Existência, Unicidade e Decaimento Exponencial das Soluções da Equação de Korteweg-de Vries com Dissipação Localizada

Julián Moises Sejje Suárez

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática da Universidade Federal de Rio de Janeiro, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática

Rio de Janeiro

15 de agosto de 2006

Existência, Unicidade e Decaimento Exponencial das Soluções da Equação de Korteweg-de Vries com Dissipação Localizada

Julián Moises Sejje Suárez

Orientador: Ademir Fernando Pazoto

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática da Universidade Federal de Rio de Janeiro, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática

Aprovada por:

Presidente Prof. Ademir Fernando Pazoto - IM/UFRJ

Prof. Felipe Linares - IMPA

Prof. Gustavo Perla Menzala - IM/UFRJ

Rio de Janeiro

15 de agosto de 2006

Agradecimentos

A Deus que não cessou de interceder por mim.

Aos meus pais e meus irmãos pelos valores que me ensinaram, pelo apoio e compreensão.

Aos meus amigos pela seriedade que tiveram nas horas de estudo e pelas alegrias nos momentos de descontração que deixaram belas lembranças.

A todos os professores que estiveram presentes na minha formação, pelos ensinamentos, críticas, conselhos e incentivo.

À CAPES pelo apoio financeíro.

Ao meu orientador e amigo Professor Ademir Fernando Pazoto, pela forma como conduziu este trabalho, pelo apoio, incentivo e pela maneira como me ensinou.

Resumo

Este trabalho é dedicado ao estudo do decaimento exponencial da energia associada à equação de Korteweg-de-Vries num intervalo limitado com uma dissipação localizada . Combinando estimativas de energia, técnicas multiplicativas e argumentos de compacidade o problema é reduzido a provar a continuação única de soluções fracas. No caso em que a solução se anula numa vizinhança de ambos extremos do intervalo limitado onde equação é satisfeita, o problema é resolvido combinando um resultado de regularidade provado por T. Kato em [4] e resultados de continuação única para soluções regulares provados por J. C. Saut e B. Sheurer em [17].

Neste trabalho estudamos o caso geral e provamos a propriedade de continuação única em dois passos: primeiro, usando técnicas multiplicativas, mostramos que as soluções que se anulam em qualquer subintervalo de $(0, L)$ são necessariamente regulares. Então, aplicamos os resultados de continuação única para soluções regulares provados por J.C.Saut and B.Sheurer.

Abstract

This work is devoted to prove the exponential decay for the energy of solutions of the Korteweg-de Vries equation in a bounded interval with a localized damping term. Combining energy estimatives, multipliers and compactness arguments the problem is reduced to prove the unique continuation of weak solutions. The case where solutions vanish on a neighborhood of both extremes of the bounded interval where equation holds is solved combining a smoothing result by T. Kato [4] and results of unique continuation of smooth solutions by J. C. Saut and B. Scheurer [17].

In this work we study the general case and prove the unique continuation property in two steps: we first prove, using multipler techniques, that solutions vanishing on any subinterval are necessarilly smooth. We then apply the existing results on unique continuation of smooth solutions by J. C. Saut and B. Sheurer.

Sumário

Introdução

Este trabalho é dedicado ao estudo da Propriedade de Continuação Única (PCU) e do decaimento exponencial das soluções da equação de Korteweg-de Vries (KdV) num intervalo limitado com a presença de uma dissipação localizada:

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + uu_x + a(x)u = 0, & em\ \Omega \times (0,T) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \in (0,T) \\ u_x(L,t) = 0, & t \in (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Ao longo deste trabalho assumiremos que $\Omega = (0,L)$ e que a função $a = a(x)$ satisfaz

$$\begin{cases} a \in L^\infty(\Omega)\ e\ a(x) \geq a_0 > 0\ q.s.\ em\ \omega, \\ onde\ \omega\ \text{é um subconjunto aberto não vazio de}\ \Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Note que, multiplicando a equação (1) por u e integrando em Ω, obtemos

$$\frac{dE}{dt} = -\int_0^L a(x)\,|u(x,t)|^2\,dx - \frac{1}{2}\,|u_x(0,t)|^2\,, \tag{3}$$

onde

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L |u(x,t)|^2\,dx. \tag{4}$$

Isto indica que os termos $a(x)u$ e $u_x(0,t)$ desempenham o papel de um mecanismo de controle. Consequentemente, $E(t)$ é uma função não crescente e uma taxa decaimento das soluções é esperado.

A equação de Korteweg-de Vries foi deduzida em [6] como um modelo para a propagação de ondas ao longo de um canal de aguas pouco profundas: Sua forma original é

$$\eta_t = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}(\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{2}{3}\alpha\eta + \frac{1}{3}\sigma\eta_{xx})_x \tag{5}$$

onde η é a elevação da superfície acima do nível de equilíbrio, l, α são constantes relacionadas ao movimento uniforme do líquido, g é a constante gravitacional e $\sigma = \frac{l^3}{3} - \frac{Tl}{\rho g}$ onde ρ é a densidade e T a tensão da superfície. É o primeiro modelo para o qual "solitions"explícitos foram encontrados. Atualmente, sabe-se que a equação (5) não é somente um bom modelo para ondas de água, mas também um modelo muito útil em estudos nos quais se deseja incluir o equilíbrio não linear fraco e efeitos dispersivos. Em particular, tal equação é aceita como um modelo matemático para propagação, em uma única direção, de ondas longas de pequena amplitude em sistemas dispersivos não lineares. Nessas aplicações, a incógnita é, tipicamente, a amplitude ou velocidade, x é, freqüentemente, proporcional à distancia e t é proporcional ao tempo passado.

O problema de decaimento exponencial está intimamente relacionado com o problema de controlabilidade. Em [16] Rosier provou que quando $a \equiv 0$ a equação linear correspondente pode ser controlada introduzindo um controle singular no bordo, a menos que

$$L \in \mathfrak{E} = \{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{k^2 + kl + l^2}, k, l \in \mathbb{N}\}. \tag{6}$$

Por outro lado, o problema de decaimento exponencial de $E(t)$ pode ser colocado da seguinte forma: Encontrar $T > 0$ e $C > 0$, tal que

$$E(0) \leq C\int_0^T [\int_0^L a(x)u^2(x,t)dx + u_x^2(0,t)]dt \tag{7}$$

se verifica para toda solução de energia finita de (1). Os valores críticos de L definidos em (6) são tais que, há autovalores do problema linear para os quais

(7) não se verifica quando $a \equiv 0$. Nos contexto do problema de estabilização, tais autovalores correspondem às soluções que, quando $a \equiv 0$, não decaem.

De fato, de (7) e (3), temos que $E(t) \leq \gamma E(0)$, com $0 < \gamma < 1$, o que combinado com a propriedade de semigrupo associados ao modelo nos permite obter o decaimento exponencial de $E(t)$. Este trabalho é dedicado a analisar este problema.

As técnicas que serão utilizadas seguem de perto as técnicas multiplicativas desenvolvidas em [16] para a análise de propriedades de controlabilidade. Porém, ao usar multiplicadores, a não linearidade introduz termos que, neste trabalho, serão controladas usando argumentos de compacidade. Na realidade, o problema de obter (7) é reduzido a mostrar que a solução única de (1), tal que, $a(x)u = 0$ e $u_x(0,t) = 0$ para todo tempo t, deve ser a solução trivial, ou seja, $u \equiv 0$.

Este problema pode ser visto como um problema de continuação única já que $au = 0$ implica que $u = 0$ em $\{a > 0\} \times (0,T)$. Porém, os resultados de continuação única existentes (veja [17]) não são aplicáveis diretamente às soluções com as que queremos trabalhar; ou seja; com dados iniciais em $L^2(\Omega)$. Quando ω contém uma vizinhança de ambos extremos $x = 0, L$, o problema pode ser resolvido em dois passos: primero, estendendo a solução por zero fora do conjunto Ω, podemos construir uma solução de suporte compacto (em x) do problema de Cauchy para a equação de KdV na reta toda. Então, aplicamos as propriedades regularizantes clássicas [4, 7], mostrando que as soluções são regulares. Isto permite aplicar o resultado de continuação única de [20] para soluçõ es regulares e concluir que $u \equiv 0$.

Quando ω não possui a propriedade acima, i.e., quando ω não contém uma vizinhança de ambos extremos $x = 0, L$ este argumento não pode ser aplicado. Por conseguinte, temos que melhorar a regularidade da solução trabalhando dentro do intervalo limitado Ω já que os resultados existentes de continuaç ão única para a equação de KdV (veja [17, 21]) requerem que a solução u esteja em $L^\infty(0,T,H^s(\Omega))$ com $s > 3/2$, e no nosso caso, $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Nesse caso, a estratégia de ganho de regularidade é a seguinte: inicialmente, diferenciamos a equação em (1) com respeito a t e analisamos a regularidade de $v = u_t$, a qual é uma solução de

$$\begin{cases} v_t + v_x + v_{xxx} + (u(x,t)v)_x + a(x)v = 0, & em\ \Omega \times (0,T) \\ v(0,t) = v(L,t) = 0 \quad t \in (0,T) \\ v_x(L,t) = 0 \quad t \in (0,T) \\ v(x,0) = v_0 \quad x \in \Omega \end{cases} \tag{8}$$

onde $u \in L^2(0,T,H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$ é a solução fraca de (1) e $v_0 = v(x,0) = u_t(x,0)$ em $H^{-3}(\Omega)$. Claro que, se $u \equiv 0$ em $\omega \times (0,T)$, $v \equiv 0$ em $\omega \times (0,T)$.

Observe que o modelo anterior (8) pode ser visto como um equação linearizada da KdV. Assim, inspirado pelo trabalho de Rósier em [15], procederemos como no caso linear, i.e., combinando técnicas de multiplicativas e o argumento de "Compacidade-Unicidade"(veja [22]) que é útil para controlar os termos extras que o "potencial"$u(x,t)$ produz. Isto nos permite provar que $v \equiv 0$ em $\omega \times (0,T)$ nos dá $v \in L^2(0,T,H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$. Isso nos garante a regularidade necessária para u, a fim de aplicar os resultados de continuação única obtidos em [17].

Observe que o ganho de regularidade vem do fato que $v \equiv 0$ em $\omega \times (0,T)$, pois em princípio $v_0 \in H^{-3}(\Omega)$. Claro que, no final, acabamos mostrando que $v \equiv 0$ em $\Omega \times (0,T)$, mas estes pasos intermediários de ganho de regularidade desempenham um papel central no argumento.

A análise descrita acima foi dividida em quatro partes:

No **Capítulo 1** apresentamos os resultados clássicos que serão utilizados no desenvolvimento deste trabalho.

No **Capítulo 2** mostramos a existência, unicidade e o decaimento exponencial do modelo linear associado a (1) em dois casos:

- $a \equiv 0$ e $L \notin \mathfrak{E} = \{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{k^2 + kl + l^2}, k, l \in \mathbb{N}\}$.
- $a > 0$ satisfazendo (2).

No **Capítulo 3** estudamos a existencia, unicidade, decaimento exponencial e a (PCU) para o modelo (1) em duas situações:

- $a > 0$ satisfazendo (2)
- $\|u\|_{\mathfrak{L}(L^2(\Omega))} < 1$

No **Apêndice** provamos um resultado de continuação única para $\omega = (0, \delta) \cup (L - \delta, L)$, com $\delta > 0$ suficientemente pequeno.

Em todos os casos, a existência será demonstrada via Teoria de Semigrupos, combinando com um argumento de ponto fixo no caso não linear.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Nesta seção, daremos algums resultados que serão usados durante o desenvolvimento do trabalho .

1.1 Distribuições

Seja u uma função real definida em $\Omega \subset \mathbb{R}$, u mesurável, e seja $(O_i)_{i\in I}$ a família de todos os subconjuntos abertos O_i de Ω, tais que $u = 0$ quase sempre em O_i. Considera-se o subconjunto aberto $O = \cup_{i\in I} O_i$. Então, $u = 0$ quase sempre em O, como conseqüência, define-se o suporte de u que será denotado por *supp* u, como sendo o subconjunto fechado de Ω

$$supp(u) = \Omega / O$$

Definição 1.1.1. *Representamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ cujas derivadas parciais de todas as ordens são contínuas e cujo suporte é um subconjunto compacto de Ω. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são chamados de funções testes .*

Naturalmente, $C_0^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações usuais de soma de funções e de multiplicação por um escalar.

Noção de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Definição 1.1.2. *Sejam $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $C_0^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dizemos que $\varphi_k \longrightarrow \varphi$ se:*

1) $\exists K \subset \Omega, K$ compacto, tal que supp$\varphi_k \subset K$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

2) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}, D^\alpha\varphi_k(x) \longrightarrow D^\alpha\varphi(x)$ uniformemente em Ω.

Definição 1.1.3. *O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência definida acima é denotada por $\mathfrak{D}(\Omega)$ e chamado espaço das funções testes.*

Definição 1.1.4. *Uma distribuição sobre Ω é um funcional linear definido em $\mathfrak{D}(\Omega)$ e contínuo em relação à noção de convergência definida em $\mathfrak{D}(\Omega)$.*

O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é denotado por $\mathfrak{D}'(\Omega)$. Desse modo,

$$\mathfrak{D}'(\Omega) = \{T : \mathfrak{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K} \text{ e linear e contínuo}\}$$

Observemos que $\mathfrak{D}'(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Se $T \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ e $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ denotaremos por $\langle T, \varphi\rangle$ o valor de T aplicado ao elemento φ

Noção de convergência em $\mathfrak{D}'(\Omega)$

Definição 1.1.5. *Dizemos que $T_k \longrightarrow T$ em $\mathfrak{D}'(\Omega)$ se $\langle T_k, \varphi\rangle \longrightarrow \langle T, \varphi\rangle$, para toda $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$.*

1.2 Espaços $L^p(\Omega)$

Neste trabalho, as integrais realizadas sobre Ω são no sentido de Lebesgue, assim como a mesurabilidade das funções envolvidas.

Definição 1.2.1. *Sejam Ω um conjunto mesurável e $1 \leq p \leq \infty$. Indicamos por $L^p(\Omega)$ ao conjunto das funções mesuráveis $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ tais que $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$, onde*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \quad se\ 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = supess_{x \in \Omega} |f(x)| = inf\{C : |f| \leq C \ quase\ sempre\}.$$

Os espaços $L^p(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$, são espaços de Banach, sendo $L^2(\Omega)$ um espaço de Hilbert com o produto interno usual da integral. Além disso, para $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ é reflexivo.

Teorema 1.2.1. *$C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$*

Demonstração. Ver [2]. □

Teorema 1.2.2. *(Interpolação dos espaços $L^p(\Omega)$). Sejam $1 \leq p < q \leq \infty$. Se $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, então $f \in L^r(\Omega)$ para todo $r \in [p, q]$. Além disso,*

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^{\alpha} \|f\|_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha}$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$ tal que $\dfrac{1}{r} = \alpha\dfrac{1}{p} + (1-\alpha)\dfrac{1}{q}$.

