

Edemerson Solano Batista de Moraes

Estudo de Fractalidade e Evolução Dinâmica de Sistemas Complexos

Natal, RN

dezembro de 2007

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Edemerson Solano Batista de Moraes

Estudo de Fractalidade e Evolução Dinâmica de Sistemas Complexos

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFRN, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientador:

Prof. Dr. Liacir dos Santos Lucena

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Natal, RN

dezembro de 2007

Tese de Doutorado sob o título *Estudo de Fractalidade e Evolução Dinâmica de Sistemas Complexos*, defendida por Edemerson Solano Batista de Moraes e aprovada em 28 de dezembro de 2007, em Natal, Estado do Rio Grande do Norte, pela banca examinadora constituída pelos doutores:

Prof. Dr. Liacir dos Santos Lucena
Orientador, UFRN

Prof. Dr. Luciano Rodrigues da Silva
UFRN

Prof. Dr. Joaquim Elias de Freitas
UFRN

Prof. Dr. Gandhi Mohan Viswanathan
UFAL

Prof. Dr. Roberto Fernandes Silva Andrade
UFBA

Prof. Dr. Hênio Henrique Aragão Rego
(suplente)
CEFET-MA

*Dedico este trabalho aos meus pais,
João Batista de Moraes e Maria de Lourdes Paiva,
que me criaram com amor e carinho e me fizeram
um cidadão correto e responsável.*

*À minha mulher, Suerda Guedes, pela paciência
e compreensão que teve nesses dias atribulados de finalização
desse trabalho. Seu amor só me faz bem.*

*A todos aqueles, irmãos, parentes e amigos,
que me apoiaram no dia que resolvi largar
o curso de Medicina para me tornar Físico.*

Agradecimentos

Seria impossível chegar até o final desta etapa sem agradecer a várias pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para sua realização.

Os meus sinceros agradecimentos a Liacir dos Santos Lucena, orientador desta tese de doutorado e tutor do programa PET, do qual fiz parte durante o período do meu bacharelado, pela sua paciência e contínuo encorajamento em todos os momentos que vivi no departamento de Física da UFRN.

Agradeço a Gilberto Corso, professor do departamento de Biofísica da UFRN, pela amizade e fundamental colaboração no trabalho.

Agradeço também a Danyel Judson Soares, Hênio Henrique Aragão e Samuel Rodrigues, meus amigos e colegas de graduação e pós-graduação, pelas discussões a respeito de vários tópicos de mecânica estatística.

Por último, agradeço à CAPES e ao CNPq, pelo suporte técnico e financeiro dado àqueles que se aventuram a fazer ciência neste país.

*Nuvens não são esferas,
montanhas não são cones,
litorais não são círculos,
a casca não é lisa e
nem o relâmpago viaja em linha reta.*

Benoit Mandelbrot

Resumo

Neste trabalho, o estudo de alguns sistemas complexos é feito com a utilização de dois procedimentos distintos.

Na primeira parte, estudamos a utilização da transformada *Wavelet* na análise e caracterização (multi)fractal de séries temporais. Testamos a confiabilidade do Método do Máximo do Módulo da Transformada *Wavelet* (MMTW) com relação ao formalismo multifractal, por meio da obtenção do espectro de singularidade de séries temporais cuja fractalidade é bem conhecida *a priori*. A seguir, usamos o método do máximo do módulo da transformada *wavelet* para estudar a fractalidade dos ruídos de crepitação pulmonar, uma série temporal biológica. Uma vez que a crepitação pulmonar se dá no momento da abertura de uma via aérea – brônquios, bronquíolos e alvéolos – que estava inicialmente fechada, podemos obter informações sobre o fenômeno de abertura em cascata das vias aéreas de todo o pulmão. Como este fenômeno está associado à arquitetura da árvore pulmonar, a qual apresenta geometria fractal, a análise e caracterização da fractalidade desse ruído pode nos fornecer importantes parâmetros de comparação entre pulmões saudáveis e aqueles acometidos por patologias que alteram a geometria da árvore pulmonar, tais como as doenças obstrutivas e as de degeneração parenquimatosa, que ocorre, por exemplo, no enfisema pulmonar.

Na segunda parte, estudamos um modelo de percolação por sítios em rede quadrada, onde o aglomerado de percolação cresce governado por uma regra de controle, correspondendo a um método de busca automática. Neste modelo de percolação, que apresenta características de criticalidade auto-organizada, o método de busca automática não usa o algoritmo de Leath. Usa-se a seguinte regra de controle: $p_{t+1} = p_t + k(R_c - R_t)$, onde p é a probabilidade de percolação, k é um parâmetro cinético onde $0 < k < 1$ e R é a fração de redes quadradas finitas de lado L , $L \times L$, percolantes. Esta regra fornece uma série temporal correspondente à evolução dinâmica do sistema, em especial da probabilidade de percolação p . É feita uma análise de escalas do sinal assim obtido. O modelo aqui utilizado permite que o método de busca automática para a percolação por sítios em rede quadrada seja, *per si*, estudado, avaliando-se a dinâmica dos seus parâmetros quando o sistema se aproxima do ponto crítico. Verifica-se que os escalonamentos de τ , o tempo decorrido até que o sistema chegue ao ponto crítico, e de t_{cor} , o tempo necessário para que o sistema perca suas correlações, são, ambos, inversamente proporcionais a k , o parâmetro cinético da regra de controle. Verifica-se ainda que o sistema apresenta duas escalas temporais distintas depois de τ : uma em que o sistema mostra ruído do tipo $\frac{1}{f^p}$, indicando ser fortemente correlacionado; outra em que aparece um ruído branco, indicando que se perdeu a correlação. Para grandes intervalos de tempo a dinâmica do sistema mostra que ele se comporta como um sistema ergódico.

Palavras Chave: coeficientes de *wavelet*, MMTW, multifractais, ruídos de crepitação, teoria de percolação, criticalidade auto-organizada.

Abstract

In this work, the study of some complex systems is done with use of two distinct procedures.

In the first part, we have studied the usage of Wavelet transform on analysis and characterization of (multi)fractal time series. We have test the reliability of Wavelet Transform Modulus Maxima method (WTMM) in respect to the multifractal formalism, trough the calculation of the singularity spectrum of time series whose fractality is well known *a priori*. Next, we have use the Wavelet Transform Modulus Maxima method to study the fractality of lung's crackles sounds, a biological time series. Since the crackles sounds are due to the opening of a pulmonary airway – bronchi, bronchioles and alveoli – which was initially closed, we can get information on the phenomenon of the airway opening cascade of the whole lung. Once this phenomenon is associated with the pulmonar tree architecture, which displays fractal geometry, the analysis and fractal characterization of this noise may provide us with important parameters for comparison between healthy lungs and those affected by disorders that affect the geometry of the tree lung, such as the obstructive and parenchymal degenerative diseases, which occurs, for example, in pulmonary emphysema.

In the second part, we study a site percolation model for square lattices, where the percolating cluster grows governed by a control rule, corresponding to a method of automatic search. In this model of percolation, which have characteristics of self-organized criticality, the method does not use the automated search on Leath's algorithm. It uses the following control rule: $p_{t+1} = p_t + k(R_c - R_t)$, where p is the probability of percolation, k is a kinetic parameter where $0 < k < 1$ and R is the fraction of percolating finite square lattices with side L , $L \times L$. This rule provides a time series corresponding to the dynamical evolution of the system, in particular the likelihood of percolation p . We proceed an analysis of scaling of the signal obtained in this way. The model used here enables the study of the automatic search method used for site percolation in square lattices, evaluating the dynamics of their parameters when the system goes to the critical point. It shows that the scaling of τ , the time elapsed until the system reaches the critical point, and t_{cor} , the time required for the system loses its correlations, are both inversely proportional to k , the kinetic parameter of the control rule. We verify yet that the system has two different time scales after τ : one in which the system shows noise of type $\frac{1}{f^p}$, indicating to be strongly correlated. Another in which it shows white noise, indicating that the correlation is lost. For large intervals of time the dynamics of the system shows ergodicity.

Keywords: Wavelet coefficients, WTMM, multifractals, crackles, percolation theory, SOC.

Lista de Figuras

| | | |
|----|---|-------|
| 1 | família de <i>wavelets</i> | p. 18 |
| 2 | exemplo genérico | p. 20 |
| 3 | expoente de Hölder | p. 25 |
| 4 | Exemplo Genérico e sua decomposição <i>wavelet</i> | p. 28 |
| 5 | decomposição <i>wavelet</i> da medida de Cantor e <i>zoom</i> à esquerda | p. 31 |
| 6 | decomposição <i>wavelet</i> da "escadaria do diabo" e <i>zoom</i> à esquerda. | p. 32 |
| 7 | Funções de partição $Z(q, s)$ para diferentes <i>wavelet</i> | p. 36 |
| 8 | Uso do método <i>MMTW</i> na "escadaria do diabo" | p. 37 |
| 9 | Uso do método <i>MMTW</i> na "escadaria do diabo" modificada | p. 38 |
| 10 | Uso do método <i>MMTW</i> no movimento Browniano simples | p. 39 |
| 11 | Uso do método <i>MMTW</i> no mBf com $H = 0,2$ e $H = 0,8$ | p. 40 |
| 12 | Árvore brônquica de humano | p. 42 |
| 13 | Espectro de singularidades do ruído de crepitação pulmonar | p. 45 |
| 14 | Espectro de singularidades do ruído de captação | p. 46 |
| 15 | Espectro de singularidades do ruído de crepitação pulmonar inicial | p. 47 |
| 16 | Espectro de singularidades do ruído de crepitação pulmonar final | p. 48 |
| 17 | exemplos de redes | p. 51 |
| 18 | percolação por ligação | p. 53 |
| 19 | percolação por sítios | p. 55 |
| 20 | Fração percolante <i>versus</i> probabilidade de percolação | p. 62 |
| 21 | probabilidade de ocupação <i>versus</i> tempo | p. 65 |
| 22 | dispersão de p , Δp , <i>versus</i> L | p. 67 |

| | | |
|----|--|-------|
| 23 | tempo transiente τ versus k | p. 70 |
| 24 | deslocamento quadrático médio de Δp versus tempo t | p. 71 |
| 25 | Espectro de Fourier dos dados da figura 24, para $k = 0.005$ | p. 73 |
| 26 | Espectro de Fourier dos dados da figura 24, para $k = 0.02$ | p. 74 |

Sumário

| | | |
|----------|--|-------|
| 1 | Introdução | p. 12 |
| 1.1 | colaboradores | p. 15 |
| 2 | A Transformada Wavelet, o Formalismo Multifractal e o Método <i>MMTW</i> | p. 16 |
| 2.1 | A transformada <i>Wavelet</i> | p. 16 |
| 2.1.1 | Propriedades da transformada <i>wavelet</i> | p. 19 |
| 2.1.2 | Convolução | p. 22 |
| 2.1.3 | Condição de admissibilidade | p. 22 |
| 2.1.4 | função de escala | p. 23 |
| 2.2 | Fractais e Multifractais | p. 23 |
| 2.2.1 | Regularidade de Lipschitz | p. 24 |
| 2.2.2 | Medição da regularidade "suave por partes" de Lipschitz usando <i>wavelets</i> | p. 26 |
| 2.2.3 | Os máximos do módulo da transformada <i>wavelet</i> (<i>MMTW</i>) | p. 27 |
| 2.2.4 | conjuntos fractais | p. 29 |
| 2.2.5 | funções auto-similares | p. 30 |
| 2.2.6 | espectro de singularidade | p. 31 |
| 2.2.6.1 | função de partição | p. 32 |
| 2.2.7 | teste do método <i>MMTW</i> em alguns conjuntos fractais com H previamente conhecido | p. 34 |
| 3 | A Caracterização Fractal do Ruído de Crepitação Pulmonar | p. 41 |

| | | |
|----------|---|-------|
| 3.1 | Anatomia do pulmão | p. 41 |
| 3.2 | Procedimento experimental para a obtenção do ruído de crepitação pulmonar | p. 44 |
| 3.3 | Estudo da fractalidade do ruído de crepitação pulmonar | p. 44 |
| 3.4 | Análise dos resultados | p. 48 |
| 4 | Percolação e Criticalidade Auto-Organizada | p. 50 |
| 4.1 | Percolação | p. 50 |
| 4.1.1 | Processos de Percolação | p. 52 |
| 4.1.2 | O estudo do aglomerado de percolação | p. 54 |
| 4.2 | Criticalidade Auto-Organizada | p. 57 |
| 5 | A Evolução Dinâmica de um Modelo de Percolação | p. 59 |
| 5.1 | Introdução | p. 59 |
| 5.2 | Evolução temporal da probabilidade de ocupação | p. 64 |
| 5.3 | Mapa unidimensional para o modelo de percolação por sítios | p. 64 |
| 5.4 | Análise de Fourier | p. 72 |
| 5.5 | Resumo e considerações finais | p. 75 |
| 6 | Considerações Finais | p. 77 |
| | Referências | p. 79 |

1 Introdução

O estudo de sistemas complexos engloba uma ampla gama de fenômenos, físicos ou não, observados em diversas áreas do conhecimento. As relações inter-pessoais dentro de um grupo de músicos, os mecanismos de propagação de doenças (NEWMAN, 2002), a propagação de um incêndio em uma mata fechada (KARAFYLLIDIS; THANAILAKIS, 1997), a votação de um partido político em uma eleição proporcional (FILHO et al., 1999), o mecanismo de crescimento de um tumor cancerígeno, transições de fase em processos de reação-difusão (FREITAS et al., 2000), polimerização por ramificação em meios "sujos" (LUCENA et al., 1994), e uma série de outros fenômenos são objeto de estudo desta área da ciência.

O que todos eles têm em comum é o fato de que suas estruturas, aparentemente complexas, podem ser governadas, em sua essência, por leis ou regras bastante simples, que não poderiam ser estudadas se considerássemos apenas as interações individuais dentro do sistema. Por exemplo, a forma como um torcedor reage a um estímulo (um gol do seu time, por exemplo) quando está dentro de um estádio de futebol é completamente diferente daquela que ele apresentaria se visse o gol pela televisão, no sossego de seu lar. No estádio de futebol, o torcedor se comporta como um componente do sistema complexo constituído pelo conjunto de todos os torcedores.

Neste trabalho, são analisados dois sistemas complexos bastante distintos entre si. São eles: o processo de insuflação da árvore pulmonar e a percolação criticamente auto-organizada em uma rede quadrada.

A análise do processo de insuflação pulmonar se dá por meio de sua caracterização fractal, feita por intermédio do uso da transformada *wavelet*, que serve como ferramenta para o método conhecido como MMTW (Método do Máximo do Módulo da Transformada).

A árvore pulmonar pode ser vista como uma sequência de ductos, que se ramificam dicotomicamente em ductos menores, que continuam a se ramificar até chegar a um ponto

onde terminam em um pequeno saco, chamado alvéolo. Definindo estes ductos de tal forma que as ramificações do inicial - a traquéia - sejam ditas de *primeira geração*, as ramificações dos de 1ª geração sejam de 2ª geração, as ramificações dos de 2ª geração sejam de 3ª geração e assim por diante, a árvore pulmonar do ser humano chega a ter, em média, 23 gerações de vias aéreas (WEIBEL, 1991). As primeiras 16 gerações das vias aéreas são chamadas de *vias condutoras*, por terem como função primordial a condução de ar do (e para) os ácinos pulmonares, compostos pelas sete últimas gerações. É nos ácinos pulmonares onde ocorrem as trocas gasosas. O interior de toda esta rede de ductos é recoberto por fluidos. Os ductos condutores têm suas paredes formadas por tecido conjuntivo, músculo liso e epitélio estratificado, o que lhes confere relativa rigidez. São recobertos internamente por um muco, de viscosidade elevada, que, em conjunto com a atividade de células ciliares, é responsável pela limpeza e integridade do epitélio desta região. As vias respiratórias onde ocorrem as trocas gasosas são, por sua vez, formados de um epitélio simples associado a músculo liso e recobertos por um fator surfactante, que diminui a tensão superficial dos sacos alveolares, impedindo que os sacos menores se esvaziem nos maiores.

A caracterização fractal do processo de insuflação pulmonar foi feita através da análise do ruído de crepitação pulmonar, produzido durante a insuflação *ex-vivo* de um pulmão de cachorro. O processo de obtenção deste som está descrito detalhadamente no capítulo 3. O ruído de crepitação pulmonar corresponde a um estalido característico, emitido quando uma via aérea, inicialmente colabada, se abre abruptamente. Este ruído está relacionado com a presença de fluidos viscosos (muco e surfactante) no interior das vias aéreas. Se no instante inicial, anterior à insuflação, toda a árvore respiratória está completamente colabada, a abertura das vias aéreas ocorre de tal forma que os ruídos de crepitação se superpõem como em uma avalanche. As características destes ruídos estão, muito provavelmente, relacionadas com a própria estrutura da árvore respiratória. A análise da fractalidade desse sinal nos dá, conseqüentemente, uma informação sobre a própria morfologia da árvore respiratória, que tem dimensão fractal, (D_F), situada entre 2,64 e 2,76 (obtida a partir de dados morfométricos (NELSON; MANCHESTER, 1988)). Como a dimensão fractal da árvore respiratória se modifica (KIDO et al., 1995, 2002) na presença de doenças que provocam a alteração de parte dos ductos, por meio de enrijecimento, degeneração ou obstrução de parte dos mesmos, a análise fractal dos ruídos de crepitação pulmonar pode se tornar uma ferramenta auxiliar no diagnóstico de patologias por meio de métodos não invasivos. Os resultados obtidos são apresentados no capítulo 3.

O método utilizado na caracterização (multi)fractal da série temporal foi o Método

do Máximo do Módulo da Transformada *Wavelet* (MMTW) (MALLAT; HWANG, 1992). Este método foi desenvolvido baseando-se na propriedade apresentada pela Transformada *Wavelet* de ser capaz de detectar, no tempo, regiões em que uma função sofre mudanças abruptas de comportamento, além de verificar para quais escalas estas mudanças permanecem relevantes. Com isto, a detecção de singularidades em uma série temporal é facilmente realizada, e a partir destas singularidades a caracterização fractal da mesma série. Os detalhes sobre a Transformada *Wavelet*, o método MMTW e a relação deste método com o formalismo (multi)fractal é apresentado no capítulo 2.

Na segunda parte deste trabalho, nos capítulos 4 e 5, estudamos a dinâmica de evolução de um modelo de percolação por sítios em uma rede quadrada, usando procedimentos originados no estudo de fenômenos que apresentam criticalidade auto-organizada.

No capítulo 4, fazemos uma pequena revisão a respeito dos processos de percolação, enfatizando mais especificamente os conceitos básicos relacionados a estes processos. Os processos de percolação são divididos em

- Percolação por sítios;
- Percolação por ligações;
- Percolação contínua.

O estudo destes processos possui diversas aplicações, sobretudo em modelos de transições de fase e fenômenos críticos, tais como:

- a transição isolante-condutor para um sistema de partículas constituído de partículas condutoras dispersas em um meio isolante;
- a transição entre uma queimada local e um incêndio devastador, para uma mata de vegetação rasteira;
- a transição entre surto e uma epidemia, para uma população sob o efeito de uma virose.
- muitos outros exemplos.

Ainda no capítulo 4, apresentamos brevemente o conceito de criticalidade auto-organizada. Um sistema é criticamente auto-organizado quando tende, por si só, a evoluir até o seu estado crítico e nele permanecer. O estudo destes tipos de fenômenos, através de métodos

de busca automática do ponto crítico de um sistema, será de fundamental importância na investigação do que ocorre com a dinâmica do sistema à medida em que o mesmo evolui até o ponto crítico.

O método de busca automática do estado crítico de um modelo de percolação por sítios em rede quadrada é utilizado no capítulo 5 para se estudar a dinâmica de evolução de um sistema que apresenta percolação criticamente auto-organizada. São analisados, especificamente, o que ocorre com os parâmetros do sistema à medida que ele evolui para o estado crítico e a ergodicidade do sistema.

Finalmente, no capítulo 6, fazemos considerações finais sobre os resultados obtidos nos capítulos 3 e 5, bem como sugestões sobre trabalhos futuros que podem ser desenvolvidos a partir destes resultados.

1.1 colaboradores

Juntamente com outras pessoas do grupo de Física Estatística do Departamento de Física Teórica e Experimental da UFRN que de alguma forma contribuíram para a realização das atividades em que resultaram esta tese, o autor destaca Gilberto Corso (CORSO; MORAIS; LUCENA, 2003), professor do Departamento de Biofísica da UFRN, pela sua colaboração no trabalho que resultou no capítulo 5, Adriano Alencar, por ter cedido o sinal analisado no capítulo 3, e Liacir dos Santos Lucena, pelas discussões sobre tópicos atuais de Física Estatística e sua orientação na elaboração deste texto.

Não poderia deixar de citar também a colaboração indireta do grupo da *Ecole Polytechnique* da França, coordenado por Emmanuel Bacry, que desenvolveu o *LastWave*, excelente software para análise de dados, de domínio público.

2 A Transformada Wavelet, o Formalismo Multifractal e o Método *MMTW*

Neste capítulo, fazemos uma breve apresentação da transformada *Wavelet* e um sucinto estudo do formalismo multifractal, tendo como objetivo principal revisar a definição de sinal fractal e multifractal, e a importância do seu estudo na análise de séries temporais. A seguir, apresentamos o método do Máximo do Módulo da Transformada *Wavelet* (MMTW), que faz uso da transformada *Wavelet* para obter informações sobre a (multi)fractalidade, especificamente o espectro de singularidade, de uma série temporal qualquer. O espectro de singularidade pode ser interpretado como uma "assinatura" de uma série temporal, sendo muito importante na caracterização da mesma. Ao final, fazemos algumas considerações a respeito da confiabilidade do método MMTW na caracterização fractal e testamos o método em algumas medidas fractais de valor conhecido.

2.1 A transformada *Wavelet*

Há muito tempo a transformada de Fourier é utilizada para a análise de sinais unidimensionais dos mais diversos tipos. Alguns exemplos, citados sem ordenar por relevância, são: índices de bolsas de valores (CONT; POTTERS; BOUCHAUD, 1997), flutuação da cotação do dólar (LOGUE; SWEENEY, 1977), sinais biomédicos tais como o eletrocardiograma (CAIN et al., 1984) e o eletroencefalograma (BANQUET, 1973), gravações musicais (DÖRFLER, 2001) e várias outras aplicações científicas e tecnológicas. Além disso, há uma vasta bibliografia mostrando o uso de variantes da transformada de Fourier - como por exemplo a transformada de Fourier discreta em duas dimensões e a Transformada Rápida de Fourier Linha-Coluna¹- na decomposição, análise e compressão de fotografias, gravuras, radiografias, tomografias, imageamento por ressonância nuclear magnética e qualquer

¹em inglês, *Row-Column Fast Fourier Transform*

outra imagem digital.

Grosso modo, qualquer sinal unidimensional pode ser interpretado como uma série temporal em uma dimensão, assim como uma gravura ou fotografia pode muito bem ser descrita como uma série temporal em duas dimensões. Ambos podem, então, ser analisados com ferramentas desenvolvidas para estudar séries temporais.

Uma das grandes deficiências da análise de séries temporais por meio da transformada de Fourier é que, ao se detectar uma certa característica do sinal, como por exemplo a presença de uma frequência aguda em uma música erudita, não é possível determinar em que instante isto ocorreu: terá sido apenas no clímax, ou permeou toda a execução? Para amenizar este problema, desenvolveu-se uma técnica em que se executa a análise de Fourier em pequenos intervalos fixos do sinal, "saltando" de uma extremidade à outra do mesmo, o que é conhecido como WFT ²(ALLEN J.B.; RABINER, Nov. 1977). Utilizando-se este artifício da "janela" de transformada, um problema persistiu: mesmo sabendo aproximadamente quando o evento ocorreu, não era possível estimar com que escala de intensidade ele se deu, comparado ao resto do sinal.

Em 1984, Grossmann e Morlet desenvolveram uma nova ferramenta matemática para a análise de dados sísmicos e sinais acústicos (GROSSMANN; MORLET, 1984; GOUPILLAUD; GROSSMANN; MORLET, 1984), conhecida como *transformada wavelet* ³, capaz de detectar as nuances características de um certo tipo de sinal, localizá-las no tempo e graduá-las em escalas. Esta parte deste capítulo é uma revisão das propriedades e características desta transformada.

Enquanto a transformada de Fourier consiste em decompor uma série temporal em uma base de funções periódicas do tipo seno e cosseno com frequências diferentes, a transformada *wavelet* decompõe a mesma série temporal em uma base composta por uma família de funções de suporte compacto que possuem o mesmo formato e diferem entre si apenas por um parâmetro de escala s (onde a condição $s > 0$ deve ser respeitada) e um outro de translação u . A figura 1 mostra parte de uma família de *wavelet* onde a *wavelet* geradora, chamada de *wavelet mãe*, é a segunda derivada da gaussiana (DOG²⁴). Na figura 1, vemos algumas *wavelets* $\psi_{s,u}(x)$, pertencentes a uma mesma base $\psi(x)$ da transformada *wavelet*, obtidas a partir da variação dos parâmetros u e s . Perceba que, ao variar somente o parâmetro u , mantendo s fixo, a forma da *wavelet* permanece a

² *Windowed Fourier Transform*, ou Transformada de Fourier Janelada

³ termo de uso corrente no Brasil. Alguns o traduziram também com "transformada de ondeletas". Em português de Portugal, adotou-se o termo **ôndula**, muito mais apropriado.

⁴DOG n é a derivada da gaussiana de n -ésima ordem.

