UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MESTRADO EM EDUCAÇÃO

EMMANUEL DE SOUSA FERNANDES FALCÃO

IMAGENS ENSINAM?

Uma Análise da Coleção Matemática de Dante

JOÃO PESSOA
2008

EMMANUEL DE SOUSA FERNANDES FALCÃO

IMAGENS ENSINAM?
Uma Análise da Coleção Matemática de Dante

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação do Centro de Educação da Universidade Federal da Paraíba, Campus I, como requisito parcial a obtenção do grau de Mestre em Educação.
Área de Concentração: Educação Popular, Comunicação e Cultura.
Linha de Pesquisa: Políticas Públicas e Práticas Educativas.
Orientador: Prof. Dr. Luiz Pereira de Lima Júnior.

JOÃO PESSOA
2008

EMMANUEL DE SOUSA FERNANDES FALCÃO

IMAGENS ENSINAM?
Uma Análise da Coleção Matemática de Dante

Banca examinadora

Prof. Dr. Luiz Pereira de Lima Júnior – UFPB
Orientador

Prof. Drª. Ana Maria Coutinho de Sales – UFPB

Prof. Drª. Rogéria Gaudêncio do Rêgo

A

Vovó Júlia e Vovó Nelcina, que com paciência e ternura, deram-me os conselhos que ao pôr-los em prática me tornaram o que sou hoje. Vocês são fantásticas, e é por isso, e por muito mais, que as amo tanto.

AGRADECIMENTOS

Não há palavras que possam verbalizar as emoções que explodem dentro de um ser, quando este passa por anos de luta a fim de finalizar um trabalho científico e tornar-se alguém mais preparado para a vida profissional. Isso em muitas pessoas é a própria vida em sim. São anos decorrentes de muita atividade relacionada ao intelecto, com pequenas pistas de teoria, prática, troca de conhecimentos entre tantas outras lições que a vida e a Universidade passam a fim de ajudarem a formar ou tornar mais qualificado um profissional.

Deixo registros de agradecimentos.

Primeiramente a **Deus**, que não me abandonou em nenhum momento dessa jornada, de onde eu sempre tirei forças e sempre registrei meus dias de luta. O Ser mais próximo e que mais esteve presente, até que estas linhas fossem escritas. Obrigado Senhor Deus!

A minha Mãe, **Maria de Lourdes Sousa,** que sofreu as angústias de qualquer mãe dedicada. Sempre preparada a vibrar e a lamentar a cada passo dado. Incentivando, pegando no meu pé, me pedindo para que eu fizesse o melhor, até que isso tornar-se a minha segunda natureza. Obrigado Mamãe, de coração.

Aos meus amigos, **Luiz Havelange** e **Aníbal Menezes.** O Havelange, que junto a mim, manteve o passo firme, e não desviou de nossos objetivos, que eram comuns, a estrada de João Pessoa. Tanto na ida quanto na vinda, testemunhou que sempre esse sujeito me deu força nos momentos de fraqueza e colorindo a vida com seu jeito de ser, ouvindo músicas e dando conselhos que vale para toda a vida. Ao professor e muito mais amigo, **Aníbal de Menezes**, que mais que transmitir geometria transmitiu também importantes conselhos para a vida, me encorajando em todas as idéias que tinha, me ouvindo, e se preocupando como apenas raros amigos conseguem fazer. És mais que um amigo, és meu pai acadêmico. E a pessoa que talvez eu consiga ainda ter vergonha de expressar o amor e ternura que tenho ao vivo, mas que irei registrando em documentos até que um dia, possa saber como foi importante você entrar na minha vida.

A Titia **Fatinha** (mulher que ama ouvir minha voz e dançar comigo no meio da sala) ; Titio **Dedé** (O cara que sempre me "empresta" as camisas sem pressa para recebê-las de volta); Titio **Marcos** (O parceiro de caminhada às 4:40 da manhã. Penso em ensiná-lo a jogar sinuca um dia); A **Dadai** (Digitadora e escrava oficial de meus trabalhos. Amo você até naqueles dias que você está sem paciência para minhas leseiras, viu?); A Vovó **Júlia** (Ser

dotado de sabedoria, que com suas histórias, e ternura pela vida, me mostraram o caminho das pedras para que hoje eu pudesse ser o que sou. Fez muita diferença na minha vida ter tido uma tutora como ti vovó Júlia. Amo você demais); A Vovó **Nelcina**: A comedora escondida de doces. Nunca flagramos, aliás, já flagramos, mas não temos como repreendê-la disso. Talvez por comer tanto açúcar escondido, ela seja um ser humano tão doce e tão amável, sempre mostrando preocupação se já comemos, se a viagem foi boa, se dormimos bem entre outras. Amo você Vovó Nelcina.

Ao senhor, orientador, amigo, professor, mas que prefere ser chamado apenas pelo nome **Júnior**, por dar lições de humildade, praticidade, e envolvimento com seu orientando. Júnior, sei que minhas cartas tentaram muitas vezes levar a ti os sentimentos de gratidão pelo que fez por mim, mas não poderia negligenciar aqui que estás sendo um herói para mim nessa corrida acadêmica. Obrigado por isso Júnior. Muito obrigado mesmo!

Aos membros da minha pré-banca, **Rogéria** e **Ana Coutinho**, que com muita ternura me orientaram a desenvolver melhor esse trabalho. Inclusive trazendo textos e sugestões de leituras para que esse processo fosse o menos extenso possível. Desejaria que todos os meus colegas que passam pelas malhas da vida acadêmica, encontrassem mais **Júnior**s, **Rogéria**s e **Coutinho**s na vida.

A todos esses, meus mais sinceros votos por todas as informações que me passaram, e que junto com a Universidade Federal da Paraíba, possibilitaram a mim uma identidade de formador de opinião, sujeito crítico e profissional responsável.

RESUMO

As imagens, ao longo do tempo, passaram a se tornar instrumentos de emissão de mensagens tão eficientes quanto a escrita. Seu uso passou por vários processos, desde os de embelezamento de algum texto, até se tornar instrumento memorístico e por fim ser aceito como um signo de informação. Nesta pesquisa objetiva-se *analisar* o processo do uso de imagens no ensino da Geometria, partindo de sua *apreensão* nos livros didáticos. Especificamente pretende-se *situar* o papel das imagens nos processos cognitivos e estabelecer relações com a educação; *discutir* a educação matemática e o papel que as imagens desempenham em sua execução; *mapear* as imagens nos livros didáticos, apontando seu uso potencial no ensino-aprendizagem de Geometria, a partir dos critérios adotados da teoria de Raymond Duval (1995) e Almouloud (2004). Defende-se a *premissa* que ao longo do tempo a matemática não prioriza o ensino da geometria nas práticas educativas escolares, sobretudo nos níveis elementares e médio de ensino. Além deste acontecimento o ensino centra-se na dimensão emissor-receptor, constituindo-se num repasse de conteúdos meramente técnicos, sem despertar o interesse dos alunos. Defende-se ainda que as imagens podem facilitar o aprendizado da matemática, especialmente da Geometria, pois ao longo do processo de investigação, percebe-se que as imagens podem transmitir conhecimentos e gerar deduções que dão suporte a percepção de fórmulas e teoremas no campo geométrico. Dado essa percepção, enxergamos a importância de se mapear as imagens do livro didático *Matemática* de Dante, o mais adotado no município de Campina Grande na Paraíba, para analisarmos se as imagens da coleção são potencialmente eficazes para o ensino e aprendizagem de matemática.

Palavras-chave: ensino de matemática; imagens na matemática.

ABSTRACT

The images, belong the time, began to be instruments of issuance of messages as efficient like the writing. Its use has gone through several processes, from the beautification of some text, by becoming instrument of memorize and finally be accepted as a sign of information. In this research aims to examine the process is the use of images in education and learning of mathematics, especially geometry, based on the seizure and its use in textbooks. Specifically seeks to situate the role of images in cognitive processes and establish relations with education; describe the mathematical education and the role that the images play in its implementation; mapping the images in textbooks, pointing strategies used in teaching and learning. Calls to the assumption that over time the math not prioritizes the education of geometry educational practices in schools, especially in elementary and medium levels of education. Besides this event the teaching focuses on the size emitter-receiver, establishing a pass content merely technical, without awakening the interest of the students. Once the images facilitate the learning of mathematics, especially geometry. Throughout the process of research realizes that the images may transmit knowledge and generate deductions which support perception of formulas and geometric theorems in the field. Given this perception, see the importance of mapping the images of the textbook Matemática of Dante, as adopted in the city of Campina Grande in Paraiba, to examine whether the images used are being operated efficiently for the teaching and learning of mathematics.

Keywords: education mathematics; images in mathematics.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 IMAGENS

Participamos de fragmentos de ano letivo nas escolas de Campina Grande [1], sendo professor substituto ou professor convidado para dar aulas com práticas alternativas de ensino. Foi convivendo com o contexto da cidade que decidimos optar pela profissão de ser professor, por sempre gostar de atividades artísticas que possuíam afinidades com a matemática (jogos, desenhos, mágicas, desafios) e ao ingressar na Universidade, ampliaram-se o leque de outras atividades que poderiam contextualizar-se a um campo profissional.

Em uma ocasião, envolvidos demais com desenho, sugerimos a turma a desenhar nas aulas de geometria, a construir pipas, a fazer desenhos de casas, de personagens. Constatamos que havia sido um tipo raro de ser com criatividade geométrica para fazer essas atividades, haja vista que a maioria dos estudantes reproduziam um certo padrão de imagens, como se não houvessem reparado as grandes opções de formas geométricas que as rondam.

Resolvemos trabalhar com origamis em sala de aula, e trabalhar com bolas de assopro, canudo, para ajudar a construir formas geométricas e mostrar sua aplicação e propriedades no dia-a-dia. Mas encontramos dificuldades para atingir os objetivos que almejávamos, por encontrar resistência dos alunos a pensarem *do lado de fora da caixa*, além do que os livros didáticos incentivavam a pensar.

Pelo fato de gostar tanto da Geometria e do que ela propiciou a desenvolver práticas educativas alternativas, é que encontramos saídas para melhorar o processo ensino-aprendizagem através da utilização das imagens.

Vivemos uma realidade permeada de informações transmitidas por imagens. Entretanto, a escola não prepara as pessoas para efetuarem uma reflexão crítica das imagens, confundindo o processo biológico de *ver* com o processo cognitivo, carregado de influencias sócio-culturais de *visualizar*. Além desta postura, ainda não conseguimos superar o paradigma de transmitir conhecimentos que se utilizamos basicamente da informação transmitida por meio do texto escrito.

Esta abordagem perde sentido na atualidade, havendo um descompasso entre a sociedade que utiliza maciçamente as imagens midiáticas para entretenimento, transmissão de informações e imposição de padrões, e uma educação que se nega a considerar este recurso.

