Equação de Placas: Existência, Unicidade e Comportamento Assintótico com Damping Localizado

por

Vania Cristina Machado

IM-UFRJ

2006

Conteúdo

Equação de Placas: Existência, Unicidade e Comportamento Assintótico

Vania Cristina Machado

Tese submetida ao corpo docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Matemática Pura.

Aprovada por:

____
Prof. Helvécio Rubens Crippa

IM-UFRJ - Orientador.

____
Prof. XXXXXXXXXXXXXXX

IM-UFRJ.

____
Prof. XXXXXXXXXXXXXXX

IM-UFRJ.

____
Prof. XXXXXXXXXXXXXXX

IM - UFRJ

RIO DE JANEIRO

2006

FICHA CATALOGRÁFICA

Machado, Vania Cristina.

Equação de Placas: Existência, Unicidade e Comportamento Assintótico

Vania Cristina Machado.

Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2006.

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM.

1. Preliminares. 2. Existência, Unicidade.

3. Comportamento Assintótico com Damping Localizado.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo estudar a existência, unicidade e o comportamento assintótico das soluções do problema misto associado à seguinte equação linear dissipativa

$$u_{tt} + \Delta^2 u + a(x)\, u' = 0, \text{ em } Q = \Omega \times (0, T). \tag{*}$$

Considera-se a equação em $(*)$ submetida as seguintes condições de fronteira

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Sigma, \tag{**}$$

onde ν denota o vetor normal unitário exterior a Γ.

No estudo do comportamento assintótico da energia associada ao problema $(*)$ considerando-se o termo dissipativo $a(x)\, u'$, atuando apenas localmente em Ω, mais precisamente, em uma vizinhança da fronteira de Ω. Obtém-se nestas condições que a energia decai exponencialmente com o tempo. O método empregado na obtenção do resultado baseia-se essencialmente em certas desigualdades integrais, conforme Haraux [4], e em técnicas de multiplicadores conforme Komornik [5].

Introdução

Este trabalho tem como objetivo estudar a existência, unicidade e o comportamento assintótico das soluções do problema misto associado à seguinte equação linear dissipativa

$$u_{tt} + \Delta^2 u + a(x)\, u' = 0, \text{ em } Q = \Omega \times (0, T). \tag{*}$$

Equações do tipo acima aparecem, respectivamente, em dimensão um ou dois, no estudo das vibrações transversais de barras e placas com rigidez.

Em $(*)$, Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira regular Γ, por $Q = \Omega \times (0, T)$ com $T > 0$ um número real arbitrário, denota-se o cilíndro cuja fronteira lateral $\Gamma \times (0, T)$ será representada por Σ e o termo $a(x)$ é uma função positiva e limitada em Ω.

O presente estudo é realizado com a equação em $(*)$ submetida as seguintes condições de fronteira

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Sigma, \tag{**}$$

onde ν denota o vetor normal unitário exterior a Γ.

Em dimensão 1, isto é, $\Omega = (0, L)$ a condição de fronteira $(**)$ reduz-se a

$$u(0) = u(L) = 0 \text{ e } u_x(0) = u_x(L) = 0,$$

que corresponde ao estudo de barras engastadas nos extremos.

O trabalho é dividido em três capítulos. No primeiro, apresentam-se definições, notações e alguns resultados que são imprescindíveis para a leitura dos capítulos posteriores.

No capítulo dois, demonstra-se a existência e unicidade de soluções forte e fraca para o problema $(*)$. Em ambos os casos a existência de soluções é obtida via o método de Faedo-Galerkin, que consiste em aproximar o problema original, por problemas análogos porém em dimensão finita. A unicidade de solução fraca é obtida empregando-se o método devido a Ladyzhenskaya e o método da energia é utilizado na obtenção da unicidade de solução forte.

O terceiro capítulo é dedicado ao estudo do comportamento assintótico da energia associada ao problema $(*)$ considerando-se o termo dissipativo $a(x)\,u'$, atuando apenas localmente em Ω, mais precisamente, em uma vizinhança da fronteira de Ω. Obtém-se nestas condições que a energia decai exponencialmente com o tempo. O método empregado na obtenção do resultado baseia-se essencialmente em certas desigualdades integrais, conforme Haraux [4], e em técnicas de multiplicadores conforme Komornik [5].

Resultados de estabilização, com termo dissipativo atuando localmente em Ω, foram obtidos primeiramente por Zuazua, [10] para uma equação de ondas não linear. Em [6], Tucsnak-Benevides obtém um resultado de estabilização para equação de placas, com uma dissipação localizada, e uma hipótese mais geral sobre o coeficiente de $a(x)$ do que aquela considerada aqui.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo são apresentados alguns conceitos e principais resultados que serão necessários nos capítulos seguintes.

1.1 Distribuições Vetoriais e Espaços de Sobolev

Seja Ω um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$, com fronteira Γ bem regular. Denota-se por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções numéricas definidas em Ω, com suporte compacto, possuindo em Ω derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Representa-se por $\mathcal{D}(\Omega)$ o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ munido da seguinte notação de convergência:

Uma sequência $\{\varphi_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ de $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$, quando forem satisfeitas as seguintes condições:

(i) Os suportes de todas as funções φ_n estão contidos em um compacto K.

(ii) A sequência $\{\varphi_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ converge para φ uniformemente em K, juntamente com suas derivadas de todas as ordens. Os elementos de $\mathcal{D}(\Omega)$ são denominados funções testes em Ω.

Representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$, o espaço das distribuições sobre Ω, isto é, o espaço vetorial formado por todas as aplicações lineares e contínuas (no sentido da convergência definida sobre $\mathcal{D}(\Omega)$) de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $\mathbb{R}$.

Denota-se por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Banach

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R},\ u \text{ mensurável}, \int_\Omega |u(x)|^p\, dx < \infty \right\}, \text{ se } p < \infty \text{ e}$$
$$L^\infty(\Omega) = \{ u : \Omega \to \mathbb{R},\ u \text{ mensurável e limitada quase sempre em } \Omega \},$$

com a norma definida por $|u|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}$, se $p < \infty$ e $|u|_\infty = \sup_{x \in \Omega} \operatorname{ess} |u(x)|$.No caso particular $p = 2$, tem-se o espaço de Hilbert $L^2(\Omega)$, com o produto interno definido por $(u, v) = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx$.

Para $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, define-se $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, e por D^α representa-se o operador de derivação de ordem $|\alpha|$, definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Quando $\alpha = (0, 0, ..., 0)$ define-se $D^0 u = u$.

Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que, para todo$|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada de u no sentido das distribuições. Para $u \in W^{m,p}(\Omega)$, define-se a norma de u por:

$$\|u\|_{m,p} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)^p\, dx| \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Os espaços normados $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, são espaços de Banach e são denominados espaços de Sobolev.

Define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Para $p = 2$, denota-se $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, o espaço formado pelas funções reais $u \in L^2(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$, para todo α, $0 \leq |\alpha| \leq m$. Quando $m = 0$, $H^0(\Omega)$ é identificado com $L^2(\Omega)$. $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno e a norma dados respectivamente por

$$((u, v))_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x)\, D^\alpha v(x)\, dx$$
$$\|u\|_m = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por $H_0^m(\Omega)$ representa-se o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$. Com fronteira regular, demonstra-se que $H_0^m(\Omega)$ é contituído pelas funções de $H^m(\Omega)$ tais que os traços das funções e das derivadas normais de todas as ordens menores que m são nula em Γ. O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ será representado por $H^{-m}(\Omega)$.

Dado X um espaço de Banach, $T > 0$ um número real e $1 \leq p \leq \infty$ representa-se por $L^p(0,T;X)$ o espaço de Banach das funções $u : (0,T) \to X$ tais que u é mensurável e $\|u(t)\|_X \in L^p(0,T)$, equipado com a noma

$$\|u(t)\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Tem-e que $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p \leq \infty$, é reflexivo se X for reflexivo, seu dual topológico indica-se por $L^{p'}(0,T;X')$, sendo X' o dual de X e p' o conjugado de p. Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert, munido do produto interno

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t)\,v(t))_X \, dt.$$

Quando $p = \infty$, tem-se o espaço de Banach $L^\infty(0,T;X)$, formado pelas funções $u : (0,T) \to X$ mensuráveis e essencialmente limitadas, isto é

$$\sup_{t\in(0,T)} ess \|u(t)\|_X < \infty$$

munido da norma

$$\|u(t)\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t\in(0,T)} ess \|u(t)\|_X.$$

Indica-se por $\mathcal{D}'(0,T;X)$ o espaço das distribuições vetoriais sobre $(0,T)$ com valores em X, isto é, o espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X.

Se u é um vetor de $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p \leq \infty$, então associa-se a u a distribuição T_u definida por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_0^T (u(s)\,\varphi(s))\, ds, \ \varphi \in \mathcal{D}(0,T)$$

onde a integral é entendida como uma integral de Bochner em X. Demonstra-se que T_u é univocamente definida por u, logo, identificando-se u com T_u, pode-se dizer que

$$L^p(0,T;X) \subset \mathcal{D}'(0,T;X).$$

Dada a distribuição vetorial $u \in \mathcal{D}'(0,T;X)$, define-se a derivada (no sentido das distribuições) de ordem m de u como sendo a distribuição $\dfrac{\partial^m u}{\partial t^m}$=$u^{(m)}$, definida por

$$\left\langle u^{(m)}, \varphi\right\rangle = (-1)^m \left\langle u, \varphi^{(m)}\right\rangle \forall \varphi. \in \mathcal{D}(0,T).$$

1.2 Resultados Básicos

Seram enunciados a seguir os lemas e teoremas a serem utilizados nos capítulos seguinte.

Lema 1.1 ***(Desigualdade de Gronwall):*** *Seja* $\varphi \in L^\infty(0,T)$, $\beta \in L^1(0,T)$, $\beta(t) > 0$, $\varphi(t) \geq 0$ *e* $K \geq 0$ *constante. Se* $\varphi(t) \leq K + \int_0^t \beta(s)\varphi(s)\,ds$, $\forall t \in [0,T]$, *então tem-se*

$$\varphi(t) \leq K \exp\left(\int_0^t \beta(s)\,ds\right), \forall t \in (0,T).$$

Demonstração: Seja $\Psi(t) = K + \int_0^t \beta(s)\varphi(s)\,ds$.

Deste modo, tem-se que Ψ é uma função absolutamente contínua, pois $\beta(s)\varphi(s) \in L^1(0,T)$ e $\Psi'(t) = \beta(t)\varphi(t) \leq \beta(t)\Psi(t)$, ou seja, $\Psi'(t) - \beta(t) \leq 0$ e $\Psi(0) = K$.

O que implica

$$\frac{d}{dt}\left(\Psi(t)\exp\left(-\int_0^t \beta(s)\,ds\right)\right) \leq 0.$$

Assim tem-se que

$$\Psi(t) \leq \Psi(0)\exp\left(\int_0^t \beta(s)\,ds\right).$$

Desta forma, obtém-se que

$$\Psi(t) \leq K\exp\left(\int_0^t \beta(s)\,ds\right).$$

■

Lema 1.2 *Para todo* $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *as normas* $|\Delta u|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\Delta u|^2\,dx\right)^{1/2}$ *e* $\|u\|_{H^2(\Omega)} = \sum_{\alpha \leq 2} |D^\alpha u|^2_{L^2(\Omega)}$ *são equivalentes.*

Demonstração: Deve se mostrar que existem constantes c_1, $c_2 > 0$ tais que:

$$c_1\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq |\Delta u|_{L^2(\Omega)} \leq c_2\|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

A desigualdade $|\Delta u|_{L^2(\Omega)} \leq c_2 \|u\|_{H^2(\Omega)}$ é imediata a partir da definição da norma em $H^2(\Omega)$.

Por outro lado, pelo Lema de Lax Milgram, para cada $f \in L^2(\Omega)$, existe uma única $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tal que:

$$-\Delta u = f \text{ em } \Omega.$$

Portanto o operador $-\Delta : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ é uma bijeção.

Além disso, como $|\Delta u|_{L^2(\Omega)} \leq c_2 \|u\|_{H^2(\Omega)}$, então o operador acima é contínuo. Dessa forma, Pelo Teorema da Aplicação Aberta,

$$(-\Delta)^{-1} : L^2(\Omega) \longrightarrow H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

também é um operador contínuo, ou seja, existe $c_1 > 0$ tal que:

$$\left\|\Delta^{-1} v\right\|_{H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)} \leq c_1 |v|_{L^2(\Omega)}, \ \forall\, v \in L^2(\Omega).$$

agora para cada $v \in L^2(\Omega)$ existe um único $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tal que $-\Delta u = v$. Portanto,

$$\|u\|_{H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)} = \left\|\Delta^{-1}(-\Delta u)\right\|_{H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)} \leq c_1 |\Delta u|_{L^2(\Omega)},$$

como queríamos demonstrar.

■

Lema 1.3 *Seja* X *um espaço de Banach cujo espaço dual é representado por* X'. *Se* $u,\ g \in L^1(0, T; X)$, *as seguintes condições são equivalentes:*

(a) u é q.s. igual a primitiva de g, isto é,

$$u(t) = \xi + \int_0^t g(s)\, ds,\ \xi \in X, \text{ independente de } t.$$

(b) Para cada $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$

$$\int_0^T u(t)\, \varphi'(t)\, dt = -\int_0^T g(t)\, \varphi(t)\, dt \text{ em } X.$$

(c) Para cada $x' \in X$,

$$\frac{d}{dt} \langle u(t), x' \rangle = \langle g(t), x' \rangle,$$

no sentido das distribuições sobre $(0, T)$.

Demonstração: As equivalências serão provadas na seguinte ordem.

$a \Rightarrow c \Rightarrow b \Rightarrow a$.

Da hipótese (a), para cada $x' \in X'$, obtém-se

$$\langle u(t), x'\rangle = \langle \xi, x'\rangle + \left\langle \int_0^t g(s)\, ds, x' \right\rangle.$$

Derivando no sentido das distribuições sobre$[0,T]$, tem-se

$$\left\langle \frac{d}{dt}\langle u(t), x'\rangle, \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{d}{dt}\langle \xi, x'\rangle, \varphi \right\rangle + \left\langle \frac{d}{dt}\left\langle \int_0^t g(s)\, ds, x' \right\rangle, \varphi \right\rangle$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$.

Observe que,

$$\left\langle \frac{d}{dt}\langle \xi, x'\rangle, \varphi \right\rangle = 0, \text{ pois } \langle \xi, x'\rangle \text{ é constante.}$$

Além disso, usando a definição de derivada aliada ao fato de que $\left\langle \int_0^t g(s)\, ds, x' \right\rangle \in L^1(0,T)$ e $x' \in X'$, obtém-se que

$$\left\langle \frac{d}{dt}\left\langle \int_0^t g(s)\, ds, x' \right\rangle, \varphi \right\rangle = -\int_0^T \left(\int_0^t \langle g(s)\, ds, x'\rangle\, ds \right) \varphi'(t)\, dt,$$

donde , integrando por partes resulta que

$$\left\langle \frac{d}{dt}\left\langle \int_0^t g(s)\, ds, x' \right\rangle, \varphi \right\rangle = -\int_0^T \langle g(s)\, ds, x'\rangle\, \varphi(t)\, dt,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$.

Assim,

$$\left\langle \frac{d}{dt}\langle u(t), x'\rangle, \varphi \right\rangle = \langle \langle g(t), x'\rangle\, \varphi\rangle$$

ou $\dfrac{d}{dt}\langle u(t), x'\rangle = \langle g(t), x'\rangle \ \forall x' \in X'$ em $\mathcal{D}'(0,T)$.

(c) implica (b). Por hipótese ,

$$\left\langle \frac{d}{dt}\langle u(t), x'\rangle, \varphi \right\rangle = \langle \langle g(t), x'\rangle, \varphi\rangle \ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T),$$

logo,

$$-\int_0^T \langle u(t), x'\rangle\, \varphi'(t)\, dt = \int_0^T \langle g(t), x'\rangle\, \varphi(t)\, dt.$$

Isto implica que

$$\left\langle -\int_0^T u(t)\, \varphi'(t)\, dt, x' \right\rangle = \left\langle \int_0^T g(t)\, \varphi(t)\, dt, x' \right\rangle,$$

pois,

$$-\int_0^T \langle u(t), x'\rangle \varphi'(t)\,dt = -\int_0^T \langle u(t)\varphi'(t), x'\rangle\,dt = \left\langle -\int_0^T u(t)\varphi'(t)\,dt, x'\right\rangle$$

e

$$\int_0^T \langle g(t), x'\rangle \varphi(t)\,dt = \int_0^T \langle g(t)\varphi(t), x'\rangle\,dt = \left\langle \int_0^T g(t)\varphi(t)\,dt, x'\right\rangle.$$

Portanto,

$$-\int_0^T u(t)\varphi'(t)\,dt = \int_0^T g(t)\varphi(t)\,dt.$$

(b) implica (a). Seja $v \in L^1(0, T : X)$ a função definida em $[0, T]$ por

$$v(t) = u(t) - \int_0^t g(s)\,ds.$$

Tomando a derivada de $v(t)$ no sentido das distribuições vetoriais sobre $(0, T)$, tem-se

$$-\langle v'(t), \varphi(t)\rangle = \langle v(t), \varphi'(t)\rangle = \langle u(t), \varphi'(t)\rangle - \left\langle \int_0^t g(s)\,ds, \varphi'(t)\right\rangle =$$
$$= \int_0^T u(t)\varphi'(t)\,dt - \int_0^T \int_0^t g(s)\,ds\varphi'(t)\,dt,$$

integrando por partes o último termo do lado direito e fazendo uso da hipótese obtém-se

$$\langle v'(t), \varphi(t)\rangle = \int_0^T u(t)\varphi'(t)\,dt - \int_0^T g(t)\,dt = 0.$$

Portanto, pelo lema (??) segue que v é uma constante, concluindo assim a prova do lema.

