



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA E EXPERIMENTAL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

## PROCESSOS DIFUSIVOS GENERALIZADOS

**Pedro Carlos de Assis Júnior**

Orientador: **Prof. Dr. Luciano Rodrigues da Silva**

Co-orientador: **Prof. Dr. Ervin Kaminski Lenzi**

Tese de doutorado apresentada ao Departamento de Física Teórica e Experimental da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial à obtenção do grau de **DOUTOR** em **FÍSICA**.

Natal, 03 Novembro de 2006

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

---

**Para Pessoas Especiais:**

---

Minha Filha  
**Laryssa Eduarda da Silva Carlos**  
Em Memória do Meu Pai  
**Pedro Carlos de Assis**

# Agradecimentos

- Ao meu Deus criador por ter me permitido esta graça.
- Ao prof. Luciano Rodrigues da Silva, pela orientação dedicada e competente, além do excelente convívio para com seus estudantes.
- Ao prof. Ervin Kaminski Lenzi, pela valiosa colaboração.
- Ao prof. Paulo Cavalcante da Silva, pela inestimável colaboração.
- Ao Prof. Artur da Silva Carriço, pela motivação e aprendizado.
- A todos os meus colegas do grupo de pós-graduação, pela amizade e companheirismo nesta jornada.
- Em especial a minha mãe por ter me proporcionado a oportunidade de estudar.
- A minha esposa Christianne pelo apoio incondicional.
- A todos os meus irmãos, e aqueles que fazem parte da minha família pelo apoio moral.
- A todos os professores, aos funcionários e aqueles que de alguma forma colaboraram para obtenção desse trabalho.
- Ao departamento de física da Universidade Federal do Rio Grande do Norte.
- A CAPES pelo apoio financeiro.

# Abstract

We investigate several diffusion equations which extend the usual one by considering the presence of nonlinear terms or a memory effect on the diffusive term. We also considered a spatial time dependent diffusion coefficient. For these equations we have obtained a new classes of solutions and studied the connection of them with the anomalous diffusion process. We start by considering a nonlinear diffusion equation with a spatial time dependent diffusion coefficient. The solutions obtained for this case generalize the usual one and can be expressed in terms of the  $q$ -exponential and  $q$ -logarithm functions present in the generalized thermostatistics context (Tsallis formalism). After, a nonlinear external force is considered. For this case the solutions can be also expressed in terms of the  $q$ -exponential and  $q$ -logarithm functions. However, by a suitable choice of the nonlinear external force, we may have an exponential behavior, suggesting a connection with standard thermostatistics. This fact reveals that these solutions may present an anomalous relaxation process and then, reach an equilibrium state of the kind Boltzmann-Gibbs. Next, we investigate a nonmarkovian linear diffusion equation that presents a kernel leading to the anomalous diffusive process. Particularly, our first choice leads to both a the usual behavior and anomalous behavior obtained through a fractional-derivative equation. The results obtained, within this context, correspond to a change in the waiting-time distribution for jumps in the formalism of random walks. These modifications had direct influence in the solutions, that turned out to be expressed in terms of the Mittag-Leffler or H of Fox functions. In this way, the second moment associated to these distributions led to an anomalous spread of the distribution, in contrast to the usual situation where one finds a linear increase with time.

# Resumo

Investigamos varias equações de difusão que estende o caso usual quando consideramos a presença de termos não lineares ou efeitos de memória no termo difusivo. Também consideramos um coeficiente de difusão com dependência espacial e temporal. Para estas equações obtemos uma nova classe de soluções e estudamos a conexão delas com o processo difusivo anômalo. Inicialmente, é incorporado um coeficiente de difusão com dependência espacial e temporal, numa equação de difusão não linear. A solução desta equação estende a solução usual e pode ser expressa em termos das funções,  $q$ -exponenciais e  $q$ -logarítmicas, presentes no contexto da termoestatística generalizada (formalismo de Tsallis). Em seguida, consideramos uma força externa não linear. Para este caso as soluções também podem ser expressas em termos das funções  $q$ -exponenciais e  $q$ -logarítmicas. Contudo, fazendo uma escolha adequada da força externa não linear, podemos ter um comportamento exponencial, sugerindo uma conexão com a termoestatística usual. Este fato, também nos revela que estas soluções podem sofrer uma relaxação anômala e atingir um estado de equilíbrio do tipo *Boltzmann-Gibbs*. Em seguida, investigamos uma equação de difusão não markoviana linear que possui um *kernel* que leva a dinâmica do processo difusivo. Particularmente, a nossa escolha na primeira etapa mistura tanto o comportamento usual quanto o comportamento obtido através de uma equação que emprega derivadas fracionárias. Os resultados obtidos, neste contexto, pensando no formalismo de caminhantes aleatórios, correspondem a uma mudança na distribuição do tempo de espera entre saltos. Tais modificações influenciaram diretamente as soluções que passaram a ser expressas em termos das funções de *Mittag-Leffler* ou *H de Fox*. Neste sentido, o segundo momento associado a estas distribuições, nos levou a obter um alargamento da distribuição de uma forma anômala, diferente do caso usual que é linear com o tempo.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Processos Difusivos Normais e Anômalos e a Equação de Fokker-Planck</b>	<b>7</b>
2.1	Difusão Normal e Difusão Anômala . . . . .	7
2.2	A difusão Normal, Equação de Langevin e Equação de Fokker-Planck . . .	10
2.3	Equação de Difusão não linear . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Equação de Difusão não Linear: Solução Exata</b>	<b>19</b>
3.1	Generalização da Lei de Darcy e Equação de Difusão não Linear . . . . .	19
3.2	Equação de Difusão não Linear . . . . .	21
3.2.1	Termo Absorvente $\bar{\alpha} [\rho(x, t)]^\mu$ . . . . .	28
3.3	Conclusões . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Equação de Difusão não Linear: Difusão Anômala</b>	<b>31</b>
4.1	Equação de Fokker-Planck não Linear - Solução Estacionária . . . . .	31
4.2	Equação de Fokker-Planck não Linear - Solução Dinâmica . . . . .	34
4.3	Conclusões . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Equação de Fokker Planck não Markoviana: Solução e Primeira Passagem no Tempo da Distribuição</b>	<b>40</b>
5.1	Equação de Fokker Planck não Markoviana . . . . .	40
5.2	Soluções e Distribuição de Tempo da Primeira Passagem . . . . .	42
5.3	Conclusões . . . . .	48
<b>6</b>	<b>Conclusões Gerais e Perspectivas</b>	<b>49</b>

<b>A</b>	<b>Generalização do Conceito de Entropia Proposta por Constantino Tsallis (1988)</b>	<b>51</b>
	A.0.1 Origem da Entropia . . . . .	52
	A.0.2 Abordagem Axiomática da Entropia . . . . .	53
	A.0.3 Proposta de Generalização da Entropia . . . . .	53
<b>B</b>	<b>Obtenção da Distribuição <math>\rho(r, s)</math></b>	<b>57</b>
	B.0.4 Equação de Fokker-Planck não Markoviana com Termo de Memória	57



# Lista de Figuras

2.1	Comportamento da velocidade quadrática média para tempos longos, Eq.(2.11), no regime estacionário. . . . .	13
2.2	Comportamento do desvio quadrático médio para tempos longos, Eq.(2.13). . . . .	14
2.3	O gráfico mostra a evolução temporal da distribuição de probabilidades no regime unidimensional, Eq.(2.31). Para tempos pequenos (próximos de zero) a distribuição representa uma função delta centrada na origem ( $x = 0$ ), e com o passar do tempo, a distribuição evolui como uma Guassiana de largura variável. . . . .	16
3.1	Comportamento de $\Phi(t)\rho(x,t)$ versus $x/\Phi(t)$ para valores típicos de $\theta$ , $\nu$ e $n$ para $\alpha(t) = 0$ . Para $\nu = 1$ e $\theta = n = 0$ retornamos à distribuição Gaussiana. Dependendo dos valores dos parâmetros $\nu$ , $\theta$ e $n$ a distribuição poder tornar-se compacta ou alongada	24
3.2	Curvas de $\langle x^2 \rangle \propto t^{2/(1+\xi)}$ tendo comportamento: superdifusivo para $\xi < 1$ ; difusivo normal para $\xi = 1$ e subdifusivo para $\xi > 1$ . . . . .	25
4.1	Comportamento de $\rho(r,t)$ versus $r$ , como ilustração da Eq.(4.1) para valores típicos de $\nu$ e $t$ quando consideramos, por simplicidade, $\mathcal{D} = 1$ , $\gamma = 1$ , $\eta = 0$ , $\mathcal{N} = 1$ , $\mathcal{F}_1(r) = 0$ e $\mathcal{F}_2(r) = -kr$ com $k = 1$ . Na figura (a), nos ilustramos o caso caracterizado por $\nu = 0,9$ e na figura (b) o caso $\nu = 1.2$ . Note que em ambos os casos das soluções para tempos longos obtemos o regime estacionário dado pela Eq.(4.7). . . . .	34
4.2	Comportamento do segundo momento $\langle r^2 \rangle \sim t^{2/\xi-1}$ . Para $\xi > 3$ , $\xi = 3$ ou $\xi < 3$ nos leva aos comportamentos subdifusivo, normal ou superdifusivo. . . . .	36
4.3	Comportamento de $\mathcal{P}(z)$ versus $z$ , como ilustração da Eq.(4.18) para valores típicos de $\theta$ , $\nu$ , $\eta$ e $\gamma$ , quando levamos em conta, por simplicidade, $\mathcal{K} = 1$ , $\mathcal{N} = 1$ e $\mathcal{D} = 1$ . Note que dependendo da escolha desses parâmetros as distribuições podem ter um comportamento compacto ou alongado. . . . .	37

4.4	Comportamento de $\rho(r, t)$ versus $r$ , como ilustrado agora pela Eq.(4.19), que evolui no tempo para $\theta = 1$ , $\nu = 1/2$ , $\eta = -1$ e $\gamma = 1/3$ , por simplicidade, quando levamos em conta $\mathcal{K} = 1$ , $\mathcal{N} = 1$ , $\Phi(0) = 0$ , $k(t) = 1$ e $\mathcal{D} = 1$ . . . . .	38
5.1	Comportamento $\mathcal{F}(\xi, t)$ versus $t$ para valores típicos de $\beta$ e $\mathcal{K}_\nu$ quando consideramos, por simplicidade, $\xi = 1, 0$ , $a = 3, 0$ , $N = 1, 0$ , $\theta = 2, 0$ , $\mathcal{K}_0 = 3, 0$ , $\tilde{\rho}(r) = r^{1+\beta+\mathcal{K}_\nu/\mathcal{D}+N}(\delta-\xi)$ e $\mathcal{D} = 1, 0$ . . . . .	45
5.2	Comportamento $\mathcal{F}(\xi, t)$ versus $t$ para valores típicos de $w$ , $N$ , e $\mathcal{K}_\nu$ quando consideramos, por simplicidade, $\xi = 1, 0$ , $\beta = 1, 0$ , $\tilde{\rho}(r) = r^{1+\beta+\mathcal{K}_\nu/\mathcal{D}+N}(\delta-\xi)$ , e $\mathcal{D} = 1, 0$ . . . . .	47

# Capítulo 1

## Introdução

A difusão é um fenômeno muito comum na natureza. Na nossa vida cotidiana a toda hora estamos nos deparando com este fenômeno. Na dissolução do açúcar no café, na abertura de um frasco de perfume, no espalhamento da fumaça de cigarro, na evolução de uma mistura ou reação química, enfim em inúmeros exemplos do nosso dia a dia. Trata-se (em geral) de sistemas que estão fora do equilíbrio mas que seguem sempre relaxando na direção do equilíbrio (maximização da entropia).

Em um processo de difusão temos um conjunto de elementos que se movem randomicamente no nível microscópico e como resultado deste movimento errático o conjunto se propaga. Surpreendentemente, apesar do movimento errático no nível microscópico o sistema apresenta uma regularidade no nível macroscópico. Isto chamamos de difusão.

O estudo da difusão fez avançar a compreensão sobre os fenômenos estocásticos. Podemos dizer que este avanço, em muito, se deve aos trabalho do botânico *Robert Brown* em 1827 [1] sobre o movimento de grãos de pólen imersos num líquido que passou a ser chamado “movimento browniano” e que *Einstein*, em 1905, explicou de forma matemática. O estudo de *Einstein* [2] contribuiu para entender o movimento das partículas de um fluido, bem como para dar suporte a teoria atômica, até então, em discussão. *Perrin* [3] conseguiu confirmar experimentalmente as previsões de *Einstein*.

Uma das grandezas que pode exprimir o tipo de movimento ou propagação de partículas imersas em um fluido é o deslocamento médio quadrático. Na experiência de *Brown* ou possivelmente no movimento das partículas da sala onde agora está o leitor, este deslocamento é proporcional ao tempo. Dizemos neste caso que estamos diante da

difusão usual. Pode acontecer que o meio de propagação tenha obstáculos, apresente fontes, sumidouros, presença de campos externos, etc. Isto leva a novos tipos de difusão caracterizados por um segundo momento que depende de uma forma não linear com o tempo, ou seja,  $\langle r^2 \rangle \sim t^\alpha$  ( $\alpha < 1$ ,  $\alpha = 1$  e  $\alpha > 1$  correspondendo respectivamente aos casos subdifusivo, normal e superdifusivo). Neste caso, a difusão é chamada de anômala.

A compreensão da difusão anômala tem atraído a atenção de vários pesquisadores devido ao grande número de situações ligadas à física, à engenharia, à biologia, etc. De fato, ela está presente em várias situações tais como difusão em meios fractais [4], na relaxação ao equilíbrio em sistemas com memória temporal longa [5, 6], no transporte através de um meio poroso [7], nas flutuações de sistemas financeiros [8], nas batidas do coração de um indivíduo [9], em semicondutores amorfos [10], em micelas dissolvidas em água salgada [11]. Nas situações em que temos uma difusão anômala (por exemplo, nas mencionadas acima), podemos ter o segundo momento finito [12] ou não [12, 13]. A difusão anômala com o segundo momento,  $\langle x^2 \rangle$ , finito geralmente tem como característica  $\langle x^2 \rangle \sim t^\alpha$  ( $\alpha < 1$  e  $\alpha > 1$  correspondendo a subdifusão e superdifusão, respectivamente). Neste contexto, algumas equações representativas na descrição deste fenômeno são as equações de difusão que empregam derivadas fracionárias temporais [5, 14],

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \rho(r, t) = \mathcal{D}_\gamma \nabla^2 \rho(r, t) \quad (1.1)$$

com  $0 < \gamma < 1$ , a equação de meios porosos (que é não linear) [9]

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(r, t) = \mathcal{D}_\nu \nabla^2 [\rho(r, t)]^\nu \quad (1.2)$$

e a equação usual de difusão com coeficientes dependentes de variáveis de posição ou do tempo [15]

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(r, t) = \nabla \cdot [\mathcal{D}(r, t) \nabla \rho(r, t)] \quad (1.3)$$

Estas equações têm sido aplicadas em várias situações de interesse físico, tais como, na relaxação ao equilíbrio em sistemas com memória temporal longa (por exemplo, cadeias de polímeros e membranas) [5], na descrição de transporte anômalo em sistemas desordenados [16], para modelar processos dinâmicos não markovianos em proteínas [17], lei de *Richardson* [18] e a lei de *Kolmogorov* [19] (estas duas leis aplicam-se ao estudo da turbulência), para modelar sistemas hidrológicos [20], transporte axial de materiais

granulares [21], transporte de substância em um solvente de um vaso para outro através de uma membrana [22] e na translocação assimétrica do DNA [23]. Por sua vez, a difusão anômala quando não possui o segundo momento finito é caracterizada pelas distribuições do tipo Lèvy [13]. Dentro deste contexto, temos a equação de difusão com derivadas fracionárias na variável espacial [13, 14] cuja solução é dada em termos das distribuições de Lèvy [13, 14] que satisfazem o teorema de **Lèvy-Gnedenko**, que é, uma generalização do teorema central do limite.

De um ponto de vista formal, a partir do exposto acima, vemos que a difusão anômala pode ser investigada por meio de diferentes tipos de equações diferenciais parciais. Assim, o estudo desses tipos de equações diferenciais, suas extensões e as situações relacionadas a elas são importantes, pois possibilitam a investigação de novos cenários. Além de termos associado a elas um contexto termo-estatístico mais geral utilizando formalismos da mecânica estatística aplicada a sistemas não extensivos. Neste sentido, pretendemos dedicar nossos esforços ao estudo dessas equações na presença de uma força externa. Assim, focalizaremos nossa atenção em equações de difusão que estão contidas na equação abaixo:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(r, t) = \int_0^t d\bar{t}\mathcal{K}(t - \bar{t})\mathcal{L}\{\rho(r, t)\} . \quad (1.4)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\rho(r, t)\} &= \frac{1}{r^{\mathcal{N}-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^{\mathcal{N}-1} \mathcal{D}(r, t, \rho, \partial_r \rho) \frac{\partial}{\partial r} [\rho(r, t)]^\nu \right\} \\ &- \frac{1}{r^{\mathcal{N}-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^{\mathcal{N}-1} \mathcal{F}(r, t, \rho) \rho(r, t) \right] + \alpha(r, t) [\rho(r, t)]^\mu \end{aligned} \quad (1.5)$$

onde  $\mathcal{D}(r, t, \rho, \partial_r \rho)$  é o coeficiente de difusão,  $\mathcal{F}(r, \rho)$  é a força externa,  $\mathcal{K}(t)$  é o núcleo da integral o qual tem a função de incorporar possíveis efeitos de não localidade manifestado pelo sistema em análise e o último termo representa um termo de fonte ou sumidouro relacionado a um processo de reação e difusão. Em particular, a presença de termos relacionados a processos de reação e difusão como o presente na equação acima tem sido estudado em várias situações. Por exemplo, na coagulação de uma determinada espécie, processos catalíticos em sistemas regulares, heterogêneos, ou desordenados [25], em reações de primeira ordem irreversíveis e no transporte de uma substância cuja taxa de remoção é [26]. Termos desta natureza também podem ser relevantes ao investigarmos o transporte de uma substância radioativa ao longo de um meio poroso, no fluxo de calor

envolvendo produção de calor [27] e no transporte de soluto por amostras absorventes. Cabe mencionar aqui, que a equação acima tem o mérito de ter como caso particular muitas situações presentes na literatura e recuperar a equação de difusão usual.

Nesta tese, começaremos, no Cap.2, introduzindo a diferença entre os processos de difusão normal e anômala. Na difusão normal (usual) o sistema deve apresentar uma dependência linear no crescimento temporal da variância, ou seja,  $\langle x^2(t) \rangle \propto t$ . Como exemplo, temos o movimento browniano, descoberto em 1827, por *Robert Brown* [1] e explicado por *Einstein* (1905)[2]. Caso o crescimento da variância seja não linear no decorrer do tempo temos que a difusão é do tipo anômala. Um marco no estudo da difusão anômala é o tratado de *Richardson* [28] sobre difusão turbulenta. Particularmente, a difusão anômala, conforme mencionamos anteriormente pode ter segundo momento finito e neste caso ele essencialmente é do tipo  $\langle x^2 \rangle \sim t^\alpha$ . Ressaltando que existem situações nas quais o mesmo não é finito, sendo tais situações caracterizadas pelas distribuições de Lévy, que satisfazem o teorema de **Levy-Gnedenko**, que corresponde a uma generalização do teorema do limite central. No capítulo seguinte, Cap.3, analisaremos a equação de *Fokker Planck* não linear para o caso  $\mathcal{N}$ -dimensional, levando em conta a presença de termos referentes a forças externas e de absorção. Também consideraremos um coeficiente de difusão que apresenta dependência espacial e temporal. A presença da não linearidade nesta equação será devido, uma generalização da *lei de Darcy* e da presença do termo absorvente. Particularmente, obteremos uma nova classe de soluções exatas e investigamos os efeitos não lineares produzidos nestas soluções por esses termos. Os resultados encontrados são expressos em termos das funções  $q$ -exponenciais e  $q$ -logarítmicas presentes no formalismo da mecânica estatística não extensiva proposta por *Constantino Tsallis*. No Cap.4, a solução da equação de difusão não linear do tipo  $\partial_t \rho = r^{1-\mathcal{N}} \mathcal{D} \partial_r \{ r^{\mathcal{N}-1-\theta} \rho^\gamma \partial_r [r^{-\eta} \rho^\nu] \} - r^{1-\mathcal{N}} \partial_r [r^{\mathcal{N}-1} \mathcal{F} \rho]$  é investigada quando consideramos a presença de uma força externa  $\mathcal{F}$ , a qual exhibe uma dependência explícita da distribuição  $\rho$ . Primeiramente, começamos investigando o caso estacionário e em seguida analisamos o caso dinâmico. A solução estacionária é obtida quando consideramos uma força externa do tipo  $\mathcal{F}(r, \rho) = \mathcal{F}_1(r) + \mathcal{F}_2(r)[\rho(r)]^{\nu+\gamma-1}$ , e o resultado encontrado é relacionado com a distribuição que emerge da estatística de *Constantino Tsallis* ou da estatística de *Boltzmann-Gibbs*. A solução dinâmica é investigada quando consideramos uma força externa do tipo  $\mathcal{F}(r, t, \rho) = -k(t)r + \mathcal{K}/r^{1+\theta+\eta}[\rho(r, t)]^{\gamma+\nu-1}$ , e relacionamos a

uma distribuição de Lèvy no limite assintótico. No Cap.5, investigamos a solução e a distribuição em primeira passagem no tempo para processos governados por difusão anômalas e pela equação de *Fokker Planck não Markoviana*. Em nossa análise, também consideramos a presença dos termos de força externa e termos absorventes e analisaremos a distribuição de tempo da primeira passagem. No Cap.6 são apresentadas as nossas conclusões e perspectivas finais.

# Capítulo 2

## Processos Difusivos Normais e Anômalos e a Equação de Fokker-Planck

Neste capítulo, começaremos introduzindo os conceitos de difusão do tipo normal e anômala. Na difusão normal (ou difusão usual) o sistema deve apresentar uma dependência linear no crescimento temporal da variância, ou seja,  $\langle x^2(t) \rangle \propto t^1$ . Como exemplo, temos o movimento browniano, descoberto por *Robert Brown* e explicado por *Einstein*. Quando o crescimento da variância é não linear no decorrer do tempo a difusão é do tipo anômala. Um marco no estudo da difusão anômala é o tratado de *Richardson* [28] sobre difusão turbulenta (1926). Na seção 2.2, mostraremos como obter a equação de *Fokker Planck* a partir da equação de *Langevin*. Na seção 2.3, mostraremos como obter a equação de *Fokker Planck* não linear na ausência de força externa e termo absorvente.

### 2.1 Difusão Normal e Difusão Anômala

O processo de difusão que surge em nosso trabalho é do tipo anômala, entretanto, para que o leitor possa situar-se melhor, iremos comentar um pouco mais sobre os processos difusivos, partindo da difusão normal (usual).