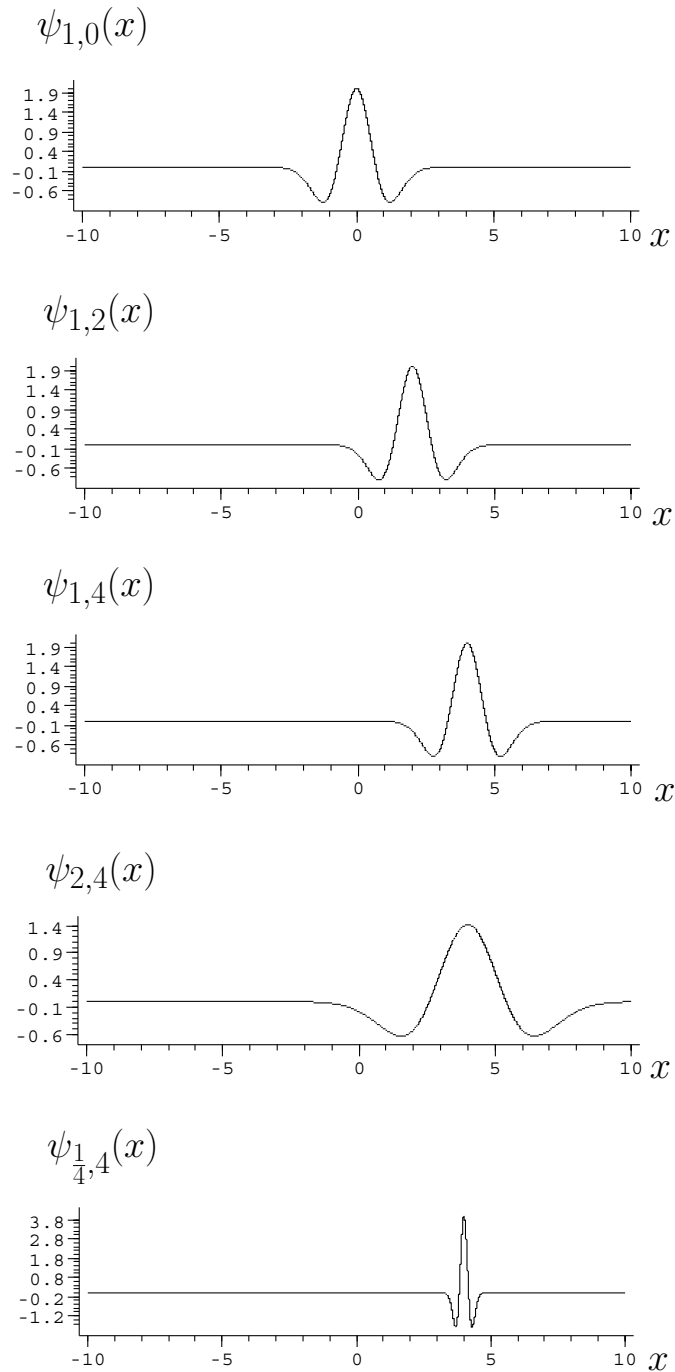


Figura 1: Parte de uma família de *wavelets* $\psi_{s,u}(x) = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi\left(\frac{x-u}{s}\right)$, geradas a partir de uma *wavelet* mãe $\psi(x) = -\frac{d^2}{dx^2}e^{-x^2}$, conhecida como DOG2 ou "chapéu mexicano". De cima para baixo, nos três primeiros gráficos de $\psi_{s,u}$ versus x , vemos que o parâmetro de escala s foi mantido fixo enquanto o parâmetro de translação u variou. Com isto, temos a manutenção do formato e do tamanho da função, criando uma sequência de *wavelets* que se desloca ao longo do eixo x . Nos dois últimos gráficos, fixamos u , mantendo fixa a posição do centro da *wavelet* (que neste caso corresponde ao próprio valor de u) e variamos o formato da *wavelet* por meio da variação de s , gerando uma sequência de *wavelets* que pode "ver" em diferentes escalas. Note que, se $0 < s < 1$, a *wavelet* se contrai. Se $s > 1$, a mesma se dilata. Todos os gráficos deste capítulo e do próximo foram gerados usando-se o programa *LastWave*.

mesma, mudando apenas a localização da onda com relação ao eixo x . Quando variamos o parâmetro de escala s , mantendo u fixo, a *wavelet* se "contraí" (quando $0 < s < 1$) ou se "dilata" (quando $s > 1$). Por causa disso, s também pode ser chamado de "parâmetro de contração".

Para calcularmos a transformada *wavelet* de um certo sinal unidimensional, suponhamos inicialmente que $f(t)$ seja uma série temporal qualquer. A transformada *wavelet* de f em $L^2(\mathfrak{R})$ no tempo u e na escala s são então obtidos pela equação

$$Wf(s, u) = \langle f, \psi_{s,u} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(\frac{t-u}{s} \right) dt \quad (2.1)$$

De acordo com a equação 2.1, a transformada *wavelet* pode ser entendida como a *projeção* da série temporal $f(t)$ sobre uma família de funções de características bem definidas, a respeito das quais discutiremos a seguir. Os valores $Wf(u, s)$ são chamados de *coeficientes de wavelet*, para uma certa escala s no instante u . Na figura 2 temos um exemplo dos valores dos coeficientes de *wavelet* obtidos com uma transformada *wavelet* sobre uma série temporal genérica qualquer. Os resultados apresentados correspondem ao uso de três escalas diferentes. Neste caso, a função utilizada pela transformada *wavelet* foi a segunda derivada da gaussiana (DOG2), conhecida entre os especialistas da área como "chapéu mexicano", devido ao seu formato. Todos os gráficos de análise de séries temporais usando a transformada *wavelet* deste trabalho foram obtidos com o programa *LastWave*⁵.

Fazendo-se uma analogia superficial, podemos dizer que a transformada *wavelet* está para uma série temporal assim como um microscópio eletrônico está para a célula de um ser vivo. Com a transformada *wavelet*, pode-se analisar detalhes dos sinais que pareciam estar invisíveis para outras ferramentas de análise.

2.1.1 Propriedades da transformada *wavelet*

A transformada *wavelet* é produzida com o uso de funções $\psi(t)$ que, juntas, compõem uma *família*. A *wavelet* geradora é chamada de *wavelet* mãe. Esta função, por meio do uso combinado de duas variáveis, u para transladar e s para contrair a *wavelet* mãe, é convertida em outras funções, chamadas *wavelets* filhas.

As funções $\psi(t)$ devem obedecer certas restrições ou possuir determinadas proprieda-

⁵*LastWave* é um programa de computador cuja fonte é de domínio público. *LastWave* pode ser obtido em <http://www.cmap.polytechnique.fr/bacry/LastWave/>

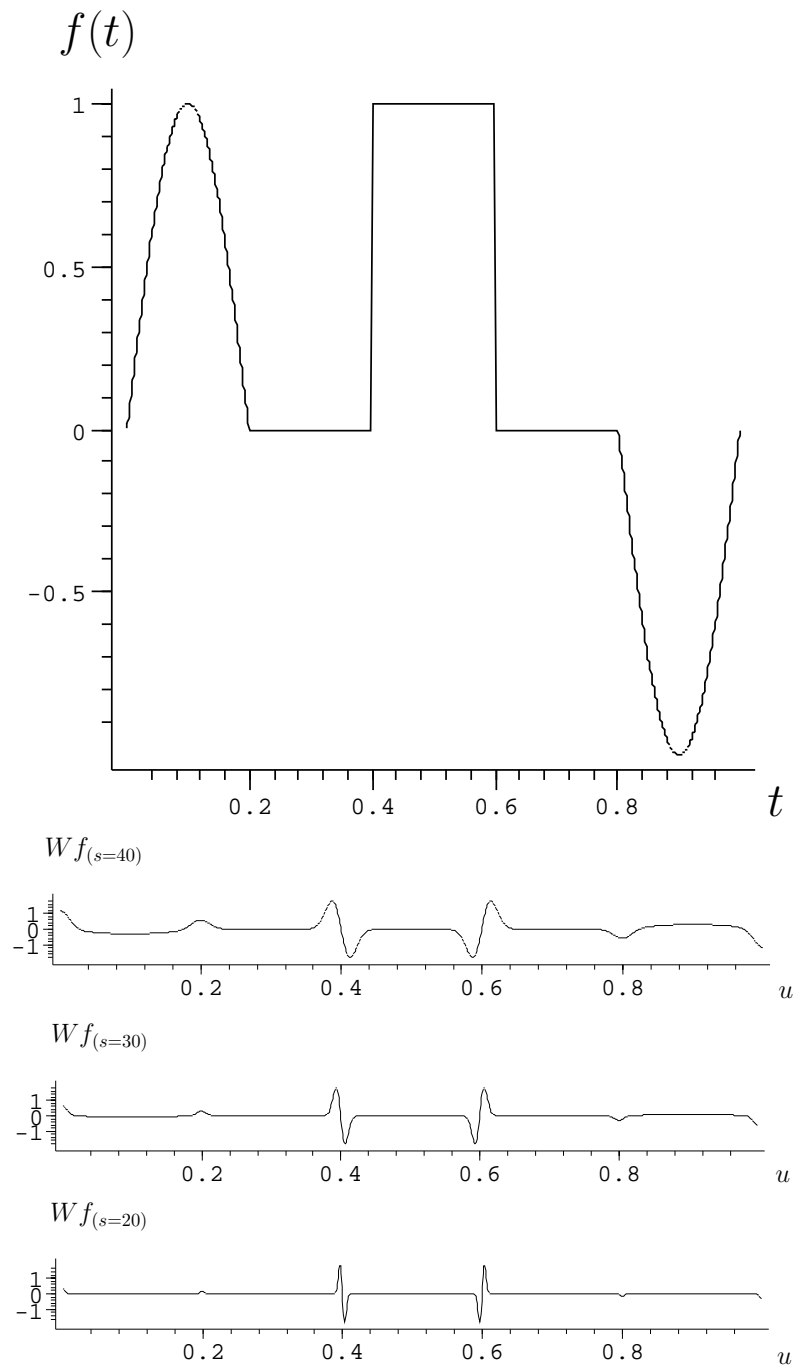


Figura 2: Um exemplo do uso da transformada *wavelet*. No gráfico superior, um sinal genérico. Abaixo deste, três gráficos da transformada *wavelet* deste sinal, usando diferentes escalas. Na vertical destes gráficos, estão os valores dos coeficientes de *wavelet*. Na horizontal, o instante t correspondente. Percebe-se que as grandes variações das transformadas correspondem às proximidades dos pontos onde a derivada do sinal genérico é descontínua. A *wavelet* $\psi(t)$ empregada foi DOG1.

des, que são:

1. A função $\psi(t)$ deve ser quadrado integrável,

$$\psi \in L^2(\mathfrak{R}) \quad (2.2)$$

Ao analisar uma série temporal unidimensional, o resultado da transformada *wavelet* representa a intensidade do evento, no sinal, considerando-se dois parâmetros: um relacionado à escala e outro ao instante em que o evento ocorreu.

2. A mesma função deve possuir momentos nulos até uma ordem $k > 1$, tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n \psi(t) dt = 0 \quad (2.3)$$

onde $0 \leq n < k$. Quanto maior o valor de k , maior a eficiência da transformada na obtenção de singularidades nos sinais analisados, f . Uma consequência disto é que a transformada *wavelet* se mostra "cega" a qualquer tendência polinomial de ordem n , P_n , presente em f , até um valor $n = k - 1$. Esta não é, *a priori*, uma exigência para que a função seja uma *wavelet*, mas é necessária para que seja usada no método MMTW, que será visto mais tarde.

3. A função ψ é, geralmente, normalizada

$$\|\psi\| = 1 \quad (2.4)$$

apesar de esta normalização não ser uma exigência a rigor. Desta forma, possibilita-se a reconstrução do sinal a partir dos coeficientes W de *wavelet*.

4. As funções que compõem a transformada *wavelet* formam o que se chama de família de *wavelets*, construídas por meio de translações, pelo uso da variável u , e dilatações, com a variável s :

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \quad (2.5)$$

Ao se aplicar estas funções no sinal a ser analisado, estamos buscando os pontos do sinal que mais se assemelham a tal função, em uma determinada escala. Para isto, usamos a variável u para fazer uma varredura ao longo do sinal e a variável s para determinar a escala em que a varredura deve ocorrer.

A Transformada *Wavelet* Contínua, como é o caso das *DOGn*, é melhor empregada

na análise de sinais, ao passo que a Transformada *Wavelet* Discreta tem maior utilidade na compressão e reconstrução dos mesmos.

2.1.2 Convolução

Uma transformada *wavelet* pode também ser descrita como uma convolução do sinal $f(t)$, tal que

$$Wf(u, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^* \frac{1}{\sqrt{s}} \left(\frac{t-u}{s} \right) dt = f * \bar{\psi}_s(u) \quad (2.6)$$

onde

$$\bar{\psi}_s(t) = \frac{1}{\sqrt{(s)}} \psi^* \left(\frac{-t}{s} \right) \quad (2.7)$$

Com base nisto, podemos ver que a transformada *wavelet* pode ser usada também na detecção da evolução temporal de transientes de frequência (usando-se *wavelet* complexa) ou de transições "agudas" em séries temporais (usando-se *wavelets* reais).

2.1.3 Condição de admissibilidade

Uma função ψ qualquer somente pode se candidatar a ser base da transformada *wavelet* quando a mesma for tal que

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty \quad (2.8)$$

Esta condição de admissibilidade da *wavelet* também implica em média nula. A partir dela, temos que $f(t)$ satisfaz

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} Wf(u, s) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left(\frac{t-u}{s} \right) du \frac{ds}{s^2} \quad (2.9)$$

A equação 2.9 mostra que se pode reconstruir o sinal original com exatidão, sendo necessário que todos os valores de $Wf(u, s)$, para cada s , sejam conhecidos. Existe também uma relação entre a energia do sinal e a energia da transformada, dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} |Wf(u, s)|^2 du \frac{ds}{s^2} \quad (2.10)$$

2.1.4 função de escala

Como já foi dito, chamamos “coeficientes de *wavelet*” aos valores $Wf(u, s)$ obtidos na equação 2.1. Ao variarmos os valores das escalas s , se $Wf(u, s)$ para um dado $s > s_0$ for desconhecido, não será possível recuperar $f(t)$ a partir dos coeficientes. O que fazer então com o sinal? Suponhamos que ϕ seja a função de escala. Temos que

$$|\widehat{\phi}(\omega)|^2 = \int_{s_0}^{\infty} |\widehat{\psi}(s\omega)|^2 \frac{ds}{s} = \int_{s_0\omega}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\zeta)|}{\zeta} d\zeta \quad (2.11)$$

e também

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |\widehat{\phi}(\omega)|^2 = C_\psi \quad (2.12)$$

Isto significa que a função de escala é então um “filtro passa baixa” e podemos escrever ϕ da seguinte forma:

$$\phi_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \phi\left(\frac{t}{s}\right) \quad (2.13)$$

$$\bar{\phi}_s(t) = \phi_s^*(-t) \quad (2.14)$$

tal que obtemos os coeficientes de baixa frequência por

$$Lf(u, s) = \left\langle f(t), \frac{1}{\sqrt{s}} \phi\left(\frac{t-u}{s}\right) \right\rangle = f * \bar{\phi}_{s_0}(t) \quad (2.15)$$

e finalmente possamos reescrever $f(t)$ como

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{s_0} Wf(u, s) * \psi_s(t) \frac{ds}{s^2} + \frac{1}{C_\psi s_0} Lf(u, s) * \phi_{s_0}(t) \quad (2.16)$$

recuperando, assim, o sinal original.

2.2 Fractais e Multifractais

Quando nos referimos às dimensões no espaço Euclidiano costumamos usar números inteiros. Dizemos que o ponto é um objeto de dimensão nula, a reta é unidimensional – tem dimensão igual a 1 – o plano é bidimensional e o espaço é tridimensional. Estas são as dimensões “topológicas” de um objeto Euclidiano.

Se um objeto tem forma tão complexa que não pode ser medida apenas por sua dimensão topológica, consideramos que o mesmo tem geometria não-euclidiana e podemos

usar o cálculo da sua dimensão fractal para descrevê-lo. Tais objetos são denominados *fractais*. Um fractal tem, em geral (mas não sempre), dimensão não inteira, fracionária, daí derivando o seu nome. A dimensão fractal de um objeto existente em um dado espaço métrico pode ser entendida como a medida do quanto que esse objeto preenche esse espaço.

A construção de objetos fractais e as diversas formas de se obter suas dimensões são tratadas em várias obras, tais como (EDGAR, 1998; GRASSBERGER, 1985; HALSEY et al., 1986). Uma série temporal do tipo $f(t)$, comumente denominada “unidimensional”, pode exibir dimensão fractal diferente de 1. Alguns exemplos serão vistos mais adiante.

A série $f(t)$ também pode possuir não somente uma única dimensão fractal, mas um conjunto de dimensões fractais. Neste caso, a chamamos de *multifractal*. Os multifractais são séries temporais, em qualquer dimensão, que são singulares em muitos pontos. Os multifractais se tornaram objeto de estudo há relativamente pouco tempo, mas já merecem destacado interesse nos seus estudos devido às diversas situações em que eles aparecem. Alguns exemplos:

- indicadores econômicos de Wall Street
- dados fisiológicos
 - crepitações pulmonares
 - eletrocardiogramas
 - eletroencefalogramas
- tráfego na WWW
- flutuações eletromagnéticas no ruído de radiação cósmica

2.2.1 Regularidade de Lipschitz

Existem diversos métodos de cálculo da dimensão fractal de um objeto. Dentre eles, o que pode ser mais compatível com o uso da transformada *wavelet* na análise de uma série temporal $f(t)$ é o *expoente de Lipschitz*. Este expoente caracteriza o comportamento singular de $f(t)$ em um instante $t = \nu$, quando ν é singular. O expoente de Lipschitz é conhecido também por “Expoente de Hölder”. A figura 3 mostra os gráficos de três movimentos brownianos fracionários (mBf), obtidos com diferentes expoentes de Hölder (h): o gráfico superior mostra o mBf com $h=0.2$, o do centro tem $h=0.5$ e o inferior $h=0.8$. O

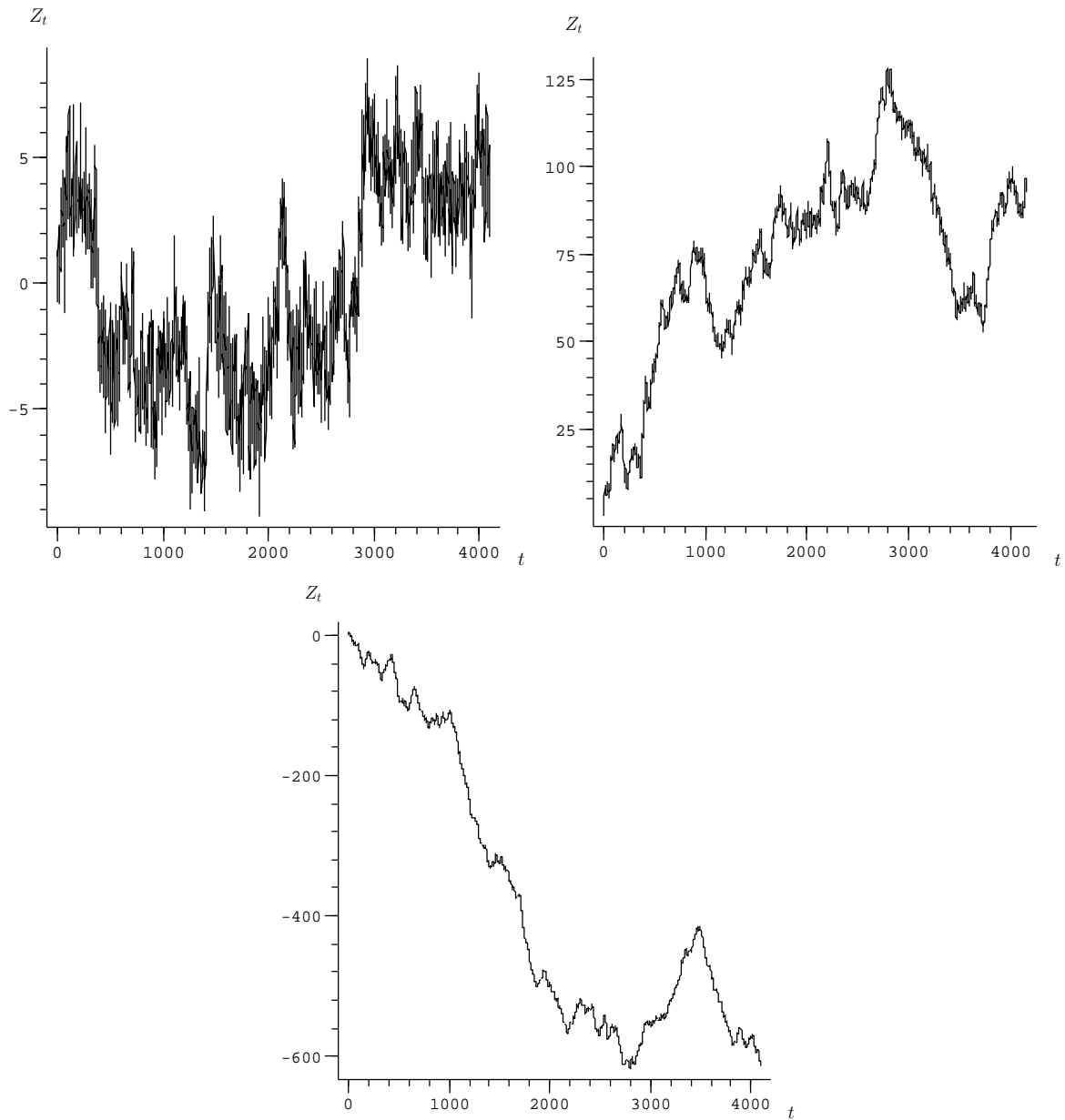


Figura 3: Movimentos Brownianos Fracionários (mBf) obtidos com diferentes expoentes de Hölder (h). Acima à esquerda: $h=0.2$. À direita: $h=0.5$. Abaixo: $h=0.8$. O mBf com $h=0.5$ corresponde ao movimento browniano simples. para $h < 0.5$, o mBf é dito *anti-correlacionado* e para $h > 0.5$, *correlacionado*

mBf com $h=0.5$ corresponde a um movimento browniano simples, completamente aleatório. Como se pode ver da figura 3, não podemos estimar, somente por inspeção visual do gráfico, qual a sua dimensão fractal. É necessário que se use uma ferramenta matemática adequada a isto.

Para obter o expoente de Hölder $h = \alpha$ de um certo sinal $f(t)$, vamos fazer as seguintes considerações (MALLAT, 2001):

- Uma função $f(t)$ é do tipo Lipschitz $\alpha \geq 0$ em ν , se existir $k > 0$ e um polinômio p_ν de grau $m = \lfloor \alpha \rfloor$ tal que

$$\forall t \in \mathfrak{R}, |f(t) - p_\nu(t)| \leq K|t - \nu|^\alpha \quad (2.17)$$

- uma função $f(t)$ é uniformemente Lipschitz α sobre $[a, b]$ se ela satisfizer a equação acima qualquer que seja $\nu \in [a, b]$, com K independente de ν , onde

$$p_\nu(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(\nu)}{k!} (t - \nu)^k \quad (2.18)$$

2.2.2 Medição da regularidade "suave por partes" de Lipschitz usando *wavelets*

Vejamos a partir de agora de que forma a transformada *wavelet* é utilizada na obtenção do expoente de Hölder relacionado a um sinal $f(t)$. Suponhamos que $f(t)$ seja tal que

$$\epsilon_\nu(t) \equiv f(t) - p_\nu(t) \quad (2.19)$$

Ao usarmos, para esta função, uma *wavelet* que possui $n > \alpha$ momentos nulos, obtemos

$$Wp_\nu(u, s) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\nu(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) dt = 0 \quad (2.20)$$

Assim, os coeficientes de *wavelet* serão tais que

$$Wf(\nu, s) = W\epsilon_\nu(u, s) \quad (2.21)$$

A figura 4 mostra o gráfico da transformada *wavelet* para o sinal genérico da figura 2. O gráfico inferior representa os valores de $Wf(u, s)$, em função de u e s . Os valores de u estão no eixo horizontal, os de s no eixo vertical e os de Wf em um código de cores, diretamente relacionado com o módulo de Wf . Usaremos este conjunto de valores de Wf

na obtenção do espectro de singularidades para um sinal $f(t)$ qualquer.

As considerações a seguir nos fornecem justificativas necessárias e suficientes para o uso da análise *wavelet* no estudo da (multi)fractalidade de séries temporais (JAFFARD, 1991):

- Se $f \in L^2(\mathfrak{R})$ é uniformemente Lipschitz α em $[a, b]$, então $\exists A > 0$ tal que

$$\forall (u, s) \in [a, b] \times \mathfrak{R}^+, \quad |Wf(u, s)| \leq As^{\alpha+\frac{1}{2}} \quad (2.22)$$

Suponha que f é finita e $Wf(u, s)$ satisfaz a equação acima para $\alpha < n$ não inteiro. Então f é uniformemente Lipschitz α em $[a + \epsilon, b - \epsilon]$ para qualquer $\epsilon > 0$.

- Se $f \in L^2(\mathfrak{R})$ é Lipschitz $\alpha \leq n$ em ν então $\exists A$ tal que

$$\forall (u, s) \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^+, |Wf(u, s)| \leq As^{\alpha+\frac{1}{2}} \left(1 + \left| \frac{u - \nu}{s} \right|^\alpha \right) \quad (2.23)$$

e se $\alpha < n$ não inteiro e $\exists A$ e $\alpha' < \alpha$ tal que

$$\forall (u, s) \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^+, |Wf(u, s)| \leq As^{\alpha+\frac{1}{2}} \left(1 + \left| \frac{u - \nu}{s} \right|^{\alpha'} \right) \quad (2.24)$$

então f é Lipschitz α em ν .