■

Lema 1.4 *Sejam* X*,* Y *dois espaços de Banach, tal que* $X \subset Y$ *com injeção contínua.*

Se,

$$u \in L^1(0, T; X) \text{ e } \frac{du}{dt} \in L^1(0, T; Y),$$

então $u \in C^0([0, T], Y)$.

Demonstração: Claramente $u \in L^1(0, T; Y)$, desde que a imersão de X em Y é contínua. Assim u e $\dfrac{du}{dt}$ pertencem a $L^1(0, T; Y)$.Então por definição de distribuição vetorial,

$$\left\langle \frac{du}{dt}, \varphi(t)\right\rangle = \int_0^T \frac{du(s)}{ds}\varphi(s)\,ds.$$

Por outro lado,

$$\left\langle \frac{du}{dt}, \varphi(t) \right\rangle = \langle -u(t), \varphi'(t) \rangle = -\int_0^T u(s)\, \varphi'(s)\, ds,$$

logo,

$$\int_0^T \frac{du(s)}{ds} \varphi(s)\, ds = -\int_0^T u(s)\, \varphi'(s)\, ds,$$

que é (b) do lema (1.4).

Portanto usando o lema (1.4) com $g = \dfrac{du}{dt}$ conclui-se que existe uma função contínua em $[0, T]$ com valores em Y que é igual a u exceto em um conjunto de medida nula.

■

Lema 1.5 ***(Desigualdade de Poincaré Friedrichs).*** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, se $u \in H_0^1(\Omega)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|u|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\, |\nabla u|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver Medeiros-Milla

Capítulo 2

Existência e Unicidade de Soluções

Este capítulo é dedicado a obtenção dos resultados de existência e unicidade de soluções fraca e forte do problema

$$\begin{cases} u'' + \Delta^2 u + a(x)\, u' = 0 \text{ em } Q = \Omega \times (0,T) \\ u(x,t) = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Sigma = \Gamma \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x)\,,\ u'(x,0) = u_1(x) \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{*}$$

onde Ω é um domínio aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ com fronteira regular Γ e $T > 0$ um número real arbitrário.

É importante observar que no que diz respeito a existência e unicidade de solução fraca é suficiente considerar o coeficiente de damping $a(x) \in L^\infty(\Omega)$. No entanto para obtenção da solução forte faz-se necessário tomar $a(x)$ pertencente ao conjunto $\mathcal{H}^{2,\infty}(\Omega)$ definido por:

$$\mathcal{H}^{2,\infty}(\Omega) = \left\{ v \in L^\infty(\Omega);\ \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^\infty(\Omega) \text{ e } \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \in L^\infty(\Omega)\,,\ \forall\, i = 1, ..., n \right\}.$$

O método a ser utilizado para provar a existência de soluções fraca e forte do problema $(*)$ será o de Faedo-Galerkin.No caso de solução fraca a unicidade é obtida pelo método de Ladyzhenskaya enquanto a unicidade da solução forte é obtida empregando o método da energia.

2.1 Existência e Unicidade de Solução Fraca

Nesta seção serão demonstradas a existência e unicidade de soluções fracas do problema $(*)$

Teorema 2.1 *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado com fronteira regular* Γ, $a \in L^\infty(\Omega)$, $u_0 \in H_0^2(\Omega)$ *e* $u_1 \in L^2(\Omega)$. *Então existe uma única função* $u : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que:*

$$u \in L^\infty\left(0, T; H_0^2(\Omega)\right) \tag{2.1}$$

$$u' \in L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right) \tag{2.2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(u'(t), v\right) + \left(\Delta u(t), \Delta v\right) + \left(a(x) u(t), v\right) = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(0, T) \text{ e } \forall v \in H_0^2(\Omega). \tag{2.3}$$

$$u'' \in L^2\left(0, T; H^{-2}(\Omega)\right) \tag{2.4}$$

$$u'' + \Delta^2 u + a(x) u' = 0 \text{ em } L^2\left(0, T; H^{-2}(\Omega)\right). \tag{2.5}$$

$$u(0) = u_0,\ u'(0) = u_{1.} \tag{2.6}$$

Demonstração: 1ª Parte-Existência

Como foi dito anteriormente, será utilizado o método de Faedo-Galerkin, que consiste em resolver o problema em um subespaço de dimensão finita, obtendo uma sequência de soluções aproximadas (u_m), em seguida fazer estimativas sobre as soluções com o objetivo de poder garantir a extensão destas soluções a um intervalo que independa de m e mostrar que a sequência de soluções aproximadas converge para a solução desejada.

(i) Pr**oblema Aproximado**

Como $H_0^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável, ele possui uma base Hilbertiana $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Considerando-se $V_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$ o subespaço de $H_0^2(\Omega)$ gerado pelos m primeiros vetores w_j, o problema aproximado consiste em determinar $u_m(t) \in V_m$, representado por

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j \tag{2.7}$$

tal que

$$\left(u_m''(t), v\right) + \left(\Delta u_m(t), \Delta v\right) + \left(a(x) u_m'(t), v\right) = 0,\ \forall\, v \in V_m. \tag{2.8}$$

Sendo $u_0 \in H_0^2(\Omega)$, existe uma sucessão $(u_{0m})_{m\in\mathbb{N}}$ em V_m tal que

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} u_{0m} = u_0 \text{ forte em } H_0^2(\Omega). \tag{2.9}$$

Como $u_1 \in L^2(\Omega)$, e $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, existe uma sucessão $(u_{1m})_{m\in\mathbb{N}}$ em V_m tal que

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} u_{1m} = u_1 \text{ forte em } L^2(\Omega). \tag{2.10}$$

Em face dessas propriedades de u_0 e u_1, toma-se as seguintes condições inicias para o Sistema de Equações Ordinárias (2.8)

$$\begin{aligned} u_m(0) &= u_{0m} \longrightarrow u_0 \text{ em } H_0^2(\Omega) \\ u'_m(0) &= u_{1m} \longrightarrow u_1 \text{ em } L^2(\Omega). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Resumindo tem-se o seguinte sistema a ser resolvido

$$\begin{cases} (u''_m(t), v) + (\Delta u_m(t), \Delta v) + (a(x)\, u'_m(t), v) = 0 \ \forall\, v \in V_m \\ u_m(0) = u_{0m} \longrightarrow u_0, \text{ forte em } H_0^2(\Omega) \\ u'_m(0) = u_{1m} \longrightarrow u_1, \text{ forte em } L^2(\Omega). \end{cases} \tag{2.12}$$

Substituindo $u_m(t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t)\, w_j$ na equação $(2.12)_1$, tem-se que

$$\left(\sum_{j=1}^m g''_{jm}(t)\, w_j, w_\nu\right) + \left(\Delta \sum_{j=1}^m g_{jm}(t)\, w_j, \Delta w_\nu\right) + \left(a(x) \sum_{j=1}^m g'_{jm}(t)\, w_j, w_\nu\right) = 0,$$

ou seja,

$$\sum_{j=1}^m g''_{jm}(t)\,(w_j, w_\nu) + \sum_{j=1}^m g_{jm}(t)\,(\Delta w_j, \Delta w_\nu) + \sum_{j=1}^m g'_{jm}(t)\,(a(x)\, w_j, w_\nu) = 0.$$

Seja $\beta_{j\nu} = (w_j, w_\nu)$, $\alpha_{j\nu} = (\Delta w_j, \Delta w_\nu)$ e $\gamma_{j\nu} = (a(x)\, w_j, w_\nu)$, então:

$$\sum_{j=1}^m g''_{jm}(t)\, \beta_{j\nu} + \sum_{j=1}^m g_{jm}(t)\,(\Delta w_j, \Delta w_\nu) + \sum_{j=1}^m g'_{jm}(t)\,(a(x)\, w_j, w_\nu) = 0.$$

Tem-se que a matriz $(\beta_{j\nu})_{1\leq j,\nu\leq m}$ é invertível, pois os vetores w_j são linearmente independente em $L^2(\Omega)$.

Colocando em forma matricial, sejam:

$$A_m = (\alpha_{j\nu})_{1\leq j,\nu\leq m} = \begin{bmatrix} (\Delta w_1, \Delta w_1) & \cdots & (\Delta w_1, \Delta w_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\Delta w_m, \Delta w_1) & \cdots & (\Delta w_m, \Delta w_m) \end{bmatrix},$$

$$B_m = (\beta_{j\nu})_{1\leq j,\nu\leq m} = \begin{bmatrix} (w_1, w_1) & \cdots & (w_1, w_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_m, w_1) & \cdots & (w_m, w_m) \end{bmatrix},$$

$$C_m = (\gamma_{j\nu})_{1\leq j,\nu\leq m} = \begin{bmatrix} (aw_1, w_1) & \cdots & (aw_1, w_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (aw_m, w_1) & \cdots & (aw_m, w_m) \end{bmatrix}$$

e

$$G_m(t) = \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, pode-se escrever que

$$G''_m(t) = -B_m^{-1} A_m G_m(t) - B_m^{-1} C_m G'_m(t).$$

Defina:

$$H_m(t) = G'_m(t),$$

e consequentemente obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} G'_m(t) = H_m(t) \\ H'_m(t) = -B_m^{-1} A_m G_m(t) - B_m^{-1} C_m H_m(t), \end{cases}$$

ou ainda,

$$Y'_m(t) = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{I} \\ -B_m^{-1} A_m & -B_m^{-1} C_m \end{bmatrix} Y_m(t),$$

onde a matriz $\overline{0}$ é a matriz nula $m \times m$ e $\overline{I}$ é a matriz identidade $m \times m$ e

$$Y_m(t) = \begin{bmatrix} G_m(t) \\ H_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \\ h_{1m}(t) \\ \vdots \\ h_{mm}(t) \end{bmatrix}.$$

Como $u_0 \in H_0^2(\Omega)$, temos que $u_0 = \sum_{j=1}^{\infty} ((u_0, w_j)) w_j$. Mas $u_m(0) = u_{0m} = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(0) w_j$, logo $u_{0m} \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} u_0$ em $H_0^2(\Omega)$, $g_{jm}(0) = ((u_0, w_j))$. Note também que, por ser $H_0^2(\Omega)$ denso em $L^2(\Omega)$, tem-se que existe $u_{1m} \in V_m$ tal que $u_{1m} \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} u_1$ em $L^2(\Omega)$ e $g'_{jm}(0) = \mu_{jm}$, uma vez que $u_1 = \sum_{j=1}^{m} \mu_{jm} w_j$ e $u'_m(0) = u_{1m} = \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(0) w_j$. Assim, segue que:

$$Y_m(0) = Y_{0m} = \begin{bmatrix} G_m(0) \\ H_m(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{1m}(t) \\ \vdots \\ \mu_{mm}(t) \\ ((u_0, w_1)) \\ \vdots \\ ((u_0, w_m)) \end{bmatrix}.$$

Tome $F_m(t, Y_m) = \xi_m Y_m$, e segue o seguinte problema de Cauchy,

$$\begin{cases} Y'_m(t) = F_m(t, Y_m) \\ Y_m(0) = Y_{0m} \end{cases} \tag{2.13}$$

para o qual, se verificar-se-á as condições do *Teorema de Carathéodory.*

Seja:

$$R = \left\{ (t, Y_m) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{2m};\ t \leq a,\ |Y_m - Y_{0m}| \leq b,\ \text{com } a, b > 0 \right\},$$

então:

- $F_m(t, Y_m)$ é mensurável em t, para cada Y_m fixa.

De fato, fixando Y_m, vê-se claramente $F_m(t, Y_m)$ é mensurável em t, uma vez que $\xi_m Y_m$ independem de t.

- $F_m(t, Y_m)$ é conítnua em Y_m para cada t fixo.

De fato, segue imediato do fato de que $F_m(\cdot, Y_m)$ ser linear.

- Seja K um compacto de R, existe uma função real integrável $m_K(t)$ tal que $|F_m(t, Y_m)| \leq m_K(t)$, $\forall\ (t, Y_m) \in K$.

De fato, como $F_m(t, Y_m)$ é conítnua em R, então F_m é contínua em K compacto, e portanto em cada compacto onde Y_m está definida, ela é limitada por uma constante.

Logo, estão satisfeitas as condições do *Teorema de Carathéodory* e segue que, para cada m, o sistema (2.13) possui solução local no intervalo $[0, t_m)$, $t_m < T$. Obtendo-se assim, as funções $g_{jm}(t)$, $j = 1, 2, ..., m$, e por conseguinte, as funções $u_m(t)$ com $t \in [0, t_m)$, $t_m < T$, que satisfazem o problema (2.12).

O sistema (2.12) possui solução $u_m(t)$ para $t \in [0, t_m)$ o prolongamento destas soluções aproximadas ao intervalo $[0, T]$, bem como sua convergência, obtém-se por intermédio das estimativas que vêm a seguir.

(ii) **Estimativas:**

Tomando $v = u'_m(t) \in V_m$ no sistema aproximado (2.8) obtém-se:

$$\left(u''_m(t), u'_m(t)\right) + \left(\Delta u_m(t), \Delta u'_m(t)\right) + \left(a(x)\, u'_m(t), u'_m(t)\right) = 0\ \forall\ v \in V_m, \tag{2.14}$$

ou seja

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{|u'_m(t)|^2 + |\Delta u_m(t)|^2\right\} = -\left(a(x)\, u'_m(t), u'_m(t)\right) \forall\ v \in V_m. \tag{2.15}$$

Como $a(x) \in L^\infty(\Omega)$, então o lado direito de (2.15) pode ser majorado da seguinte forma

$$\begin{aligned} &-\left(a(x)\, u'_m(t), u'_m(t)\right) \leq |\left(a(x)\, u'_m(t), u'_m(t)\right)| \leq \\ &\leq \int_\Omega |a(x)|\, |u'_m(t)|\, |u'_m(t)|\, dx \leq k_0 \int_\Omega |u'_m(t)|^2\, dx = k_0\, |u'_m(t)|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Portanto, (2.15) e (2.16), implicam que

$$\frac{d}{dt}\left\{|u'_m(t)|^2+|\Delta u_m(t)|^2\right\}\leq 2k_0|u'_m(t)|^2_{L^2(\Omega)},$$

e integrando essa última desigualdade com respeito a t,onde $0<t<t_m$, obtém-se

$$|u'_m(t)|^2+|\Delta u_m(t)|^2\leq |u'_m(0)|^2+|\Delta u_m(0)|^2+2k_0\int_0^t|u'_m(s)|^2\,ds.$$

Devido as convergências em (2.9) e (2.10) existem constantes k_1 e k_2 tais que

$$|u'_m(0)|^2=|u_{1m}|^2\leq k_1 \quad \text{e} \quad |\Delta u_m(0)|^2=|u_{0m}|_2\leq k_2.$$

Dessa forma, fazendo $k_3=k_1+k_2$, resulta de $(*)$ que

$$|u'_m(t)|^2+|\Delta u_m(t)|^2\leq k_3+2k_0\int_0^t|u'_m(s)|^2\,ds. \tag{2.17}$$

Aplicando a Desigualdade de Gronwall em (2.17), conclui-se que

$$|u'_m(t)|^2+|\Delta u_m(t)|^2\leq k_3e^{\int_0^t 2k_0\,ds}\leq ce^{2a_0T}=k_4(T). \tag{2.18}$$

Consequentemente

$$\|u'_m(t)\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}=\sup_{t\in(0,T)}\text{ess}\,|u'_m(t)|_{L^2(\Omega)}\leq k_4(T), \tag{2.19}$$

e

$$\|\Delta u_m(t)\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}=\sup_{t\in(0,T)}\text{ess}\,|\Delta u_m(t)|_{L^2(\Omega)}\leq k_4(T), \tag{2.20}$$

onde $c_3(T)$ é uma constante que independe de m e t. Assim, de (2.19), obtém-se

$$(u'_m) \text{ é limitada em } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right). \tag{2.21}$$

Em virtude da equivalência das normas provada no lema 1.2, de (2.20), segue-se que

$$(u_m) \text{ é limitada em } L^\infty\left(0,T;H_0^2(\Omega)\right). \tag{2.22}$$

(iii)**Passagem ao Limite**

Em vista de (2.21) e (2.22), existe uma subsequência de (u_m), ainda denotada da mesma forma, tal que

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty\left(0,T;H_0^2(\Omega)\right) \tag{2.23}$$

e

$$u'_m \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{u}\text{em } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right). \tag{2.24}$$

Prova-se a seguir que $\bar{u} = u'$.

