

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

# **APLICAÇÕES DA TEORIA DA PERCOLAÇÃO À MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO**

MARCELO GOMES PEREIRA

Tese apresentada como requisito parcial  
para a obtenção do título de  
Doutor em Física

Orientador: Liacir dos Santos Lucena

Co-orientador: Gilberto Corso

Co-orientador: Deilson de Melo Tavares

NATAL  
Setembro/2006

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

BANCA EXAMINADORA

Orientador:

Liacir dos Santos Lucena

Examinadores externos:

Marcelo Leite Lyra

Ronald Dickman

Examinadores internos:

Joaquim Elias de Freitas

Luciano Rodrigues da Silva

# Agradecimentos

Ao meu orientador e co-orientadores, Profs. Liacir dos Santos Lucena, Gilberto Corso e Deilson de Melo Tavares, sou muito grato pela orientação. Evidentemente, esta tese não existiria sem ela.

Ao Prof. Joaquim Elias de Freitas por ter me levado a fazer o doutorado em Física.

Ao Prof. Ananias Monteiro Mariz pelo apoio dado num momento de muita dor e tristeza, o falecimento dos meus pais.

Ao colega de doutorado e de departamento Prof. Roosevelt Fonseca Soares. Além desta tese se apoiar em um trabalho desenvolvido por ele, também deu suporte emocional quando dividíamos em nossas conversas as apreensões e os achados de cada etapa do trabalho.

Aos demais colegas de pós-graduação, pelas críticas e sugestões.

A minha esposa Andréa e meus filhos Marília e Andrei, pelo apoio e pela paciência durante esta jornada.



*Aos meus pais*



# Trabalhos Publicados Pelo Autor

1. M.G. Pereira, G. Corso, L.S. Lucena, J.E. Freitas. “A random multifractal tiling”. *Chaos, Solitons and Fractals* 23, pg. 1105-1110, 2005.
2. M.G. Pereira, G. Corso, L.S. Lucena, J.E. Freitas. “Percolation properties and universality class of a multifractal random tiling”. *International Journal of Modern Physics C* Vol. 16, No. 2, pg. 1-9, 2005.





# Sumário

<b>Trabalhos Publicados pelo Autor</b>	<b>vii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Fractais</b>	<b>3</b>
2.1 Fractais . . . . .	3
2.2 Noções sobre dimensão fractal . . . . .	4
2.3 Outras definições de dimensão . . . . .	6
2.3.1 Dimensão topológica . . . . .	6
2.3.2 Dimensão de auto-similaridade - $D_s$ . . . . .	8
2.3.3 Dimensão de Minkowski-Bouligand - $D_B$ . . . . .	9
2.3.4 Dimensão de Hausdorff - $D_H$ . . . . .	12
2.4 Fractais aleatórios . . . . .	14
2.5 Modelos Estocásticos . . . . .	16
2.5.1 Movimento Browniano . . . . .	16
2.5.2 DLA . . . . .	18
2.5.3 Percolação . . . . .	18
<b>3 Medidas Multifractais</b>	<b>21</b>
3.1 Introdução . . . . .	21
3.2 Medida Binomial . . . . .	22
3.3 Medida Produto . . . . .	24

<b>4</b>	<b>Percolação</b>	<b>29</b>
4.1	Introdução . . . . .	29
4.2	Transição de Fase na Percolação . . . . .	31
4.3	Dimensão Fractal na Percolação . . . . .	33
4.4	Determinação Numérica de Expoentes Críticos . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Percolação em um Multifractal Determinístico</b>	<b>37</b>
5.1	Introdução . . . . .	37
5.2	O Objeto Multifractal $Q_{mf}$ . . . . .	38
5.3	O Algoritmo de Percolação e o Espectro Multifractal . . . . .	40
5.4	Simulações Numéricas . . . . .	43
<b>6</b>	<b>Percolação em um Multifractal Aleatório</b>	<b>47</b>
6.1	Introdução . . . . .	47
6.2	A Rede Multifractal Aleatória $RMA$ . . . . .	48
6.2.1	O algoritmo de construção da $RMA$ . . . . .	48
6.2.2	A percolação na $RMA$ . . . . .	52
6.3	Resultados Numéricos . . . . .	52
6.3.1	O limiar de percolação . . . . .	55
6.3.2	A dimensão fractal do aglomerado percolante . . . . .	55
6.3.3	O expoente crítico $\nu$ . . . . .	56
6.3.4	O expoente crítico $\beta$ . . . . .	56
6.4	Conclusões . . . . .	57
<b>7</b>	<b>Modelagem e simulação de reservatórios de petróleo</b>	<b>63</b>
7.1	Introdução . . . . .	63
7.2	A sistemática proposta de modelagem e simulação . . . . .	65
7.2.1	Uma formulação estocástica da Lei de Darcy . . . . .	66
7.2.2	Estimativa dos gradientes de pressão . . . . .	68
7.2.3	Mapas estocásticos de permeabilidade . . . . .	69
7.3	Comentários finais . . . . .	70

## **SUMÁRIO**

---

**xi**

**8 Conclusão**

**77**

**Referências bibliográficas**

**80**

**A Artigos do Autor**

**85**



# Lista de Figuras

2.1	Triângulo de Sierpinski: passo 1 . . . . .	4
2.2	Triângulo de Sierpinski: passo 2 . . . . .	5
2.3	gráfico log-log de $\rho$ . . . . .	6
2.4	Construção do Triângulo de Sierpinski por retirada . . . . .	8
2.5	Cobertura por caixas . . . . .	10
2.6	Cobertura por caixas de lado $1/2$ . . . . .	11
2.7	Cobertura por caixas de lado $1/4$ . . . . .	11
2.8	Triângulo de Sierpinski aleatório . . . . .	15
2.9	Trajectoria do movimento browniano. . . . .	17
2.10	Aglomerado DLA. As cores indicam o tempo de chegada das partículas ao aglomerado. Em vermelho estão as mais antigas. Em azul as mais recentes. . . . .	19
2.11	Percolação por ligação e por sítios . . . . .	20
3.1	Curva $f(\alpha)$ para a medida binomial . . . . .	25
4.1	Percolação por sítios com $p$ variando de 0, 1 a 0, 9 . . . . .	30
4.2	Vizinhos de uma ligação e de um sítio . . . . .	31
4.3	Probabilidade $P_\infty$ de um sítio pertencer ao aglomerado percolante . . . . .	32
5.1	Os quatro passos iniciais para a construção do objeto multifractal $Q_{mf}$ . . . . .	39
5.2	Objeto multifractal $Q_{mf}$ com $\rho = 1/3$ e $n = 10$ . . . . .	42
5.3	Espectro de dimensões para $n = 400$ e $\rho = 2/3$ . . . . .	43

5.4	Número de vezes $R$ em que o sistema percolou com a probabilidade $p$ versus a probabilidade em que ocorreu a percolação $p$ . . . . .	44
6.1	Os quatro passos iniciais para a construção do objeto multifractal aleatório. (a) Um segmento vertical divide o quadrado em duas partes de acordo com a razão $\rho$ escolhida aleatoriamente. (b) Dois segmentos horizontais cortam os retângulos em uma nova razão aleatória $\rho$ . (c) e (d) Novos valores de $\rho$ são escolhidos. . . . .	49
6.2	Espectro $f(\alpha_k)$ . A linha mais grossa mostra a curva aleatória, enquanto que as linhas superior e inferior mostram os espectros dos multifractais determinísticos de razões $\rho_1 = 1/4$ e $\rho_2 = 2/3$ respectivamente. No eixo $x$ temos $(k/n)^*$ . . . . .	51
6.3	A rede multifractal aleatória com $n = 10$ , $\rho_1 = 1/4$ e $\rho_2 = 2/3$ . Retângulos de mesma cor estão no mesmo $k$ -conjunto. . . . .	53
6.4	A rede multifractal aleatória com $n = 20$ , $\rho_1 = 1/4$ e $\rho_2 = 2/3$ . Retângulos de mesma cor estão no mesmo $k$ -conjunto. . . . .	54
6.5	Gráfico de $p_c(L)$ versus $1/L$ . Os pontos da curva superior são referentes aos valores de $p$ para os quais o sistema percolou em duas direções. Os da curva inferior resultam dos valores de $p$ para os quais o sistema percolou em uma direção. A diferença entre os valores das duas curvas fornece uma medida da incerteza na determinação do limiar de percolação. . . . .	55
6.6	A função $\frac{d\Pi}{dp}$ para $L = 15625$ . Foram feitas 20000 realizações para se obter esta figura. . . . .	59
6.7	A função $\Pi$ para $L = 15625$ . . . . .	59
6.8	Gráfico de $\ln(p_m(L) - p_c)$ versus $\ln L$ . A inclinação da reta é $-1/\nu$ . A equação desta reta e o resíduo são mostrados ao lado da figura. . . . .	60
6.9	Gráfico de $P(5^{10}, p)$ versus $p$ . . . . .	60
6.10	Gráfico de $\ln(P(L, p))$ versus $\ln(L)$ . A inclinação da reta é $-\beta/\nu$ . Ao lado do gráfico aparecem a equação da reta que passa pelos pontos determinados por $L = 5^8$ , $L = 5^9$ e $L = 5^{10}$ e o quadrado do resíduo, indicando que os pontos estão perfeitamente alinhados. . . . .	61

---

7.1	Saída gráfica do simulador. Início da simulação. Em azul, as ligações invadidas pela água. Em vermelho a frente de avanço da água, ligações onde há tentativa de invasão. As ordenadas correspondem às pressões medidas nos poços. . . . .	71
7.2	Evolução da frente de invasão. Nesta figura, o primeiro poço produtor é alcançado pela água injetada. . . . .	72
7.3	Evolução da frente de invasão, quase alcançando o segundo poço produtor. . . . .	73
7.4	Evolução da frente de invasão. Momento em que o último poço produtor é alcançado pela água. . . . .	74
7.5	Distribuição de tempos de erupção da água no primeiro poço produtor ( <i>breakthrough</i> ). . . . .	74
7.6	Distribuição de tempos de erupção da água no segundo poço produtor. . . . .	75
7.7	Distribuição de tempos de erupção da água no terceiro poço produtor. . . . .	75
7.8	Curva de produção supondo que o volume de água injetada é igual ao volume de óleo produzido. . . . .	76



# Resumo

Nesta tese estudamos alguns problemas relacionados a reservatórios de petróleo usando métodos e conceitos da Física Estatística. A tese pode ser dividida em duas partes. A primeira apresenta um estudo do problema de percolação em um suporte multifractal aleatório motivado por sua potencial aplicação na modelagem de reservatórios de petróleo. Desenvolvemos uma rede heterogênea e anisotrópica que segue uma distribuição multifractal aleatória das áreas de seus sítios. Em seguida, determinamos o limiar de percolação nessa rede, a dimensão fractal do aglomerado percolante e os expoentes críticos  $\beta$  e  $\nu$ .

Na segunda parte, propomos uma sistemática alternativa de modelagem e simulação de reservatórios de petróleo. Introduzimos um modelamento estatístico baseado em uma formulação estocástica da Lei de Darcy. Nele a distribuição de permeabilidades no reservatório equivale localmente ao modelo básico de percolação por ligações.

# Abstract

In this thesis we study some problems related to petroleum reservoirs using methods and concepts of Statistical Physics. The thesis could be divided in two parts. The first one introduce a study of the percolation problem in random multifractal support motivated by its potential application in modelling oil reservoirs. We developed an heterogeneous and anisotropic grid that follows a random multifractal distribution of its sites. After, we determine the percolation threshold for this grid, the fractal dimension of the percolating cluster and the critical exponents  $\beta$  and  $\nu$ .

In the second part, we propose an alternative systematic of modelling and simulating oil reservoirs. We introduce a statistical model based in a stochastic formulation do Darcy Law. In this model, the distribution of permeabilities is locally equivalent to the basic model of bond percolation.

# Capítulo 1

## Introdução

Cada vez mais a indústria de petróleo tem procurado na Física Teórica respostas para seus problemas. Em particular, tem empregado conceitos da Física Estatística para fazer previsões sobre a produção de petróleo e maximizar seus lucros.

Quando um campo de petróleo é descoberto, o primeiro passo dado pela indústria é estimar o volume dos hidrocarbonetos (gás, petróleo) no reservatório e avaliar o quanto pode ser recuperado, observando se vale a pena investir na recuperação.

Na maioria dos casos, a produção se faz por meio da perfuração de dois tipos de poços: injetores e produtores. Nos primeiros injeta-se algum fluido, como água ou gás, que empurre o petróleo na direção dos poços produtores. Para otimizar a recuperação, se faz necessário escolher a melhor disposição desses poços e determinar a estratégia ótima de injeção. Para tanto, é preciso estimar corretamente o fluxo de petróleo, gás e água no meio poroso que é o reservatório e suas vazões nos poços produtores. Tais estimativas são baseadas em modelos físicos e métodos de simulação cada vez mais sofisticados. É nesse ponto que esta tese pretende dar uma contribuição, fornecendo novas ferramentas para a modelagem dos reservatórios de petróleo e uma sistemática para modelagem e simulação.

A tese apresenta outros seis capítulos. Os três primeiros são capítulos básicos. Trazem conceitos fundamentais da Física Estatística que são necessários ao entendimento das aplicações desenvolvidas nos capítulos seguintes.

O Capítulo 2 trata de fractais. Nele há uma discussão sobre como reconhecer um objeto chamado

fractal e como classificar tais objetos utilizando o número real chamado dimensão fractal. Em seguida, apresentamos alguns modelos de fenômenos naturais em que aparecem fractais.

No capítulo seguinte, noções de medidas multifractais são abordadas. Apresentamos um estudo da medida binomial e da medida produto, determinando seus espectros multifractais.

O Capítulo 4 traz mais detalhes sobre o conceito de percolação, um dos modelos vistos no Capítulo 2. Em particular, conceitua e mostra como determinar a concentração crítica relacionada com a formação do aglomerado infinito de percolação, além dos expoentes críticos que determinam as classes de universalidade do modelo. Também é determinada a dimensão fractal do aglomerado de percolação no ponto crítico.

Uma rede que tem a distribuição de seus sítios de acordo com uma medida multifractal é apresentada no Capítulo 5. Nessa rede estudamos a percolação, determinando concentração crítica, dimensão fractal do aglomerado percolante e expoentes críticos.

No Capítulo 6 fazemos uma extensão do trabalho iniciado no capítulo anterior. Estudamos a percolação em uma rede que tem uma componente aleatória na distribuição de seus sítios, além de seguir o padrão multifractal.

Por fim, uma aplicação da teoria de percolação é sugerida. Apresentamos uma proposta de sistemática para modelagem e simulação de um reservatório de petróleo. Tal sistemática está baseada em uma formulação estocástica da lei que descreve o comportamento do fluxo de fluidos em meios porosos, a Lei de Darcy.

# Capítulo 2

## Fractais

### 2.1 Fractais

Em 1875, duBois Reymond provocou certo desconforto na comunidade científica ao anunciar que Weierstrass havia construído uma função contínua e não diferenciável. Como a construção não se encaixava no padrão euclidiano, foi considerada patológica, um exercício intelectual artificial, sem nenhuma aplicação prática.

No final da década de 1960, o matemático Benoit Mandelbrot cunhou o termo *fractal* para designar essas estruturas irregulares. Sua origem etimológica está no latim *fractus*, que significa quebrado no sentido de irregular. E em 1982, por meio do seu livro *The Fractal Geometry of Nature* [1], tornou popular o uso dos fractais para descrever a Natureza.

Fractais são estruturas complexas que podem ser caracterizadas por três aspectos que estão presentes em todas elas. O primeiro refere-se à classificação dos fractais por meio do conceito de dimensão fractal. Esse conceito representa uma ruptura com a Geometria e a Topologia tradicionais, pois permite que um objeto tenha como dimensão um valor não inteiro.

A segunda característica dos fractais é a auto-similaridade, o que significa que um fractal é invariante por mudança de escalas. Ou seja, se fizermos uma ampliação de uma parte do fractal, veremos uma figura similar à anterior.

A terceira característica diz respeito à maneira como os fractais são construídos. Há sempre a utilização de um processo iterativo. Isso quer dizer que, na construção de um fractal, iremos repetir

um determinado procedimento infinitamente. Esse procedimento pode ser determinado por cálculos algébricos, ou construção geométrica, ou ainda alguma regra que envolva uma aleatoriedade.

## 2.2 Noções sobre dimensão fractal

Os fractais são caracterizados quantitativamente por meio da idéia de dimensão fractal. Essa idéia consiste em associar um número (dimensão fractal), de maneira única à forma geométrica de um objeto. Ela é particularmente útil para distinguir conjuntos de natureza geométrica suave de outros que apresentam padrões de extrema irregularidade. Daremos um exemplo que mostra como essa associação é feita.

Considere o triângulo de Sierpinski, que é um objeto definido por um processo iterativo. No primeiro estágio temos um triângulo preenchido. No segundo, adicionamos duas cópias da figura do estágio anterior de modo a obtermos ainda um triângulo, agora vazado (Ver Figura 2.1). Em seguida repetimos o processo, isto é, montamos um triângulo fazendo duas cópias da figura anterior, conforme mostra a Figura 2.2. E assim, continuando infinitamente, obtemos o objeto em questão.

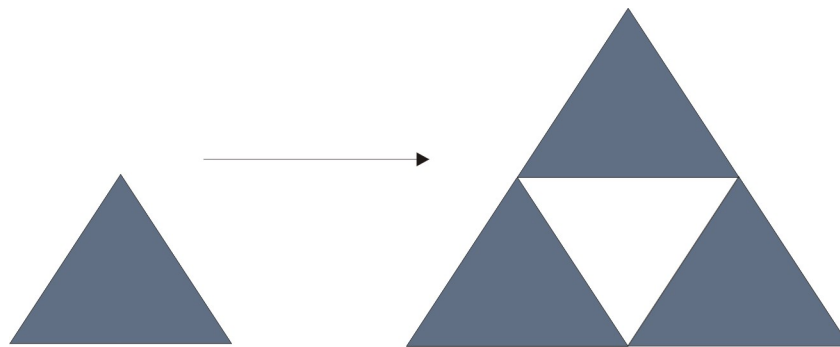


Figura 2.1: Triângulo de Sierpinski: passo 1

Se o triângulo do primeiro estágio tem massa  $M = 1$  e lado  $L = 1$ , então os triângulos do segundo e terceiro estágios têm  $M = 3$ ,  $L = 2$  e  $M = 9$ ,  $L = 4$ , respectivamente. Definamos densidade por  $\rho(L) = \frac{M(L)}{L^2}$ . Observe que na mudança do estágio 1 para o 2, houve uma redução na densidade do objeto. De fato,  $\rho(1) = 1$  e  $\rho(2) = \frac{3}{4}$ . Se continuarmos calculando a densidade dos triângulos formados em cada estágio, teremos  $\rho(4) = \left(\frac{3}{4}\right)^2$ ,  $\rho(8) = \left(\frac{3}{4}\right)^3$ , ... E assim por diante.

Quando fazemos um gráfico de  $\rho$  em função de  $L$ , em escala logarítmica, encontramos uma reta



Figura 2.2: Triângulo de Sierpinski: passo 2

que passa pela origem (ver figura 2.3). Assim, a densidade depende de  $L$  segundo a equação  $\log \rho = \alpha \log L$ . Então temos a relação entre  $\rho$  e  $L$  dada por  $\rho = L^\alpha$ , uma lei de potência.

Para determinar o valor de  $\alpha$ , basta encontrar a inclinação da reta do gráfico em escala logarítmica. Para tanto, tomemos os pontos  $(\log 1, \log 1)$  e  $(\log 2, \log (\frac{3}{4}))$ . Então  $\alpha$  será dado por

$$\alpha = \frac{\log 1 - \log (\frac{3}{4})}{\log 1 - \log 2} = \frac{-\log 3 + \log 4}{-\log 2} = \frac{\log 3}{\log 2} - 2. \quad (2.1)$$

Façamos  $d_f = \frac{\log 3}{\log 2}$ . Então,

$$\rho = L^{d_f-2} = \frac{L^{d_f}}{L^2}. \quad (2.2)$$

Observe que, para um mesmo  $L$  e objetos diferentes, o que determina como  $M$  varia é  $L^{d_f}$ . Assim, estamos fazendo uma associação entre a figura e o valor  $d_f$  que chamamos de dimensão fractal. Essa associação quantifica o quão densamente o objeto ocupa o quadrado de lado  $L$ .

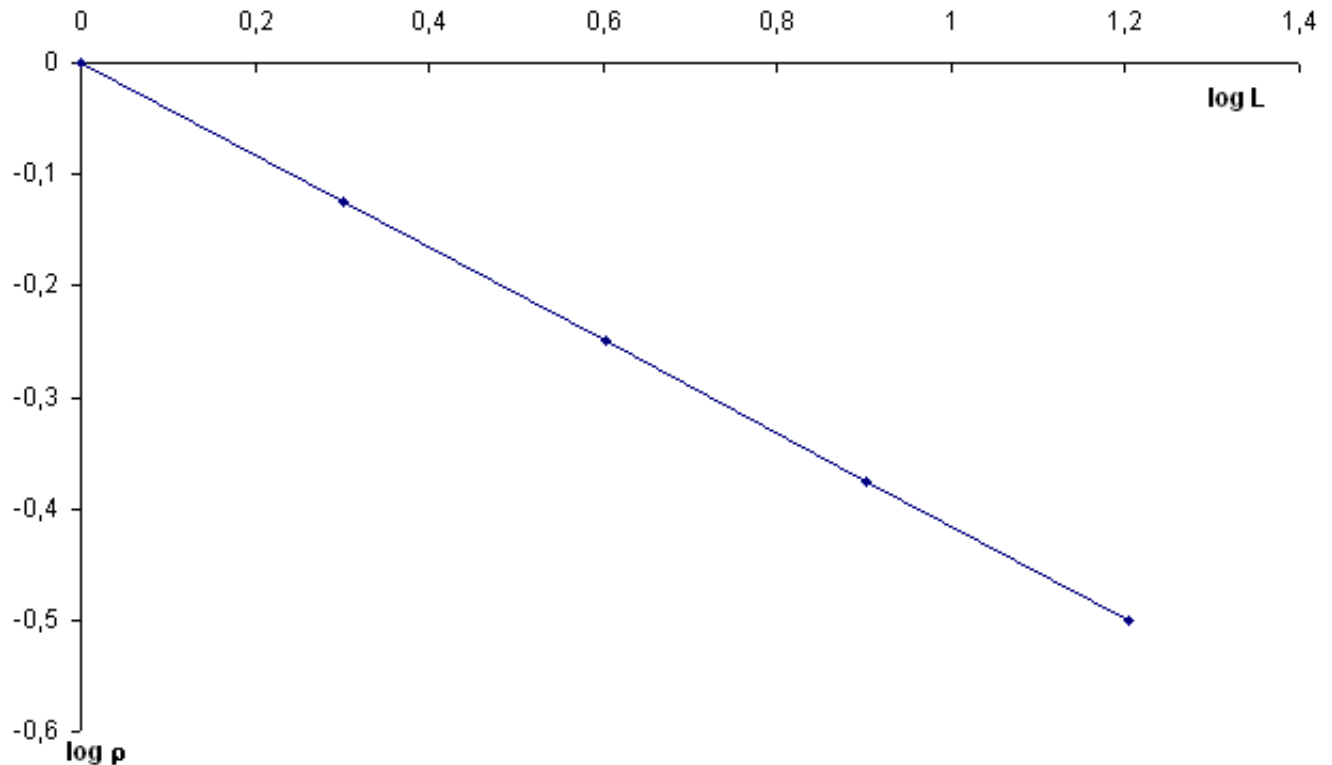


Figura 2.3: gráfico log-log de  $\rho$

## 2.3 Outras definições de dimensão

Há muitas maneiras de se definir dimensão. A razão para a existência de tantas definições é o fato de que em alguns casos, não no nosso, elas produzem valores distintos. Estudaremos nesta seção as definições mais úteis na compreensão dos fractais e mostraremos que neste caso elas são equivalentes.

### 2.3.1 Dimensão topológica

Consideremos um subconjunto  $S$  do  $\mathbb{R}^n$ .

Uma cobertura aberta de  $S$  é qualquer família  $\alpha$  de conjuntos abertos cuja união contém o conjunto  $S$ . Como exemplo, podemos tomar  $S = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$  e  $\alpha$  como a família de intervalos abertos  $(n-1, n+1)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . É evidente que o conjunto dos números naturais está contido na união de todos os intervalos de  $\alpha$ .

Um refinamento aberto  $\alpha'$  da cobertura aberta  $\alpha$  é outra cobertura tal que cada aberto  $A' \in \alpha'$  está incluído em algum aberto  $A \in \alpha$ . Assim, se  $\alpha'$  é formada pelos intervalos  $(\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2})$ , então temos um refinamento aberto de  $\alpha$  do parágrafo anterior.

Dizemos que  $\alpha$  é uma cobertura aberta de ordem  $k$  do conjunto  $S$ , se, qualquer que seja  $x \in S$ ,  $x$  pertence a no máximo  $k$  abertos da cobertura  $\alpha$ . Tanto  $\alpha$  quanto  $\alpha'$  são coberturas abertas de ordem 1 porque cada  $n \in \mathbb{N}$  pertence a somente um intervalo de cada cobertura.

**Definição 1** *O conjunto  $S$  tem dimensão topológica  $n$ , se qualquer cobertura aberta  $\alpha$  de  $S$  admite um refinamento aberto de ordem  $n + 1$ , mas não de ordem  $n$ .*

Seguindo essa definição o conjunto  $\mathbb{N}$  tem dimensão zero pois já foram mostradas coberturas com ordem 1, mas não é possível conseguir um refinamento de ordem 0, qualquer que seja a cobertura.

Uma outra definição que pode ser útil no entendimento de dimensão topológica é a de *variedade topológica de dimensão  $n$* . O valor  $n$  faz o papel de dimensão topológica como chamamos usualmente.

Usaremos a seguinte definição encontrada em [2]. Um espaço métrico  $M$  chama-se *variedade topológica de dimensão  $n$*  quando, para todo  $x \in M$  existe um aberto  $U$  que contém  $x$  homeomorfo a um subconjunto aberto do espaço  $\mathbb{R}^n$ .