O fenômeno da difusão é muito comum na natureza e, em geral, ocorre quando um



sistema encaminha-se para o estado de equilíbrio. Este fenômeno possui uma frequência relativamente alta em processos físicos, químicos e biológicos. No momento em que est/’a ocorrendo um processo difusivo, temos um conjunto de elementos que poderão alterar-se constantemente, por exemplo, energia, momento linear, átomos, moléculas, etc.

Pensando num sistema de partículas que se difundem num meio isotrópico, notamos um comportamento altamente irregular (ao nível microscópico) devido às forças externas e às advindas das outras partículas (interação coulombiana). Esta difusão de partículas pode ser estudada, em boa aproximação, como um fenômeno de natureza aleatória. Por outro lado, quando observamos macroscopicamente este comportamento aleatório dos elementos envolvidos no processo difusivo, notamos que tudo isto segue uma certa regularidade e logo obedece à certas leis dinâmicas bem definidas.

A natureza aleatória das partículas, no nível macroscópico, foi observada inicialmente pelo botânico inglês *Robert Brown* [1], recebendo assim o nome de “*movimento browniano*” (MB). Algum tempo depois, o MB, foi explicado por Albert Einstein em sua tese de doutorado (1905). Ele publicou uma explicação com o título “*concerning the motion, as required by the molecular-kinetic theory of heat, of particles suspended in liquids at rest*”[2] (relativo ao movimento, como requerido pela teoria cinética-molecular do calor, de partículas suspensas em líquidos em repouso).

As explicações de *Einstein*, para o MB, desencadeou numa série de novos trabalhos de natureza estocástica. Podemos citar diversos pesquisadores que muito já contribuíram nesta área do conhecimento após a tese de *Einstein*. Estes são apenas alguns deles: *Langevin* [30], *Fokker* [31], *Burger* [32], *Ornstein* [33], *Planck* [34] *Kac* [35] e muitos outros.

O tratamento dado por *Eisntein* também forneceu uma boa estimativa do número de Avogadro, a qual foi verificada, com grande precisão, nos experimentos efetuados por *Jean Perrin* [3]. Um ano após as explicações de *Eisntein*, a mesma explicação foi desenvolvida independentemente por *Smoluchowski* [36].

No início do século XX, os estudos do MB constituíram um elemento importante para o estabelecimento da matéria em contraposição às visões energeticistas dominantes da Europa. Esses e muitos outros fenômenos que possuem tal comportamento, isto é, um movimento altamente aleatório em nível microscópico com uma regularidade macroscópica, podem ser descritos, por exemplo, em termos de equações de *Langevin* e equações de difusão. Segundo *Langevin* [30], o MB de uma partícula pode ser entendido

com base numa equação diferencial estocástica.

Quando estudamos um processo difusivo e observamos o caráter aleatório das grandezas relevantes desse sistema, notamos que a descrição matemática da difusão baseia-se num conjunto de equações denominadas *equações de Langevin*. Alternativamente, podemos focar o comportamento médio das grandezas relevantes através do estudo de suas probabilidades. A equação que descreve a evolução das probabilidades é a *equação de Fokker Planck* [31].

No contexto da difusão anômala, sua característica fundamental é o crescimento não linear da variância no decorrer do tempo  $\langle (\Delta x)^2 \rangle \propto t^\eta$ , ( $\eta \neq 1$ ). Um marco no estudo da difusão anômala é o tratado de *Richardson* sobre difusão turbulenta, de 1926 [28]. A difusão anômala tem sido fundamental na análise de uma grande classe de sistemas, tais como: difusão em plasma [37], difusão em fluidos turbulentos [38, 39], transporte de fluidos em meios porosos [40], difusão em fractal [41], difusão anômala em superfícies líquidas [42] e análise de histogramas das batidas do coração [43], entre outros diversos sistemas físicos existentes na natureza.

Na descrição do comportamento anômalo, o crescimento da variância pode ser do tipo logarítmica ou apresentar outro padrão, como lei de potência  $\langle (\Delta x)^2 \rangle \propto t^\eta$ , por exemplo. Sob essa classificação, quando  $\eta > 1$ , temos um processo superdifusivo, quando  $\eta = 1$  descreve uma difusão normal e quando  $\eta < 1$  um processo subdifusivo.

Citaremos alguns exemplos da difusão anômala em regime superdifusivo ( $\eta > 1$ ), temos: micelas CTAB dissolvidas em águas salgadas [44, 45], dinâmica caótica devido a vãos e aprisionamentos [46, 47], difusão anômala em fluidos girantes bidimensionais [48, 49], em movimentos bacterianos [50], em transporte em plasma turbulento [51], além da difusão turbulenta de *Richardson*.

Como exemplo da difusão normal ( $\eta = 1$ ), temos: todos aqueles sistemas físicos que possuem o comportamento da distribuição do tipo Gaussiana. Por exemplo, o movimento Browniano.

Como exemplo da difusão anômala em regime subdifusivo ( $\eta < 1$ ), temos: no transporte de carga em semicondutores amorfos [52, 53], difusometria NMR em percolados [54], transporte em geometrias fractais [55, 56], na dinâmica de uma conta em rede polimérica [57].

Numa difusão anômala, a variância pode não ser finita, por exemplo, a do tipo Lèvy,

embora apresente um índice bem definido que caracteriza o comportamento anômalo. Para descrever a difusão do tipo Lèvy, podemos utilizar uma equação de difusão com derivadas fracionárias [58] cujas soluções são as distribuições de Lèvy. Diferentemente desta, a difusão do tipo correlacionada pode apresentar um segundo momento finito, por exemplo, a descrição do transporte em meios porosos. Para a difusão anômala correlacionada, tem sido aplicada com sucesso uma equação de difusão não linear do tipo *Fokker Planck* [31, 59, 60, 61, 62]. Cada uma dessas situações, podem ser caracterizadas por equações de difusão em um contexto termoestatístico, seja ele descrito pela mecânica estatística extensiva (usual) ou pela mecânica estatística não extensiva.

## 2.2 A difusão Normal, Equação de Langevin e Equação de Fokker-Planck

A hipótese fundamental ou lei mais usada e citada na descrição da difusão é conhecida como *Lei de Fick* [63] da difusão. Esta lei não é única para descrição da difusão. Existe um outro modelo matemático que envolve um coeficiente de transferência de massa [64] e que resulta em correlações desenvolvidas explicitamente em engenharia química e usadas implicitamente na cinética química e em medicina. Contudo, usaremos a *lei de Fick* neste trabalho, até porque ela leva a descrições comuns na física, físico-química e biologia.

Assim, podemos assumir que uma boa parte dos fenômenos de difusão obedecem a esta lei linear:

$$\vec{J} = -D\nabla\rho \tag{2.1}$$

sendo D o coeficiente de difusão, o qual dependerá das propriedades do meio (isotrópico ou anisotrópico),  $\rho(\vec{r}, t)$  é função da posição e do tempo e  $\vec{J}$  a densidade de corrente.

O coeficiente de difusão D indica a velocidade com que a quantidade medida por  $\rho$  difunde-se de regiões de altas concentrações para regiões de baixas concentrações. De outra forma, o sinal negativo combinado com o gradiente na lei de Fick diz que a difusão tende a ocorrer da região de maior densidade para a de menor densidade.

Nos casos onde podemos considerar que a substância difundida não é nem absorvida e nem emitida pelo meio. É válida a equação de continuidade que representa a *lei de*

conservação para esta substância

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (2.2)$$

Combinando as equações acima, Eq.(2.1) e Eq.(2.2), chegaremos a equação de difusão normal

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \nabla^2 \rho \quad (2.3)$$

Contudo, a equação de difusão é modificada se for possível que a substância seja criada (emitida) ou destruída (absorvida). Neste caso, a equação de continuidade é representada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = \delta \quad (2.4)$$

onde  $\delta$  é a densidade da fonte, com  $\delta > 0$  associado à criação e  $\delta < 0$  à absorção de substância, respectivamente. Portanto, a correspondente equação de difusão, não homogênea, é dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \nabla^2 \rho + \delta \quad (2.5)$$

Agora, considere uma partícula de massa  $m$  imersa num líquido, onde a influência do meio sobre o movimento da partícula se apresenta de duas formas: primeiro, a partícula está sujeita a uma força viscosa,  $F = \alpha v$ , no qual  $\alpha$  é o coeficiente de viscosidade do meio; em segundo, uma força de caráter aleatório,  $F_a(t)$ , também conhecida como força de *Langevin*, que é devido ao impacto da partícula com as moléculas do líquido [65]. Vamos também considerar que a partícula está sujeita a uma força externa  $F_e(x)$ .

A equação de movimento, em uma dimensão, é escrita na seguinte forma

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_e(x) - \alpha \frac{dx}{dt} + F_a(t) \quad (2.6)$$

Para os casos em que a massa da partícula é desprezível, a Eq.(2.6) resulta em

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \mathbf{f}(t) \quad (2.7)$$

onde  $f(x) = F_e(x)/\alpha$  e  $\mathbf{f}(t) = F_a(t)/\alpha$ . O ruído  $\mathbf{f}(t)$ , ou força aleatória, é uma variável aleatória dependente do tempo. *Langevin* requereu as seguintes propriedades para esta força:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}(t) \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{f}(t) \rangle \langle \mathbf{f}(t') \rangle &= B \delta(t - t') \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde  $B$  é uma constante e as variáveis  $\langle \mathbf{f}(t) \rangle$  e  $\langle \mathbf{f}(t') \rangle$  em média são nulas e independentes para  $t \neq t'$ . A Eq.(2.7), juntamente com as propriedades da Eq.(2.8), é um exemplo de *equação de Langevin*.

Na ausência de força externa, a Eq.(2.6) torna-se

$$\frac{d}{dt}v = -\gamma v + \xi(t) \quad (2.9)$$

onde  $\gamma = \alpha/m$  e  $\xi = F_a(t)/m$ .

Neste caso, a variável aleatória  $\xi(t)$  deve obedecer às seguintes propriedades.

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= 0 \\ \langle \xi(t) \rangle \langle \xi(t') \rangle &= \Gamma \delta(t - t') \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde  $\Gamma = B/m^2$

É fácil verificar que a variância das velocidades fica dada por:

$$\langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle = \frac{\Gamma}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) \quad (2.11)$$

Para tempos longos obtemos a Eq.(2.12) abaixo. A Fig.(2.1) mostra o comportamento da variância para o regime de tempos longos (regime estacionário)

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\Gamma}{2\gamma} \quad (2.12)$$

O deslocamento quadrático médio, que corresponde a uma grandeza experimentalmente mensurável é dado por

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \frac{\Gamma}{\gamma^2} \left[ t - \frac{2}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) + \frac{1}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) \right] \quad (2.13)$$

para o limite de tempos longos (regime estacionário) ver Fig.(2.2), temos:

$$\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \approx \mathcal{D}t \quad (2.14)$$

que é a conhecida relação de *Einstein-Smoluchowski*. Com este resultado, obtemos a relação entre o coeficiente de difusão e a temperatura.

$$\mathcal{D} = 2k_B T / \alpha \quad (2.15)$$

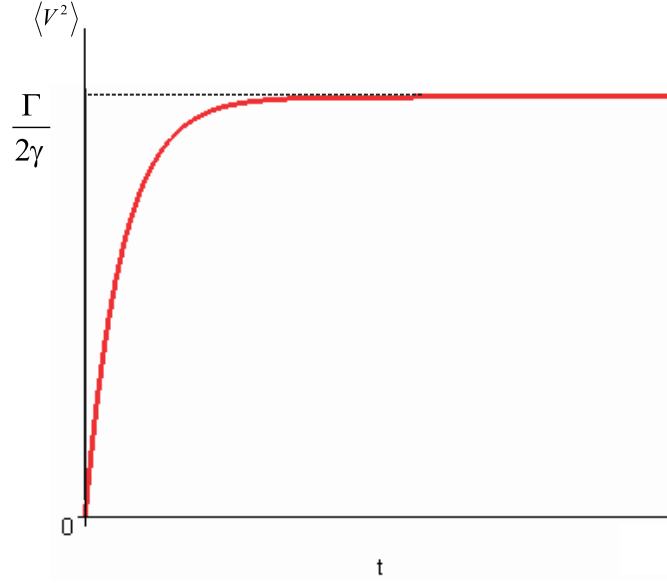


Figura 2.1: Comportamento da velocidade quadrática média para tempos longos, Eq.(2.11), no regime estacionário.

Na natureza, é freqüentemente observado que, para sistemas que apresentam MB, a distribuição de probabilidade que rege este tipo de sistema é uma Gaussiana [66]. Assim, podemos também analisar este sistema em relação às suas probabilidades. Ele pode ser descrito por uma equação de movimento que governa a evolução temporal de uma distribuição de probabilidades - *Equação de Fokker Planck*.

Na obtenção desta equação (*equação de Fokker-Planck*), fazemos uso da equação de *Langevin* (Eq.(2.7)). O que se deseja é encontrar a densidade de probabilidade  $\rho(x_0, x, t)$  entre  $x$  e  $x + dx$ , no instante de tempo  $t$ , com instante inicial  $t = t_0$  em  $x = x_0$ . Iniciamos discretizando a Eq.(2.7). O tempo  $t$  é discretizado em intervalos  $\tau$  e a posição da partícula no instante  $t = n\tau$  por  $x_n$ . Então, a equação de *Langevin* discreta é aproximada por

$$x_{n+1} = x_n + \tau f(x_{n+1}) + \zeta_n \quad (2.16)$$

onde  $\langle \zeta_n \rangle = 0$  e  $\langle \zeta_n \rangle \langle \zeta'_n \rangle = \delta_{nn'}$ .

Seja  $\rho_n = \rho(x_n)$  a distribuição de probabilidade da variável  $x_n$  e  $g_n(k)$  a correspondente função característica dada por

$$g_n(k) = \langle e^{ikx_n} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx_n} \rho_n dx_n \quad (2.17)$$

onde  $g_n(k)$  de uma variável aleatória  $x$  é definida como a transformada de Fourier da

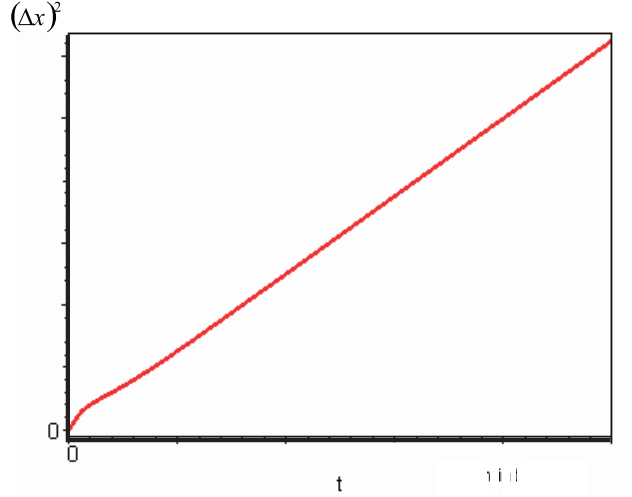


Figura 2.2: Comportamento do desvio quadrático médio para tempos longos, Eq.(2.13).

densidade de probabilidade associada a  $x$ , como mostra a Eq.(2.17). Logo

$$g_{n+1}(k) = \langle e^{ikx_{n+1}} \rangle = \langle e^{ik[x_n + \tau f(x_n) + \zeta_n]} \rangle \quad (2.18)$$

Como  $x_n$  e  $\zeta_n$  são independentes, podemos escrever

$$g_{n+1}(k) = \langle e^{ik[x_n + \tau f(x_n)]} \rangle \langle e^{ik\zeta_n} \rangle \quad (2.19)$$

Agora vamos expandir a função  $g_{n+1}(k)$  em  $\tau$ , desconsiderando os termos de segunda ordem. Então, ficamos

$$\langle e^{ikx_n} e^{\tau f(x_n)} \rangle \approx \langle e^{ikx_n} \rangle + ik\tau \langle e^{ikx_n} f(x_n) \rangle \quad (2.20)$$

e

$$\langle e^{ik\zeta_n} \rangle \approx \langle 1 + ik\zeta_n + \frac{(ik\zeta_n)^2}{2!} \rangle \approx 1 - \frac{1}{2}k^2\tau\Gamma \quad (2.21)$$

Assim, obtemos

$$g_{n+1} \approx g_n(k) + \tau \left( ik \langle f(x_n) e^{ikx_n} \rangle - \frac{1}{2}k^2\Gamma g_n(k) \right) \quad (2.22)$$

Usando as seguintes propriedades:

$$ik \langle f(x) e^{ikx} \rangle = \langle f(x) \frac{d}{dx} e^{ikx} \rangle = - \int e^{ikx} \frac{d}{dx} [f(x) \rho_n(x)] dx \quad (2.23)$$

e

$$-k^2 \langle e^{ikx} \rangle = \left\langle \frac{d^2}{dx^2} e^{ikx} \right\rangle = \int e^{ikx} \frac{d^2}{dx^2} \rho_n(x) dx \quad (2.24)$$

Podemos, agora expressar a Eq.(2.22) na forma

$$\int e^{ikx_{n+1}} \rho_{n+1} dx_{n+1} = \int e^{ikx_n} \rho_n dx_n - \tau \int e^{ikx} \frac{d}{dx_n} [f(x_n) \rho_n] dx_n + \frac{\tau \Gamma}{2} \int e^{ikx} \frac{d^2}{dx^2} \rho_n dx_n \quad (2.25)$$

conseqüentemente

$$\int e^{ikx_n} \left\{ \frac{\rho_{n+1} - \rho_n}{\tau} + \frac{d}{dx_n} [f(x_n) \rho_n] - \frac{\Gamma}{2} \frac{d^2}{dx^2} \rho_n \right\} dx_n = 0 \quad (2.26)$$

Isto implica

$$\frac{\rho_{n+1} - \rho_n}{\tau} = -\frac{d}{dx_n} [f(x_n) \rho_n] + \frac{\Gamma}{2} \frac{d^2}{dx^2} \rho_n \quad (2.27)$$

No limite em que  $\tau \rightarrow 0$  e assumindo  $\rho_n$  como sendo  $\rho(x, t)$  e  $f(x_n)$  como  $f(x, t)$ , obtemos a seguinte expressão

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} [f(x) \rho(x)] + \frac{\Gamma}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, t) \quad (2.28)$$

Esta é a equação de evolução temporal da densidade de probabilidade  $\rho(x, t)$ , onde  $F(x, t)$  é a força externa aplicada ao sistema e  $\rho(x, t)$  está relacionada com a concentração ou com a densidade de probabilidade. Ela é conhecida como **equação de Fokker-Plank** ou **equação de Smoluchowski**. Resolver esta equação significa resolver a equação de *Langevin* (em tempos longos).

Nota-se que a Eq.(2.28) tem a mesma forma da equação de difusão. De uma forma mais geral, esta equação pode ser escrita assim

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \nabla^2 \rho - \nabla \cdot (\vec{F} \rho) \quad (2.29)$$

com  $D = \Gamma/2$ .

A solução da Eq.(2.28), na ausência de força externa e sujeita às condições de contorno  $\rho(x \rightarrow \pm\infty, t) \rightarrow 0$ , é dada por

$$\rho(x, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \quad (2.30)$$



Comparando este resultado, Eq.(2.30), com a conhecida distribuição de probabilidade Gaussiana,

$$P(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (2.31)$$

temos a média  $\langle x \rangle = 0$  e variância  $\sigma^2 = 2Dt$ . O comportamento de  $P(x, t)$  pode ser visto na Fig.(2.3).

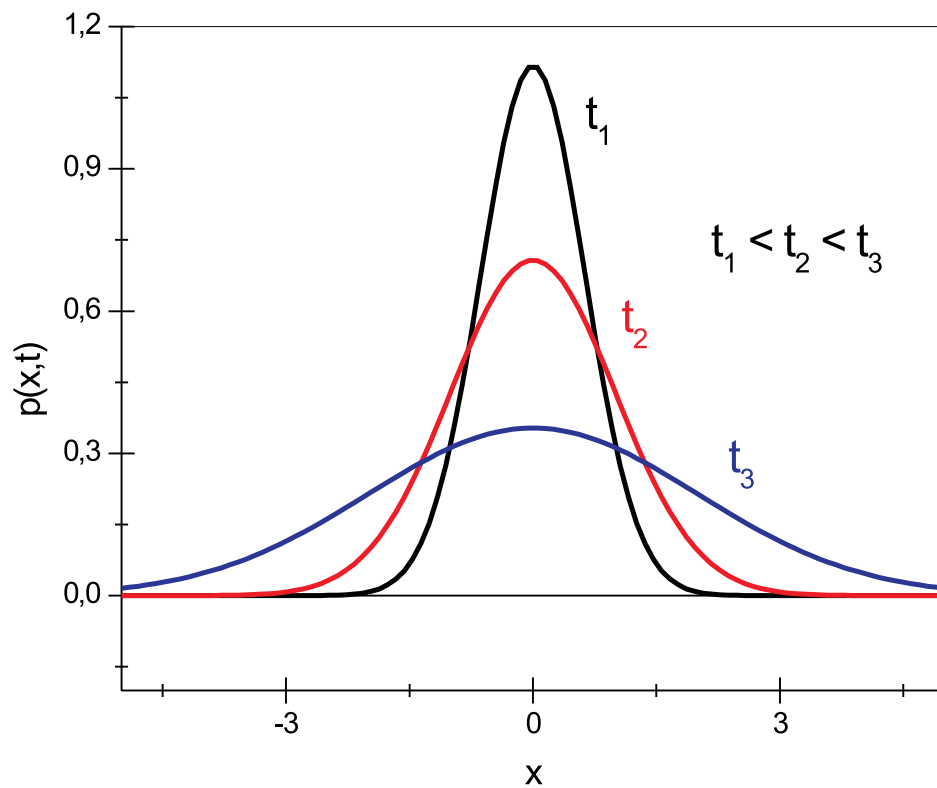


Figura 2.3: O gráfico mostra a evolução temporal da distribuição de probabilidades no regime unidimensional, Eq.(2.31). Para tempos pequenos (próximos de zero) a distribuição representa uma função delta centrada na origem ( $x = 0$ ), e com o passar do tempo, a distribuição evolui como uma Gaussiana de largura variável.

## 2.3 Equação de Difusão não linear

Distribuições tipo lei de potência ou exponencial alongada surgem naturalmente como soluções de generalizações da equação de difusão (2.3) N-dimensional. Entretanto, a equação de difusão não linear

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = \mathcal{D}\nabla^2\rho^\nu \quad (2.32)$$

pode ser vista como uma generalização da Eq.(2.3), onde  $\nu$  é um parâmetro real. Para  $\nu = 1$ , reobtemos a Eq.(2.32).

A Eq.(2.32) corresponde a equação de *Fokker Planck* não linear na ausência de força externa e sem termo de fonte. A existência de difusão anômala e outras aplicações tem motivado o estudo desse tipo de equação não linear. Esta equação, Eq.(2.32), também é conhecida como *equação de difusão em meios porosos* [67] e tem sido usada em diversos sistemas físicos, tais como: em plasmas [68], em dispersão espacial de populações biológicas [69], em percolação de gases através de meios porosos ( $\nu \geq 2$ ) [70], em filmes líquidos finos sob gravidade, ( $\nu = 4$ ) [71], e em fenômenos de auto-organização.