Tais considerações implicam que a regularidade Lipschitz de f em ν depende da diminuição do valor de $|Wf(u, s)|$ na vizinhança de ν .

2.2.3 Os máximos do módulo da transformada *wavelet* (MMTW)

A princípio, uma consequência das últimas duas considerações feitas na seção anterior é a conclusão de que o tempo computacional necessário para fazer a análise de $f(t)$ usando-se a transformada *wavelet* seria muitíssimo alto, uma vez que precisaríamos calcular todos os valores de $Wf(u, s)$ para todos os instantes u e escalas s possíveis. Isto equivaleria, com um certo exagero, a ter que fabricar uma balança com precisão de 1 milionésimo de grama a fim de medir a massa de um grão de areia!

Entretanto, pode-se deduzir que não é necessário analisar todos os $|Wf(u, s)|$ a fim de obter o expoente de Hölder de $f(t)$. Para este intento, é suficiente que analisemos apenas os máximos locais (MALLAT; HWANG, 1992):

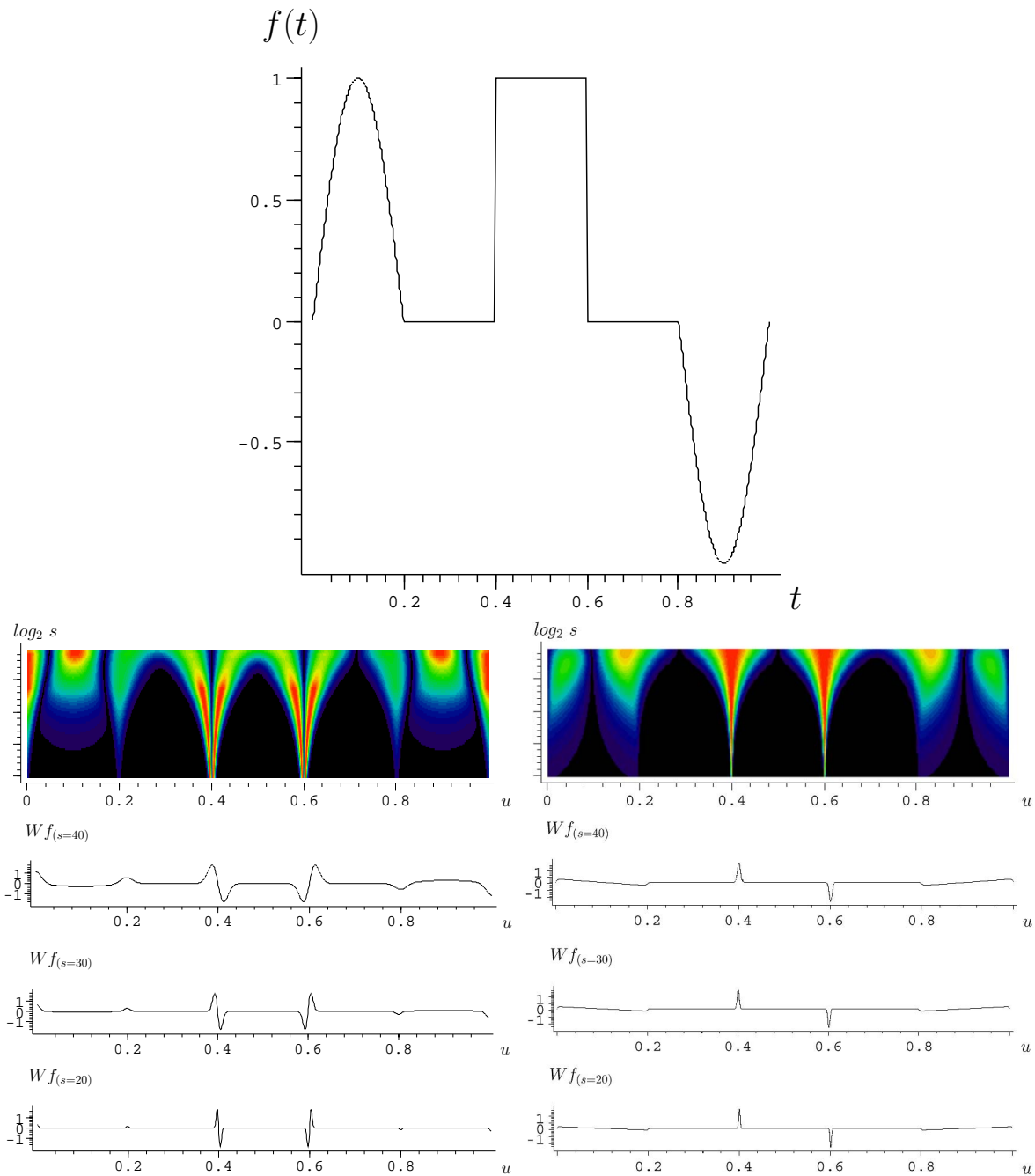


Figura 4: Exemplo genérico e sua decomposição wavelet. No alto, o gráfico já visto na figura 2. Na coluna da esquerda, de cima para baixo, o primeiro gráfico representa os valores dos coeficientes $Wf(u, s)$ deste exemplo genérico, para todas as escalas possíveis de se calcular dentro do limite de processamento existente. Usou-se DOG2. A coordenada vertical representa o logaritmo da escala s , ($\log_2 s$), a horizontal o instante u e as diferentes cores o valor de $|Wf|$, normalizados entre 0 (preto) e 1 (vermelho). Os três gráficos seguintes representam $Wf(u, s)$ versus u para alguns valores de s . Na coluna da direita, $Wf(u, s)$ versus u para o mesmo sinal, usando-se DOG1.

- Suponha que ψ é C^n e

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty,$$

e que

$$\psi = (-1)^n \theta^{(n)}(t)$$

com $\theta(t)$ sendo uma função onde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(t) dt \neq 0.$$

Seja $f \in L^1[a, b]$. Se $\exists s_0 > 0$ tal que $|Wf(u, s)|$ não tem máximo local para $u \in [a, b]$ e $s < s_0$, então f é uniformemente Lipschitz n em $[a + \epsilon, b - \epsilon]$, $\forall \epsilon > 0$.

Isto implica que f só é singular em ν quando houver, no gráfico de $Wf(u, s)$, uma sequência de coeficientes máximos locais convergindo em torno de um certo instante ν nas escalas s mais baixas.

2.2.4 conjuntos fractais

Para se obter a dimensão fractal de um objeto, utilizamos o seguinte procedimento.

Suponha que S é um conjunto de dimensão D , onde o comprimento ($D = 1$), superfície ($D = 2$) ou volume ($D = 3$) são finitos. Considere que $N(s)$ é o número de "esferas" de raio s necessárias para encobrir todo o conjunto S . Temos então que

$$N(s) \sim s^{-D} \tag{2.25}$$

tal que

$$D = - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\log N(s)}{\log s} \tag{2.26}$$

A *dimensão de capacidade* ou *dimensão fractal* do conjunto s é a generalização desta equação, sendo então definida por

$$D = - \liminf_{s \rightarrow 0} \frac{\log N(s)}{\log s} \tag{2.27}$$

Por exemplo: no conjunto de Cantor, visto na figura 5, $N(s) = 2^n$ e $s = 3^{-n}$ tal que

$$D = - \liminf_{s \rightarrow 0} \frac{\log N(s)}{\log s} = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.6309$$

2.2.5 funções auto-similares

Para que uma função $f(t)$ seja dita auto-similar, deve ser tal que

$$\forall t \in S_i, \quad f(t) = c_i + p_i f(l_i(t - r_i)) \quad (2.28)$$

onde f representa uma função de suporte compacto S , l_i representa uma escala, r_i uma translação, p_i um peso e c_i uma constante do subconjunto disjuncto S_i de S .

Quando uma função é auto-similar, a sua transformada *wavelet* também o é. Podemos verificar isto da seguinte forma: Seja $g(t)$ uma função tal que

$$g(t) = c + pf(l(t - r)) \quad (2.29)$$

A sua transformada *wavelet* é obtida por

$$\begin{aligned} Wg(s, u) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(\frac{t - u}{s} \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (c + pf(l(t - r))) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(\frac{t - u}{s} \right) dt \end{aligned} \quad (2.30)$$

Fazendo uma substituição de variáveis, usando $t' = l(t - r)$, temos

$$Wg(u, s) = \frac{p}{\sqrt{l}} Wf(l(u - r), sl) \quad (2.31)$$

Vamos agora supor que ψ é uma função que tem suporte compacto em $[-K, K]$. Temos então que

$$Wf(u, s) = \frac{p_i}{\sqrt{l_i}} Wf(l_i(u - r_i), sl_i) \quad (2.32)$$

onde $S_i = [a_i, b_i]$, $s < \frac{b_i - a_i}{K}$ e $u \in [a_i + Ks, b_i - KS]$.

Nas figuras 5 e 6 temos alguns exemplos de autossimilaridade obtida na função e que se repete na sua transformada. A figura 5 mostra o gráfico de um conjunto de Cantor e sua decomposição *wavelet*, acompanhada de vários *zooms* à esquerda do mesmo gráfico. O conjunto de Cantor é gerado dividindo-se um segmento de reta em 3 partes iguais e removendo-se a parte do meio. A seguir, remove-se novamente a terça parte central dos segmentos restantes. A operação se repete indefinidamente, até que não existam mais segmentos de reta a serem divididos. O resultado final é então uma fileira de pontos intercalados por vazios. Por causa disso, o conjunto de Cantor é também conhecido por "poeira de Cantor". Na figura 6, o sinal conhecido por "escada do diabo", obtido a

partir da integral de Riemman do conjunto de Cantor, está representado ao lado da sua transformada *wavelet* . Nos dois casos, foi utilizada a DOG1.

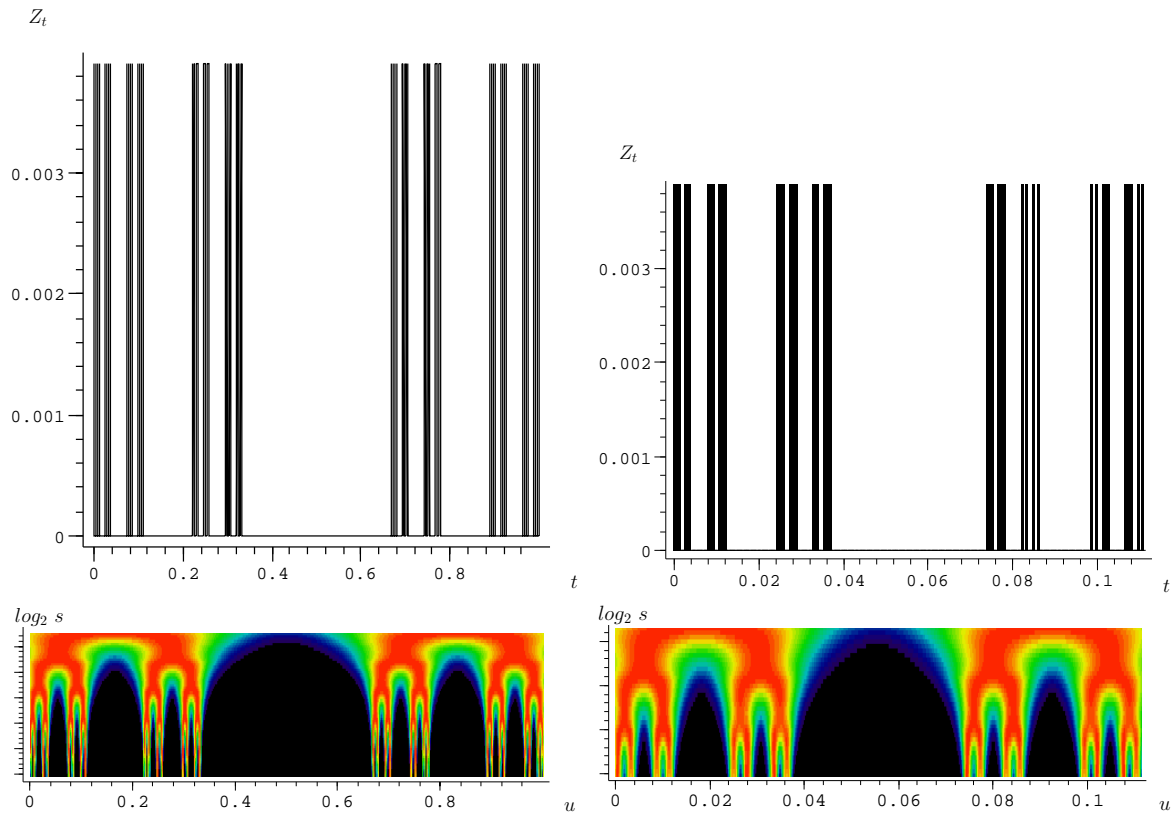


Figura 5: conjunto de Cantor e sua decomposição *wavelet* . No alto, a medida de Cantor completa e um *zoom* aplicado na sua primeira nona parte. Abaixo de cada medida, as respectivas transformadas *wavelets* (usou-se DOG1). Perceba a perfeita autossimilaridade por escala entre os dois gráficos da medida de Cantor e de suas transformadas *wavelet* , evidenciando sua característica monofractal

2.2.6 espectro de singularidade

Quando o sinal é monofractal, existe apenas um único expoente de Hölder (h) e o gráfico do espectro de singularidade $D(\alpha)$ do sinal se restringe a um único ponto, cuja coordenada α é igual ao próprio h . Se for um multifractal, o valor de h não é único e $D(\alpha)$ tem um aspecto característico. Podemos utilizar os coeficientes da transformada *wavelet* para obter $D(\alpha)$.

Suponhamos que S_α seja o conjunto de todos os instantes $t \in \mathfrak{R}$ do sinal $f(t)$ onde a regularidade de Lipschitz é igual a α . Temos então que o espectro de singularidades $D(\alpha)$ do sinal f é a dimensão fractal de S_α . O suporte de $D(\alpha)$ é o conjunto de valores α tais

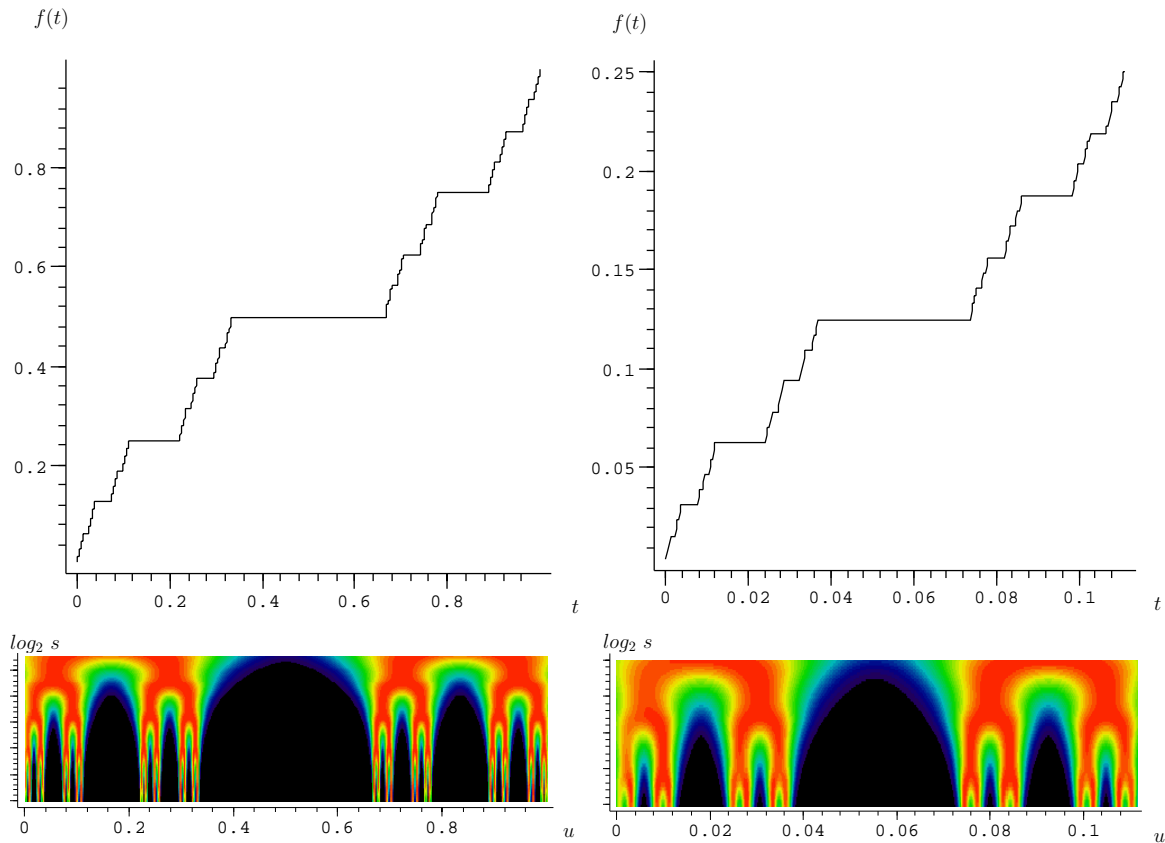


Figura 6: decomposição *wavelet* da "escadaria do diabo" e *zoom* à esquerda. A "escadaria do diabo" é gerada usando a integral de Riemman sobre a medida de Cantor. À esquerda aparecem a escadaria do diabo completa (acima) e sua decomposição *wavelet* (abaixo). Acima à direita, um *zoom* da nona parte à esquerda da escada e (abaixo) a respectiva transformada *wavelet* desta parcela.

que S_α não seja vazio. Ou seja, para uma dada função f ,

$$N_\alpha(s) \sim s^{-D(\alpha)} \quad (2.33)$$

onde N representa o número de intervalos com comprimento s que intersepta o subconjunto disjunto S_α do suporte S da função f .

2.2.6.1 função de partição

A partir das considerações feitas na página 29, podemos concluir que nos máximos locais dos coeficientes de wavelets, o módulo dos coeficientes Wf se relaciona com a escala s por meio da equação

$$|Wf(u, s)| \sim s^{\alpha_0 + \frac{1}{2}}$$

onde α é a variável do espectro de singularidades $D(\alpha)$ e $|Wf(u, s)|$ são os *máximos* do módulo da transformada *wavelet*.

Consideremos então que

$$Z(q, s) \equiv \sum_p |Wf(u_p, s)|^q \quad (2.34)$$

seja a **função de partição** $Z(q, s)$ que mede a soma dos MMTW para cada momento q a uma determinada escala s . Para cada $q \in \Re$ vamos definir o expoente de escala $\tau(q)$ por

$$\tau(q) = \liminf_{s \rightarrow 0} \frac{\log Z(q, s)}{\log s}$$

de forma que

$$Z(q, s) \sim s^{\tau(q)} \quad (2.35)$$

Na figura 7, são exibidos os gráficos de $\ln_2 Z(q, s)$ versus $\ln_2 s$ obtidos com o uso de diferentes DOG's, para os mesmos valores de q . O sinal analisado é a escadaria do diabo modificada, exibida na figura 9. Para valores negativos de q , a função de partição $Z(q, s)$ sofre oscilações periódicas de período $\log_2 3$ que estão diretamente relacionadas com a invariância do conjunto de Cantor para dilatações por um fator 3 (ARNEODO; BACRY; MUZY, 1999). O valor de $\tau(q)$ para cada curva é obtido pela regressão linear da mesma.

observação: imprecisões nesta regressão linear podem resultar em espectros de singularidade $D(h)$ (ver adiante) que exibem o que foi chamado de "multifractalidade espúria" (OŚWIĘCIMKA; KWAPIEŃ; DROŹDŹ, 2006). Com base nisso, Pawel *et al.* defendem que o método *MF-DFA*⁶ é mais adequado para análise multifractal de sinais. Por outro lado, (KANTEHARDT et al., 2002) mostraram que os dois métodos, *MMTW* e *MF-DFA*, são igualmente bons. Neste trabalho, usamos somente o *MMTW*, pela comodidade de poder remover facilmente as tendências polinomiais de ordem superior a 2.

A relação entre a função de partição e o espectro de singularidades resulta então no seguinte teorema (MALLAT, 2001):

- Seja $A = [\alpha_{min}, \alpha_{max}]$ o suporte de $D(\alpha)$. Seja ψ com $n > \alpha_{max}$. Se f é auto-similar,

$$\tau(q) = \min_{\alpha \in A} \left(q \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) - D(\alpha) \right) \quad (2.36)$$

Este teorema relaciona a função $\tau(q)$ com a transformada de Legendre (TL) do espectro de singularidades $D(\alpha)$, para uma função f auto-similar.

⁶MultiFractal Detrended Fluctuation Analysis

No intuito de calcular $D(\alpha)$, invertemos a equação 2.36, obtendo

$$D(\alpha) = \min_{q \in \mathfrak{R}} \left(q \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) - \tau(q) \right) \quad (2.37)$$

Aqui, como a (TL) de 2.36 só é inversível se o espectro de singularidades $D(\alpha)$ for convexo, isto implica que $D(\alpha) \times \alpha$ é convexo para sinais auto-similares.

2.2.7 teste do método *MMTW* em alguns conjuntos fractais com H previamente conhecido

Verifiquemos agora algumas aplicações práticas do método *MMTW* na obtenção do espectro de singularidades de algumas séries temporais. Serão utilizadas duas versões da escadaria do diabo, que são funções fractais recursivas com dimensão de Hausdorff ($D(h)$) e expoente de Holder (h) conhecidos. Também usaremos funções produzidas randomicamente usando um expoente de Holder fixo, como é o caso do movimento browniano fracionário.

A escadaria do diabo: esta função é produzida a partir da integral de Riemman do conjunto de Cantor. Este conjunto é gerado recursivamente removendo-se a terça parte central de segmentos de reta e atribuindo-se pesos p_1 e p_2 aos segmentos adjacentes à parte removida. Ao final, obtém-se um conjunto de pontos com comprimento nulo e dimensão de Hausdorff $D(h) = \ln 2 / \ln 3$, quando $p_1 = p_2 = 0.5$. Na figura 8 é mostrado um Conjunto de Cantor e a respectiva escadaria do diabo. O resultado da análise da fractalidade da escadaria do diabo por meio do método *MMTW* é exatamente o que era esperado: o espectro de singularidades $D(h) \times h$ corresponde ao de um monofractal, sendo formado por um único ponto $D(h) = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ e expoente de Holder $h = \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

A escadaria do diabo modificada: uma pequena alteração no algoritmo de geração do conjunto de Cantor, usando $p_1 \neq p_2$, é usada para produzir uma escadaria do Diabo multifractal. Na figura 9, usou-se $p_1 = 0,38$ e $p_2 = 0,62$. O suporte para a dimensão de Hausdorff $D(h)$ varia no intervalo $h_{min} < h < h_{max}$. O valor máximo, porém, é praticamente o mesmo que foi obtido para a escadaria comum e, para esse $D(h)_{max}$, $h \approx \frac{\ln 2}{\ln 3}$. O suporte do espectro se situa entre $h_{min} = -\log_3(p_2)$ e $h_{max} = -\log_3(p_1)$.

Movimento browniano fracionário: o movimento browniano fracionário (mBf) é um processo estocástico mono-paramétrico B_H (TAVARES; LUCENA, 2005), com incremen-

tos gaussianos e função de correlação cuja forma geral é:

$$\overline{B_H(t)B_H(s)} = \frac{\sigma_H^2}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}) \quad (2.38)$$

onde $\sigma_H^2 \equiv \overline{B_H^2(1)}$ e o parâmetro do processo é o expoente de Hurst, $0 \leq H \leq 1$, o qual controla a natureza das correlações. O expoente de Hurst tem o mesmo valor de h , obtido no espectro de singularidade a partir da análise de simulações do fBm usando o método *MMTW*. Foram simulados fBms com diferentes valores de H . Os resultados das análises se encontram nas figuras 10 e 11. Em todos os casos, os valores de H usados nas simulações foram recuperados com o método *MMTW*.