Há dois termos utilizados nesta definição que precisam de explicação. O primeiro é espaço métrico, que é simplesmente um conjunto ao qual pode se associar uma noção de distância. O outro termo é homeomorfo. Dizemos que dois conjuntos são homeomorfos se existe uma bijeção contínua com inversa contínua entre eles.

Em termos mais gerais, dizemos que um objeto tem dimensão topológica  $n$  quando podemos cobri-lo por pedaços que podem ser deformados continuamente (sem partí-los) em conjuntos abertos do  $\mathbb{R}^n$ .

Consideramos  $\mathbb{R}^0$  como um ponto. Qualquer conjunto esparsos de pontos tem dimensão topológica zero.

Seguindo a definição, as curvas têm dimensão 1, pois podem ser deformadas continuamente em uma reta ( $\mathbb{R}^1$ ).

Outro exemplo é a esfera em  $\mathbb{R}^3$ . Se pensarmos somente na superfície esférica, podemos cobri-la



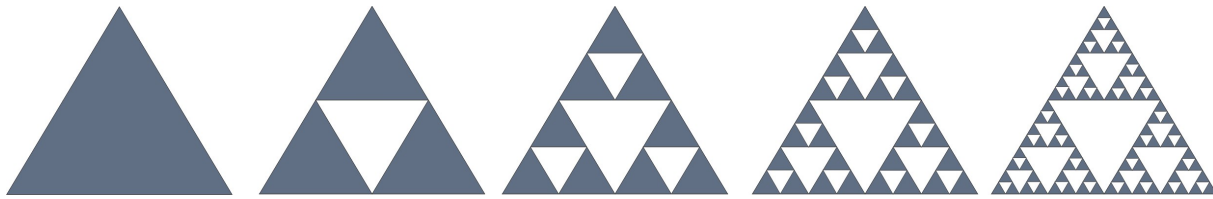


Figura 2.4: Construção do Triângulo de Sierpinski por retirada

por partes que podem ser deformadas em abertos de  $\mathbb{R}^2$ . Logo, sua dimensão é 2. Se considerarmos a esfera preenchida, seu interior já é um aberto de  $\mathbb{R}^3$ , então a esfera sólida tem dimensão 3.

### 2.3.2 Dimensão de auto-similaridade - $D_s$

Na Seção 2.2, definimos o triângulo de Sierpinski de uma maneira que ajudasse na aquisição de uma noção intuitiva sobre o número chamado dimensão fractal. Agora usaremos uma outra construção do objeto. Iniciamos novamente com um triângulo preenchido de lado  $L$ . Unindo os pontos médios de cada lado, dividimos o triângulo inicial em quatro outros menores de lados iguais a  $L/2$ . Retiramos o triângulo central, obtendo uma região vazada. Com os três triângulos restantes, repetimos o processo de divisão e retirada da parte central. Continuando esse procedimento com cada novo triângulo, obtemos o objeto desejado (Ver Figura 2.4)

Seja  $\phi : S \rightarrow S$  uma contração que associa a todos os pontos  $x$  de  $S$  pontos  $\phi(x) = rx$ ,  $r \in \mathbb{R}$ , com  $r < 1$ . O conjunto  $S$  é chamado *auto-similar* quando  $S$  é a união de  $n(r)$  cópias de  $\phi(S)$ . Neste caso, também definimos a dimensão de auto-similaridade,  $D_s$ , dada por

$$D_s = \frac{\log(n(r))}{\log(1/r)}. \quad (2.3)$$

Por exemplo, podemos colocar o triângulo de Sierpinski aqui definido em um sistema de coordenadas de forma que os pontos  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(1/2, \sqrt{3}/2)$  sejam seus vértices. Aplicando uma contração com  $r = \frac{1}{2}$  encontramos um novo triângulo de Sierpinski com vértices em  $(0, 0)$ ,  $(1/2, 0)$  e  $(1/4, \sqrt{3}/4)$ . Observe que o triângulo original é formado por 3 cópias daquele obtido após a contração. Isto significa que o triângulo de Sierpinski é um conjunto auto-similar, com dimensão de auto-similaridade  $D_s = \frac{\log 3}{\log 2} = d_f$ .

O fato de encontrarmos  $D_s = d_f$  nesse exemplo não é mera coincidência. Decorre da definição

de densidade na seção 2.2 que  $M(L) = L^{d_f}$ . Se considerarmos um conjunto  $S$  auto-similar, onde cada uma de suas  $n(r)$  cópias está contida em um quadrado de lado  $L$ , sua massa total será de

$$M_S = n(r)M(L) = n(r)L^{d_f}. \quad (2.4)$$

Por outro lado, se um quadrado de lado  $L$  cobre uma cópia de  $\phi(S)$ , um quadrado de lado  $\frac{1}{r}L$  contém  $S$ . Então, sua massa é dada por

$$M_S = M\left(\frac{1}{r}L\right) = \left(\frac{1}{r}L\right)^{d_f}. \quad (2.5)$$

Logo,

$$n(r)L^{d_f} = \left(\frac{1}{r}L\right)^{d_f} \Rightarrow n(r) = \left(\frac{1}{r}\right)^{d_f}. \quad (2.6)$$

Donde concluímos que

$$d_f = \frac{\log(n(r))}{\log(1/r)} = D_s. \quad (2.7)$$

### 2.3.3 Dimensão de Minkowski-Bouligand - $D_B$

Também conhecida como dimensão de caixa, é outra maneira de definir dimensão de um conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$ . Essa dimensão é dada por

$$D_B = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N(\epsilon))}{\log(1/\epsilon)}, \quad (2.8)$$

onde  $N(\epsilon)$  é o número mínimo de caixas  $n$ -dimensionais de tamanho  $\epsilon$  necessários para cobrir os pontos de  $S$ .

Usaremos mais uma vez o triângulo de Sierpinski para mostrar como calcular dimensão através dessa definição. Consideremos um quadrado de tamanho unitário que cubra o triângulo. Em seguida o subdividimos em  $n^2$  quadrados de lado  $\epsilon_n = \frac{1}{2^n}$ . Ver Figura 2.5. Note que quando  $n = 2$ , o número de quadrados que intersectam o triângulo é  $N(\epsilon_2) = 4$ , para  $n = 4$ ,  $N(\epsilon_4) = 12$ ,  $n = 8$  nos dá  $N(\epsilon_8) = 36$  e assim sucessivamente. Isto é, temos para cada  $\epsilon_n = \frac{1}{2^n}$  um  $N(\epsilon_n) = 4 \cdot 3^{n-1}$ . Assim,

$$D_B = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(4 \cdot 3^{n-1})}{\log(2^n)} = \frac{\log 3}{\log 2} = d_f \quad (2.9)$$

Outra maneira de calcular  $D_B$ . Novamente consideremos um quadrado de tamanho unitário que cubra o triângulo de Sierpinski. Como o triângulo é formado pela união de três cópias suas reduzidas

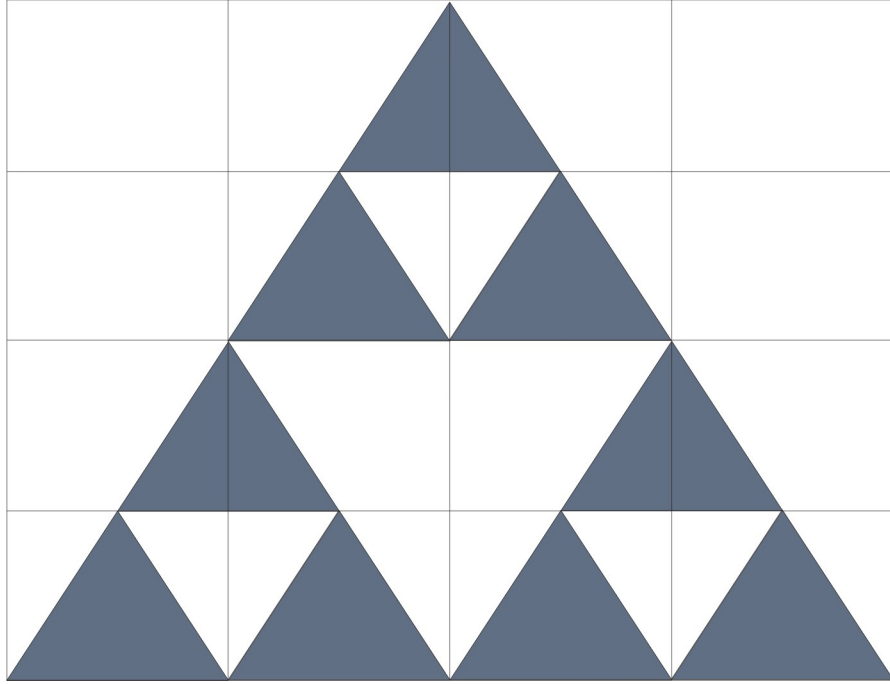


Figura 2.5: Cobertura por caixas

por um fator  $r = \frac{1}{2}$ , cada uma dessas pode ser coberta por um quadrado de lado  $\frac{1}{2}$ . Então podemos dizer que três quadrados de lado  $\frac{1}{2}$  cobrem todo o triângulo de Sierpinski (Figura 2.6). Mas, cada uma das cópias do triângulo todo também é a união de três cópias que cabem em quadrados de lado  $\frac{1}{4}$  (Figura 2.7). Isso resulta em  $3^2$  quadrados de lado  $\frac{1}{4}$  que cobrem todo o triângulo original. Continuando com esse procedimento  $n$  vezes, encontramos  $N(\epsilon) = 3^n$  quadrados de lado  $\epsilon = \left(\frac{1}{2}\right)^n$  que cobrem todo o triângulo. Observe que  $\epsilon \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$  e que  $\epsilon$  satisfaz a desigualdade

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \epsilon < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (2.10)$$

Então,

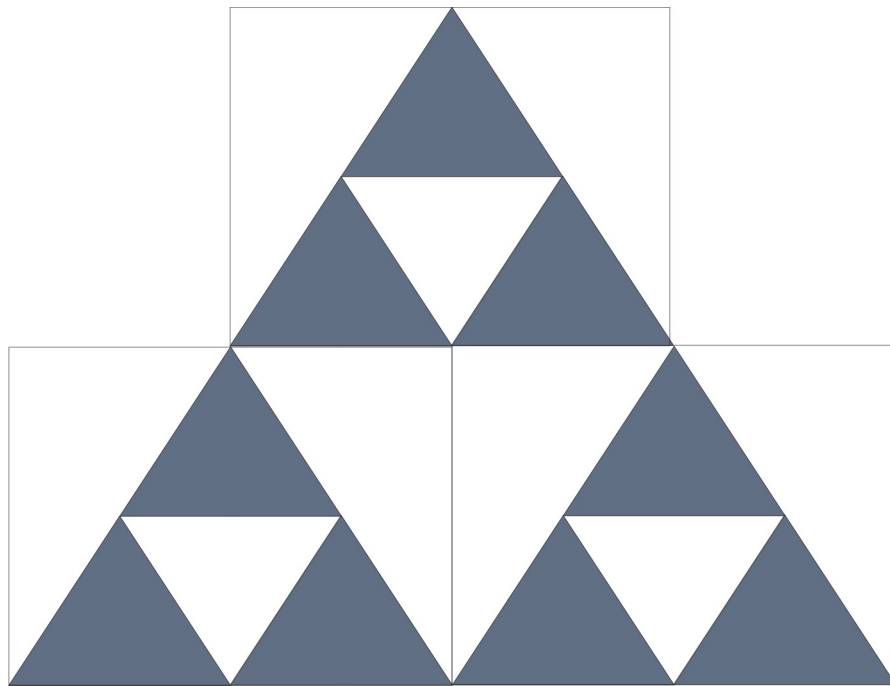
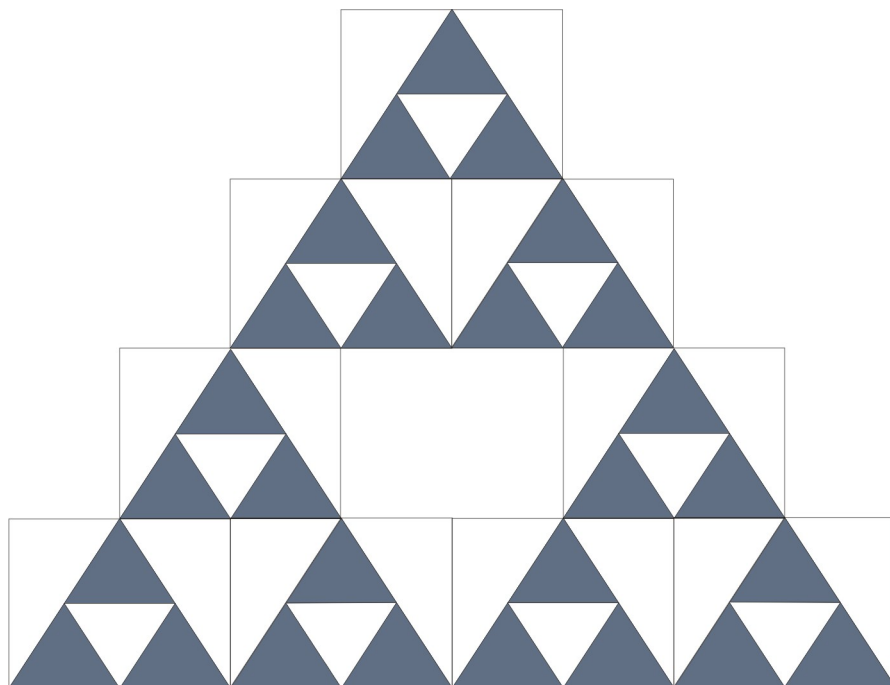
$$\frac{\log(3^n)}{\log(2^n)} \leq \frac{\log(N(\epsilon))}{\log(1/\epsilon)} < \frac{\log(3^n)}{\log(2^{n-1})}. \quad (2.11)$$

Logo,

$$D_s = \frac{\log 3}{\log 2} \leq \frac{\log(N(\epsilon))}{\log(1/\epsilon)} < \frac{n \log 3}{(n-1) \log 2} \quad (2.12)$$

Aplicando o limite quando  $n \rightarrow \infty$  nessa desigualdade temos

$$D_s = D_B = \frac{\log 3}{\log 2} \quad (2.13)$$

Figura 2.6: Cobertura por caixas de lado  $1/2$ Figura 2.7: Cobertura por caixas de lado  $1/4$

Novamente, a igualdade entre as dimensões não é um acaso. Em geral, temos o seguinte resultado:

**Teorema 1** *Se  $S$  é um conjunto auto-similar, então sua dimensão caixa e sua dimensão de similaridade são iguais.*

A demonstração segue o mesmo procedimento que usamos no segundo cálculo de  $D_B$  para o triângulo de Sierpinski. Se  $S$  é auto-similar e é coberto por um quadrado de lado 1, então é formado pela união de  $n(r)$  cópias, com cada uma contida em um quadrado de lado  $r$ . Como cada parte do conjunto também é formada por  $n(r)$  cópias reduzidas pelo fator  $r$ , basta tomar  $\epsilon$  satisfazendo

$$r^n \leq \epsilon < r^{n-1} \quad (2.14)$$

para obtermos  $N(\epsilon) = (n(r))^n$  como o menor número de caixas de lado  $\epsilon$  necessárias para cobrir  $S$ .

Assim,

$$\frac{\log(n(r))^n}{\log(1/r)^n} \leq \frac{\log N(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)} < \frac{\log(n(r))^n}{\log(1/r)^{n-1}} \quad (2.15)$$

o que implica em

$$D_s = D_B. \quad (2.16)$$

### 2.3.4 Dimensão de Hausdorff - $D_H$

Antes de apresentarmos a definição da dimensão de Hausdorff, vejamos as definições seguintes.

**Definição 2** *Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$ , o diâmetro de  $A$  é dado por  $|A| = \sup\{|x - y|; x, y \in A\}$ .*

**Definição 3** *Seja  $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  e  $0 < |A_i| \leq \delta$  para cada  $i$ , diz-se que  $\{A_i\}$  é uma  $\delta$ -cobertura de  $E$ .*

**Definição 4** *Seja  $E$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  e  $s$  um número real não negativo, define-se*

$$H_s^s(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|^s; \forall \{A_i\} \delta\text{-cobertura de } E \right\} \quad (2.17)$$

Segundo a Definição 2, o diâmetro de uma região quadrada juntamente com a fronteira é a sua diagonal, a maior distância entre pontos desse conjunto. Já uma região quadrada sem a fronteira tem o mesmo diâmetro que o quadrado anterior, mas esse não contém dois pontos cuja distância seja o diâmetro do conjunto. Um exemplo de cobertura de que trata a Definição 3 é a formação de caixas da

Subseção 2.3.3. Note que o triângulo de Sierpinski está contido em um número de caixas (quadrados de diâmetro  $\sqrt{2}\epsilon$ ).

Na Definição 4, temos uma função auxiliar que nos servirá na definição da *s-medida de Hausdorff*. Essa função representa algo como a menor soma possível de potências dos diâmetros de  $\delta$ -coberturas do conjunto.

Por exemplo, dada uma curva  $E$  em  $\mathbb{R}^2$ , há várias maneiras diferentes de se definir  $\delta$ -coberturas sobre ela. O que  $H_\delta^s(E)$  fornece como resposta é a menor soma dos diâmetros elevados à  $s$ -ésima potência. Quando  $s = 1$ , a soma corresponde à soma dos diâmetros dos conjuntos das coberturas.

Observe que  $H_\delta^s(E)$  define uma função  $\delta \rightarrow H_\delta^s(E)$  não crescente. Isto é, se  $0 < \delta < \delta'$ , então vale  $H_{\delta'}^s(E) \leq H_\delta^s(E)$ , uma vez que o ínfimo tomado sobre um conjunto é menor ou igual ao ínfimo tomado sobre um subconjunto seu. Desta forma podemos agora passar para a definição de *s-medida de Hausdorff*.

**Definição 5** A *s-medida de Hausdorff* de um conjunto  $E$  é dada por

$$H^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(E). \quad (2.18)$$

Considere  $t < s$ . Para uma  $\delta$ -cobertura  $\{A_i\}$  qualquer vale a seguinte desigualdade

$$\sum |A_i|^s \leq \sum |A_i|^t \delta^{s-t} = \delta^{s-t} \sum |A_i|^t. \quad (2.19)$$

Logo,

$$\inf \left( \sum |A_i|^s \right) \leq \inf \left( \delta^{s-t} \sum |A_i|^t \right), \quad (2.20)$$

o que implica em

$$H_\delta^s(E) \leq \delta^{s-t} H_\delta^t(E). \quad (2.21)$$

Portanto, pode-se concluir que  $\delta \rightarrow 0$  implica em  $H^s(E) = 0 \cdot H^t(E)$  ou  $\infty \cdot H^s(E) = H^t(E)$ .

Como consequência de cada uma destas alternativas, temos

$$\text{Se } H^t(E) < \infty, \text{ temos } H^s(E) = 0, \forall s > t \text{ ou} \quad (2.22)$$

$$\text{Se } H^s(E) > 0, \text{ temos } H^t(E) = \infty, \forall t < s. \quad (2.23)$$

Essas últimas conclusões nos remetem ao fato da função  $s \rightarrow H^s(E)$  ser descontínua em algum ponto. Este ponto é o que se chama *dimensão de Hausdorff* de  $E$ ,  $dim_H(E)$ .

**Definição 6** *Define-se a dimensão de Hausdorff de um conjunto  $E$  como sendo o ponto de descontinuidade da função  $s \rightarrow H^s(E)$ . Ou ainda,*

$$dim_H(E) = \sup \{s \geq 0; H^s(E) = \infty\}. \quad (2.24)$$

Como consequência desta definição, temos

$$H^s(E) = \begin{cases} 0 & s > dim_H(E) \\ \infty & s < dim_H(E) \end{cases} \quad (2.25)$$

Consideremos o seguinte exemplo. Suponha que queremos calcular  $H^1(\gamma)$ , onde  $\gamma$  é uma curva suave. Se cobrirmos  $\gamma$  com bolas de diâmetro  $\delta$  da melhor maneira possível, então a soma desses diâmetros nos dá uma aproximação do comprimento de  $\gamma$ , que denotaremos  $L(\gamma)$ .

Na verdade, como o número de bolas necessárias para cobrir  $\gamma$  é aproximadamente  $L(\gamma)/\delta$ , temos

$$H^1(\gamma) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \frac{L(\gamma)}{\delta} \right) \delta^1 = L(\gamma). \quad (2.26)$$

Analogamente, quando calculamos  $H^2(\gamma)$ , encontramos

$$H^2(\gamma) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \frac{L(\gamma)}{\delta} \right) \delta^2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta L(\gamma) = 0, \quad (2.27)$$

como era esperado. Assim,

$$dim_H(\gamma) = 1. \quad (2.28)$$

Existe uma desigualdade entre a dimensão de Hausdorff e a dimensão caixa. Acontece que, para um conjunto  $F$  qualquer,  $dim_H(F) \leq D_B$ . Felizmente, para conjuntos auto-similares, vale  $dim_H(F) = D_B = D_s$ . A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [3].

## 2.4 Fractais aleatórios

Fractais podem ser classificados em duas categorias: determinísticos e aleatórios. Os exemplos que vimos até agora são todos determinísticos, obedecem a regras bem determinadas sem necessidade

do uso de uma distribuição de probabilidade. Entretanto, nem sempre podemos encontrar na Natureza a repetição de um padrão determinístico. Para modelá-la, muitas vezes se faz necessária a introdução de uma componente aleatória. Por isso, adicionaremos elementos estocásticos na geração de um fractal.

Por exemplo, para gerar o triângulo de Sierpinski, podemos iniciar com uma região triangular de lado 1 e dividi-la em quatro triângulos menores de lado  $1/2$ . Em seguida retiramos o triângulo central e repetimos o processo com os três triângulos restantes. Continuando infinitamente, obtemos o triângulo de Sierpinski. Observe que a regra de retirada do triângulo está bem estabelecida: retirar o triângulo central. Podemos acrescentar uma aleatoriedade nesse ponto. Imagine que, quando dividimos o triângulo inicial em quatro, podemos retirar qualquer um deles de acordo com alguma distribuição de probabilidade. A figura 2.8 mostra a evolução desse processo até o passo 6.

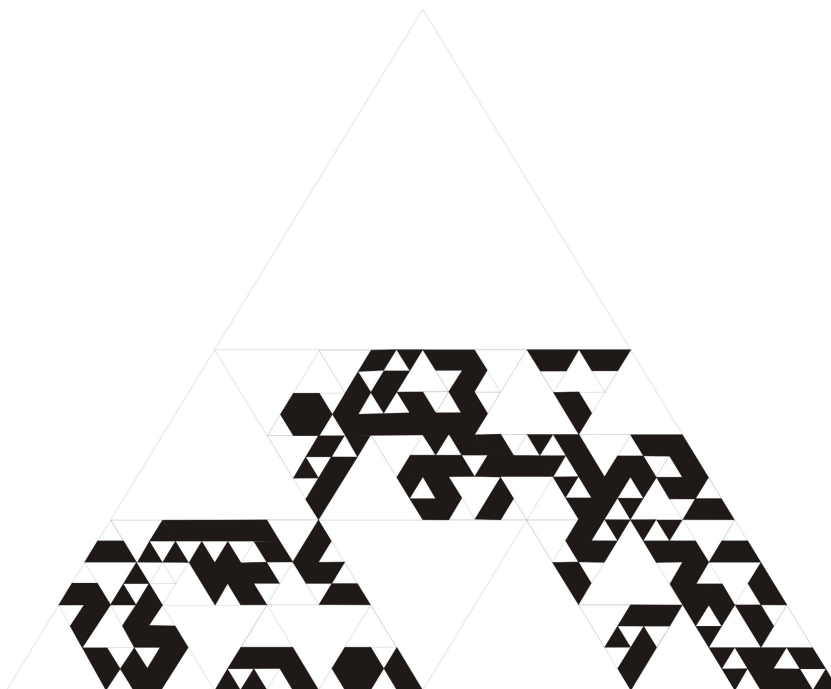


Figura 2.8: Triângulo de Sierpinski aleatório

É visível que a nova figura não é feita de cópias exatas de si mesma, isto é, não é auto-similar no sentido que definimos. Entretanto, podemos argumentar que o objeto da figura 2.8 é auto-similar em um *sentido estatístico*. Por exemplo, a distribuição de tamanho e quantidade dos buracos continua a mesma do triângulo de Sierpinski. Temos um buraco de lado  $1/2$ , três buracos de lado



$1/4$ , nove buracos de lado  $1/8$  e assim sucessivamente. Se pensarmos que a região triangular inicial tem massa  $M = 1$ , vemos que a massa vai diminuindo em cada passo exatamente da mesma maneira que o triângulo de Sierpinski. Em cada etapa temos a massa dada por  $M = 1, M = 3/4, M = (3/4)^2, \dots, M = (3/4)^n$ . Dessa forma, esse triângulo de Sierpinski aleatório tem a mesma dimensão fractal que o determinístico  $d_f = \frac{\log 3}{\log 2}$ .

Fractais aleatórios são muito úteis na modelagem de fenômenos naturais. A natureza apresenta inúmeros exemplos de objetos que não são exatamente auto-similares, mas que apresentam uma auto-similaridade no sentido estatístico que descrevemos para o triângulo de Sierpinski aleatório. Suas dimensões fractais são geralmente encontradas numericamente. Uma ferramenta muito útil para isso é o algoritmo *box-counting*, que consiste em dividir o espaço no qual o fractal está imerso em uma malha de células de tamanho  $\epsilon$ . Conta-se o número de células que contêm partes do fractal,  $N(\epsilon)$ , e repete-se o procedimento para células de diversos tamanhos  $\epsilon$ . A dimensão fractal é então determinada pela relação

$$N(\epsilon) \sim \epsilon^{-d_f}. \quad (2.29)$$

A seguir veremos alguns exemplos de modelos que utilizam a idéia de fractal aleatório.

## 2.5 Modelos Estocásticos

Há uma grande quantidade de sistemas na natureza que são reconhecidos como fractais. Praticamente todos os exemplos observados envolvem algum elemento aleatório. Aqui trataremos de alguns modelos que se adequam a uma enorme variedade de situações, de colônias de bactérias a aglomerados de galáxias.