De fato, da convergência (2.23) e do fato de que $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, obtém-se

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$$

e consequentemente,

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \equiv L^2(Q).$$

Como convergência fraca em $L^2(Q)$ implica em convergência no sentido das distribuições, resulta que

$$u_m \rightharpoonup u \text{ em } \mathcal{D}'(Q).$$

Sendo a derivação, uma operação contínua em $\mathcal{D}'(Q)$ tem-se que:

$$u'_m \rightharpoonup u' \text{ em } \mathcal{D}'(Q). \tag{2.25}$$

Por outro lado, de (2.24) obtém-se analogamente que,

$$u'_m \rightharpoonup \bar{u} \text{ em } \mathcal{D}'(Q). \tag{2.26}$$

Portanto, da unicidade do limite fraco, de (2.25) e (2.26) segue que

$$\bar{u} = u \text{ quase sepre em } Q.$$

Logo,

$$u'_m \overset{*}{\rightharpoonup} u' \text{ em } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right). \tag{2.27}$$

Desta forma em (2.23) e (2.27) encontra-se uma função u que verifica as condições (2.1) e (2.2) do teorema (2.1). Resta mostrar que esta função satisfaz (2.4), a equação (2.5) e as condições iniciais (2.6).

Da convergência (2.27), segue-se que

$$\langle u'_m, w\rangle \longrightarrow \langle u', w\rangle, \ \forall\, w \in L^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$$

sendo $\langle .,. \rangle$ a dualidade entre $L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ e $L^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$.

Logo,

$$\int_0^T \left(u'_m(t), w(t)\right) dt \longrightarrow \int_0^T \left(u'(t), w(t)\right) dt, \ \forall\ w \in L^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right).$$

Em particular, tomando $w = \theta' v$, $\theta' \in \mathcal{D}(0,T)$ e $v \in H_0^2(\Omega)$ obtém-se

$$\int_0^T \left(u'_m(t), v\right) \theta'(t)\, dt \longrightarrow \int_0^T \left(u'(t), v\right) \theta'(t)\, dt. \tag{2.28}$$

A convergência (2.23), implica que

$$\Delta u_m \overset{*}{\rightharpoonup} \Delta u \text{ em } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right),$$

o que implica que

$$\langle \Delta u_m, w \rangle \to \langle \Delta u, w \rangle \ \text{ em } L^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right),$$

ou seja,

$$\int_0^T \left(\Delta u_m(t), w(t)\right) dt \longrightarrow \int_0^T \left(\Delta u(t), w(t)\right) dt, \ \forall\ w \in L^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right).$$

Tomando, em particular, $w = \theta \Delta v$, onde $v \in H_0^2(\Omega)$, resulta que

$$\int_0^T \left(\Delta u_m, \Delta v\right) \theta(t)\, dt \to \int_0^T \left(\Delta u(t), \Delta v\right) \theta(t)\, dt. \tag{2.29}$$

Observe aora que $(a u'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$, logo tem-se que

$$a u'_m \to a u' \text{ em } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right),$$

e daí, tem-se que

$$\langle a u'_m, w \rangle \longrightarrow \langle a u', w \rangle, \ \forall\ w \in L^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right).$$

Logo,

$$\int_0^T \left(a(x)\, u'_m(t), w\right) dt \longrightarrow \int_0^T \left(a(x)\, u'(t), w\right) dt.$$

Tomando em particular $w = \theta v$, $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $v \in H_0^2(\Omega)$, segue que

$$\int_0^T \left(a(x)\, u'_m(t), v\right) \theta(t)\, dt \longrightarrow \int_0^T \left(a(x)\, u'(t), v\right) \theta(t)\, dt. \tag{2.30}$$

Multiplicando a equação aproximada (2.8) por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ integrando de 0 a T, vem que

$$\int_0^T \left(u''_m(t), v\right) \theta(t)\, dt + \int_0^T (\Delta u_m(t), \Delta v)\, \theta(t)\, dt + \int_0^T (a(x)\, u'_m(t), v)\, \theta dt = 0, \ \forall\, v \in V_m. \tag{2.31}$$

Observando que $\left(u''_m(t), v\right) = \dfrac{d}{dt}(u'_m(t), v)$ e fazendo integração por partes na primeira integral tem-se que

$$-\int_0^T (u'_m(t), v)\, \theta'(t)\, dt + \int_0^T (\Delta u_m(t), \Delta v)\, \theta(t)\, dt + \int_0^T (a(x)\, u'_m(t), v)\, \theta dt = 0. \tag{2.32}$$

Fixe m_0 talque $m > m_0$ e considere $v \in V_{m_0}$. Fazendo $m \to \infty$ em (2.32), em consequência das convergências (2.28), (2.29) e (2.30) resulta que

$$-\int_0^T (u'(t), v)\, \theta'(t)\, dt + \int_0^T (\Delta u(t), \Delta v)\, \theta(t)\, dt + \int_0^T (a(x)\, u'(t), v)\, \theta dt = 0, \ \forall\, v \in V_{m_0}.$$

Como m_0 foi fixado arbitrariamente, segue que esta equação segue $\forall\, v \in V_m$, e pela densidade de V_m em $H_0^2(\Omega)$, pode-se afirmar que

$$-\int_0^T (u'(t), v)\, \theta'(t)\, dt + \int_0^T (\Delta u(t), \Delta v)\, \theta(t)\, dt + \int_0^T (a(x)\, u'(t), v)\, \theta(t)\, dt = 0, \ \forall\, v \in H_0^2(\Omega).$$

Como $u \in L^\infty\left(0,T; H_0^2(\Omega)\right)$ e u' e $au' L^\infty\left(0,T; L^2(\Omega)\right)$ então as aplicações $t \mapsto (\Delta u(t), \Delta v)$, $t \mapsto (u'(t), v)$ e $t \mapsto (au'(t), v)$ estão em $L^\infty(0,T)$ e portanto definem uma distribuição sobre $(0,T)$, logo

$$-\langle (u'(t), v), \theta'(t)\rangle + \langle (\Delta u(t), \Delta v), \theta(t)\rangle + \langle (a(x)\, u'(t), v), \theta(t)\rangle, \ \forall\, \theta \mathcal{D}(0,T),$$

utilizando derivadas no sentido das distribuições, obtém-se

$$\begin{gathered}\left\langle \frac{d}{dt}(u'(t), v) + (\Delta u(t), \Delta v) + (a(x)\, u(t), v), \theta(t) \right\rangle_{\mathcal{D}'(0,T)\times\mathcal{D}(0,T)} = 0, \\ \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T) \ \text{ e } \forall v \in H_0^2(\Omega),\end{gathered} \tag{2.33}$$

ou de modo equivalente,

$$\frac{d}{dt}(u'(t), v) + (\Delta u(t), \Delta v) + (a(x)\, u(t), v) = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(0,T) \ \text{ e } \forall v \in H_0^2(\Omega).$$

E assim tem-se provado a condição (2.3) do teorema (2.1).

A seguir será mostrado que :

$$u'' \in L^2\left(0,T;H^{-2}(\Omega)\right) \text{ e } u'' + \Delta^2 u + a(x)u' = 0 \text{ em } L^2\left(0,T;H^{-2}(\Omega)\right).$$

De fato, usando derivada no sentido das distribuições, de (2.33) , obtém-se que

$$-\int_0^T (u'(t),v)\,\theta'(t)\,dt + \int_0^T (\Delta u(t),\Delta v)\,\theta(t)\,dt + \int_0^T (a(x)u'(t),v)\,\theta(t)\,dt = 0.$$

Observando que

$$(\Delta u(t),\Delta v) = \langle \Delta u(t),\Delta v\rangle_{H^{-2}(\Omega)\times H_0^2(\Omega)} \qquad (a(x)u'(t),v) = \langle a(x)u'(t),v\rangle_{H^{-2}(\Omega)\times H_0^2(\Omega)}$$

e $(u'(t),v) = \langle u'(t),v\rangle_{H^{-2}(\Omega)\times H_0^2(\Omega)}$,

da igualdade anterior, segue que

$$-\int_0^T (u'(t)\,\theta'(t))\,dt, v_{H^{-2}(\Omega)\times H_0^2(\Omega)} = \left\langle \int_0^T -\left(\Delta u^2(t) + a(x)u'(t)\right)\theta(t)\,dt, v\right\rangle_{H^{-2}(\Omega)\times H_0^2(\Omega)}$$

$\forall v \in H_0^2(\Omega)$.

implicando que

$$-\left\langle \int_0^T u'(t)\,\theta'(t)\,dt, v\right\rangle_{H^{-2}(\Omega)\times H_0^2(\Omega)} = \left\langle \int_0^T -\left(\Delta u^2(t) + a(x)u'(t)\right)\theta(t)\,dt, v\right\rangle_{H^{-2}(\Omega)\times H_0^2(\Omega)}$$

$\forall v \in H_0^2(\Omega)$.

consequentemente,

$$-\int_0^T u'(t)\,\theta'(t)\,dt = \int_0^T g(t)\,\theta(t)\,dt \text{ em } H^{-2}(\Omega) \tag{2.34}$$

onde $g(t) = -\left(\Delta u^2(t) + a(x)u'(t)\right)$.

Visto que u', $g \in L^2\left(0,T;H^{-2}(\Omega)\right)$ e satisfazem (2.34) que é a condição (b) do lema (??) segue que

$$u'(t) = \xi + \int_0^t g(s)\,ds, \text{ sendo } \xi \text{ uma é constante,}$$

Portanto,

$$u''(t) = g(t) \in L^2\left(0,T;H^{-2}(\Omega)\right).$$

o que mostra as condições (2.4) e (2.5) do teorema 2.1.

(iv)**Verificação dos Dados Iniciais**

Para concluir a demonstração da existência resta mostrar que a solução u verifica os dados iniciais.

Observe que obteve-se $u \in L^\infty\left(0,T;H_0^2(\Omega)\right)$, $u' \in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ e $u'' \in L^2\left(0,T;H^{-2}(\Omega)\right)$, então do lema (1.4) resulta que $u \in C^0\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$ e $u' \in C^0\left([0,T];H^{-2}(\Omega)\right)$. Assim faz sentido calcular $u(0)$ e $u'(0)$.

Da convergência fraco-estrela

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty\left(0,T;H_0^2(\Omega)\right).$$

conclui-se que $\forall\theta \in C^1([0,T];\mathbb{R})$ com $\theta(T)=0$, encontra-se

$$\int_0^T (u_m(t),v)\,\theta'(t)\,dt \to \int_0^T (u(t),v)\,\theta'(t)\,dt \;\forall v \in H_0^2(\Omega). \tag{2.35}$$

Analogamente, sendo $(u_m')_{m\in\mathcal{N}}$ convergente para ú fraco-estrela em $L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$, deduz-se que para as θ escolhida acima, obtém-se

$$\int_0^T (u_m'(t),v)\,\theta(t)\,dt \to \int_0^T (u'(t),v)\,\theta(t)\,dt \;\forall v \in V. \tag{2.36}$$

Somando (2.35) e (2.36) obtém-seque

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\left[(u_m(t),v)\,\theta(t)\right]dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}\left[(u(t),v)\,\theta(t)\right]dt \;\forall v \in H_0^2(\Omega) \subset L^2(\Omega).$$

Logo, sendo $\theta(T)=0$, resulta

$$(u_m(0),v)\,\theta(0) \to (u(0),v)\,\theta(0) \;\;\forall v \in H_0^2(\Omega). \tag{2.37}$$

Sendo $(u_{0m})_{m\in\mathbb{N}}$ convergente forte para u_0 em $H_0^2(\Omega)$, ela converge forte em $L^2(\Omega)$, pois $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, logo converge fraco em $L^2(\Omega)$, provando que $u(0)=u_0$, em virtude de (2.37) com $\theta(0)\neq 0$.

Resta verificar que $u'(0)=u_1$. Para tal considera-se a equação aproximada

$$\frac{d}{dt}(u_m'(t),v) + b(u_m(t),v) + (a(x)\,u_m'(t),v) = 0 \;\forall v \in V_m, \text{ com } v = w_j \in V_m, \text{ j fixo.}$$

Multiplicando ambos os membros por $\theta \in C^1([0,T];\mathbb{R})$, $\theta(T)=0$, integrando de 0 a T vem que

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u_m'(t),v)\,\theta(t)\,dt + \int_0^T (\Delta u_m(t),\Delta v)\,\theta(t)\,dt + \int_0^T (a(x)\,u_m'(t),v)\,\theta(t)\,dt = 0$$

Integrando por parte, resulta que

$$-\int_0^T (u'_m(t), v)\,\theta'(t)\,dt + \int_0^T (\Delta u_m(t), \Delta v)\,\theta(t)\,dt + \int_0^T (a(x)\,u'_m(t), v)\,\theta(t)\,dt = (u'_m(0), v)\,\theta(0).$$

Fixando j menor do que m, e tomando o limite quando m tende para o infinito, obtém-se que

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T (u'(t), v)\,\theta'(t)\,dt + \int_0^T (\Delta u(t), \Delta v)\,\theta(t)\,dt + \\
&+\int_0^T (a(x)\,u'(t), v)\,\theta(t)\,dt = (u_1, v)\,\theta(0) \quad \forall v \in H_0^2(\Omega).
\end{aligned}$$

Após integração por partes, tem-se que

$$\begin{aligned}
&(u'(0), v)\,\theta(0) + \int_0^T \frac{d}{dt}(u'(t), v)\,\theta(t)\,dt + \int_0^T (\Delta u(t), \Delta v)\,\theta(t)\,dt + \\
&+\int_0^T (a(x)\,u'(t), v)\,\theta(t)\,dt = (u_1, v)\,\theta(0)\,\forall v \in H_0^2(\Omega).
\end{aligned}$$

Tomando θ de modo que $\theta(0) \neq 0$, sendo $H_0^2(\Omega)$ denso em $L^2(\Omega)$ e u solução nas condições do Teorema, tem-se que $u'(0) = u_1$.

(v)**Unicidade**

Sejam w_1 e w_2 soluções do Teorema.(2.1) Considere $w = w_1 - w_2$, então w satisfaz o seguite problema

$$\frac{d}{dt}(w'(t), v) + (\Delta w(t), \Delta v) + (a(x) w'(t), v) = 0 \ \forall v \in H_0^2(\Omega), \text{ no sentido de } \mathcal{D}'(0,T).$$
$$w \in L^\infty\left(0,T; H_0^2(\Omega)\right)$$
$$w' \in L^\infty\left(0,T; L^2(\Omega)\right)$$
$$w'' \in L^\infty\left(0,T; H^{-2}(\Omega)\right)$$
$$w(0) = w'(0) = 0.$$

Como $w'' + \Delta^2 w + a(x) w' = 0$ em $L^2\left(0,T; H^{-2}(\Omega)\right)$, então

$$\int_0^T \left\langle w''(t) + Aw(t) + a(x) w'(t), r \right\rangle_{H_0^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)'} dt = 0, \ r = \theta v,$$
$$v \in H_0^2(\Omega) \ \text{ e } \theta \in C^1([0,T];\mathbb{R}) \ \text{ com } \theta(T) = 0.$$

Assim,

$$-\int_0^T \langle w'(t), v\theta'(t)\rangle dt + \int_0^T b(w(t), v\theta(t)) dt + \int_0^T (a(x) w'(t), v\theta(t)) dt = 0$$
$$v \in V \text{ e } \theta \in C^1([0,T];\mathbb{R}) \ \text{ com } \theta(T) = 0.$$

Portanto,

$$-\int_0^T (w'(t), v\theta'(t)) dt + \int_0^T (\Delta w(t), \Delta v\theta(t)) dt + \int_0^T (a(x) w'(t), v\theta(t)) dt = 0$$
$$v \in V \text{ e } \theta \in C^1([0,T];\mathbb{R}) \ \text{ com } \theta(T) = 0. \tag{2.38}$$

Considere as

$$\varphi \in L^2\left(0,T; H_0^2(\Omega)\right), \ \varphi' \in L^2\left(0,T; L^2(\Omega)\right) \ \text{ com } \theta(T) = 0. \tag{2.39}$$

Mostra-se que as somas finitas de produtos do tipo $v\theta$, com $v \in H_0^2(\Omega)$ e $\theta \in C^1([0,T];\mathbb{R})$, $\theta(T) = 0$, é denso no espaço de funções definido em (2.39). Portanto (2.38) vale $\forall \varphi$ nas condições de (2.39).