---

[1] Campina Grande localiza-se no agreste paraibano, e na parte oriental do planalto da Borborema a 120 km de capital da Paraíba, João Pessoa. Com uma área um pouco maior que 620 km², é considerada um dos principais pólos industriais e tecnológicos da região nordeste do Brasil com uma população que beira os 380 000 habitantes. A cidade destaca-se nas áreas de informática, serviços (saúde e educação), no comércio e na indústria, principalmente indústria de calçados e têxtil, que são suas principais atividades econômicas.

Calcado no paradigma em que vivemos (uma sociedade de consumo de produtos gerados pela semiótica) torna-se necessário superar uma aprendizagem baseada em mudanças de comportamentos expressos em avaliações escritas e verbais, não havendo uma maior preocupação na produção de significados a partir de outros tipos de registros, como, por exemplo, os fundamentados nas representações gráficas.

Uma das disciplinas escolares que podem contribuir para a formação dos alunos quanto ao uso e análise de imagens é a matemática. Esta, por meio da geometria, que consiste no estudo de padrões de formas e de medidas, fornece situações que possibilitam uma análise crítica de figuras, aspecto formativo aplicável a outras áreas do conhecimento.

No campo da educação matemática, uma teoria de destaque é a da Representação Semiótica, desenvolvida por Raymond Duval[2]. Segundo ele, como os objetos matemáticos são ideais, não podem ser percebidos e, assim, torna-se difícil a sua referência. Sua apreensão se processa por meio de signos, ou seja, por meio do domínio de uma *representação semiótica*. O processo de atribuição ou de apreensão de uma representação semiótica é denominado de *semiosis*. Considerando-se que a aprendizagem consiste na atribuição de significado, cada signo representando um objeto necessita de uma conceituação, ou seja, uma atribuição de significado, que recebe o nome de *noesis*. Dessa forma, na matemática, não existe *noesis* sem *semiosis*.

Os objetos matemáticos têm em sua maioria várias representações. Por exemplo, uma função pode ser representada pela notação literal (função identidade), por uma equação ($y = ax$), um gráfico (representação no plano cartesiano), como um conjunto de pares ordenados $\{(x, ax) | x \in \Re\}$. Duval (1993) considera que no processo de ensino-aprendizagem é necessário que o aluno domine pelo menos duas representações semióticas de cada objeto, sob pena de confundir o objeto com a sua representação. A transposição de representação semiótica deveria ser então fruto do processo de ensino-aprendizagem de matemática.

A maioria dos conteúdos matemáticos pode ser apresentado utilizando diferentes linguagens, isto é, representações semióticas distintas. Entre estas podemos destacar as que se originam de registros baseados na linguagem da aritmética, da álgebra e da geometria. Tradicionalmente, nas nossas escolas os conteúdos são trabalhados de forma estanque, havendo a partir do 7º ano do ensino fundamental uma predominância do campo algébrico

---

[2] Filósofo e psicólogo que desenvolveu importantes estudos relativos à psicologia cognitiva no instituto de pesquisa em educação matemática. Tomando por base seu trabalho *Sémiosis et pensée humaine*, essa obra discute sua teoria dos registros de representação, que tem se mostrado importante instrumento de pesquisa no estudo da complexidade da aprendizagem de matemática.

sobre os demais. Esta tendência ocorre devido a influência da matemática moderna implantada em meados do século passado, que muito reduziu o ensino de geometria.

Uma das formas de trabalhar duas representações semióticas na maioria dos conteúdos da matemática, tanto a nível básico quanto superior, é abordando cada um dos temas utilizando sua representação a partir da linguagem algébrica e a partir de sua representação geométrica. Estas duas representações são possíveis em grande parte de situações, seja na totalidade do tema, seja representando apenas partes do mesmo.

Um dos problemas que se coloca, quando se utiliza as imagens mentais de figuras algébricas, é a visão de que basta a figura para o aprendiz compreender o seu significado. Confunde-se o *ver* com o *visualizar*. Esta atitude pode estar associada aos resquícios do positivismo, que segundo Flores (2006, p.98) levam a

> Atitude na qual se espera que a ciência, em sua objetividade e positividade, possibilite os conhecimentos das coisas como elas realmente são e que, por isso mesmo, poderemos conhecer a solução para todos os problemas ligados às dificuldades de ensinar e de aprender. Não obstante, o abuso na tecnicidade do ensino, e a praticidade total e o desejo de transparência das complexidades do processo de ensino-aprendizagem levam ao desconforto que enfrentamos hoje: já não temos mais sentido ou mesmo domínio sobre aquilo que ensinamos.

Ao analisar a utilização de imagens de figuras geométricas por parte do livro texto, percebe-se que esta pesquisa pode contribuir para despertar a necessidade de levar o aluno a desenvolver atividades voltadas para visualizar as figuras e as imagens por elas geradas, transferindo este processo para situações não escolares.

Para Fainguelernt (1998), o ensino de Geometria, se comparado ao ensino de outras vertentes da Matemática, foi e é deixado para o segundo plano, pois estudantes, educadores, pesquisadores e professores mostram-se inclinados ao formalismo das demonstrações, vagando da algebrização ao empirismo, o que não auxilia na aprendizagem. Concorda com esse pensamento Lorenzato (1995)

> O ensino de geometria, se comparado com outras parte da matemática, tem sido o mais desvairador, alunos, professores, autores de livros didáticos, educadores e pesquisadores de tempos em tempos, têm se deparado com modismo fortemente radicalizantes, desde o formalismo impregnado de demonstrações apoiadas no raciocínio lógico-dedutivo, passando pela algebrização e indo até o empirismo inoperante. (Lorenzato)

Comumente ilustra-se a idéia do fraco desempenho das instituições de ensino e de professores para lidar com uma aprendizagem por parte dos alunos ao ensino de geometria.

Observamos como Duval (1993), que uma estratégia para melhorar o ensino de geometria seria fazendo uso de mais imagens cognoscentes nos livros didáticos e no ambiente escolar.

Considerando quer as imagens representam um forte aliado na abstração da Geometria, Almouloud (1997) enfatiza os estudos de Duval (1993) sobre a classificação das imagens geométricas / matemáticas. Usamos essa classificação para analisar todas as imagens de capítulos dos livros didáticos matemáticos do 5ª e 9ª ano do ensino fundamental e do 3º ano do ensino médio, a fim de detectarmos como estão sendo explorados esses recursos em livros colegiais, e como vem se dando a evolução das figuras em termos de funções cognitivas.

Para isso questionamos o que é uma imagem e como diversos autores enxergam esse conceito. Procuramos saber quando ela começou a ser usada como recurso de aprendizagem e quando chegou aos livros. Procuramos ainda saber a origem do livro didático, e em que pontos uma imagem pode ser classificada como uma imagem matemática. Neste sentido dialogamos com autores como Manguel (1997, 2001), Duval (1988, 1989, 1993, 1995, 1998), Van Hiele (1986), Almouloud (1992, 1997), entre outros, para um suporte teórico, histórico e classificatório da nossa problemática.

Afirma Nacarato (2000, p. 84) que as séries iniciais do ensino fundamental vêm tendo uma inadimplência muito grande no que se refere a quase ausência do ensino de geometria. Para o autor, a geometria vem limitando-se em uma medida muito pequena ainda em exercícios e memorização de fórmulas das séries finais, com abordagens dedutivas e abstratas, sem levar em conta que o estudante, em sua passagem nas séries anteriores, não foi capaz de desenvolver habilidades geométricas básicas necessárias para um nível de abstração mais alto. Até nos casos em que há a tentativa de desenvolvimento dessas habilidades nas séries iniciais a ênfase é focada nas situações para reconhecer figuras geométricas e operar cálculos de áreas e perímetros. Procurar uma origem para essa problemática seria recortar historicamente o processo do ensino de matemática no nosso país. Para o referido autor:

> Muitos são os fatores que vêm contribuindo para esse abandono do ensino de

> geometria. Dentre eles podem ser destacados: a própria historia do ensino da matemática no Brasil e, em especial, o de geometria; e a não compreensão, por parte dos professores, da importância da formação de conceitos geométricos para o desenvolvimento do pensamento matemático.

Até os anos 1960 ocorreram tentativas de se integrar ou unificar os campos da matemática (álgebra, aritmética e geometria). Contudo, essa busca mal apresentou resultado e a fragmentação seguia em sua existência sem o ensino de geometria passar por qualquer tipo de reformulação. É após os anos 1960 que com o movimento da matemática moderna (nova abordagem para a unificação da matemática nas suas três áreas) focada em uma linguagem de teoria de conjuntos e transformações geométricas, descobriu-se que todas as tentativas frustraram, dentre outros motivos, por falta de compreensão e preparo dos professores, provocando assim um abandono de seu ensino ou passando a abordá-lo superficialmente.

Após o final da década de 1970 e início da 1980 o foco de vários educadores da matemática voltou-se para o ensino da geometria, na tentativa de resgate do ensino geométrico para todas as séries do ensino básico. O processo pelo qual se vestiu a causa deu-se ao significativo número de pesquisas feitas nos anos 1980, na publicação de propostas curriculares de vários estados do Brasil e nos livros didáticos. Os anos 1980 marcaram não só a luta por um resgate do ensino de geometria, mas por uma nova concepção deste ensino, como destaca Miorim et al (1993) que "não se trata apenas da retomada da geometria euclidiana na sua forma clássica, mas principalmente de se apoiar numa abordagem mais intuitiva e experimental, encaminhando-se para uma dedução nas séries mais avançadas."

Nacarato (2000, p.85) completa as falas de Miorim narrando que parece ainda não haver uma implementação efetiva, em sala de aula, dessas novas concepções. Desta forma, "a ausência da geometria na escolarização formal vem formando gerações de profissionais, principalmente professores, que desconhecem os fundamentos desse campo da matemática, pouco discutido no âmbito da prática pedagógica."

Se for fato de que o ensino de matemática nas primeiras séries é significativamente aritmético, o foco dado pelos professores reside na questão da numeração. Assim, questiona-se quais os elementos que contribuem para a ocorrência disto? É provável que não se possa enumerar elementos isoladamente para justificar esse fato, visto que há um conjunto de fatores diretamente relacionados a essa ocorrência. Entretanto nesse conjunto de fatores, não há como não se pensar e referir-se ao professor que é produto de formação lacunosa e muitas vezes, não teve aproximação com assuntos de geometria. Diante do exposto, pergunta-se: o que fazer se esse profissional é requisitado para esse tipo de ensino (trabalhar geometria na sala de aula)? A quem ele deve recorrer?

Também é fato que o grande apoio do professor (quando não o único) é o livro didático. Embora os livros didáticos venham passando por processos de avaliação do Ministério da Educação e Cultura (MEC), mesmo os avaliados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) ainda são questionados sobre a possibilidade de formação do pensamento geométrico no aluno. Nesse sentido, percebe-se que não existem muitas pesquisas voltadas para a análise do livro didático, no que diz respeito ao ensino da geometria.

Esta pesquisa, portanto, objetiva-se *analisar* o uso de imagens no ensino e na aprendizagem da matemática, especialmente da geometria, partindo de sua utilização nos livros didáticos.

