

MINISTÉRIO DA DEFESA  
EXÉRCITO BRASILEIRO  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA  
CURSO DE MESTRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ANA CLÁUDIA MAGALHÃES

MÉTODOS SEM MALHA APLICADOS A PROBLEMAS DIFUSIVOS-  
CONVECTIVOS

Rio de Janeiro

2008

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA**

**ANA CLÁUDIA MAGALHÃES**

**MÉTODOS SEM MALHA APLICADOS A PROBLEMAS DIFUSIVOS-  
CONVECTIVOS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Marcelo José Colaço – D.C.

**Rio de Janeiro**

**2008**

c2008

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

Praça General Tibúrcio, 80 – Praia Vermelha

Rio de Janeiro - RJ CEP: 22290-270

Este exemplar é de propriedade do Instituto Militar de Engenharia, que poderá incluí-lo em base de dados, armazenar em computador, microfilmear ou adotar qualquer forma de arquivamento.

É permitida a menção, reprodução parcial ou integral e a transmissão entre bibliotecas deste trabalho, sem modificação de seu texto, em qualquer meio que esteja ou venha a ser fixado, para pesquisa acadêmica, comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do autor e do orientador.

M188n	Magalhães, Ana Cláudia Métodos sem malha aplicados a problemas difusivos-convectivos / Ana Cláudia Magalhães. - Rio de Janeiro: IME, 2008.  135p.: il.,graf.,tab.  Dissertação (mestrado) - Instituto Militar de Engenharia, 2008.  1. Função de base radial 2. Métodos sem malha 3. Convecção natural  CDD 620.1
-------	--

**INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA**

**ANA CLÁUDIA MAGALHÃES**

**MÉTODOS SEM MALHA APLICADOS A PROBLEMAS DIFUSIVOS-  
CONVECTIVOS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Marcelo José Colaço – D.C.

Aprovada em 4 de abril de 2008 pela seguinte Banca Examinadora:

---

Prof. Marcelo José Colaço – D.C. do IME

---

Prof. Francesco Scofano Neto – D.C. do IME

---

Prof. Rodrigo Otávio de Castro Guedes – Ph.D. do IME

---

Prof. Helcio Rangel Barreto Orlande – Ph.D. da UFRJ

---

Prof. Renato Machado Cotta – Ph.D. da UFRJ

Rio de Janeiro

2008

**Dedico esta dissertação a meus pais.**

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por ter chegado aqui!

Ao professor Marcelo José Colaço por me incentivar no início do mestrado, me ajudar nas escolhas durante o primeiro ano, por me orientar em todos os passos desta tese, por disponibilizar seu tempo quando precisei. Sua orientação diária foi necessária para o término deste trabalho. Agradeço pela sua amizade!

Aos meus pais, irmã e cunhado por me incentivar a estar sempre na busca por novos conhecimentos.

Aos professores e funcionários do IME os quais possibilitaram que eu me tomasse Mestre.

Aos amigos que fiz no IME, em especial Wellington Betencurte e Mônica Gomes, por nossas longas tardes de estudo e dedicação, por nossos momentos de descontração, por descobertas de grandes amizades.

A CAPES pela ajuda financeira através da concessão de uma bolsa de estudo.

Em especial a minha prima Priscila por poder contar com sua presença em todos os momentos que precisei. Por todos os incentivos “indiretamente” dados, mas que foram importantes para mim.

A minha tia Celma, por seu incentivo e ajuda em toda a fase dos meus estudos.

A todos que de alguma forma me ajudaram para a conclusão deste trabalho.

“O conhecimento é orgulhoso por ter aprendido tanto;  
a sabedoria é humilde por não saber mais.”

*WILLIAM COWPER*

## SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES.....	9
LISTA DE TABELAS.....	11
LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS.....	13
<b>1</b> <b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>19</b>
<b>2</b> <b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>21</b>
<b>3</b> <b>PROBLEMA PROPOSTO 1: Cavidade com tampa deslizante.....</b>	<b>27</b>
3.1      Formulação Matemática	
3.1.1    Variáveis primitivas.....	27
3.1.2    Adimensionalização.....	30
3.1.3    Função corrente – Vorticidade.....	33
<b>PROBLEMA PROPOSTO 2: Cavidade com convecção natural.....</b>	<b>36</b>
3.2      Formulação Matemática.....	37
3.2.1    Variáveis primitivas.....	37
3.2.2    Função corrente – Vorticidade.....	39
3.1.3    Adimensionalização.....	40
<b>4</b> <b>MÉTODOS SEM MALHA.....</b>	<b>43</b>
4.1      Funções de Base Radial.....	44
4.1.1    Parâmetro da forma (C).....	45
4.1.2    Interpolação com RBF.....	46
4.1.3    Interpolação Generalizada.....	47
4.1.4    Ghost centers (centros fantasmas).....	47
4.1.4.1   Estudos dos centros fantasmas para os problemas abordados.....	48
4.1.5    Método Quasi-Newton.....	50

<b>5</b>	<b>RESULTADOS.....</b>	<b>53</b>
5.1	Resultados Benchmarks.....	53
5.2	Formulação.....	54
5.2.1	Cavidade quadrada com tampa deslizando.....	54
5.2.1.1	Validação.....	55
5.2.2	Cavidade quadrada com convecção natural.....	71
5.2.2.1	Validação.....	72
5.2.2.2	Validação com critério de distribuição de pontos.....	89
5.2.2.2.1	$Ra=10^4$ .....	90
5.2.2.2.2	$Ra=10^5$ .....	100
5.2.2.2.3	$Ra=10^6$ .....	110
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO E SUGESTÕES.....</b>	<b>130</b>
<b>7</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>132</b>

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIG. 3.1.1	Geometria do problema 1(adimensional).....	29
FIG. 3.1.2	Geometria do problema 1(dimensional).....	32
FIG. 3.1.3	Condição de contorno para a função corrente.....	35
FIG. 3.2.1	Geometria do problema 2(adimensional).....	38
FIG. 3.2.2	Condição de contorno para o problema 2.....	42
FIG. 4.1.4	Diagrama de distribuição dos centros.....	50
FIG. 4.1.5	Fluxograma da escolha do melhor "c".....	52
FIG. 5.1.1	Resultado de isolinhas da função corrente para $Re=0$ .....	56
FIG. 5.1.2	Resultado de isolinhas da vorticidade para $Re=0$ .....	57
FIG. 5.1.3	Resultado de isolinhas da função corrente para $Re=100$ .....	58
FIG. 5.1.4	Resultado de isolinhas da vorticidade para $Re=100$ .....	58
FIG. 5.1.5	Resultado de isolinhas da função corrente para $Re=400$ .....	59
FIG. 5.1.6	Resultado de isolinhas da vorticidade para $Re=400$ .....	60
FIG. 5.1.7	Resultado de isolinhas da função corrente para $Re=1000$ .....	60
FIG. 5.1.8	Comparação dos componentes da velocidade para $Re=100$ .....	61
FIG. 5.1.9	Comparação dos componentes da velocidade para $Re=400$ .....	62
FIG. 5.1.10	Comparação dos componentes da velocidade para $Re=1000$ .....	63
FIG. 5.1.d	Linhas de corrente para $Re=100, 400$ e $1000$ com $12 \times 12, 16 \times 16, 20 \times 20,$ $30 \times 30$ e $40 \times 40$ pontos de expansão.....	66
FIG. 5.1.e	Vorticidade para $Re=100, 400$ e $1000$ com $12 \times 12, 16 \times 16, 20 \times 20, 30 \times 30$ e $40 \times 40$ pontos de expansão.....	69
FIG. 5.2.1	Resultado das isolinhas da função corrente para $Ra=10^4$ .....	73
FIG. 5.2.2	Resultado das isolinhas da vorticidade para $Ra=10^4$ .....	74
FIG. 5.2.3	Resultado das isolinhas de temperatura para $Ra=10^4$ .....	74
FIG. 5.2.4	Resultado das isolinhas da função corrente para $Ra=10^5$ .....	75
FIG. 5.2.5	Resultado das isolinhas da vorticidade para $Ra=10^5$ .....	75
FIG. 5.2.6	Resultado das isolinhas de temperatura para $Ra=10^5$ .....	76
FIG. 5.2.7	Resultado das isolinhas da função corrente para $Ra=10^6$ .....	76

FIG. 5.2.8	Resultado das isolinhas da vorticidade para $Ra=10^6$ .....	77
FIG. 5.2.9	Resultado das isolinhas de temperatura para $Ra=10^6$ .....	77
FIG. 5.2.10	Geometria do domínio com distribuição dos pontos.....	89
FIG. 5.2.11	Resultado das isolinhas da função corrente para $Ra=10^4$ , utilizando o fator $fac$ igual a 0.2.....	120
FIG. 5.2.12	Resultado das isolinhas da vorticidade para $Ra=10^4$ , utilizando o fator $fac$ igual a 0.2.....	121
FIG. 5.2.13	Resultado das isolinhas de temperatura para $Ra=10^4$ , utilizando o fator $fac$ igual a 0.2.....	121
FIG. 5.2.14	Resultado das isolinhas da função corrente para $Ra=10^5$ , utilizando o fator $fac$ igual a 0.4.....	122
FIG. 5.2.15	Resultado das isolinhas da vorticidade para $Ra=10^5$ , utilizando o fator $fac$ igual a 0.4.....	123
FIG. 5.2.16	Resultado das isolinhas de temperatura para $Ra=10^5$ , utilizando o fator $fac$ igual a 0.4.....	123
FIG. 5.2.17	Resultado das isolinhas da função corrente para $Ra=10^6$ , utilizando o fator $fac$ igual a 0.2.....	124
FIG. 5.2.18	Resultado das isolinhas da vorticidade para $Ra=10^6$ , utilizando o fator $fac$ igual a 0.2.....	125
FIG. 5.2.19	Resultado das isolinhas de temperatura para $Ra=10^6$ , utilizando o fator $fac$ igual a 0.2.....	125
FIG. 5.2.20	Resultado das isolinhas da função corrente para $Ra=10^6$ , utilizando o fator $fac$ igual a 0.4.....	126
FIG. 5.2.21	Resultado das isolinhas da vorticidade para $Ra=10^6$ , utilizando o fator $fac$ igual a 0.4.....	126
FIG. 5.2.22	Resultado das isolinhas de temperatura para $Ra=10^6$ , utilizando o fator $fac$ igual a 0.4.....	127

## LISTA DE TABELAS

TAB. 3.2.a	Dimensões para o problema da cavidade quadrada com convecção natural.....	36
TAB. 4.1	Funções de base radial de Suporte Global (GSRBFs).....	45
TAB. 4.2	Funções de base radial de Suporte Compacto (CSRBFs).....	45
TAB. 5.1.a	Dados encontrados para $Re=0$ .....	64
TAB. 5.1.b	Dados encontrados para $Re=100$ .....	64
TAB. 5.1.c	Dados encontrados para $Re=400$ .....	64
TAB. 5.1.d	Dados encontrados para $Re=1000$ .....	64
TAB. 5.1.e	Valores para a função corrente em cada contorno.....	68
TAB. 5.2.a	Dados encontrados para $Ra=10^4$ .....	78
TAB. 5.2.b	Dados encontrados para $Ra=10^5$ .....	78
TAB. 5.2.c	Dados encontrados para $Ra=10^6$ .....	78
TAB. 5.2.d1	Parâmetros obtidos para $Ra=10^4$ .....	83
TAB. 5.2.d2	Parâmetros obtidos para $Ra=10^4$ .....	84
TAB. 5.2.e1	Parâmetros obtidos para $Ra=10^5$ .....	85
TAB. 5.2.e2	Parâmetros obtidos para $Ra=10^5$ .....	86
TAB. 5.2.f1	Parâmetros obtidos para $Ra=10^6$ .....	87
TAB. 5.2.f2	Parâmetros obtidos para $Ra=10^6$ .....	88
TAB. 5.2.g1	Parâmetros obtidos para $Ra=10^4$ (fac 0.2).....	92
TAB. 5.2.g2	Parâmetros obtidos para $Ra=10^4$ (fac 0.2).....	93
TAB. 5.2.h1	Parâmetros obtidos para $Ra=10^4$ (fac 0.4).....	94
TAB. 5.2.h2	Parâmetros obtidos para $Ra=10^4$ (fac 0.4).....	95
TAB. 5.2.i1	Parâmetros obtidos para $Ra=10^4$ (fac 0.6).....	96
TAB. 5.2.i2	Parâmetros obtidos para $Ra=10^4$ (fac 0.6).....	97
TAB. 5.2.j1	Parâmetros obtidos para $Ra=10^4$ (fac 0.8).....	98
TAB. 5.2.j2	Parâmetros obtidos para $Ra=10^4$ (fac 0.8).....	99
TAB. 5.2.k1	Parâmetros obtidos para $Ra=10^5$ (fac 0.2).....	102
TAB. 5.2.k2	Parâmetros obtidos para $Ra=10^5$ (fac 0.2).....	103

TAB. 5.2.l1	Parâmetros obtidos para $Ra=10^5$ (fac 0.4).....	104
TAB. 5.2.l2	Parâmetros obtidos para $Ra=10^5$ (fac 0.4).....	105
TAB. 5.2.m1	Parâmetros obtidos para $Ra=10^5$ (fac 0.6).....	106
TAB. 5.2.m2	Parâmetros obtidos para $Ra=10^5$ (fac 0.6).....	107
TAB. 5.2.n1	Parâmetros obtidos para $Ra=10^5$ (fac 0.8).....	108
TAB. 5.2.n2	Parâmetros obtidos para $Ra=10^5$ (fac 0.8).....	109
TAB. 5.2.o1	Parâmetros obtidos para $Ra=10^6$ (fac 0.2).....	112
TAB. 5.2.o2	Parâmetros obtidos para $Ra=10^6$ (fac 0.2).....	113
TAB. 5.2.p1	Parâmetros obtidos para $Ra=10^6$ (fac 0.4).....	114
TAB. 5.2.p2	Parâmetros obtidos para $Ra=10^6$ (fac 0.4).....	115
TAB. 5.2.q1	Parâmetros obtidos para $Ra=10^6$ (fac 0.6).....	116
TAB. 5.2.q2	Parâmetros obtidos para $Ra=10^6$ (fac 0.6).....	117
TAB. 5.2.r1	Parâmetros obtidos para $Ra=10^6$ (fac 0.8).....	118
TAB. 5.2.r2	Parâmetros obtidos para $Ra=10^6$ (fac 0.8).....	119
TAB. 5.2.s	Dados encontrados para $Ra=10^4$ (fac 0.2).....	127
TAB. 5.2.t	Dados encontrados para $Ra=10^5$ (fac 0.4).....	128
TAB. 5.2.u	Dados encontrados para $Ra=10^6$ (fac 0.2).....	128
TAB. 5.2.v	Dados encontrados para $Ra=10^6$ (fac 0.4).....	128

## LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

### ABREVIATURAS

CL	- Curva L
RBF	- Função de Base Radial
MSF	- Método das Soluções Fundamentais
DRM	- Método da Reciprocidade Dual
BKM	- Método do Nó de Contorno
POU	- Método da Partição da Unidade
DSC-FSM	- Método de Subdomínio Finito de Convolução Singular Discreta
FEM	- Elementos Finitos
GSRBF	- Função de Base Radial de Suporte Global
CSRBF	- Função de Base Radial de Suporte Compacto
GITT	- Técnica da Transformada Integral Generalizada
QUICK	- Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics
QUICKEST	- QUICK with Estimated Streaming Terms
WUDS	Weighted Upstream Differencing Scheme
EMHD	Eletromagnetohidrodinâmica

### SÍMBOLOS

$c$	- Parâmetro da forma
$d$	- Menor distância entre dois pontos do domínio
$D$	- Altura dimensional da cavidade
$f$	- Função de interpolação
$\text{fac}$	- Variável para gerar pontos não uniformemente espaçados
$g$	- Aceleração da gravidade
$G$	- Número de variáveis

$H$	- Altura dimensional da cavidade com convecção natural
$H_i$	- Vetor linha das RBFs
$i$	- Subscrito contador do número de centros ou variáveis
$j$	- Subscrito contador do número de centros
$R$	- Grau do polinômio
$K$	- Subscrito contador do grau do polinômio
$L$	- Largura dimensional da cavidade com convecção natural
$L$	- Pontos de colocação
$M$	- Número de centros da aproximação em RBF para a temperatura
$N$	- Número de centros da aproximação em RBF para a função corrente
$P$	- Pontos de colocação na fronteira
$P$	- Pressão adimensional
$p$	- Pressão dimensional
$p_k(x_i)$	- Base de polinômios
$r_i$	- Distância entre dois pontos
$s(x_j)$	- Funções de interpolação
$T$	- Temperatura dimensional
$T^*$	- Temperatura dimensional
$T_H$	- Temperatura prescrita da parede quente
$T_C$	- Temperatura prescrita da parede fria
$U$	- Velocidade vertical adimensional
$u$	- Velocidade vertical dimensional
$u_0$	- Velocidade da tampa dimensional
$V$	- Velocidade horizontal adimensional
$v$	- Velocidade horizontal dimensional
$X$	- Coordenada horizontal adimensional
$x$	- Coordenada horizontal dimensional
$Y$	- Coordenada vertical adimensional
$y$	- Coordenada vertical dimensional

$\alpha$	- Difusividade térmica
$\beta$	- Coeficiente de expansão térmica / Coeficiente do polinômio
$\varphi_j$	- Função de base radial
$\delta$	- Variável inteira positiva
$\lambda$	- Vetor coluna dos coeficientes de expansão
$\lambda_j$	- Coeficientes de expansão da RBF
$\mu$	- Viscosidade dinâmica
$\rho$	- Massa específica
$\nu$	- Viscosidade cinemática
$\psi$	- Função corrente dimensional
$\Psi$	- Função corrente adimensional
$\omega$	- Vorticidade adimensional
$x_j$	- Centros pertencente ao domínio
$\Omega$	- Domínio do problema
$\partial\Omega$	- Contorno do domínio
$\frac{\partial}{\partial x}$	- Derivada parcial em relação à coordenada $x$
$\frac{\partial}{\partial y}$	- Derivada parcial em relação à coordenada $y$
$\nabla^2$	- Operador Laplaciano
$\ \bullet\ $	- Norma euclidiana
$U_{\max}$	- Velocidade máxima vertical adimensional em $X = 1/2$
$V_{\max}$	- Velocidade máxima horizontal adimensional em $Y = 1/2$
$\overline{Nu}$	- Número de Nusselt médio
$Nu_{1/2}$	- Número de Nusselt médio em $X = 1/2$
$Nu_0$	Número de Nusselt médio em $X = 0$
$Nu_{\max}$	Número de Nusselt máximo em $X = 0$

$Nu_{\min}$       Número de Nusselt mínimo em  $X = 0$ .

**Pr**      - Número de Prandtl

**Ra**      - Número de Rayleigh

**Re**      - Número de Reynolds

## RESUMO

Este trabalho descreve a solução das equações de Navier-Stokes e da energia bidimensionais pelo método baseado nas funções de base radial. A aproximação por Funções de Base Radial (RBF) é utilizada nas equações governantes, resultando num sistema não linear, o qual foi resolvido por um método Quasi-Newton. A aplicação de RBF elimina a tarefa de discretizar as equações e possíveis dificuldades na utilização de uma malha co-localizada. Os problemas estudados referem-se a uma cavidade com tampa deslizante e a cavidade com convecção natural. Em ambos os problemas, as formulações matemáticas levaram a uma equação bi-harmônica, a qual necessitou da estratégia de centros fantasmas para a determinação da sua solução. A formulação função corrente-vorticidade foi empregada a fim de eliminar o acoplamento pressão-velocidade. O problema da cavidade com tampa deslizante foi abordado para vários números de Reynolds reproduzindo satisfatoriamente resultados da literatura mostrando o bom desempenho do algoritmo implementado. A cavidade com convecção natural também foi estudada e bons resultados foram encontrados com apenas poucos pontos de expansão, fato que teve maior contribuição neste trabalho.

## ABSTRACT

This work deals with the solution of the two-dimensional Navier-Stokes and energy equations by using radial basis functions. The approach for Radial Basis Functions (RBF) is used in the governing equations, resulting in a non-linear system, which was solved by a Quasi-Newton method. The RBF application eliminates the need of discretize the equations and possible difficulties in the use of a co-located mesh. The studied problems include the lid-driven square cavity and the natural convection in a square cavity. In both problems, the stream-function and vorticity approach was used, leading to a non-linear biharmonic equation, which needed the strategy of ghost centers for the determination of its solution. This kind of approach eliminates the pressure-velocity coupling. The use of RBF also eliminates the need of interpolation for the convective terms, quite usual in numerical methods for solving the navier-stokes equations. The problem of the lid-driven square cavity was solved for some Reynolds numbers with very good results, showing the good performance of the implemented algorithm. The natural convection in a square cavity, which is the main contribution of this work, also was studied and good results were found with only few points of expansion.

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

A modelagem numérica de escoamentos viscosos incompressíveis tem sido bastante estudada, sobretudo perante o desenvolvimento de algoritmos de acoplamento pressão-velocidade. Com isso, uma grande quantidade de estratégias para se obter a solução numérica das equações que modelam os fenômenos associados à dinâmica dos fluidos tem sido desenvolvida. Além disso, a discretização das equações de conservação muitas vezes requer (como no método dos volumes finitos com arranjo co-localizado) o uso de funções de interpolação para os termos convectivos, tais como os métodos upwind (Patankar et al, 1970), QUICK (Leonard, 1979), QUICKEST (Leonard, 1979) e WUDS (Raithby, 1974) dentre outros. O problema do acoplamento pressão-velocidade pode, em problemas bidimensionais, ser eliminado usando-se a formulação vorticidade-função corrente. Contudo, tal transformação de variáveis produz uma equação biarmônica de 4ª ordem, cuja solução por métodos numéricos tradicionais requer discretizações de alta ordem a fim de se minimizar os erros de truncamento (Anderson et al, 1984).

Recentemente, o uso de métodos sem malha tem recebido grande atenção da comunidade científica por poder ser aplicado a geometrias complexas, sem os problemas usuais associados à geração da malha.

Neste trabalho, as equações de conservação, escritas para vorticidade e função corrente, serão resolvidas por um método sem malha, baseado no conceito de função de base radial (Hardy, 1971; Kansa, 1990; Buhmann, 2004). O emprego desta metodologia não requer a geração de malha e também elimina o problema relativo ao tratamento dos termos convectivos, bem como o problema do acoplamento pressão-velocidade.

As equações resultantes formam um sistema de equações algébricas (ao invés de equações diferenciais parciais) que pode ser facilmente resolvido usando-se métodos padrões, como os baseados no método de Newton.

Foram analisados dois problemas clássicos da literatura. O primeiro trata do escoamento bidimensional, incompressível, viscoso e laminar, em uma cavidade com tampa deslizante (*Lid-Driven Cavity*) (Wan et al, 2002; Ghia et al, 1982). Este problema possui algumas propriedades muito favoráveis, como sua simplicidade geométrica que facilita calibrações experimentais ou execuções numéricas, assim fornecendo dados Benchmark para a comparação e validação; e exhibe quase todos os fenômenos que podem possivelmente ocorrer com escoamentos incompressíveis: vórtices de diferentes tamanhos e características, escoamentos secundários, movimentos caóticos das partículas e várias instabilidades. Será analisado o caso hidrodinâmico deste primeiro problema e um resultado utilizado na validação mostrará a eficácia do código.

O segundo problema apresentado será o da cavidade quadrada com convecção natural, analisada para vários números de Rayleigh. O movimento do fluido se dá devido às forças de empuxo vindo do gradiente de densidade provocado pela variação de temperatura do fluido (hipótese de Boussinesq). O problema hidrodinâmico está acoplado ao problema térmico devido à presença do termo de empuxo. Este problema foi estudado com o intuito de se trabalhar com RBFs, método que até então não foi abordado para este problema.

No Capítulo 2 é realizada uma Revisão Bibliográfica, na qual são abordados todos os tipos de métodos sem malhas e suas aplicações.

No Capítulo 3 descrevem-se os problemas físicos, suas formulações matemáticas e suas adimensionalizações.

No Capítulo 4 define-se o método sem malha utilizado, com seus tipos e suas vantagens e o método aplicado para resolver o sistema não linear de equações.

No Capítulo 5 são apresentados os resultados e um breve comentário sobre os resultados Benchmark, contendo a validação através dos resultados da literatura.

No Capítulo 6 são apresentadas as conclusões e sugestões que darão segmento ao trabalho.

## CAPÍTULO 2

### REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Considerando os diversos tipos de métodos sem malha, uma revisão bibliográfica foi criada para exemplificar esses métodos e posicionar a presente dissertação frente ao estado da arte de tais métodos.

Chen et al (2000, 2001 e 2002) aplicaram o método do nó de contorno (BKM) para resolver as equações de Helmholtz, Laplace, e problemas de convecção-difusão lineares. Experimentos numéricos mostraram que o BKM pode produzir soluções altamente acuradas usando relativamente um pequeno número de nós. Para os casos não homogêneos, alguns nós internos foram necessários para garantir a estabilidade e precisão.

Lavagetto et al (2000) utilizam funções de base radiais (RBF) para estruturar modelos de cabeças tridimensionais dependentes de parâmetros da face sintética, capazes de serem graduado em alguma face humana através de uma malha tridimensional de polígonos para reproduzir a geometria da face e a textura.

Ramachandran (2002) usou o método da solução fundamental (MSF) para resolver equações diferenciais parciais lineares tais como a equação de Laplace e a equação de Helmholtz em domínios quadrados, ovais e circulares. A obtenção da matriz resultante dos coeficientes era mal condicionada e foi utilizada a decomposição do valor singular da matriz dos coeficientes como método de solução. Os resultados numéricos foram extremamente precisos (dentro da precisão máquina) e relativamente independente da localização dos pontos fontes.

Scott (2004) aplicou o método baseado na função de base radial (RBF) para a solução numérica de equações diferenciais parciais (derivadas simples, equação de Burger's e equação advecção). Utilizou vantagens do método como a de escolher a posição dos pontos de colocação de forma adaptativa e não necessitar de malha.

Mera (2005) desenvolveu a solução numérica do problema inverso de condução de calor usando a solução fundamental da equação do calor como uma função de base. A técnica de

regularização padrão de Tikhonov e o método da curva L foram adotados para resolver o sistema mal condicionado resultante de equações algébricas lineares.

Wu et al (2005) mostraram um esquema para reconstruir uma superfície tridimensional com um grande número de pontos dispersos baseado nas RBFs. O método da partição da unidade (POU) e a decomposição da árvore binária foram usados para organizar o conjunto de pontos em alguns locais do subdomínio sobreposto e reconstruir uma superfície local, para cada subdomínio. Esta abordagem reduziu substancialmente o tempo da reconstrução.

Chen (2006) mostrou as vantagens dos métodos sem malha e apresentou um esquema de reconstrução de superfície. Aplicou-se também, o método de colocação das RBFs na equação de Poisson, equação do calor, rotação do cone e equação de Burger's.

Colaço et al (2006) aplicaram o método de Kansa, também conhecido como método de colocação de funções de base radial para resolver problemas de difusão, como transferência de calor em regime permanente e também problemas convecção-difusão, como o de regime permanente incompressível das equações de Navier-Stokes. No primeiro caso, as multiquádricas renderam melhores resultados e as soluções apresentadas foram obtidas após uma boa escolha do parâmetro da forma  $c$ . No caso das equações de Navier-Stokes, os resultados mais significativos foram encontrados com a aplicação das funções de Wendland.

Escoamentos em cavidades quadradas com tampa deslizante e com convecção natural foram abordados por muitos autores, e foram encontrados diversos resultados. Serão mencionados alguns resultados tidos como importantes para o estudo destes problemas no presente trabalho. Ghia et al (1982) usaram a formulação função corrente-vorticidade nas equações de Navier-Stokes bidimensional incompressível para estudar a eficácia do método das diferenças finitas na determinação de soluções para altos números de Reynolds com malhas muito finas. O problema clássico da cavidade com tampa deslizante foi analisado. Foram obtidas soluções para Reynolds até 10.000 e malhas com 257x257 pontos. Foram apresentadas algumas análises dos vórtices originados com o aumento do número de Reynolds.

Davis (1983) obteve resultados benchmark para a cavidade com convecção natural através do método das diferenças finitas. Uma malha uniforme foi utilizada para obter os resultados variando o número de Rayleigh. Resultados como o número de Nusselt e velocidades máximas, horizontais e verticais, foram calculados para o problema da cavidade.

Chudanov et al (1995) propuseram esquemas para resolver as equações Navier-Stokes na formulação função corrente-vorticidade com um esquema de diferenças finitas. Uma nova aproximação de segunda ordem simétrica e anti-simétrica foi desenvolvida para os termos convectivos. A implementação implícita de ambas as condições de contorno (não-deslizamento e não-penetrabilidade) foram construídas com base na técnica *operator-splitting*. Para validar o novo algoritmo o escoamento na cavidade com tampa deslizante foi considerado para vários números de Reynolds.

Dailey et al (1996) estudaram um escoamento bidimensional pré-condicionado. As equações governantes foram integradas no tempo com um esquema explícito de Runge-Kutta e um esquema simétrico de gauss-seidel implícito em uma estrutura de volumes finitos, usando uma aproximação de segunda ordem no espaço e no tempo. Computações para o regime permanente e transiente foram feitas na cavidade com tampa deslizante para validar os resultados.

Botella et al (1998) obtiveram soluções acuradas para o escoamento na cavidade com tampa deslizante pelo método de colocação de Chebyshev. A presença de singularidades nos dois cantos onde a velocidade é descontínua dificultou a avaliação da acurácia dos resultados numéricos, principalmente na vizinhança destes pontos. Uma melhora da solução foi conseguida usando um método de subtração de singularidade.

Sarler et al (1999) descreveram a solução transiente para as equações Navier-Stokes bidimensional incompressível em variáveis primitivas pelo método da dupla reciprocidade do elemento de contorno. O acoplamento das equações governantes é estruturado pela solução fundamental da equação de Laplace. O exemplo numérico incluiu estudos da convergência com diferentes tamanhos de malha para o problema da cavidade com tampa deslizante e comparação com os resultados obtidos com o cálculo das derivadas através das funções de interpolação global.

Leal et al (2000) aplicaram a Técnica da Transformada Integral Generalizada para resolver as equações de Navier-Stokes e da energia no problema da cavidade com convecção natural. Utilizou-se a formulação função corrente-vorticidade adimensional neste problema bidimensional transiente. As equações que regem o problema estavam acopladas devido ao termo de empuxo presente na equação de conservação de movimento em  $y$ . Foram encontrados resultados para vários números de Rayleigh.

Wan et al (2002) propuseram um método de subdomínio finito de convolução singular discreta (DSC-FSM) para a análise de escoamentos viscosos incompressíveis em geometrias complexas multiplamente conectadas. Uma malha com domínios fictícios sobrepostos é projetada para decompor uma geometria computacionalmente complexa em um número finito de subdomínios. Em cada subdomínio, as equações de Navier-Stokes foram discretizadas usando-se o algoritmo DSC no espaço e um Runge-Kutta de terceira ordem no tempo. A confiabilidade do método proposto foi testada no escoamento na cavidade com tampa deslizante.

Peng et al (2002) consideraram simulações numéricas diretas sobre o processo de transição do escoamento de laminar para turbulento na cavidade com tampa deslizante. O regime turbulento do escoamento foi alcançado após uma seqüência de sucessivas bifurcações. As experiências numéricas foram conduzidas resolvendo as equações bidimensionais de Navier-Stokes incompressíveis com aumento de números de Reynolds. A discretização espacial consistiu de um método upwind de sétima-ordem para o termo de convecção e de um método central de sexta-ordem para o termo difusivo.

Gurcan (2004) através do problema da cavidade com tampa deslizante investigou a topologia das linhas de corrente perto das paredes estacionárias. Foram usadas variáveis adimensionais e as componentes da velocidade foram expressas em termos de função corrente. Foi considerada a função corrente por expansão em séries de Taylor. Pequena mudança nos parâmetros (velocidade da tampa e a relação entre a altura e largura da cavidade) conduziu a resultados diferentes para as linhas de corrente. Os vórtices secundários na parte inferior da cavidade tenderam a aumentar quando a razão entre a altura e largura da cavidade aumentou.

Cheng et al (2004) mostraram o comportamento transiente de um escoamento periódico sob a ação de forças de empuxo em diferentes cavidades com tampa deslizante com formas de seção transversal diferentes. Características da transferência de calor para várias geometrias foram previstas. As equações governantes foram discretizadas baseadas no método dos volumes finitos. As atenções foram focalizadas em nove casos de forma de seção transversal. Para todos os casos considerados, o número de Reynolds e o número de Grashof foram considerados fixos. Os resultados mostraram que entre os nove casos, uns tendem a produzir o escoamento periódico padrão (Número de Nusselt variando com os parâmetros geométricos periodicamente) e, somente um caso exibiu o desempenho mais elevado de transferência de calor.