Consideremos um gás ideal fluindo isotropicamente em um meio poroso homogêneo. Como é mostrado na referência [67], as leis que governam este fluxo são:

A equação de estado para um gás ideal:

$$p = p_0\rho^a \quad (2.33)$$

onde  $p = p(\mathbf{r}, t)$  é a pressão,  $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$  é a densidade,  $a \in [1, \infty]$  e  $p_0 \in \mathfrak{R}^+$  são constantes.

A conservação de massa em meios porosos nos dá:

$$\eta\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0 \quad (2.34)$$

onde  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  é o vetor velocidade e  $\eta \in \mathfrak{R}^+$  é a porosidade do meio.

A lei de Darcy nos fornece:

$$\sigma\mathbf{v} = -k\nabla p \quad (2.35)$$

onde  $\sigma \in \mathfrak{R}^+$  é a viscosidade do gás e  $k \in \mathfrak{R}^+$  é a permeabilidade do meio.

Com estas leis, podemos relacionar a Eq.(2.33), com a Eq.(2.35), conduzindo à seguinte expressão:

$$\mathbf{v} = -\frac{kp_0}{\sigma}\nabla\rho^a \quad (2.36)$$

Da Eq.(2.34), temos

$$\eta \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (2.37)$$

e usando a identidade vetorial,  $\nabla \cdot (\psi \mathbf{A}) = \mathbf{A} \nabla \psi + \psi (\nabla \cdot \mathbf{A})$ , obtemos

$$\eta \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathbf{v} \nabla \rho - \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (2.38)$$

Agora, substituindo Eq.(2.36) na Eq.(2.38), obtemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{akp_0}{(a+1)\eta\sigma} [a\rho^{a-1}\nabla^2\rho + \rho^a\nabla^2\rho] \quad (2.39)$$

onde usamos a condição

$$\rho\nabla^2\rho^a = (a^2 - a)\rho^{a-1}\nabla^2\rho + a\rho^a\nabla^2\rho \quad (2.40)$$

E, sabendo que:  $\nabla^2\rho^{a+1} = (a+1)[a\rho^{a-1}\nabla^2\rho + \rho^a\nabla^2\rho]$ , obtemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{akp_0}{(a+1)\eta\sigma} \nabla^2\rho^{a+1} \quad (2.41)$$

Finalmente,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \mathcal{D} \nabla^2 \rho^\nu \quad (2.42)$$

onde

$$\mathcal{D} = \frac{akp_0}{(a+1)\eta\sigma} \quad (2.43)$$

e  $\nu = 1 + a \geq 2$ .

Esta equação, Eq(2.42), conhecida como equação de meios porosos, tem sido bastante analisada em diversos trabalhos. Como exemplo, podemos citar as referências [67, 72, 73] que mostram aplicações deste tipo de equação na presença de uma força externa linear; com termo de absorção [74]; dependência espacial no coeficiente de difusão [75, 76], isto é,  $\mathcal{D}(x) \propto |x|^{-\theta}$ , obtemos a *lei de Richardson* [65] para  $\theta = -4/3$ , e a *lei de Komolgorov* [77] para  $\theta = -5/3$ ; e também com força externa e coeficiente de difusão dependente do tempo [78].

No próximo capítulo, vamos tratar das equações de difusão não lineares, obtendo soluções exatas (analíticas).

## Capítulo 3

# Equação de Difusão não Linear: Solução Exata

Neste capítulo, analisaremos uma equação de difusão não linear que possui uma dependência espacial e temporal no coeficiente de difusão. Também consideraremos a presença de forças externas ( $F(x, t) = -k_1(t)x$  e  $F(x, t) = -k_1(t)x - k_\alpha x|x|^{\alpha-1}$ ) e um termo de absorção. Os termos não lineares, presentes na equação de difusão, serão uma consequência do emprego de uma generalização da *lei de Darcy*,  $\mathcal{J} = -\mathcal{D}(x, t) |\partial_x \rho(x, t)|^{\bar{n}} [\rho(x, t)]^{\bar{\nu}}$  e da presença do termo absorvente,  $-\bar{\alpha}(t)[\rho(x, t)]^\mu$ . Em particular, obteremos uma nova classe de soluções exatas e investigaremos os efeitos não lineares produzidos por estes termos nas soluções encontradas. Além disso, os resultados encontrados, serão expressos em termos das funções  $q$ -exponenciais e  $q$ -logarítmicas que aparecem no formalismo da mecânica estatística não extensiva.

### 3.1 Generalização da Lei de Darcy e Equação de Difusão não Linear

A grande variedade de aplicações das equações de difusão não lineares, conforme mencionamos na introdução, tem motivado a compreensão destas equações e a investigação de suas extensões. Neste sentido, temos a equação de difusão não linear que emerge de uma generalização da *lei de Darcy* [79] que é baseada na presença de um

termo difusivo não linear. Particularmente, após algumas manipulações empregando esta generalização e a equação de continuidade, podemos mostrar que a equação de difusão fica dada por [79]

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x, t) = \mathcal{D} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ [\rho(x, t)]^m \left| \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, t) \right|^n \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, t) \right\}. \quad (3.1)$$

Esta equação tem como caso particular a equação de meios porosos e sua densidade de corrente para  $m = 0$  é conhecido como *lei de Gorter-Melling*. Ela também está presente em várias situações, tais como: condução não linear de calor [79], fluxo não linear de fluido não Newtoniano [80], fluxo gravitacional de fluido não Newtoniano através de meios porosos, difusão em estruturas fractais e uma mistura generalizada pelo efeito de flutuabilidade devido a injeção de um fluido denso dentro de um outro fluido de menor densidade [81].

Contudo, a Eq.(3.1) não foi devidamente investigada na presença de forças externas com termos absorventes (ou fonte). Nexto contexto, dedicaremos esta parte da tese ao estudo da Eq.(3.1) levando em conta a presença de forças externas e de um termo absorvente, no intuito de compreender as mudanças que tais termos produzem na equação de difusão acima. Assim, investigaremos a seguinte equação de difusão não linear

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mathcal{D}(x, t, \rho, \partial_x \rho) \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, t) \right\} - \frac{\partial}{\partial x} \{ F(x, t) \rho(x, t) \} - \bar{\alpha}(t) [\rho(x, t)]^\mu \quad (3.2)$$

onde

$$\mathcal{D}(x, t, \rho, \partial_x \rho) = \nu \mathcal{D}(t) |x|^{-\theta} \left| \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, t) \right|^n [\rho(x, t)]^{\nu-1} \quad (3.3)$$

é o coeficiente de difusão,  $F(x, t)$  é uma força externa e  $\bar{\alpha}(t)$  representa uma taxa absorvente que pode estar relacionada, por exemplo, com um processo de reação onde temos difusão.

É interessante notar que, a equação de difusão Eq.(3.2), assim como na Eq.(3.1), pode ser aplicada para descrever várias situações tais como: condução de calor por elétrons em um plasma, condução de calor por radiação em um gás completamente ionizado (Marshak waves), fluxo assimétrico de um fluido muito viscoso [82], difusão turbulenta [83] e em absorção e desabsorção de equilíbrio localizado através de um sólido permeável [84]. Para  $(\nu, n, \mu) = (1, 0, 1)$ , a Eq.(3.2) recupera a forma usual (padrão) da equação de *Fokker Planck* [65] na presença de uma força com um termo absorvente. Nos casos em que  $\bar{\alpha}(t) = 0$ , podemos verificar que  $\int_{-\infty}^{\infty} dx \rho(x, t)$  é independente do tempo

(conseqüentemente, se  $\rho$  é normalizado em  $t = 0$ , isso deverá permanecer assim para sempre). Realmente, se escrevermos, a Eq.(3.2) como  $\partial_t \rho = -\partial_x \mathcal{J}$  e assumirmos a condição de contorno  $\mathcal{J}(x \rightarrow \pm\infty, t) \rightarrow 0$ , podemos mostrar que  $\int_{-\infty}^{\infty} dx \rho(x, t)$  é uma constante de movimento.

## 3.2 Equação de Difusão não Linear

Iniciaremos nosso estudo da Eq.(3.2) investigando as soluções que são dependentes do tempo para a situação caracterizada por  $\mu = 1$ , deixando a análise do caso  $\mu \neq 1$  para depois. Usaremos o método de similaridade em nosso estudo, com a finalidade de reduzir a Eq.(3.2) a equações diferenciais ordinárias, que geralmente são mais simples de serem resolvidas.

A forma dessas equações diferenciais ordinárias que aparecem ao aplicarmos este método depende das condições de contorno e das leis de conservação que devem ser satisfeitas pelo sistema. Nesta direção, limitamos nossa análise a encontrar soluções que possam ser expressas em termos de uma função escalada do tipo

$$\bar{\rho}(x, t) = \frac{1}{\Phi(t)} \tilde{\rho} \left[ \frac{|x|}{\Phi(t)} \right] \quad (3.4)$$

Estas soluções devem satisfazer às condições de contorno iniciais e a condição de normalização quando  $\bar{\alpha}(t) = 0$ . Antes de analisarmos as soluções da Eq.(3.2), vamos propor que a solução dessa equação seja dada por

$$\rho(x, t) = \exp \left[ - \int_0^t d\tilde{t} \bar{\alpha}(\tilde{t}) \right] \bar{\rho}(x, t) \quad (3.5)$$

onde  $\bar{\rho}(x, t)$  é uma função a ser determinada, sendo dada pela Eq.(3.4). Desta forma, aplicando as considerações acima na Eq.(3.2), obtemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho}(x, t) = \bar{\mathcal{D}}(t) \frac{\partial}{\partial x} \left\{ |x|^{-\theta} \left| \frac{\partial}{\partial x} \bar{\rho}(x, t) \right|^n \frac{\partial}{\partial x} [\bar{\rho}(x, t)]^\nu \right\} - \frac{\partial}{\partial x} [F(x, t) \bar{\rho}(x, t)] \quad (3.6)$$

com  $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D}(t) \exp \left[ -(\nu + n - 1) \int_0^t d\tilde{t} \bar{\alpha}(\tilde{t}) \right]$ .

A partir desta equação, discutiremos a solução quando consideramos: (i) a ausência da força externa, (ii) a presença de uma força externa linear e, depois, (iii) incorporamos uma força externa em lei de potência.

Na ausência de forças externas a equação Eq.(3.6) adquire a forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho}(x, t) = \bar{\mathcal{D}}(t) \frac{\partial}{\partial x} \left\{ |x|^{-\theta} \left| \frac{\partial}{\partial x} \bar{\rho}(x, t) \right|^n \frac{\partial}{\partial x} [\bar{\rho}(x, t)]^\nu \right\} \quad (3.7)$$

a qual também pode ser formulada no contexto de difusão de calor. Para isto, basta considerarmos na lei de Fourier a condutividade térmica dependente da temperatura de forma análoga ao caso que consideramos anteriormente para a *lei de Darcy*. Agora, aplicando o método de similaridade, mais precisamente considerando que a solução da Eq.(3.7) tenha a forma da Eq.(3.4) podemos converter a equação de difusão acima em duas equações diferenciais ordinárias, com a ajuda de uma constante de separação  $\bar{k}$  que pode ser determinada pela condição de normalização. Assim, após alguns cálculos a Eq.(3.6) fica reduzida a

$$\frac{d}{dz} \left\{ |z|^{-\theta} \left| \frac{d}{dz} \tilde{\rho}(z) \right|^n \frac{d}{dz} [\tilde{\rho}(z)]^\nu \right\} = -\bar{k} \frac{d}{dz} [z \tilde{\rho}(z)] \quad (3.8)$$

e

$$[\Phi(t)]^\xi \frac{d}{dt} \Phi(t) = -\bar{k} \bar{\mathcal{D}}(t) \quad (3.9)$$

onde  $\xi = 2n + \theta + \nu$  e  $z = |x|/\Phi(t)$ . Resolvendo a Eq.(3.9), encontramos

$$\Phi(t) = \left[ (\Phi(0))^{1+\xi} + k' \int_0^t dt \bar{\mathcal{D}}(\tilde{t}) \right]^{\frac{1}{1+\xi}} \quad (3.10)$$

com  $k' = (1 + \xi)\bar{k}$ . Observe que a presença do termo  $\Phi(0)$  pode ser associada a uma situação em que a distribuição considerada já tenha uma largura inicial. Agora, retomando a equação que depende da variável espacial, vamos fazer uma integração e desta forma obter

$$|z|^{-\theta} \left| \frac{d}{dz} \tilde{\rho}(z) \right|^n \frac{d}{dz} [\tilde{\rho}(z)]^\nu = -\bar{k} z \tilde{\rho}(z) + C \quad (3.11)$$

onde  $C$  é uma constante de integração. Para encontrar a solução da Eq.(3.11), vamos considerar o “ansatz”:

$$\tilde{\rho}(z) = (1 - \alpha z^\lambda)^\beta \quad (3.12)$$

e  $C = 0$  de forma a que a solução proposta venha a satisfazer a equação e a condição de contorno  $\rho(x \rightarrow \pm\infty, t) \rightarrow 0$ . Substituindo a Eq.(3.12) na Eq.(3.11) e levando em conta

estas considerações podemos obter os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\lambda$  presentes na Eq.(3.12), em termos dos parâmetros presentes na Eq.(3.11). Após alguns cálculos é possível mostrar que

$$\beta = \frac{n+1}{\nu+n-1}; \lambda = \frac{2+\theta+n}{n+1} \text{ e } \alpha = \frac{\nu+n-1}{2+\theta+n} \left(\frac{\bar{k}}{\nu}\right)^{\frac{1}{n+1}} \quad (3.13)$$

Assim, podemos expressar  $\tilde{\rho}(z)$  como

$$\tilde{\rho}(z) = \left(1 - \frac{\nu+n-1}{2+\theta+n} \left(\frac{\bar{k}}{\nu}\right)^{\frac{1}{n+1}} z^{\frac{2+\theta+n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{\nu+n-1}} \quad (3.14)$$

e por sua vez,  $\bar{\rho}(x, t)$  fica dada por

$$\bar{\rho}(x, t) = \frac{1}{\Phi(t)} \left(1 - \frac{\nu+n-1}{2+\theta+n} \left(\frac{\bar{k}}{\nu}\right)^{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{|x|}{\Phi(t)}\right)^{\frac{2+\theta+n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{\nu+n-1}}. \quad (3.15)$$

Neste ponto, cabe ressaltar que a estrutura da solução encontrada acima é essencialmente a mesma da função  $q$ -exponencial que aparece no formalismo da mecânica estatística não extensiva. De fato, ao aplicarmos o princípio de entropia máxima a forma entrópica

$$S_q = \frac{1 - \int_{-\infty}^{\infty} dx [\rho(x)]^q}{q-1} \quad (3.16)$$

proposta por *Tsallis* levando em conta vínculos adequados, obtemos a função  $q$ -exponencial (maiores detalhes são encontrados no anexo A). Esta função é definida como  $\exp_q[x] = [1 + (1-q)x]^{1/1-q}$  para  $1 + (1-q)x \geq 0$  e  $1 + (1-q)x = 0$  para  $1 + (1-q)x \leq 0$ . Desta forma, podemos identificar a estrutura presente na Eq.(3.15) com esta função ( $q$ -exponencial) tomando  $q = 2 - (\nu + n)$ . Assim, com alguma álgebra é possível mostrar que

$$\bar{\rho}(x, t) = \frac{1}{\Phi(t)} \exp_q^{n+1} \left[ -\frac{1}{2+\theta+n} \left(\frac{\bar{k}}{\nu}\right)^{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{|x|}{\Phi(t)}\right)^{\frac{2+\theta+n}{n+1}} \right]. \quad (3.17)$$

O fato de relacionarmos a solução encontrada com o formalismo de *Tsallis* é muito interessante, pois nos sugere um contexto termoestatístico a esta equação que não é o usual e nos indica um comportamento de cauda curta (ou cauda longa) na Eq.(3.17) que podem ser obtidos dependendo da escolha dos parâmetros  $\nu$ ,  $n$  e  $\theta$ . Particularmente, no



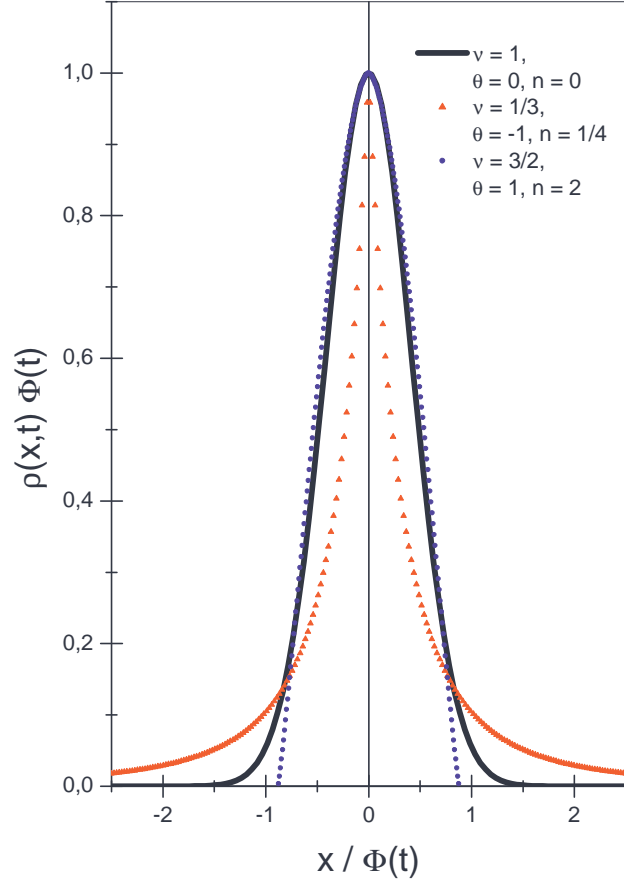


Figura 3.1: Comportamento de  $\Phi(t)\rho(x,t)$  versus  $x/\Phi(t)$  para valores típicos de  $\theta$ ,  $\nu$  e  $n$  para  $\alpha(t) = 0$ . Para  $\nu = 1$  e  $\theta = n = 0$  retornamos à distribuição Gaussiana. Dependendo dos valores dos parâmetros  $\nu$ ,  $\theta$  e  $n$  a distribuição poder tornar-se compacta ou alongada

caso em que temos um comportamento de cauda longa, podemos relacionar a solução encontrada com a distribuição de *Lèvy* no regime assintótico de grande argumento. Para verificarmos este fato basta tomarmos o limite assintótico da Eq.(3.17), para  $x$  grande e  $\nu + n < 1$  obtendo-se

$$\bar{\rho}(x,t) \sim \frac{1}{\Phi(t)} \left( \frac{|x|}{\Phi(t)} \right)^{-\frac{2+\theta+n}{1-\nu-n}} \quad (3.18)$$

Quando comparamos os resultados acima com o limite assintótico que emerge da

distribuição de *Lèvy* para  $x$  grande, isto é,  $\rho \sim 1/|x|^{1+\mu}$ , obtemos

$$\mu = \frac{1 + \theta - \nu}{1 + \nu + n} \quad (3.19)$$

Assim, mostramos ser satisfatório para os parâmetros  $\theta$ ,  $\nu$  e  $n$ , tais que,  $0 < \mu < 2$ , logo a Eq.(3.17) comporta-se semelhante a distribuição de *Lèvy*.

Para o caso  $\bar{\alpha}(t) = 0$ , dependendo da escolha dos parâmetros  $(\nu, \theta, n)$ , podemos ter uma propagação anômala da distribuição dada pela Eq.(3.17) que pode caracterizar uma difusão anômala ou uma condução anômala. Neste caso, o segundo momento é dado por  $\langle x^2 \rangle \propto t^{2/(1+\xi)}$  onde  $2/(1 + \xi) < 1, = 1, > 1$  caracterizando respectivamente o comportamento sub, normal ou superdifusivo como mostra a Fig.(3.2).

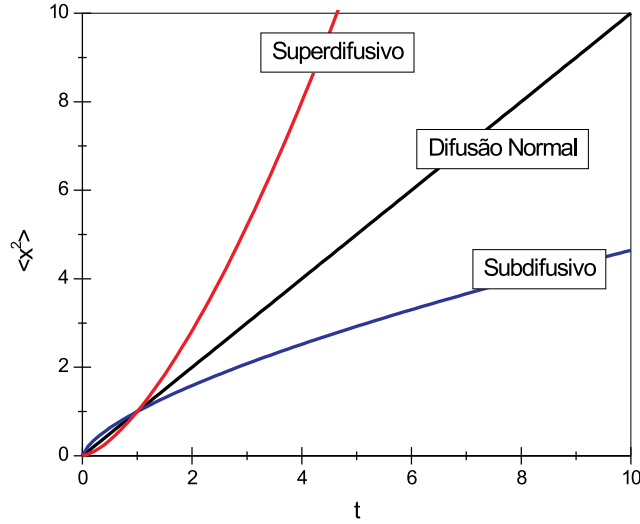


Figura 3.2: Curvas de  $\langle x^2 \rangle \propto t^{2/(1+\xi)}$  tendo comportamento: superdifusivo para  $\xi < 1$ ; difusivo normal para  $\xi = 1$  e subdifusivo para  $\xi > 1$ .