### 2.5.1 Movimento Browniano

Considere uma partícula movimentando-se aleatoriamente no plano  $\mathbb{R}^2$  de modo a assumir posições discretas em tempos discretos. Por exemplo, considerando-se uma rede quadrada no plano, para cada unidade de tempo, a partícula move-se de um sítio para algum de seus vizinhos com probabilidade  $p = 1/4$ . Se desenharmos sua trajetória, veremos um objeto extremamente irregular como na figura 2.9. Observe a semelhança entre a figura da esquerda e sua ampliação na direita, indicando uma

auto-similaridade. Pode ser mostrado que essa trajetória tem dimensão fractal  $d_f = 2$ , na verdade, a dimensão fractal da trajetória do movimento browniano é 2 também em outros espaços  $\mathbb{R}^n$ .

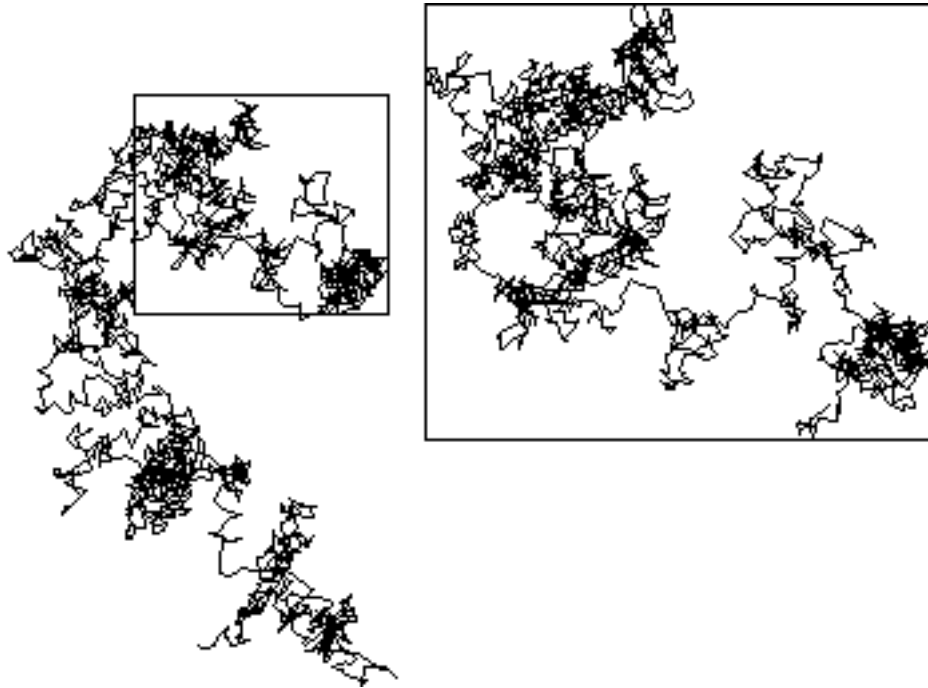


Figura 2.9: Trajetória do movimento browniano.

**Fonte:** Yale University. **Fractal Geometry.** Disponível em:

<<http://classes.yale.edu/fractals/RandFrac/Brownian/Brownian2.html>>. Acesso em: 28 set. 2006.

Esse é um modelo inspirado no fenômeno observado por Robert Brown em 1827. Através de um microscópio, ele observou o movimento errático de grãos de pólen na água devido ao choque de moléculas. Mais tarde, em 1905, Albert Einstein desenvolveu sua teoria para o movimento browniano. Teoria esta que foi verificada pelas experiências de Jean Perrin, o que resultou em evidências sobre a existência de átomos e moléculas. O trabalho de Perrin foi decisivo para convencer os cientistas da época que não aceitavam a existência dessas partículas e foi reconhecido com o Prêmio Nobel de Física em 1926.

### 2.5.2 DLA

Esse modelo foi proposto por Witten e Sandler [4] para estudar certos tipos de agregação e serve para modelar sistemas complexos como deposição eletroquímica, dedos viscosos, flocos de neve, entre outros.

Considerando uma rede de sítios em  $\mathbb{R}^2$ , coloquemos no centro um sítio ativado. A uma distância qualquer liberamos um caminhante aleatório. Quando o caminhante passar por um sítio vizinho ao central, esse também é ativado e repetimos o processo.

À medida em que o tempo evolui, vai se formando um aglomerado semelhante ao da Figura 2.10. Esta figura pode ser encontrada em [5]. Sua forma bastante particular se deve ao fato de a probabilidade de se ativar um vizinho em uma ponta do aglomerado ser maior do que nos outros sítios.

Uma estimativa feita por Meakin em [6] apresenta a dimensão fractal do aglomerado de DLA como  $d_f = 1,55$  em redes quadradas.

### 2.5.3 Percolação

Consideremos um quadrado coberto por uma rede de sítios em que cada um deles tem uma probabilidade  $p$  de estar ocupado. Se fizermos  $p$  variar, obteremos diferentes configurações de sítios ocupados e vazios (Ver Figura 2.11). Para valores de  $p$  próximos de 0, teremos poucos sítios ocupados. À medida em que aumentarmos o valor de  $p$ , formaremos aglomerados de sítios ocupados cada vez maiores. Para  $p$  igual a 1, surge um aglomerado que preenche toda a rede. Então, deve existir um menor valor de  $p$ , que denotaremos por  $p_c$ , em que surge um aglomerado que atravessa a rede de um lado a outro. O modelo descrito é denominado *percolação por sítios* e o valor  $p_c$  é o que chamamos de *limiar de percolação*.

Novamente consideremos um quadrado coberto por uma rede. Desta vez, voltemos nossa atenção para as arestas, considerando-as ligações entre dois pontos. A cada uma dessas ligações é atribuída uma probabilidade  $p$  de estar ativada, conectando dois pontos. Assim, variando  $p$ , obtemos diferentes configurações de pontos conectados e isolados (Ver Figura 2.11). Da mesma forma que no parágrafo anterior, denotaremos por  $p_c$  a probabilidade em que surge um aglomerado de ligações que conecta um lado ao outro da rede e, neste caso, chamaremos o modelo de *percolação por ligação*.

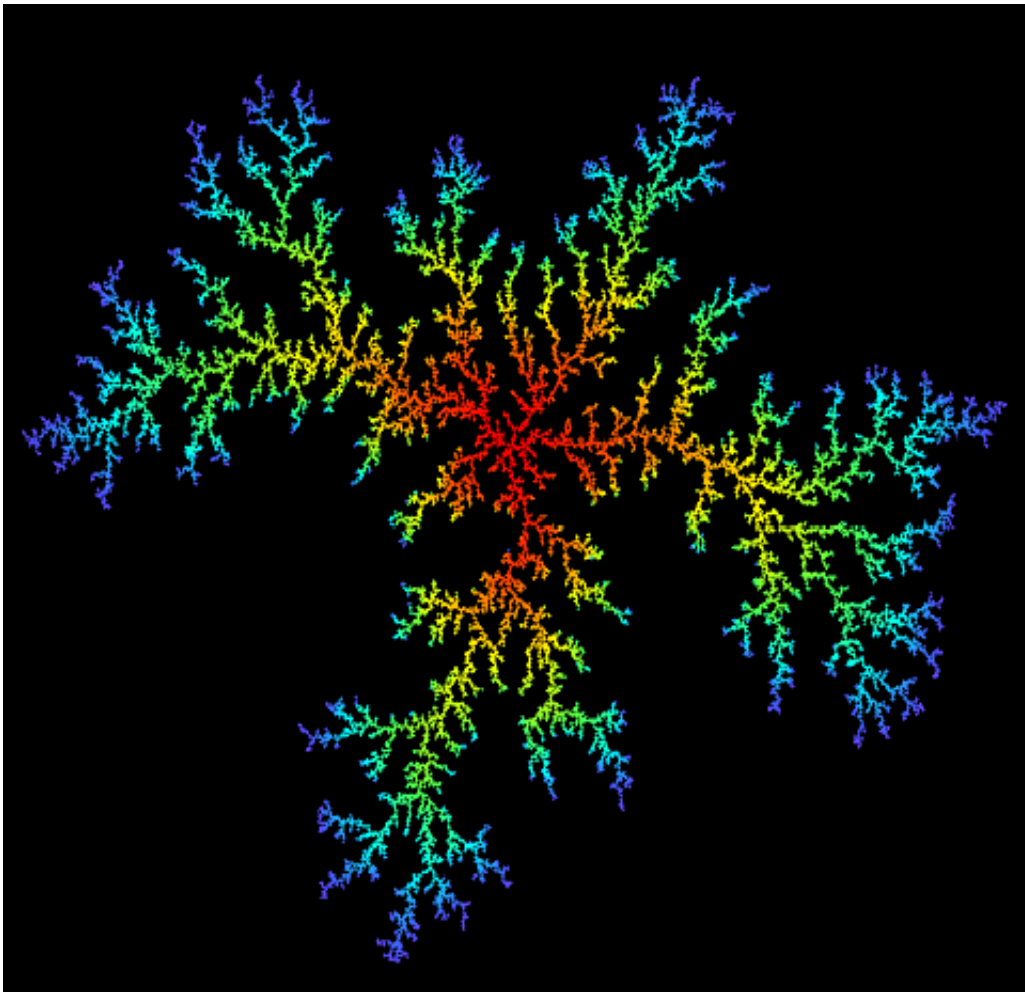


Figura 2.10: Aglomerado DLA. As cores indicam o tempo de chegada das partículas ao aglomerado. Em vermelho estão as mais antigas. Em azul as mais recentes.

Em uma rede infinita, no limiar de percolação, o aglomerado que atravessa a rede tem buracos de todos os tamanhos, em todas as escalas, similar ao triângulo de Sierpinski. Assim, sua estrutura pode ser bem descrita por conceitos fractais. Apesar de  $p_c$  depender do tipo de rede que for utilizada e se estivermos considerando sítios ocupados ou conectados, a dimensão fractal do aglomerado percolante de uma rede infinita nessa concentração não varia. Em [7] é encontrado o valor  $d_f = 91/48$ .

A idéia da Percolação é útil para modelar a propagação de epidemias, o fluxo de fluidos em meios porosos, polimerização e outros.

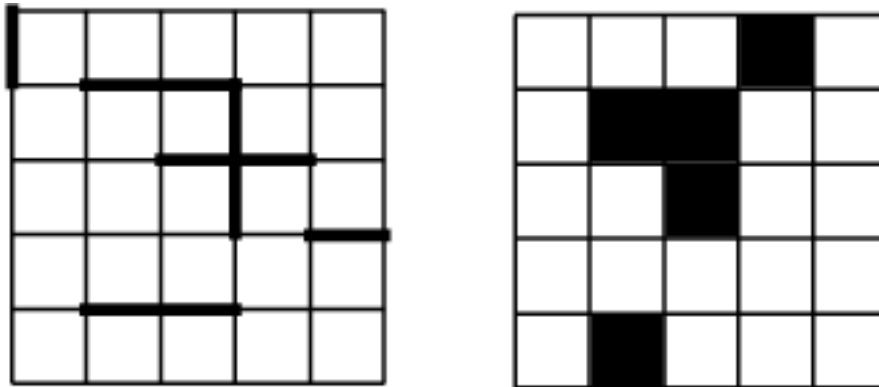


Figura 2.11: Percolação por ligação e por sítios

# Capítulo 3

## Medidas Multifractais

### 3.1 Introdução

Este capítulo trata da generalização de conjuntos fractais para medidas multifractais. Passaremos de objetos geométricos caracterizados por um número para objetos geométricos que são caracterizados por uma distribuição, chamada de espectro multifractal. Apresentaremos alguns resultados e noções básicas sobre o assunto. Para um tratamento mais formal, indicamos a referência [8].

Iniciaremos nosso estudo apresentando o conceito de medida. Uma medida é uma maneira de especificar um método de espalhar massa, ou probabilidade, sobre um conjunto suporte. Matematicamente temos a seguinte definição:

**Definição 7** *Dado um conjunto  $X$ , considere-se o conjunto  $\wp(X)$  formado pelos subconjuntos de  $X$ . Uma **medida**  $\mu$  é uma função real sobre  $\wp(X)$  tal que:*

i)  $\mu(\emptyset) = 0$

ii)  $\mu(E) \geq 0$ , para todo  $E \in \wp(X)$

Um exemplo simples de medida é a chamada medida de contagem que é definida em  $\wp(\mathbb{N})$ . Se  $E \in \wp(\mathbb{N})$ , então  $\mu(E)$  é o número de elementos de  $E$ , quando  $E$  é finito, e é  $+\infty$  quando  $E$  é infinito. Quando a medida tomada no conjunto todo é  $\mu(X) = 1$  dizemos que  $\mu$  é uma medida de probabilidade.

A maioria dos fractais  $K$  observados na natureza é composta de um conjunto infinito de subconjuntos fractais. Essa estrutura se torna aparente quando uma medida de probabilidade  $\mu$  com suporte em  $K$  é considerada da seguinte maneira: para cada parâmetro  $\alpha$  associamos um conjunto  $C_\alpha$  de pontos de  $K$ , para o qual a medida das bolas com raio  $\rho$  se escala como  $\rho^\alpha$  quando  $\rho \rightarrow 0$ . Como os  $C_\alpha$  são fractais, a medida  $\mu$  é chamada de multifractal.

A complexidade da geometria de  $C_\alpha$  é medida pelo espectro  $f(\alpha)$  que representa a dimensão caixa de  $C_\alpha$ . Esse espectro é muito útil para comparar multifractais que aparecem na natureza.

Evidências de multifractalidade têm aparecido em vários fenômenos como turbulência, distribuição de terremotos, distribuição de galáxias, percolação, movimento browniano e crescimento de probabilidades na superfície externa de um DLA.

## 3.2 Medida Binomial

Os propósitos e técnicas da análise multifractal são melhor explicadas na situação mais simples: a medida binomial no intervalo unitário.

A medida binomial é uma medida de probabilidade  $\mu$  que é definida convenientemente pela seguinte construção recursiva. Começamos dividindo o intervalo  $I = [0, 1]$  em dois subintervalos  $I_0$  e  $I_1$  de mesmo comprimento. Associa-se a esses intervalos massas  $m_0$  e  $m_1 = 1 - m_0$ , respectivamente. Com os dois subintervalos, procedemos da mesma maneira de forma a obter subintervalos  $I_{00}$ ,  $I_{01}$ ,  $I_{10}$  e  $I_{11}$  cada um com comprimento  $1/4$  e massas  $m_0^2$ ,  $m_0m_1$ ,  $m_1m_0$  e  $m_1^2$ , e assim por diante. Em um estágio  $n$  a massa total 1 é distribuída entre  $2^n$  intervalos de comprimento  $2^{-n}$  e massa determinada por  $\mu_n(I_{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n}) = m_{\sigma_1}m_{\sigma_2}\cdots m_{\sigma_n}$ , onde  $\sigma_i$  é 0 ou 1. Esse processo define uma seqüência  $(\mu_n)$  que converge para uma medida  $\mu$ .

Representemos por  $I^{(n)}(x)$  o único dos intervalos no estágio  $n$  que contém  $x \in [0, 1]$ . Escrevendo  $x$  em base 2, temos  $x = 0, \sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n$ , para  $x \in I^{(n)}(x) = I_{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n}$ . Então  $\mu(I^{(n)}(x)) = m_0^{k_n} m_1^{n-k_n}$ , onde  $k_n$  é o número de zeros de  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ .

A construção multiplicativa de  $\mu$  mostra que a massa da seqüência  $I^{(n)}(x)$  de intervalos decai de forma exponencial quando  $n$  aumenta da mesma maneira que  $2^{-n\alpha(x)}$ . A razão exponencial  $\alpha(x)$

pode ser entendida como o grau de singularidade da medida em torno de  $x$ . Definamos

$$\alpha_n(x) = \frac{\log \mu(I^{(n)}(x))}{\log |I^{(n)}(x)|} = -\frac{k_n}{n} \log_2 m_0 - \frac{n - k_n}{n} \log_2 m_1 \quad (3.1)$$

e

$$\alpha(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(x) \quad (3.2)$$

sempre que o limite existir. Assim,

$$\alpha = -\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n}\right) \log_2 m_0 - \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - k_n}{n}\right) \log_2 m_1 \quad (3.3)$$

Fica evidente que o valor de  $\alpha$  depende somente dos limites das freqüências dos dígitos de  $x$ ,  $\phi_0 = \lim k_n/n$  e  $\phi_1 = 1 - \phi_0$ . Como exemplo de cálculo dessas freqüências, tome  $x = 0,001001001\dots$  e observe que  $\phi_0 = \lim k_n/n = 2/3$ .

Quando  $k_n$  varia entre seus valores mínimo e máximo (0 e  $n$ ), os valores de  $\alpha_n$  estão sempre limitados por  $-\log_2 m_1$  e  $-\log_2 m_0$ . Então temos  $\alpha$  também limitado por esses valores.

A função definida por  $\alpha$  não é injetiva. Perceba que os  $\alpha_n$  dependem somente do número de zeros usados na representação de  $x$ , não da sua ordem. Portanto, em cada estágio  $n$ , existem tantos valores de  $x$ , que levam ao mesmo valor de  $\alpha$ , quantas são as combinações de  $k_n$  zeros no conjunto  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ . Cada um desses  $\frac{n!}{k!(n-k)!} = N_n(\alpha)$  elementos está associado a um intervalo  $I^{(n)}(x)$  de tamanho  $2^{-n}$ .

Fazendo  $n$  crescer indefinidamente e aplicando a aproximação de Stirling chegamos a

$$N_n(\alpha) \approx (2^{-n})^{-\delta} \quad (3.4)$$

ou seja,

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{\log N_n(\alpha)}{\log 2^{-n}} \quad (3.5)$$

Como  $N_n(\alpha) = \frac{n!}{(n\phi_0)!(n\phi_1)!}$ , temos, novamente por Stirling,

$$\begin{aligned} \log_2(N_n(\alpha)) &= n \log_2 n - (n\phi_0) \log_2(n\phi_0) - (n\phi_1) \log_2(n\phi_1) - n + n\phi_0 + n\phi_1 \\ &= n \log_2 n - (n\phi_0) \log_2(n\phi_0) - (n\phi_1) \log_2(n\phi_1) - n + n\phi_0 + n(1 - \phi_0) \\ &= n(\log_2 n - (\phi_0 + \phi_1) \log_2 n - \phi_0 \log_2 \phi_0 - \phi_1 \log_2 \phi_1) \\ &= n(-\phi_0 \log_2 \phi_0 - \phi_1 \log_2 \phi_1) \end{aligned} \quad (3.6)$$



Então,

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{\log N_n(\alpha)}{\log 2^{-n}} = -\phi_0 \log_2 \phi_0 - \phi_1 \log_2 \phi_1 \quad (3.7)$$

Vemos que a quantidade  $\delta$  é a dimensão caixa do conjunto dos  $x$  que resultam no mesmo  $\alpha$ . Lembrando que, para cada valor de  $\alpha$ , têm-se os intervalos para os quais o número de zeros se conserva. Ainda que  $n$  cresça indefinidamente. Temos então definida uma aplicação

$$\alpha \rightarrow f(\alpha) = \delta \quad (3.8)$$

Temos então determinado um roteiro para a avaliação da função  $f(\alpha)$ . Primeiro tomamos um valor de  $\alpha$  entre  $-\log_2 m_1$  e  $-\log_2 m_0$ . Em seguida determinamos  $\phi_0$  por meio da equação

$$\alpha = -\phi_0 \log_2 m_0 - (1 - \phi_0) \log_2(1 - m_0) \quad (3.9)$$

Então basta uma substituição para obter

$$f(\alpha) = -\phi_0 \log_2 \phi_0 - (1 - \phi_0) \log_2(1 - \phi_0) \quad (3.10)$$

A figura 3.1 mostra o gráfico do espectro multifractal da medida binomial com  $m_0 = 1/3$ . O máximo de  $f(\alpha)$  é a dimensão do suporte da medida. Neste caso, a dimensão do segmento  $[0, 1]$ .

Mais geralmente, fazendo um paralelo com o caso unidimensional, se denotamos por  $B_x$  uma bola com centro em  $x$  e raio  $\epsilon$ , podemos definir o expoente de Hölder por

$$\alpha(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B_x)}{\log \epsilon}. \quad (3.11)$$

O expoente de Hölder mede a regularidade da medida. Quanto menor o valor de  $\alpha$  em  $x$ , mais irregular é a função em  $x$ . Uma medida descontínua tem  $\alpha = 0$ , enquanto que  $\alpha > 1$  implica em uma medida no mínimo diferenciável em  $x$ . Para medidas multifractais, o expoente de Hölder não é constante, mas ao contrário varia muito, de forma aparentemente errática.

### 3.3 Medida Produto

Tentaremos estender o método da seção anterior para determinar o espectro multifractal de uma medida produto.

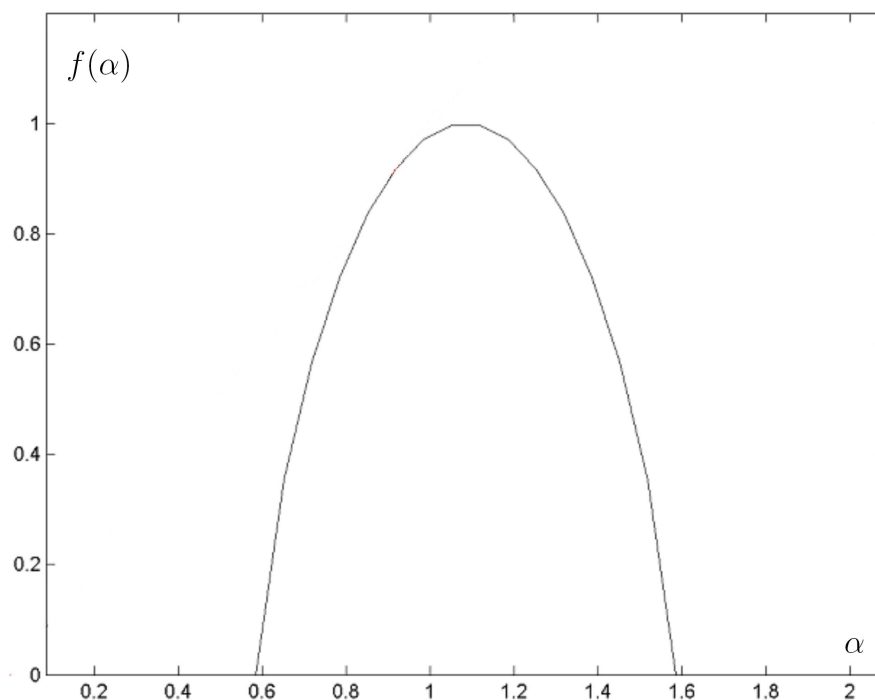


Figura 3.1: Curva  $f(\alpha)$  para a medida binomial

Sejam  $\mu$  e  $\nu$  duas medidas binomiais definidas em  $I = [0, 1]$ , como na Seção 3.2, tais que  $\mu(I_0) = m_0$ ,  $\mu(I_1) = m_1 = 1 - m_0$ ,  $\nu(I_0) = M_0$  e  $\nu(I_1) = M_1 = 1 - M_0$ . Definimos a medida produto  $\pi$  no quadrado  $Q = I \times I$  por  $\pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ , onde  $A$  e  $B$  estão contidos em  $I$ .

A construção recursiva de  $\pi$  está baseada nas construções de  $\mu$  e  $\nu$ . No estágio  $n$ , a massa total 1 de  $Q$  é distribuída em  $2^{2n}$  quadrados de área  $2^{-2n}$  e massa dada por

$$\pi(I_{\sigma_1 \dots \sigma_n} \times I_{\gamma_1 \dots \gamma_n}) = m_{\sigma_1} \cdots m_{\sigma_n} M_{\gamma_1} \cdots M_{\gamma_n}, \quad (3.12)$$

onde  $\sigma_i$  e  $\gamma_j$  são 0 ou 1.

Representemos por  $Q^{(n)}(x, y)$  o único dos quadrados no estágio  $n$  que contém  $(x, y) \in Q$ . Escrevendo  $x$  e  $y$  na base 2, temos  $x = 0, \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$  e  $y = 0, \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n$ . Então,  $\mu(Q^{(n)}(x, y)) = m_0^{k_n} m_1^{n-k_n} M_0^{k'_n} M_1^{n-k'_n}$ , onde  $k_n$  e  $k'_n$  são, respectivamente, os números de zeros de  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$  e  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ .

O cálculo de  $\alpha(x, y)$  é feito de maneira análoga à da Seção 3.2:

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(Q^{(n)}(x, y))}{\log \epsilon_n}, \quad (3.13)$$

com  $\epsilon_n = \frac{1}{2^n}$  sendo a medida do lado de  $Q^{(n)}$ . Assim,

$$\alpha = -\phi_0 \log_2 m_0 - \phi_1 \log_2 m_1 - \psi_0 \log_2 M_0 - \psi_1 \log_2 M_1, \quad (3.14)$$

onde  $\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1$  são os limites das frequências dos dígitos de  $x$  e  $y$ .

Aqui a função definida por  $\alpha$  também não é injetiva. Em cada estágio  $n$ , existem tantos valores de  $x$ , que levam ao mesmo valor de  $\alpha$ , quantas são as combinações de  $k_n$  zeros no conjunto  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ . Da mesma forma, o número de combinações de  $k'_n$  zeros do conjunto  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  determina a quantidade de valores  $y$  que produzem o mesmo  $\alpha$ . Assim, o número de pontos  $(x, y)$  que está associado ao mesmo  $\alpha$  é

$$N_n(\alpha) = \frac{n!}{k_n!(n-k_n)!} \times \frac{n!}{k'_n!(n-k'_n)!} \frac{n!}{k'_n!(n-k'_n)!}. \quad (3.15)$$

Novamente verificamos que esse número obedece à lei de potência

$$N_n(\alpha) \sim (2^{-n})^{-\Delta}, \quad (3.16)$$

ou seja,

$$\Delta = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{\log N_n(\alpha)}{\log 2^{-n}}. \quad (3.17)$$

Aplicando a aproximação de Stirling chegamos a

$$f(\alpha) = \Delta = -\phi_0 \log_2 \phi_0 - \phi_1 \log_2 \phi_1 - \psi_0 \log_2 \psi_0 - \psi_1 \log_2 \psi_1. \quad (3.18)$$

Aqui aparece um problema. Não é possível determinar unicamente  $\Delta$  a partir de  $\alpha$ , pois para cada  $\alpha$ , existe uma infinidade de valores  $\phi_0$  e  $\psi_0$  que satisfazem à definição de  $\alpha$ , o que resulta em diferentes  $\Delta$  para um mesmo  $\alpha$ .