Assim, pretendemos que esta investigação possa contribuir para esses debates no que se refere ao livro didático e ao uso de imagens na Geometria, sobretudo na referência de um debate que se situa rumo à construção de uma noção de imagem geométrica mais ampla. Explorada de modo mais prático, que ela seja includente e de semiótica capaz de potencializar uma construção de práticas pedagógicas engajadas na formação de alunos aptos para enfrentar situações-problemas do dia-a-dia. Tudo isso para formar estruturas mentais que facilitem a aquisição de novos conhecimentos nesse campo.

Para tanto, nos cursos de licenciatura, para dominar as habilidades necessárias ao ensino de geometria, torna-se necessário desenvolver as três funções – visualização, construção e o raciocínio geométrico. Todas essas funções requerem processos de ensino específico. Entretanto, o processo de visualização de imagens, figuras, esquemas, diagramas, fotos, entre outros, é pouco explorado nas escolas, talvez pela visão de que visualizar é o mesmo que ver. São bastante diferentes, pois *ver* “se reduz a um ato fisiológico” enquanto a visualização é “um processo cognoscitivo – próprio do ser humano – que está vinculado com a cultura do indivíduo: história, ideologia, tradições, costumes, valores, etc ...” (CANTORAL, 2002). Desta forma, torna-se necessário introduzir, desenvolver meios e aplicar recursos para levar os alunos a dominarem esta habilidade.

Para Duval (1998) visualizar no ensino de matemática pode ter as finalidades de ilustrar um objeto ou procedimento matemático; justificar um resultado matemático mais complexo; servir para uma apresentação rápida e sinótica de uma situação; servir para uma verificação subjetiva de resultados matemáticos.

Utilizaremos a categorização de Duval (1998) sobre as situações, envolvendo visualização nas coleções de livros textos mais usuais no ensino da região polarizada por

Campina Grande, na Paraíba. Desta forma, defende-se a *premissa* que ao longo do tempo a matemática não prioriza o ensino de geometria nas práticas educativas escolares, sobretudo nos níveis elementares e médio de ensino. Além deste acontecimento o ensino centra-se na dimensão emissor-receptor, constituindo-se um repasse de conteúdos meramente técnicos, sem despertar o interesse dos alunos.

A partir dessa escolha, realizar-se-á uma análise das imagens dos livros didáticos da Coleção *Matemática* de Dante a mais adotada atualmente no sistema escolar de Campina Grande (dada uma visita às 10 (dez) maiores escolas, metade pública e metade particular da cidade).

Para analisar o uso das figuras no ensino de geometria, realizamos uma pesquisa bibliográfica sobre a teoria das apreensões e as funções cognitivas definidas por Duval (1998), para justificar um resultado matemático, para uma apresentação sinótica de uma situação ou para uma verificação subjetiva de um resultado matemático.

A referida pesquisa bibliográfica permitiu uma fundamentação da presente pesquisa no que diz respeito à coerência e à relevância da temática escolhida.

Segundo Gil (2002, p.44), a utilização das fontes deve ter um olhar crítico do pesquisador. Desta forma, utilizamos uma variedade de fontes que propiciassem o trajeto do processo de investigação.

Utilizamos ainda uma pesquisa documental. A pesquisa documental neste trabalho, refere-se a documentos oficiais, realizando-se leitura dos Parâmetros Nacionais de Matemática, Propostas Curriculares, Resenhas do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), revistas especializadas e consultas na Internet, que segundo Pádua (2004, p.68) é realizada a partir de documentos, contemporâneos ou retrospectivos, considerados cientificamente autênticos (não - fraudados).

O fator importante dessa opção de pesquisa é a certeza que o investigador tem da autenticidade e veracidade dos documentos abordados, analisados, estudados e aprofundados ante a proposta do tema que a pesquisa se dispõe.

A pesquisa de campo desenvolveu-se nas escolas da cidade de Campina Grande, como Colégio Alfredo Dantas, Colégio Imaculada Conceição (Damas – CIC), Escola Virgem de Lourdes (Lourdinas – EVL), Colégio Estadual da Prata, Colégio Estadual Assis Chateaubriand e outras, na qual os professores entrevistados trabalham com a opção do livro didático escolhido para nossa análise. Selecionamos três livros da coleção, que representam o livro de fase transitória dos ensinos fundamental e médio.

Esta pesquisa se apresenta em cinco capítulos.

O segundo – *Imagens e Educação* –, *situa* o papel das imagens nos processos cognitivos e estabelece relações com a educação. Esse capítulo discorrerá sobre alguns momentos históricos onde as imagens começaram a ser utilizadas com objetivo educativo, até chegarem aos livros didáticos sendo utilizada como transmissora de conhecimento. Também falar-se-á sobre a *origem* do livro didático no Brasil. O capítulo ainda abordará o olhar de autores como Duval (1995) e Manguel (1997), entre outros, sobre a utilidade das imagens na educação geral e em especial no ensino de geometria.

O terceiro – *Imagens na Matemática* –, *descreve a* educação matemática e o papel que as imagens desempenham em sua execução. Discorrerá sobre os processos de aquisição de conhecimentos geométricos por meio de imagens na ótica da *Teoria das Apreensões* de Duval (1995), e apontará para a importância das ilustrações no ensino de geometria nos quesitos de resolução de problemas, construção de provas matemáticas e generalização de fórmulas.

O quarto – *Imagens no Livro Didático* –, *mapeia* as imagens nos livros didáticos, apontando as estratégias utilizadas no ensino e na aprendizagem. Comparar-se-á como essas imagens foram exploradas em quantidade e em qualidade, avaliando-se na óptica da *Teoria das Apreensões* de Duval (1995), se as imagens foram bem utilizadas no processo de ensino de geometria.

Por fim, apresentam-se algumas considerações sobre a pesquisa no quinto capítulo intitulado – *Imagens recorrentes.*

2 IMAGENS E EDUCAÇÃO

Abordar-se-á a relação existente entre *Geometria* e *Imagem*, especialmente quanto à imagem como ferramenta, que conduz a prova matemática, generalização de fórmulas, abstração de teoremas, entre outras formas de transmitir conhecimentos geométricos. Portanto, evidencia-se a importância de discutir a leitura da imagem nos livros didáticos perante as propostas contidas neles, e em outros documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e outros, na tentativa de enxergar a contribuição das imagens para a formação do aluno que ler o livro didático da coleção *Matemática* de Dante (2007).

A opção por evidenciar essa temática, deu-se pelo fato da geometria possuir forte relação com a imagem. Além disto o livro didático representa um instrumento mediador na atual *civilização da imagem* (Calvino, 1990). Torna-se importante avaliar sua função primária, ou seja, formar pessoas críticas. Para tanto, recortamos historicamente o uso das imagens em antigos processos de educação e acompanhamos suas utilizações até migrarem para as páginas do livro didático.

2.1 A civilização da imagem

"Sou Um Filho da Civilização da Imagem."
(CALVINO, 1990)

O que será que Calvino desejava expressar ao proferir uma frase tão abstrata e ao mesmo tempo tão curiosa?

Para localizar uma definição de imagem, folheamos o *dicionário* que a define como "Representação de uma pessoa ou coisa, obtida por meio de desenho, gravura ou escultura; representação mental de alguma coisa percebida pelos sentidos" (MIGUEL, 2007, p.742).

Imagem, em grego antigo corresponde ao termo eidos, raiz etimológica do termo *idea ou eidea*, cujo conceito foi desenvolvido por Platão. A teoria de Platão, o idealismo, considerava a *ideia* (ou idéia) da coisa, a sua imagem, como sendo uma projeção da mente. Aristóteles, pelo contrário, considerava a imagem como sendo uma aquisição pelos sentidos, a representação mental de um objeto real, fundando o realismo. A controvérsia estava lançada e chegaria aos nossos dias, mantendo-se viva em diversos domínios do conhecimento.

Na linguagem coloquial, tanto envolve o conceito de imagem visualizada quanto o conceito de imagem gerada pelo homem, em diversos campos, (criação artística, registro foto-mecânico, gráfico, pintura, desenho, gravura, ou qualquer meio visual de algo que expresse idéia). Portanto, atualmente, imagens (entre outras formas) são as gravuras que circulam pelos anúncios de publicidade impressos em revistas ou a amostra em outdoors ou paredes de prédios e edifícios; os panfletos e cartazes fixados em murais; até mesmo a arquitetura de edifícios e de obras da engenharia; são imagens os utensílios domésticos e todos os tipos de ferramentas; os veículos de locomoção; as roupas; as representações sagradas; qualquer tipo de material impresso ou, pra finalizar, toda programação e exibição em telas de televisão ou de cinema.

Talvez seja essa a *Civilização de Imagens* referida por Calvino.

O que se entende da frase de Calvino é, então, que após a segunda metade do século XX, o mundo vivencia o que ele chamou de a civilização da imagem como um dos acontecimentos culturais que merecem mais destaque do homem civilizado. Entretanto, tal realidade não é tão nova assim, visto que desde culturas antigas, quais as grutas de Lascaux ou Altamira, as grandes catedrais da primeira parte da Idade Média da Inglaterra, já fazem amostras de imagens fixas. Os Teatros Italianos do Renascimento como imagem móvel, são algumas demonstrações das muitas presenças de imagens destacadas na linha histórica da humanidade.

Contudo, se quisermos falar atualmente em algum tipo de teoria que envolva imagem, devemos indicar que esta deva ser qualquer tipo de representação visual que possua semelhanças com o objeto que queremos representar. Peixoto (1992, p. 304) defende a idéia que é preciso saber ver, em determinadas imagens de hoje, aquilo que muitas vezes nos escapa. Devemos abstrair das frases desse autor que não são todas as imagens capazes de figurar o objeto que se deseja representar.

Na busca de dados históricos de imagens, encontram-se narrações que afirmavam que a pintura, após o século XVII, conseguiu liberdade para além das representações de objetos divinos, parando então de ilustrar as faces de santos, ou os cenários divinos, para fixar-se como uma linguagem moderna em pinturas de baías, cidades e campos. Pois as pinturas, assim como aponta Lyotard (apud PEIXOTO, 1992, p.313), *parece negar a presença,* portanto existem bastantes questões acerca de se devemos ou não devemos pintar, visto que uma escrita poderia relatar o que existe em um *espaço de representação*. Contudo, luminosidade, cor, contraste, brilho, entre outras variantes presente em imagem pode subjetivar a criatividade do observador. Logo se mostra a importância que há no intervalo de tempo que os olhos necessitam para *apreender* as figuras essenciais que, não raro, possuem a característica de conseguir significar algo ao observador e mobilizá-lo a uma reflexão ou ação.

Nessa ótica, o significado dado à imagem do objeto representado é permitido mediante o uso da imaginação. O próprio Calvino, ao fazer menção do papel que possui a imaginação, defende que ela é na verdade a representação visual de uma fantasia, e que pode vir antes, ou até mesmo acompanhar uma imaginação verbal.

Os processos imaginativos se diferenciam em dois tipos: o que inicia na palavra e termina na imagem visível e o que inicia na imagem visível e termina na palavra. A primeira forma é adquirida através de leituras de textos, e a segunda forma através do grande número de imagens visuais com poder de gerar significados.