Demonstração. Ver [2]. □

Definição 1.2.2. *Sejam Ω um aberto do espaço $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$. Indicamos por $L^p_{loc}(\Omega)$ o conjunto das funções mesuráveis $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $fX_k \in L^p(\Omega)$, para todo K compacto de Ω, onde X_k é a função característica de K.*

Observação 1.2.1. *$L^p_{loc}(\Omega)$ é chamado o espaço das funções localmente integráveis.*

Para $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ consideramos o funcional $T = T_u : \mathfrak{D}(\Omega) \longrightarrow K$ definido por:

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx,$$

que define uma distribuição sobre Ω*.*

Lema 1.2.1. *(Du Bois Reymond). Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$*. Então,* $T_u = 0$ *se, e somente se,* $u = 0$ *quase sempre em* Ω*.*

Observação 1.2.2. *Como consequência do Lema 1.2.1, a aplicação*

$$\begin{array}{rcl} L^1_{loc}(\Omega) & \longrightarrow & \mathfrak{D}'(\Omega) \\ u & \longrightarrow & T_u \end{array}$$

é linear, contínua e injetiva. Em decorrência disso, é comum identificar a distribuição T_u *com a função* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$*. Nesse sentido, tem-se que* $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathfrak{D}'(\Omega)$*. Como* $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ *temos que toda função de* $L^p(\Omega)$ *define uma distribuição sobre* Ω*, isto é, toda função de* $L^p(\Omega)$ *pode ser vista como uma distribuição.*

Definição 1.2.3. *Sejam* $T \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ *e* $\alpha \in \mathbb{N}$*. A derivada de ordem* α *de* T*, denotada por* $D^\alpha T$*, é definida por:*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^\alpha \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

Com esta definição, tem-se que se $u \in C^k(\Omega)$ então $D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u}$, para todo $\alpha \leq k$, onde $D^\alpha u$ indica a derivada clássica de u. Se $T \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ então, $D^\alpha T \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}$.

1.3 Espaços Sobolev

Os resultados que enunciaremos, assim como suas demostrações, podem ser encontrados em [1] e [2].

Definição 1.3.1. *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$. Indicaremos por $W^{m,p}(\Omega)$ o conjunto de todas as funções u de $L^p(\Omega)$ tais que para todo $\alpha \leq m$, $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ sendo $D^\alpha u$ a derivada distribucional de u. $W^{m,p}(\Omega)$ é chamado Espaço de Sobolev de ordem m relativo ao espaço $L^p(\Omega)$. Resumidamente,*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \alpha \leq m\}.$$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$,

$$\|u\|_{m,p} = (\textstyle\sum_{\alpha \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)})^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{m,\infty} = \textstyle\sum_{\alpha \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

definem uma norma sobre $W^{m,p}(\Omega)$.

Observação 1.3.1.

1. *$(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$ é um espaço de Banach.*

2. *Quando $p = 2$ o espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ torna-se um espaço de Hilbert com o produto interno dado por*

$$(u, v)_{W^{m,2}(\Omega)} = \textstyle\sum_{\alpha \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} \quad u, v \in W^{m,2}(\Omega).$$

3. *Denota-se $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$.*

4. *$H^m(\Omega)$ é reflexivo e separável.*

Definição 1.3.2. *Definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.*

Observação 1.3.2.

1. *Quando $p = 2$ escreve-se $H_0^m(\Omega)$ em lugar de $W_0^{m,p}(\Omega)$.*

2. *Se* $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$ *o complemento de* Ω *em* $\mathbb{R}^n$ *possui medida de Lebesgue igual a zero.*

3. $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

4. *O dual topológico de* $H_0^m(\Omega)$ *é representado por* $H^{-m}(\Omega)$.

1.4 Imersões de Sobolev

Teorema 1.4.1. *(Teorema de Sobolev). Sejam* $m \geq 1$ *e* $1 \leq p < \infty$*:*

1. *se* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0$, *então* $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$; $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$.

2. *se* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = 0$, *então* $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$; $q \in [p, \infty)$.

3. *se* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} < 0$, *então* $W^{m,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$*;*

sendo as imersões acima contínuas.

Teorema 1.4.2. *(Teorema de Rellich). Seja* Ω *um subconjunto aberto e limitado de* $\mathbb{R}^n$ *com fronteira suave. Então, a imersão* $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ *é compacta.*

Observação 1.4.1. *Como consequência do Teorema de Rellich, tem-se que a imersão do espaço* $H_0^1(\Omega)$ *no espaço* $L^2(\Omega)$ *é compacta; e como corolário do mesmo, tem-se que a imersão de* $H^2(\Omega)$ *no espaço* $H^1(\Omega)$ *é compacta.*

1.5 Interpolação de Espaços Sobolev

Os resultados que enunciaremos, assim como suas demonstrações, podem ser encontrados em [9].

Sejam X e Y dois espaços de Hilbert separáveis, com imersão contínua e densa, $X \hookrightarrow Y$. Sejam $(\ , \ )_X$ e $(\ , \ )_Y$ os produtos internos de X e Y, respectivamente.

Indicaremos por $D(S)$, o conjunto de todas as funções u's definidas em X, tal que a aplicação $v \longrightarrow (u,v)_X$, $v \in X$ é contínua na topologia induzida por Y. Então, $(u,v)_X = (Su,v)_Y$ define S, como sendo um operador ilimitado em Y com domínio $D(S)$, denso em Y.

S é um operador auto-adjunto e estritamente positivo. Usando a decomposição espectral de operadores auto-adjuntos, podemos definir S^θ, $\theta \in \mathbb{R}$. Em particular usaremos $A = S^{1/2}$.

O operador A, é auto-adjunto, positivo definido em Y, com domínio X e

$$(u,v)_X = (Au, Av)_Y, \qquad \forall\, u,v \in X.$$

Definição 1.5.1. *Com as hipóteses anteriores, definimos o espaço intermediário*

$$[X,Y]_\theta = D(A^{1-\theta}) \qquad \textit{(domínio de } A^{1-\theta}\textit{)},\ 0 \leq \theta \leq 1,$$

com norma

$$\|u\|_{[X,Y]_\theta} = \left(\|u\|_Y^2 + \left\|A^{1-\theta}u\right\|_Y^2 \right)^{1/2}.$$

Observação 1.5.1.

1. $X \hookrightarrow [X,Y]_\theta \hookrightarrow Y$.
2. $\|u\|_{[X,Y]_\theta} \leq \|u\|_X^{1-\theta} \|u\|_Y^\theta$.
3. *Se* $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$ *então* $[X,Y]_{\theta_0} \hookrightarrow [X,Y]_{\theta_1}$.
4. $[[X,Y]_{\theta_0}, [X,Y]_{\theta_1}]_\theta = [X,Y]_{(1-\theta)\theta_0 + \theta\theta_1}$.

Teorema 1.5.1. *Sejam* Ω*, um subconjunto bem regular de* $\mathbb{R}^n$*,* $s > \dfrac{1}{2}$*. Então,*

$$H_0^s(\Omega) = \{u| \quad u \in H^s(\Omega), \quad \frac{\partial^j u}{\partial \eta^j} = 0, \quad 0 \leq j < s - \frac{1}{2}\}.$$

Teorema 1.5.2. *Sejam Ω, um subconjunto bem regular de $\mathbb{R}^n$, $\quad s_1 > s_2 \geq 0, \quad s_1$ e $s_2 \neq k + \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$. Se $\quad s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2 \neq k + \frac{1}{2}$, então*

$$[H_0^{s_1}(\Omega), H_0^{s_2}(\Omega)]_\theta = H_0^s(\Omega)$$

e

$$[H_0^m(\Omega), H^0(\Omega)]_\theta = H_0^s(\Omega), \quad com \quad s = (1-\theta)m \neq k + \frac{1}{2}$$

com normas equivalentes.

1.6 Espaços $L^p(0, T; X)$ e Distribuições Vetoriais

Sejam X um espaço de Banach real munido da norma $\|\cdot\|_X$, T um numero real positivo e $1 \leq p < \infty$. Representa-se por $L^p(0, T; X)$, o espaço de Banach de funções $u : (0, T) \longrightarrow X$, tais que u é mesuravel e $\|u(t)\|_X \in L^p(0, T)$, munido da norma.

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \right)^{1/p}.$$

Quando $p = 2$ e $X = H$ é um espaço de Hilbert, o espaço $L^p(0, T; H)$ é um espaço de Hilbert cujo produto interno é dado por :

$$(u, v)_{L^p(0,T;H)} = \int_0^T (u(s), v(s))_H ds.$$

Por $L^\infty(0, T; X)$ representaremos o espaço de Banach das (classes de) funções $u : (0, T) \longrightarrow X$ mesuráveis e essencialmente limitadas, isto é;

$$\sup_{0<t<T} ess \, \|u(t)\|_X < \infty.$$

A norma em $L^\infty(0,T;X)$ é definida por

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{0<t<T} ess\,\|u(t)\|_X < \infty.$$

Se X é reflexivo e separável e $1 < p < \infty$, então $L^P(0,T;X)$ é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica com o espaço de Banach $L^q(0,T;X')$ onde p e q são tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. No caso, $p = 1$, o dual topológico do espaço $L^\infty(0,T;X)$ se identifica com o espaço $L^1(0,T;X')$.

Definição 1.6.1. *Uma função $u : (0,T) \longrightarrow X$ é dita integrável à Bochner em (0,T) se for mesurável e a função real $t \longrightarrow \|u(t)\|_X$ for integrável à Lebesgue em (0,T).*

A integral de Bochner da função u em $(0,T)$ é o vector de X, denotado por

$$\int_0^T u(t)dt.$$

Lema 1.6.1. *Sejam X, Y espaços de Banach e $A : X \longrightarrow Y$ uma aplicação linear e contínua. Tem-se que, se $f \in L^1(I;X)$, onde I é um intervalo da reta, então*

$$A(\int_I f(s)ds) = \int_I Af(s)ds.$$

Demonstração. Ver [20] □

Seja $v \in L^p(0,T;X)$, onde X é Hilbert separável e $\varphi \in \mathfrak{D}(0,T)$. A integral em X

$$\int_0^T v(s)\varphi(s)ds$$

existe, sendo um vector de X (esta integral é entendida como uma integral de Bochner em X). Assim, dado $v \in L^p(0,T;X)$, a aplicação

$$\begin{aligned} Tv : \mathfrak{D}(0,T) &\longrightarrow X \\ \varphi &\longmapsto \langle Tv, \varphi\rangle = \int_0^T v(s)\varphi(s)ds \end{aligned}$$

está bem definida, é linear e contínua.

Denota-se por $\mathfrak{D}'(0,T;X)$ o espaço das distribuições vetoriais sobre $(0,T)$ com valores em X, isto é, o espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathfrak{D}(0,T)$ em X. Deste modo, $Tv \in \mathfrak{D}'(0,T;X)$ e demostra-se que Tv é univocamente definida por v. Logo, identificando a função v com a distribuição Tv, pode-se afirmar que

$$L^p(0,T;X) \subset \mathfrak{D}'(0,T;X).$$

Conclui-se, deste fato, que toda $v \in L^p(0,T;X)$ possui derivadas de todas as ordems no sentido das distribuições vetoriais sobre $(0,T)$.

Definição 1.6.2. *Seja $T \in \mathfrak{D}'(0,T;X)$. A derivada de ordem n de T é definida como sendo a distribuição vetorial sobre $(0,T)$ com valores em X dada por*

$$\left\langle \frac{d^nT}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n\varphi}{dt^n} \right\rangle.$$

Por $C([0,T];X)$, $0 < T < \infty$, representa-se o espaço de Banach das funções contínuas $u : [0,T] \longrightarrow X$, munido da norma da convergência uniforme

$$\|u\|_{C([0,T];X)} = max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X.$$

Lema 1.6.2. *Sejam V e H espaços de Hilbert tais que $V \hookrightarrow H$ com imersão contínua. Se $u \in L^p(0,T;V)$ e $u' \in L^p(0,T;H)$ onde $1 \leq p \leq \infty$ e $T > 0$ então $u \in C([0,T];H)$.*

Demonstração. Ver [10] $\square$

1.7 Interpolação de Espaços $L^p(0,T;X)$

Os resultados que enunciaremos, assim como suas demostrações, podem ser encontrados em [9].

Definição 1.7.1. *Dizemos que dois espaços vetoriais topológicos normados X, Y são compatíveis se existe um espaço vetorial topológico separável U, tal que X e Y são subespaços de U.*

Consideremos então o par (X,Y) de espaços compatíveis então, podemos definir sua soma, denotada por

$$\Sigma(X,Y) = X + Y = \{u| \quad u \in U, \quad u = x + y, \quad x \in X \text{ e } y \in Y\}$$

munido da norma

$$\|u\|_{\Sigma(X,Y)} = \inf\{\|x\|_X + \|y\|_Y, \quad u = x + y\}$$

e

$$\Delta(X,Y) = X \cap Y$$

munido da norma

$$\|u\|_{\Delta(X,Y)} = \max\{\|u\|_X, \|u\|_Y\}$$

Sejam $S = \{z|z \in \mathbb{C},\ 0 \leq Re(z) \leq 1\}$ e $S_0 = \{z|z \in \mathbb{C},\ 0 < Re(z) < 1\}$. Definimos $\mathbb{F}(X,Y)$ como sendo o conjunto das funções contínuas em S que satisfazem

1. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \Sigma(X,Y)$, analitica em S_0;

2. $\|f(z)\|_{\Sigma(X,Y)} \leq M$, $\forall\ z \in S$;

3. $t \longrightarrow f(it) \in X$, sendo contínua e nula no infinito;

4. $t \longrightarrow f(1+it) \in Y$, sendo contínua e nula no infinito,

munido da norma

$$\|f\|_{\mathbb{F}(X,Y)} = \max(\sup_t \|f(it)\|_X, \sup_t \|f(1+it)\|_Y).$$

Lema 1.7.1. *O espaço $\mathbb{F}(X,Y)$ é um espaço de Banach.*

Definição 1.7.2. *Definimos $[X,Y]_\theta$ como sendo*

$$[X,Y]_\theta = \{u| \quad u \in \Sigma(X,Y), u = f(\theta),\ para\ algum; f \in \mathbb{F}(X,Y)\}$$

munido da norma

$$\|u\|_{[X,Y]_\theta} = \inf\{\|f(\theta)\|_{\mathbb{F}(X,Y)} | \quad u = f(\theta),\ f \in \mathbb{F}(X,Y)\}$$

Observação 1.7.1.

1. *O espaço $[X,Y]_\theta$ é um espaço de Banach.*

2. *$\Delta(X,Y) \subset [X,Y]_\theta \subset \Sigma(X,Y)$.*

Teorema 1.7.1. *Sejam X, Y dois espaços de Banach, $1 \leq p_0,\ p_1 < \infty$, $0 < \theta < 1$. Então,*

$$[L^{p_0}(0,T;X), L^{p_1}(0,T;Y)]_\theta = L^p(0,T;[X,Y]_\theta)$$

onde $\dfrac{1}{p} = (1-\theta)\dfrac{1}{p_0} + \theta\dfrac{1}{p_1}$ com normas equivalentes. Se $1 \leq p_0 < \infty$, temos

$$[L^{p_0}(0,T;X), L^{\infty}(0,T;Y)]_\theta = L^p(0,T;[X,Y]_\theta)$$

onde $\dfrac{1}{p} = (1-\theta)\dfrac{1}{p_0}$ com normas equivalentes.

1.8 Desigualdades Importantes

Lema 1.8.1. *(Desigualdade de Poincaré-Friedrichs). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [2] e [1]. □

Lema 1.8.2. *(Desigualdade de Young). Sejam a, b constantes positivas e p, q, tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Ver [2]. □

Lema 1.8.3. *(Desigualdade de Holder). Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [2]. □

Lema 1.8.4. *(Desigualdade de Gronwall). Sejam $\varphi \in L^\infty(0,T), \beta \in L^1(0,T)$, $\beta(t) > 0, \varphi(t) \geq 0$ e $K \geq 0$ constante. Se*

$$\varphi(t) \leq K + \int_0^t \beta(s)\varphi(s)ds, \qquad \forall t \in (0,T)$$

então

$$\varphi(t) \leq Kexp(\int_0^t \beta(s)ds). \qquad \forall t \in (0,T).$$

Demonstração. Ver [15], [20]. □

Lema 1.8.5. *(Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg). Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ então existe $c > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \|u\|^{1/2}_{L^2(\Omega)} \|u_x\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}$$

Demonstração. Ver [1] e [2]. □

1.9 Semigrupos de Operadores Lineares

Para a teoria de semigrupos de operadores lineares citamos como referências [3], [14] e [20].