Agora analisaremos as implicações do termo de força quando incorporado na Eq.(3.2). Nesta direção, primeiro estudamos os efeitos produzidos na solução por uma força externa que varia linearmente com a posição, isto é,  $F(x, t) = -k_1(t)x$ . A situação caracterizada por  $F(x, t) = -k_1(t)x - k_\alpha x|x|^{\alpha-1}$  será analisada na sequência. Na presença desta força linear a Eq.(3.6) fica dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho}(x, t) = \mathcal{D}(t) \left\{ |x|^{-\theta} \left| \frac{\partial}{\partial x} \bar{\rho}(x, t) \right|^n \frac{\partial}{\partial x} [\bar{\rho}(x, t)]^\nu \right\} + k_1(t) \frac{\partial}{\partial x} [x \bar{\rho}(x, t)]. \quad (3.20)$$

Para analisar a solução que emerge da equação acima vamos empregar o mesmo procedimento que usamos para o caso em que não tínhamos a presença de forças externas. Assim, empregando a Eq.(3.4) na Eq.(3.20), obtemos

$$-\frac{\dot{\Phi}(t)}{[\Phi(t)]^2} \frac{d}{dz} [z\tilde{\rho}(z)] = \frac{\mathcal{D}(t)}{[\Phi(t)]^{2+\xi}} \frac{d}{dz} \left\{ |z|^{-\theta} \left| \frac{d}{dz} \tilde{\rho}(z) \right|^n \frac{d}{dz} [\tilde{\rho}(z)]^\nu \right\} + \frac{k_1(t)}{\Phi(t)} \frac{d}{dz} [z\tilde{\rho}(z)]. \quad (3.21)$$

com  $z = |x|/\Phi(t)$ , como no caso anterior. Agrupando termos semelhantes e introduzindo uma constante  $\bar{k}$ , podemos separar a equação acima em duas equações, uma envolvendo a variável temporal  $t$  somente e a outra envolvendo a variável  $z$ , como segue

$$\frac{d}{dz} \left\{ |z|^{-\theta} \left| \frac{d}{dz} \tilde{\rho}(z) \right|^n \frac{d}{dz} [\tilde{\rho}(z)]^\nu \right\} = -\bar{k} \frac{d}{dz} [z\tilde{\rho}(z)] \quad (3.22)$$

e

$$[\Phi(t)]^\xi \frac{d}{dt} \Phi(t) + k_1(t) [\Phi(t)]^{\xi+1} = \bar{\mathcal{D}}(t) \bar{k}. \quad (3.23)$$

Destas duas equações, observamos que ao introduzirmos uma força linear na equação de difusão Eq.(3.6), apenas estamos modificando a forma como a evolução do alargamento da distribuição ocorre e não a dependência espacial da mesma. No tocante ao último ponto, a Eq.(3.22), já foi resolvida anteriormente por meio de um *ansatz*. Devido a este fato, vamos apenas abordar a Eq.(3.23) no intuito de obter sua solução. Neste sentido, podemos reescrever a Eq.(3.23), após algumas manipulações, como

$$\frac{d}{dt} [\Phi(t)]^{\xi+1} + (\xi + 1) k_1(t) [\Phi(t)]^{\xi+1} - (\xi + 1) \bar{\mathcal{D}}(t) \bar{k} = 0. \quad (3.24)$$

Note que, a Eq.(3.24) corresponde a uma equação diferencial do tipo  $Y' + p(x)Y = g(x)$ , cuja solução é dada por  $Y(x) = [\int \mu(x)g(x)dx + C] / \mu(x)$  com  $\mu(x) = \exp(\int p(x)dx)$ . Assim, utilizando este resultado podemos encontrar a solução da Eq.(3.24) e mostrar que ela é dada por

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \left[ [\Phi(0)]^{\xi+1} + k' \int_0^t d\tilde{z} \bar{\mathcal{D}}(\tilde{t}) \exp[(\xi + 1) \int_0^t k_1(t') dt'] \right]^{\frac{1}{\xi+1}} \\ &\times \exp \left( - \int_0^t k_1(t') dt' \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

com  $k' = k(\xi + 1)$ . Este resultado mostra que dependendo da escolha da força externa, podemos ter a presença de um segundo momento que na situação de tempos longos fica

reduzido a uma constante. Tal fato, implica diretamente na existência de uma solução estacionária, fato que não é observado quando não temos forças externas atuando sobre o sistema. Particularmente, uma solução estacionária pode ser obtida fazendo  $\bar{\alpha}(t) = 0$ , o coeficiente de difusão,  $\bar{\mathcal{D}} \approx \mathcal{D}(t) = \mathcal{D} = cte.$ ,  $k_1(t) = k_1$  também constante, e  $\rho(x) \propto (1 - \alpha'x^\lambda)^\beta$ , onde  $\alpha'$  é uma constante.

Completando nossa análise a respeito das forças externas vamos incorporar a situação estudada anteriormente a um termo do tipo lei de potência, isto é,  $k_\alpha x|x|^{\alpha-1}$ , de forma que a força externa fique dada por

$$F(x, t) = -k_1(t)x - k_\alpha x|x|^{\alpha-1} \quad (3.26)$$

Vamos considerar, neste contexto que  $\mathcal{D} = cte$  e  $\bar{\alpha}(t) = 0$ . Obter a solução da equação de difusão na presença da força externa acima é uma tarefa muito dura, mas muito importante devido ao grande número de aplicações que podem ser descrito por ela. Neste sentido, embora não seja de nosso conhecimento o que acontece no caso geral, isto é,  $(\alpha, \theta, \nu, n)$  quaisquer, vamos analisar uma situação especial para o qual a solução escalada da Eq.(3.4) é ainda válida. Este caso especial corresponde a  $\alpha = -\theta - \nu - 2n$ , isto é,  $\alpha + \theta + \nu + 2n = 0$ . Neste caso, usando os procedimentos anteriores, podemos reduzir a Eq.(3.2) para o seguinte conjunto de equações

$$-\bar{k} \frac{d}{dz} [z\tilde{\rho}(z)] = \mathcal{D} \frac{d}{dz} \left\{ |z|^{-\theta} \left| \frac{d}{dz} \tilde{\rho}(z) \right|^n \frac{d}{dz} [\tilde{\rho}(z)]^\nu \right\} + k_\alpha \frac{d}{dz} [z^\alpha \tilde{\rho}(z)] \quad (3.27)$$

e

$$[\Phi(t)]^\xi \frac{d}{dz} \Phi(t) + k_1(t) [\Phi(t)]^{1+\xi} = \bar{k} \quad (3.28)$$

A solução da Eq.(3.28) é dada por

$$\Phi(t) = \left[ [\Phi(0)]^{1+\xi} + k' \int_0^t d\tilde{t} \exp[(1 + \xi) \int_0^{\tilde{t}} dt' k_1(t')] \right]^{\frac{1}{1+\xi}} \cdot \exp[- \int_0^t dt' k_1(t')] \quad (3.29)$$

Para obtermos a solução da Eq.(3.27), podemos primeiro integrá-la, obtendo

$$\mathcal{D} |z|^{-\theta} \left| \frac{d}{dz} \tilde{\rho}(z) \right|^n \frac{d}{dz} [\tilde{\rho}(z)]^\nu = -(\bar{k}z + k_\alpha z^\alpha) \tilde{\rho}(z) + C' \quad (3.30)$$

onde  $C'$  é constante. Para resolver esta equação, Eq.(3.30), também empregaremos a condição de contorno  $\rho(x \rightarrow \pm\infty, t) \rightarrow 0$  que implica em  $C' = 0$ . Assim, a solução desta

equação é dada por

$$\tilde{\rho}(z) = \exp_q \left( -\frac{1}{n+1} \left( \frac{\bar{k}}{\overline{\mathcal{D}\nu}} \right)^{\frac{1}{n+1}} \int_0^z d\bar{z} \left( z^{-1+\theta} + \frac{k_\alpha}{\bar{k}} \bar{z}^{(-\nu-2n)} \right)^{\frac{1}{n+1}} \right)^{(n+1)} \quad (3.31)$$

Para o caso espacial, com  $n = 0$ , temos

$$\tilde{\rho}(z) = \exp_q \left( - \left( \frac{\bar{k}}{\overline{\mathcal{D}\nu}} \right) \int_0^z d\bar{z} \left( z^{-1+\theta} + \frac{k_\alpha}{\bar{k}} \bar{z}^{-\nu} \right) \right) \quad (3.32)$$

Assim, recuperamos a solução obtida na referência [86].

### 3.2.1 Termo Absorvente $\bar{\alpha} [\rho(x, t)]^\mu$

Agora, estudaremos a Eq.(3.2), considerando o caso geral  $\mu \neq 1$ . Neste caso, a Eq.(3.2) pode ser escrita como sendo

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mathcal{D}(x, t, \rho, \partial_x \rho) \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, t) \right\} - \bar{\alpha}(t) [\rho(x, t)]^\mu \quad (3.33)$$

Trataremos deste caso, na ausência da força externa, com coeficiente de difusão independente do tempo e  $\bar{\alpha}(t) = \bar{\alpha}$ . Seguindo a referência [87], consideramos que a solução para esta equação deve ser dada por

$$\rho(x, t) = \phi(t) \mathcal{P}(\zeta(t)x) \quad (3.34)$$

onde  $\phi(t)$  e  $\zeta(t)$  são funções dependentes do tempo a serem achadas. Nesta sentido, é interessante analisarmos a equação cinética que emerge da equação anterior, Eq.(3.33) para  $\mathcal{D} = 0$ , isto é,  $\partial_t \rho(t) = -\alpha [\rho(t)]^\mu$ . Particularmente, a solução para esta equação cinética é conhecida e dada por

$$\rho(t) \propto [1 - (1 - \mu)\alpha t]^{\frac{1}{1-\mu}}. \quad (3.35)$$

Fato este que nos sugere empregar  $\phi(t) = [1 - (1 - \mu)kt]^{\frac{1}{1-\mu}}$  de forma a contemplar o caso limite em que a equação cinética é válida. Para obter  $\zeta(t)$ , substituiremos a solução proposta para  $\rho(x, t)$ , Eq.(3.34), na Eq.(3.33) com  $\phi(t)$  definido pela Eq.(3.35). Essa substituição nos leva a obter

$$\zeta(t) = [1 - (1 - \mu)kt]^{\frac{n+\nu-\mu}{(1-\mu)(2+n+\theta)}} \quad (3.36)$$

e a Eq.(3.33) fica

$$-k\mathcal{P}(\eta) - \left(\frac{\mu - n - \nu}{2 + \theta + n}\right) k\eta \frac{d}{d\eta} \mathcal{P}\eta = \mathcal{D} \frac{d}{d\eta} \left\{ \eta^{-\theta} \left| \frac{d}{d\eta} \mathcal{P}(\eta) \right|^n \frac{d}{d\eta} [\mathcal{P}(\eta)]^\nu \right\} - \alpha [\mathcal{P}(\eta)]^\mu \quad (3.37)$$

com  $\eta = \zeta(t)|x|$  e  $k$  sendo uma constante. Achar a solução explícita na variável  $\eta$  da equação acima, Eq.(3.37), é uma tarefa difícil, contudo, é possível obter uma solução implícita quando  $\mu = 2 + 2n + \theta + \nu$  que é formalmente dada por

$$\mathcal{P}(\eta) = \exp_q \left[ -\frac{1}{n+1} \left( \frac{k}{\nu \mathcal{D}} \right)^{\frac{1}{n+1}} \int^\eta d\tilde{z} [\tilde{z}]^{\frac{\theta}{n+1}} \left( \tilde{z} - \frac{\alpha}{\mathcal{P}(\tilde{z})} \int^{\tilde{z}} dz' [\mathcal{P}(z')]^\mu \right)^{\frac{1}{n+1}} \right]^{\frac{n+1}{n+\nu-1}} \quad (3.38)$$

Verificamos que a equação Eq.(3.38) recupera a Eq.(3.17) para  $\alpha = 0$ , depois que executamos a integração em  $\tilde{z}$ . Neste ponto, podemos usar os resultados acima, para obter, com  $\mu, n, \nu$  e  $\theta$  arbitrários, os  $n$ -ésimos momentos associados com estas distribuições. Eles são dados por

$$\begin{aligned} \langle x^{2n} \rangle &= \left[ \int dx x^{2n} \rho(x, t) \right] / \left[ \int dx \rho(x, t) \right] \\ \langle x^{2n} \rangle &= \zeta(t)^{-2n} \left[ \int d\eta \eta^{2n} \rho(\eta) \right] / \left[ \int d\eta \rho(\eta) \right] \\ \langle x^{2n} \rangle &\propto \zeta(t)^{-2n} \end{aligned} \quad (3.39)$$

e  $\langle x^{2n+1} \rangle = 0$ . Note que, na equação Eq.(3.39), assumimos que as integrais que envolvem a distribuição e os potências  $x^n$  estão definidas, isto é, que elas existindo, implica na existência dos  $n$ -ésimos momentos. Em particular, para o segundo momento temos que

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \propto t^{\frac{2(n+\nu-\mu)}{(\mu-1)(2+n+\theta)}}. \quad (3.40)$$

A equação acima nos indica que os processos difusivos neste caso podem ser sub-difusivo, normal e superdifusivo, dependendo dos valores de  $2(n + \nu - \mu)/(2 + n + \theta)$  ser menor, igual ou maior quer um.

### 3.3 Conclusões

Em resumo, trabalhamos a equação de difusão generalizada, Eq.(3.2), em várias situações considerando o termo de força externa e o coeficiente de difusão com dependência

espaçial e temporal. Também, mostramos que são admitidas soluções exatas onde o espaço e o tempo são funções escalares. Outro ponto interessante, é a presença da função exponencial generalizada do formalismo *Tsallis* encontrada em nossas soluções. Este fato, sugere uma conexão das soluções encontradas aqui e as distribuições que emergem do formalismo de *Tsallis*. Nesta direção, também estendemos os resultados obtidos nas referências [74, 75] em um formalismo unificado.

# Capítulo 4

## Equação de Difusão não Linear: Difusão Anômala

Neste capítulo, investigaremos a solução da equação de difusão não linear

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho(r, t) &= \frac{1}{r^{\mathcal{N}-1}} \mathcal{D} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^{\mathcal{N}-1-\theta} [\rho(r, t)]^\gamma \frac{\partial}{\partial r} [r^{-\eta} [\rho(r, t)]^\nu] \right\} \\ &- \frac{1}{r^{\mathcal{N}-1}} \frac{\partial}{\partial r} [r^{\mathcal{N}-1} \mathcal{F}(r, t, \rho) \rho(r, t)] \end{aligned} \quad (4.1)$$

considerando a presença de uma força externa  $\mathcal{F}(r, t, \rho)$  a qual exibe uma dependência explícita da distribuição. Começaremos, investigando o caso estacionário e, em seguida, analisaremos o caso dinâmico.

A solução estacionária é obtida considerando uma força externa do tipo  $\mathcal{F}(r, \rho) = \mathcal{F}_1(r) + \mathcal{F}_2(r)[\rho(r)]^{\nu+\gamma-1}$  e o resultado encontrado é relacionado com a distribuição que emerge da estatística de *Tsallis* (não extensiva) ou da que emerge da estatística de *Boltzmann-Gibbs* (extensiva).

A solução dinâmica é investigada considerando uma força externa do tipo  $\mathcal{F}(r, t, \rho) = -k(t)r + \mathcal{K}/r^{1+\theta+\eta}[\rho(r, t)]^{\gamma+\nu-1}$  e sua distribuição relacionamos a uma distribuição de *Lèvy*, no limite assintótico.

### 4.1 Equação de Fokker-Planck não Linear - Solução Estacionária



Começamos nosso estudo a respeito da Eq.(4.2) investigando a solução estacionária que emerge ao considerarmos a presença da força externa

$$\mathcal{F}(r, t, \rho) = \mathcal{F}_1(r) + \mathcal{F}_2(r)[\rho(r)]^{\nu+\gamma-1}. \quad (4.2)$$

Desta forma, substituindo a força externa definida acima na Eq.(4.2) e considerando a condição na qual a Eq.(4.2) é estacionária, podemos reduzi-la a uma equação diferencial ordinária que depende apenas da variável espacial  $r$ . Neste sentido, após alguns cálculos, podemos mostrar que a Eq.(4.2) fica reduzida a

$$\mathcal{D}r^{-\theta}[\rho(r)]^\gamma \frac{d}{dr}[r^\eta(\rho(r))^\nu] - \mathcal{F}_1(r)\rho(r) - \mathcal{F}_2(r)(\rho(r))^{\nu+\gamma} = 0 \quad (4.3)$$

Note que, a Eq.(4.3) tem um termo difusivo não linear e também um termo de convecção não linear ou termo de transporte, conforme discutimos acima.

O termo não linear incorporado na força externa pode produzir na solução um novo comportamento o qual não se encontra presente nos resultados apresentados pelas referências [78, 88, 89]. De fato, a solução que emerge da Eq.(4.3), conforme veremos a seguir, pode apresentar dois tipos de regimes: um deles sendo do tipo lei de potência que pode nos conduzir a uma conexão com o formalismo *Tsallis* e o outro é do tipo exponencial sugerindo uma relação com a estatística de *Boltzmann-Gibbs*. Neste sentido, mostramos suas características e obtemos a solução desta equação, Eq.(4.3), usando os procedimentos empregados por Plastino e Plastino [91], os quais são baseados no formalismo de *Tsallis* [92]. Assim, seguindo a referência [91], consideremos que a solução seja dada por

$$\rho(r) = r^{\eta/\nu} \exp_q[-\mathcal{G}(r)]/\mathcal{Z} \quad (4.4)$$

onde a função  $\mathcal{G}(r)$  é determinada pela equação que obtemos ao substituirmos a Eq.(4.4) na Eq.(4.3). A constante  $\mathcal{Z}$  é obtida mediante a condição de normalização, e  $\exp_q$  é a  $q$ -exponencial presente no formalismo de *Tsallis* (ver appendix A). Da substituição da Eq.(4.4) em Eq.(4.3), e levando em conta  $q = 2 - \nu - \gamma$ , a equação que satisfaz  $\mathcal{G}(r)$  é

$$\frac{d}{dr}\mathcal{G}(r) + (q-1)r^{\eta+\theta}\frac{\mathcal{F}_2(r)}{\mathcal{D}\nu}\mathcal{G}(r) = -\frac{r^{\theta+\eta}}{\mathcal{D}\nu}\left[\mathcal{F}_2(r) + \left(\frac{\mathcal{Z}}{r^\nu}\right)^{\gamma+\nu-1}\mathcal{F}_1(r)\right] \quad (4.5)$$

A Eq.(4.5) é uma equação diferencial de primeira ordem ordinária e não homogênea cuja solução pode ser encontrada mediante o emprego de uma fator integrante. Em particular,

fazendo alguns cálculos podemos mostrar que a solução da Eq.(4.5) é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(r) = & -\frac{\mathcal{Z}^{\nu+\gamma-1}}{\mathcal{D}\nu} \int_0^r d\bar{r} \bar{r}^{-\frac{\eta}{\nu}(1-\gamma)+\theta} \mathcal{F}_1(\bar{r}) e^{\frac{q-1}{\mathcal{D}\nu} \left( \int_0^{\bar{r}} d\bar{r} \mathcal{F}_2(\bar{r}) \bar{r}^{\eta+\theta} - \int_0^r d\bar{r} \mathcal{F}_2(\bar{r}) \bar{r}^{\eta+\theta} \right)} \\ & - \ln_q \left[ e^{\frac{1}{\mathcal{D}\nu} \int_0^r d\bar{r} \mathcal{F}_2(\bar{r}) \bar{r}^{\theta+\eta}} \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde  $\ln_q[x] = (x^{1-q} - 1)/(1 - q)$  é a função q-logarítmica que é definido como sendo a função inversa da q-exponencial. Agora, aplicando a Eq.(4.6) na Eq.(4.4), encontramos a solução estacionária

$$\begin{aligned} \rho(r) = & \frac{r^{\eta/\nu}}{\mathcal{Z}} \exp_q \left\{ \frac{\mathcal{Z}^{\nu+\gamma-1}}{\mathcal{D}\nu} \int_0^r d\bar{r} \bar{r}^{-\frac{\eta}{\nu}(1-\gamma)+\theta} \mathcal{F}_1(\bar{r}) e^{\frac{q-1}{\mathcal{D}\nu} \left( \int_0^{\bar{r}} d\bar{r} \mathcal{F}_2(\bar{r}) \bar{r}^{\eta+\theta} - \int_0^r d\bar{r} \mathcal{F}_2(\bar{r}) \bar{r}^{\eta+\theta} \right)} \right. \\ & \left. + \ln_q \left[ e^{\frac{1}{\mathcal{D}\nu} \int_0^r d\bar{r} \mathcal{F}_2(\bar{r}) \bar{r}^{\theta+\eta}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

A equação acima, que corresponde a solução estacionária da Eq.(4.1) para a força externa dada pela Eq.(4.2), pode nos conduzir a dois tipos de comportamentos. Um deles tipicamente exponencial e outro do tipo lei de potência os quais poderíamos associar as distribuições de *Boltzmann-Gibbs* ou de *Tsallis*, como mencionamos anteriormente. Na Fig.(4.1), ilustramos o comportamento de  $\rho(r, t)$  em função de  $r$ . Particularmente, quando escolhemos  $\mathcal{F}_1(r) = 0$ , na Eq.(4.7), obtemos

$$\rho(r) = \frac{r^{\frac{\eta}{\nu}}}{\mathcal{Z}} e^{\frac{1}{\mathcal{D}\nu} \int_0^r d\bar{r} \mathcal{F}_2(\bar{r}) \bar{r}^{\eta+\theta}} \quad (4.8)$$

que corresponde a uma distribuição do tipo *Boltzmann-Gibbs* e, para  $\mathcal{F}_2(r) = 0$ , obtemos uma distribuição do tipo lei de potência que em essência é a distribuição de *Tsallis*

$$\rho(r) = \frac{r^{\frac{\eta}{\nu}}}{\mathcal{Z}} \exp_q \left[ \frac{\mathcal{Z}^{\nu+\gamma-1}}{\mathcal{D}\nu} \int_0^r d\bar{r} \bar{r}^{-\frac{\eta}{\nu}(1-\gamma)+\theta} \mathcal{F}_1(\bar{r}) \right]. \quad (4.9)$$

A partir da solução estacionária, Eq.(4.7), concluímos que a presença de um comportamento exponencial semelhante á distribuição de *Boltzmann-Gibbs*, indica quão a solução pode ter uma relaxação anômala e ter uma solução estacionária do tipo usual, dependendo da escolha de  $\mathcal{F}_1(r)$  e de  $\mathcal{F}_2(r)$ . Efeito semelhante também é verificado nas equações de difusão fracional, as quais envolve uma derivada fracional no tempo [93].

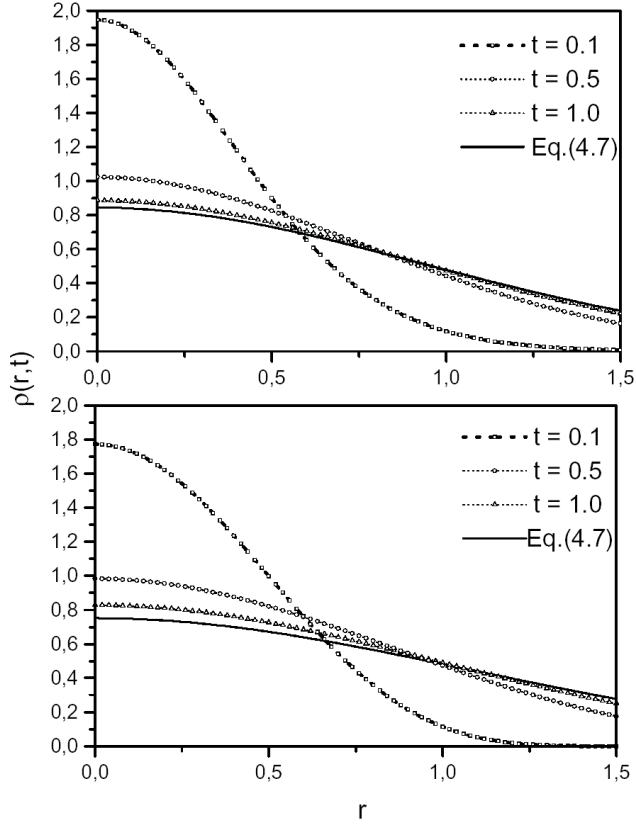


Figura 4.1: Comportamento de  $\rho(r, t)$  versus  $r$ , como ilustração da Eq.(4.1) para valores típicos de  $\nu$  e  $t$  quando consideramos, por simplicidade,  $\mathcal{D} = 1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\eta = 0$ ,  $\mathcal{N} = 1$ ,  $\mathcal{F}_1(r) = 0$  e  $\mathcal{F}_2(r) = -kr$  com  $k = 1$ . Na figura (a), nos ilustramos o caso caracterizado por  $\nu = 0,9$  e na figura (b) o caso  $\nu = 1.2$ . Note que em ambos os casos das soluções para tempos longos obtemos o regime estacionário dado pela Eq.(4.7).