Ainda com Calvino (1990), encontramos questionamentos acerca da grande quantidade de imagens que *ofuscam* ou *poluem* a vista das pessoas nos dias atuais. Isso as impede de lhes preservar o que seria o direito da imaginação de cada um, pois as imagens pré-industrializadas não permitem aos homens raciocinar por figuras com significados, em grande escala, não formulados e não conceituados de forma discursiva.

Buoro (2002) realizou uma pesquisa onde narrou uma experiência, na qual crianças que visitaram o zoológico foram postas diante da seguinte tarefa: *desenhe algum animal que represente a turma.* Eles não conseguiram realizar nenhuma ilustração dos referidos animais vistos no zoológico. Ilustraram apenas figuras divulgadas pela mídia e que de algum modo acabaram internalizadas na imaginação dos alunos. Essa pesquisa levou o referido autor a repensar nas preocupações já enumeradas por Calvino (1990) nas quais as pessoas pouco a pouco estão perdendo sua capacidade de construir figuras conforme a visualização de suas imaginações individuais.

O que Calvino (1990) poderia alegar sobre o fato de *vivermos em um mundo de imagens* e não saber o que elas representam? Ou quem sabe, o que temos a ver com as imagens que nos rodeiam? Como elas são vistas?

Essas questões nos instigam a perguntarmos: *o que é ver uma imagem?*

Visualizar uma imagem, poderia ser expresso como uma ação da visão que permite o reconhecimento de dados (MIGUEL, 2007, p.1466).

Inicia-se com os olhos o processo de reconhecimento de uma imagem (seja ela não verbal ou verbal), assim como defende Manguel (1997), representando a idéia de grandes personagens históricos da humanidade no que se refere à parte física dos homens denominada *olhos* e na qual Santo Agostinho, que ao mesmo instante que louvou aos olhos como uma entrada ao mundo, os condenou também. Ou Santo Tomás de Aquino ao referir-se a visão como o sentido que possui fins de adquirir o conhecimento. Cícero defendeu que ao se ler um texto, há de se lembrar melhor dele, daquele que apenas o ouviu. Já Bacon, relata que quando olhamos um objeto há de se formar um triângulo visual cuja base está no objeto observado e o cume no centro da curvatura da córnea. Logo, conseguimos *ver* quando o triângulo adentra nos olhos e os raios de luz ficam dispostos sobre a superfície do globo ocular, refratando de modo que não se cruzem. Então *ver*, seria o processo ativo no qual uma figura entrava pelo olho e logo então *apreendida* pelos *poderes visuais.* Merleau-Ponty acredita em uma espécie de *terceiro olho* que possuí o dom do visível (representante de um olhar interior), sugerindo a frase poética em que o olho representasse a *janela da alma*, permitindo enxergar o que seria a beleza do mundo. Sócrates considera que *palavra* e *imagem* são estruturas semelhantes e justifica isso ao refletir que em ambas há a necessidade do leitor em interpretar, comentar e atribuir-lhes um sentido simbólico. De Fournival já defende que a leitura de textos funciona como se houvesse um *enriquecimento* do presente, atualizando o passado com a memória e cujo intuito é prolongar as ações citadas para o futuro, relação esta já conhecida na iconografia cristã, como, por exemplo, poderíamos citar a imagem de Maria segurando um livro ante Jesus. Manguel (2001, p.159) interpreta que a imagem relacionada com a palavra foi bastante usada pela Igreja no instante em que percebeu que os teólogos medievais aprovavam apenas as ilustrações as quais se podia atribuir significados assumindo, desta forma, o uso das imagens mediante palavras.

Manguel (1997) defende que a leitura de uma imagem, atualmente, ainda se relaciona com a palavra. Um livro escrito em um idioma não conhecido só pode ser lido por uso de imagens que o ilustrem, visto que assim, o leitor atribui-lhe sentido, mesmo não sendo o que desejava expressar o texto. No século V, São Nilo foi um pioneiro ao ornar os templos com ilustrações bíblicas, defendendo que os religiosos não alfabetizados conseguiriam se aproximar de imagens e lerem-nas qual fariam as palavras de um livro. Por sua vez, o Papa Gregório argumentou sobre o valor da imagem, defendendo que ler visualmente uma figura é a mesma coisa que aprender de modo profundo um fato venerável.

O Sínodo de Arras (apud MANGUEL, 1997, p. 118), em 1025, declarou que aquilo que a gente simples não podia aprender lendo as escrituras poderia ser aprendido por meio da contemplação de imagens.

Mesmo com os mandamentos de Deus para Moisés, ao proibir a construção de imagens, as Igrejas não deixaram de usá-las imagens para ilustrar as cenas sagradas em forma de símbolos da cristandade.

Significados que diferem daqueles instruídos pela fé foram, com o passar do tempo, atribuídos às imagens. Logo, as Igrejas, preocupadas, estabelecem no ano de 787, em Nicéia no sétimo Concílio, que as figuras agora seriam determinadas pelos padres das Igrejas, cabendo ao pintor apenas o dever de cumprir com seu papel de artista.

Manguel (1997, p.123) afirma que em meados do século XIII, os desenhos migraram das paredes e foram ocupar espaço em vitrais, pedras, e madeiras, sempre com o objetivo de estimular a espiritualidade humana, por uso da fé na história da salvação de figuras no Antigo e Novo Testamento. Essas figuras, no século XIV, ilustraram também os pergaminhos e os papéis, graças a intervenção dos gravadores e iluminadores, dando vida a livros com poucas palavras, mas com muitas cenas ilustradas justapostas, nomeadas de *Bibliae pauperum* que significa *Bíblia dos pobres*.

Manguel (1997) continua afirmando sobre a imagem e o intervalo de tempo que engloba o fim da Idade Média e o século XIX pois, em tal época, as imagens tinham na pintura antiga a função de livro, visto que representava as figuras bíblicas sagradas, qual a Virgem com sua mãe, a aparição do Anjo Gabriel, ou Maria Madalena, em uma posição que sugerisse erotismo. Com essas ilustrações, os fiéis (letrados ou não) poderiam conhecer as histórias presentes no Livro Sagrado. A Bíblia possuía o objetivo de catequizar as pessoas, diariamente, fazendo uso de duas imagens em qualquer pagina aberta para fazer referência temática aos sermões de cada dia.

Após a Bíblia, outros livros também começaram a ser ilustrados. As figuras apareceram a partir de uma técnica da gravura feita em cobre que consistia na impressão da imagem após a impressão textual. Assim, a imagem em cobre apareceria no verso da página dos caracteres que foram impressos. Eram necessárias duas oficinas, prensas diferentes, duas profissões e duas competências para que uma imagem pudesse aparecer no livro. Por esse motivo as imagens até o século XIX ficaram margeadas ao texto.

Em *Lendo imagens – uma história de amor e ódio*, Manguel (2001) aponta que as imagens em livros dão complemento à imaginação de quem lê com o que está lendo.

Já Flaubert (apud MANGUEL, 2001), nunca quis ou permitiu que se ilustrassem suas obras, pois cria que as figuras reduziam o que seria o poder da imaginação do leitor.

Manguel (2001) não concorda com Flaubert, pois defende que as figuras acompanham o homem desde o berço, ora criando ora imaginando os vários tipos de figuras, como: pessoas, paisagens, animais, situações diárias entre outras. Desta forma, “as imagens, assim como as histórias, nos informam.” (MANGUEL, 2001, p. 21).

Para Manguel (2001, p.24) ao mesmo passo que convertemos imagens em palavras, estamos também convertendo palavras em novas imagens, visto que a imagem dá origem a uma história, que, por sua vez, dá origem a uma imagem.

O autor (2001, p.27) acredita que quando fazemos a leitura de uma imagem (pintura, escultura, fotografia, cenas de teatro) estamos atribuindo-lhes uma característica temporária de narrativa, aludindo à arte de narrar histórias. Estamos conferindo à imagem fixa uma variedade de significados, dando-lhes uma vida infinita e inesgotável.

Mesmo assim, ainda afirma que não existe um sistema coerente para ler as imagens, similar àquele que criamos para ler a escrita.

Percebe-se que a responsabilidade da leitura de uma imagem fita-se aos olhos do leitor e não às mãos do *pintor, desenhista, editor gráfico,* entre outros. A tradição romana talvez tenha influenciado aos primeiros cristãos, quando resolveu ilustrar com figuras religiosas catacumbas, templos e outros lugares próprios para rezas e orações. Por esse motivo Manguel (2001, p.55) defende que a única reação frente a uma obra de arte seja o equivalente a uma prece de gratidão por nos permitir, com nossos sentidos limitados, um número infinito de leituras, que, para o nosso maior proveito e alegria, trazem a possibilidade de esclarecimento.

Outro aspecto importante muito presente na leitura das imagens é a subjetividade. Ela irá variar de pessoa a pessoa, podendo servir para que se ampliem seus conhecimentos ou sua aprendizagem. O papa Gregório que no século VI defendeu que representam coisas diferentes adorar um quadro e aprender em profundidade, por uso de quadros, o que venha a ser uma história. A escrita permite ao leitor o que as imagens permitem aos iletrados, ou aqueles que só conseguem perceber visualmente, pois nas imagens os analfabetos lêem à história e sabem como devem proceder, descobrindo que assim é, o que de certa maneira, podem ler. Neste sentido, em especial para a maior parte das pessoas, as imagens são o mesmo que a leitura. (MANGUEL, 2001, p. 143).

Manguel (2001, p.144) ainda relata que não devemos limitar o poder da imagem exclusivamente ativo ao analfabeto pois, muitas vezes, o leitor alfabetizado sente-se impotente ao dar significado a uma imagem ou convertê-la em palavras. Entretanto, ao significar uma imagem mais complexa em informação, faz-se necessário *uma linguagem comum, que seja profunda e significativamente rica*.

As imagens passaram a ser uma ferramenta de grande utilidade ao perceber-se que elas são capazes de transmitir informações de variadas maneiras. As imagens podem ser lidas com caráter subjetivo ou objetivo; podem ser usadas como ilustração ou recursos memorísticos; podem complementar as idéias de um texto e podem até mesmo substituir o texto. Portanto, é nesse olhar das funcionalidades de uma imagem, que detalhamos a seguir a imagem como elemento cognoscível com capacidade de transmitir conhecimentos.

2.2 Imagens que ensinam

Dando complemento às idéias que foram apresentadas sobre a leitura das imagens e sua conexão ao texto, nos atemos agora à linha narrativa do livro didático, pois possui um acervo considerável de imagens utilizadas para educar no universo dos estudantes. Narrar-se-á sua origem e história, seu uso, suas funções e as implicações que seguem quando se resolve adotá-lo nas escolas públicas brasileiras.

A expressão escrita do livro didático é considerada uma prática bastante antiga, qual *Poética* de Aristóteles, onde havia anotações de discussões filosóficas do século IV antes de Cristo. Recordemos que em uma época um tanto mais recente que a de Aristóteles, Comenius no século XVII, defendeu a importância de que alguns livros poderiam servir como transmissores de informação e conhecimento.