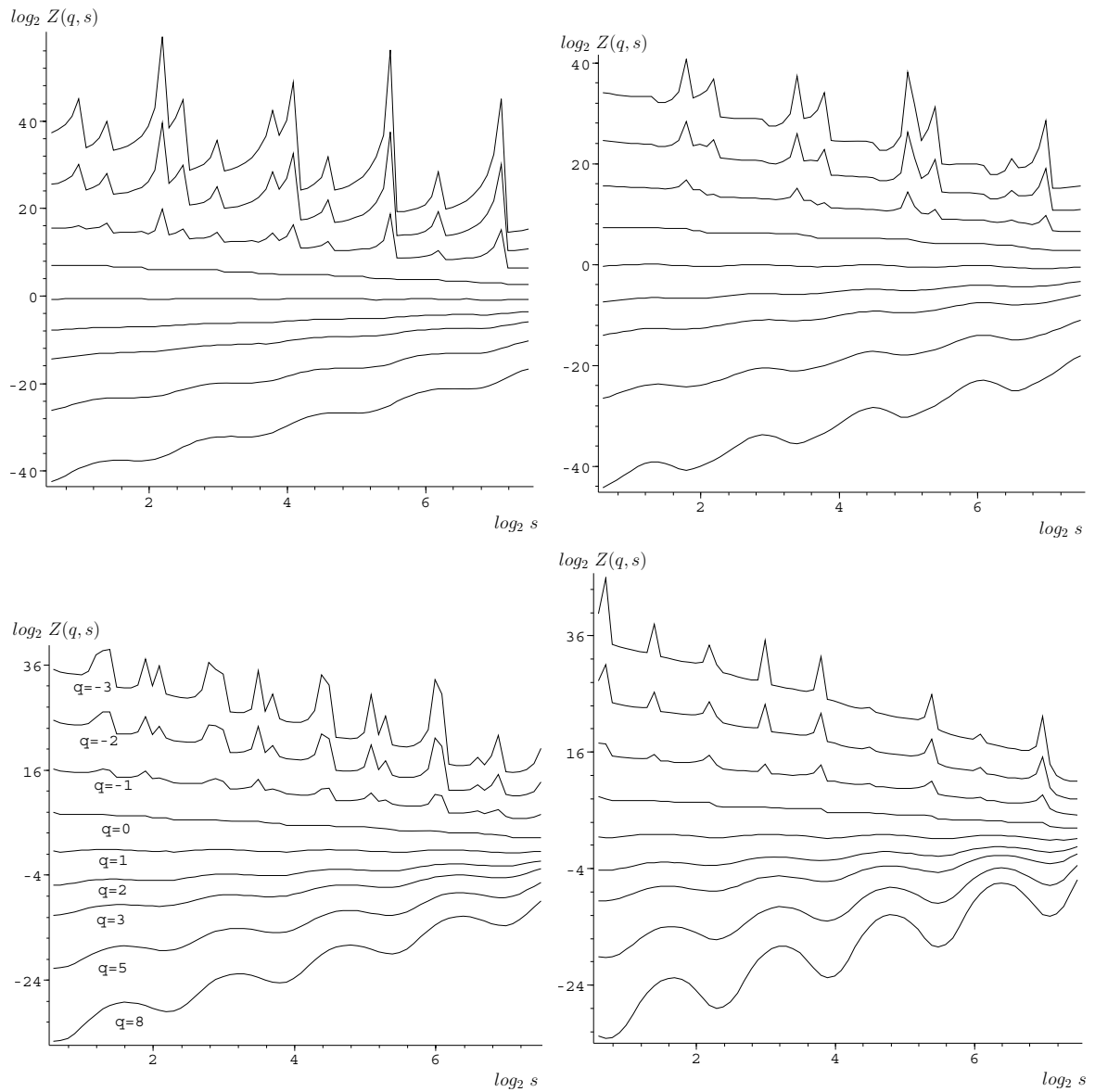


Figura 7: funções de partição para a escadaria do diabo modificada. As *wavelet* utilizadas nos dois gráficos superiores são a primeira (à esquerda) e a segunda (à direita) derivadas da gaussiana. Nos gráficos inferiores, a terceira e a quarta derivadas, respectivamente.

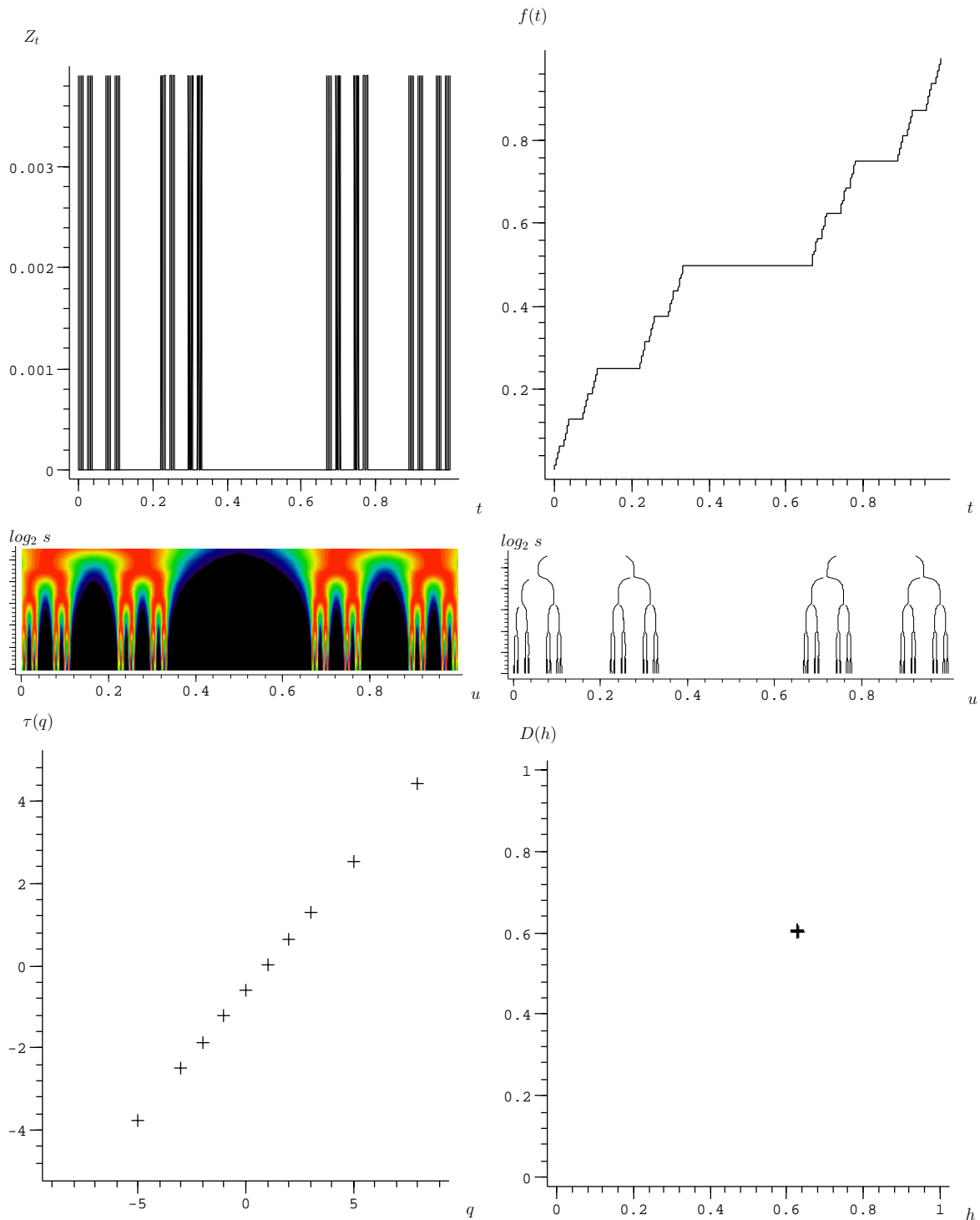


Figura 8: No alto, à esquerda, o conjunto de Cantor, com $p_1 = p_2 = 1/2$. À direita, a escadaria do diabo produzida com a integral de Riemann do conjunto de Cantor. No centro, a transformada *wavelet* da escadaria do diabo e o respectivo "esqueleto" de máximos do módulo. Abaixo, $\tau(q) \times q$ e $D(h) \times h$. Observe que $D(h)$ é único e vale $D(h) = \frac{\ln 2}{\ln 3}$, que corresponde à dimensão de Hausdorff do conjunto de Cantor. O valor do expoente de Holder é $h = \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

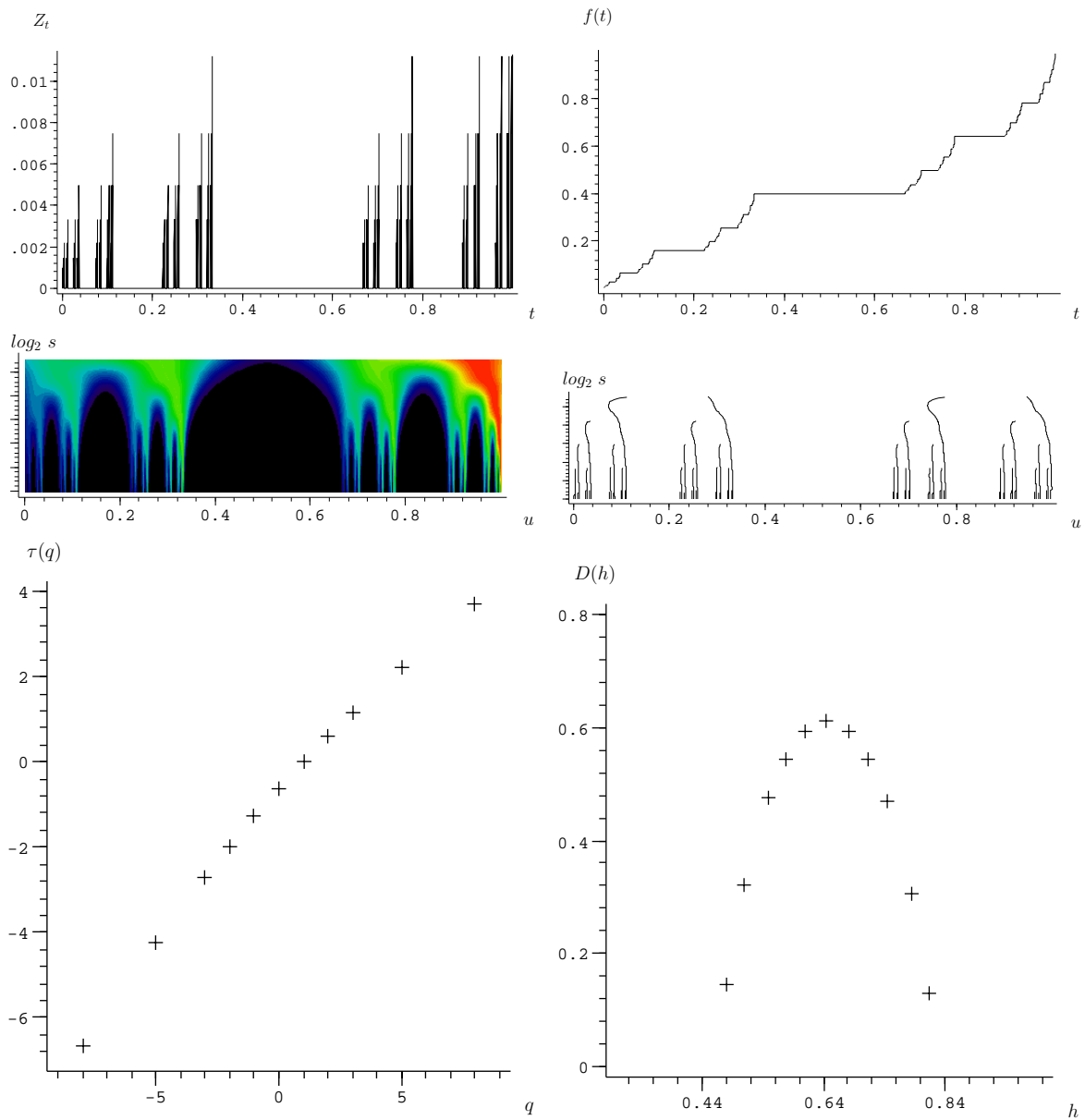


Figura 9: No alto, à esquerda, o conjunto de Cantor modificado, com $p_1 = 0,38$ e $p_2 = 0,62$. À direita, a escadaria do diabo produzida com a integral de Riemman do conjunto de Cantor. No centro, a transformada *wavelet* da escadaria do diabo e o respectivo "esqueleto" de máximos do módulo. Abaixo, $\tau(q) \times q$ e $D(h) \times h$.

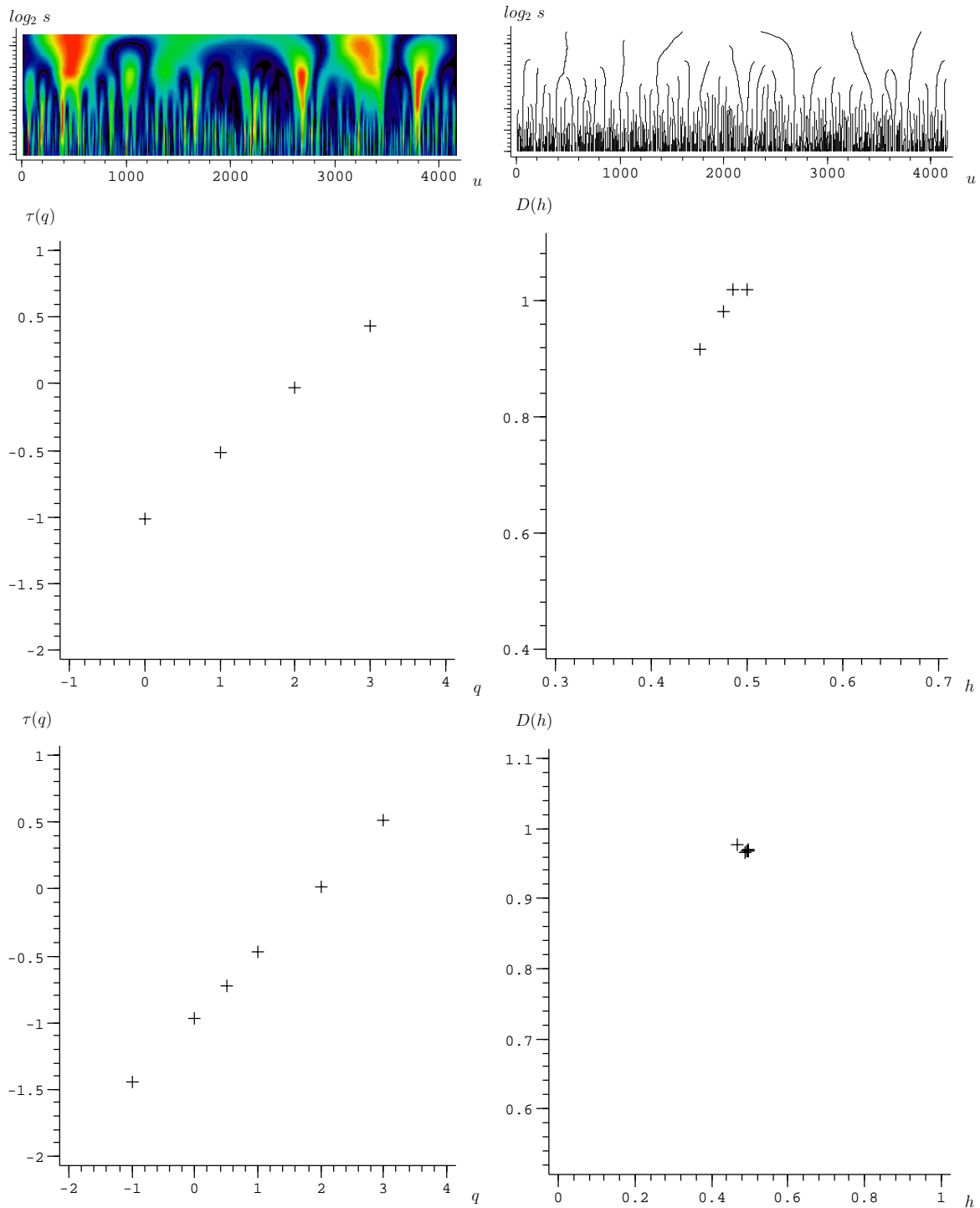


Figura 10: Espectros de singularidade do movimento Browniano simples, obtidos com o método *MMTW*. No alto, a transformada *wavelet* e as linhas de máximo do módulo da transformada do movimento Browniano simples. No meio, $\tau(q) \times q$ e $D(h) \times h$ para uma única realização do movimento Browniano, que equivale a um mbf produzido com $H=0,5$. No espectro de singularidades, os pontos se acumulam nas proximidades de $D(h) = 1$ e $h = 0,5$. Abaixo, os mesmos gráficos produzidos a partir da média das funções de partição $Z(q, s)$ de 50 realizações do movimento browniano. Os pontos no espectro de singularidades se acumulam *exatamente* em $D(h) = 1$ e $h = 0,5$, indicando que o sinal é monofractal com $H = 0,5$, como era de se esperar. A comparação entre o resultado individual e o da média de várias realizações indica que a imprecisão da medida de uma única simulação se deve a flutuações características da própria simulação.

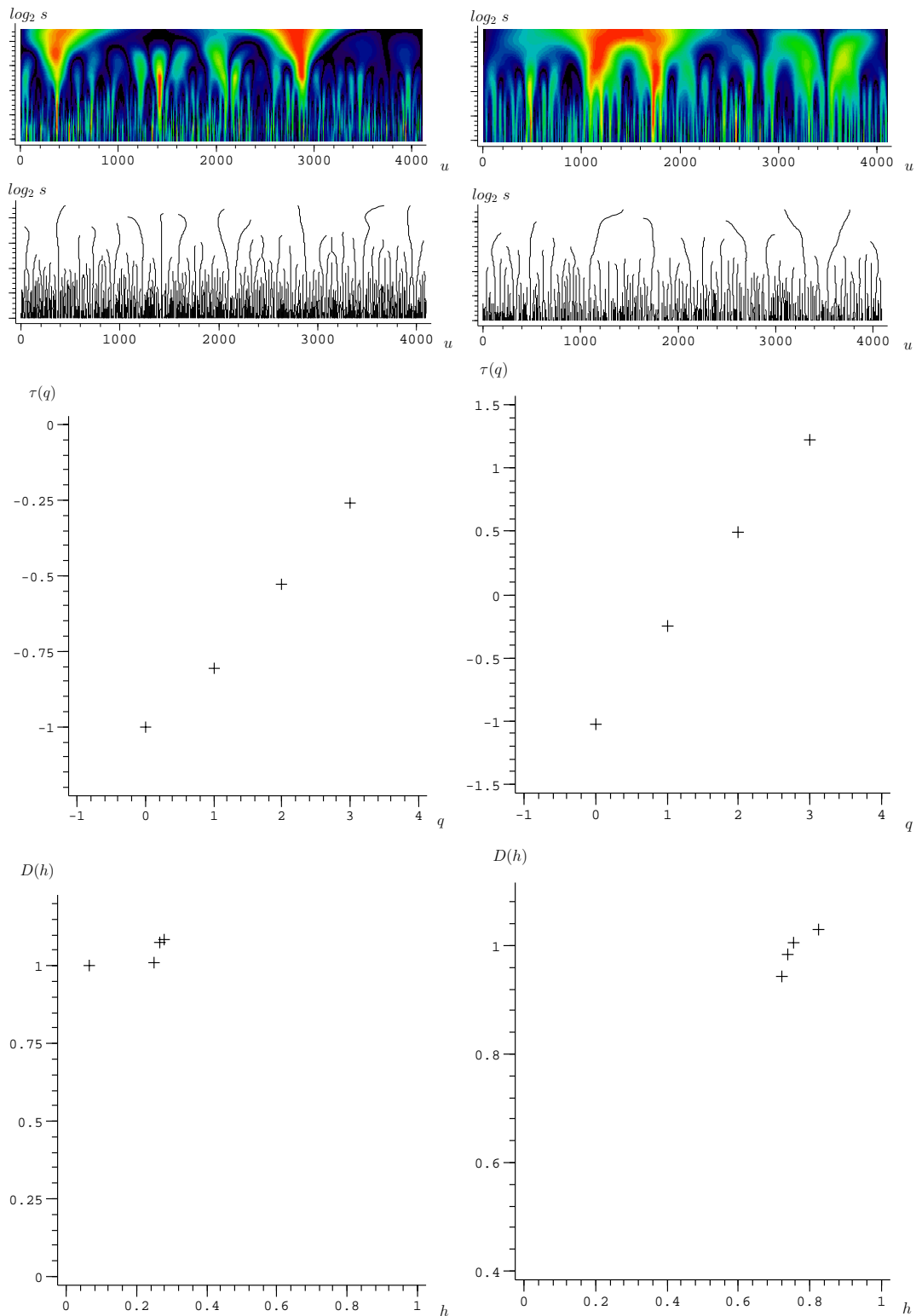


Figura 11: Uso do método *MMTW* na obtenção do espectro de singularidades do movimento Browniano fracionário. De cima para baixo, na coluna da esquerda: mBf com $H=0,2$, análise wavelet, linhas de máximos do módulo da transformada, $\tau(q) \times q$ e espectro de singularidade. Percebe-se que os pontos do espectro se acumulam nas proximidades de $D(h) = 1$ e $h = 0,2$. De cima para baixo, à direita, o mesmo para um mBf com $H=0,8$. Os cálculos foram feitos para apenas uma realização do mBf.

3 A Caracterização Fractal do Ruído de Crepitação Pulmonar

Neste capítulo, realizamos a caracterização fractal de um processo não estacionário, o ruído de crepitação pulmonar. Este ruído surge durante a ventilação das vias aéreas pulmonares, quando a mesma, inicialmente colabada, é subitamente aberta. A caracterização da fractalidade deste ruído é realizada usando o método do Máximo do Módulo da Transformada *Wavelet*, discutido no capítulo anterior.

3.1 Anatomia do pulmão

Os pulmões dos mamíferos são órgãos responsáveis pelas trocas gasosas entre o ar atmosférico e o sangue. É no interior deles, em regiões chamadas de ácinos pulmonares, que ocorre a passagem, por difusão, do oxigênio atmosférico para o sangue e do gás carbônico sanguíneo para o ar atmosférico.

Os pulmões são estruturas compostas basicamente por duas redes de ductos ramificadas que se encontram entrelaçadas e somente se comunicam entre si na região dos ácinos pulmonares. Estes "ductos" são a árvore brônquica e a rede circulatória. Pela árvore brônquica (ou árvore pulmonar), flui uma mistura gasosa formada pelos gases do ar atmosférico e aqueles que saíram do sangue para os ácinos pulmonares. A rede circulatória somente se comunica com a árvore brônquica nos pontos onde ocorrem as trocas gasosas. Nos ácinos pulmonares, a parede que separa a superfície interna de um saco alveolar da superfície interna de um vaso capilar sanguíneo tem espessura muito pequena, da ordem de grandeza de uma célula muscular lisa.

A árvore brônquica pode ser vista como uma sequência ou rede de ductos, que se ramificam dicotomicamente em ductos cada vez menores tanto em comprimento quanto em diâmetro, até que terminem formando pequenos sacos, com diâmetros correspondentes a algumas dezenas de células epiteliais, chamados *alvéolos*. A figura 12 exhibe uma visão

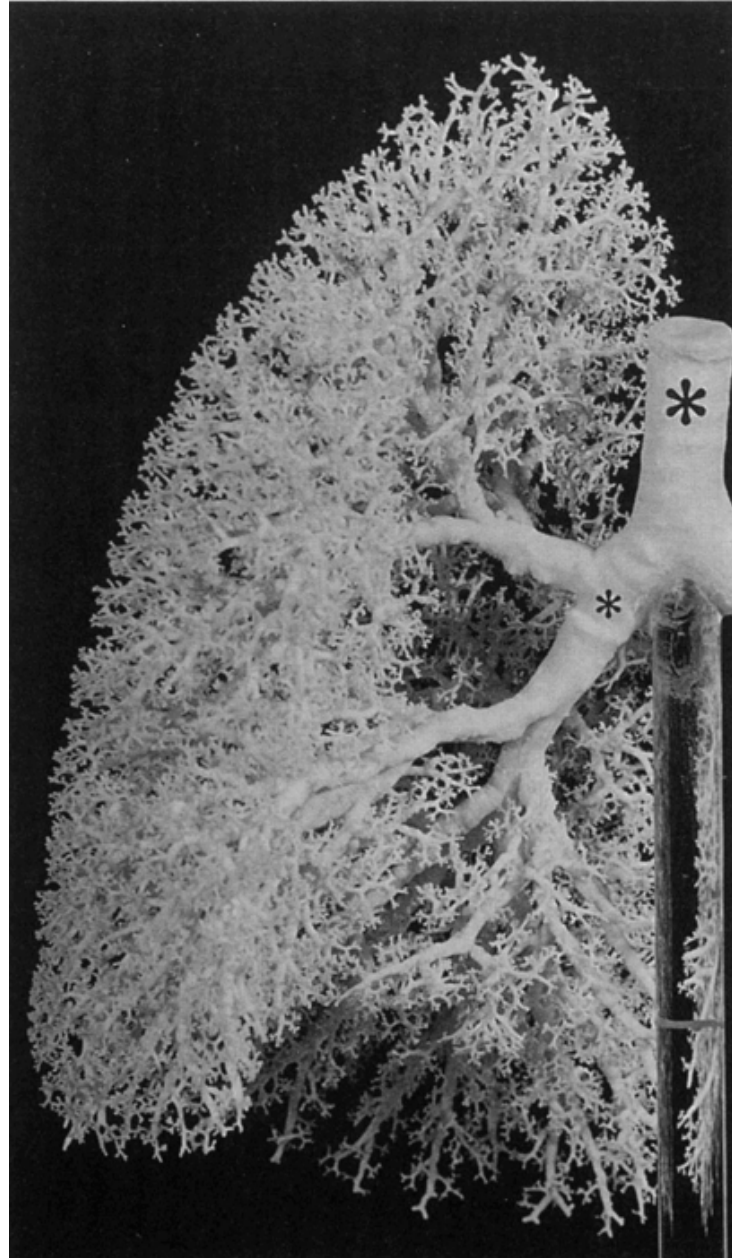


Figura 12: Visão frontal da árvore brônquica de um pulmão esquerdo humano, preparada em latex. Em (*), são mostrados a traquéia e o brônquio principal esquerdo. O restante da árvore é formada pelas dicotomizações dos ductos condutores. O total de dicotomizações pode chegar a 32. Os aglomerados alveolares (ácinos) foram removidos da preparação. É nestes aglomerados onde ocorrem as trocas gasosas e acontece a expansão volumétrica pulmonar no processo de inspiração–expiração.(Fotografia feita por W. Webes, Instituto de Anatomia, Universidade de Berlim. **Fonte: (BROWN; BRAIN; WANG, 1997)**)

frontal da árvore brônquica de um pulmão esquerdo humano, preparada em latex. São mostrados a traquéia e o brônquio principal esquerdo (em asterisco) e as ramificações de toda a parte condutora. Os aglomerados alveolares (ácinos) foram removidos da preparação. Se definirmos os ductos respiratórios de forma que o ducto inicial - a traquéia - seja de geração "zero", os brônquios principais, resultantes da dicotomização da traquéia, serão chamados de ductos de 1ª geração, as ramificações dos de 1ª serão de 2ª geração, as ramificações dos de 2ª geração serão de 3ª geração e assim por diante.