Perron et al (2004) apresentaram um novo método para resolver as equações de Navier-Stokes para um escoamento incompressível viscoso. Este método é baseado em um esquema fracionário no passo do tempo e no método dos volumes finito em malhas não estruturadas. As equações governantes foram discretizadas usando um arranjo co-localizado de malha para a velocidade e pressão. Resultados teóricos e propriedades numéricas do esquema foram fornecidos. Estimativas do escoamento na cavidade com tampa deslizante, escoamentos num cilindro e transferência de calor em um cilindro foram calculados para validar o método.

Cheng et al (2005) utilizam o método de Boltzmann Lattice na investigação da estrutura dos vórtices do escoamento bidimensional em uma cavidade retangular de tampa deslizante em relação a diferentes profundidades, larguras e números de Reynolds. Os efeitos da razão de aspecto e do número de Reynolds no tamanho, a posição central e o número de vórtices foram determinados junto com o escoamento na cavidade. Quando o número de Reynolds se aproxima de zero, o escoamento mostra uma característica da estrutura simétrica do vórtice. Por outro lado, quando o número de Reynolds aumenta, os tamanhos e as posições centrais dos vórtices na região próxima a tampa parecem ser afetados fortemente pela força da inércia, tendo por resultado uma estrutura assimétrica de vórtices nesta região. A influência da força de inércia diminui ao longo da profundidade da cavidade. Quanto mais elevado o número de Reynolds, maior é o número de vórtices grandes que aparece na cavidade. Há um valor crítico da razão de aspecto, o qual depende do número de Reynolds. Quando o valor crítico é excedido, o escoamento em uma determinada região da cavidade torna-se simétrico. Estes vórtices simétricos grandes são similares na forma, e seus tamanhos aproximam de uma constante.

Bruneau et al (2005) executaram simulações numéricas do escoamento bidimensional da cavidade com tampa deslizante para uma larga escala de números de Reynolds com o método das diferenças finitas. Resultados benchmark foram fornecidos para soluções em regime permanente, assim como para soluções periódicas (aparecimento de bifurcações) perto do número crítico de Reynolds.

Zunic et al (2006) desenvolveram um método numérico para a solução das equações incompressíveis de Navier-Stokes utilizando uma representação integral das equações de conservação. A formulação velocidade-vorticidade foi empregada, onde a cinemática era dada com a equação de Poisson para o vetor velocidade, enquanto a cinética era representada com a equação do transporte da vorticidade. Baseada em aspectos computacionais, resultantes do tempo

e requerimentos da memória do método integral do domínio do contorno, uma aproximação combinada para a solução do conjunto de equações governantes foi proposta. A cinemática foi resolvida usando o método do elemento do contorno (BEM), enquanto a cinética foi resolvida usando o método dos elementos finitos (FEM). O fluxo na cavidade cúbica com tampa deslizante foi considerado para mostrar a robustez desta formulação. Resultados de  $Re=100, 400, 1000$  mostraram uma boa comparação com os resultados benchmark.

Chantasiriwan (2006) utilizou métodos de colocação globais e locais, que utilizam multiquádricas como funções base, na solução dos problemas com condições de contorno contínuas, para resolver problemas harmônicos e bi-harmônicos que tem condições de contorno descontínuas. Soluções para dois problemas teste foram investigadas. O primeiro teste era um problema de condução de calor com a temperatura descontínua no contorno. O segundo era o problema do escoamento em uma cavidade quadrada com tampa deslizante. Os resultados mostram que os desempenhos dos métodos de colocação global e local dependem do parâmetro da forma da multiquádrica, e soluções pelo método de colocação global são mais sensíveis para o parâmetro da forma do que o método de colocação local.

Chinchapatnam (2006) apresentou um método sem malha baseado nas funções de base radial para resolver as equações de Navier-Stokes. Utilizou a formulação função corrente-vorticidade chegando a uma equação bi-harmônica não linear. O sistema não-linear foi resolvido pelo método de Levenberg Marquadt. Problemas com condições de contorno foram solucionados com a estratégia de "centros fantasmas". O método foi aplicado para a cavidade quadrada e retangular com tampa deslizante para vários números de Reynolds. Foram obtidos bons resultados com apenas poucos pontos, os quais foram comparados com resultados benchmark.

Neste trabalho será aplicado o método baseado nas funções de base radial. Neste capítulo foram vistos algumas abordagens de métodos sem malha e em especial da RBF. Resultados para a cavidade com tampa deslizante foram apresentados, onde até então só se tem referência da aplicação das RBF a uma equação bi-harmônica no artigo de Chinchapatnam (2006), o qual difere do presente trabalho no método para resolver o sistema não-linear.

O segundo problema, da cavidade com convecção natural, foi referenciado aqui em poucos artigos e, em nenhum deles, nem em outros artigos da literatura, foi utilizado um método sem malha (em especial as RBFs). O presente trabalho aborda este problema de maneira inédita através das funções de base radial.

## CAPÍTULO 3

### PROBLEMAS PROPOSTOS

Neste capítulo serão descritos os problemas físicos, as formulações matemáticas e as adimensionalizações necessárias. Serão apresentadas as hipóteses consideradas, bem como suas condições de contorno.

Os problemas estudados referem-se a uma cavidade com tampa deslizante e a cavidade com convecção natural.

#### *Problema 1: Cavidade quadrada com tampa deslizante*

No primeiro problema, considera-se o problema hidrodinâmico de um escoamento incompressível, laminar, bidimensional e em regime permanente com forças de campo desprezíveis e propriedades termofísicas constantes.

Assume-se condição de contorno para as velocidades  $u$  e  $v$  nas paredes verticais e inferior da cavidade prescritas iguais a zero e, na tampa da cavidade, a velocidade  $u$  prescrita igual a  $u_0$  e velocidade  $v$  prescrita igual a zero. Adota-se uma cavidade quadrada.

### 3.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

#### 3.1.1 VARIÁVEIS PRIMITIVAS

Considera-se o escoamento incompressível, em regime permanente, em uma cavidade quadrada com tampa deslizante. A figura 3.1.1 mostra a geometria usada, bem como as diferentes fronteiras onde serão aplicadas as condições de contorno. Na ausência de forças de corpo, em um escoamento isotérmico, as equações dimensionais que permitem a análise do escoamento viscoso

são dadas pela equação de conservação de massa e pelas equações de conservação da quantidade de movimento para  $x$  e  $y$ .

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (x, y) \in \Omega \quad (3.1.1.a)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (x, y) \in \Omega \quad (3.1.1.b)$$

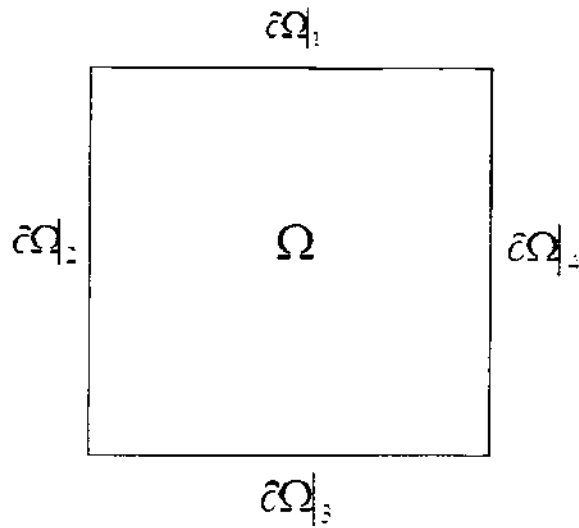
$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (x, y) \in \Omega \quad (3.1.1.c)$$

$$u = u_0 \quad v = 0 \quad \text{em } \partial\Omega|_1 \quad (3.1.1.d)$$

$$u = v = 0 \quad \text{em } \partial\Omega|_2 \quad (3.1.1.e)$$

$$u = v = 0 \quad \text{em } \partial\Omega|_3 \quad (3.1.1.f)$$

$$u = v = 0 \quad \text{em } \partial\Omega|_4 \quad (3.1.1.g)$$



**FIG.3.1.1-** Geometria do problema 1

Nas equações (3.1.1),  $u$  e  $v$  são as componentes de velocidades nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente;  $p$  é a pressão;  $u_0$  é a velocidade da tampa;  $\nu$  é a viscosidade cinemática do fluido e  $\rho$  é a massa específica do fluido.

### 3.1.2 ADIMENSIONALIZAÇÃO

As equações descritas no item anterior podem ser escritas na forma adimensional utilizando-se as seguintes variáveis adimensionais:

$$X = \frac{x}{D} \quad (3.1.2.a)$$

$$Y = \frac{y}{D} \quad (3.1.2.b)$$

$$U = \frac{u}{u_0} \quad (3.1.2.c)$$

$$V = \frac{v}{u_0} \quad (3.1.2.d)$$

$$P = \frac{P}{\rho u_0^2} \quad (3.1.2.e)$$

$$\text{Re} = \frac{u_0 D}{\nu} = \frac{\rho u_0 D}{\mu} \quad (3.1.2.f)$$

Onde  $X, Y, U, V, P$  e  $\text{Re}$  (número de Reynolds) são variáveis adimensionais;  $u_0$  é a velocidade da tampa;  $D$  é a altura da cavidade;  $\nu$  é a viscosidade cinemática do fluido;  $\mu$  é a viscosidade dinâmica do fluido;  $\rho$  é massa específica do fluido e  $x, y, u, v$  e  $p$  são variáveis dimensionais.

O número de Reynolds (Re) é um número adimensional usado em mecânica dos fluidos para o cálculo do regime de escoamento de determinado fluido sobre uma superfície, permitindo avaliar seu regime de escoamento, laminar ou turbulento. Tem significado físico como sendo um quociente entre as forças de inércia ( $u_0\rho$ ) e forças viscosas ( $\mu/D$ ).

Substituindo as variáveis adimensionais (3.1.2.a-f) nas equações governantes (3.1.1.a-c) e nas condições de contorno (3.1.1.d-g), obtêm-se:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad 0 < Y < 1 \quad (3.1.2.g)$$

$$0 < X < 1$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) - \frac{\partial P}{\partial X} \quad 0 < Y < 1 \quad (3.1.2.h)$$

$$0 < X < 1$$

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) - \frac{\partial P}{\partial Y} \quad 0 < Y < 1 \quad (3.1.2.i)$$

$$0 < X < 1$$

$$U = 1 \quad V = 0 \quad Y = 1 \quad (3.1.2.j)$$

$$0 < X < 1$$

$$U = V = 0 \quad X = 0 \quad (3.1.2.k)$$

$$0 < Y < 1$$

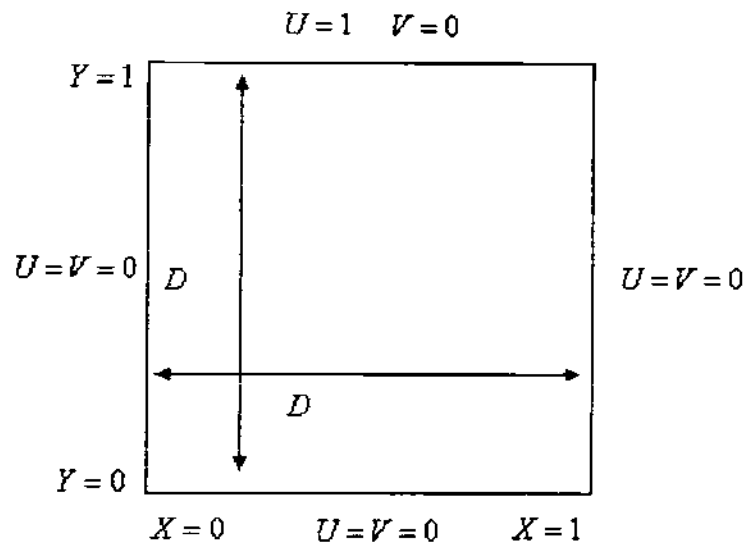
$$U = V = 0 \quad Y = 0 \quad (3.1.2.l)$$

$$0 < X < 1$$

$$U = V = 0 \quad X = 1 \quad 0 < Y < 1 \quad (3.1.2.m)$$

$$X = 1 \quad 0 < Y < 1$$

A figura 3.1.2 mostra a geometria com as condições de contorno adimensionalizadas.



**FIG.3.1.2-** Geometria do problema 1

### 3.1.3 FUNÇÃO CORRENTE - VORTICIDADE

Utiliza-se a formulação de função corrente-vorticidade na equação de conservação de massa e nas equações de conservação da quantidade de movimento para  $x$  e  $y$  já adimensionalizadas, a fim de desacoplar os campos de pressão do cálculo das componentes do vetor velocidade, além de reduzir o número de equações a serem resolvidas. Para isso, são definidas a função corrente ( $\Psi$ ) e vorticidade ( $\omega$ ) como:

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \quad (3.1.3.a)$$

$$V = -\frac{\partial \Psi}{\partial X} \quad (3.1.3.b)$$

$$\omega = \frac{\partial U}{\partial Y} - \frac{\partial V}{\partial X} \quad (3.1.3.c)$$

Aplicando a formulação acima nas equações governantes encontram-se:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} + \omega = 0 \quad (3.1.3.d)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) \quad (3.1.3.e)$$

ou, na forma do operador laplaciano:

$$\nabla^2 \omega = \text{Re} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} \right) \quad (3.1.3.f)$$

$$\omega = -\nabla^2 \Psi \quad (3.1.3.g)$$

A fim de eliminar problemas com os valores da vorticidade nos contornos, substituir-se-á a equação (3.2.g) na equação (3.2.f), obtendo-se uma equação bi-harmônica não linear, da forma:

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial X^4} + 2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial X^2 \partial Y^2} + \frac{\partial^4 \Psi}{\partial Y^4} \tag{3.1.3.h}$$

$$- \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \left( \frac{\partial^3 \Psi}{\partial X^3} + \frac{\partial^3 \Psi}{\partial X \partial Y^2} \right) - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \left( \frac{\partial^3 \Psi}{\partial Y^3} + \frac{\partial^3 \Psi}{\partial X^2 \partial Y} \right) \right] = 0$$

com condições de contorno:

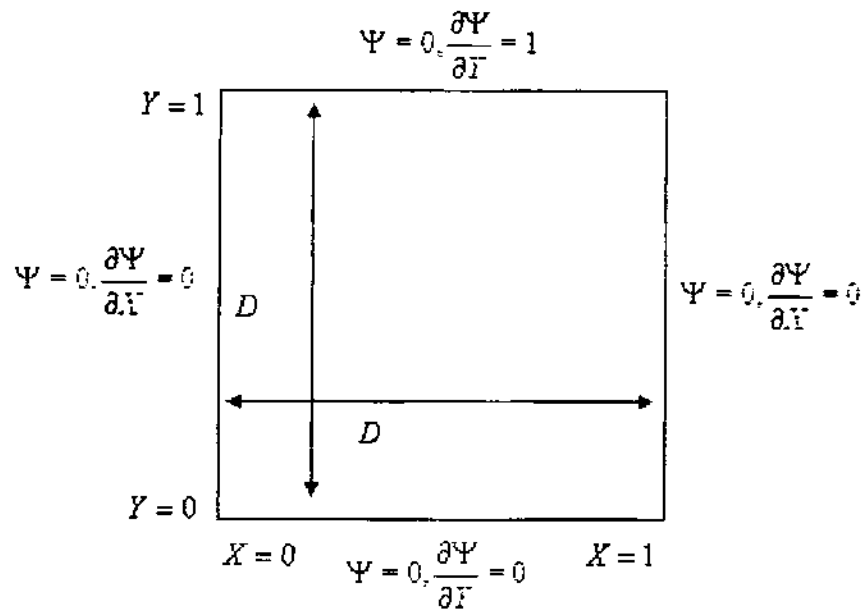
$$\Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0 \quad X = 0 \quad (3.1.3.i)$$

$$\Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0 \quad X = 1 \quad (3.1.3.j)$$

$$\Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0 \quad Y = 0 \quad (3.1.3.k)$$

$$\Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 1 \quad Y = 1 \quad (3.1.3.l)$$

Note que a equação (3.1.3.h) requer 4 condições de contorno em  $x$  e 4 em  $y$ , as quais são mostradas na figura 3.1.3, por ser uma equação de 4ª ordem.



**FIG.3.1.3** - Condição de contorno para a função corrente

Serão estudados casos onde o número de Reynolds varia de 0 até 1000, cujos resultados serão comparados com valores benchmark encontrados na literatura.

## *Problema 2: Cavidade quadrada com convecção natural*

Este problema apresenta as mesmas hipóteses da cavidade com tampa deslizante com propriedades termofísicas constantes, a menos da massa específica (Hipótese de Boussinesq). O problema hidrodinâmico está acoplado ao problema térmico devido à presença do termo de empuxo na equação de conservação da quantidade de movimento em  $y$ .

Assume-se condição de contorno para as velocidades  $u$  e  $v$  em todas as paredes da cavidade prescritas iguais a zero e condições de contorno para a temperatura nas paredes verticais prescritas e iguais a  $T_H = 12^\circ C$  e  $T_C = 2^\circ C$  para as paredes esquerda e direita, respectivamente; as paredes horizontais estão isoladas. Adota-se uma cavidade quadrada.

A cavidade será analisada de acordo com o número de Rayleigh (Ra), variando de  $10^4$  a  $10^6$ . Essa variação acontece de acordo com as dimensões da cavidade, já que o problema tem propriedades termofísicas constantes, assim como a diferença de temperatura entre as paredes. A Tabela 3.2.a mostra os três números de Rayleigh utilizados de acordo com as temperaturas em cada parede e a dimensão da cavidade.

**TAB.3.2.a** - Dimensões para o problema da cavidade quadrada com convecção natural

Ra	$T_H (^{\circ}C)$	$T_C (^{\circ}C)$	$L$ (m)	$H$ (m)
$10^4$	12	2	0,021277	0,021277
$10^5$	12	2	0,045841	0,045841
$10^6$	12	2	0,098761	0,098761

Estes valores foram escolhidos de forma a se analisar desde o caso onde os efeitos do termo de empuxo são pequenos, até o limite de início de regime de transição para o turbulento. Os resultados foram comparados com valores benchmark encontrados na literatura.

## 3.2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

### 3.2.1 VARIÁVEL PRIMITIVA

Considera-se o escoamento incompressível em uma cavidade quadrada com convecção natural. Na ausência de forças de corpo, as equações dimensionais que permitem a análise do escoamento viscoso são dadas pela equação de conservação de massa, pelas equações de conservação da quantidade de movimento para  $x$  e  $y$  (com termo fonte) e pela equação da energia.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (x, y) \in \Omega \quad (3.2.1.a)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (x, y) \in \Omega \quad (3.2.1.b)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g\beta(T^* - T_c) \quad (x, y) \in \Omega \quad (3.2.1.c)$$

$$u \frac{\partial T^*}{\partial x} + v \frac{\partial T^*}{\partial y} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} \right) \quad (x, y) \in \Omega \quad (3.2.1.d)$$

$$u = v = 0 \quad \frac{\partial T^*}{\partial y} = 0 \quad \text{em } \partial\Omega|_1 \quad (3.2.1.e)$$

$$u = v = 0 \quad T_H = 12 \text{ C} \quad \text{em } \partial\Omega|_2 \quad (3.2.1.f)$$

$$u = v = 0 \quad \frac{\partial T^*}{\partial y} = 0 \quad \text{em } \partial\Omega|_3 \quad (3.2.1.g)$$

$$u = v = 0 \quad T_c = 2 \text{ C} \quad \text{em } \partial\Omega|_4 \quad (3.2.1.h)$$

A figura 3.2 mostra a geometria empregada.

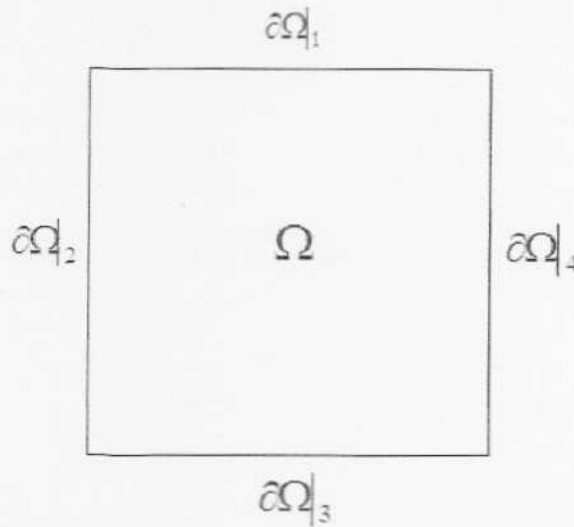


FIG.3.2.1 - Geometria do problema 2

Nas equações (3.2.1.a-h),  $u$  e  $v$  são as componentes de velocidades nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente,  $p$  é a pressão;  $T^*$  é a temperatura;  $\nu$  é a viscosidade cinemática do fluido;  $\rho$  é a massa específica do fluido;  $g$  é a aceleração da gravidade;  $\beta$  é o coeficiente de expansão térmica;  $T_H$  é a temperatura da parede quente (à esquerda);  $T_C$  é a temperatura da parede fria (à direita) e  $\alpha$  é a difusividade térmica do fluido.

Operando-se a equação de conservação da quantidade de movimento em  $x$  (3.2.1.b) com  $\partial/\partial y$ , a equação de conservação da quantidade de movimento em  $y$  (3.2.1.c) com  $\partial/\partial x$  e subtraindo uma da outra, os termos da pressão serão eliminados. Na equação final será utilizada a equação da conservação de massa (3.2.1.a), resultando em:

$$u \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) = \nu \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) - g\beta \frac{\partial T^*}{\partial x} \quad (3.2.1.i)$$

### 3.2.2 FUNÇÃO CORRENTE - VORTICIDADE

Utiliza-se a formulação de função corrente na equação (3.2.1.i) e na equação da energia (3.2.1.d), a fim de reduzir as variáveis a serem calculadas. Desta forma, pode se definir a função corrente como:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (3.2.2.a)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.2.2.b)$$

Aplicando a formulação acima nas equações (3.2.1.i) e (3.2.1.d) e nas condições de contorno (3.2.1.e-h) encontra-se:

$$\begin{aligned} & \nu \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right) \quad (x, y) \in \Omega \quad (3.2.2.c) \\ & - \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} \right) \right] - g\beta \frac{\partial T^*}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T^*}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T^*}{\partial y} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} \right) \quad (x, y) \in \Omega \quad (3.2.2.d)$$

$$\Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0 \quad \frac{\partial T^*}{\partial y} = 0 \quad \text{em } \partial\Omega|_1 \quad (3.2.2.e)$$

$$\Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0 \quad T_H = 12^\circ C \quad \text{em } \partial\Omega|_2 \quad (3.2.2.f)$$

$$\Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0 \quad \frac{\partial T^*}{\partial y} = 0 \quad \text{em } \partial\Omega|_3 \quad (3.2.2.g)$$

$$\Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0 \quad T_H = 2^\circ C \quad \text{em } \partial\Omega|_4 \quad (3.2.2.h)$$

### 3.2.3 ADMENSIONALIZAÇÃO

As equações descritas no item anterior podem ser escritas na forma adimensional utilizando-se as seguintes variáveis adimensionais:

$$X = \frac{x}{D} \quad (3.2.3.a)$$

$$Y = \frac{y}{D} \quad (3.2.3.b)$$

$$\Psi = \frac{\psi}{\nu} \quad (3.2.3.c)$$

$$T = \frac{T^* - T_c}{T_H - T_c} \quad (3.2.3.d)$$

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} \quad (3.2.3.e)$$

$$\text{Ra} = \frac{g\beta(T_H - T_c)D^3}{\nu\alpha} \quad (3.2.3.f)$$

Onde  $X, Y, \Psi, T, \text{Pr}$  (número de Prandtl) e  $\text{Ra}$  (número de Rayleigh) são variáveis adimensionais;  $u_0$  é a velocidade da tampa;  $D$  é a altura adimensional da cavidade;  $\nu$  é a viscosidade cinemática do fluido;  $\alpha$  é a difusividade térmica do fluido;  $g$  é a aceleração da gravidade;  $\beta$  é o coeficiente de expansão térmica;  $T_H$  é a temperatura da parede quente;  $T_c$  é a temperatura da parede fria e  $x, y, \psi$  e  $T^*$  são variáveis dimensionais.

O número de Prandtl é uma propriedade que relaciona a capacidade do fluido de difundir quantidade de movimento frente a sua capacidade de difundir calor.

O número de Rayleigh é uma medida do balanço entre as forças que promovem a convecção (diferença de temperatura) e as que se opõem (fricção devido à viscosidade e à difusão térmica, que opera no sentido de anular o gradiente de temperatura).

Substituindo as variáveis adimensionais (3.2.3.a-f) nas equações governantes (3.2.2.c-d) e nas condições de contorno (3.2.2.e-h), obtém-se:

$$\left[ \frac{\partial^4 \Psi}{\partial X^4} + 2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial X^2 \partial Y^2} + \frac{\partial^4 \Psi}{\partial Y^4} \right] - \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \left( \frac{\partial^3 \Psi}{\partial X^3} + \frac{\partial^3 \Psi}{\partial X \partial Y^2} \right) - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \left( \frac{\partial^3 \Psi}{\partial Y^3} + \frac{\partial^3 \Psi}{\partial X^2 \partial Y} \right) \right] \quad (3.2.3.g)$$

$$- \frac{Ra}{Pr} \frac{\partial T}{\partial X} = 0$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial T}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial T}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \right) \quad (3.2.3.h)$$

A equação (3.2.3.g) é uma equação bi-harmônica não linear com termo fonte. As equações (3.2.3.g) e (3.2.3.h) devem ser resolvidas simultaneamente. Embora a formulação via função corrente e vorticidade elimine o termo de pressão e, com isso, os problemas relacionados ao acoplamento pressão-velocidade, a equação resultante da manipulação das equações de conservação da quantidade de movimento é uma equação diferencial parcial de quarta ordem, a qual nem sempre é de fácil solução por métodos numéricos tradicionais, devido aos problemas envolvendo erros de truncamento. Mais adiante, tal equação será resolvida usando-se um método sem malha, o qual não possui estes problemas de discretização. O sistema de equações (3.2.3.g) e (3.2.3.h) requer três condições de contorno para cada fronteira, as quais são dadas pelas equações a seguir, já na forma adimensional. Note que as condições de contorno para a função corrente incluem a condição de não deslizamento, bem como o seu valor prescrito igual a zero em todos os contornos.

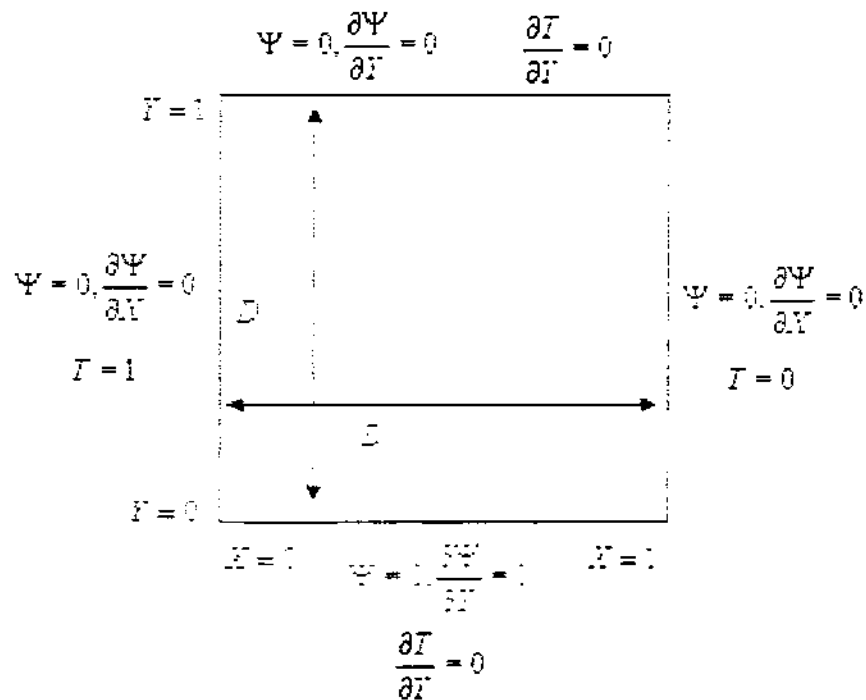
$$\Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0 \quad T = 1 \quad X = 0 \quad (3.2.3.i)$$

$$\Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0 \quad T = 0 \quad X = 1 \quad (3.2.3.j)$$

$$\Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial Y} = 0 \quad Y = 0 \quad (3.2.3.k)$$

$$\Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial Y} = 0 \quad Y = 1 \quad (3.2.3.l)$$

A figura (3.2.2) mostra a geometria e as condições de contorno, já adimensionalizadas.



**FIG.3.2.2** – Condição de contorno para o problema 2

## CAPÍTULO 4

### MÉTODOS SEM MALHA

Os métodos sem malha emergiram como técnicas numéricas eficazes para resolver problemas da ciência e da engenharia. O número de aproximações/métodos que têm sido propostos recentemente é uma evidência do interesse crescente da engenharia nestes tipos de técnicas numéricas. Encontram-se aplicações em diferentes áreas que variam da inteligência artificial, dos gráficos de computador, de processar imagem (Lavagetto et al, 2000) e de otimização à solução numérica de todos os tipos de problemas de EDPs (Chen, 2002).

Os métodos sem malha não requerem nenhuma estrutura de grade ou malha, sendo essa a vantagem mais importante sobre os métodos tradicionais. O preço desta vantagem, entretanto, é que o tratamento numérico do problema discretizado é geralmente mais difícil. Por exemplo, o método de função de base radial (RBF) do tipo suporte compacto em matrizes grandes e densas resulta freqüentemente em sistemas de equações mal-condicionadas.

São características dos métodos sem malha:

- Habilidade de acomodar a complexidade geométrica.
- A formulação é similar para os problemas bidimensional e tridimensional.
- Baixo custo computacional devido à não utilização de malhas

Encontra-se na literatura diversos tipos de métodos sem malha. No Método da Solução Fundamental (MSF) (Ramachandran, 2002; Mera, 2005) a solução do problema é construída usando as funções de base, que são uma combinação de soluções fundamentais da equação diferencial parcial (EDP) correspondente. Já o Método da Reciprocidade Dual (DRM) (Sarler et al, 1999) aproxima os termos não homogêneos da solução particular por

uma função de interpolação. O Método do Nó de Contorno (BKM) (Chen et al, 2000, 2001 e 2002) é uma combinação da Função de Base Radial (RBF), da solução geral não singular e do Método da Reciprocidade Dual (DRM). O Método baseado na Função de Base Radial (RBF) (Lavagetto et al, 2000; Scott, 2004; Wu et al, 2005; Chen, 2006; Colaço et al, 2006; Chinchapatnam et al, 2006; Chantasiriwan, 2006) utiliza funções cujo valor cresce (ou decresce) à medida que aumenta a distância a um ponto central. Foca-se aqui o Método baseado nas Funções de Base Radial (RBF).

#### 4.1 FUNÇÕES DE BASE RADIAL

As *funções de base radial* são funções em geral não lineares cujo valor cresce ou decresce à medida que a distância a um ponto central aumenta. A esse ponto costuma-se chamar de *centro* da função de base radial. Ela é definida da seguinte forma:

Seja  $\varphi: \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}$  uma função contínua com  $\varphi(0) \geq 0$ .  
Se  $x_j \in \Omega \rightarrow \varphi_j(x_j) = \varphi(\|x_j - x_i\|)$  onde  $\|\bullet\|$  é a norma Euclidiana então  $\varphi_j$  é chamada RBF.

As RBFs se dividem em funções *locais* e *globais*. As funções *locais* fornecem uma resposta significativa apenas na vizinhança do centro e são definidas em uma parte do domínio (Suporte Compacto). As funções *globais* tornam seu valor ilimitado quando a distância ao centro tende ao infinito, são definidas em todo o domínio (Suporte Global) (Buhmann, 2004).

Na Tabela 4.1 são listadas as RBFs de Suporte Global e na Tabela 4.2 as de Suporte Compacto, onde  $r = \|\bullet\|$  e  $c$  é o parâmetro da forma, o qual será discutido a seguir.