Definição 1.9.1. *Seja X um espaço de Banach e $L(X)$ a álgebra dos operadores lineares e limitados de X. Diz-se que uma aplicação $S : \mathbb{R}^+ \longrightarrow L(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados de X se*

1. *$S(0) = I$, onde I é o operador identidade de $L(X)$;*

2. *$S(t+s) = S(t)S(s), \ \forall t, s \in \mathbb{R}^+$.*
   Diz-se que o semigrupo S é de classe C_0 se

3. *$lim_{t \longrightarrow 0^+} \|(S(t) - I)x\| = 0, \quad \forall x \in X$.*

Proposição 1.9.1. *Todo semigrupo de classe C_0 é fortemente contínuo em $\mathbb{R}^+$, isto é, se $t \in \mathbb{R}^+$ então*

$$lim_{s \longrightarrow t} S(s)x = S(t)x, \quad \forall x \in X.$$

Definição 1.9.2. *O operador $A : D(A) \longrightarrow X$ definido por*

$$D(A) = \{x \in X | \ \ lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x \ \ existe\}$$

e

$$A(x) = lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x, \quad \forall x \ \ \in \ \ D(A)$$

é dito gerador infinitesimal do semigrupo S.

Proposição 1.9.2. *O gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 é um operador linear e fechado e seu dominio é um espaço vetorial denso em X.*

Proposição 1.9.3. *Seja S um semigrupo de classe C_0 e A o gerador infinitesimal de S. Se $x \in D(A)$, então $S(t)x \in D(A)$ $\forall t \geq 0$ e*

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

Definição 1.9.3. *Seja S um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal. Colocando $A^0 = I$, $A^1 = A$ e supondo que A^{k-1} esteja definido, vamos definir A^k por*

$$D(A^k) = \{x \in D(A^{k-1}) : A^{k-1}x \in D(A)\}$$

$$A^k x = A(A^{k-1}x), \;\; \forall x \in D(A^k).$$

Proposição 1.9.4. *Seja S um semigrupo de classe C_0 e A o gerador infinitesimal. Então*

1. *$D(A^k)$ é um subespaço de X e A^k é um operador linear de X;*

2. *se $x \in D(A^k)$, então $S(t)x \in D(A^k)$ $\;t \geq 0$ e*

$$\frac{d^k}{dt^k}S(t)x = A^k S(t)x = S(t)A^k x, \quad \forall k \in \mathbb{N};$$

3. *$\bigcap_k D(A^k)$ é denso em X.*

Lema 1.9.1. *Seja A um operador linear fechado de X. Pondo, para cada $x \in D(A^k)$,*

$$|\,x|_k = \textstyle\sum_{j=0}^{k} \|A^j x\|$$

o funcional $|\cdot|_k$ é uma norma em $D(A^k)$ munido da qual $D(A^k)$ é um espaço de Banach.

Definição 1.9.4. *A norma acima é dita norma do gráfico. O espaço de Banach que se obtém munindo $D(A^k)$ da norma acima será representado por $[D(A^k)]$.*

1.9.1 Teorema de Lumer-Phillips

Definição 1.9.5. *Seja A operador linear de X. O conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais o operador linear $\lambda I - A$ é inversível e seu inverso é limitado e tem dominio denso em X, é dito conjunto resolvente de A e é representado por $\rho(A)$.*

Seja X um espaço de Banach, X^* o dual de X e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade entre X e X^*. Para cada $x \in X$, definimos

$$J(x) = \{x^* \in X^* \;\mid\; \langle x, x^* \rangle \; = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

Pelo Teorema de Hanh-Banach, $J(x) \neq \varnothing, \quad \forall x \in X$.

Definição 1.9.6. *Uma aplicação dualidade é uma aplicação $j : X \longrightarrow X^*$ tal que $j(x) \in J(x), \quad \forall x \in X$.*

Observe que $\|j(x)\| = \|x\|$.

Definição 1.9.7. *Diz-se que o operador linear $A : X \longrightarrow X$ é dissipativo se, para alguma aplicação dualidade, j*

$$Re\,\langle Ax, j(x)\rangle \leq 0 \qquad \forall x \in D(A).$$

Teorema 1.9.1. *(Lumer-Phillips). Se A é um gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0, então*

1. *A é dissipativo;*

2. *$R(\lambda I - A) = X, \quad \lambda > 0$.*

Reciprocamente, se

1. *$D(A)$ é denso em X;*

2. *A é dissipativo;*

3. $R(\lambda_0 - A) = X$, *para algum* $\lambda_0 > 0$,

então A *é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe* C_0.

Demonstração. Ver [14]. □

Corolário 1.9.1. *Seja* A *é um operador linear fechado, densamente definido tal que* $D(A)$ *e* $R(A)$ *estão ambos num espaço de Banach* X. *Se* A *e seu operador dual* A^* *são ambos dissipativos, então* A *gera um semigrupo de contrações de classe* C_0.

Demonstração. Ver [14]. □

1.9.2 Teoria da Perturbação

Para simplificar a linguagem, vamos escrever $A \in G(M, \omega)$ para exprimir que A é o gerador infinitesimal de un semigrupo de operadores lineares limitados de classe C_0, S, que satisfaz a condição $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $\forall t \geq 0$.

Teorema 1.9.2. *Seja* $A \in G(1, 0)$ *e* B *dissipativo relativamente a alguma aplicação dualidade. Se* $D(B) \supset D(A)$ *e existem constantes* a *e* b, $0 \leq a < 1$ *e* $b \geq 0$, *tais que*

$$\|Bx\| \leq a\|Ax\| + b\|x\|, \quad \forall x \in D(A),$$

então $A + B \in G(1, 0)$.

Demonstração. Ver [14]. □

Teorema 1.9.3. *Se* $A \in G(1, 0)$ *e* $B \in L(X)$, *então* $A + B \in G(1, \|B\|)$.

Demonstração. Ver [14]. □

Capítulo 2

A Equação Linear de Korteweg-de Vries

2.1 Existência e Unicidade

Nesta seção estamos interesados em provar a existência e unicidade do seguinte problema

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + a(x)u = 0, & em\ \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & \forall\ t > 0 \\ u_x(L,t) = 0, & \forall\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & \forall\ x \in \Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\Omega = \{x \in \mathbb{R}/0 < x < L\}$ e

$$\begin{cases} a \in L^\infty(\Omega)\ e\ a(x) \geq a_0 > 0\ q.s.\ em\ \omega, \\ onde\ \omega\ é\ um\ subconjunto\ aberto\ não\ vazio\ de\ \Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

2.1.1 Caso $a \equiv 0$

Nesse caso, (2.1) se reduz ao modelo

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} = 0, & em\ \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & \forall\ t > 0 \\ u_x(L,t) = 0, & \forall\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & \forall\ x \in \Omega \end{cases} \tag{2.3}$$

A existência e unicidade, serão obtidas utilizando a Teoria de Semigrupos. Observe que, formalmente,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L u^2(x,t)dx \leq 0;$$

ou seja;

$$\frac{1}{2}\int_0^L u^2(x,t)dx - \frac{1}{2}\int_0^L u^2(x,0)dx \leq 0.$$

Logo,

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L u^2(x,t)dx \leq \frac{1}{2}\int_0^L u^2(x,0)dx = \frac{1}{2}\int_0^L u_0^2(x)dx = E(0).$$

Portanto, escolhendo $H = L^2(\Omega)$ e considerando o operador A definido por

$$\begin{cases} Aw = -w''' - w' \\ A : D(A) \subset H \longrightarrow H \\ D(A) = \{u \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega);\ u_x(L) = 0\} \end{cases} \tag{2.4}$$

(2.3) pode ser escrito como

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u = Au \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Proposição 2.1.1. *Nas condições anteriores, temos que A gera um semigrupo de contrações de classe C_0 em H.*

Demonstração.

Inicialmente, mostraremos que $D(A)$ é denso em H, em seguida que A e A^* são dissipativos e, finalmente, que A é fechado.

1. $D(A)$ é denso em H.

   Como $\overline{\mathfrak{D}(\Omega)} = H$ e $\mathfrak{D}(\Omega) \subset D(A) \subset H$, o resultado segue.

2. *A e* A^* são dissipativos

   Seja $u \in D(A)$

$$\begin{aligned}
\langle Au, u\rangle_{H\times H} &= \int_0^L (Au)udx = \int_0^L (-u_x - u_{xxx})udx \\
&= -\int_0^L u_x udx - \int_0^L u_{xxx}udx = \frac{1}{2}u_x^2(L) - \frac{1}{2}u_x^2(0) \\
&= -\frac{1}{2}u_x^2(0) \leq 0;
\end{aligned}$$

   ou seja; A é dissipativo. Agora, observe que se $u \in D(A)$ e $v \in H$ é um elemento a ser determinado, teremos que

$$\begin{aligned}
\langle Au, v\rangle_{H\times H} &= \int_0^L (-u_x - u_{xxx})vdx = -\int_0^L u_x vdx - \int_0^L u_{xxx}vdx \\
&= -uv|_0^L + \int_0^L uv_x dx - u_{xx}v|_0^L + \int_0^L u_{xx}v_x dx \\
&= \int_0^L uv_x dx + u_x v_x|_0^L - \int_0^L u_x v_{xx} dx \\
&= \int_0^L uv_x dx - uv_{xx}|_0^L + \int_0^L uv_{xxx} dx = \int_0^L u(v_x + v_{xxx})dx,
\end{aligned}$$

   se assumimos que $v(0) = v(L) = v_x(0) = 0$. Portanto, o adjunto de A é definido por

$$\begin{cases}
A^*w = w''' + w' \\
A^* : D(A^*) \subset H \longrightarrow H \\
D(A^*) = \{w \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega);\ w_x(0) = 0\}.
\end{cases}$$

Seja $v \in D(A^*)$.

$$\begin{aligned} \langle A^*v, v\rangle_{H\times H} &= \int_0^L (A^*v)vdx = \int_0^L (v_x + v_{xxx})vdx \\ &= \int_0^L v_x v dx + \int_0^L v_{xxx} v dx \\ &= -\frac{1}{2}v_x^2(L) + \frac{1}{2}v_x^2(0) = -\frac{1}{2}v_x^2(L) \leq 0. \end{aligned}$$

Assim, A^* é dissipativo.

3. A é fechado .

   Basta mostrar que $A^{**} = A$. Para isso, calculemos A^{**}.

   Seja $u \in D(A^*)$ e v a ser determinado. Assumindo que $v(0) = v(L) = v_x(L) = 0$, segue que

$$\begin{aligned} \langle A^*u, v\rangle_{H\times H} &= \int_0^L (A^*u)vdx = \int_0^L (u_x + u_{xxx})vdx \\ &= \int_0^L u_x v dx + \int_0^L u_{xxx} v dx \\ &= uv|_0^L - \int_0^L uv_x dx + u_{xx}v|_0^L - \int_0^L u_{xx}v_x dx \\ &= -\int_0^L uv_x dx - u_x v_x|_0^L + \int_0^L u_x v_{xx} dx \\ &= -\int_0^L uv_x dx + uv_{xx}|_0^L - \int_0^L uv_{xxx} dx \\ &= -\int_0^L (v_x + v_{xxx})udx. \end{aligned}$$

   Assim,

$$\begin{cases} A^{**}u = -u''' - u' \\ A^{**} : D(A^{**}) \subset H \longrightarrow H \\ D(A^{**}) = \{u \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega);\ u_x(L) = 0\}. \end{cases}$$

Portanto, $A^{**} = A$ e pelo Corolário 1.9.1. temos o resultado desejado. $\square$

Corolário 2.1.1. *Para cada $u_0 \in H$, o problema (2.3) possui uma única solução $u \in C([0,\infty);H)$. Se $u_0 \in D(A)$, então $u \in C([0,\infty);D(A)) \cap C^1([0,\infty);H)$.*

Demonstrção.
Segue de (2.5) que (2.3) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Logo, pela Proposição 2.1.1 e pelo Teorema de Lummer Phillips temos que

$$u(t) = S(t)u_0$$

é solução de (2.3), onde S é o semigrupo gerado por A. Além disso, pela teoria de semigrupos, temos que se $u_0 \in D(A)$ então $u \in C([0,\infty);D(A)) \cap C^1([0,\infty);H)$. Se $u_0 \in H$ então $u \in C([0,\infty);H)$. □

2.1.2 Caso $a > 0$

Observemos que o modelo (2.1) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u = Au + Bu \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.6}$$

onde A foi definido em (2.4) e B é dado por

$$\begin{aligned} B:\ \ & H \longrightarrow H \\ & u \longrightarrow -a(x)u. \end{aligned}$$

Logo, para mostrar que $A+B$ gera um semigrupo de contrações de classe C_0 e, consequentemente, que (2.1) possui solução, basta mostrar que $B \in \mathfrak{L}(H)$. De fato, como

$$\begin{aligned}\|Bu\|_H^2 &= \int_0^L |a(x)u|^2\,dx \\ &\leq \|a\|_{L^\infty}^2 \int_0^L |u|^2\,dx \\ &\leq \|a\|_{L^\infty}^2 \|u\|_H^2\end{aligned}$$

o Teorema 1.9.3 nos dá o seguinte resultado:

Teorema 2.1.1. *Se $u_0 \in H$, o problema (2.1) possui uma única solução $u \in C([0,+\infty);H)$. Além disso,*

$$u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T];H). \tag{2.7}$$

Demonstração.

Para obter (2.7), assumiremos inicialmente que $u_0 \in D(A)$; ou seja; que $u \in C([0,T];D(A))$.