A superfície desta rede de ductos apresenta dimensão fractal, D_f , característica para todos os mamíferos, com valor variando entre 2,64 e 2,76, dependendo de como se analisam os dados morfométricos (NELSON; MANCHESTER, 1988). Tal dimensão é, como se poderia esperar, um valor situado entre a dimensão Euclidiana da superfície ($D = 2$) e do volume ($D = 3$).

A árvore brônquica do ser humano tem de 23 a 32 gerações de vias aéreas (WEIBEL, 1991; BROWN; BRAIN; WANG, 1997). As primeiras 16–20 gerações são denominadas de *vias condutoras*, por terem como função primordial a condução de ar do (e para) os ácinos pulmonares, compostos pelas sete últimas gerações, onde ocorrem as trocas gasosas. É também nos ácinos que acontece a expansão volumétrica pulmonar no processo de inspiração–expiração.

É interessante notar que o fato do pulmão ser um "fractal", com uma dimensão fractal com um valor intermediário entre a dimensão da superfície ($D=2$) e a do volume ($D=3$), está diretamente relacionada à função do pulmão. Para que as trocas gasosas ocorram na quantidade necessária para o metabolismo animal, é preciso que a superfície de absorção/troca seja bastante grande, uma vez que essas trocas ocorrem por difusão. O ser humano em repouso, por exemplo, inspira e expira aproximadamente 5 vezes por minuto e, para absorver a quantidade de oxigênio necessária em 1 minuto de metabolismo, precisa de uma superfície de absorção muito grande, com aproximadamente $70m^2$ de extensão. Por outro lado, o volume interno da caixa torácica é pequeno, cerca de 7 litros, quando comparado ao volume total do corpo humano.

O interior de toda essa rede de ductos pulmonares é recoberto por fluidos. Os ductos condutores, que têm suas paredes formadas por tecido conjuntivo, músculo liso e epitélio estratificado, o que lhes confere relativa rigidez, são recobertos internamente por um muco. Tal muco possui viscosidade elevada e, em conjunto com a atividade de células ciliares, é responsável pela limpeza e integridade do epitélio dos ductos condutores. Os ductos e sacos onde ocorrem as trocas gasosas são, por sua vez, formados de um epitélio simples

associado a músculo liso e recobertos por um fluido denominado *fator surfactante*, cuja principal função fisiológica é diminuir a tensão superficial dos sacos alveolares, impedindo que os sacos menores se esvaziem nos maiores.

3.2 Procedimento experimental para a obtenção do ruído de crepitação pulmonar

Para fazer a caracterização do processo de insuflação pulmonar foi realizada a análise da fractalidade do ruído de crepitação pulmonar, produzido durante a insuflação *ex-vivo* do pulmão de um cachorro. A gravação do ruído de crepitação pulmonar foi gentilmente cedido por Adriano M. Alencar (ALENCAR et al., 1999, 2001; MAJUMDAR et al., 2001).

A descrição detalhada do procedimento experimental para a obtenção *ex vivo* dos ruídos de crepitação se encontra em (ALENCAR et al., 1999). Um brônquio principal de um pulmão de cachorro foi atado a uma cânula e colocado em uma câmara fechada. A cânula foi conectada com a saída da câmara, por meio de um tubo metálico. Inicialmente, os lobos¹ pulmonares conectados ao brônquio principal estavam completamente colabados, colapsados, significando que o volume interno das vias aéreas era o menor possível. A seguir, no decorrer de 120s, o pulmão é inflado até o seu volume máximo, em um processo quase estacionário. Ao longo de toda a insuflação, os ruídos emitidos pelo pulmão (ruídos de crepitação) foram gravados com um microfone no interior da câmara. A figura 13 mostra o gráfico da amplitude do ruído *versus* tempo, obtido em uma das medições.

O ruído de crepitação pulmonar corresponde a um estalido característico emitido quando uma via aérea, inicialmente colabada, se abre abruptamente. Ele está relacionado com a presença dos fluidos viscosos (muco e surfactante) nas paredes internas dessas vias aéreas. Se no instante inicial, anterior à insuflação, toda a árvore respiratória estiver completamente colabada, a abertura das vias aéreas ocorre de tal forma que os ruídos de crepitação individuais se superpõem como em uma avalanche.

3.3 Estudo da fractalidade do ruído de crepitação pulmonar

O comportamento do escalonamento dos ruídos de crepitação pulmonar durante a insuflação do pulmão foi estudado por Alencar (ALENCAR et al., 1999). Aqui, vamos nos

¹denominação dada a qualquer porção macroscopicamente bem delimitada de um órgão

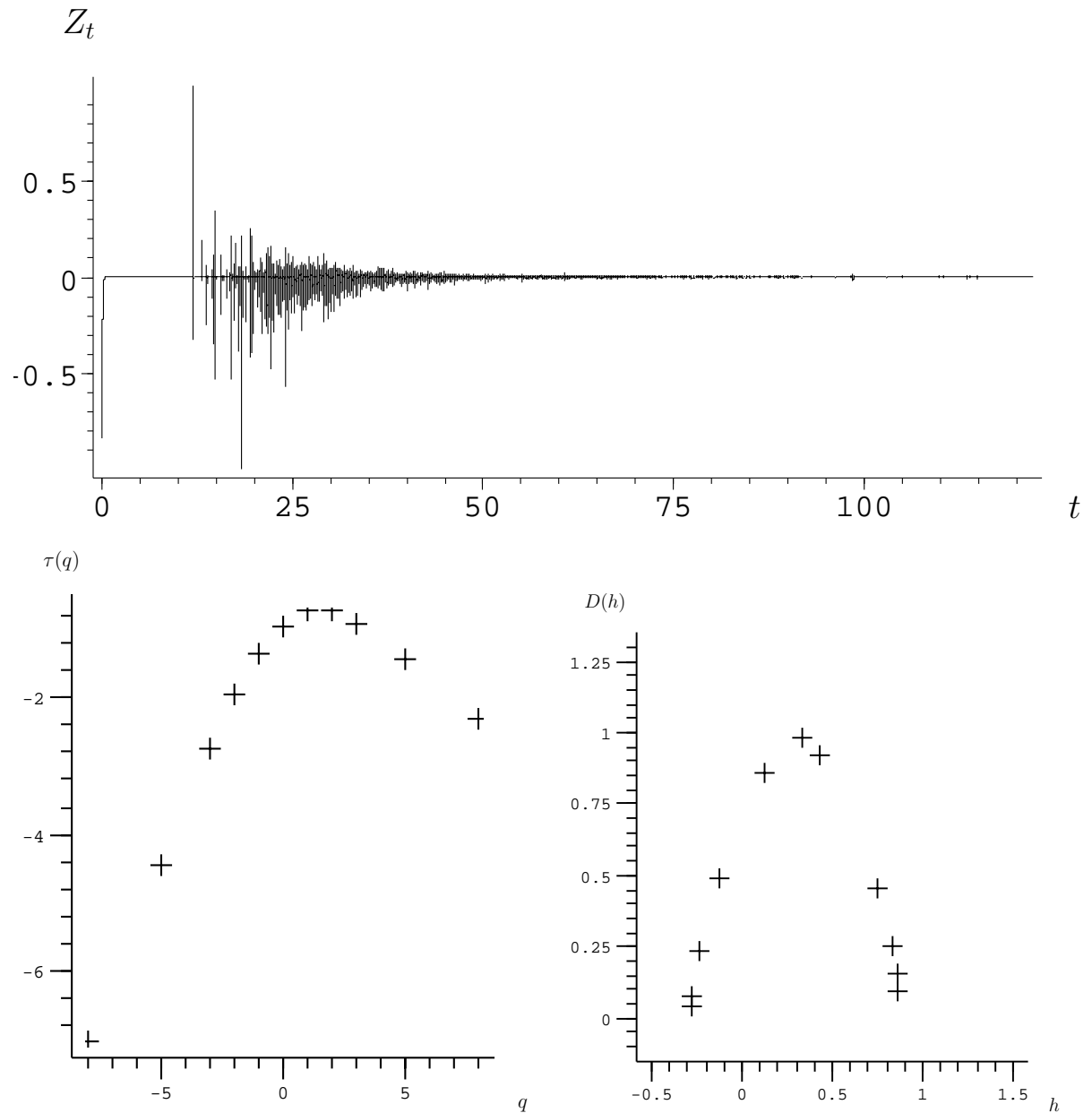


Figura 13: Acima, o gráfico da amplitude do ruído de crepitação *versus* tempo, obtido experimentalmente (ALENCAR et al., 1999). Para obtê-lo, gravou-se os ruídos produzidos pelo pulmão de um de cachorro (*ex vivo*), inicialmente colapsado, submetido a um gradiente de pressão constante até que ficasse completamente inflado, após 120s. Abaixo à esquerda, o espectro de singularidades $D(h)$ *versus* h do sinal completo. $D(h) \approx 1$ para $h = 0.3$ e $h_{min} \approx -0,3$ e $h_{max} \approx 0,9$, resultando em um $\Delta h \approx 1,2$.

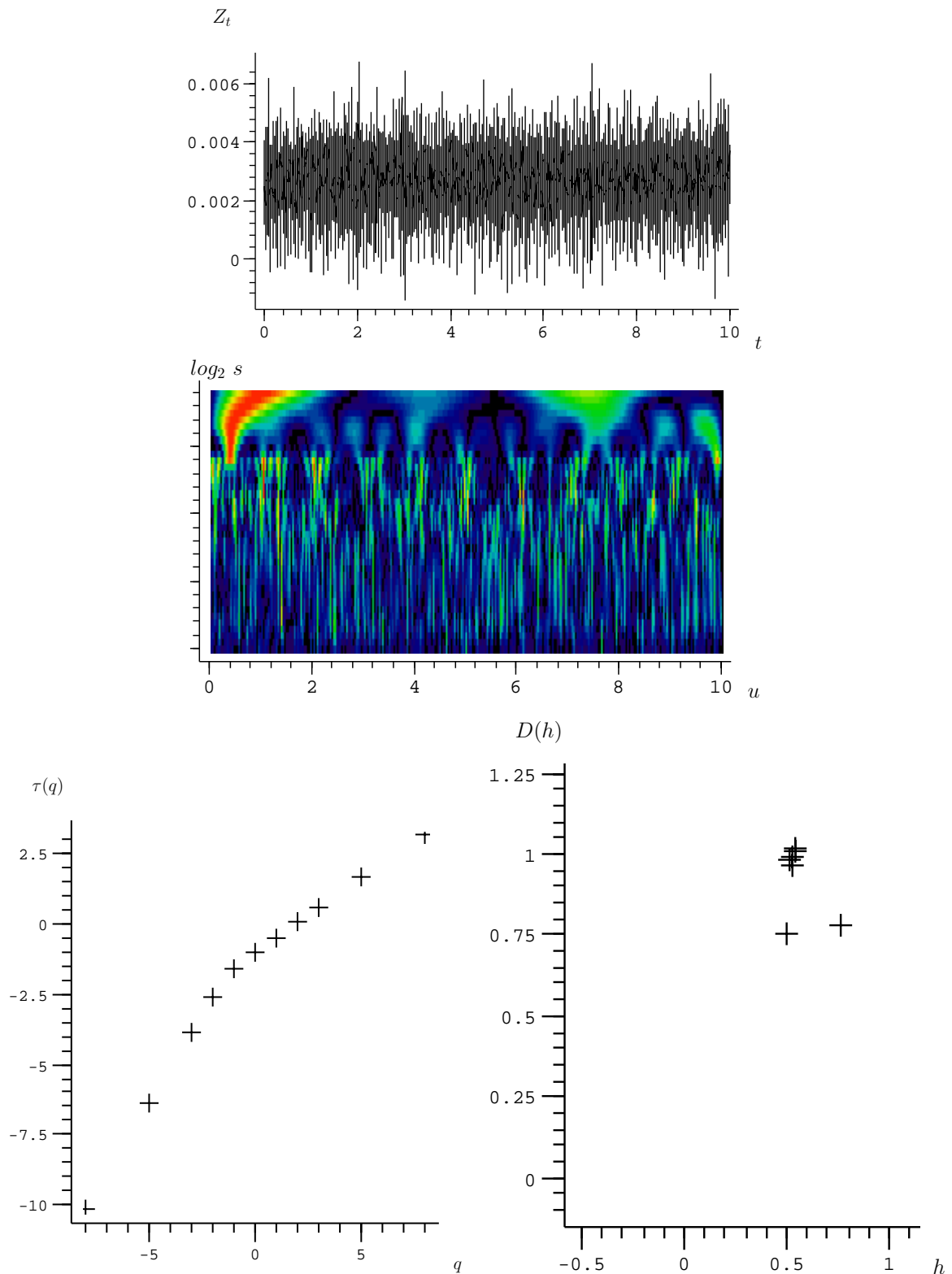


Figura 14: Primeiros 12 segundos do sinal da figura 13, sua transformada *wavelet* e seus espectros de singularidade. Neste intervalo, nenhuma via aérea se abriu ainda, e o sinal corresponde apenas ao ruído produzido pelo próprio processo de captação-gravação. O espectro de singularidades $D(h)$ do ruído de captação se mostra fortemente semelhante ao do movimento browniano simples, mostrado na figura 10.

restringir a verificar a caracterização fractal deste ruído e sua possível relação com a geometria da árvore pulmonar.

O sinal da amplitude do ruído de crepitação pulmonar *versus* tempo decorrido é mostrado na figura 13. Os 10 primeiros segundos são o intervalo de tempo ao longo do qual ainda não ocorreu a abertura de nenhum ducto. Correspondem somente ao ruído intrínseco ao próprio processo de captação e gravação dos ruídos de crepitação, tendo origem nos circuitos do microfone e do gravador. Tal ruído, como se pode ver na figura 14, apresenta característica monofractal, com espectro de singularidade de um fenômeno puramente aleatório, tal qual o do movimento browniano simples mostrado na figura 10, como já era de se esperar.

O espectro de singularidades, $D(h)$, do sinal completo exibe uma característica tipicamente multifractal, com uma parábola de concavidade voltada para baixo, onde os valores $h_{min} \approx -0,3$ e $h_{max} \approx 0,9$ indicam o intervalo dos expoentes h do sinal, que neste caso é $\Delta h \approx 1,2$. O valor máximo de $D(h)$ é $D(h) \approx 1$ para $h \approx 0,3$. Esta é uma assinatura do sinal.

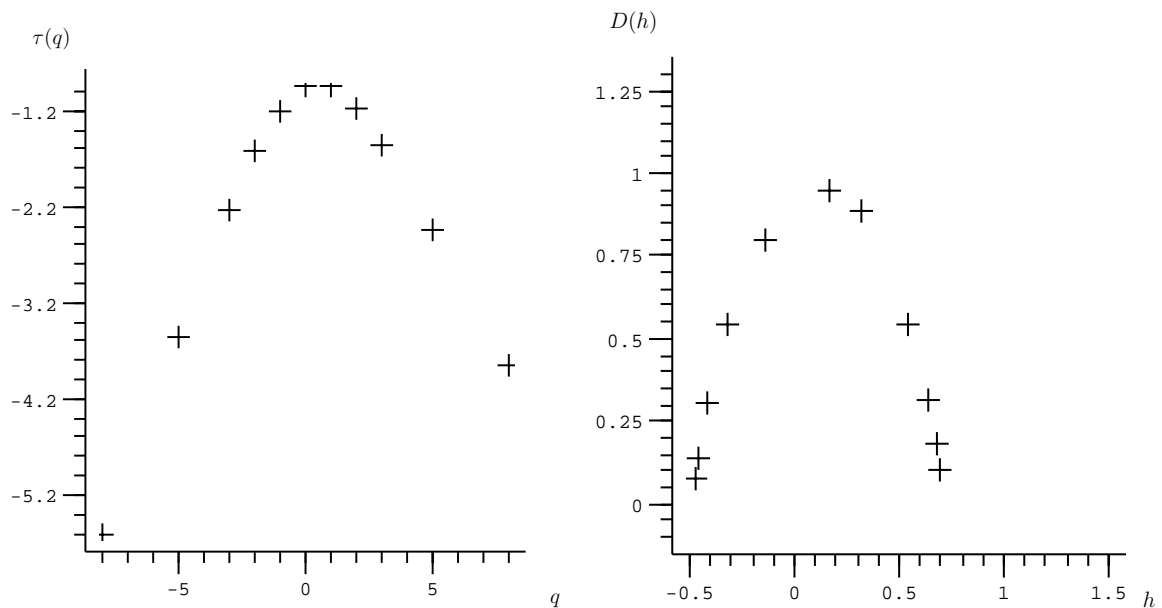


Figura 15: Espectro de singularidade $D(h)$ para a porção do ruído de crepitação que corresponde ao intervalo em que somente as vias aéreas condutoras estão "crepitando". Ainda não houve aumento do volume pulmonar.

Ainda na figura 13, o intervalo entre 12s e 35s corresponde uma variação gradual da diferença de pressão entre o interior e o exterior do pulmão, **sem haver** um correspondente aumento do volume total do pulmão (ver figura 1(a) em (ALENCAR; ANDRADE; LUCENA, 1997)). Isto significa que, neste intervalo, os ruídos de crepitação correspondem à abertura

exclusivamente das vias aéreas condutoras. O espectro de singularidade $D(h)$ deste trecho do sinal é mostrado na figura 15. Vemos que, diferentemente do espectro $D(h)$ da figura 13, o máximo de $D(h)$ corresponde a $h \approx 0,2$ e o intervalo entre os valores mínimo e máximo de h é $\Delta h \approx 1,2$.

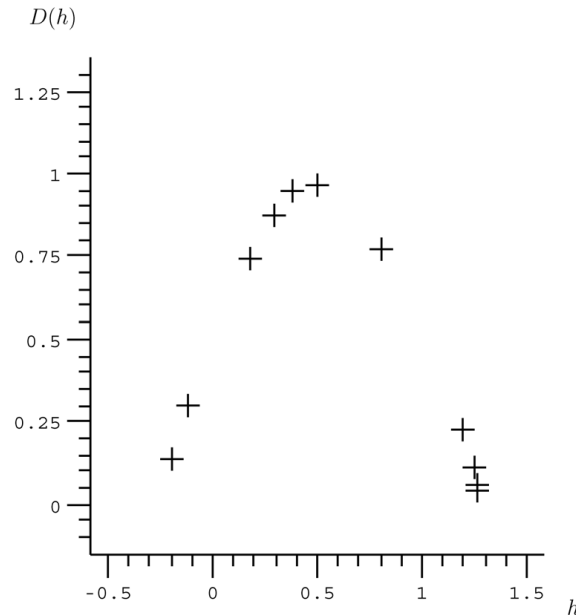


Figura 16: Espectro de singularidade $D(h)$ para a porção do ruído de crepitação que corresponde ao intervalo em que os aglomerados alveolares estão "crepitando". Neste intervalo, há aumento gradual do volume pulmonar. É este intervalo que corresponde ao ruído de crepitação pulmonar "auscultado" durante a inspiração de um mamífero vivo.

No intervalo de tempo entre 60s e 80s da figura 13, o volume pulmonar aumenta gradativamente (ver figura 1(a) em (ALENCAR; ANDRADE; LUCENA, 1997)), correspondendo ao Δt no decorrer do qual os aglomerados alveolares (ácinos pulmonares) estão se abrindo e expandindo. Os ruídos de crepitação correspondem à abertura das porções terminais da árvore brônquica, onde ocorrem as trocas gasosas. É esse o ruído de crepitação que pode ser detectado por simples ausculta pulmonar, via estetoscópio, durante o processo inspiratório de um mamífero vivo. O espectro de singularidade $D(h)$ deste trecho, mostrado na figura 16, tem perfil multifractal, exibindo $D(h)$ máximo para $h \approx 0,5$, com $h_{min} \approx -0,2$, $h_{max} \approx 1,2$, e intervalo $\Delta h \approx 1,4$.

3.4 Análise dos resultados

Os ruídos de crepitação pulmonar dependem diretamente da anatomia da árvore brônquica. Logo, as suas características estão, muito provavelmente, relacionadas com as da árvore respiratória. A análise da fractalidade desse sinal pode então nos fornecer infor-

mações sobre alterações da árvore respiratória relacionadas com o desenvolvimento de diversas patologias pulmonares, tais como as doenças obstrutivas e as de degeneração parenquimatosa (que ocorre, por exemplo, no enfisema pulmonar), uma vez que a dimensão fractal da árvore respiratória se modifica (KIDO et al., 1995, 2002) na presença de doenças que provocam a alteração de parte dos ductos, por meio de enrijecimento, degeneração ou obstrução de uma parcela dos mesmos.

Como é mostrado na figura 16, até mesmo a parte do sinal que corresponde aos sons pulmonares "auscultáveis" possui característica multifractal. Este é um fato importante, pois a captação deste sinal não envolveria, a princípio, um método invasivo, diferentemente do que aconteceria se só pudéssemos detectar estes ruídos por meio de uma cânula inserida na traquéia com um microfone na ponta. Desta maneira, a análise da fractalidade dos ruídos de crepitação pulmonar pode se tornar uma ferramenta auxiliar no diagnóstico de patologias por meio de métodos não invasivos.

Cabe ressaltar que se denomina *método invasivo* qualquer método de diagnóstico que envolva a utilização de procedimentos que podem potencialmente provocar alterações físicas ou fisiológicas no paciente. Isto significa, por exemplo, que um exame radiológico, com o uso de raios X, deve ser visto como um método invasivo, visto que o paciente é submetido a uma dose de radiação ionizante consideravelmente alta.

4 Percolação e Criticalidade Auto-Organizada

4.1 Percolação

A observação de alguns fenômenos físicos simples, aparentemente triviais, pode nos levar à elaboração de modelos explicativos que, mais tarde, se revelam aplicáveis a uma ampla gama de situações, das mais distintas possíveis. Um exemplo disto é o que acontece com a Teoria de Percolação.

Os processos de percolação foram desenvolvidos inicialmente para explicar por meio de qual processo poder-se-iam formar macromoléculas muito grandes a partir de pequenas moléculas ramificadas (FLORY, 1941; STOCKMEYER, 1943). A formação destas macromoléculas, chamada de *polimerização*, podia levar a um processo de gelificação, que é o nome dado à formação de uma enorme rede de moléculas conectadas entre si por meio de ligações químicas. A teoria de percolação se baseia no conceito do que ocorre com a evolução de tais redes. Mais tarde, investigou-se o que ocorre, teoricamente, com um fluido que se dispersa através de um meio aleatório. Tal fluido podia ser entendido como qualquer coisa que pudesse perpassar um meio desordenado: líquidos, corrente elétrica, vapores, agentes infecciosos, fogo, etc. Nestes casos, o meio poderia ser uma rocha porosa, uma população urbana, uma floresta tropical. Ambos elementos envolvidos, o fluido e o meio, podem ser descritos como dotados de uma aleatoriedade característica. No processo de difusão, o fluido é aleatório. No processo de percolação, tal randomicidade é atribuída ao meio (BROADBENT; HAMMERSLEY, 1957). O termo *percolação* se refere à semelhança que tal processo tem, ao ser comparado com o fluxo do café através do coador¹. O meio pode ser modelado por redes com diversos formatos diferentes, tais como as que podem ser vistas na figura 17.

Como se pode observar no traçado da figura 17, podemos ver as linhas que formam

¹Em inglês, *percolator*

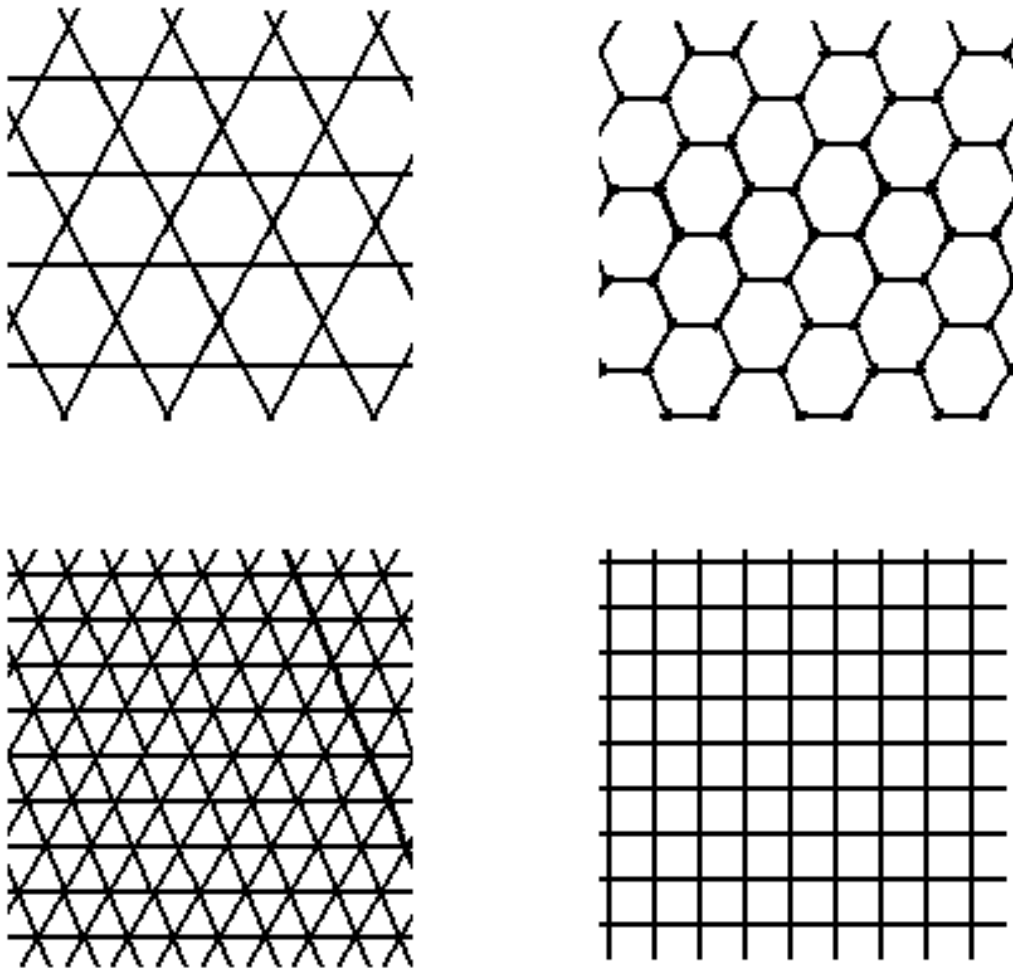


Figura 17: Algumas redes regulares que servem de modelo para o meio de percolação. No alto, rede de Kágome à esquerda ($Z = 4$) e rede *favo de mel* à direita ($Z = 3$). Abaixo, rede triangular à esquerda ($Z = 6$) e rede quadrada à direita ($Z = 4$). O valor de Z é chamado de *número de coordenação da rede* e representa o número de ligações que estão conectadas a um mesmo sítio.

cada rede de duas formas distintas: em uma delas, consideramos que a rede é formada por pontos e cada linha que conecta um ponto a outro é chamado de *ligação*. Podemos também considerar que a rede seja formada por pequenos polígonos contíguos colocados lado a lado.

4.1.1 Processos de Percolação

A teoria de Percolação, vista classicamente, aborda basicamente dois tipos de problemas diferentes. O primeiro deles é o problema da **percolação de ligações**, em que a ligação entre dois pontos da rede, que chamaremos de *sítios*, pode ou não estar ocupada. Tal abordagem é utilizada, por exemplo, para o estudo de problemas em que a ligação representa um componente condutor microscópico de um determinado composto. Atribuímos o valor p à probabilidade da ligação existir e $1 - p$ à probabilidade de não existir. Quando a rede tende a um tamanho muito grande, o valor p tende a se igualar ao quociente entre o número de ligações existentes e o total de ligações possíveis na rede. Quando existe pelo menos um caminho, formado por ligações, interligando dois sítios quaisquer da rede, dizemos que estes sítios estão **conectados**. Denominamos de *aglomerado*² o conjunto de sítios conectados entre si e que se encontra cercado por ligações não existentes. É fácil perceber que, quando a probabilidade de existir uma ligação (p) é pequena, o tamanho dos aglomerados também o é, visto que há poucas ligações entre os sítios. À medida que p aumenta, os aglomerados são cada vez maiores. Quando p atinge seu valor máximo, $p = 1$, todos os sítios estão conectados e o aglomerado permeia toda a rede.

A percolação ocorre quando existe pelo menos um aglomerado conectando as bordas da rede. Como vimos, o tamanho dos aglomerados cresce à medida que o valor de p cresce. Existe então um certo valor de p , bem definido, que demarca uma transição topológica entre uma rede aleatória, desconexa, e uma conectada. Este valor corresponde ao *limiar de percolação por ligação*, p_{clig} , que é a probabilidade mínima necessária para que as ligações formem um caminho percolante (ver figura 18).

O outro tipo de problema abordado pela teoria de percolação é o de **percolação por sítios**. Neste, p representa a probabilidade de um sítio da rede estar ocupado, enquanto $1 - p$ é a probabilidade de um sítio estar vago. Para uma rede muito grande, p é igual à fração de sítios ocupados, ou seja, a razão entre o número de sítios ocupados e o total de sítios. Dois sítios vizinhos estarão *conectados* quando ambos estiverem ocupados, ao mesmo

²em inglês, *cluster*.

tempo. Para este problema, um aglomerado é definido como o conjunto de sítios ocupados, cuja periferia é composta por sítios vazios. Do mesmo modo do problema de percolação por ligação, à medida que p aumenta o tamanho dos aglomerados também aumenta, até que, para um certo valor específico p_{cs} , correspondente ao limiar de percolação por sítios, existe um aglomerado, dito percolante, suficientemente grande para perpassar toda a rede. A figura 19 ilustra, esquematicamente, o processo de percolação por sítios em uma rede quadrada.

Via de regra, o limiar de percolação por ligação é menor ou igual ao limiar de percolação por sítios, $p_{clig} \leq p_{csit}$. Muitos valores destes limiares já são conhecidos, tanto para redes bi-dimensionais quanto tri-dimensionais. A tabela 1 exhibe uma lista de valores de p_{clig} e p_{csit} para algumas redes bi e tri-dimensionais. A tabela 1 mostra também o valor do produto entre o número de coordenação Z e p_{clig} , $B_c = Zp_{clig}$. O número de coordenação corresponde ao número de ligações conectadas a um mesmo sítio em um determinada rede. Analisando-se a tabela 1, nota-se que o valor de B_c acima definido é praticamente o mesmo para todas as redes bidimensionais, assim como para todas as tridimensionais, não dependendo do tipo de rede, mas apenas da sua dimensão.

| Redes bidimensionais | | | | |
|------------------------------|-----|------------|-------------|------------|
| Rede | Z | p_{clig} | Zp_{clig} | p_{csit} |
| Favo de mel | 3 | 0,6527 | 1,96 | 0,6962 |
| Quadrada | 4 | 0,5 | 2 | 0,5927 |
| Kagomé | 4 | 0,522 | 2,088 | 0,652 |
| Triangular | 6 | 0,3473 | 2,084 | 0,5 |
| Redes tridimensionais | | | | |
| Rede | Z | p_{clig} | Zp_{clig} | p_{csit} |
| Diamante | 4 | 0,3886 | 1,55 | 0,4299 |
| Cúbica simples | 6 | 0,2488 | 1,49 | 0,3116 |
| BCC | 8 | 0,1795 | 1,44 | 0,2464 |
| FCC | 12 | 0,198 | 1,43 | 0,119 |

Tabela 1: Valores de limiares de percolação por ligação e por sítio, em algumas redes bi e tri dimensionais. Note que o produto entre o limiar de percolação por ligação, p_{clig} , e o número de coordenação correspondente, Z , tem, grosso modo, um único valor para a rede bidimensional ($Zp_{clig} \approx 2$) e para a rede tridimensional ($Zp_{clig} \approx 1,5$). Pode-se deduzir que, para um sistema de dimensão d , teremos $Zp_{clig} \approx \frac{d}{d-1}$. **Fonte:** (SAHIMI, 1994).

4.1.2 O estudo do aglomerado de percolação

O advento dos computadores é um marco importante no estudo dos modelos de percolação. Entretanto, é importante que se utilize algoritmos adequados ao problema a ser

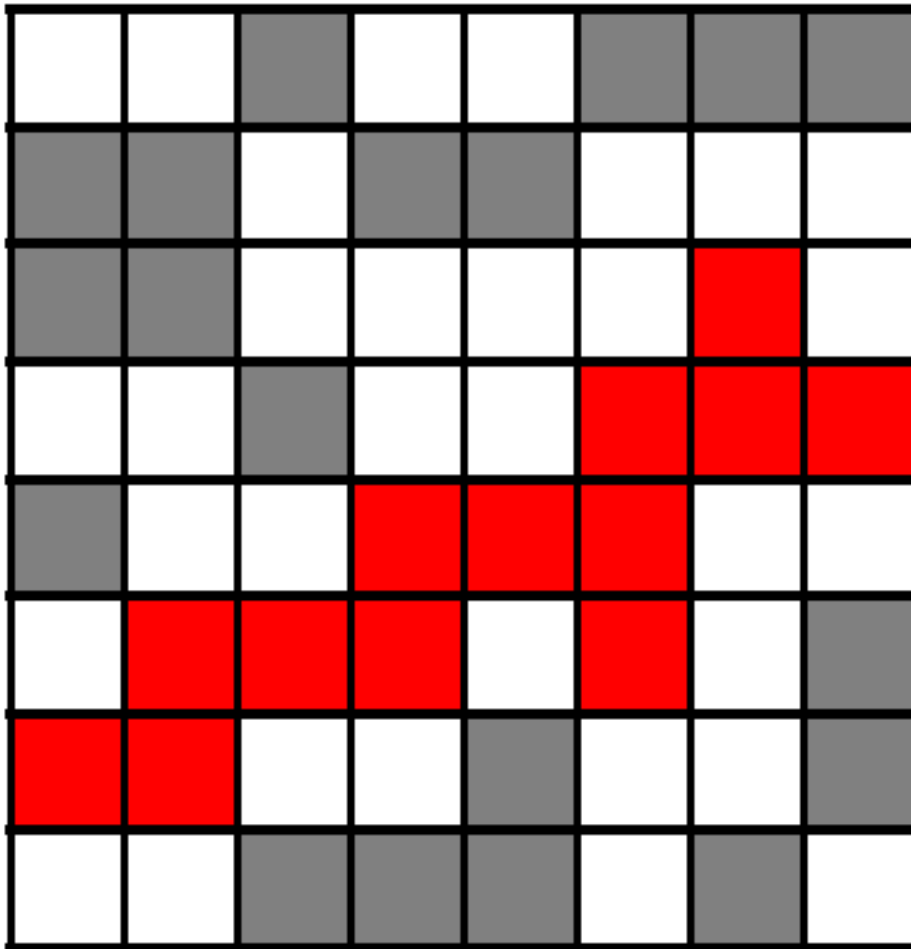


Figura 19: Percolação por sítios em rede quadrada. Os *aglomerados* são os sítios conectados entre si. Quanto ao tamanho e número destes aglomerados, vale o mesmo comentário da figura 18. Em destaque, o *aglomerado percolante*.

abordado, a fim de evitar desperdício de tempo e recursos computacionais. Por exemplo: podemos modelar a percolação por sítios em uma rede quadrada preenchendo, inicialmente, cada um dos sítios com uma certa probabilidade p . A seguir, verificamos quais são os sítios ocupados cujos vizinhos também estão ocupados, a fim de delimitar os aglomerados. Por último, verificamos qual é o aglomerado de percolação. Se o nosso objetivo for caracterizar o aglomerado percolante, este método não é adequado, visto que gera aglomerados finitos, não percolantes, que serão inutilmente contabilizados para, a seguir, ser descartados. A fim de contornar tal desperdício, costuma-se utilizar o algoritmo de Leath (LEATH, 1976) quando se pretende estudar apenas o comportamento do maior aglomerado.

O algoritmo de Leath consiste em construir o maior aglomerado a partir de uma rede onde, inicialmente, somente o sítio central está ocupado. A seguir, indentifica-se os vizinhos deste sítio, ao mesmo tempo que se sorteia um número real r , onde $0 \leq r \leq 1$. Se r for menor que um certo valor p , escolhido *a priori*, então o sítio visitado é considerado ocupado. Se não, o sítio é marcado como desocupado e assim permanecerá. Ao terminar de visitar todos os vizinhos, um perímetro é demarcado e recomeça o processo nos sítios do perímetro.

Diferentemente do método desenvolvido por Leath, o modelo de *percolação por invasão* (WILKINSON; WILLEMSSEN, 1983) consiste em, inicialmente, "povoar" a rede atribuindo a cada sítio ou ligação um valor aleatório, compreendido entre 0 e 1. A seguir, escolhe-se um sítio (ou ligação) s_i qualquer da rede para ser preenchido. Na sequência, verifica-se os valores atribuídos aos sítios vizinhos a s_i . Aquele vizinho que tiver menor valor é computado como ocupado e a partir dele se repete o mesmo procedimento de verificação dos vizinhos. Desta forma, o aglomerado principal cresce gradativamente. Uma analogia interessante deste método é a seguinte: suponha que a rede represente o mapa do relevo de uma certa região, onde o valor atribuído a cada sítio da rede corresponde à altura de um ponto daquele mapa com relação ao nível do mar. Os maiores valores de altura corresponderiam então a montanhas muito elevadas. Suponhamos que a montanha esteja em processo de degelo. O caminho percorrido pela água, até chegar (ou não) ao mar, será análogo ao processo de crescimento do aglomerado principal.

Apesar das diferenças existentes entre o modelo de Leath e o de percolação por invasão, o valor da dimensão fractal do aglomerado principal, em ambos, tem o mesmo valor, $d_f \approx 1,89$ (ALENCAR; ANDRADE; LUCENA, 1997), evidenciando a equivalência entre os dois.

Outros algoritmos também foram desenvolvidos para estudar o comportamento dos

aglomerados finitos nos processos de percolação. Para saber mais sobre a teoria de percolação e suas aplicações, (SAHIMI, 1994; BUNDE; HAVLIN, 1995; STAUFFER, 1985) são ótimas opções para uma leitura introdutória.

4.2 Criticalidade Auto-Organizada

O estudo dos sistemas dinâmicos complexos, onde existem muitas interações entre os componentes destes sistemas, representa um desafio às ciências naturais, em especial à Física. A tendência de alguns grandes sistemas complexos evoluírem por si mesmos para estados críticos motivou a formulação do conceito de *Criticalidade Auto-Organizada* (BAK; TANG; WIESENFELD, 1987). De acordo com Bak, Tang e Wiesenfeld, criadores do conceito, um sistema criticamente auto-organizado tende naturalmente a evoluir para o seu estado crítico sem que para isso seja necessário sequer fazer ajustes finos ao processo.

O acoplamento de regras dinâmicas locais ao mecanismo de controle global de evolução de um sistema resulta na organização deste sistema na vizinhança de seu estado crítico, como é mostrado, por exemplo, no modelo de percolação auto-organizada (SOP³) (ALENCAR; ANDRADE; LUCENA, 1997).

No modelo da SOP, começa-se com uma rede quadrada $L \times L$ de lado L . Povoam-se aleatoriamente os sítios de um dos lados da rede, de forma que a fração de sítios ocupados com relação ao total de sítios seja igual a um certo valor p_0 . p_0 representa a probabilidade de ocupação inicial. Na próxima iteração, o sistema evolui quase *a la* Leath. Quase, por que há diferenças importantes: somente os sítios ocupados em um certo instante t são considerados sítios *ativos* e, a cada instante t , o valor de p é alterado de acordo com uma regra de controle. Se, por exemplo, a regra de controle utilizada for a dada pela equação 4.1

$$p(t + 1) = p(t) + k[N_T - N(t)] \quad (4.1)$$

a probabilidade de ocupação p na próxima iteração será igual à probabilidade atual somada a uma parcela que depende de um coeficiente cinético k , da quantidade de sítios (ou ligações) atualmente ativos $N(t)$ e da quantidade de sítios (ou ligações) N_T que deveriam estar ativos. Os valores de k e N_T são escolhidos arbitrariamente. Sempre que o próximo valor de p calculado pela equação 4.1 for incompatível com o modelo probabilístico, ou seja, $p(t + 1) > 1$ ou $p(t + 1) < 0$, impõe-se que $p(t + 1)$ seja convertido em 1 ou 0, respectivamente. Os valores médios da probabilidade de ocupação, $\langle p \rangle$,

³do inglês *Self Organized Percolation*

obtidos com este modelo, são satisfatoriamente compatíveis com os valores críticos p_c , no limiar de percolação, tanto para a percolação por sítios quanto para a percolação por ligação.

5 A Evolução Dinâmica de um Modelo de Percolação

Neste capítulo, analisamos um modelo de percolação que exibe criticalidade auto-organizada. Para esta análise, estudamos, para uma rede quadrada, como se dá a busca automática do ponto crítico de um modelo de percolação. Analisamos também o que ocorre com a trajetória do sistema, à medida que ele evolui para o ponto crítico: sua oscilação em torno deste é tratada como um problema dinâmico. Construímos também um mapa, simples, o qual descreve a dinâmica do sistema nas proximidades do ponto crítico. Consideramos que a dinâmica do sistema tem duas escalas temporais características: um intervalo de tempo para atingir o ponto crítico e outro para perder a correlação. A conexão entre este intervalo de tempo para perder a correlação e os ruídos branco e marrom, observados no espectro de Fourier, é discutida. Verificamos que, apesar de um comportamento de curta duração altamente correlacionado, o sistema exibe uma tendência ergódica para comportamento de longa duração.

5.1 Introdução

Além do método para o modelo de percolação (ALENCAR; ANDRADE; LUCENA, 1997), vários outros métodos de busca automática do ponto crítico de um sistema dinâmico foram desenvolvidos ao longo dos últimos anos. Alguns exemplos são: um método para sistemas magnéticos do tipo Ising (FULCO; LUCENA; VISWANATHAN, 1999), outro para polímeros ramificados (ANDRADE et al., 1997) e mesmo alguns para transições liso-rugosa (LUCENA; SILVA; ROUX, 2002; SILVA et al., 2002; FULCO et al., 2001, 2000).

Esses métodos se caracterizam, via geral, pelo uso de uma regra de controle, sob o comando da qual uma (ou duas) variáveis convergem para o seu valor crítico, espontaneamente. Estes sistemas exibem então um comportamento crítico do tipo auto-organizado

(SOC¹), no qual evoluem, por si só, até o ponto crítico.

Vamos agora acrescentar uma nova variante à abordagem anterior. Faremos uso de um método de busca automática para o modelo de percolação de sítios em rede quadrada, porém sem usar o algoritmo de Leath. Veremos que este método não está limitado a ser um algoritmo de crescimento do aglomerado de percolação. Ele também permite uma análise de escalas do sinal (série temporal) obtido a partir da evolução temporal da probabilidade de percolação p .

Associado a isso, seremos capazes de usar uma abordagem diferente, que consiste na análise daqueles métodos de busca automática com relação às suas características dinâmicas, ou seja, avaliando o que ocorre com a trajetória de um dos parâmetros do método quando o sistema se aproxima do ponto crítico.

Para fazer tal análise, usamos a série temporal relacionada ao parâmetro p ,

$$p(t) \equiv p_t = (p_1, \dots, p_n) \quad (5.1)$$

e estudamos a trajetória de p_t evoluindo em direção ao ponto crítico p_c , usando as ferramentas disponíveis da teoria dos sistemas dinâmicos.

Observamos que a probabilidade de ocupação $p(t)$ evolui, inicialmente, de forma espontânea, em direção ao valor crítico p_c . A seguir, ao atingir a vizinhança da probabilidade limiar p_c , o valor $p(t)$ passa a oscilar intensamente, nervosamente, em torno do valor crítico. Nesta seção, escolhemos aplicar ao problema de percolação de sítios o modelo de busca automática e fazer a análise efetiva de tal problema a partir do que ocorre com a trajetória de $p(t)$.

O estudo de um sistema complexo multi-dimensional por meio do método de busca automática pode fornecer novos elementos diretamente relacionados à dinâmica dos fenômenos criticamente auto-organizados. Nesta seção, pretende-se investigar isso a partir das informações fornecidas pelas séries temporais características do sistema, obtidas à medida que o mesmo evolui para o seu ponto crítico.

Vamos trabalhar com as séries temporais geradas com o uso, em redes quadradas, do método de busca automática do valor da probabilidade crítica de ocupação p_c correspondente ao limiar de percolação por sítios. Com os dados desta série, construiremos um mapa local que representa a dinâmica da mesma. A seguir, obteremos a escala de tempo típica da série e estudaremos o desvio do valor médio da probabilidade de ocupação p , ou

¹termo em inglês para *criticalidade auto-organizada*

seja, o p_{ave} . Por último, calcularemos o espectro de Fourier da série $p(t)$ e compararemos com os resultados obtidos para os dados do desvio do valor médio de p , o p_{ave} .

Para começar, vamos verificar como é que o sistema evolui quando o tamanho da rede quadrada $L \times L$ é pequeno. Ou seja, quando a rede tem lados constituídos por apenas algumas dezenas de sítios. A fim de obter informações sobre esse comportamento, usamos o seguinte procedimento:

- 1) construímos uma rede quadrada de lado L ;
- 2) definimos um valor inicial p_0 para a probabilidade de ocupação de um sítio qualquer;
- 3) povoamos os sítios da rede, aleatoriamente, com uma probabilidade p_0 de cada sítio estar ocupado.
- 4) verificamos se a rede percolou. Consideramos que isso aconteceu quando o aglomerado principal tiver conectado horizontalmente as bordas da rede;
- 5) repetimos esse processo por N_L vezes seguidas, sendo N_L o universo de redes de tamanho L .
- 6) calculamos o valor da fração de redes percolantes R_L ,

$$R_L = \frac{N_{perc}}{N_L}$$

onde N_{perc} é a quantidade de redes de lado L que percolaram. Utilizamos $N_L = 4000$.

- 7) incrementamos o valor de p .
- 8) recomeçamos a partir do passo **3**, usando p em lugar de p_0 .

Executamos o procedimento anterior para um valor de p no intervalo $0,53 < p < 0,66$, com p sendo incrementado em $0,01$ para cada repetição. Na figura 20 vemos o gráfico de R_L versus p , para quatro redes quadradas com tamanhos diferentes: $L=32, 64, 128$ e 264 . Na figura 20, a curva com menor inclinação corresponde a $L = 32$, enquanto a mais íngreme é de $L = 264$.

Por indução a partir da análise visual, pode-se perceber que, à medida que L aumenta, a curva fica mais parecida com um degrau. Em todas elas, o ponto de inflexão ocorre nas proximidades de $p \approx 0,59$ e $R_L \approx 0,52$. Para uma rede com L tendendo a infinito, o valor $p \approx 0,59$ corresponde à transição entre um aglomerado percolante e um não percolante.

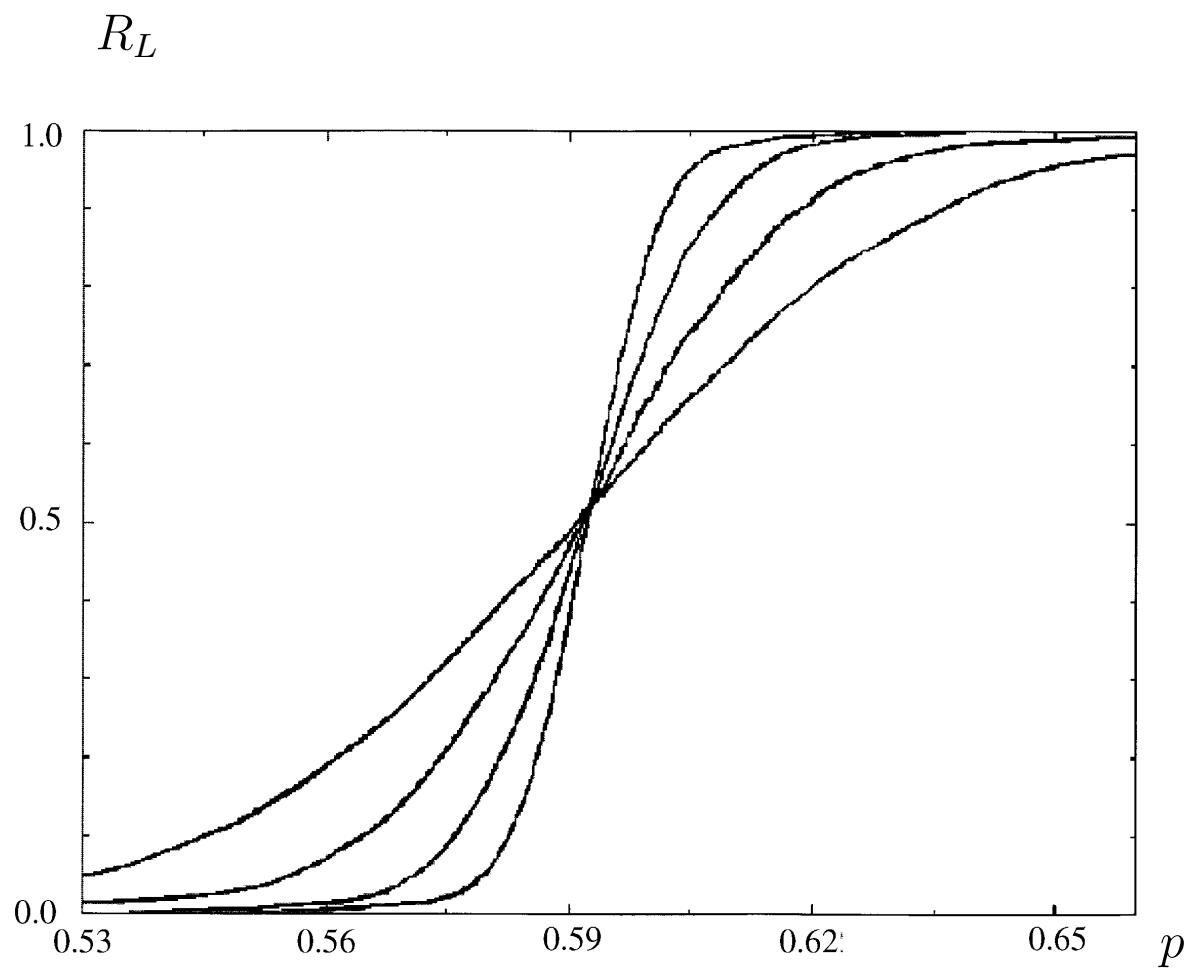


Figura 20: Fração de redes quadradas percolantes, R_L , versus a probabilidade de percolação, p . As quatro curvas indicadas na figura são para redes de tamanho $L=32, 64, 128$ e 256 .

Isto está de acordo com os valores obtidos para o limiar de percolação por sítios (p crítico) em uma rede quadrada. Definindo então, para os gráficos da figura 20, o valor crítico da probabilidade de ocupação p_c como sendo o ponto de inflexão de cada curva $R_L(p)$, o ponto R_L correspondente a este p_c será a fração crítica de redes finitas percolantes, R_c . Vê-se, na figura 20, que todas as curvas, independentemente de qual seja o valor de L , se interceptam no mesmo ponto (p_c, R_c) , onde $R_c \approx 0.52$. Este resultado é coerente com aqueles encontrados na literatura (NEWMAN; ZIFF, 2000).

Usaremos o valor de R_c , assim obtido, para definir um método de busca automática para este problema de percolação. A regra de controle por retro-alimentação para este caso será:

$$p_{t+1} = p_t + k(R_c - R_t) \quad (5.2)$$

em que o tempo t corresponde à iteração corrente e o parâmetro k varia livremente no intervalo

$$0 < k < 1.$$

R_t é a fração de redes quadradas percolantes quando $p = p_t$. Inspecionando a figura 20, percebemos que o termo entre parênteses da equação de controle 5.2 é negativo para todo valor de p_t maior que p_c . Isto quer dizer que a diferença entre os valores de p de duas iterações sucessivas, $p_{t+1} - p_t$, também será negativa, levando p_t a convergir para p_c . Por outro lado, quando p_t for menor que p_c , o termo entre parêntesis é positivo (comparar com a figura 20 e p_t volta a tender para p_c). Neste caso, podemos dizer que a dinâmica do sistema, deixado a evoluir por si mesmo, tende a um valor fixo p_c . Pode-se perceber então que a equação 5.2 define adequadamente um mecanismo que conduz o sistema a um valor crítico p_c , por meio de retro-alimentação, tal qual é exigido de um processo criticamente auto-organizado.

A fim de investigar a robustez do método, verificamos o que acontece com a equação 5.2 quando o valor de R_c é diferente de 0,52. Testando a equação 5.2 usando valores de R_c no intervalo $0,49 < R_c < 0,55$, verificamos que a regra de controle ainda converge, porém não exatamente para o valor de p_c , mas algo próximo a ele. Considerando-se que R_c foi estimado por *inspeção visual* dos gráficos da figura 20, com uma precisão de apenas duas casas decimais, já era esperado que este método ficasse longe de contribuir para aumentar a precisão do valor de p_c para o problema de percolação por sítios em rede quadrada. Afinal, na regra de controle 5.2, a precisão de p_c depende da precisão de R_c . O que é relevante é que o método se mostra robusto contra variações do valor de R_c , tendo como

vantagens a possibilidade de se derivar um mapa Pxt para ele e rapidamente se obter resultados analíticos e numéricos interessantes.

Testamos também a condição inicial p_{ini} com o intuito de verificar, via um segundo parâmetro, a regra de controle 5.2. Constatamos que a regra de controle utilizada é muito robusta no que diz respeito ao valor inicial da probabilidade de ocupação de um sítio, p_{ini} . Para todos os valores de p_{ini} , no intervalo de validade do problema (ou seja, $0 < p_{ini} < 1$), o sistema tende a evoluir para as proximidades do ponto crítico p_c depois de um certo tempo transiente, não importando qual seja o valor escolhido do tamanho da rede, L , sempre que o espaço amostral N_L for suficientemente grande.

5.2 Evolução temporal da probabilidade de ocupação

A partir da equação 5.2, obtivemos séries temporais $p = f(t)$ para diversos valores do parâmetro cinético k . Na figura 21, estão representados os gráficos de $p = f(t)$ para $k = 0,1$ e $k = 0,5$. Para os dois casos, utilizamos um valor inicial de probabilidade de ocupação de sítio p longe do limiar (ponto crítico). Usando $p_{ini} = 0,2$, o sistema evolui monotonicamente até que começa a oscilar, quando $p_c \approx 0,592$. Vê-se na figura 21 que, quanto menor o valor do fator cinético k , mais tempo demora para o sistema chegar à vizinhança de p_c . Para $k = 0,1$, o tempo transiente corresponde a aproximadamente 100 iterações, enquanto que quando k é 5 vezes maior ($k = 0,5$), o tempo diminui para $1/5$ do anterior (cerca de 20 iterações).

Uma outra análise da equação 5.2 mostra que as flutuações de p em torno de p_c são maiores à medida que se diminui o valor de k . Isso é visualizado também nos gráficos da figura 21.

5.3 Mapa unidimensional para o modelo de percolação por sítios

Usamos a estimativa do desvio quadrático médio, dado pela equação 5.3

$$\Delta p = \left(\frac{1}{N}\right) \sum_l (p_l - p_{ave})^2 \quad (5.3)$$

com o objetivo de explorar a variação do número total de redes quadradas no espaço amostral, N_L . Utilizamos diferentes valores de N_L na equação 5.3. Para o valor de Δp , a

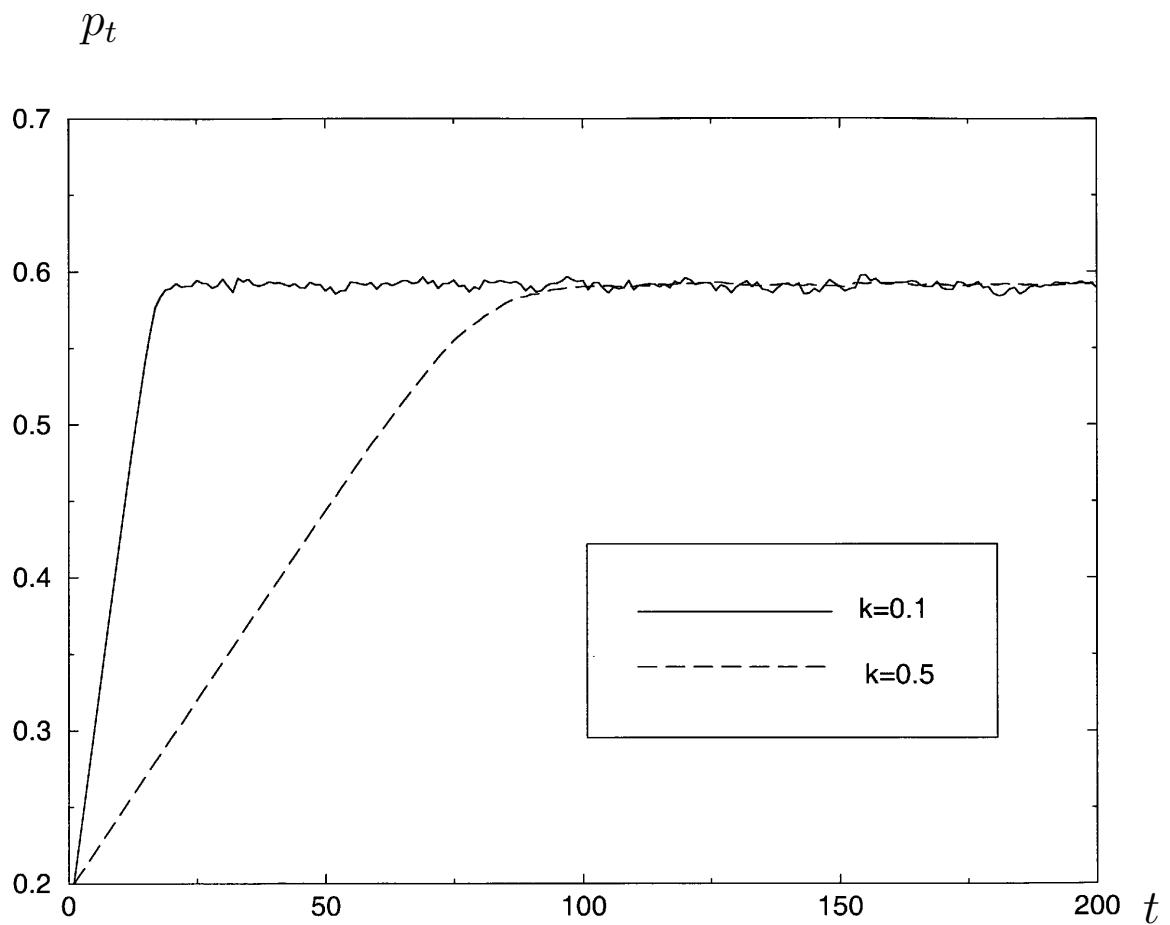


Figura 21: Probabilidade de ocupação de um sítio em um dado instante t , p_t , versus o instante t , quando os valores do parâmetro cinético k na regra de controle (equação 5.2) são $k = 0.5$ e $k = 0.1$, como indicados na figura. **Fonte:**(CORSO; MORAIS; LUCENA, 2003).

estatística prevê um comportamento normal (gaussiano) do tipo

$$\Delta p \propto \frac{1}{\sqrt{N_L}} = N_L^{-0,5}$$

Para testarmos se isso ocorre para o modelo em questão, executamos uma simulação utilizando um fator cinético $k = 0,1$, uma rede quadrada de lado $L = 70$ e 2000 iterações computadas após decorrido o tempo transiente. Na figura 22 encontram-se os valores obtidos. Estimou-se então, numericamente, o valor de γ na equação

$$\Delta p \propto N_L^\gamma$$

O valor obtido, $\gamma = -0.506$, apresenta boa concordância com o teórico, -0.5 . A mesma tendência foi observada para testes efetivados com outros valores de k e L .

Observamos que o gráfico de R_L , na figura 20, apresenta forma sigmóide. Expandimos o valor de R_L em torno do ponto de inflexão, $(p, R_L) = (p_c, R_c)$, usando

$$R_L = R_c + \left. \frac{\partial R_L}{\partial p} \right|_{p_c} (p - p_c) \quad (5.4)$$

onde

$$\alpha \equiv \left. \frac{\partial R_L}{\partial p} \right|_{p_c}.$$

O valor de α , que é a inclinação da reta tangente à curva da figura 20, no ponto em que $p = p_c$, pode ser determinado numericamente. Vemos que α depende somente de L .

Podemos rearranjar a equação 5.4, de forma que seja escrita como

$$R_L - R_c = \alpha(p - p_c)$$

ou

$$R_c - R_L = -\alpha(p - p_c) \quad (5.5)$$

Inserindo a equação 5.5 na equação 5.2, obtemos

$$p_{t+1} = p_t - k\alpha_L(p_t - p_c) \quad (5.6)$$

onde o α_L depende do tamanho da rede, L . A equação 5.6 determina, para o método de busca automática da percolação por sítios, um mapa unidimensional local.

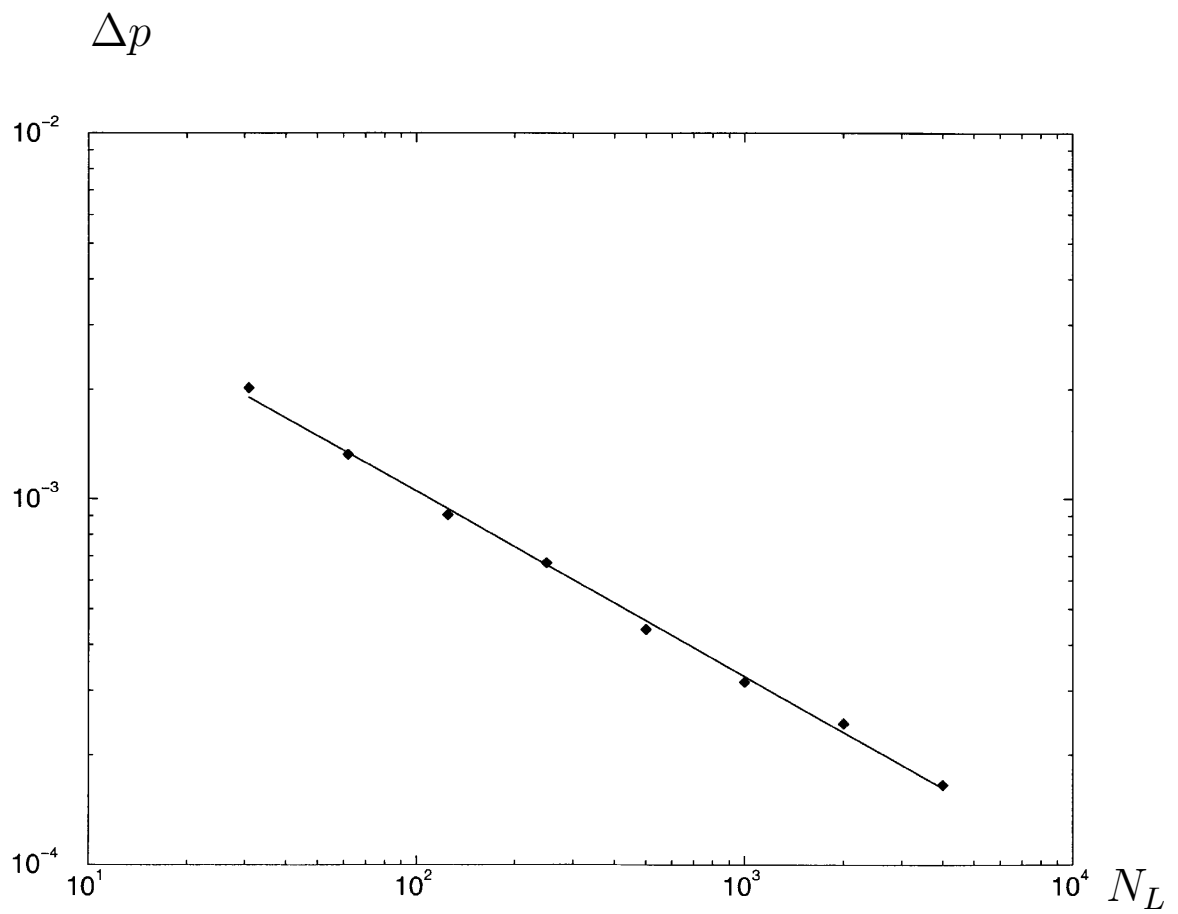


Figura 22: A dispersão de probabilidade de ocupação, Δp , versus o tamanho da rede, L , para os valores $k = 0.1$ e $N_L = 1000$. A dispersão Δp foi estimada sobre 2000 iterações, feitas após o tempo transiente. Fonte: (CORSO; MORAIS; LUCENA, 2003).

A equação 5.6 é local, uma vez que deriva da expansão local do ponto fixo correspondente ao ponto de inflexão, $R_L = R_c$. Por ser monotônico e inversível, o mapa representado pela equação 5.6 não evolui para o caos (LICHTENBERG; LIEBERMAN, 1983; ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1997).

O mapa 5.6 fornece uma dica sobre o escalonamento² característico, mesmo com este mapa descrevendo o sistema apenas localmente. Uma descrição qualitativa do mapa pode ser obtida usando a versão contínua deste:

$$\frac{dp}{dt} \propto \beta$$

onde $\beta \equiv k\alpha$. A solução desta equação,

$$p(t) \propto e^{-\beta t},$$

possui uma escala de tempo característica, \bar{t} , que escala como

$$\bar{t} \propto \frac{1}{\beta}.$$

Este escalonamento é refletido pela dinâmica da regra de controle em duas situações diferentes: uma para o tempo necessário para o sistema chegar ao ponto crítico e outra para o tempo de correlação. Vamos discutir esses dois aspectos em conexão com a mudança do valor do parâmetro cinético k .

Começemos pelo efeito sobre o tempo transiente, que é o intervalo de tempo necessário para o sistema sair de p_{ini} e chegar à vizinhança de p_c , quando se inicia o estado estacionário. Definimos este tempo transiente como τ . Sob o ponto de vista computacional, τ corresponde ao intervalo de tempo decorrido para o sistema ser levado de uma concentração inicial específica $p = p_{ini}$ até uma vizinhança (arbitrariamente pequena) do ponto crítico p_c . O valor de τ , como foi visto anteriormente a partir da observação dos gráficos da figura 21, depende do parâmetro cinético k . Um gráfico, do tipo log-log, de k versus τ é mostrado na figura 23. Para construção deste gráfico, fizemos uma simulação usando $L = 100$, $N_L = 400$ e $p_{ini} = 0,45$.

A lei de escalonamento $\tau \propto \frac{1}{k}$ é mostrada na figura 23. Quando usamos valores diferentes de p_{ini} , obtemos valores de τ que não concordam entre si. É o que pode ser observado quando se compara a figura 21 com a 23. Entretanto, o escalonamento não sofre alterações, continuando o mesmo. O efeito de p_{ini} sobre τ corresponde à introdução

²em inglês, *scaling*

de uma espécie de "calibre".

O deslocamento quadrático médio, Δp , em função do intervalo de tempo t estimado depois de um tempo transiente τ é mostrado na figura 24, onde aparecem os gráficos feitos para quatro valores distintos de k : $k = 0,005$, $k = 0,01$, $k = 0,02$ e $k = 0,04$. Da análise dos dados usados para produzir estes gráficos, observou-se que, para regimes de longa duração, a razão entre valores sucessivos de k_l , que é

$$\frac{k_{l+1}}{k_l} = 2,$$

corresponde à mesma razão entre valores sucessivos de Δp_l ,

$$\frac{\Delta p_{l+1}}{\Delta p_l} \approx 2.$$

É a regra de controle, 5.2, que determina esta dependência entre a variação de p , Δp , e o valor do parâmetro cinético, k . Da equação 5.2, podemos verificar que

$$\Delta p \propto \langle (p_{l+1} - p_t) \rangle \propto k,$$

com $\langle \rangle$ definindo uma média temporal.

A inspeção visual dos gráficos da figura 24 mostra que a amplitude de oscilação se torna cada vez menor, à medida que o tempo evolui. A oscilação também diminui drasticamente a partir de um certo instante, destacado na figura 24 por um quadrado. Denominamos de "tempo de alisamento", t_{smt} , o intervalo de tempo decorrido do início do processo até o instante indicado pelos quadrados da figura 24. Estimamos, por inspeção visual, o valor de t_{smt} . Os resultados obtidos estão na tabela 2. Definimos a frequência característica para o t_{smt} como sendo igual a $\frac{2\pi}{t_{smt}}$. Esta frequência será posteriormente analisada em conexão com dados do espectro de Fourier. Os dados obtidos exibem uma lei de escalonamento para o tempo de "alisamento", $t_{smt} \propto \frac{1}{k}$, similar ao escalonamento do tempo transiente, τ .

| k | t_{smt} | $\frac{2\pi}{t_{smt}}$ |
|-------|-----------|------------------------|
| 0.005 | 10000 | $6,3 \times 10^{-4}$ |
| 0.01 | 5000 | $1,3 \times 10^{-3}$ |
| 0.02 | 2500 | $2,5 \times 10^{-3}$ |
| 0.03 | 1250 | $5,0 \times 10^{-3}$ |

Tabela 2: Tempos de alisamento", t_{smt} , para valores distintos de k , e a respectiva frequência característica, definida como $\frac{2\pi}{t_{smt}}$.

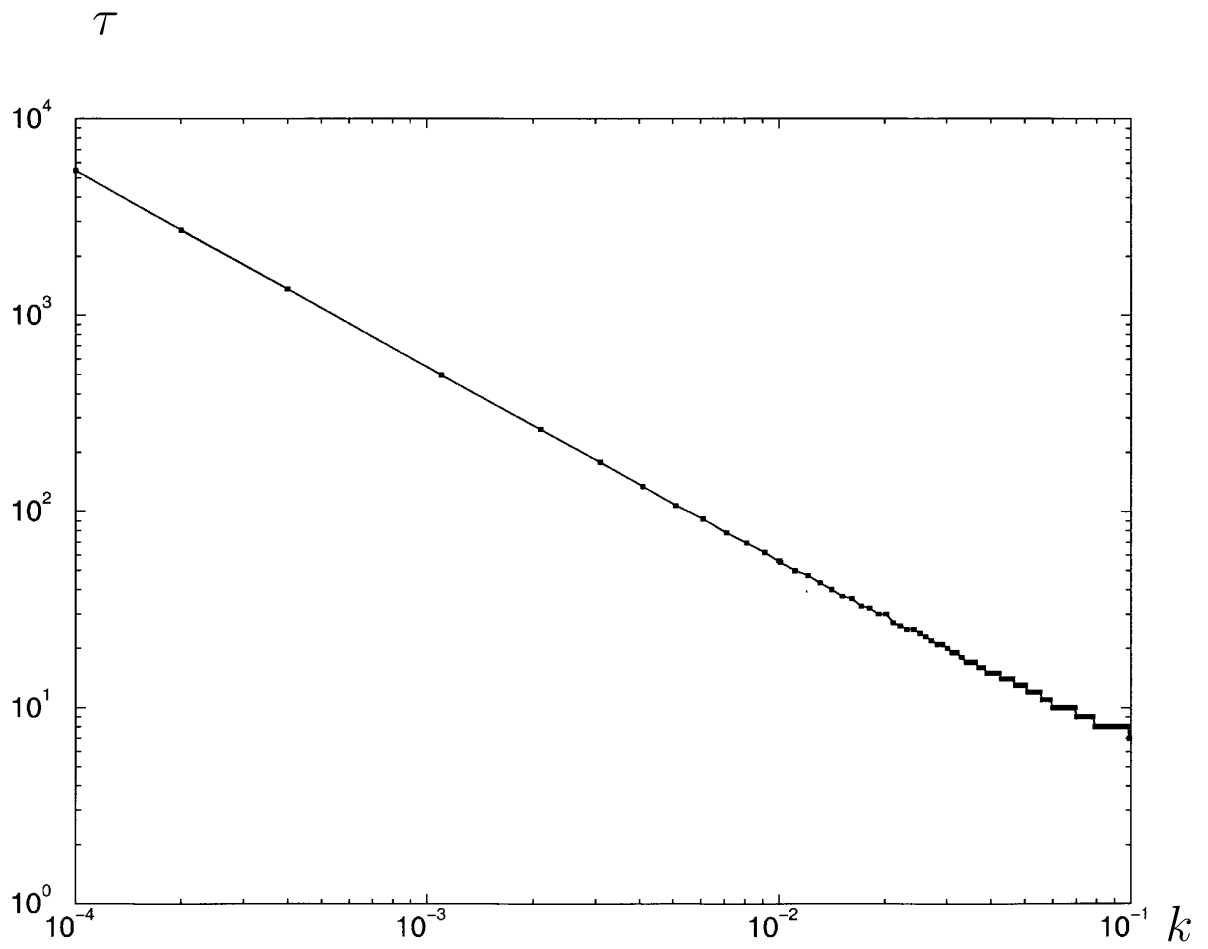


Figura 23: O tempo transiente, τ , versus o fator k da regra de controle, em um gráfico log-log. Fonte: (CORSO; MORAIS; LUCENA, 2003).

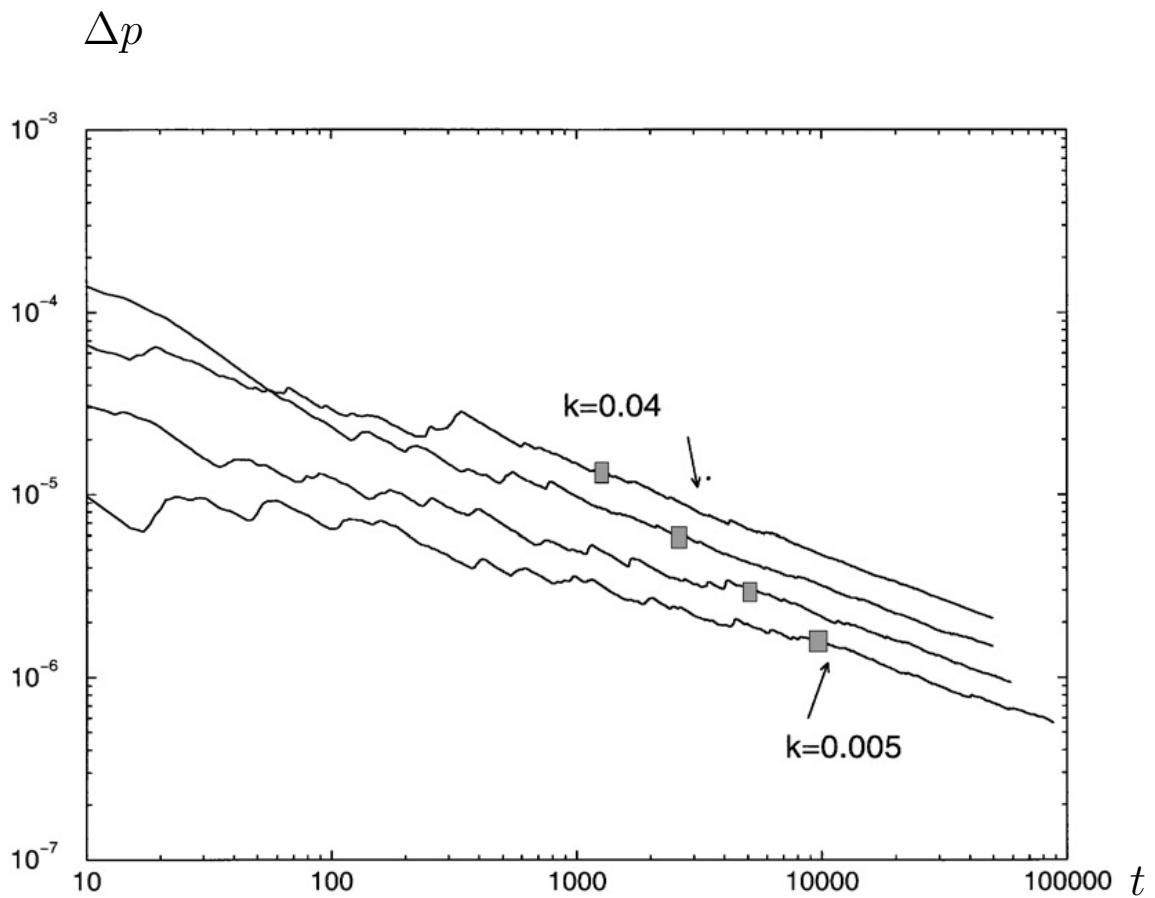


Figura 24: Gráficos do deslocamento quadrático médio, Δp , versus tempo t , para quatro valores diferentes de k : $k = 0.005$, $k = 0.01$, $k = 0.02$ e $k = 0.04$. Os quadrados vistos em cada gráfico indicam o instante em que a oscilação diminui drasticamente. O intervalo de tempo até este instante é denominado tempo de "alisamento". Fonte:(CORSO; MORAIS; LUCENA, 2003).