Dada a solução w mencionada acima, isto é, $w = w_1 - w_2$, considere a função:

$$\Psi(t) = \begin{cases} -\int_t^s w(\sigma)\, d\sigma \text{ se } 0 \le t \le s \\ 0 \text{ se } s < t \le T. \end{cases}$$

Obtém-se que

$$\Psi(t) = \int_0^s w(\sigma)\, d\sigma - \int_0^s w(\sigma)\, d\sigma,\ \Psi'(t) = w(t)$$

com as integrais calculadas em $H_0^2(\Omega)$. Esta função Ψ esta nas condições (2.39). Portanto, substituindo Ψ em (2.38), tem-se

$$-\int_0^s (w'(t), \Psi'(t))\, dt + \int_0^s (\Delta w(t), \Delta\Psi'(t))\, dt + \int_0^s (a(x)\, w'(t), \Psi'(t))\, dt = 0. \tag{2.40}$$

Calculando separadamente as integrais, encontra-se

$$-\int_0^s (w'(t), \Psi'(t))\, dt = -\int_0^s (w'(t), w(t))\, dt = -\int_0^s \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2\, dt = -\frac{1}{2}|w(s)|^2. \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^s (\Delta w(t), \Delta\Psi(t))\, dt = \int_0^s (\Delta\Psi'(t), \Delta\Psi(t)\, dt) = \\
&= \int_0^s \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\Delta\Psi(t)|^2\, dt = \frac{1}{2}|\Delta\Psi(s)|^2 - \frac{1}{2}|\Delta\Psi(0)|^2 = \\
&= -\frac{1}{2}|\Delta\Psi(0)|.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Agora, como

$$\frac{d}{dt}(a(x)\Psi'(t), \Psi(t)) = \Big(a(x)\Psi''(t), \Psi(t)\Big) + (a(x)\Psi'(t), \Psi'(t)),$$

então

$$\Big(a(x)\Psi''(t), \Psi(t)\Big) = \frac{d}{dt}(a(x)\Psi'(t), \Psi(t)) - (a(x)\Psi'(t), \Psi'(t)),$$

e assim,

$$\int_0^s \Big(a(x)\Psi''(t), \Psi(t)\Big)\, dt = \int_0^s \frac{d}{dt}(a(x)\Psi'(t), \Psi(t))\, dt - \int_0^s (a(x)\Psi'(t), \Psi'(t))\, dt.$$

Observação 2.1

$$\begin{aligned}
&\int_0^s \big(a(x)\Psi''(t), \Psi(t)\big)\, dt = \int_0^s\int_\Omega a(x)\Psi'(t)\Psi'(t)\, dxdt = \\
&\int_0^s\int_\Omega \sqrt{a(x)}\sqrt{a(x)}\Psi'(t)\Psi'(t)\, dxdt = \int_0^s \Big(\sqrt{a(x)}\Psi'(t), \sqrt{a(x)}\Psi'(t)\Big)\, dt = \\
&= \int_0^s \Big|\sqrt{a(x)}\Psi'(t)\Big|^2_{L^2(\Omega)}\, dt.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^s \big(a(x)\Psi''(t),\Psi(t)\big)\,dt &= \big(a(x)\Psi'(s),\Psi(s)\big) - (a(0)\Psi'(0),\Psi(0)) - \\ &-\int_0^s \left|\sqrt{a(x)}\Psi'(t)\right|^2_{L^2(\Omega)} dt. \end{aligned} \tag{2.43}$$

e assim (2.43) se torna

$$\int_0^s \Big(a(x)\Psi''(t),\Psi(t)\Big)\,dt = -\int_0^s \left|\sqrt{a(x)}\Psi'(t)\right|^2_{L^2(\Omega)} dt. \tag{2.44}$$

Substituindo (2.41), (2.42) e (2.44) em (2.40) obtém-se

$$\frac{1}{2}|w(s)|^2 + \frac{1}{2}b(\Psi(0)) + \int_0^s \left|\sqrt{a(x)}\Psi'(t)\right|^2_{L^2(\Omega)} dt = 0,$$

donde

$$|w(s)|^2 = 0 \ \forall s \in [0,T],$$

o que implica que

$$w \equiv 0 \text{ em } [0,T].$$

isto é, $w_1 = w_2$, mostrando assim a unicidade do Teorema.

2.2 Existência e Unicidade de Solução Forte

Nesta seção serão demonstradas a existência e a unicidade de solução forte do problema $(*)$. Para isso considera-se dados iniciais mais regulares e utiliza-se a regularidade da solução obtida no Teorema (2.1). Além disso será necessário também considerar hipóteses adicionais sobre o coeficiente que aparece no termo dissipativo da equação.Mais precisamente, toma-se

$$a(x) \in \mathcal{H}^{2,\infty}(\Omega), \tag{H}$$

onde por $\mathcal{H}^{2,\infty}(\Omega)$ representa-se o espaço definido por:

$$\mathcal{H}^{2,\infty}(\Omega) = \left\{ v \in L^\infty(\Omega);\ \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^\infty(\Omega) \text{ e } \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \in L^\infty(\Omega),\ \forall\, i = 1,...,n \right\}.$$

Com estas considerações passa-se aos resultados desta seção.

Teorema 2.2 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira regular Γ, $a \in \mathcal{H}^{2,\infty}(\Omega)$, $u_0 \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ e $u_1 \in H_0^2(\Omega)$. Então existe uma única função $u : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

$$u \in L^\infty\left(0, T; H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)\right) \tag{2.45}$$

$$u' \in L^\infty\left(0, T; H_0^2(\Omega)\right) \tag{2.46}$$

$$u'' \in L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right) \tag{2.47}$$

$$u'' + \Delta^2 u + a(x) u' = 0 \text{ em } L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right). \tag{2.48}$$

$$u(0) = u_0,\ u'(0) = u_{1.} \tag{2.49}$$

Demonstração: 1^a Parte-Existência

(i) Pr**oblema Aproximado**

Considere a sequência $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ formada pelos autovetores do operador $A = \Delta^2 u$, onde $A : D(A) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ com $D(A) = H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ e $\Delta^2 w_j = \lambda_j w_j$, $j = 1, 2, ...$.A sequência $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é ortonormal completa em $L^2(\Omega)$. Considerando agora, $V_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$ o subespaço de $H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ gerado pelos m primeiros vetores w_j, o problema aproximado consiste em encontrar $u_m(t) \in V_m$, isto é, $u_m(t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j$ tal que:

$$\begin{aligned}
&(u_m''(t), v) + \left(\Delta^2 u_m(t), v\right) + (a(x) u_m'(t), v) = 0 \forall v \in V_m. \\
&u_m(0) = u_{0m} \longrightarrow u_0 \text{ forte em } H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \\
&u_m'(0) = u_{1m} \longrightarrow u_1 \text{ forte em } H_0^2(\Omega).
\end{aligned} \tag{2.50}$$

A existência de solução local $u_m(t)$ no intervalo $[0, t_m)$, $t_m < T$, para cada m é garantida pelos mesmos argumentos utilizados no Teorema (2.1).

(ii) **Estimativas:**

Visto que os dados iniciais considerados aqui são mais regulares que no Teorema (2.1), as estimativas obtidas anteriormente continuam válidas. Relembrando obteve-se em (2.18) que

$$|u_m'(t)|^2 + |\Delta u_m(t)|^2 \leq k_4(T).$$

Afim de obter novas estimativas observe que $\Delta^2 u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\,\Delta^2 w_j = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_{jm}(t)\, w_j \in V_m$ assim tomando $v = \Delta^2 u_m'(t) \in V_m$ no sistema aproximado (2.50) obtém-se:

$$\left(u_m''(t)\,,\Delta^2 u_m'(t)\right) + \left(\Delta^2 u_m(t)\,,\Delta^2 u_m'(t)\right) + \left(a(x)\,u_m'(t)\,,\Delta^2 u_m'(t)\right) = 0\ \forall\, v \in V_m, \quad (2.51)$$

ou seja,

$$\left(\Delta u_m''(t)\,,\Delta u_m'(t)\right) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\Delta^2 u_m'(t)\right| \leq \left(a(x)\,u_m'(t)\,,\Delta^2 u_m'(t)\right).$$

Da última desigualdade, resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\Delta u_m'(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\Delta^2 u_m(t)\right|^2 = -\int_\Omega a(x)\,u_m'(t)\,\Delta^2 u_m'(t)\,dx,\ \forall\, v \in V_m. \quad (2.52)$$

- Análise de $\int_\Omega a(x)\,u_m'(t)\,\Delta^2 u_m'(t)\,dx$.

Da Fórmula de Green e observando que $u_m'(t) \in V_m \subset H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, segue-se que:

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(x)\,u_m'(t)\,\Delta^2 u_m'(t)\,dx &= \left(\Delta\left(\Delta u_m'(t)\right), a(x)\,u_m'(t)\right) = \\ &= \left(\Delta u_m'(t)\,,\Delta\left(a(x)\right)u_m'(t)\right) = \int_\Omega \Delta u_m'(t)\,\Delta\left(a(x)\right)u_m'(t)\,dx\end{aligned} \quad (2.53)$$

Mas,

$$\frac{\partial\left(a(x)\,u_m'(t)\right)}{\partial x_i} = \frac{\partial a(x)}{\partial x_i}u_m'(t) + a(x)\frac{\partial u_m'(t)}{\partial x_i}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\left(a(x)\,u_m'(t)\right)}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\left(a(x)\,u_m'(t)\right)}{\partial x_i}\right) = \\ &\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial a(x)}{\partial x_i}u_m'(t)\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a(x)\frac{\partial u_m'(t)}{\partial x_i}\right) = \\ &\frac{\partial^2 a(x)}{\partial x_i^2}u_m'(t) + \frac{\partial a(x)}{\partial x_i}\frac{\partial u_m'(t)}{\partial x_i} + \frac{\partial a(x)}{\partial x_i}\frac{\partial u_m'(t)}{\partial x_i} + a(x)\frac{\partial^2 u_m'(t)}{\partial x_i^2} = \\ &\frac{\partial^2 a(x)}{\partial x_i^2}u_m'(t) + 2\frac{\partial a(x)}{\partial x_i}\frac{\partial u_m'(t)}{\partial x_i} + a(x)\frac{\partial^2 u_m'(t)}{\partial x_i^2}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\Delta\left(a(x)\,u_m'(t)\right) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 a(x)}{\partial x_i^2}u_m'(t) + 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a(x)}{\partial x_i}\frac{\partial u_m'(t)}{\partial x_i}+ \\ &+\sum_{i=1}^{n} a(x)\,\frac{\partial^2 u_m'(t)}{\partial x_i^2} = \Delta a(x)\,u_m'(t) + 2\nabla a(x)\,\nabla u_m'(t) + a(x)\,\Delta u_m'(t)\,.\end{aligned} \tag{2.54}$$

Substituindo (2.54) em (2.53), vem que:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega a(x)\,u_m'(t)\,\Delta^2 u_m'(t)\,dx = \int_\Omega \Delta u_m'(t)\,\Delta\left(a(x)\,u_m'(t)\right)dx = \int_\Omega \Delta u_m'(t)\,\Delta a(x)\,u_m'(t)\,dx+ \\ &+2\int_\Omega \Delta u_m'(t)\,\nabla a(x)\cdot\nabla u_m'(t)\,dx + \int_\Omega \Delta u_m'(t)\,a(x)\,\Delta u_m'(t)\,dx.\end{aligned} \tag{2.55}$$

Voltando à (2.52), e usando (2.55), vem que:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\Delta u_m'(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\Delta^2 u_m(t)\right| \le \left|\int_\Omega \Delta u_m'(t)\,\Delta\left(a(x)\,u_m'(t)\right)dx\right| \le \\ &\le \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left|\frac{\partial^2 a(x)}{\partial x_i^2}\right|\left|\frac{\partial^2 u_m'(t)}{\partial x_i^2}\right|\left|u_m'(t)\right|dx+ \\ &+2\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left|\frac{\partial a(x)}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\partial^2 u_m'(t)}{\partial x_i^2}\right|\left|\frac{\partial u_m'(t)}{\partial x_i}\right|dx + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega |a(x)|\left|\frac{\partial^2 u_m'(t)}{\partial x_i^2}\right|^2 dx.\end{aligned} \tag{2.56}$$

Agora, da hipótese (H) feita sobre $a(x)$ pode-se estimar o lado direito de (2.56) obtendo:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\Delta u_m'(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\Delta^2 u_m(t)\right| \le k_5\int_\Omega \left|\Delta u_m'(t)\right|\left|u_m'(t)\right|dx+ \\ &+2k_6\int_\Omega \left|\Delta u_m'(t)\right|\left|\nabla u_m'(t)\right|dx + k_7\int_\Omega \left|\Delta u_m'(t)\right|\left|\Delta u_m'(t)\right|dx,\end{aligned} \tag{2.57}$$

onde

$$k_5 = máx\{k_{5i}, i=1,...,n\},\ \left|\frac{\partial^2 a(x)}{\partial x_i^2}\right| \le k_{5i}, i=1,...,n,$$

$$k_6 = máx\{k_{6i}, i=1,...,n\},\ \left|\frac{\partial a(x)}{\partial x_i}\right| \le k_{6i}, i=1,...,n,$$

e k_7 é tal que $|a(x)| \le k_7$.

Portanto, aplicando a desigualdade de Young e o fato de que $\left|\nabla u_m'(t)\right| \le c\left|\Delta u_m'(t)\right|$, transformamos a desigualdade (2.57) em

$$\frac{d}{dt}\left\{\left|\Delta u_m'(t)\right|^2 + \left|\Delta^2 u_m(t)\right|^2\right\} \le k_7\int_\Omega \left|\Delta u_m'(t)\right|^2 dx + \int_\Omega \left|u_m'(t)\right|^2 dx.$$

Integrando esta última desigualdade de 0 a t, com $0 \leq t \leq T$, vem que

$$\begin{aligned}
&|\Delta u_m'(t)|^2 + \left|\Delta^2 u_m(t)\right|^2 \leq k_7 \int_0^t |\Delta u_m'(s)|^2_{L^2(\Omega)}\, ds + \int_0^t |u_m'(s)|^2_{L^2(\Omega)}\, ds + \\
&+ |\Delta u_m'(0)|^2_{L^2(\Omega)} + \left|\Delta^2 u_m(0)\right|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Das convergências fortes dos dados iniciais em $(2.50)_2$, $(2.50)_3$ e da limitação para (u_m') obtida no estudo de solução fraca obtemos as seguintes limitações:

$$\left|\Delta^2 u_m(0)\right|_{L^2(\Omega)} \leq k_8, \quad |\Delta u_m'(0)| \leq k_9 \quad \text{e} \quad \int_0^t |u_m'(s)|^2_{L^2(\Omega)}\, ds \leq k_{10}. \tag{2.59}$$

Utilizando (2.59) em (2.58) segue-se que:

$$|\Delta u_m'(t)|^2 + \left|\Delta^2 u_m(t)\right|^2 \leq k_{11} + k_7 \int_0^t |\Delta u_m'(s)|^2\, ds \text{ onde } k_{11} = k_8 + k_9 + k_{10}. \tag{2.60}$$

De (2.60), obtém-se, aplicando o Lema de Gronwall, as seguintes limitações

$$\begin{aligned}
&(\Delta u_m') \text{ é limitada em } L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right), \\
&\left(\Delta^2 u_m\right) \text{ é limitada em } L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right);
\end{aligned} \tag{2.61}$$

donde concluímos que

$$(u_m') \text{ é limitada em } L^\infty\left(0, T; H_0^2(\Omega)\right);$$

e

$$(u_m) \text{ é limitada em } L^\infty\left(0, T; H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)\right).$$

Estas limitações nos permitem, de modo análogo ao que foi feito para o Teorema (2.1), passar o limite na equação aproximada e obter a existência de uma solução forte u satisfazendo as condições $(2.45) - (2.49)$.

(iii)**Unicidade**

Sejam u_1 e u_2 soluções nas condições do Teorema (2.2). Considerando-se $z = u_1 - u_2$ everifica-se z satisfaz o seguite problema

$$\begin{cases}
z \in L^\infty\left(0, T; H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)\right) \\
z' \in L^\infty\left(0, T; H_0^2(\Omega)\right) \\
z'' \in L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right) \\
z'' + \Delta^2 z + a(x) z' = 0 \text{ em } L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right). \\
z(0) = z'(0) = 0.
\end{cases} \tag{2.62}$$

Tomando o produto internode$(2.62)_3$ com $z'(t)$, o que é possível devido a regularidade de z, vem que:

$$(z''(t), z'(t)) + \left(\Delta^2 z(t), z'(t)\right) + (a(x) z'(t), z'(t)) = 0.$$

Consequetemente,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z'(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\Delta z(t)| \leq k_7 \int_\Omega |z'(t)|^2 dx,$$

donde

$$\frac{d}{dt}|z'(t)|^2 \leq 2k_7 \int_\Omega |z'(t)|^2 dx.$$

Logo, integrando de 0 a t com $0 \leq t \leq T$ obtém-se

$$|z'(t)|^2 \leq 2ck_7 \int_0^t |z'(t)|^2 dt, \tag{2.63}$$

pois $z'(0) = 0$. De (2.63) segue pelo Lema de Gronwall que

$$|z'(t)| = 0,$$

isto é, $z(t) = k$ com k constante. Agora como $z(0) = 0$ concluímos que

$$z(t) = 0, \text{ para todo } t \in [0, T].$$

Portanto, $u_1 = u_2$ o que mostra a unicidade da solução.■

Capítulo 3

Decaimento da Energia com Damping Localizado

Este capítulo é dedicado a obtenção do decaimento da energia associada a solução forte do problema:

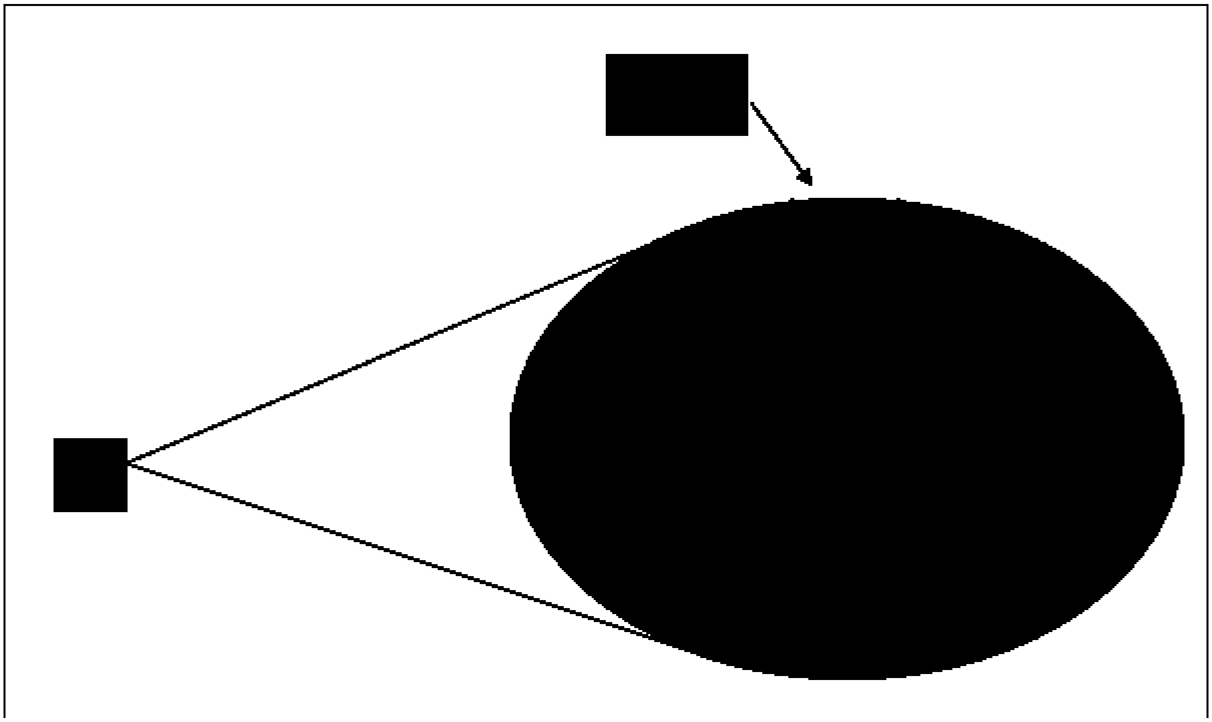
$$\left| \begin{array}{l} u'' + \Delta^2 u + a\,(x)\,u' = 0, \text{ em } Q = \Omega \times (0,T) \\ u\,(x,t) = \dfrac{\partial u\,(x,t)}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \sum = \Gamma \times (0,T) \\ u\,(x,0) = u_0\,(x)\,,\ u'\,(x,0) = u_1\,(x) \text{ em } \Omega, \end{array} \right. \tag{3.1}$$

onde, como foi considerado no capítulo anterior, Ω é um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, com fronteira regular Γ e $T > 0$ um número real arbitrário.