Seja $q \in C^\infty([0,L]\times[0,T])$. Multiplicando (2.1) por qu e integrando em $(0,L)\times(0,T)$, obtemos

$$\int_0^T \int_0^L qu(u_t + u_x + u_{xxx} + a(x)u)dxdt = 0.$$

Agora, observemos que

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_0^L quu_t dxdt &= \int_0^L \int_0^T \frac{q}{2}\frac{d}{dt}(u^2)dtdx = \int_0^L (\frac{q}{2}u^2|_0^T - \int_0^T \frac{q_t}{2}u^2 dt)dx \\ &= \int_0^L (\frac{qu^2}{2})(x,T)dx - \int_0^L (\frac{qu^2}{2})(x,0)dx \\ &\quad - \int_0^L \int_0^T q_t \frac{u^2}{2} dtdx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_0^L quu_x dxdt &= \int_0^T \int_0^L \frac{q}{2}\frac{d}{dx}(u^2)dxdt = \int_0^T (\frac{q}{2}u^2|_0^L - \int_0^L \frac{q_x}{2}u^2 dx)dt \\ &= -\int_0^T \int_0^L q_x \frac{u^2}{2} dxdt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^T\int_0^L quu_{xxx}dxdt &= \int_0^T (quu_{xx}|_0^L - \int_0^L (q_xu+qu_x)u_{xx}dx)dt \\
&= -\int_0^T\int_0^L q_xuu_{xx}dxdt - \int_0^T\int_0^L qu_xu_{xx}dxdt \\
&= -\int_0^T (q_xuu_x|_0^L - \int_0^L (q_{xx}u+q_xu_x)u_xdx)dt \\
&\quad -\int_0^T\int_0^L \frac{q}{2}\frac{d}{dx}(u_x^2)ddxdt \\
&= \int_0^T\int_0^L (q_{xx}u+q_xu_x)u_xdxdt - \int_0^T \frac{q}{2}u_x^2|_0^L dt \\
&\quad +\int_0^T\int_0^L \frac{q_x}{2}u_x^2dxdt \\
&= \int_0^T\int_0^L \frac{q_{xx}}{2}\frac{d}{dx}u^2dxdt + \int_0^T\int_0^L q_xu_x^2dxdt \\
&\quad +\int_0^T (q\frac{u_x^2}{2})(0,t)dt + \int_0^T\int_0^L \frac{q_x}{2}u_x^2dxdt \\
&= -\int_0^T\int_0^L q_{xxx}\frac{u^2}{2}dxdt + \frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L q_xu_x^2dxdt \\
&\quad +\int_0^T (q\frac{u_x^2}{2})(0,t)dt
\end{aligned}
$$

$$
\int_0^T\int_0^L qua(x)udxdt = \int_0^T\int_0^L qa(x)u^2dxdt.
$$

Escolhendo $q \equiv 1$, obtemos

$$
\frac{1}{2}\int_0^L u^2dx = -\frac{1}{2}\int_0^T u_x^2(0,s)ds + \frac{1}{2}\int_0^L u_0^2(x)dx - \int_0^T\int_0^L a(x)u^2dxdt,
$$

donde,

$$
\|u\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}.
$$

Agora, escolhendo $q(x,t) = x$, resulta que

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T\int_0^L u^2dxdt + \int_0^L xu(x,T)dx - \int_0^L xu_0(x)dx \\
&+3\int_0^T\int_0^L u_x^2dxdt + 2\int_0^T\int_0^L xa(x)udxdt = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\int_0^T \int_0^L u_x^2 dxdt \leq \frac{1}{3}(\int_0^T \int_0^L u^2 dxdt + L\int_0^L u_0^2(x)dx);$$

ou seja;

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} &= \int_0^T \int_0^L u_x^2 dxdt \leq \frac{1}{3}(\int_0^T \int_0^L u^2 dxdt + L\int_0^L u_0^2(x)dx) \\
&\leq \frac{1}{3}\int_0^T \int_0^L u^2 dxdt + \frac{L}{3}\int_0^L u_0^2(x) \\
&\leq \frac{1}{3}\max_{t\in\,[0,T]} \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \int_0^T dt + \frac{L}{3}\int_0^L u_0^2(x)dx \\
&\leq \frac{T}{3}\|u\|^2_{C([0,T];L^2(\Omega))} + \frac{L}{3}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{T+L}{3}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq \sqrt{\frac{T+L}{3}}\|u_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

Pela densidade de $D(A)$ em $L^2(\Omega)$, o resultado se estende à $u_0 \in L^2(\Omega)$ arbitrário. □

2.2 Decaimento Exponencial

2.2.1 Caso $a \equiv 0$

Teorema 2.2.1. *Seja u a solução do problema (2.3) obtida no Corolário 2.1.1. Se $L \notin \mathfrak{E}$, então, existem constantes $c > 0$ e $\mu > 0$, tal que*

$$E(t) \leq c\|u_0\|_H^2 e^{-\mu t}$$

para todo $t \geq 0$ e $u_0 \in H$.

Demonstração.

Multiplicando a equação (2.3) por u e integrando em Ω, temos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|_H^2 + \frac{1}{2}u_x^2(0,t) = 0;$$

ou seja;

$$\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|_H^2 = -u_x^2(0,t) \leq 0. \tag{2.8}$$

Por outro lado, segue de [16, Proposição 3.3] que se $L \notin \mathfrak{C}$, dado $T > 0$, existe $c > 0$, com $(c = c(L,T))$, tal que

$$\|u_0\|_H^2 \leq c\,\|u_x(0,\cdot)\|_{L^2(0,T)}^2$$

para cada solução de (2.3).

Agora, integrando (2.8) em $(0,T)$ e usando a desigualdadde acima, obtemos

$$\|u(\cdot,T)\|_H^2 = \|u_0\|_H^2 - \int_0^T u_x^2(0,t)dt.$$

Logo,

$$\begin{aligned}(1+c)\,\|u(\cdot,T)\|_H^2 &= c\,\|u_0\|_H^2 - \int_0^T u_x^2(0,t)dt + \|u_0\|_H^2 - c\int_0^T u_x^2(0,t)dt\\ &\leq c\,\|u_0\|_H^2 - \int_0^T u_x^2(0,t)dt\\ &\leq c\,\|u_0\|_H^2,\end{aligned}$$

o que implica que

$$\|u(\cdot,T)\|_H^2 \leq (\frac{c}{c+1})\,\|u_0\|_H^2;$$

ou seja; $E(T) \leq \gamma E(0)$, com $0 < \gamma < 1$. A propriedade de semigrupo associada ao modelo nos dá a conclusão do teorema. De fato, como

$$\|u(\cdot,kT)\|_H^2 \leq \gamma^k\,\|u_0\|_H^2, \quad \forall\, k \geq 0,$$

e

$$\|u(\cdot,t)\|_H^2 \leq \|u(\cdot,kT)\|_H^2, \quad para \quad kT \leq t \leq (k+1)T,$$

concluimos que

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|_H^2 &\leq \|u(\cdot,kT)\|_H^2 \leq \gamma^k \|u_0\|_H^2 \\ &\leq \gamma^{(t/T)-1}\|u_0\|_H^2 \leq \frac{1}{\gamma}\|u_0\|_H^2 \exp(-[\frac{-ln\gamma}{T}]t).\end{aligned}$$

$\square$

Observação 2.2.1. *A primeira estimativa básica para a solução do problema (2.3) contém o termo $u_x(0,t)$. Se poderia argumentar que o traço deste termo não está definido já que $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap C([0,T];H)$. Tal fato; ou seja; o fato de que $\int_0^T u_x^2(0,s)ds < \infty$, será justificado na seção 2.2.2.*

2.2.2 Caso $a > 0$

Teorema 2.2.2. *Seja $a = a(x)$ satisfazendo (2.2). Então, para qualquer $L > 0$, existem $c > 0$ e $\mu > 0$, tais que*

$$E(t) \leq c\|u_0\|_H^2 e^{-\mu t}$$

para todo $t \geq 0$ e toda solução de (2.1) com $u_0 \in H$.

Demonstração.
A primeira estimativa básica para a solução do problema (2.1) contém o termo $u_x(0,t)$. Se poderia argumentar que o traço deste termo não está definido, o que não ocorre. De fato, consideremos a sequência $\{u_{0,n}\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A)$, tal que $u_{0,n} \longrightarrow u_0$ em H quando $n \longrightarrow \infty$. Sejam u_n e u as soluções de (2.1) com dados inicias $u_{0,n}$ e u_0, respectivamente. Então, multiplicando a equação (2.1) por u_n e integrando em Ω, obtemos

$$\int_0^L u_n(u_{n,t} + u_{n,x} + u_{n,xxx} + a(x)u_n)dx = 0.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}E(u_n)(t) + \frac{1}{2}u_{n,x}^2(0,t) + \int_0^L a(x)u_n^2 dx = 0 \tag{2.9}$$

onde $E(u_n)(t) = \dfrac{1}{2}\left\|u_n(\cdot,t)\right\|_H^2$. Agora, integrando (2.9) de $t = 0$ à $t = T$, obtemos

$$E(u_n)(T) + \frac{1}{2}\int_0^T u_{n,x}^2(0,t)dt + \int_0^T\int_0^L a(x)u_n^2 dxdt \leq E(u_n)(0). \tag{2.10}$$

Claramente,

$$E(u_n)(T) - E(u_n)(0) \longrightarrow E(u)(T) - E(u_0) \tag{2.11}$$

quando $n \longrightarrow +\infty$. No que segue, mostraremos que existe uma subsequência de $\{u_n\}$, tal que

$$u_{n,x}(0,t) \rightharpoonup u_x(0,t)\, em\, H^{-1}(0,T),\ quando\ n \longrightarrow +\infty. \tag{2.12}$$

De fato, segue do Teorema 2.1.1 que

$$\left\|u_n\right\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \leq C(T)\left\|u_{0,n}\right\|_H^2 \tag{2.13}$$

para alguma constante positiva $C(T)$; isto é; $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ é limitada em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.

Como consequência de (2.13) deduzimos que,

$$\{u_{n,x}\}\ \textit{é limitada em}\ L^2(0,T;H) \tag{2.14}$$

e

$$\{u_{n,t}\}\ \textit{é limitada em}\ H^{-1}(0,T;H). \tag{2.15}$$

Portanto, como $u_{n,xxx} = -u_{n,t} - u_{n,x} - a(x)u_n$, de (2.13), (2.14) e (2.15) deduzimos que

$$\{u_{n,xxx}\}\ \textit{é limitada em}\ H^{-1}(0,T;H);$$

ou seja;

$$\{u_n\} \text{ é limitada em } H^{-1}(0,T;H^3(\Omega)).$$

Em particular,

$$u_{n,x}(0,t) \text{ é limitada em } H^{-1}(0,T),$$

já que, para $t \in (0,T)$ temos que $u_{n,x}(\cdot,t) \in H^2(\Omega) \hookrightarrow C([0,L])$. Assim, podemos extrair uma subsequência (que ainda será denotada por u_n), tal que

$$u_{n,x}(0,t) \rightharpoonup u_x(0,t) \text{ em } H^{-1}(0,T)$$

quando $n \longrightarrow +\infty$, o que mostra (2.12) . Agora, com esta subsequência retornamos a (2.10) e obtemos que $\{u_{n,x}(0,t)\}$ é limitada em $L^2(0,T)$. Novamente, podemos extrair uma subsequência que será convergente, no sentido fraco em $L^2(0,T)$ e que, junto com a discussão acima, mostra que.

$$u_{n,x}(0,t) \rightharpoonup u_x(0,t) \text{ em } L^2(0,T), \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Finalmente, a semicontinuidade inferior da norma, (2.10), (2.11) e (2.12) implicam que

$$\int_0^T u_x^2(0,t)dt \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} \int_0^T u_{nx}^2(0,t)dt \leq 2E(u_0) < \infty.$$

Portanto, $u_x(0,t)$ existe e pertence a $L^2(0,T)$. Além disso, segue de (2.11) que

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u(\cdot,t)\|_H^2. \tag{2.16}$$

Agora, mostraremos que para qualquer $T > 0$, existe $c = c(T) > 0$, satisfazendo

$$\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c\{\int_0^T u_x^2(0,t)dt + 2\int_0^T\int_0^L a(x)u^2dxdt\}. \tag{2.17}$$

Para tal; tomamos $q(x,t) = (T-t)$ nas identidades do Teorema 2.1.1 e obtemos a seguinte identidade

$$T\int_0^L u_0^2 dx =$$
$$\int_0^T\int_0^L u^2 dxdt + \int_0^T (T-t)u_x^2(0,t)dt + 2\int_0^T\int_0^L (T-t)a(x)u^2 dxdt.$$

Consequentemente,

$$\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^L u^2 dxdt + \int_0^T u_x^2(0,t)dt + 2\int_0^T\int_0^L a(x)u^2 dxdt. \quad (2.18)$$

Assim, para mostrar (2.17) é suficiente mostrar que

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &= \int_0^T\int_0^L u^2 dxdt \\ &\leq c_1\{\int_0^T u_x^2(0,t)dt + 2\int_0^T\int_0^L a(x)u^2 dxdt\} \end{aligned} \quad (2.19)$$

para alguma constante positiva $c_1 > 0$, independiente da solução u.

A demonstração de (2.19) será feita por contradição, usando um argumento de "Compacidade-Unicidade".

Suponhamos que (2.19) seja falsa. Então $\forall\, n > 0$, $\exists\, u_n \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ solução de (2.1), tal que

$$\|u_n\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} > n\{\int_0^T u_{n,x}^2(0,t)dt + 2\int_0^T\int_0^L a(x)u_n^2 dxdt\}.$$

Segue daí que,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\|u_n\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}}{\int_0^T u_{n,x}^2(0,t)dt + 2\int_0^T\int_0^L a(x)u_n^2 dxdt} = +\infty.$$

Seja $\lambda_n = \|u_n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$ e $v_n = u_n/\lambda_n$. Claramente, v_n é solução do problema (2.1) com dado inicial $v_n(x,0) = u_n(x,0)/\lambda_n$. Além disso, temos que

$$\|v_n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = 1 \quad (2.20)$$

e

$$\int_0^T v_{n,x}^2(0,t)dt + 2\int_0^T\int_0^L a(x)v_n^2 dxdt \longrightarrow 0,\ quando\ n \longrightarrow \infty. \qquad (2.21)$$

Por outro lado, sendo v_n solução do modelo (2.1) com dado inicial $v_n(x,0)$, $v_n(x,0)$ verifica (2.18), como $a \in L^\infty(\Omega)$, por (2.20) e (2.21) temos que, é limitada em $L^2(\Omega)$, Consequêntemente,

$$\|v_n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \leq M \qquad \forall\, t \in [0,T]\ .$$

Além disso,

$$\|v_n\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq (\frac{T+L}{3})\,\|v_n(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq (\frac{T+L}{3})M^2 \qquad (2.22)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. A estimativa (2.22) junto com (2.20) nos diz que $\{v_{n.t}\}$ é limitada em $L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$. De fato, temos que

$$v_{n,t} = -v_{n,x} - v_{n,xxx} - a(x)v_n.$$

Além disso, temos que

$$\|v_{n,x}\|_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))} \leq c\,\|v_{n,x}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = c\,\|v_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))},$$

e de

$$\begin{aligned} |\langle v_{n,xxx},\varphi\rangle|_{H^{-2}(\Omega)\times H_0^2(\Omega)} &= |\langle v_{n,x},\varphi_{xx}\rangle|_{H^{-2}(\Omega)\times H_0^2(\Omega)} \\ &\leq \|v_{n,x}\|_{L^2(\Omega)}\,\|\varphi_{xx}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|v_n\|_{H_0^1(\Omega)}\,\|\varphi\|_{H_0^2(\Omega)} \end{aligned}$$

obtém-se

$$\begin{aligned} \|v_{n,xxx}\|_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))} &= (\int_0^T \|v_{n,xxx}\|^2_{H^{-2}(\Omega)}\,dt)^{1/2} \\ &\leq c(\int_0^T \|v_n\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,dt)^{1/2} \\ &= c\,\|v_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\,. \end{aligned}$$

Portanto, $v_{n,t} \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$. Por outro lado, juntando os fatos anteriores obtemos que

$$\|v_n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq 1; \;\; \|v_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq c_1; \;\; \|v_{n,t}\|_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))} \leq c_2$$

onde $c_1, c_2 > 0$. As limitações acima, junto com um resultado de compacidade clássico [18, Corolário 4], nos garantem que existe uma subsequência $\{v_k\}$ de $\{v_n\}$, tal que

$$\begin{cases} v_n \longrightarrow v \quad em \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)) \\ v_n \rightharpoonup^* v \quad em \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ v_{n,t} \rightharpoonup^* v_t \quad em \quad L^2(0,T;H^{-2}(\Omega)). \end{cases}$$

Como

$$\|v_k\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = 1$$

e

$$\Big| \|v_k\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} - \|v\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \Big| \leq \|v_k - v\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \longrightarrow 0$$

quando $k \longrightarrow +\infty$, segue-se que

$$\|v\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = 1.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \{ \int_0^T v_{k,x}^2(0,t)dt + 2\int_0^T \int_0^L a(x)v_k^2 dxdt \} \\ &= \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \{ \int_0^T v_{k,x}^2(0,t)dt + 2\int_0^T \int_0^L a(x)v_k^2 dxdt \} \\ &\geq \int_0^T v_x^2(0,t)dt + 2\int_0^T \int_0^L a(x)v^2 dxdt, \end{aligned}$$

o que nos garante que $a(x)v^2 \equiv 0$. Como $a(x) \geq a_0 > 0$ em $\omega \in \Omega$, segue que $v \equiv 0$ em $\omega \times (0,T)$. Por outro lado, o limite de v satisfaz

$$-\int_0^T (v,\varphi)\theta_t dt + \int_0^T (v_x,\varphi)\theta dt + \int_0^T (v_x,\varphi_{xx})\theta dt = 0,$$

$\forall\, \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ e $\theta \in \mathfrak{D}(0,T)$. Então, pelo Teorema de Unicidade de Holmgren, deduzimos que $v \equiv 0$ em $\Omega \times (0,T)$, o que contradiz à $\|v\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = 1$. Consequentemente, (2.19) é valida . Por outro lado, de (2.9)

$$\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_0^T u_x^2(0,t)dt - 2\int_0^T\int_0^L a(x)u^2 dxdt.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(1+c)\,\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\Omega)} &= (1+c)\{\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_0^T u_x^2(0,t)dt - 2\int_0^T\int_0^L a(x)u^2 dxdt\} \\
&\leq c\,\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} - \{\int_0^T u_x^2(0,t)dt + 2\int_0^T\int_0^L a(x)u^2 dxdt\} \\
&\leq c\,\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}\,.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \gamma\,\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)},$$

com $0 < \gamma = \dfrac{c}{c+1} < 1$. Portanto, pela propriedade de semigrupo associado ao modelo, concluímos a demonstração.