**TAB.4.1-** Funções de base radial de Suporte Global (GSRBFs)

Equação	Nome
$\sqrt{r^2 + c^2}$	Multiquádrica
$(\sqrt{r^2 + c^2})^3$	Multiquádrica Cúbica
$1/\sqrt{r^2 + c^2}$	Inversa da Multiquádrica
$r^2 \ln r$	Splines Poliharmônicos
$e^{-\alpha r^2}$	Gaussiana

**TAB.4.2-** Funções de base radial de Suporte Compacto (CSRBFs). (Wendland, 1995)

Equação	Nome
$(r-1)_+^4 (1+4r)$	W41
$(r-1)_+^6 (3+18r+35r^2)$	W42
$(r-1)_+^8 (1+8r+25r^2+32r^3)$	W43

#### 4.1.1 PARÂMETRO DA FORMA (C)

Será discutido aqui um aspecto importante para a implementação das RBFs. Chamado de parâmetro de forma, a constante "c" determina a região de influência das RBF de suporte global (GSRBF). A acurácia da solução numérica depende do valor escolhido para o parâmetro da forma.

A obtenção do melhor parâmetro da forma, que é o que dará a melhor solução, é um problema pertinente na implementação do método.

Neste trabalho, o parâmetro é estimado através da expressão abaixo:

$$c = \delta d \quad (4.1.1.a)$$

onde  $\delta$  é um inteiro positivo e  $d$  é a menor distância entre dois pontos do domínio.

onde  $\delta$  é um inteiro positivo e  $d$  é a menor distância entre dois pontos do domínio.

O valor da constante  $\delta$  se inicia por 1 e vai aumentando discretamente. O valor  $d$  é sempre o mesmo para cada malha utilizando o mesmo critério de distribuição de pontos (Chinchapatnam et al, 2006).

Neste trabalho, os sistemas não lineares, resultantes da aplicação das funções de base radial nas equações diferenciais parciais, foram resolvidos por um método Quasi-Newton. Assim, o melhor valor do fator de forma “c”, foi aquele que gerou o menor resíduo na solução dos sistemas não-lineares. Em geral, quanto maior o “c”, melhor a solução (Chinchapatnam et al, 2006). Porém, isso implica no fato do sistema ficar muito mal condicionado (Chinchapatnam et al, 2006). Assim, em geral o melhor “c” é aquele que seja grande o suficiente para gerar uma boa aproximação para a solução, porém não tão grande a ponto de tornar a solução do sistema de equações não-lineares inviável.

#### 4.1.2 INTERPOLAÇÃO COM RBF

Seja  $x_0, x_1, \dots, x_n \in \Omega \subset \mathfrak{R}^n$  um conjunto de centros. A *função de base radial* é a função  $\varphi_j(x)$ , definida anteriormente. Cada função  $\varphi_j$  é radialmente simétrica sobre o centro  $x_j$ .

Dado  $f_i = f(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , a aproximação de interpolação com RBF é:

$$s(x_i) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \varphi_j(x) \quad (4.1.2.a)$$

onde  $N$  é o número de centros. Os coeficientes de expansão,  $\lambda_j$ , são escolhidos de modo que  $s(x_j) = f_j$ . Esses coeficientes  $\lambda_j$  são obtidos pela resolução do sistema linear:

$$H\lambda = f \quad (4.1.2.b)$$

Onde os elementos dessa interpolação são  $H_i = [\varphi(\|x_1 - x_i\|), \dots, \varphi(\|x_N - x_i\|)]$ ,  $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_N]^T$  e  $f = [f_1, \dots, f_N]^T$ , onde  $i=1, \dots, N$ .

### 4.1.3 INTERPOLAÇÃO GENERALIZADA

O problema de interpolação generalizada é dado por:

$$s(x) = f(x) = \sum_{j=0}^N \lambda_j \varphi(\|x_j - x_i\|) + \sum_{k=0}^R \sum_{i=1}^G \beta_{i,k} p_k(x_i) \quad (4.1.3.a)$$

onde  $X = \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_L\}$  e  $f(x)$  é conhecida para uma série de pontos  $X$ . A função  $\varphi$  é a função de base radial,  $\lambda$  e  $\beta$  são coeficientes da RBF e do polinômio respectivamente,  $p_k(x_i)$  é uma base de polinômios, em que  $R$  é o grau do polinômio,  $G$  é o número de variáveis e  $N$  é o número de centros.

Essa aproximação é resolvida para os  $\lambda_j$  e  $\beta_{i,k}$  coeficientes desconhecidos do sistema linear de  $N$  equações.

A fim de encontrar um sistema possível e determinado são adicionadas equações extras (condição de unicidade), representadas por:

$$\sum_{j=0}^N \lambda_j p_k(x_i) = 0 \quad (4.1.3.b)$$

onde  $N$  é o número de centros,  $k$  é a variação do grau do polinômio ( $k = 1, \dots, R$ ),  $i$  é o número de variáveis ( $i = 1, \dots, G$ ) e  $p_k(x_i) = x_i^k$ .

É adicionada a equação acima a cada expansão, ou seja, cada variável do problema (função corrente e temperatura), fechando assim o sistema linear de  $[(N + R * G) + 1]$  equações.

### 4.1.4 GHOST CENTERS (CENTROS FANTASMAS)

A estratégia dos *Ghost centers* foi abordada por Chinchapatnam (2006), onde foi usada uma equação bi-harmônica de 4º ordem, motivo que levou o sistema de equações e

variáveis a ficar com um número desigual desses fatores, impossibilitando a sua resolução. Esta tática, então, capacitou o sistema de se classificar em possível e determinado, igualando o número de equações ao número de variáveis.

Neste trabalho, a estratégia dos *Ghost centers* também será aplicada, primeiro no problema 1 onde se pretende obter resultados similares ao de Chinchapatnam (2006) e depois, dando continuidade a aplicação desta estratégia, ela será utilizada no problema 2. A não utilização desta estratégia poderia ser substituída pela técnica de mínimos quadrados.

#### 4.1.4.1 ESTUDO DE CENTROS FANTASMAS PARA OS PROBLEMAS ABORDADOS.

A formulação em RBF para o primeiro problema com variável função corrente é definida como:

$$\Psi(X, Y) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi_i(r_i) \quad (4.1.4.1.a)$$

Onde  $\Psi$  é a função corrente,  $\lambda$  é o parâmetro a ser calculado,  $\varphi$  é a RBF com a norma euclidiana e  $N$  é o número de centros usados na aproximação por RBF.

Utilizando a formulação matemática obtida no capítulo 3, equação (3.1.3.h) e condições de contorno (3.1.3.i-1), junto à expressão (4.1.4.1.a), encontra-se a equação abaixo:

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial^4 \varphi_i}{\partial X^4} + 2 \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial^4 \varphi_i}{\partial X^2 \partial Y^2} + \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial^4 \varphi_i}{\partial Y^4} - \text{Re} \left[ \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial Y} \left( \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial^3 \varphi_i}{\partial X^3} + \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial^3 \varphi_i}{\partial X \partial Y^2} \right) - \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial X} \left( \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial^3 \varphi_i}{\partial Y^3} + \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial^3 \varphi_i}{\partial X^2 \partial Y} \right) \right] = 0 \quad (4.1.4.1.b)$$

Com as condições de contorno:

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi_i = 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial X} = 0 \quad X = 0 \quad (4.1.4.1.c)$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi_i = 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial X} = 0 \quad X = 1 \quad (4.1.4.1.d)$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi_i = 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial Y} = 0 \quad Y = 0 \quad (4.1.4.1.e)$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi_i = 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial Y} = 1 \quad Y = 1 \quad (4.1.4.1.f)$$

A equação (4.1.4.1.b) está definida em  $0 < X < 1$  e  $0 < Y < 1$ .

As equações (4.1.4.1.b-f) resultam em um sistema não-linear o qual foi resolvida pelo método de Broyden (Press et al, 1999).

Note que a equação (4.1.4.1.b) deve ser escrita para cada ponto do domínio. Assim, para  $L$  pontos de colocação, a equação (4.1.4.1.b) deverá ter  $L$  equações. Além disso, as equações (4.1.4.1.c-f) devem ser escritas para cada ponto de colocação nas fronteiras. Logo, para  $P$  pontos de colocação nas fronteiras, a condição de contorno para a equação bi-harmônica resultará em  $2P$  equações, pois se trata de uma equação de 4º ordem. Portanto, a fim de chegar na igualdade entre o número de variáveis e o número de equações, a variável  $N$  deverá ser igual a  $(L + 2P)$ . Para resolver essa questão, onde o número de equações ainda é superior ao de variáveis a estratégia de “centros fantasmas” é empregada, em que  $P$  centros extras são colocados fora do domínio perto das fronteiras.

Para cada ponto de colocação na fronteira existe um centro fantasma. A distância de cada ponto de colocação na fronteira ao seu respectivo centro fantasma é a mesma.

Um diagrama de distribuição do total de centros é mostrado na Figura 4.1.4.

Da mesma maneira que esta estratégia foi empregada na cavidade com tampa deslizante, será feita no problema da cavidade com convecção natural.

Os pontos fantasmas serão centros fictícios, onde as funções são avaliadas, aumentando assim, o número de variáveis  $\lambda$ .

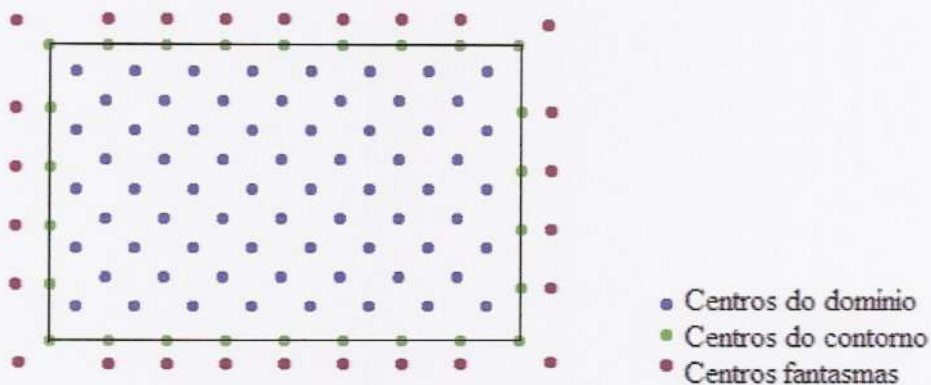


FIG.4.1.4 - Diagrama de distribuição dos centros

#### 4.1.5 MÉTODO QUASI-NEWTON

A aplicação das equações (4.1.4.1.a) e (4.1.4.2.a-b) nas equações (4.1.4.1.b-f) e (4.1.4.2.b-h) respectivamente nos problemas da cavidade com tampa deslizante e problema da cavidade com convecção natural, gera um sistema de equações algébricas não-lineares que pode ser muito mal condicionado, dependendo do valor do fator de forma "c". Para a solução deste sistema, foram testados os métodos de Levenberg Marquadt (Biblioteca IMSL, 1997), Powell (Biblioteca IMSL, 1997) e Broyden (Press et al,1999). Dentre eles, o método Broyden foi o que se mostrou mais robusto. Tal método é classificado como um método Quasi-Newton. No método de Newton tradicional, a fim de se acelerar o processo de convergência, são usadas informações das segundas derivadas, procurando aproximar o funcional que está sendo minimizado (no caso, a norma  $L_2$  do resíduo das equações não-lineares) por uma função quadrática. Contudo, a avaliação da matriz das derivadas de segunda ordem (chamada de Hessiano) é um processo custoso e que pode demandar elevado tempo computacional, dependendo do problema. Assim, o método Quasi-Newton fornece uma aproximação da matriz Hessiano, usando apenas informações do gradiente. A matriz aproximação é atualizada em cada iteração usando a informação das derivadas (gradiente) da iteração anterior. Desta forma, o método torna-se rápido, mas não muito custoso.

A Figura 4.1.5 apresenta o fluxograma da escolha do melhor "c". O processo iterativo começa com o cálculo da menor distância  $d$  entre dois pontos do domínio e uma estimativa para o coeficiente  $\lambda$  da RBF é dado ( $\lambda = 0$ ). A cada valor do parâmetro de forma "c" (1d, 2d, 3d, 4d e 5d) é calculado o novo coeficiente  $\lambda$  e o resíduo (função de minimização que é obtida pela raiz quadrada da soma do quadrado das funções (equações do problema)), considerando como estimativa da próxima iteração o coeficiente  $\lambda$  encontrado na iteração anterior. O último coeficiente encontrado é armazenado. O código computacional sempre armazena, ao final de 5 iterações, o melhor "c", junto com o seu resíduo e o seu coeficiente calculado. A partir desses dados armazenados, analisa-se se o resíduo foi menor do que 0.1 (tolerância utilizada pelo programa). Se o resíduo for menor que a tolerância, calculam-se as variáveis do problema (velocidades, função corrente, vorticidade e temperatura) e são exibidos os melhores dados armazenados ao final do conjunto das 5 iterações. Se o resíduo não for menor que a tolerância, reinicia-se o processo iterativo onde a nova estimativa para o coeficiente  $\lambda$  será o encontrado na última iteração. Caso, ao final de um processo de 5 vezes as 5 iterações, o problema não convergir, o código exibirá como resposta aquele resultado armazenado ao após as iterações, podendo chegar a uma solução não satisfatória.

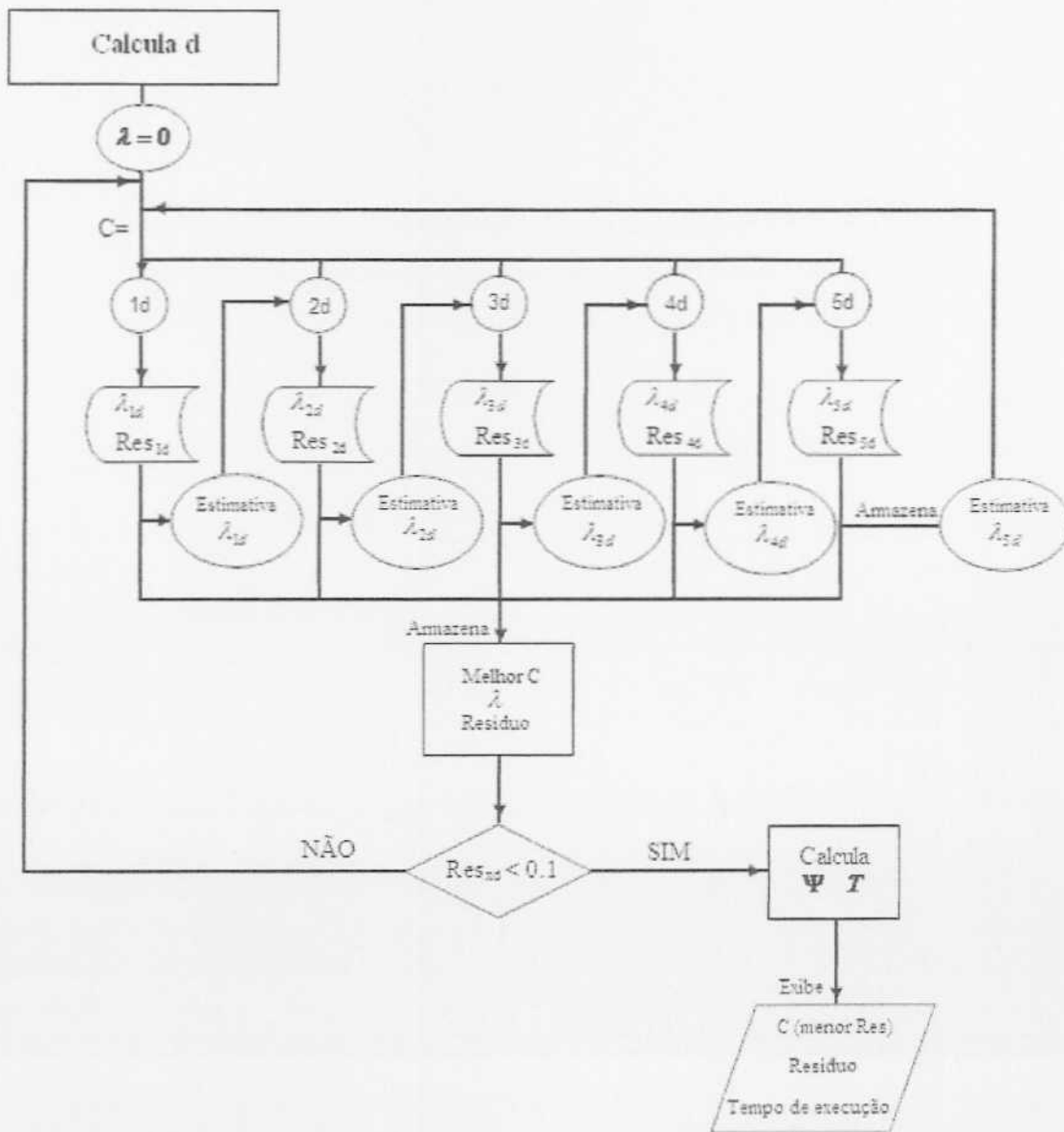


FIG.4.1.5- Fluxograma da escolha do melhor "c".

## CAPÍTULO 5

### RESULTADOS

Este trabalho tem por finalidade aplicar o conceito de funções de base radial à solução de problemas condutivos-convectivos, visando avaliar sua robustez, acurácia e tempo de execução.

Os programas computacionais para a solução numérica dos dois problemas propostos foram desenvolvidos na linguagem Fortran 90 (Brainerd et al, 1995) e o compilador usado foi o Compaq Visual Fortran 6.6.0. Todos os casos foram rodados em um Intel Pentium 4 com 3.06 GHz e 1.0GB de memória RAM.

A fim de validar a solução numérica, utilizaram-se resultados benchmark da literatura.

#### 5.1 RESULTADOS BENCHMARKS

São obtidos por técnicas analíticas, semi-analíticas ou então usando malhas muito finas. São problemas suficientemente simples que possam ser resolvidos por essas técnicas, mas suficientemente complexos para representarem algum fenômeno físico. Resultado benchmark é uma “solução padrão” ou “solução de comparação”. É um padrão para poder comparar outros métodos ou programas.

Existem várias soluções benchmark para problemas de fluidos: a cavidade com tampa deslizante, escoamento em um duto com degrau, convecção forçada em canais de placas planas, convecção natural em cavidades, etc (Ghia et al, 1982; Davis, 1983; Leal et al, 1999 e 2000).

## 5.2 FORMULAÇÃO

Nesta seção é apresentada a implementação do método baseado na função de base radial para o problema da cavidade quadrada com tampa deslizante e para a cavidade quadrada com convecção natural.

### 5.2.1 CAVIDADE QUADRADA COM TAMPA DESLIZANTE

Expande-se a variável função corrente com a seguinte expressão:

$$\Psi(X, Y) = \sum_{i=0}^N \lambda_i \varphi_i(r_i) \quad (5.2.1.a)$$

Onde  $\Psi$  é a função corrente,  $\lambda$  é o parâmetro a ser calculado,  $\varphi$  é a RBF com a norma euclidiana e  $N$  é o número de centros já definidos na seção 4.1.4.1.

Utilizando a formulação matemática obtida no capítulo 3, equação (3.1.3.h) e condições de contorno (3.1.3.i-1), junto à expressão (5.2.1.a), o programa computacional pode ser analisado para a equação resultante abaixo:

$$\sum_{i=0}^N \lambda_i \frac{\partial^4 \varphi_i}{\partial X^4} + 2 \sum_{i=0}^N \lambda_i \frac{\partial^4 \varphi_i}{\partial X^2 \partial Y^2} + \sum_{i=0}^N \lambda_i \frac{\partial^4 \varphi_i}{\partial Y^4} \quad (5.2.1.b)$$

$$- \operatorname{Re} \left[ \sum_{i=0}^N \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial Y} \left( \sum_{i=0}^N \lambda_i \frac{\partial^3 \varphi_i}{\partial X^3} + \sum_{i=0}^N \lambda_i \frac{\partial^3 \varphi_i}{\partial X \partial Y^2} \right) - \sum_{i=0}^N \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial X} \left( \sum_{i=0}^N \lambda_i \frac{\partial^3 \varphi_i}{\partial Y^3} + \sum_{i=0}^N \lambda_i \frac{\partial^3 \varphi_i}{\partial X^2 \partial Y} \right) \right] = 0$$

Com as condições de contorno:

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi_i = 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial X} = 0 \quad X = 0 \quad (5.2.1.c)$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi_i = 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial X} = 0 \quad X = 1 \quad (5.2.1.d)$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi_i = 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial Y} = 0 \quad Y = 0 \quad (5.2.1.e)$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi_i = 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial Y} = 1 \quad Y = 1 \quad (5.2.1.f)$$

A equação (5.2.1.b) está definida em  $0 < X < 1$  e  $0 < Y < 1$ .

### 5.2.1.1 VALIDAÇÃO

O problema da cavidade com tampa deslizante é resolvido nesta seção e comparado com resultados obtidos por Ghia et al (1982) usando o método de diferenças finitas com malha 129x129 nós (resultado benchmark) e com resultados obtidos por Chinchapatnam (2006) com o método baseado nas funções de base radial. O objetivo desde primeiro problema proposto é apenas o de reproduzir os resultados de Chinchapatnam (2006) a fim de testar o algoritmo utilizado. Neste trabalho, o sistema não linear foi resolvido pelo método Quasi-Newton, enquanto no trabalho de Chinchapatnam (2006) foi aplicado o método de Levenberg Marquadt, fato que difere os resultados obtidos aqui com os dessa referência.

Considera-se nessa validação 4x4, 8x8, 12x12, 16x16, 20x20, 30x30 e 40x40 pontos de expansão uniformemente espaçados. Os números de Reynolds utilizados são 0, 100, 400 e 1000. O caso de  $Re=0$  implica que todo o termo convectivo na equação 5.2.1.b será anulado. Utilizando poucas iterações chegou-se a uma solução significativamente boa. Verifica-se uma boa acurácia nos resultados com apenas poucos pontos de expansão se comparados com os resultados obtidos por Ghia et al (1982). Também à medida que o número de Reynolds aumenta, mais pontos de expansão são necessários para obter uma boa solução.

Foram testadas RBFs de suporte global e compacto, mas serão apresentados resultados da RBF tipo multiquádrica, pois teve um melhor desempenho. A multiquádrica é expressa pela expressão abaixo onde  $c$  é o parâmetro da forma.

$$\sqrt{r^2 + c^2}$$

Multiquádrica

As Figuras 5.1.1(a) e 5.1.1(b) mostram a função corrente para  $Re=0$  com 30x30 pontos de expansão no presente trabalho e no trabalho de Chinchapatnam (2006) com 31x31 pontos de distribuição, respectivamente.

Da análise dessas figuras nota-se que a presente solução tende a se aproximar da referência (Chinchapatnam, 2006). Contudo, apesar de, visualmente, a posição de o vórtice principal ser razoavelmente bem capturada, os dois vórtices secundários não se apresentavam visíveis.

Mais à frente será mostrado o resultado para a função corrente com mais pontos de expansão.

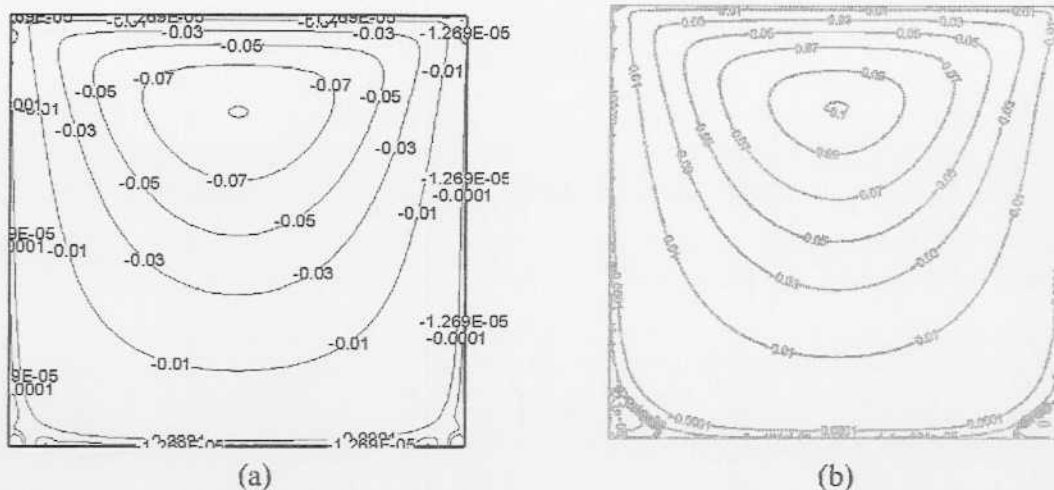
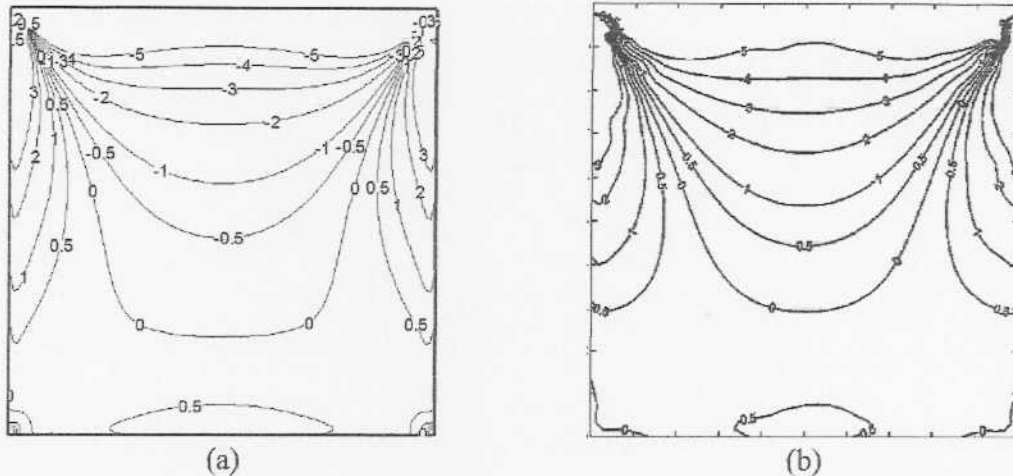


FIG.5.1.1 – Resultado de isolinhas da função corrente para  $Re=0$ , usando 30x30 pontos de expansão, para o presente trabalho (a) e o de Chinchapatnam (2006) (b).

As Figuras 5.1.2(a) e 5.1.2(b) mostram a vorticidade para  $Re=0$  com 30x30 pontos de expansão no presente trabalho e no trabalho de Chinchapatnam (2006) com 31x31 pontos de distribuição, respectivamente.

Percebe-se que as isolinhas para a vorticidade estão bem próximas.

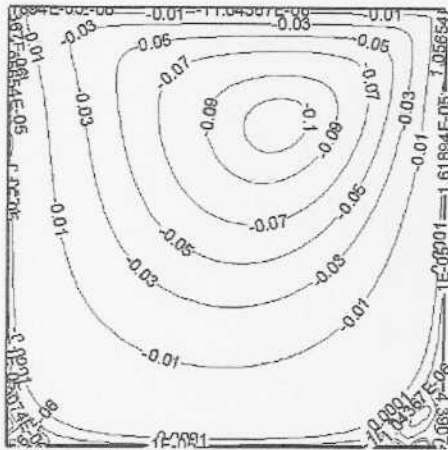
Com  $Re=0$  os termos convectivos são anulados fazendo com que o movimento do fluido se dê somente na direção do escoamento.



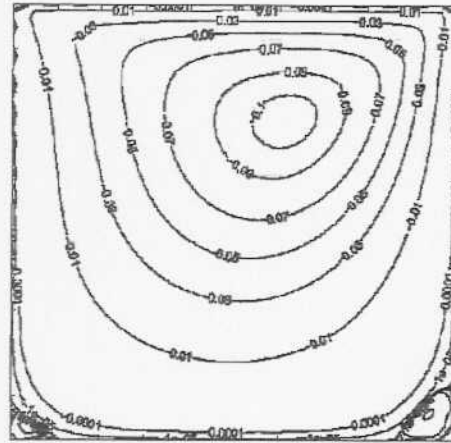
**FIG.5.1.2** – Resultado de isolinhas para a vorticidade para  $Re=0$ , usando 30x30 pontos de expansão, para o presente trabalho (a) e o de Chinchapatnam (2006) (b).

As Figuras 5.1.3(a) e 5.1.3(b) mostram a função corrente para  $Re=100$  com 30x30 pontos de expansão no presente trabalho e no trabalho de Chinchapatnam (2006) com 31x31 pontos de distribuição, respectivamente.

Aqui é visível que o vórtice central se desloca um pouco para a direita em virtude do aumento do número de Reynolds. Os valores das isolinhas foram capturados com precisão. Nesse caso, o aparecimento dos dois vórtices secundários no inferior da cavidade é bem aparente como no resultado de referência (b). Contudo, ainda existem algumas discrepâncias para os vórtices secundários. Essas discrepâncias poderão ser supridas com mais pontos de expansão, o que será mostrado mais à frente.



(a)

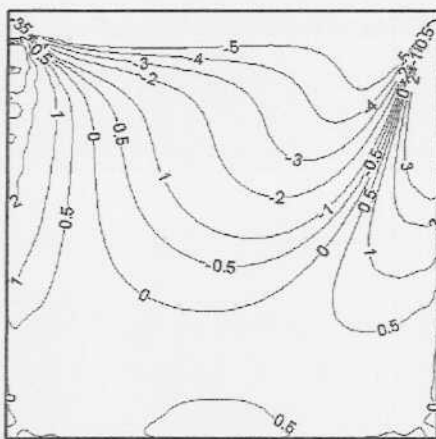


(b)

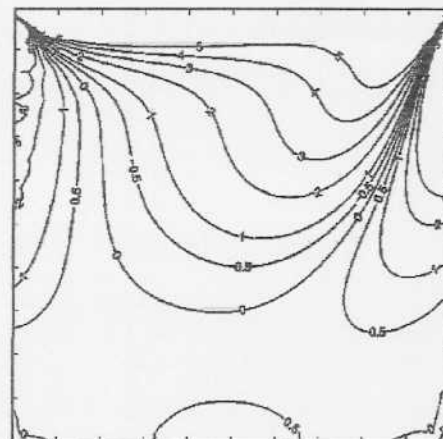
**FIG.5.1.3** – Resultado de isolinhas para a função corrente para  $Re=100$ , usando 30x30 pontos de expansão, para o presente trabalho (a) e o de Chinchapatnam (2006) (b).

As Figuras 5.1.4(a) e 5.1.4(b) mostram a vorticidade para  $Re=100$  com 30x30 pontos de expansão no presente trabalho e no trabalho de Chinchapatnam (2006) com 31x31 pontos de distribuição, respectivamente.

Novamente para este valor de Reynolds, agora comparando a vorticidade, pode-se notar a boa precisão dos resultados. As isolinhas mostradas no resultado base estão bem aproximadas pelo presente trabalho.



(a)



(b)

**FIG.5.1.4** – Resultado de isolinhas para a vorticidade para  $Re=100$ , usando 30x30 pontos de expansão, para o presente trabalho (a) e o de Chinchapatnam (2006) (b).

As Figuras 5.1.5(a) e 5.1.5(b) mostram a função corrente para  $Re=400$  com  $30 \times 30$  pontos de expansão no presente trabalho e no trabalho de Chinchapatnam (2006) com  $31 \times 31$  pontos de distribuição, respectivamente.

Os vórtices principais, que se encontram na parte central da cavidade, deslocam-se para a direita pelo mesmo fato do caso de  $Re=100$ . Os vórtices secundários são maiores e suas isolinhas são bastante aparentes.