Considera-se o termo de damping $a\,(x)$ atuando efetivamente somente em um subconjunto $\omega \subset \Omega$, definido como uma vizinhança de $\overline{\Gamma}\,(x_0)$ onde

$$\Gamma\,(x_0) = \{x \in \Gamma; (x - x_0) \cdot \nu\,(x) > 0\}\,,$$

$\nu(x)$ é a normal exterior a $x \in \Gamma$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Afigura posta a seguir ilustra tal situação:



Note que a condição $(x - x_0) \cdot \nu(x) > 0$ indica que devemos tomar para $\Gamma(x_0)$ todos os pontos de Γ nos quais o ângulo formado entre os vetores $\nu(x)$ e $(x - x_0)$ é menor que $\dfrac{\pi}{2}$ radianos.

A caracterização do amortecimento localizado é feita por meio da seguintes hipóteses:

$$(\mathrm{H1}) \quad a(x) \geq a_0 > 0 \text{ quase sempre em } \omega.$$

$$(\mathrm{H2}) \quad a(x) = 0 \text{ em } \Omega \setminus \omega.$$

No que segue define-se ainda, para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$m(x) = x - x_0 \text{ e denota-se por } R(x_0) = \max_{x \in \bar{\Omega}} |m(x)|.$$

A energia associada a equação $(3.1)_1$ é dada por:

$$E(u(t)) = \frac{1}{2} |u'(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} |\Delta u(t)|^2_{L^2(\Omega)},$$

e considerando o produto escalar em $L^2(\Omega)$ da equação em $(3.1)_1$ com $u'(t)$ obtém-se:

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\int_\Omega a(x) |u'(x,t)|^2_{L^2(\Omega)} dx.$$

Ou seja, a energia associada a solução fort do problema (3.1) é uma função decrescente ao longo do tempo.

O resultado principal deste capítulo é dado pelo seguite Teorema:

Teorema 3.1 *Seja* $a \in \mathcal{H}^{2,\infty}(\Omega)$ *satisfazendo as hipóteses* $(H1)-(H2)$ *e* $\{u_0, u_1\} \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$. *Então existe uma constante positiva* τ_0 *tal que*

$$E(t) \leq \left[\exp\left(1 - \frac{t}{\tau_0}\right)\right] E(0), \ \forall \ t \geq 0.$$

Apresenta-se a seguir um Lema que reduz a prova do teorema à obtenção de uma estimativa adequada.

Lema 3.1 *Seja* $\psi : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ *uma função contínua, integrável em* $[0, +\infty)$, *não crescente e positiva, e assuma que existe uma constante* A *tal que*

$$\int_s^{+\infty} \psi(t)\, dt \leq A\psi(s), \ \forall s \geq 0.$$

Então

$$\psi(t) \leq \left[e^{\left(1 - \frac{t}{A}\right)}\right] \psi(0), \ \forall \ t \geq A.$$

Demonstração: Defina $f(x) = e^{\frac{x}{A}} \int_x^{\infty} \psi(t)\, dt$, $x \in [0, +\infty)$.

Deste modo, f é uma função localmente absolutamente contínua e não crescente. De fato, considerando $(a_1, b_1), \ldots (a_n, b_n)$ uma coleção finita de subintervalos em $[a, b] \subset [0, +\infty)$, tem-se que

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| = \sum_{k=1}^{n} \left| e^{\frac{b_k}{A}} \int_{b_k}^{\infty} \psi(t)\, dt - e^{\frac{a_k}{A}} \int_{a_k}^{\infty} \psi(t)\, dt \right| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left| e^{\frac{b_k}{A}} \int_{b_k}^{\infty} \psi(t)\, dt - e^{\frac{b_k}{A}} \int_{a_k}^{\infty} \psi(t)\, dt + e^{\frac{b_k}{A}} \int_{a_k}^{\infty} \psi(t)\, dt - e^{\frac{a_k}{A}} \int_{a_k}^{\infty} \psi(t)\, dt \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{b_k}{A}} \int_{a_k}^{b_k} \psi(t)\, dt + \left(e^{\frac{b_k}{A}} - e^{\frac{a_k}{A}}\right) \int_{a_k}^{\infty} \psi(t)\, dt.$$

Utilizando o Teorema do Valor Médio e as hipóteses de que $\psi(s) \leq \psi(0)$, $s \geq 0$ e $\int_s^{+\infty} \psi(t)\, dt \leq A\psi(s)$, $\forall s \geq 0$, obtém-se que

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)| \leq \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{b_k}{A}}(b_k-a_k)\psi(0)+e^{\frac{b_k}{A}}\frac{(b_k-a_k)}{A}Ae^{\frac{x}{A}} \leq$$

$$\leq 2e^{\frac{b}{A}}\psi(0)\sum_{k=1}^{n}|b_k-a_k|.$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$ tomando-se $\delta > \dfrac{\varepsilon}{2e^{\frac{b}{A}}\psi(0)}$, tem-se que $\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)| < \varepsilon$ se $|b_k-a_k| < \delta$, provando-se assim que f é uma função absolutamente contínua em cada subintervalo $[a,b]$ contido em $[0,+\infty)$. Logo, derivável quase sempre em $[0,+\infty)$.

Além disso, tem-se que $f(x)$ é não crescente, pois

$$f'(x)=\frac{1}{A}e^{\frac{x}{A}}\int_x^{\infty}\psi(t)\,dt-e^{\frac{x}{A}}\psi(x)=\frac{1}{A}e^{\frac{x}{A}}\left\{\int_x^{\infty}\psi(t)\,dt-A\psi(x)\right\}\leq 0$$

quase sempre em $[0,+\infty)$.

Resulta portanto que

$$f(x)\leq f(0)=\int_0^{\infty}\psi(t)\,dt\leq A\psi(0),\ \forall x\in[0,+\infty)$$

ou seja,

$$\int_x^{\infty}\psi(t)\,dt\leq e^{\frac{-x}{A}}A\psi(0),\ \forall x\in[0,+\infty) \tag{3.2}$$

Por outro lado, sendo ψ uma função não negativa e não crescente, tem-se que

$$\int_x^{\infty}\psi(t)\,dt\geq\int_x^{x+A}\psi(t)\,dt\geq\int_x^{x+A}\psi(x+A)\,dt=A\psi(x+A). \tag{3.3}$$

De (3.2) e (3.3), resulta que

$$\psi(x+A)\leq e^{\frac{-x}{A}}\psi(0),\ \forall x\in[0,+\infty).$$

Tomando-se $t=x+A$, conclui-se que

$$\psi(t)\leq\left[\exp\left(1-\frac{t}{A}\right)\right]\psi(0),\ \forall t\geq A.$$

■

No próximo Lema, que será utilizado em todas as etapas da demonstração do teorema (3.1), u representa a solução forte do problema (3.1), $Q_s=\Omega\times(s,T)$ e $\sum_s=\Gamma\times(s,T)$.

Lema 3.2 *Sejam* $q \in W^{2,\infty}(\Omega)$, $\zeta \in \left(W^{2,\infty}(\Omega)\right)^n$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Então tem-se as seguintes identidades,*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{Q_s}(\operatorname{div} q-\alpha)\left(|u'|^2-|\Delta u|^2\right)dxdt+\left(u',q.\nabla u+\frac{1}{2}\alpha u\right)\Big|_s^T+\\
&2\int_{Q_s}\Delta u\frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\partial x_j}dxdt+\int_{Q_s}au'\left(q.\nabla u+\frac{1}{2}\alpha u\right)dxdt+\\
&+\int_{Q_s}\Delta u\Delta q.\nabla u dxdt=\frac{1}{2}\int_{\sum_s}q.\nu\,|\Delta u|^2\,d\sum.
\end{aligned}\tag{I}$$

$$\begin{aligned}
&(u',\zeta u)|_s^T-\int_{Q_s}\zeta\left(|u'|^2-|\Delta u|^2\right)dxdt+\\
&+\int_{Q_s}\Delta u\Delta\zeta u dxdt+2\int_{Q_s}\Delta u\,(\nabla u.\nabla\zeta)\,dxdt+\\
&+\int_{Q_s}au'\zeta u dxdt=0
\end{aligned}\tag{II}$$

Demonstração: Afim de provar a identidade (I) multiplicamos a equação

$$u''+\Delta^2 u+a(x)\,u'=0$$

por $q\cdot\nabla u+\dfrac{1}{2}\alpha u$ e integramos em Q_s. Obtém-se assim:

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_s}u''\left(q\cdot\nabla u+\tfrac{1}{2}\alpha u\right)dxdt+\int_{Q_s}\Delta^2 u\left(q\cdot\nabla u+\tfrac{1}{2}\alpha u\right)dxdt+\\
&+\int_{Q_s}au'\left(q\cdot\nabla u+\frac{1}{2}\alpha u\right)dxdt=0.
\end{aligned}\tag{3.4}$$

Passa-se agora à análise de cada termo da igualdade (3.4).

- $\displaystyle\int_{Q_s}u''\left(q\cdot\nabla u+\tfrac{1}{2}\alpha u\right)dxdt$

Por integração por partes segue-se que

$$\begin{aligned}
&\int_s^T\int_\Omega u''\left(q\cdot\nabla u+\frac{1}{2}\alpha u\right)dxdt=\int_s^T\left(u'',q\cdot\nabla u+\frac{1}{2}\alpha u\right)dt=\\
&=\left(u',q\cdot\nabla u+\frac{1}{2}\alpha u\right)\Big|_s^T-\int_s^T\int_\Omega u'\left(q\cdot\nabla u'+\frac{1}{2}\alpha u'\right)dxdt=\\
&=\left(u',q\cdot\nabla u+\frac{1}{2}\alpha u\right)\Big|_s^T-\int_{Q_s}u'\,(q\cdot\nabla u')\,dxdt-\frac{1}{2}\int_{Q_s}\alpha\,|u'|^2\,dxdt.
\end{aligned}$$

Agora,

$$\int_{Q_s} u'\left(q\cdot\nabla u'\right)dxdt=\sum_{k=1}^{n}\int_{Q_s} u'\left(q_k\frac{\partial u'}{\partial x_k}\right)dxdt=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{Q_s} q_k\frac{\partial\left(u'\right)^2}{\partial x_k}dxdt,$$

e pelo Teorema da Divergência,

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{Q_s} q_k\left(x\right)\frac{\partial\left(u'\right)^2}{\partial x_k}dxdt=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{Q_s}\left(u'\right)^2\frac{\partial q_k\left(x\right)}{\partial x_k}dxdt,$$

pois $u=0$ sobre Γ.

Portanto,

$$\int_{Q_s} u'\left(q\cdot\nabla u'\right)dxdt=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{Q_s}\left(u'\right)^2\frac{\partial q_k}{\partial x_k}dxdt.$$

Temos mostrado então que

$$\begin{aligned}\int_{Q_s} u''\left(q\cdot\nabla u+\frac{1}{2}\alpha u\right)dxdt&=\left(u',q\cdot\nabla u+\frac{1}{2}\alpha u\right)\Big|_s^T+\\&+\frac{1}{2}\int_{Q_s}\left(div\ q-\alpha\right)\left|u'\right|^2dxdt.\end{aligned}\tag{3.5}$$

- Análise de $\displaystyle\int_{Q_s}\Delta^2u\left(q\cdot\nabla u+\frac{1}{2}\alpha u\right)dxdt$

Do Teorema de Green e do fato que $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}=\nu_k\dfrac{\partial u}{\partial\nu}=0$ em $\sum$, obtém-se

$$\begin{aligned}&\int_{Q_s}\Delta^2u\left(q\cdot\nabla u\right)dxdt=\textstyle\sum_{j.k=1}^{n}\displaystyle\int_{Q_s}\frac{\partial^2\left(\Delta u\right)}{\partial x_j^2}q_k\frac{\partial u}{\partial x_k}dxdt=\\&=-\sum_{j.k=1}^{n}\int_{Q_s}\frac{\partial\left(\Delta u\right)}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(q_k\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)dxdt+\sum_{k=1}^{n}\int_{\Sigma_s}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\Delta u\right)q_k\frac{\partial u}{\partial x_k}d\Sigma=\\&=-\sum_{j.k=1}^{n}\int_{Q_s}\frac{\partial\left(\Delta u\right)}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(q_k\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)dxdt.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Novamente por Green obtém-se que

$$\begin{aligned}-\sum_{j.k=1}^{n}\int_{Q_s}\frac{\partial\left(\Delta u\right)}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(q_k\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)dxdt&=\sum_{k=1}^{n}\int_{Q_s}\Delta u\Delta\left(q_k\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)dxdt-\\&-\sum_{k=1}^{n}\int_{\Sigma_s}\Delta u\frac{\partial}{\partial\nu}\left(q_k\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)d\Sigma.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Observa-se agora que

$$\Delta\left(q_k\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)=\Delta q_k\frac{\partial u}{\partial x_k}+2\frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\partial x_j}+q_k\frac{\partial}{\partial x_k}(\Delta u)\,, \tag{3.8}$$

onde aqui utiliza-se a convenção de que índices repetidos representam soma.