$\square$

Capítulo 3

A Equação Não Linear de Korteweg-de Vries

Nesta seção analisaremos a existência, unicidade e o comportamento assintótico das soluções do problema

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + uu_x + a(x)u = 0, & em\ \Omega \times R^+ \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & \forall\, t > 0 \\ u_x(L,t) = 0, & \forall\, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & \forall\, x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Observemos que a energia associada a (3.1) é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L u^2(x,t)dx, \tag{3.2}$$

e satisfaz

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\int_0^L a(x)u^2(x,t)dx - \frac{1}{2}u_x^2(0,t) \leq 0; \tag{3.3}$$

ou seja; E é uma função não crescente.

3.1 Existência e Unicidade

Nesta seção, provaremos o seguinte teorema:

Teorema 3.1.1. *Para todo $u_0 \in L^2(\Omega)$, o problema (3.1) tem uma única solução fraca*

$$u \in L^2_{loc}(0, +\infty; H^1_0(\Omega)) \cap L^\infty_{loc}(0, +\infty; L^2(\Omega)). \tag{3.4}$$

Para demostrar o Teorema 3.1.1, precisaremos da seguinte proposição:

Proposição 3.1.1. *Seja y solução do problema*

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} = uu_x = f, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ y(0,t) = y(L,t) = 0, & \forall\, t > 0 \\ y_x(L,t) = 0, & \forall\, t > 0 \\ y(x,0) = 0, & \forall\, x \in \Omega \end{cases} \tag{3.5}$$

Então,
1) se $y \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$, $yy_x \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ e a aplicação $y \longrightarrow yy_x$ é contínua;
2) para $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, a solução fraca y de (3.5) pertence a $\mathfrak{B} = C([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$. Além disso, a aplicação linear $f \longrightarrow y$ é contínua.

Demonstração.
Denotaremos por $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ o semigrupo de contrações associado à equação linear correspondente.
1) Sejam $y, z \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$. Como $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, segue da desigualdade triangular e da desigualdade de Hölder que

$$
\begin{aligned}
\|yy_x - zz_x\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} &= \int_0^T \|yy_x - zz_x\|_{L^2(\Omega)}\, dt \\
&= \int_0^T \|yy_x - zy_x + zy_x - zz_x\|_{L^2(\Omega)}\, dt \\
&\leq \int_0^T \|(y-z)y_x\|_{L^2(\Omega)}\, dt + \int_0^T \|(y_x - z_x)z\|_{L^2(\Omega)}\, dt \\
&\leq \int_0^T \|y-z\|_{L^\infty(\Omega)} \|y_x\|_{L^2(\Omega)}\, dt \\
&+ \int_0^T \|y_x - z_x\|_{L^2(\Omega)} \|z\|_{L^\infty(\Omega)}\, dt \\
&\leq c_1 \int_0^T \|y-z\|_{H^1(\Omega)} \|y_x\|_{H^1(\Omega)}\, dt \\
&+ c_1 \int_0^T \|y-z\|_{H^1(\Omega)} \|z\|_{H^1(\Omega)}\, dt \\
&\leq c_1 \int_0^T (\|y\|_{H^1(\Omega)} + \|z\|_{H^1(\Omega)}) \|y-z\|_{H^1(\Omega)}\, dt \\
&\leq c_1 (\int_0^T \|y-z\|^2_{H^1(\Omega)}\, dt)^{1/2} (\int_0^T \|y\|^2_{H^1(\Omega)}\, dt)^{1/2} \\
&+ c_1 (\int_0^T \|y-z\|^2_{H^1(\Omega)}\, dt)^{1/2} (\int_0^T \|z\|^2_{H^1(\Omega)}\, dt)^{1/2} \\
&\leq c_1 \|y-z\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} (\|y\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \|z\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}).
\end{aligned}
$$

Fazendo $z = 0$ obtemos que $yy_x \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ e que aplicação $y \longrightarrow yy_x$ é contínua.

2) Dado que

$$
\left\| 1_{[0,t]}(s) S(t-s) f(\cdot, s) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)} \in L^1(0,T),
$$

segue do Teorema de Lebesgue que $S(t-s)f(\cdot,s) \in L^1(0,T)$. Logo, a solução fraca de (3.5)

$$
y(\cdot, t) = \int_0^t S(t-s) f(\cdot, s) ds \in C([0,T]; L^2(\Omega)).
$$

Além disso, para todo $t \in [0,T]$

$$
\begin{aligned}
\|y(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} &= \left\| \int_0^t S(s-t) f(\cdot, s) ds \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \int_0^t \|f(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)}\, ds \\
&\leq \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}.
\end{aligned}
$$

Portanto, a aplicação linear $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega)) \longrightarrow y \in C([0,T];L^2(\Omega))$ é contínua, pois

$$\sup_{t\in[0,T]} \|y(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}.$$

Para mostrar que esta aplicação está bem definida e é contínua de $L^1(0,T;L^2(\Omega))$ em $L^2(0,T;H^1(\Omega))$, é suficiente provar que

$$\forall f \in L^1(0,T;L^2(\Omega)), \quad \exists\, c_2 > 0,$$
$$\|y_x\|_{L^2(\Omega\times(0,T))} \leq c_2 \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}.$$

De fato, multiplicando a equação em (3.5) por xy e integrando por partes, obtemos

$$\int_0^L \frac{x}{2} y^2(x,T)dx - \int_0^T \int_0^L \frac{1}{2} y^2(x,t)dxdt + \frac{3}{2}\int_0^T \int_0^L y_x^2(x,t)dxdt =$$
$$\int_0^T \int_0^L xyfdxdt.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L y_x^2(x,t)dxdt \ &= \frac{2}{3}\int_0^T \int_0^L xyfdxdt + \frac{1}{3}\int_0^T \int_0^L y^2(x,t)dxdt \\
&-\frac{1}{3}\int_0^L y^2dx \\
&\leq \frac{1}{3}\int_0^T \int_0^L y^2(x,t)dxdt + \frac{2L}{3}\int_0^T \int_0^L fydxdt \\
&\leq \frac{T}{3}\|f\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} + \frac{2L}{3}\|y\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}\int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)} dt \\
&\leq \frac{T}{3}\|f\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} + \frac{2L}{3}\|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \\
&\leq (\frac{T+2L}{3})\|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))},
\end{aligned}$$

o que completa a demonstração. $\square$

Demonstração do Teorema 3.1.1.

Usando a fórmula de variação de parâmetros, o sistema (3.1) pode ser escrito na forma integral

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)uu_x(s)ds = \varphi(u)(t), \tag{3.6}$$

onde $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é o semigrupo associado à parte linear da equação e que, de acordo com o Capítulo 2, satisfaz

$$\|S(t)u_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}, \forall\, t \geq 0, \forall\, u_0 \in L^2(\Omega), \tag{3.7}$$

$$\|S(t)u_0\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq c(1+\sqrt{T})\,\|u_0\|_{L^2(\Omega)}, \forall\, t \geq 0, \forall\, u_0 \in L^2(\Omega). \tag{3.8}$$

Para provar a existência e unicidade, introduzimos o espaço

$$\mathfrak{X}_T = L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),$$

e verificamos que a aplicação

$$\varphi : \mathfrak{X}_T \longrightarrow \mathfrak{X}_T$$

é uma contração para algum $T > 0$ suficientemente pequeno.

De acordo a (3.7) e (3.8) temos $S(t)u_0 \in \mathfrak{X}_T$, por outro lado pela Proposição 3.1.1, segue que aplicação que a cada $u \in \mathfrak{X}_T \subset L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ associa $uu_x \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ é contínua. O mesmo acontece a aplicação que a cada $f = uu_x \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ associa $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega)) \subset \mathfrak{X}_T$ também é contínua, o que mostra que φ aplica continuamente $\mathfrak{X}_T$ em si mesmo.

Agora, mostraremos que φ é uma contração numa bola adequada de $\mathfrak{X}_T$ quando $T > 0$ é pequeno. Obviamente,

$$\varphi(u) - \varphi(v) = \int_0^t S(t-s)(uu_x(s) - vv_x(s))ds, \tag{3.9}$$

e de acordo com a análise anterior,

$$\begin{aligned}
\|\varphi(u)-\varphi(v)\|_{\mathfrak{X}_T} &= \left\|\int_0^t S(t-s)(uu_x(s)-vv_x(s))ds\right\|_{\mathfrak{X}_T}\\
&\leq \int_0^t \|S(t-s)(uu_x(s)-vv_x(s))\|_{\mathfrak{X}_T}\,ds\\
&\leq \int_0^T \{\|S(t-s)(uu_x(s)-vv_x(s))\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\\
&\quad+\|S(t-s)(uu_x(s)-vv_x(s))\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\}ds\\
&\leq \int_0^T \{\|uu_x(s)-vv_x(s)\|_{L^2(\Omega)}\\
&\quad+c(1+\sqrt{T})\,\|uu_x(s)-vv_x(s)\|_{L^2(\Omega)}\}ds\\
&\leq \int_0^T (1+c+c\sqrt{T})\,\|uu_x(s)-vv_x(s)\|_{L^2(\Omega)}\,ds\\
&\leq \int_0^T c_1(1+\sqrt{T})\,\|uu_x(s)-vv_x(s)\|_{L^2(\Omega)}\,ds\\
&\leq c_1(1+\sqrt{T})\,\|uu_x(s)-vv_x(s)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\,.
\end{aligned}$$

Então, aplicando a desigualdade triangular e a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\|\varphi(u)-\varphi(v)\|_{\mathfrak{X}_T} &\leq c_1(1+\sqrt{T})\,\|uu_x-vu_x+vu_x-vv_x\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\\
&\leq c_1(1+\sqrt{T})\{\|(u-v)u_x\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\\
&\quad+\|(u-v)u_x\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\}\\
&\leq c_1(1+\sqrt{T})\,\|u-v\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}\,\|u_x\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\\
&\quad+c_1(1+\sqrt{T})\,\|u_x-v_x\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\,\|v\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}\,.
\end{aligned}$$

Recordemos, a desigualdade de interpolação clássica (Gagliardo-Nirenberg)

$$\|w\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c\,\|w\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}\,\|w_x\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}\,, \forall w\in H_0^1(\Omega). \tag{3.10}$$

Como consequência de (3.10), temos

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))} &= (\int_0^T \|u\|^2_{L^\infty(\Omega)}\,dt)^{1/2} \\
&\leq (\int_0^T c^2 \|u\|_{L^2(\Omega)} \|u_x\|_{L^2(\Omega)}\,dt)^{1/2} \\
&\leq ((\int_0^T c^4 \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt)^{1/2} (\int_0^T \|u_x\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt)^{1/2})^{1/2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))} \leq cT^{1/4} \|u\|^{1/2}_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \|u_x\|^{1/2}_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}. \tag{3.11}$$

Assim sendo, concluímos que

$$\begin{aligned}
\|\varphi(u)-\varphi(v)\|_{\mathfrak{X}_T} &\leq c_1(1+\sqrt{T})\Big[\|u-v\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}\|u_x\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\
&\quad + \|u_x-v_x\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\|v\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}\Big] \\
&\leq c_1(1+\sqrt{T})cT^{1/4}\Big[\|u-v\|^{1/2}_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\|u_x-v_x\|^{1/2}_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\
&\quad \|u_x\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|v\|^{1/2}_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\|v_x\|^{1/2}_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\
&\quad \|u_x-v_x\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\Big] \\
&\leq \frac{c_1c}{2}(1+\sqrt{T})T^{1/4}\Big[\|u-v\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\|u_x\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \\
&\quad \|u-v\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\|u_x\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\
&\quad + \|v\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\|u_x-v_x\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\
&\quad + \|v\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\|u_x-v_x\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\Big] \\
&\leq c_2(1+\sqrt{T})T^{1/4}\Big[\|u-v\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\big(\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\big) + \\
&\quad \|u-v\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\Big(\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|v\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \\
&\quad + \|v\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\Big)\Big].
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\varphi(u)-\varphi(v)\|_{\mathfrak{X}_T} \leq c_2(1+\sqrt{T})T^{1/4}(\|u\|_{\mathfrak{X}_T}+\|v\|_{\mathfrak{X}_T})\,\|u-v\|_{\mathfrak{X}_T}\,. \tag{3.12}$$

Isto mostra que φ é uma contração na bola $\mathfrak{B}_R$ de $\mathfrak{X}_T$ se

$$2c_2(1+\sqrt{T})T^{1/4}R < 1. \tag{3.13}$$

Portanto, a prova desta etapa estará completa se mostramos que para uma escolha adequada de R e T satisfazendo (3.13), a aplicação φ aplica $\mathfrak{B}_R$ em si mesma. De fato, das estimativas prévias temos

$$\|\varphi(u)\|_{\mathfrak{X}_T} \leq c_1(1+\sqrt{T})\,\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + c_2(1+\sqrt{T})T^{1/4}\,\|u\|^2_{\mathfrak{X}_T}\,,$$

ou

$$\|\varphi(u)\|_{\mathfrak{X}_T} \leq c_1(1+\sqrt{T})\,\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + c_2(1+\sqrt{T})T^{1/4}R^2,\ \forall\, u\in\mathfrak{B}_R. \tag{3.14}$$

Tomando $c = max\{c_1, c_2\}$ temos que para $R = 4c\,\|u_0\|_{L^2(\Omega)}$ a estimativa nos dá

$$\|\varphi(u)\|_{\mathfrak{X}_T} \leq c(1+\sqrt{T}+16c^2(1+\sqrt{T})T^{1/4}\,\|u_0\|_{L^2(\Omega)})\,\|u_0\|_{L^2(\Omega)}\,. \tag{3.15}$$

Assim, para garantir que o lado direito de (3.15) é menor que R , devemos escolher $T>0$, suficientemente pequeno, tal que

$$\sqrt{T}+16c^2(1+\sqrt{T})T^{1/4}\,\|u_0\|_{L^2(\Omega)} \leq 3.$$

Isto conclui a prova da existência e unicidade local de (3.1). Para mostrar a existência global basta mostrar que, $\forall\, T>0$,

$$\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C(T, \|u_0\|_{L^2(\Omega)})$$

já que

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

Tal estimativa também é fundamental na demonstração do decaimento exponencial das soluções. Por isso, optamos por apresentá-la na próxima seção (veja as páginas 53 à 55).