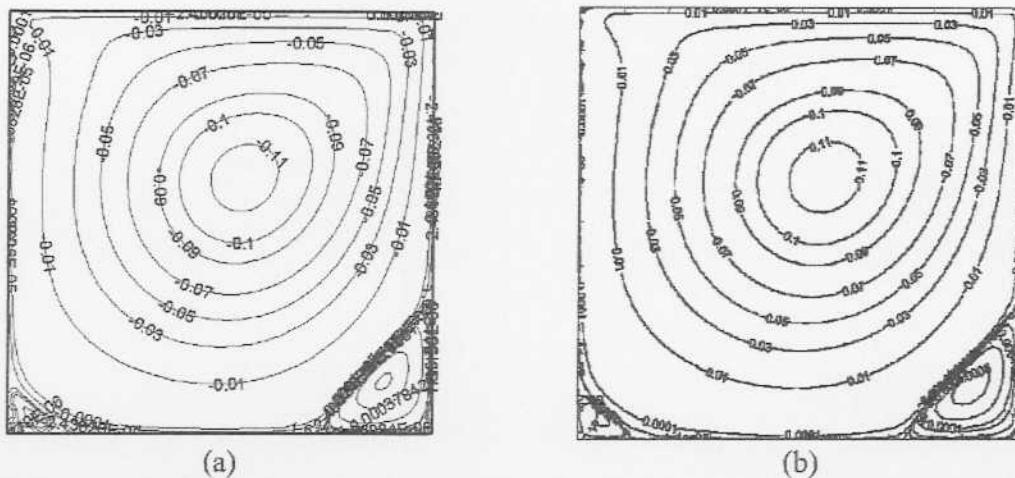
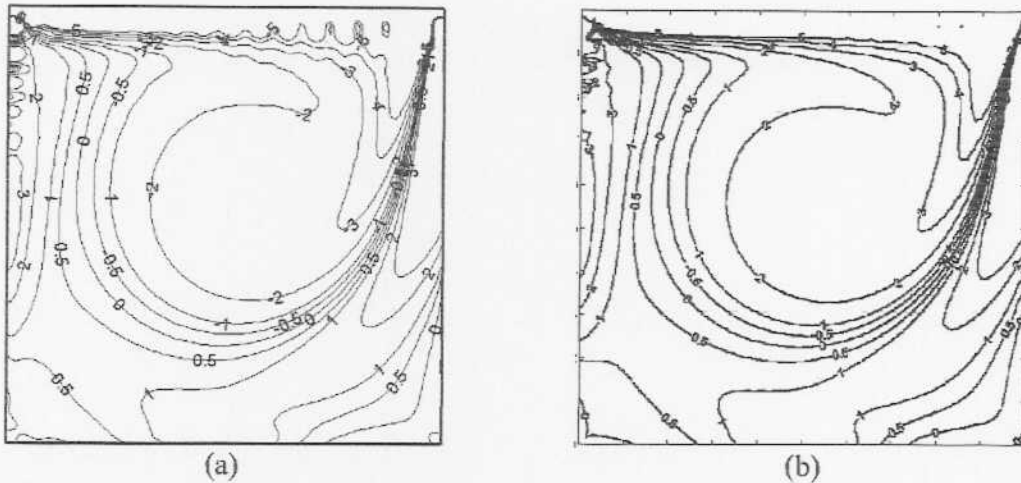


FIG.5.1.5 – Resultado de isolinhas para a função corrente para  $Re=400$ , usando  $30 \times 30$  pontos de expansão, para o presente trabalho (a) e o de Chinchapatnam (2006) (b).

As Figuras 5.1.6(a) e 5.1.6(b) mostram a vorticidade para  $Re=400$  com  $30 \times 30$  pontos de expansão no presente trabalho e no trabalho de Chinchapatnam (2006) com  $31 \times 31$  pontos de distribuição, respectivamente.

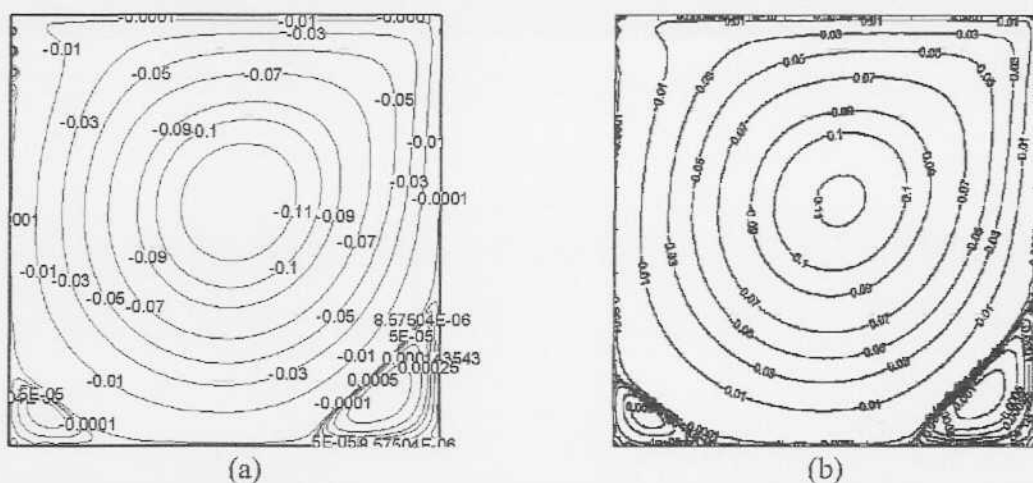
A presente solução para a vorticidade pôde capturar de forma precisa suas isolinhas no centro da cavidade e na sua parte inferior. Já na parte de cima, a isolinha de valor -5 apresentou uma leve diferença quando comparado com o resultado base.



**FIG.5.1.6** – Resultado de isolinhas para a vorticidade para  $Re=400$ , usando  $30 \times 30$  pontos de expansão, para o presente trabalho (a) e o de Chinchapatnam (2006)] (b).

As Figuras 5.1.7(a) e 5.1.7(b) mostram a função corrente para  $Re=1000$  com  $40 \times 40$  pontos de expansão no presente trabalho e no trabalho de Chinchapatnam (2006) com  $41 \times 41$  pontos de distribuição, respectivamente.

Neste caso, onde  $Re=1000$ , os vórtices secundários localizados no inferior da cavidade são maiores, devido a uma maior atuação das forças de inércia sobre as forças viscosas. Apesar de o vórtice central (-0.11), no presente trabalho, se apresentar de tamanho diferente do resultado de Chinchapatnam (2006), o algoritmo foi capaz posicionar e dimensionar de forma correta, os outros vórtices típicos deste caso.

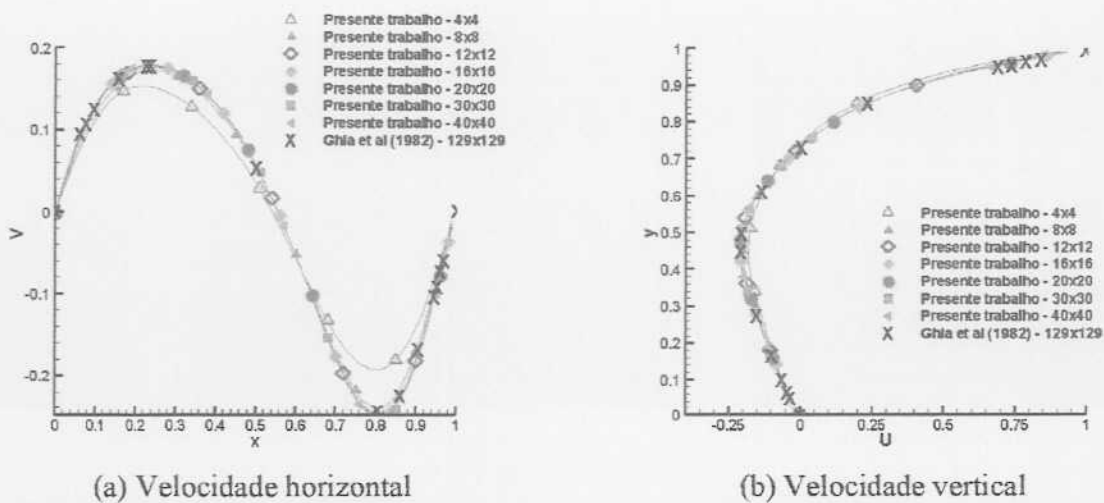


Uma vez realizada a comparação com os resultados de Chinchapatnam, foi realizada uma análise de convergência com os resultados de Ghia et al (1982) para os campos de velocidade na cavidade.

Da análise dessas figuras, constata-se que à medida que o número de centros aumenta, a solução via RBF tende à solução benchmark apresentada por Ghia et al (1982).

A Figura 5.1.8 apresenta a comparação das velocidades, horizontal e vertical, para vários pontos de expansão com resultados obtidos por Ghia et al (1982). O resultado é obtido para  $Re=100$ , a velocidade horizontal é obtida em  $Y = 0.5$  e a velocidade vertical é obtida em  $X = 0.5$ .

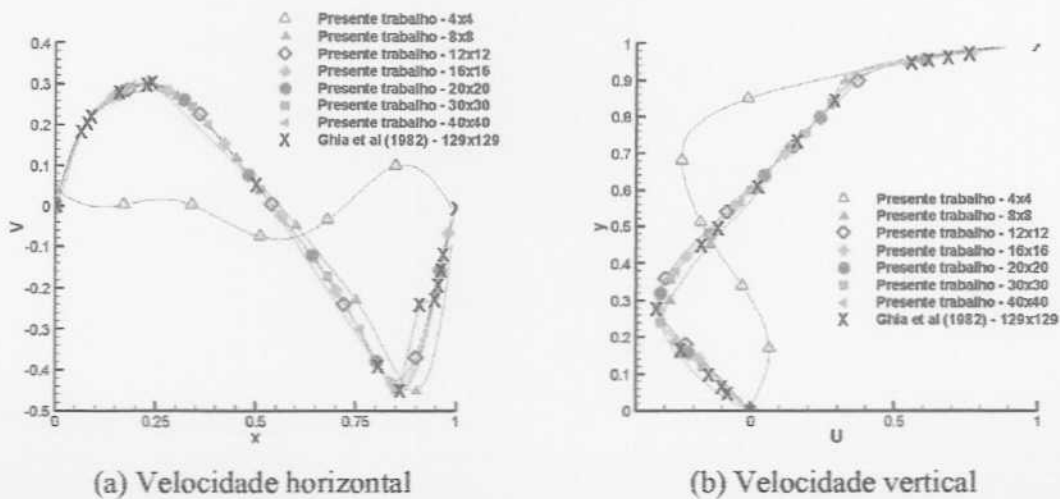
Nota-se nessas figuras (a) e (b) que, a partir de  $8 \times 8$  centros, a solução para as componentes de  $U$  e  $V$  do campo de velocidades na região central da cavidade já se aproxima bastante dos resultados benchmark.



**FIG.5.1.8** - Comparação dos componentes da velocidade para  $Re=100$ , para as velocidades horizontal (a) e vertical (b).

A Figura 5.1.9 apresenta a comparação das velocidades, horizontal e vertical, para vários pontos de expansão com resultados obtidos por Ghia et al (1982). O resultado é obtido para  $Re=400$ , a velocidade horizontal é obtida em  $Y = 0.5$  e a velocidade vertical é obtida em  $X = 0.5$ .

Neste caso, a solução para 4x4 pontos de expansão se destacou como sendo uma solução que não tendeu ao benchmark. Percebe-se que a partir de 12x12 pontos de expansão as curvas para as componentes da velocidade ficaram bem próximas ao resultado de comparação.



**FIG.5.1.9** - Comparação dos componentes da velocidade para  $Re=400$ , para as velocidades horizontal (a) e vertical (b)

A Figura 5.1.10 apresenta a comparação das velocidades, horizontal e vertical, para vários pontos de expansão com resultados obtidos por Ghia et al (1982). O resultado é obtido para  $Re=1000$ , a velocidade horizontal é obtida em  $Y = 0.5$  e a velocidade vertical é obtida em  $X = 0.5$ .

Aqui, foram necessários mais pontos para que a solução tendesse ao benchmark. Resultados com 4x4 e 8x8 pontos de expansão, não bastaram para mostrar qualitativamente a resposta das curvas para as velocidades  $U$  e  $V$ . Entre 16x16 e 20x20 pontos de expansão a solução se aproxima da obtida por Ghia et al (1982).

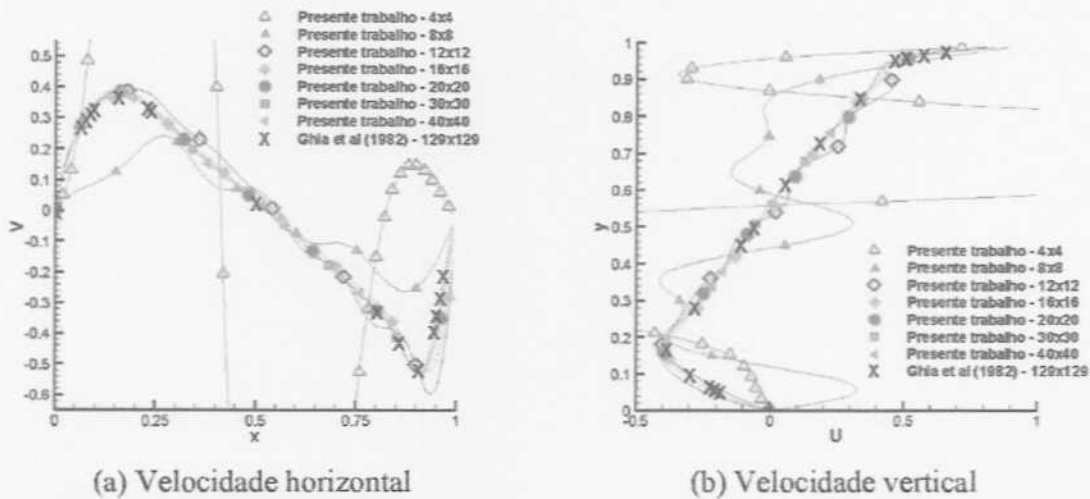


FIG.5.1.10 - Comparação dos componentes da velocidade para  $Re=1000$ , para as velocidades horizontal (a) e vertical (b).

Os resultados obtidos mostraram que quanto maior o número de Reynolds, mais pontos de expansão são necessários para uma boa solução.

Mesmo usando poucos pontos,  $8 \times 8$  para  $Re=100$ ,  $12 \times 12$  para  $Re=400$  e  $16 \times 16$  para  $Re=1000$ , o algoritmo computacional implementado pode capturar os resultados base (resultados para validar o presente trabalho) com boa precisão, refletindo o bom desempenho do algoritmo.

As tabelas a seguir mostram o tempo computacional requerido para cada caso teste, bem como o fator de forma "c" obtido automaticamente durante a solução dos sistemas lineares. Pode-se observar o resíduo extremamente pequeno obtido para todos os casos. Nota-se também que o tempo computacional é bastante reduzido, mostrando uma grande aplicabilidade para o uso de funções de base radial na solução de problemas condutivos-convectivos. É interessante notar também que à medida que o número de Reynolds aumenta, o tempo computacional requerido aumenta devido à maior influência dos termos convectivos.

Nas tabelas a seguir, estão presentes dados obtidos pelo código computacional. O primeiro dado é o *parâmetro* "c" que foi citado no capítulo 4, o *resíduo* é obtido pela função de minimização e o *tempo* é o tempo total de execução.

As Tabelas 5.1.a, 5.1.b, 5.1.c e 5.1.d referem-se aos dados obtidos para Reynolds iguais à zero, 100, 400 e 1000, respectivamente para vários pontos de expansão utilizados.

**TAB.5.1.a - Dados encontrados para Re=0**

Pontos de expansão	Parâmetro "c"	Resíduo	Tempo
4x4	0,2	8,5726764E-12	0,03s
8x8	0,111111	1,2944711E-1	0,4s
12x12	7,6923080E-02	2,0900660E-11	2,8s
16x16	5,8823530E-02	4,2409621E-11	11,5s
20x20	4,7619049E-02	8,8221028E-11	108s
30x30	3,2258064E-02	6,1019151E-10	954,7s
40x40	2,4390243E-02	1,3799427E-09	5801s

**TAB.5.1.b - Dados encontrados para Re=100**

Pontos de expansão	Parâmetro "c"	Resíduo	Tempo
4x4	1,00	1,4116432E-05	0,125s
8x8	0,5555556	1,7560858E-05	1,48s
12x12	0,3846154	1,1815858E-04	7,57s
16x16	0,2352941	1,2408062E-04	42,8s
20x20	0,2380952	8,3490386E-06	124s
30x30	0,1290323	5,1624924E-05	1292s
40x40	9,7560972E-02	3,2507480E-05	4754s

**TAB.5.1.c - Dados encontrados para Re=400**

Pontos de expansão	Parâmetro "c"	Resíduo	Tempo
4x4	0,4	1,3439294E-05	0,25s
8x8	0,5555556	2,9491017E-05	2,2s
12x12	0,2307692	4,9528040E-05	12,8s
16x16	0,1764706	7,2958428E-06	48s
20x20	0,1904762	1,1035286E-04	164s
30x30	0,1290323	9,1479105E-06	1779s
40x40	9,7560972E-02	3,0068428E-05	8346s

**TAB.5.1.d - Dados encontrados para Re=1000**

Pontos de expansão	Parâmetro "c"	Resíduo	Tempo
4x4	0,4	2,0755882E-05	1,6s
8x8	0,2222222	3,7612212E-05	28s
12x12	0,3076923	1,0309939E-03	303,6s
16x16	0,2941177	2,9178846E-04	66s
20x20	0,1904762	2,9396123E-04	303,6s
30x30	0,1290323	8,6078158E-05	1208s
40x40	7,3170729E-02	3,7743282E-04	7476s

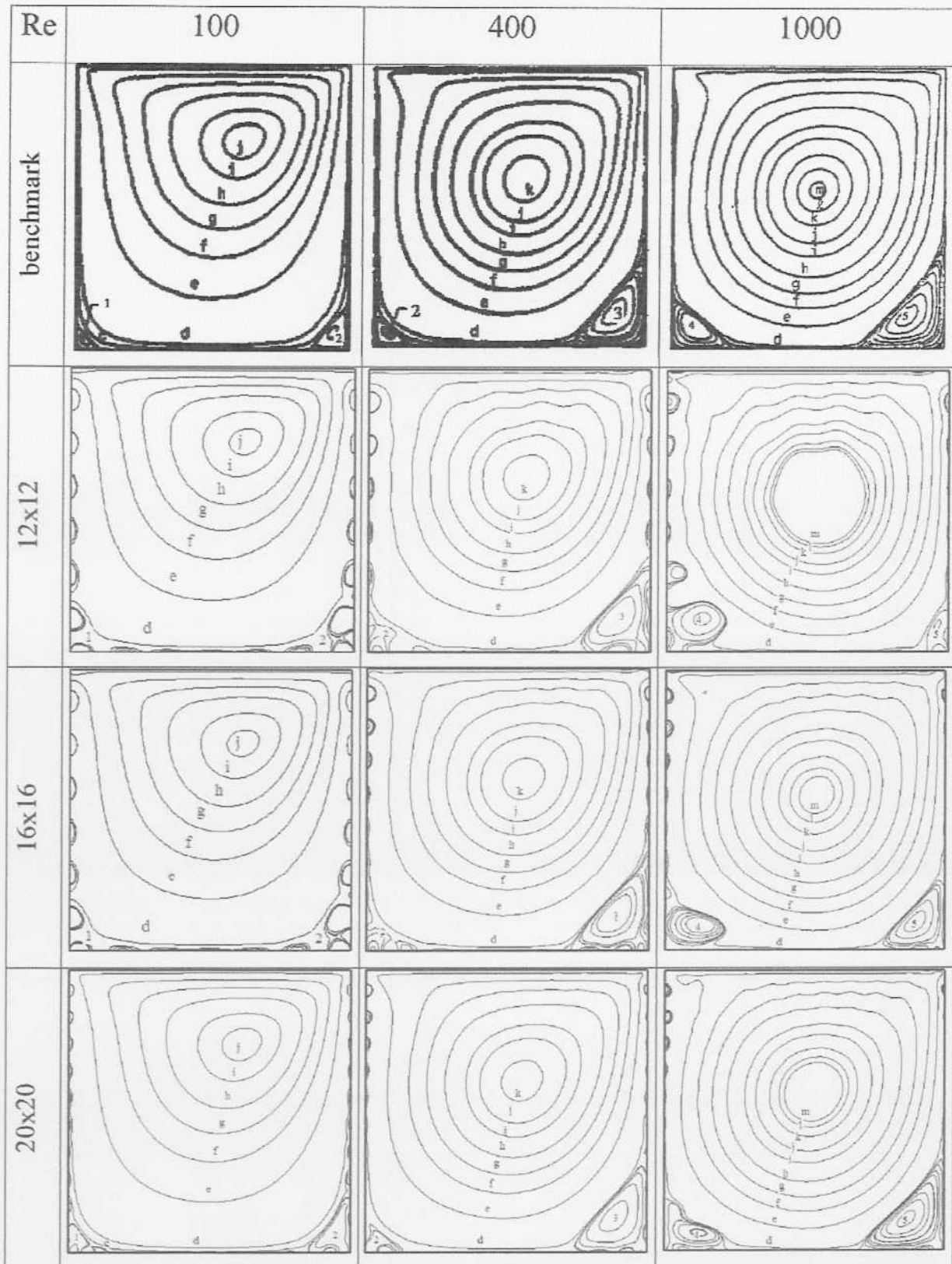
O parâmetro “ $c$ ” é estimado como o múltiplo da menor distância entre dois pontos de expansão, como já foi mencionado no capítulo anterior. O melhor parâmetro que foi mencionado para todos os pontos de expansão acima é o que tem o menor resíduo. À medida que o número de pontos de expansão aumenta, o parâmetro de forma diminui. Isso acontece devido à estimativa usada para calcular o parâmetro que se dá pela menor distância entre dois pontos do domínio. Logo, quanto mais pontos de expansão, menor será a distância entre eles.

O resíduo, uma função de minimização entre as equações do problema, é baixo e não se tem uma relação entre os pontos utilizados.

O tempo de execução aumenta com o “refinamento da malha”. No caso de  $Re=1000$  com  $12 \times 12$  pontos de expansão, o tempo computacional excedeu o de uma “malha” maior, no caso  $16 \times 16$ , pois por objetivo da busca de uma solução com baixo resíduo, mais iterações foram necessárias, aumentando o tempo de processamento.

Finalizando a análise da cavidade com tampa deslizante, uma análise cruzada foi feita, com os pontos de expansão viáveis para uma apreciação gráfica das linhas de corrente e vorticidade, a fim de comparar o avanço das isolinhas para cada grupo de pontos de expansão.

Na Figura 5.1.d estão presentes os resultados para a função corrente para  $12 \times 12$ ,  $16 \times 16$ ,  $20 \times 20$ ,  $30 \times 30$  e  $40 \times 40$  pontos de expansão juntamente com os resultados benchmark obtidos por Ghia et al (1982) usando o método de diferenças finitas com malha  $129 \times 129$  nós. Os valores para a referida variável em cada contorno específico são dados na Tabela 5.1.e. Todos os contornos tabelados foram encontrados em todos os pontos de expansão. Para  $12 \times 12$  e  $16 \times 16$  pontos de expansão, os vórtices centrais e os dois vórtices secundários, para todos os números de Reynolds não obtiveram boa precisão. Para mais pontos pôde-se chegar ao resultado padrão, mas nota-se que quanto maior o número de Reynolds, mais pontos serão necessários para se chegar ao resultado benchmark.



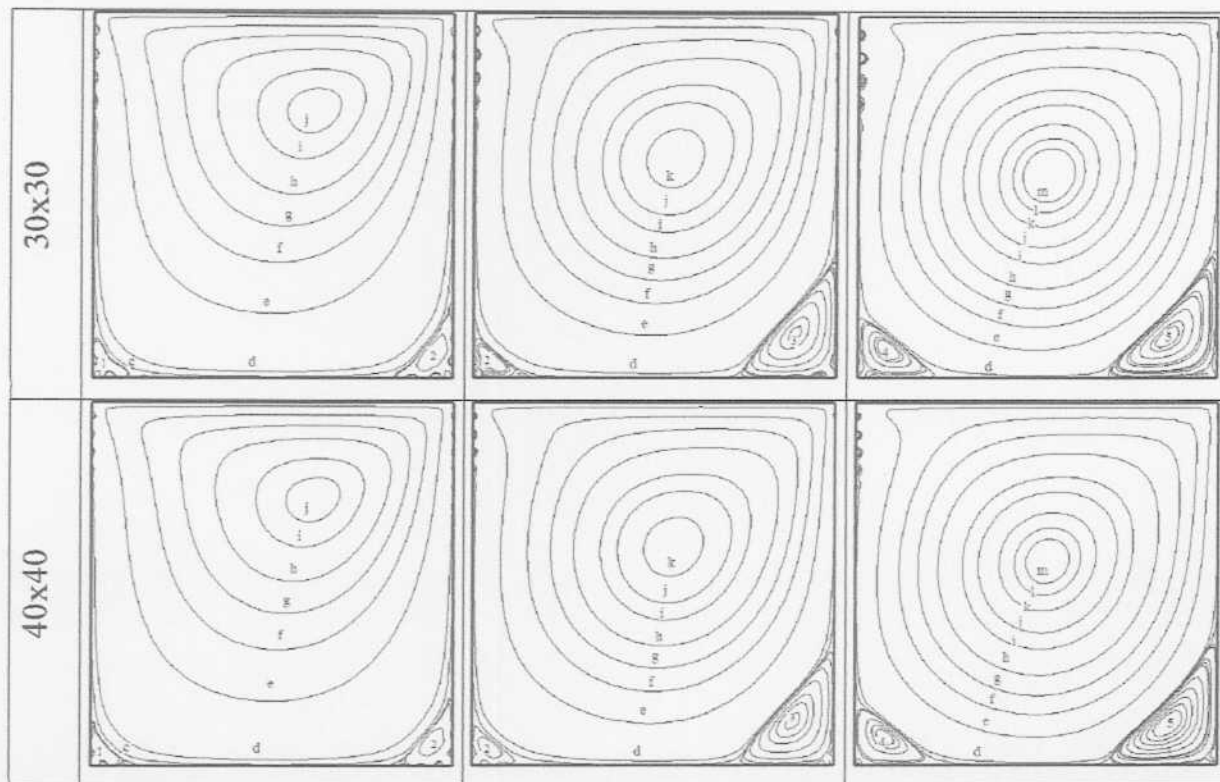
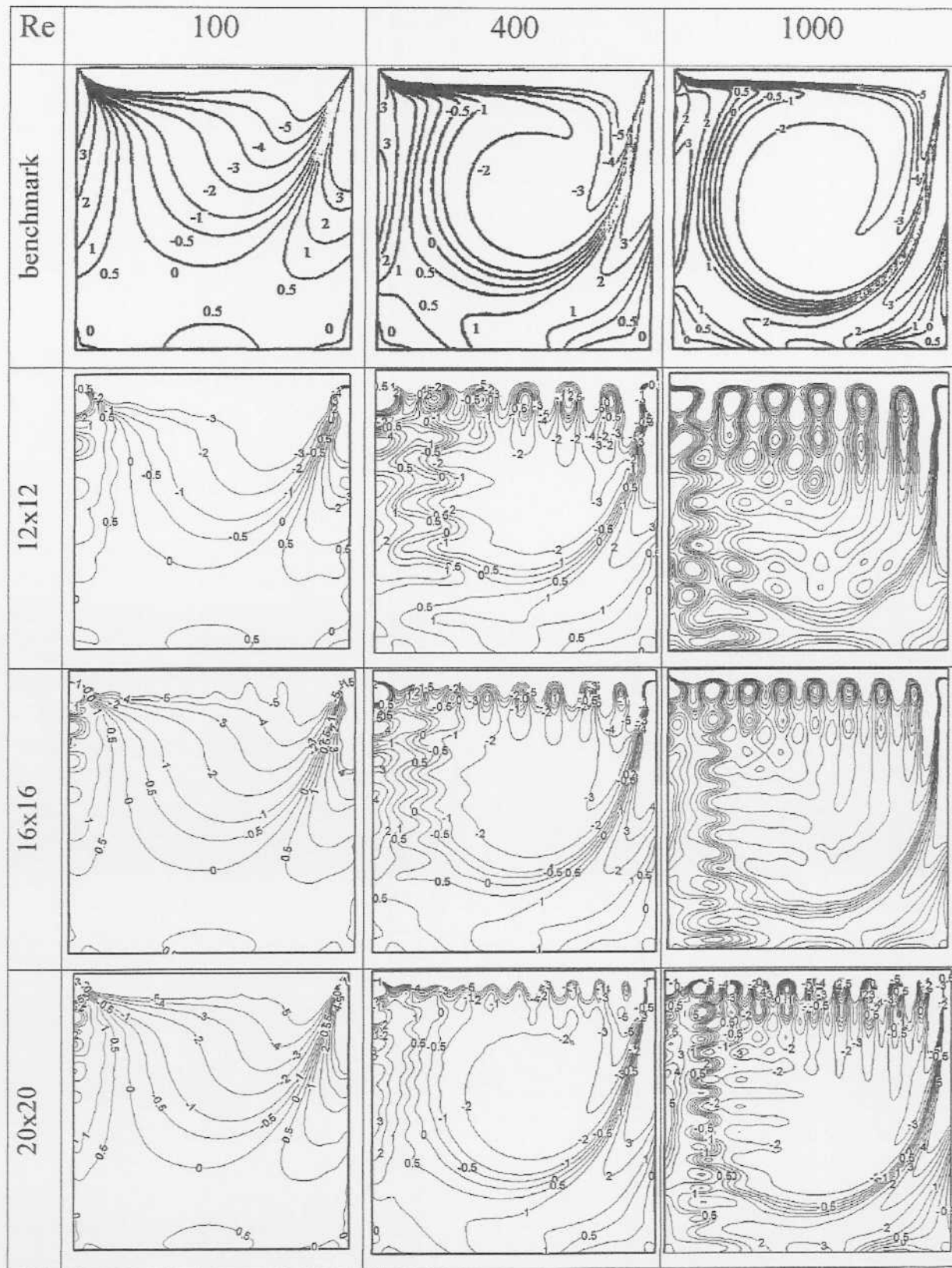


FIG.5.1.d - Linhas de corrente para  $Re=100, 400$  e  $1000$  com  $12 \times 12, 16 \times 16, 20 \times 20, 30 \times 30$  e  $40 \times 40$  pontos de expansão.

**TAB.5.1.e** - Valores para a função corrente em cada contorno

Contorno	Função corrente	Contorno	Função corrente
c	$-1,0 \times 10^{-5}$	k	-0,11
d	$-1,0 \times 10^{-4}$	l	-0,115
e	-0,01	m	-0,1175
f	-0,03	1	$1,0 \times 10^{-6}$
g	-0,05	2	$1,0 \times 10^{-5}$
h	-0,07	3	$5,0 \times 10^{-5}$
i	-0,09	4	$1,0 \times 10^{-4}$
j	-0,1	5	$1,5 \times 10^{-3}$

A Figura 5.1.e mostra os resultados para a vorticidade 12x12, 16x16, 20x20, 30x30 e 40x40 pontos de expansão juntamente com os resultados benchmark obtidos por Ghia et al (1982) usando o método de diferenças finitas com malha 129x129 nós. Percebem-se resultados consideráveis com 20x20 pontos de expansão para  $Re=100$  e 400. Para  $Re=1000$ , nem mesmo com 40x40 pontos de expansão o código foi capaz de estruturar graficamente um bom resultado. Isto pode estar condicionado a forma de se obter a vorticidade, como sendo resultante de segundas derivadas da função corrente. Como é obtido por códigos numéricos, erros podem ser gerados e amplificados por essas segundas derivadas.



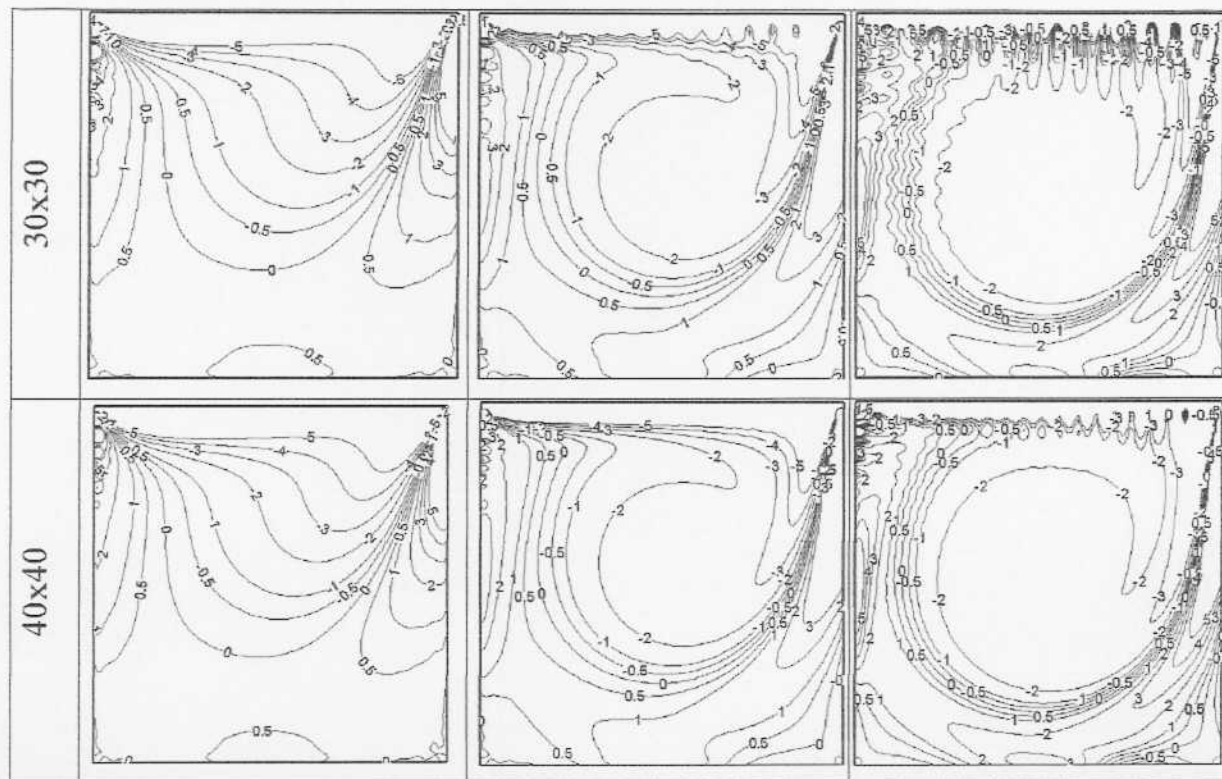


FIG.5.1.e - Vorticidade para  $Re=100, 400$  e  $1000$  com  $12 \times 12, 16 \times 16, 20 \times 20, 30 \times 30$  e  $40 \times 40$  pontos de expansão.