Lembrando que $\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_k}=0$ em $\sum$, tem-se ainda que

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\left(q_k(x)\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\right)=\frac{\partial q_k(x)}{\partial \nu}\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}+q_k\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\right)=q_k\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\right) \tag{3.9}$$

Utilizando as igualdades obtidas em (3.8) e (3.9) em (3.7) segue-se que

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\int_{Q_s}\Delta u\Delta\left(q_k\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)dxdt-\sum_{k=1}^{n}\int_{\Sigma_s}\Delta u\frac{\partial}{\partial \nu}\left(q_k\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)d\Sigma=\\&=\sum_{k=1}^{n}\int_{Q_s}\Delta u\Delta q_k\frac{\partial u}{\partial x_k}dxdt+2\sum_{k=1}^{n}\int_{Q_s}\Delta u\frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\partial x_j}dxdt+\\&+\sum_{k=1}^{n}\int_{Q_s}\Delta u q_k\frac{\partial}{\partial x_k}(\Delta u)\,dxdt-\sum_{k=1}^{n}\int_{\Sigma_s}\Delta u q_k\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\right)d\Sigma\end{aligned} \tag{3.10}$$

Observa-se agora que pelo Teorema da Divergência

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\int_{Q_s}\Delta u q_k\frac{\partial}{\partial x_k}(\Delta u)\,dxdt=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\int_{Q_s}q_k\frac{\partial|\Delta u|^2}{\partial x_k}dxdt=\\&=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\int_{Q_s}\frac{\partial q_k}{\partial x_k}|\Delta u|^2\,dxdt+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\int_{\Sigma_s}q_k\nu_k|\Delta u|^2\,d\Sigma.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Nota-se ainda que sendo $u\in H_0^2(\Omega)$ então sobre a fronteira lateral Σ tem-se que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \nu\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)=\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\nu_k\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)=\nu_k\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2},$$

e desta última igualdade vem que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu_k\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)=\nu_k\frac{\partial^2 u}{\partial \nu\partial x_k}=\nu_k^2\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}$$

donde segue que sobre a fronteira lateral Σ vale a igualdade

$$\Delta u(x)=\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}|\nu|^2=\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}. \tag{3.12}$$

Utilizando (3.12) podemos reescrever o último termo que aparece em (3.10) com

$$-\sum_{k=1}^{n}\int_{\Sigma_s}\Delta u q_k\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)d\Sigma=-\sum_{k=1}^{n}\int_{\Sigma_s}\Delta u q_k\nu_k\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}d\Sigma=-\int_{\Sigma_s}q\cdot\nu\,|\Delta u|^2\,d\Sigma. \tag{3.13}$$

Voltando com (3.11) e (3.13) em (3.10) obtém-se de (3.6) que

$$\begin{aligned}&\int_{Q_s}\Delta^2u\,(q\cdot\nabla u)\,dxdt=\sum_{k=1}^{n}\int_{Q_s}\Delta u\Delta q_k\frac{\partial u}{\partial x_k}dxdt+2\sum_{k=1}^{n}\int_{Q_s}\Delta u\frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial^2u}{\partial x_k\partial x_j}dxdt-\\&-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{Q_s}\frac{\partial q_k}{\partial x_k}|\Delta u|^2-\frac{1}{2}\int_{\Sigma_s}q\cdot\nu\,|\Delta u|^2\,d\Sigma.\end{aligned}\tag{3.14}$$

Aplicando duas vezes Green ao termo $\frac{1}{2}\int_{Q_s}\Delta^2u\alpha udxdt$ obtém-se

$$\frac{1}{2}\int_{Q_s}\Delta^2u\alpha udxdt=\frac{1}{2}\int_{Q_s}\alpha\,|\Delta u|^2\,dxdt.\tag{3.15}$$

De (3.14) e (3.15) vem que

$$\begin{aligned}&\int_{Q_s}\Delta^2u\left(q\cdot\nabla u+\frac{1}{2}\alpha u\right)dxdt=\sum_{k=1}^{n}\int_{Q_s}\Delta u\Delta q_k\frac{\partial u}{\partial x_k}dxdt+\\&+2\sum_{k=1}^{n}\int_{Q_s}\Delta u\frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial^2u}{\partial x_k\partial x_j}dxdt-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{Q_s}\frac{\partial q_k}{\partial x_k}|\Delta u|^2-\\&-\frac{1}{2}\int_{\Sigma_s}q\cdot\nu\,|\Delta u|^2\,d\Sigma+\frac{1}{2}\int_{Q_s}\alpha\,|\Delta u|^2\,dxdt.\end{aligned}\tag{3.16}$$

Substituindo (3.5) e (3.16) em (3.4) obtém-se a identidade (I).

Passa-se agora à demonstração da identidade (II). Para isso multiplica-se a equação por $u\,(x,t)\,\zeta\,(x)$ e integra-se sobre Q_s obtendo

$$\begin{aligned}&\int_{Q_s}u''ux,\zeta dxdt+\int_{Q_s}\Delta^2uu\zeta dxdt+\\&+\int_{Q_s}au'u\zeta dxdt=0.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Nota-se que, fazendo integração por partes, com respeito a variável t, segue-se que

$$\int_{Q_s}u''u\zeta dxdt=\int_{\Omega}u'u\zeta dx\Big|_s^T-\int_s^T\int_{\Omega}\zeta\,|u'|^2\,dxdt.\tag{3.18}$$

Aplicando a Fórmula de Green, segue que

$$\begin{aligned}&\int_{Q_s}\Delta^2uu\zeta dxdt=-\int_{Q_s}\nabla\,(\Delta u)\cdot\nabla\,(u\zeta)+\\&+\int_{\Sigma_s}\frac{\partial\,(\Delta u)}{\partial\nu}u\zeta d\Sigma=\int_{Q_s}\Delta u\Delta\,(u\zeta)\,dxdt-\\&-\int_{\Sigma_s}\Delta u\frac{\partial\,(\zeta u)}{\partial\nu}d\Sigma.\end{aligned}\tag{3.19}$$

Observando que

$$\begin{aligned} \Delta\left(u\zeta\right) &= \Delta\zeta u + 2\frac{\partial\zeta}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j} + \zeta\Delta u \\ \frac{\partial\left(\zeta u\right)}{\partial\nu} &= \frac{\partial\left(\zeta\right)}{\partial\nu}u + \zeta\frac{\partial u}{\partial\nu} = 0 \text{ sobre } \Sigma_s, \end{aligned} \tag{3.20}$$

modificamos (3.19) obtendo-se

$$\begin{aligned} \int_{Q_s}\Delta^2 u u\zeta dxdt &= \int_{Q_s}\Delta u\Delta\zeta u dxdt + \\ +2\int_{Q_s}\nabla\zeta\cdot\nabla u\Delta u\, dxdt &+ \int_{Q_s}\zeta\left|\Delta u\right|^2 dxdt. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Substituindo (3.18) e (3.21) em (3.17) obtém-se a identidade (II).■

Apresenta-se a seguir a demonstração do Teorema 3.1 que será realizada em 3 etapas.

Demonstração do Teorema 3.1:

1ªETAPA : Na identidade (I) do Lema (3.2), tomemos $\alpha = n-1$ e $q\left(x\right) = m\left(x\right) = x - x_0$. Então, observando que $div\ q = n$ e $\Delta q = 0$. Obtém-se

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_s^T\left(\left|u'\left(t\right)\right|^2_{L^2(\Omega)} - \left|\Delta u\left(t\right)\right|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt + \left(u'\left(t\right), m\left(x\right)\cdot\nabla u\left(t\right) + \frac{\left(n-1\right)}{2}u\left(t\right)\right)\Big|_s^T + \\ &+2\int_{Q_s}\left|\Delta u\left(x,t\right)\right|^2 dxdt + \int_{Q_s}a\left(x\right)u'\left(x,t\right)\left(m\left(x\right)\cdot\nabla u\left(x,t\right) + \frac{\left(n-1\right)}{2}u\left(x,t\right)\right)dxdt + \\ &= \frac{1}{2}\int_{\Sigma_s}m\left(x\right)\cdot\nu\left(x\right)\left|\Delta u\left(x,t\right)\right|^2 d\Sigma. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Lembrando que a energia associada ao problema é dada por

$$E\left(t\right) = \frac{1}{2}\left|u'\left(t\right)\right|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\left|\Delta u\left(t\right)\right|^2_{L^2(\Omega)},$$

de (3.22) obtém-se que

$$\begin{aligned} \int_s^T E\left(t\right)dt &\leq \frac{1}{2}\int_{\Sigma_s}m\left(x\right)\cdot\nu\left(x\right)\left|\Delta u\left(x,t\right)\right|^2 d\Sigma - \\ &- \int_\Omega u'\left(t\right)\left(m\left(x\right)\cdot\nabla u\left(t\right) + \frac{\left(n-1\right)}{2}u\left(t\right)\right)dx\Big|_s^T - \\ &- \int_{Q_s}a\left(x\right)u'\left(x,t\right)\left(m\left(x\right)\cdot\nabla u\left(x,t\right) + \frac{\left(n-1\right)}{2}u\left(x,t\right)\right)dxdt. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Procede-se agora com a análise de cada um dos termos que aparecem do lado direito de (3.23).

- Análise de $\displaystyle\int_\Omega u'(t)\left(m(x)\cdot\nabla u(t)+\frac{(n-1)}{2}u(t)\right)dx\Big|_s^T$.

Seja

$$X(t)=\int_\Omega u'(t)\left(m(x)\cdot\nabla u(t)+\frac{(n-1)}{2}u(t)\right)dx. \tag{3.24}$$

Multiplicando (3.24) por $\dfrac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\delta}}$,com $\delta>0$, e aplicando a desigualdade elementar $ab<\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{b^2}{2}$, obtém-se

$$|X(t)|\leq\frac{\delta}{2}\int_\Omega|u'(t)|^2dx+\frac{1}{2\delta}\int_\Omega\left[m(x)\cdot\nabla u(t)+\frac{(n-1)}{2}u(t)\right]^2dx. \tag{3.25}$$

Observe agora que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\left|m(x)\cdot\nabla u(t)+\frac{(n-1)}{2}u(t)\right|^2dx\leq\int_\Omega|m(x)|^2|\nabla u(t)|^2dx+\\&\left(\frac{n-1}{2}\right)^2\int_\Omega|u(t)|^2dx+(n-1)\int_\Omega m(x)\cdot\nabla u\,u dx,\end{aligned} \tag{3.26}$$

considerando $\vec{F}=m(x)u^2$, pelo Teorema da divergência

$$\int_\Omega\left(m(x)\cdot\nabla u^2(t)+\nu u^2\right)dx=\int_{\partial\Omega}m(x)(u)^2dS=0,\text{ pois } u=0 \text{ em } \partial\Omega, \tag{3.27}$$

e essa última igualdade implica que

$$\int_\Omega m(x)\cdot\nabla u^2dx=\nu\int_\Omega|u|^2dx$$

substituindo (3.27) em (3.26) segue-se, após alguns cálculos que

$$\int_\Omega\left|m(x)\cdot\nabla u(t)+\frac{(n-1)}{2}u(t)\right|^2dx\leq R^2(x_0)\int_\Omega|\nabla u(t)|^2dx-\frac{(n^2-1)}{4}\int_\Omega|u(x)|^2dx, \tag{3.28}$$

onde $R(x_0)=\|m\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Sendo $n\geq1$ então $\dfrac{(n^2-1)}{4}\displaystyle\int_\Omega|u(x)|^2dx\geq0$ e portanto conclui-se de (3.28) que

$$\int_\Omega\left|m(x)\cdot\nabla u(t)+\frac{(n-1)}{2}u(t)\right|^2dx\leq R^2(x_0)\int_\Omega|\nabla u(t)|^2dx. \tag{3.29}$$

Substituindo (3.29) em (3.25) obtém-se

$$|X(t)|\leq\frac{\delta}{2}\int_\Omega|u'(t)|^2dx+\frac{1}{2\delta}R^2(x_0)\int_\Omega|\nabla u(t)|^2dx. \tag{3.30}$$

Lembrando que $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, então uma constante $c_1 > 0$ tal que

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c_1 |\Delta u|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.31}$$

Consequentemente,

$$|X(t)| \leq \frac{\delta}{2}\int_\Omega |u'(t)|^2 dx + \frac{1}{2\delta}R^2(x_0)\, c_1 \int_\Omega |\Delta u(t)|^2 dx.$$

Escolhendo $\delta = R(x_0)$ conclui-se que

$$|X(t)| \leq R(x_0)\, c_2 E(t),$$

onde $c_2 = \max(1, c_1)$. Desta última desigualdade vem que

$$\begin{aligned} -X(t)|_s^T &= X(s) - X(T) \leq |X(s)| + |X(T)| \leq \\ &\leq R(x_0)\, c_2 E(s) + R(x_0)\, c_2 E(T) \leq 2R(x_0)\, c_2 E(s), \end{aligned} \tag{3.32}$$

pois $E(t)$ é não-crescente e $s \leq T$.

- Análise de $-\int_{Q_s} a(x)\, u'(x,t)\left(m(x)\cdot\nabla u(x,t) + \frac{(n-1)}{2}u(x,t)\right) dxdt.$

Utilizando a Desigualdade de Holder,

$$\begin{aligned} &-\int_{Q_s} a(x)\, u'(x,t)\left(m(x)\cdot\nabla u(x,t) + \frac{(n-1)}{2}u(x,t)\right) dxdt \leq \\ &\leq \int_s^T \left\{\left(\int_\Omega a^2(x)\,|u'(x)|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega \left|m(x)\cdot\nabla u(x) + \frac{(n-1)}{2}u(x)\right|^2 dx\right)^{1/2}\right\} dt \leq \\ &\leq \int_s^T \left\{\left(\sqrt{\|a(x)\|_{L^\infty(\Omega)}}\,|E'(t)|^{1/2}\right)\left(R(x_0)\left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx\right)^{1/2}\right)\right\} dt, \end{aligned} \tag{3.33}$$

onde a última desigualdade é uma consequência de (3.29) e do fato que

$$E'(t) = -\int_\Omega a(x)\,|u'(x)|^2 dx.$$

Utilizando (3.31) e efetuando algumas majorações, conforme indicado abaixo, modificamos o lado direito de (3.33), obtendo

$$
\begin{aligned}
&\int_s^T \left\{ \left(\sqrt{\|a(x)\|_{L^\infty(\Omega)}} \left|E'(t)\right|^{1/2} \right) \left(R(x_0) \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \right) \right\} dt \leq \\
&\leq \int_s^T \left\{ \left(\sqrt{\|a(x)\|_{L^\infty(\Omega)}} \left|E'(t)\right|^{1/2} \right) R(x_0)\, c_1^{1/2} \left(\int_\Omega |u'(x)|^2 dx + \int_\Omega |\Delta u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \right\} dt = \\
&= \int_s^T \sqrt{2} R(x_0)\, c_1^{1/2} \|a(x)\|_{L^\infty(\Omega)}^{1/2} \left|E'(t)\right|^{1/2} |E(t)|^{1/2} dt \leq \\
&\leq \|a(x)\|_{L^\infty(\Omega)} R^2(x_0)\, c_1 \int_s^T |E'(t)|\, dt + \frac{1}{2} \int_s^T |E(t)|\, dt \leq \\
&\leq \|a(x)\|_{L^\infty(\Omega)} R^2(x_0)\, c_1 E(s) + \frac{1}{2} \int_s^T |E(t)|\, dt
\end{aligned} \tag{3.34}
$$

Voltando com a estimativa obtida em (3.34) em (3.33) segue-se que

$$
\begin{aligned}
&-\int_{Q_s} a(x)\, u'(x,t) \left(m(x) \cdot \nabla u(x,t) + \frac{(n-1)}{2} u(x,t) \right) dxdt \leq \\
&\leq \|a(x)\|_{L^\infty(\Omega)} R^2(x_0)\, c_1 E(s) + \frac{1}{2} \int_s^T |E(t)|\, dt.
\end{aligned} \tag{3.35}
$$

- Análise de $\frac{1}{2} \int_{\Sigma_s} m(x) \cdot \nu(x) |\Delta u(x,t)|^2 d\Sigma$.

Lembrando que $m(x) \cdot \nu(x) > 0$ sobre $\Sigma(x_0)$ então

$$
\frac{1}{2} \int_{\Sigma_s} m(x) \cdot \nu(x) |\Delta u(x,t)|^2 d\Sigma \leq \frac{R(x_0)}{2} \int_{\Sigma_s(x_0)} |\Delta u(x,t)|^2 d\Sigma. \tag{3.36}
$$

Substituindo as estimativas obtidas em (3.32), (3.35) e (3.36) em (3.23) obtém-se

$$
\begin{aligned}
&\int_s^T E(t)\, dt \leq \left(4c_2 R(x_0) + 2c_1 \|a(x)\|_{L^\infty(\Omega)} R^2(x_0) \right) E(s) + \\
&+ R(x_0) \int_{\Sigma_s(x_0)} |\Delta u(x,t)|^2 d\Sigma.
\end{aligned} \tag{3.37}
$$

2ªETAPA : Estimativa de $\int_{\Sigma_s(x_0)} |\Delta u(x,t)|^2 d\Sigma$

O objetivo, apartir de agora, passa a ser o de obter uma estimativa adequada para a integral $\int_{\Sigma_s(x_0)} |\Delta u(x,t)|^2 d\Sigma$ em função da energia. Afim de cumprir tal objetivo, utiliza-se inicialmente a identidade (I) do **Lema 3.2**, escolhendo-se $q = h \in \left(W^{2,\infty}(\Omega)\right)^n$ tal que:

$$\begin{cases} h = \nu \text{ em } \Gamma(x_0) \\ h \cdot \nu \geq 0 \text{ em } \Gamma \\ h = 0 \text{ em } \Omega \setminus \widehat{\omega}, \end{cases}$$

onde $\widehat{\omega}$ é uma outra vizinhança de $\Gamma(x_0)$ estritamente contida em ω, e $\alpha = 0$. Assim,

$$\frac{1}{2}\int_{Q_s} \operatorname{div} h \left(|u'(t)|^2 - |\Delta u(t)|^2\right) dxdt + \left(u'(t), h \cdot \nabla u(t)\right)\Big|_s^T +$$
$$2\int_{Q_s} \Delta u \frac{\partial h_k}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} dxdt + \int_{Q_s} \left(a(x)\, u'(t)\left(h \cdot \nabla u(t)\right)\right) dxdt +$$
$$+\int_{Q_s} \Delta u(t)\, \Delta h \cdot \nabla u(t)\, dxdt = \frac{1}{2}\int_{\sum_s} h \cdot \nu\, |\Delta u(t)|^2\, d\sum.$$

Das características de h resulta que:

$$\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)} \operatorname{div} h \left(|u'(t)|^2 - |\Delta u(t)|^2\right) dxdt + 2\left(\int_{\Omega} u'(t), h \cdot \nabla u(t)\right) dx\Big|_s^T +$$
$$+4\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)} \Delta u \frac{\partial h_k}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} dxdt + 2\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)} \left(a(x)\, u'(t)\left(h \cdot \nabla u(t)\right)\right) dxdt +$$
$$+\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)} \Delta u(t)\, \Delta h \cdot \nabla u(t)\, dxdt = \int_{\sum_s} h \cdot \nu\, |\Delta u(t)|^2\, d\sum.$$