□

3.2 Decaimento Exponencial

Nessa seção, mostraremos que as soluções de (3.1) decaem exponencialmente para zero. O resultado é obtido usando o método introduzido no capítulo 2. Contudo, não podemos aplicar o Teorema de Unicidade de Holmgren já que, agora, estamos lidando com uma equação semilinear. Para resolver esse problema, precisaremos provar a seguinte Propriedade de Continuação Única (PCU) para a equação semi linear:

Se $v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ resolve

$$\begin{cases} v_t + v_x + v_{xxx} + \lambda v v_x + a(x)v = 0, & \textit{em } \Omega \times (0,T) \\ v(0,t) = v(L,t) = 0, & \forall\, t \in (0,T) \\ v_x(0,t) = v_x(L,t) = 0, & \forall\, t \in (0,T) \\ v \equiv 0, & \textit{em } \omega \times (0,T) \end{cases} \tag{3.16}$$

com $\lambda \geq 0$, então, $v \equiv 0$ em $\Omega \times (0,T)$.

Estaremos discutindo a (PCU) em detalhes mais adiante. No momento, assumimos o resultado para obter o resultado central do nosso trabalho:

Teorema 3.2.1. *Sejam ω tal que a (PCU) para (3.16) se verifica e $a = a(x)$ satisfazendo (2). Então, para qualquer $L > 0$ e $R > 0$, existem constantes $c > 0$ e $\mu > 0$, tais que*

$$E(t) \leq c \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} e^{-\mu t}, \quad \forall t \geq 0$$

para qualquer solução de (3.1) com $u_0 \in L^2(\Omega)$ *satisfazendo* $\|u_0\|_{L^2(\Omega)} \leq R$.

Demonstração.

Procederemos como na prova de (2.2.2), mostrando, inicialmente, a existência de $u_x(0,t) \in L^2(0,T)$.

Consideremos uma sequência $\{u_{0,n}\} \subset D(A)$; i.e; no dominio do gerador infinitesimal do semigrupo linear $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, tal que $u_{0,n} \longrightarrow u_0$ em $L^2(\Omega)$, quando $n \longrightarrow \infty$.

Sejam u_n as soluções de (3.1) com dados inicias $u_{0,n}$. Para estas soluções regulares sabemos que a derivada da energia é dada por

$$\frac{d}{dt}E(u_n)(t) + \frac{1}{2}u^2_{n,x}(0,t) + \int_0^L a(x)u_n^2 dx = 0.$$

Agora, integrando (3.1) de $t = 0$ à $t = T$, obtemos

$$E(u_n)(T) - E(u_n)(0) \leq -\frac{1}{2}\int_0^T u^2_{n,x}(0,t)dt - \int_0^T \int_0^L a(x)u_n^2 dx. \quad (3.17)$$

Claramente,

$$E(u_n)(T) - E(u_n)(0) \longrightarrow E(u)(T) - E(u_0) \quad (3.18)$$

quando $n \longrightarrow +\infty$.

Para simplificar a notação, escreveremos $u_n = u$ e $u_{0,n} = u_0$.

Seja $q \in C^\infty([0,L] \times [0,T])$. Multiplicando a equação em (3.1) por qu e integrando em $(0,T) \times (0,L)$, obtemos

$$\int_0^T \int_0^L qu(u_t + u_x + u_{xxx} + uu_x + a(x)u)dxdt = 0.$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L quu_t dxdt &= \int_0^L \int_0^T \frac{q}{2}\frac{d}{dt}(u^2)dtdx = \int_0^L (\frac{q}{2}u^2|_0^T - \int_0^T \frac{q_t}{2}u^2 dt)dx \\
&= \int_0^L (\frac{qu^2}{2})(x,T)dx - \int_0^L (\frac{qu^2}{2})(x,0)dx \\
&\quad - \int_0^L \int_0^T q_t \frac{u^2}{2} dtdx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^T\int_0^L quu_x dxdt &= \int_0^T\int_0^L \frac{q}{2}\frac{d}{dx}(u^2)dxdt = \int_0^T(\frac{q}{2}u^2|_0^L - \int_0^L \frac{q_x}{2}u^2dx)dt \\
&= -\int_0^T\int_0^L q_x\frac{u^2}{2}dxdt
\end{aligned}
$$

$$
\int_0^T\int_0^L qua(x)udxdt = \int_0^T\int_0^L qa(x)u^2dxdt
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^T\int_0^L quu_{xxx}dxdt &= \int_0^T(quu_{xx}|_0^L - \int_0^L(q_xu+qu_x)u_{xx}dx)dt \\
&= -\int_0^T\int_0^L q_xuu_{xx}dxdt - \int_0^T\int_0^L qu_xu_{xx}dxdt \\
&= -\int_0^T(q_xuu_x|_0^L - \int_0^L(q_{xx}u+q_xu_x)u_xdx)dt \\
&\quad -\int_0^T\int_0^L \frac{q}{2}\frac{d}{dx}(u_x^2)ddxdt \\
&= \int_0^T\int_0^L(q_{xx}u+q_xu_x)u_xdxdt - \int_0^T(\frac{q}{2}u_x^2|_0^L \\
&\quad -\int_0^L\frac{q_x}{2}u_x^2dx)dt \\
&= \int_0^T\int_0^L\frac{q_{xx}}{2}\frac{d}{dx}u^2dxdt + \int_0^T\int_0^L q_xu_x^2dxdt \\
&\quad +\int_0^T(q\frac{u_x^2}{2})(0,t)dt + \int_0^T\int_0^L\frac{q_x}{2}u_x^2dxdt \\
&= -\int_0^T\int_0^L q_{xxx}\frac{u^2}{2}dxdt + \frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L q_xu_x^2dxdt \\
&\quad +\int_0^T(q\frac{u_x^2}{2})(0,t)dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^T\int_0^L quuu_xdxdt &= \int_0^T\int_0^L qu^2u_xdxdt \\
&= \int_0^T\int_0^L q\frac{1}{3}\frac{d}{dx}u^3dxdt \\
&= \frac{1}{3}\int_0^T(qu^3|_0^L - \int_0^L q_xu^3dx)dt \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^T\int_0^L q_xu^3dxdt
\end{aligned}
$$

Escolhendo $q(x,t)=x$, resulta que

$$\frac{1}{2}\int_0^L xu^2(x,T)dx-\frac{1}{2}\int_0^L xu_0^2(x)dx-\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L u^2dxdt+\frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L u_x^2dxdt$$

$$-\frac{1}{3}\int_0^T\int_0^L u^3dxdt+\int_0^T\int_0^L xa(x)u^2dxdt=0.$$

Logo,

$$\int_0^T\int_0^L u_x^2dxdt+\frac{1}{3}\int_0^L xu^2(x,T)dx+\frac{2}{3}\int_0^T\int_0^L xa(x)u^2dxdt=$$

$$\frac{1}{3}\int_0^T\int_0^L u^2dxdt+\frac{1}{3}\int_0^L xu_0^2(x)dx+\frac{2}{9}\int_0^T\int_0^L u^3dxdt.$$

Daí

$$\|u\|^2_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))}=\int_0^T\int_0^L u_x^2dxdt\leq(\frac{T+L}{3})\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{2}{9}\int_0^T\int_0^L u^3dxdt. \tag{3.19}$$

Por outro lado, segue da identidade da energia e do Teorema de imersão de Sobolev que

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^L u^3dxdt &\leq \int_0^T(\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\int_0^L u^2dx)dt\\ &\leq \int_0^T \|u\|_{L^\infty(\Omega)}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}dt\\ &\leq \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}\int_0^T c\|u\|_{H_0^1(\Omega)}dt\\ &\leq \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}(\int_0^T c^2dt)^{1/2}(\int_0^T\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)})^{1/2}\\ &\leq c\sqrt{T}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\end{aligned}$$

para alguma constante positiva c. Logo, para $\delta>0$, suficientemente pequeno, obtemos que

$$\int_0^T\int_0^L u^3dxdt\leq\frac{c^2T}{18\delta}\|u_0\|^4_{L^2(\Omega)}+\frac{9\delta}{2}\|u\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}.$$

Daí para $\delta < 1/2$ obtemos

$$\|u\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} \leq \frac{4c^2T}{81}\|u_0\|^4_{L^2(\Omega)} + 2(\frac{T+L}{3})\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.20}$$

Como consequência de (3.20), deduzimos que

$$\{u_{n,x}\} \text{ é limitada em } L^2(0,T;L^2(\Omega)); \tag{3.21}$$

$$\{u_{n,t}\} \text{ é limitada em } H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.22}$$

Também sabemos que

$$\{u_n u_{n,x}\} \text{ é limitada em } L^1(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.23}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\|u_n u_{n,x}\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} &= (\int_0^T \|u_n u_{n,x}\|^2_{L^1(\Omega)}\,dt)^{1/2} \\
&\leq (\int_0^T \|u_n\|^2_{L^2(\Omega)}\|u_{n,x}\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt)^{1/2} \\
&\leq (\sup_{0\leq t\leq T}\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)})^{1/2}(\int_0^T \|u_{n,x}\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt)^{1/2} \\
&\leq \|u_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\|u_n\|_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))}.
\end{aligned}$$

e como $u_{n,xxx} = -u_{n,t} - u_{n,x} - u_n u_{n,x} - a(x)u_n$ segue de (3.20), (3.21), (3.22) e (3.23) que

$$\{u_{n,xxx}\} \text{ é limitada em } H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)).$$

Logo,

$$\{u_n\} \text{ é limitada em } H^{-1}(0,T;H^3(\Omega))$$

e, em particular,

$$u_{n,x}(0,t) \text{ é limitada em } H^{-1}(0,T).$$

Assim, podemos extrair uma subsequência (que ainda será denotada por u_n), tal que

$$u_{n,x}(0,t) \rightharpoonup u_x(0,t) \text{ em } H^{-1}(0,T), \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Com esta subsequência retornamos a (3.17) e concluímos que $\{u_{n,x}(0,t)\}$ é limitada em $L^2(0,T)$. Novamente, podemos extrair uma subsequência que será convergente, no sentido fraco, em $L^2(0,T)$. Esse fato juntamente com a discussão anterior, mostra que

$$u_{n,x}(0,t) \rightharpoonup u_x(0,t) \; em \; L^2(0,T), \; quando \; n \longrightarrow \infty. \tag{3.24}$$

Logo, a semicontinuidade inferior da norma, (3.24) e (3.17) implicam que

$$\int_0^T \left|u_x^2(0,t)\right| dt \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} \int_0^T \left|u_{n,x}^2(0,t)\right| dt \leq 2E(u_0) < \infty.$$

A desigualdade acima garante que podemos passar o limite em ambos lados de (3.17) e mostrar que a solução $u(t)$ do sistema (3.1), com dado inicial $u_0 \in L^2(\Omega)$, satisfaz

$$E(u(t)) - E(u_0) = -\frac{1}{2}\int_0^T |u_x(0,t)|^2 \, dt - \int_0^T \int_0^L a(x)u^2(x,t)dxdt.$$

Além disso,

$$\|u\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq \frac{4c^2T}{81} \|u_0\|^4_{L^2(\Omega)} + 2\frac{T+L}{3} \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.25}$$

Agora, mostraremos que para qualquer $T > 0$ e $R > 0$, existe uma constante positiva $c = c(R,T) > 0$, tal que

$$\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c\{\int_0^T u_x^2(0,t)dt + 2\int_0^T \int_0^L a(x)u^2(x,t)dxdt\} \tag{3.26}$$

para toda solução de (3.1) com $\|u_0\|_{L^2(\Omega)} \leq R$.

Este fato, junto com a lei de dissipação da energia (3.3) e a propriedade de semigrupo associado ao modelo, é suficiente para obter o decaimento exponencial local uniforme de $E(t)$. De fato, escolhendo $q(x,t) = (T-t)$, obtemos

$$T\int_0^L u_0^2 dx = \int_0^T\int_0^L u^2 dxdt + \int_0^T (T-t)u_x^2(0,t)dt + 2\int_0^T\int_0^L (T-t)a(x)u^2 dxdt \tag{3.27}$$

pois

$$\int_0^T\int_0^L (T-t)u^2 u_x dxdt = \int_0^T \frac{T-t}{3}\int_0^L \frac{d}{dx}u^3 dxdt = \int_0^T (u^3(L,t) - u^3(0,t))dt = 0.$$

Logo, de (3.27) deduzimos que

$$\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^L u^2 dxdt + \int_0^T u_x^2(0,t)dt + 2\int_0^T\int_0^L a(x)u^2 dxdt. \tag{3.28}$$

Assim para provar (3.26) é suficiente mostrar que para todo $T > 0$ e $R > 0$, existe uma constante positiva $c_1 = c_1(R,T)$, tal que

$$\int_0^T\int_0^L u^2 dxdt \leq c_1\{\int_0^T u_x^2(0,t)dt + 2\int_0^T\int_0^L a(x)u^2 dxdt\} \tag{3.29}$$

para qualquer solução de (3.1) com $\|u_0\|_{L^2(\Omega)} \leq R$.

A demonstração será feita usando um argumento de contradição. Suponhamos que (3.29) não se verifique. Então, existe uma sequência de funções $\{u_n\} \subset L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ que resolvem (3.1), satisfazendo $\|u_n(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)} \leq R$ e tal que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\|u_n\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}}{\int_0^T u_{n,x}^2(0,t)dt + 2\int_0^T\int_0^L a(x)u_n^2 dxdt} = +\infty. \tag{3.30}$$

Seja $\lambda_n = \|u_n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$ e definamos $v_n(x,t) = u_n(x,t)/\lambda_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a função v_n satisfaz

$$\begin{cases} v_{n,t} + v_{n,x} + v_{n,xxx} + \lambda_n v_n v_{n,x} + a(x)v_n = 0 \qquad em\ \Omega \times (0,T) \\ v_n(0,t) = v_n(L,t) = 0 \qquad \forall\, t \in (0,T) \\ v_{n,x}(L,t) = 0 \qquad \forall\, t \in (0,T) \\ v_n(x,0) = v_{n,0} = u_n(x,0)/\lambda_n \qquad em\ \ \Omega, \end{cases} \tag{3.31}$$

$$\|v_n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = 1, \tag{3.32}$$

e

$$\int_0^T v_{n,x}^2(0,t)dt + 2\int_0^T \int_0^L a(x)v_n^2 dxdt \longrightarrow 0,\ quando\ n \longrightarrow \infty. \tag{3.33}$$

Usando (3.28) segue que $v_n(\cdot,0)$ é limitada em $L^2(\Omega)$ e por (3.25) segue que

$$\|v_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq c.,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{3.34}$$

para alguma constante $c > 0$. Por outro lado, $v_n v_{n,x} \in L^2(0,T;L^1(\Omega))$ e

$$\begin{aligned} \|v_n v_{n,x}\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} &= (\int_0^T \|v_n v_{n,x}\|_{L^1(\Omega)}^2 dt)^{1/2} \\ &\leq (\int_0^T \|v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \|v_{n,x}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt)^{1/2} \\ &\leq (\sup_{0\leq t\leq T} \|v_n\|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2} (\int_0^T \|v_{n,x}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt)^{1/2} \\ &\leq \|v_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \|v_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}. \end{aligned}$$

Assim, por (3.34) garantimos que existe $c > 0$, tal que

$$\|v_n v_{n,x}\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} \leq c. \tag{3.35}$$

Agora, observe que $\{\lambda_n\}$ é limitada. De fato, como $v_n(x,0)$ é limitada em $L^2(\Omega)$ e $\|u_n(x,0)\| \leq R$ segue de $\dfrac{1}{|\lambda_n|}\|u_n(x,0)\|_{L^2(\Omega)} = \|v_n(x,0)\|_{L^2(\Omega)}$ que

$\{\lambda_n\}$ é limitada. Logo, segue de (3.31), (3.32), (3.34) e (3.35) que $\{v_{n,t}\}$ é limitada em $L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$. De fato,

$$\begin{aligned} \|v_{n,x}\|_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))} &\leq c\,\|v_{n,x}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\ &= c\,\|v_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \end{aligned}$$

$$\|v_n v_{n,x}\|_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))} \leq c\,\|v_n v_{n,x}\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} \leq c_1$$

e de

$$\begin{aligned} |\langle v_{n,xxx},\varphi\rangle|_{H^{-2}(\Omega)\times H_0^2(\Omega)} &= |\langle v_{n,x},\varphi_{xx}\rangle|_{H^{-2}(\Omega)\times H_0^2(\Omega)} \\ &\leq \|v_{n,x}\|_{L^2(\Omega)}\,\|\varphi_{xx}\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \|v_n\|_{H_0^1(\Omega)}\,\|\varphi\|_{H_0^2(\Omega)} \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} \|v_{n,xxx}\|_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))} &= (\int_0^T \|v_{n,xxx}\|^2_{H^{-2}(\Omega)}\,dt)^{1/2} \\ &\leq c(\int_0^T \|v_n\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,dt)^{1/2} \\ &= c\,\|v_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\,. \end{aligned}$$

Portanto, $v_{n,t} \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$. Como $H_0^1(\Omega)$ possui imersão compacta em $L^2(\Omega)$, segue de (3.34) e de [18, Corolário 4] que podemos extrair uma subsequência $\{v_k\}$ de $\{v_n\}$, tal que

$$\begin{cases} v_k \longrightarrow v \quad em \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)) \\ v_k \rightharpoonup^* v \quad em \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ v_{k,t} \rightharpoonup^* v_t \quad em \quad L^2(0,T;H^{-2}(\Omega)). \end{cases}$$

e por (3.32)

$$\|v\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = 1. \tag{3.36}$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
0 &= \liminf_{n\longrightarrow\infty}\{\int_0^T v_{n,x}^2(0,t)dt + 2\int_0^T\int_0^L a(x)v_n^2 dxdt\} \\
&\geq \{\int_0^T v_x^2(0,t)dt + 2\int_0^T\int_0^L a(x)v^2 dxdt\},
\end{aligned}
$$

donde deduzimos que $a(x)v \equiv 0$ em $\Omega \times (0,T)$. Assim, $v \equiv 0$ em $\omega \times (0,T)$ e $v_x(0,t) = 0$ em $(0,T)$.