A maneira de superar essa dificuldade é supor que, para  $\alpha$  dado, os valores de  $\Delta$  são dominados pelo termo que maximiza  $-\phi_0 \log_2 \phi_0 - (1 - \phi_0) \log_2(1 - \phi_0) - \psi_0 \log_2 \psi_0 - (1 - \psi_0) \log_2(1 - \psi_0)$  e que satisfaz  $\alpha = -\phi_0 \log_2 m_0 - \phi_1 \log_2 m_1 - \psi_0 \log_2 M_0 - \psi_1 \log_2 M_1$ ,  $\phi_0 + \phi_1 = 1$  e  $\psi_0 + \psi_1 = 1$ .

Usando o método dos multiplicadores de Lagrange, com  $q$  um desses multiplicadores, encontramos

$$\phi_i = \frac{m_i^q}{m_0^q + m_1^q} \text{ e } \psi_i = \frac{M_i^q}{M_0^q + M_1^q}. \quad (3.19)$$

Definamos  $\tau(q) := -\log_2(m_0^q + m_1^q) - \log_2(M_0^q + M_1^q)$ . Observe que

$$\frac{\partial \tau}{\partial q} = -\frac{m_0^q}{m_0^q + m_1^q} \log_2 m_0 - \frac{m_1^q}{m_0^q + m_1^q} \log_2 m_1 - \frac{M_0^q}{M_0^q + M_1^q} \log_2 M_0 - \frac{M_1^q}{M_0^q + M_1^q} \log_2 M_1 = \alpha \quad (3.20)$$

e que

$$\begin{aligned} \max \Delta &= \Delta_q(\alpha) = -\frac{m_0^q}{m_0^q + m_1^q} \log_2 \frac{m_0^q}{m_0^q + m_1^q} - \frac{m_1^q}{m_0^q + m_1^q} \log_2 \frac{m_1^q}{m_0^q + m_1^q} \\ &\quad - \frac{M_0^q}{M_0^q + M_1^q} \log_2 \frac{M_0^q}{M_0^q + M_1^q} - \frac{M_1^q}{M_0^q + M_1^q} \log_2 \frac{M_1^q}{M_0^q + M_1^q} \\ &= q\alpha - \tau \end{aligned} \quad (3.21)$$

Assim, conhecendo-se os valores de  $\tau(q)$ , pode-se traçar todas as retas de equação  $\Delta_q(\alpha) = q\alpha - \tau$ .

Essas retas definem uma curva delimitadora  $f(\alpha)$  dada por

$$f(\alpha) = \min_q (q\alpha - \tau). \quad (3.22)$$

A técnica de encontrar  $f(\alpha)$  a partir dessa relação é o que se chama na literatura de formalismo multifractal.



# Capítulo 4

## Percolação

### 4.1 Introdução

O termo "percolação" vem do latim *percolatio* que significa filtragem. Ele também é usado para designar um modelo de definição bastante simples, porém rico em fenomenologia e de difícil resolução. Considere uma rede quadrada em que se pode distribuir aleatoriamente sítios condutores com uma concentração  $p$  e sítios isolantes com concentração  $1 - p$ . Para  $p$  pequeno, dificilmente haverá condução de um lado a outro da rede. À medida em que aumentamos o número de sítios condutores, esses vão se aglomerando em ilhas cada vez maiores até que, para determinada concentração  $p_c$ , temos um aglomerado que atravessa a rede fazendo com que haja um caminho condutor de um lado a outro (figura 4.1).

A concentração  $p_c$  é chamada de *limiar de percolação* ou *concentração crítica*, pois separa fases distintas (condutora e isolante).

Usamos condução de eletricidade como exemplo, mas há uma série de fenômenos que podem ser descritos pelo modelo de percolação. Podemos usar o modelo para simular: a propagação de uma epidemia, onde cada sítio representa uma pessoa que tem uma probabilidade  $p$  de ser infectada; um reservatório de petróleo, com  $p$  como a permeabilidade de cada sítio; um incêndio florestal, aqui  $p$  é a probabilidade do sítio ser ocupado por uma árvore em chamas; etc.

Uma outra maneira de pensar em percolação é ilustrada pelo exemplo de uma rede aleatória de resistores. Nele, fios metálicos em uma rede são cortados aleatoriamente com probabilidade  $q = 1 - p$

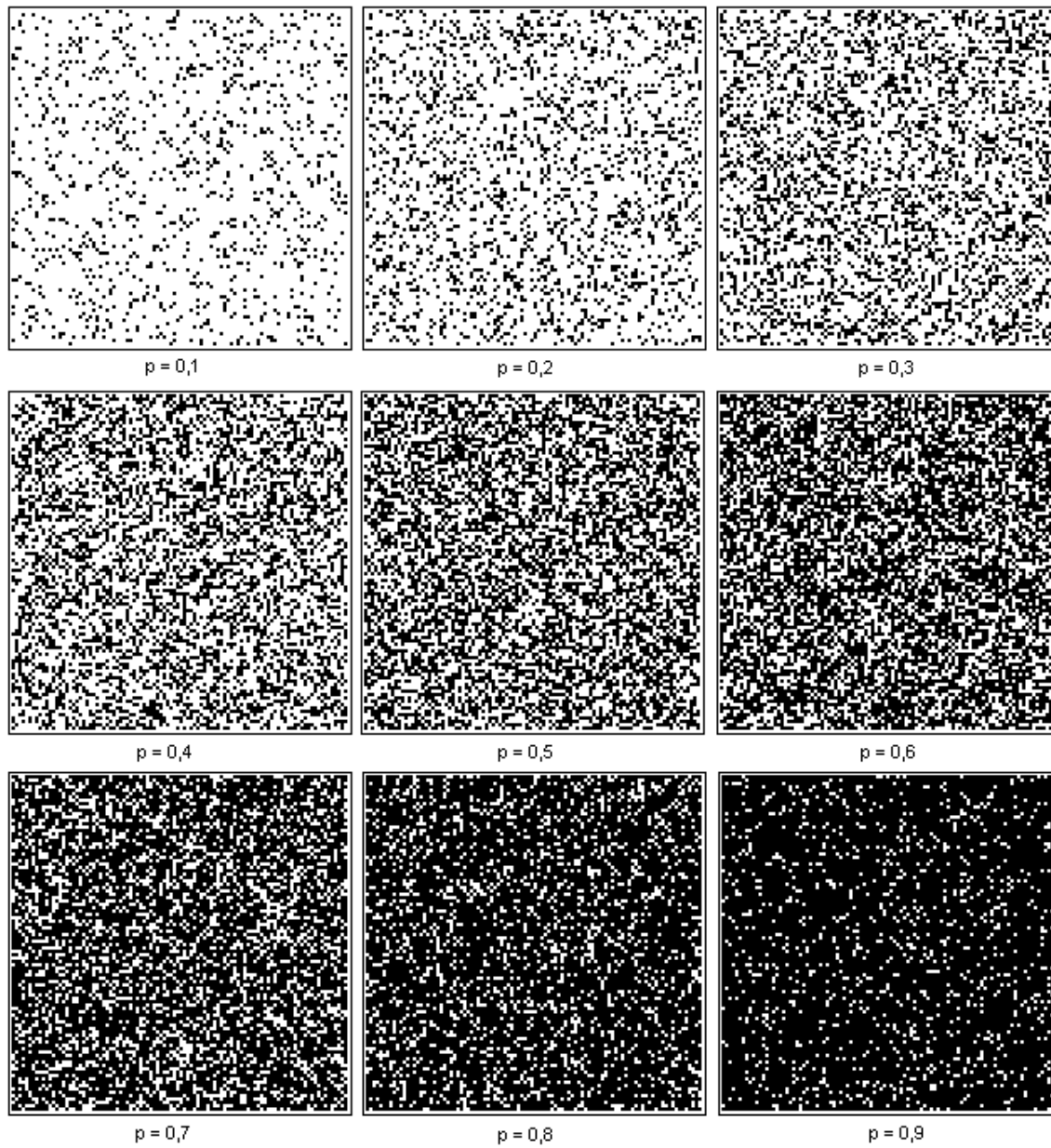


Figura 4.1: Percolação por sítios com  $p$  variando de 0, 1 a 0, 9

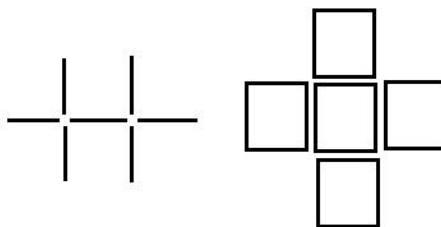


Figura 4.2: Vizinhos de uma ligação e de um sítio

e  $q_c$  separa a fase condutiva da isolante.

Perceba que nesse exemplo o que tem probabilidade  $p$  de estar ativado não é o sítio, mas a ligação entre eles. O modelo que apresenta esse tipo de comportamento é chamado de *percolação por ligações*, enquanto o que apresenta sítios que podem ou não estarem ativados é chamado de *percolação por sítios*.

As definições de percolação por sítios e por ligações podem ser generalizadas para qualquer rede em  $d$  dimensões. Em geral, em uma dada rede, uma ligação tem mais vizinhos do que um sítio. Por exemplo, na rede quadrada uma ligação está conectada a seis vizinhos, enquanto um sítio tem apenas quatro vizinhos. Isso significa que, com uma mesma concentração, formamos aglomerados maiores com ligações do que com sítios. Logo, o limiar de percolação  $p_c$  é menor na percolação por ligações do que por sítios.(figura 4.2).

## 4.2 Transição de Fase na Percolação

Uma transição de fase é uma transformação de um sistema termodinâmico de uma fase para outra. A característica básica dessa transformação é a mudança brusca em uma ou mais propriedades físicas devida a uma pequena variação em uma variável termodinâmica tal como a temperatura.

Os exemplos mais conhecidos de transições de fase são as mudanças entre as fases sólida, líquida e gasosa da água que podem acontecer graças a uma variação de temperatura ou de pressão.

Outro exemplo é a transição de fase magnética. Certos materiais são magnéticos a baixas tempera-



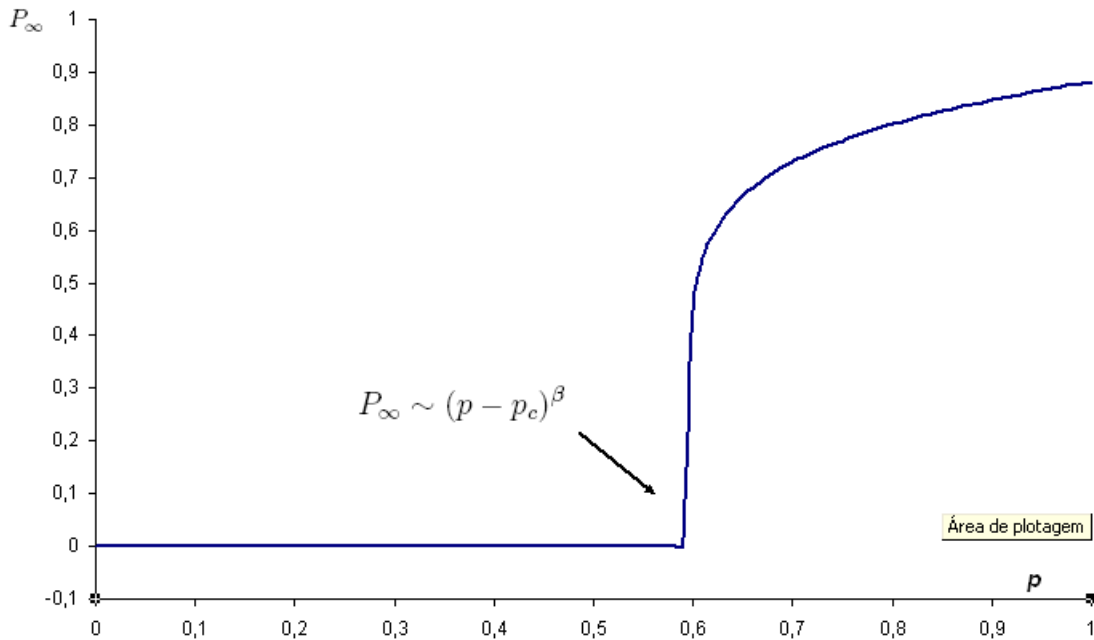


Figura 4.3: Probabilidade  $P_\infty$  de um sítio pertencer ao aglomerado percolante

turas. Quando a temperatura aumenta, a magnetização diminui, chegando a zero em uma temperatura chamada crítica,  $T_c$ . Sendo  $m(T)$  a magnetização de determinado material à temperatura  $T$ , observa-se que próximo a  $T_c$  a magnetização segue a lei de potência  $m(T) \sim (T_c - T)^\beta$ .

Na percolação, a concentração de sítios ocupados  $p$  desempenha papel semelhante ao da temperatura na transição de fase magnética. Por exemplo, considere  $P_\infty$  a probabilidade de um sítio (ou ligação) pertencer ao *aglomerado infinito*, isto é, àquele que atravessa a rede. Se  $p$  é pequeno ( $p < p_c$ ), então  $P_\infty = 0$ . Para ( $p > p_c$ ),  $P_\infty$  tem um comportamento semelhante ao da magnetização e cresce segundo uma lei de potência

$$P_\infty \sim (p - p_c)^\beta \quad (4.1)$$

até que, quando  $p = 1$ ,  $P_\infty = 1$ . Veja o comportamento de  $P_\infty$  na figura 4.3.

O expoente  $\beta$  então descreve o comportamento crítico de  $P_\infty$  associado à transição de percolação e é por isso chamado de *expoente crítico*. Apesar de modelos diferentes de percolação implicarem em diferentes valores para  $p_c$ , o valor de  $\beta$  permanece o mesmo para todos eles, dependendo somente da dimensão do espaço. Tal fenômeno é chamado de *universalidade* e um expoente crítico serve para classificar transições de fase em *classes de universalidade*.

Além de  $\beta$  há outros expoentes críticos que valem a pena serem mencionados. Seja  $\xi$  a distância média entre dois sítios do mesmo aglomerado finito. Quando  $p$  cresce, os aglomerados vão aumentando de tamanho, assim como o valor de  $\xi$ . Então, quando  $p$  se aproxima de  $p_c$ ,  $\xi$  diverge como

$$\xi \sim |p - p_c|^{-\nu}. \quad (4.2)$$

Da mesma maneira, a média do número de sítios de um aglomerado finito  $M$  também diverge em  $p_c$  como

$$M \sim |p - p_c|^{-\gamma}. \quad (4.3)$$

### 4.3 Dimensão Fractal na Percolação

O aglomerado infinito de percolação em  $p = p_c$  é um exemplo de fractal aleatório. Ele contém buracos de todos os tamanhos e, portanto, é auto-similar num sentido estatístico, de forma similar ao triângulo de Sierpinski aleatório. Pode-se verificar por meio do uso do algoritmo *box-counting* que o aglomerado infinito é auto-similar em todas as escalas (maiores que o espaçamento da rede e menores que o tamanho total) e pode ser considerado um fractal. Sua dimensão fractal descreve como a massa  $M$  (número de sítios) dentro de uma esfera de raio  $r$  muda de escala com  $r$ :

$$M(r) \sim r^{d_f}. \quad (4.4)$$

$M(r)$  é obtido pela média de muitas simulações de percolação, ou, equivalentemente, pela média sobre esferas tomadas em posições diferentes em um mesmo aglomerado infinito.

Examinemos o que acontece com os aglomerados quando  $p \neq p_c$ . Abaixo do limiar de percolação o tamanho típico dos aglomerados é finito. Então, aglomerados abaixo da criticalidade podem ser auto-similares somente até o comprimento de escala  $\xi$ . Após o limiar de percolação,  $\xi$  é a medida do tamanho dos aglomerados finitos no sistema. O aglomerado percolante continua infinito, mas seus maiores buracos são tipicamente do tamanho de  $\xi$ . Então o aglomerado percolante somente pode ser auto-similar até o comprimento de escala  $\xi$ . Uma vez que não há buracos maiores, o aglomerado se torna homogêneo quando tomamos uma escala maior que  $\xi$ . Em resumo, para escalas menores que  $\xi$ , o sistema pode ser considerado um fractal, para escalas maiores que  $\xi$ , o sistema tem a mesma dimensão do espaço. Essa estrutura do aglomerado infinito implica que sua massa se escala diferentemente

para distâncias menores e maiores que  $\xi$ :

$$M(r) \sim \begin{cases} r^{d_f} & r < \xi \\ r^d & r > \xi. \end{cases} \quad (4.5)$$

Pode-se relacionar a dimensão fractal dos aglomerados de percolação,  $d_f$ , aos expoentes críticos  $\beta$  e  $\nu$ . Observe que a probabilidade de um sítio, dentro de um círculo de raio  $r < \xi$ , pertencer ao aglomerado infinito é a razão entre o número de sítios do aglomerado,  $M_a(r)$ , e o número total de sítios,  $M_t(r)$ . Daí,

$$P_\infty \sim \frac{M_a(r)}{M_t(r)} \sim \frac{r^{d_f}}{r^d}. \quad (4.6)$$

Tomando  $r = k\xi$ , com  $k < 1$ , segue que

$$P_\infty \sim \frac{\xi^{d_f}}{\xi^d}. \quad (4.7)$$

Mas,  $\xi \sim |p - p_c|^{-\nu}$ , logo,

$$P_\infty \sim |p - p_c|^{-\nu(d_f - d)}. \quad (4.8)$$

Por outro lado,  $P_\infty \sim (p - p_c)^\beta$ , donde concluímos que

$$\beta = -\nu(d_f - d) \Rightarrow d_f = d - \frac{\beta}{\nu}. \quad (4.9)$$

Como  $d_f$  depende somente de  $\beta$  e de  $\nu$ , e esses são universais,  $d_f$  é também universal, ou seja, não depende do tipo da rede, nem do tipo de percolação.

## 4.4 Determinação Numérica de Expoentes Críticos

Vimos na Seção anterior que a massa do aglomerado infinito de percolação numa caixa de tamanho  $L$  é proporcional a  $L^d$  quando  $L > \xi$ . Se dividirmos o sistema em caixas de lado  $\xi$ , o volume  $L^d$  será dividido em  $(L/\xi)^d$  caixas. Como o aglomerado tem massa da ordem  $\xi^{d_f}$  dentro de cada uma dessas caixas, podemos dizer que a massa total do aglomerado é dada por

$$M(L, \xi) \sim \begin{cases} L^{d_f} & L < \xi \\ \xi^{d_f} (L/\xi)^d & L > \xi. \end{cases} \quad (4.10)$$

Como  $P_\infty \sim \frac{\xi^{d_f}}{\xi^d} \sim (p - p_c)^\beta$ , então

$$M(L, p) \sim \begin{cases} L^{d_f} & L < \xi \\ (p - p_c)^\beta L^d & L > \xi. \end{cases} \quad (4.11)$$

Assim, a densidade do aglomerado infinito de percolação  $P(L, p)$  se comporta como  $L^{d_f-d}$  para  $L < \xi$ . Logo, pela lei de hiperescala 4.9,  $P(L, p) \sim L^{-\beta/\nu}$  para  $L < \xi$  e  $P(L, p) \sim (p - p_c)^\beta$  para  $L > \xi$ . Equivalentemente,

$$P(L, p) = (p - p_c)^\beta \psi((p - p_c)L^{1/\nu}), \quad (4.12)$$

onde

$$\psi((p - p_c)L^{1/\nu}) \sim \begin{cases} ((p - p_c)L^{1/\nu})^{-\beta} & L < \xi \\ cte. & L > \xi. \end{cases} \quad (4.13)$$

Por meio do estudo de  $P$  como função do tamanho  $L$  do sistema, pretendemos determinar os expoentes críticos  $\beta$  e  $\nu$ . Nos dedicaremos à tarefa de determinar tais expoentes a partir de resultados obtidos em redes finitas.

Como a rede a ser trabalhada é finita, existe uma probabilidade  $\Pi(p)$  de encontrar um aglomerado percolante na concentração  $p$ . Na rede infinita, temos  $\Pi = 1$  para  $p \geq p_c$  e  $\Pi = 0$  para  $p < p_c$ , ou seja, espera-se que  $\Pi$  se comporte como uma função escada quando  $L \rightarrow \infty$ . Esse comportamento nos diz que o expoente crítico de  $\Pi$  é zero. Então, fazendo uma analogia com o que ocorre com a densidade  $P(L, p)$ , temos

$$\Pi = \phi((p - p_c)L^{1/\nu}) \quad (4.14)$$

para  $L$  grande e  $p$  próximo a  $p_c$ . Derivando essa expressão, obtemos

$$\frac{d\Pi}{dp} = L^{1/\nu} \phi'((p - p_c)L^{1/\nu}). \quad (4.15)$$

Definimos a concentração média  $p_m$  como sendo o valor médio de  $p$  em que surge um aglomerado percolante. Esse valor é dado por

$$p_m = \int_0^1 p \frac{d\Pi}{dp} dp. \quad (4.16)$$

Observe que

$$p_c = p_c(\Pi(1) - \Pi(0)) = p_c \int_0^1 \frac{d\Pi}{dp} dp = \int_0^1 p_c L^{1/\nu} \phi'((p - p_c)L^{1/\nu}) dp. \quad (4.17)$$

Isso juntamente com as equações 4.15 e 4.16 resulta em

$$p_m - p_c = \int_0^1 (p - p_c) L^{1/\nu} \phi'((p - p_c) L^{1/\nu}) dp. \quad (4.18)$$

Fazendo  $L^{1/\nu}(p - p_c) = z$ , segue que

$$p_m - p_c = k L^{-1/\nu}, \quad (4.19)$$

com  $k = \int z \phi'(z) dz$ . Ou seja,

$$p_m - p_c \sim L^{-1/\nu}. \quad (4.20)$$

Esse resultado em conjunção com a equação 4.12 resulta em

$$P(L, p_m) \sim L^{-\beta/\nu}, \quad (4.21)$$

o que nos fornece um método para se obter os expoentes críticos  $\beta$  e  $\nu$ . Para tanto, basta traçar o gráfico log-log de  $p_m - p_c$  versus  $L$  e encontrar  $\nu$ . Em seguida, usa-se o valor encontrado para obter  $\beta$  no gráfico log-log de  $P(L, p_m)$  versus  $L$ .

# Capítulo 5

## Percolação em um Multifractal Determinístico

### 5.1 Introdução

Aqui faremos um estudo do fenômeno de percolação em uma rede cujos sítios estão distribuídos de acordo com uma medida multifractal, ou seja, estudaremos a percolação em um suporte multifractal. Nos referiremos à rede em questão como o objeto multifractal  $Q_{mf}$ . Tal objeto multifractal pode ser usado como modelo e laboratório para a teoria da percolação. As referências básicas para este capítulo são os resultados encontrados no trabalho de Corso *et al.* [9] e no trabalho de Moreira [10]. Todas as figuras deste capítulo se encontram no artigo de Corso e os valores são encontrados na dissertação de Moreira. Em [11] um algoritmo que tem semelhança com o que será apresentado aqui foi usado.

O objeto multifractal aqui estudado é uma generalização natural da rede quadrada regular se considerarmos um ponto de vista de algoritmo gerador. O algoritmo de construção uma rede quadrada com  $2^n \times 2^n$  células a partir de um quadrado de tamanho fixo é o seguinte. Comece com um quadrado  $L \times L$  e divida-o em quatro partes idênticas (células). Em cada passo, cada célula é dividida em quatro partes usando-se segmentos horizontais e verticais. Esse procedimento produz uma rede como partição do quadrado. O objeto multifractal a ser apresentado também é uma partição do quadrado, mas a razão em que são divididas as células é diferente de  $1/2$ .

Na seção a seguir apresentamos o objeto multifractal. Na seção seguinte expomos o algoritmo usado para estimar o limiar de percolação e obter o espectro multifractal. Finalmente, na seção 4.4 são mostrados os resultados numéricos obtidos para a percolação nessa rede.

## 5.2 O Objeto Multifractal $Q_{mf}$

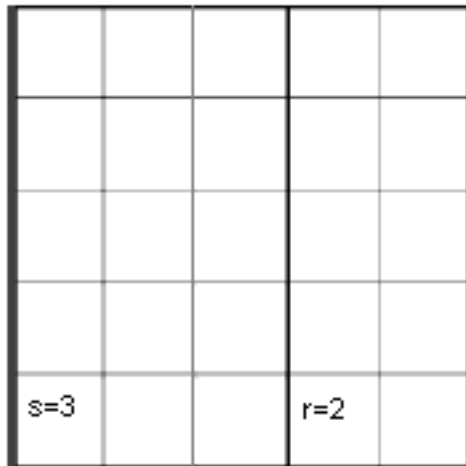
Antes de definir o objeto multifractal  $Q_{mf}$ , vamos enumerar algumas de suas propriedades.

1.  $Q_{mf}$  é resultado de uma medida multifractal, o que significa que  $Q_{mf}$  é formado por subconjuntos  $C_\alpha$  que têm dimensões fractais distintas.
2. É possível determinar seu espectro multifractal analiticamente.
3. O número de vizinhos dos sítios muda por todo o objeto.
4. O algoritmo de construção de  $Q_{mf}$  depende apenas de um parâmetro  $\rho$ .
5. Para o caso particular em que  $\rho = 1$ , o objeto  $Q_{mf}$  se degenera na rede quadrada. Neste caso, faremos uma comparação com a percolação numa rede quadrada.

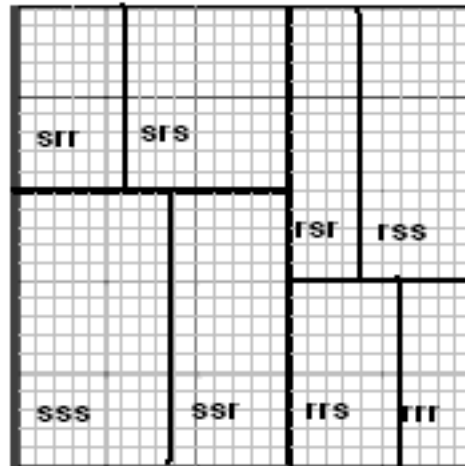
A medida que define  $Q_{mf}$  é construída seguindo o seguinte algoritmo. Começamos com o quadrado de lado 1 e escolhemos um parâmetro  $0 < \rho < 1$ , onde  $\rho = s/r$ , com  $s, r$  inteiros. No primeiro passo,  $n = 1$ , dividimos o quadrado por um segmento vertical em dois retângulos  $I_s$  e  $I_r$  de áreas  $m_s = s/(s+r) = 1/(1+\rho)$  e  $m_r = 1 - m_s = r/(s+r) = \rho/(1+\rho)$ . Esse passo é mostrado na Figura 5.1(a), onde usamos  $\rho = s/r = 2/3$ .

No segundo passo,  $n = 2$ , dividimos esses dois retângulos usando segmentos horizontais, que são traçados nas alturas  $s/(s+r)$  e  $r/(s+r)$ , conforme a Figura 5.1(b). Isso resulta em quatro novos retângulos  $I_{rr}, I_{rs}, I_{sr}$  e  $I_{ss}$  de áreas  $m_{rr} = [\rho/(1+\rho)]^2$ ,  $m_{rs} = \rho/(1+\rho)^2$ ,  $m_{sr} = \rho/(1+\rho)^2$  e  $m_{ss} = [1/(1+\rho)]^2$ .

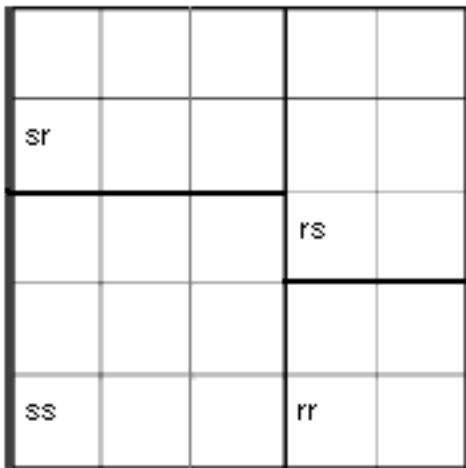
O terceiro passo é mostrado na Figura 5.1(c) e o quarto em 5.1(d) Como pode ser observado na figura, no quarto nível, temos  $2^4$  blocos retangulares e a distribuição de áreas entre eles segue a lei



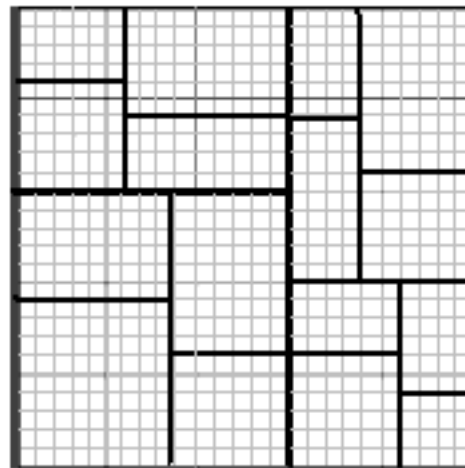
(a)



(c)



(b)



(d)

Figura 5.1: Os quatro passos iniciais para a construção do objeto multifractal  $Q_{mf}$



binomial

$$1 = \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^4 + 4\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^3\left(\frac{1}{1+\rho}\right) + 6\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^2\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^2 + 4\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^3 + \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^4. \quad (5.1)$$

A exemplo do que acontece no caso da medida binomial, no passo  $n$  a área total  $A = 1$  é distribuída em  $2^n$  retângulos que têm áreas determinadas por

$$\mu_n(I_{\sigma_1 \dots \sigma_n}) = m_{\sigma_1} \cdots m_{\sigma_n} = \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^k \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{n-k}, \quad (5.2)$$

onde  $\sigma_i$  é  $s$  ou  $r$  e  $k$  é o número de vezes em que  $r$  aparece no conjunto  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ . A partição da área  $A = 1$  do quadrado em diferentes blocos segue então a regra binomial

$$A = \sum_{k=0}^n C_k^n \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^k \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{n-k} = \left(\frac{1+\rho}{1+\rho}\right)^n = 1. \quad (5.3)$$

O limite da seqüência  $(\mu_n)$  é a medida multifractal  $\mu$ .

Em cada estágio  $n$ , existe algum retângulo  $I^{(n)}(X)$  que contém um dado  $X$ . Os valores  $\mu(I^{(n)}(X))$  e  $|I^{(n)}(X)|$  podem ser determinados a partir da área de  $I^{(n)}(X)$ . Dessa forma,

$$\alpha_n(X) = \frac{\log \mu(I^{(n)}(X))}{\log |I^{(n)}(X)|} \quad (5.4)$$

depende apenas da área de  $I^{(n)}(X)$ . Ou seja, retângulos com a mesma área que  $I^{(n)}(X)$  resultam nos mesmos valores para  $\alpha_n$  e, conseqüentemente, correspondem a uma aproximação do conjunto  $C_\alpha$  dos elementos  $X$  que têm o mesmo  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ . Chamamos os elementos de mesma área de  $k$ -conjunto. Quando  $n \rightarrow \infty$  cada  $k$ -conjunto determina um fractal cuja dimensão será calculada na próxima seção.

### 5.3 O Algoritmo de Percolação e o Espectro Multifractal

Estudaremos agora o algoritmo usado em [9] para estudar as propriedades de percolação de  $Q_{mf}$  e a derivação analítica de seu espectro fractal de dimensões.

O conceito do algoritmo de percolação para  $Q_{mf}$  consiste em mapeá-lo em uma rede quadrada. Esta deve ser grande o suficiente para que cada linha de  $Q_{mf}$  coincida com um segmento da rede.

Portanto, consideramos a rede quadrada com uma divisão mais fina que  $Q_{mf}$ . Desta forma todos os blocos do multifractal são compostos por um número finito de células da rede quadrada.

Suponha que a construção de  $Q_{mf}$  está no passo  $n$ . O algoritmo de percolação consiste em escolher aleatoriamente um dos  $2^n$  blocos de  $Q_{mf}$ . Quando um bloco é escolhido todas as células da rede quadrada subjacente correspondentes a esse bloco são consideradas ocupadas. Cada vez que um bloco de  $Q_{mf}$  é escolhido, o algoritmo verifica se as células ocupadas estão conectadas de maneira que obtenhamos um aglomerado infinito. O algoritmo que verifica a percolação é similar ao usado em [12].

Para estimar o espectro  $f(\alpha_k)$  de um objeto  $X$  usamos o método *box-counting*. Considerando  $X$  imerso no plano,  $\mathbb{R}^2$ , cobre-se o plano com caixas de lado  $\epsilon$  que têm apenas faces em comum. Seja  $N(X)$  o número dessas caixas que intersectam  $X$ . Se

$$D_X = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(X)}{\log(1/\epsilon)} \quad (5.5)$$

é finito, então  $D_X$  é a dimensão de  $X$ .

Em nosso caso o objeto  $X$  é um  $k$ -conjunto. Lembre que o  $k$ -conjunto corresponde ao conjunto dos retângulos de mesma área. Para um  $k$ -conjunto temos que  $N_k$  é dado por

$$N_k = C_k^m s^k r^{n-k}, \quad (5.6)$$

onde  $C_k^n$  é o coeficiente binomial que expressa o número de elementos do tipo  $k$  e  $s^k r^{(n-k)}$  é a área de cada elemento nesse conjunto. Se o quadrado é particionada  $n$  vezes ( $n/2$  cortes horizontais e  $n/2$  cortes verticais), seu tamanho é  $L = (s+r)^{n/2}$ . Combinando essas informações, temos as dimensões fractais de cada  $k$ -conjunto

$$f(\alpha_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log C_k^n s^k r^{(n-k)}}{\log(s+r)^{n/2}}. \quad (5.7)$$

No caso em que  $r = s = 1$  todos os subconjuntos de  $Q_{mf}$  são compostos de células quadradas de mesma área. Assim, o objeto é formado por um único subconjunto com dimensão

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1+1)^n}{\log(1+1)^{n/2}} = 2. \quad (5.8)$$

Na Figura 5.2 temos uma representação de  $Q_{mf}$  para  $\rho = 1/3$ , com  $n = 10$ . Já a Figura 5.3 mostra o espectro de dimensões de  $Q_{mf}$  para  $n = 400$  e  $\rho = 2/3$ .

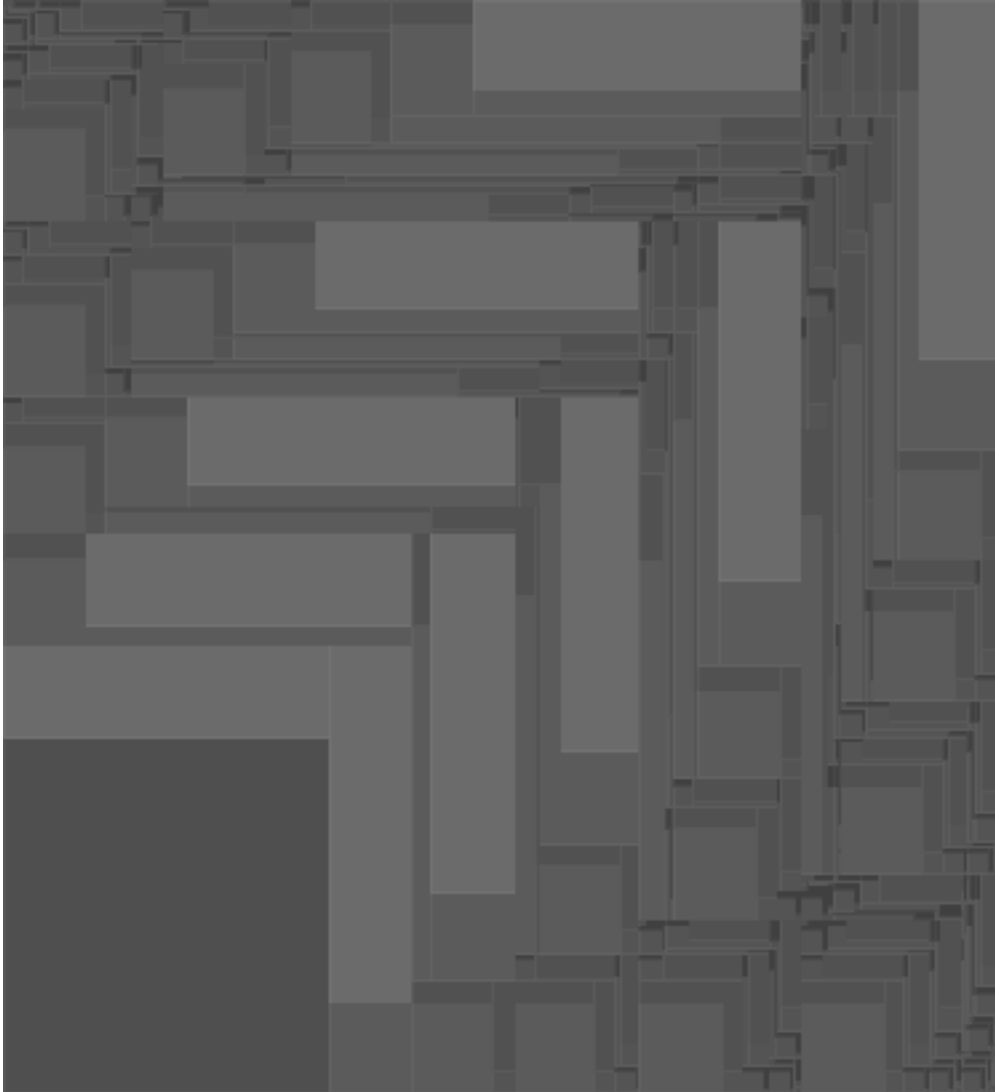


Figura 5.2: Objeto multifractal  $Q_{mf}$  com  $\rho = 1/3$  e  $n = 10$ .

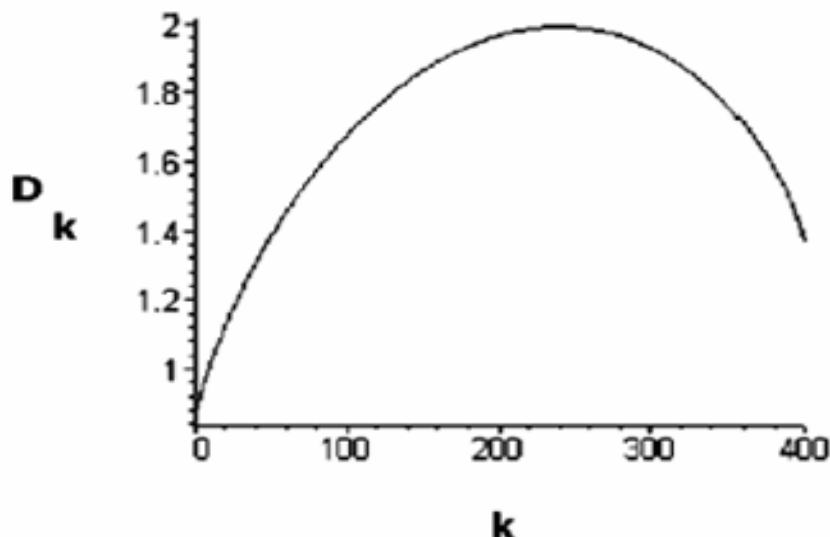


Figura 5.3: Espectro de dimensões para  $n = 400$  e  $\rho = 2/3$ .

## 5.4 Simulações Numéricas

Esta seção mostra os resultados numéricos obtidos do algoritmo apresentado anteriormente. A Figura 5.4 mostra o histograma de número de realizações de simulações em que a percolação aconteceu com determinada probabilidade,  $R$ , versus probabilidade  $p$  em que ocorre a percolação. Foram usados  $n = 10$  e mais de 40000 amostras. Considerou-se a percolação da esquerda para a direita ou de cima para baixo.

É interessante notar o efeito de tamanho finito apresentado na Figura 5.4. O histograma do caso  $(6, 1)$  aparece com dois picos. Interpretamos esse fato como resultado da existência de um sítio de tamanho considerável em relação à rede. Da maneira como é construído,  $Q_{mf}$  tem sempre um sítio quadrado no canto inferior esquerdo. Para  $n = 10$ , no caso  $(6, 1)$ , esse sítio ainda é grande comparado com a rede e, quando escolhido, facilita a percolação. Assim, o primeiro pico representa a probabilidade em que a percolação acontece quando o sítio maior é escolhido. Quando não é escolhido, a percolação se torna mais difícil e a probabilidade com que acontece fica representada pelo segundo pico. Acreditamos que em uma rede com maior valor de  $n$  os dois picos colapsem em um só.

A Figura 5.4 mostra ainda resultados de simulações para os seguintes valores de  $(s, r)$ :  $(1, 1)$ , que

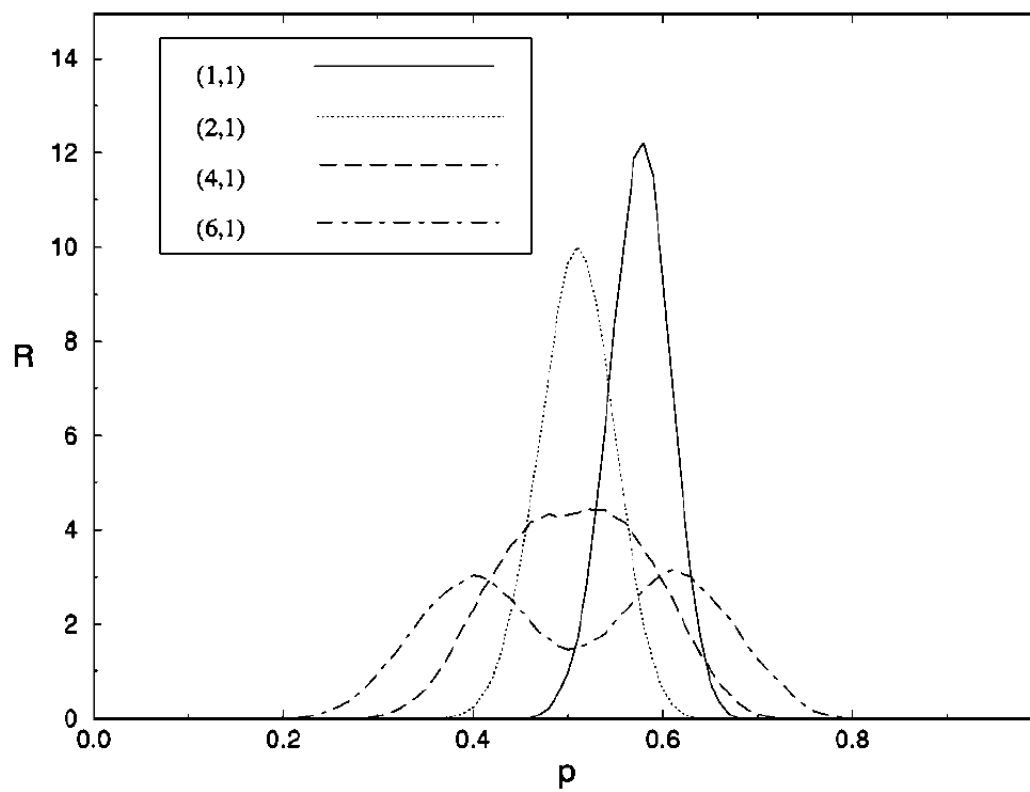


Figura 5.4: Número de vezes  $R$  em que o sistema percolou com a probabilidade  $p$  versus a probabilidade em que ocorreu a percolação  $p$ .

$(s, r)$	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(3, 2)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
$p_c$	0, 5932	0, 5246	0, 5252	0, 5253	0, 5247	0, 5256	0, 530
$d_f$	1, 895	1, 928	1, 948	1, 953	1, 954	1, 944	1, 842
$\beta$	0, 138	0, 174	0, 159	0, 158	0, 166	0, 144	0, 109
$\nu$	1, 34	2, 21	2, 9	3, 04	3, 34	3, 6	Não calculado

Tabela 5.1: Valores de  $p_c$ ,  $d_f$ ,  $\nu$  e  $\beta$  para vários multifractais caracterizados pelos pares  $(s, r)$ .

se degenera na rede quadrada; (2, 1); (4, 1); (6, 1). O pico do histograma para (1, 1) corresponde ao limiar de percolação para redes quadradas  $p_c = 0, 5927$ , como era esperado. Outros valores de  $p_c$  são mostrados na Tabela 5.1.

Observe que  $Q_{mf}$  apresenta aproximadamente o mesmo  $p_c$  para valores diferentes de  $\rho$ . Isso se deve ao fato de o número  $c$  de vizinhos de um sítio em uma rede está diretamente relacionado ao valor de  $p_c$ . O multifractal  $Q_{mf}$  tem a propriedade de que  $c$  varia ao longo do objeto e com  $\rho$ . Essa propriedade é conseguida por meio do arranjo adequado dos retângulos em  $Q_{mf}$ . Entretanto, a média  $c_m$  dos valores de  $c$  não depende significativamente de  $\rho$  ou de  $n$ . O valor encontrado  $c_m = 5, 436$  para o multifractal está próximo do valor de  $c$  para a rede triangular,  $c = 6$ , que tem limiar de percolação  $p_c = 0, 5$ . Para a situação  $(s, r) = (1, 1)$ , temos um valor diferente  $c = 4$ , o que configura uma situação particular comparada a outros  $Q_{mf}$ 's e apresenta um diferente  $p_c$  conforme mostrado na Figura 5.4.

Na Tabela 5.1 são mostrados diferentes  $p_c$  e dimensão fractal do aglomerado de percolação,  $d_f$ , para diversos  $\rho$ . Foram feitas mais de 100000 simulações com  $n = 16$ . A estimativa de  $d_f$  é feita por meio da relação  $M \sim L^{d_f}$  para a massa  $M$  (ou número de sítios) do aglomerado de percolação.

A estratégia usada para obter o expoente crítico  $\beta$  foi considerar a relação

$$P_\infty \sim [p_c(L) - p_c]^\beta, \quad (5.9)$$

onde  $p_c$  é o valor exato do limiar de percolação,  $p_c(L)$  é a aproximação de  $p_c$  obtida com a rede finita e  $P_\infty$  é a probabilidade de um sítio pertencer ao aglomerado percolante. Para  $Q_{mf}$  a probabilidade  $P_\infty$  não é uma função bem comportada de  $p$  para  $L$  pequeno. Na verdade, pode ser mostrado que

$P_\infty$  (dependendo de  $\rho$ ) apresenta um ponto de inflexão em  $p_c$ . Entretanto, para  $L \rightarrow \infty$  a escala de  $[p_c(L) - p_c]$  recupera seu comportamento usual. Nesse regime encontramos o mesmo  $\beta$  característico do caso bidimensional,  $\beta = 5/36 = 0,13888$ .

# Capítulo 6

## Percolação em um Multifractal Aleatório

### 6.1 Introdução

No capítulo anterior estudamos a percolação em um suporte multifractal. Apesar de apresentar propriedades interessantes, a rede tem uma construção determinística. Inspirado nos fenômenos naturais, que sempre apresentam um ingrediente aleatório, desenvolvemos uma versão aleatória para esse modelo. Chamamos a nova construção de Rede Multifractal Aleatória (*RMA*). Neste capítulo, exploraremos a percolação como fenômeno crítico sobre a *RMA*.

A *RMA* também é uma generalização da rede quadrada, sendo agora aleatória. Usamos o seguinte algoritmo: tome um quadrado de lado  $L$  e corte-o com segmentos horizontais e verticais. Repita o processo  $n$  vezes. No  $n$ -ésimo passo, temos uma rede com  $2^n \times 2^n$  células. A diferença deste algoritmo para o que resulta em  $Q_{mf}$  é que usamos números aleatórios, como explicaremos na próxima seção.

Nosso trabalho é inspirado pela modelagem de objetos naturais geofísicos que apresentam propriedades multifractais (Ver [13], [14] e [15]). O modelo pode ser aplicado ao transporte de fluidos em meios porosos multifractais. Reservatórios de petróleo são possíveis candidatos à modelagem por meio da *RMA*. Apesar de suas aplicações potenciais, este problema é relevante por si só no contexto científico. O estudo de fenômenos de percolação em redes multifractais é relevante em Física Estatística especialmente quando o tamanho dos blocos e seus números de vizinhos variam.

O capítulo está organizado da seguinte maneira: na Seção 2 revemos o algoritmo de construção da



rede multifractal  $RMA$  e o usamos para estudar as propriedades de percolação nesse objeto; na Seção 3, mostramos resultados numéricos com as estimativas do limiar de percolação, dimensão fractal e expoentes  $\nu$  e  $\beta$ .

## 6.2 A Rede Multifractal Aleatória $RMA$

Nesta seção revemos a rede multifractal  $RMA$  em uma dupla perspectiva. Primeiro, apresentamos a  $RMA$  usando seu algoritmo de construção. Depois, mostramos como as propriedades de percolação são estudadas nessa topologia não trivial.

### 6.2.1 O algoritmo de construção da $RMA$

Começamos de maneira semelhante ao caso determinístico. Tomamos um quadrado  $L \times L$  que é dividido por dois, usando um segmento vertical. O primeiro passo,  $n = 1$ , está mostrado na 6.1(a). No segundo passo, cortamos os dois blocos formados com segmentos horizontais 6.1(b). para  $n = 3$  cada bloco é seccionado por segmentos verticais como pode ser visto em 6.1(c). Quando  $n = 4$ , segmentos horizontais são novamente usados para fazer uma nova partição 6.1(d).

Enquanto que com  $Q_{mf}$  usamos um parâmetro  $\rho$  constante por todos os  $n$  passos da construção do multifractal, aqui usamos diferentes valores para a razão  $\rho$  durante o processo. Em cada passo, escolhemos aleatoriamente entre dois valores racionais  $\rho_1 = s_1/r_1$  e  $\rho_2 = s_2/r_2$ , com  $r_1 + s_1 = r_2 + s_2$ .