Como $h \in \left(W^{2,\infty}(\Omega)\right)^n$, tem-se:

$$\int_{\sum_s} h \cdot \nu\, |\Delta u(t)|^2\, d\sum \leq c_3\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)} \left(|u'(t)|^2 + |\Delta u(t)|^2\right) dxdt + 2\int_{\Omega} u'(t), h \cdot \nabla u(t)\Big|_s^T dx +$$
$$+4c_4\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)} |\Delta u| \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}\right| dxdt + 2\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)} \left(a(x)\, u'(t)\left(h \cdot \nabla u(t)\right)\right) dxdt +$$
$$+2c_5\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)} |\Delta u(t)| \cdot \nabla u(t)\, dxdt, \tag{3.38}$$

onde $c_3 = ?$ $c_4 = ?$ $c_5 = ?$

- Análise de $4c_4\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)} |\Delta u| \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}\right| dxdt.$

Da equivalência das normas $\|u\|_{H^2(\Omega)}$ e $|\Delta u|_{L^2(\Omega)}$ existe c_6 tal que $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c_6\, |\Delta u|_{L^2(\Omega)}$, logo

$$4c_4\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}|\Delta u(t)|\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\partial x_j}\right| dxdt \leq 4c_4^2\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}|\Delta u(t)|^2 dxdt + \int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}\|u\|^2_{H^2(\Omega)} dxdt \leq$$
$$\leq 4c_4^2\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}|\Delta u(t)|^2 dxdt + c_6\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}|\Delta u(t)|^2 dxdt. \tag{3.39}$$

- Análise de $2c_5\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}|\Delta u(t)|\,|\nabla u(t)|\, dxdt.$

Como $|\nabla u|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c_1|\Delta u|^2_{L^2(\Omega)}$, obtém-se:

$$2c_5\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}|\Delta u(t)|\cdot\nabla u(t)\, dxdt \leq 2c_5c_1\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}|\Delta u(t)|\,|\Delta u(t)|\, dxdt + \int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}|\nabla u(t)|^2 dxdt \leq$$
$$\leq 2c_5c_1\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}|\Delta u(t)|^2 dxdt + c_1\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}|\Delta u(t)|^2 dxdt = c_7\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}|\Delta u(t)|^2 dxdt \tag{3.40}$$

Substituindo em (3.38) as majorações (3.39) e (3.40), vem que

$$\int_{\sum_s} h\cdot\nu\,|\Delta u(t)|^2 d\sum \leq c_3\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}\left(|u'(t)|^2 + c_4|\Delta u(t)|^2\right) dxdt + 2\left(\int_\Omega u'(t)\,h\cdot\nabla u(t)\, dx\right)\Big|_s^T +$$
$$+4c_4^2\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}|\Delta u(t)|^2 dxdt + c_6\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}|\Delta u(t)|^2 dxdt + 2\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}(a(x)\,u'(t)\,(h\cdot\nabla u(t)))\, dxdt+$$
$$+c_7\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}|\Delta u(t)|^2 dxdt. \tag{3.41}$$

Tem-se da construção de h que,

$$\int_{\sum_s(x_0)}|\Delta u(t)|^2 dxdt = \int_s^T\int_{\Gamma(x_0)}|\Delta u(t)|^2 dxdt = \int_s^T\int_{\Gamma(x_0)} h\cdot\nu\,|\Delta u(t)|^2 dxdt \leq$$
$$\leq \int_s^T\int_\Gamma h\cdot\nu\,|\Delta u(t)|^2 dxdt = \int_{\sum_s} h\cdot\nu\,|\Delta u(t)|^2 \sum. \tag{3.42}$$

Utilizando (3.42) em (3.41)tem-se

$$R(x_0)\int_{\sum_s(x_0)}|\Delta u(t)|^2\,dxdt \leq c_3R(x_0)\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}\left(|u'(t)|^2+|\Delta u(t)|^2\right)dxdt+$$

$$+2R(x_0)\int_\Omega u'(t)\,h\cdot\nabla u(t)\Big|_s^T dx + R(x_0)\,c_8\int_{\bar{\omega}\times(s,T)}|\Delta u(t)|^2\,dxdt$$

$$+2R(x_0)\int_{\bar{\omega}\times(s,T)}(a(x)\,u'(t)\,(h\cdot\nabla u(t)))\,dxdt \leq c_9R(x_0)\int_{\bar{\omega}\times(s,T)}\left(|u'(t)|^2+|\Delta u(t)|^2\right)dxdt+$$

$$+2R(x_0)\int_\Omega u'(t)\,h\cdot\nabla u(t)\,dx\Big|_s^T + 2R(x_0)\int_{\bar{\omega}\times(s,T)}(a(x)\,u'(t)\,(h\cdot\nabla u(t)))\,dxdt,$$

onde, $c_8 = 4c_4^2 + c_6 + c_7$ e $c_9 = c_3 + c_8$.

Resumindo tem-se,

$$\begin{aligned}
&R(x_0)\int_{\sum_s(x_0)}|\Delta u(t)|^2\,dxdt \leq c_9R(x_0)\int_{\bar{\omega}\times(s,T)}\left(|u'(t)|^2+|\Delta u(t)|^2\right)dxdt+\\
&+2R(x_0)\int_\Omega u'(t)\,,h\cdot\nabla u(t)\,dx\Big|_s^T + 2R(x_0)\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}(a(x)\,u'(t)\,(h\cdot\nabla u(t)))\,dxdt.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

- Análise de $c_9R(x_0)\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}\left(|u'(t)|^2+|\Delta u(t)|^2\right)dxdt.$

Lembrando que $a(x) \geq a_0 > 0$ em ω, vem que

$$\begin{aligned}
&c_9R(x_0)\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}\left(|u'(t)|^2+|\Delta u(t)|^2\right)dxdt \leq c_9R(x_0)\int_s^T\int_\Omega |u'(t)|^2\,dxdt+\\
&+c_9R(x_0)\int_s^T\int_\Omega|\Delta u(t)|^2\,dxdt \leq \frac{c_9R(x_0)}{a_0}\int_s^T\int_\Omega a(x)\,|u'(t)|^2\,dxdt+\\
&+c_9R(x_0)\int_s^T\int_{\bar{\omega}}|\Delta u(t)|^2\,dxdt = \frac{c_9R(x_0)}{a_0}\int_s^T -E'(t)\,dt + c_9R(x_0)\int_s^T\int_{\widehat{\omega}}|\Delta u(t)|^2\,dxdt =\\
&= \frac{c_9R(x_0)}{a_0}(-E(T)+E(s)) + c_9R(x_0)\int_s^T\int_{\widehat{\omega}}|\Delta u(t)|^2\,dxdt \leq 2\frac{c_9R(x_0)}{a_0}E(s)+\\
&+c_9R(x_0)\int_s^T\int_{\widehat{\omega}}|\Delta u(t)|^2\,dxdt.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

- Análise de $2R(x_0)\int_\Omega u'(t)\,h\cdot\nabla u(t)\,dx\Big|_s^T.$

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega u'(t)\, h\cdot\nabla u(t)\, dx \le \|h\|_\infty \int_\Omega |u'(t)|\,|\nabla u(t)|\, dx = \\
&= \|h\|_\infty \int_\Omega \frac{1}{\sqrt{c_1}}\,|u'(t)|\,\sqrt{c_1}\,|\nabla u(t)|\, dx \le \\
&\le \|h\|_\infty \sqrt{c_1}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega |u'(t)|^2 dx + \frac{1}{2c_1}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx\right) \le \\
&\le \|h\|_\infty \sqrt{c_1}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega |u'(t)|^2 dx + \frac{1}{2c_1}c_1\int_\Omega |\Delta u(t)|^2 dx\right) = \\
&= \|h\|_\infty \sqrt{c_1} E(t)\,.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&2R(x_0)\int_\Omega u'(t)\,,h\cdot\nabla u(t)\,dx\Big|_s^T \le 2R(x_0)\,\|h\|_\infty\sqrt{c_1}\,(E(T)-E(s)) \le \\
&\le 2R(x_0)\,\|h\|_\infty\sqrt{c_1}\,(E(T)+E(s)) \le 4R(x_0)\,\|h\|_\infty\sqrt{c_1}E(s)\,.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

- Análise de $2R(x_0)\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)} (a(x)\,u'(t)\,(h\cdot\nabla u(t)))\,dxdt.$

$$\begin{aligned}
&2R(x_0)\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)} (a(x)\,u'(t)\,(h\cdot\nabla u(t)))\,dxdt \le 2R(x_0)\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)} |a(x)|\,|u'(t)|\,|h|\cdot|\nabla u(t)|\,dxdt = \\
&= 2R(x_0)\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)} |a(x)|\,|u'(t)|\,|h|\,\frac{\sqrt{2c_1}}{\sqrt{2c_1}}\cdot|\nabla u(t)|\,dxdt \le \frac{1}{4c_1}\int_{\bar{\omega}\times(s,T)} |\nabla u(t)|^2 dxdt + \\
&+4R^2(x_0)\,c_1\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)} |a(x)|^2\,|u'(t)|^2\,|h|^2\,dxdt \le \frac{1}{4c_1}\int_s^T\int_\Omega c_1\,|\Delta u(t)|^2\,dxdt + \\
&+4R^2(x_0)\,c_1\,\|a\|_\infty\,\|h\|_\infty^2\int_s^T\int_\Omega a(x)\,|u'(t)|^2\,dxdt \le \frac{1}{2}\int_s^T\left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u(t)|^2 dx\right)dt + \\
&+4R^2(x_0)\,c_1\,\|a\|_\infty\,\|h\|_\infty^2\int_s^T (-E'(t))\,dt \le \frac{1}{2}\int_s^T (E(t))\,dt + \\
&+4R^2(x_0)\,c_1\,\|a\|_\infty\,\|h\|_\infty^2\,(-E(T)+E(s)) \le \frac{1}{2}\int_s^T (E(t))\,dt + 4R^2(x_0)\,c_1\,\|a\|_\infty\,\|h\|_\infty^2\,E(s)\,.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Substituindo (3.44), (3.45) e (3.46) em (3.43) resulta que,

$$\begin{aligned}
&R(x_0)\int_{\sum_s(x_0)} |\Delta u(t)|^2\,dxdt \le 2\frac{c_9R(x_0)}{a_0}E(s) + c_9R(x_0)\int_s^T\int_{\widehat{\omega}} |\Delta u(t)|^2\,dxdt \\
&+4R(x_0)\,\|h\|_\infty\sqrt{c_1}E(s) + \frac{1}{2}\int_s^T (E(t))\,dt + 4R^2(x_0)\,c_1\,\|a\|_\infty\,\|h\|_\infty^2\,E(s)\,.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$R(x_0)\int_{\sum_s(x_0)}|\Delta u(t)|^2\,dxdt\le c_{10}E(s)+c_9R(x_0)\int_s^T\int_{\widehat{\omega}}|\Delta u(t)|^2\,dxdt+\frac{1}{2}\int_s^T E(t)\,dt, \quad (3.47)$$

onde $c_{10}=2\dfrac{c_9R(x_0)}{a_0}+4R(x_0)\|h\|_\infty\sqrt{c_1}+4R^2(x_0)\,c_1\|a\|_\infty\|h\|_\infty^2$.

Substituindo esta estimativa em (3.37), obtém-se

$$\begin{aligned}\int_s^T E(t)\,dt&\le\left(4c_2R(x_0)+2c_1\|a(x)\|_{L^\infty(\Omega)}R^2(x_0)\right)E(s)+\\&+c_{10}E(s)+c_9R(x_0)\int_s^T\int_{\widehat{\omega}}|\Delta u(t)|^2\,dxdt+\frac{1}{2}\int_s^T E(t)\,dt=\\&=c_{11}E(s)+c_9R(x_0)\int_s^T\int_{\widehat{\omega}}|\Delta u(t)|^2\,dxdt+\frac{1}{2}\int_s^T E(t)\,dt,\end{aligned} \quad (3.48)$$

onde $c_{11}=4c_2R(x_0)+2c_1\|a(x)\|_{L^\infty(\Omega)}R^2(x_0)+c_{10}.$

3ªETAPA : Estimar $\displaystyle\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}|\Delta u(t)|^2\,dxdt.$

Lembrando que deseja-se estimar $\displaystyle\int_s^T E(t)\,dt$ em função de $E(s)$, o objetivo aqui é analisar o termo $\displaystyle\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}|\Delta u(t)|^2\,dxdt.$

Considera-se $\eta\in W^{2,\infty}(\Omega)$ satisfazendo as seguintes condições:

$$\begin{cases}0\le\eta\le1;\\ \eta=1 \text{ em } \widehat{\omega};\\ \eta=0 \text{ em } \Omega\setminus\widehat{\omega}\end{cases}$$

ver construção deste campo em ZUAZUA, Cap.7.LIONS.

Toma-se $\zeta=\eta^2$ na segunda identidade fundamental e obtém-se:

$$\begin{aligned}&\left(u'(t),\eta^2u(t)\right)\Big|_s^T-\int_{Q_s}\eta^2\left(|u'|^2-|\Delta u|^2\right)dxdt+\\&+\int_{Q_s}\Delta u\Delta\eta^2u\,dxdt+2\int_{Q_s}\Delta u\left(\nabla u.\nabla\eta^2\right)dxdt+\\&+\int_{Q_s}a(x)\,u'\eta^2u(t)\,dxdt=0.\end{aligned}$$

Das propriedades do campo η vem que:

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}|\Delta u|^2\,dxdt&=-\int_\Omega u'(t)\,\eta^2u(t)\,dx\Big|_s^T+\int_{Q_s}\eta^2|u'|^2\,dxdt-\\&-2\int_{Q_s}\Delta u\left(\nabla u.\nabla\eta^2\right)dxdt-\int_{Q_s}\Delta u\Delta\eta^2u\,dxdt-\int_{Q_s}a(x)\,u'\eta^2u(t)\,dxdt.\end{aligned} \quad (3.49)$$

- Análise de $2\int_{Q_s} \Delta u \left(\nabla u . \nabla \eta^2\right) dxdt.$

$$
\begin{aligned}
&2\int_{Q_s} \Delta u \left(\nabla u . \nabla \eta^2\right) dxdt \leq 2\sup_{x\in\Omega} \text{ess} \left|\nabla \eta^2 (x)\right| \int_{\widehat{\omega}\times(s,T)} 2\left|\nabla u\right| \frac{1}{2} \left|\Delta u\right| dxdt \leq \\
&\leq 2c_{12} 4\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)} \left|\nabla u\right|^2 dxdt + \frac{1}{4}\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)} \left|\Delta u\right|^2 dxdt = \\
&= c_{13}\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)} \left|\nabla u\right|^2 dxdt + \frac{1}{4}\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)} \left|\Delta u\right|^2 dxdt.
\end{aligned} \tag{3.50}
$$

- Análise de $\int_{Q_s} \Delta u \Delta \eta^2 u dxdt.$

$$
\begin{aligned}
&\int_{Q_s} \Delta u \Delta \eta^2 u dxdt \leq c_{14}\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)} \left|\Delta u\right| \left|\nabla u\right| dxdt \leq \\
&\leq c_{14}\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)} \left|u\right|^2 dxdt + \frac{1}{4}\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)} \left|\Delta u\right|^2 dxdt.
\end{aligned} \tag{3.51}
$$

Substituindo (3.50) e (3.51) em (3.49), vem que:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)} \left|\Delta u\right|^2 dxdt \leq -\int_{\Omega} u'(t)\, \eta^2 u(t)\, dx\Big|_s^T + \int_{Q_s} \eta^2 \left|u'\right|^2 dxdt + \\
&+c_{14}\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)} \left|u\right|^2 dxdt + \frac{1}{4}\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)} \left|\Delta u\right|^2 dxdt + \\
&+c_{13}\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)} \left|\nabla u\right|^2 dxdt + \frac{1}{4}\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)} \left|\Delta u\right|^2 dxdt - \int_{Q_s} a(x)\, u' \eta^2 u(t)\, dxdt = \\
&= -\int_{\Omega} u'(t)\, \eta^2 u(t)_s^T\Big|\, dx + \int_{Q_s} \eta^2 \left|u'\right|^2 dxdt + c_{13}\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)} \left|\nabla u\right|^2 dxdt + \\
&+\frac{2}{4}\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)} \left|\Delta u\right|^2 dxdt + c_{14}\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)} \left|u\right|^2 dxdt - \int_{Q_s} a(x)\, u' \eta^2 u(t)\, dxdt.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)} \left|\Delta u\right|^2 dxdt \leq -\int_{\Omega} u'(t)\, \eta^2 u(t)\, dx\Big|_s^T + \int_{Q_s} \eta^2 \left|u'\right|^2 dxdt + \\
&+c_{13}\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)} \left|\nabla u\right|^2 dxdt + c_{15}\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)} \left|\nabla u\right|^2 dxdt - \int_{Q_s} a(x)\, u' \eta^2 u(t)\, dxdt,
\end{aligned}
$$

implicando que

$$
\begin{aligned}
&c_9 R(x_0) \int_s^T \int_{\widehat{\omega}} \left|\Delta u(t)\right|^2 dxdt \leq -2c_9 R(x_0) \int_{\Omega} u'(t)\, \eta^2 u(t)\Big|_s^T dx + 2c_9 R(x_0) \int_{Q_s} \eta^2 \left|u'\right|^2 dxdt + \\
&+c_9 c_{16} R(x_0) \int_{\widehat{\omega}\times(s,T)} \left|\nabla u\right|^2 dxdt - 2c_9 R(x_0) \int_{Q_s} a(x)\, u' \eta^2 u(t)\, dxdt, \text{ onde } c_{16} = c_{13} + c_{15}.
\end{aligned} \tag{3.52}
$$