Agora, temos dois casos a serem considerados:

- Existe uma subsequência $\{\lambda_k\}$ de $\{\lambda_n\}$, tal que $\lambda_k \longrightarrow 0$ quando $k \longrightarrow +\infty$. Neste caso, o limite de v satisfaz o problema linear

$$
\begin{cases}
v_t + v_x + v_{xxx} = 0, & em\ \Omega \times (0,T) \\
v(0,t) = v(L,t) = 0, & \forall t \in (0,T) \\
v_x(L,t) = v_x(0,t) = 0, & \forall t \in (0,T) \\
v(x,t) = 0, & \forall (x,t) \in \omega \times (0,T).
\end{cases}
\tag{3.37}
$$

  Então, pelo Teorema de Unicidade de Holmgren, $v \equiv 0$ em $\Omega \times (0,T)$, o que contradiz (3.36).

- Existe uma subsequência $\{\lambda_k\}$ de $\{\lambda_n\}$ tal que $\lambda_k \longrightarrow \lambda > 0$, quando $k \longrightarrow +\infty$. Neste caso, a função limite v resolve

$$
\begin{cases}
v_t + v_x + v_{xxx} + \lambda v v_x + a(x)v = 0, & em\ \Omega \times (0,T) \\
v(0,t) = v(L,t) = 0, & \forall t \in (0,T) \\
v_x(L,t) = 0, & \forall t \in (0,T)
\end{cases}
$$

  satisfazendo a condição extra

$$
\begin{cases}
v_x(0,t) = 0 & \forall t \in (0,T) \\
v \equiv 0 & em\ \ \omega \times (0,T).
\end{cases}
$$

Assim, pela (PCU) assumida anteriormente, temos que $v \equiv 0$ em $\Omega \times (0,T)$ e, novamente, temos uma contradição. Portanto, a demonstração está concluída. $\square$

Observação 3.2.1. *O termo* $\int_0^T \int_0^L u^3 dxdt$ *também pode ser estimado usando a desigualdade,*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|^{\alpha}_{L^q(\Omega)} \|u\|^{1-\alpha}_{W^{1,r}(\Omega)}$$

de Gagliardo-Nirenberg, onde $\alpha(\frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{r}) = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$.

Teorema 3.2.2. *Sejam u solução do problema (3.1) obtida no Teorema (3.1.1), ω e $a(x)$ definidos em (2). Se $u_x(0,t) = 0$ e $u \equiv 0$ em $\omega \times (0,T)$, então*

$$u \in L^2(0,T; H^3(\Omega)) \cap H^1(0,T; L^2(\Omega)).$$

Consequentemente, a (PCU) se verifica e $u \equiv 0$.

No que segue, provaremos algums resultados técnicos para obter a regularidade necessária.

Lema 3.2.1. *Seja u a solução do problema (3.1) obtida no Teorema (3.1.1). Então, o problema*

$$\begin{cases} v_t + v_x + v_{xxx} + (u(x,t)v)_x + a(x)v = 0, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ v(0,t) = v(L,t) = 0, & \forall t \in (0,T) \\ v_x(L,t) = 0, & \forall t \in (0,T) \\ v(x,0) = v_0(x), & \text{em } \Omega \end{cases} \tag{3.38}$$

tem uma única solução fraca $v \in L^2(0,T; H^1_0(\Omega)) \cap L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$, sempre que $v_0 \in L^2(\Omega)$.

Demonstração.

A demonstração da existência segue os memos argumentos usados na demonstração do Teorema 3.1.1 e por isso será omitida. Assim, para concluir a prova do Lema 3.2.1 é suficiente provar que a solução existe globalmente. Para isto, serão necessários algumas estimativas a priori, que serão obtidas em diversos pasos.

Primeiramente, multiplicamos a equação em (3.38) por v e integremos por partes em $(0, L)$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L v^2 dx + \frac{1}{2}v_x^2(0,t) + \int_0^L a(x)v^2 dx = \int_0^L uvv_x dx, \tag{3.39}$$

pois $\displaystyle\int_0^L v(uv)_x dx = -\int_0^L uvv_x dx$. Integrando a igualdade acima de 0 a T e aplicando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Hölder, segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^L v^2(x,T)dx &\leq \int_0^L v_0^2 dx + 2\int_0^T\int_0^L |uvv_x|\, dxdt \\
&\leq \int_0^L v_0^2 dx + 2(\int_0^T \|uv\|_{L^2(\Omega)} \|v_x\|_{L^2(\Omega)}\, dt) \\
&\leq \int_0^L v_0^2 dx + 2(\int_0^T \|uv\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt)^{1/2}(\int_0^T \|v_x\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt)^{1/2} \\
&\leq \int_0^L v_0^2 dx + \int_0^T \|u\|^2_{L^\infty(\Omega)} \|v\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt + \int_0^T \|v_x\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Para estimar os dois últimos termos no lado direito de (3.40) multiplicamos a equação (3.38) por xv e integramos em $(0, L) \times (0, T)$:

$$\int_0^T\int_0^L v_x^2 dxdt + \frac{1}{3}\int_0^L xv^2(x,T)dx + \frac{2}{3}\int_0^T\int_0^L xa(x)v^2 dxdt =$$

$$\frac{1}{3}\int_0^T\int_0^L v^2 dxdx + \frac{1}{3}\int_0^L xv_0^2(x)dx + \frac{2}{3}\int_0^T\int_0^L xuvv_x dxdt + \frac{2}{3}\int_0^T\int_0^L uv^2 dxdt. \tag{3.41}$$

Pois

$$\int_0^T \int_0^L xv(uv)_x dxdt = xv(uv)|_0^L - \int_0^L uv^2 dx - \int_0^L xuvv_x dx,$$

obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_0^L v_x^2 dxdt \quad &\leq \quad \frac{2}{3}\int_0^T \int_0^L xuvv_x dxdt + \frac{2}{3}\int_0^T \int_0^L uv^2 dxdt + \\ &\quad \frac{1}{3}\int_0^T \int_0^L v^2 dxdt + \frac{1}{3}\int_0^L xv_0^2 dx, \end{aligned} \tag{3.42}$$

pois os outros termos que aperecem no lado esquerdo de (3.41) são positivos. Assim, procedendo como em (3.40) e usando a desigualdade de Poncairé, deduzimos que

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\int_0^T \int_0^L xuvv_x dxdt \quad &\leq \quad \frac{2L}{3}\int_0^T \int_0^L |uvv_x|\, dxdt \\ &\leq \quad \frac{2L}{3}\int_0^T \|uv\|_{L^2(\Omega)} \|v_x\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \quad \frac{2L}{3}(\int_0^T \|uv\|_{L^2(\Omega)}^2 dt)^{1/2}(\int_0^T \|v_x\|_{L^2(\Omega)}^2 dt)^{1/2} \\ &\leq \quad \frac{L}{3\delta}\int_0^T \|uv\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{L\delta}{3}\int_0^T \|v_x\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &\leq \quad \frac{L}{3\delta}\int_0^T \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{L\delta}{3}\int_0^T \|v_x\|_{L^2(\Omega)}^2 dt,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\int_0^T \int_0^L uv^2 dxdt \quad &\leq \quad \frac{2}{3}\int_0^T \int_0^L \left|uv^2\right| dxdt \\ &\leq \quad \frac{2}{3}\int_0^T \|uv\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} dt \\ &\leq \quad \frac{2c}{3}(\int_0^T \|uv\|_{L^2(\Omega)}^2 dt)^{1/2}(\int_0^T \|v_x\|_{L^2(\Omega)}^2 dt)^{1/2} \\ &\leq \quad \frac{c}{3\delta}\int_0^T \|uv\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{c\delta}{3}\int_0^T \|v_x\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &\leq \quad \frac{c}{3\delta}\int_0^T \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{c\delta}{3}\int_0^T \|v_x\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^L v_x^2dxdt &\leq \frac{c+L}{3\delta}\int_0^T \|u\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|v\|^2_{L^2(\Omega)}dt + \frac{(c+L)\delta}{3}\int_0^T\int_0^L v_x^2dxdt\\ &+ \frac{1}{3}\int_0^T\int_0^L v^2dxdt + \frac{L}{3}\int_0^L v_0^2dx. \qquad (3.43)\end{aligned}$$

Portanto, para um $\delta > 0$, suficientemente pequeno, temos que existe $c > 0$, tal que

$$\int_0^T\int_0^L v_x^2dxdt \leq c\{\int_0^L v_0^2dx + \int_0^T (1+\|u\|^2_{L^\infty(\Omega)})\|v\|^2_{L^2(\Omega)}dt\}. \qquad (3.44)$$

Substituindo (3.44) em (3.40) obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^L v^2(x,T)dx &\leq \int_0^L v_0^2dx + \int_0^T \|u\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|v\|^2_{L^2(\Omega)}dt + \int_0^T\int_0^L v_x^2dxdt\\ &\leq \int_0^L v_0^2dx + \int_0^T \|u\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|v\|^2_{L^2(\Omega)}dt\\ &\quad +c\{\int_0^L v_0^2dx + \int_0^T (1+\|u\|^2_{L^\infty(\Omega)})\|v\|^2_{L^2(\Omega)}dt\}\\ &\leq (c+1)\{\int_0^L v_0^2dx + \int_0^T (1+\|u\|^2_{L^\infty(\Omega)})\|v\|^2_{L^2(\Omega)}dt\}.\end{aligned}$$

Logo, aplicando a desigualdade de Gronwall e o Teorema 3.1.1 garantimos a existência de uma constante $c > 0$, tal que

$$\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c\|v_0\|^2_{L^2(\Omega)}exp(c\int_0^T (1+\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)})dt).$$

Assim,

$$\|v\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C, \qquad (3.45)$$

onde $C = C(T, \|u_0\|_{L^2(\Omega)}, \|v_0\|_{L^2(\Omega)})$.

Por outro lado, combinando (3.44), (3.45) e o Teorema 3.1.1 segue que

$$\begin{aligned}\|v\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} &\leq c\{\int_0^L v_0^2dx + \int_0^T (1+\|u\|^2_{L^\infty(\Omega)}dt)\|v\|^2_{L^2(\Omega)}\}\\ &\leq c\|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} + c\|v\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\int_0^T (1+\|u\|^2_{L^\infty(\Omega)})dt\\ &\leq C, \qquad (3.46)\end{aligned}$$

onde $C = C(T, \|u_0\|_{L^2(\Omega)}, \|v_0\|_{L^2(\Omega)})$. $\square$

Lema 3.2.2. *Existe uma constante positiva $C = C(T, \|u_0\|_{L^2(\Omega)})$, tal que*

$$\|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\{\int_0^T v_x^2(0,t)dt + \int_0^T \int_0^L a(x)v^2 dxdt + \|v_0\|^2_{H^{-3}\Omega}\} \qquad (3.47)$$

para toda solução v de (3.38).

Demonstração.
Para provar (3.47), usaremos técnicas multiplicativas e também o argumento de "Compacidade-Unicidade".

Multiplicando a equação (3.38) por $(T-t)v$ e integrando em $(0,L)\times(0,T)$ obtemos

$$\begin{aligned} T\|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_0^T \int_0^L v^2 dxdt + \int_0^T (T-t)v_x^2(0,t)dt \\ &+ 2\int_0^T \int_0^L (T-t)a(x)v^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^L (T-t)u_x v^2 dxdt. \end{aligned} \qquad (3.48)$$

Como

$$\int_0^T \int_0^L (T-t)v(uv)_x dxdt = \int_0^T \int_0^L (T-t)(u_x v^2 + uvv_x)dxdt$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L (T-t)uvv_x dxdt &= \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^L (T-t)u\frac{d}{dx}v^2 dxdt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^T ((T-t)uv^2|_0^L - \int_0^L (T-t)u_x v^2 dx)dt \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^T \int_0^L (T-t)u_x v^2 dxdt \end{aligned}$$

temos que

$$\int_0^T \int_0^L (T-t)v(uv)_x dxdt = \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^L (T-t)u_x v^2 dxdt.$$

Retornando a (3.48), com as identidades acima garantimos que

$$\begin{aligned}\|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^L v^2dxdt + \int_0^T v_x^2(0,t)dt + 2\int_0^T\int_0^L a(x)v^2dxdt\\ &+ \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L |u_x|\, v^2dxdt. \end{aligned}\tag{3.49}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^L |u_x|\, v^2dxdt &\leq \int_0^T \|u_x\|_{L^2(\Omega)}\|v\|^2_{L^4(\Omega)}\,dt \qquad (3.50)\\ &\leq \|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\|v\|^2_{L^4(0,T;L^4(\Omega))}\,. \end{aligned}$$

Logo de (3.49), (3.50) e do Teorema 3.1.1 concluimos que existe uma constante $c > 0$ satisfazendo

$$\begin{aligned}\|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{1}{T}\|v\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \int_0^T v_x^2(0,t)dt\\ &+ 2\int_0^T\int_0^L a(x)v^2dxdt + c\,\|v\|^2_{L^4(0,T;L^4(\Omega))}\,, \end{aligned}$$

e dado que

$$\|v\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \sqrt{TL}\,\|v\|^2_{L^4(0,T;L^4(\Omega))}$$

temos

$$\begin{aligned}\|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq c\,\|v\|^2_{L^4(0,T;L^4(\Omega))} + \int_0^T v_x^2(0,t)dt\\ &+ 2\int_0^T\int_0^L a(x)v^2dxdt \end{aligned}\tag{3.51}$$

onde $c > 0$, só depende de T e $\|u_0\|_{L^2(\Omega)}$. Consequentemente, para provar (3.47), é suficiente mostrar que para qualquer $T > 0$ existe uma constante positiva $C = C(T)$, tal que

$$\|v\|^2_{L^4(0,T;L^4(\Omega))} \leq C\{\int_0^T v_x^2(0,t)dt + \int_0^T\int_0^L a(x)v^2dxdt + \|v_0\|^2_{H^{-3}(\Omega)}\} \tag{3.52}$$

para qualquer solução de (3.38).