## 4.2 Equação de Fokker-Planck não Linear - Solução Dinâmica

Neste ponto, consideramos o caso dinâmico, isto é, as soluções que são dependentes do tempo. Para isto, consideraremos a força externa dada por

$$\mathcal{F}(r, t, \rho) = -k(t)r + \mathcal{K}/r^{1+\theta+\eta}[\rho(r, t)]^{\nu+\gamma-1} \quad (4.10)$$

que de forma análoga a força externa empregada no caso estacionário possui uma dependência com relação a distribuição do sistema. Particularmente, após substituirmos

esta força externa na Eq.(4.2), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho(r, t) &= \frac{\mathcal{D}}{r^{\mathcal{N}-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^{\mathcal{N}-1-\theta} [\rho(r, t)]^\gamma \frac{\partial}{\partial r} [r^\eta (\rho(r, t))^\nu] \right\} + \\ &+ \frac{1}{r^{\mathcal{N}-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^{\mathcal{N}-1} \left[ k(t)r - \frac{\mathcal{K}}{r^{1+\theta+\eta}} [\rho(r, t)]^{\nu+\gamma-1} \right] \rho(r, t) \right\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Para obter a solução usaremos, por simplicidade, o método de similaridade, descrito no capítulo anterior, de forma a reduzir esta equação diferencial parcial em equações diferenciais ordinárias. Seguindo o procedimento empregado no capítulo anterior, restringimos nossa análise as soluções do tipo

$$\rho(r, t) = \frac{1}{[\Phi(t)]^\mathcal{N}} \mathcal{P} \left( \frac{r}{\Phi(t)} \right) \quad (4.12)$$

que deverão satisfazer às condições de contorno iniciais e a condição de normalização.

Substituindo a Eq.(4.12) na Eq.(4.2), obtemos as seguintes equações

$$\dot{\Phi}(t) = k' [\Phi(t)]^{2-\xi} - k(t) \Phi(t) \quad (4.13)$$

e

$$k' \frac{d}{dz} [z^\mathcal{N} \mathcal{P}(z)] = \mathcal{D} \frac{d}{dz} \left\{ z^{\mathcal{N}-1-\theta} [\mathcal{P}(z)]^\gamma \frac{d}{dz} [z^{-\eta} (\mathcal{P}(z))^\nu] \right\} - \frac{d}{dz} \left\{ z^{\mathcal{N}-1} \left[ \frac{\mathcal{K}}{z^{1+\theta+\eta}} (\mathcal{P}(z))^{\gamma+\nu} \right] \right\} \quad (4.14)$$

onde  $\xi = 3 + \mathcal{N}(\gamma + \nu - 1) + \theta + \eta$ ,  $z = r/\Phi(t)$  e  $k'$  é uma constante que deve ser determinada pela condição de normalização.

A solução da Eq.(4.13), após alguns cálculos, é dada por

$$\Phi(t) = \left[ ((\Phi(0))^{\xi-1} - (\xi-1)k' \mathcal{D} \int_0^t \tilde{d}\tilde{t} \exp \left[ (\xi-1) \int_0^{\tilde{t}} dt' k_1(t') \right] \right)^{\frac{1}{\xi-1}} \cdot \exp \left[ - \int_0^t dt' k_1(t') \right] \right] \quad (4.15)$$

Note que, soluções semelhantes à Eq.(4.15), com uma função dependente do tempo foram encontradas em diferentes equações de difusão fracionárias não lineares [77, 87, 94, 95, 96]. Este fato, indica que diferentes equações de difusão tem uma propagação anômala, similar para a distribuição de probabilidades. A diferença está nos parâmetros presentes na equação de difusão. Para estas soluções, Eq.(4.15), também é possível obter o

comportamento de espalhamento da Eq.(4.11) quando usamos  $\rho(0,t)$ , já que nesta situação  $\langle r^2 \rangle \propto 1/[\rho(0,t)]^2 \propto [\Phi(t)]^2$ . Assim, dependendo dos parâmetros  $\nu$ ,  $\gamma$ ,  $\theta$  e  $\eta$  podemos ter um comportamento da propagação anômalo ou normal, de acordo com o segundo momento. Em particular, para o caso caracterizado pela ausência de forças externas (ver Fig.(4.2)) o segundo momento é

$$\langle r^2 \rangle \sim t^{2/\xi-1} \quad (4.16)$$

onde  $\xi > 3$ ,  $\xi = 3$  ou  $\xi < 3$  nos leva aos comportamentos subdifusivo, normal ou superdifusivo, respectivamente.

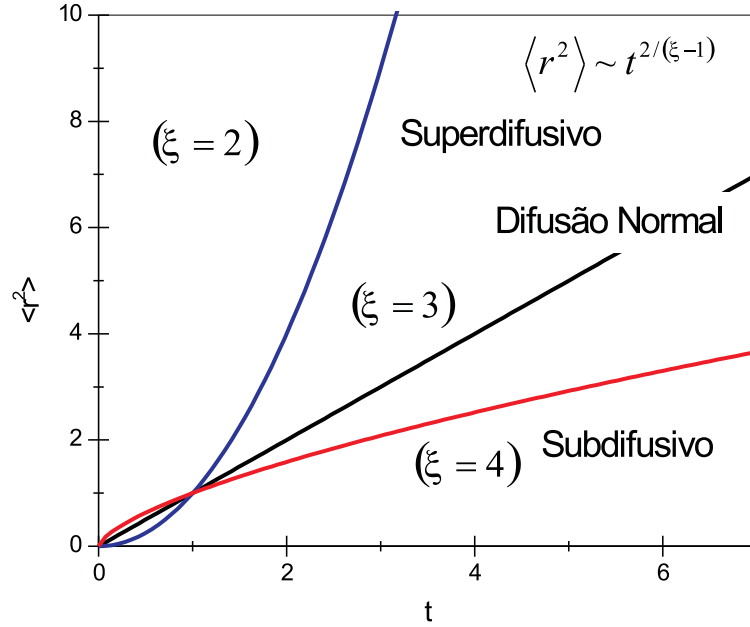


Figura 4.2: Comportamento do segundo momento  $\langle r^2 \rangle \sim t^{2/\xi-1}$ . Para  $\xi > 3$ ,  $\xi = 3$  ou  $\xi < 3$  nos leva aos comportamentos subdifusivo, normal ou superdifusivo.

Agora, vamos direcionar nossa discussão a solução da Eq.(4.14), ou seja, a solução espacial. Para isto, tomamos a integral em ambos os lados da Eq.(4.14), resultando em

$$-k' z^{\mathcal{N}} \mathcal{P}(z) = \mathcal{D}_{\dagger}^{\pm} z^{-1-\theta} [\mathcal{P}(z)]^{\gamma} \frac{d}{dz} [z^{-\eta} (\mathcal{P}(z))^{\nu}] - \mathcal{K} z^{\mathcal{N}-(2+\theta+\eta)} [\Phi(z)]^{\gamma+\nu} + \mathcal{C} \quad (4.17)$$

Para simplificar nossa análise, aproximamos a solução Eq.(4.17) fazendo  $\mathcal{C} = 0$ , devendo satisfazer às condições de contorno  $\mathcal{P}(z \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ . Deste modo, quando aplicamos esta

última consideração na Eq.(4.17), após alguns cálculos, obtemos que

$$\mathcal{P}(z) = z^{\frac{\eta}{\nu} + \frac{\kappa}{\mathcal{D}\nu}} \exp_q \left[ -\frac{\bar{k}z^{\bar{\xi}}}{\mathcal{D}\nu\bar{\xi}} \right] \quad (4.18)$$

onde  $q = 2 - \nu - \gamma$  e  $\bar{\xi} = 2 + \theta + \eta(1 - \gamma)/\nu - \mathcal{K}(\nu + \gamma - 1)/(\mathcal{D}\nu)$  (ver fig.(4.3)).

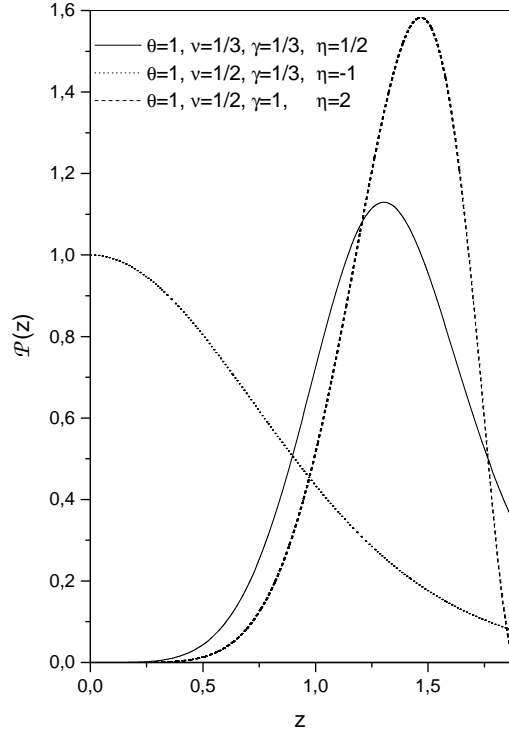


Figura 4.3: Comportamento de  $\mathcal{P}(z)$  versus  $z$ , como ilustração da Eq.(4.18) para valores típicos de  $\theta$ ,  $\nu$ ,  $\eta$  e  $\gamma$ , quando levamos em conta, por simplicidade,  $\mathcal{K} = 1$ ,  $\mathcal{N} = 1$  e  $\mathcal{D} = 1$ . Note que dependendo da escolha desses parâmetros as distribuições podem ter um comportamento compacto ou alongado.

Note que, o comportamento da Eq.(4.18) pode ser compacto ou caracterizado por uma longa cauda dependendo dos parâmetros  $\eta$ ,  $\nu$ ,  $\gamma$  e  $\theta$ . Para o último caso, Eq.(4.18), podemos relacionar a solução obtida com uma distribuição de *Lèvy* no limite assintótico. De fato, quando tomamos o limite assintótico da equação acima Eq.(4.18), para  $z$  muito grande  $\mathcal{P}(z) \sim 1/z^{(2+\theta+\eta)/(q-1)}$  e comparando ao limite assintótico da distribuição de *Lèvy*  $\mathcal{P}(z) \sim 1/z^{1+\mu}$  obtemos  $q = (3 + \theta + \eta + \mu)/(1 + \mu)$ . Agora, substituindo a Eq.(4.18) em Eq.(4.12), obtemos o comportamento explícito de  $\rho(r, t)$  com a coordenada espacial  $r$  que é dada por

$$\rho(r, t) = \left( \frac{1}{\Phi(t)} \right)^{\mathcal{N}} \left( \frac{r}{\Phi(t)} \right)^{\frac{\eta}{\nu} - \frac{\kappa}{\mathcal{D}\nu}} \exp_q \left[ -\frac{k'}{\mathcal{D}\nu\bar{\xi}} \left( \frac{r}{\Phi(t)} \right)^{\bar{\xi}} \right] \quad (4.19)$$

com  $\Phi(t)$  definida pela Eq.(4.15). A Fig.(4.4), mostra o comportamento da Eq.(4.19) no decorrer do tempo.

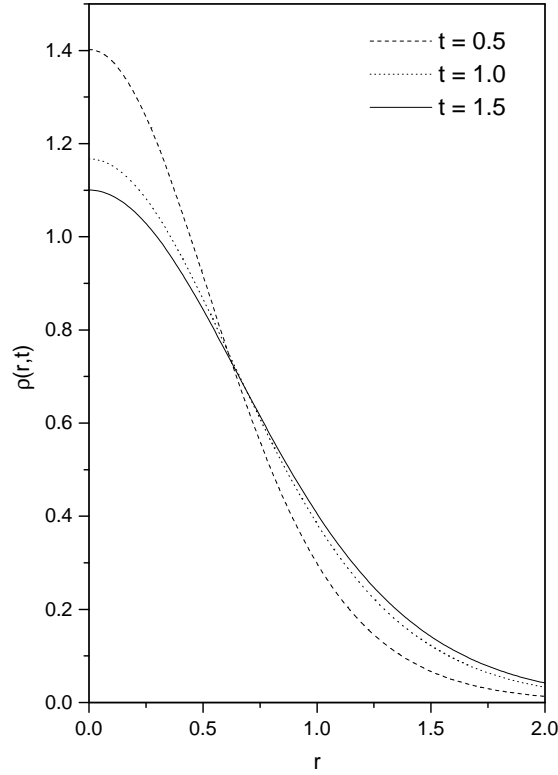


Figura 4.4: Comportamento de  $\rho(r,t)$  versus  $r$ , como ilustrado agora pela Eq.(4.19), que evolui no tempo para  $\theta = 1$ ,  $\nu = 1/2$ ,  $\eta = -1$  e  $\gamma = 1/3$ , por simplicidade, quando levamos em conta  $\mathcal{K} = 1$ ,  $\mathcal{N} = 1$ ,  $\Phi(0) = 0$ ,  $k(t) = 1$  e  $\mathcal{D} = 1$ .

### 4.3 Conclusões

Temos trabalhado com uma equação de difusão não linear  $\mathcal{N}$ -dimensional em várias situações quando consideramos o termo de convecção ou de transporte. Assim, temos analisado a solução estacionária e o caso dependente do tempo que emerge desta equação.

Para o caso estacionário foi verificado que a solução obtida apresenta dois comportamentos: um comportamento tipo lei de potência e outro, exponencial. Logo, para o primeiro caso, é possível identificar a solução encontrada aqui com o formalismo *Tsallis* e no segundo caso é estabelecido uma conexão com o formalismo *Boltzmann-Gibbs*.

Para o segundo caso, o comportamento é muito interessante, já que a solução tem uma relaxação anômala na solução estacionária usual. Tal comportamento é encontrado na equação de difusão fracional que envolve uma derivada fracionária no tempo [93].

Para o caso dependente do tempo (caso dinâmico), obtemos soluções exatas onde o espaço é escalado como uma função de tempo, e conduz a uma distribuição do tipo lei de potência com um comportamento compacto ou alongado dependendo dos valores dos parâmetros  $\nu$ ,  $\theta$ ,  $\eta$ ,  $\gamma$ ,  $\mathcal{K}$  e  $\mathcal{D}$ . Em particular, para este último caso, caracterizado pelo comportamento alongado, a distribuição foi conectada com a distribuição de *Lèvy* no limite assintótico. Contudo, é interessante notar que a dependência temporal na solução é do tipo lei de potência devido a escolha do termo de convecção (força). Outras escolhas para este termo podem conduzir a outras soluções diferentes.



# Capítulo 5

## Equação de Fokker Planck não Markoviana: Solução e Primeira Passagem no Tempo da Distribuição

Este capítulo é dedicado ao estudo das soluções e da distribuição de tempo de uma equação de *Fokker Planck linear não markoviana*. Também consideraremos a presença de forças externas e termos absorventes (ou fontes). Desta forma, mostraremos um formalismo, que juntamente com os que trabalhamos nos capítulos anteriores, baseados em equações de difusão não lineares, vem sendo constantemente usado na investigação dos processos difusivos anômalos.

### 5.1 Equação de Fokker Planck não Markoviana

Uma grande classe de fenômenos físicos relacionados com processos de relaxação, em sistemas complexos, podem ser usualmente descritos pela equação de *Fokker-Planck não markoviana* [97]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x, t) = \int_0^t d\tilde{t}\mathcal{K}(t - \tilde{t})\mathcal{L}\{\rho(r, \tilde{t})\} \quad (5.1)$$

onde  $\mathcal{K}(t)$  é o *kernel* no qual leva em conta os efeitos de memória e  $\mathcal{L}\{\dots\}$  é o operador

linear, agindo sobre a variável espacial,

$$\mathcal{L}\{\rho(r, t)\} \equiv \mathcal{D}\tilde{\nabla}^2\rho(r, t) - \nabla \cdot [\bar{F}(r, t)\rho(r, t)] + \alpha(r)\rho(r, t) \quad (5.2)$$

onde  $\mathcal{D}$  é o coeficiente de difusão,  $\tilde{\nabla}^2 \dots = r^{1-N} \frac{\partial}{\partial r} \{r^{N-1-\theta} \frac{\partial}{\partial r} [r^{-\beta} \dots]\}$  é um operador *Laplaciano* modificado (o caso  $\theta = \beta = 0$  recupera o operador *Laplaciano* usual para  $\mathcal{N}$  dimensões com simetria radial),  $\bar{F}(r) = F(r)\hat{r}$  representa uma força externa aplicada ao sistema e  $\alpha(r)$  é o termo absorvente relacionado com o processo de difusão-reação.

Casos particulares, desse operador, foram usados para analisar uma rica variedade de cenários, tais como: difusão em fractais [98, 99, 100], sistemas com condições de contorno finita [101], primeira passagem no tempo relacionada com processos difusivos anômalos [102, 103], elétrons rápidos em um plasma quente na presença de um campo elétrico [104], e turbulência [105, 106]. A Eq.(5.1), também pode ser usada para investigar reações de subdifusão-limitada [107] e fazendo as mudanças satisfatórias podem corresponder a equação de *Schrödinger* para  $\mathcal{K}(t) \propto \delta(t)$  com a massa dependendo da posição, semelhante a primeira investigação na referência [108].

A Eq.(5.1), recupera a equação de difusão usual para  $\mathcal{N}$  dimensões com simetria radial, sem efeitos de memória, para  $\mathcal{K}(t) = \delta(t)$  e  $\theta = \beta = 0$ . A equação de difusão fracionária usada para investigar fenômenos físicos relacionados com difusão anômala [93, 109, 110, 111, 112, 113] pode ser obtida da Eq.(5.1). Quando empregamos um *kernel* satisfatório com  $\beta = 0$  e quando escolhemos os *kernels*  $\mathcal{K}(t) \propto \int d\gamma p(\gamma)t^{\gamma-1}$ , é possível estudar processos lentos sem escala [114]. Também, quando usamos a Eq.(5.1), com limitações bem conhecidas das descrições dos processos difusivos, com a equação de difusão, isto é, a velocidade infinita de propagação de informação inerente a equação parabólica, deve ser evitada pela escolha de um *kernel* satisfatório [115].

Das discussões prévias, notamos a importância desses tipos de equações não somente devido ao vasto cenário no qual podemos sucessivamente descrever, mas também devido ao crescente interesse na viabilidade de cobrir novas situações. Assim, o presente trabalho pretende estabelecer algumas classes de soluções desta equações de *Fokker Planck não markoviana*. Na conexão dessas soluções, investigamos a primeira passagem no tempo da distribuição (FPTD), já que, somente em alguns poucos casos temos as expressões analíticas explícitas das FPTD como aquelas apontadas na referência [116]. Notamos que, o conhecimento das distribuições FPT ( $\mathcal{F}(t)$ ), é essencial para obter a média da primeira passagem no tempo (MFPT). Exemplos das MFPT são: os tempos de escape dos

potenciais randômicos, os intervalos entre spikes neurais [117], a ressonância estocástica [118], e a fadiga de fraturas [119].

O plano deste trabalho é investigar as soluções da Eq.(5.1). Iniciamos considerando o kernel  $\mathcal{K}(t) = \mathcal{K}_0\delta(t) + \mathcal{K}_1t^{\gamma-2}/\Gamma(\gamma-1)$ , a força externa  $F(r) = \mathcal{K}_\nu/r^{1+\nu}$  com  $(\nu = \theta + \beta)$  e o termo absorvente  $\alpha(t) = -\alpha/r^{-\eta}$  com  $(\eta = 2 + \theta + \beta)$ . Depois, discutiremos a primeira passagem no tempo da distribuição relacionando estes processos quando empregamos  $\mathcal{K}_1 = 0$  e  $\alpha = 0$ . Neste contexto, primeiro estudamos as situações caracterizadas pelas condições de contorno definidas em um intervalo finito e, depois, estendemos nossa análise para um intervalo semi-infinito. Em particular, para os casos caracterizados por um intervalo semi-infinito empregamos, por simplicidade,  $\mathcal{K}_0 = 0$ . Em seguida, consideramos a força externa  $F(r) = -kr + \mathcal{K}_\nu/r^{1+\nu}$  e o termo absorvente  $\alpha(r) = -\alpha_1r^\nu - \alpha_2/r^\nu$ .

## 5.2 Soluções e Distribuição de Tempo da Primeira Passagem

Vamos iniciar nossa discussão considerando a Eq.(5.1) na presença de uma força externa  $\mathcal{K}_\nu/r^{1+\nu}$  com  $(\nu = \theta + \beta)$ , sujeita a condição de contorno  $\rho(a, t) = 0$  e na presença do termo absorvente  $\alpha(r) = -\alpha/r^\eta$  com  $(\eta = 2 + \theta + \beta)$ . No intuito de resolver a Eq.(5.1) sujeita a estas condições, vamos empregar a transformada de *Laplace*. Assim, tomando a transformada de *Laplace* e usando o formalismo de função de *Green* [120], obtemos (ver appendix B):

$$\begin{aligned}\rho(r, s) &= \int_0^a d\xi \xi^{\mathcal{K}-1-\beta-\frac{\mathcal{K}_\nu}{\mathcal{D}}} \tilde{\rho}(\xi) \mathcal{G}(r, \xi, s) \\ \mathcal{G}(r, \xi, s) &= \frac{w}{a^w} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\xi r)^{1/2(w+\beta+\frac{\mathcal{K}_\nu}{\mathcal{D}})}}{\{J_{1+p}(\bar{\lambda}_n a^{w/2})\}^2} J_p(\bar{\lambda} \xi^{\frac{w}{2}}) J_p(\bar{\lambda} r^{\frac{w}{2}}) \Phi_n(s) \\ \phi_n(s) &= \frac{1}{s + \mathcal{K}(s) \mathcal{D} \lambda_n^2}\end{aligned}\tag{5.3}$$

no espaço de *Laplace*, com  $w = 2 + \theta + \beta$ ,  $p = \{[N - w + \beta + \mathcal{K}_\nu/\mathcal{D}]^2 + \alpha\}^{1/2}/w$  e  $\bar{\lambda}_n = 2\lambda_n/w$  onde  $J_p(x)$  é a função de *Bessel*. Os autovalores  $\lambda_n$  são obtidos de  $J_p(\bar{\lambda} a^{\frac{w}{2}}) = 0$  e a condição inicial é dada por  $\rho(r, 0) = \tilde{\rho}(r)$ . Aplicar a transformada inversa de *Laplace* na Eq.(5.3) e obter seu resultado é uma tarefa dura, se considerarmos um *kernel* geral  $\mathcal{K}$ . Contudo,

para alguns casos, tais como:  $\mathcal{K}(s) = \mathcal{K}_0$  e  $\mathcal{K}(s) = \mathcal{K}_1 s^{1-\gamma}$ , é possível obter a inversa da transformada de *Laplace*. Em particular, estes casos representam um papel importante na análise dos processos de relaxação de um sistema complexo. De fato, o primeiro caso corresponde a relaxação usual, isto é, no comportamento exponencial e o segundo esta relacionado com a relaxação anômala [109], cujo comportamento é dado em termos da função *Mittag-Leffler* ( $E_\gamma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n / \Gamma(1 + \gamma n)$ ).