Já no Brasil (1549), vindos de Portugal, os Jesuítas, com o objetivo de ensinar a escrever, ler e catequizar nossos indígenas, *doutrinava-os* fazendo uso de cartas, que tão logo se tornariam cartilhas (sem mencionar os próprios livros trazidos de Portugal). Entretanto, essa idéia original foi abortada e entrou em vigor uma educação jesuítica voltada aos filhos de senhores de engenho, colonizadores, ou seja, aos meninos de famílias de alto prestígio, pois alguém letrado poderia possuir uma elevada posição social. Conforme cita Montellato (apud NEVES 2005), só os mais ricos continuavam seus estudos, podendo escolher entre a educação superior religiosa ou a Universidade de Coimbra, em Portugal. Neves (2005) afirma em seus estudos que:

> A educação na colônia recebeu pouca atenção da coroa portuguesa. A igreja católica, em especial, a Companhia de Jesus foi o principal agente da educação escolar nos primeiros tempos de vida colonial. Os padres jesuítas catequizaram os Índios, impondo-lhes a fé cristã , enquanto lhes ensinavam a ler e a escrever. Fundaram colégios e seminários e ofereciam educação bíblica, para a população de colonos.

Em 1759, com a chegada de Marquês de Pombal, ocorre a expulsão da Companhia de Jesus e se inicia o ensino público (financiado através do Estado), com o objetivo de não mais formar o homem para a Igreja, e sim de formá-lo para si mesmo. Como destaca Neves (2005),

> No final do século XVII era de dezessete o número de instituições de ensino mantidas pelos jesuítas na época em que foram expulsos do Brasil. Fato interessante é que, grande parte dos professores dessas 17 instituições jesuítas realizaram seus estudos no Brasil como, por exemplo, o Padre Vieira. Eles prepararam os primeiros bacharéis para os estudos superiores, em Coimbra ou na Europa, pois no Brasil não existiam escolas superiores. A Universidade de Coimbra passou a exercer papel importante na formação da elite brasileira e quase todos os homens graduados nos três primeiros séculos, foram nela formados em letras, medicina ou magistratura.

A partir desse contexto, da prioridade da formação do homem pra si mesmo, é que se começa a debater sobre uma definição do que deveria ser o livro didático, ou seja, livros usados com o objetivo de auxiliar a educação. No Brasil, o livro didático não foi implantado por dirigentes diretamente ligados a educação. Sua implantação deu-se por meios de decretos, leis e medidas governamentais (CORACINI, 1999, p. 46).

D'Ambrosio (apud NEVES 2005) ressalta que no tempo de colônia, apesar do pouco interesse, no Brasil, a Matemática começa a se destacar com os *padres matemáticos*, ou seja, padres que tinham formação em matemática, vindos de Portugal como o Padre Valentin Stancel (1621-1705), Bartolomeu Gusmão (1685-1724), conhecido como *Padre Voador*, Domenico Capassi (1694-1736) 12 e Diogo Soares (1684-1748). Eles eram considerados os padres matemáticos. Na época, surgem os primeiros livros de matemática escritos no Brasil, por José Fernandes Pinto Alpoim (1700-1765): *Exame de Artilheiro* (1744) e *Exame de Bombeiro* (1748), ambos impressos na Europa. Como destaca Neves (2005):

> No ano de 1744, o grande destaque da literatura didática da matemática brasileira, é da autoria de José Fernandes Pinto Alpoim, com as obras Exame de Artilheiros e Exame de Bombeiros, que teve a iniciativa de escrever estes dois manuais escolares para uso de seus alunos nas aulas de Artilharia, onde ele exercia o cargo de Mestre da Aula de Artilharia no Rio de Janeiro. Os dois manuais escolares foram os primeiros livros de matemática escritos por brasileiro.

Neves (2005) ainda destaca que a impressão Régia começou a imprimir livros no Brasil, no ano de 1808, com Observações sobre o Comércio Franco no Brasil, de Silva Lisboa. Em 1809, foram realizadas várias traduções de textos europeus de matemática, sendo os primeiros livros de matemática traduzidos e impressos no Brasil: *Os Elementos de Geometria*, de Legendre, tradução de Araújo Guimarães; *Tratado de Trigonometria*, do mesmo Legendre, O*s Elementos de Álgebra*, de Leonhard Euler.

Em 1810, foi lançado *O Tratado de Aritmética*, de Lacroix e traduzido por Silva Torres. No ano de 1812, *Os Elementos de Geometria Descritiva*, de Gapard Monge e traduzido por José Vitorino dos Santos e Souza.

A chegada da família real em 1808 marca muitas seqüências de acontecimentos, entre essas, o Brasil deixa de ser colônia. Uma das primeiras medidas que D. João assina é a abertura dos portos, que permitiu à Inglaterra a comercialização de seus produtos. Outra, foi a autorização da Imprensa Régia, mas funcionando sob forte censura, a fim de impedir qualquer atitude contra o reino. A impressão de textos que era proibida pela administração colonial começa a funcionar, porém, totalmente controlada. Em 1810, foi anexada à Impressão Régia uma fundição de tipos que permitiu a arte da gravura, tendo como conseqüência o surgimento de profissionais de artífices, desenhistas, gravadores e tipógrafos que vinham de fora e outros que aprendiam o ofício aqui.

Além da revolução econômica, visto que os livros passaram a ser produzidos ao menor custo e em série depois dessas fronteiras serem aberta, a imprensa possibilitou aos alunos ampliar seus conhecimentos ao terem acesso ao livro para estudar e assim libertaram-se do domínio de seus professores. Já para estes, a invenção de Gutemberg fez com que o livro passasse a ser mais um meio pedagógico para enriquecer suas aulas, livrando-os da subordinação didática e sistemática que exerciam em sala de aula.

Poderíamos grifar os anos 30 do século XX, como o de início das produções de livros didáticos, pois os vindos de fora acabaram por tornar-se muito caros. Nessa mesma década, o Decreto Lei número 1.006 (em 30 / 12 / 1938 – art. 2º) afirmou que:

> Compêndios são os livros que exponham total ou parcialmente a matéria das disciplinas constantes dos programas escolares; livros de leitura de classe são os livros usados para leitura dos alunos em aula; tais livros também são chamados de livros de texto, livro-texto, compêndio escolar, livro escolar, livro de classe, manual, livro didático. (OLIVEIRA, 1984, p. 22-23).

Com base nesse Decreto, criou-se a Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD) integrada por sete pessoas. Elas foram selecionadas pelo Presidente da República, considerando-se suas realizações pedagógicas. Essa comissão possuía por objetivo, avaliar, examinar e julgar os livros didáticos, dando permissão ou não de seu uso em escolas e salas de aula. É interessante destacar que nesse período o cenário político do Brasil era polêmico e autoritário. A CNLD fazia um controle sobre a adoção de livros, com intuito de preservar a nacionalidade, dando valor aos aspectos político-ideológicos que possuíam os livros didáticos, ficando em segundo plano os valores pedagógicos.

Neves (2005) aponta que é a partir do início de 1900, que se inauguram as editoras especializadas em livros didáticos. O mercado torna-se bastante atraente com as concorrências pelo comércio do livro didático. Vários matemáticos ilustres tiveram suas obras editadas, como Otto de Alencar (1874-1912) e M. Amoroso Costa (1885-1929).

No ano de 1907, começa a história do livro didático de matemática que teve vida mais longa. Trata-se da *Aritmética Elementar Ilustrada*, de Antônio Trajano, para ensino primário. Segundo Zamboni (apud NEVES 2005), no Brasil não houve livro que atingisse tantas gerações de crianças e jovens como este o fez.

No período de 1920 a 1930, destaca-se o compêndio de matemática, de Euclides Roxo, professor de matemática do Colégio Pedro II. No ano de 1942, Neves (2005) relata:

> novos livros passam a ser adotados pelas escolas como Curso de Matemática, de Algacyr Munhoz Maeder, professor do Colégio Estadual do Paraná, editado pela Melhoramentos; Matemáticas, de Ary Quintella, professor do Colégio Militar, editado pela Nacional, Matemática (destinada à 1º série dos cursos Científicos e Clássicos), de F. Furquim de Almeida, João B. Castanho, Edison Farah e Benedito Castrucci da Editora do Brasil, entre outras.

Essa trajetória inicia-se em 1929, com a criação do Instituto Nacional do Livro (INL) que, de imediato, não sai do papel. Só em 1934, quando Gustavo Capanema torna-se ministro da Educação do governo do presidente Getúlio Vargas, o INL recebe suas primeiras atribuições: a edição de obras literárias para a formação cultural da população, a elaboração de uma enciclopédia e de um dicionário nacionais e a expansão do número de bibliotecas públicas.

Neves (2005) ainda ressalta que na década de 1930 os programas da Reforma Francisco Campos tiveram importante influência na organização do livro didático de matemática. Tratava-se de uma reforma curricular que apresentava uma mudança radical nos programas de ensino de matemática, tendo como referência idéias modernizadoras defendidas pelo movimento internacional para a modernização do ensino da Matemática. Mas, é importante mencionar que as reformas de ensino alteraram os programas de currículos, interferindo no processo de produção do livro didático e conseqüentemente na relação dos envolvidos nesse processo. Em 1938, o Decreto-lei nº 1006, de 30 de dezembro de 1938, foi a primeira medida governamental de legislar e controlar o livro didático e, por meio desse mesmo decreto, é instituída a Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD) para tratar da produção, controle e circulação dessas obras. Neves (2005) ainda aponta que:

> No governo de Getúlio Vargas (1932-1945), o setor de livros passa por um momento de grande expansão, pois a taxa de importação sofre uma desvalorização em razão da queda nas importações do café. No período de Vargas, foram valorizados nossos símbolos populares como o samba, o carnaval, o futebol, mas sob censura.

Por meio do decreto do *Estado Novo*, que trouxe para o cotidiano a propaganda política, Vargas passa a ser um ditador. Em 27 de dezembro de 1939 Vargas criou o Departamento de Imprensa e Propaganda (DIP), órgão responsável pela censura e divulgação da política de comunicação da ditadura junto à sociedade. Neves (2005) afirma sobre o DIP que "Seu principal objetivo era atrair a população e, portanto, todos os meios de comunicação de massa foram usados para divulgar a imagem de um governo que concedia ao trabalhador tudo o que era necessário para sua vida."

Passados onze anos (1934/1945), finda a guerra, Getúlio Vargas cai e Gustavo Capanema deixa o Ministério da Educação e Cultura (MEC). Não estavam, ainda, conclusos o dicionário nem a enciclopédia, mas as bibliotecas cresceram para além do Rio de Janeiro e de São Paulo, graças à oferta de acervo oferecido pelo Governo Federal.