5.4 Análise de Fourier

As figuras 25 e 26 mostram os espectros para $k = 0.005$ e $k = 0.02$, respectivamente, usando os mesmos dados da figura 24.

Podemos ver dois regimes distintos a partir do espectro de Fourier, mostrados nas figuras 25 e 26: o espectro de potência é proporcional a $\frac{1}{f^\rho}$ para as frequências baixas, o que corresponde a um ruído do tipo marrom. O valor de ρ , para todos os k s, é aproximadamente igual a $1,6 \pm 0,2$. Por outro lado, o espectro de potência exibe ruído branco, com igual probabilidade para todas as frequências, quando os intervalos de tempo são maiores, ou seja, no limite para frequências muito baixas. O resultado obtido para o espectro de potência, neste caso, é compatível com a propriedade ergódica que afirma que todos os estados acessíveis de um sistema são visitados com a mesma probabilidade, quando consideramos intervalos de tempo muito grandes. Aqui, na análise corrente, as frequências são os "estados" aceitáveis do sistema.

Vamos interpretar este resultado à luz da Segunda Lei da Termodinâmica. Vimos que pequenas flutuações são impostas ao sistema pela própria regra de controle 5.6. Essas flutuações podem ser interpretadas como equivalendo a um banho térmico, para intervalos de tempo muito longos. Sob o ponto de vista termodinâmico, o sistema se comporta, em tal limite, como um sistema (quase) fechado, onde se espera existir ergodicidade e se aplica a Segunda Lei.

Per Bak, no seu artigo original sobre criticalidade auto-organizada (BAK; TANG; WIENFELD, 1987), obtém um espectro de potência do tipo ruído marrom para um modelo de avalanche, ao passo que Los Rios observa que uma versão dissipativa deste modelo, em dimensões maiores (RIOS; ZHANG, 1999), exibe uma combinação de ruído branco com ruído marrom.

Estudamos também o tempo de correlação, t_{cor} , associado à dinâmica do sistema. Para isso, definimos ω_{tr} como a frequência de transição entre o regime de ruído branco e o de ruído marrom. Definimos o tempo de correlação como sendo

$$t_{cor} \equiv \frac{2\pi}{\omega_{tr}}.$$

Este t_{cor} é então o intervalo de tempo ao longo do qual a dinâmica do sistema evolui de um comportamento correlacionado, descrito por $\frac{1}{f^\rho}$, para um não-correlacionado, correspondente ao ruído branco. Verificamos numericamente que o tempo de correlação,

amplitude
de potência

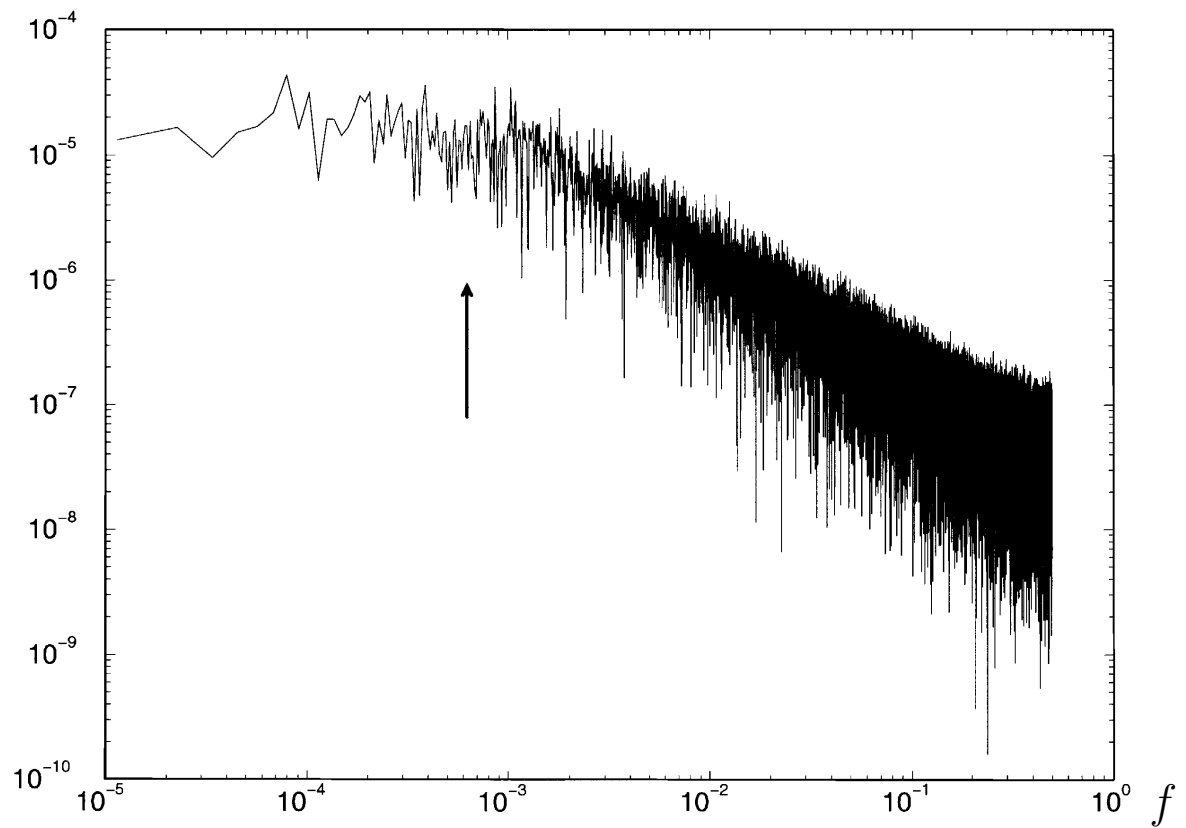


Figura 25: Gráfico do espectro de Fourier dos dados da figura 24, para $k = 0.005$. A figura exibe dois tipos de ruídos contíguos: a seta indica o ponto de transição do ruído marrom ($\frac{1}{f^\rho}$) para o ruído branco. Fonte:(CORSO; MORAIS; LUCENA, 2003).

*espectro
de potência*

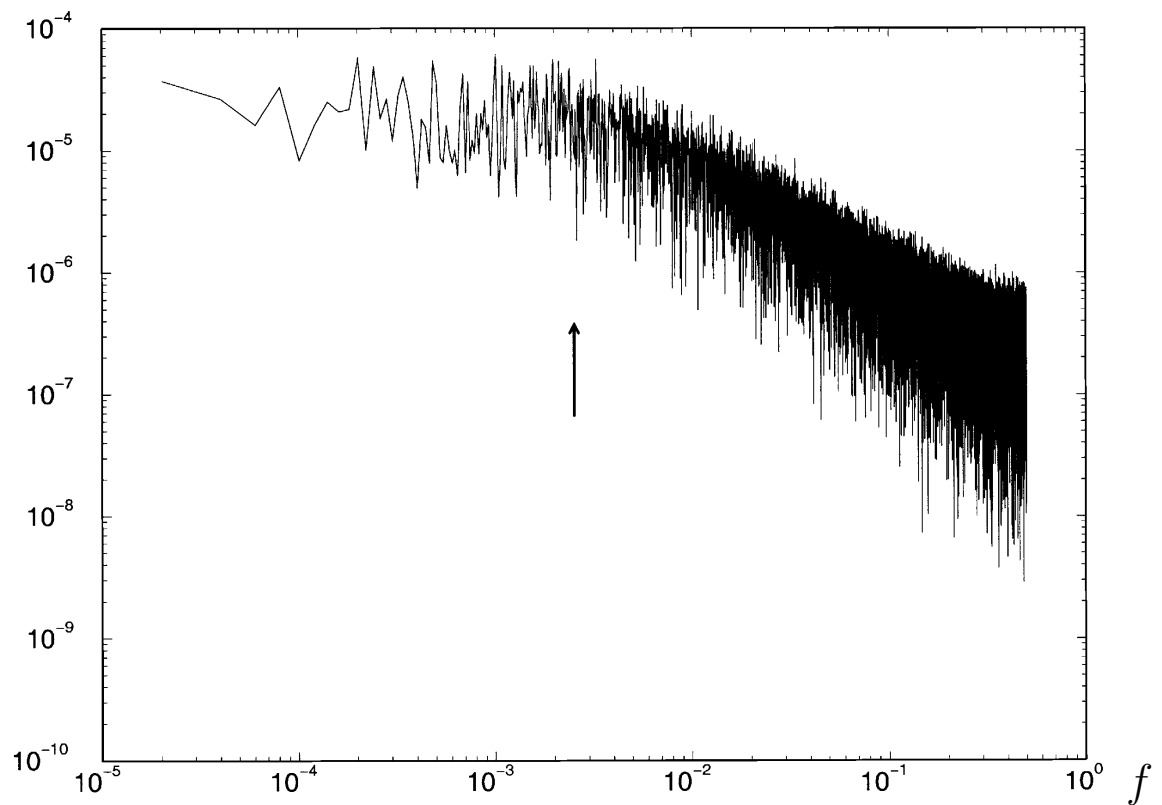


Figura 26: Gráfico do espectro de Fourier dos dados da figura 24, para $k = 0.02$. A figura também exibe dois tipos de ruídos contíguos: a seta indica o ponto de transição do ruído marrom ($\frac{1}{f^\rho}$) para o ruído branco. O valor estimado de ρ para este caso é o mesmo da figura 25: $\rho \approx 1,6 \pm 0,2$. Fonte:(CORSO; MORAIS; LUCENA, 2003).

t_{cor} , está associado ao tempo de "alisamento", t_{smt} , de tal forma que

$$t_{cor} \approx t_{smt}.$$

Isto poderia ter sido intuído por meio da inspeção da figura 24.

Vemos também que, depois da dinâmica do sistema perder sua correlação, o desvio Δp se torna "liso" e o sinal se torna mais "liso". Nas figuras 25 e 26, indicamos com setas a localização da frequência de transição, $\bar{\omega}_{tr}$, entre os regimes correlacionado e o não correlacionado. O valor de $\bar{\omega}_{tr}$ é dado por

$$\bar{\omega}_{tr} \equiv \frac{2\pi}{t_{smt}}.$$

A tabela 2 mostra alguns valores de t_{smt} para diferentes parâmetros cinéticos k , e os respectivos $\bar{\omega}_{tr}$.

5.5 Resumo e considerações finais

Apresentamos, neste capítulo, uma análise da regra de controle, baseada no método de busca automática, usada no modelo de percolação por sítios em uma rede quadrada. Fazendo uma aproximação do método de busca automática como sendo um sistema dinâmico, fizemos um estudo das suas propriedades.

Por meio do teste de condições iniciais diversas, mostramos que o método é robusto e bem comportado.

Derivamos um mapa que descreve localmente a dinâmica do sistema e obtivemos, a partir dele, um escalonamento temporal característico. Como o mapa é inversível, o sistema não desenvolve caos. Por outro lado, o método de busca automática não converge assintoticamente para p_c , pois o mapa tem um ponto fixo (o próprio ponto crítico p_c) que é hiperbólico.

Verificamos que existe um intervalo de tempo transiente τ , que escala como $\tau \propto \frac{1}{k}$, ao longo do qual o sistema evolui ao ponto crítico. O mesmo escalonamento é encontrado para o intervalo de tempo necessário para que o sistema perca suas correlações: $t_{cor} \propto \frac{1}{k}$.

O sistema apresenta duas escalas temporais distintas depois do tempo transiente: na primeira, o espectro de Fourier mostra um ruído marrom típico, $\frac{1}{f^\rho}$, e o sistema é fortemente correlacionado. Na segunda escala temporal, o espectro de Fourier exibe um

ruído branco, indicando que o sistema perdeu a correlação.

Se considerarmos intervalos de tempo muito longos, verificamos que a dinâmica do sistema, modelado como sendo criticamente auto-organizado, passa a ser dominada pelo ruído branco e o sistema se comporta, desta forma, como um sistema ergódico.

6 Considerações Finais

Os dois estudos realizados exibem boas possibilidades de desdobramentos futuros.

A caracterização da autosimilaridade de um sinal biológico, como foi feita aqui para o ruído de crepitação pulmonar, pode servir no futuro como parte do extenso instrumental que usa o método *MMTW* no diagnóstico de enfermidades. Outras séries temporais associadas a processos biológicos, tais como o eletroencefalograma (POLONNIKOV; WASSERMAN; KARTASHEV, 2003; SONG et al., 2005; SLEZIN, 2007) já foram caracterizadas como multifractais cujo espectro de singularidades se altera no decorrer do desenvolvimento cerebral e na presença de enfermidades como epilepsia e esquizofrenia. Uma extensa bibliografia também existe para o uso do *MMTW* no eletrocardiograma (KRIMI; OUNI; ELLOUZE, 2006; MA et al., 2005), onde também se observou que existem relações entre as alterações patológicas do coração e a mudança de fractalidade dos pulsos bioelétricos cardíacos.

A parede torácica, composta por músculos, costelas e pele, funciona como uma espécie de "filtro passa baixa" do ruído de crepitação pulmonar, atenuando muito a intensidade dos ruídos mais agudos. Isto implica que, para a análise de autossimilaridade do ruído de crepitação pulmonar passar a fazer parte do instrumental médico a que me referi no parágrafo anterior, será necessário desenvolver equipamentos de gravação do ruído, externamente à caixa torácica, que sejam capazes de captar as frequências mais altas e ampliá-las de modo adequado. Pesquisas neste sentido já estão sendo feitas por Adriano Alencar.

Outra frente de pesquisa ainda em aberto é o uso do *MMTW* para estudo de imagens histológicas. Os tumores, benignos ou não, que acometem um determinado órgão possuem características histológicas que dependem do tipo de tumor e do estágio de evolução do mesmo. A análise estatística e da fractalidade das lâminas histológicas destes tumores pode se tornar uma excelente ferramenta auxiliar no diagnóstico e tratamento do câncer.

A respeito do estudo da evolução dinâmica do modelo de percolação, ainda podemos investigar o que ocorre quando consideramos a percolação em rede quadrada em ambas

as direções (vertical e horizontal) ao mesmo tempo, um problema que está relacionado à simetria do sistema. Também pode ser investigada a evolução dinâmica da percolação por sítios em uma rede quadrada de suporte multifractal, um problema em que os sítios constituintes do sistema não têm um número fixo de sítios vizinhos.

No mesmo estudo da evolução dinâmica de um modelo de percolação, seria interessante verificar o que ocorre com o mesmo se a regra de controle incluir um parâmetro de amortecimento. Tal investigação seria motivada pela similaridade que o nosso estudo tem com a dinâmica de um oscilador. Neste, à medida que o sistema se afasta da posição de equilíbrio, surge uma força restauradora que se opõe a este afastamento, atuando como uma retro-alimentação negativa. Isto faz com que o sistema oscile na vizinhança da posição de equilíbrio. Observamos que no nosso estudo do modelo de percolação, depois de chegar à vizinhança do ponto crítico, a regra de controle que utilizamos atua sobre o sistema funcionando do mesmo modo que a força restauradora no oscilador, fazendo com que o sistema oscile em torno do ponto crítico.

Referências

- ALENCAR, A. M.; ANDRADE, J. S.; LUCENA, L. S. Self-organized percolation. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 56, n. 3, p. R2379–R2382, Sep 1997.
- ALENCAR, A. M. et al. Avalanche dynamics of crackle sound in the lung. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 87, n. 8, p. 088101, Aug 2001.
- ALENCAR, A. M. et al. Scaling behavior in crackle sound during lung inflation. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 60, n. 4, p. 4659–4663, Oct 1999.
- ALLEN J.B.; RABINER, L. A unified approach to short-time fourier analysis and synthesis. *Proceedings of the IEEE*, v. 65, n. 11, p. 1558–1564, Nov. 1977. ISSN 0018-9219.
- ALLIGOOD, K.; SAUER, T.; YORKE, J. *Chaos, An Introduction to Dynamical Systems*. 1. ed. New York: Springer, 1997.
- ANDRADE, J. S. et al. Self-organization in growth of branched polymers. *Physica A: Statistical and Theoretical Physics*, v. 238, n. 1-4, p. 163–171, abr. 1997.
Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TVG-3SPGWM7-3G/2/74c128c35b6e3b8c55a5e8a43809547b>>.
- ARNEODO, A.; BACRY, E.; MUZY, J. F. Wavelets in physics. In: _____. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1999. cap. The Thermodynamics of Fractals Revisited With Wavelets, p. 339–390. ISBN 0-521-59311-5.
- BAK, P.; TANG, C.; WIESENFELD, K. Self-organized criticality: An explanation of the $1/f$ noise. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 59, n. 4, p. 381–384, Jul 1987.
- BANQUET, J. P. Spectral analysis of eeg in meditation. *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, The Netherlands, v. 35, p. 143–151, 1973.
- BROADBENT, S. R.; HAMMERSLEY, J. M. Percolation processes. I. Crystals and mazes . *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, v. 53, p. 629–641, fev. 1957.
- BROWN, R.; BRAIN, J.; WANG, N. The avian respiratory system: a unique model for studies of respiratory toxicosis and for monitoring air quality. *Environ Health Perspect*, v. 105, n. 2, p. 188–200, 1997.
- BUNDE, A.; HAVLIN, S. *Fractals and disordered systems*. Secaucus, NJ, USA: Springer-Verlag New York, Inc., 1995. ISBN 3-540-56219-2.

CAIN, M. et al. Fast-Fourier transform analysis of signal-averaged electrocardiograms for identification of patients prone to sustained ventricular tachycardia. *Circulation*, v. 69, n. 4, p. 711–720, 1984. Disponível em: <<http://circ.ahajournals.org/cgi/content/abstract/69/4/711>>.

CONT, R.; POTTERS, M.; BOUCHAUD, J.-P. *Scaling in stock market data: stable laws and beyond*. [S.l.], maio 1997. Available at <http://ideas.repec.org/p/sfi/sfiwpa/9705087.html>.

CORSO, G.; MORAIS, E. S. B. de; LUCENA, L. S. Dynamical evolution of a self-organized-critical percolation model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 320, p. 110–118, mar. 2003. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TVG-479VD5K-3/2/1496ab89fe1f01de709404d352c79278>>.

DÖRFLER, M. Time-frequency analysis for music signals: A mathematical approach. *Journal of New Music Research*, v. 30, n. 1, p. 3–12, 2001.

EDGAR, G. *Integral, Probability, and Fractal Measures*. [S.l.]: Springer, 1998.

FILHO, R. et al. Scaling behavior in a proportional voting process. *Physical Review E*, APS, v. 60, n. 1, p. 1067–1068, 1999.

FLORY, P. J. *Journal of American Chemical Society*, v. 63, p. 3083 – 3096, 1941.

FREITAS, J. de et al. Critical behavior of a two-species reaction-diffusion problem. *Physical Review E*, APS, v. 61, n. 6, p. 6330–6336, 2000.

FULCO, U. L.; LUCENA, L. S.; VISWANATHAN, G. M. Efficient search of critical points in ising-like systems. *Physica A: Statistical and Theoretical Physics*, v. 264, n. 1-2, p. 171–179, fev. 1999. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TVG-3VS21PG-D/2/11038f25caecbcabaeccd2c3c389a635>>.

FULCO, U. L. et al. Efficient search method for obtaining critical properties. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 284, n. 1-4, p. 223–230, set. 2000. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TVG-40WDX23-R/2/06ee7e2ecfdc6e3f11b0530449d0c0fa>>.

FULCO, U. L. et al. Investigation of critical properties in the two-dimensional site-diluted ising ferromagnet. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 297, n. 1-2, p. 131–141, ago. 2001. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TVG-43DKHNS-C/2/b92764bbab3aa3d3a383449dfa28b0b7>>.

GOUPILLAUD, P.; GROSSMANN, A.; MORLET, J. Cycle-octave and related transforms in seismic signal analysis. *Methods in geochemistry and geophysics*, Elsevier, v. 22, n. 4, p. 85–109, 1984.

GRASSBERGER, P. Generalizations of the Hausdorff dimension of fractal measures. *Physics Letters A*, v. 107, n. 3, p. 101–105, 1985.

- GROSSMANN, A.; MORLET, J. Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, SIAM, v. 15, n. 4, p. 723–736, 1984. Disponível em: <<http://link.aip.org/link/?SJM/15/723/1>>.
- HALSEY, T. et al. Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets. *Physical Review A*, APS, v. 33, n. 2, p. 1141–1151, 1986.
- JAFFARD, S. Pointwise smoothness, two-microlocalization and wavelets coefficients. *Publicacions Matemàtiques*, v. 35, p. 155–168, 1991.
- KANTELHARDT, J. W. et al. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A Statistical Mechanics and its Applications*, v. 316, p. 87–114, dez. 2002.
- KARAFYLLIDIS, I.; THANAILAKIS, A. A model for predicting forest fire spreading using cellular automata. *Ecological Modelling*, Elsevier, v. 99, n. 1, p. 87–97, 1997.
- KIDO, S. et al. Fractal analysis of interstitial lung abnormalities in chest radiography. *Radiographics*, v. 15, n. 6, p. 1457–64, 1995.
- KIDO, S. et al. Fractal analysis of small peripheral pulmonary nodules in thin-section CT: evaluation of the lung-nodule interfaces. *J Comput Assist Tomogr*, v. 26, n. 4, p. 573–8, 2002.
- KRIMI, S.; OUNI, K.; ELLOUZE, N. T-Wave Detection Based on an Adjusted Wavelet Transform Modulus Maxima. *International Journal of Biomedical Sciences*, v. 1, p. 128–132, 2006.
- LEATH, P. L. Cluster size and boundary distribution near percolation threshold. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 14, n. 11, p. 5046–5055, Dec 1976.
- LICHTENBERG, A.; LIEBERMAN, M. *Regular and Stochastic Motion*. New York, U.S.A.: Springer, 1983. (Applied Mathematical Sciences, v. 38).
- LOGUE, D. E.; SWEENEY, R. J. White-noise' in imperfect markets: The case of the frac/dollar exchange rate. *The Journal of Finance*, v. 32, n. 3, p. 761–768, Jun 1977.
- LUCENA, L. et al. Ramified polymerization in dirty media: A new critical phenomenon. *Physical Review Letters*, APS, v. 72, n. 2, p. 230–233, 1994.
- LUCENA, L.; SILVA, L. da; ROUX, S. Scaling and disordered systems. In: _____. Singapore: World Scientific, 2002. cap. Roughening transition in branching polymer, p. 29–36.
- MA, Q. et al. Sleep-stage Characterization by Nonlinear EEG Analysis using Wavelet-based Multifractal Formalism. *Engineering in Medicine and Biology Society, 2005. IEEE-EMBS 2005. 27th Annual International Conference of the*, p. 4526–4529, 2005.
- MAJUMDAR, A. et al. Characterization of the branching structure of the lung from “macroscopic” pressure-volume measurements. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 87, n. 5, p. 058102, Jul 2001.

- MALLAT, S. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. San Diego, CA, USA: Academic Press, 2001. ISBN 0-12-466606-X.
- MALLAT, S. G.; HWANG, W. L. Singularity detection and processing with wavelets. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 38, n. 2, p. 617–643, mar 1992. Disponível em: <citeseer.ist.psu.edu/article/mallat92singularity.html>.
- NELSON, T.; MANCHESTER, D. Modeling of lung morphogenesis using fractal geometries. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, v. 7, n. 4, p. 321–327, 1988.
- NEWMAN, M. Spread of epidemic disease on networks. *Physical Review E*, APS, v. 66, n. 1, p. 16128, 2002.
- NEWMAN, M. E. J.; ZIFF, R. M. Efficient monte carlo algorithm and high-precision results for percolation. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 85, n. 19, p. 4104–4107, Nov 2000.
- OŚWIĘCIMKA, P.; KWAPIEŃ, J.; DROŹDŹ, S. Wavelet versus detrended fluctuation analysis of multifractal structures. , v. 74, n. 1, p. 016103–+, jul. 2006.
- POLONNIKOV, R.; WASSERMAN, E.; KARTASHEV, N. Regular developmental changes in EEG multifractal characteristics. *International Journal of Neuroscience*, Informa Healthcare, v. 113, n. 11, p. 1615–1639, 2003.
- RIOS, P. D. L.; ZHANG, Y.-C. Universal $1/f$ noise from dissipative self-organized criticality models. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 82, n. 3, p. 472–475, Jan 1999.
- SAHIMI, M. *Applications of Percolation Theory*. 4 John St., London, England: Taylor & Francis, 1994. ISBN 0748400761.
- SILVA, P. C. d. et al. Recursive-search method for ferromagnetic ising systems: combination with a finite-size scaling approach. *Brazilian Journal of Physics*, scielo, v. 32, p. 617 – 623, 06 2002. ISSN 0103-9733. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-97332002000300024nrm=iso>.
- SLEZIN, V. Multifractal analysis as an aid in the diagnostics of mental disorders. *Nordic Journal of Psychiatry*, Informa Healthcare, v. 61, n. 5, p. 339–342, 2007.
- SONG, I. et al. Mutifractal analysis of electroencephalogram time series in humans. *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, v. 3512, p. 921–926, 2005.
- STAUFFER, D. *Introduction to Percolation Theory*. 1. ed. London: Taylor and Francis, 1985.
- STOCKMEYER, W. H. Theory of Molecular Size Distribution and Gel Formation in Branched-Chain Polymers . *Journal of Chemical Physics*, v. 11, p. 45–55, fev. 1943.
- TAVARES, D.; LUCENA, L. Entropy analysis of stochastic processes at finite resolution. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 357, n. 1, p. 71–78, 2005.

WEIBEL, E. Fractal geometry: a design principle for living organisms. *American Journal of Physiology- Lung Cellular and Molecular Physiology*, Am Physiological Soc, v. 261, n. 6, p. 361–369, 1991.

WILKINSON, D.; WILLEMSSEN, J. F. Invasion percolation: a new form of percolation theory . *Journal of Physics A Mathematical General*, v. 16, p. 3365–3376, out. 1983.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)