- Análise de $2c_9R(x_0)\displaystyle\int_\Omega u'(t)\,\eta^2 u(t)\Big|_s^T$

$$\begin{aligned}&\int_\Omega u'(t)\,\eta^2 u(t)\,dx=\int_{\widehat{\omega}} u'(t)\,u(t)\,dx\leq\frac{1}{2}\int_{\widehat{\omega}}\left(|u'|^2+|u|^2\right)dx\leq\\&\leq c_1\frac{1}{2}\int_{\widehat{\omega}}\left(|u'|^2+|\Delta u|^2\right)dx\leq c_1E(t).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}&2c_9R(x_0)\int_\Omega u'(t)\,\eta^2u(t)\Big|_s^T dx\leq 2c_1c_9R(x_0)\left[E(T)-E(s)\right]\leq\\&\leq 2c_1c_9R(x_0)\left[E(T)+E(s)\right]\leq 4c_1c_9R(x_0)\,E(s)=c_{17}R(x_0)\,E(s).\end{aligned}\tag{3.53}$$

- Análise de $2c_9R(x_0)\displaystyle\int_{Q_s}a(x)\,u'\eta^2u(t)\,dxdt.$

$$\begin{aligned}&2c_9R(x_0)\int_{Q_s}a(x)\,u'\eta^2u(t)\,dxdt=2c_9R(x_0)\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}a(x)\,u'u(t)\,dxdt=\\&=2c_9R(x_0)\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}\sqrt{8}\sqrt{c_{18}}\,a(x)\,u'\frac{1}{\sqrt{8}\sqrt{c_{18}}}u(t)\,dxdt\leq\\&\leq 8c_9^2c_{18}R^2(x_0)\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}a^2(x)\,|u'|^2\,dxdt+\frac{1}{8c_{18}}\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}|u(t)|^2\,dxdt\leq\\&\leq 8c_9^2c_{18}R^2(x_0)\,\|a\|_\infty\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}a(x)\,|u'|^2\,dxdt+\frac{1}{8}\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}|\Delta u(t)|^2\,dxdt\leq\\&\leq 8c_9^2c_{18}R^2(x_0)\,\|a\|_\infty\int_s^T\left(-E'(t)\,dt\right)+\frac{1}{4}\int_s^T E(t)\,dt\leq\\&\leq 16c_9^2c_{18}R^2(x_0)\,\|a\|_\infty\,E(s)+\frac{1}{4}\int_s^T E(t)\,dt.\end{aligned}$$

Portanto,

$$2c_9R(x_0)\int_{Q_s}a(x)\,u'\eta^2u(t)\,dxdt\leq c_{19}R^2(x_0)\,E(s)+\frac{1}{4}\int_s^T E(t)\,dt.\tag{3.54}$$

- Análise de $2c_9R(x_0)\displaystyle\int_{Q_s}\eta^2\,|u'|^2\,dxdt.$

Das propriedades do campo η e do fato de $a(x)\geq a_0$ em ω e sendo $\widehat{\omega}\subset\omega$, tem-se que

$$
\begin{aligned}
&2c_9R(x_0)\int_{Q_s}\eta^2|u'|^2\,dxdt \le \frac{2c_9R(x_0)}{a_0}\int_{\tilde{\omega}\times(s,T)}a(x)|u'|^2\,dxdt \le \\
&\le \frac{2c_9R(x_0)}{a_0}\int_s^T\left(\int_\Omega a(x)|u'|^2\,dx\right)dt = c_{20}R(x_0)\int_s^T E'(t)\,dt \le \\
&\le 2c_{20}R(x_0)E(s) = c_{21}R(x_0)E(s).
\end{aligned} \tag{3.55}
$$

Substituindo (3.53), (3.54) e (3.55) em (3.52), vem que:

$$
\begin{aligned}
&c_9R(x_0)\int_s^T\int_{\tilde{\omega}}|\Delta u(t)|^2\,dxdt \le c_{17}R(x_0)E(s) + c_{21}R(x_0)E(s) + \\
&+c_{22}R(x_0)\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}|\nabla u|^2\,dxdt + c_{23}R^2(x_0)E(s) + \frac{1}{4}\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}E(t)\,dt.
\end{aligned}
$$

Isto é,

$$
\begin{aligned}
&c_9R(x_0)\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}|\Delta u(t)|^2\,dxdt \le c_{24}R(x_0)E(s) + \frac{1}{4}\int_s^T E(t)\,dt + \\
&+c_{22}R(x_0)\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}|\nabla u|^2\,dxdt, \text{ onde } c_{24} = (c_{17}+c_{21}+c_{23}R(x_0))\,R(x_0)
\end{aligned} \tag{3.56}
$$

Substituindo (3.56) em (3.48), vem que:

$$
\begin{aligned}
&\int_s^T E(t)\,dt \le c_{11}E(s) + c_{24}R(x_0)E(s) + \frac{3}{4}\int_s^T E(t)\,dt + \\
&+c_{22}R(x_0)\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}|\nabla u|^2\,dxdt,
\end{aligned}
$$

isto é

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\int_s^T E(t)\,dt \le c_{25}E(s) + c_{22}R(x_0)\int_{\widehat{\omega}\times(s,T)}|\nabla u|^2\,dxdt, \\
&\text{onde } c_{25} = c_{11} + c_{24}R(x_0).
\end{aligned} \tag{3.57}
$$

Com o objetivo de tratar o lado direito de (3.57) considera-se o seguinte multiplicador especial, obtido através de um problema elíptico. Considere $z(t) \in H_0^1(\Omega)$, solução, para cada t, do seguinte problema

$$
\left|\begin{array}{l}
-\Delta z(t) = u(t) \text{ em } \Omega \\
z(t) = 0 \text{ em } \Gamma.
\end{array}\right. \tag{3.58}
$$

A solução $z(t)$ pode ser obtida via Lema de Lax Milgram, desde que $u(t) \in L^2(\Omega)$. Usando a regularidade de solução do problema de Dirichlet, conclui-se que $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Multiplicando a equação $(3.58)_1$ por z e integrando em Ω vem que:

$$-\int_{\Omega} \Delta z z dx = \int_{\Omega} u z dx,$$

ou seja

$$\int_{\Omega} |\nabla z|^2 \, dx = \int_{\Omega} u z dx \leq \int_{\Omega} |u| \, |z| \, dx \leq c_{25} \int_{\Omega} |u| \, |\nabla z| \, dx \leq \frac{c_{26}^2}{2} \int_{\Omega} |u|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla z|^2 \, dx.$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} |\nabla z|^2 \, dx \leq c_{26}^2 \int_{\Omega} |u|^2 \, dx. \tag{3.59}$$

Agora multiplicando a equação

$$u'' + \Delta^2 u + a(x) u' = 0$$

por z e integrando sobre Q_s vem que:

$$\int_{Q_s} u'' z dx + \int_{Q_s} \Delta^2 u z dx + \int_{Q_s} a(x) u' z dx = 0,$$

donde,

$$\int_{Q_s} u'' z dx + \int_{Q_s} \Delta u \Delta z dx + \int_{Q_s} a(x) u' z dx = 0. \tag{3.60}$$

Multiplicando $(3.58)_1$ po $-\Delta u(x,t) \in L^2(\Omega)$ e integrando em Ω obtém-se que:

$$\int_{\Omega} \Delta u \Delta z dx = -\int_{\Omega} u \Delta u dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx. \tag{3.61}$$

Substituindo (3.61) em (3.60), vem que:

$$\int_{Q_s} u'' z dx + \int_{Q_s} |\nabla u|^2 \, dx + \int_{Q_s} a(x) u' z dx = 0.$$

Portanto,

$$\int_{Q_s} |\nabla u|^2 \, dx = -\int_{Q_s} u'' z dx + \int_{Q_s} a(x) u' z dx = -\int_{\Omega} u' z dx \Big|_s^T + \\ + \int_{\Omega} \int_s^T u' z' dt dx - \int_{Q_s} a(x) u' z dx$$

Logo,

$$\begin{aligned} c_{22} R(x_0) \int_{Q_s} |\nabla u|^2 \, dx dt \leq c_{22} R(x_0) \left[-\int_{\Omega} u' z dx \Big|_s^T \right] + \\ + c_{22} R(x_0) \int_{Q_s} u' z' dt dx - c_{22} R(x_0) \int_{Q_s} a(x) u' z dx. \end{aligned} \tag{3.62}$$

- Análise de $c_{22}R(x_0)\left[-\int_\Omega u'zdx\Big|_s^T\right]$.

Note que, utilizando a desigualdade $ab \leq \dfrac{a^2}{2}+\dfrac{b^2}{2}$ e 3.59, obtém-se

$$\left|\int_\Omega u'zdx\right| \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |u'|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |z|^2 dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |u'|^2 dx + \frac{c_1^2}{2}\int_\Omega |\nabla z|^2 dx \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |u'|^2 dx + \frac{c_1^2 c_{26}^2}{2}\Delta u^2 dx \leq c_{27}\int_\Omega \frac{1}{2}\left(|u'|^2+|\Delta u|^2\right) dx =$$
$$= c_{27}E(t).$$

Portanto,

$$-\int_\Omega u'zdx\Big|_s^T \leq c_{27}\left[(E(T)-E(s))\right] \leq 2c_{27}E(s),$$

e assim,

$$c_{22}R(x_0)\left[-\int_\Omega u'zdx\Big|_s^T\right] \leq 2c_{22}c_{27}R(x_0)E(s). \tag{3.63}$$

- Análise de $-c_{22}R(x_0)\int_{Q_s} a(x)u'zdx$.

Fazendo uso da desigualdade de Holder e (3.59), obtém-se

$$-\int_{Q_s} a(x)u'zdx \leq \int_s^T\left(\int_\Omega a^2(x)|u'|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |z|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{c_1c_{18}}{2\varepsilon}\int_s^T\int_\Omega a^2(x)|u'|^2 dx+$$
$$+\frac{\varepsilon}{2c_1c_{18}}\int_s^T\int_\Omega c_1|\nabla z|^2 dxdt \leq \frac{c_1c_{18}}{\varepsilon}\|a\|_\infty E(s) + \frac{\varepsilon}{2c_{18}}\int_s^T\int_\Omega |u|^2 dxdt \leq$$
$$\leq \frac{c_1c_{18}}{\varepsilon}\|a\|_\infty E(s) + \frac{\varepsilon}{2c_{18}}\int_s^T\int_\Omega c_{18}|\Delta u|^2 dxdt \leq \frac{c_1c_{18}}{\varepsilon}\|a\|_\infty E(s) + \varepsilon\int_s^T E(t)\,dt.$$

Portanto,

$$c_{22}R(x_0)\int_{Q_s} a(x)u'zdx \leq c_{22}^2R^2(x_0)\frac{c_1c_{18}}{\varepsilon}\|a\|_\infty E(s) + \varepsilon\int_s^T E(t)\,dt. \tag{3.64}$$

- Análise de $c_{22}R(x_0)\int_{Q_s} u'z'dtdx$.

$$c_{22}R(x_0)\int_{Q_s} u'z'dtdx \le c_{22}R(x_0)\int_s^T\int_\Omega |u'||z'|\,dtdx \le \frac{\varepsilon_1}{2}\int_s^T\int_\Omega |u'|^2\,dxdt+ \\ +\frac{c_{22}^2R^2(x_0)}{2\varepsilon_1}\int_s^T\int_\Omega |z'|^2\,dxdt \le \varepsilon_1\int_s^T E(t)\,dt+\frac{c_{22}^2R^2(x_0)}{2\varepsilon_1}c_{15}\int_s^T\int_\Omega |\nabla z'|^2\,dxdt. \tag{3.65}$$

Desde que $u(t)\in L^2(\Omega)$, resulta de (3.58) que:

$$\left|\begin{array}{l} -\Delta z'(t)=u'(t)\ \text{ em }\Omega \\ z'(t)=0 \text{ em }\Gamma,\text{ com } u\in L^2(\Omega). \end{array}\right. \tag{3.66}$$

Portanto,

$$\int_\Omega |\nabla z'|^2\,dx \le \int_\Omega |u'||z'|\,dx \le c_{28}\int_\Omega |u'||\nabla z'|\,dx \le \frac{c_{28}}{2}\int_\Omega |u'|^2\,dx+\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla z'|^2\,dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla z'|^2\,dx \le \frac{c_{28}^2}{2}\int_\Omega |u'|^2\,dx. \tag{3.67}$$

Utilizando a desigualdade (3.67) em (3.65) vem que:

$$c_{22}R(x_0)\int_{Q_s} u'z'dtdx \le \varepsilon_1\int_s^T E(t)\,dt+\frac{c_{22}^2R^2(x_0)}{2\varepsilon_1}c_{15}\int_s^T\frac{c_{28}^2}{2}\int_\Omega |u'|^2\,dxdt \le \\ \le \varepsilon_1\int_s^T E(t)\,dt+\frac{c_{22}^2c_{15}c_{28}^2R^2(x_0)}{2\varepsilon_1 a_0}c_{13}\int_s^T\int_\Omega a(x)|u'|^2\,dxdt \le \\ \le \varepsilon_1\int_s^T E(t)\,dt+\frac{c_{29}}{\varepsilon_1}\int_s^T[-E'(t)]\,dt \le \varepsilon_1\int_s^T E(t)\,dt+2\frac{c_{29}}{\varepsilon_1}E(s).$$

Portanto,

$$c_{22}R(x_0)\int_{Q_s} u'z'dtdx \le \varepsilon_1\int_s^T E(t)\,dt+2\frac{c_{29}}{\varepsilon_1}E(s). \tag{3.68}$$

Substituindo (3.63), (3.64) e (3.68) em (3.62), vem que:

$$c_{22}R(x_0)\int_{Q_s} |\nabla u|^2\,dxdt \le \left[2c_{22}c_{28}R(x_0)+c_{22}^2R^2(x_0)\,\frac{c_1c_{18}}{\varepsilon}\,\|a\|_\infty+2\frac{c_{29}}{\varepsilon_1}\right]E(s)+ \\ +(\varepsilon+\varepsilon_1)\int_s^T E(t)\,dt = c_{30}E(s)+(\varepsilon+\varepsilon_1)\int_s^T E(t)\,dt. \tag{3.69}$$

Voltando com a desigualdade (3.69) em (3.57), vem que:

$$\left(\frac{1}{4}-\varepsilon-\varepsilon_1\right)\int_s^T E(t)\,dt \le c_{25}E(s)+c_{30}E(s)=c_{31}E(s),$$

onde $c_{31} = c_{25} + c_{30}$. Basta escolher então $\varepsilon + \varepsilon_1 < \dfrac{1}{4}$, ou seja $\varepsilon_1 < \dfrac{1}{8}$ e $\varepsilon < \dfrac{1}{8}$ para obter

$$\int_s^T E(t)\,dt \leq CE(s).$$

Tomando-se o limite qundo $T \to \infty$ na desigualdade anterior, observando-se que a constante C independe de T resulta que

$$\int_s^\infty E(t)\,dt \leq CE(s), \ \forall s \geq 0,$$

donde pelo Lema (3.1), conclui-se que

$$E(t) \leq \exp\left(1 - \frac{t}{e}\right) E(0), \ \forall t \geq C.$$

Bibliografia

[1] Brezis, H., **Analyse Fonctionelle, Théorie et Applications**, Dunod, Paris, (1999)

[2] Brito, E. H., **Decay stimates for generalized damped extensible string and beam equation**, *Nonlinear Analysis* 8, 1489-1496 (1984).

[3] Pereira, D. C., **Existence, Uniqueness and Asymptotic Behavior for solutions of the Nonlinear Beam Equation**, *Nonlinear Analysis* vol. 14, n^0 8 113-123 (1990).

[4] Haraux, A., **Semilinear Hyperbolic Problems in Bounded Domains**, Mathmetical Reports 3(1), Harwood Academic Publishers, Gordon and Breach, London, (1987).

[5] Komornik, V., **Controllability and Stabilization.The Multiplier Method**, Masson, Paris,1994.

[6] Benevides, R., Tucsnak, M., **Energy decay estimates for the damped plate equation with a local degenerated dissipation**, *Systems & Control Letters* (48) 191-197 (2003).

[7] Tucsnak, M., **Stabilization for a Nonlinear Bernoulli-Euler Equation with Localized Damping**, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 19 n^0 11, 897-907 (1996).

[8] Tcheugoué Tébou, L. R., **Stabilization of the Wave Equation with Localized Nonlinear Damping**, *Journal of Differential Equations* 145, 502-524.(1998).

[9] Vasconcelos, C. F., Teixeira, L. M., **Existence, Uniqueness and stabilization for a nonlinear plate system with nonlinear damping**, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* vol. VIII, n^0 1, 173-193 (1999).

[10] Zuazua, E., **Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distribuited damping**, *Comm. Partial Differential Equations* 15, 205-235.(1990).

[11] Woinowsky, W., Krieger, **The effect of Axial Force on the Vibration of Higed Bars**, *J. Appl. Mech.* 17, 35-36 (1950).