Sobre um olhar matemático, Neves (2005) aponta fatos importantes que marcam a história da matemática no Brasil. Ela afirma que na década de 1930, o professor Euclides de Medeiros Guimarães Roxo (1800-1950) propôs uma mudança no currículo e na metodologia adotados pelo Colégio Pedro II [3], Rio de Janeiro, do qual era Diretor. Sua proposta tinha

[3] Criado em 1739 como Colégio de Órfãos de São Pedro, Rio de Janeiro, sempre foi gratuito e, durante muito tempo, um reduto da elite brasileira. Ali lecionaram Euclides da Cunha, Joaquim Nabuco e Benjamin Constant, tendo como alunos o imperador Pedro II, os presidentes Rodrigues Alves. Nilo Peçanha, Hermes da Fonseca e Washington Luiz e escritores como Pedro Nava e Manuel Bandeira.

como base características do movimento internacional de Felix Klein e representou uma grande mudança nos programas de Matemática deste colégio.

Euclides Roxo escreveu a coleção de Matemática Elementar, cuja iniciativa ocasionou resistências por parte de alguns professores que criticavam publicamente seus livros e novas propostas. O próprio Euclides Roxo dizia que o programa da coleção representava a primeira tentativa, feita no Brasil, para renovação dos métodos de ensino da Matemática, no curso secundário, de acordo com o movimento de reforma.

Em 1937, escreveu o livro *A Matemática na Educação Secundária*, procurando caracterizar e indicar as principais tendências e diretrizes dos movimentos de reforma, tratando apenas dos problemas mais gerais e dos pontos mais característicos da *Escola Nova* em relação à Matemática. Na introdução do livro, ele afirma que o conteúdo exposto não apresenta nenhuma idéia original e nenhum ponto de vista pessoal. Conforme Dassie (2001-2002), "trata-se de uma coleção verdadeiramente revolucionária para a época, e que provocou imediatamente ira em alguns e apoio em outros." Nessa época, destaca Silva Júnior (2005), a *escola nova* buscava uma forma de transformar o livro didático em um recurso escolar.

> A legitimação desse recurso vem desde a época de Comenius (1592-1670) que em uma de suas principais obras: a Didática Magna (2001) apresentava as características fundamentais da escola moderna, a saber: a construção da infância moderna como forma de pedagogização dessa infância por meio da escolaridade formal (até então, as crianças eram tratadas como pequenos adultos); uma aliança entre a família e a escola, por meio da qual a criança vai se soltando da influência da órbita familiar para a órbita escolar; uma forma de organização da transmissão dos saberes, baseada no método de instrução simultânea, agrupando-se os alunos, onde era proposto um único livro como referência ao aluno. Desse modo, este recurso começa a padronizar a educação da época. Assim, passa a ocorrer reprodução do conhecimento científico de modo simplificado, transformando-se, com o passar dos tempos, em um recurso para o currículo escolar.

Entretanto, a Geometria ainda não era bem trabalhada a partir do enfoque interdisciplinar. Pavanello (2004) aponta que nessa época, em relação ao ensino da geometria, havia propostas de que se iniciasse pelas explorações intuitivas, a partir das quais se estabeleceriam os conhecimentos indispensáveis à construção de uma sistematização, que deveria atingir a exposição formal. Mas os exames de livros didáticos da época mostram que os temas (aritmética, álgebra e geometria) são programados em cada série, sem que exista a preocupação em trabalhá-los integradamente. Essa estrutura funciona dessa forma por quase três décadas. A Geometria é abordada nas quatro séries, intuitivamente nas duas séries iniciais, e dedutivamente nas últimas. Ela é também bastante priorizada no segundo ciclo, constando na programação de todas as séries. Também as instruções metodológicas não apresentam novidades nesse período. Recomenda-se, para as primeiras séries do curso ginasial, correspondente hoje aos quatro últimos anos do Ensino Fundamental (6ª ao 9ª ano), um ensino essencialmente prático e intuitivo. O método dedutivo deve ser introduzido ainda no curso ginasial, paulatinamente, à medida que o aluno vá percebendo ser necessário justificar, provar e demonstrar certas afirmações. Recomenda-se que se apele à intuição e não exagere idéia de rigor

Na década de 1940, Júlio César Mello e Souza - Malba Tahan inicia sua carreira de professor no Externato do Colégio Pedro II. Tornou-se, depois de um tempo, catedrático do Colégio Pedro II e professor do Programa de Pós-Graduação do Departamento de Educação da Pontifícia Universidade Católica (PUC), do Rio de Janeiro, no Instituto da Escola Normal da Universidade do Brasil e da Faculdade Nacional da Educação (FNE), onde recebeu o título de Professor Emérito.

Para transmitir conteúdos pedagógicos, criou uma didática própria e divertida, respeitada até os dias de hoje. Quando lecionava no Instituto de Educação do Rio de Janeiro, teve a iniciativa de criar uma nova disciplina para o aperfeiçoamento dos professores: a arte de contar histórias. Seus métodos de ensino eram avançados para a época. Suas aulas eram criativas, movimentadas e divertidas. Procurava trabalhar com estudo dirigido e gostava de usar objetos para ilustrar as aulas. Defendia o trabalho em grupo e colocava os alunos mais fortes para ajudar os mais fracos. Era totalmente a favor do uso de jogos em sala de aula.

Damázio (2006) comenta sobre a metodologia adotada pelo professor em foco, afirmando que:

> Essa preocupação e tentativa de aproximação explicitam um elemento criativo-reprodutor dos novos livros: os aspectos didático-metodológicos, isto é, os conteúdos matemáticos permanecem os mesmos, porém muda seu enfoque e sua forma de apresentação. Os autores recorrem ao estudo dirigido como metodologia para *lecionar Matemática sem as tradicionais aulas expositivas que cansam os alunos e principalmente os professores atarefados*. A crença explicitada pelos autores é que o estudo dirigido aumenta a capacidade de reflexão dos alunos, pois dá a oportunidade de, por si mesmos, chegarem à conclusões e elaborar deduções das questões propostas. Concorrem para a aprendizagem: a simplicidade da apresentação dos assuntos.

Malba Tahan foi o precursor de uma nova tendência que ainda conquista muitos adeptos em todo o Brasil. Como destaca sobre sua óptica de ver a matemática:

> O edifício matemático, constituído pela estrutura das demonstrações e pelo encadeamento lógico das proposições continua inviolável, fiel às tradições euclidianas. Sente-se, porém, que há tendências para tornar "intuitivas" as concepções matemáticas, isto é, a corrente dominante é aquela que procura modernamente apresentar o ensino sob a uma forma viva e concreta. As teorias devem trazer como complemento indispensável, as aplicações práticas que delas resultam. (MELO E SOUZA APUD VALENTE, 2003)

Ele foi o primeiro a trabalhar com a *História da Matemática* e com a interdisciplinaridade. Sua fama como pedagogo espalhou-se e ele passou a ser convidado para palestras em todo o País, que foram mais de 2.000 ao longo de sua vida. Neves (2005) destaca sobre Malba Tahan:

> Não podemos deixar de exaltar a importância de sua literatura para a história da educação brasileira que tem sido reconhecida por muitas gerações como seu livro mais famoso *O Homem que Calculava*, com mais de 45 edições, que, em sua história usa a matemática para resolver problemas. Esta obra foi premiada pela Academia Brasileira de Letras quando, em 1972, em sua 25ª edição e editada em outros países como Espanha, EUA e Alemanha, sendo indicada nesses países como livro paradidático.

Os livros didáticos reúnem peculiaridades que os tornam diferentes dos demais livros, possuindo recursos como as imagens, as metáforas, o ritmo, a fantasia e a idealização do mundo de uma forma poética. Mesmo assim, ainda não são reconhecidos como textos artísticos. Ao ter conhecimento de que um livro didático reúne todos estes aspectos, e que será justamente este o diferencial que despertará nos alunos a imaginação e o senso crítico, a sua escolha constitui uma tarefa minuciosa e responsável, pois poderá influenciar o gosto literário de um leitor em formação e este deve ser orientado continuamente através das práticas de leitura.

Na década de 1950, foram introduzidos ao currículo de matemática, novos conteúdos, com a finalidade de envolver a criança em um tipo de aprendizagem que fosse mais ativo. Essa mudança iniciou-se no exterior com o movimento de renovação no ensino da matemática e chegando ao Brasil, foi amplamente divulgada nos congressos nacionais de ensino da matemática. Surgiram os favoráveis à idéia, mostrando seus trabalhos com propostas de novos conteúdos e novos métodos de trabalho.

Na década de 1960, com a expansão escolar, aumenta no Brasil a preocupação com o livro didático. O Banco Mundial com sua política de empréstimos referente à educação de países em desenvolvimento tem participação muito importante no investimento de material escolar e de livros. Timidamente, surge a política do livro didático com recursos do Governo Federal, que não havia definido uma estratégia que fosse eficiente para o problema e prosseguiam as acusações referentes à especulação comercial do livro didático.

Sobre o ensino de geometria, Pavanello (1993) afirma que nessa época a 4ª série começa a iniciar o estudo da geometria plana, dedutiva, onde deverá ser "limitada, porem, à demonstração dos teoremas mais importantes e sempre com vistas à aplicações de ordem utilitária." É quando à geometria, opta-se no primeiro momento, por acentuar nos livros as noções de figura geométrica e de intersecção de figuras como conjunto de pontos do plano, adotando-se, para sua representação, a linguagem da teoria dos conjuntos. Procura-se trabalhá-la segundo uma abordagem *intuitiva* que se concretiza, nos livros didáticos, pela utilização de teoremas como postulados, mediante os quais pode-se resolver alguns problemas. Não existe qualquer preocupação com a construção de uma sistematização a partir das noções primitivas e empiricamente elaboradas.

Neves (2005) ainda diz que no início da década de 1960, o Grupo de Estudos do Ensino de Matemática de São Paulo foi de grande importância, desenvolvendo pesquisas e experiências do qual participava o professor Osvaldo Sangiorgi, do Instituto de Educação Padre Anchieta e Assistente de Geometria Analítica da Faculdade de Filosofia da Universidade Mackenzie. Sangiorgi definiu uma nova linha para transmitir os conteúdos matemáticos e que fossem mais eficientes no desenvolvimento do aluno. Ele conquistou efetivamente seguidores dessa linha que procuravam ajustar os livros a um esquema de curso moderno de matemática. Realizou também uma revisão em seus livros que ganharam um visual mais atraente, mais ilustrativo com adição de uma cor para destacar tópicos importantes. Os livros didáticos de matemática publicados na década de 1960 passam a adotar um padrão mais Moderno.

Em 1966, foi criada a Comissão do Livro Técnico e do Livro Didático (COLTED), pelo Decreto nº 59.355, de 4/10/66, que tinha como o objetivo o de comprar livros didáticos das editoras e distribuí-los. A COLTED veio fortalecer o comércio de livros e beneficiar o setor industrial, pois, em apenas seis meses de seu início, uma quantia significativa de dólares estava sendo investida neste setor. No final de 1969, por meio de uma seleção nos níveis de 1º e 2º graus que a COLTED realizou nas escolas, ouvindo professores sobre livros existentes e disponíveis, foram enviados às escolas cerca de 15.676.000 livros e 5.874.320 foram emprestados aos alunos.

Neves (2005) aponta que a COLTED também distribuiu livros às Universidades com desconto de 30% a 35%. Realizou seminários para editores e profissionais da área e, em 1968, em conjunto com a Câmara Brasileira do Livro (CBL), Sindicato Nacional dos Editores de Livros (SNEL) e United States Agency for International Development (USAID) foi realizado o Encontro de Editores e Livreiros no Brasil, que acontece, anualmente, até os dias de hoje. A COLTED foi absorvida pelo INL, em 1971, no Ministério da Educação de Jarbas Passarinho, tendo o fornecimento gratuito de livros didáticos extintos pelo fato do ministro considerar que os pais que poderiam pagar, deveriam fazê-lo.

A partir da década de 1970, começam a surgir inovações nos livros de matemática que aparecem com textos mais adequados à realidade dos alunos e preparados de acordo com novas legislações de ensino e apresentando novo formato. A indústria editorial procura diversificar sua produção, buscando o livro certo para cada tipo de leitor. Ocorre uma multiplicação da busca pelo mercado de livro, entre jovens, adolescentes, crianças na escola e pré-escola e jovens adultos. Em meio a essa adaptação para atender novos clientes, a indústria de livro didático procura acompanhar as mudanças ocorridas, utilizando-se dos avanços tecnológicos, com máquinas modernas que permitem a grande produção.

Damázio (2006) afirma que ainda, nos anos 1970, as obras mais adotadas foram de Name, Zambuzzi e Ens. Novos autores que não descartam nem o brilhantismo de seus antecessores como também o formalismo matemático. Entretanto, fazem uma crítica sutil à aridez como, até então, eram tratados os conteúdos e à finalidade implícita do ensino de Matemática: desenvolvimento do espírito, da disciplina mental e do rigor lógico. A preocupação é de traduzir a matemática para uma linguagem mais simples e concisa, com a finalidade de se tornar acessível aos alunos. Também, há um esforço de fazer uma aproximação mais estreita do formalismo moderno ao clássico. Damázio (2006) ainda afirma que:

> Quanto ao visual, os livros são mais coloridos; apresentam desenhos e gravuras para chamar atenção de algumas propriedades, definições ou macetes que os autores consideram primordiais para a aprendizagem de um determinado conteúdo; as capas são ilustradas com o que está em evidência na mídia para a faixa etária a que o livro se destina. O livro de Ens traz na capa a foto do *Ferrugem*, um artista mirim da televisão; e a capa do livro de Zambuzzi é

> ilustrada com cenas de desenho animado. No que se refere ao livro do professor, vale destacar a sua diferença em relação ao do aluno por ter todos os exercícios e problemas resolvidos. Os planos de ensino seguem os padrões da pedagogia tecnicista e são apresentados no próprio livro ou nos manuais distribuídos ao professor. A ficha de avaliação, como a sugerida por Zambuzzi, indica o que avaliar (uso do material, trabalho em grupo, tarefa, participação e sabatina), o peso atribuído a cada aspecto avaliado e cálculo da média das avaliações para atribuir a nota ao aluno.

Em 1971, segundo Neves (2005), o INL desenvolve o programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental (PLIDEF) e, em 1976 com a extinção do INL foi criada a Fundação Nacional do Material Escolar (FENAME).

É nos anos 80, para Damázio (2006), que as pedagogias progressistas se apresentaram em oposição às liberais ou conservadoras. No caso específico da Matemática, a ofensiva é contra a concepção formalista nas suas duas vertentes e ao ensino tradicional, tecnicista e escolanovista. Contextualização, historicidade, criticidade, oprimido/opressor, dialeticidade, construtivismo, entre tantas, foram categorias que passaram a predominar na pedagogia brasileira. Entretanto, os livros didáticos continuavam acentuando uma abordagem internalista da matemática, se constituindo numa espécie de edifício fundamentado em alicerces lógicos que não têm ligação com o mundo intersubjetivo. O contexto era propício para que o conhecimento emancipador se fizesse presente aos livros didáticos. Porém, o que ocorre é a presença de um discurso matemático de simplificação da linguagem.

O fim do sistema de avaliação por avanço progressivo, em 1985, parece acender as esperanças do professor em voltar ao um ensino de matemática mais rigoroso e exigente. Com isso, a opção é por um livro que vá direto à definição, dê exemplos de exercícios e exercícios de fixação com variedade e grau de dificuldade ascendente, que sugeria provas com questões descritivas em vez de objetivas. Por atender com certa proximidade esses requisitos, pode-se dizer que se inicia em 1986 e se prolonga até 1996.

Em 1995 criou-se o Programa Nacional do Livro Didático (PNDL), pelo Ministério da Educação e do Desporto (MEC) e possuía como objetivos a distribuição gratuita dos livros didáticos a todo o alunado brasileiro que possuísse cadastro nos censos escolares das instituições de educação públicas do ensino fundamental. Como ressalta Silva Júnior (2005):

> em 1995, o governo federal brasileiro cria o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) com o objetivo de distribuir livros escolares a todos os alunos das escolas públicas de ensino fundamental do país, sendo estes livros, até 1996, escolhidos de modo técnico administrativo com os representantes do governo, até

> que a Secretária da Educação Fundamental (SEF) decide avaliar os livros a serem adquiridos para a distribuição, e para isto, compõe equipes de avaliação.

O Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) ficou encarregado dos recursos do salário educação que seriam investidos nas ações sociais de caráter educativo para a Educação fundamental. Os anos 90 representaram um marco ao MEC ao incentivar-se discussões sobre a qualidade do livro didático escolar. Visto que desde a década de 1960, no Brasil, havia denúncias de pouca qualidade na produção didática dos livros, por possuir um caráter discriminatório e ideológico. Eram encontrados erros de conteúdo, desatualização e metodologias falhas.

Em 1993, dá-se início ao Plano Decenal de Educação para Todos (PDET), possuindo como função capacitar ao professor na hora de avaliar e selecionar, por meio de um manual, o livro que adotaria e utilizaria, além de cuidar da qualidade do livro, através de uma comissão de especialistas. Em 1994, surgem publicações de resultados que davam evidências às mais fortes inadequações conceituais, metodológicas e editoriais de livros didáticos.

Professores de três níveis de ensino compunham uma comissão avaliadora do MEC, a fim de criar critérios para serem discutidos e avaliados como os mais indicados autores ou editores de livros didáticos. Critérios comuns de análise foram definidos como a adequação pedagógica e didática, além da qualidade gráfica e editorial.

Rangel (1998, p.1) defende que o contexto histórico-social é o indicado para avaliar a qualidade de uma obra didática, visto que o que merecia destaque no início do século, atualmente estava fora de foco. Ele diz "a qualidade de um LD é definida, sempre, por referência a um corpo de princípios, valores e critérios, explícitos ou não, que sintetizam o que uma determinada época pensa e espera do ensino de língua materna."

Para garantir qualidade nos livros didáticos, o PNLD aplica um mecanismo de avaliação pedagógica nas obras didáticas inscritas no programa. Para selecionar essas obras, o PNLD definiu fortes critérios usados até 2003. A partir de então, tais critérios foram abolidos.

Para que o material chegasse ao professor, o MEC criou um guia dos livros didáticos, avaliando os livros que correspondem ao ensino fundamental das 5ª às 8ª séries. Este guia teria como meta auxiliar ao professor na opção de um livro didático a ser utilizado em sala de aula, mostrando ser um importante trabalho de caráter pedagógico realizado pela Secretaria de Ensino Fundamental (SEF) e pelo MEC. O livro didático muitas vezes torna-se o *guia da aprendizagem* seguido pelos professores e aprendido pelos alunos, como destaca Silva Júnior (2005):

> a forma com que os LD são estruturados em blocos, com objetivos, programação temporal, estratégias e instrumentos de avaliação, facilitam a sua utilização, não somente como mais um recurso didático, mas assumem a característica de um currículo a ser seguido pelo professor. Esse papel parece fazer com que o LD funcione, em muitos casos, como uma espécie de "currículo praticado" pelos professores, e que muito embora não seja o único material de que os professores e alunos vão valer-se no processo de ensino e aprendizagem, ele pode ser decisivo para a qualidade do aprendizado resultante das atividades escolares.

Silva Júnior (2005) observa que todos os livros didáticos de matemática que chegam ás escolas públicas, para o processo de adoção no PNLD, passaram por um processo de análise nas comissões de avaliação que possuem critérios eliminatórios comuns a todos. Assim, pode-se verificar que para ser utilizado nas escolas públicas do Brasil, qualquer livro didático precisa responder por alguns critérios, entre os quais: apresentar um conteúdo acessível para a faixa etária destinada, estimular e valorizar no texto a participação do aluno, combater atitudes e comportamentos passivos. Como aponta o referido autor:

> O livro deve promover uma integração entre os temas discutidos, valorizando o conhecimento do aluno, além de conter ilustrações atualizadas e corretas. A partir desse contexto, várias são as discussões sobre a qualidade do livro didático. Como, por exemplo, que o bom livro didático diferencia-se do livro didático ruim pelo tipo de diálogo que estabelece com o professor, diante do planejamento do curso.

Apesar de receber muitas críticas, o livro didático ainda constitui um dos recursos mais importantes utilizados pelo professor e certamente ele desempenhará esta função por muito tempo. Ele permite aos alunos captar todo o seu conteúdo e com isso o professor obtém sucesso no processo ensino-aprendizagem em sala de aula. Como enfoca Silva Júnior (2005)

> Para alguns professores, o uso do LD possui influência direta em seu planejamento didático (textos, exemplos e atividades) e conteudista (seqüência de conteúdos), que passa a ser feito exclusivamente tendo como referência sugestões que estes livros trazem em seu apoio, processo pelo qual as aulas são organizadas e programadas, podendo chegar a ser a própria aula. Assim é visível a utilização dos livros didáticos pelos professores, com mais ou menos intensidade, na preparação das aulas e utilização dos exercícios e atividades.

A literatura era apresentada em livros didáticos, por meio de fragmentos de textos literários, seguindo-se a ideologia e a estética literária oficial. Servia como pretexto para avaliar formalmente os alunos utilizando exercícios de gramática, fichas de leitura e até como temas de redação. São utilizados tanto para ensinar disciplinas como História, Geografia, Ciências, quanto para doutrinar.

Choppin (2004) afirma que no final dos anos 1980, com os avanços da semiótica, o impulso da história das mentalidades e o interesse pelas questões de vulgarização das ciências, que recorreu a muitos esquemas e gráficos, o livro didático deixou de ser considerado como um texto subsidiariamente *enfeitado* de ilustrações. Tudo isso para que a iconografia didática — e a articulação semântica que une o texto e a imagem — tenha sido levada em conta.

Percebe-se, de acordo com Martins (2002), que a partir daí as imagens passam a ter grande valor para o meio de comunicação e divulgação da ciência. Além da visível importância aos recursos de visualização e da grande inteligibilidade que as imagens podem atribuir a textos da ciência, as figuras possuem um papel de fundamental importância na constituição e conceitualização de idéias científicas. Esses dados vêm sendo cada vez mais explorados como objetos de investigação na área da educação matemática, voltados para o campo de geometria, além de se verificar o interesse que áreas como a psicologia cognitiva, a semiótica social e o estudo de culturas possuem acerca da compreensão de como as imagens e o conhecimento científico podem ser explorados mutuamente.