Temos no algoritmo do multifractal aleatório as seguintes escolhas. Em  $n = 1$  dividimos o quadrado em dois blocos que podem ter áreas

$$\frac{\rho_1}{1 + \rho_1} \text{ e } 1 - \frac{\rho_1}{1 + \rho_1} = \frac{1}{1 + \rho_1} \quad (6.1)$$

ou

$$\frac{\rho_2}{1 + \rho_2} \text{ e } 1 - \frac{\rho_2}{1 + \rho_2} = \frac{1}{1 + \rho_2}. \quad (6.2)$$

No passo seguinte,  $n = 2$ , há duas possibilidades para cada configuração anterior. As possibilidades de partição são

$$\frac{\rho_1^2}{(1 + \rho_1)^2}, \frac{\rho_1}{(1 + \rho_1)^2}, \frac{1}{(1 + \rho_1)^2}, \frac{\rho_1}{(1 + \rho_1)^2} \quad (6.3)$$

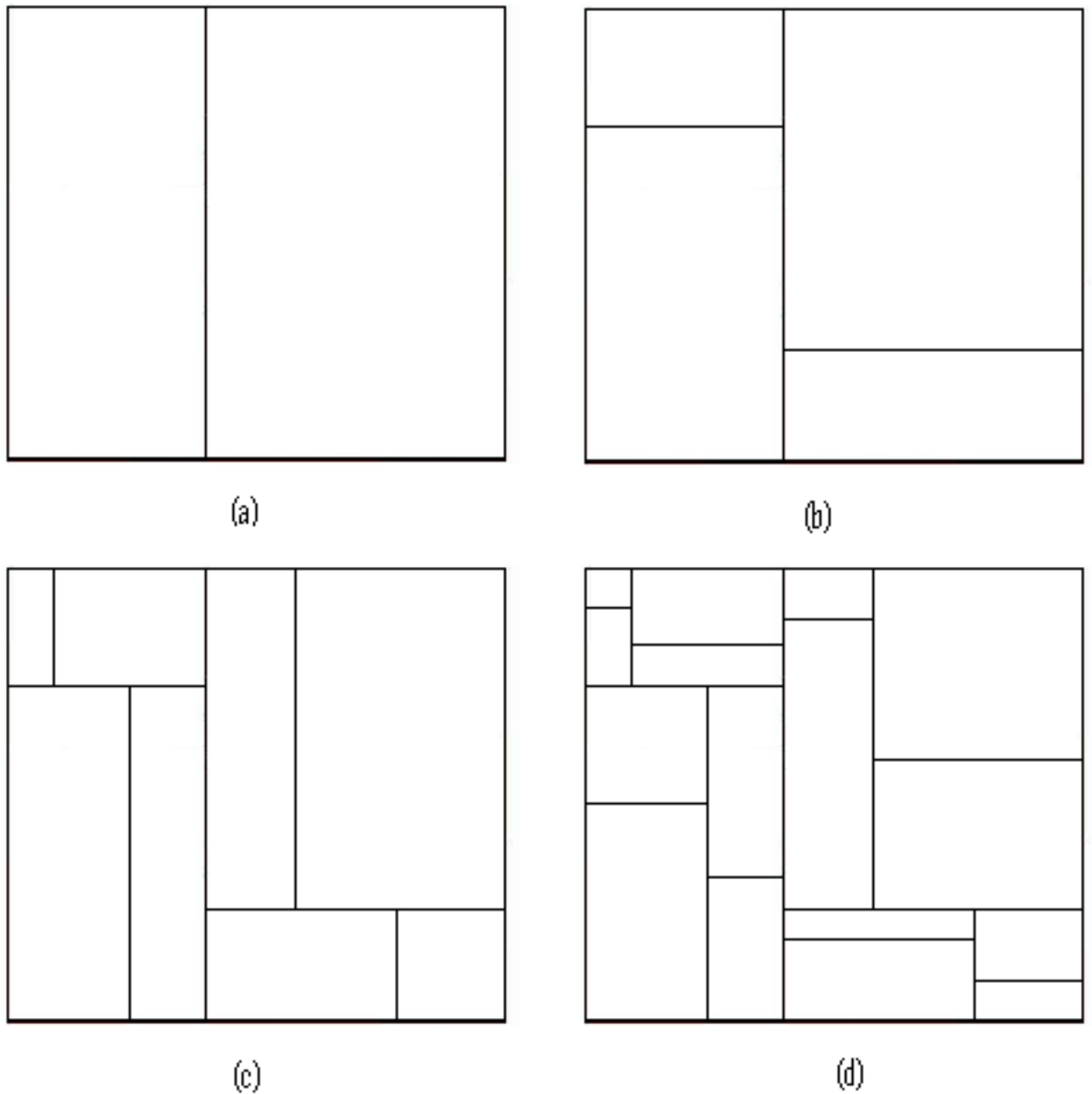


Figura 6.1: Os quatro passos iniciais para a construção do objeto multifractal aleatório. (a) Um segmento vertical divide o quadrado em duas partes de acordo com a razão  $\rho$  escolhida aleatoriamente. (b) Dois segmentos horizontais cortam os retângulos em uma nova razão aleatória  $\rho$ . (c) e (d) Novos valores de  $\rho$  são escolhidos.

ou

$$\frac{\rho_1 \rho_2}{(1 + \rho_1)(1 + \rho_2)}, \frac{\rho_2}{(1 + \rho_1)(1 + \rho_2)}, \frac{\rho_1}{(1 + \rho_1)(1 + \rho_2)}, \frac{1}{(1 + \rho_1)(1 + \rho_2)} \quad (6.4)$$

ou

$$\frac{\rho_2^2}{(1 + \rho_2)^2}, \frac{\rho_2}{(1 + \rho_2)^2}, \frac{1}{(1 + \rho_2)^2}, \frac{\rho_2}{(1 + \rho_2)^2}. \quad (6.5)$$

Note que são três configurações, não quatro. De fato, fazer a seção  $\rho_1$  e depois a  $\rho_2$  dá o mesmo resultado que fazer  $\rho_2$  e depois  $\rho_1$ .

No passo  $n$ ,  $\rho_1$  é escolhido  $l$  vezes e  $\rho_2$   $m$  vezes, com  $l + m = n$ . Em cada passo, as áreas dos blocos são obtidas pela multiplicação da área do bloco no passo anterior por  $\frac{\rho_1}{1 + \rho_1}$ ,  $\frac{1}{1 + \rho_1}$ ,  $\frac{\rho_2}{1 + \rho_2}$  ou  $\frac{1}{1 + \rho_2}$ . Portanto, a partição da área do quadrado é feita de acordo com a seguinte equação:

$$1 = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m C_i^l \left( \frac{\rho_1}{1 + \rho_1} \right)^i \left( \frac{1}{1 + \rho_1} \right)^{l-i} C_j^m \left( \frac{\rho_2}{1 + \rho_2} \right)^j \left( \frac{1}{1 + \rho_2} \right)^{m-j} = \left( \frac{1 + \rho_1}{1 + \rho_1} \right)^l \left( \frac{1 + \rho_2}{1 + \rho_2} \right)^m. \quad (6.6)$$

Essa fórmula é análoga à equação 5.3 do caso determinístico. A ocorrência de blocos do mesmo  $k$ -conjunto (objetos de mesma área) é menor para este caso que para o caso determinístico. Por outro lado, a quantidade de  $k$ -conjuntos é maior, dada por  $(l + 1)(m + 1)$ .

A determinação do espectro de dimensões fractais aqui também é similar ao caso determinístico. A equação para  $f(\alpha_k)$  neste caso é dada por

$$f(\alpha_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log C_i^l s_1^i r_1^{l-i} C_j^m s_2^j r_2^{m-j}}{\log (s_1 + r_1)^n}, \quad (6.7)$$

onde os valores  $k$  correspondem às posições dos termos dentro da equação de partição das áreas. A generalização dessa fórmula para vários  $\rho_i$  (para o caso em que cada  $\rho_i$  satisfaz  $r_i + s_i = r_1 + s_1$ ) é feita pela introdução de novos termos  $C_j^{m_i} s_2^j r_2^{m_i-j}$  no numerador.

A Figura 6.2 mostra a curva de dimensões fractais  $f(\alpha_k)$  na ordem crescente. No eixo  $y$  temos os valores de  $f(\alpha_k)$  e no eixo  $x$ ,  $(k/n)^*$ , o respectivo  $k$ -conjunto. Note que os  $k$ -conjuntos no eixo  $x$  são mostrados em ordem crescente de  $f(\alpha_k)$ . As áreas dos  $k$ -conjuntos está normalizada entre 0 e 1. Na figura há três curvas  $\rho_1 = 1/4$  (linha pontilhada),  $\rho_2 = 2/3$  (linha tracejada) e a curva aleatória (linha cheia). Nessa simulação foi usado  $n = 100$ . A curva aleatória é definida como o espectro que resulta da escolha aleatória entre  $\rho_1$  e  $\rho_2$ . A estimativa da curva aleatória é feita supondo que quando  $n \rightarrow \infty$ , temos  $m = j = n/2$ .

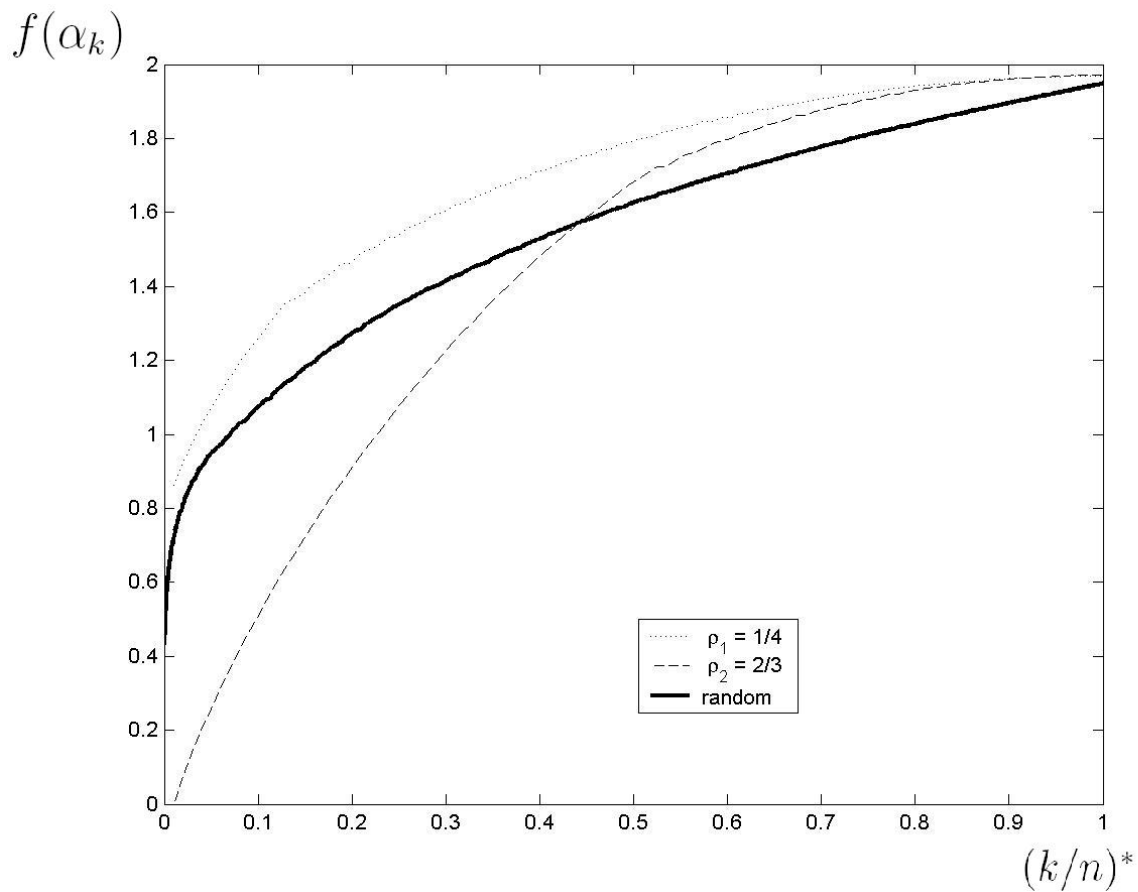


Figura 6.2: Espectro  $f(\alpha_k)$ . A linha mais grossa mostra a curva aleatória, enquanto que as linhas superior e inferior mostram os espectros dos multifractais determinísticos de razões  $\rho_1 = 1/4$  e  $\rho_2 = 2/3$  respectivamente. No eixo  $x$  temos  $(k/n)^*$ .

A Figura 6.3 mostra a *RMA* para  $n = 10$  e a razão é escolhida entre os valores  $\rho_1 = 1/4$  e  $\rho_2 = 2/3$  e a Figura 6.4 mostra a mesma rede quando  $n = 20$ .

### 6.2.2 A percolação na *RMA*

O principal objetivo deste capítulo é estudar as propriedades de percolação da *RMA*. A estratégia é a mesma usada para o caso determinístico. A *RMA* é construída sobre uma rede quadrada normal de forma que cada bloco seu seja formado por células da rede quadrada.

Para verificar a percolação na *RMA*, procedemos como na percolação padrão. Começamos escolhendo aleatoriamente um bloco da *RMA*. Quando um bloco é escolhido, todas as células da rede quadrada correspondentes a esse bloco são consideradas ocupadas. Cada vez que um bloco da *RMA* é escolhido, o algoritmo verifica se as células ocupadas estão conectadas formando um aglomerado percolante. O algoritmo que verifica a percolação é similar ao usado em [12].

Seguindo [7], chamamos de  $p$  a probabilidade de ocupação de um sítio da rede.  $R_L$  é a probabilidade de existir um aglomerado que atravesse a rede de um lado a outro. Há várias maneiras de se definir  $R_L$ , usamos duas delas:  $R_L^e$  é a probabilidade de existir um aglomerado cruzando a rede ou na direção horizontal ou na vertical, e  $R_L^b$  é a probabilidade de existir um aglomerado que cruze a rede nas duas direções. No limite da rede infinita,  $R_L^e$  e  $R_L^b$  convergem para um mesmo valor no caso da rede quadrada.

## 6.3 Resultados Numéricos

Nesta seção analisamos numericamente as propriedades de percolação da *RMA*. Iniciaremos estimando seu limiar de percolação com base na média de  $R_L^e$  e  $R_L^b$ . Depois, determinaremos os parâmetros universais do sistema: dimensão fractal do aglomerado percolante, o expoente  $\beta$  relacionado à massa do aglomerado infinito, e o expoente  $\nu$  que expressa a escala do comprimento de correlação. Estimamos essas quantidades para uma *RMA* gerada aleatoriamente usando as razões  $\rho_1 = 1/4$  e  $\rho_2 = 2/3$ . Na última seção compararemos esses resultados com aqueles obtidos para o multifractal determinístico.

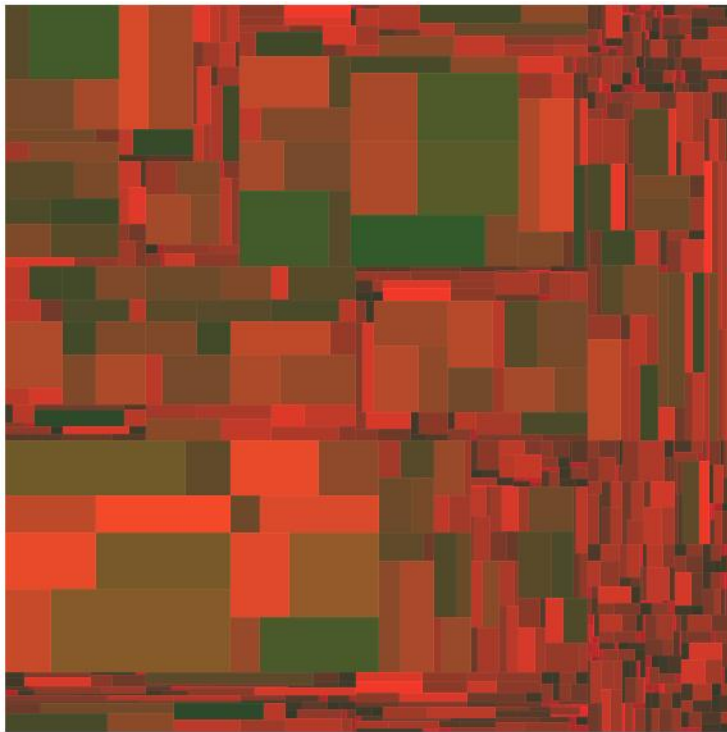


Figura 6.3: A rede multifractal aleatória com  $n = 10$ ,  $\rho_1 = 1/4$  e  $\rho_2 = 2/3$ . Retângulos de mesma cor estão no mesmo  $k$ -conjunto.

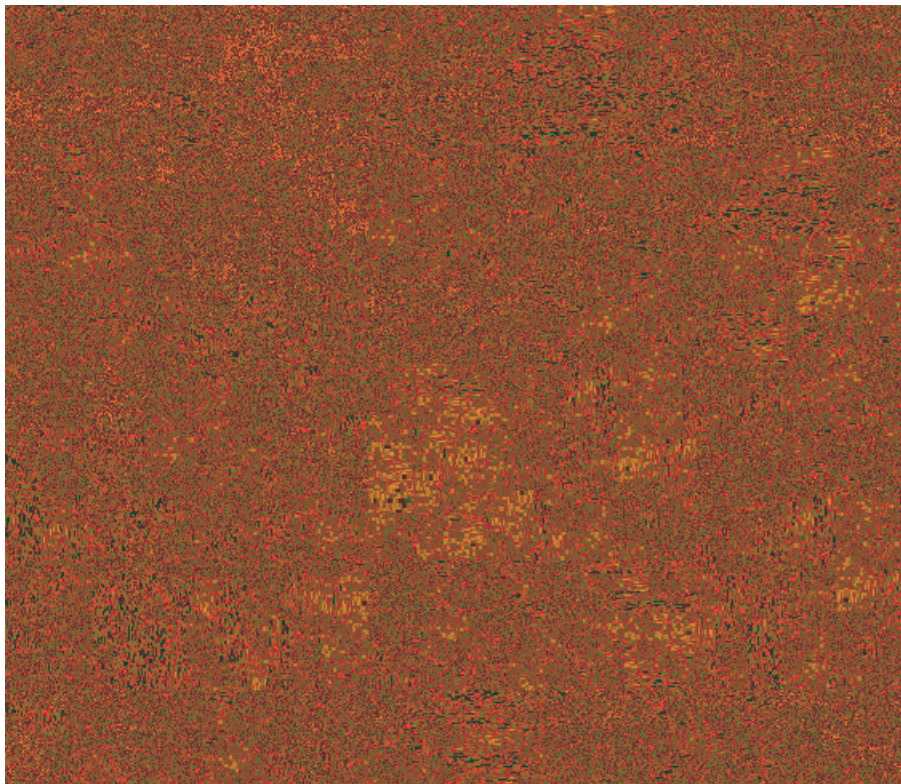


Figura 6.4: A rede multifractal aleatória com  $n = 20$ ,  $\rho_1 = 1/4$  e  $\rho_2 = 2/3$ . Retângulos de mesma cor estão no mesmo  $k$ -conjunto.

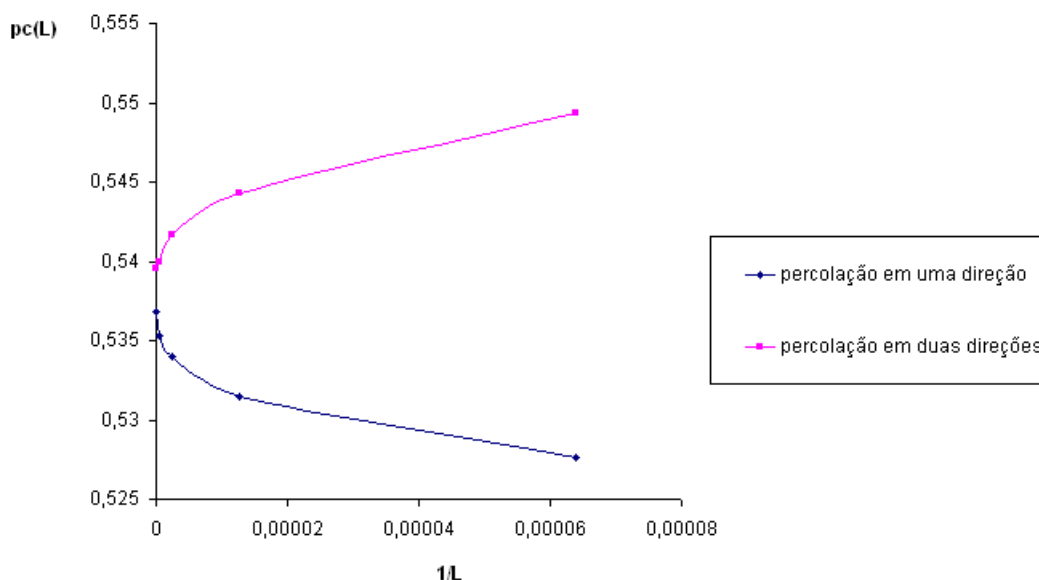


Figura 6.5: Gráfico de  $p_c(L)$  versus  $1/L$ . Os pontos da curva superior são referentes aos valores de  $p$  para os quais o sistema percolou em duas direções. Os da curva inferior resultam dos valores de  $p$  para os quais o sistema percolou em uma direção. A diferença entre os valores das duas curvas fornece uma medida da incerteza na determinação do limiar de percolação.

### 6.3.1 O limiar de percolação

O melhor valor para o limiar de percolação na *RMA* é estimado a partir dos resultados em redes finitas. De fato, no limite  $L \rightarrow \infty$ , fazemos uma média de  $p_c^e$  e  $p_c^b$  (concentração em que houve percolação em uma direção e duas direções, respectivamente). A Figura 6.5 mostra um gráfico de  $p_c^e(L)$  (curva inferior) e  $p_c^b(L)$  (curva superior) versus  $1/L$ . As duas sequências de medidas convergem para o valor  $p_c = 0,5387 \pm 0,0002$ .

### 6.3.2 A dimensão fractal do aglomerado percolante

A estimativa da dimensão fractal do aglomerado percolante,  $d_f$  é feita usando a definição

$$d_f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(M)}{\ln(\frac{1}{\epsilon})} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\ln(M)}{\ln(L)}, \quad (6.8)$$



onde  $M$  é a massa do aglomerado de percolante,  $\epsilon$  é o tamanho da célula e  $L$  o tamanho da rede. Em nossas simulações foram usados valores  $10 \leq n \leq 18$ .

Obtivemos o valor  $d_f \cong 1,88 \pm 0,03$ . O valor exato para a percolação em duas dimensões é  $d_f = 91/48 = 1,89583$ . A diferença entre esses valores é de 1%. Observe-se a possibilidade de as dimensões serem as mesmas, pois o valor encontrado para a rede regular se encontra dentro da faixa de erro do valor obtido para o multifractal aleatório.

### 6.3.3 O expoente crítico $\nu$

O expoente crítico relacionado a  $\xi$  é  $\nu$ . Usaremos o método visto na Seção 4.4 para determinar esse expoente. Iniciamos com uma aproximação, para vários valores de  $L$ , da função  $\frac{d\Pi}{dp}$  dada pelo histograma da quantidade de vezes em que o sistema percolou em uma concentração  $p$ . Os gráficos de  $\frac{d\Pi}{dp}$  e de  $\Pi$  para  $L = 15625$  podem ser vistos nas figuras 6.6 e 6.7.

Em seguida, encontramos os valores  $p_m(L)$  pela integral vista em 4.16 e que repetimos a seguir.

$$p_m = \int_0^1 p \frac{d\Pi}{dp} dp. \quad (6.9)$$

De posse desses valores, pudemos traçar o gráfico de  $\ln(p_m(L) - p_c)$  versus  $\ln L$ . A inclinação dessa curva nos dá  $\nu$ . A Figura 6.8 ilustra esse processo para uma realização típica da *RMA*. O valor obtido é  $\nu = 3,5 \pm 0,1$ . Na Seção 6.4, discutiremos esse valor em conexão com o modelo determinístico. De qualquer forma, ele é suficiente para concluir que a *RMA* não está na mesma classe de universalidade que a percolação padrão em duas dimensões.

### 6.3.4 O expoente crítico $\beta$

Em cada realização do algoritmo de percolação na *RMA*, calculamos a densidade  $P(L, p)$ . Um gráfico da média dessas densidades para  $L = 9765625$  pode ser visto na Figura 6.9. Com esses valores, fizemos o gráfico de  $\ln(P(L, p))$  versus  $\ln(L)$ , obtendo assim  $-\frac{\beta}{\nu}$  como inclinação dessa curva (Figura 6.10). A estimativa numérica de  $\beta$  deu o resultado  $\beta = 0,34 \pm 0,01$ , que está de acordo com o resultado esperado pela lei de hiperescala.

## 6.4 Conclusões

Resumindo, estudamos os expoentes críticos e a dimensão fractal do aglomerado infinito construído numa rede multifractal aleatória *RMA*. Trabalhos anteriores discutiram a classe de universalidade da percolação em um multifractal determinístico. Neste trabalho, estendemos essas discussões para o caso aleatório.

Iniciamos analisando o limiar de percolação,  $p_c$ , para a *RMA*. Vimos que na *RMA*  $p_c$  é maior que no caso determinístico. Interpretamos esse resultado como uma consequência da aleatoriedade da rede que a torna mais próxima da rede quadrada, diminuindo a anisotropia. Também estudamos quantidades universais como o expoente  $\beta$  relacionado à escala da massa do aglomerado infinito e sua dimensão fractal  $d_f$ . A quantidade  $d_f$  tem o mesmo valor que o encontrado para percolação padrão em duas dimensões. Por outro lado, os expoentes  $\beta$  e  $\nu$  apresentaram valores maiores que seus correspondentes na percolação padrão, que são  $\nu = \frac{4}{3}$  e  $\beta = 5/36$ .

Esse modelo fornece uma aplicação entre uma rede multifractal, que tem células retangulares que variam aleatoriamente em tamanho e forma, e uma rede regular quadrada. Definimos o problema de percolação na *RMA* e é importante entender qual o problema equivalente na rede quadrada. Na rede multifractal consideramos um modelo de percolação aleatória, o que significa uma situação na qual cada bloco ou célula é ocupado aleatoriamente e independentemente da ocupação de seus vizinhos. A representação desse problema na rede quadrada subjacente dá um panorama diferente. Aqui, todas as células são quadrados idênticos, mas a probabilidade de ocupação de cada célula é dependente dos vizinhos. De fato, quando um bloco em particular é ocupado na *RMA*, este automaticamente força a correlação de muitas células vizinhas na rede quadrada (aquelas que estão cobertas pelo bloco na *RMA*). Neste sentido, o modelo é equivalente ao modelo de percolação correlacionada (Ver [16]) definida originalmente em um problema de polímeros. Dessa forma, de acordo com o trabalho de Weinrib e Halperin [17], que encontraram valores para  $\nu$  que dependem da correlação nesse modelo de percolação, era de se esperar a diferença entre o valor encontrado e o valor de  $\nu$  para a percolação padrão em duas dimensões.

Várias versões de percolação correlacionada foram apresentados na literatura, incluindo um problema de empacotamento aleatório de partículas com uma distribuição bidispersa de tamanho (em [18]). Nesse contexto, nosso modelo corresponde a um preenchimento aleatório completo do espaço

com distribuições polidispersas em tamanho de partículas retangulares.

Esse modelo é relevante para a descrição de muitos sistemas naturais e problemas científicos tais como materiais feitos de partículas de tamanho nanométrico e aglomerados correlacionados de corpos areníticos em reservatórios de petróleo.

Um desdobramento natural deste trabalho é investigar qual é a relação matemática entre a variação do parâmetro  $\rho$  e os expoentes  $\nu$  resultantes. Outro, é a extensão para uma rede multifractal aleatória em três dimensões.