Suponhamos, que (3.52) não se verifique. Então, existe uma sequência de funções $v_n \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, que resolve (3.39) e

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\|v_n\|^2_{L^4(0,T;L^4(\Omega))}}{\int_0^T v_{n,x}^2(0,t)dt + \int_0^T \int_0^L a(x)v_n^2 dxdt + \|v_{n,0}\|^2_{H^{-3}(\Omega)}} = \infty. \quad (3.53)$$

Seja $\lambda_n = \|v_n\|_{L^4(0,T;L^4(\Omega))}$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $w_n(x,t) = v_n(x,t)/\lambda_n$. A função w_n satisfaz

$$\begin{cases} w_{n,t} + w_{n,x} + w_{n,xxx} + (uw_n)_x + a(x)w_n = 0, & em\ \Omega \times (0,T) \\ w_n(0,t) = w_n(L,t) = 0, \quad \forall\, t > 0 \\ w_{n,x}(L,t) = 0, \quad \forall\, t > 0 \\ w_n(x,0) = v_n(x,0),/\lambda_n = v_{n,0}/\lambda_n \quad \forall\, x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.54)$$

Além disso,

$$\|w_n\|_{L^4(0,T,L^4(\Omega))} = 1 \quad (3.55)$$

e

$$\int_0^T w_{nx}^2(0,t)dt + \int_0^T \int_0^L a(x)w_n^2 dxdt + \|w_{n0}\|^2_{H^{-3}(\Omega)} \longrightarrow 0, \quad (3.56)$$

quando $n \longrightarrow \infty$.

Usando (3.51), (3.55) e (3.56) segue que $w_n(x,0)$ é limitada em $L^2(\Omega)$ e, portanto, de acordo com (3.46),

$$\|w_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C, \quad (3.57)$$

para alguma constante $C > 0$. Por outro lado,

$$\|(uw_n)_x\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} \leq \|u_x w_n\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} + \|uw_{nx}\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))}$$

e

$$
\begin{aligned}
\|uw_{n,x}\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} &= \left(\int_0^T \|uw_{n,x}\|_{L^1(\Omega)}^2\, dt\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_0^T \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \|w_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2\, dt\right)^{1/2} \\
&\leq \sup_{0\leq t\leq T} \|u\|_{L^2(\Omega)} \left(\int_0^T \|w_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2\right)^{1/2} \\
&\leq \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \|w_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}.
\end{aligned}
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
\|(uw_n)_x\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} &\leq \|w_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\
&+ \|u\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \|w_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}. \qquad (3.58)
\end{aligned}
$$

Então, por (3.58) e pela analise prévia obtemos que existe $C > 0$, tal que

$$
\|(uw_n)_x\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} \leq C. \qquad (3.59)
$$

Logo,

$$
\{w_{n,t}\} \textit{ é limitada em } L^2(0,T;H^{-2}(\Omega)). \qquad (3.60)
$$

De fato, de acordo com (3.54) $w_{n,t}$ satisfaz

$$
w_{n,t} = -w_{n,x} - w_{n,xxx} - (uw_n)_x - a(x)w_n \text{ em } \mathfrak{D}'(0,T;H^{-2}(\Omega))
$$

e (3.57)-(3.59) garantem a limitação (em $L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$) dos termos que aparecem no lado direito da equação acima.

Agora, mostraremos que

Existe $s > 0$, tal que $\{w_n\}$ é limitada em $L^4(0,T;H^s(\Omega))$ e a imersão $H^s(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ é compacta.

De fato, como $\{w_n\}$ é limitada em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, por interpolação podemos deduzir que $\{w_n\}$ é limitada em

$$[L^q(0,T;L^2(\Omega)),L^2(0,T;H_0^1(\Omega))]_\theta = L^p(0,T,[L^2(\Omega);H_0^1(\Omega)]_\theta)$$

onde $\dfrac{1}{p}=\dfrac{1-\theta}{q}+\dfrac{\theta}{2}$ e $0<\theta<1$. Assim, escolhendo $p=4,\ q=8\ e\ \theta=2/3$ o resultado se verifica com $s=1/3$; isto é;

$$[L^2(\Omega),H_0^1(\Omega)]_{2/3}=H^{1/3}(\Omega),$$

e a imersão $H^{1/3}(\Omega)\hookrightarrow L^4(\Omega)$ é compacta.

Então, usando a afirmação acima, (3.60) e um resultado de compacidade clássico [18, Corolário 4], podemos extrair uma subsequência de $\{w_n\}$, que também denotaremos por $\{w_n\}$, tal que

$$\begin{cases} w_n \longrightarrow w \quad em \quad L^4(0,T;L^4(\Omega)) \\ w_n \rightharpoonup^* w \quad em \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ w_{n,t} \rightharpoonup^* w_t \quad em \quad L^2(0,T;H^{-2}(\Omega)). \end{cases} \tag{3.61}$$

e por (3.55),

$$\|w\|_{L^4(0,T;L^4(\Omega))}=1. \tag{3.62}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} 0 &= \liminf_{n\longrightarrow\infty}\{\int_0^T |w_{nx}|^2\,dt+\int_0^T\int_0^L a(x)w_n^2dxdt+\|w_n(\cdot,0)\|^2_{H^{-3}(\Omega)}\} \\ &\geq \int_0^T |w_x(0,t)|^2\,dt+\int_0^T\int_0^L a(x)w^2dxdt+\|w(\cdot,0)\|^2_{H^{-3}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Isto implica, em particular, que $w(x,0)=0$. Consequentemente, o limite w que resolve o sistema

$$\begin{cases} w_t+w_x+w_{xxx}+(uw)_x+a(x)w=0, \qquad em\ \Omega\times(0,T) \\ w(0,t)=w(L,t)=0, \qquad \forall\, t>0 \\ w(0,t)=w_x(L,t)=0, \qquad \forall\, t>0 \\ w(x,0)=0, \qquad \forall\, x\in\Omega \end{cases} \tag{3.64}$$

é identicamente nulo, i.e., $w \equiv 0$. Isto contradiz (3.62) e, necessariamente, (3.52) se verifica. $\square$

Agora estamos em condições para provar o Teorema 3.2.3.

Demonstração do Teorema 3.2.3.

Seja $u_0 \in L^2(\Omega)$. Diferenciando a equação em (3.1) com respeito a t obtemos o sistema (3.38) com

$$v_0(x) = v(x,0) = u_t(x,0) = -u_{0,x} - u_{0,xxx} - u_0 u_{0,x} - a(x)u_0 \in H^{-3}(\Omega).$$

Por outro lado, se $u_x(0,t)$ *e* $a(x)u$ se anulam então $v_x(0,t) = 0$ e $a(x)v \equiv 0$. Consequentemente, segue do Lema 3.1.2 que $v_0 \in L^2(\Omega)$. Logo, combinando o Lema 3.1.1 e o sistema (1) obtemos

$$u_t = v \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{3.65}$$

$$\begin{cases} u_{xxx} = -u_t - u_x - uu_x - a(x)u, \; em \; (0,L) \times (0,T) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \in (0,T). \end{cases} \tag{3.66}$$

Assim, o Teorema 3.1.1 junto com (3.65) e (3.66) nos permite concluir que $u \in L^2(0,T;H^3(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$. Finalmente, usando a (PCU) provada em [17, Corolário 1.2 e Teorema 4.2] temos que $u \equiv 0$. $\square$

3.3 Decaimento Exponencial de Soluções de Pequenas Amplitudes

Seja $S(\cdot)$ o semigrupo linear associado a (3.1). Sabemos que

$$\|S(t)\|_{\mathfrak{L}(L^2(\Omega))} \leq Ce^{-\mu t} \tag{3.67}$$

em dois casos:

- quando $a \equiv 0$ e $L \notin \mathfrak{C}$,
- quando $a \geq a_0 > 0$ q.s. num subconjunto aberto não vazio ω de $(0, L)$, e $L \in \mathfrak{C}$.

  Seja $T > 0$ e $\gamma < 1$, tais que

$$\|S(t)\|_{\mathfrak{L}(L^2(\Omega))} = \gamma < 1. \tag{3.68}$$

Como as soluções do problema não linear satisfazem a fórmula de variação de parametros (3.6), temos que

$$u(T) = S(T)u_0 + \int_0^T S(T-s)[uu_x](s)ds. \tag{3.69}$$

Além disso, segue de (3.35) que

$$\|u(T)\|_{L^2(\Omega)} \leq \gamma \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \|uu_x\|_{L^2(\Omega)} ds. \tag{3.70}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\int_0^T \|uu_x\|_{L^2(\Omega)} dt &\leq \int_0^T \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_x\|_{L^2(\Omega)} dt \\ &\leq c\int_0^T \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|u_x\|_{L^2(\Omega)} dt \\ &= c\|u\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))};\end{aligned}$$

ou seja;

$$\|u(T)\|_{L^2(\Omega)} \leq \gamma \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + c\|u\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}, \quad c > 0.$$

Como de (3.25) também temos

$$\|u\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C[\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|^4_{L^2(\Omega)}],$$

combinando as duas últimas estimativas, obtemos

$$\|u(T)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \left[\gamma + C[\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|^3_{L^2(\Omega)}\right].$$

Agora, escolhendo

$$C[\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|^3_{L^2(\Omega)}] < \frac{1-\gamma}{2}, \tag{3.71}$$

segue que

$$\|u(T)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1+\gamma}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)} . \tag{3.72}$$

Este fato, junto com a propriedade de semigrupo associada ao modelo nos dão o decaimento exponencial das soluções com dados iniciais pequenos.

Apêndice

Teorema 3.3.1. *Se ω contém dois conjuntos da forma $(0,\delta)$ e $(L-\delta, L)$, para algum $\delta > 0$, e $v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ é solução de*

$$\left\{\begin{array}{ll} v_t + v_x + v_{xxx} + \lambda v v_x = 0, & em\ \Omega \times (0,T) \\ v(0,t) = v(L,t) = 0, & \forall\, t \in (0,T) \\ v_x(0,t) = v_x(L,t) = 0, & \forall\, t \in (0,T) \\ v \equiv 0, & em\ \omega \times (0,T) \end{array}\right. \tag{3.73}$$

com $\lambda \geq 0$ e $T > 0$, então, necesariamente $v \equiv 0$ em $\Omega \times (0,T)$.

Demonstração.

Como $v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ segue que $v_t \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$. Daí, como $v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $v_t \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$, então por [9] e [19, Capitulo III, Lema 1.4] segue que v é contínua no sentido fraco; ou seja; $v \in C_W([0,T];H^{-2}(\Omega))$. Por outro lado, de acordo a estrutura de ω, temos que $v \equiv 0$ em $\{(0,\delta) \cup (L-\delta, L)\} \times (0,T)$. Logo, a função $V = V(x,t)$

$$V(x,t) = \left\{\begin{array}{ll} v(x,t)\ se\ (x,t) \in (\delta, L-\delta) \times (0,T) \\ 0 \quad se \quad (x,t) \in \{\mathbb{R} - (\delta, L-\delta)\} \times (0,T), \end{array}\right.$$

que estende v a todo $\mathbb{R}$, satisfaz

$$\left\{\begin{array}{l} V_t + V_x + V_{xxx} + \lambda V V_x = 0 \ \ em \ \ \mathbb{R} \times (0,T) \\ V(x,0) = \varphi(x) \ \ em \ \ \mathbb{R} \end{array}\right.$$

onde

$$\varphi(x) = \begin{cases} v(x,0) \;\; se \;\; x \in (\delta, L-\delta) \\ 0 \qquad se \;\; (x,t) \in \{\mathbb{R} - (\delta, L-\delta)\}. \end{cases}$$

Assim, se consideramos $W(x,t) = V(x+t,t)$, então W resolve

$$\begin{cases} W_t + W_{xxx} + \lambda W W_x = 0 \;\; em \;\; \mathbb{R} \times (0,T) \\ W(x,0) = \varphi(x) \;\; em \;\; \mathbb{R}. \end{cases}$$

Dado que φ tem suporte compacto e pertence a $L^2(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi^2(x) exp(2bx) dx < \infty, \quad \forall\, b > 0.$$

Logo, pelas propriedades de regularidade provadas por Kato [4, Teorema 12.1], $W \in C^\infty(I \times (0,T))$. Portanto, aplicando o resultado de continuação única em [21, Teorema 4.3], temos $V \equiv 0$ e, consequentemente,

$$v(x,t) = 0, \quad em \quad \Omega \times (0,T),$$

o que completa a demonstração.

□

Referências Bibliográficas

[1] R. A. Adams and J. F. Fournier, Sobolev Spaces, Academic Press, New york, (2003).

[2] H. Brézis, Analise Fonctionelle. Théorie et Applications. DUNOD, Paris (1999).

[3] A. M. Gomes, Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução, Instituto de Matemática-UFRJ, Rio de Janeiro, (1985).

[4] T. Kato, On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation. Stud. Appl. Math. Adv. , in Math. Suppl. Stud. 8 (1983) 93-128.

[5] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag New York (1966).

[6] D. J. Korteweg and G. de Vries, On the change of form of long waves advancing in a retangular canal, and a new type of long stacionary waves. Philos. Mag 39 (1895) 422-423.

[7] S. N. Kruzhkov and A. V. Faminskii, Generalized Solution of the Cauchy Problem for the Korteweg-de Vries equation,

Math. de Recheiches on Mathématiques Appliquées, Masson, Paris 8 (1988).

[8] F. Linares and G. Ponce, Introduction to Nonlinear Dispersive Equations. Publicações Matemáticas, IMPA (2004)

[9] J.L. Lions and E. Magenes, Problèmes Aux Limites non Homogénes et Applications. Tome 1, Dunod, Paris, (1968).

[10] L. A. Medeiros, & Milla M. M. A., Introdução aos Espaços Sobolev e às Equações Diferencias Parciais. Textos de Método Matemáticos, n 25 IM-UFRJ, Rio de Janeiro (1993).

[11] L.A. Medeiros, P. H. Rivera, Espaços de Sobolev e Aplicações às Equações Diferenciais Parciais. Textos de Métodos Matemáticos n 9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro

[12] G. P. Menzala, C. F. Vasconcellos and E. Zuazua., Stabilization of the Korteweg-de Vries equation whit localized damping. Quartely Appl. Math. LX (2002) 111-129.

[13] A. F. Pazoto, Unique Continuation for the Korteweg-de Vries equation with localized damping. ESAIM. Control opt. (2005) 473-486.

[14] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, (1983).

[15] J. E. Rivera, Teoria das Distribuições e Equações Diferencias Parciais, Série de Textos de Graduação, Rio de Janeiro (2004).

[16] L. Rosier, Exact boundary controllability for the Korteweg-de Vries equation on a bounded domain ESAIM: COCV2 (1997) 33-55.

[17] J. C. Saut and B. Sheurer, Unique Continuation for some evolution equations. J. Diff. Equations 66 (1987) 118-139.

[18] J. Simon, Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$. Annali di Matematica Pura ed Appicata CXLVI (IV) (1987) 65-96.

[19] R. Teman, Navier-Stokes Equations, Studies in Mathematics and its Applications 2, North-Holland, (1977).

[20] K. Yosida, Functional Analysis, Springer Verlag, Berlin (1969).

[21] B. Y. Zhang, Unique continuation for the Korteweg-de Vries equation SIAM J. Control Opt. 37 (1999) 55-71.

[22] B. Y. Zhang, Exact boundary controllability of the Korteweg-de Vries equation. SIAM J. Control Opt. 37 (1999) 543-565.

[23] E. Zuazua, Contrôllabilité exacte de quelques modéles de plaques en un temps arbitrairement petit, Appendix I in [11] 465-491.

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo