^3} \left[ 96\varphi_{y0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{y0}^a (11\varphi_{z1}^b + 21\varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{y0}^b (11\varphi_{z1}^a + 21\varphi_{z2}^a) \right] \\
& + \frac{12EI_{yz}}{5L^3} \left[ 96\varphi_{y0}^b \varphi_{z0}^a - 3\varphi_{y0}^b (11\varphi_{z1}^a + 21\varphi_{z2}^a) - 3\varphi_{y0}^a (11\varphi_{z1}^b + 21\varphi_{z2}^b) \right] \\
& + \frac{12EI_{yz}}{5L^3} \left[ 14\varphi_{y1}^a \varphi_{z1}^b + 19\varphi_{y1}^a \varphi_{z2}^b + 19\varphi_{y2}^a \varphi_{z1}^b + 44\varphi_{y2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{12EI_{yz}}{5L^3} \left[ 14\varphi_{y1}^b \varphi_{z1}^a + 19\varphi_{y1}^b \varphi_{z2}^a + 19\varphi_{y2}^b \varphi_{z1}^a + 44\varphi_{y2}^b \varphi_{z2}^a \right]
\end{aligned} \tag{7.223}$$

$$\begin{aligned}
R_{28}^2 = & \frac{2EAL}{15} \delta^a \delta^b + \frac{12EI_z}{L} \delta^a \delta^b \\
& + \frac{EAL}{225} \left[ 36\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 3\varphi_{y0}^a (\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) - 3\varphi_{y0}^b (\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) + 4\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b - \varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b - \varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 4\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b \right] \\
& + \frac{EAL}{150} \left[ 27\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - \varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + 6\varphi_{z2}^b) - \varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + 6\varphi_{z2}^a) + 3\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b - 2\varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b - 2\varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 8\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{4EI_y}{15L} \left[ 6\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 3\varphi_{y0}^a (\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) - 3\varphi_{y0}^b (\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) + 2\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b + \varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b + \varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 2\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b \right] \\
& + \frac{2EI_z}{15L} \left[ 36\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 3\varphi_{y0}^a (\varphi_{y1}^b + \varphi_{y2}^b) - 3\varphi_{y0}^b (\varphi_{y1}^a + \varphi_{y2}^a) + 4\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b - \varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b - \varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 4\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b \right] \\
& + \frac{2EI_z}{5L} \left[ 22\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (\varphi_{z1}^b + 3\varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (\varphi_{z1}^a + 3\varphi_{z2}^a) + 2\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + \varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + \varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 8\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{12EI_{yz}}{5L^3} \left[ 96\varphi_{z0}^a \varphi_{z0}^b - 3\varphi_{z0}^a (11\varphi_{z1}^b + 21\varphi_{z2}^b) - 3\varphi_{z0}^b (11\varphi_{z1}^a + 21\varphi_{z2}^a) + 14\varphi_{z1}^a \varphi_{z1}^b + 19\varphi_{z1}^a \varphi_{z2}^b + 19\varphi_{z1}^b \varphi_{z2}^a + 44\varphi_{z2}^a \varphi_{z2}^b \right] \\
& + \frac{12EI_{yz}}{5L^3} \left[ 96\varphi_{y0}^a \varphi_{y0}^b - 3\varphi_{y0}^a (11\varphi_{y1}^b + 21\varphi_{y2}^b) - 3\varphi_{y0}^b (11\varphi_{y1}^a + 21\varphi_{y2}^a) + 14\varphi_{y1}^a \varphi_{y1}^b + 19\varphi_{y1}^a \varphi_{y2}^b + 19\varphi_{y1}^b \varphi_{y2}^a + 44\varphi_{y2}^a \varphi_{y2}^b \right]
\end{aligned} \tag{7.224}$$

sendo

$$\delta^a = \frac{(u_2^a - u_1^a)}{L} \tag{7.225}$$

$$\delta^b = \frac{(u_2^b - u_1^b)}{L} \tag{7.226}$$

$$\phi_{y0}^a = -\frac{(w_2^a - w_1^a)}{L} \tag{7.227}$$

$$\phi_{y0}^b = -\frac{(w_2^b - w_1^b)}{L} \tag{7.228}$$

$$\phi_{z0}^a = \frac{(v_2^a - v_1^a)}{L} \tag{7.229}$$

$$\phi_{z0}^b = \frac{(v_2^b - v_1^b)}{L} \tag{7.230}$$

Evidentemente se pode calcular esta última matriz para o caso particular em que  $U_a^n = U_b^n = U^n$ , o que conduz a termos menos extensos, como a seguir definidos:

$$\begin{aligned}
R_1^2 &= \frac{3EA}{L} \delta^2 \\
&+ \frac{EA}{15L} \left[ 18\varphi_{y0}^2 - 3\varphi_{y0}(\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) + 2\varphi_{y1}^2 - \varphi_{y1}\varphi_{y2} + 2\varphi_{y2}^2 \right] \\
&+ \frac{EA}{15L} \left[ 18\varphi_{z0}^2 - 3\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + 2\varphi_{z1}^2 - \varphi_{z1}\varphi_{z2} + 2\varphi_{z2}^2 \right] \\
&+ \frac{12EI_y}{L^3} \left[ 3\varphi_{y0}^2 - 3\varphi_{y0}(\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) + \varphi_{y1}^2 + \varphi_{y1}\varphi_{y2} + \varphi_{y2}^2 \right] \\
&+ \frac{12EI_z}{L^3} \left[ 3\varphi_{z0}^2 - 3\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + \varphi_{z1}^2 + \varphi_{z1}\varphi_{z2} + \varphi_{z2}^2 \right]
\end{aligned} \tag{7.231}$$

$$R_2^2 = \frac{EA}{5L} \delta(12\varphi_{z0} - \varphi_{z1} - \varphi_{z2}) + \frac{36EI_z}{L^3} \delta(2\varphi_{z0} - \varphi_{z1} - \varphi_{z2}) \tag{7.232}$$

$$R_3^2 = -\frac{EA}{5L} \delta(12\varphi_{y0} - \varphi_{y1} - \varphi_{y2}) - \frac{36EI_y}{L^3} \delta(2\varphi_{y0} - \varphi_{y1} - \varphi_{y2}) \tag{7.233}$$

$$R_4^2 = \frac{EA}{15} \delta(3\varphi_{y0} - 4\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) + \frac{12EI_y}{L^2} \delta(3\varphi_{y0} - 2\varphi_{y1} - \varphi_{y2}) \tag{7.234}$$

$$R_5^2 = \frac{EA}{15} \delta(3\varphi_{z0} - 4\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + \frac{12EI_z}{L^2} \delta(3\varphi_{z0} - 2\varphi_{z1} - \varphi_{z2}) \tag{7.235}$$

$$R_6^2 = \frac{EA}{15} \delta(3\varphi_{y0} + \varphi_{y1} - 4\varphi_{y2}) + \frac{12EI_y}{L^2} \delta(3\varphi_{y0} - \varphi_{y1} - 2\varphi_{y2}) \tag{7.236}$$

$$R_7^2 = \frac{EA}{15} \delta(3\varphi_{z0} + \varphi_{z1} - 4\varphi_{z2}) + \frac{12EI_z}{L^2} \delta(3\varphi_{z0} - \varphi_{z1} - 2\varphi_{z2}) \tag{7.237}$$

$$\begin{aligned}
R_8^2 = & \frac{6EA}{5L} \delta^2 + \frac{36EI_z}{L^3} \delta^2 \\
& + \frac{2EA}{25L} \left[ 18\varphi_{y0}^2 - 3\varphi_{y0}(\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) + 2\varphi_{y1}^2 - \varphi_{y1}\varphi_{y2} + 2\varphi_{y2}^2 \right] \\
& + \frac{EA}{50L} \left[ 216\varphi_{z0}^2 - 36\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + 9\varphi_{z1}^2 - 2\varphi_{z1}\varphi_{z2} + 9\varphi_{z2}^2 \right] \\
& + \frac{24EI_y}{5L^3} \left[ 3\varphi_{y0}^2 - 3\varphi_{y0}(\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) + \varphi_{y1}^2 + \varphi_{y1}\varphi_{y2} + \varphi_{y2}^2 \right] \\
& + \frac{4EI_z}{5L^3} \left[ 18\varphi_{y0}^2 - 3\varphi_{y0}(\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) + 2\varphi_{y1}^2 - \varphi_{y1}\varphi_{y2} + 2\varphi_{y2}^2 \right] \\
& + \frac{4EI_z}{5L^3} \left[ 108\varphi_{z0}^2 - 63\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + 11(\varphi_{z1}^2 + \varphi_{z1}\varphi_{z2} + \varphi_{z2}^2) \right] \\
& + \frac{144EI_{zz}}{5L^5} \left[ 27\varphi_{z0}^2 - 27\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + 8\varphi_{z1}^2 + 11\varphi_{z1}\varphi_{z2} + 8\varphi_{z2}^2 \right] \\
& + \frac{144EI_{yz}}{5L^5} \left[ 27\varphi_{y0}^2 - 27\varphi_{y0}(\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) + 8\varphi_{y1}^2 + 11\varphi_{y1}\varphi_{y2} + 8\varphi_{y2}^2 \right]
\end{aligned} \tag{7.238}$$

$$\begin{aligned}
R_9^2 = & \frac{EA}{50L} (12\varphi_{y0} - \varphi_{y1} - \varphi_{y2})(12\varphi_{z0} - \varphi_{z1} - \varphi_{z2}) \\
& + \frac{6EI_y}{5L^3} (2\varphi_{y0} - \varphi_{y1} - \varphi_{y2})(12\varphi_{z0} - \varphi_{z1} - \varphi_{z2}) \\
& + \frac{6EI_z}{5L^3} (12\varphi_{y0} - \varphi_{y1} - \varphi_{y2})(2\varphi_{z0} - \varphi_{z1} - \varphi_{z2}) \\
& + \frac{144EI_{yz}}{5L^5} \left[ 54\varphi_{y0}\varphi_{z0} - 27\varphi_{y0}(\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) - 27\varphi_{z0}(\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) \right] \\
& + \frac{144EI_{yz}}{5L^5} \left[ 16(\varphi_{y1}\varphi_{z1} + \varphi_{y2}\varphi_{z2}) + 11(\varphi_{y1}\varphi_{z2} + \varphi_{y2}\varphi_{z1}) \right]
\end{aligned} \tag{7.239}$$

$$\begin{aligned}
R_{10}^2 = & \frac{EA}{150} (3\varphi_{y0} - 4\varphi_{y1} + \varphi_{y2})(12\varphi_{z0} - \varphi_{z1} - \varphi_{z2}) \\
& + \frac{2EI_y}{5L^2} (3\varphi_{y0} - 2\varphi_{y1} - \varphi_{y2})(12\varphi_{z0} - \varphi_{z1} - \varphi_{z2}) \\
& + \frac{2EI_z}{5L^2} (3\varphi_{y0} - 4\varphi_{y1} + \varphi_{y2})(2\varphi_{z0} - \varphi_{z1} - \varphi_{z2}) \\
& + \frac{72EI_{yz}}{5L^4} \left[ 54\varphi_{y0}\varphi_{z0} - \varphi_{y0}(32\varphi_{z1} + 22\varphi_{z2}) - \varphi_{z0}(32\varphi_{y1} + 22\varphi_{y2}) \right] \\
& + \frac{72EI_{yz}}{5L^4} \left[ 21\varphi_{y1}\varphi_{z1} + 11\varphi_{y2}\varphi_{z2} + 11(\varphi_{y1}\varphi_{z2} + \varphi_{y2}\varphi_{z1}) \right]
\end{aligned} \tag{7.240}$$

$$\begin{aligned}
R_{11}^2 = & \frac{EA}{10} \delta^2 + \frac{18EI_z}{L^2} \delta^2 \\
& + \frac{EA}{150} \left[ 18\varphi_{y0}^2 - 3\varphi_{y0}(\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) + 2\varphi_{y1}^2 - \varphi_{y1}\varphi_{y2} + 2\varphi_{y2}^2 \right] \\
& + \frac{EA}{150} \left[ 54\varphi_{z0}^2 - 6\varphi_{z0}(9\varphi_{z1} - \varphi_{z2}) + 6\varphi_{z1}^2 + 2\varphi_{z1}\varphi_{z2} + \varphi_{z2}^2 \right] \\
& + \frac{2EI_y}{5L^2} \left[ 3\varphi_{y0}^2 - 3\varphi_{y0}(\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) + \varphi_{y1}^2 + \varphi_{y1}\varphi_{z2} + \varphi_{y2}^2 \right] \\
& + \frac{2EI_z}{5L^2} \left[ 18\varphi_{y0}^2 - 3\varphi_{y0}(\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) + 2\varphi_{y1}^2 - \varphi_{y1}\varphi_{y2} + 2\varphi_{y2}^2 \right] \\
& + \frac{2EI_z}{5L^2} \left[ 63\varphi_{z0}^2 - 22\varphi_{z0}(2\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + 3(3\varphi_{z1}^2 + 2\varphi_{z1}\varphi_{z2} + \varphi_{z2}^2) \right] \\
& + \frac{36EI_{zz}}{5L^4} \left[ 54\varphi_{z0}^2 - 4\varphi_{z0}(16\varphi_{z1} + 11\varphi_{z2}) + 21\varphi_{z1}^2 + 22\varphi_{z1}\varphi_{z2} + 11\varphi_{z2}^2 \right] \\
& + \frac{36EI_{yz}}{5L^4} \left[ 54\varphi_{y0}^2 - 4\varphi_{y0}(16\varphi_{y1} + 11\varphi_{y2}) + 21\varphi_{y1}^2 + 22\varphi_{y1}\varphi_{y2} + 11\varphi_{y2}^2 \right]
\end{aligned} \tag{7.241}$$

$$\begin{aligned}
R_{12}^2 = & \frac{EA}{150} (3\varphi_{y0} + \varphi_{y1} - 4\varphi_{y2})(12\varphi_{z0} - \varphi_{z1} - \varphi_{z2}) \\
& + \frac{2EI_y}{5L^2} (3\varphi_{y0} - \varphi_{y1} - 2\varphi_{y2})(12\varphi_{z0} - \varphi_{z1} - \varphi_{z2}) \\
& + \frac{2EI_z}{5L^2} (3\varphi_{y0} + \varphi_{y1} - 4\varphi_{y2})(2\varphi_{z0} - \varphi_{z1} - \varphi_{z2}) \\
& + \frac{72EI_{yz}}{5L^4} \left[ 54\varphi_{y0}\varphi_{z0} - \varphi_{y0}(22\varphi_{z1} + 32\varphi_{z2}) - \varphi_{z0}(22\varphi_{y1} + 32\varphi_{y2}) \right] \\
& + \frac{72EI_{yz}}{5L^4} \left[ 11\varphi_{y1}\varphi_{z1} + 21\varphi_{y2}\varphi_{z2} + 11(\varphi_{y1}\varphi_{z2} + \varphi_{y2}\varphi_{z1}) \right]
\end{aligned} \tag{7.242}$$

$$\begin{aligned}
R_{13}^2 = & \frac{EA}{10} \delta^2 + \frac{18EI_z}{L^2} \delta^2 \\
& + \frac{EA}{150} \left[ 18\varphi_{y0}^2 - 3\varphi_{y0}(\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) + 2\varphi_{y1}^2 - \varphi_{y1}\varphi_{y2} + 2\varphi_{y2}^2 \right] \\
& + \frac{EA}{150} \left[ 54\varphi_{z0}^2 + 6\varphi_{z0}(\varphi_{z1} - 9\varphi_{z2}) + \varphi_{z1}^2 + 2\varphi_{z1}\varphi_{z2} + 6\varphi_{z2}^2 \right] \\
& + \frac{2EI_y}{5L^2} \left[ 3\varphi_{y0}^2 - 3\varphi_{y0}(\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) + \varphi_{y1}^2 + \varphi_{y1}\varphi_{y2} + \varphi_{y2}^2 \right] \\
& + \frac{2EI_z}{5L^2} \left[ 18\varphi_{y0}^2 - 3\varphi_{y0}(\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) + 2\varphi_{y1}^2 - \varphi_{y1}\varphi_{y2} + 2\varphi_{y2}^2 \right] \\
& + \frac{2EI_z}{5L^2} \left[ 63\varphi_{z0}^2 - 22\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + 2\varphi_{z2}) + 3(\varphi_{z1}^2 + 2\varphi_{z1}\varphi_{z2} + 3\varphi_{z2}^2) \right] \\
& + \frac{36EI_{zz}}{5L^4} \left[ 54\varphi_{z0}^2 - 4\varphi_{z0}(11\varphi_{z1} + 16\varphi_{z2}) + 11\varphi_{z1}^2 + 22\varphi_{z1}\varphi_{z2} + 21\varphi_{z2}^2 \right] \\
& + \frac{36EI_{yz}}{5L^4} \left[ 54\varphi_{y0}^2 - 4\varphi_{y0}(11\varphi_{y1} + 16\varphi_{y2}) + 11\varphi_{y1}^2 + 22\varphi_{y1}\varphi_{y2} + 21\varphi_{y2}^2 \right]
\end{aligned} \tag{7.243}$$

$$\begin{aligned}
R_{14}^2 = & \frac{6EA}{5L} \delta^2 + \frac{36EI_y}{L^3} \delta^2 \\
& + \frac{EA}{50L} \left[ 216\varphi_{y0}^2 - 36\varphi_{y0}(\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) + 9\varphi_{y1}^2 - 2\varphi_{y1}\varphi_{y2} + 9\varphi_{y2}^2 \right] \\
& + \frac{2EA}{25L} \left[ 18\varphi_{z0}^2 - 3\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + 2\varphi_{z1}^2 - \varphi_{z1}\varphi_{z2} + 2\varphi_{z2}^2 \right] \\
& + \frac{4EI_y}{5L^3} \left[ 108\varphi_{y0}^2 - 63\varphi_{y0}(\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) + 11(\varphi_{y1}^2 + \varphi_{y1}\varphi_{y2} + \varphi_{y2}^2) \right] \\
& + \frac{4EI_y}{5L^3} \left[ 18\varphi_{z0}^2 - 3\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + 2\varphi_{z1}^2 - \varphi_{z1}\varphi_{z2} + 2\varphi_{z2}^2 \right] \\
& + \frac{24EI_z}{5L^3} \left[ 3\varphi_{z0}^2 - 3\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + \varphi_{z1}^2 + \varphi_{z1}\varphi_{z2} + \varphi_{z2}^2 \right] \\
& + \frac{144EI_{yy}}{5L^5} \left[ 27\varphi_{y0}^2 - 27\varphi_{y0}(\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) + 8\varphi_{y1}^2 + 11\varphi_{y1}\varphi_{y2} + 8\varphi_{y2}^2 \right] \\
& + \frac{144EI_{yz}}{5L^5} \left[ 27\varphi_{z0}^2 - 27\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + 8\varphi_{z1}^2 + 11\varphi_{z1}\varphi_{z2} + 8\varphi_{z2}^2 \right]
\end{aligned} \tag{7.244}$$

$$\begin{aligned}
R_{15}^2 = & \frac{EA}{10} \delta^2 + \frac{18EI_y}{L^2} \delta^2 \\
& + \frac{EA}{150} \left[ 54\varphi_{y0}^2 - 6\varphi_{y0} (9\varphi_{y1} - \varphi_{y2}) + 6\varphi_{y1}^2 + 2\varphi_{y1} \varphi_{y2} + \varphi_{y2}^2 \right] \\
& + \frac{EA}{150} \left[ 18\varphi_{z0}^2 - 3\varphi_{z0} (\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + 2\varphi_{z1}^2 - \varphi_{z1} \varphi_{z2} + 2\varphi_{z2}^2 \right] \\
& + \frac{2EI_y}{5L^2} \left[ 63\varphi_{y0}^2 - 22\varphi_{y0} (2\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) + 3(3\varphi_{y1}^2 + 2\varphi_{y1} \varphi_{y2} + \varphi_{y2}^2) \right] \\
& + \frac{2EI_y}{5L^2} \left[ 18\varphi_{z0}^2 - 3\varphi_{z0} (\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + 2\varphi_{z1}^2 - \varphi_{z1} \varphi_{z2} + 2\varphi_{z2}^2 \right] \\
& + \frac{2EI_z}{5L^2} \left[ 3\varphi_{z0}^2 - 3\varphi_{z0} (\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + \varphi_{z1}^2 + \varphi_{z1} \varphi_{z2} + \varphi_{z2}^2 \right] \\
& + \frac{36EI_{yy}}{5L^4} \left[ 54\varphi_{y0}^2 - 4\varphi_{y0} (16\varphi_{y1} + 11\varphi_{y2}) + 21\varphi_{y1}^2 + 22\varphi_{y1} \varphi_{y2} + 11\varphi_{y2}^2 \right] \\
& + \frac{36EI_{yz}}{5L^4} \left[ 54\varphi_{z0}^2 - 4\varphi_{z0} (16\varphi_{z1} + 11\varphi_{z2}) + 21\varphi_{z1}^2 + 22\varphi_{z1} \varphi_{z2} + 11\varphi_{z2}^2 \right]
\end{aligned} \tag{7.245}$$

$$\begin{aligned}
R_{16}^2 = & \frac{EA}{150} (12\varphi_{y0} - \varphi_{y1} - \varphi_{y2})(3\varphi_{z0} - 4\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) \\
& + \frac{2EI_y}{5L^2} (2\varphi_{y0} - \varphi_{y1} - \varphi_{y2})(3\varphi_{z0} - 4\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) \\
& + \frac{2EI_z}{5L^2} (12\varphi_{y0} - \varphi_{y1} - \varphi_{y2})(3\varphi_{z0} - 2\varphi_{z1} - \varphi_{z2}) \\
& + \frac{72EI_{yz}}{5L^4} \left[ 54\varphi_{y0} \varphi_{z0} - \varphi_{y0} (32\varphi_{z1} + 22\varphi_{z2}) - \varphi_{z0} (32\varphi_{y1} + 22\varphi_{y2}) \right] \\
& + \frac{72EI_{yz}}{5L^4} \left[ 21\varphi_{y1} \varphi_{z1} + 11\varphi_{y2} \varphi_{z2} + 11(\varphi_{y1} \varphi_{z2} + \varphi_{y2} \varphi_{z1}) \right]
\end{aligned} \tag{7.246}$$

$$\begin{aligned}
R_{17}^2 = & \frac{EA}{10} \delta^2 + \frac{18EI_y}{L^2} \delta^2 \\
& + \frac{EA}{150} \left[ 54\varphi_{y0}^2 + 6\varphi_{y0}(\varphi_{y1} - 9\varphi_{y2}) + \varphi_{y1}^2 + 2\varphi_{y1}\varphi_{y2} + 6\varphi_{y2}^2 \right] \\
& + \frac{EA}{150} \left[ 18\varphi_{z0}^2 - 3\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + 2\varphi_{z1}^2 - \varphi_{z1}\varphi_{z2} + 2\varphi_{z2}^2 \right] \\
& + \frac{2EI_y}{5L^2} \left[ 63\varphi_{y0}^2 - 22\varphi_{y0}(\varphi_{y1} + 2\varphi_{y2}) + 3(\varphi_{y1}^2 + 2\varphi_{y1}\varphi_{y2} + 3\varphi_{y2}^2) \right] \\
& + \frac{2EI_y}{5L^2} \left[ 18\varphi_{z0}^2 - 3\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + 2\varphi_{z1}^2 - \varphi_{z1}\varphi_{z2} + 2\varphi_{z2}^2 \right] \\
& + \frac{2EI_z}{5L^2} \left[ 3\varphi_{z0}^2 - 3\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + \varphi_{z1}^2 + \varphi_{z1}\varphi_{z2} + \varphi_{z2}^2 \right] \\
& + \frac{36EI_{yy}}{5L^4} \left[ 54\varphi_{y0}^2 - 4\varphi_{y0}(11\varphi_{y1} + 16\varphi_{y2}) + 11\varphi_{y1}^2 + 22\varphi_{y1}\varphi_{y2} + 21\varphi_{y2}^2 \right] \\
& + \frac{36EI_{yz}}{5L^4} \left[ 54\varphi_{z0}^2 - 4\varphi_{z0}(11\varphi_{z1} + 16\varphi_{z2}) + 11\varphi_{z1}^2 + 22\varphi_{z1}\varphi_{z2} + 21\varphi_{z2}^2 \right]
\end{aligned} \tag{7.247}$$

$$\begin{aligned}
R_{18}^2 = & \frac{EA}{150} (12\varphi_{y0} - \varphi_{y1} - \varphi_{y2})(3\varphi_{z0} + \varphi_{z1} - 4\varphi_{z2}) \\
& + \frac{2EI_y}{5L^2} (2\varphi_{y0} - \varphi_{y1} - \varphi_{y2})(3\varphi_{z0} + \varphi_{z1} - 4\varphi_{z2}) \\
& + \frac{2EI_z}{5L^2} (12\varphi_{y0} - \varphi_{y1} - \varphi_{y2})(3\varphi_{z0} - \varphi_{z1} - 2\varphi_{z2}) \\
& + \frac{72EI_{yz}}{5L^4} \left[ 54\varphi_{y0}\varphi_{z0} - \varphi_{y0}(22\varphi_{z1} + 32\varphi_{z2}) - \varphi_{z0}(22\varphi_{y1} + 32\varphi_{y2}) \right] \\
& + \frac{72EI_{yz}}{5L^4} \left[ 11\varphi_{y1}\varphi_{z1} + 21\varphi_{y2}\varphi_{z2} + 11(\varphi_{y1}\varphi_{z2} + \varphi_{y2}\varphi_{z1}) \right]
\end{aligned} \tag{7.248}$$

$$\begin{aligned}
R_{19}^2 = & \frac{2EAL}{15} \delta^2 + \frac{12EI_y}{L} \delta^2 \\
& + \frac{EAL}{150} \left[ 27\varphi_{y0}^2 - 2\varphi_{y0} (6\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) + 8\varphi_{y1}^2 - 4\varphi_{y1} \varphi_{y2} + 3\varphi_{y2}^2 \right] \\
& + \frac{2EAL}{225} \left[ 18\varphi_{z0}^2 - 3\varphi_{z0} (\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + 2\varphi_{z1}^2 - \varphi_{z1} \varphi_{z2} + 2\varphi_{z2}^2 \right] \\
& + \frac{4EI_y}{5L} \left[ 11\varphi_{y0}^2 - 3\varphi_{y0} (3\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) + 4\varphi_{y1}^2 + \varphi_{y1} \varphi_{y2} + \varphi_{y2}^2 \right] \\
& + \frac{4EI_y}{15L} \left[ 18\varphi_{z0}^2 - 3\varphi_{z0} (\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + 2\varphi_{z1}^2 - \varphi_{z1} \varphi_{z2} + 2\varphi_{z2}^2 \right] \\
& + \frac{8EI_z}{15L} \left[ 3\varphi_{z0}^2 - 3\varphi_{z0} (\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + \varphi_{z1}^2 + \varphi_{z1} \varphi_{z2} + \varphi_{z2}^2 \right] \\
& + \frac{24EI_{yy}}{5L^3} \left[ 48\varphi_{y0}^2 - 3\varphi_{y0} (21\varphi_{y1} + 11\varphi_{y2}) + 22\varphi_{y1}^2 + 19\varphi_{y1} \varphi_{y2} + 7\varphi_{y2}^2 \right] \\
& + \frac{24EI_{yz}}{5L^3} \left[ 48\varphi_{z0}^2 - 3\varphi_{z0} (21\varphi_{z1} + 11\varphi_{z2}) + 22\varphi_{z1}^2 + 19\varphi_{z1} \varphi_{z2} + 7\varphi_{z2}^2 \right]
\end{aligned} \tag{7.249}$$

$$\begin{aligned}
R_{20}^2 = & \frac{EAL}{450} (3\varphi_{y0} - 4\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) (3\varphi_{z0} - 4\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) \\
& + \frac{2EI_y}{15L} (3\varphi_{y0} - 2\varphi_{y1} - \varphi_{y2}) (3\varphi_{z0} - 4\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) \\
& + \frac{2EI_z}{15L} (3\varphi_{y0} - 4\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) (3\varphi_{z0} - 2\varphi_{z1} - \varphi_{z2}) \\
& + \frac{24EI_{yz}}{5L^3} \left[ 96\varphi_{y0} \varphi_{z0} - 3\varphi_{y0} (21\varphi_{z1} + 11\varphi_{z2}) - 3\varphi_{z0} (21\varphi_{y1} + 11\varphi_{y2}) \right] \\
& + \frac{24EI_{yz}}{5L^3} \left[ 44\varphi_{y1} \varphi_{z1} + 14\varphi_{y2} \varphi_{z2} + 19(\varphi_{y1} \varphi_{z2} + \varphi_{y2} \varphi_{z1}) \right]
\end{aligned} \tag{7.250}$$

$$\begin{aligned}
R_{21}^2 = & -\frac{EAL}{30}\delta^2 + \frac{6EI_y}{L}\delta^2 \\
& -\frac{EAL}{150}\left[3\varphi_{y0}^2 + 2\varphi_{y0}(\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) + 2(\varphi_{y1}^2 - 3\varphi_{y1}\varphi_{y2} + \varphi_{y2}^2)\right] \\
& -\frac{EAL}{450}\left[18\varphi_{z0}^2 - 3\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + 2\varphi_{z1}^2 - \varphi_{z1}\varphi_{z2} + 2\varphi_{z2}^2\right] \\
& +\frac{2EI_y}{5L}\left[11\varphi_{y0}^2 - 6\varphi_{y0}(\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) + \varphi_{y1}^2 + 4\varphi_{y1}\varphi_{y2} + \varphi_{y2}^2\right] \\
& +\frac{2EI_y}{15L}\left[18\varphi_{z0}^2 - 3\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + 2\varphi_{z1}^2 - \varphi_{z1}\varphi_{z2} + 2\varphi_{z2}^2\right] \\
& -\frac{2EI_z}{15L}\left[3\varphi_{z0}^2 - 3\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + \varphi_{z1}^2 + \varphi_{z1}\varphi_{z2} + \varphi_{z2}^2\right] \\
& +\frac{12EI_{yy}}{5L^3}\left[66\varphi_{y0}^2 - 66\varphi_{y0}(\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) + 19\varphi_{y1}^2 + 28\varphi_{y1}\varphi_{y2} + 19\varphi_{y2}^2\right] \\
& +\frac{12EI_{yz}}{5L^3}\left[66\varphi_{z0}^2 - 66\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + 19\varphi_{z1}^2 + 28\varphi_{z1}\varphi_{z2} + 19\varphi_{z2}^2\right]
\end{aligned} \tag{7.251}$$

$$\begin{aligned}
R_{22}^2 = & \frac{EAL}{450}(3\varphi_{y0} - 4\varphi_{y1} + \varphi_{y2})(3\varphi_{z0} + \varphi_{z1} - 4\varphi_{z2}) \\
& +\frac{2EI_y}{15L}(3\varphi_{y0} - 2\varphi_{y1} - \varphi_{y2})(3\varphi_{z0} + \varphi_{z1} - 4\varphi_{z2}) \\
& +\frac{2EI_z}{15L}(3\varphi_{y0} - 4\varphi_{y1} + \varphi_{y2})(3\varphi_{z0} - \varphi_{z1} - 2\varphi_{z2}) \\
& +\frac{24EI_{yz}}{5L^3}\left[66\varphi_{y0}\varphi_{z0} - 33\varphi_{y0}(\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) - 33\varphi_{z0}(\varphi_{y1} + \varphi_{y2})\right] \\
& +\frac{24EI_{yz}}{5L^3}\left[19(\varphi_{y1}\varphi_{z1} + \varphi_{y2}\varphi_{z2}) + 14(\varphi_{y1}\varphi_{z2} + \varphi_{y2}\varphi_{z1})\right]
\end{aligned} \tag{7.252}$$

$$\begin{aligned}
R_{23}^2 = & \frac{2EAL}{15} \delta^2 + \frac{12EI_z}{L} \delta^2 \\
& + \frac{2EAL}{225} \left[ 18\varphi_{y0}^2 - 3\varphi_{y0}(\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) + 2\varphi_{y1}^2 - \varphi_{y1}\varphi_{y2} + 2\varphi_{y2}^2 \right] \\
& + \frac{EAL}{150} \left[ 27\varphi_{z0}^2 - 2\varphi_{z0}(6\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + 8\varphi_{z1}^2 - 4\varphi_{z1}\varphi_{z2} + 3\varphi_{z2}^2 \right] \\
& + \frac{8EI_y}{15L} \left[ 3\varphi_{y0}^2 - 3\varphi_{y0}(\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) + \varphi_{y1}^2 + \varphi_{y1}\varphi_{y2} + \varphi_{y2}^2 \right] \\
& + \frac{4EI_z}{15L} \left[ 18\varphi_{y0}^2 - 3\varphi_{y0}(\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) + 2\varphi_{y1}^2 - \varphi_{y1}\varphi_{y2} + 2\varphi_{y2}^2 \right] \\
& + \frac{4EI_z}{5L} \left[ 11\varphi_{z0}^2 - 3\varphi_{z0}(3\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + 4\varphi_{z1}^2 + \varphi_{z1}\varphi_{z2} + \varphi_{z2}^2 \right] \\
& + \frac{24EI_{zz}}{5L^3} \left[ 48\varphi_{z0}^2 - 3\varphi_{z0}(21\varphi_{z1} + 11\varphi_{z2}) + 22\varphi_{z1}^2 + 19\varphi_{z1}\varphi_{z2} + 7\varphi_{z2}^2 \right] \\
& + \frac{24EI_{yz}}{5L^3} \left[ 48\varphi_{y0}^2 - 3\varphi_{y0}(21\varphi_{y1} + 11\varphi_{y2}) + 22\varphi_{y1}^2 + 19\varphi_{y1}\varphi_{y2} + 7\varphi_{y2}^2 \right]
\end{aligned} \tag{7.253}$$

$$\begin{aligned}
R_{24}^2 = & \frac{EAL}{450} (3\varphi_{y0} + \varphi_{y1} - 4\varphi_{y2})(3\varphi_{z0} - 4\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) \\
& + \frac{2EI_y}{15L} (3\varphi_{y0} - \varphi_{y1} - 2\varphi_{y2})(3\varphi_{z0} - 4\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) \\
& + \frac{2EI_z}{15L} (3\varphi_{y0} + \varphi_{y1} - 4\varphi_{y2})(3\varphi_{z0} - 2\varphi_{z1} - \varphi_{z2}) \\
& + \frac{24EI_{yz}}{5L^3} \left[ 66\varphi_{y0}\varphi_{z0} - 33\varphi_{y0}(\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) - 33\varphi_{z0}(\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) \right] \\
& + \frac{24EI_{yz}}{5L^3} \left[ 19(\varphi_{y1}\varphi_{z1} + \varphi_{y2}\varphi_{z2}) + 14(\varphi_{y1}\varphi_{z2} + \varphi_{y2}\varphi_{z1}) \right]
\end{aligned} \tag{7.254}$$

$$\begin{aligned}
R_{25}^2 = & -\frac{EAL}{30}\delta^2 + \frac{6EI_z}{L}\delta^2 \\
& -\frac{EAL}{450}\left[18\varphi_{y0}^2 - 3\varphi_{y0}(\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) + 2\varphi_{y1}^2 - \varphi_{y1}\varphi_{y2} + 2\varphi_{y2}^2\right] \\
& -\frac{EAL}{150}\left[3\varphi_{z0}^2 + 2\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + 2(\varphi_{z1}^2 - 3\varphi_{z1}\varphi_{z2} + \varphi_{z2}^2)\right] \\
& -\frac{2EI_y}{15L}\left[3\varphi_{y0}^2 - 3\varphi_{y0}(\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) + \varphi_{y1}^2 + \varphi_{y1}\varphi_{y2} + \varphi_{y2}^2\right] \\
& +\frac{2EI_z}{15L}\left[18\varphi_{y0}^2 - 3\varphi_{y0}(\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) + 2\varphi_{y1}^2 - \varphi_{y1}\varphi_{y2} + 2\varphi_{y2}^2\right] \\
& +\frac{2EI_z}{5L}\left[11\varphi_{z0}^2 - 6\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + \varphi_{z1}^2 + 4\varphi_{z1}\varphi_{z2} + \varphi_{z2}^2\right] \\
& +\frac{12EI_{zz}}{5L^3}\left[66\varphi_{z0}^2 - 66\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + 19\varphi_{z1}^2 + 28\varphi_{z1}\varphi_{z2} + 19\varphi_{z2}^2\right] \\
& +\frac{12EI_{yz}}{5L^3}\left[66\varphi_{y0}^2 - 66\varphi_{y0}(\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) + 19\varphi_{y1}^2 + 28\varphi_{y1}\varphi_{y2} + 19\varphi_{y2}^2\right]
\end{aligned} \tag{7.255}$$

$$\begin{aligned}
R_{26}^2 = & \frac{2EAL}{15}\delta^2 + \frac{12EI_y}{L}\delta^2 \\
& +\frac{EAL}{150}\left[27\varphi_{y0}^2 - 2\varphi_{y0}(\varphi_{y1} + 6\varphi_{y2}) + 3\varphi_{y1}^2 - 4\varphi_{y1}\varphi_{y2} + 8\varphi_{y2}^2\right] \\
& +\frac{2EAL}{225}\left[18\varphi_{z0}^2 - 3\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + 2\varphi_{z1}^2 - \varphi_{z1}\varphi_{z2} + 2\varphi_{z2}^2\right] \\
& +\frac{4EI_y}{5L}\left[11\varphi_{y0}^2 - 3\varphi_{y0}(\varphi_{y1} + 3\varphi_{y2}) + \varphi_{y1}^2 + \varphi_{y1}\varphi_{y2} + 4\varphi_{y2}^2\right] \\
& +\frac{4EI_y}{15L}\left[18\varphi_{z0}^2 - 3\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + 2\varphi_{z1}^2 - \varphi_{z1}\varphi_{z2} + 2\varphi_{z2}^2\right] \\
& +\frac{8EI_z}{15L}\left[3\varphi_{z0}^2 - 3\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + \varphi_{z2}) + \varphi_{z1}^2 + \varphi_{z1}\varphi_{z2} + \varphi_{z2}^2\right] \\
& +\frac{24EI_{yy}}{5L^3}\left[48\varphi_{y0}^2 - 3\varphi_{y0}(11\varphi_{y1} + 21\varphi_{y2}) + 7\varphi_{y1}^2 + 19\varphi_{y1}\varphi_{y2} + 22\varphi_{y2}^2\right] \\
& +\frac{24EI_{yz}}{5L^3}\left[48\varphi_{z0}^2 - 3\varphi_{z0}(11\varphi_{z1} + 21\varphi_{z2}) + 7\varphi_{z1}^2 + 19\varphi_{z1}\varphi_{z2} + 22\varphi_{z2}^2\right]
\end{aligned} \tag{7.256}$$

$$\begin{aligned}
R_{27}^2 = & \frac{EAL}{450} (3\varphi_{y0} + \varphi_{y1} - 4\varphi_{y2}) (3\varphi_{z0} + \varphi_{z1} - 4\varphi_{z2}) \\
& + \frac{2EI_y}{15L} (3\varphi_{y0} - \varphi_{y1} - 2\varphi_{y2}) (3\varphi_{z0} + \varphi_{z1} - 4\varphi_{z2}) \\
& + \frac{2EI_z}{15L} (3\varphi_{y0} + \varphi_{y1} - 4\varphi_{y2}) (3\varphi_{z0} - \varphi_{z1} - 2\varphi_{z2}) \\
& + \frac{24EI_{yz}}{5L^3} \left[ 96\varphi_{y0}\varphi_{z0} - 3\varphi_{y0}(11\varphi_{z1} + 21\varphi_{z2}) - 3\varphi_{z0}(11\varphi_{y1} + 21\varphi_{y2}) \right] \\
& + \frac{24EI_{yz}}{5L^3} \left[ 14\varphi_{y1}\varphi_{z1} + 44\varphi_{y2}\varphi_{z2} + 19(\varphi_{y1}\varphi_{z2} + \varphi_{y2}\varphi_{z1}) \right]
\end{aligned} \tag{7.257}$$

$$\begin{aligned}
R_{28}^2 = & \frac{2EAL}{15} \delta^2 + \frac{12EI_z}{L} \delta^2 \\
& + \frac{2EAL}{225} \left[ 18\varphi_{y0}^2 - 3\varphi_{y0}(\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) + 2\varphi_{y1}^2 - \varphi_{y1}\varphi_{y2} + 2\varphi_{y2}^2 \right] \\
& + \frac{EAL}{150} \left[ 27\varphi_{z0}^2 - 2\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + 6\varphi_{z2}) + 3\varphi_{z1}^2 - 4\varphi_{z1}\varphi_{z2} + 8\varphi_{z2}^2 \right] \\
& + \frac{8EI_y}{15L} \left[ 3\varphi_{y0}^2 - 3\varphi_{y0}(\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) + \varphi_{y1}^2 + \varphi_{y1}\varphi_{y2} + \varphi_{y2}^2 \right] \\
& + \frac{4EI_z}{15L} \left[ 18\varphi_{y0}^2 - 3\varphi_{y0}(\varphi_{y1} + \varphi_{y2}) + 2\varphi_{y1}^2 - \varphi_{y1}\varphi_{y2} + 2\varphi_{y2}^2 \right] \\
& + \frac{4EI_z}{5L} \left[ 11\varphi_{z0}^2 - 3\varphi_{z0}(\varphi_{z1} + 3\varphi_{z2}) + \varphi_{z1}^2 + \varphi_{z1}\varphi_{z2} + 4\varphi_{z2}^2 \right] \\
& + \frac{24EI_{zz}}{5L^3} \left[ 48\varphi_{z0}^2 - 3\varphi_{z0}(11\varphi_{z1} + 21\varphi_{z2}) + 7\varphi_{z1}^2 + 19\varphi_{z1}\varphi_{z2} + 22\varphi_{z2}^2 \right] \\
& + \frac{24EI_{yz}}{5L^3} \left[ 48\varphi_{y0}^2 - 3\varphi_{y0}(11\varphi_{y1} + 21\varphi_{y2}) + 7\varphi_{y1}^2 + 19\varphi_{y1}\varphi_{y2} + 22\varphi_{y2}^2 \right]
\end{aligned} \tag{7.258}$$

onde,

$$\delta = \frac{(u_2 - u_1)}{L} \tag{7.259}$$

Deve-se notar que todas as matrizes aqui apresentadas, tanto as correspondentes dos elementos planos como tridimensionais, possuem a propriedade de simetria. Além disso, observa-se que, de forma geral, é possível correlacionar as matrizes de pórtico plano com as de pórtico tridimensional com a consideração de nulidade dos graus de liberdade  $w_1$ ,  $\theta_1$ ,  $\varphi_{y1}$ ,  $w_2$ ,  $\theta_2$ ,  $\varphi_{y2}$  e das propriedades  $I_y$ ,  $I_{yy}$  e  $I_{yz}$  do elemento tridimensional. Desta maneira tem-se a relação:

$$K^P = \begin{pmatrix} k_{1,1}^{3D} & k_{1,2}^{3D} & k_{1,6}^{3D} & k_{1,7}^{3D} & k_{1,8}^{3D} & k_{1,12}^{3D} \\ k_{1,2}^{3D} & k_{2,2}^{3D} & k_{2,6}^{3D} & k_{2,7}^{3D} & k_{2,8}^{3D} & k_{2,12}^{3D} \\ k_{1,6}^{3D} & k_{2,6}^{3D} & k_{6,6}^{3D} & k_{6,7}^{3D} & k_{6,8}^{3D} & k_{6,12}^{3D} \\ k_{1,7}^{3D} & k_{2,7}^{3D} & k_{6,7}^{3D} & k_{7,7}^{3D} & k_{7,8}^{3D} & k_{7,12}^{3D} \\ k_{1,8}^{3D} & k_{2,8}^{3D} & k_{6,8}^{3D} & k_{7,8}^{3D} & k_{8,8}^{3D} & k_{8,12}^{3D} \\ k_{1,12}^{3D} & k_{2,12}^{3D} & k_{6,12}^{3D} & k_{7,12}^{3D} & k_{8,12}^{3D} & k_{12,12}^{3D} \end{pmatrix} \quad (7.260)$$

Na expressão (7.260), a matriz  $K^P$  representa, de maneira genérica, cada uma das matrizes de rigidez do elemento de pórtico plano e os termos com o superescrito 3D correspondem aos termos das respectivas matrizes de rigidez do elemento de pórtico tridimensional.

## Capítulo 8

### *Programas de Análises Assintóticas*

Com base no Programa STAP, desenvolvido por BATHE [117], foram implementados durante este trabalho dois programas para análise estrutural, que foram: ASSINT, que possibilita análise por expansões em série de potência e o AMAC, no qual se utilizam as composições modais. Além desses programas também foram utilizados neste trabalho para comparação de resultados, o programa NLARCA desenvolvido por ALVES [25] que também tem como base o programa STAP, ressaltando-se, entretanto, que foi realizada uma revisão no mesmo, sendo eliminadas algumas incorreções não percebidas por aquele autor.

Vale ressaltar que o programa ASSINT, quando implementado no RLA não apresentou melhorias em relação ao RLT e devido ao custo computacional ser menor no RLT este foi mantido para o cálculo dos modos assintóticos utilizados no programa AMAC.

O programa AMAC por sua vez foi desenvolvido no RLA e além dos modos assintóticos utilizados por ALVES [76] nesta nova formulação foram também automatizadas as aproximações por combinação dos modos ( $U_i$ ) advindos das expansões em série de potência (6.29), com modos ( $\varphi_i$ ) advindos do problema de autovalor (4.26), por meio dos processos de seleção de modos LI descrito no capítulo 6, sendo a ortogonalização efetuada por meio do Processo de Gram-Schmidt Modificado. O processo iterativo adotado para solução dos sistemas algébricos de equações modais foi o de Newton-Raphson com restrição do comprimento de arco cilíndrico. Deve-se ressaltar que nos programas AMAC e ASSINT utilizados neste trabalho foram consideradas as matrizes de rigidez de elementos de pórticos definidas a partir do tensor de Green-Lagrange completo com deformações uniformizadas apresentadas anteriormente no capítulo 7.

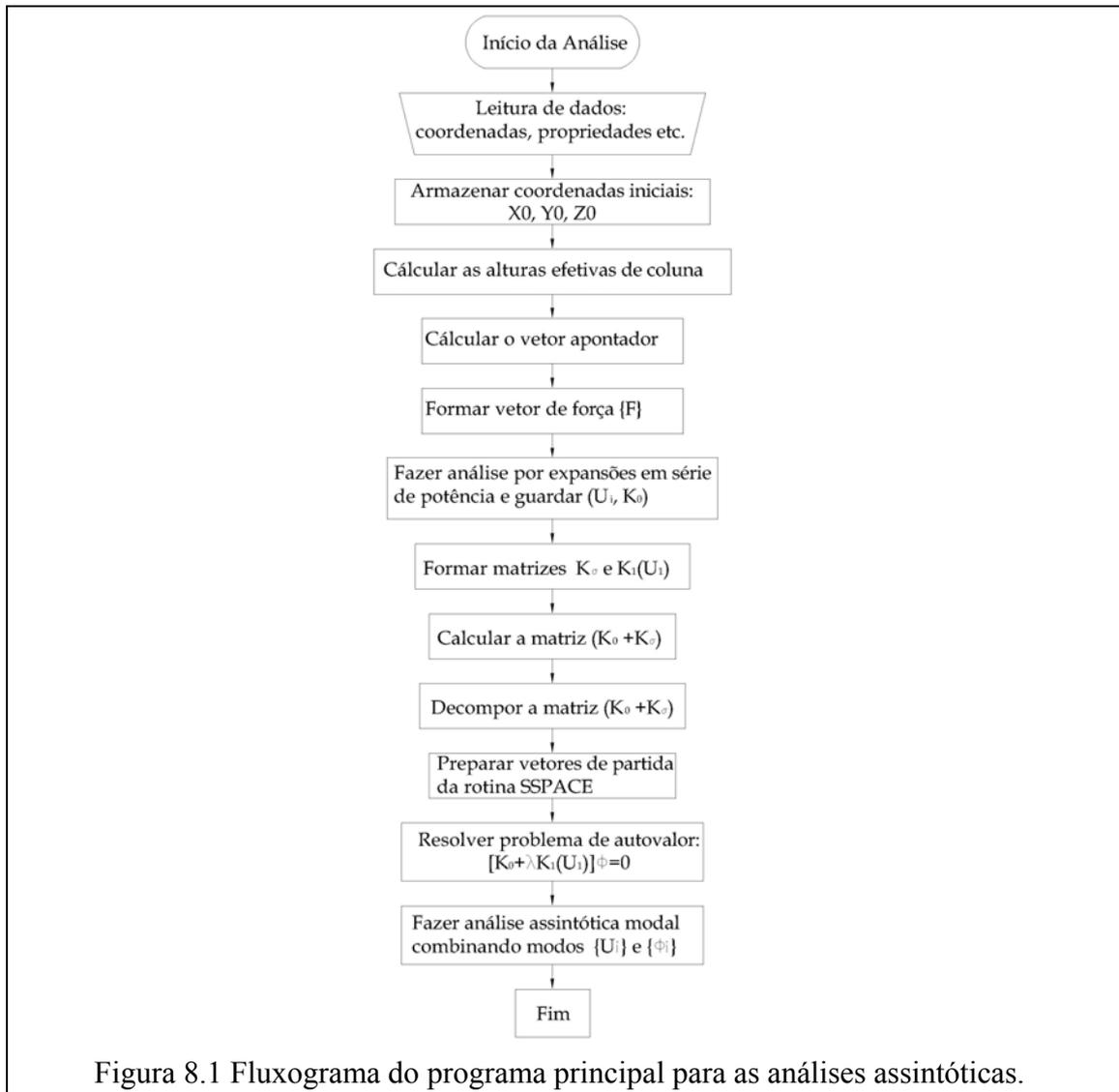
Apresenta-se a seguir uma breve descrição das principais sub-rotinas utilizadas nos programas ASSINT e AMAC:

- PLNOS – realiza a leitura e impressão dos pontos nodais e calcula o vetor ID e o número de equações do sistema estrutural;
- ELMN – realiza a leitura dos dados dos elementos de pórtico e prepara os dados de cada grupo de elementos para a montagem da matriz de rigidez além de calcular o vetor MHT;
- ADDRES – onde são endereçados os elementos da diagonal da matriz global a partir das alturas efetivas de colunas;
- CARG – realiza leitura de dados de carga nodais e forma o vetor de força;
- MATK0, MATKS, MATK1 e MATK2 – forma respectivamente as matrizes de rigidez  $K_0, K_\sigma, K_1, K_2$  a partir da contribuição de cada elemento no referencial global, utilizando armazenamento em perfil *skyline*;
- GIRO – realiza a transformação de coordenadas do referencial local para o global;
- SGLOB - rotaciona a matriz de rigidez do elemento e acumula na matriz global em perfil *skyline*;
- COLHT – onde são calculadas as alturas efetivas das colunas da matriz de rigidez global;
- DECOMP – realiza a decomposição LDL de uma matriz armazenada em perfil *skyline*;
- REDBAK – retro-substitui um sistema de equações decomposto (utilizando armazenamento em perfil *skyline*);
- ASSINT – realiza a análise por expansões em séries de potência, gerando as formas modais ( $U_i$ ) utilizadas na análise modal;

- FINTELM – calcula os esforços (P, M1, M2) retirando as parcelas correspondentes ao movimento de corpo rígido dos elementos;
- STVET – calcula o vetor de partida para a rotina SSPACE;
- SSPACE – nesta rotina resolve-se um problema linear de autovalor pelo método do subespaço;
- SCHECK – verifica a seqüência de Sturm na solução do problema de autovalor;
- JACOBI – realiza a iteração Jacobi para a solução do problema de autovalor;
- ACOPLI – responsável pela seleção e agrupamento dos modos ( $U_i$  e  $\varphi_i$ ) utilizados na análise modal. Para tanto, verifica por meio do cálculo do posto da matriz os vetores linearmente independentes;
- ORTGS – utiliza o processo de Gram-Schmidt para formação de uma base de vetores ortonormais formada pelos vetores ( $U_i$  e  $\varphi_i$ ) agrupados na rotina ACOPLI;
- NORM - calcula a norma de vetores dispostos em coluna de uma matriz A com  $m$  linhas e  $n$  colunas;
- PMODAL – calcula os parâmetros modais a partir das rotinas AIJ, ASIJ, BIJK e CIJKL que calculam respectivamente  $A_{ij}^0$ ,  $A_{ij}^\sigma$ ,  $B_{ijk}$  e  $C_{ijkl}$ ;
- DI – calcula o parâmetro modal de carga  $D_i$ ;
- NRLA – resolve o sistema não-linear formado pelas equações modais  $h_i$  e condição de restrição de comprimento de arco  $C$ . Nesta rotina, monta-se o sistema de equações modais e a Matriz Jacobiana  $\nabla$  no RLA;
- GAUSS – resolve um sistema linear  $[a] \cdot [x] = [b]$  pelo método de Gauss e é utilizada na rotina NRLA;
- ATUAL – atualiza as coordenadas da estrutura e chama a rotina FINTELM;

- WRITE – imprime os deslocamentos dos pontos nodais.

A seguir são apresentados os fluxogramas do programa raiz que realiza a chamada dos programas ASSINT e AMAC, na Figura 8.1. Na Figura 8.2 e Figura 8.3 são apresentados os fluxogramas dos programas ASSINT e AMAC.



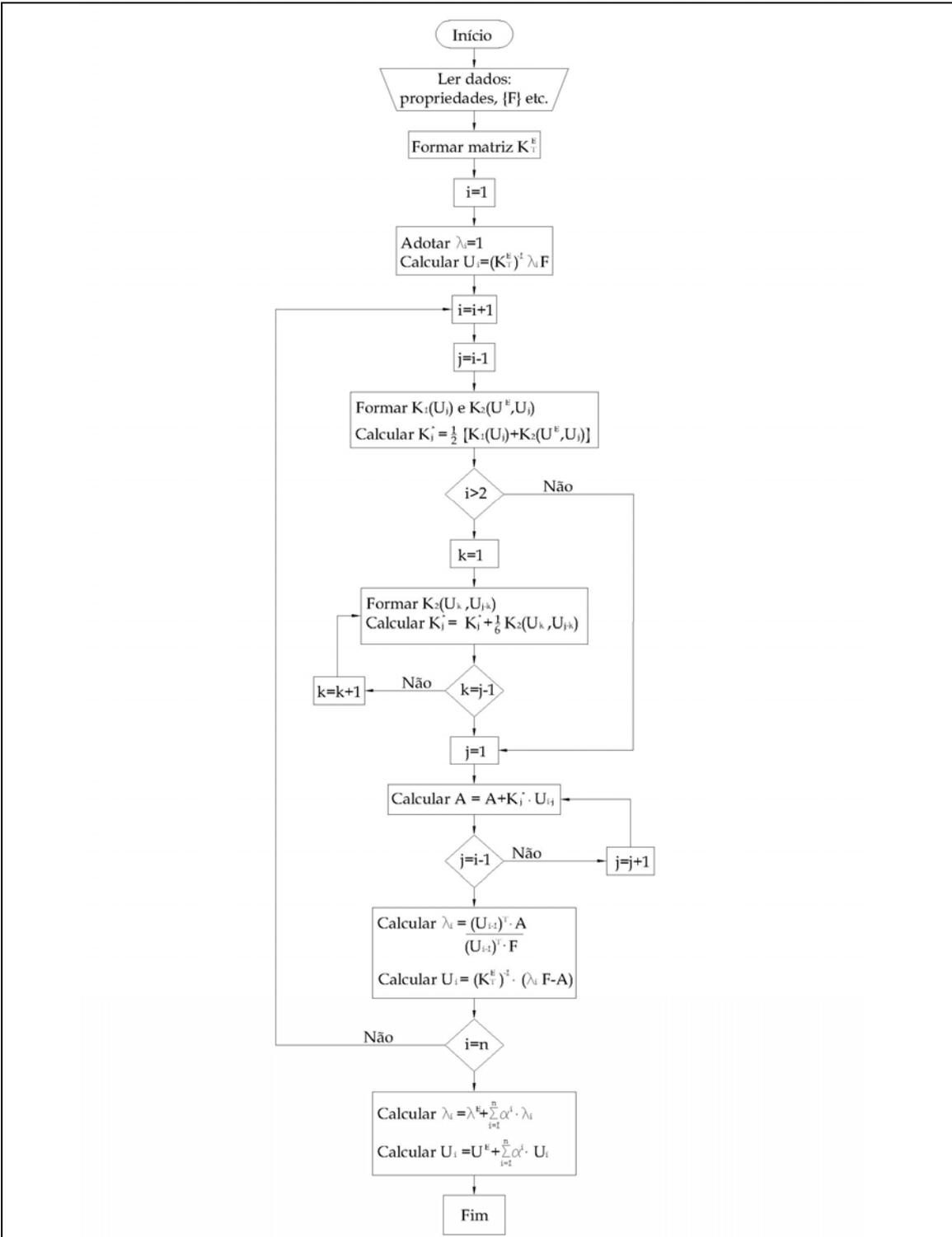


Figura 8.2 Fluxograma para análise assintótica por expansões em séries de potência.

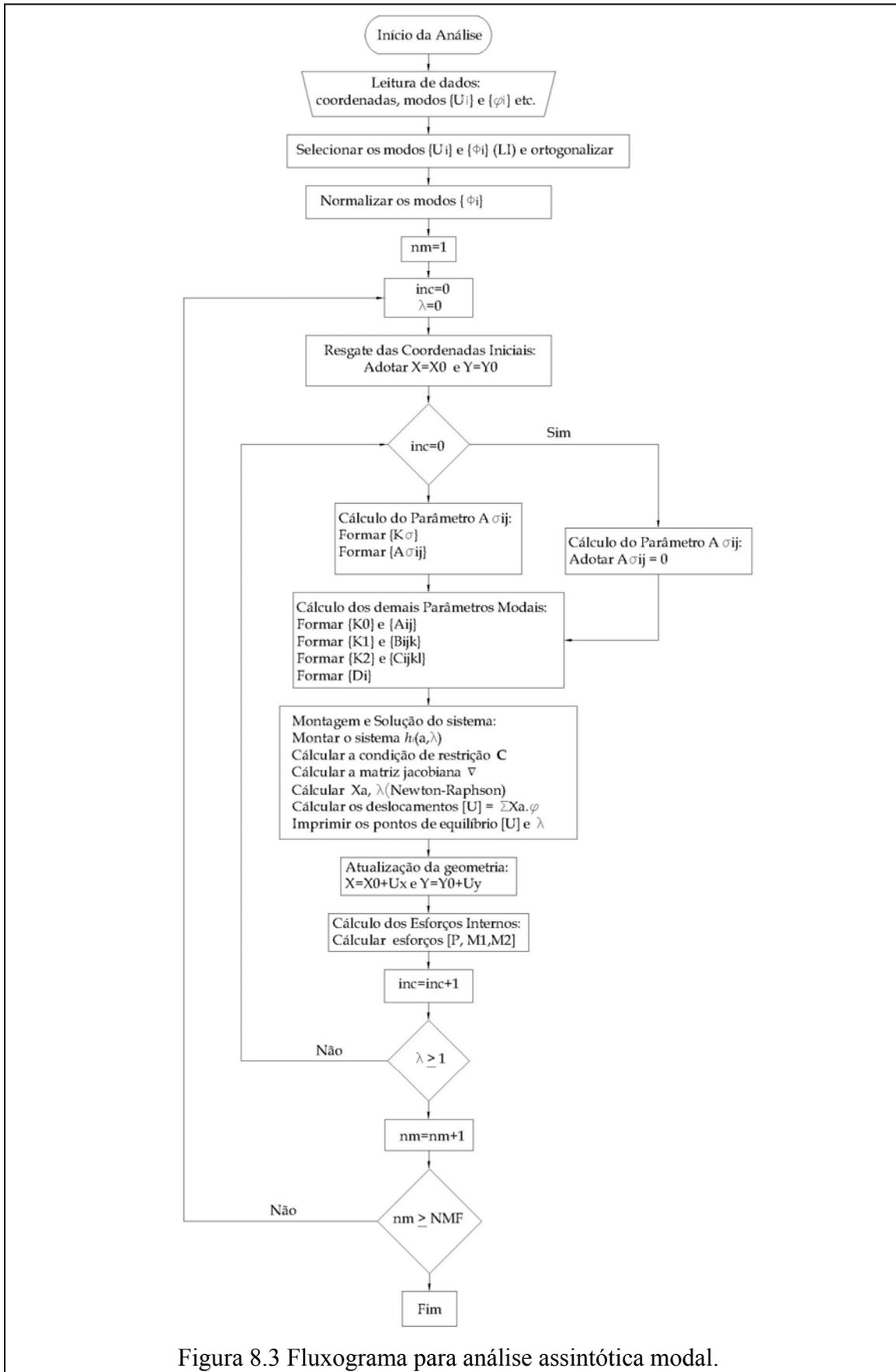


Figura 8.3 Fluxograma para análise assintótica modal.

## Capítulo 9

### *Estudo de Casos*

Apresenta-se neste capítulo a aplicação da presente formulação assintótica modal na análise de algumas estruturas planas clássicas caracterizadas por comportamento não-linear mediano e forte. São utilizados modos assintóticos e modos críticos, solução da expressão (4.26), previamente ortonormalizados com os procedimentos apresentados no capítulo 6. Na análise dos resultados numéricos, utilizam-se como referências os resultados obtidos com: expressões analíticas, análise incremental/iterativa e, quando disponíveis, resultados experimentais e resultados anteriores com base em formulações modais já desenvolvidas no PEC/COPPE.

Para obtenção dos resultados com a técnica incremental/iterativa convencional, utiliza-se a eficiente ferramenta computacional NLARCA, desenvolvida por ALVES [25] e revisada durante esta pesquisa. A referida ferramenta baseia-se na formulação lagrangeana atualizada com controle de comprimento de arco constante e cálculo preciso de forças internas. Salienta-se que, os resultados obtidos com esta técnica de análise foram calculados a partir de modelos ricamente discretizados (no mínimo quarenta elementos), independentemente da discretização utilizada nos modelos das demais técnicas a serem comparadas.

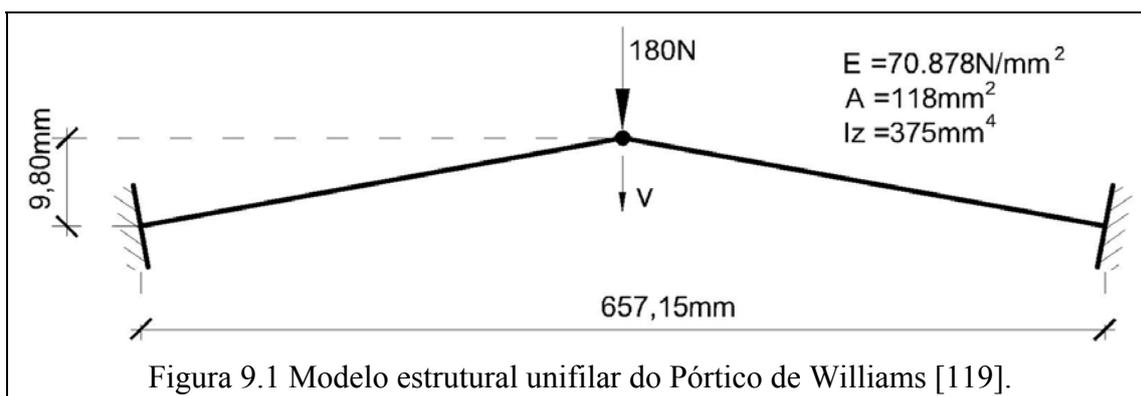
Inicialmente, na resolução dos dois primeiros problemas (9.1 e 9.2), faz-se uma análise paramétrica da influência da discretização, variação do parâmetro de perturbação ( $\alpha$ ) e da restrição do comprimento de arco ( $\Delta L$ ) de maneira a exemplificar a evolução da convergência nas formulações assintótica e modal.

Salienta-se que, as soluções são sempre representadas graficamente por meio das trajetórias de equilíbrio (curvas que relacionam o parâmetro da carga aplicada ( $\lambda$ ) e o deslocamento de um grau de liberdade representativo da estrutura).

## 9.1 Pórtico Abatido

Em geral, para sistemas estruturais perfeitos com trajetória de equilíbrio com presença de ponto limite, a formulação assintótica descrita neste trabalho apresenta boa convergência até a proximidade do ponto limite, sendo por vezes este bem definido. Para exemplificar este fato, apresenta-se a seguir a evolução da convergência dos resultados obtidos com esta formulação para o problema de um pórtico abatido.

O Pórtico de Williams - *Williams toggle frame* - é um exemplo clássico de estrutura com comportamento não-linear e consiste em um pórtico abatido com duas hastes engastadas, submetido a uma carga concentrada no topo (Figura 9.1) o qual tem servido como *benchmark* em inúmeros artigos, inclusive dispondo-se de resultados experimentais até o ponto limite, ex. WILLIAMS [118] *apud* WONG e TIN-LOI [119].



Inicialmente na Figura 9.2 demonstra-se com este exemplo a evolução da convergência com o aumento do número de termos na análise assintótica (série de potência). Para tanto, utiliza-se um modelo discretizado em dez elementos de pórtico plano e parâmetro de perturbação ( $\alpha$ ) igual a  $10^{-2}$ . Salienta-se que na referida figura os números próximos às trajetórias representam a quantidade de termos considerados para obtenção das mesmas.

Percebe-se a partir da Figura 9.2 que, como já esperado, o aumento do número de termos participantes na série promove evolução da convergência para a solução. Também se verifica que a análise assintótica clássica, neste problema, mostra-se eficiente até a proximidade do ponto limite, sendo este claramente definido a partir da consideração do termo de quarta ordem.

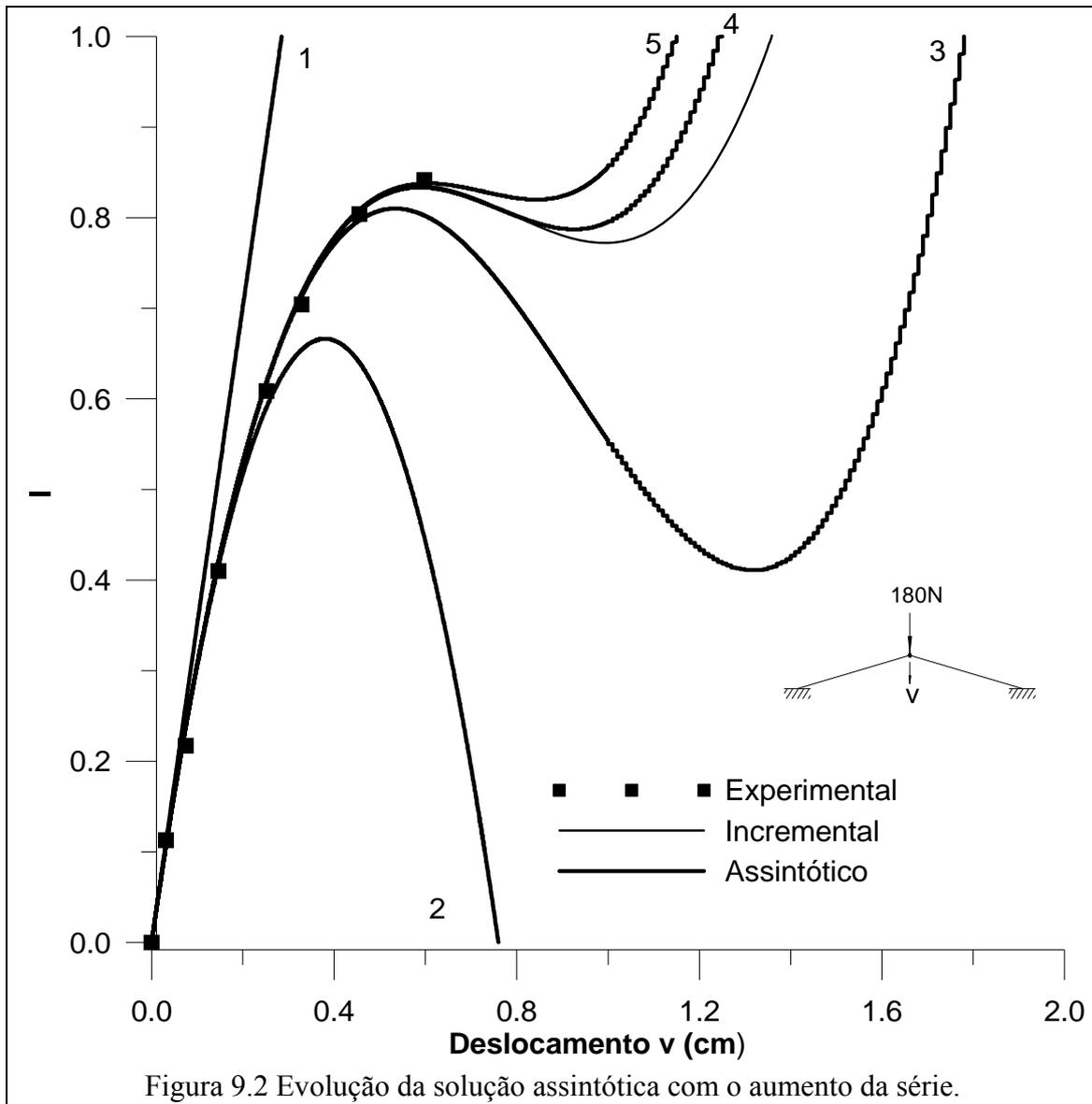
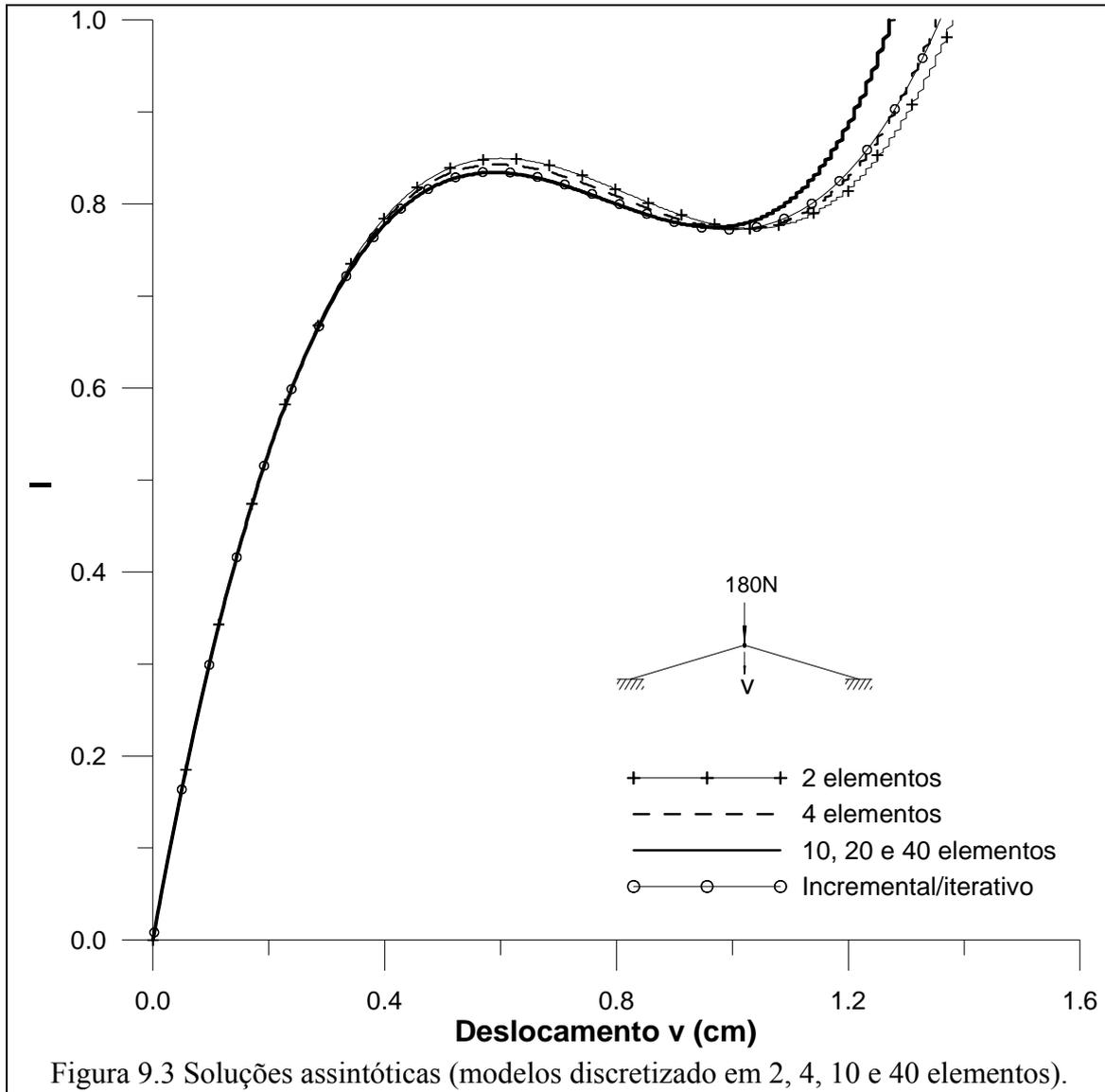


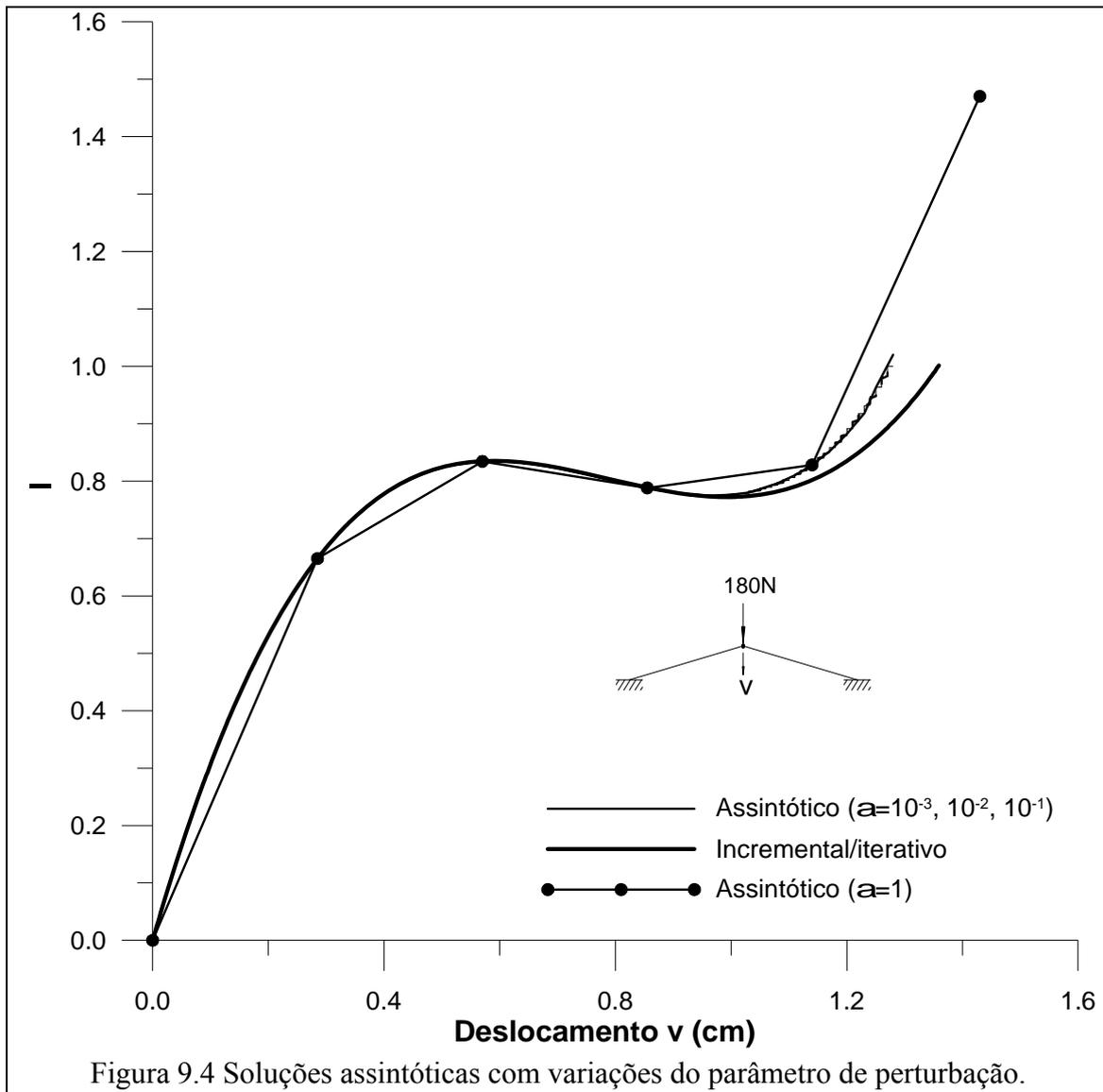
Figura 9.2 Evolução da solução assintótica com o aumento da série.

Para avaliação da influência da discretização do modelo na análise assintótica, representam-se na Figura 9.3 as soluções obtidas com o modelo discretizado em 2, 4, 10, 20 e 40 elementos fixando-se  $\alpha = 10^{-2}$  e série composta de dez termos. Observa-se a coincidência entre as respostas incremental/iterativa e análise assintótica com 10, 20 e 40 elementos.



Observa-se ainda que mesmo com a consideração de apenas dois elementos a análise assintótica já proporciona boa aproximação para a trajetória de equilíbrio esperada. Portanto, pode-se concluir, a partir deste exemplo que para o limite de convergência das aproximações assintóticas, as variações do número de elementos e de termos participantes na série de potência influenciam significativamente os resultados.

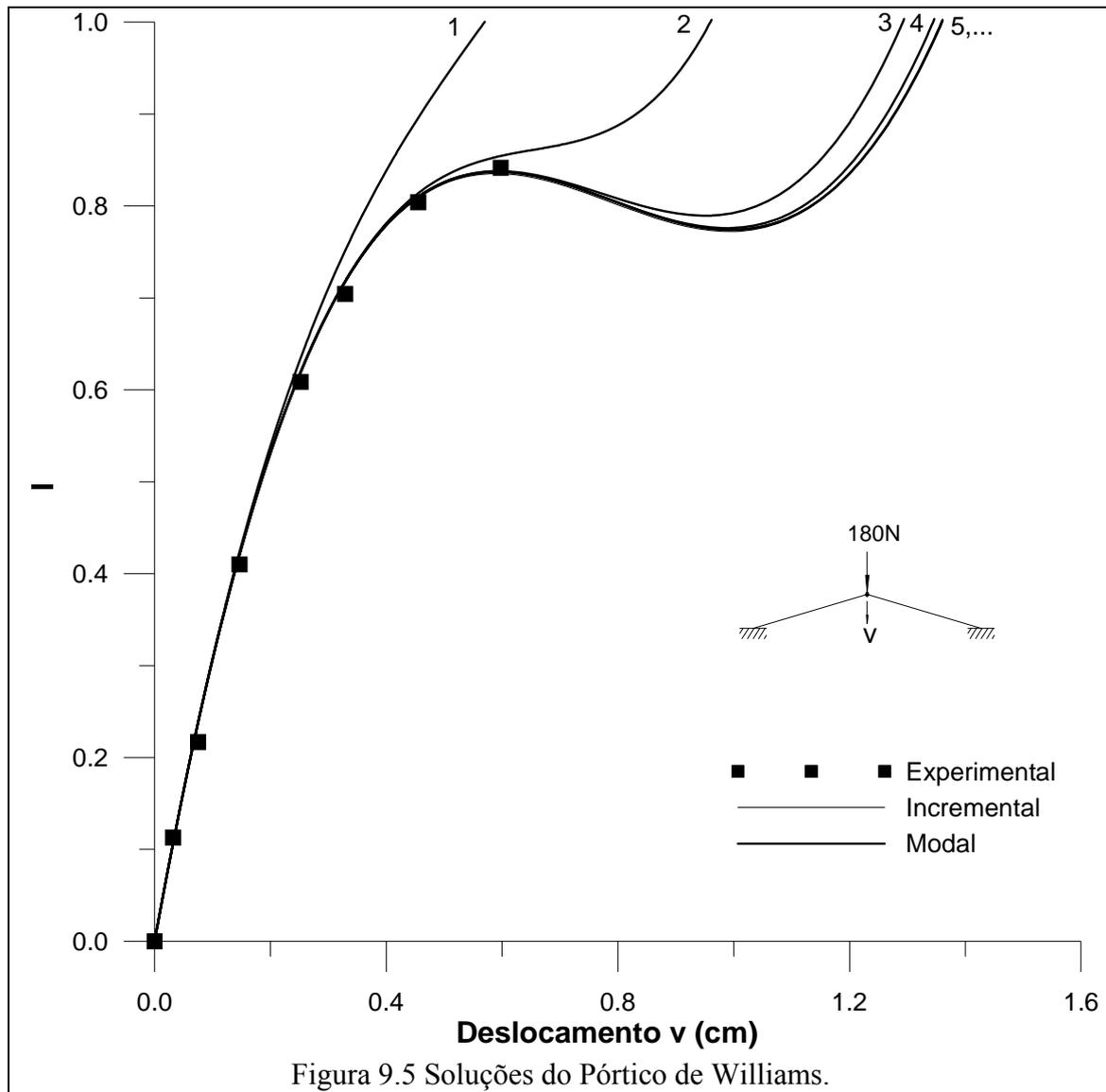
Na Figura 9.4 a seguir são apresentados os resultados obtidos com a análise assintótica para a variação do parâmetro de perturbação de  $10^{-3}$ ,  $10^{-2}$ ,  $10^{-1}$  e  $1$ , utilizando-se sempre modelo discretizado em dez elementos e série com dez termos. Estes resultados demonstram que uma grande variação do parâmetro de perturbação praticamente não promove alterações da solução assintótica.



Observa-se ainda que, independentemente do valor do parâmetro de perturbação, os pontos calculados são sempre pertencentes à trajetória de equilíbrio. Entretanto, quanto maior o valor do mesmo uma menor quantidade de pontos são calculados e a expansão em série passa a calcular pontos que extrapolam o carregamento aplicado (inclusive com  $\lambda \gg 1$ ), tal como se verifica na Figura 9.4 em que para o parâmetro de perturbação igual a unidade foram calculados apenas sete pontos da trajetória e o parâmetro de carga final correspondeu a 1,47.

Na Figura 9.5 são apresentados os resultados obtidos com a análise modal para este problema, onde se pode perceber a evolução da convergência à medida que são utilizados mais modos na combinação modal. Usa-se um modelo discretizado em

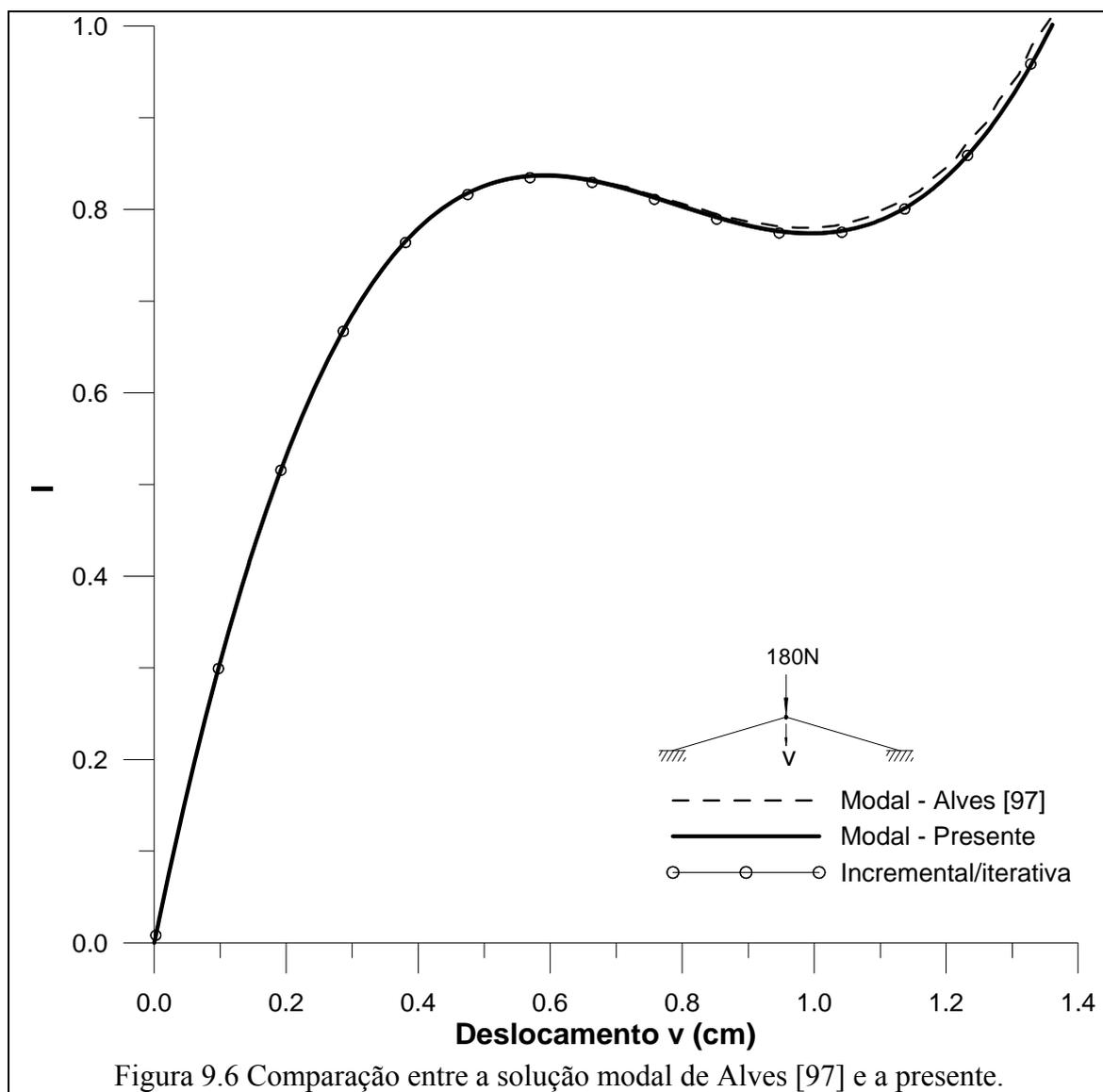
quarenta elementos de pórtico, restrição do comprimento de arco ( $\Delta L$ ) de  $10^{-2}$  e tolerância ( $\xi$ ) para convergência do Método Iterativo de Newton-Raphson de  $10^{-3}$  e dez modos assintóticos. Nota-se nesta figura que a análise assintótica modal apresentou sempre crescente evolução da convergência, inclusive na trajetória pós-crítica.



Pode-se verificar na Figura 9.5 a excelente correlação dos resultados obtidos com a análise modal, a partir da participação do quinto modo assintótico, com os resultados obtidos com a análise incremental/iterativa, sendo praticamente idênticos e também muito aproximados dos resultados experimentais.

Na Figura 9.6 é apresentado o resultado obtido com a formulação modal utilizada por Alves durante sua pesquisa de doutorado para o problema do pórtico abatido.

Comparando este resultado com o obtido na presente formulação percebe-se que, embora haja boa correlação entre os mesmos, dada a relativa simplicidade do problema, ainda foi possível uma maior aproximação dos resultados da atual formulação com os resultados da análise incremental/iterativa. Entretanto, deve-se mencionar que a ferramenta desenvolvida por Alves, com base na formulação modal, apresenta-se sensível ao ajuste de parâmetros (discretização do modelo, comprimento de arco, número de modos) e a solução por vezes diverge, o que foi superado no presente trabalho.

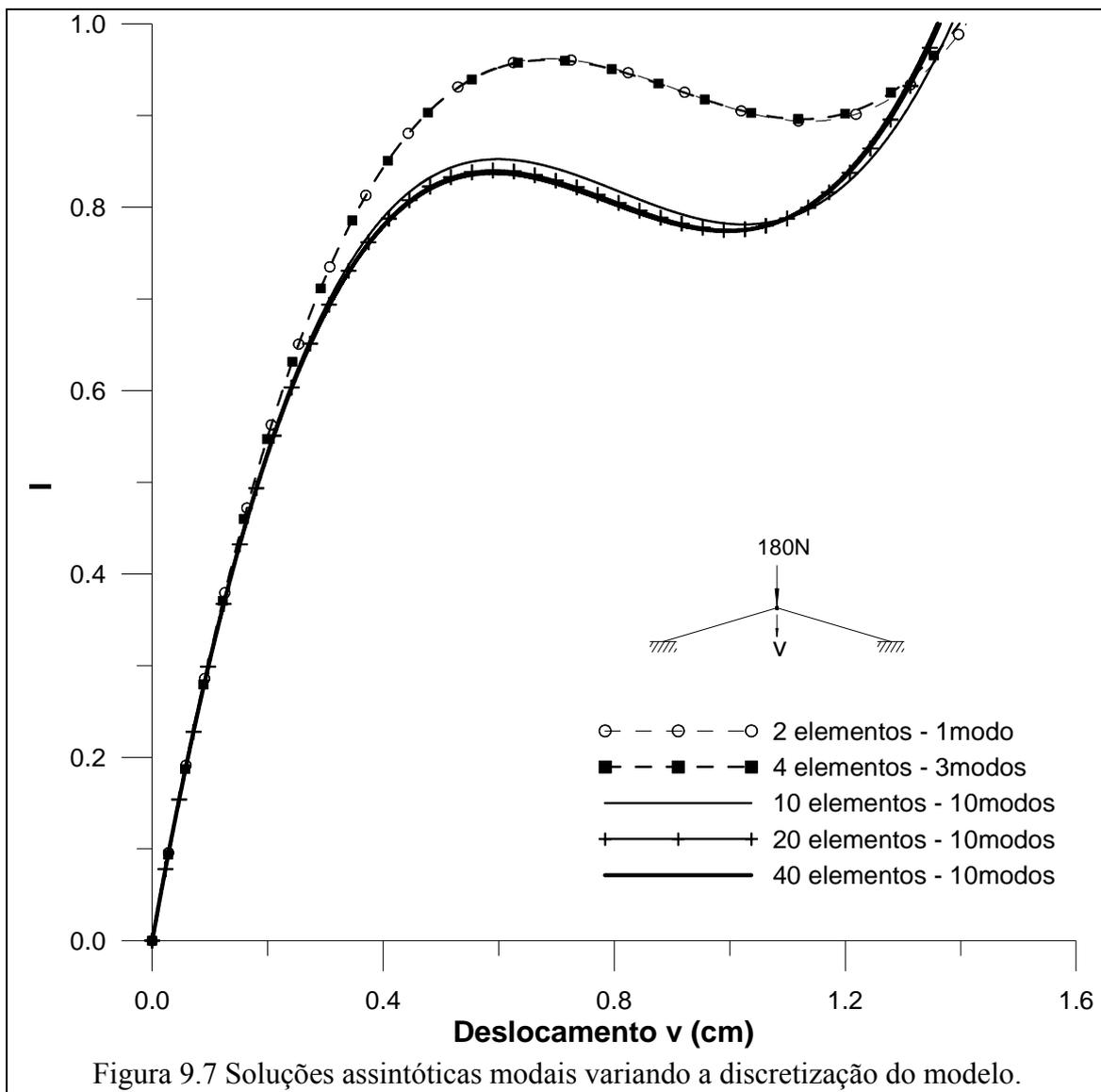


Na Tabela 1 são apresentados os valores dos parâmetros de carga correspondentes aos pontos críticos obtidos nas análises, onde se verifica a boa correlação dos mesmos.

Tabela 1 Valores de ponto limite do pórtico abatido obtidos nas análises.

Formulação	Ponto Limite superior	Ponto limite inferior
Assintótica	0,838	-
Modal (presente)	0,836	0,774
Modal (ALVES [97])	0,838	0,780
Incremental/iterativa	0,835	0,772
Resultados experimentais	$\cong 0,84$	-

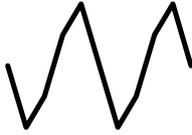
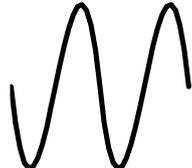
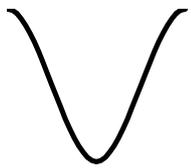
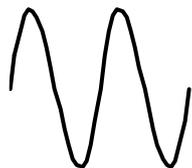
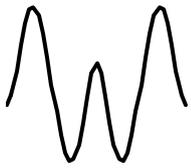
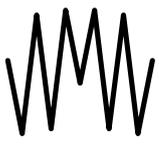
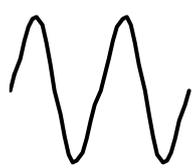
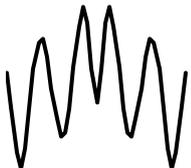
Para avaliar a influência da discretização na solução modal, na Figura 9.7 são apresentados os resultados obtidos para o Pórtico de Williams usando modelos discretizados em dois, quatro, dez, vinte e quarenta elementos. Utiliza-se sempre  $\Delta L = 10^{-3}$ ,  $\xi = 10^{-3}$  e no máximo dez modos assintóticos.

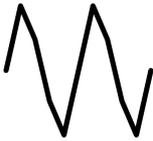
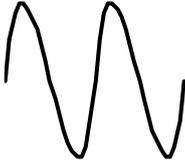
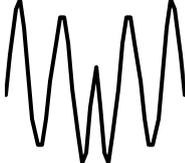
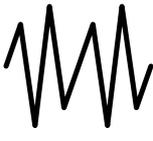
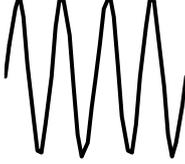
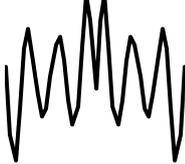


Observa-se na Figura 9.7 que com modelos pouco discretizados, com dois e quatro elementos, não se obteve uma quantidade mínima suficiente de modos assintótico ortonormalizados, o que influenciou decisivamente nas soluções obtidas. Também foi observado que para este problema somente foi possível a convergência para a solução esperada (incremental/iterativa ou modal com quarenta elementos) com modelos discretizados em mais que dez elementos. Deve-se ressaltar que a evolução da convergência da solução dos modelos discretizados em vinte e em dez elementos foi semelhante a do modelo discretizado em quarenta elementos, sendo também estabilizada a partir da contribuição do quinto modo assintótico.

Para exemplificar a influência da discretização nas formas modais, a seguir são apresentados na Tabela 2 os cinco primeiros modos assintóticos ortonormalizados utilizados nas análises assintóticas modais com os modelos discretizados em dez e em quarenta elementos de pórticos planos.

Tabela 2 Modos ortonormalizados - análise assintótica modal.

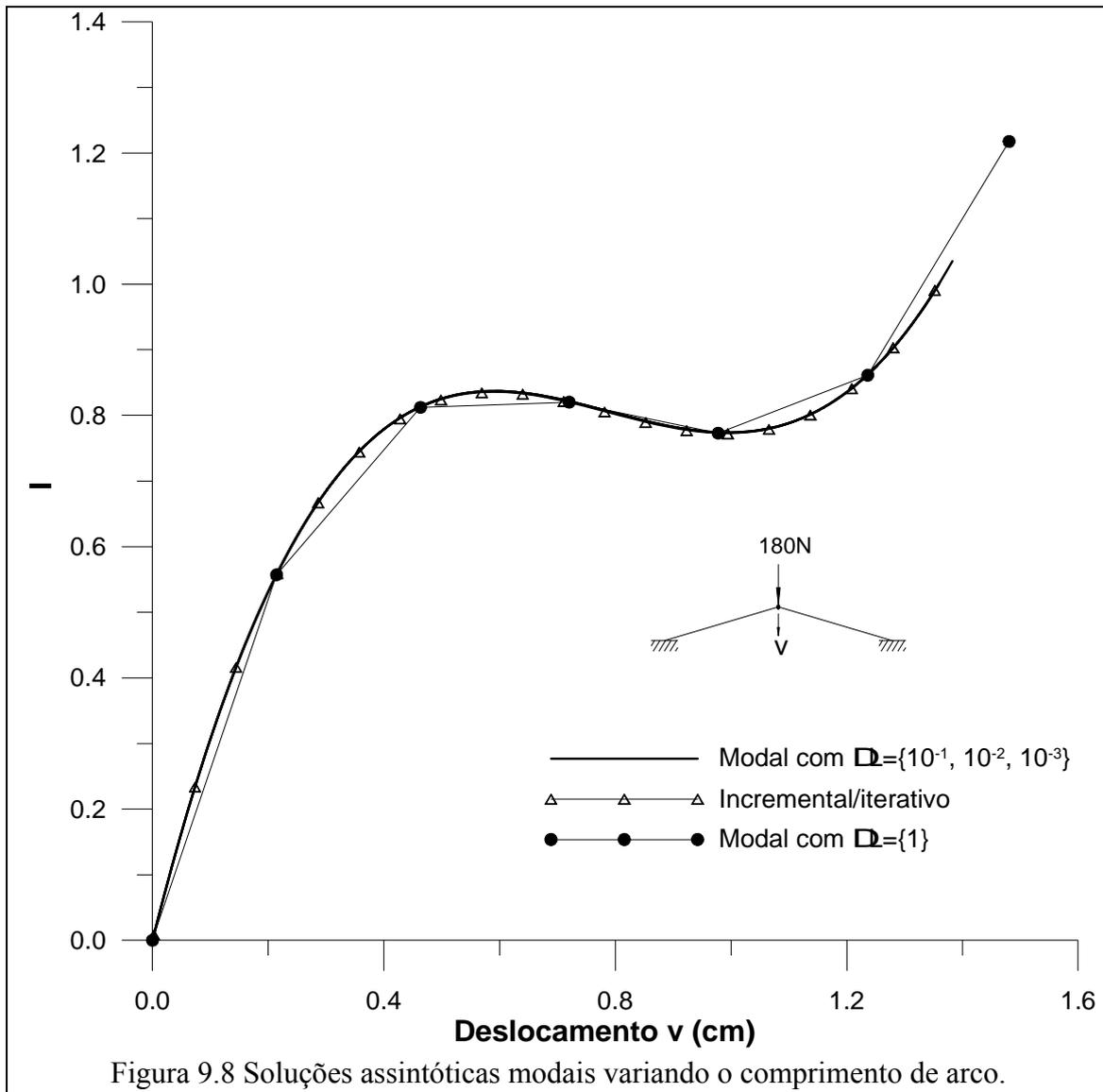
Modo	10 elementos		40 elementos	
	Deslocamentos horizontais (u)	Deslocamentos verticais (v)	Deslocamentos horizontais (u)	Deslocamentos verticais (v)
1°				
2°				
3°				

Modo	10 elementos		40 elementos	
	Deslocamentos horizontais (u)	Deslocamentos verticais (v)	Deslocamentos horizontais (u)	Deslocamentos verticais (v)
4°				
5°				

Observa-se que o modelo discretizado em dez elementos não foi capaz de proporcionar todo o desenvolvimento das formas modais obtidas com o modelo discretizado em quarenta elementos, o que influenciou decisivamente na solução. Também se pode perceber, principalmente no modelo discretizado em dez elementos, grande semelhança nas formas modais. Portanto, o simples aumento da discretização do modelo além de proporcionar melhor definição do modo com a suavização das formas, em alguns casos ainda leva à convergência para formas diferentes das obtidas com modelo menos discretizado. Um exemplo desse fato é a mudança da forma do quinto modo assintótico com modelo discretizado em dez elementos para a forma obtida com modelo discretizado em quarenta elementos.

Comparando por exemplo - no modelo discretizado em quarenta elementos - a semelhança das formas do terceiro e do quarto modo assintótico e observando ainda a evolução das soluções apresentadas na Figura 9.5 com estes dois modos, nota-se a pequena influência do quarto modo na solução. Assim, a inclusão de formas modais parecidas pouco enriquece a solução ou torna lento o seu processo evolutivo.

Para avaliar a influência do comprimento de arco, na Figura 9.8 são apresentadas as soluções modais para o modelo de quarenta elementos com  $\Delta L = \{10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1} \text{ e } 1\}$ ,  $\xi = 10^{-3}$  e cinco modos assintóticos.



A variação do comprimento de arco, conforme definida anteriormente, não alterou a solução da análise modal para este problema para  $\Delta L \leq 10^{-1}$ , sendo a mesma praticamente igual à obtida com a análise incremental/iterativa. Entretanto, assim como na análise modal assintótica, o número de pontos calculados foi sete e o parâmetro de carga foi bem superior a unidade ( $\lambda = 1,217$ ) para  $\Delta L = 1$ .

## 9.2 Coluna Imperfeita Biapoiada

Para análise de sistemas estruturais perfeitos com trajetória de equilíbrio com presença de ponto de bifurcação normalmente utiliza-se o artifício de impor uma pequena imperfeição (de carga ou na geometria da estrutura) de maneira a destruir o ponto de bifurcação, haja visto a grande dificuldade de detecção numérica do mesmo e do avanço ao longo da trajetória secundária. De fato, problemas com instabilidade bifurcacional são extremamente difíceis de serem resolvidos e por isso exigem a utilização de formulações consistentes.

Um caso típico de problema com instabilidade bifurcacional é o da coluna de Euler, que consiste de uma barra prismática, perfeitamente retilínea, birrotulada nas extremidades, esbelta e que flamba sob tensões de flexo-compressão menores que o limite de elasticidade do material. Deve-se sempre salientar a grande importância teórica da coluna de Euler, devido ao seu valor histórico já mencionado e ao valor prático, haja visto a grandiosa aplicabilidade da mesma. A carga crítica da coluna de Euler é:

$$P_c = \frac{EI\pi^2}{L^2} \quad (9.1)$$

sendo  $EI$  a rigidez a flexão,  $L$  o comprimento da coluna.

Tomando-se a coluna de Euler como referência, pode-se escrever a seguinte expressão genérica para colunas perfeitas axialmente comprimidas sujeitas a outras condições de apoio:

$$P_c = \frac{EI\pi^2}{(kL)^2} \quad (9.2)$$

Na expressão (9.2) o produto  $kL$  é interpretado como o comprimento efetivo da coluna, sendo tomada como referência a coluna birrotulada (coluna de Euler). Na literatura (eg. CHEN [122]) são encontrados valores tabelados para o produto  $kL$  em função de vários tipos de condições de apoio da coluna.

Nesta sessão utiliza-se, para avaliação da evolução da convergência da formulação assintótica descritas neste trabalho, o caso da coluna biapoiada axialmente comprimida (ver Figura 9.9). Neste modelo foi utilizada uma pequena imperfeição geométrica. A curvatura inicial (imperfeição) da estrutura é regida pela função:  $x(y) = 0,0762 \cdot \text{sen}\left(\frac{y}{254} \pi\right)$ , onde  $y$  pertence ao intervalo  $(0; 254)$ .

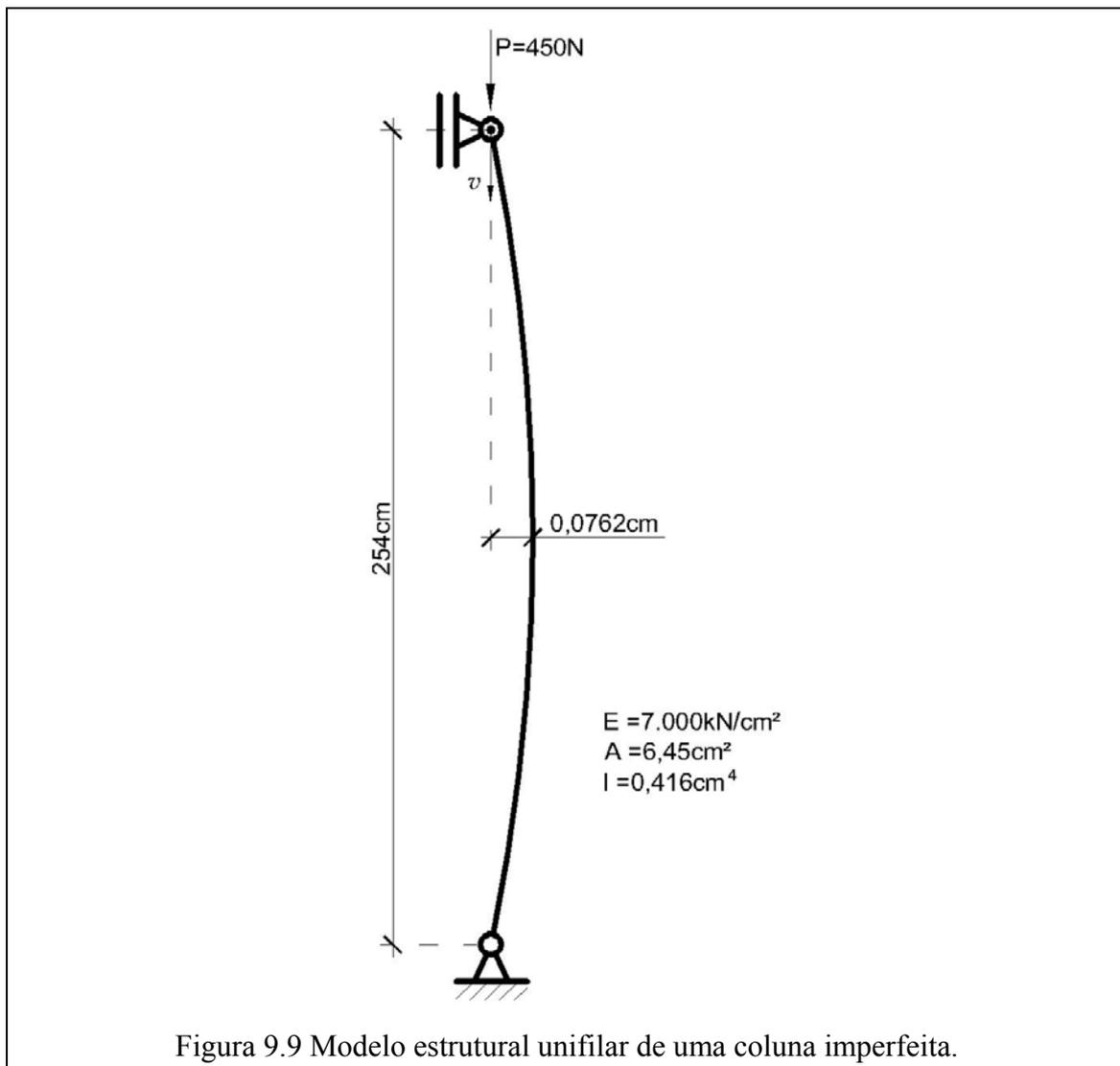


Figura 9.9 Modelo estrutural unifilar de uma coluna imperfeita.

Na Figura 9.10 são apresentados os resultados obtidos com a análise assintótica para a referida coluna. Utilizam-se modelos discretizados em quarenta e em dez elementos.

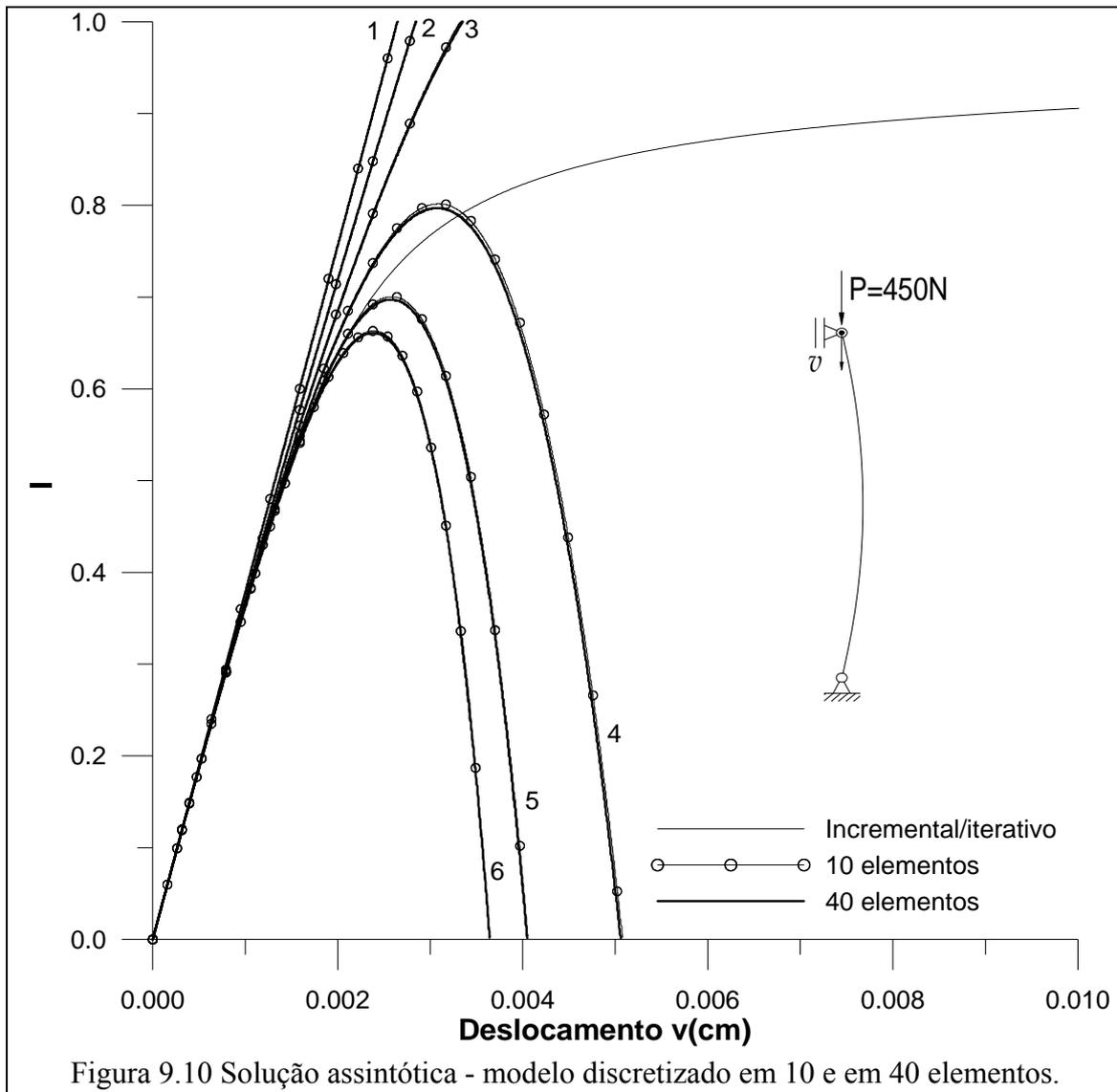
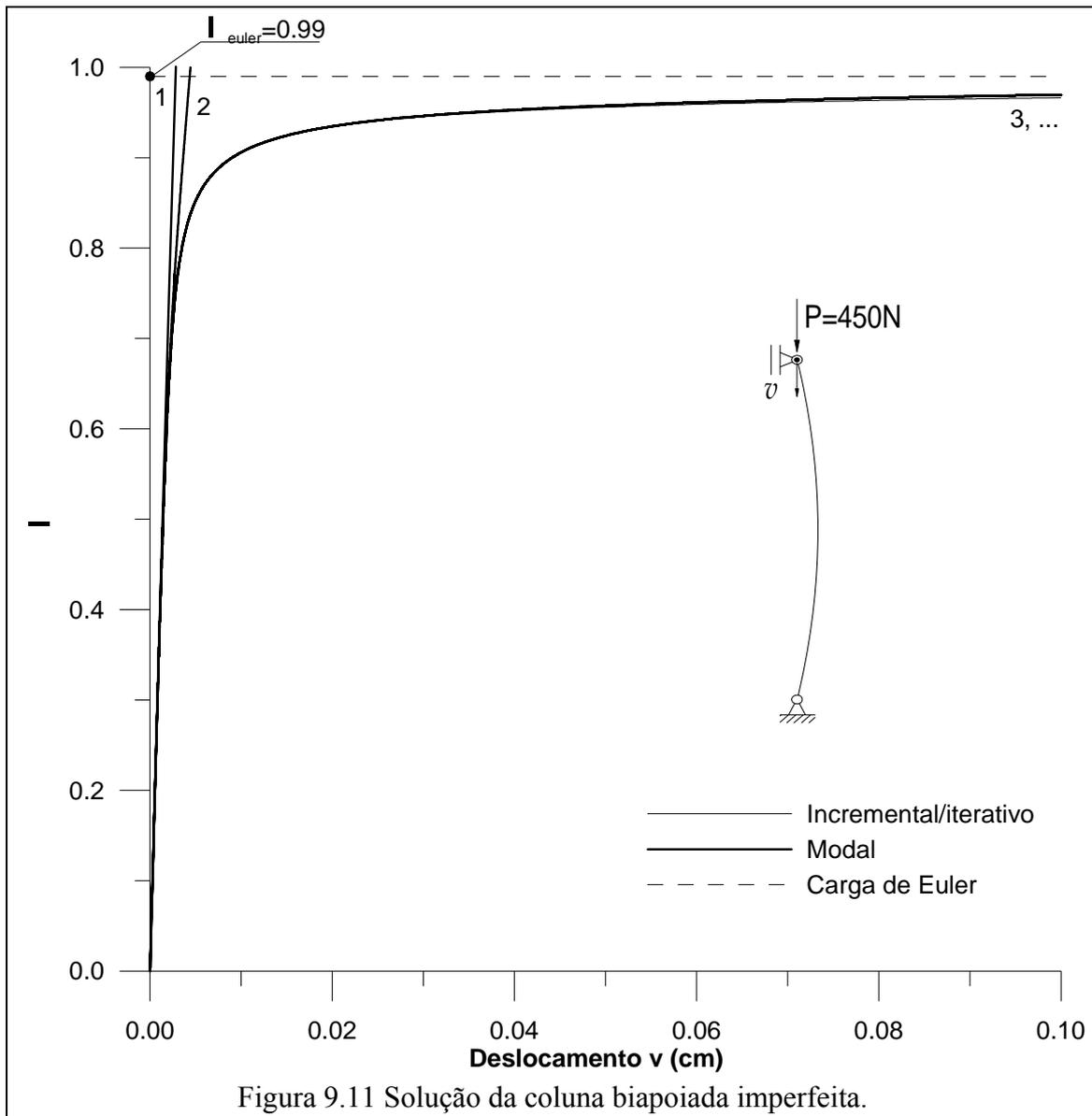


Figura 9.10 Solução assintótica - modelo discretizado em 10 e em 40 elementos.

Na Figura 9.10 percebe-se claramente que independentemente da discretização a análise assintótica clássica é ineficiente para solução deste tipo de problema, já que é incapaz de convergir para a trajetória não-linear de equilíbrio da estrutura, mesmo para um curto trecho, o que impossibilita a determinação da carga de flambagem da estrutura.

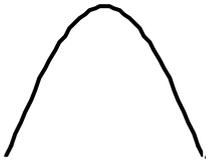
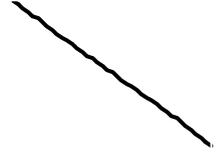
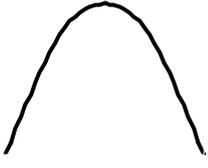
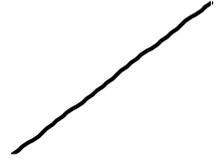
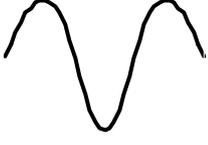
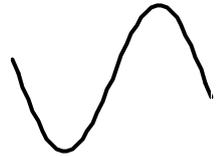
Na Figura 9.11 são apresentadas as soluções obtidas com a análise modal para o problema da coluna imperfeita. Foram usados como parâmetros: comprimento de arco de  $10^{-3}$  e tolerância de  $10^{-3}$  para o Método de Newton-Raphson. Os números próximos as curvas representam o número de modos utilizados.



Observa-se a boa correlação dos resultados obtidos entre a análise modal e a análise incremental/iterativa. Também se observa na Figura 9.11 a proximidade da solução analítica da coluna biapoiada com os resultados obtidos nas análises, este fato deve-se a pequena magnitude da imperfeição geométrica imposta à coluna.

Na Tabela 3 são apresentadas as três primeiras formas modais utilizadas na combinação da análise modal.

Tabela 3 Modos ortonormalizados da coluna birrotulada imperfeita.

Modo	Deslocamentos horizontais (u)	Deslocamentos verticais (v)
1°		
2°		
3°		

Pode-se comparar na Figura 9.12 os resultados apresentados por ALVES [97] para o referido problema da coluna imperfeita biapoiada com a presente formulação. Percebe-se na referida figura que a presente formulação modal apresentou um maior intervalo de correlação com a solução incremental/iterativa que a formulação modal anteriormente utilizada por Alves, inclusive possibilitando melhor aproximação para a carga de flambagem da estrutura. Ressalta-se, que neste caso, além de ser utilizado o mesmo modelo, foram utilizadas as mesmas formas modais nas análises.

Portanto, com as análises obtidas com estes dois primeiros problemas, pode-se notar que a análise assintótica por expansões em séries de potência possui aplicação muito limitada, por causa do problema da não garantia da convergência com o aumento da série. Entretanto, devido sua simplicidade e rapidez, pode servir como um bom indicador do grau de não-linearidade de problemas com muitos graus de liberdade. Além disso, as formas modais advindas desta formulação proporcionam bons resultados quando empregadas na análise assintótica modal proposta neste trabalho, a qual sempre apresentou evolutiva convergência com o aumento da combinação.

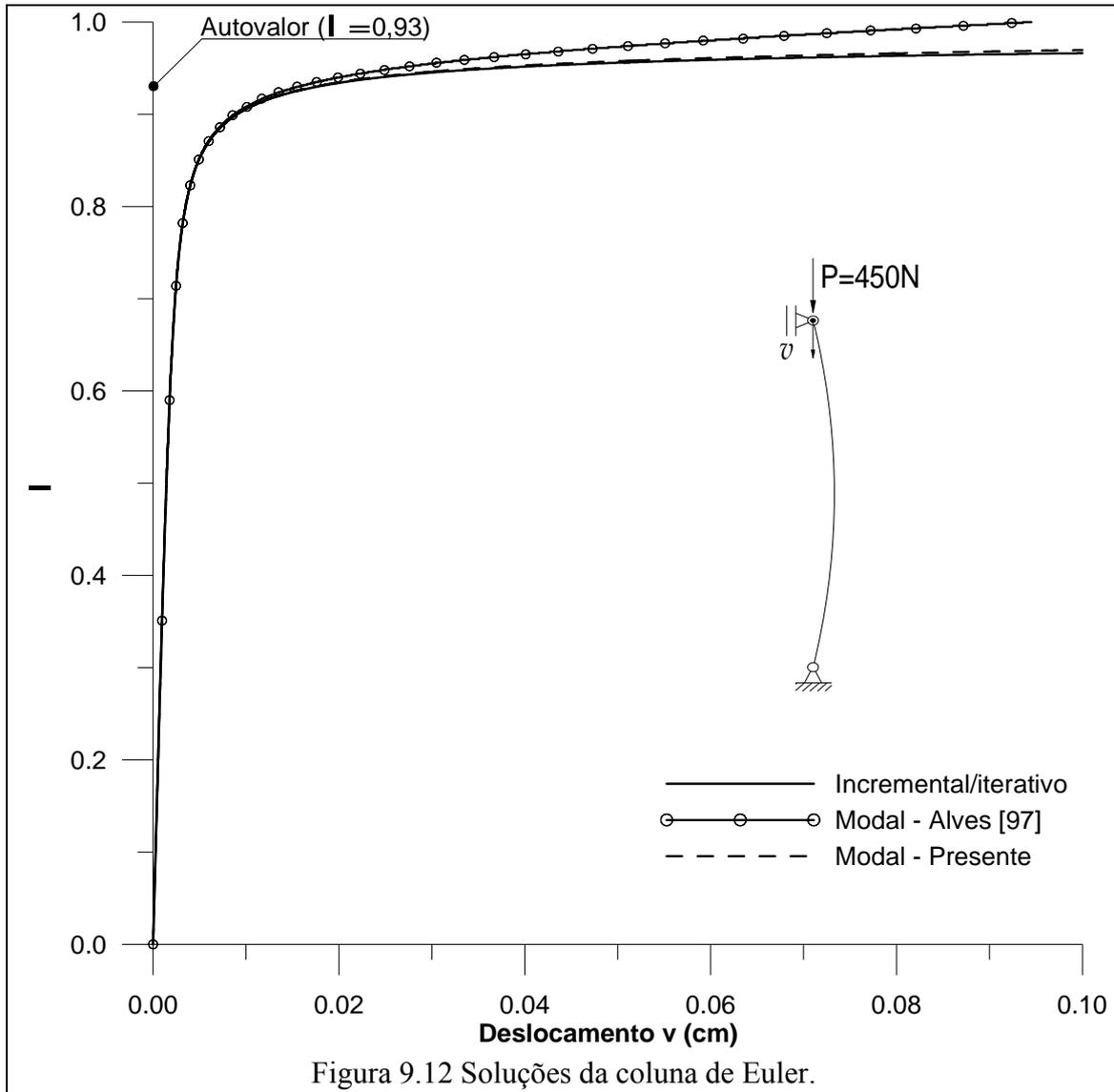


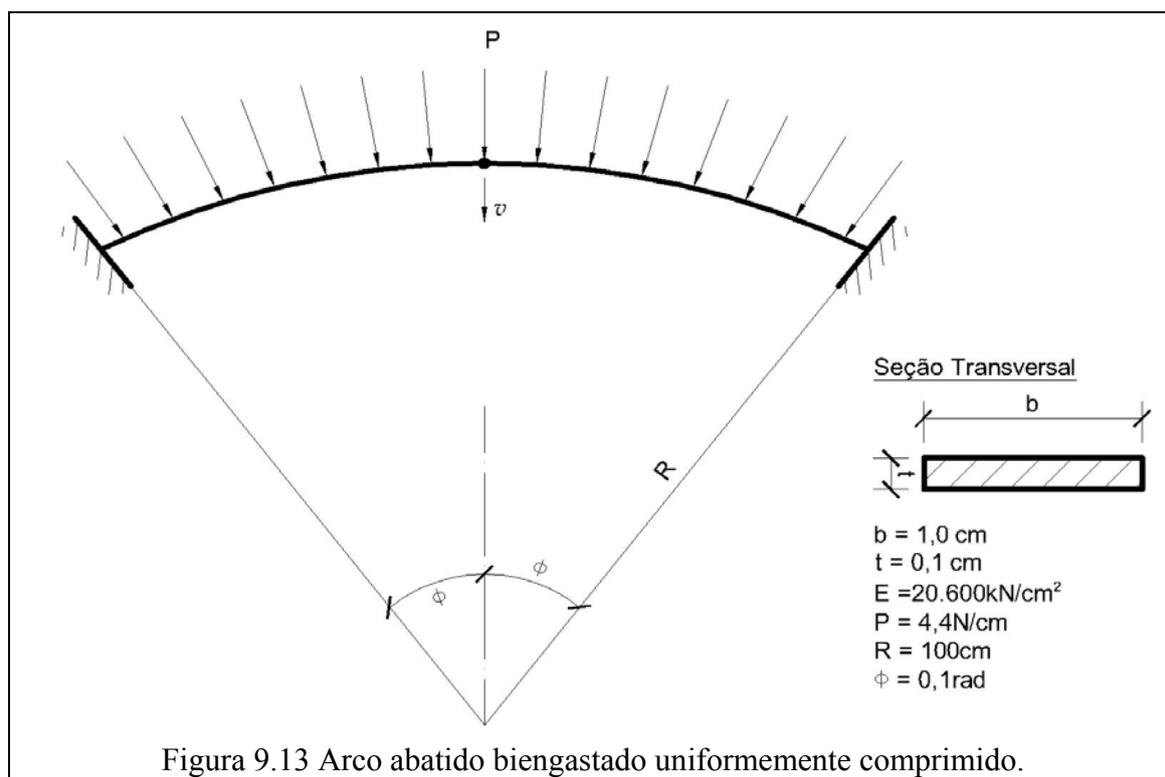
Figura 9.12 Soluções da coluna de Euler.

Ainda quanto à análise modal, constatou-se que em geral a quantidade de formas modais envolvidas na combinação é muito mais importante que outros parâmetros, tais como o comprimento de arco e o grau de discretização. Entretanto, o grau de discretização do modelo pode também ser decisivo para obtenção da solução, já que influencia diretamente na qualidade das formas modais. Outro importante parâmetro a ser discutido é a origem e a representatividade das formas modais utilizadas nas combinações, o que será feito oportunamente no próximo exemplo.

Assim, nos problemas que se seguirão somente serão avaliados os resultados obtidos com a análise assintótica modal e serão utilizados modelos com mais que uma dezena de elementos, comprimento de arco no mínimo de  $10^{-2}$  e tolerância para convergência do Método de Newton-Raphson não superior a  $10^{-3}$ .

### 9.3 Arco Sob Pressão Radial

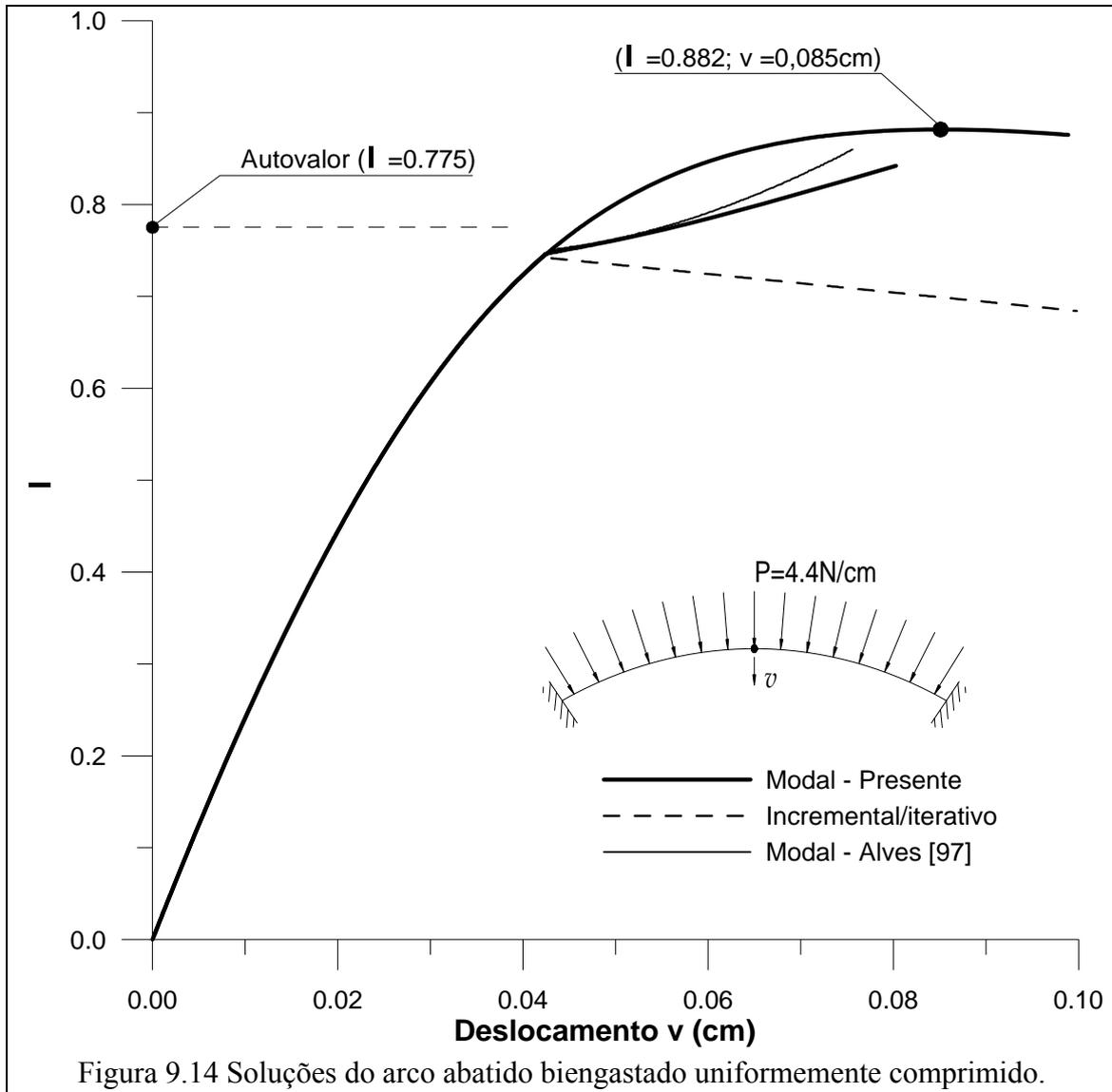
Avalia-se a eficiência da presente formulação para solução do problema do arco abatido biengastado (ver Figura 9.13) submetido a uma pressão uniforme (hidrostática). Deve-se destacar que este problema foi bem descrito analiticamente em [120] e se caracteriza, segundo as propriedades apresentadas na Figura 9.13, pela presença de bifurcação com trecho inicial pós-crítico instável.



Na Figura 9.14 são apresentados os resultados obtidos com as análises modais – presente e a desenvolvida por ALVES [97] – e com a análise incremental/iterativa para o caso da estrutura perfeita. Observa-se na referida figura que embora não tenha sido utilizado modelo imperfeito nas análises, as três formulações foram capazes de detectar com boa aproximação o ponto de bifurcação.

A formulação modal utilizada por ALVES [97] somente possibilitou a detecção da bifurcação ao se utilizarem no mínimo dez modos assintóticos na combinação. Já na presente formulação a bifurcação foi percebida precocemente com a utilização de apenas três modos assintóticos e um modo crítico, ou seja, menos que a metade da quantidade de formas modais utilizadas na formulação de ALVES [97]. Portanto, a

utilização de combinação modal mista com modos assintóticos e críticos é bastante vantajosa nas análises modais.



Entretanto, salienta-se que a bifurcação somente foi obtida a partir de um modelo bem discretizado (mais que uma dezena de elementos) e com pequenos valores do comprimento de arco (cerca de  $10^{-3}$ ), caso contrário a trajetória segue para o ponto limite superior que coincide nas três formulações, conforme também apresentado na Figura 9.14.

Percebe-se que as aproximações linearizadas da carga crítica se apresentam com valores pouco superiores às calculadas com as soluções não-lineares representadas na Figura

9.14, fato este explicado pelo comportamento não-linear da estrutura em regime pré-crítico.

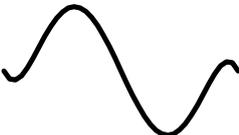
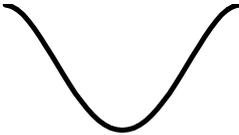
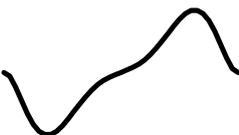
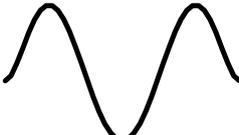
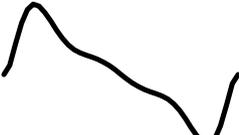
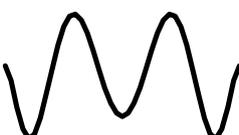
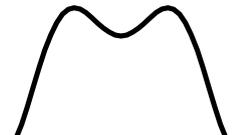
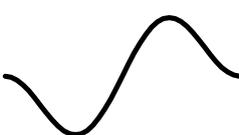
Na Tabela 4 são apresentados os valores do ponto de bifurcação e do ponto limite obtidos com as diferentes formulações, onde se percebe a boa correlação entre estas.

Tabela 4 Ponto de bifurcação do arco comprimido radialmente.

Método	Bifurcação		Ponto limite	
	$\lambda$	V/t	$\lambda$	V/t
Analítico, em [120]	0,745	0,420	0,885	0,959
Incremental/iterativo	0,742	0,421	0,882	0,851
Modal – presente	0,747	0,429	0,884	0,853
Modal – Alves	0,750	0,431	0,885	0,906

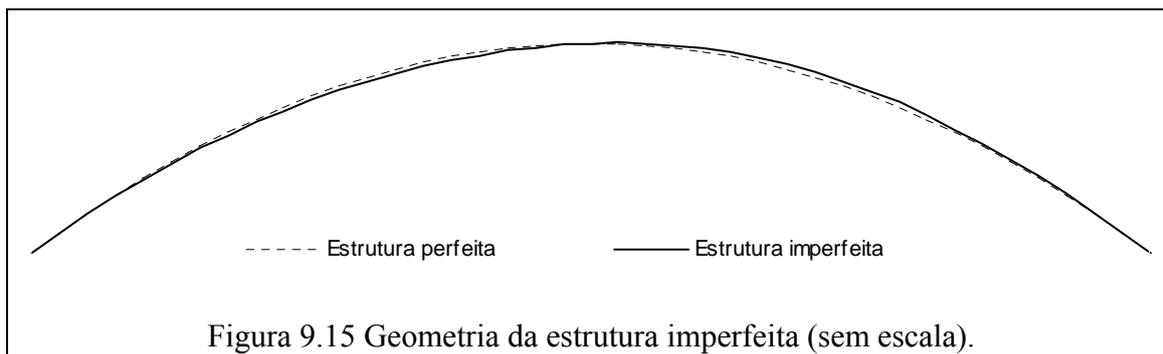
Na Tabela 5 são representadas as quatro formas modais (assintóticas e crítica) a partir das quais é possível a detecção do ponto de bifurcação com a presente análise modal.

Tabela 5 Formas modais do arco biengastado uniformemente comprimido.

Modo	Deslocamentos horizontais (u)	Deslocamentos verticais (v)
1°		
2°		
3°		
4°(crítico)		

Observa-se a forma antimétrica do primeiro modo crítico (deslocamento verticais), suficiente para detecção da bifurcação.

Utilizando o artifício de imposição de imperfeições, na Figura 9.16 são apresentados os resultados obtidos com a presente análise assintótica modal para o caso de imposição de uma pequena imperfeição geométrica na forma do primeiro modo crítico nas coordenadas da estrutura, conforme se pode observar na Figura 9.15.

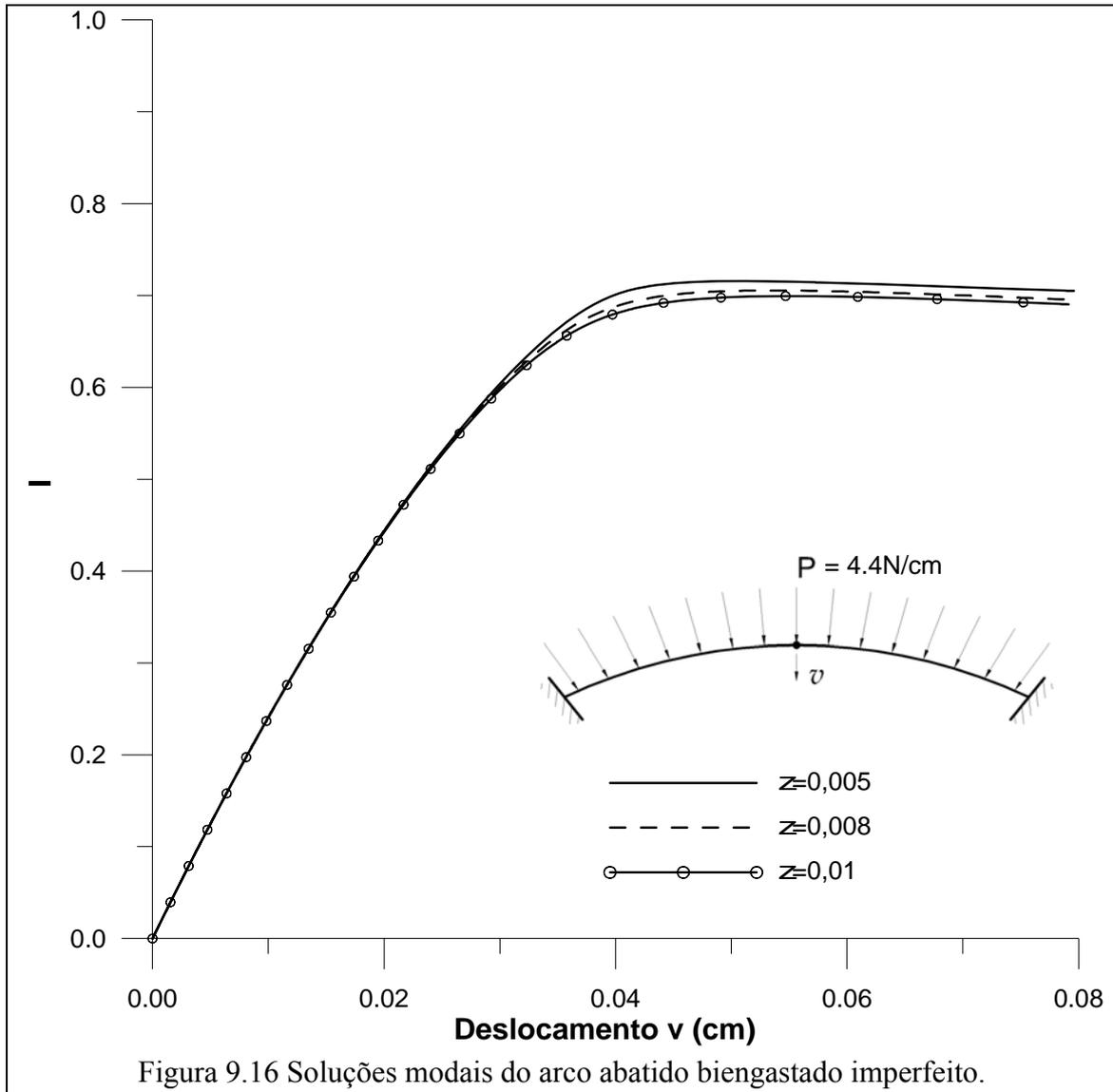


Foram analisadas três amplitudes de imperfeição (0,005, 0,008 e 0,01), que correspondem ao fator de escala ( $\zeta$ ) do modo normalizado.

Na Tabela 6 são apresentados os parâmetros da carga de flambagem ( $\lambda_f$ ) obtidos com a presente formulação modal e a incremental iterativa para as amplitudes de imperfeições geométricas ( $\zeta$ ) na forma do modo crítico, onde se verifica a boa correlação desses.

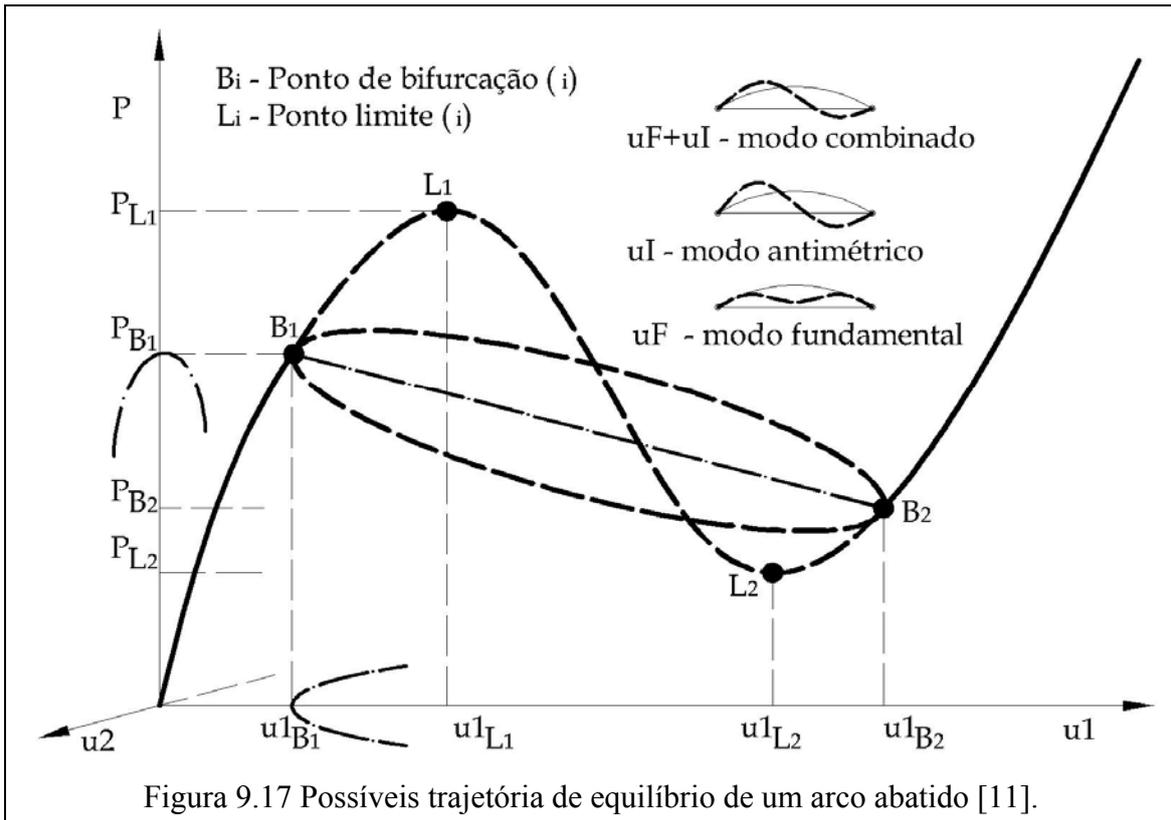
Tabela 6 Parâmetro da carga correspondente à flambagem do arco abatido imperfeito comprimido uniformemente.

$\zeta$	$\lambda_f$ (modal)	$\lambda_f$ (incremental)	Diferença (%)
0,005	0,716	0,714	0,28
0,008	0,705	0,704	0,14
0,010	0,699	0,698	0,14

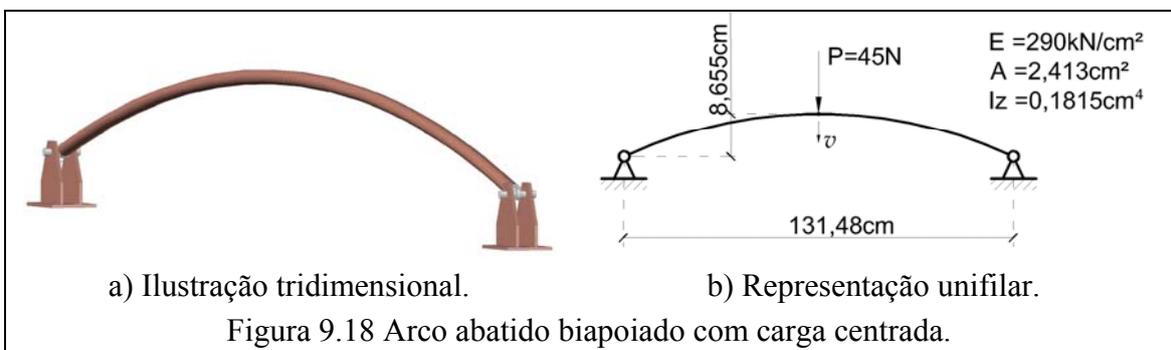


### 9.4 Arco Abatido Birrotulado

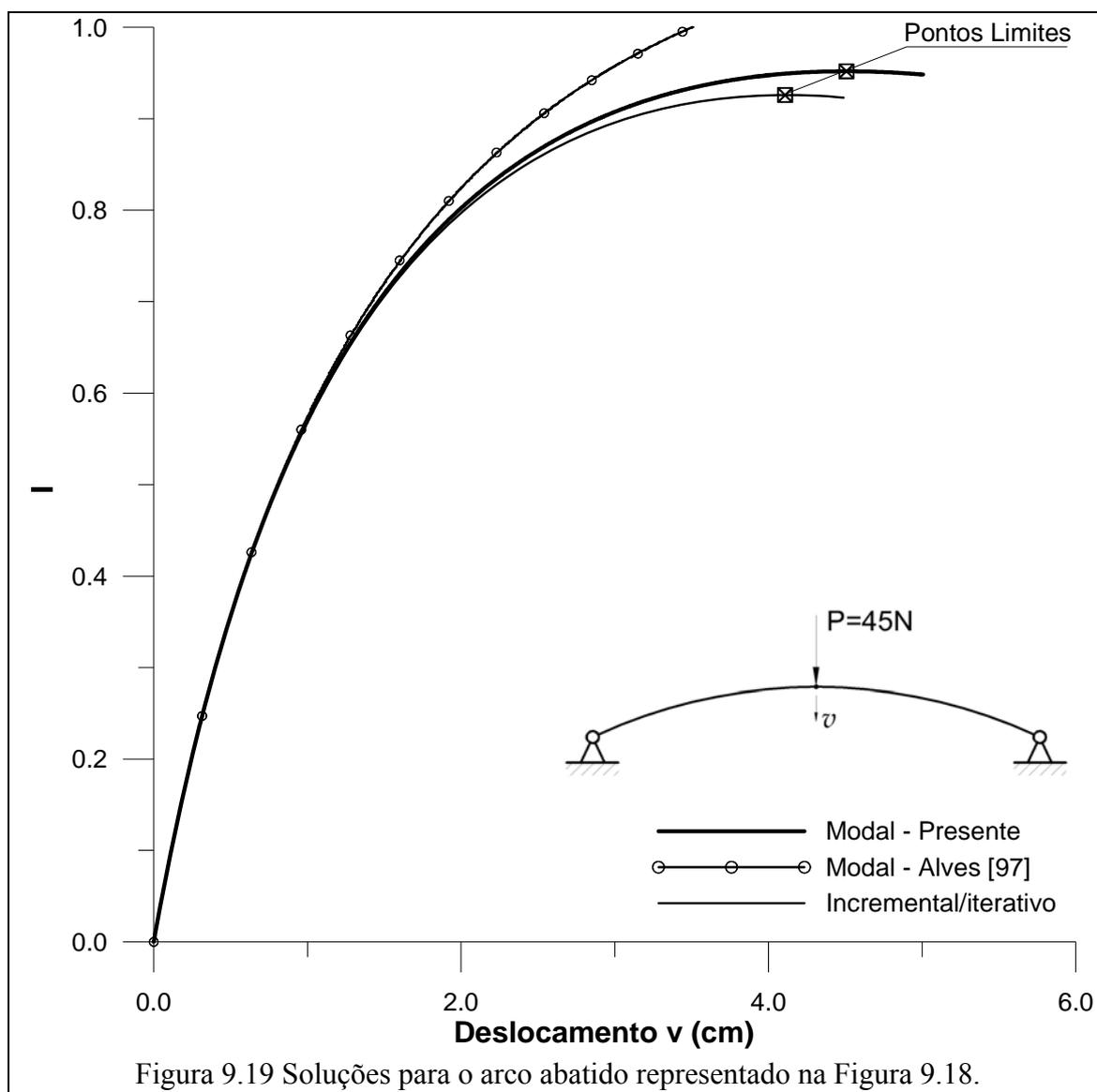
Arcos abatidos birrotulados, dependendo de suas características geométricas e mecânicas, podem apresentar trajetória de equilíbrio com presença de ponto limite ou até mesmo ponto de bifurcação, conforme Figura 9.17.



Na Figura 9.17 estão representados o modo simétrico de estado de deformações fundamentais ( $u_F$ ) e o modo de deformação incremental antissimétrico ( $u_I$ ), os quais somados descrevem o modo de deformação de estados pós-bifurcação. Portanto, a trajetória de equilíbrio da estrutura - descrita pelas variáveis de estado ( $u_1$ ,  $u_2$ ) e pelo parâmetro de controle  $\lambda$  - poderá apresentar pontos limites ou pontos de bifurcações, se regida somente pelo modo de deformação simétrico ou se contar com a contribuição do modo antissimétrico, respectivamente. Na Figura 9.18 são apresentadas as características geométricas e mecânicas de um arco abatido, que possui trajetória com presença de bifurcação anterior ao ponto limite.



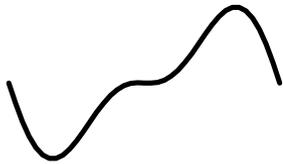
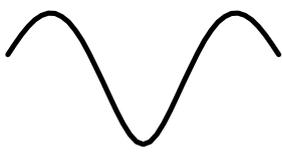
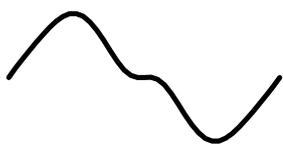
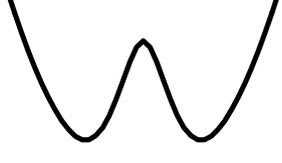
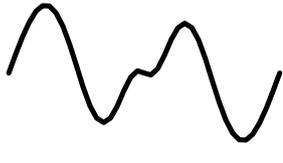
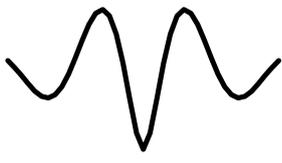
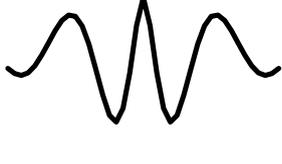
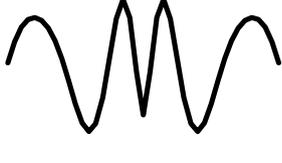
São apresentados na Figura 9.19 os resultados obtidos com a análise modal utilizada por Alves e com a presente formulação modal para o arco representado na Figura 9.18.

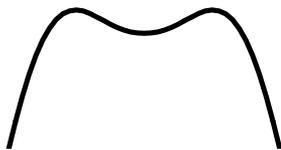
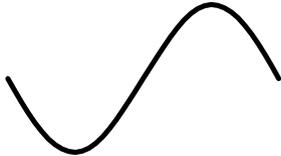


Nenhuma das três formulações foi capaz de detectar o ponto de bifurcação, que para as características desta estrutura é inferior ao ponto limite.

Dentre as formulações assintóticas modais, somente a presente foi capaz de desenvolver trajetória de equilíbrio com presença de ponto limite, isto devido à participação do primeiro modo crítico na combinação. Os sete modos utilizados na combinação modal são representados na Tabela 7 a seguir.

Tabela 7 Modos ortonormalizados usados na análise modal do arco abatido biapoado com carga centrada.

Modos	Deslocamentos horizontais (u)	Deslocamentos verticais (v)
1°		
2°		
3°		
4°		
5°		
6°		

Modos	Deslocamentos horizontais (u)	Deslocamentos verticais (v)
7° (crítico)		

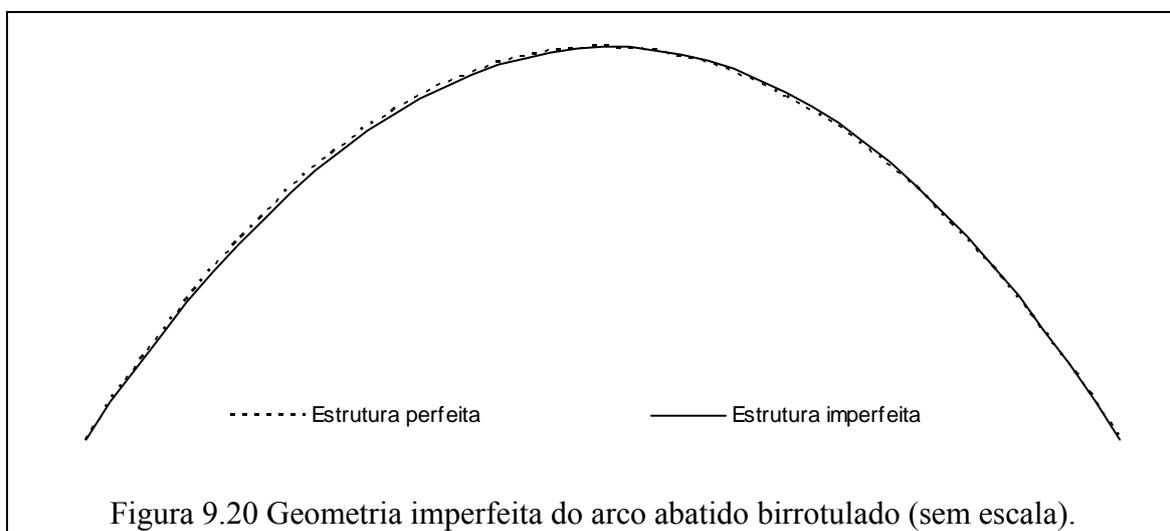
São apresentados na Tabela 8 os valores correspondentes ao ponto limite obtidos com a presente formulação modal, com a formulação incremental/iterativa e com os resultados obtidos via método direto apresentado por NETO *et al.* [82].

Tabela 8 Comparação de resultados do ponto limite do arco abatido birrotulado.

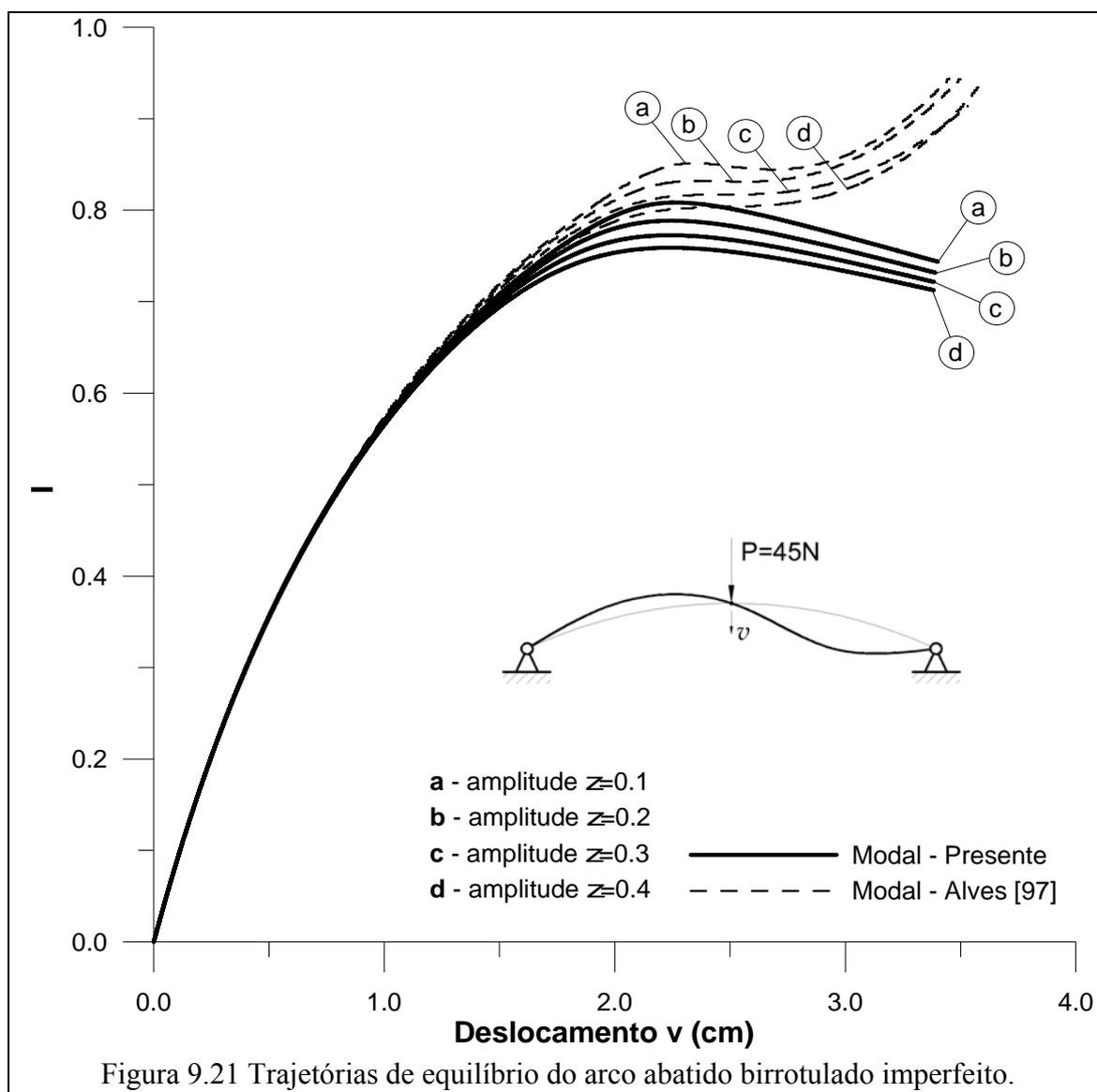
Formulação	Carga limite (N)	Deslocamento v (cm)
Modal – presente	42,84	4,505
Incremental/iterativo	41,67	4,108
Método direto [82]	42,31	4,138

Embora a presente solução tenha conduzido a resultados um pouco superiores, nota-se que os valores calculados para o ponto limite pelos três métodos são bastante próximos.

A trajetória de equilíbrio assintótica à trajetória bifurcada da estrutura perfeita foi obtida por meio da imposição de uma pequena imperfeição geométrica na forma do primeiro modo crítico da estrutura. Foram utilizados os seguintes fatores de escala para o modo normalizado:  $\zeta = \{0,1 \ 0,2 \ 0,3 \ 0,4\}$ . A geometria imperfeita assim definida é apresentada a seguir na Figura 9.20 para o fator de escala  $\zeta = 0,4$ .



Na Figura 9.21 são representados os trechos iniciais das trajetórias assintóticas à trajetória bifurcada, obtidas com a presente formulação modal e com a de Alves.



Observa-se na Figura 9.21 que a formulação anteriormente utilizada por ALVES [97] é incapaz de seguir na trajetória instável assintótica à trajetória bifurcada, mesmo em um curto trecho inicial pós-crítico.

São apresentados na Tabela 9 os pontos limites (flambagem) da estrutura para os quatro parâmetros de imperfeição  $\zeta$  anteriormente citados.

Tabela 9 Deslocamento ( $v$ ) e carga limite (flambagem) do arco abatido birrotulado.

Formulação	$\zeta$			
	0,1	0,2	0,3	0,4
Incremental/iterativo	2,049cm	2,055cm	2,068cm	2,082cm
	35,45N	34,29N	33,69N	33,16N
Modal – presente	2,265cm	2,246cm	2,240cm	2,242cm
	36,37N	35,48N	34,76N	34,15N

Portanto, de acordo com a referida tabela, as cargas de flambagem da estrutura imperfeita obtidas com a presente análise modal são próximas às obtidas com a formulação incremental/iterativa.

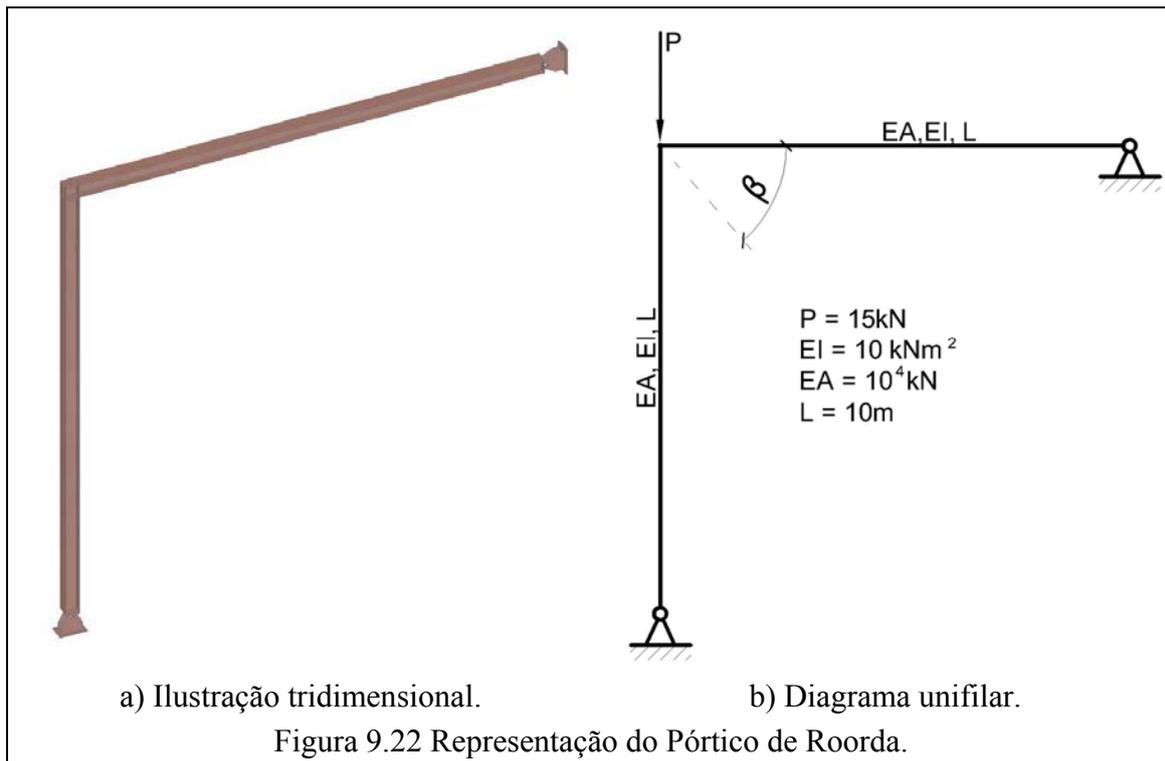
## 9.5 Pórtico de Roorda

Pórticos em L, *L-Frames*, são muito utilizados como *benchmark* na validação de modelos para análises não-lineares de estruturas devido ao peculiar comportamento dos mesmos, podendo apresentar instabilidade por bifurcação assimétrica.

O Pórtico em L de Roorda, ou simplesmente Pórtico de Roorda, foi utilizado num dos primeiros trabalhos experimentais de comprovação da teoria geral da estabilidade. Roorda obteve excelente correlação com a solução assintótica de Koiter [24]. Battista em [11] demonstra a seguinte expressão para a carga crítica para o Pórtico de Roorda apresentado na Figura 9.22:

$$P_c = 1,406 \frac{EI\pi^2}{L^2} \quad (9.3)$$

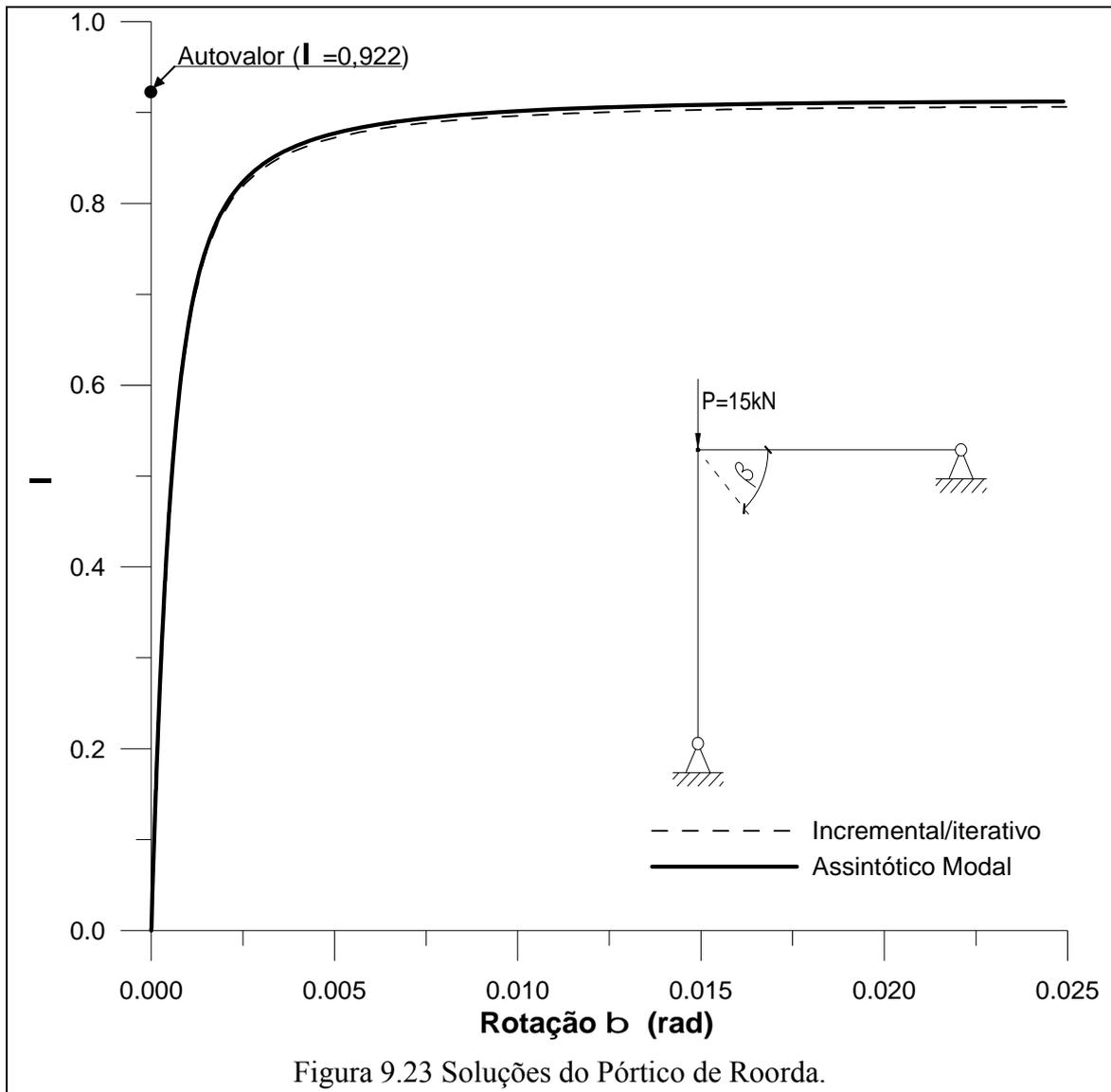
Deve-se ressaltar que o Pórtico de Roorda é um típico caso de Pórtico em L com presença de bifurcação assimétrica em sua trajetória de equilíbrio.



Representa-se a solução modal na Figura 9.23 para o caso do Pórtico de Roorda. Os resultados apresentados na Figura 9.23 mostram a boa correlação entre a solução modal com apenas seis modos assintóticos e a incremental/iterativa, as quais foram capazes de detectar a carga crítica por meio do decréscimo repentino do parâmetro de carga. São apresentados na Tabela 10 os valores da carga crítica obtidos nestas análises.

Tabela 10 Valores de ponto limite do Pórtico de Roorda obtidos nas análises.

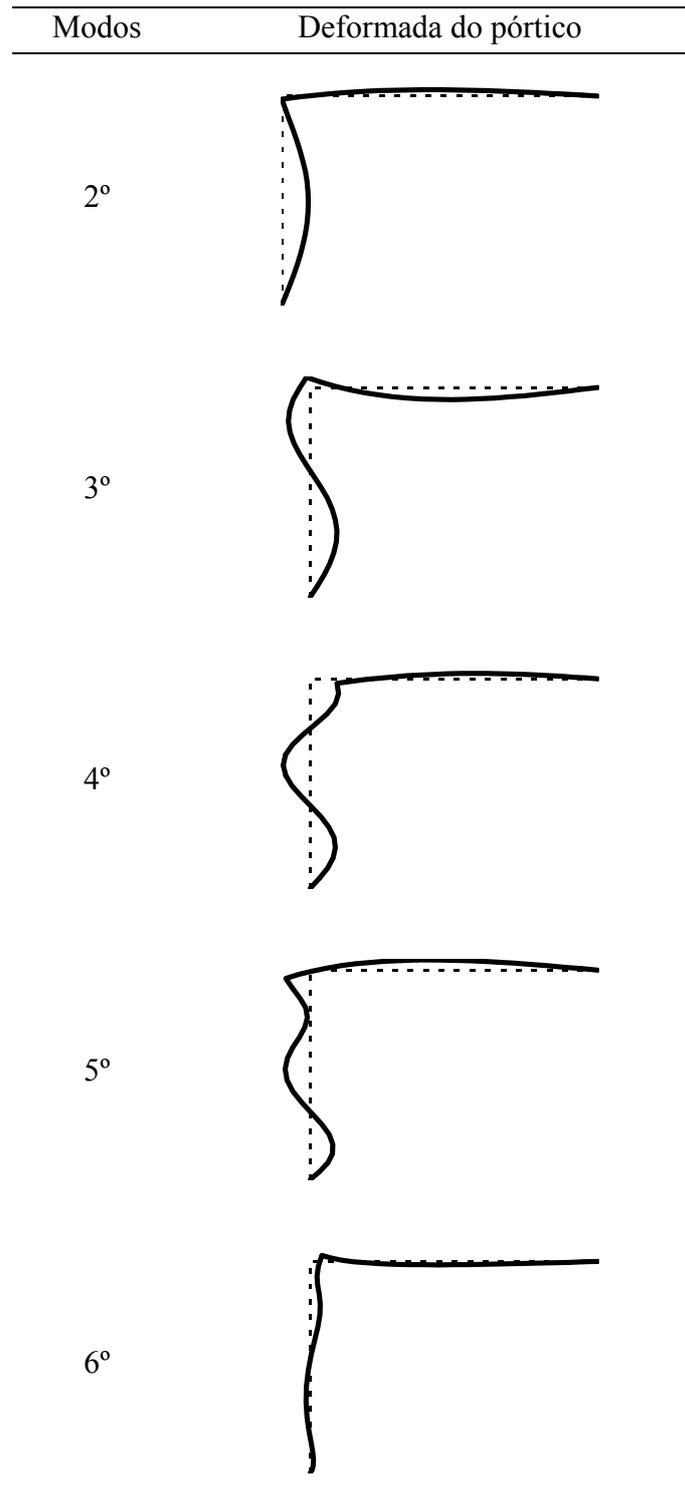
Formulação	Carga Crítica
Autovalor consistente	13,836kN
Expressão analítica	13,878kN
Incremental/iterativa	13,591kN
Assintótico modal	13,682kN



As formas modais utilizadas para obtenção dos resultados anteriores são representadas na Tabela 11 a seguir.

Tabela 11 Deformada do Pórtico de Roorda sob influência dos modos assintóticos ortonormalizados.

Modos	Deformada do pórtico
1°	



Para avaliar a influência de imperfeições foram aplicadas excentricidades ( $e$ ) no carregamento, considerada positiva se promover rotações ( $\beta$ ) no sentido horário (ver Figura 9.24). A excentricidade negativa foi obtida com um prolongamento do membro

horizontal do pórtico (pequeno elemento em balanço). Foram adotados quatro valores para as excentricidades, a saber:  $e = \pm(0,005, 0,010, 0,015, 0,02)m$ .

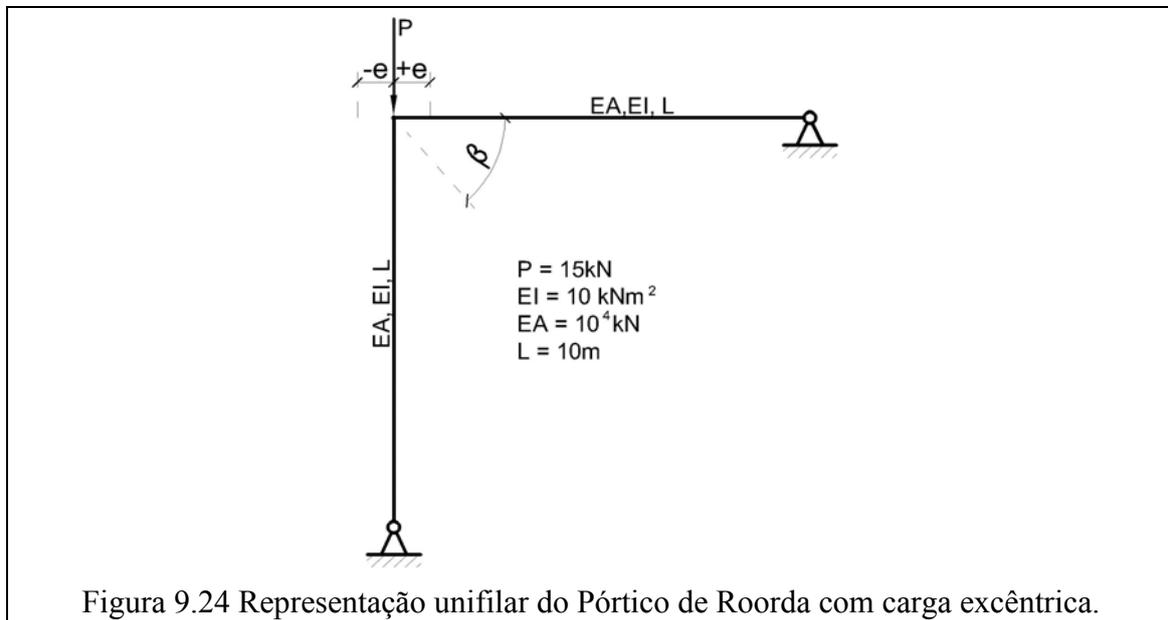


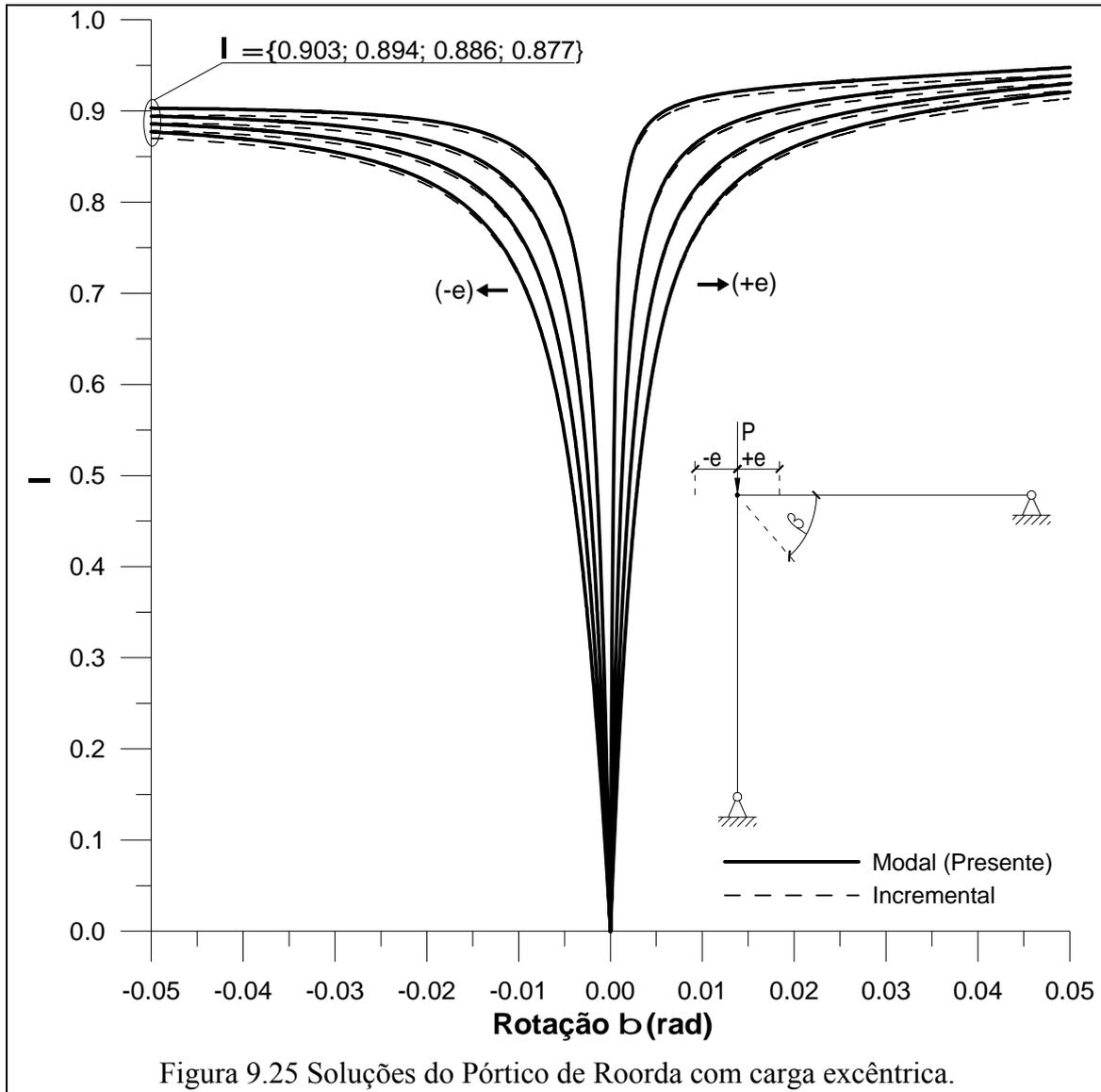
Figura 9.24 Representação unifilar do Pórtico de Roorda com carga excêntrica.

São representados na Figura 9.25 os resultados obtidos com as análises para a situação da carga excêntrica. Percebe-se, a partir das curvas representadas na referida figura, que este problema de pórtico em L trata-se de um caso com trajetória de equilíbrio com bifurcação assimétrica. As respostas são bem correlacionadas nos trechos iniciais de acentuada não-linearidade da trajetória com a solução incremental/iterativa, tal como ocorrido anteriormente sem a excentricidade. Entretanto, para trechos mais avançados da trajetória, a solução assintótica modal se afasta da solução incremental/iterativa.

Para comparação de resultados utiliza-se a seguinte expressão analítica demonstrada em [11] e que fornece justamente a carga de flambagem para o problema do pórtico com carga excêntrica, tal como representado anteriormente na Figura 9.24:

$$\lambda_f = \lambda_c \left[ 1 - 1,15 \left( \frac{e}{L} \right)^{1/2} \right] \quad (9.4)$$

sendo  $e$  a excentricidade,  $\lambda_f$  o parâmetro da carga de flambagem,  $\lambda_c$  o parâmetro da carga crítica de bifurcação, obtido a partir da expressão (9.4).



Na Tabela 12 estão os valores das cargas de flambagem obtidos com a expressão (9.4), segundo as excentricidades utilizadas na Figura 9.25, que, como se pode observar, são compatíveis com as coordenadas do eixo  $\lambda$  apontados na referida figura.

Tabela 12 Carga de flambagem do Pórtico de Roorda.

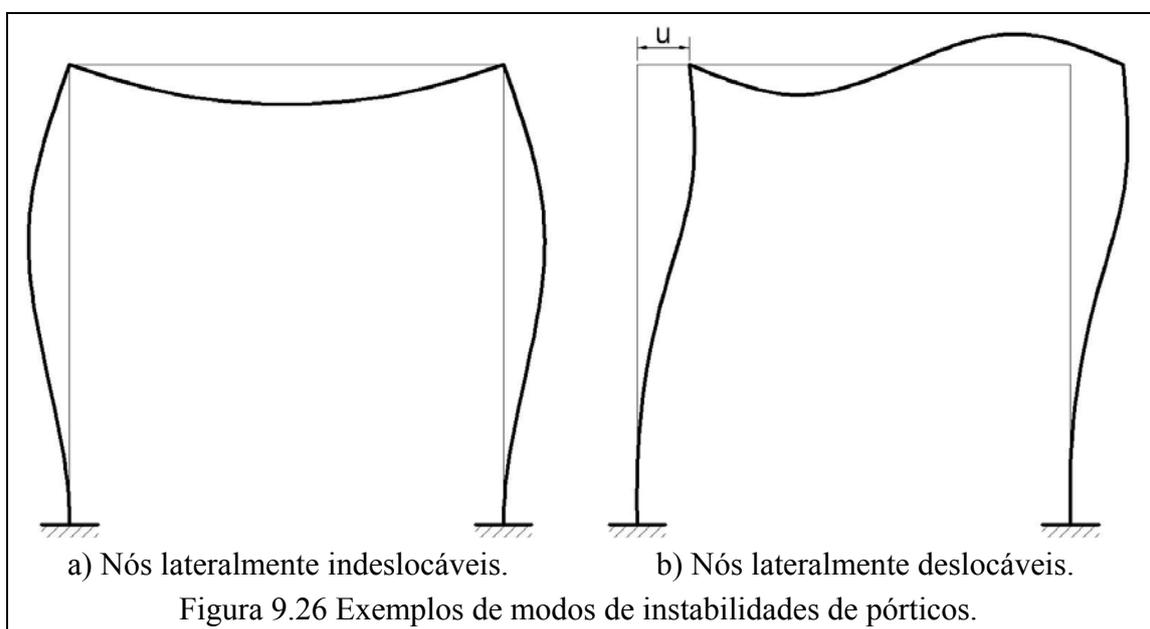
Excentricidade	Carga de flambagem	$\lambda_f$
-0,005	13,530kN	0,902
-0,01	13,380kN	0,892
-0,015	13,275kN	0,885
-0,02	13,170kN	0,878

## 9.6 Pórtico de Três Barras

O pórtico de três barras ou *Portal frame* é um dos modelos estruturais mais utilizados para validação de formulações de análise não-lineares. Normalmente estruturas de edificações convencionais são formadas pela associação deste típico modelo estrutural.

O comportamento estrutural deste tipo de pórtico assemelha-se ao de colunas com a presença de bifurcação em modelos simétricos perfeitos. Deve-se ressaltar que os modos de instabilidade de pórticos de três barras, ou de pórticos formados por associações destes, podem ou não apresentar deslocamentos laterais, conforme exemplificado a seguir na Figura 9.26.

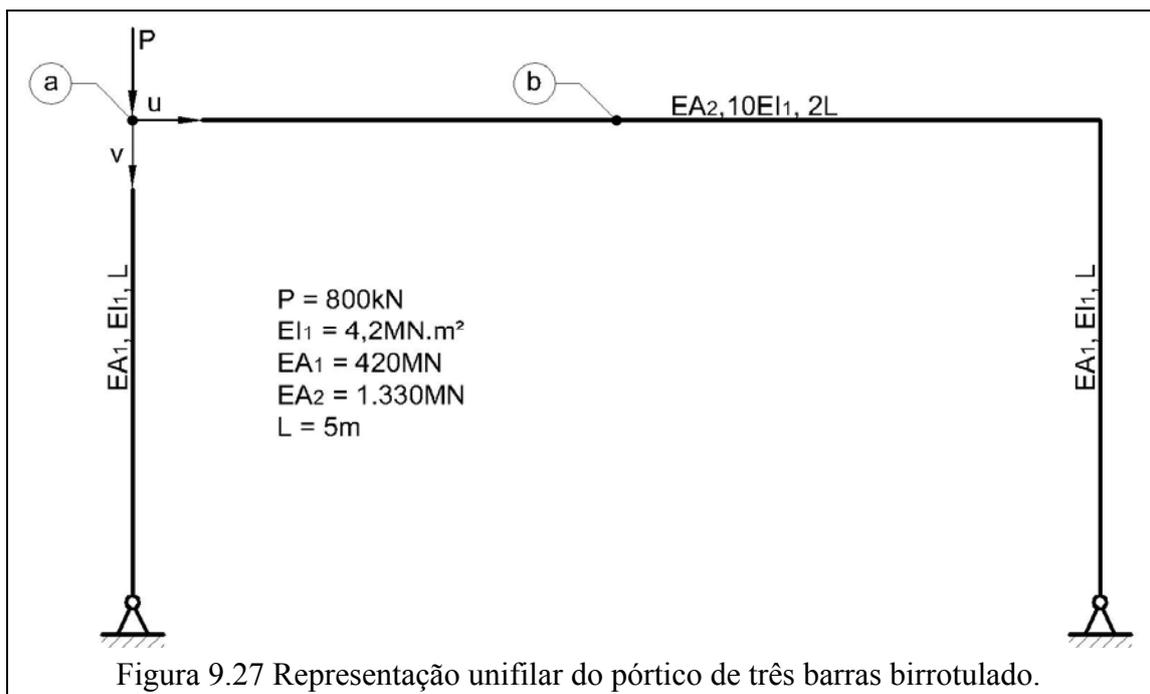
Normalmente toma-se a medida de restringir, ainda que parcialmente, os deslocamentos laterais em pórticos por meio de elementos estruturais secundários. Isto normalmente acarreta no aumento do valor de sua carga crítica, já que na maioria dos casos as cargas críticas de pórticos são associadas a modos de instabilidade com deslocamentos laterais.



Os referidos elementos de restrições dos deslocamentos laterais utilizados em pórticos são chamados de elementos de travejamento ou de contraventamento e são muito comuns em edificações convencionais, principalmente em estruturas metálicas esbeltas. Estes elementos devem ser preferencialmente conectados nos pontos de máximas amplitudes dos modos de instabilidade da estrutura, daí a necessidade prática de se

conhecer não somente a carga crítica do problema como também o modo de instabilidade associado.

Analisa-se aqui um pórtico birrotulado de três barras sujeito à ação de uma carga concentrada em duas posições: **a** - sobre o eixo de uma das colunas; **b** - no meio do vão do pórtico, conforme ilustrado na Figura 9.27.



Representam-se as trajetórias de equilíbrio, com o grau de liberdade  $u$ , obtidas com a presente formulação assintótica modal e com a análise incremental/iterativa do referido pórtico para o primeiro caso de posicionamento da carga (ponto a) na Figura 9.28. Percebe-se na mesma figura que as trajetórias de equilíbrio obtidas com as duas formulações são bastante próximas. Ressalta-se que com a presente análise modal foi necessária a participação de apenas seis modos assintóticos na combinação.

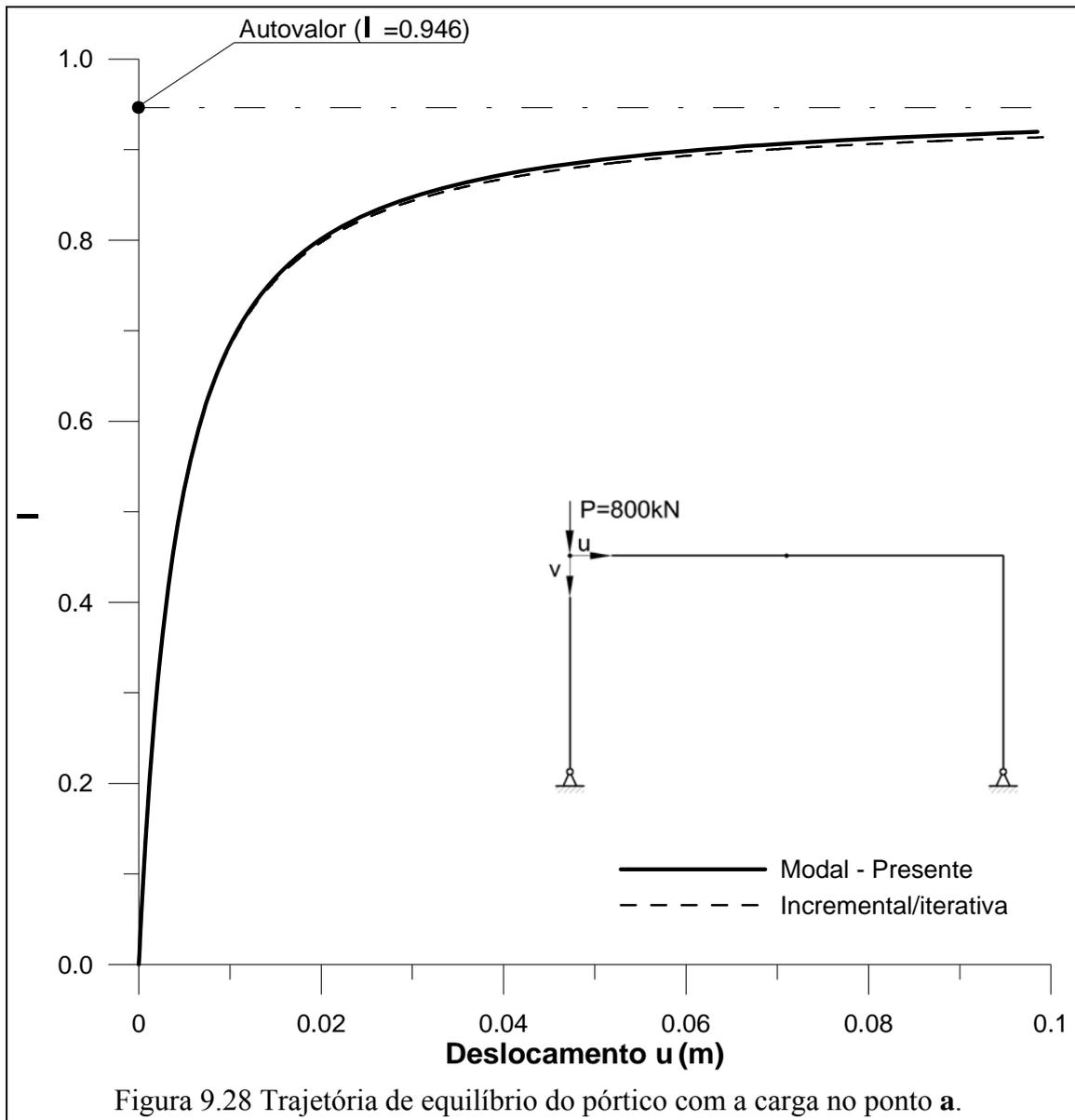


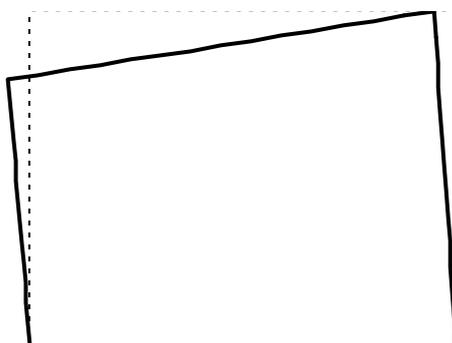
Figura 9.28 Trajetória de equilíbrio do pórtico com a carga no ponto **a**.

Na Tabela 13 representa-se a geometria deformada da estrutura sob ação dos modos utilizados na análise modal com a carga aplicada no ponto **a**.

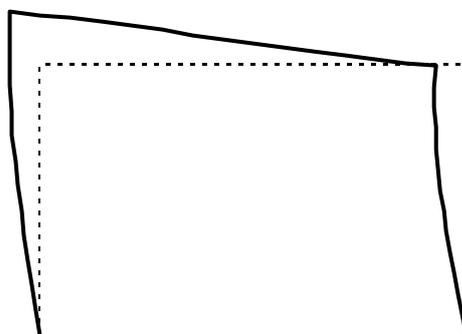
Tabela 13 Deformada do pórtico sob influência dos modos ortonormalizados.

Modos	Geometria deformada do pórtico (carga no ponto a)
-------	---

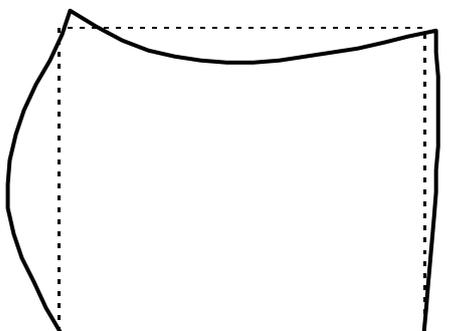
1°



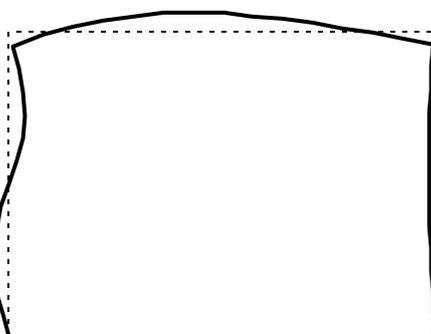
2°



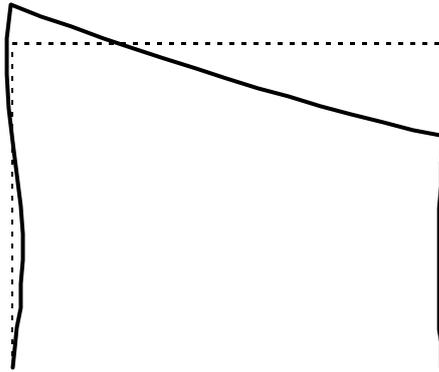
3°



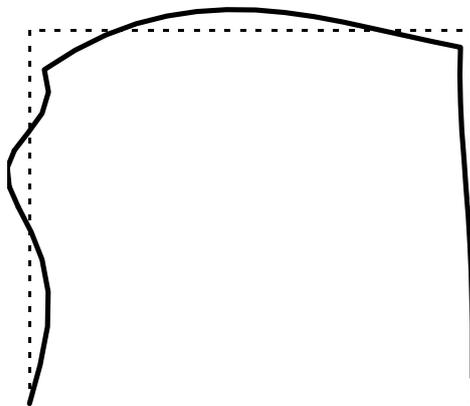
4°



5°

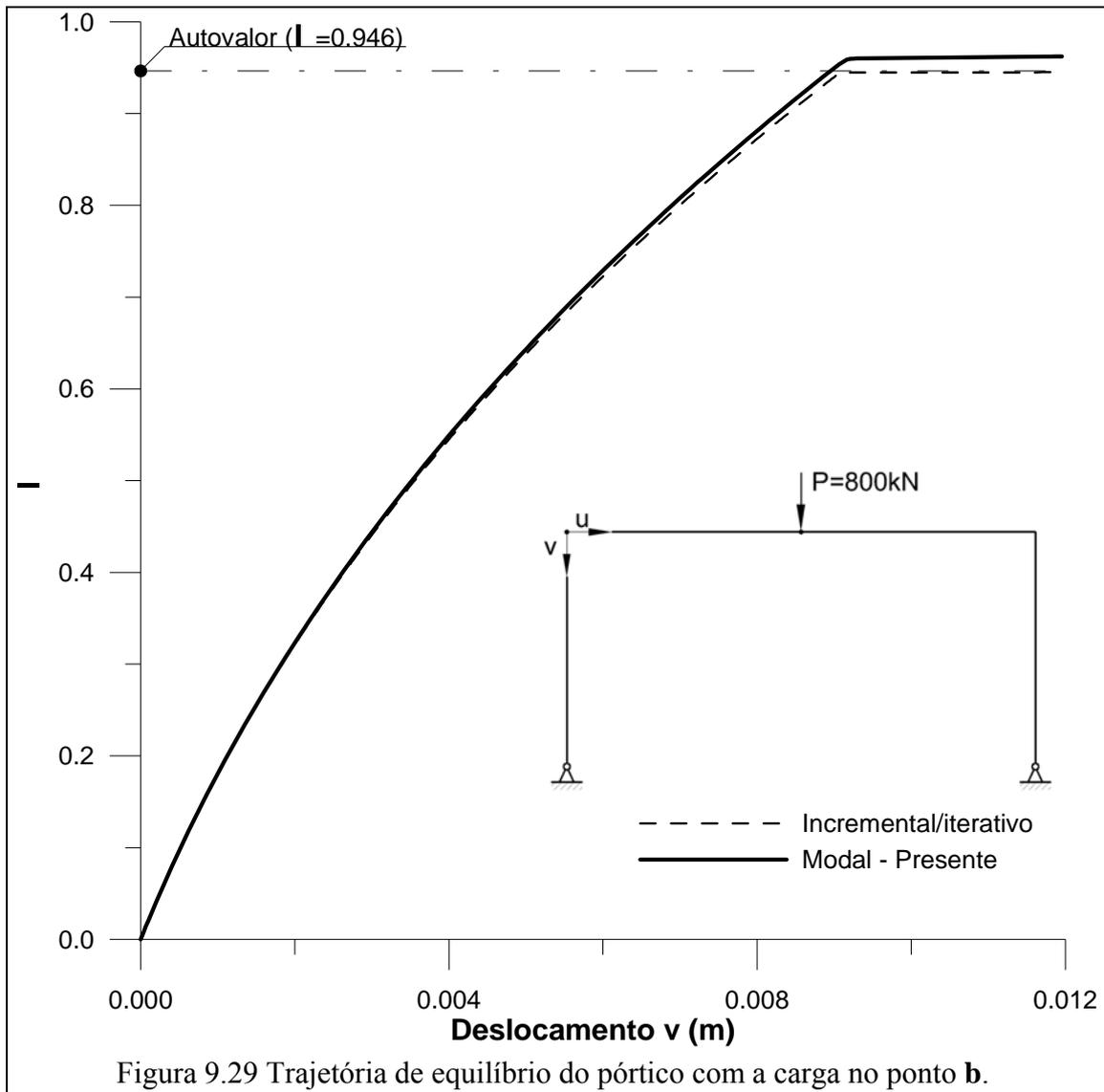


6°(crítico)



---

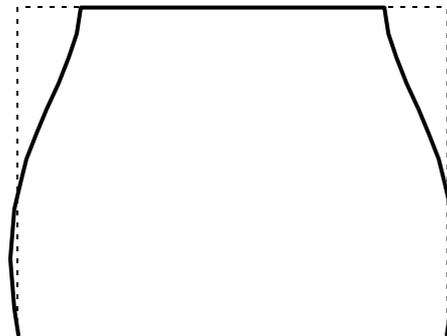
Na Figura 9.29 é representada a trajetória de equilíbrio do pórtico de três barras com a consideração da carga concentrada no meio do vão (ponto b).

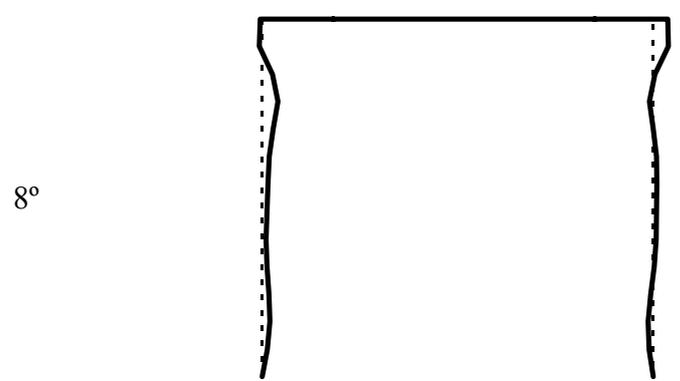
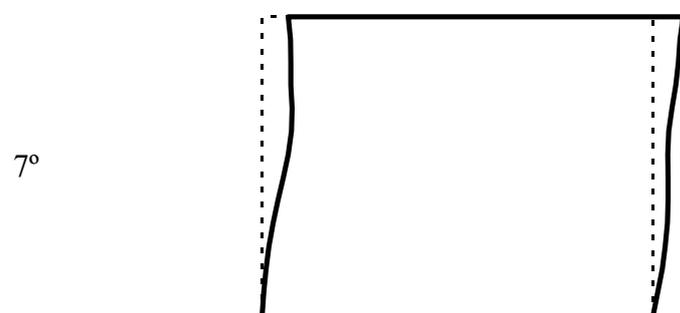
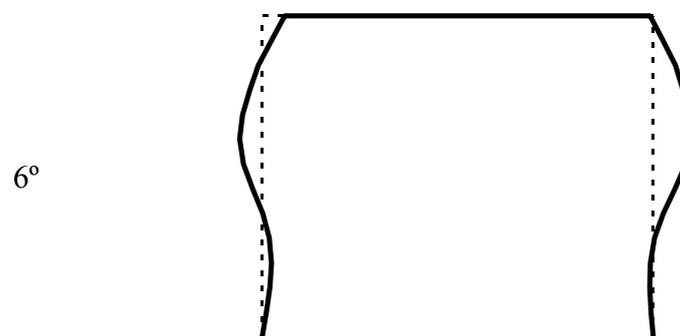
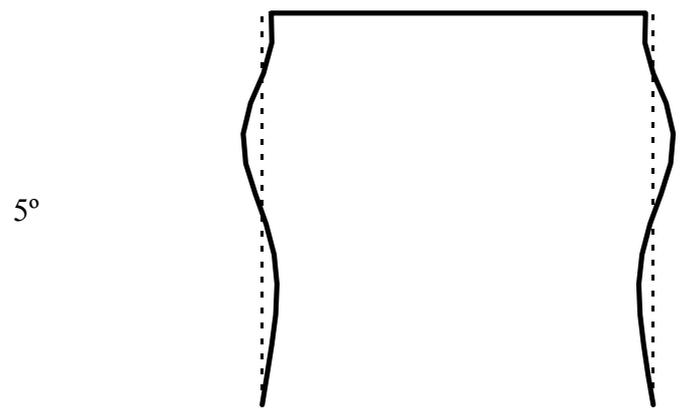


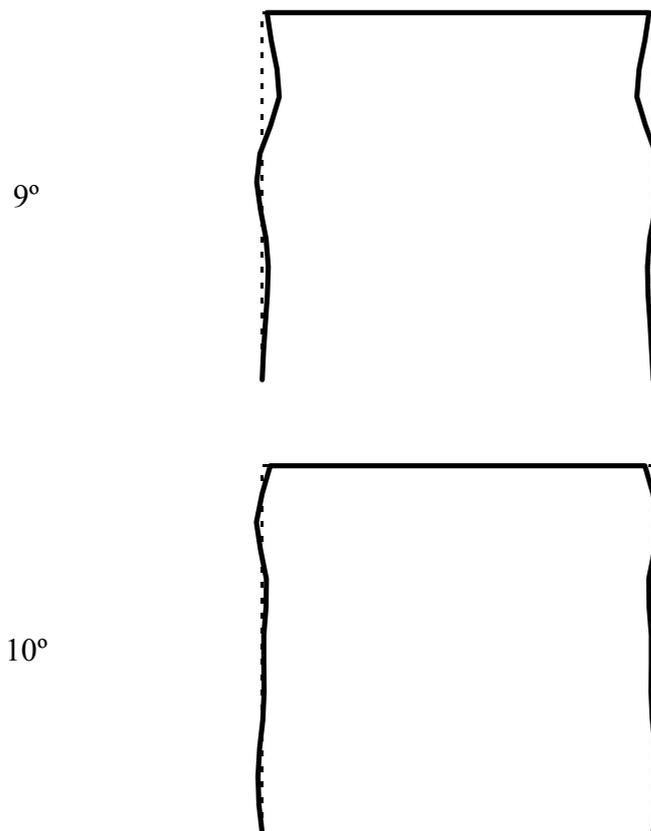
Como se pode perceber, a trajetória fundamental é repentinamente interceptada pela trajetória secundária com posterior aumento gradual do nível de carga, caracterizando uma bifurcação com trecho pós-crítico estável. Nota-se também que a solução de autovalor consistente, neste caso, praticamente coincidiu com a carga crítica obtida via análise incremental/iterativa.

Foram necessários dez modos assintóticos para o estabelecimento do ponto de bifurcação com a presente formulação (ver Tabela 14).

Tabela 14 Deformada do pórtico sob influência dos modos assintóticos.

Modo	Deformada da estrutura (carga no meio do vão)
1°	
2°	
3°	
4°	





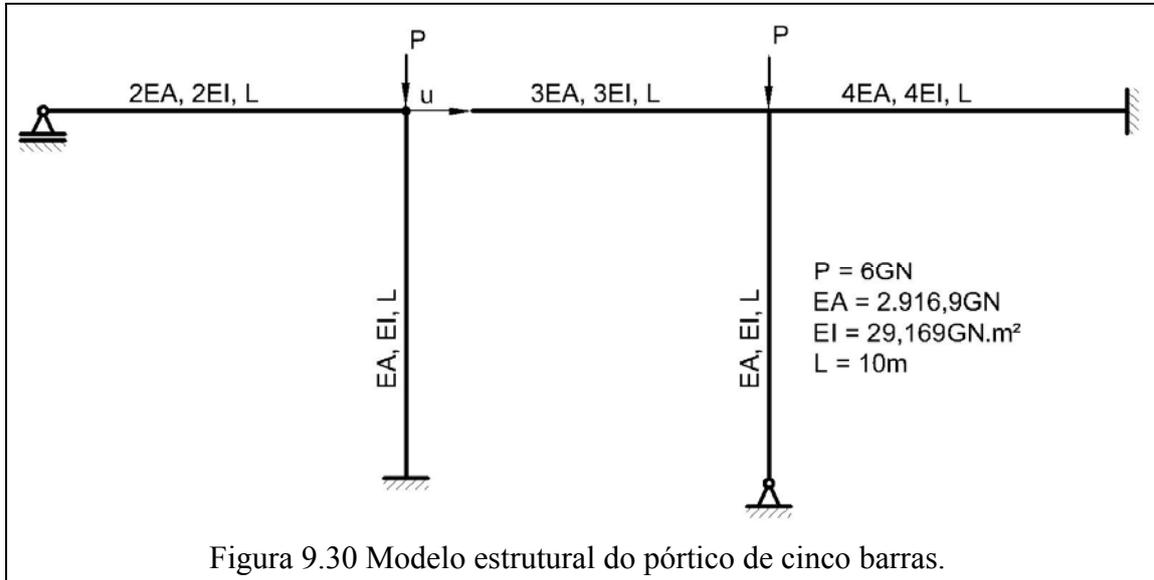
Os pontos de bifurcação obtidos nas análises são mostrados na Tabela 15, onde se percebe uma pequena diferença de 1,12% entre os resultados com a análise modal e incremental/iterativa.

Tabela 15 Ponto de bifurcação do Pórtico de três barras com carga no meio do vão.

Formulação	Carga de bifurcação (kN)	Deslocamento v (mm)
Presente	764,33	9,14
Incremental /iterativo	755,74	9,12
Autovalor consistente	757,12	-

## 9.7 Pórtico de Cinco Barras

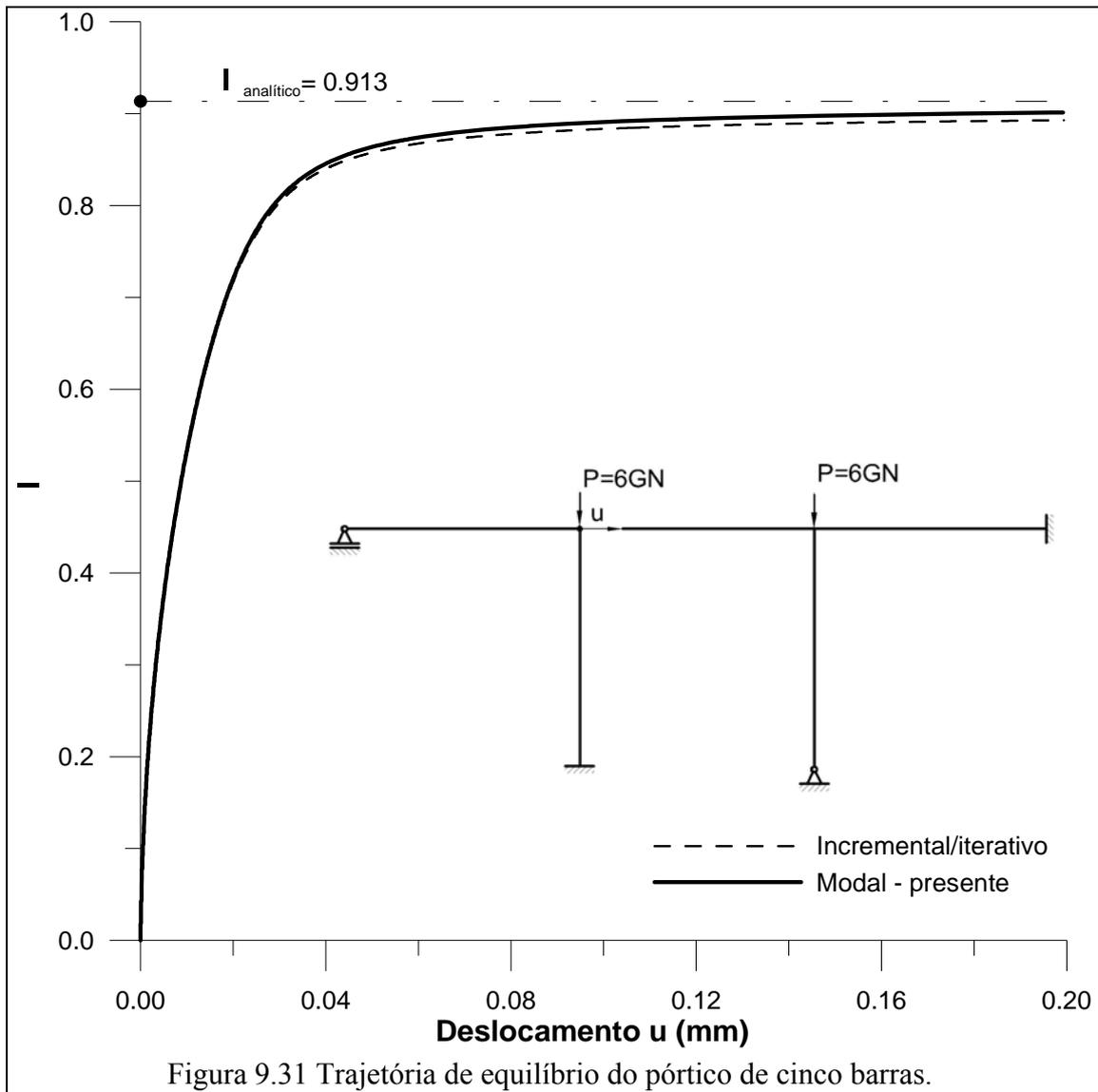
Nesta seção analisa-se o comportamento estrutural de um pórtico de cinco barras representado na Figura 9.30.



Segundo [9], a solução analítica para a carga crítica deste pórtico é definida na expressão (9.5) a seguir:

$$P_c = 18,786 \frac{EI}{L^2} \quad (9.5)$$

Na Figura 9.31 é representada a trajetória de equilíbrio deste pórtico obtida nas análises, onde se percebe que a solução modal apresenta trajetória pouco superior à obtida com a análise incremental/iterativa. Entretanto, ambas as trajetórias encontram-se próximas do valor teórico obtido com aplicação da expressão (9.5), proporcionando inclusive uma estimativa de carga crítica inferior a esta.



Traçando-se uma reta tangente ao seguimento posterior ao trecho não linear da trajetória de equilíbrio são obtidas as seguintes estimativas de carga de flambagem na Tabela 16:

Tabela 16 Carga P de bifurcação do Pórtico de cinco barras.

Formulação	Parâmetro ( $\lambda_c$ )	Carga de bifurcação - $P_c$
Modal - presente	0,877	5,262GN
Incremental /iterativo	0,870	5,220GN
Analítico	0,913	5,478GN

Portanto, a presente formulação mostrou-se eficaz na solução deste problema, tal como ocorrido nos anteriores problemas de pórticos. Para obtenção da solução apresentada na Figura 9.31 foram usados apenas seis modos assintóticos e um modo crítico, os quais estão representados na Tabela 17.

Tabela 17 Geometria deformada do pórtico sob influência das formas modais.

Modo	Geometria deslocamentos horizontais (u)
1°	
2°	
3°	
4°	

Modo	Geometria deslocamentos horizontais (u)
5°	
6°	
7°(crítico)	

### *Conclusões e Comentários Finais*

Neste trabalho apresenta-se uma formulação matemática para solução do problema de instabilidade estrutural via método dos elementos finitos. A técnica aplicada deu sequência à linha de pesquisa do PEC/COPPE com foco na análise assintótica modal e representa uma expressiva evolução em relação aos trabalhos já apresentados. A formulação da análise assintótica modal foi inteiramente revista e aperfeiçoada, destacando-se a utilização de Referencial Lagrangeano Atualizado. Seguiu-se a definição das matrizes de rigidez a partir da consideração do tensor de Green-Lagrange completo com deformações uniformizadas, possibilitando inclusive a consideração das solicitações de flexão no cálculo das tensões iniciais. Outra evolução importante foi a combinação de modos assintóticos e críticos na solução assintótica modal, destacando-se a identificação e eliminação automatizada dos modos linearmente dependentes dos já retidos, utilizando-se a decomposição em valores singulares para identificação dos mesmos. A ortonormalização dos modos a serem utilizados nas combinações foi realizada com a aplicação do Processo de Gram-Schmidt Modificado.

Para se justificar as conclusões adiante apresentadas, deve-se inicialmente enfatizar que, embora baseada nos mesmos fundamentos (Teoria Geral da Estabilidade Elástica), a presente formulação demonstrou evoluções decisivas para o sucesso na obtenção de resultados anteriormente inalcançados. Tão importante quanto a revisão da formulação, foi a nova implementação computacional inteiramente desenvolvida no decorrer deste trabalho visando a automatização da análise assintótica modal.

Dentre as evoluções deve-se destacar o sucesso, não obtido anteriormente, na combinação de modos críticos e assintóticos para a formação de uma base ortonormal representativa do comportamento não-linear geométrico. Este fato permitiu que a

análise assintótica modal apresentasse boa convergência, inclusive no caminho pós-ponto limite de estruturas perfeitas e imperfeitas. Conforme observado no capítulo 9, o traçado do caminho pós-crítico se deve à participação do modo crítico na resposta da estrutura, os quais nem sempre eram determinados através das expansões assintóticas.

Por outro lado, a pesquisa indicou que a utilização apenas de modos assintóticos por vezes não garante a convergência na análise assintótica modal, sendo sempre preferível a utilização de modos assintóticos associados a alguns poucos modos críticos, tal como descrito por Koiter.

Dentre os diversos aperfeiçoamentos, um dos mais decisivos para o sucesso da presente análise assintótica modal foi a adoção do RLA. Embora os fundamentos do emprego de referencial atualizado já tenham sido apresentados anteriormente, a efetiva utilização na análise assintótica modal é pioneira na linha de pesquisa do PEC/COPPE. A pesquisa indicou que, independentemente da combinação modal adotada, a utilização do referencial atualizado na análise assintótica modal possibilita melhores aproximações, principalmente no desenvolvimento das trajetórias pós-críticas.

A magnitude do comprimento de arco, utilizado como restrição adicional ao avanço ao longo do caminho de equilíbrio, até então era fixado como um valor suficientemente pequeno para uma boa descrição do caminho fundamental inicial, devido simplesmente à quantidade de pontos calculados da trajetória. A presente pesquisa detectou que a boa calibragem do comprimento de arco também é decisiva na obtenção de bons resultados.

Além dos fatores descritos acima, destaca-se o desenvolvimento de uma nova técnica para identificação e eliminação dos modos linearmente dependentes e a aplicação de um processo de ortonormalização que garantiram que os modos realmente representativos do comportamento não-linear fossem identificados e retidos.

Todos estes fatores permitiram o grande sucesso demonstrado nas respostas apresentadas, destacando-se a detecção e ultrapassagem de pontos críticos do tipo bifurcação a partir de modelos geometricamente perfeitos utilizando-se a análise assintótica modal. Problemas desta natureza geralmente não podiam ser resolvidos anteriormente com análise assintótica modal, mesmo com a imposição de imperfeições geométricas iniciais, como demonstrado no capítulo 9.

Outra importante contribuição dada neste trabalho foi a re-escrita de maneira consistente da formulação matemática para caracterização de pontos críticos por meio da decomposição espectral da matriz de rigidez tangente. Ressaltando-se ainda que, embora não seja o objetivo desta formulação, por meio da mesma podem ser obtidos modos que também podem ser aplicados na combinação da análise assintótica modal.

Como sugestões para prosseguimento deste trabalho podem ser citadas as seguintes pesquisas:

- Melhoria da sensibilidade numérica no processo de verificação de ortogonalidade de vetores de maneira a eliminar os pares similares de modos críticos e assintóticos;
- Revisão e aplicação da análise assintótica pós-crítica anteriormente estudada em [24] e em [76] e investigação da aplicação dos modos assintóticos pós-críticos na presente análise modal;
- Investigação da aplicação da técnica do controle de deslocamento generalizado na análise modal;
- Utilização de referencial corrotacional na análise modal assintótica, haja visto a vantagem da possibilidade de retirada dos movimentos de corpo rígido;
- Utilização de técnicas de busca como *Line Search* podem ser vantajosas, já que aceleram a convergência no Método de Newton-Raphson;
- Verificação da influência de juntas em estruturas reticuladas, por meio da modelagem de ligações semi-rígidas.
- Ampliação das técnicas desenvolvidas para os problemas tridimensionais de barras (pórticos espaciais) e, certamente mais complexos, de estruturas de placas e cascas.

## *Referências Bibliográficas*

- [1] BATTISTA, R.C., PFEIL, M.S., BATISTA, E.M. “Strengthening the Steel Structural of a Reticulated Spherical Dome against Local Instabilities”, *Journal of Constructional Steel Research*, nº57, PP.15-28, 2001.
- [2] BATTISTA, R. C., Verificação da Estabilidade Estática e Dinâmica e projeto de Reforço da Estrutura Metálica Reticulada Espacial em Domo Esférico da Cobertura do Ginásio Poliesportivo Nilson-Nelson de Brasília-DF; Relatório Técnico COPPETEC/ Rio de Janeiro, 1996.
- [3] EULER, L.P., *Methodus Inveniendi Líneas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudente*”, Appendix: De Curvis Elasticis, Macum Michaellem Bousquet, Lausanne, 1744.
- [4] YOUNG, T., *A course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts*, London, 1807
- [5] BAZANT, Z.P. “Structural Stability”, *International Journal of Solids Structures*, vol. 37, pp 55-67, 2000.
- [6] WAGNER, H. “Ebene Blechträger mit Sehr Dünnem Stegblech”, *Zeitschrift für Flugtechnik und Motor Luftschiffahrt*, vol.20, pp.220, 1929.
- [7] COX, H. L. “Buckling of Thin Plates in Compression”, *Aeronautical Research Communications, Report and Memory*, n.1554, 1934.
- [8] MARGUERRE, K., TREFFTZ, E. “Über die Tragfähigkeit eines Längsbelasteten Plattenstreifens nach überschreiten der Beullast”, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 17, pp.85, 1937.

- [9] REIS, A., CAMOTIM, D. *Estabilidade Estrutural*. 1ª ed. Portugal, McGraw Hill de Portugal L.da, 2001.
- [10] KOITER, W.T. *Over Stabiliteit van het Elastische Evenwicht*. Tese de Doutorado, Delft, Holanda. (tradução para o inglês: “On the Stability of Elastic Equilibrium”, NASA Report n.º TT-F-10833), 1967.
- [11] BATTISTA, R.C., *Estabilidade Elástica de Sistemas Mecânicos Estruturais*, Monografia, III Escola de Matemática Aplicada, LNCC- Laboratório de Computação Científica/UFRJ, Rio de Janeiro/RJ, Brasil, 1992.
- [12] HUTCHINSON, J.W. “Plastic Buckling”, *Advances in Applied Mechanics*, Vol.14, p. 67, 1974.
- [13] BUDIANSKY, B. “Theory of Buckling and Post-Buckling Behavior of Elastic Structures”, *Advances in Applied Mechanics*, vol.14, pp.1, 1974.
- [14] BUDIANSKY, B., HUTCHINSON, J. W. “Buckling: Progress and Challenge”, *Trends in Solid Mechanics*, pp.93, Alphen, 1979.
- [15] CHILVER, A. H., “The Elastic Stability of Structures”, In Leipholz, H.H.(ed), *Stability*, chapter 03, Canadá, Solid Mechanics Division, University of Waterloo Press, 1972.
- [16] CROLL, J. G., WALKER, A.C., *Elements of Structural Stability*. 1ªed. London, Macmillan, 1972.
- [17] ROODAR, J. “Concepts in Elastic Structural Stability”, *Mechanics Today*, v. 1, pp. 322, 1972.
- [18] ROODAR, J., *Buckling of Elastic Structures*, Canadá, Solid Mechanics Division University of Waterloo Press, 1980.
- [19] THOMPSON, J. M., HUNT, G. W., “*A General Theory of Elastic Stability*”, London John Wiley e Sons, 1973.

- [20] THOMPSON, J. M., HUNT, G. W., *Elastic Instability Phenomena*, Chichester John Wiley e Sons, 1984.
- [21] SHANLEY, F. R. “Inelastic Column Theory”, *Journal of Aeronautical Sciences*, Vol.14, pp. 261, 1947.
- [22] HILL, R. “A General Theory of Uniqueness and Stability in Elastic-Plastic Solids”. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, vol. 6, pp.236, 1958.
- [23] HILL, R. “Bifurcation and Uniqueness in Nonlinear Mechanics of Continua”, *Problems of Continuum Mechanics* (Muskhelishvili Volume), pp. 155, Soc. Ind.Apppl. Math. (SIAM), 1961.
- [24] ANTONINI, R. C., Uma Formulação Discretizada da Teoria da Estabilidade Elástica para Análise Estrutural Via Método dos Elementos Finitos. Tese D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1986.
- [25] ALVES, R.V., *Instabilidade Não-Linear Elástica de Estruturas Reticuladas Espaciais*. Tese D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1995.
- [26] RODRIGUES, P.F.N., Estratégias Computacionais para a Análise Não-Linear de Estruturas Reticuladas na Exploração de Petróleo Offshore. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2000.
- [27] TURNER, M. J., DILL, E. H., MARTIN, H. C., et al. “Large Deflection of Structures Subject to Heating and External Load”, *J. Aero. Sci.*, v. 27, pp. 97-106, 1960.
- [28] ARGYRIS, J. H., BALMER, H., DOLTSINIS, J. St., et al., “Finite Element Method - The Natural Approach”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 17/18, pp. 1-106, 1979.
- [29] ODEN, J. T. “Numerical Formulation of Non-linear Elasticity Problems”, *Journal of the Structural Division, ASCE*, v. 93, n. ST 3, paper 5290. 1967.

- [30] MALLET, R. H., ASCE, A. M., MARCAL, P. V. “Finite Element Analysis of Non-linear Structures”, *Journal of the Structural Division, ASCE*, vol. 94, n. ST 9, pp. 2081- 2105, 1968.
- [31] BREBBIA, C., CONNOR, J. “Geometrically Non-linear Finite Element Analysis”, *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, paper 6516, 1969.
- [32] MURRAY, D. W. e WILSON, E. L. “Geometrically Non-linear Finite Element Analysis”, *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, v. 95, n. EM1, pp. 143-165, 1969.
- [33] ODEN, J. T. “Finite Element Applications in Non-linear Structural Analysis”. In: *Proceedings of the Conference on Finite Element Method, Tennessee*, Nov. 1969
- [34] HAISLER, W. E., STRICKLIN, J. E. e STEBBINS, F. J. “Development and Evaluation of Solution procedures for Geometrically Non-linear Structural Analysis by Discrete Stiffness Method”. In: *Proceedings of the AIAA/ASME Structure, Structural Dynamics e Materials Conference, California*, Apr. 1971.
- [35] ZIENKIEWICZ, O. C., *The Finite Element in Engineering Science*, 3 ed. London, McGraw-Hill, 1971.
- [36] FOX, L., STANTON, E. “Developments in Structural Analysis of Direct Energy Minimization”, *AIAA Journal*, v. 6, pp. 1036-1042, 1968.
- [37] OLIVEIRA, V.M.B., *Análise e Projeto de Tenso-Estruturas Têxteis para Cobertura*, Tese D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2003.
- [38] LIMA, J.M.F., Estudo Comparativo entre Formulações Geometricamente Não-lineares para Flexo-torção de Hastes de Paredes Delgadas de Seção Aberta. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2004.
- [39] BATOZ, J. L., DHATT, G. “Incremental Displacement Algorithms for Nonlinear Problems”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 14, pp. 1262-1267, 1979.

- [40] WEMPNER, G. A. "Discrete Approximations Related to Nonlinear Theories of Solids", *International Journal of Solids and Structures*, v. 7, pp. 1581-1599, 1971.
- [41] RIKS, E. "The Application of Newton's Method to the Problem of Elastic Stability", *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME*, v. 39, pp. 1060-1066, 1972.
- [42] RIKS, E. "An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems", *International Journal of Solids and Structures*, vol.15, pp. 529-551, 1979.
- [43] YANG, Y. B., SHIEH, M. S. "Solution Method for Nonlinear Problems with Multiple Critical Points", *AIAA Journal*, v. 28, n. 12 (Dec), pp. 2110-2116, 1990.
- [44] CRISFIELD, M. A. "A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles "Snap-Through", *Computers e Structures*, vol. 13, pp. 55-62, 1981.
- [45] CRISFIELD, M. A. "An Arc-Length Method Including Line Searches and Accelerations", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.19, pp. 1269-1289, 1983.
- [46] RAMM, E. "Strategies for tracing the Non-linear Response Near Limit Points". In: *Non-linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, Wunderlich, W., Stein, E. and Bathe, K. -J., New York, Springer-Verlag, pp. 63-89, 1981.
- [47] RAMM, E. "The Riks/Wempner Approach - An Extension of the Displacement Control Method in Non-linear Analysis". In: *Non-linear Computational Mechanics*, Pineridge, pp. 63-86, 1982.
- [48] GIERLINSKI, J. T., GRAVES-SMITH, T. R. "A Variable Load Iteration Procedure for Thin-Walled Structures, *Computers and Structures*, vol. 21, pp.1085-1094, 1985.

- [49] SCHWEIZERHOF, K., WRIGGERS, P. “Consistent linearization for Path Following Methods in Nonlinear F.E. Analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 59, pp. 261-279, 1986.
- [50] FORDE. B. W., R, STTEMER, S. F. “Improved Arc-Length Orthogonality Methods for Nonlinear Finite Element Analysis”, *Computers e Structures*, vol. 27, pp. 625-630, 1987.
- [51] BELLENI, P. X., CHULYA, A. “An improved automatic incremental algorithm for the efficient solution of nonlinear finite element equations, *Computers e Structures*, vol.26, pp. 99-110, 1987.
- [52] SIMO, J. C. WRIGGERS, P. SCHWEIZERHOF, K. H. e TAYLOR, R. L. “Finite Deformation Postbuckling Analysis Involving Inelasticity and Contact Constraints, *Innovative Methods for Nonlinear Problems*, ed. W. K. Liu et al., Pineridge Press, Swansea, pp. 365-388, 1984.
- [53] HELLWEG, H. B., CRISFIELD, M. A. “A New Arc-Length Method for Handling Sharp Snap-Backs”, *Computers e Structures*, vol. 66, n.5, pp. 705-709, 1998.
- [54] JACOB, B.P. *Análise Não-Linear de Estruturas*, Notas de aula, COPPE/UFRJ, 2004.
- [55] DAVIES, J. M., LEACH, P., HEINZ, D. “Second-Order Generalized Beam Theory”, *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 31, pp. 221-241, 1994.
- [56] LEACH, P., DAVIES, J. M. “An Experimental Verification of the Generalized Beam Theory Applied to Interactive Buckling Problems”, *Thin-Walled Structures*, vol. 25, No. 1, pp. 61-79, 1996.
- [57] NAGAHAMA, K., *Análise de Estabilidade Local em Perfis de Seção Aberta em Aço e em Resina Reforçada com Fibra de vidro*, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2003.

- [58] SILVESTRE, N., CAMOTIM, D., BATISTA, E., NAGAHAMA, K. “Buckling Behavior of Thin-Walled Composite Columns using Generalized Beam Theory. *In: Third International Conference on Thin-Walled Structures*, pp. 329 – 337, Amsterdam 2001.
- [59] SILVESTRE, N., CAMOTIM, D. “First-Order Generalized Beam Theory for Arbitrary Orthotropic Materials”, *Thin-Walled Structures*, vol. 40, pp. 755-789, 2002.
- [60] SILVESTRE, N., CAMOTIM, D. “Second-Order Generalized Beam Theory for Arbitrary Orthotropic Materials”, *Thin-Walled Structures*, vol. 40, pp. 791-820, 2002.
- [61] SILVESTRE, N., CAMOTIM, D. “GBT Buckling analysis of pultruded FRP lipped channel members”, *Computer e Structures* 81, pp. 1889-1904, 2003.
- [62] SILVESTRE, N. “Generalized Beam Theory to Analyze the Buckling Behavior of Circular Cylindrical Shells and Tubes”, *Thin-Walled Structures* 45, pp. 185-198, 2007.
- [63] BASAGLIA, C., *et al.* “Global Buckling Analysis of Plane and Space Thin-Walled Frames in the Context of GBT”, *Thin-Walled Structures* 46, pp. 79-101, 2008.
- [64] CAMOTIM *et al.*, “GBT – Based Buckling Analysis of Thin-Walled Members with Non-standard Support Conditions”, *Thin-Walled Structures* 46, pp. 800-815, 2008.
- [65] BATHE, K. J., BOLOURCHI, S. “Large Displacement Analysis of Three-Dimensional Beam Structures”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 14, pp.961-986, 1979.
- [66] ATTARD, M. M. “Nonlinear Theory of Non-uniform Torsion of Thin-Walled Open Beam”, *Thin-Walled Structures*, vol. 4, pp. 101-134, 1986.

- [67] CARDONA, A., GERADIN, M. “A Beam Finite Element Nonlinear Theory with Finite Rotations”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 26, pp. 2403-2438, 1988.
- [68] MEEK, J. L., LOGANATHAN, S. “Large Displacement Analysis of Space Frame Structures”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 72, pp. 57-75, 1989.
- [69] WEMPNER, G. A. “Finite Elements, Finite Rotations and Small Strains of Flexible Shells”, *International Journal of Solids and Structures*, v. 5, pp. 117-153, 1969.
- [70] CRISFIELD, M.A., MOITA, G.F. “A unified co-rotational framework for solids, shells and beams”, *International Solids Structures*, vol. 33, No. 20-22, pp. 2969-2992, 1996.
- [71] JOUGLARD, C.E., *Análise Não-linear Incremental Assintótica da Estabilidade de Estruturas Elásticas*, Tese M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1993
- [72] JÚNIOR, G.Y.R.A., SOUZA, R.M. “Elemento Finito de Barra para Análise Geométrica Não-linear Estática e Dinâmica Através da Formulação Co-rotacional”. In: *XXXI Jornadas Sulamericanas de Ingeniería Estructural*, Mendoza, Argentina, 2004.
- [73] ROORDA, J., CHILVER, A.H. “Frame Buckling: An Illustration of the Perturbation Technique”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 5, pp.235-246, 1970.
- [74] CARNOY, E. “Postbuckling Analysis of Elastic Structures by the Finite Element Method”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 23, pp.143-174, 1980.
- [75] CARNOY, E. G. “Asymptotic Study of the Elastic Postbuckling Behavior of Structures by the Finite Element Method”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 29, pp.147-173, 1981.

- [76] ALVES, R.V., *Análise Modal Assintótica da Estabilidade de Estruturas Reticuladas Espaciais*. Tese M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1989.
- [77] WRIGGERS, P., WAGNER, W., MIEHE, C., “A quadratically convergent procedure for the calculation of stability points in finite element analysis”, *Int. J. Num.Meth.*, vol. 70, pp. 329 - 347, 1988.
- [78] CARDONA, A., HUESPE, A. “Evaluation of Simple Bifurcation Points and Post-critical Path in Large Finite Rotation Problems”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 175, pp. 137 - 156, 1999.
- [79] PLANINC, I., SAJE, M. “A quadratically convergent algorithm for the computation of stability points: the application of the determinant of the tangent stiffness matrix”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 169, pp. 89 – 105, 1999.
- [80] IBRAHIMBEGOVIC, A., MIKDAD, M. A. “Quadratically Convergent Direct Calculation of Critical Points for 3D Structures Undergoing Finite Rotations”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 189, pp. 107 - 120, 2000.
- [81] BATTINI, J. M., PACOSTE, C., ERIKSSON, A. “Improved minimal augmentation procedure for the direct computation of critical points”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 192, pp. 2169 - 2185, 2003.
- [82] NETO, E. L., BARROSO, F. D. P., MONTEIRO, F. A. C. “Determinação Direta de Pontos de Bifurcação e Limites na Mecânica das Estruturas”. In: *Congresso de Métodos Numéricos em Engenharia - CMNE e Congresso Ibero Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia - CILAMCE*, Porto, Junho, 2007.
- [83] JÚNIOR, W. M. G., Avaliação do efeito das imperfeições sobre a flambagem de Estruturas sob a ação de cargas dependentes dos deslocamentos. Tese de M.Sc., PUC-RJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1999.

- [84] BURGOS, R. B., RAUL, R.S., MARTHA ,L.F.C.R. “Avaliação de Cargas Críticas e Comportamento Pós-Crítico Inicial de Pórticos Planos”. In: *Proceedings of the XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE*, Guarapari, Brasil, 2005.
- [85] BATTISTA, R.C., *Lower Bound Estimates of Cylindrical Shells Buckling*”. Ph.D. dissertation, University College, London, England, 1979.
- [86] ANTONINI, R.C., Influência da interação entre Modos e Imperfeições na Flambagem de Cascas Cilíndricas Axialmente Comprimidas. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1981.
- [87] JUSTINO, M.R., *Estabilidade Local de Painéis Cilíndricos Enrijecidos*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1982.
- [88] GONÇALVES, P.B., *Instabilidade e Sensibilidade de Cascas Cilíndricas Circunferencialmente Enrijecidas*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1983.
- [89] BERTOLINO, R., *Bifurcação Secundária Instável em Placas Retangulares*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1984.
- [90] PFEIL, M.S, *Interação Local-Global na Flambagem de Colunas de Seção U Enrijecida*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1985.
- [91] GONÇALVES, P.B., *Interação Dinâmica Não-Linear entre Fluido e Cascas Delgadas*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ. Brasil, 1987.
- [92] FIGUEIREDO, C.B., *Um Modelo Matemático para Estabilidade Elástica de Cascas Cilíndricas Enrijecidas*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1988.
- [93] CHAMBERLAIN, Z.M., *Comportamento Não-Linear de Cascas Cilíndricas Enrijecidas*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1990.
- [94] BENJAMIN, A.C., Análise Não-Linear Geométrica de Pórticos Tridimensionais pelo Método dos Elementos Finitos. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1982.

- [95] OLIVEIRA, J.N., *Estabilidade de Cascas Poliédricas Via Método dos Elementos Finitos*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1993.
- [96] ALVES, R.V., *Formulação para Análise Não-Linear Geométrica em Referencial Lagrangeano Total*. 1º Seminário de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1993.
- [97] ALVES, R.V., *Análise não-linear Geométrica por Superposição de Modos Assintóticos Ortogonalizados*. 2º Seminário Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1993.
- [98] ALVES, R.V., *Análise não-linear Geométrica em Referencial Lagrangeano Atualizado*. 3º Seminário Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1993.
- [99] OLIVEIRA, V.M.B., *Colapso Progressivo de Estruturas Reticuladas Espaciais*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2002.
- [100] THOMPSON, J.M.T., HUNT, G.W.A., *A General Theory of Elastic Stability*. 1ªed. London, John Wiley and Sons, 1973.
- [101] HUTCHINSON, J.W., KOITER, W.T. “Postbuckling Theory”, *Appl. Mech. Reviews*, 22, p.1353-1366, 1970.
- [102] GARCEA, G. *et al.* “Asymptotic Post-buckling FEM Analysis Using Corotational Formulation”, *International Journal of Solids and Structures*, 46, 377-397, 2009.
- [103] GARCEA, G. “Mixed Formulation in Koiter Analysis of Thin-walled Beam”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 190, 3369-3399, 2001.
- [104] GARCEA, G., TRUNFIO, G. A., CASCIARO, R. “Path-following Analysis of Thin-walled Structures and Comparison with Asymptotic Post-critical”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55, p. 73-100, 2002.

- [105] ABICHOU, H., ZAHROUNI, H., POTIER-FERRY, M. “Asymptotic Numerical Method for Problems Coupling Several Nonlinearities”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 (51-52), p. 5795-5810, 2002.
- [106] BOUTYOUR, E. H. *et al.* “Asymptotic-Numerical Method for Buckling Analysis of Shell Structures with Large Rotations”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 168 (1-2), p. 77-85, 2004.
- [107] CASCIARO, R. H. *et al.* “Computational Asymptotic Post-buckling Analysis of Slender Elastic Structures”. In: Pignataro, M., Gioncu, V.(Eds), *Phenomenological and Mathematical Modelling in Structural Instabilities*, Springer Verlag, 2005.
- [108] SILVESTRE, N., CAMOTIM, D. “Asymptotic-Numerical Method to Analyze the Post-buckling Behavior, Imperfection-sensitivity, and Mode Interaction in Frames”, *Journal of Engineering Mechanics*, 131 (6), p. 617-632, 2005.
- [109] SCHAFER, B. W., GRAHAM-BRADY, L. “Stochastic Post-buckling of Frames Using Koiter’s Methods”. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 6 (3), p. 338-358, 2006.
- [110] ASSAN, A.E., *Métodos Energéticos e Análise Estrutural*. 1ª ed. Campinas, Editora UNICAMP, 1996.
- [111] CAMOTIM, A.R.D., *Estabilidade Estrutural*. 1ª ed. Portugal, McGraw Hill, 2001.
- [112] ZIENKIEWICS, O.C., *The Finite Element Method*. 1ª ed. London, McGraw Hill, 1977.
- [113] GERE, J. E., WEAVER, W.J., *Análise de Estruturas Reticuladas*. 1ª ed. Rio de Janeiro, Guanabara Dois 1981.
- [114] LAY, D. C., *Álgebra Linear e suas Aplicações*. 2ª ed. Rio de Janeiro, LTC 1999.
- [115] LEON, J., *Álgebra Linear com Aplicações*. 4ª ed. Rio de Janeiro, LTC, 1999.

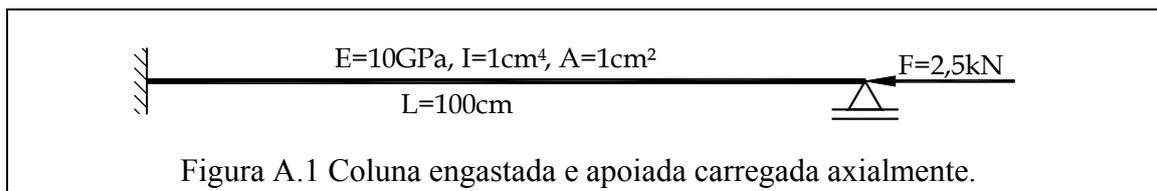
- [116] TIMOSHENKO, S.P., GERE, J.M., *Mechanics of Materials*. 1<sup>a</sup> ed. New York, D. Van Nostrand, 1972.
- [117] BATHE, K.J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. 1<sup>a</sup>ed. New Jersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1982.
- [118] WILLIAMS, F.W. “An Approach to the Non-linear Behavior of the Members of a Rigid Jointed Plane Framework with Finite Deflections”, *Q. J. Mech. Appl. Math. XVII*, p. 451-469, 1964.
- [119] WONG, M.B., TIN-LOI, F. “Geometrically Nonlinear Analysis of Elastic Framed Structures”, *Computers & Structures*, vol.34, n° 4, p. 633-640, 1990.
- [120] KERR, A.D., SOIFER, M.J. “The Linearization of Prebuckling State and Its Effect on the Determined Instability Load”, *Journal of Applied Mechanics*, 36, p. 775-783, 1969.
- [121 ] TIMOSHENKO, S.P., GERE, J.M., *Theory of Elastic Stability*, 1<sup>a</sup> ed. Tokyo, McGraw Hill Book Co. 1963
- [122] CHEN, W.F., LUI, E.M., *Structural Stability*. 1<sup>a</sup> ed. New York, Elsevier Science Publishing Co., Inc., 1987.

# Apêndice A

Com o intuito de ilustrar as formulações apresentadas no capítulo 5 para avaliação da estabilidade do equilíbrio de sistemas estruturais, com base na análise da decomposição espectral da matriz tangente, apresenta-se a seguir exemplos numéricos de uma estrutura simples (coluna) sobre três situações: coluna perfeita, coluna com imperfeição de geometria (deformação inicial) e coluna com imperfeição de carga. Embora sejam exemplos simples, estes três modelos são suficientes para percepção do processo de caracterização de pontos críticos por meio dessa técnica de análise.

## A.1 Coluna Perfeita

A coluna a ser analisada possui as propriedades geométricas e mecânicas representadas na Figura A.1. As condições de apoio, uma extremidade engastada e a outra com apoio deslizante, também são representadas na referida figura.



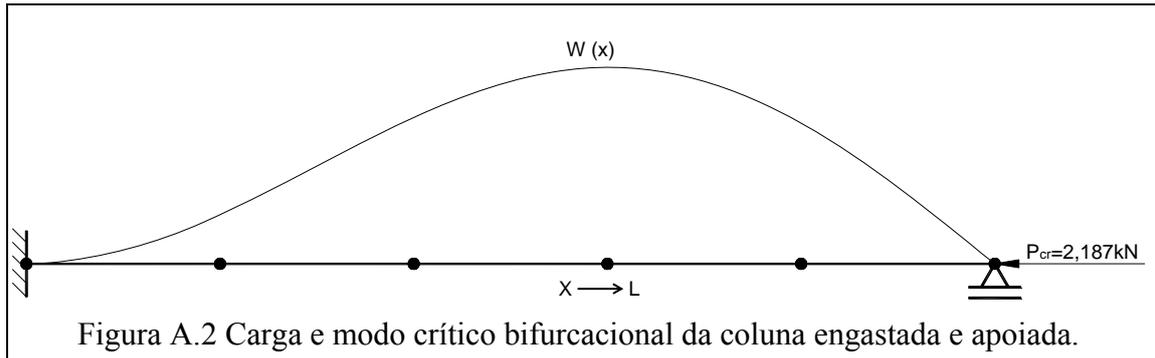
Esta estrutura possui comportamento estrutural descrito por uma trajetória de equilíbrio com presença de bifurcação simétrica, caracterizada pela carga crítica e respectivo modo associado expressos respectivamente em (A.1) e (A.2), os quais são amplamente divulgados na literatura (*e.g.* [122], [9]):

$$P_{cr} = 4,493^2 \left( \frac{EI}{L^2} \right) \quad (\text{A.1})$$

$$W(x) = C \left[ \text{sen} \left( 4,493 \frac{x}{L} \right) - \frac{x}{L} \text{sen}(4,493) \right] \quad (\text{A.2})$$

sendo C um fator de escala.

Aplicando nas expressões (A.1) e (A.2), as características da estrutura apresentada na Figura A.1, chega-se a solução apresentada na Figura A.2.



Utilizando-se modelagem com cinco elementos de pórtico plano, e considerando o vetor de carga incremental  $\Delta F = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -0,05 \ 0)^T$ , que corresponde a 2% da carga total aplicada (2,5kN), obtém-se a seguinte matriz de rigidez tangente da estrutura:

$$K_T^E = \begin{pmatrix} 99,99 & 0 & 0 & -49,99 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,99 & 0 & 0 & -1,5 & 14,99 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 399,67 & 0 & -14,99 & 100,02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -49,99 & 0 & 0 & 99,99 & 0 & 0 & -49,99 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,5 & -14,99 & 0 & 2,99 & 0 & 0 & -1,5 & 14,99 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14,99 & 100,02 & 0 & 0 & 399,67 & 0 & -14,99 & 100,02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -49,99 & 0 & 0 & 99,99 & 0 & 0 & -49,99 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,5 & -14,99 & 0 & 2,99 & 0 & 0 & -1,5 & 14,99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14,99 & 100,02 & 0 & 0 & 399,67 & 0 & -14,99 & 100,02 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -49,99 & 0 & 0 & 99,99 & 0 & 0 & -49,99 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,5 & -14,99 & 0 & 2,99 & 0 & 0 & 0 & 14,99 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14,99 & 100,02 & 0 & 0 & 399,67 & 0 & 0 & 100,02 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -49,99 & 0 & 0 & 0 & 49,99 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14,99 & 100,02 & 0 & 0 & 199,84 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

A matriz de transformação composta pelos autovetores do problema (5.11) é:

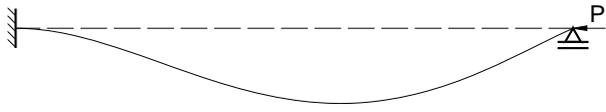
$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -0,17 & 0 & -0,456 & -0,597 & 0,549 & 0 & -0,326 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,204 & -0,48 & 0,654 & 0 & -0,546 & 0 & 0 & 0 & 0,011 & 0 & 0,039 & 0,011 & 0,014 & 0,015 \\ -0,017 & -0,027 & 0,01 & 0 & 0,022 & 0 & 0 & 0 & -0,044 & 0 & -0,433 & -0,608 & 0,569 & 0,340 \\ 0 & 0 & 0 & -0,326 & 0 & -0,597 & -0,170 & -0,456 & 0 & 0,549 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,539 & -0,587 & -0,104 & 0 & 0,592 & 0 & 0 & 0 & -0,018 & 0 & -0,006 & 0,047 & -0,026 & 0,007 \\ -0,014 & 0,022 & -0,054 & 0 & 0,001 & 0 & 0 & 0 & 0,108 & 0 & 0,641 & 0,256 & 0,432 & 0,567 \\ 0 & 0 & 0 & -0,456 & 0 & -0,326 & 0,549 & -0,170 & 0 & -0,597 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,673 & 0,189 & -0,496 & 0 & -0,511 & 0 & 0 & 0 & 0,034 & 0 & -0,030 & -0,031 & -0,033 & -0,004 \\ 0,002 & 0,042 & 0,032 & 0 & -0,02 & 0 & 0 & 0 & -0,220 & 0 & -0,528 & 0,498 & -0,244 & 0,602 \\ 0 & 0 & 0 & -0,549 & 0 & 0,170 & 0,326 & 0,597 & 0 & 0,456 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,462 & 0,62 & 0,555 & 0 & 0,293 & 0 & 0 & 0 & -0,066 & 0 & 0,051 & -0,033 & 0,001 & -0,013 \\ 0,018 & -0,007 & 0,024 & 0 & 0,035 & 0 & 0 & 0 & 0,433 & 0 & 0,151 & -0,472 & -0,615 & 0,431 \\ 0 & 0 & 0 & -0,597 & 0 & 0,548 & -0,456 & -0,326 & 0 & -0,170 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,025 & -0,043 & -0,054 & 0 & -0,04 & 0 & 0 & 0 & -0,863 & 0 & 0,309 & -0,300 & -0,223 & 0,117 \end{pmatrix} \quad (A.4)$$

Os autovalores associados aos autovetores da matriz  $T$  conforme o problema (5.11) são:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0,038 \\ 0,482 \\ 1,993 \\ 4,056 \\ 4,591 \\ 34,514 \\ 85,759 \\ 141,522 \\ 150,766 \\ 184,098 \\ 251,309 \\ 358,744 \\ 476,355 \\ 566,202 \end{pmatrix} \quad (A.5)$$

Na Tabela A.1 são representados os três primeiros modos obtidos com a solução do problema (5.11), portanto, correspondentes as três primeiras colunas da matriz de transformação  $T$ .

Tabela A.1 Representação dos três primeiros modos da matriz  $T$  da coluna pefeita.

Autovalores	Modos
$\lambda_1 = 0,038$	
$\lambda_2 = 0,482$	
$\lambda_3 = 1,993$	

Nota-se que o primeiro modo aqui obtido é o mesmo modo calculado analiticamente para a condição de equilíbrio crítico. Entretanto, salienta-se que embora o primeiro autovetor corresponda em forma ao modo crítico da estrutura, o autovalor associado não é o correspondente à carga crítica da estrutura estudada. Obviamente isto se deve ao fato de não ser o mesmo problema de autovalor resolvido para condição de equilíbrio crítico.

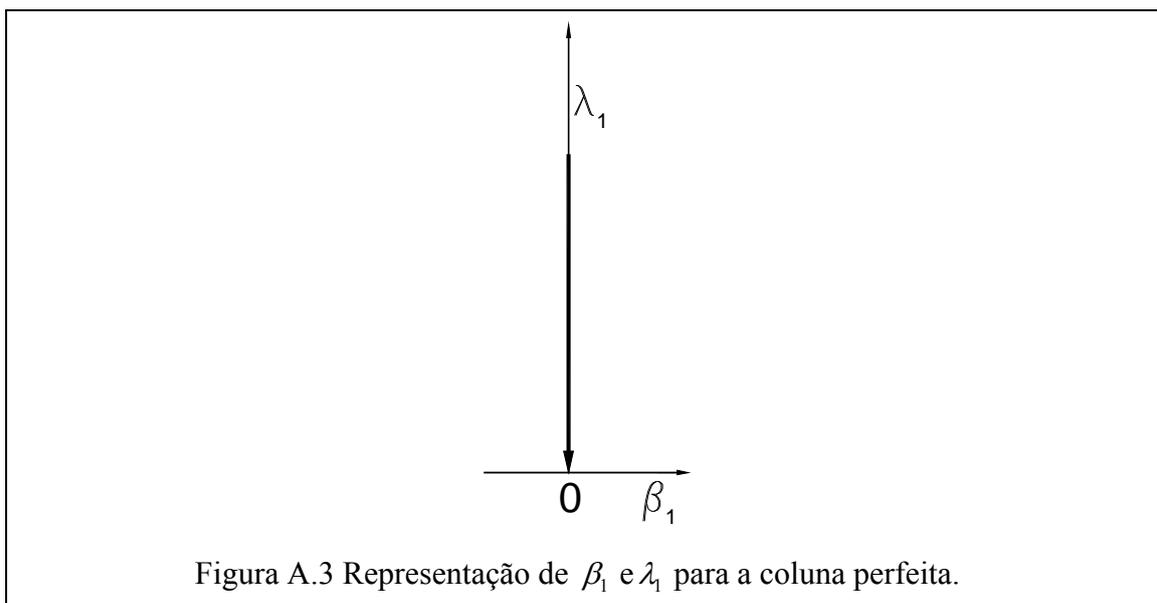
Os coeficientes  $\beta_i$  obtidos com a aplicação de (5.18) são:

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \times 10^{-3} \\ 0 \\ -3 \times 10^{-2} \\ 2 \times 10^{-2} \\ 2 \times 10^{-2} \\ 0 \\ 9 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Finalmente a expressão (5.19) conduz ao seguinte vetor de deslocamentos:

$$\Delta U = \begin{pmatrix} -1 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \\ -2 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \\ -3 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \times 10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Utilizando-se o procedimento anteriormente exposto, foram calculados para outros incrementos de carga os correspondentes autovetores  $\Phi_i$ , autovalores associados  $\lambda_i$  e os coeficientes  $\beta_i$  que caracterizam o estado de equilíbrio crítico da estrutura e compõem os deslocamentos. Na Figura A.3 são representados os valores dos coeficientes  $\beta_1$  e autovalores  $\lambda_1$  para seis incrementos de carga.



Como se percebe na Figura A.3, em todos os casos o coeficiente  $\beta_1$  teve valor zero e os autovalores associados ao primeiro modo tiveram decréscimo em cada incremento, ou seja,  $\lambda_1 \rightarrow 0$  e  $\beta_1 = 0$  o que confirma que o presente problema corresponde a um caso de bifurcação.

## A.2 Coluna com Imperfeição de Geometria

Agora admitindo a hipótese de existirem pequenas imperfeições geométricas dispostas aleatoriamente na estrutura (Figura A.1) da ordem de  $\gamma \frac{L}{500}$ , sendo o número aleatório  $\gamma$  um valor positivo menor que a unidade.

O primeiro incremento de carga utilizado foi igualmente ao caso anterior correspondente à  $\Delta F = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -0,05 \ 0)^T$ .

Como a imperfeição geométrica aleatória é de pequena magnitude, a matriz de rigidez tangente da estrutura é muito próxima à calculada no caso anterior:

$$K_T^E = \begin{pmatrix} 99,98 & 0,17 & -0,04 & -49,99 & -0,15 & -0,05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,17 & 2,99 & 0 & -0,15 & -1,5 & 14,99 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,04 & 0 & 399,67 & 0,05 & -14,99 & 100,02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -49,99 & -0,15 & 0,05 & 99,98 & 0,15 & 0,04 & -49,99 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,15 & -1,5 & -14,99 & 0,15 & 2,99 & 0 & 0 & -1,5 & 14,99 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,05 & 14,99 & 100,02 & 0,04 & 0 & 399,67 & 0 & -14,99 & 100,02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -49,99 & 0 & 0 & 99,99 & -0,07 & 0,01 & -49,99 & 0,07 & 0,02 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,5 & -14,99 & -0,07 & 2,99 & 0 & 0,07 & -1,5 & 14,99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14,99 & 100,02 & 0,01 & 0 & 399,67 & -0,02 & -14,99 & 100,02 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -49,99 & 0,07 & -0,02 & 99,99 & -0,17 & 0,01 & -49,99 & 0,03 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,07 & -1,5 & -14,99 & -0,17 & 2,99 & 0 & 0,11 & 14,99 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,02 & 14,99 & 100,02 & 0,01 & 0 & 399,67 & -0,03 & 100,02 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -49,99 & 0,11 & -0,03 & 49,99 & -0,03 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,03 & 14,99 & 100,02 & -0,03 & 199,84 & 0 \end{pmatrix} \quad (A.8)$$

Os autovalores associados aos autovetores do problema (5.11) são:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0,046 \\ 0,487 \\ 1,994 \\ 4,050 \\ 4,591 \\ 34,508 \\ 85,756 \\ 141,520 \\ 150,768 \\ 184,097 \\ 251,315 \\ 358,748 \\ 476,357 \\ 566,202 \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

A matriz de transformação  $T$  correspondente é:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,170 & 0,008 & 0,456 & 0,597 & -0,549 & 0 & 0,326 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,203 & 0,480 & -0,654 & 0,017 & -0,546 & 0 & 0,001 & -0,001 & 0,011 & 0,001 & -0,039 & 0,011 & 0,014 & 0,015 \\ -0,017 & 0,027 & -0,01 & -0,001 & 0,022 & 0 & 0 & 0 & -0,044 & 0 & 0,433 & -0,608 & 0,569 & 0,340 \\ 0,001 & -0,001 & -0,004 & 0,326 & 0,011 & 0,597 & 0,17 & 0,456 & 0 & -0,549 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,539 & 0,588 & 0,103 & -0,021 & 0,591 & 0,001 & -0,001 & 0,001 & -0,018 & -0,001 & 0,006 & 0,047 & -0,026 & 0,007 \\ -0,014 & -0,021 & 0,054 & 0 & 0,001 & 0 & 0 & 0 & 0,108 & 0 & -0,641 & 0,256 & 0,432 & 0,567 \\ 0,001 & -0,001 & -0,004 & 0,455 & 0,017 & 0,326 & -0,549 & 0,170 & 0 & 0,597 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,673 & -0,187 & 0,496 & 0,027 & -0,511 & -0,001 & 0 & 0 & 0,034 & 0 & 0,030 & -0,031 & -0,033 & -0,004 \\ 0,002 & -0,042 & -0,032 & 0 & -0,02 & 0 & 0 & 0 & -0,22 & 0 & 0,528 & 0,498 & -0,244 & 0,602 \\ 0,001 & -0,001 & -0,006 & 0,548 & 0,023 & -0,170 & -0,326 & -0,597 & 0 & -0,456 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,463 & -0,620 & -0,555 & -0,016 & 0,292 & 0 & 0,001 & 0,001 & -0,066 & 0,001 & -0,051 & -0,033 & 0,001 & -0,013 \\ 0,018 & 0,007 & -0,024 & -0,002 & 0,035 & 0 & 0 & 0 & 0,433 & 0 & -0,151 & -0,472 & -0,615 & 0,431 \\ 0,002 & 0 & -0,005 & 0,596 & 0,024 & -0,549 & 0,456 & 0,326 & 0 & -0,170 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,026 & 0,043 & 0,054 & 0,002 & -0,040 & 0 & 0 & 0,001 & -0,863 & 0 & -0,308 & -0,3 & -0,223 & 0,117 \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Na Tabela A.2 são representados os três primeiros modos da coluna com a consideração da imperfeição geométrica aleatória.

Tabela A.2 Representação dos três primeiros modos da matriz  $T$  da coluna com imperfeição de geometria aleatória.

Autovalores	Modos
$\lambda_1 = 0,046$	
$\lambda_2 = 0,487$	
$\lambda_3 = 1,994$	

Comparando as formas modais da estrutura perfeita (Tabela A.1) e da estrutura imperfeita (Tabela A.2) observa-se que a imperfeição geométrica aleatória não interfere na forma dos três primeiros autovetores componentes da matriz de transformação  $T$ .

Os coeficientes  $\beta_i$  segundo (5.18) são:

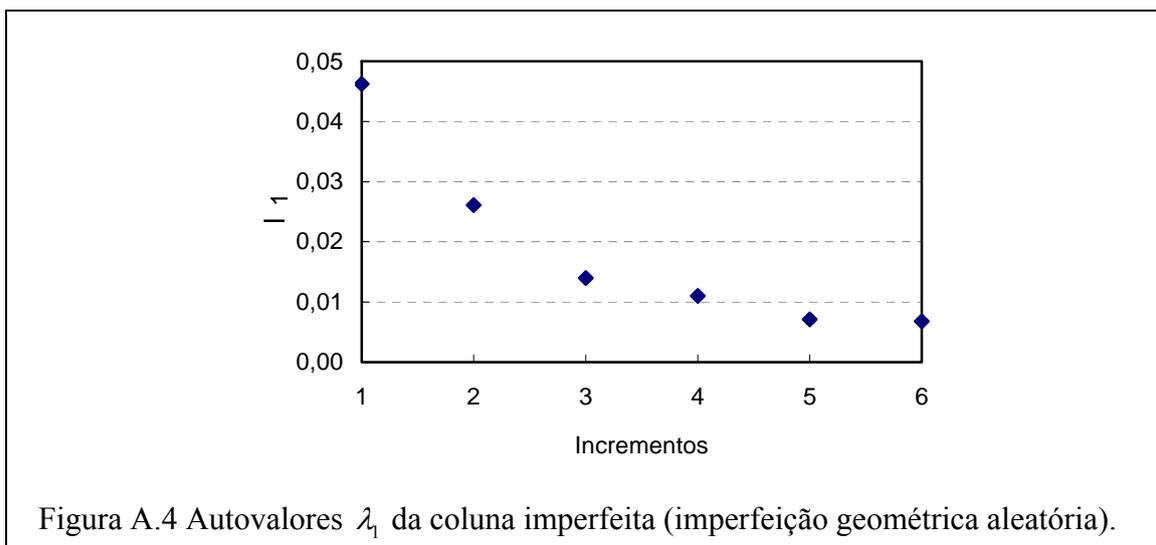
$$\beta = \begin{pmatrix} -1 \times 10^{-4} \\ -1 \times 10^{-5} \\ 3 \times 10^{-4} \\ -3 \times 10^{-2} \\ -1 \times 10^{-3} \\ 3 \times 10^{-2} \\ -2 \times 10^{-2} \\ -2 \times 10^{-2} \\ -1 \times 10^{-5} \\ -8 \times 10^{-3} \\ -3 \times 10^{-6} \\ -4 \times 10^{-6} \\ -3 \times 10^{-6} \\ 2 \times 10^{-6} \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Como se pode observar em na Tabela A.2 e em (A.11), não é nulo o valor do coeficiente  $\beta_1$ , embora seja pequeno, e o autovalor  $\lambda_1$  já no primeiro incremento também é pequeno.

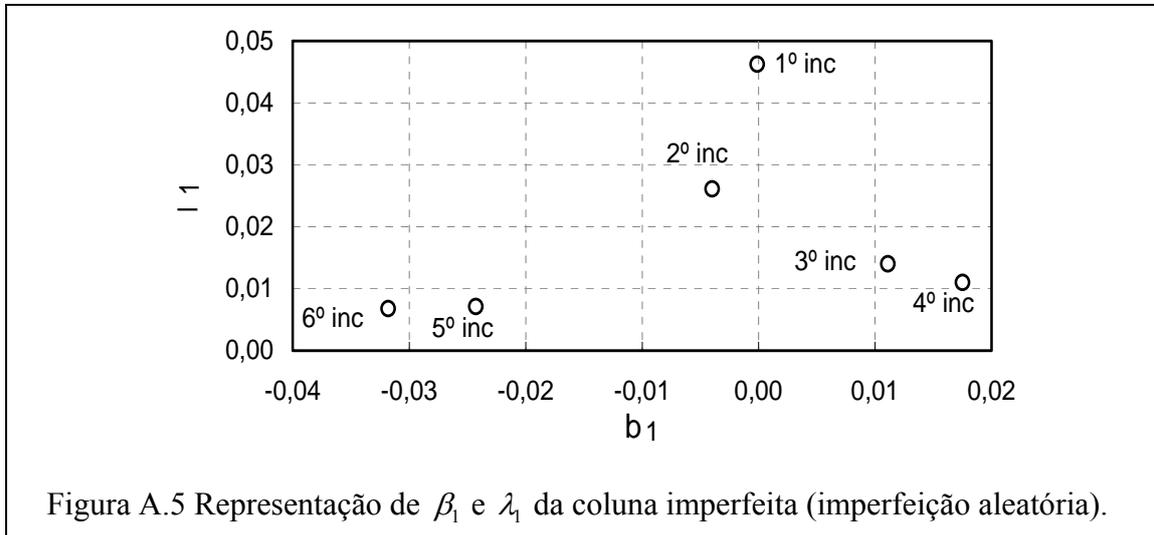
O vetor de deslocamento de acordo com a expressão (5.19) equivale a:

$$\Delta U = \begin{pmatrix} -1 \times 10^{-3} \\ 5 \times 10^{-4} \\ 4 \times 10^{-5} \\ -2 \times 10^{-3} \\ 1 \times 10^{-3} \\ 4 \times 10^{-5} \\ -3 \times 10^{-3} \\ 2 \times 10^{-3} \\ -6 \times 10^{-6} \\ -4 \times 10^{-3} \\ 1 \times 10^{-3} \\ -5 \times 10^{-5} \\ -5 \times 10^{-3} \\ -7 \times 10^{-5} \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Na Figura A.4 são representados os autovalores associados ao primeiro modo ( $\lambda_1$ ) obtidos com seis incrementos de carga, onde se percebe que há um decaimento do valor com o aumento do número de incrementos.



Na Figura A.5 são representadas as soluções encontradas para os coeficientes  $\beta_1$  e autovalores  $\lambda_1$  para alguns outros incrementos de carga, sempre considerando a existência da pequena imperfeição geométrica aleatória.



Percebe-se, na Figura A.5, que embora o coeficiente  $\beta_1$  do primeiro incremento (1º inc) seja muito pequeno, o mesmo não chegou a se anular, inclusive nos demais incrementos de carga analisados.

Portanto, observa-se a partir da Figura A.4 e Figura A.5 que se tem a condição de ponto limite para este problema, já que  $\lambda_1 \rightarrow 0$  e  $\beta_1 \neq 0$ .

### A.3 Coluna com Imperfeição de Carga

Por último, investiga-se a influência de uma imperfeição no carregamento aplicado, por meio de um pequeno momento ( $1,0 \times 10^{-2} \text{ kN} \cdot \text{m}$ ) na extremidade apoiada da estrutura representada na Figura A.1. O primeiro incremento de carga é mostrado em (A.13) e a matriz de rigidez em (A.14).

$$\Delta F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \times 10^{-2} \\ 2,1 \times 10^{-4} \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})$$

$$K_T^E = \begin{pmatrix} 99,99 & 0 & 0 & -49,99 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,99 & 0 & 0 & -1,5 & 14,99 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 399,70 & 0 & -14,99 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -49,99 & 0 & 0 & 99,99 & 0 & 0 & -49,99 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,5 & -14,99 & 0 & 2,99 & 0 & 0 & -1,5 & 14,99 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14,99 & 100 & 0 & 0 & 399,70 & 0 & -14,99 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -49,99 & 0 & 0 & 99,99 & 0 & 0 & -49,99 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,5 & -14,99 & 0 & 2,99 & 0 & 0 & -1,5 & 14,99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14,99 & 100 & 0 & 0 & 399,70 & 0 & -14,99 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -49,99 & 0 & 0 & 99,99 & 0 & 0 & -49,99 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,5 & -14,99 & 0 & 2,99 & 0 & 0 & 0 & 14,99 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14,99 & 100 & 0 & 0 & 399,70 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -49,99 & 0 & 0 & 49,99 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14,99 & 100 & 0 & 0 & 199,80 \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

Novamente se percebe que, devido à pequena imperfeição de carga, a matriz de rigidez da estrutura é praticamente a mesma calculada nos casos anteriores.

Os autovalores associados aos autovetores do problema (5.11) são:

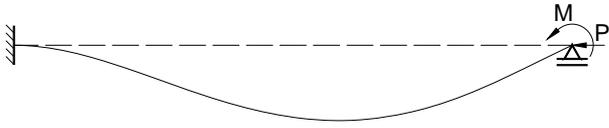
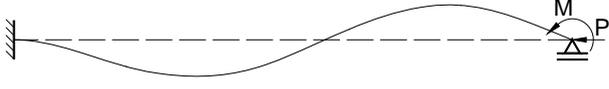
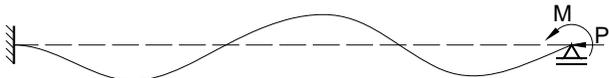
$$\lambda = \begin{pmatrix} 0,047 \\ 0,488 \\ 1,995 \\ 4,056 \\ 4,591 \\ 34,514 \\ 85,759 \\ 141,522 \\ 150,764 \\ 184,098 \\ 251,358 \\ 358,772 \\ 476,365 \\ 566,197 \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

A matriz de transformação  $T$  correspondente é:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,170 & 0 & 0,456 & -0,597 & -0,549 & 0 & 0,326 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,203 & -0,480 & -0,654 & 0 & 0,547 & 0 & 0 & 0 & 0,011 & 0 & -0,039 & 0,011 & -0,014 & 0,015 \\ -0,017 & -0,027 & -0,01 & 0 & -0,022 & 0 & 0 & 0 & -0,044 & 0 & 0,433 & -0,608 & -0,569 & 0,340 \\ 0 & 0 & 0 & 0,326 & 0 & 0,597 & -0,17 & 0,456 & 0 & -0,549 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,539 & -0,588 & 0,103 & 0 & -0,592 & 0 & 0 & 0 & -0,018 & 0 & 0,006 & 0,047 & 0,026 & 0,007 \\ -0,014 & 0,022 & 0,054 & 0 & -0,001 & 0 & 0 & 0 & 0,108 & 0 & -0,641 & 0,256 & -0,432 & 0,567 \\ 0 & 0 & 0 & 0,456 & 0 & 0,326 & 0,549 & 0,170 & 0 & 0,597 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,673 & 0,188 & 0,496 & 0 & 0,511 & 0 & 0 & 0 & 0,034 & 0 & 0,030 & -0,031 & 0,033 & -0,004 \\ 0,002 & 0,042 & -0,032 & 0 & 0,020 & 0 & 0 & 0 & -0,220 & 0 & 0,528 & 0,497 & 0,244 & 0,602 \\ 0 & 0 & 0 & 0,549 & 0 & -0,170 & 0,326 & -0,597 & 0 & -0,456 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,463 & 0,620 & -0,555 & 0 & -0,293 & 0 & 0 & 0 & -0,066 & 0 & -0,051 & -0,033 & -0,001 & -0,013 \\ 0,018 & -0,007 & -0,024 & 0 & -0,035 & 0 & 0 & 0 & 0,433 & 0 & -0,151 & -0,472 & 0,615 & 0,431 \\ 0 & 0 & 0 & 0,597 & 0 & -0,548 & -0,456 & 0,326 & 0 & 0,170 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,026 & -0,043 & 0,054 & 0 & 0,040 & 0 & 0 & 0 & -0,863 & 0 & -0,308 & -0,3 & 0,223 & 0,117 \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

Na Tabela A.3 são representados os três primeiros modos da coluna obtidos com a consideração da imperfeição de carga.

Tabela A.3 Representação dos três primeiros modos da matriz  $T$  da coluna com imperfeição de carga.

Autovalores	Modos
$\lambda_1 = 0,046$	
$\lambda_2 = 0,487$	
$\lambda_3 = 1,994$	

Assim mais uma vez comparando as formas modais da estrutura perfeita (Tabela A.1) e da estrutura imperfeita (Tabela A.3) observa-se que a imperfeição devido à ação do momento (M) na extremidade apoiada da estrutura não interfere na forma do primeiro autovetor componente da matriz modal  $T$ .

Os coeficientes  $\beta_i$  obtidos com (5.18) são:

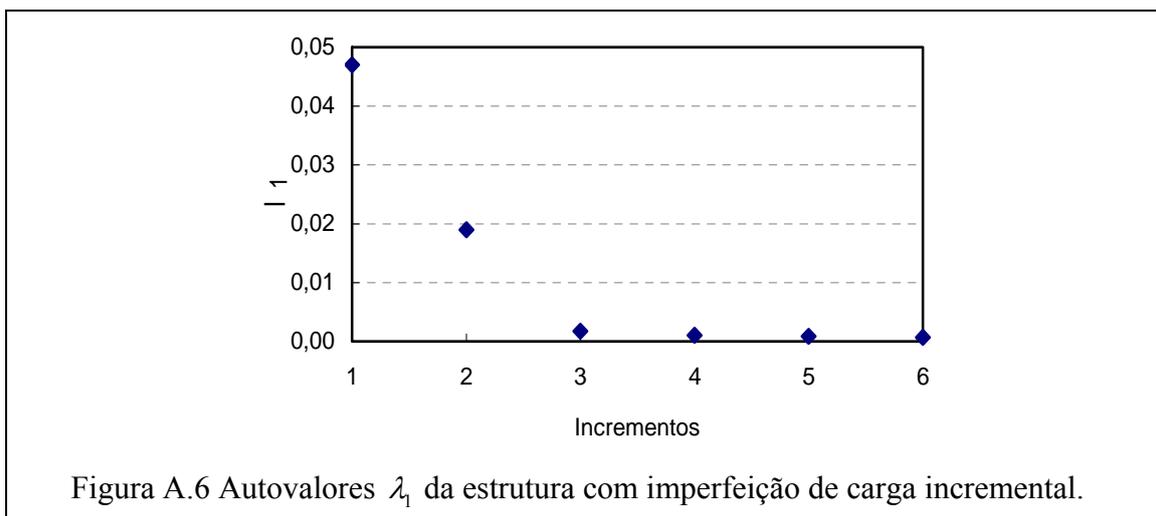
$$\beta = \begin{pmatrix} 5 \times 10^{-6} \\ -9 \times 10^{-6} \\ 1 \times 10^{-5} \\ -3 \times 10^{-2} \\ 8 \times 10^{-6} \\ 3 \times 10^{-2} \\ 2 \times 10^{-2} \\ -2 \times 10^{-2} \\ -2 \times 10^{-4} \\ -8 \times 10^{-3} \\ -6 \times 10^{-5} \\ -6 \times 10^{-5} \\ 4 \times 10^{-5} \\ 2 \times 10^{-5} \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

O coeficiente  $\beta_1$ , embora também seja pequeno, não é nulo e o autovalor  $\lambda_1$  já no primeiro incremento é bastante pequeno.

O vetor de deslocamento correspondente, segundo (5.19) é:

$$\Delta U = \begin{pmatrix} -1 \times 10^{-3} \\ -2 \times 10^{-5} \\ -1 \times 10^{-6} \\ -2 \times 10^{-3} \\ -5 \times 10^{-5} \\ -2 \times 10^{-6} \\ -3 \times 10^{-3} \\ -8 \times 10^{-5} \\ -6 \times 10^{-7} \\ -4 \times 10^{-3} \\ -7 \times 10^{-5} \\ 2 \times 10^{-6} \\ -5 \times 10^{-3} \\ 5 \times 10^{-6} \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

Na Figura A.6 são representados os autovalores associados ao primeiro modo ( $\lambda_1$ ) obtidos com seis incrementos de carga, em que semelhantemente ao caso anterior se percebe o decaimento do valor com o aumento do número de incrementos.



São representadas na Figura A.7 as soluções encontradas para os coeficientes  $\beta_1$  e autovalores  $\lambda_1$  para outros cinco incrementos de carga considerando a existência da pequena imperfeição de carga.

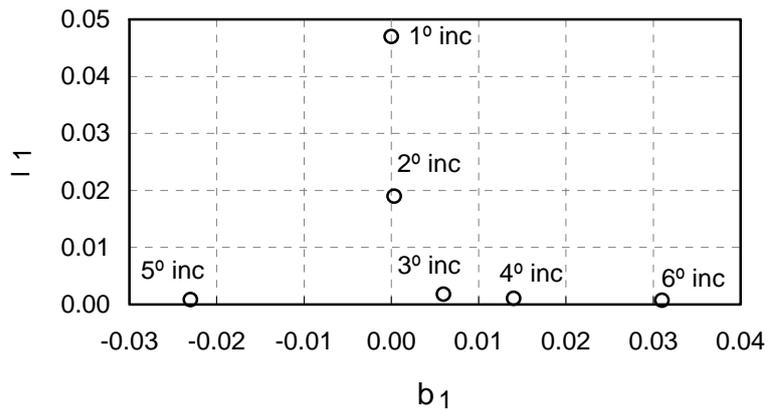


Figura A.7 Relação  $\beta_1 \times \lambda_1$  da estrutura com imperfeição geométrica aleatória.

Pode-se perceber na Figura A.7 que com o aumento do número de incremento o valor do coeficiente  $\beta_1$  aumentou em relação ao primeiro calculado.

Portanto, observa-se na Figura A.6 e na Figura A.7 que se tem a condição de ponto limite, já que  $\lambda_1 \rightarrow 0$  e  $\beta_1 \neq 0$ .

Salienta-se que, embora aqui tenham sido apresentados valores para até seis incrementos de carga, basta somente verificar um incremento, sendo o modo crítico detectado, para se qualificar o tipo de ponto crítico. Recomenda-se que neste caso, o incremento de carga não seja muito pequeno a fim de se perceber claramente o valor dos coeficientes  $\beta_1$  (não nulo em caso de problemas com ponto limite) e o pequeno valor de  $\lambda_1$ .

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)