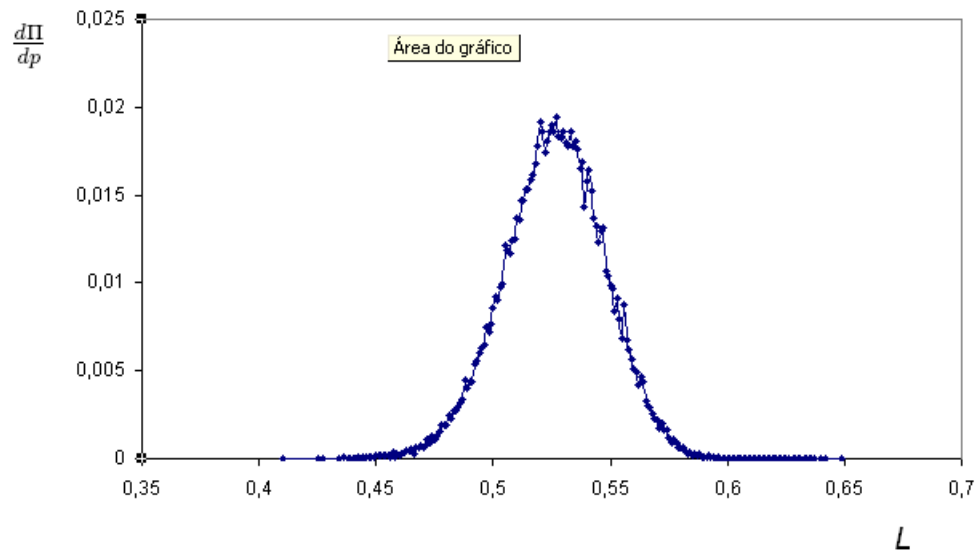


Figura 6.6: A função  $\frac{d\Pi}{dp}$  para  $L = 15625$ . Foram feitas 20000 realizações para se obter esta figura.

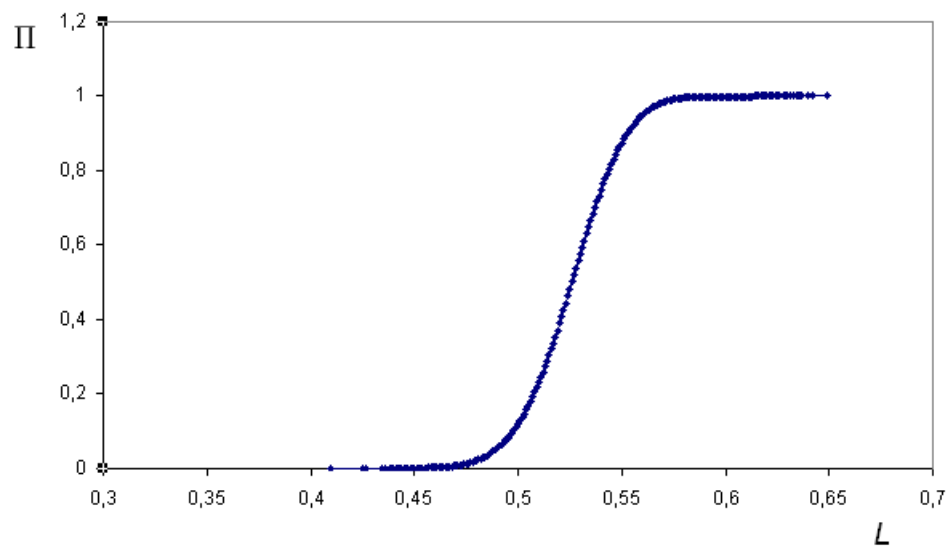


Figura 6.7: A função  $\Pi$  para  $L = 15625$ .

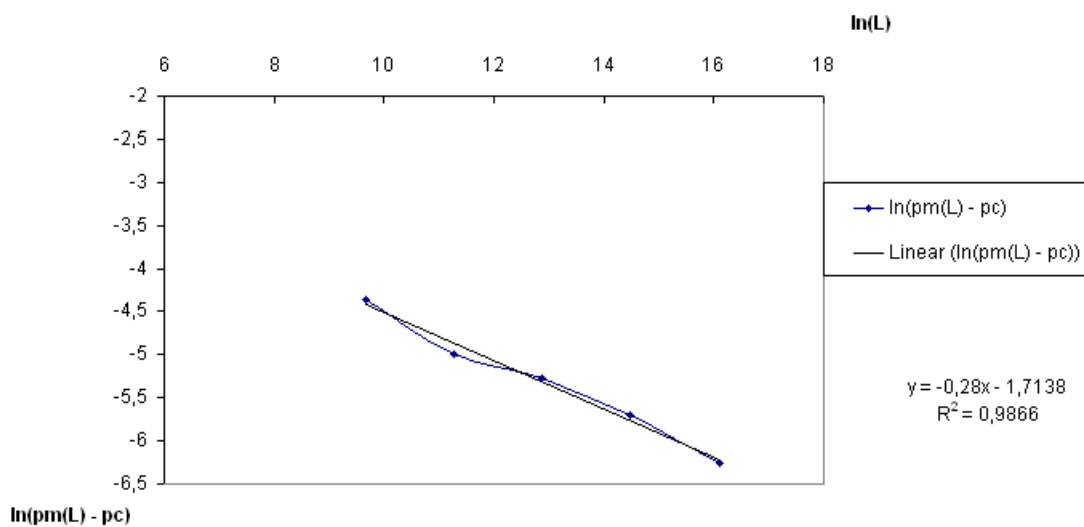


Figura 6.8: Gráfico de  $\ln(p_m(L) - p_c)$  versus  $\ln L$ . A inclinação da reta é  $-1/\nu$ . A equação desta reta e o resíduo são mostrados ao lado da figura.

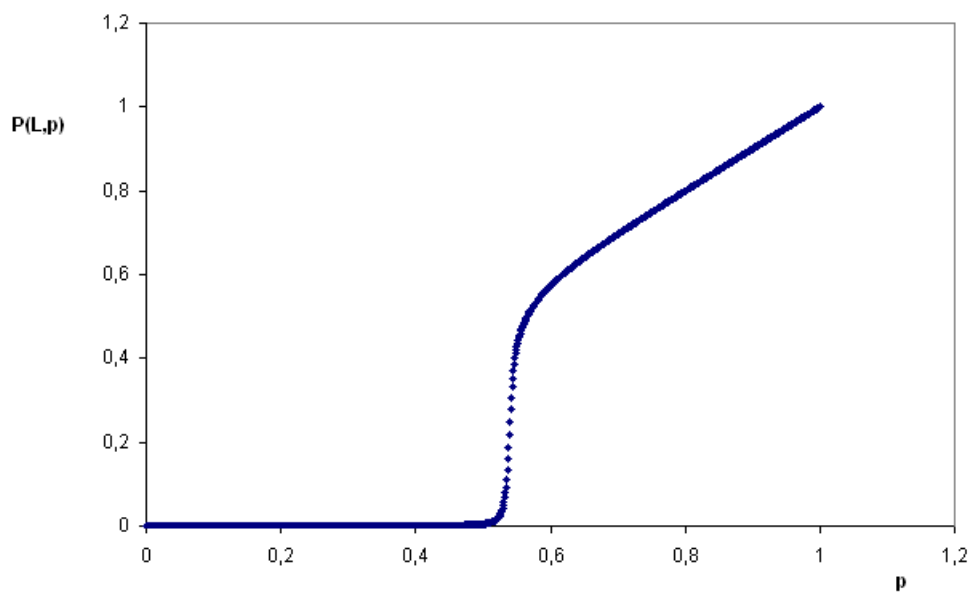


Figura 6.9: Gráfico de  $P(5^{10}, p)$  versus  $p$ .

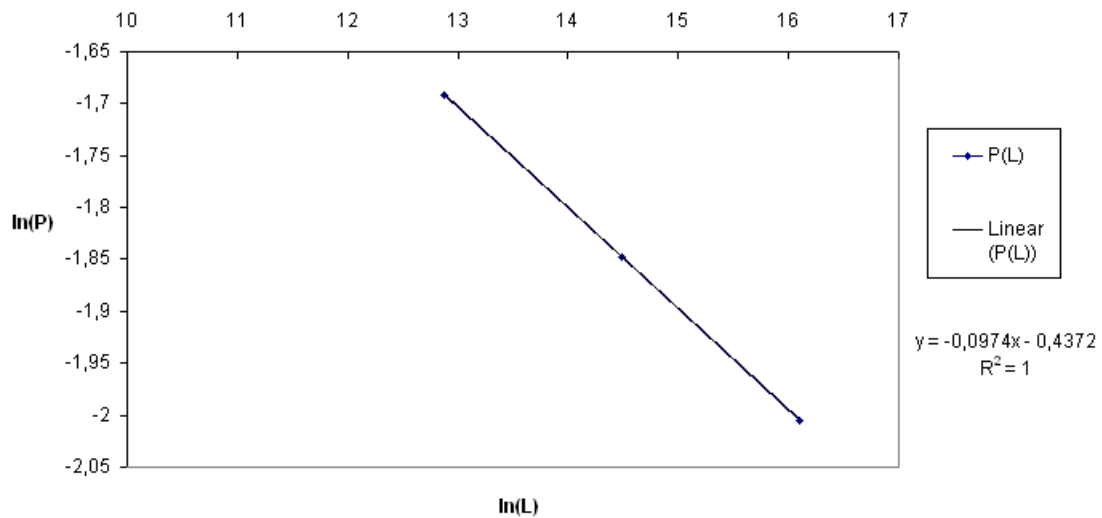


Figura 6.10: Gráfico de  $\ln(P(L, p))$  versus  $\ln(L)$ . A inclinação da reta é  $-\beta/\nu$ . Ao lado do gráfico aparecem a equação da reta que passa pelos pontos determinados por  $L = 5^8$ ,  $L = 5^9$  e  $L = 5^{10}$  e o quadrado do resíduo, indicando que os pontos estão perfeitamente alinhados.



# Capítulo 7

## Modelagem e simulação de reservatórios de petróleo

### 7.1 Introdução

Um objetivo perseguido na indústria de petróleo é a otimização da recuperação de hidrocarbonetos. Nessa busca, especialistas acompanham um reservatório por toda a sua vida útil, coletando informações necessárias para obter a produção ótima. Os dados analisados visam estimar adequadamente as seguintes quantidades [19]:

- Volumes dos hidrocarbonetos no reservatório;
- Reservas recuperáveis;
- Produção potencial dos poços.

As estimativas se baseiam em modelos visando determinar a distribuição espacial dos parâmetros do reservatório e em simulação. Todavia simular o fluxo dos fluidos envolvidos na recuperação secundária de petróleo é uma tarefa complicada. Primeiro, os reservatórios têm uma geometria extremamente complexa de poros interconectados. Essa geometria resulta de processos geológicos, físico-químicos e mecânicos que ocorrem em várias escalas de tempo e de espaço. Além disso, fenômenos de transporte que ocorrem da escala molecular até a escala de quilômetros influenciam o



comportamento do fluxo de fluidos nessas formações [20]. Tão difícil é a tarefa que, a despeito do grande avanço científico e tecnológico, é correto dizer que não existe ainda conhecimento suficiente para dar uma descrição dos reservatórios de petróleo e gás que modele todas as facetas que estes sistemas físicos apresentam. Ademais, não há recursos para simular com realismo indiscutível nos modelos a ocorrência simultânea dos fenômenos envolvidos.

Aliado à dificuldade inerente ao problema de simulação do fluxo de fluidos em um reservatório, há o fato de que o conhecimento sobre a subsuperfície é intrinsecamente incompleto. Pela localização dos reservatórios, situados profundamente na subsuperfície, é impossível conhecer diretamente a geometria e a composição dos mesmos. Pode-se no máximo ter evidências indiretas e com poder de resolução limitado como as providas pela sísmica e por outros métodos de sensoriamento remoto empregados pela geofísica. Portanto, qualquer modelo de reservatório deve ser considerado como uma única realização de um processo estocástico [20, 21].

Obviamente, como os métodos disponíveis para modelar reservatórios de petróleo conduzem a resultados certos apenas com alguma probabilidade, somos obrigados a considerar o problema da estatística aplicável a estes sistemas. A abordagem mais natural parece ser a de formular as leis físicas relevantes em um contexto probabilístico. Neste caso podemos estar seguros de que o comportamento médio do sistema modelado corresponde ao comportamento real. Ademais, podemos determinar a incerteza de nossas previsões e mesmo as distribuições para as diversas variáveis dependentes.

A Geoestatística já é amplamente utilizada pela indústria de petróleo com essa intenção. Esse conjunto de modelos e técnicas específicas para quantificar a incerteza de sistemas nos quais os parâmetros são espacialmente distribuídos, como os reservatórios de petróleo, tem sido utilizado para descrever estatisticamente como as propriedades medidas em dois pontos variam em função da distância que os separam. Isto é feito empregando funções da distribuição dos parâmetros, como o variograma, e técnicas que servem para estimar os valores onde as propriedades não foram medidas (como o kriging) [22].

Com vistas à simulação, costuma-se modelar os reservatórios de petróleo como sistemas termohidrodinâmicos, no qual fluidos (óleo, gás e a água) se deslocam no espaço poroso de rochas sedimentares com variadas características físico-químicas, sob gradientes de pressão e temperatura [23, 24, 25, 26, 27, 28, 29]. Em sua essência, a Termohidrodinâmica é uma formulação da Termo-

dinâmica para sistemas contínuos e diferenciáveis (duas vezes) [30]. Trata-se de uma teoria adequada a uma representação da matéria como um contínuo cujas propriedades variam suavemente.

Sabemos que a matéria é fundamentalmente descontínua, composta por átomos, mas isto não é um obstáculo intransponível: a teoria aplica-se quando existe uma escala  $\lambda$ , muito maior do que um angstrom, na qual se pode definir as grandezas termodinâmicas e os parâmetros do sistema como médias em um volume da ordem de  $\lambda^3$ . Quando as propriedades e parâmetros termohidrodinâmicos assim definidos são constantes no espaço diz-se que o sistema é homogêneo e quando variam o sistema é dito heterogêneo.

Os aspectos acima discutidos ou relacionados tornam muito necessário o desenvolvimento de métodos de modelagem ao mesmo tempo rápidos e nos quais a formulação estatística dos princípios físicos esteja bem determinada e controlada. Neste capítulo uma tal sistemática de modelagem e simulação é proposta. Em um primeiro momento esta sistemática mostra-se útil na estimativa rápida dos tempos de erupção da água nos poços produtores (*breakthrough*) em programas de recuperação secundária de petróleo e das curvas de produção.

O presente capítulo contém mais duas seções. Na segunda, os fundamentos da nova técnica de modelagem e simulação são expostos. Na terceira finalizamos com algumas observações.

## 7.2 A sistemática proposta de modelagem e simulação

Falar de uma abordagem intrinsecamente estatística para modelagem e simulação é falar do método de Monte Carlo. Neste método um grande número de modelos, com parâmetros escolhidos aleatoriamente, mas compatíveis com as informações dadas *a priori*, são considerados. As simulações são feitas em todos os modelos e os valores esperados, desvios padrões e mesmo as distribuições completas das grandezas de interesse são calculadas. Deve-se notar que a aplicação do método de Monte Carlo para introduzir um modelamento estatístico consistente e bem controlado em conjunto com a solução das equações da Termohidrodinâmica é uma idéia sedutora e correta em princípio. Mas não é prática por causa do excessivo tempo de computação.

Felizmente a solução detalhada das equações da Termohidrodinâmica não é sempre necessária por dois motivos.

1. Muitos dos resultados obtidos consistem em detalhes que não influenciam as decisões. Portanto, há tempo de computação gasto para fazer cálculos intermediários que se poderia postergar para outros momentos.
2. Para tomar decisões acertadas é suficiente, na maior parte dos casos, conhecer ordens de grandeza para os tempos onde acontecem eventos críticos durante a exploração do reservatório. Portanto, muito tempo de computação é gasto com a procura de uma exatidão desnecessária.

É no espaço aberto pelo conteúdo destas observações que se pode procurar soluções que dêem respostas ao mesmo tempo úteis e rápidas. Passamos agora a apresentar uma formulação do problema que permite desenvolver um algoritmo de simulação com estas características.

### 7.2.1 Uma formulação estocástica da Lei de Darcy

A equação dinâmica fundamental para o fluxo de um fluido em um meio poroso é dada pela Lei de Darcy

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{\mu}\nabla p, \quad (7.1)$$

onde  $\mathbf{v}$  é a chamada velocidade darciana que mede fluxo por unidade de área,  $k$  é a permeabilidade do meio poroso,  $\mu$  é a viscosidade do fluido e  $p$  é a pressão a que o fluido está submetido. A Lei de Darcy corresponde à equação de Navier-Stokes no limite onde as forças viscosas equilibram as forças aplicadas. Em conjunção com a lei de conservação da massa

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{v} + \phi \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (7.2)$$

onde  $\rho$  é a densidade do fluido e  $\phi$  é a porosidade do meio, e com a equação de estado

$$\rho = \rho(p), \quad (7.3)$$

pode-se deduzir da Lei de Darcy a equação de difusividade hidráulica

$$\nabla \cdot \left( \frac{k}{\mu} \nabla p \right) = \phi c \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (7.4)$$

onde  $c = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p}$ . A solução deste problema com condições de contorno, condições iniciais e parâmetros adequados exemplifica como se dá uma abordagem convencional no caso mais simples possível. Para

utilizar estas equações em um caso concreto, uma versão discreta é determinada e aplicada levando em conta um conjunto de condições obtidas por estimativa linear (ou não linear) a partir de dados *a priori*, como já discutido na introdução. Esta versão discreta conduz a um sistema linear que é resolvido no computador e possui em geral quatro parâmetros de discretização:  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  e  $\Delta t$ , que são os incrementos das coordenadas espaciais e do tempo. Tal solução tem um caráter determinístico, depois que as condições e parâmetros são definidos.

Como um primeiro passo para definirmos nossa abordagem de natureza estocástica, vamos considerar que  $\nabla p$  seja estimado por algum método numérico independente ou não da equação (7.4). Neste caso podemos calcular um parâmetro  $v_{ij} = |\mathbf{v}_{ij}|$  relacionado ao intervalo  $l_{ij} \equiv |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$  entre os sítios  $i$  e  $j$ . Para uma discretização qualquer é sempre possível determinar

$$\tau_{\min} \equiv \min \frac{l_{ij}}{v_{ij}}. \quad (7.5)$$

O tempo  $\tau_{\min}$  corresponde à duração da invasão mais rápida que pode acontecer no sistema. Desta forma é natural considerar que  $\tau_{\min}$  seja o incremento de tempo da simulação. Em termos de  $\tau_{\min}$ , para cada ligação  $l_{ij}$ , é possível definir a probabilidade

$$\pi_{ij} \equiv \frac{\tau_{\min}}{\tau_{ij}}, \quad (7.6)$$

onde  $\tau_{ij} \equiv l_{ij}/v_{ij}$ . A formulação estocástica da Lei de Darcy consiste em dizer que a invasão da ligação  $l_{ij}$  acontece com probabilidade  $\pi_{ij}$ .

Dentro desta formulação estocástica a velocidade com que ocorre a invasão da ligação  $l_{ij}$  não é  $v_{ij}$  como seria calculado pela Lei de Darcy determinística. Para se compreender isso, deve-se notar que a ligação  $l_{ij}$  pode, em geral, ser invadida ou não em um dado passo da simulação. Portanto a invasão pode ocorrer em qualquer tempo  $n\tau_{\min}$ , onde  $n$  é o número de tentativas de invasão. Assim, as possíveis velocidades de invasão são  $v_{ijn} = l_{ij}/n\tau_{\min}$ .

A correspondência entre a Lei de Darcy estocástica e a Lei de Darcy determinística é dada pelo seguinte argumento. A probabilidade da ligação  $l_{ij}$  ser invadida após  $n$  tentativas é:

$$p_n = \pi_{ij} (1 - \pi_{ij})^{n-1}. \quad (7.7)$$

Como conseqüência, o valor esperado do número de tentativas até ocorrer a invasão é

$$\langle n \rangle \equiv \sum_{n=1}^{n=\infty} n p_n = \frac{1}{\pi_{ij}} = \frac{\tau_{ij}}{\tau_{\min}}. \quad (7.8)$$

Por isso, o tempo esperado até acontecer a invasão é

$$\langle n \rangle \tau_{\min} = \tau_{ij}, \quad (7.9)$$

e a velocidade esperada com que a invasão acontece é

$$l_{ij} / \langle n \rangle \tau_{\min} = l_{ij} / \tau_{ij} = v_{ij}. \quad (7.10)$$

Desta forma fica claro que, em média, este processo estocástico evolui no tempo, em um campo de permeabilidades e de pressões dados, de acordo com a Lei de Darcy determinística.

## 7.2.2 Estimativa dos gradientes de pressão

No que diz respeito à estimativa das pressões no reservatório fazemos a seguinte aproximação: a pressão  $p$  do reservatório na posição  $\mathbf{r}$  é dada pela equação 7.4, considerando que as pressões não variam no tempo e que o meio é isotrópico e homogêneo. Assim, a equação 7.4 se resume a

$$\nabla \cdot (\nabla p) = 0, \quad (7.11)$$

que é a equação de Laplace. Então, uma suposição razoável é que a pressão num ponto varie de acordo com o inverso das distâncias desse ponto aos poços. Propomos que  $p$  seja dada pela expressão

$$p(\mathbf{r}) \equiv \frac{\sum_{i=1}^{i=N} p_i / d(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i)}{\sum_{i=1}^{i=N} 1 / d(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i)}, \quad (7.12)$$

onde

$$d(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \equiv \sqrt{(x_r - x_s)^2 + (y_r - y_s)^2 + (z_r - z_s)^2}. \quad (7.13)$$

Os  $p_k$  representam as pressões de fluxo nos poços e  $N \geq 2$  é o número de poços, sendo que pelo menos um poço é produtor e um poço é injetor. A pressão dos poços injetores é maior do que a dos produtores. Com isso representa-se de forma qualitativa as pressões em uma situação de recuperação secundária. Os gradientes  $\nabla p$  são calculados a partir de  $p(\mathbf{r})$  e quando usados em conjunto com a formulação estocástica da Lei de Darcy, permitem estimar de forma extremamente rápida o fluxo dos fluidos em um reservatório naquele regime de produção.

### 7.2.3 Mapas estocásticos de permeabilidade

Nesta sistemática de modelagem existe grande abertura para a forma de introduzir as permeabilidades. Praticamente qualquer forma de fazer a estimativa da distribuição espacial desta grandeza a partir dos dados de poços é admitida, uma vez que o necessário é atribuir a cada ligação  $l_{ij}$ , compondo a versão discreta do reservatório, um valor ou valores de permeabilidade, caso se esteja trabalhando com as permeabilidades efetivas para vários fluidos. O mapeamento estocástico de permeabilidades sugerido é o seguinte. Para cada poço  $W_i$  atribui-se uma permeabilidade máxima  $k_{i\max}$ , uma permeabilidade mínima  $k_{i\min}$  e uma probabilidade  $q_i$ . No momento da para cada ligação  $l_{ij}$  sorteia-se entre a permeabilidade

$$k_{\max}(\mathbf{r}) \equiv \frac{\sum_{i=1}^{i=N} k_{i\max}/d(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k)}{\sum_{i=1}^{i=N} 1/d(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k)}, \quad (7.14)$$

e a permeabilidade

$$k_{\min}(\mathbf{r}) \equiv \frac{\sum_{i=1}^{i=N} k_{i\min}/d(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k)}{\sum_{i=1}^{i=N} 1/d(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k)}, \quad (7.15)$$

com a probabilidade

$$q(\mathbf{r}) \equiv \frac{\sum_{i=1}^{i=N} q_i/d(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k)}{\sum_{i=1}^{i=N} 1/d(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k)}. \quad (7.16)$$

Localmente o mapa estocástico equivale ao modelo básico de percolação por ligações. Devido à ponderação pelas distâncias, as propriedades variam no espaço e reproduzem os valores nos poços.

As figuras a seguir mostram um exemplo de simulação baseada na sistemática aqui apresentada. Foram utilizadas como dados de entrada as trajetórias dos poços, as permeabilidades  $k_{i\max}$  e  $k_{i\min}$ , as probabilidades  $q_i$ , as pressões de fluxo nos poços  $p_i$ , a espessura do reservatório e dados gerais como as dimensões da região de interesse, o número de poços e quais são os poços produtores e injetores. Com esses dados, foi gerada uma geometria para o reservatório na forma de uma superfície e atribuíram-se as permeabilidades. Em seguida, foram calculadas as pressões, os gradientes de pressões e então as velocidades  $v_{ij}$  para todas as ligações  $l_{ij}$ . A superfície gerada pode ser vista na figura 7.1.

Uma vez gerada uma geometria e distribuição de parâmetros, iniciou-se o processo de simulação de fluxo. Uma visualização de três instantes desta simulação é dada nas figuras 7.2, 7.3 e 7.4, as quais mostram o avanço da frente de fluido injetado logo após alcançarem cada um dos três poços produtores.

### 7.3 Comentários finais

Neste capítulo apresentamos uma alternativa para modelagem e simulação de reservatórios de petróleo em recuperação secundária capaz de dar respostas rápidas em situações de urgência. Para alcançar este resultado fizemos uma análise crítica do procedimento usual de simulação, procurando encontrar gargalos que dificultam a obtenção de resultados rápidos. Concluímos ser possível melhorar a forma como a estatística é tratada e também diminuir o tempo de computação gasto com detalhes que não influenciam as decisões. Em consequência propusemos uma sistemática de simulação baseada em uma formulação estocástica da Lei de Darcy e em um cálculo efetivo dos gradientes de pressões a partir de uma média das pressões de fluxo nos poços.

Um simulador baseado nas idéias deste capítulo já está sendo desenvolvido em nosso grupo de pesquisa e, em sua primeira versão, já apresenta resultados promissores. Acreditamos que os resultados obtidos possam ser melhorados. As figuras a seguir são obtidas como saída desse simulador.

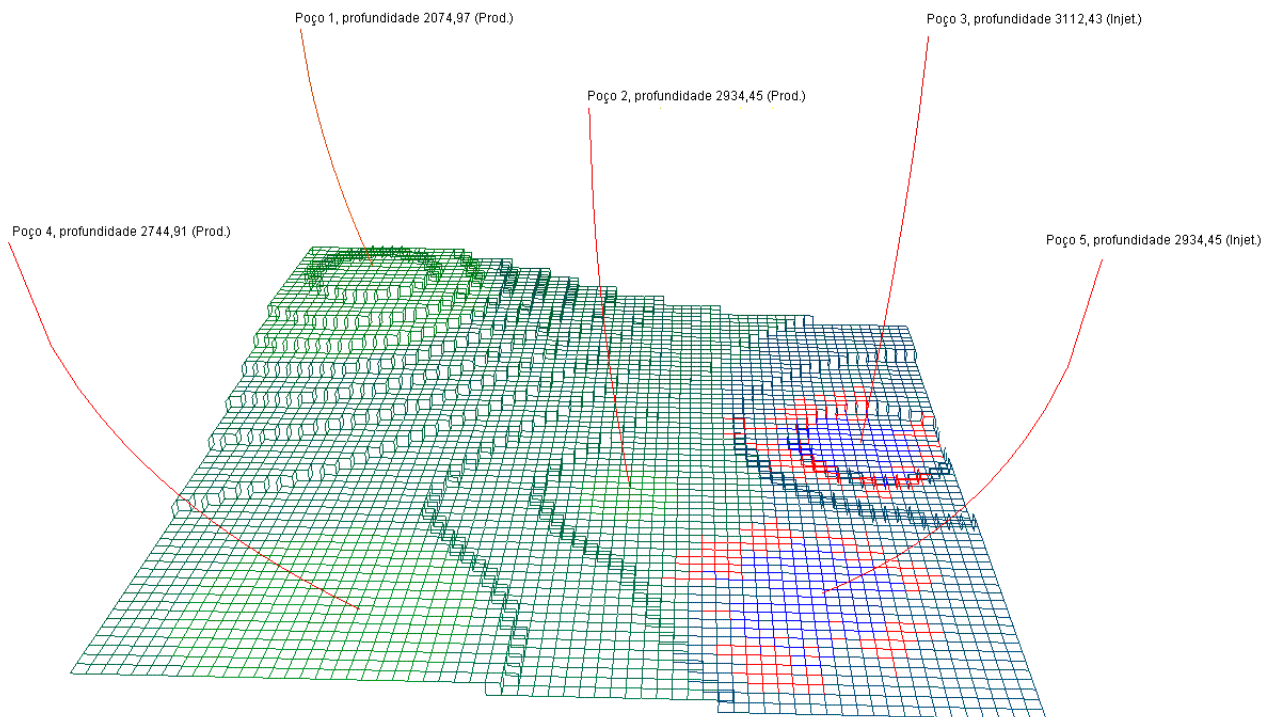


Figura 7.1: Saída gráfica do simulador. Início da simulação. Em azul, as ligações invadidas pela água. Em vermelho a frente de avanço da água, ligações onde há tentativa de invasão. As ordenadas correspondem às profundidades. As linhas vermelhas mais longas são as trajetórias dos poços.



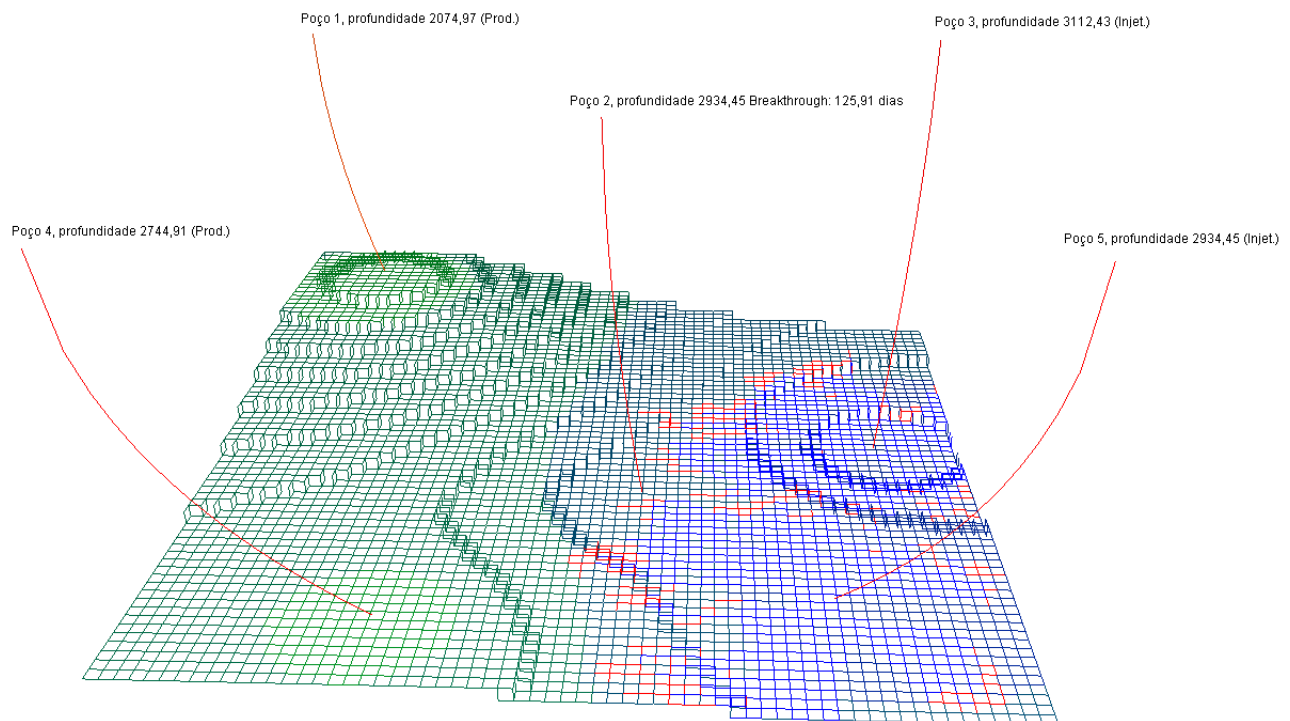


Figura 7.2: Evolução da frente de invasão. Nesta figura, o primeiro poço produtor é alcançado pela água injetada.

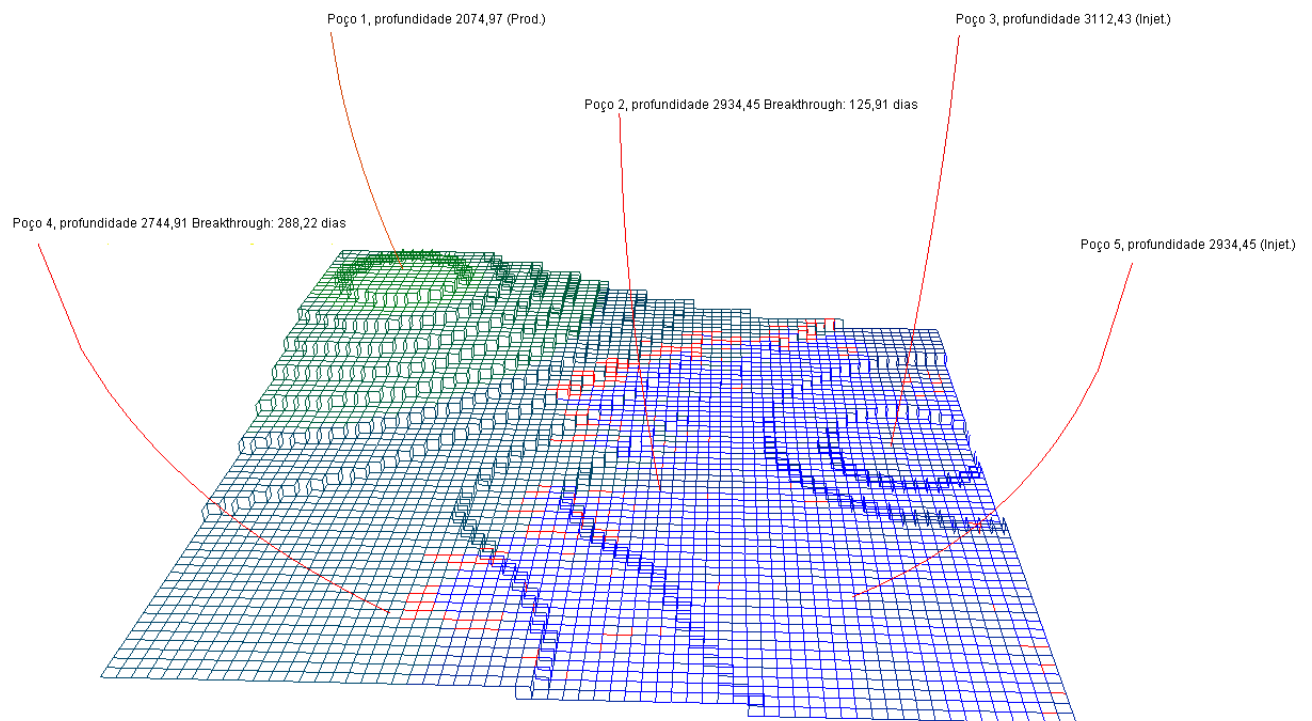


Figura 7.3: Evolução da frente de invasão, quase alcançando o segundo poço produtor.

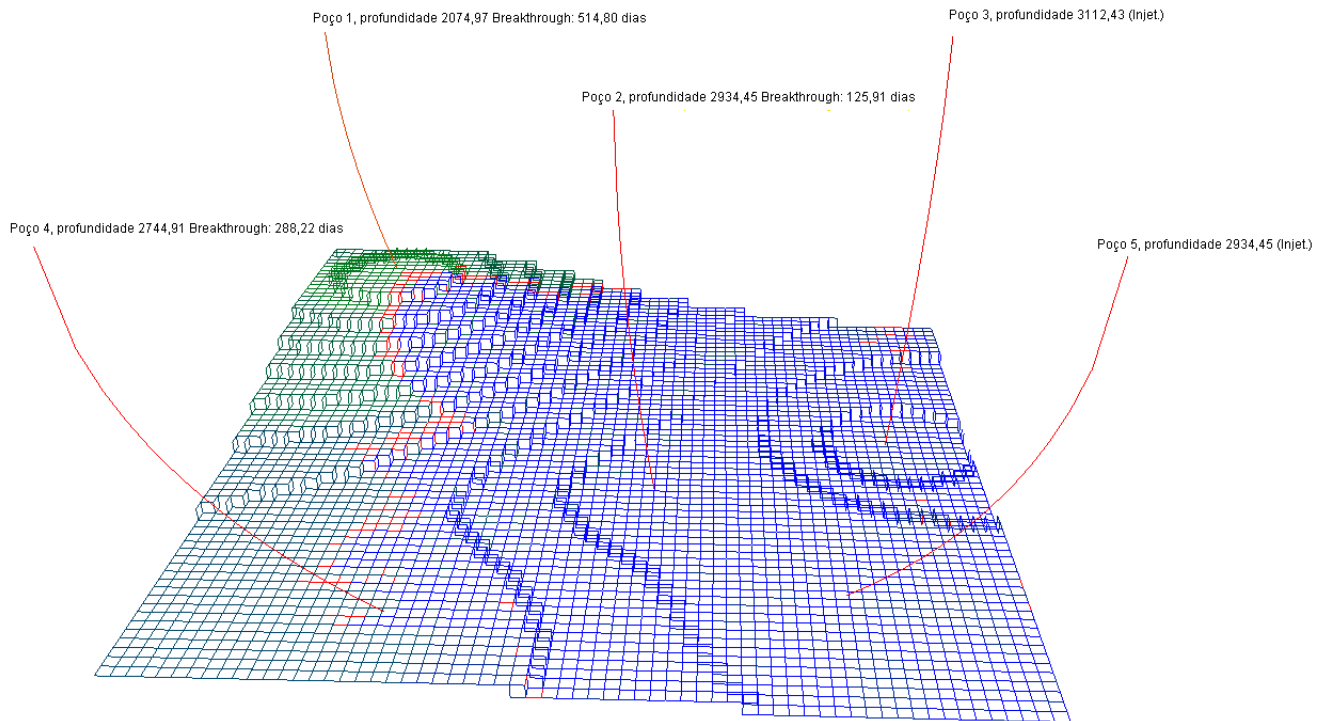


Figura 7.4: Evolução da frente de invasão. Momento em que o último poço produtor é alcançado pela água.

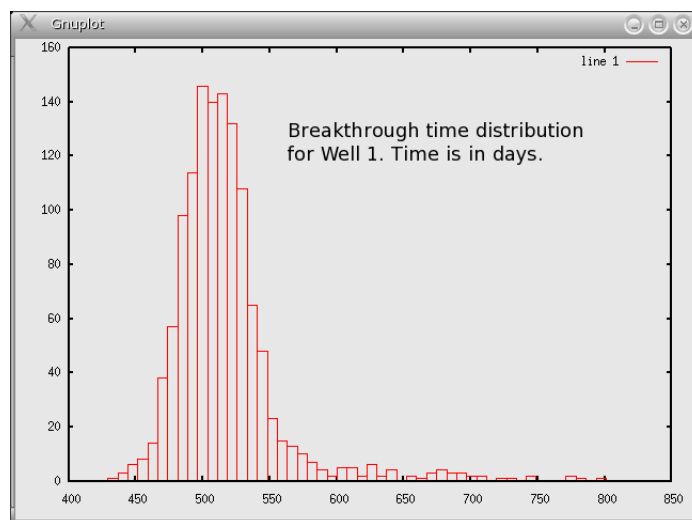


Figura 7.5: Distribuição de tempos de erupção da água no primeiro poço produtor (*breakthrough*).

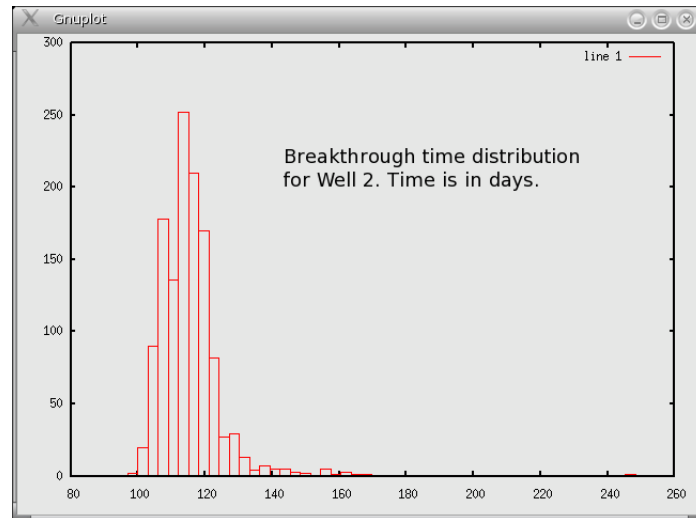


Figura 7.6: Distribuição de tempos de erupção da água no segundo poço produtor.

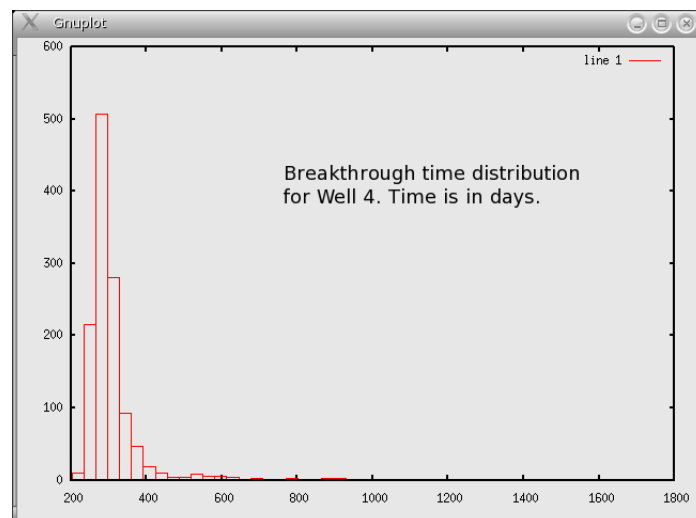


Figura 7.7: Distribuição de tempos de erupção da água no terceiro poço produtor.

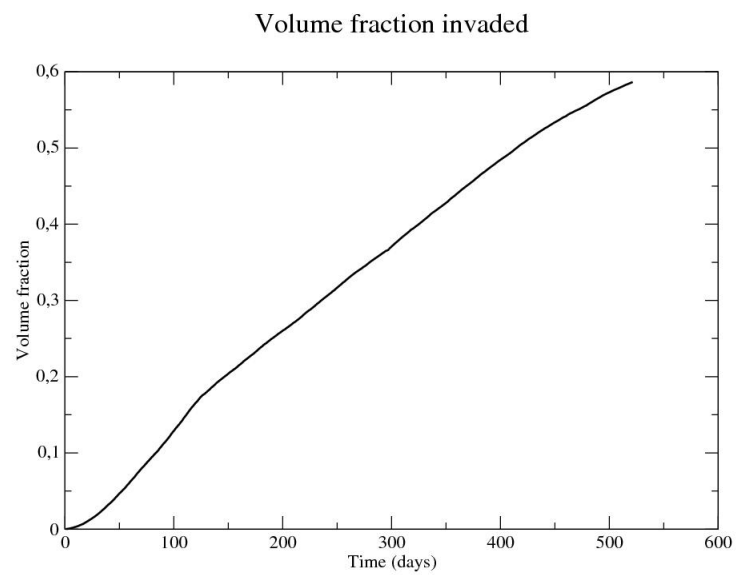


Figura 7.8: Curva de produção supondo que o volume de água injetada é igual ao volume de óleo produzido.

# Capítulo 8

## Conclusão

Nesta tese foram abordados dois problemas relacionados à modelagem e simulação de reservatórios de petróleo. O primeiro diz respeito à forma como as propriedades do meio podem ser distribuídas espacialmente. Como um reservatório de petróleo apresenta heterogeneidades em todas as escalas, idealizamos uma rede com característica similar para servir de suporte em simulações. A essa rede demos o nome de *rede multifractal aleatória* (*RMA*) e tratamos da percolação nesse ambiente, por ser essa uma teoria de conectividade e transporte em sistemas geometricamente complexos.

A *RMA* é uma generalização da rede quadrada que apresenta uma componente aleatória em sua construção. Suas principais propriedades são:

1. A *RMA* é resultado de uma medida multifractal, o que significa que é formada por conjuntos com dimensões fractais distintas.
2. O número de vizinhos dos sítios muda por todo o objeto.
3. Seu algoritmo de construção depende de parâmetros  $\rho_i$  que são escolhidos aleatoriamente.
4. No caso particular em que os parâmetros  $\rho_i = 1$ , a rede resultante é a quadrada regular.

Iniciamos o estudo analisando o limiar de percolação,  $p_c$ , para a *RMA*. Vimos que na *RMA*  $p_c$  é maior que no caso determinístico. Interpretamos esse resultado como uma consequência da aleatoriedade da rede que a torna mais próxima da rede quadrada, diminuindo a anisotropia. Também estudamos quantidades universais como o expoente  $\beta$  relacionado à escala da massa do aglomerado

infinito e sua dimensão fractal  $d_f$ . A quantidade  $d_f$  tem o mesmo valor que o encontrado para percolação padrão em duas dimensões. Por outro lado, os expoentes  $\beta$  e  $\nu$  apresentaram valores maiores que seus correspondentes na percolação padrão, que são  $\nu = \frac{4}{3}$  e  $\beta = 5/36$ .

Nosso modelo fornece uma aplicação entre uma rede multifractal, que tem células retangulares que variam aleatoriamente em tamanho e forma, e uma rede regular quadrada. Definimos o problema de percolação na *RMA* e é importante entender qual o problema equivalente na rede quadrada. Na rede multifractal consideramos um modelo de percolação aleatória, o que significa uma situação na qual cada bloco ou célula é ocupado aleatoriamente e independentemente da ocupação de seus vizinhos. A representação desse problema na rede quadrada subjacente dá um panorama diferente. Aqui, todas as células são quadrados idênticos, mas a probabilidade de ocupação de cada célula é dependente dos vizinhos. De fato, quando um bloco em particular é ocupado na *RMA*, este automaticamente força a correlação de muitas células vizinhas na rede quadrada (aquelas que estão cobertas pelo bloco na *RMA*). Neste sentido, o modelo é equivalente ao modelo de percolação correlacionada (Ver [16]) definida originalmente em um problema de polímeros. Dessa forma, de acordo com o trabalho de Weinrib e Halperin [17], que encontraram valores para  $\nu$  que dependem da correlação nesse modelo de percolação, era de se esperar a diferença entre o valor encontrado e o valor de  $\nu$  para a percolação padrão em duas dimensões.

Várias versões de percolação correlacionada foram apresentados na literatura, incluindo um problema de empacotamento aleatório de partículas com uma distribuição bidispersa de tamanho (em [18]). Nesse contexto, nosso modelo corresponde a um preenchimento aleatório completo do espaço com distribuições polidispersas de tamanho de partículas retangulares.

Esse modelo é relevante para a descrição de muitos sistemas naturais e problemas científicos tais como materiais feitos de partículas de tamanho nanométrico e aglomerados correlacionados de corpos areníticos em reservatórios de petróleo.

Um desdobramento natural deste trabalho é investigar qual é a relação matemática entre a variação do parâmetro  $\rho$  e os expoentes  $\nu$  resultantes. Outro, é a extensão para uma rede multifractal aleatória em três dimensões.

O segundo problema abordado na tese traz uma alternativa para modelagem e simulação de reservatórios de petróleo em recuperação secundária capaz de dar respostas rápidas em situações de urgên-

---

cia. Para alcançar este resultado fizemos uma análise crítica do procedimento usual de simulação, procurando encontrar gargalos que dificultam a obtenção de resultados rápidos. Concluímos ser possível melhorar a forma como a estatística é tratada e também diminuir o tempo de computação gasto com detalhes que não influenciam as decisões. Em consequência propusemos uma sistemática de simulação baseada em uma formulação estocástica da Lei de Darcy e em um cálculo efetivo dos gradientes de pressões a partir de uma média das pressões de fluxo nos poços.

Um simulador baseado nessa formulação estocástica já está sendo desenvolvido em nosso grupo de pesquisa. A principal aplicação deste simulador é no suporte à análise de riscos relacionados a diferentes estratégias para recuperação secundária de petróleo. Este simulador utiliza comparativamente menos dados de entrada que os simuladores convencionais de forma a simplificar a definição dos cenários estudados. Com isto espera-se reduzir o tempo até a concepção dos modelos e, por conseguinte reduzir o custo do trabalho necessário a estudos em situação de urgência. Em sua primeira versão, nosso simulador já apresenta resultados promissores, mas acreditamos que os resultados obtidos ainda possam ser melhorados. Nossa sistemática mostra-se útil na estimativa rápida de tempos de *breakthrough* em programas de recuperação secundária de petróleo e das curvas de produção. Uma consequência natural desta tese é unir suas duas partes, fazendo uso do simulador na rede multifractal aleatória.





# Referências Bibliográficas

- [1] Benoit B. MANDELBROT. *The Fractal Geometry of Nature*. W.H. Freeman and Company, 2000.
- [2] Elon Lages LIMA. *Espaços Métricos*. Projeto Euclides. IMPA - CNPq, 1977.
- [3] J.E. HUTCHINSON. Fractals and self similarity. *Indiana University Math. J.*, 30:713–747, 1981.
- [4] T. WITTEN and L. SANDLER. Diffusion-limited agregation, a kinetic critical phenomenon. *Physical Review Letters*, 47:1400–1403, 1981.
- [5] C. CHAOMEI and N. LOBO. Semantically modified diffusion limited aggregation for visualizing large-scale networks. In *Proc. Seventh International Conference on Information Visualization*. ISBN: 0-7695-1988-1, 2003.
- [6] P. MEAKIN. *CRC Critical Rev. in Solid State and Materials Sciences*, 13:143, 1987.
- [7] D. STAUFFER and A. AHARONY. *Introduction to Percolation Theory*. Taylor & Francis, 1994.
- [8] Kenneth J. FALCONER. *Fractal geometry: Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley and Sons, 1990.
- [9] G. CORSO, J. E. FREITAS, L. S. LUCENA, and R. F. SOARES. Percolation on a multifractal. *Physical Review E*, 69(6-2), june 2004.

- [10] DARLAN ARAÚJO MOREIRA. Percolação convencional, percolação correlacionada e percolação por invasão num suporte multifractal. Dissertação de mestrado, Departamento de Física Teórica e Experimental, UFRN, Março 2005.
- [11] S. MUKHOPADHYAY and M. SAHIMI. *Chem. Eng. Sci.*, 55(4495), 2000.
- [12] J. E. FREITAS and L. S. LUCENA. *IJMPC*, 11(1581), 2000.
- [13] J. C. MULLER. *Ann. Geophys. Atmospheres Hydrospheres and Space Sciences*, 11(525), 1993.
- [14] P. N. KHUE, O. FLUSEBY, A. SAUCIER, and MULLER J. C. *J. Phys. Condensed Matter*, 14(2347), 2002.
- [15] R. H. RIEDI. Multifractals and wavelets: a potential tool in geophysics. In *Proc. 68th SEG Meeting*, New Orleans, Louisiana, USA, 1998.
- [16] A. CONIGLIO, H. E. STANLEY, and W. KLEIN. *Phys. Review Letters*, 42(518), 1979.
- [17] A. WEINRIB and B. I. HALPERIN. Critical phenomena in systems with long-range-correlated quenched disorder, 1983.
- [18] D. HE, N. N. EKERE, and L. CAI. *Phys. Review E*, 65(061304), 2002.
- [19] René COSSÉ. *Basics of reservoir engineering*. Éditions Technip, 1993.
- [20] B. NOETINGER, V. ARTUS, and G. ZARGAR. The future of stochastic an upscaling methods in hydrogeology. *Hydrogeo. J.*, 13:184–201, 2005.
- [21] V. PANCALDI, K. CHRISTENSEN, and P. KING. Permeability up-scaling using haar wavelets. *Transp. porous med.*, A ser publicado.
- [22] J. P. CHILÈS and P. DELFINER. *Geostatistics Modeling Spatial Uncertainty*. Wiley, 1999.
- [23] Khalid AZIZ and Antonin SETTARI. *Petroleum Reservoir Simulation*. 1979.
- [24] Abbas FIROOZABADI. *Thermodynamics of Hydrocarbon Reservoirs*. McGraw Hill, 1999.
- [25] H. B. BRADLEY, editor. *Petroleum Engineering Handbook*. SPE, 1987.

- [26] Mike CARLSON. *Practical Reservoir Simulation*. Pennwell, 2003.
- [27] John R. FANCHI. *Principles of Applied Reservoir Simulation*. GPP, 2001.
- [28] Calvin C. MATTAS and Robert L. DALTON, editors. *Reservoir Simulation*. SPE, 1990.
- [29] Tarek AHMED and Paul MCKINNEY. *Advanced Reservoir Engineering*. GPP, 2004.
- [30] S. R. DE GROOT and P. MAZUR. *Non-Equilibrium Thermodynamics*. Dover, 1984.



# **Apêndice A**

## **Artigos do Autor**

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)