## 5.2.2 CAVIDADE QUADRADA COM CONVECÇÃO NATURAL

Neste problema, expandem-se as variáveis, função corrente e temperatura com as seguintes expressões:

$$\Psi(X, Y) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi_i(\mathbf{r}_i) \quad (5.2.2.a)$$

$$T(X, Y) = \sum_{j=1}^M \lambda_j \varphi_j(\mathbf{r}_j) \quad (5.2.2.b)$$

Onde  $\Psi$  é a função corrente,  $T$  é a temperatura,  $\lambda$  são diferentes para cada expansão e  $\varphi$  é a mesma RBF para as duas expansões com a norma euclidiana. Os números de centros  $N$  e  $M$  são diferentes para cada expansão.

Utilizando a formulação matemática obtida no capítulo 3, equações (3.2.3.g-h) e condições de contorno (3.2.3.i-l), junto às expressões (5.2.2.a-b), o programa computacional pode ser analisado para as equações resultantes abaixo:

$$\begin{aligned} & \left[ \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial^4 \varphi_i}{\partial X^4} + 2 \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial^4 \varphi_i}{\partial X^2 \partial Y^2} + \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial^4 \varphi_i}{\partial Y^4} \right] - \\ & \left[ \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial Y} \left( \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial^3 \varphi_i}{\partial X^3} + \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial^3 \varphi_i}{\partial X \partial Y^2} \right) - \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial X} \left( \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial^3 \varphi_i}{\partial Y^3} + \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial^3 \varphi_i}{\partial X^2 \partial Y} \right) \right] \\ & - \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}} \sum_{j=1}^M \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial X} = 0 \end{aligned} \quad (5.2.2.c)$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial Y} \sum_{j=1}^M \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial X} - \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial X} \sum_{j=1}^M \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Pr}} \left( \sum_{j=1}^M \lambda_j \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial X^2} + \sum_{j=1}^M \lambda_j \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial Y^2} \right) \quad (5.2.2.d)$$

Com as condições de contorno:

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi_i = 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial X} = 0 \quad \sum_{j=1}^M \lambda_j \varphi_j = 1 \quad X = 0 \quad (5.2.2.e)$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi_i = 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial X} = 0 \quad \sum_{j=1}^M \lambda_j \varphi_j = 0 \quad X = 1 \quad (5.2.2.f)$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi_i = 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial Y} = 0 \quad \sum_{j=1}^M \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial Y} = 0 \quad Y = 0 \quad (5.2.2.g)$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi_i = 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial Y} = 0 \quad \sum_{j=1}^M \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial Y} = 0 \quad Y = 1 \quad (5.2.2.h)$$

Da equação (5.2.2.c) nota-se que agora o número de Rayleigh é o que controla a influência do processo convectivo, ao contrário da seção anterior onde o número de Reynolds o controlava. Percebe-se também que a equação bi-harmônica aparece acoplada com a equação da energia. A importância deste acoplamento se dá em função do número de Rayleigh. Logo quanto maior o número de Rayleigh maior os efeitos do termo de empuxo.

### 5.2.2.1 VALIDAÇÃO

O problema da cavidade com convecção natural é validado nesta seção através dos resultados obtidos por Davis (1983) usando o método de diferenças finitas e dos resultados de Leal et al (1999), obtidos pela Técnica da Transformada Integral generalizada (GITT). Esses resultados para validação são chamados de resultados benchmark.

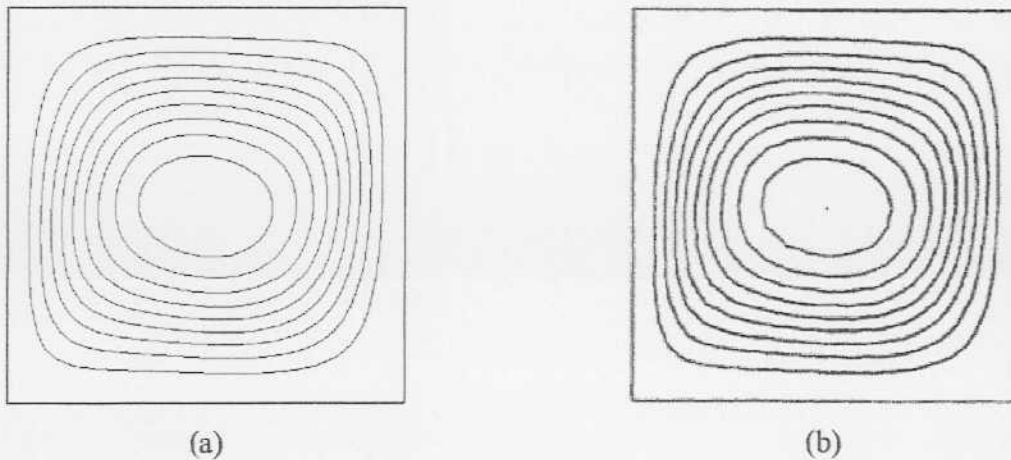
Até este momento, o problema de convecção natural provocado por diferença de temperatura em uma cavidade quadrada não foi analisada através do uso de funções de base radial e, a principal contribuição desta dissertação, está nesse fato.

Considera-se nessa validação 4x4, 8x8, 12x12, 16x16, 20x20, 30x30 e 40x40 pontos de expansão uniformemente espaçados. Para análise da convergência, três números de Rayleigh são considerados ( $10^4$ ,  $10^5$  e  $10^6$ ), variando conforme a dimensão da cavidade (Tabela 3.2.a). O número de Prandtl é uma variável adimensional do problema e o seu valor foi tomado como 0.71, visto que o fluido considerado foi o ar a 20°C. A acurácia nos resultados com poucos pontos de expansão se comparados com as referências, também pôde ser constatada.

Todas as RBFs citadas no capítulo 4 foram testadas e novamente a multiquádrica obteve resultados consideráveis. A multiquádrica é expressa pela expressão abaixo onde  $c$  é o parâmetro da forma.

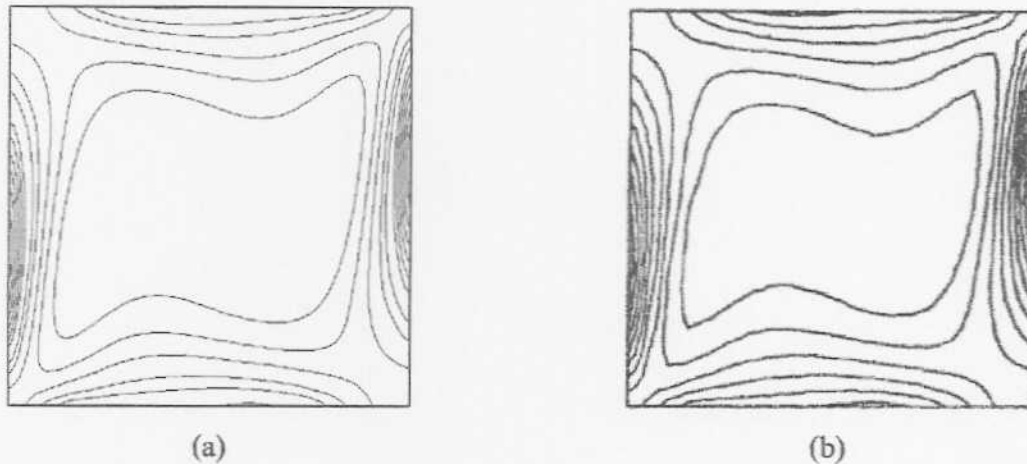
$$\sqrt{r^2 + c^2} \quad \text{Multiquádrica}$$

As Figuras 5.2.1(a) e 5.2.1(b) mostram a função corrente para  $Ra=10^4$  com 40x40 pontos de expansão no presente trabalho e no trabalho de Davis (1983) com 41x41 pontos de distribuição, respectivamente.



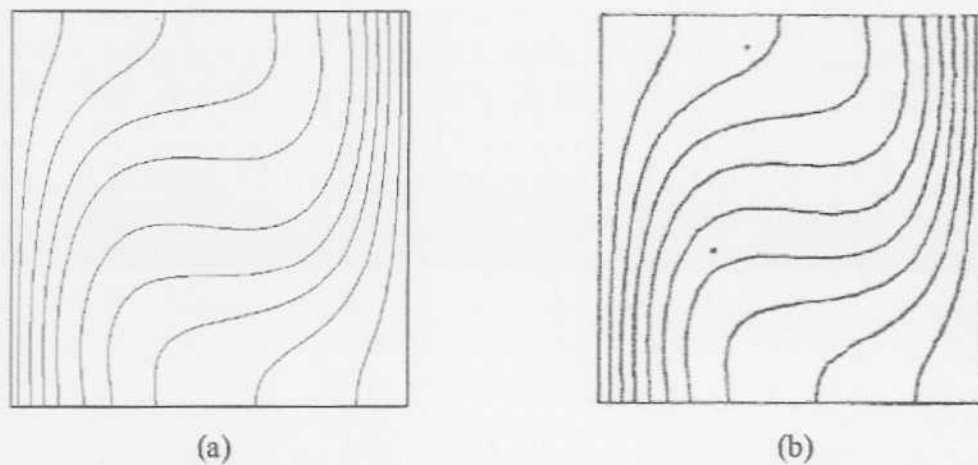
**FIG.5.2.1** – Resultado das isolinhas da função corrente para  $Ra=10^4$ , usando 40x40 pontos de expansão, para o presente trabalho (a) e o de Davis (1983).

As Figuras 5.2.2(a) e 5.2.2(b) mostram a vorticidade para  $Ra=10^4$  com 40x40 pontos de expansão no presente trabalho e no trabalho de Davis (1983) com 41x41 pontos de distribuição, respectivamente.



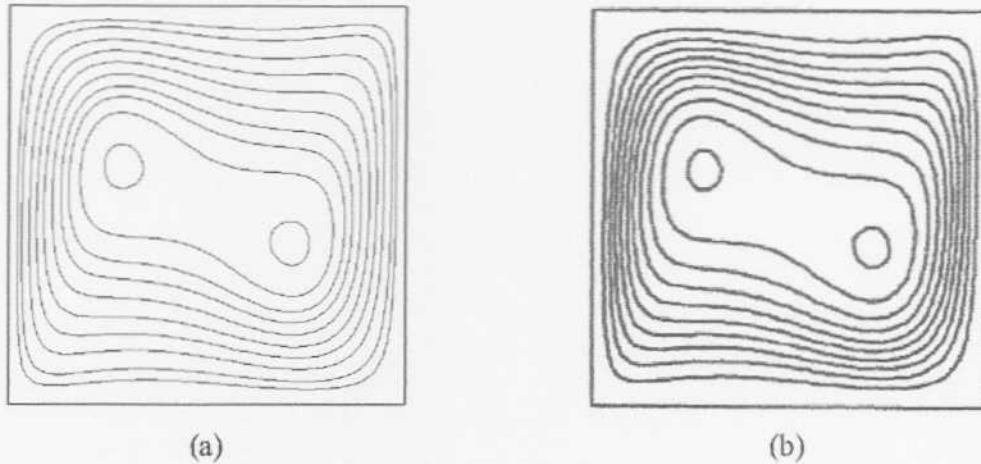
**FIG.5.2.2** – Resultado das isolinhas de vorticidade para  $Ra=10^4$ , usando 40x40 pontos de expansão, para o presente trabalho (a) e o de Davis (1983).

As Figuras 5.2.3(a) e 5.2.2(b) mostram a temperatura para  $Ra=10^4$  com 40x40 pontos de expansão no presente trabalho e no trabalho de Davis (1983) com 41x41 pontos de distribuição, respectivamente.



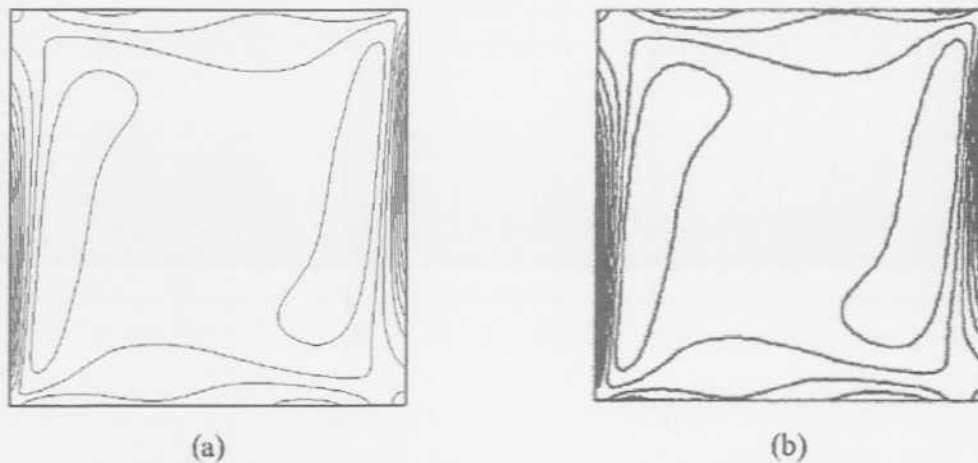
**FIG.5.2.3** – Resultado das isolinhas de temperatura para  $Ra=10^4$ , usando 40x40 pontos de expansão, para o presente trabalho (a) e o de Davis (1983).

As Figuras 5.2.4(a) e 5.2.4(b) mostram a função corrente para  $Ra=10^5$  com 40x40 pontos de expansão no presente trabalho e no trabalho de Davis (1983) com 81x81 pontos de distribuição, respectivamente.



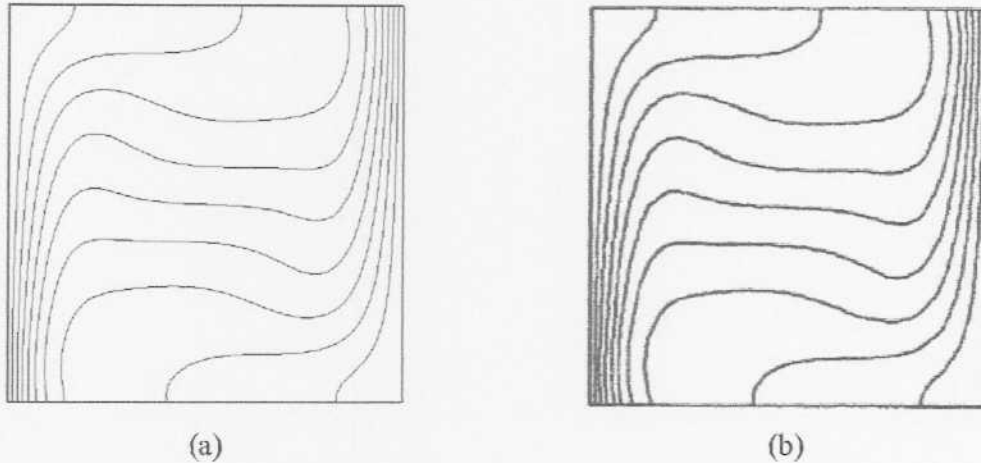
**FIG.5.2.4** – Resultado das isolinhas da função corrente para  $Ra=10^5$ , usando 40x40 pontos de expansão, para o presente trabalho (a) e o de Davis (1983).

As Figuras 5.2.5(a) e 5.2.5(a) mostram a vorticidade para  $Ra=10^5$  com 40x40 pontos de expansão no presente trabalho e no trabalho de Davis (1983) com 81x81 pontos de distribuição, respectivamente.



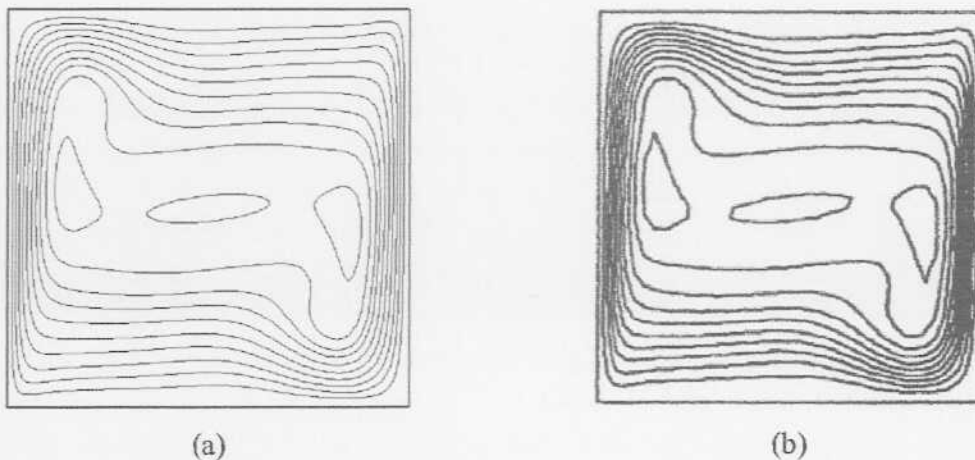
**FIG.5.2.5** – Resultado das isolinhas de vorticidade para  $Ra=10^5$ , usando 40x40 pontos de expansão, para o presente trabalho (a) e o de Davis (1983).

As Figuras 5.2.6(a) e 5.2.6(b) mostram a temperatura para  $Ra=10^5$  com 40x40 pontos de expansão no presente trabalho e no trabalho de Davis (1983) com 81x81 pontos de distribuição, respectivamente.



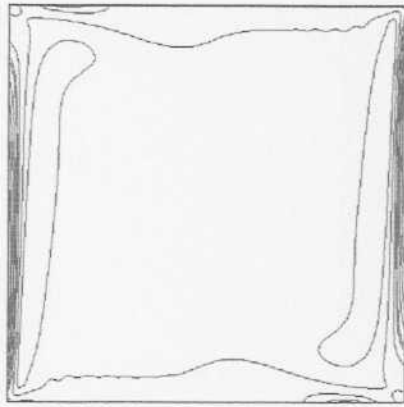
**FIG.5.2.6** – Resultado das isolinhas de temperatura para  $Ra=10^5$ , usando 40x40 pontos de expansão, para o presente trabalho (a) e o de Davis (1983).

As Figuras 5.2.7(a) e 5.2.7(b) mostram a função corrente para  $Ra=10^6$  com 40x40 pontos de expansão no presente trabalho e no trabalho de Davis (1983) com 81x81 pontos de distribuição, respectivamente.

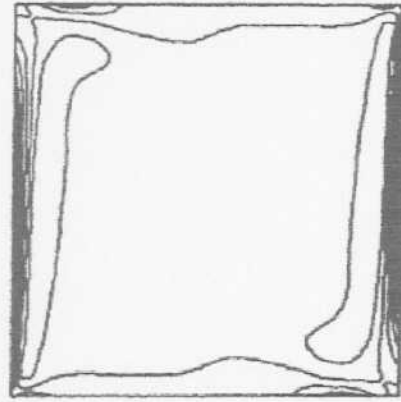


**FIG.5.2.7** – Resultado das isolinhas da função corrente para  $Ra=10^6$ , usando 40x40 pontos de expansão, para o presente trabalho (a) e o de Davis (1983).

As Figuras 5.2.8(a) e 5.2.8(b) mostram a vorticidade para  $Ra=10^6$  com 40x40 pontos de expansão no presente trabalho e no trabalho de Davis (1983) com 81x81 pontos de distribuição, respectivamente.



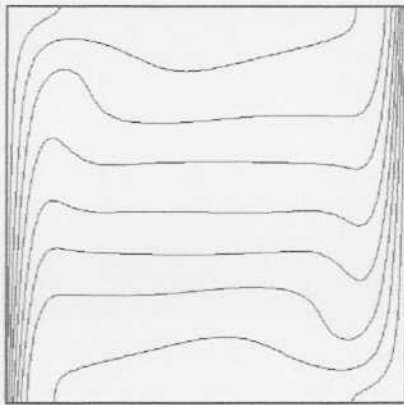
(a)



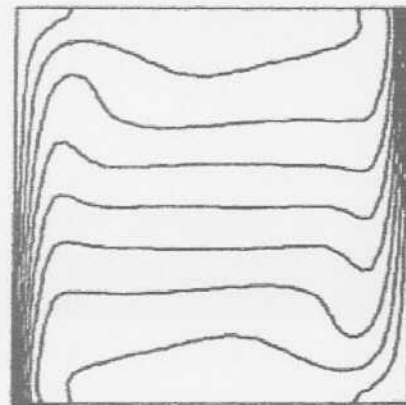
(b)

**FIG.5.2.8** – Resultado das isolinhas de vorticidade para  $Ra=10^6$ , usando 40x40 pontos de expansão, para o presente trabalho (a) e o de Davis (1983).

As Figuras 5.2.9(a) e 5.2.9(b) mostram a temperatura para  $Ra=10^6$  com 40x40 pontos de expansão no presente trabalho e no trabalho de Davis (1983) com 81x81 pontos de distribuição, respectivamente.



(a)



(b)

**FIG.5.2.9** – Resultado das isolinhas de temperatura para  $Ra=10^6$ , usando 40x40 pontos de expansão, para o presente trabalho (a) e o de Davis (1983).

Os resultados obtidos para  $Ra$  iguais a  $10^4$ ,  $10^5$  e  $10^6$ , para as isolinhas de função corrente, vorticidade e temperatura, foram bem capturados pelo código computacional. As figuras com esses resultados (Figura 5.2.1-9) apresentaram dados compatíveis com as referências, onde as isolinhas puderam ser bem precisas mesmo para Rayleigh igual a  $10^5$  e  $10^6$  em que os resultados de comparação foram obtidos com  $81 \times 81$  pontos de distribuição enquanto o presente trabalho utilizou  $40 \times 40$  pontos de expansão.

As Tabelas 5.2.a, 5.2.b e 5.2.c referem-se aos dados obtidos para Rayleigh iguais a  $10^4$ ,  $10^5$  e  $10^6$ , respectivamente para vários pontos de expansão utilizados.

**TAB.5.2.a - Dados encontrados para  $Ra=10^4$**

Pontos de expansão	Parâmetro "c"	Resíduo	Tempo
4x4	0,8	6,8197762E-05	0,2s
8x8	0,5555556	7,8853147E-05	2,5s
12x12	0,3076923	7,3842188E-05	18,5s
16x16	0,2941177	7,4990562E-06	77,1s
20x20	0,2380952	1,9126080E-04	198,4s
30x30	9,6774191E-02	1,1429208E-04	2354,9s
40x40	9,7560972E-02	8,5742453E-05	24241,8s

**TAB.5.2.b - Dados encontrados para  $Ra=10^5$**

Pontos de expansão	Parâmetro "c"	Resíduo	Tempo
4x4	1,0	2,2533066E-04	0,7s
8x8	0,4444444	7,5431664E-05	4,3s
12x12	0,3076923	4,3146294E-05	33,9s
16x16	0,2352941	4,4143719E-05	111,7s
20x20	0,1904762	2,6313392E-05	321,3s
30x30	0,1290323	1,0851686E-05	5075,3s
40x40	9,7560972E-02	8,7554574E-05	21815,6s

**TAB.5.2.c - Dados encontrados para  $Ra=10^6$**

Pontos de expansão	Parâmetro "c"	Resíduo	Tempo
4x4	0,2	3,3365488E-03	3,6s
8x8	0,4444444	1,2576274E-02	9,5s
12x12	0,3076923	1,5227857E-02	66,6s
16x16	0,2352941	2,8112874E-04	213,4s
20x20	0,1904762	2,9001239E-04	709,3s
30x30	9,6774191E-02	8,9052024E-05	6299s
40x40	9,7560972E-02	7,0841040E-04	42695s

O parâmetro “c” é estimado como o múltiplo da menor distância entre dois pontos de expansão, como já foi mencionado no capítulo anterior. O melhor parâmetro que foi mencionado para todos os pontos de expansão acima é o que tem o menor resíduo.

O baixo tempo de processamento do código confirma o bom desempenho do método baseado nas funções de base radial. Para cada ponto de expansão citado percebe-se que a medida que o número de Rayleigh aumenta o tempo computacional também aumenta, o que está ligado ao termo de empuxo. O tempo de execução também aumenta com o “refinamento da malha” .

Percebe-se também que quanto mais pontos de expansão menor é o parâmetro, este fato se dá devido à forma convencionada do calculo de “c”, pois quanto mais pontos de expansão menor é a distância entre eles, resultando assim num menor parâmetro de forma. O resíduo oscila indefinidamente, dentro de uma margem aceitável, para os pontos e Rayleigh utilizados, sendo assim nenhuma conclusão acerca do resíduo é possível afirmar.

Neste problema, o algoritmo desenvolvido também gerou resultados para os valores máximos da velocidade  $U$  em  $X = 1/2$  e sua localização em  $Y$ , assim como da velocidade  $V$  em  $Y = 1/2$  e sua localização em  $X$ . O número de Nusselt também é analisado e é calculado através taxa de transferência de calor em toda a cavidade. Serão mostrados resultados para o número de Nusselt médio ( $\overline{Nu}$ ), número de Nusselt médio em  $X = 1/2$  ( $Nu_{1/2}$ ) (parâmetro para comparação, definido nos artigos de Davis (1983) e Leal et al (1999)), número de Nusselt médio em  $X = 0$  ( $Nu_0$ ), número de Nusselt máximo ( $Nu_{\max}$ ) e mínimo ( $Nu_{\min}$ ) em  $X = 0$ . As equações para a estimativa desses valores são:

$$Nu_X = \int_0^1 \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial Y} T - \frac{\partial T}{\partial X} \right\} dY \quad (5.2.2.1.a)$$

$$\overline{Nu} = \int_0^1 Nu_X dX \quad (5.2.2.1.b)$$

$$Nu_{\max} = \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial Y} T - \frac{\partial T}{\partial X} \right\} \Big|_{\max\_em\_X=0} \quad (5.2.2.1.c)$$

$$Nu_{\min} = \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial Y} T - \frac{\partial T}{\partial X} \right\} \Big|_{\min\_em\_X=0} \quad (5.2.2.1.d)$$

$$Nu_{1/2} = \{Nu_X\}_{X=1/2} \quad (5.2.2.1.e)$$

$$Nu_0 = \{Nu_X\}_{X=0} \quad (5.2.2.1.f)$$

Nas tabelas a seguir, Tabela 5.2.d-f, os parâmetros citados acima são comparados aos resultados de Davis (1983) (Ref.[1]) usando o método de diferenças finitas e os resultados de Leal et al (1999) (Ref.[2]) obtidos pela Técnica da Transformada Integral generalizada (GITT). Também foi calculada a porcentagem de erro entre solução do presente trabalho com os resultados benchmark. Serão comparadas as soluções do presente trabalho para 4x4, 8x8, 12x12, 16x16, 20x20, 30x30 e 40x40 pontos de expansão.

As tabelas 5.2.d1-2 apresentam comparações para  $Ra=10^4$ , onde foram comparados resultados obtidos com 4x4, 8x8, 12x12, 16x16, 20x20, 30x30 e 40x40 pontos de expansão.

Percebe-se uma diminuição na porcentagem dos erros com o aumento de pontos de expansão. Boas respostas já são observadas com 12x12 pontos de expansão contra a malha usada por Davis (1983) usando o método de diferenças finitas com 41x41 pontos de distribuição e Leal et al (1999) obtidos pela Técnica da Transformada Integral generalizada (GITT). A localização do Nusselt máximo, em particular, não teve uma boa concordância com as referências, até para 30x30 pontos de expansão a localização em questão não seguiu a diminuição no erro como seria de se esperar. Os componentes da velocidade, suas respectivas posições e as taxas de transferência de calor (números de Nusselt) foram bem capturados pelo código utilizado.

As tabelas 5.2.e1-2 apresentam comparações para  $Ra=10^5$ , onde foram comparados resultados obtidos com 4x4, 8x8, 12x12, 16x16, 20x20, 30x30 e 40x40 pontos de expansão.

Nas tabelas referentes à  $Ra=10^5$ , nota-se a necessidade de mais pontos de expansão para obter uma porcentagem de erro tolerável. Novamente a localização do Nusselt máximo, mesmo com o refinamento de pontos não obteve sucesso no seu valor, chegando com 40x40 pontos de expansão com erro maior que 10%. Para os outros parâmetros analisados erros consideráveis são encontrados com 20x20 pontos de expansão com exceção do valor para o número de Nusselt máximo em  $X = 0$ .

As tabelas 5.2.f1-2 apresentam comparações para  $Ra=10^6$ , onde foram comparados resultados obtidos com 4x4, 8x8, 12x12, 16x16, 20x20, 30x30 e 40x40 pontos de expansão.

Novamente com o aumento de pontos o erro diminui mas soluções consideráveis para alguns parâmetros só são encontradas com 30x30 pontos de expansão. Todos os números de Nusselt analisados sofreram aumento e diminuição no erro com o aumento de pontos. O "refinamento da malha" não foi capaz de fazer com que o erro fosse reduzindo com este fato, o que seria mais

TAB.5.2.d2 – Parâmetros obtidos para  $Ra=10^4$

$Ra=10^4$	Ref.[1]	Ref.[2]	“Malha” 20x20	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 30x30	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 40x40	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]
$U_{max}$	16,178	16,180	16,055	0,8	0,8	16,065	0,7	0,7	16,122	0,3	0,4
$Y$	0,823	0,823	0,820	0,4	0,4	0,820	0,4	0,4	0,820	0,4	0,4
$V_{max}$	19,617	19,630	19,510	0,5	0,6	19,526	0,5	0,5	19,577	0,2	0,3
$X$	0,119	0,119	0,12	0,8	0,8	0,12	0,8	0,8	0,12	0,8	0,8
$\overline{Nu}$	2,243	2,245	2,247	0,2	0,1	2,248	0,2	0,1	2,246	0,1	0,1
$Nu_0$	2,238	2,245	2,251	0,6	0,3	2,236	0,1	0,4	2,241	0,1	0,2
$Nu_{1/2}$	2,243	2,245	2,235	0,3	0,4	2,232	0,5	0,6	2,239	0,2	0,3
$Nu_{max}$	3,528	3,532	3,556	0,8	0,7	3,521	0,2	0,3	3,524	0,1	0,2
$Y$	0,143	0,143	0,130	9,0	9,0	0,10	30,0	30,0	0,130	9,0	9,0
$Nu_{min}$	0,586	0,585	0,597	1,9	2,0	0,620	5,8	6,0	0,600	2,4	2,6
$Y$	1,000	1,000	1,000	0	0	1,000	0	0	1,000	0	0

TAB.5.2.d1 – Parâmetros obtidos para Ra=10<sup>4</sup>

Ra=10 <sup>4</sup>	Ref.[1]	Ref.[2]	“Malha” 4x4	ε% Ref.[1]	ε% Ref.[2]	“Malha” 8x8	ε% Ref.[1]	ε% Ref.[2]	“Malha” 12x12	ε% Ref.[1]	ε% Ref.[2]	“Malha” 16x16	ε% Ref.[1]	ε% Ref.[2]
$U_{max}$	16,178	16,180	13,208	18,4	18,4	15,412	4,7	4,7	15,795	2,4	2,4	15,999	1,1	1,1
$Y$	0,823	0,823	0,810	1,6	1,6	0,820	0,4	0,4	0,820	0,4	0,4	0,820	0,4	0,4
$V_{max}$	19,617	19,630	16,125	17,8	17,8	19,004	3,1	3,2	19,349	1,3	1,4	19,447	0,8	0,9
$X$	0,119	0,119	0,150	26,0	26,0	0,120	0,8	0,8	0,120	0,8	0,8	0,120	0,8	0,8
$\overline{Nu}$	2,243	2,245	1,956	12,8	12,9	2,244	0,04	0,04	2,250	0,3	0,2	2,248	0,2	0,1
$Nu_0$	2,238	2,245	3,390	51,5	51,0	2,482	10,9	10,5	2,310	3,2	2,9	2,255	0,7	0,4
$Nu_{1/2}$	2,243	2,245	1,715	23,5	23,6	2,192	2,3	2,3	2,216	1,2	1,3	2,232	0,5	0,6
$Nu_{max}$	3,528	3,532	5,123	45,2	45,0	4,362	23,6	23,5	3,815	8,1	8,0	3,586	1,6	1,5
$Y$	0,143	0,143	0	>100	>100	0	>100	>100	0	>100	>100	0,060	>100	>100
$Nu_{min}$	0,586	0,585	1,586	>100	>100	0,550	6,1	6,0	0,612	4,4	4,6	0,598	2,0	2,2
$Y$	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0

TAB.5.2.e1 – Parâmetros obtidos para Ra=10<sup>5</sup>

Ra=10 <sup>5</sup>	Ref.[1]	Ref.[2]	“Malha” 4x4	ε% Ref.[1]	ε% Ref.[2]	“Malha” 8x8	ε% Ref.[1]	ε% Ref.[2]	“Malha” 12x12	ε% Ref.[1]	ε% Ref.[2]	“Malha” 16x16	ε% Ref.[1]	ε% Ref.[2]
$U_{max}$	34,730	34,740	29,509	15,0	15,1	27,735	20,1	20,2	30,979	10,8	10,8	32,922	5,2	5,2
$Y$	0,855	0,855	0,840	1,7	1,7	0,840	1,7	1,7	0,840	1,7	1,7	0,850	0,6	0,6
$V_{max}$	68,590	68,620	42,961	37,3	37,4	57,290	16,6	16,5	64,471	6,0	6,0	67,088	2,2	2,2
$X$	0,066	0,066	0,130	96,9	96,9	0,080	21,2	21,2	0,070	6,0	6,0	0,070	6,0	6,0
$\overline{Nu}$	4,519	4,522	2,332	48,4	48,4	3,811	15,6	15,7	4,339	3,9	4,0	4,478	0,9	0,9
$Nu_0$	4,509	4,522	5,589	23,9	23,6	6,498	44,1	43,7	5,744	27,4	27,0	5,091	12,9	12,6
$Nu_{1/2}$	4,519	4,522	1,799	60,2	60,2	3,616	19,9	20,0	4,269	5,5	5,6	4,443	1,7	1,8
$Nu_{max}$	7,717	7,721	6,969	9,7	9,7	10,876	40,9	40,8	11,22	45,4	45,3	10,267	33,0	32,9
$Y$	0,081	0,081	0,020	75,3	75,3	0,020	75,3	75,3	0,000	>100	>100	0,000	>100	>100
$Nu_{min}$	0,729	0,728	3,908	>100	>100	2,139	>100	>100	0,942	29,2	29,4	0,777	6,6	6,7
$Y$	1,000	1,000	1,000	0	0	1,000	0	0	1,000	0	0	1,000	0	0

TAB.5.2.e2 – Parâmetros obtidos para  $Ra=10^5$

$Ra=10^5$	Ref.[1]	Ref.[2]	“Malha” 20x20	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 30x30	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 40x40	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]
$U_{max}$	34,730	34,740	33,715	2,9	2,9	34,283	1,3	1,3	34,453	0,8	0,8
$Y$	0,855	0,855	0,850	0,6	0,6	0,850	0,6	0,6	0,850	0,6	0,6
$V_{max}$	68,590	68,620	67,772	1,2	1,2	67,983	0,8	0,9	68,252	0,5	0,5
$X$	0,066	0,066	0,07	6,0	6,0	0,07	6,0	6,0	0,07	6,0	6,0
$\overline{Nu}$	4,519	4,522	4,511	0,2	0,2	4,521	0,1	0,1	4,521	0,1	0,1
$Nu_0$	4,509	4,522	4,761	5,6	5,3	4,551	0,9	0,6	4,522	0,3	0
$Nu_{1/2}$	4,519	4,522	4,488	0,7	0,7	4,508	0,2	0,3	4,512	0,1	0,2
$Nu_{max}$	7,717	7,721	9,270	20,1	20,0	8,110	5,1	5,0	7,828	1,4	1,4
$Y$	0,081	0,081	0,000	>100	>100	0,03	62,9	62,9	0,07	13,6	13,6
$Nu_{min}$	0,729	0,728	0,768	5,3	5,5	0,762	4,5	4,7	0,756	3,7	3,8
$Y$	1,000	1,000	1,000	0	0	0,970	3	3	0,980	2	2

TAB.5.2.f1 – Parâmetros obtidos para Ra=10<sup>6</sup>

Ra=10 <sup>6</sup>	Ref.[1]	Ref.[2]	“Malha” 4x4	ε% Ref.[1]	ε% Ref.[2]	“Malha” 8x8	ε% Ref.[1]	ε% Ref.[2]	“Malha” 12x12	ε% Ref.[1]	ε% Ref.[2]	“Malha” 16x16	ε% Ref.[1]	ε% Ref.[2]
$U_{max}$	64,630	64,830	197,575	>100	>100	56,276	12,9	13,2	50,625	21,7	21,9	54,475	15,7	15,9
$Y$	0,850	0,850	0,730	14,1	14,1	0,860	1,17	1,18	0,850	0	0	0,850	0	0
$V_{max}$	219,360	220,600	550,635	>100	>100	143,772	34,4	34,8	168,064	23,4	23,8	186,937	14,8	15,2
$X$	0,038	0,038	0,290	>100	>100	0,070	84,2	84,2	0,050	31,6	31,6	0,040	5,3	5,3
$\overline{Nu}$	8,800	8,825	8,608	2,2	2,46	4,604	47,7	47,8	6,458	26,6	26,8	7,545	14,3	14,5
$Nu_0$	8,817	8,826	1,069	87,9	87,9	9,868	11,9	11,8	11,744	33,2	33,1	11,985	35,9	35,8
$Nu_{1/2}$	8,799	8,825	1,627	81,5	81,6	4,112	53,3	53,4	6,198	29,6	29,7	7,396	15,9	16,2
$Nu_{max}$	17,925	17,540	28,981	61,7	65,2	13,987	21,9	20,2	20,145	12,4	14,8	23,605	31,7	34,6
$Y$	0,038	0,039	0,630	>100	>100	0,020	47,4	48,7	0,020	47,4	48,7	0,010	73,7	74,3
$Nu_{min}$	0,989	0,979	-25,526	>100	>100	5,523	>100	>100	3,903	>100	>100	2,015	>100	>100
$Y$	1,000	1,000	0,770	23	23	0,900	10	10	0,940	6	6	0,950	5	5

TAB.5.2.12 – Parâmetros obtidos para Ra=10<sup>6</sup>

<b>Ra=10<sup>6</sup></b>	<b>Ref.[1]</b>	<b>Ref.[2]</b>	<b>“Malha” 20x20</b>	<b>ε% Ref.[1]</b>	<b>ε% Ref.[2]</b>	<b>“Malha” 30x30</b>	<b>ε% Ref.[1]</b>	<b>ε% Ref.[2]</b>	<b>“Malha” 40x40</b>	<b>ε% Ref.[1]</b>	<b>ε% Ref.[2]</b>
$U_{\max}$	64,630	64,830	57,684	10,7	11,0	62,013	4,0	4,3	63,521	1,7	2,0
$Y$	0,850	0,850	0,850	0	0	0,850	0	0	0,850	0	0
$V_{\max}$	219,360	220,600	201,121	8,3	8,8	217,315	0,9	1,5	218,305	0,5	1,0
$X$	0,038	0,038	0,040	5,3	5,3	0,040	5,3	5,2	0,040	5,3	5,3
$\overline{Nu}$	8,800	8,825	8,162	7,25	7,5	8,679	1,4	1,6	8,798	0,1	0,3
$Nu_0$	8,817	8,826	11,516	30,6	30,5	9,895	12,2	12,1	9,221	4,6	4,5
$Nu_{1/2}$	8,799	8,825	8,081	8,2	8,4	8,645	1,7	2,0	8,784	0,2	0,54
$Nu_{\max}$	17,925	17,540	25,220	40,7	43,8	24,558	37,0	40,0	22,135	23,5	26,2
$Y$	0,038	0,039	0,01	73,7	74,3	0,000	>100	>100	0,000	>100	>100
$Nu_{\min}$	0,989	0,979	1,183	19,6	20,8	0,982	0,7	0,3	0,970	1,9	0,9
$Y$	1,000	1,000	0,960	4	4	0,970	3	3	0,980	2	2

### 5.2.2.2 VALIDAÇÃO COM CRITÉRIO DE DISTRIBUIÇÃO DE PONTOS

Nesta seção um critério de distribuição de pontos no domínio será estudado. Utiliza-se uma variável para gerar pontos não uniformemente espaçados, chamada *fac*. *Fac* é uma variação decimal, onde  $0 \leq fac < 1$ . Quando  $fac=0$  os pontos são uniformemente espaçados (valor que foi estudado até agora), quando *fac* tende a 1 eles se concentram nos contornos.

Analisaremos variações nesse fator (*fac*) a fim de avaliar qual a melhor forma de se concentrar os pontos de expansão para obter melhores resultados.

A Figura 5.2.10 exemplifica geometricamente como os pontos são distribuídos com a variação do fator *fac*. A fim de elucidar esta escolha foi utilizado 8x8 pontos de expansão como mera ilustração.

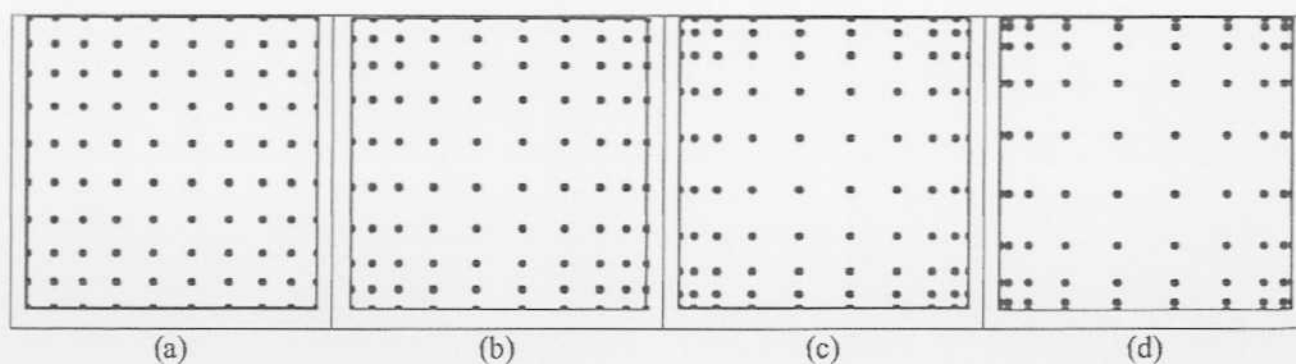


FIG.5.2.10 – Geometria do domínio com distribuição dos pontos, para 8x8 pontos de expansão.  
((a) *fac* 0.2, (b) *fac* 0.4, (c) *fac* 0.6 e (d) *fac* 0.8)

Considera-se nessa validação 4x4, 8x8, 12x12, 16x16, 20x20, 30x30 e 40x40 pontos de expansão distribuídos conforme o valor do fator *fac*. O fator em questão terá o valor 0.2, 0.4, 0.6 e 0.8.

Nesse primeiro momento serão apresentados os valores máximos da velocidade *U* e *V*, suas localizações e todos os números de Nusselt encontrados na seção anterior, calculados pelas mesmas expressões (5.2.2.1.a-f).

Serão utilizados os mesmos resultados benchmark já vistos para a cavidade com convecção natural com pontos uniformemente distribuídos, ou seja, os resultados de Davis (1983) (Ref.[1])

usando o método de diferenças finitas e os resultados de Leal et al (1999) (Ref.[2]) obtidos pela Técnica da Transformada Integral generalizada (GITT).

#### 5.2.2.2.1-Ra=10<sup>4</sup>

As tabelas 5.2.g1-2 apresentam comparações para Ra=10<sup>4</sup>, com *fac* 0.2, onde foram comparados resultados obtidos com 4x4, 8x8, 12x12, 16x16, 20x20, 30x30 e 40x40 pontos de expansão.

Com as Tabelas 5.2.g1-2, para *fac* 0.2, percebe-se uma diminuição do erro com o aumento de pontos de expansão e, analisando os resultados para 40x40 pontos de expansão, comparados com pontos igualmente espaçados, mostrados nas tabelas 5.2.d1-2, nota-se um erro menor para a localização do número de Nusselt máximo. Erros consideráveis já são vistos com 12x12 pontos de expansão, bem menores que na Tabela 5.2.d1 para o mesmo número de pontos. Numa análise geral, a utilização do fator *fac* igual a 0.2 gerou resultados melhores que pontos distribuídos uniformemente.

As tabelas 5.2.h1-2 apresentam comparações para Ra=10<sup>4</sup>, com *fac* 0.4, onde foram comparados resultados obtidos com 4x4, 8x8, 12x12, 16x16, 20x20, 30x30 e 40x40 pontos de expansão.

Nesta análise, das Tabelas 5.2.h1-2, em comparação com as Tabelas 5.2.d1-2, erros oscilam de uma "malha" para a outra, podendo ser encontrada em alguns casos, erros menores para 20x20 pontos de expansão contra 30x30 pontos de expansão. A escolha do fator igual a 0.4, rendeu respostas boas, ainda mais com respeito à localização do número de Nusselt máximo. Este fato pode estar relacionado à localização dos pontos de colocação no presente trabalho, que pode ser a mesma da referência [1]. Erros consideráveis são encontrados com 16x16 pontos de expansão, a menos da localização do Nusselt máximo, sendo ainda menor que para a distribuição uniforme dos pontos.

As tabelas 5.2.i1-2 apresentam comparações para  $Ra=10^4$ , com *fac* 0.6, onde foram comparados resultados obtidos com 4x4, 8x8, 12x12, 16x16, 20x20, 30x30 e 40x40 pontos de expansão.

Novamente é visto a oscilação dos valores do erro. A convergência da “malha” não é obtida, o que é claramente comprovada para 4x4 pontos de expansão, onde alguns valores dos erros dos parâmetros são bem menores que para 40x40 pontos de expansão, o que não define este número de pontos como sendo um bom resultado para *fac* igual a 0.6. Conclui-se disso que este valor para o critério de geração de pontos não obteve desempenho considerável.

As tabelas 5.2.j1-2 apresentam comparações para  $Ra=10^4$ , com *fac* 0.8, onde foram comparados resultados obtidos com 4x4, 8x8, 12x12, 16x16, 20x20, 30x30 e 40x40 pontos de expansão.

A análise das Tabelas 5.2.j1-2, mostra o mau desempenho desta variação do *fac*. Erros altos são encontrados em todos os pontos de expansão o que declara que pontos mais concentrados nos contornos não dão bons resultados.

TAB.5.2.g1 – Parâmetros obtidos para  $Ra=10^4$  (fac 0.2)

$Ra=10^4$	Ref.[1]	Ref.[2]	“Malha” 4x4	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 8x8	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 12x12	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 16x16	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]
$U_{max}$	16,178	16,18	13,496	16,6	16,6	15,382	4,9	4,9	15,892	1,8	1,8	15,974	1,3	1,3
$Y$	0,823	0,823	0,8	2,8	2,8	0,82	0,4	0,4	0,82	0,4	0,4	0,82	0,4	0,4
$V_{max}$	19,617	19,63	18,911	3,6	3,7	19,405	1,1	1,1	19,247	1,9	2,0	19,41	1,1	1,1
$X$	0,119	0,119	0,14	17,6	17,6	0,11	7,6	7,6	0,12	0,8	0,8	0,12	0,8	0,8
$\overline{Nu}$	2,243	2,245	2,182	2,7	2,8	2,249	0,3	0,2	2,252	0,4	0,3	2,25	0,3	0,2
$Nu_0$	2,238	2,245	3,111	39,0	38,6	2,428	8,5	8,2	2,286	2,1	1,8	2,253	0,7	0,4
$Nu_{1/2}$	2,243	2,245	2,014	10,2	10,3	2,19	2,4	2,4	2,217	1,2	1,2	2,225	0,8	0,9
$Nu_{max}$	3,528	3,532	5,612	59,1	58,9	4,188	18,7	18,6	3,736	5,9	5,8	3,595	1,9	1,8
$Y$	0,143	0,143	0,02	86,0	86,0	0	>100	>100	0	>100	>100	0,04	72,0	72,0
$Nu_{min}$	0,586	0,585	1,262	>100	>100	0,657	12,1	12,3	0,635	8,4	8,5	0,627	7,0	7,2
$Y$	1	1	1	0,0	0,0	1	0,0	0,0	1	0,0	0,0	1	0,0	0,0

TAB.5.2.g2 – Parâmetros obtidos para  $Ra=10^4$  (fac 0.2)

$Ra=10^4$	Ref.[1]	Ref.[2]	“Malha” 20x20	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 30x30	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 40x40	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]
$U_{\max}$	16,178	16,18	16,059	0,7	0,7	16,074	0,6	0,7	16,136	0,3	0,3
$Y$	0,823	0,823	0,82	0,4	0,4	0,82	0,4	0,4	0,82	0,4	0,4
$V_{\max}$	19,617	19,63	19,546	0,4	0,4	19,527	0,5	0,5	19,585	0,2	0,2
$X$	0,119	0,119	0,12	0,8	0,8	0,12	0,8	0,8	0,12	0,8	0,8
$\overline{Nu}$	2,243	2,245	2,248	0,2	0,1	2,246	0,1	0	2,246	0,1	0,0
$Nu_0$	2,238	2,245	2,249	0,5	0,2	2,23	0,4	0,7	2,239	0,0	0,3
$Nu_{1/2}$	2,243	2,245	2,235	0,4	0,4	2,233	0,4	0,5	2,24	0,1	0,2
$Nu_{\max}$	3,528	3,532	3,555	0,8	0,7	3,509	0,5	0,7	3,52	0,2	0,3
$Y$	0,143	0,143	0,12	16,1	16,1	0,13	9,1	9,1	0,14	2,1	2,1
$Nu_{\min}$	0,586	0,585	0,605	3,2	3,4	0,618	5,5	5,6	0,6	2,4	2,6
$Y$	1	1	1	0,0	0,0	1	0	0	1	0,0	0,0

TAB.5.2.h1 – Parâmetros obtidos para  $Ra=10^4$  (fac 0.4)

$Ra=10^4$	Ref.[1]	Ref.[2]	“Malha” 4x4	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 8x8	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 12x12	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 16x16	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]
$U_{max}$	16,178	16,18	14,087	12,9	12,9	14,933	7,7	7,7	15,747	2,7	2,7	15,973	1,3	1,3
$Y$	0,823	0,823	0,81	1,6	1,6	0,8	2,8	2,8	0,82	0,4	0,4	0,82	0,4	0,4
$V_{max}$	19,617	19,63	20,004	2,0	1,9	18,441	6,0	6,1	18,875	3,8	3,8	19,555	0,3	0,4
$X$	0,119	0,119	0,13	9,2	9,2	0,11	7,6	7,6	0,13	9,2	9,2	0,12	0,8	0,8
$\overline{Nu}$	2,243	2,245	2,273	1,3	1,2	2,207	1,6	1,7	2,226	0,8	0,8	2,245	0,1	0,0
$Nu_0$	2,238	2,245	3,051	36,3	35,9	2,28	1,9	1,6	2,231	0,3	0,6	2,245	0,3	0,0
$Nu_{1/2}$	2,243	2,245	2,145	4,4	4,5	2,159	3,7	3,8	2,199	2,0	2,0	2,232	0,5	0,6
$Nu_{max}$	3,528	3,532	6,263	77,5	77,3	3,849	9,1	9,0	3,592	1,8	1,7	3,559	0,9	0,8
$Y$	0,143	0,143	0,03	79,0	79,0	0	>100	>100	0,04	72,0	72,0	0,12	16,1	16,1
$Nu_{min}$	0,586	0,585	0,915	56,1	56,4	0,632	7,8	8,0	0,623	6,3	6,5	0,606	3,4	3,6
$Y$	1	1	1	0,0	0,0	0,94	6,0	6,0	0,96	4,0	4,0	1	0,0	0,0

TAB.5.2.h2 – Parâmetros obtidos para  $Ra=10^4$  (fac 0.4)

$Ra=10^4$	Ref.[1]	Ref.[2]	“Malha” 20x20	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 30x30	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 40x40	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]
$U_{max}$	16,178	16,18	16,132	0,3	0,3	15,266	5,6	5,6	16,056	0,8	0,8
$Y$	0,823	0,823	0,82	0,4	0,4	0,82	0,4	0,4	0,82	0,4	0,4
$V_{max}$	19,617	19,63	19,545	0,4	0,4	18,63	5	5,1	19,501	0,6	0,7
$X$	0,119	0,119	0,12	0,8	0,8	0,12	0,8	0,8	0,12	0,8	0,8
$\overline{Nu}$	2,243	2,245	2,246	0,1	0,0	2,194	2,2	2,3	2,24	0,1	0,2
$Nu_0$	2,238	2,245	2,246	0,4	0,0	2,176	2,8	3,1	2,232	0,3	0,6
$Nu_{1/2}$	2,243	2,245	2,239	0,2	0,3	2,184	2,6	2,7	2,235	0,4	0,4
$Nu_{max}$	3,528	3,532	3,533	0,1	0,0	3,461	1,9	2	3,513	0,4	0,5
$Y$	0,143	0,143	0,16	11,9	11,9	0,12	16,1	16,1	0,14	2,1	2,1
$Nu_{min}$	0,586	0,585	0,595	1,5	1,7	0,602	2,7	2,9	0,598	2,0	2,2
$Y$	1	1	1	0,0	0,0	0,99	1	1	1	0,0	0,0

TAB.5.2.i1 – Parâmetros obtidos para  $Ra=10^4$  (fac 0.6)

$Ra=10^4$	Ref.[1]	Ref.[2]	“Malha” 4x4	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 8x8	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 12x12	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 16x16	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]
$U_{max}$	16,178	16,18	15,769	2,5	2,5	1,28	92,1	92,1	5,427	66,5	66,5	14,154	12,5	12,5
$Y$	0,823	0,823	0,83	0,9	0,9	0,87	5,7	5,7	0,85	3,3	3,3	0,82	0,4	0,4
$V_{max}$	19,617	19,63	18,857	3,9	3,9	1,316	93,3	93,3	5,751	70,7	70,7	17,288	11,9	11,9
$X$	0,119	0,119	0,14	17,6	17,6	0,13	9,2	9,2	0,13	9,2	9,2	0,11	7,6	7,6
$\overline{Nu}$	2,243	2,245	2,251	0,4	0,3	1,016	54,7	54,7	1,282	42,8	42,9	2,118	5,6	5,7
$Nu_0$	2,238	2,245	2,558	14,3	13,9	1,016	54,6	54,7	1,258	43,8	44,0	2,111	5,7	6,0
$Nu_{1/2}$	2,243	2,245	2,151	4,1	4,2	1,054	53,0	53,1	1,28	42,9	43,0	2,109	6,0	6,1
$Nu_{max}$	3,528	3,532	5,767	63,5	63,3	1,216	65,5	65,6	2,022	42,7	42,8	3,427	2,9	3,0
$Y$	0,143	0,143	0,03	79,0	79,0	0,01	93,0	93,0	0	>100	>100	0,11	23,1	23,1
$Nu_{min}$	0,586	0,585	0,584	0,3	0,2	0,781	33,3	33,5	0,601	2,6	2,7	0,573	2,2	2,1
$Y$	1	1	1	0,0	0,0	0,63	37,0	37,0	0,97	3,0	3,0	0,98	2,0	2,0

**TAB.5.2.i2 – Parâmetros obtidos para  $Ra=10^4$  (fac 0.6)**

$Ra=10^4$	Ref.[1]	Ref.[2]	“Malha” 20x20	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 30x30	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 40x40	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]
$U_{max}$	16,178	16,18	0,492	97	97	0,335	97,9	97,9	12,345	23,7	23,7
$Y$	0,823	0,823	0,89	8,1	8,1	0,9	9,4	9,4	0,83	0,9	0,9
$V_{max}$	19,617	19,63	0,501	97,4	97,4	0,34	98,3	98,3	14,956	23,8	23,8
$X$	0,119	0,119	0,11	7,6	7,6	0,1	16	16	0,12	0,8	0,8
$\overline{Nu}$	2,243	2,245	1,002	55,3	55,4	1,001	55,4	55,4	1,97	12,2	12,2
$Nu_0$	2,238	2,245	0,991	55,7	55,9	0,986	55,9	56,1	1,962	12,3	12,6
$Nu_{1/2}$	2,243	2,245	1,028	54,2	54,2	1,02	54,5	54,6	1,967	12,3	12,4
$Nu_{max}$	3,528	3,532	1,067	69,8	69,8	1,043	70,4	70,5	3,259	7,6	7,7
$Y$	0,143	0,143	0,09	37,1	37,1	0,1	30,1	30,1	0,11	23,1	23,1
$Nu_{min}$	0,586	0,585	0,918	56,7	56,9	0,955	63	63,2	0,54	7,8	7,7
$Y$	1	1	0,63	37	37	0,49	51	51	0,98	2,0	2,0

TAB.5.2.j1 – Parâmetros obtidos para  $Ra=10^4$  (*fac* 0.8)

$Ra=10^4$	Ref.[1]	Ref.[2]	“Malha” 4x4	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 8x8	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 12x12	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 16x16	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]
$U_{max}$	16,178	16,18	1,018	93,7	93,7	0,23	98,6	98,6	5,055	68,8	68,8	4,057	74,9	74,9
$Y$	0,823	0,823	0,82	0,4	0,4	0,88	6,9	6,9	0,84	2,1	2,1	0,87	5,7	5,7
$V_{max}$	19,617	19,63	1,066	94,6	94,6	0,243	98,8	98,8	5,272	73,1	73,1	4,217	78,5	78,5
$X$	0,119	0,119	0,17	42,9	42,9	0,12	0,8	0,8	0,15	26,1	26,1	0,12	0,8	0,8
$\overline{Nu}$	2,243	2,245	1,007	55,1	55,1	0,998	55,5	55,5	1,213	45,9	46,0	1,158	48,4	48,4
$Nu_0$	2,238	2,245	1,069	52,2	52,4	1,06	52,6	52,8	1,196	46,6	46,7	1,147	48,7	48,9
$Nu_{1/2}$	2,243	2,245	1,054	53,0	53,1	1,076	52,0	52,1	1,222	45,5	45,6	1,165	48,1	48,1
$Nu_{max}$	3,528	3,532	1,424	59,6	59,7	1,123	68,2	68,2	1,796	49,1	49,2	1,713	51,4	51,5
$Y$	0,143	0,143	0,62	>100	>100	0,38	>100	>100	0,08	44,1	44,1	0,06	58,0	58,0
$Nu_{min}$	0,586	0,585	0,657	12,1	12,3	0,976	66,6	66,8	0,624	6,5	6,7	0,64	9,2	9,4
$Y$	1	1	0,39	61,0	61,0	0,43	57,0	57,0	0,98	2,0	2,0	0,98	2,0	2,0

TAB.5.2.j2 – Parâmetros obtidos para  $Ra=10^4$  ( $f_{ac} 0.8$ )

$Ra=10^4$	Ref.[1]	Ref.[2]	"Malha" 20x20	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]	"Malha" 30x30	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]	"Malha" 40x40	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]
$U_{max}$	16,178	16,18	0,059	99,6	99,6	0,279	98,3	98,3	0,209	98,7	98,7
$Y$	0,823	0,823	0,91	10,6	10,6	0,9	9,4	9,4	0,9	9,4	9,4
$V_{max}$	19,617	19,63	0,062	99,7	99,7	0,282	98,6	98,6	0,211	98,9	98,9
$X$	0,119	0,119	0,09	24,4	24,4	0,1	16	16	0,1	16,0	16,0
$\overline{Nu}$	2,243	2,245	0,999	55,5	55,5	1	55,4	55,5	1	55,4	55,5
$Nu_0$	2,238	2,245	1,029	54,0	54,2	0,995	55,5	55,7	0,993	55,6	55,8
$Nu_{1/2}$	2,243	2,245	1,065	52,5	52,6	1,018	54,6	54,7	1,015	54,7	54,8
$Nu_{max}$	3,528	3,532	1,061	69,9	70,0	1,054	70,1	70,2	1,043	70,4	70,5
$Y$	0,143	0,143	0,07	51,0	51,0	0,05	65	65	0,04	72,0	72,0
$Nu_{min}$	0,586	0,585	1,002	71,0	71,3	0,948	61,8	62,1	0,959	63,7	63,9
$Y$	1	1	0,49	51,0	51,0	0,6	40	40	0,74	26,0	26,0

#### 5.2.2.2.2-Ra=10<sup>5</sup>

As tabelas 5.2.k1-2 apresentam comparações para Ra=10<sup>5</sup>, com *fac* 0.2, onde foram comparados resultados obtidos com 4x4, 8x8, 12x12, 16x16, 20x20, 30x30 e 40x40 pontos de expansão.

O refinamento de pontos para o fator 0.2 em Ra=10<sup>5</sup> obteve bons resultados, o erro foi inversamente proporcional a este fato. Apesar do erro para a localização do número de Nusselt máximo em 40x40 pontos de expansão ainda exceder o erro para o mesmo número de pontos igualmente espaçados visto anteriormente, para a solução, por exemplo, com 16x16 pontos de expansão para a maioria dos parâmetros o erro foi 2 vezes menor que o apresentado na seção anterior.

As tabelas 5.2.l1-2 apresentam comparações para Ra=10<sup>5</sup>, com *fac* 0.4, onde foram comparados resultados obtidos com 4x4, 8x8, 12x12, 16x16, 20x20, 30x30 e 40x40 pontos de expansão.

Para Ra=10<sup>5</sup> com *fac* 0.4 as respostas para estes parâmetros foram bem positivas. Já para 16x16 pontos de expansão os erros para os números de Nusselt médio foram menores que 2%, sendo que o mesmo aconteceu para os valores das velocidades. O refinamento de pontos rendeu para esta análise resultados melhores que para pontos igualmente espaçados.

As tabelas 5.2.m1-2 apresentam comparações para Ra=10<sup>5</sup>, com *fac* 0.6, onde foram comparados resultados obtidos com 4x4, 8x8, 12x12, 16x16, 20x20, 30x30 e 40x40 pontos de expansão.

Para Ra=10<sup>5</sup> com *fac* 0.6, os resultados foram desprezíveis para 4x4 pontos de expansão como pode ser visto na tabela 5.2.m1. Com o aumento de centros, o erro assume um perfil oscilatório. Percebem-se para alguns parâmetros erros maiores com 40x40 pontos de expansão do que para 12x12 pontos. De um modo geral, tirando a localização do Nusselt máximo, pontos igualmente espaçados renderam melhores resultados.

As tabelas 5.2.n1-2 apresentam comparações para  $Ra=10^5$ , com *fac* 0.8, onde foram comparados resultados obtidos com 4x4, 8x8, 12x12, 16x16, 20x20, 30x30 e 40x40 pontos de expansão.

Uma porcentagem de erros altos foi encontrada para essa distribuição de pontos. Conclui-se que este valor do fator *fac* rendeu resultados desconsideráveis pela alta discrepância entre as referências.

TAB.5.2.k1 – Parâmetros obtidos para  $Ra=10^5$  (fac 0.2)

$Ra=10^5$	Ref.[1]	Ref.[2]	“Malha” 4x4	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 8x8	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 12x12	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 16x16	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]
$U_{max}$	34,73	34,74	87,393	>100	>100	29,579	14,8	14,9	32,464	6,5	6,6	33,794	2,7	2,7
$Y$	0,855	0,855	0,17	80,1	80,1	0,82	4,1	4,1	0,85	0,6	0,6	0,85	0,6	0,6
$V_{max}$	68,59	68,62	176,038	>100	>100	61,445	10,4	10,5	66,361	3,2	3,3	67,725	1,3	1,3
$X$	0,066	0,066	0,9	>100	>100	0,07	6,1	6,1	0,07	6,1	6,1	0,07	6,1	6,1
$\overline{Nu}$	4,519	4,522	33,783	647,6	647,1	4,172	7,7	7,7	4,475	1,0	1,0	4,522	0,1	0,0
$Nu_0$	4,509	4,522	10,95	>100	>100	6,368	41,2	40,8	5,307	17,7	17,4	4,735	5,0	4,7
$Nu_{1/2}$	4,519	4,522	47,364	>100	>100	3,975	12,0	12,1	4,434	1,9	1,9	4,503	0,4	0,4
$Nu_{max}$	7,717	7,721	20,212	>100	>100	11,831	53,3	53,2	10,798	39,9	39,9	9,282	20,3	20,2
$Y$	0,081	0,081	0,03	63,0	63,0	0,02	75,3	75,3	0,01	87,7	87,7	0	>100	>100
$Nu_{min}$	0,729	0,728	3,28	>100	>100	1,702	>100	>100	0,775	6,3	6,5	0,738	1,2	1,4
$Y$	1	1	0,8	20,0	20,0	1	0,0	0,0	1	0,0	0,0	1	0,0	0,0

TAB.5.2.k2 – Parâmetros obtidos para  $Ra=10^5$  (fac 0.2)

$Ra=10^5$	Ref.[1]	Ref.[2]	“Malha” 20x20	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 30x30	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 40x40	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]
$U_{max}$	34,73	34,74	34,08	1,9	1,9	34,422	0,9	0,9	34,536	0,6	0,6
$Y$	0,855	0,855	0,85	0,6	0,6	0,85	0,6	0,6	0,85	0,6	0,6
$V_{max}$	68,59	68,62	67,808	1,1	1,2	68,209	0,6	0,6	68,296	0,4	0,5
$X$	0,066	0,066	0,07	6,1	6,1	0,07	6,1	6,1	0,07	6,1	6,1
$\overline{Nu}$	4,519	4,522	4,521	0,0	0,0	4,522	0,1	0	4,521	0,0	0,0
$Nu_0$	4,509	4,522	4,617	2,4	2,1	4,527	0,4	0,1	4,513	0,1	0,2
$Nu_{1/2}$	4,519	4,522	4,504	0,3	0,4	4,511	0,2	0,2	4,51	0,2	0,3
$Nu_{max}$	7,717	7,721	8,557	10,9	10,8	7,868	2	1,9	7,77	0,7	0,6
$Y$	0,081	0,081	0	>100	>100	0,03	63	63	0,06	25,9	25,9
$Nu_{min}$	0,729	0,728	0,759	4,1	4,3	0,756	3,7	3,8	0,756	3,7	3,8
$Y$	1	1	0,97	3,0	3,0	0,98	2	2	1	0,0	0,0

TAB.5.2.11 – Parâmetros obtidos para  $Ra=10^5$  (fac 0.4)

$Ra=10^5$	Ref.[1]	Ref.[2]	“Malha” 4x4	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 8x8	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 12x12	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 16x16	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]
$U_{max}$	34,73	34,74	2735,18	>100	>100	32,745	5,7	5,7	33,848	2,5	2,6	34,129	1,7	1,8
$Y$	0,855	0,855	0,09	89,5	89,5	0,83	2,9	2,9	0,84	1,8	1,8	0,85	0,6	0,6
$V_{max}$	68,59	68,62	3431,23	>100	>100	59,631	13,1	13,1	67,124	2,1	2,2	67,715	1,3	1,3
$X$	0,066	0,066	0,28	>100	>100	0,07	6,1	6,1	0,06	9,1	9,1	0,07	6,1	6,1
$\overline{Nu}$	4,519	4,522	45466,97	>100	>100	4,489	0,7	0,7	4,521	0,0	0,0	4,526	0,2	0,1
$Nu_0$	4,509	4,522	-649,817	>100	>100	6,045	34,1	33,7	4,861	7,8	7,5	4,586	1,7	1,4
$Nu_{1/2}$	4,519	4,522	82349,116	>100	>100	3,986	11,8	11,9	4,509	0,2	0,3	4,514	0,1	0,2
$Nu_{max}$	7,717	7,721	977,783	>100	>100	13,928	80,5	80,4	9,61	24,5	24,5	8,4	8,9	8,8
$Y$	0,081	0,081	0	>100	>100	0,01	87,7	87,7	0	>100	>100	0	>100	>100
$Nu_{min}$	0,729	0,728	-3422,34	>100	>100	1,041	42,8	43,0	0,73	0,1	0,3	0,738	1,2	1,4
$Y$	1	1	0,56	44,0	44,0	1	0,0	0,0	0,96	4,0	4,0	0,97	3,0	3,0

TAB.5.2.12 – Parâmetros obtidos para  $Ra=10^5$  (fac 0.4)

$Ra=10^5$	Ref.[1]	Ref.[2]	“Malha” 20x20	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 30x30	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 40x40	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]
$U_{max}$	34,73	34,74	34,367	1,0	1,1	34,562	0,5	0,5	34,622	0,3	0,3
$Y$	0,855	0,855	0,85	0,6	0,6	0,85	0,6	0,6	0,85	0,6	0,6
$V_{max}$	68,59	68,62	68,093	0,7	0,8	68,327	0,4	0,4	68,368	0,3	0,4
$X$	0,066	0,066	0,07	6,1	6,1	0,07	6,1	6,1	0,07	6,1	6,1
$\overline{Nu}$	4,519	4,522	4,524	0,1	0,0	4,521	0	0	4,521	0,0	0,0
$Nu_0$	4,509	4,522	4,533	0,5	0,2	4,519	0,2	0,1	4,515	0,1	0,2
$Nu_{1/2}$	4,519	4,522	4,514	0,1	0,2	4,516	0,1	0,1	4,517	0,0	0,1
$Nu_{max}$	7,717	7,721	7,957	3,1	3,1	7,762	0,6	0,5	7,735	0,2	0,2
$Y$	0,081	0,081	0,03	63,0	63,0	0,06	25,9	25,9	0,08	1,2	1,2
$Nu_{min}$	0,729	0,728	0,747	2,5	2,6	0,744	2,1	2,2	0,741	1,6	1,8
$Y$	1	1	0,98	2,0	2,0	1	0	0	1	0,0	0,0

TAB.5.2.m1 – Parâmetros obtidos para  $Ra=10^5$  (fac 0.6)

$Ra=10^5$	Ref.[1]	Ref.[2]	“Malha” 4x4	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 8x8	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 12x12	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 16x16	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]
$U_{max}$	34,73	34,74	131,112	>100	>100	25,4	26,9	26,9	34,492	0,7	0,7	33,337	4,0	4,0
$Y$	0,855	0,855	0,27	68,4	68,4	0,84	1,8	1,8	0,85	0,6	0,6	0,85	0,6	0,6
$V_{max}$	68,59	68,62	568,082	>100	>100	53,406	22,1	22,2	64,318	6,2	6,3	67,676	1,3	1,4
$X$	0,066	0,066	0,65	>100	>100	0,07	6,1	6,1	0,07	6,1	6,1	0,07	6,1	6,1
$\overline{Nu}$	4,519	4,522	-91,349	>100	>100	4,095	9,4	9,4	4,451	1,5	1,6	4,492	0,6	0,7
$Nu_0$	4,509	4,522	-10,566	>100	>100	4,874	8,1	7,8	4,525	0,4	0,1	4,502	0,2	0,4
$Nu_{1/2}$	4,519	4,522	-73,037	>100	>100	3,74	17,2	17,3	4,438	1,8	1,9	4,482	0,8	0,9
$Nu_{max}$	7,717	7,721	6,857	11,1	11,2	13,204	71,1	71,0	8,396	8,8	8,7	7,992	3,6	3,5
$Y$	0,081	0,081	0,48	>100	>100	0,01	87,7	87,7	0	>100	>100	0,09	11,1	11,1
$Nu_{min}$	0,729	0,728	-32,576	>100	>100	0,669	8,2	8,1	0,739	1,4	1,5	0,732	0,4	0,5
$Y$	1	1	0,67	33,0	33,0	0,95	5,0	5,0	0,97	3,0	3,0	0,98	2,0	2,0

TAB.5.2.m2 – Parâmetros obtidos para  $Ra=10^5$  (fac 0.6)

$Ra=10^5$	Ref.[1]	Ref.[2]	“Malha” 20x20	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 30x30	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 40x40	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]
$U_{max}$	34,73	34,74	32,612	6,1	6,1	32,082	7,6	7,7	31,575	9,1	9,1
$Y$	0,855	0,855	0,85	0,6	0,6	0,85	0,6	0,6	0,85	0,6	0,6
$V_{max}$	68,59	68,62	65,409	4,6	4,7	64,137	6,5	6,5	63,123	8,0	8,0
$X$	0,066	0,066	0,07	6,1	6,1	0,07	6,1	6,1	0,07	6,1	6,1
$\overline{Nu}$	4,519	4,522	4,413	2,3	2,4	4,389	2,9	2,9	4,364	3,4	3,5
$Nu_0$	4,509	4,522	4,402	2,4	2,7	4,368	3,1	3,4	4,342	3,7	4,0
$Nu_{1/2}$	4,519	4,522	4,402	2,6	2,7	4,382	3	3,1	4,359	3,5	3,6
$Nu_{max}$	7,717	7,721	7,82	1,3	1,3	7,711	0,1	0,1	7,685	0,4	0,5
$Y$	0,081	0,081	0,07	13,6	13,6	0,08	1,2	1,2	0,08	1,2	1,2
$Nu_{min}$	0,729	0,728	0,732	0,4	0,5	0,723	0,8	0,7	0,711	2,5	2,3
$Y$	1	1	0,98	2,0	2,0	0,99	1	1	1	0,0	0,0

TAB.5.2.n1 – Parâmetros obtidos para  $Ra=10^5$  ( $f_{ac}$  0.8)

$Ra=10^5$	Ref.[1]	Ref.[2]	“Malha” 4x4	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 8x8	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 12x12	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 16x16	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]
$U_{max}$	34,73	34,74	1315,96	>100	>100	12,705	63,4	63,4	21,084	39,3	39,3	0,786	97,7	97,7
$Y$	0,855	0,855	0,19	77,8	77,8	0,86	0,6	0,6	0,84	1,8	1,8	0,9	5,3	5,3
$V_{max}$	68,59	68,62	971,585	>100	>100	15,776	77,0	77,0	31,332	54,3	54,3	0,824	98,8	98,8
$X$	0,066	0,066	0,55	>100	>100	0,09	36,4	36,4	0,11	66,7	66,7	0,1	51,5	51,5
$\overline{Nu}$	4,519	4,522	-12538,3	>100	>100	2,319	48,7	48,7	3,009	33,4	33,5	1,004	77,8	77,8
$Nu_0$	4,509	4,522	-967,562	>100	>100	2,245	50,2	50,4	2,956	34,4	34,6	1,041	76,9	77,0
$Nu_{1/2}$	4,519	4,522	15098,72	>100	>100	2,29	49,3	49,4	2,975	34,2	34,2	1,077	76,2	76,2
$Nu_{max}$	7,717	7,721	1935,217	>100	>100	5,97	22,6	22,7	6,681	13,4	13,5	1,225	84,1	84,1
$Y$	0,081	0,081	0,83	>100	>100	0,01	87,7	87,7	0,27	>100	>100	0,24	>100	>100
$Nu_{min}$	0,729	0,728	-3984,72	>100	>100	-2,792	>100	>100	0,37	49,2	49,2	0,855	17,3	17,4
$Y$	1	1	0,49	51,0	51,0	0,44	56,0	56,0	0,47	53,0	53,0	0,57	43,0	43,0

TAB.5.2.n2 – Parâmetros obtidos para  $Ra=10^5$  (fac 0.8)

$Ra=10^5$	Ref.[1]	Ref.[2]	“Malha” 20x20	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 30x30	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 40x40	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]
$U_{max}$	34,73	34,74	17,517	49,6	49,6	0,376	98,9	98,9	0,278	99,2	99,2
$Y$	0,855	0,855	0,85	0,6	0,6	0,91	6,4	6,4	0,91	6,4	6,4
$V_{max}$	68,59	68,62	25,897	62,2	62,3	0,389	99,4	99,4	0,286	99,6	99,6
$X$	0,066	0,066	0,08	21,2	21,2	0,09	36,4	36,4	0,09	36,4	36,4
$\overline{Nu}$	4,519	4,522	2,89	36,0	36,1	1,001	77,8	77,9	1	77,9	77,9
$Nu_0$	4,509	4,522	2,835	37,1	37,3	1,015	77,5	77,6	1,006	77,7	77,8
$Nu_{1/2}$	4,519	4,522	2,879	36,3	36,3	1,053	76,7	76,7	1,043	76,9	76,9
$Nu_{max}$	7,717	7,721	6,512	15,6	15,7	1,092	85,8	85,9	1,068	86,2	86,2
$Y$	0,081	0,081	0,04	50,6	50,6	0,07	13,6	13,6	0,09	11,1	11,1
$Nu_{min}$	0,729	0,728	0,462	36,6	36,5	0,937	28,5	28,7	0,957	31,3	31,5
$Y$	1	1	0,99	1,0	1,0	0,65	35	35	0,66	34,0	34,0

### 5.2.2.2.3-Ra=10<sup>6</sup>

As tabelas 5.2.o1-2 apresentam comparações para Ra=10<sup>6</sup>, com *fac* 0.2, onde foram comparados resultados obtidos com 4x4, 8x8, 12x12, 16x16, 20x20, 30x30 e 40x40 pontos de expansão.

O código computacional teve um bom desempenho para Ra=10<sup>6</sup> com *fac* 0.2. Com o aumento de pontos de expansão o erro diminuiu gradativamente. A escolha deste critério tomado aqui com valor 0.2 com muitos pontos de expansão superou os resultados obtidos para *fac* igual à zero. Apenas a localização do Nusselt máximo e o seu valor obtiveram respostas não significativas. Para os valores dos números de Nusselt médios, os resultados chegaram a menos de 2% de erro, o que foi visto também para as velocidades.

As tabelas 5.2.p1-2 apresentam comparações para Ra=10<sup>6</sup>, com *fac* 0.4, onde foram comparados resultados obtidos com 4x4, 8x8, 12x12, 16x16, 20x20, 30x30 e 40x40 pontos de expansão.

Analisando as duas tabelas acima paralelamente com o caso *fac* igual a zero nota-se que houve a diminuição da porcentagem dos erros com o aumento dos pontos, embora um bom resultado da localização do número de Nusselt máximo não tenha sido capturado e resultados satisfatórios só pudessem ser vistos com 20x20 pontos de expansão. Apesar dessa convergência de “malha” ter ocorrido, os valores dos parâmetros em questão, no geral, foram melhorados com uma distribuição uniforme dos pontos.

As tabelas 5.2.q1-2 apresentam comparações para Ra=10<sup>6</sup>, com *fac* 0.6, onde foram comparados resultados obtidos com 4x4, 8x8, 12x12, 16x16, 20x20, 30x30 e 40x40 pontos de expansão.

Na análise das Tabelas 5.2.q1-2 conclui-se que este valor do fator *fac* gerou resultados inviáveis de acordo com as referências, embora para 40x40 pontos de expansão o erro tenha sido razoavelmente aceitável, a comparação com as Tabelas 5.2.fl-2 afirma que esta distribuição de pontos não deve ser considerada.

As tabelas 5.2.r1-2 apresentam comparações para  $Ra=10^6$ , com *fac* 0.8, onde foram comparados resultados obtidos com 4x4, 8x8, 12x12, 16x16, 20x20, 30x30 e 40x40 pontos de expansão.

Novamente os resultados obtidos foram ruins. O aumento de pontos não foi capaz de encontrar respostas positivas ao contrário do que se espera. Os valores oscilaram, e os melhores valores para os parâmetros analisados foram dados em 16x16 pontos de expansão.

TAB.5.2.01 – Parâmetros obtidos para  $Ra=10^6$  (fac 0.2)

$Ra=10^6$	Ref.[1]	Ref.[2]	“Malha” 4x4	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 8x8	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 12x12	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 16x16	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]
$U_{max}$	64,63	64,83	119,251	84,5	83,9	136,484	>100	>100	58,75	9,1	9,4	59,735	7,6	7,9
$Y$	0,85	0,85	0,25	70,6	70,6	0,83	2,4	2,4	0,85	0,0	0,0	0,85	0,0	0,0
$V_{max}$	219,36	220,6	118,138	46,1	46,4	138,836	36,7	37,1	177,136	19,2	19,7	200,412	8,6	9,2
$X$	0,038	0,038	0,76	>100	>100	0,06	57,9	57,9	0,04	5,3	5,3	0,04	5,3	5,3
$\overline{Nu}$	8,8	8,825	3,406	61,3	61,4	6,22	29,3	29,5	7,469	15,1	15,4	8,181	7,0	7,3
$Nu_0$	8,817	8,826	7,481	15,2	15,2	12,025	36,4	36,2	12,794	45,1	45,0	11,658	32,2	32,1
$Nu_{1/2}$	8,799	8,825	2,326	73,6	73,6	5,695	35,3	35,5	6,883	21,8	22,0	8,031	8,7	9,0
$Nu_{max}$	17,925	17,54	15,409	14,0	12,1	19,007	6,0	8,4	26,838	49,7	53,0	26,069	45,4	48,6
$Y$	0,038	0,039	0,83	>100	>100	0,02	47,4	48,7	0,01	73,7	74,4	0,01	73,7	74,4
$Nu_{min}$	0,989	0,979	1,566	58,3	60,0	6,87	>100	>100	3	>100	>100	1,298	31,2	32,6
$Y$	1	1	0,34	66,0	66,0	0,91	9,0	9,0	1	0,0	0,0	0,96	4,0	4,0

TAB.5.2.o2 – Parâmetros obtidos para  $Ra=10^6$  (fac 0.2)

$Ra=10^6$	Ref.[1]	Ref.[2]	“Malha” 20x20	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 30x30	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 40x40	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]
$U_{max}$	64,63	64,83	60,902	5,8	6,1	63,201	2,2	2,5	64,006	1,0	1,3
$Y$	0,85	0,85	0,85	0	0	0,85	0	0	0,85	0,0	0,0
$V_{max}$	219,36	220,6	210,809	3,9	4,4	218,481	0,4	1	218,28	0,5	1,1
$X$	0,038	0,038	0,04	5,3	5,3	0,04	5,3	5,3	0,04	5,3	5,3
$\overline{Nu}$	8,8	8,825	8,546	2,9	3,2	8,773	0,3	0,6	8,81	0,1	0,2
$Nu_0$	8,817	8,826	10,733	21,7	21,6	9,362	6,2	6,1	8,957	1,6	1,5
$Nu_{1/2}$	8,799	8,825	8,495	3,5	3,7	8,75	0,6	0,8	8,795	0,0	0,3
$Nu_{max}$	17,925	17,54	25,751	43,7	46,8	22,944	28	30,8	20,438	14,0	16,5
$Y$	0,038	0,039	0	>100	>100	0	>100	>100	0	>100	>100
$Nu_{min}$	0,989	0,979	0,953	3,6	2,7	1,002	1,3	2,3	1,025	3,6	4,7
$Y$	1	1	0,97	3	3	0,98	2	2	0,98	2,0	2,0

TAB.5.2.p2 – Parâmetros obtidos para  $Ra=10^6$  (fac 0.4)

$Ra=10^6$	Ref.[1]	Ref.[2]	“Malha” 20x20	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 30x30	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 40x40	$\epsilon\%$ Ref.[1]	$\epsilon\%$ Ref.[2]
$U_{max}$	64,63	64,83	64,287	0,5	0,8	63,182	2,2	2,5	63,454	1,8	2,1
$Y$	0,85	0,85	0,85	0,0	0,0	0,85	0	0	0,85	0,0	0,0
$V_{max}$	219,36	220,6	216,174	1,5	2,0	216,096	1,5	2	216,905	1,1	1,7
$X$	0,038	0,038	0,04	5,3	5,3	0,04	5,3	5,3	0,04	5,3	5,3
$\overline{Nu}$	8,8	8,825	8,756	0,5	0,8	8,768	0,4	0,6	8,774	0,3	0,6
$Nu_0$	8,817	8,826	9,774	10,9	10,7	8,917	1,1	1	8,753	0,7	0,8
$Nu_{1/2}$	8,799	8,825	8,735	0,7	1,0	8,752	0,5	0,8	8,762	0,4	0,7
$Nu_{max}$	17,925	17,54	24,443	36,4	39,4	20,498	14,4	16,9	18,756	4,6	6,9
$Y$	0,038	0,039	0	>100	>100	0	>100	>100	0	>100	>100
$Nu_{min}$	0,989	0,979	0,917	7,3	6,3	1,019	3	4,1	1,049	6,1	7,2
$Y$	1	1	0,97	3,0	3,0	0,98	2	2	0,99	1,0	1,0

TAB.5.2.q1 – Parâmetros obtidos para  $Ra=10^6$  (fac 0.6)

$Ra=10^6$	Ref.[1]	Ref.[2]	“Malha” 4x4	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 8x8	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 12x12	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 16x16	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]
$U_{max}$	64,63	64,83	634,237	>100	>100	0,213	>100	>100	0,227	>100	>100	76,874	18,9	18,6
$Y$	0,85	0,85	0,28	67,1	67,1	0,87	2,4	2,4	0,88	3,5	3,5	0,85	0,0	0,0
$V_{max}$	219,36	220,6	1190,538	>100	>100	0,219	>100	>100	0,232	>100	>100	203,495	7,2	7,8
$X$	0,038	0,038	0,76	>100	>100	0,13	>100	>100	0,12	>100	>100	0,04	5,3	5,3
$\overline{Nu}$	8,8	8,825	832,727	>100	>100	0,0016	>100	>100	0,0028	>100	>100	8,677	1,4	1,7
$Nu_0$	8,817	8,826	0,202	>100	>100	0,0016	>100	>100	0,0027	>100	>100	9,465	7,3	7,2
$Nu_{1/2}$	8,799	8,825	1423,31	>100	>100	0,0017	>100	>100	0,0029	>100	>100	8,675	1,4	1,7
$Nu_{max}$	17,925	17,54	387,391	>100	>100	0,0017	>100	>100	0,003	>100	>100	24,419	36,2	39,2
$Y$	0,038	0,039	0,63	>100	>100	0,01	73,7	74,4	0,01	73,7	74,4	0	>100	>100
$Nu_{min}$	0,989	0,979	-345,441	>100	>100	0,0015	>100	>100	0,002	>100	>100	0,919	7,1	6,1
$Y$	1	1	0,85	15,0	15,0	0,63	37,0	37,0	0,59	41,0	41,0	0,98	2,0	2,0

TAB.5.2.q2 – Parâmetros obtidos para  $Ra=10^6$  (fac 0.6)

$Ra=10^6$	Ref.[1]	Ref.[2]	“Malha” 20x20	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 30x30	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 40x40	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]
$U_{max}$	64,63	64,83	56,837	12,1	12,3	55,967	13,4	13,7	55,084	14,8	15,0
$Y$	0,85	0,85	0,85	0,0	0,0	0,86	1,2	1,2	0,86	1,2	1,2
$V_{max}$	219,36	220,6	188,415	14,1	14,6	187,662	14,5	14,9	183,127	16,5	17,0
$X$	0,038	0,038	0,05	31,6	31,6	0,04	5,3	5,3	0,04	5,3	5,3
$\overline{Nu}$	8,8	8,825	8,368	4,9	5,2	8,311	5,6	5,8	8,245	6,3	6,6
$Nu_0$	8,817	8,826	8,497	3,6	3,7	8,227	6,7	6,8	8,13	7,8	7,9
$Nu_{1/2}$	8,799	8,825	8,342	5,2	5,5	8,294	5,7	6	8,232	6,4	6,7
$Nu_{max}$	17,925	17,54	20,742	15,7	18,3	18,315	2,2	4,4	17,68	1,4	0,8
$Y$	0,038	0,039	0	>100	>100	0,01	73,7	74,4	0,03	21,1	23,1
$Nu_{min}$	0,989	0,979	0,362	63,4	63,0	0,982	0,7	0,3	0,972	1,7	0,7
$Y$	1	1	0,48	52,0	52,0	0,99	1	1	0,99	1,0	1,0

TAB.5.2.r1 – Parâmetros obtidos para  $Ra=10^6$  (fac 0.8)

$Ra=10^6$	Ref.[1]	Ref.[2]	“Malha” 4x4	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 8x8	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 12x12	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 16x16	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]
$U_{\max}$	64,63	64,83	150,06	>100	>100	0,192	>100	>100	39,889	38,3	38,5	55,098	14,7	15,0
$Y$	0,85	0,85	0,55	35,3	35,3	0,88	3,5	3,5	0,85	0,0	0,0	0,85	0,0	0,0
$V_{\max}$	219,36	220,6	263,67	20,2	19,5	0,203	>100	>100	90,354	58,8	59,0	190,741	13,0	13,5
$X$	0,038	0,038	0,22	>100	>100	0,12	>100	>100	0,06	57,9	57,9	0,06	57,9	57,9
$\overline{Nu}$	8,8	8,825	36,087	>100	>100	0,0083	>100	>100	6,508	26,0	26,3	8,254	6,2	6,5
$Nu_0$	8,817	8,826	-0,906	>100	>100	0,0088	>100	>100	6,51	26,2	26,2	8,026	9,0	9,1
$Nu_{1/2}$	8,799	8,825	11,861	34,8	34,4	0,009	>100	>100	6,272	28,7	28,9	8,276	5,9	6,2
$Nu_{\max}$	17,925	17,54	69,703	>100	>100	0,0094	>100	>100	39,714	>100	>100	26,62	48,5	51,8
$Y$	0,038	0,039	0,47	>100	>100	0,01	73,7	74,4	0,4	>100	>100	0,42	>100	>100
$Nu_{\min}$	0,989	0,979	-111,731	>100	>100	0,0082	>100	>100	-26,689	>100	>100	-0,063	>100	>100
$Y$	1	1	0,62	38,0	38,0	0,44	56,0	56,0	0,33	67,0	67,0	0,77	23,0	23,0

TAB.5.2.r2 – Parâmetros obtidos para  $Ra=10^6$  (fac 0.8)

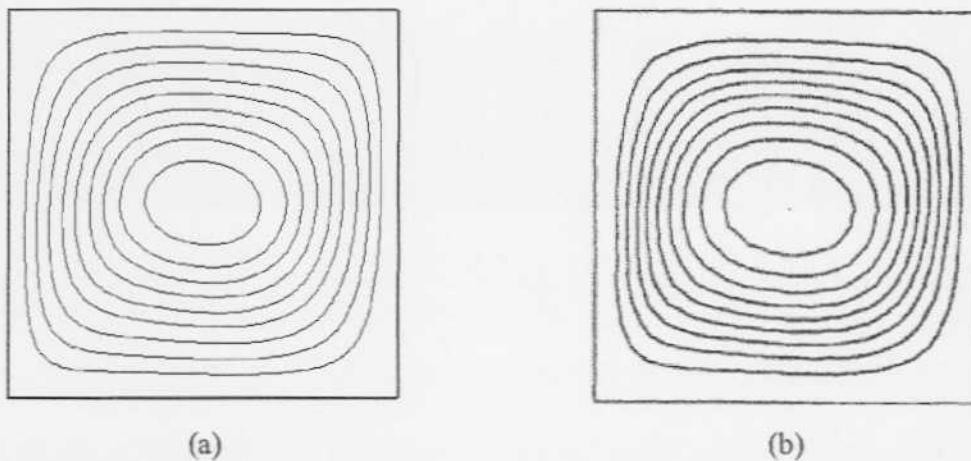
$Ra=10^6$	Ref.[1]	Ref.[2]	“Malha” 20x20	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 30x30	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]	“Malha” 40x40	$\varepsilon\%$ Ref.[1]	$\varepsilon\%$ Ref.[2]
$U_{max}$	64,63	64,83	47,715	26,2	26,4	32,437	49,8	50	41,085	36,4	36,6
$Y$	0,85	0,85	0,87	2,4	2,4	0,87	2,4	2,4	0,87	2,4	2,4
$V_{max}$	219,36	220,6	145,112	33,8	34,2	66,847	69,5	69,7	102,656	53,2	53,5
$X$	0,038	0,038	0,05	31,6	31,6	0,06	57,9	57,9	0,05	31,6	31,6
$\overline{Nu}$	8,8	8,825	7,496	14,8	15,1	5,283	40	40,1	6,43	26,9	27,1
$Nu_0$	8,817	8,826	7,302	17,2	17,3	5,068	42,5	42,6	6,292	28,6	28,7
$Nu_{1/2}$	8,799	8,825	7,426	15,6	15,9	5,242	40,4	40,6	6,405	27,2	27,4
$Nu_{max}$	17,925	17,54	24,471	36,5	39,5	15,933	11,1	9,2	17,012	5,1	3,0
$Y$	0,038	0,039	0,44	>100	>100	0,02	>100	>100	0,03	21,1	23,1
$Nu_{min}$	0,989	0,979	-0,006	>100	>100	-3,353	>100	>100	-1,403	>100	>100
$Y$	1	1	0,8	20,0	20,0	0,37	63	63	0,49	51,0	51,0

Uma abordagem geral para todos os números de Rayleigh analisados em todas as distribuições de pontos pôde ser feita. De fato os valores do fator *fac* 0.6 e 0.8 renderam resultados não significativos, concluindo que se necessita de mais pontos distribuídos no domínio e não nos contornos, mostrando assim que se pode encontrar um melhor desempenho para *fac* igual a zero.

A partir de agora, serão considerados os melhores valores para os critérios de distribuição de pontos quando comparados com *fac* igual à zero. Serão apresentadas para estes casos as isolinhas da função corrente, vorticidade e temperatura, com as respectivas referências.

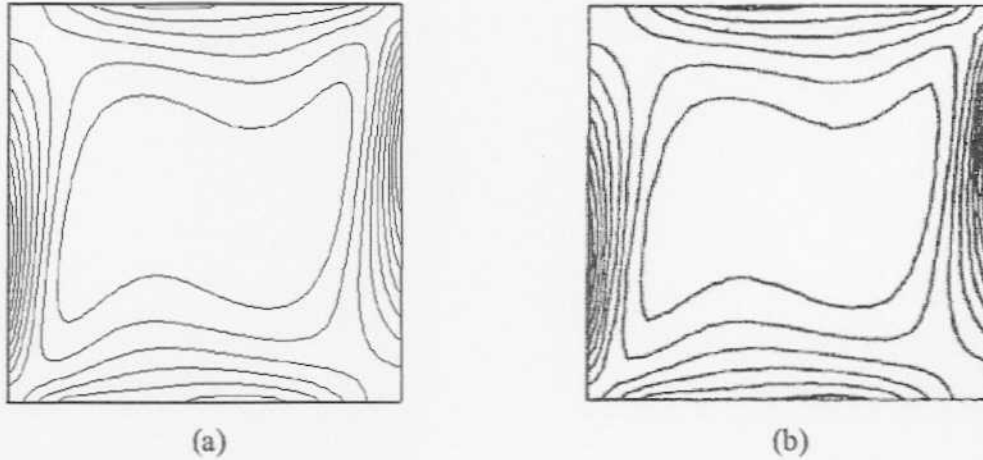
Na análise para  $Ra=10^4$  o fator de melhor desempenho com o refinamento de pontos foi o de valor 0.2. Para  $Ra=10^5$ , encontra-se melhor resultado em *fac* igual a 0.4. E por fim, para  $Ra=10^6$ , os resultados para os componentes da velocidade foram encontrados com menor erro para *fac* igual a 0.2 e para os valores de Nusselt com *fac* igual a 0.4.

As Figuras 5.2.11(a) e 5.2.11(b) mostram a função corrente para  $Ra=10^4$  com 40x40 pontos de expansão utilizando o fator *fac* igual a 0.2 no presente trabalho e no trabalho de Vahl Davis (1983) [3] com 41x41 pontos de distribuição, respectivamente.



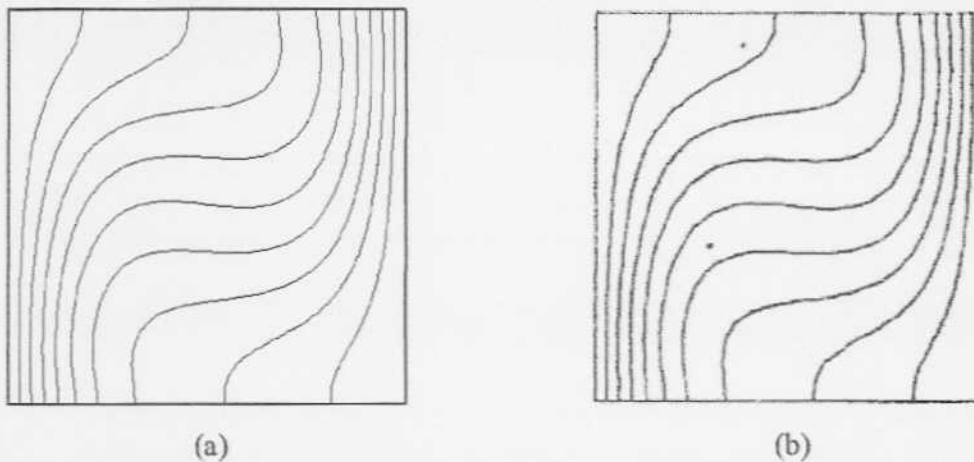
**FIG.5.2.11** – Resultado das isolinhas da função corrente para  $Ra=10^4$ , usando 40x40 pontos de expansão utilizando o fator *fac* igual a 0.2, para o presente trabalho (a) e o de Davis (1983).

As Figuras 5.2.12(a) e 5.2.12(b) mostram a vorticidade para  $Ra=10^4$  com 40x40 pontos de expansão utilizando o fator  $fac$  igual a 0.2 no presente trabalho e no trabalho de Davis (1983) com 41x41 pontos de distribuição, respectivamente.



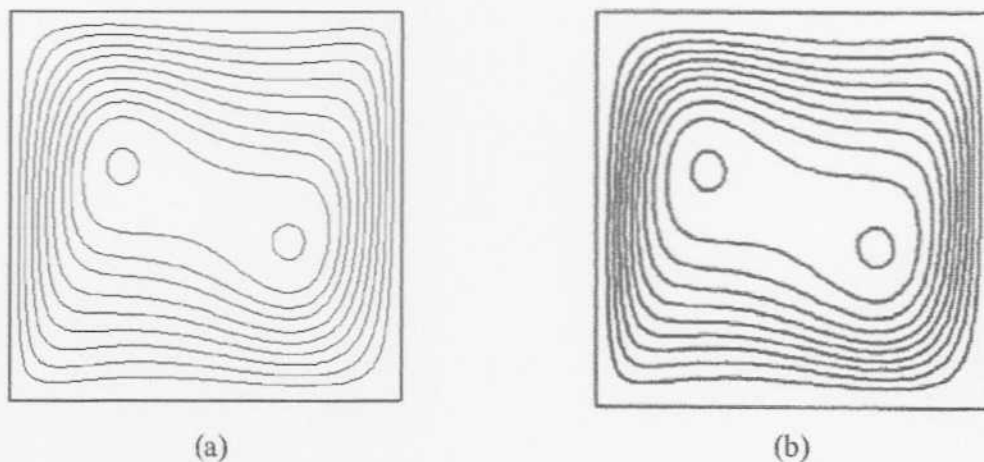
**FIG.5.2.12** – Resultado das isolinhas de vorticidade para  $Ra=10^4$ , usando 40x40 pontos de expansão utilizando o fator  $fac$  igual a 0.2, para o presente trabalho (a) e o de Davis (1983).

As Figuras 5.2.13(a) e 5.2.12(b) mostram a temperatura para  $Ra=10^4$  com 40x40 pontos de expansão utilizando o fator  $fac$  igual a 0.2 no presente trabalho e no trabalho de Davis (1983) com 41x41 pontos de distribuição, respectivamente.



**FIG.5.2.13** – Resultado das isolinhas de temperatura para  $Ra=10^4$ , usando 40x40 pontos de expansão utilizando o fator  $fac$  igual a 0.2, para o presente trabalho (a) e o de Davis (1983).

As Figuras 5.2.14(a) e 5.2.14(b) mostram a função corrente para  $Ra=10^5$  com 40x40 pontos de expansão utilizando o fator *fac* igual a 0.4 no presente trabalho e no trabalho de Davis (1983) com 81x81 pontos de distribuição, respectivamente.



**FIG.5.2.14** – Resultado das isolinhas da função corrente para  $Ra=10^5$ , usando 40x40 pontos de expansão utilizando o fator *fac* igual a 0.4, para o presente trabalho (a) e o de Davis (1983).

As Figuras 5.2.15(a) e 5.2.15(a) mostram a vorticidade para  $Ra=10^5$  com 40x40 pontos de expansão utilizando o fator *fac* igual a 0.4 no presente trabalho e no trabalho de Davis (1983) com 81x81 pontos de distribuição, respectivamente.

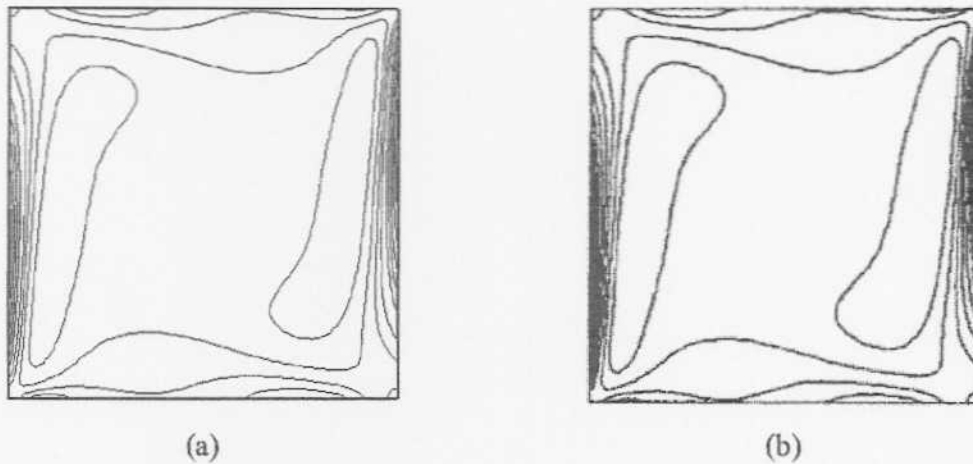


FIG.5.2.15 – Resultado das isolinhas de vorticidade para  $Ra=10^5$ , usando 40x40 pontos de expansão utilizando o fator *fac* igual a 0.4, para o presente trabalho (a) e o de Davis (1983).

As Figuras 5.2.16(a) e 5.2.16(b) mostram a temperatura para  $Ra=10^5$  com 40x40 pontos de expansão utilizando o fator *fac* igual a 0.4 no presente trabalho e no trabalho de Davis (1983) com 81x81 pontos de distribuição, respectivamente.

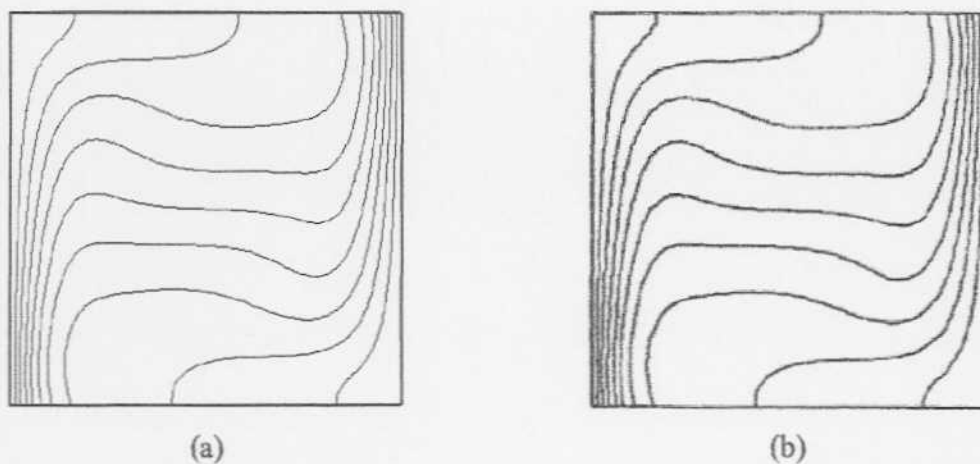
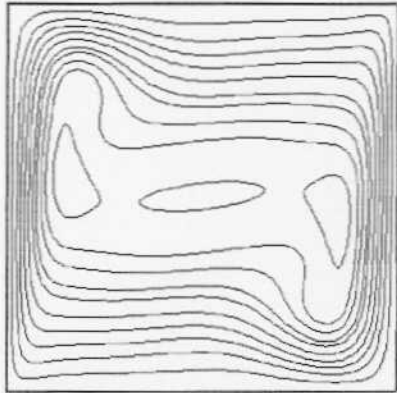
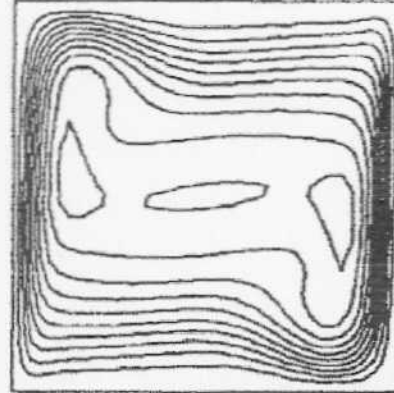


FIG.5.2.16 – Resultado das isolinhas de temperatura para  $Ra=10^5$ , usando 40x40 pontos de expansão utilizando o fator *fac* igual a 0.4, para o presente trabalho (a) e o de Davis (1983).

As Figuras 5.2.17(a) e 5.2.17(b) mostram a função corrente para  $Ra=10^6$  com 40x40 pontos de expansão utilizando o fator  $fac$  igual a 0.2 no presente trabalho e no trabalho de Davis (1983) com 81x81 pontos de distribuição, respectivamente.



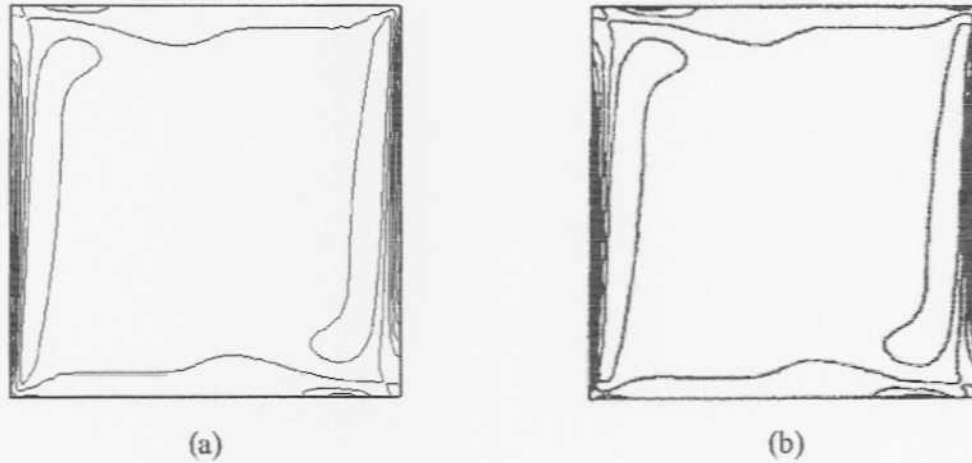
(a)



(b)

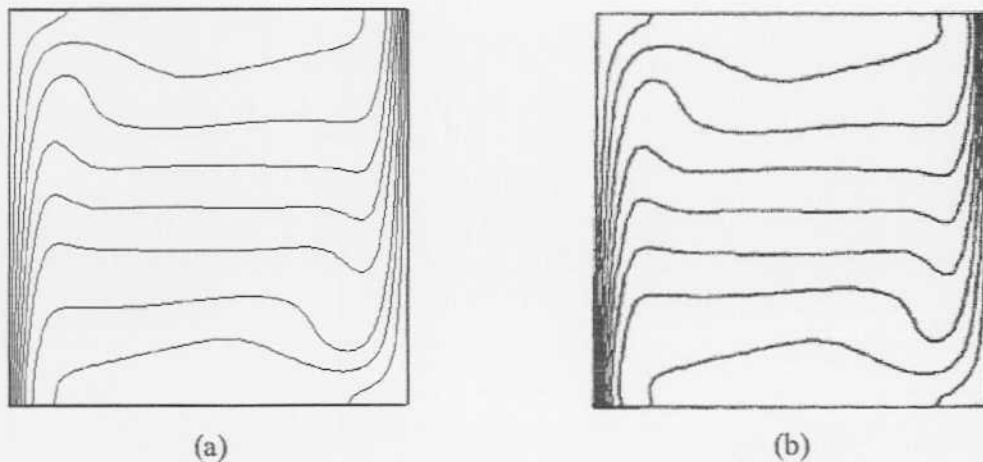
**FIG.5.2.17** – Resultado das isolinhas da função corrente para  $Ra=10^6$ , usando 40x40 pontos de expansão utilizando o fator  $fac$  igual a 0.2, para o presente trabalho (a) e o de Davis (1983).

As Figuras 5.2.18(a) e 5.2.18(b) mostram a vorticidade para  $Ra=10^6$  com 40x40 pontos de expansão utilizando o fator  $fac$  igual a 0.2 no presente trabalho e no trabalho de Davis (1983) com 81x81 pontos de distribuição, respectivamente.



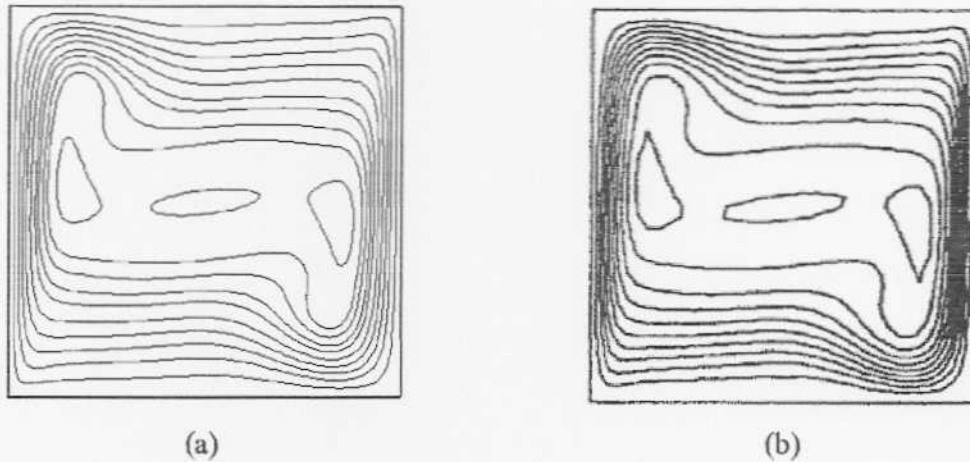
**FIG.5.2.18** – Resultado das isolinhas de vorticidade para  $Ra=10^6$ , usando 40x40 pontos de expansão utilizando o fator *fac* igual a 0.2, para o presente trabalho (a) e o de Davis (1983).

As Figuras 5.2.19(a) e 5.2.19(b) mostram a temperatura para  $Ra=10^6$  com 40x40 pontos de expansão utilizando o fator *fac* igual a 0.2 no presente trabalho e no trabalho de Davis (1983) com 81x81 pontos de distribuição, respectivamente.



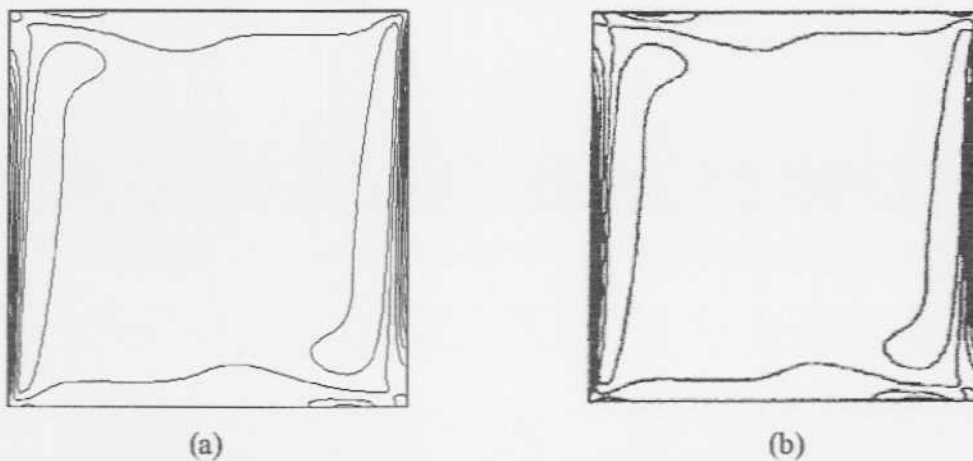
**FIG.5.2.19** – Resultado das isolinhas de temperatura para  $Ra=10^6$ , usando 40x40 pontos de expansão utilizando o fator *fac* igual a 0.2, para o presente trabalho (a) e o de Davis (1983).

As Figuras 5.2.20(a) e 5.2.20(b) mostram a função corrente para  $Ra=10^6$  com 40x40 pontos de expansão utilizando o fator *fac* igual a 0.4 no presente trabalho e no trabalho de Davis (1983) com 81x81 pontos de distribuição, respectivamente.



**FIG.5.2.20** – Resultado das isolinhas da função corrente para  $Ra=10^6$ , usando 40x40 pontos de expansão utilizando o fator *fac* igual a 0.4, para o presente trabalho (a) e o de Davis (1983).

As Figuras 5.2.21(a) e 5.2.21(b) mostram a vorticidade para  $Ra=10^6$  com 40x40 pontos de expansão utilizando o fator *fac* igual a 0.4 no presente trabalho e no trabalho de Davis (1983) com 81x81 pontos de distribuição, respectivamente.



**FIG.5.2.21** – Resultado das isolinhas de vorticidade para  $Ra=10^6$ , usando 40x40 pontos de expansão utilizando o fator *fac* igual a 0.4, para o presente trabalho (a) e o de Davis (1983).

As Figuras 5.2.22(a) e 5.2.22(b) mostram a temperatura para  $Ra=10^6$  com 40x40 pontos de expansão utilizando o fator *fac* igual a 0.4 no presente trabalho e no trabalho de Davis (1983) com 81x81 pontos de distribuição, respectivamente.

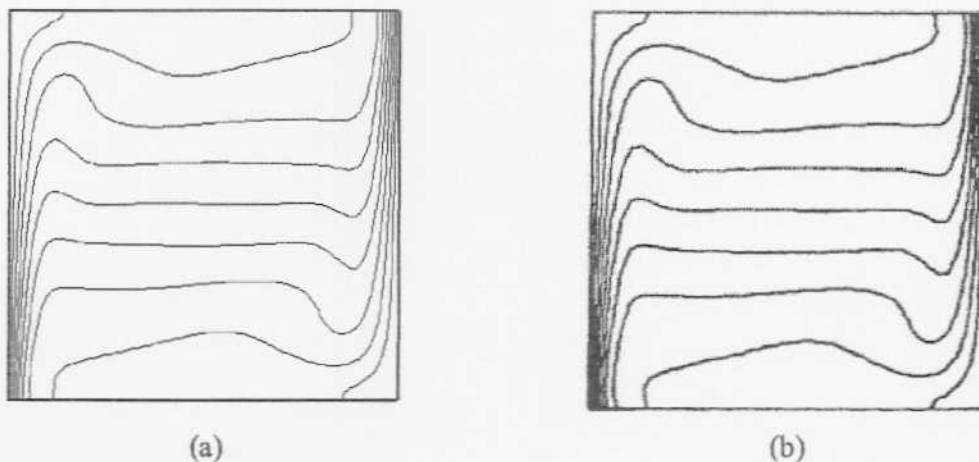


FIG.5.2.22– Resultado das isolinhas de temperatura para  $Ra=10^6$ , usando 40x40 pontos de expansão utilizando o fator *fac* igual a 0.4, para o presente trabalho (a) e o de Davis (1983).

Os resultados obtidos para  $Ra$  iguais a  $10^4$ ,  $10^5$  e  $10^6$ , para as isolinhas de função corrente, vorticidade e temperatura, para todos os critérios de distribuição de pontos foram bem precisos quando comparados às referências.

Para finalizar esta seção, as Tabelas 5.2.s-v referem-se aos dados obtidos para Rayleigh iguais a  $10^4$ ,  $10^5$  e  $10^6$ , com variações no fator *fac*, respectivamente para vários pontos de expansão utilizados.

TAB.5.2.s - Dados encontrados para  $Ra=10^4$  (*fac* 0.2)

Pontos de expansão	Parâmetro "c"	Resíduo	Tempo
4x4	0,3394539	7,4402982E-05	0,2s
8x8	0,2719516	2,8186294E-05	2,4s
12x12	0,1863914	7,1066410E-05	18,4s
16x16	0,1419746	7,5962780E-05	64,5s
20x20	0,1529468	3,0173140E-04	246,4s
30x30	7,7551603E-02	9,6921482E-05	2472s
40x40	7,8125067E-02	5,8046848E-05	13176s

**TAB.5.2.t - Dados encontrados para  $Ra=10^5$  (fac 0.4)**

Pontos de expansão	Parâmetro "c"	Resíduo	Tempo
4x4	0,1394539	5,6507573E-02	2,7s
8x8	0,2105699	4,0979168E-04	16,7s
12x12	0,2366894	1,4800503E-04	25s
16x16	0,1791309	1,3492235E-04	90,2s
20x20	0,1442717	8,6396998E-05	289,4s
30x30	9,7215012E-02	5,1678064E-05	2316,8s
40x40	7,3361441E-02	5,3814299E-05	12421s

**TAB.5.2.u - Dados encontrados para  $Ra=10^6$  (fac 0.2)**

Pontos de expansão	Parâmetro "c"	Resíduo	Tempo
4x4	0,848634	2,0306803E-02	2,2s
8x8	0,3626022	1,4650961E-03	9,7s
12x12	0,2485219	2,5341799E-02	96,7s
16x16	0,1892994	2,4068131E-04	357,7s
20x20	0,1529468	2,6181436E-04	477,3s
30x30	7,7551603E-02	2,4707449E-04	4548s
40x40	5,8593798E-02	2,1252182E-04	28240s

**TAB.5.2.v - Dados encontrados para  $Ra=10^6$  (fac 0.4)**

Pontos de expansão	Parâmetro "c"	Resíduo	Tempo
4x4	0,2789077	2,7136851E-04	4,1s
8x8	7,0189983E-02	2,828118	132,5s
12x12	4,7337882E-02	3,463766	1289,5s
16x16	0,1433047	2,3194135E-04	325,4s
20x20	0,1154174	2,6017427E-04	384s
30x30	5,8329009E-02	1,8864035E-04	4004s
40x40	4,4016864E-02	2,9272807E-04	22202s

O valor do parâmetro "c", estimado como o múltiplo da menor distância entre dois pontos de expansão, foi menor com a utilização da variação do fator *fac*. O seu valor foi diminuindo com o aumento de pontos, tirando o caso quando *fac* foi igual a 0.4 para  $Ra=10^6$ .

Aplicando-se esse critério de distribuição de pontos percebeu-se que o tempo computacional para um conjunto grande de pontos foi bem reduzido quando comparados a pontos igualmente espaçados. Para  $Ra=10^5$ , notou-se um tempo maior para a geração dos resultados para  $30 \times 30$  do que para  $40 \times 40$  pontos de expansão, fato também presente para  $Ra=10^6$  com  $f_{ac}$  0.4.

Numa análise geral, de fato o critério que foi apresentado para ambos Rayleigh rendeu dados melhores que para pontos uniformemente distribuídos, tanto para dados qualitativos (velocidades máximas e números de Nusselts) quanto para quantitativos (gráficos das isolinhas de função corrente, vorticidade e temperatura). O parâmetro “c” e o tempo de processamento foram menores. Conclui-se destes fatos que uma distribuição diferenciada dos pontos (um pouco perto dos contornos) é a melhor forma de chegar aos resultados padrões para este problema.

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES

O presente trabalho aplicou um método sem malha, as funções de base radial, para estudar o escoamento em cavidades quadradas. Vários estudos com métodos sem malha e problemas com as mesmas configurações do trabalho em questão foram abordados. Foram usadas formulações e equações bem características para reduzir inconveniências e dificuldades de se trabalhar com as equações governantes. Utilizou-se a formulação função corrente-vorticidade para reduzir as variáveis dos problemas, além de se aplicar adimensionalizações nas variáveis e abordar a equação bi-harmônica como uma solução para os problemas com os valores da vorticidade nos contornos. Com a obtenção dessa nova equação, a estratégia dos centros fantasmas foi implementada para que pudesse obter a sua solução.

O problema da cavidade com tampa deslizante foi abordado para comprovar a eficácia do código computacional, o que pôde ser verificado com os resultados obtidos por Chinchapatnam (2006) e também foi validado com resultados benchmark encontrados por Ghia et al (1982). Resultados positivos para as componentes da velocidade foram encontrados com poucos pontos de expansão. Para a função corrente e vorticidade, o código computacional pôde capturar os resultados da literatura com boa precisão. O primeiro problema que foi apresentado obteve soluções para vários números de Reynolds com vários pontos de expansão igualmente espaçados. Por fim, para uma melhor análise do caso, encontram-se resultados para a função corrente e vorticidade para vários Reynolds e com vários pontos de expansão.

O segundo problema, o da cavidade com convecção natural desenvolvida com o método da função de base radial, foi a principal contribuição deste trabalho, visto que este estudo até então não tinha sido obtido com este método. A validação foi feita com dois resultados encontrados na literatura, resultados obtidos por Vahl Davis (1983) usando o método de diferenças finitas e resultados de Leal et al (1999) obtidos pela Técnica da Transformada

Integral generalizada (GITT), todos os dois benchmark. De início, foram mostrados resultados para a função corrente e vorticidade os quais foram bem compatíveis com a referência comparada. Também foi mostrado resultados para os valores máximos das componentes da velocidade e suas localizações, bem como valores para o número de Nusselt médio, máximo e mínimo.

A fim de encontrar a melhor maneira para distribuir os pontos no domínio, um critério de distribuição de pontos foi utilizado e concluiu-se que pontos não muito próximos dos contornos renderam melhores resultados e ainda observou-se que com um pouco mais de pontos perto dos contornos encontram-se resultados mais satisfatórios que pontos igualmente localizados. Novamente foram utilizados vários pontos de expansão e três números de Rayleigh foram considerados para a análise de convergência.

Para ambos os problemas, foram mostrados os parâmetros de forma das RBFs "c", os resíduos e os tempos computacionais de cada programa.

O presente trabalho comprovou a robustez e eficácia dos métodos sem malha, sua praticidade da não utilização de malhas que poderiam ter difíceis implementações dependendo da geometria.

A fim de melhorar os resultados encontrados, propõem-se como trabalhos futuros a utilização de malhas adaptativas, o que irá acomodar pontos em regiões de grandes recirculações; novas expressões para o cálculo do parâmetro de forma "c" podem ser implementadas, visto que este parâmetro tem grande influência na solução; também a automatização da escolha da melhor distribuição de pontos (*fac*) será muito importante considerando que bons resultados foram encontrados com a utilização deste critério. O caso transiente de ambos os problemas poderá ser estudado, onde uma investigação a respeito do parâmetro "c" e do fator *fac* seria feita a fim de avaliar sua influência e variação com o tempo.

Estendendo-se o trabalho em questão, estudos de problemas de eletromagnetohidrodinâmica (EMHD), ou seja, escoamentos sujeitos à convecção natural ou forçada na presença de campos elétricos e/ou magnéticos através do método de função de base radial aplicado às equações que regem o fenômeno EMHD serão feitos na continuidade desta dissertação.

## CAPÍTULO 7

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDERSON, D. A., TANNEHILL, J.C., PLETCHER, R. H. **Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer**. Hemisphere, 1984.
- BIBLIOTECA IMSL. **Fortran Subroutines for Mathematical Applications**. Volumes 1 and 2, 1997.
- BOTELLA, O., PEYRET, R. **Benchmark spectral results on the lid-driven**. *Computers & Fluids*, pp. 421-433, 1998.
- BRAINERD, W., GOLDBERG, C. ADAMS, J. **Programmers Guide to Fortran 90**. 2 ed., Springer-Verlag, 1995.
- BRUNEAU, C., SAAD, M. **The 2D lid-driven cavity problem revisited**. *Computers & Fluids*, pp.326-348, 2006.
- BUHMANN, M. D. **Radial Basis Functions: Theory and Implementations**. Cambridge University, 2004.
- CHANTASIRIWAN, S. **Solutions to harmonic and biharmonic problems with discontinuous boundary conditions by collocation methods using multiquadrics as basis functions**. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2006.
- CHEN, C. S. **Meshless Methods for Scientific Computation**. Department of Mathematical Sciences, 2006.
- CHEN, W., HON, Y.C. **Boundary knot method for 2D and 3D Helmholtz and convection-diffusion problems under complicated geometry**. *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 2001.
- CHEN, W., TANAKA, M. **A meshless, integration-free, and boundary-only RBF technique**. *Computers and Mathematics with Applications*, 43, 379-391, 2002.
- CHEN, W., TANAKA, M. **New advances in dual reciprocity and boundary-only RBF methods** BECT Proceeding , Vol. 10, July 2000.
- CHEN, W., TANAKA, M. **Relationship between boundary integral equation and radial basis function**. JASCOME 57th BEM Conference, 2000.

- CHENG, C., CHEN, C. **Buoyancy-induced periodic flow and heat transfer in lid-driven cavities with different cross-sectional shapes.** *International Communications in Heat and Mass Transfer*, pp. 483–490, 2005.
- CHENG, M., HUNG, K. C. **Vortex structure of steady flow in a rectangular cavity.** *Computers & Fluids*, pp. 1046–1062, 2006.
- CHINCHAPATNAM, P. P., DJIDJELI, K., NAIR, P. B. **Meshless RBF Collocation for Steady Incompressible Viscous Flows.** 36th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit, 2006.
- CHUDANOV, V. V., PORKOV, A. G., CHURBANOV, A. G., VABISHCHEVICH, P. N., MAKAROV, M. M. **Operator-splitting schemes for the stream function-vorticity formulation.** *Computers & Fluids*, pp. 771–786, 1995.
- COLAÇO, M. J., ORLANDE H. R. B., ROBERTY, N. C., ALVES, C., LEITÃO, V. **On The Solution of Difusion-Convection Problems by Means of RBF Approximations.** *Proceedings of the 11th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering - ENCIT 2006*
- DAILEY, L. D., PLETCHER, R. H. **Evaluation of multigrid acceleration for preconditioned time-accurate navier-stokes algorithms.** *Computers & Fluids*, pp. 791–811, 1996.
- DAVIS, G. V. **Natural convection of air in a square cavity: A benchmark numerical solution.** *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 3, pp. 249–264 (1983).
- GHIA, U., GHIA, K. N., SHIN, C. T. **High-resolutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method.** *Journal of Computational Physics*, Vol. 48, pp. 387–411 (1982).
- GÜRCAN, F. **Streamline topologies near a stationary wall of Stokes flow in a cavity.** *Applied Mathematics and Computation*, pp. 329–345, 2005.
- HARDY, R. L. **Multiquadric Equations of Topography and Other Irregular Surfaces.** *Journal of Geophysics Res.*, Vol. 176, pp. 1905–1915 (1971).
- KANSA, E. J. **Motivation for using radial basis functions to solve PDEs.** Lawrence Livermore National Laboratory and Embry-Riddle Aeronautical University, August 24, 1999.

- KANSA, E. J. **Multiquadrics – A Scattered Data Approximation Scheme with Applications to Computational Fluid Dynamics – II: Solutions to Parabolic, Hyperbolic and Elliptic Partial Differential Equations.** *Comput. Math. Applic.*, Vol. 19, pp. 149-161 (1990).
- LAVAGETTO, F., POCKAJ, R., COSTA, M. **Smooth surface interpolation and texture adaptation for MPEG-4 compliant calibration of 3D head models.** *Image and Vision Computing* 18 (2000) 345–353
- LEAL, M. A., MACHADO, H. A., COTTA, R. M. **Integral transform solutions of transiente natural convection in enclosures with variable fluid properties.** *International Journal of Heat and Mass Transfer* 43, 3977-3990 (2000).
- LEAL, M. A., PÉREZ-GUERRERO, J. S., COTTA, R. M. **Natural convection inside two-dimensional cavities: The integral transform method.** *Commun. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 15, pp. 113-125 (1999).
- LEONARD, B. P. **A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation.** *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 19:59-98, 1979.
- MERA, N.S. **The method of fundamental solutions for the backward heat conduction problem.** *Inverse Problems in Science and Engineering*, Vol. 13, No 1, pp 13, 1, 79-98, 2005.
- PATANKAR, S. V., SPALDING, D. B. **Heat and Mass Transfer in Boundary Layers.** Intertext, London, 2<sup>nd</sup> edition, 1970.
- PENG, Y., SHIAU, Y., HWANG, R. R. **Transition in a 2-D lid-driven cavity flow.** *Computers & Fluids*, pp. 337-352, 2003.
- PERRON, S., BOIVIN, S., HÉRARD, J. **A finite volume method to solve the 3D Navier–Stokes equations on unstructured collocated meshes.** *Computers & Fluids*, pp. 1305–1333, 2004.
- PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., FLANNERY, B. P. **Numerical Recipes in Fortran 77**, 1999.
- RAITHBY, G. D., TORRANCE, K. E. **Upstream-weighted differencing schemes and their application to elliptic problems involving fluid flow.** *Computers & Fluids*, 2:191-206, 1974.

- RAMACHANDRAN, P. A. **Method of Fundamental Solutions: Singular Value Decomposition Analysis**. Communications in numerical methods in engineering, pp. 789-801, 2002.
- SARLER, B., KUHN, G. **Primitive variable dual reciprocity boundary element method solution of incompressible Navier–Stokes equations**. Engineering Analysis with Boundary Elements, pp. 443–455, 1999.
- SCOTT, A. S. **Adaptive Radial Basis Function Methods for Time Dependent Partial Differential Equations**. Applied Numerical Mathematics, 2004.
- ZUNIC, Z., HRIBERSEK, M., SKERGET, L., RAVNIK, J. **3-D boundary element–finite element method for velocity–vorticity formulation of the Navier–Stokes equations**. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2006.
- WAN, D. C., PATNAIK, B. S. V., WEI, G. W. **Discrete Singular Convolution–Finite Subdomain Method for the Solution of Incompressible Viscous Flows**. Journal of Computational Physics, pp. 229–255, 2002.
- WU, X., WANG, M. Y., XIA, Q. **Implicit Fitting and Smoothing Using Radial Basis Functions with Partition of Unity**. Department of Automation and Computer-Aided Engineering, 2005.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)