Nesta ordem, para unificar estes casos, consideramos  $\mathcal{K}(s) = \mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_1 s^{1-\gamma}$  que nos leva a

$$\Phi_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-\mathcal{K}_0 \mathcal{D} \lambda_n^2 t)^k E_{\gamma, 1+(1-\gamma)k}^{(k)} (-\lambda_n^2 \mathcal{K}_1 \mathcal{D} t^\gamma) \quad (5.4)$$

com  $E_{\lambda, \mu}^{(k)}(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)! x^n / [n! \Gamma(\lambda(n+k) + \mu)]$ . Tomando  $\mathcal{K}_1 = 0$  na Eq.(5.4), obtemos o comportamento usual da exponencial, isto é,

$$\Phi_n(t) = e^{-\mathcal{K}_0 \mathcal{D} \lambda_n^2 t} \quad (5.5)$$

e para  $\mathcal{K}_0 = 0$ , temos

$$\Phi_n(t) = E_\gamma(-\mathcal{K}_1 \mathcal{D} \lambda_n^2 t^\gamma) \quad (5.6)$$

Para estes casos particulares, verificamos que o *kernel*  $\mathcal{K}(s)$ , como mencionamos acima, corresponde a uma mistura da relaxação usual governada pelo comportamento exponencial e da relaxação anômala governada pela função *Mittag-Leffler*. Assim, a Eq.(5.4), apresenta dois regimes difusivos. Situações semelhantes caracterizados por dois regimes poderiam aparecer, por exemplo, em sistemas hamiltonianos com interações de longo-alcance [121, 122] e no transporte ativo intracelular [123]. Agora, usando a definição apresentada na referência [124], podemos obter a distribuição de tempo de primeira passagem relacionanda com os processos cuja dinâmica é dada pela Eq.(5.1) e consideramos a situação previamente estudada. Por simplicidade, consideraremos,  $\mathcal{K}_1 = 0$  e  $\alpha = 0$ . Depois de alguns cálculos, é possível mostrar que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\xi, t) &= \frac{2\mathcal{K}_0 \mathcal{D}}{a^w} \int_0^a d\xi \xi^{(\mathcal{N}-1-\beta-\frac{\kappa_\nu}{\mathcal{D}})} \tilde{\rho}(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^{1/2(w+\beta+\frac{\kappa_\nu}{\mathcal{D}}-\mathcal{N})}}{\{J_{p+1}(\bar{\lambda}_n a^{w/2})\}^2} J_p(\bar{\lambda}_n \xi^{w/2}) \lambda_n^2 e^{-\mathcal{K}_0 \mathcal{D} \lambda_n^2 t} \\ &\times \left[ \frac{w^2}{2\lambda_n^2 \Gamma(p)} \left(\frac{\lambda_n}{w}\right)^p - \frac{w a^{1/2(1-p)}}{2\lambda_n} J_{p-1}\left(\frac{2\lambda_n}{w} a^{w/2}\right) \right] \end{aligned} \quad (5.7)$$

com  $w > \beta + \mathcal{K}_\nu/\mathcal{D} + N$ . O comportamento da Eq.(5.7) pode ser visto na Fig.(5.1) para alguns valores de  $\beta$  e  $\mathcal{K}_\nu$ . Em particular, este é o resultado obtido para distribuição em primeira passagem no tempo ampliando os resultados obtidos em [103].

Podemos estender os resultados obtidos anteriormente, Eq.(5.7), para Eq.(5.1), quando consideramos  $a \rightarrow \infty$ , e para o caso caracterizado, por simplicidade, quando  $\mathcal{K}(t) = \mathcal{K}_1 t^{\gamma-2}/\Gamma(\gamma-1)$  com  $\mathcal{K}_1 = 1$ . Esta escolha para o *kernel* conduz a uma equação de difusão fracionária, no qual pode ser útil para investigar várias situações, tais como transporte de uma substância em um solvente de um recipiente para outro por uma membrana fina [125], compressão de fluxo aleatório [126] e translocação assimétrica de DNA [127]. Para obter a solução neste contexto, é útil usar

$$\begin{aligned}\rho(r, t) &= \int_0^\infty dk \mathcal{C}(k, t) \Psi(r, k) \\ \Psi(r, k) &= r^{1/2(w+\beta+\frac{\mathcal{K}_\nu}{\mathcal{D}}-N)} J_p \left( \frac{2}{w} k r^{w/2} \right),\end{aligned}\quad (5.8)$$

onde  $\mathcal{C}(k, t)$  é o *kernel* que deve ser encontrado. Substituindo a Eq.(5.8) na Eq.(5.1) e mantendo a força externa e o termo absorvente, como definidos anteriormente, obtemos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{C}(k, t) = -\mathcal{D}k^2 \int_0^\infty d\tilde{t} \mathcal{K}(t - \tilde{t}) \mathcal{C}(k, \tilde{t}) \quad (5.9)$$

Resolvendo a Eq.(5.9), achamos

$$\mathcal{C}(k, t) = \mathcal{C}(k, 0) E_\gamma(-k^2 \mathcal{D}t^\gamma) \quad (5.10)$$

onde  $\mathcal{C}(k, 0)$  é determinado pelas condições iniciais. Da condição inicial  $\rho(r, 0) = \tilde{\rho}(r)$ , obtemos que

$$\mathcal{C}(k, 0) = \frac{2k}{w} \int_0^\infty d\xi \xi^{\mathcal{N}-1-\beta-\frac{\mathcal{K}_\nu}{\mathcal{D}}} \tilde{\rho}(\xi) \Psi(\xi, k) \quad (5.11)$$

Assim, a solução é dada por

$$\begin{aligned}\rho(r, t) &= \int_0^\infty d\xi \xi^{\mathcal{N}-1-\beta-\frac{\mathcal{K}_\nu}{\mathcal{D}}} \tilde{\rho}(\xi) \mathcal{G}(r, \xi, t) \\ \mathcal{G}(r, \xi, t) &= \frac{2}{w} \int_0^\infty dk k \Psi(\xi, k) \Psi(r, k) E_\gamma(-k^2 \mathcal{D}t^\gamma)\end{aligned}\quad (5.12)$$

Note que, se tivéssemos usado  $\mathcal{K}(t) = \mathcal{K}_0 \delta(t) + \mathcal{K}_1 t^{\gamma-2}/\Gamma(\gamma-1)$ , a mudança principal produzida em Eq.(5.12) deveria ser a presença da função  $\Phi(t)$  definida pela Eq.(5.4) ao invés da função *Mittag-Leffler*.

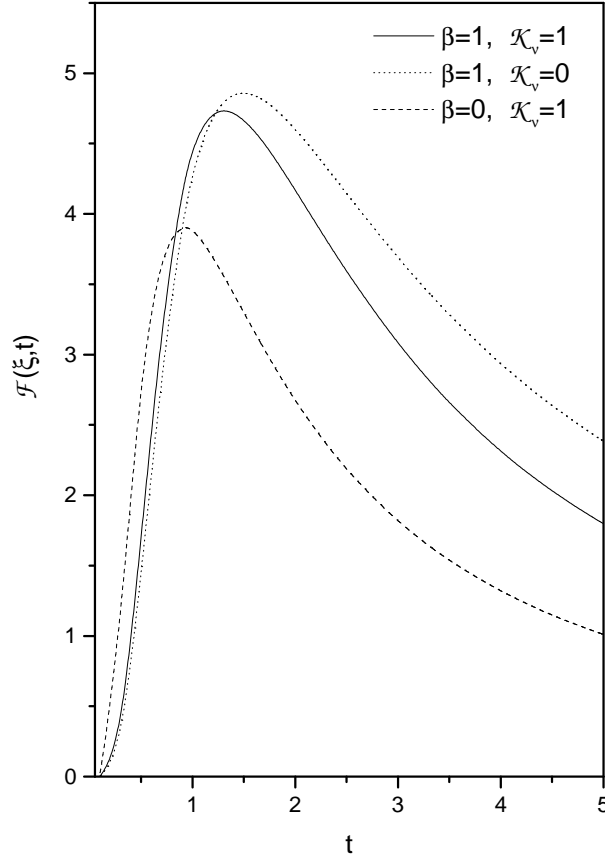


Figura 5.1: Comportamento  $\mathcal{F}(\xi, t)$  versus  $t$  para valores típicos de  $\beta$  e  $\mathcal{K}_\nu$  quando consideramos, por simplicidade,  $\xi = 1, 0$ ,  $a = 3, 0$ ,  $N = 1, 0$ ,  $\theta = 2, 0$ ,  $\mathcal{K}_0 = 3, 0$ ,  $\tilde{\rho}(r) = r^{1+\beta+\mathcal{K}_\nu/\mathcal{D}+N}(\delta - \xi)$  e  $\mathcal{D} = 1, 0$ .

Da equação anterior, Eq.(5.12), dois casos interessantes emergem quando consideramos  $p = 1/2$  com um  $\gamma$  arbitrário e  $\gamma = 1$  com um  $p$  arbitrário ( $p = \{[N - w + \beta + \frac{\mathcal{K}_\nu}{\mathcal{D}}]^2 + \alpha\}^{1/2} / w$ ). Para o primeiro caso, isto é,  $p = 1/2$  com um  $\gamma$  arbitrário, a função de *Green* pode ser reduzida a

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(r, \xi, t) &= \frac{(r\xi)^{1/2(\frac{w}{2} + \beta + \frac{\mathcal{K}_\nu}{\mathcal{D}} - \mathcal{N})}}{\sqrt{4\mathcal{D}t^\gamma}} \\ &\times \left( \mathbf{H}_{1,1}^{1,0} \left[ \frac{2 |r^{w/2} - \xi^{w/2}|}{w\sqrt{\mathcal{D}t^\gamma}} \middle|_{(0,1)}^{(1-\frac{\gamma}{2}, \frac{\gamma}{2})} \right] - \mathbf{H}_{1,1}^{1,0} \left[ \frac{2 |r^{w/2} + \xi^{w/2}|}{w\sqrt{\mathcal{D}t^\gamma}} \middle|_{(0,1)}^{(1-\frac{\gamma}{2}, \frac{\gamma}{2})} \right] \right) \end{aligned} \quad (5.13)$$

onde  $\mathbf{H}_{p,q}^{m,n} [x |_{(b_1, B_1), \dots, (b_q, B_q)}^{(a_1, A_1), \dots, (a_p, A_p)}]$  é a função *H de Fox* [128]. Para o segundo caso,  $\gamma = 1$  com  $p$  arbitrário, podemos simplificar a função de *Green*, na Eq.(5.12), quando usamos a identidade [129]

$$\int_0^\infty dk k J_\nu(\alpha k) J_\nu(\tilde{\beta} k) e^{-\tilde{a}^2 k^2} = e^{-(\tilde{\beta}^2 + \tilde{\alpha}^2)/(4\tilde{a}^2)} I_\nu(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}/(2\tilde{a}^2)) / (2\tilde{a}^2). \quad (5.14)$$

Assim, após usarmos a identidade acima, obtemos

$$\mathcal{G}(r, \xi, t) = (\xi r)^{1/2(w+\beta+\frac{\mathcal{K}_\nu}{\mathcal{D}}-\mathcal{N})} \frac{e^{-\frac{r^w+\xi^w}{w^2\mathcal{D}t}}}{w\mathcal{D}t} I_p \left[ \frac{2(\xi r)^{w/2}}{w^2\mathcal{D}t} \right] \quad (5.15)$$

onde  $I_\nu(x)$  é a função de *Bessel* modificada.

O comportamento assintótico do segundo momento associado com os processos  $\langle r^2 \rangle \sim t^{2/w}$  para tempos longos, onde  $w > 2$ ,  $= 2$  ou  $< 2$  correspondem aos processos de sub, normal e superdifusivos. Em particular, para este caso a primeira passagem no tempo da distribuição é dada por

$$\mathcal{F}(\xi, t) = \frac{\xi^{w-\mathcal{N}} e^{-\frac{\xi^w}{\mathcal{D}tw^2}}}{t\Gamma[1-\tilde{\alpha}](\mathcal{D}w^2t)^{1-\tilde{\alpha}}} \quad (5.16)$$

onde  $\tilde{\alpha} = (\mathcal{N} + \mathcal{K}_\nu/\mathcal{D} + \beta)/w$ ,  $\alpha = 0$  e  $w > \mathcal{N} + \mathcal{K}_\nu/\mathcal{D} + \beta$  (ver Fig.(5.2)). Note que, este resultado para distribuição em primeira passagem no tempo recupera o resultado presente na referência [103] para  $\mathcal{N} = 1$ ,  $\beta = 0$  e  $\mathcal{K}_\nu = 0$ .

Agora, vamos trabalhar a força externa e o termo absorvente incorporando um termo linear a força externa e uma lei de potência positiva no termo absorvente. Mais precisamente, consideramos a força externa  $F(r) = -kr + \mathcal{K}_\nu/r^{1+\nu}$  e o termo absorvente  $\alpha(r) = -\alpha_1 r^\eta - \alpha_2/r^\eta$ . Uma maneira para obter a solução da Eq.(5.1) é tomando as seguintes condições: expandimos  $\rho(r, t)$  em termos das autofunções, isto é, empregamos  $\rho(r, t) = \sum_n \Psi_n(r) \tilde{\Phi}_n(t)$  com  $\Psi_n(r)$  (autofunções) determinadas pela equação espacial

$$\frac{\mathcal{D}}{r^{\mathcal{N}-1}} \frac{d}{dr} \left\{ r^{\mathcal{N}-1} \left[ r^{-\theta} \frac{d}{dr} (r^{-\beta} \Psi_n(r)) - F(r) \Psi_n(r) \right] \right\} + \alpha(r) \Psi_n(r) = -\bar{\lambda}_n \Psi_n(r) \quad (5.17)$$

e  $\tilde{\Phi}_n(t)$ , obtemos da equação temporal

$$\frac{d}{dt} \tilde{\Phi}_n(t) = -\frac{\bar{\lambda}_n}{\Gamma(\gamma-1)} \int_0^t dt' (t-t')^{\gamma-2} \tilde{\Phi}_n(t') \quad (5.18)$$

Assim, depois de alguns cálculos, é possível mostrar que

$$\begin{aligned} \rho(r, t) &= \int_0^\infty d\xi \xi^{(\mathcal{N}-\frac{\mathcal{K}_\nu}{\mathcal{D}}-1-\beta)} \tilde{\rho}(\xi) \mathcal{G}(r, \xi, t) \\ \mathcal{G}(r, \xi, t) &= \left( \frac{\bar{k}}{w\mathcal{D}} \right)^{\bar{\alpha}+1} (r\xi)^{\beta+\mu} e^{-\frac{k}{2w\mathcal{D}}(r^w-\xi^w)} e^{-\frac{\bar{k}}{2w\mathcal{D}}(r^w+\xi^w)} \\ &\times \sum_{n=0}^\infty \frac{w\Gamma(n+1)}{\Gamma(1+\bar{\alpha}+n)} L_n^{(\bar{\alpha})} \left( \frac{\bar{k}\xi^w}{w\mathcal{D}} \right) L_n^{(\bar{\alpha})} \left( \frac{\bar{k}r^w}{w\mathcal{D}} \right) E_\gamma(-\bar{\lambda}_n t^\gamma) \end{aligned} \quad (5.19)$$

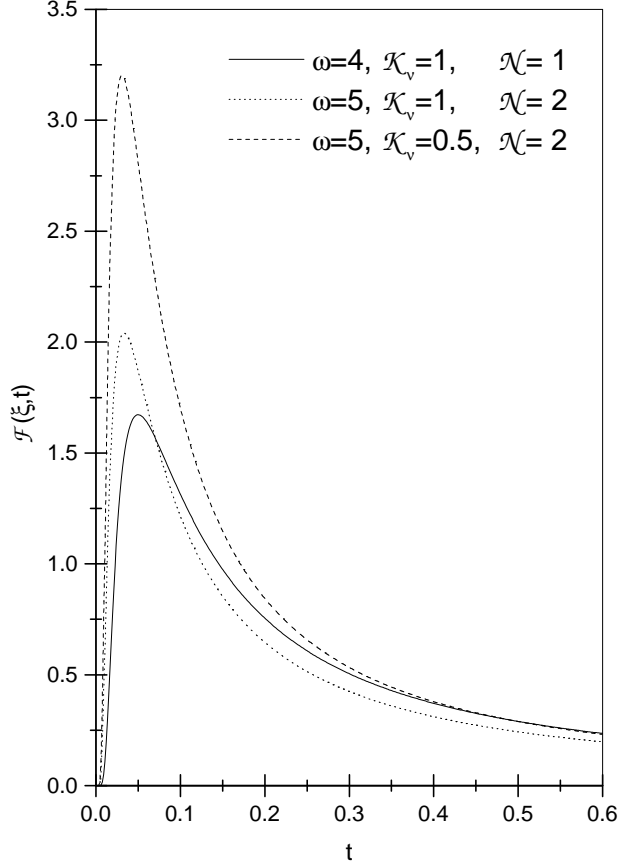


Figura 5.2: Comportamento  $\mathcal{F}(\xi, t)$  versus  $t$  para valores típicos de  $w$ ,  $N$ , e  $\mathcal{K}_\nu$  quando consideramos, por simplicidade,  $\xi = 1, 0$ ,  $\beta = 1, 0$ ,  $\tilde{\rho}(r) = r^{1+\beta+\mathcal{K}_\nu/\mathcal{D}+N}(\delta - \xi)$ , e  $\mathcal{D} = 1, 0$ .

com  $\bar{k} = \sqrt{k^2 + 4\mathcal{D}\alpha_1}$ ,  $\mu = (\mathcal{K}_\nu/\mathcal{D} + 2 + \theta - \mathcal{N} + w\bar{\alpha})/2$ ,  $\bar{\alpha} = \sqrt{2\mathcal{D}\alpha_2 + (\mathcal{K}_\nu + \mathcal{D}(\mathcal{N} - 2 - \theta))^2}/(w\mathcal{D})$ , onde  $L_n^{(\bar{\alpha})}(x)$  são associados aos polinômios de Legendre e  $\bar{\lambda}_n = w\bar{k}\{(1 + \bar{\alpha})/2 + n - k(\mathcal{K}_\nu + \mathcal{D}(\mathcal{N} + \beta))/(2w\mathcal{D}\bar{k})\}$ .

Estes resultados, estendem os resultados encontrados na referência [93] para uma força externa linear e para  $\gamma = 1$ ,  $\mathcal{N} = 1$  e  $\beta = \theta = 0$  recuperamos a solução para o processo *Rayleigh* presente na referência [124]. Outras importantes características a respeito desse caso é que para tempo longo, na ausência do termo absorvente, a solução estacionária usual pode ser recuperada e é dada por  $\rho(r) \sim r^{\mathcal{K}_2/\mathcal{D}+\beta} e^{-kr^w/(w\mathcal{D})}$  para a condição inicial  $\tilde{\rho}(r) = \delta(r)/r^{\mathcal{N}-1}$ . Estas características estão de acordo com os resultados previamente informados nas referências [93, 130]. A seguir apresentamos nossas conclusões.



## 5.3 Conclusões

Neste capítulo, tratamos a equação de *Fokker-Planck não markoviana* considerando a simetria radial. Primeiramente, foi analisado o caso caracterizado pela presença da força externa:  $F(r) = \mathcal{K}_\nu/r^{1+\nu}$  ( $\nu = \theta + \beta$ ) e termo absorvente:  $\alpha(r) = -\alpha/r^\eta$  ( $\eta = 2 + \theta + \beta$ ) considerando um intervalo finito. Também obtemos a primeira passagem no tempo da distribuição para  $\mathcal{K}_1 = 0$  e  $\alpha = 0$ . Depois, estendemos os resultados obtidos para um intervalo semi-infinito e consideramos dois casos particulares da Eq.(5.12). Em seguida, investigamos as soluções da força externa  $F(r) = -kr + \mathcal{K}_\nu/r^{1+\nu}$  e termo absorvente  $\alpha(r) = -\alpha_1 r^\eta - \alpha_2/r^\eta$ . Para estes casos, obtivemos uma solução exata dada pelos termos da função *H de Fox*, funções *Bessel* ou polinômios de *Legendre* associados e a função *Mittag-Leffler*.

A presença das funções: *Fox H* e *Mittag-Leffler* é devida às derivadas fracionárias existentes na equação de difusão. De fato, a presença das derivadas fracionárias na equação de difusão muda o tempo de espera da função densidade de probabilidade. Portanto, temos uma relaxação anômala para estes casos, que diferem dos casos usuais caracterizados por uma relaxação exponencial.

Foi discutido que a solução estacionária da Eq.(5.19) é igual a usual na ausência do termo absorvente. Em particular, este resultado está de acordo com os resultados apresentados na referência [130] a respeito da equação de difusão fracionária e da Termodinâmica. Temos estendidos os resultados apresentados na referência [131] para uma equação de difusão fracionária, o processo *Rayleigh* [124] e os resultados assintóticos informados na referência [93] para modelos homogêneos e caminhantes aleatórios isotrópicos.

# Capítulo 6

## Conclusões Gerais e Perspectivas

Ao longo do presente trabalho abordamos vários tipos de equações de difusão que generalizam a equação de difusão usual. Começamos pela análise da equação usual de difusão devido ao fato de que a sua compreensão e, conseqüentemente, das situações físicas que a rodeiam é de suma importância para o entendimento das situações gerais.

Assim, depois de uma rápida introdução sobre a equação de difusão usual e alguns formalismos relacionados a ela, abordamos as equações de difusão que são não lineares. Particularmente, consideramos a presença de termos não lineares tanto na parte difusiva quanto na força externa. Em ambos os casos, conseguimos obter soluções que estendem a solução usual e estão relacionadas com a distribuição que advém do formalismo de *Tsallis*. Ressaltando, que quando consideramos a presença de uma força não linear na equação de difusão, mostramos que é possível obter um comportamento tipo exponencial sugerindo uma conexão com o contexto termoestatístico usual. Este fato, também nos revela que estas soluções podem sofrer uma relaxação anômala e atingir um estado de equilíbrio do tipo *Boltzmann-Gibbs* o que é algo muito interessante. Em particular, este fato já foi mostrado para as equações de difusão que são fracionárias no tempo e lineares.

A seguir, investigamos uma equação de difusão não markoviana linear que possui um *kernel* que dá a dinâmica do processo difusivo. Particularmente, a nossa escolha na primeira etapa mistura tanto o comportamento usual quanto o comportamento obtido através de uma equação que emprega derivadas fracionárias. Os resultados obtidos, neste contexto, pensando no formalismo de caminhantes aleatórios, correspondem a uma mudança na distribuição do tempo de espera entre saltos. Tais modificações, influenciaram

diretamente as soluções que passaram a ser expressas em termos das funções de *Mittag-Leffler* ou *H de Fox*. Neste sentido, o segundo momento associado a estas distribuições nos levou a obter um alargamento da distribuição de uma forma anômala, diferente do caso usual que é linear com o tempo.

Seguindo com nossas investigações, consideramos a distribuição de tempo associada a estas equações de difusão. Embora tenhamos investigado várias situações, este tema ainda carece de muito estudo. Uma etapa futura seria investigar situações físicas onde o formalismo abordado aqui pudesse ser aplicado e buscar extensões dos nossos resultados.

Neste contexto, temos por exemplo o modelo do pente (“comb-model”)[132, 133, 134] que tem sido empregado, entre outras coisas, no estudo da propagação de células cancerígenas [135]. Outra possível extensão seria considerar a presença de termos convectivos não lineares. Por fim, esperamos que os resultados obtidos aqui venham a ser úteis na discussão de situações que envolvam ou estejam relacionados a processos difusivos anômalos em geral.

# Apêndice A

## Generalização do Conceito de Entropia Proposta por Constantino Tsallis (1988)

O conhecimento científico vem se destacando por desenvolver novas tecnologias, avançando cada vez mais com novas descobertas, como: a nanotecnologia (computadores mais avançados, DVDs, Pendrives), o estudo e as aplicações de células tronco (cura de doenças, talvez câncer), as novas galáxias (estrelas), entre outros. Existe uma grande preocupação do homem sobre o futuro de sua espécie, e logo surge a necessidade de conhecermos novos sistemas físicos (mundos) que estão onipresentes em nosso cotidiano. Um bom exemplo disso são as várias interpretações da entropia.

A ciência tem aprimorado cada vez mais o conceito de entropia e hoje temos inúmeros sistemas físicos que podem ser caracterizados por diferentes abordagens da entropia. O conceito de entropia usual está atualmente ligado a muitos ramos da ciência, pois permite diversas interpretações [136]. Vejamos algumas: na termodinâmica, ela está associada a medida do grau da irreversibilidade de um dado processo físico. Na mecânica estatística, ela está associada a medida do grau de desordem de um dado sistema ou ainda, pode ser associada a medida da desinformação que se tem respeito de um determinado sistema. Este último conceito está relacionado com a teoria da informação [137].

Uma proposta de generalização do conceito de entropia usual abre terreno para

inúmeras aplicações em sistemas ainda não abordados. Por exemplo, setores com interações de longo alcance ou longa memória.

### A.0.1 Origem da Entropia

Quem primeiro formulou o conceito de entropia (do grego “*transformação*”), foi *Clausius*. Este conceito surgiu no âmbito da Termodinâmica, na metade do século XIX, impulsionado pelo advento das máquinas térmicas. Naquela época havia, duas visões conflitantes para explicar a obtenção de trabalho [138]. A primeira é o princípio de *Carnot-Kelvin*, que diz: o trabalho produzido dependia da diferença de temperatura entre uma fonte fria e uma fonte quente (*qualidade*). Já a outra, conhecida como princípio de *Mayer-Joule*: trabalho era proporcional ao calor, o chamado *equivalente mecânico*, dependendo assim da quantidade. *Clausius*, em 1850, unifica estas duas visões quando formulou o hoje chamado **Teorema de Clausius**.

A consequência mais importante do Teorema de *Clausius* é a existência de uma nova função de estado associada a um estado de equilíbrio termodinâmico de um sistema, a **Entropia**. *Clausius* é o autor da seguinte frase: “*A energia do Universo é constante. A entropia do Universo tende para um máximo*”.

Vamos supor, em um processo termodinâmico, entre o estado inicial  $i$  e o estado final  $f$ , ocorre troca de calor e trabalho com as vizinhanças. Para processos reversíveis, as quantidades de matéria, o calor e o trabalho serão as mesmas, nos dois sentidos do processo. Neste caso, não há variação de entropia, pois a variação total de energia entre sistema mais vizinhança é nula.

Porém, se o processo for irreversível, essas quantidades não mais se compensarão, devido a uma perda definitiva de energia sob a forma de calor oriundas de parte da energia sob a forma de trabalho. Esta variação total de energia é sempre positiva, acarretando um aumento da entropia, ou seja,  $\Delta S \geq 0$ . Esta observação corresponde a segunda lei da termodinâmica, usando o conceito de entropia.

Todos estes fatos, conduz-nos interpretar a entropia, no âmbito da termodinâmica, como sendo a medida da irreversibilidade dos processos físicos. O formalismo de *Tsallis* para generalizar o conceito de entropia, mantém esse caracter de irreversibilidade [139], verificado através do *teorema H de Boltzmann* [140].

A entropia também representa a pedra fundamental da mecânica estatística, com

a expressão de *Boltzmann-Gibbs*, e exerce papel central na teoria da informação. Além disso, ela encontrou terreno fértil em sua interpretação física, permitindo que outras áreas do conhecimento também se beneficiassem, tais como filosofia, economia, computação, biologia, etc.

## A.0.2 Abordagem Axiomática da Entropia

A abordagem axiomática da entropia, baseada em postulados, surgiu com os trabalhos de Caratheódory [141] e Tisza [138]. A versão mais didática dos postulados foi enunciada por Callen [142], e assim para fazer a conexão com o formalismo não-extensivo, iremos descrevê-los a seguir:

**Postulado I:** *Existência de estados de equilíbrio de sistemas simples macroscopicamente caracterizados completamente pela energia interna, volume e número de moles das espécies químicas constituintes.*

**Postulado II:** *Existência da entropia  $S$ , função dos parâmetros extensivos de um sistema composto, que é máxima no estado de equilíbrio.*

**Postulado III:** *A entropia é uma função contínua, diferenciável e monotonicamente crescente da energia, e é aditiva sobre os sub-sistemas constituintes.*

**Postulado IV:** *A entropia se anula na temperatura de zero absoluto.*

## A.0.3 Proposta de Generalização da Entropia

A proposta de *Constantino Tsallis (Tsallis)* de generalizar o conceito de entropia provoca a violação da aditividade, indicado pelo terceiro postulado, e conseqüentemente, leva ao rompimento de um conceito básico na Termodinâmica – o de *sistema isolado*. A idéia de sistema isolado, neste contexto, significa que antes do sistema composto ser formado (existir), os subsistemas já interagiam entre si, e não eram, portanto, isolados.

A formulação extensiva da entropia para um sistema composto é dada pela soma dos subsistemas

$$S^{(A+B)} = S^{(A)} + S^{(B)}$$

Agora, na formulação não extensiva da entropia (formulação de *Tsallis*), um sistema composto apresenta uma entropia generalizada dada por

$$S_q^{(A+B)} = S_q^{(A)} + S_q^{(B)} + \frac{(1-q)}{k} S_q^{(A)} S_q^{(B)} \quad (\text{A.1})$$

onde  $q$  é o índice entrópico que caracteriza a generalização.

Analisando a Eq.(A.1), cada subsistema isolado, ( $A$ ) e ( $B$ ), contribui para formação do sistema composto ( $A + B$ ) da seguinte forma

$$S_q^{(A)} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{(1-q)}{k} S_q^{(B)} \right] \quad (\text{A.2})$$

$$S_q^{(B)} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{(1-q)}{k} S_q^{(A)} \right] \quad (\text{A.3})$$

Basta olharmos para as equações anteriores, Eq.(A.2) e Eq.(A.3), para notarmos que os subsistemas,  $A$  e  $B$ , isolados, sentem a presença um do outro, quebrando o conceito de sistema isolado.

Para o leitor interessado em obter a Eq.(A.1), que representa uma nova forma funcional para a entropia, indicaremos um possível caminho. Este caminho foi proposto por Sumiyoshi Abe [143]. Ele usou o conceito de derivada generalizada, proposta por *Jackson*, em 1909 [144, 145]. *Abe*, então, obtem uma nova forma entrópica generalizada, e como um caso particular, obtemos a Eq.(A.1).

Para distinguir a entropia não extensiva da entropia usual (extensiva) simbolizaremos a entropia extensiva por  $S_1$  dentro do formalismo não extensivo. O termo  $(1 - q)$  dá a medida da não extensividade, ou também dito como não aditividade. Isso significa dizer que

$$\left\{ \begin{array}{ll} q < 1 & \longrightarrow \text{ a entropia é maior que a soma dos subsistemas (super-extensiva).} \\ q = 1 & \longrightarrow \text{ a entropia é extensiva.} \\ q > 1 & \longrightarrow \text{ a entropia é menor que a soma dos subsistemas (sub-extensiva).} \end{array} \right.$$

O significado mais profundo da entropia foi descoberto por *Boltzmann*, no final do século XIX. Ele se deu conta que a entropia poderia ser usada para conectar o movimento

microscópico de partículas com o mundo macroscópico. Para um sistema com energia, volume e número de partículas constante (este conjunto de estados é denominado *ensemble microcanônico*), estando este sistema macroscópico isolado, e que seus microestados  $W$  sejam igualmente prováveis, sua entropia é dada por

$$S_1 = k_B \ln W \quad (\text{A.4})$$

onde  $k_B$  é a constante de *Boltzmann*, que corresponde a um valor positivo, e que define a unidade em que a entropia é medida, ( $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ ).

É desta relação, Eq.(A.4), que vem a interpretação da entropia como uma medida de desordem de um sistema. Por exemplo, quando queremos por ordem em casa, dizemos: “*cada coisa em seu lugar*” – existe apenas um local para guardar cada objeto, logo,  $W = 1$  e  $S_1 = 0$ . A casa desordenada segue o lema “*qualquer coisa em qualquer lugar*”. Quanto maior o número de estados acessíveis, maior a desordem, maior a entropia.

A forma mais geral da entropia de *Boltzmann-Gibbs* é dada pela expressão

$$S_1(p_i) = -k_B \sum_{i=1}^W p_i \ln(p_i) \quad (\text{A.5})$$

onde  $p_i$  é a probabilidade do sistema ser encontrado no microestado  $i$ .  $p_i$  é a fração de tempo que o sistema permanece no estado  $i$ , durante sua viagem no espaço de fase.

Para introduzir as funções generalizadas associadas à mecânica estatística não extensiva, usamos a definição da função logarítmica generalizada (q-logarítmica), dada por

$$\ln_q x \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \quad (\text{A.6})$$

Se analisarmos o ensemble microcanônico, no qual todos os estados acessíveis são equiprováveis ( $p_i = 1/W$ ), obtemos

$$S_q[1/W] = k \frac{W^{1-q} - 1}{1 - q} \quad (\text{A.7})$$

onde o índice entrópico  $q$  aparece pela primeira vez na expressão da entropia. Chameremos esta expressão de *entropia generalizada* (q-entropia). Existem diversas outras expressões



para entropia que caracterizam um sistema físico, contudo, não é do interesse desse trabalho.

# Apêndice B

## Obtenção da Distribuição $\rho(r, s)$

### B.0.4 Equação de Fokker-Planck não Markoviana com Termo de Memória

Na equação de *Fokker Planck não markoviana* com termo de memória

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x, t) = \int_0^t dt \mathcal{K}(t - \tilde{t}) \mathcal{L}\{\rho(r, \tilde{t})\} \quad (\text{B.1})$$

onde  $\mathcal{K}$  é o *kernel* no qual leva os efeitos de memória e  $\mathcal{L}$  é o operador linear, agindo sobre a variável espacial, o qual consideramos, fora da generalidade, dado por

$$\mathcal{L}\{\rho(r, t)\} \equiv \mathcal{D}\tilde{\nabla}^2\rho(r, t) - \nabla \cdot [\bar{F}(r, t)\rho(r, t)] + \alpha(r)\rho(r, t) \quad (\text{B.2})$$

onde  $\mathcal{D}$  é o coeficiente de difusão,  $\tilde{\nabla}^2 \dots = r^{1-N} \frac{\partial}{\partial r} \{ r^{N-1-\theta} \frac{\partial}{\partial r} [r^{-\beta} \dots] \}$  é o operador *Laplaciano* modificado (estamos considerando que o problema possui simetria radial, isto é, o *Laplaciano* modificado possui dependência somente na variável  $r$ ; o caso  $\theta = \beta = 0$  recupera o operador *Laplaciano* usual para N-dimensões com simetria radial). O termo  $\bar{F}(r) = F(r)\hat{r}$  representa uma força externa aplicada ao sistema e  $\alpha(r)$  é o termo absorvente relacionado com o processo de difusão reação.

Iniciaremos nossa discussão, considerando a Eq.(B.1) na presença de uma força externa  $\mathcal{K}_\nu r^{-1-\nu}$  ( $\nu = \theta + \beta$ ), sujeito a condição de contorno  $\rho(a, t) = 0$  e na presença do termo absorvente  $\alpha(r) = \alpha r^{-\eta}$  ( $\eta = 2 + \theta + \beta$ ).

Agora, vamos propor uma solução para  $\rho(r, t)$  dada por

$$\rho(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t) \Psi_n(r) \quad (\text{B.3})$$

onde  $\Phi_n(t)$  e  $\Psi_n(r)$  são funções a serem determinadas.

Aplicando a Eq.(B.3) na Eq.(B.1), obtemos

$$\frac{d}{dt}\Phi_n(t) = -\lambda_n^2 \mathcal{D} \int_0^t dt \tilde{\mathcal{K}}(t - \tilde{t}) \Phi_n(\tilde{t}) \quad (\text{B.4})$$

onde

$$-\lambda_n^2 \mathcal{D} = \frac{1}{\Psi_n(r)} \left[ \tilde{\nabla}^2 \Psi_n(r) - \nabla \cdot \left( \frac{\mathcal{K}_\nu}{\mathcal{D}} r^{-1-\nu} \Psi_n(r) \right) - \frac{\alpha r^{-\eta}}{\mathcal{D}} \Psi_n(r) \right] \quad (\text{B.5})$$

Nesta última equação, Eq.(B.5), podemos substituir o operador *Laplaciano* modificado, e então, reescrevê-la como

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^{N-1}} \frac{d}{dr} \left[ r^{N-1-\theta} \frac{d}{dr} (r^{-\beta} \Psi_n(r)) \right] \\ & - \frac{\mathcal{K}_\nu}{\mathcal{D}} \frac{1}{r^{N-1}} \frac{d}{dr} (r^{N-1} r^{-1-\nu} \Psi_n(r)) - \frac{\alpha r^{-\eta}}{\mathcal{D}} \Psi_n(r) = -\lambda_n^2 \mathcal{D} \Psi_n(r) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

A Eq.(B.6), ainda, pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dr^2} \Psi_n(r) + \left[ N - (1 + \theta + 2\beta) - \frac{\mathcal{K}_\nu}{\mathcal{D}} \right] \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \Psi_n(r) \\ & \left[ \lambda_n^2 r^{2+\theta+\beta} - \left( \frac{\alpha}{\mathcal{D}} + N - (2 + \theta + \beta) \right) \left( \beta + \frac{\mathcal{K}_\nu}{\mathcal{D}} \right) \right] \frac{1}{r^2} \Psi_n(r) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Fazendo

$$1 - 2a = \left[ N - (1 + \theta + 2\beta) - \frac{\mathcal{K}_\nu}{\mathcal{D}} \right] \quad (\text{B.8})$$

$$\theta + \beta = 2(c - 1) \quad (\text{B.9})$$

$$(bc)^2 = \lambda_n^2 \quad (\text{B.10})$$

$$a^2 - p^2 c^2 = - \left[ \left( \frac{\alpha}{\mathcal{D}} + N - (2 + \theta + \beta) \right) \left( \beta + \frac{\mathcal{K}_\nu}{\mathcal{D}} \right) \right] \quad (\text{B.11})$$

Obtemos

$$\frac{d^2}{dr^2} \Psi_n(r) + (1 - 2a) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \Psi_n(r) + \left[ (bc)^2 r^{2(c-1)} + \frac{a^2 - p^2 c^2}{r^2} \right] \Psi_n(r) = 0 \quad (\text{B.12})$$

Agora, vamos comparar a Eq.(B.12), com a equação que segue

$$y'' + (1 - 2a) \frac{1}{x} y' + \left[ (bc)^2 x^{2(c-1)} + \frac{a^2 - p^2 c^2}{x^2} \right] y = 0 \quad (\text{B.13})$$

cuja solução é do tipo

$$y = x^a J_p(bx^c) \quad (\text{B.14})$$

onde  $J_p$  é a função de *Bessel*. Logo

$$\Psi_n(r) = r^{\frac{1}{2}(w+\beta+\frac{\kappa}{\mathcal{D}}-N)} J_p\left(\frac{2\lambda_n}{w} r^{w/2}\right) \quad (\text{B.15})$$

onde  $w = 2 + \theta + \beta$  e  $p = \left\{ \left[ N - w + \beta + \frac{\kappa}{\mathcal{D}} \right]^2 + 4\alpha/\mathcal{D}^{1/2} \right\}$ . Agora, voltaremos a Eq.(B.4), que representa a evolução temporal.

$$\frac{d}{dt} \Phi_n(t) = -\lambda_n^2 \mathcal{D} \int_0^t d\tilde{t} \mathcal{K}(t - \tilde{t}) \Phi_n(\tilde{t}) \quad (\text{B.16})$$

por definição, a transformada de *Laplace* de  $\Phi'_n(t)$  é

$$\mathcal{L}[\Phi'_n(t)] = s\mathcal{L}[\Phi_n(t)] - \Phi_n(0) = s\Phi_n(s) - \Phi_n(0) \quad (\text{B.17})$$

que corresponde ao lado esquerdo da Eq.(B.16). Já, o lado direito da Eq.(B.16), corresponde a uma integral de convolução, cuja a transformada de *Laplace* é dada por

$$\mathcal{L}[h(t)] = \mathcal{K}(s)\Phi_n(s) \quad (\text{B.18})$$

onde  $h(t) = \int_0^t d\tilde{t} \mathcal{K}(t - \tilde{t}) \Phi_n(\tilde{t})$  é a integral de convolução.

Assim, igualando as equações Eq.(B.17 e Eq.(B.18) e, multiplicando por  $-\lambda_n^2$ , obtemos a transformada de *Laplace* da Eq.(B.16). Logo

$$s\Phi_n(s) - \Phi_n(0) = -\lambda_n^2 \mathcal{K}(s) \mathcal{D} \Phi_n(s) \quad (\text{B.19})$$

então

$$\Phi_n(s) = \frac{\Phi_n(0)}{s + \lambda_n^2 \mathcal{D} \mathcal{K}(s)} \quad (\text{B.20})$$

onde  $\mathcal{K}(s)$  é o *kernel* de memória.

Encontrar a transformada inversa de *Laplace*,  $\mathcal{L}^{-1}$ , da Eq.(B.20) para um *kernel* geral, é uma tarefa muito difícil. Como um caso particular, iremos considerar um *kernel* do tipo:  $\mathcal{K}(s) = \mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_1 s^{1-\gamma}$ , onde unificamos os casos:  $\mathcal{K}(s) = \mathcal{K}_0$  e  $\mathcal{K}(s) = \mathcal{K}_1 s^{1-\gamma}$ . Logo

$$\Phi_n(s) = \frac{\Phi_n(0)}{s + \lambda_n^2 \mathcal{D} [\mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_1 s^{1-\gamma}]} \quad (\text{B.21})$$

Antes de obtermos a transformada inversa de *Laplace* da Eq.(B.21), vamos relembrar a função *Mittag-Leffler*.

$$E_\alpha \left[ - \left( \frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{u + \tau^{-\alpha} u^{1-\alpha}} \right] \quad (\text{B.22})$$

Assim, a transformada inversa de *Laplace* da Eq.(B.21) é dada por

$$\Phi_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (-\mathcal{K}_0 \mathcal{D} \lambda_n^2 t)^k E_{\gamma, (1-\gamma)k}^{(k)} (-\lambda_n^2 \mathcal{K}_1 \mathcal{D} t^\gamma) \quad (\text{B.23})$$

onde usamos  $E_{\lambda, \mu}^{(k)}(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)! x^n / [n! \Gamma(\lambda(n+k) + \mu)]$ .

A Eq.(B.3) representa uma solução geral, contudo, vamos obter a solução estacionária, partindo da seguinte condição inicial.

$$\rho(r, 0) = \tilde{\rho}(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(r) \Phi_n(0) \quad (\text{B.24})$$

logo, podemos reescrever a Eq.(B.24) como

$$\int_0^a dr r^{N-1-\beta-\frac{\kappa\nu}{\mathcal{D}}} \Psi_n(r) \tilde{\rho}(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(0) \int_0^a dr r^{N-1-\beta-\frac{\kappa\nu}{\mathcal{D}}} [\Psi_n(r)]^2 \quad (\text{B.25})$$

substituindo a Eq.(B.15) na Eq.(B.25), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^a dr r^{N-1-\beta-\frac{\kappa\nu}{\mathcal{D}}} \Psi_n(r) \tilde{\rho}(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(0) \int_0^a dr r^{N-1-\beta-\frac{\kappa\nu}{\mathcal{D}}} \times \\ &\times [r^{\frac{1}{2}(w+\beta+\frac{\kappa}{\mathcal{D}}-N)} J_p(\frac{2\lambda_n}{w} r^{w/2})]^2 \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

ou, ainda

$$\int_0^a dr r^{N-1-\beta-\frac{\kappa\nu}{\mathcal{D}}} \Psi_n(r) \tilde{\rho}(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(0) \int_0^a dr r^{w-1} [J_p(\frac{2\lambda_n}{w} r^{w/2})]^2 \quad (\text{B.27})$$

Mas, a solução da integral do lado direito da Eq.(B.27) é dada por

$$\int_0^a dr r^{w-1} [J_p(\frac{2\lambda_n}{w} r^{w/2})]^2 = \frac{a^w}{w} J_{p+1}^2 \left( \frac{2\lambda}{w} a^{w/2} \right) \quad (\text{B.28})$$

assim

$$\Phi_n(0) = \frac{w}{a^w} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_{p+1}^2 \left( \frac{2\lambda}{w} a^{w/2} \right)} \int_0^a dr r^{N-1-\beta-\frac{\kappa\nu}{\mathcal{D}}} \Psi_n(r) \tilde{\rho}(r) \quad (\text{B.29})$$

A solução estacionária completa fica

$$\rho(r, 0) = \frac{w}{a^w} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_{p+1}^2 \left( \frac{2\lambda}{w} a^{w/2} \right)} \int_0^a d\xi \xi^{N-1-\beta-\frac{\kappa\nu}{\mathcal{D}}} \Psi_n(\xi) \tilde{\rho}(\xi) \Psi_n(r) \quad (\text{B.30})$$

onde,  $\Psi_n(r)$  e  $\Psi_n(\xi)$  são dados por

$$\Psi_n(r) = r^{\frac{1}{2}(w+\beta+\frac{\kappa}{\mathcal{D}}-N)} J_p\left(\frac{2\lambda_n}{w} r^{w/2}\right) \quad (\text{B.31})$$

$$\Psi_n(\xi) = \xi^{\frac{1}{2}(w+\beta+\frac{\kappa}{\mathcal{D}}-N)} J_p\left(\frac{2\lambda_n}{w} \xi^{w/2}\right) \quad (\text{B.32})$$

ainda podemos reescrevê-la da forma

$$\rho(r, 0) = \int_0^a d\xi \xi^{N-1-\beta-\frac{\kappa\nu}{D}} \tilde{\rho}(\xi) \mathcal{G}(r, \xi) \quad (\text{B.33})$$

onde, a função de *Green* é dada por

$$\mathcal{G}(r, \xi) = \frac{w}{a^w} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\xi r)^{\frac{1}{2}(w+\beta+\frac{\kappa}{D}-N)}}{J_{p+1}^2\left(\frac{2\lambda}{w} a^{w/2}\right)} J_p\left(\frac{2\lambda_n}{w} r^{w/2}\right) J_p\left(\frac{2\lambda_n}{w} \xi^{w/2}\right) \quad (\text{B.34})$$

Para a solução do tipo  $\rho(r, s)$ , temos

$$\rho(r, s) = \int_0^a d\xi \xi^{N-1-\beta-\frac{\kappa\nu}{D}} \tilde{\rho}(\xi) \mathcal{G}(r, \xi, s) \quad (\text{B.35})$$

com

$$\mathcal{G}(r, \xi, s) = \frac{w}{a^w} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\xi r)^{\frac{1}{2}(w+\beta+\frac{\kappa}{D}-N)}}{J_{p+1}^2\left(\frac{2\lambda}{w} a^{w/2}\right)} J_p\left(\frac{2\lambda_n}{w} r^{w/2}\right) J_p\left(\frac{2\lambda_n}{w} \xi^{w/2}\right) \Phi_n(s) \quad (\text{B.36})$$

onde,  $\Phi_n(s)$  é dado por

$$\Phi_n(s) = \frac{\Phi_n(0)}{s + \lambda_n^2 \mathcal{DK}(s)} \quad (\text{B.37})$$

# Bibliografia

- [1] R. Brown, *Phil. Mag.* **4**, 161 (1828).
- [2] Einstein, A., *Albert Einstein: Investigations on the Theory of the Brownian Movement*. Dover Publications (1970), contém os artigos originais de Einstein dedicados a este tema.
- [3] J. Perrin, *Ann. Chem. Phys.* **18**, 1 (1909).
- [4] D. Campos, V. Mndez and J. Fort, *Phys. Rev. E* **69**, 031115 (2004); B. O’Shaughnessy and I. Procaccia, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 455 (1985); R. Metzler, W. G. Gleckle, T. F. Nonnenmacher, *Physica A* **211**, 13 (1994); L. Acedo and S. B. Yuste, *Phys. Rev. E* **57**, 5160 (1998).
- [5] D. S. F. Crothers, D. Holland Y. P. Kalmykov and W. T. Coffey, *J. Mol. Liq.* **114**, 27 (2004); H. Schriessel and A. Blumen, *Fractals* **3**, 483 (1995).
- [6] R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics*, (World Scientific, Singapore, 2000).
- [7] M. Muskat, *The Flow of Homogeneous Fluid Through Porous Media* (McGraw-Hill, New York, 1937); P. Y. Polubarinova-Kochina, *Theory of Ground Water Movement* (Princeton University Press, Princeton, 1962).
- [8] V. Plerou, P. Gopikrishnan, L. A. N. Amaral, et al., *Phys. Rev. E* **62**, R3023 (2000).
- [9] C.-K. Peng, J. Mietus, J. M. Hausdorff, S. Havlin, H. E. Stanley and A. L. Goldberger, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1343 (1993).
- [10] H. Sher, E. W. Montroll, *Phys. Rev. B* **12**, 2455 (1975).

- [11] A.Ott et al., Phys. Rev. Lett. 65, 2201 (1990).
- [12] C. Tsallis e E. K. Lenzi, Chem. Phys. 284, 341 (2002). [Erratum 287, 295 (2003).]; L. C. Malacarne, I. T. Pedron, R. S. Mendes e E. K. Lenzi, Phys. Rev. E 63, 30101R (2001). L. Borland, Phys. Rev. E 57, 6634 (1998); N. Goldenfeld, Lectures on phase transitions and the renormalization group, (Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, 1992).
- [13] M.F. Shlesinger, G. M. Zaslavsky e U. Frisch., Lvy flights and related topics in physics (Springer-Verlag, Berlin, 1994).
- [14] R. Metzler e J. Klafter, Phys. Rep. 339, 1 (2000).
- [15] H. Risken, The Fokker-Planck Equation (Springer, New York, 1984); C. W. Gardiner, Handbook of Stochastic Methods: For Physics, Chemistry and the Natural Sciences, (Springer Series in Synergetics, New York, 1996).
- [16] R. Metzler, E. Barkai e J. Klafter, Physica A 266, 343 (1999).
- [17] S. S. Plotkin e P. G. Wolynes, Phys. Rev. Lett. 80, 5015 (1998).
- [18] L. F. Richardson, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 110, 709 (1926).
- [19] A. N. Komolgorov, C. R. Dokl. Acad. Sci. URSS 30, 301 (1941).
- [20] N. Su, Environ. Modell. & Softw. 19, 345 (2004).
- [21] Z. S. Khan and S. W. Morris, Phys. Rev. Lett. 94, 048002 (2005).
- [22] T. Kosztoowicz, K. Dworecki, and St. Mrwczycki, Phys. Rev. Lett. 94, 170602 (2005).
- [23] R. C. Lua and A. Y. Grosberg, Phys. Rev. E 72, 061918 (2005).
- [24] I. Podlubny, Fractional Differential Equations (Academic Press, San Diego, 1999).
- [25] S. Havlin e D. Ben-Avraham, Adv. Phys. 36, 695 (1987); B. P. Lee, J. Phys. A 27, 2633 (1994); P. A. Alemany, D. H. Zanette and H. S. Wio, Phys. Rev. E 50, 3646 (1994).
- [26] J. Crank, The Mathematics of Diffusion (Oxford University Press, London, 1956).



- [27] H. S. Carslaw e J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids* (Oxford University Press, London, 1959).
- [28] L. F. Richardson. *Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph*. Proc. R. Soc. London Ser. A, **110**, 709 (1926).
- [29] A. Einstein, Albert Einstein: *Investigations on the Theory of the Brownian Movement* (*Dover Publications, contém os artigos originais de Einstein dedicados a este tema, 1970*).
- [30] P. Langevin, *Compt. Rend.* **146**, 530 (1908).
- [31] A. Fokker, *Tese de Doutorado*, (1913).
- [32] H. C. Burger, *Versl. Acad. Amst.* **25**, 1482 (1917).
- [33] L. S. Ornstein, *Versl. Acad. Amst* **26**, 1005 (1917).
- [34] M. Planck, *Berl. Ber.* p. 324 (1927).
- [35] M. Kac, *Am. Math. Month.* **54**, 369 (1947).
- [36] M. V. Smoluchowski, *Phys. Zeits* **17**, 557 (1916).
- [37] J. G. Berryman. *Evolution of a stable profile for a class of nonlinear diffusion equations with fixed boundaries*. *J. Math. phys.* **18**, 2108 (1997).
- [38] M. F. Shlesinger, J. Klafter, and B. J. West. *Lévy walks with applications to turbulence and chaos*. *Physica A* **140**, 212, (1986).
- [39] M. F. Shlesinger, B. J. West. and J. Klafter. *Lévy dynamics of enhanced diffusion: application to turbulence*. *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1100 (1987).
- [40] H. Spohn. *Surface dynamics below the roughening transition*. *J. Phys. (France) I* **3**, 69 (1993).
- [41] J. Stephenson. *Some non-linear diffusion equations and fractal diffusion*. *Physica A* **222**, 234 (1995).
- [42] O. V. Bychuk and B. O'Shaughnessy. *Anomalous diffusion at liquid surfaces*. *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1795 (1995).

- [43] C. K. Peng, J. Mietus, J. M. Hausdorff, S. Havlin, H. E. Stanley, and A. L. Goldberger. *Long range anticorrelations and non-gaussian behavior of the heartbeat*. Phys. Rev. Lett. **70**, 1343 (1993).
- [44] A. Ott, J. P. Bouchaud, D. Langevin and W. Urbach. *Anomalous diffusion in living polymers: a genuine Lévi flight?* Phys. Rev. Lett. **65**, 2201 (1990).
- [45] J. P. Bouchaud, A. Ott, D. Langevin and W. Urbach. *Anomalous diffusion in elongated micelles and its Lévi flight interpretation*. J. Phys. II France **1**, 1465 (1991).
- [46] T. Geisel, J. Nierwetberg and A. Zacherl. *Accelerated diffusion in Josephson junctions and related chaotic systems*. Phys. Rev. Lett. **54** 616 (1985).
- [47] M. F. Shlesinger, G. M. Zaslavsky and J. Klafter. *Strange kinetics*. Nature (london) **363**, 31 (1993).
- [48] T. H. Solomon, E. R. Weeks and H. L. Swinney. *Observation of anomalous diffusion and Lévi flight in a two-dimensional rotating flow*. Phys. Rev. Lett. **71**, 3975 (1993).
- [49] E. R. Weeks and H. L. Swinney. *Anomalous diffusion resulting from strongly asymmetric random walks*. Phys. Rev. E **57**, 4915 (1998).
- [50] R. Nossal. *Stochastic aspects of biological locomotion*. J. Stat. Phys. **30**, 391 (1983).
- [51] R. Balescu. *Anomalous transport in turbulent plasmas and continuous time random walks*. Phys. Rev. E **51**, 4807 (1995).
- [52] G. M. Viswanathan, V. Afanasyev, S. V. Buldyrev, E. J. Murphy, P. A. Price and H. E. Stanley. *Lévi flight search patterns of wandering albatrosses*. Nature **381**, 413 (1996).
- [53] G. Zumofen, A. Blumen and J. Klafter. *Current flow under anomalous diffusion conditions: Lévi walks*. Phys. Rev. A **41**, 4558 (1990).
- [54] H. Scher and E. Montroll. *Anomalous transit-time dispersion in amorphous solids*. Phys. Rev. B **12**, 2455 (1975).

- [55] A. Klemm, H. P. Müller and R. Kimmich. *Evaluation of fractal parameters of percolation model objects and natural porous media by means of NMR microscopy*. Physica A **266**, 242 (1999).
- [56] S. Havlin, D. Movshovitz, B. Trus and G. H. Weiss. *Probability densities for the displacement of random walks on percolation clusters*. J. Phys. A **18**, 1719 (1985).
- [57] M. Porto, A. Bunde, S. Havlin and H. E. Roman. *Structural and dynamics properties of the percolation backbone in two and three dimensions*. Phys. Rev. E **56**, 1667 (1997).
- [58] A. Compte. *Stoichastic foundations of fractional dynamics*. Phys. Rev. E **53**, 4191 (1996).
- [59] A. R. Plastino and A. Plastino. *Non-extensive statistical mechanics and generalized Fokker-Planck equation*. Physica A **222**, 347 (1995).
- [60] A. Compte and D. Jou. *Non-equilibrium thermodynamics and anomalous diffusion*. J. Phys. A **29**, 4321 (1996).
- [61] A. Compte, D. Jou and Y. Katayama. *Anomalous diffusion in linear shear flows*. J. Phys. A **30**, 1023 (1997).
- [62] C. Tsallis and D. J. Bukman. *Anomalous diffusion in the presence of external forces: Exact time-dependent solutions and their thermostistical basis*. Phys. Rev. E **54**, R2197 (1996).
- [63] E. L. Cussler, *Diffusion - Mass Transfer in Fluid Systems* (Cambridge University Press, New York, 1984).
- [64] Pedron, I. T., *Estudos em Difusão Anômala*, UEM/UEL, Marigá-PR, (2003).
- [65] H. Risken, *The Fokker-Planck Equation, 2nd edition eb.* (Springer, New York, 1986).
- [66] L. F. Richardson, *Proc. R. Soc. Londom Ser* **110**, 709 (1926).
- [67] D. G. Aronson. *The porous medium equations*. In: *Nonlinear diffusion problems, Lecture Notes in Mathematics*, **1224**, 1 (1986).

- [68] J. G. Berryman. *Evolution of a stable profile for a class of nonlinear diffusion equations with fixed boundaries*. J. Math. Phys. , **18**, 2108, (1997).
- [69] M. E. Gurtin and R. C. Mac Camy. *On the diffusion of biological populations*. Math. Biosciences, **33**, 35, (1977).
- [70] M. Muskat. *The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media*. McGraw-Hill, New York, (1937).
- [71] J. Buckmaster. *Viscous sheets advancing over dry beds*. J. Fluid Mech., **81**, 735, (1977).
- [72] P. Y. Polubarinova-Kochina, *Theory of Ground Water Movement*, Princenton University Press, Princenton, 1962.
- [73] J. Buckmaster, J. Fluid Mech. 81, 735, (1983).
- [74] A. R. Plastino and A. Pastino, Physica A 222, 347, (1995).
- [75] C. Tsallis and D. J. Bukman, Phys. Rev. E **54**, 2197, (1996).
- [76] G. Drazer, H.S.Wio and C. Tsallis, *Phys. Rev. E* **61**,1417(2000).
- [77] M. Mologna, C. Tsallis and P. Grigolini, *Phys. Rev. E* **62**, 2213 (2000).
- [78] L. C. Malacarne, I. T. Pedron, R. S. Mendes and E. K. Lenzi, Phys. Rev. E **63**, 30101R (2001).
- [79] J. P. Pascal and H. Pascal, Int. J. Non-Linear Mech. **28**, 641, (1993).
- [80] J. P. Pascal and H. Pascal, Int. J. Non-Linear Mech. **30**, 487, (1995).
- [81] H. Pascal, On nonlinear diffusion in a two phases system, Int. J. Nonlinear Mech. **26**, 401, (1991); M. H. I. Baird et al., AIChE J. **38**, 1825, (1992).
- [82] J. A. Deiza, R. Gratton e J. Gratton, Phys. Fluid. A 4, 1148, (1992).
- [83] V. P. Grarilov, N. V. Klepikova and H. C. Rodean, atmos. Environ. 29, 2317, (1995).
- [84] G. Rosen, Phys. Rev. B 49, 18844, (1982).

- [85] V. M. Vinokur, M. V. Feigel'man and V. B. Geshkenbein, Phys. Rev. Lett. **67**, 915, 1991; J. Gilchrist and C. J. Van der Beek, Physica C **231**, 147, 1994.
- [86] L. Borland, F. Pennini, A. R. Plastino, Eur. Phys. J. B **12**, 285 (1999).
- [87] E. K. Lenzi, G. A. Mendes, R. s. Mendes, L. R. da silva, and L. S. Lucena, Phys. Rev. E, 051109 (2003).
- [88] C. Tsallis and D. J. Bukman, Phys. Rev. E **54**, 2197, (1996); L. Borland, F. Pennini, A. R. Plastino, Eur. Phys. J. B **12**, 285 (1999).
- [89] L. C. Malacarne, I. T. Pedron, R. S. Mendes and E. K. Lenzi, Phys. Rev. E. **65**, 052101 (2002).
- [90] C. Giordano, A. R. Plastino, M. Casas and A. Plastino, Eur. Phys. J. B **22**, 361 (2001).
- [91] A. R. Plastino, and A. Plastino, Physica A **222**, 347 (1995).
- [92] S. R. A Salinas and C. Tsallis, *Nonextensive Statistical Mechanics and Thermodynamics*, Braz. J. Phys. **29**, Number 1 (1999); P. Grigolini, C. Tsallis and B. J. West, *Classical and Quantum Complexity and Nonextensive Thermodynamics*, Chaos, Solitons and Fractals **13**, Number (pergamon-Elsevier, Amsterdam, 2002).
- [93] R. Metzler and J. Klafter, Phys. Rep. **339**, 1 (2000).
- [94] C. Tsallis and E. K. Lenzi, Chem. Phys. **284**, 341 (2002). **287**, 295 (E)(2002); Erratum **287**, 295 (2002).
- [95] E. K. Lenzi, R. S. Mendes, L. C. Malacarne and I. T. Pedron, Physica A **319**, 245 (2003).
- [96] E. K. Lenzi, R. S. Mendes, K. S. Fa, L. S. Moraes, L. R. da Silva and L. S. Lucena, J. Math. Phys. **46**, 83506 (2005).
- [97] I. M. Sokolov, Phys. Rev. E **66**, 041101 (2002).
- [98] D. Campos, V. Mendez and J. Fort, Phys. Rev. E **69**, 031115 (2004).
- [99] B. Oshaughnessy and I. Procaccia, Phys. Rev. Lett. **54**, 455 (1985).

- [100] H. E. Raman, *Fractals* **12**, 149 (2004); R. Metzler, W. G. Glöckler, T. F. Nonnenmacher, *Physica A* **211**, 13 (1994).
- [101] E. K. Lenzi, R. S. Mendes, J. S. Andrade, L. R. da Silva and L. S. Lucena, *Phys. Rev. E* **71**, 052101 (2005).
- [102] Kwok Sau Fa and E. K. Lenzi, *Phys. Rev. E* **71**, 12101 (2005).
- [103] Kwok Sau Fa and E. K. Lenzi, *Phys. Rev. E* **67**, 061105 (2003).
- [104] A. A. Vedenov, *Rev. Plasma Phys.* **3**, 229 (1967).
- [105] I. M. Sokolov, J. Klafter and A. Blumen, *Phys. Rev. E* **61**, 2717 (2000).
- [106] H. Fujisaka, S. Grossmann and S. Thomae, *Z. Naturforsch. Teil A* **40**, 867 (1985).
- [107] S. B. Yuste and K. Lindenberg, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 118301 (2001); S. B. Yuste and K. Lindenberg, *Chem. Phys.* **284**, 169 (2002).
- [108] J. Yu and S. H. Dong, *Phys. Lett. A* **325**, 194 (2004); C. Chen and Z. D. Chen, *Phys. Lett. A* **331**, 312 (2004).
- [109] R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics* (World Scientific, Singapore, 2000).
- [110] B. J. West, M. Bologna and P. Grigolini, *Physics of Fractal Operators* (Springer, New York, 2002).
- [111] G. M. Zaslavsky, *Phys. Rep.* **371**, 461 (2002).
- [112] D. Kusnezov, A. Bulgac and G. D. Dang, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1136 (1999).
- [113] J. Klafter, M. F. Shlesinger and G. Zumofen, *Phys. Today* **49**, 33 (1996).
- [114] A. V. Checklin, R. Gorenflo and I. M. Sokolov, *Phys. Rev. E* **66**, 046129 (2002).
- [115] P. C. Jagher, *Physical A* **101**, 629 (1980); R. C. Bouret, *Can. J. Phys.* **38**, 665 (1960).
- [116] G. Rangarajan and M. Ding, *Phys. Lett. A* **273**, 322 (2000); G. Rangarajan and M. Ding, *Phys. Rev. E* **62**, 120 (2000).

- [117] H. C. Tuckwell, *Introduction to Theoretical Neurobiology* (Cambridge University Press, Vol. 2, 1988).
- [118] B. McNamara, K. Wiesenfeld and R. Roy, Phys. Rev. Lett. **60**, 2626 (1988).
- [119] Y. K. Lin and G. Q. Cai, *Probabilistic Structural Dynamics* (McGraw-Hill, New York, 1995).
- [120] P. M. Morse and H. Feshback, *Methods of Theoretical Physics* (McGraw-Hill, Tokyo, 1953).
- [121] V. Latora, A. Rapisarda and Ruffo, Phys. Rev. Lett. **83**, 2104 (1999).
- [122] V. Latora, A Rapisarda and C. Tsallis, Phys. Rev. E **64**, 056134 (2001).
- [123] X. L. Wu and Libchaber, Phys. Rev. Lett. **84**, 3017 (2000); G. Gregoire, H. Chate and Y. Tu Phys. Rev. Lett. **86**, 556 (2001); X. L. Wu and A. Libchaber, Phys. Rev. Lett. **86**, 557 (2001).
- [124] C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods: For Physics, Chemistry and the Natural Sciences*, (Springer Series in Synergetics, New York, 1996).
- [125] T. Kosztoowicz K. Dworecki and St. Mrwczyski, Phys. Rev. Lett. **94**, 170602 (2005).
- [126] K. Chukbar and V. Zaburdaev, Phys. Rev. E **71**, 061105 (2005).
- [127] R. C. Lua and A. Y. Grosberg, Phys. Rev. E **72**, 061918 (2005).
- [128] A. M. Mathai and R. K. Saxena, *The H-fuction with Application in Statistics and Other Disciplines* (Wiley Eastern, New Delhi, 1978).
- [129] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products* (Academic Press, New York, 1980).
- [130] I. M. Sokolov, Phys. Rev. E **63**, 056111 (2001); I. M. Sokolov, J. Klafter and A. Blumen, Phys. Rev. E **64**, 021107 (2001).
- [131] H. E. Ramon, Fractals **12**, 149 (2004); R. Metzler, W. G. Glöckle, and T. F. Nonnenmacher, Physica A **211**, 13 (1994).

- [132] E. Baskin and A. Iomin, Phys. Rev. Lett. **93**,120603 (2004).
- [133] V. E. Arkhincheev, Physica A, **307**, 131 (2002).
- [134] S. A. Elwakil, M. A. Zahran, E. M. Abulwafa, Chaos, Solitons and Fractals **20**, 1113 (2004).
- [135] A. Iomin, Journ. of Phys.: Conference Series **7**, 57 (2005).
- [136] B. Busnhes; *La dégradation de l'énergie* (Camps Flammarion, Paris, 1909, reimpressão em 1991).
- [137] Shannon, C. E., "A Mathematical Theory of Communication", Bell Sys. Tech. J. **27**, 379-423 and 623-656, (1948).
- [138] Tisza, L., *Generalized Thermodynamics*, The MIT Press, (1966).
- [139] Mariz, A. M., Phys. Lett. A **165**, 409 (1992); Ramshaw, J. D., Phys. Lett. A **175**, 169 (1993).
- [140] Salinas, Sílvia R. A., *Introdução à Física Estatística*, 2. ed 1. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, (2005).
- [141] Caretheódory, C., Math. Ann. **67**, 355 (1909).
- [142] Callen, H. B., *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*, 2nd. ed., John Wiley & Sons, New York, 1985.
- [143] S. Abe; Phys. Lett. A **224** 326 (1997).
- [144] F. H. Jackson; Mess. Math. **38** 57 (1909).
- [145] F. H. Jackson; Quart. J. Pure Appl. Math. **41** 193 (1910).
- [146] E.Baskin and A.Iomin, Phys.Rev.Lett. **93**,120603 (2004).
- [147] V.E. Arkhincheev, Physica A, **307**, 131 (2002).
- [148] S.A.Elwakil, M.A.Zahran, E.M.Abulwafa, Chaos, Solitons and Fractals **20**, 1113 (2004).
- [149] A.Iomin, Journ. of Phys.: Conference Series **7**, 57 (2005).



# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)