A aquisição de conhecimentos na matemática e na Geometria perpassa pela resolução de problemas. Um fator que influencia gradativamente a desmotivação do estudante a *pensar geometricamente* é a desvinculação dos problemas abordados no livro didático com situações do dia-a-dia. Por exemplo, é comum ler-se questões como: c*alcule a área de um triângulo de base 8 e altura 2*, acompanhado de uma imagem que ilustra um triângulo com as medidas citadas no enunciado. Aplicar uma fórmula e resolver uma questão geométrica é bastante prazeroso, desde que se compreenda o porquê da representação formular. Do contrário, as fórmulas, relações e teoremas não passam de mero acúmulo de conhecimentos sem significados. Para Machado (1997 apud JUNIOR 2005), o livro didático, de um modo geral, poucas vezes consegue escapar da apresentação convencional que distingue com nitidez o momento da teoria do momento dos exercícios de aplicação, este por sua vez, quase sempre se limita a problemas estereotipados, em que também se distingue com nitidez os dados a serem utilizados (sempre necessários e suficientes para a resolução).

Os leitores até são preparados para fazerem uso do raciocínio geométrico no texto explicativo do livro didático, porém diante da abstração, descontextualização e do excessivo uso das fórmulas matemáticas, resta lhes apenas memorizar os principais passos da resolução da questão e reproduzi-los nos exames de qualificação. Portanto gera-se a idéia de compartimentalização de conhecimentos, onde os alunos não conseguem perceber a significação do *pensar geométrico* no instante da aprendizagem, sem mencionar a quantidade excessiva de problemas repetitivos ocasionando um desgaste considerável no interesse dos alunos em raciocinar matematicamente. Como pensa Brandão (1981 p.26):

> Percebi que o ensino de conteúdo não passa de mera memorização de conhecimentos sistêmicos. A atenção dos professores está em transmitir conhecimentos e o aluno deve 'decorá-los'. Porém, a realidade do mundo é uma coisa diferente e muito mais rica do que aquilo que está codificado na lógica e na linguagem dos fatos [...]. O pensamento corresponde à realidade somente na medida em que transforma à realidade ao captar e decifrar sua estrutura contraditória [...]. Compreender a realidade significa, portanto, compreender o que as coisas verdadeiramente são, e isso implica, por sua vez, na recusa de sua simples facticidade.

Pavanello (1993) afirma que os conteúdos da matemática (aritmética, geometria, álgebra, etc.) são ensinados separadamente e por professores diferentes. O tratamento dado a eles é puramente abstrato, sem qualquer preocupação com as aplicações praticas. Os livros utilizados também desenvolvem cada assunto progressiva e sistematicamente como um todo, sem procurar estabelecer qualquer relação entre os diferentes ramos da matemática.

O aspecto deslocado, ao qual o ensino das matérias de exatas vem se submetendo, deve-se ao fato do uso de um ensino memorístico como recurso de trabalho, atribuindo aos conhecimentos matemáticos e geométricos uma inaudita superficialidade. Como defende Freire (1996, p.33):

> É por isso que transformar a experiência educativa em puro treinamento técnico é amesquinhar o que há de fundamentalmente humano no exercício educativo: o seu caráter formador. Se se respeita a natureza do ser humano, o ensino dos conteúdos não pode dar-se alheio à formação moral do educando. Educar é substantivamente formar.

Morin (2006, p.4) afirma que desta forma, o ensino por disciplina, fragmentado e dividido, impede a capacidade natural que o espírito tem de contextualizar. E é essa capacidade que deve ser estimulada e desenvolvida pelo ensino, a de ligar as partes ao todo e o todo às partes. “Não se pode conhecer as partes sem conhecer o todo, nem conhecer o todo sem conhecer as partes.” Calvino (1994, p.17) complementa a idéia de Morin ao relatar que temos a tarefa de “refletir sobre determinada questão e a pensar diferente do que se pensava”. Clareando essa obrigação: devemos produzir uma conexão entre o que estamos vivendo e o que viveremos. Ou seja, devemos produzir *conexões entre diferentes conhecimentos* que, ao longo da nossa existência, estamos acumulando. Para Calvino (1994, p.17,58), “como o sol ilumina por inteiro, os conhecimentos também formam um inteiro. Não se conhece, *n*ão se (re)elabora conhecimento só olhando as partes, isoladamente. Como o sol que renasce a cada dia, o ato de aprender deve emanar novas reflexões e ações “Se vejo e penso e nado no reflexo, é porque no outro extremo está o sol lançando seus raios. Só conta a origem do que é: algo que meu olhar não pode suster senão de forma atenuada como este entardecer. Todo o resto é reflexo entre reflexos, inclusive eu.” Diz ainda: “todo objeto pode ser decomposto e recomposto na infinitude de seus elementos, mas, ainda assim, não pode ser conhecido na sua totalidade.”

Para o referido autor, ler um mundo não escrito (conferência intitulada *Mondo scritto* e *mondo non scritto*, de 1983). Ele expõe o que entende por *mundo escrito* e *mundo não escrito*, ou seja, mundo visível, dizendo ele na ocasião que o mundo, ou aquilo que é reconhecido como *o* mundo, mostra-se aos seus olhos como algo já *conquistado e colonizado* pelas palavras, sendo os fatos da vida humana sempre classificados, julgados e comentados antes mesmo que aconteçam. “Vivemos em um mundo onde tudo já foi dito antes mesmo de começar a existir.” E, em seguida: “Nossa vida está programada para a leitura, e percebo que estou tentando ler a paisagem, o gramado, as ondas do mar.” Calvino não se refere aos objetos materiais, mas é uma tentativa de reunir e dar ordem à dispersão e à fragmentariedade das coisas.

Sobre uma ótica mais matemática, em especial da Geometria, concordamos com Calvino e fazemos nossas as falas de Lorenzato (1995), quando este afirma que os programas e guias curriculares com raríssimas exceções, colocam a Geometria como complemento ou apêndice e de modo fortemente fragmentado, por assunto ou por série; geralmente a geometria é apresentada rigidamente separada da aritmética e da álgebra. Isto parece não ser grave, pois a maioria dos professores segue, na verdade, o livro didático e não a proposta curricular; no entanto, os editores exigem que os autores de livros sigam as propostas curriculares e essa forma, os guias curriculares afetam indiretamente o ensino da Geometria em sala de aula.

Damázio (2006) apontou uma classificação diferente, quando resolveu estudar e avaliar propostas de ensino, para os assuntos de potenciação e equação do 2º grau. Traduzidos nos livros de 6º e 9º anos, o enfoque foi para as características da apresentação dos conteúdos e das atividades propostas aos alunos, tendo como referência três categorias: conhecimento reprodutivo, conhecimento criativo-reprodutor, conhecimento emancipador:

Para Damázio (2006), *conhecimento reprodutivo* é aquele adquirido por meio do ensino regulado por atividades de aprendizagem do tipo simples, que oferecem um determinado modelo para ser imitado ou seguido. A preocupação é com a capacidade de memorização do aluno. O *conhecimento criativo-reprodutor* diz respeito à apropriação resultante de recursos que priorizam habilidades cognitivas para além da memorização. As proposições do livro didático evitam os exercícios de repetição, em vez disso, levam o aluno a estabelecer relações, exigindo-lhe elaboração mental. O *conhecimento criativo-emancipador* é decorrente daquelas propostas de atividade que não só promovem o desenvolvimento das capacidades cognitivas do aluno como também promovem a possibilidade de análise das contradições tanto no processo de produção e socialização do conhecimento quanto no ambiente sócio-político do educando.

Já Choppin (2004) destaca que os livros assumem, conjuntamente ou não, múltiplas funções: o estudo histórico mostra que os livros didáticos exercem quatro funções essenciais, que podem variar consideravelmente segundo o ambiente sociocultural, a época, as disciplinas, os níveis de ensino, os métodos e as formas de utilização.

A *Função referencial* é também chamada de curricular ou programática, desde que existam programas de ensino. O livro didático é então apenas a fiel tradução do programa ou, quando se exerce o livre jogo da concorrência, uma de suas possíveis interpretações. Mas, em todo o caso, ele constitui o suporte privilegiado dos conteúdos educativos, o depositário dos conhecimentos, técnicas ou habilidades que um grupo social acredita que seja necessário transmitir às novas gerações.

Na *Função instrumental* o livro didático põe em prática métodos de aprendizagem, propõe exercícios ou atividades que, segundo o contexto, visam a facilitar a memorização dos conhecimentos, favorecer a aquisição de competências disciplinares ou transversais, a apropriação de habilidades, de métodos de análise ou de resolução de problemas, etc.

A *Função ideológica e cultural* é a função mais antiga. A partir do século XIX, com a constituição dos estados nacionais e com o desenvolvimento, nesse contexto, dos principais sistemas educativos, o livro didático se afirmou como um dos vetores essenciais da língua, da cultura e dos valores das classes dirigentes. Instrumento privilegiado de construção de identidade, geralmente ele é reconhecido, assim como a moeda e a bandeira, como um símbolo da soberania nacional e, nesse sentido, assume um importante papel político. Essa função, que tende a aculturar – e, em certos casos, a doutrinar – as jovens gerações, pode se exercer de maneira explícita, até mesmo sistemática e ostensiva, ou, ainda, de maneira dissimulada, sub-reptícia, implícita, mas não menos eficaz.

Na *Função documental* acredita-se que o livro didático pode fornecer, sem que sua leitura seja dirigida, um conjunto de documentos, textuais ou icônicos, cuja observação ou confrontação podem vir a desenvolver o espírito crítico do aluno. Essa função surgiu muito recentemente na literatura escolar e não é universal: só é encontrada – afirmação que pode ser feita com muitas reservas – em ambientes pedagógicos que privilegiam a iniciativa pessoal da criança e visam a favorecer sua autonomia; supõe, também, um nível de formação elevado dos professores.

Por essas classificações, e levando em conta os objetivos desta pesquisa, percebemos que o autor, em sua grande parte se aproxima mais da classificação posta como c*onhecimento reprodutivo* por Damázio (2006) com um livro que possui *função instrumental*, pela classificação de Choppin (2004), do que pelas demais classificações apontadas por esses autores.

Percebemos que há uma necessidade de dar mais significado ao ensino de Geometria, de apontar novos objetivos a essa disciplina, como mostra Lorenzato (1995) que a *Geometria está por toda parte*, desde antes de Cristo, mas é preciso conseguir enxergá-la. Mesmo não querendo, lidamos em nosso cotidiano com as idéias de paralelismo, perpendicularismo, medição (comprimento, área, volume), simetria: seja pelo visual (formas), seja pelo uso no lazer, na profissão, não comunicação oral, cotidianamente estamos envolvidos com a geometria. A Geometria é um excelente apoio às outras disciplinas: como interpretar um mapa, sem o auxilio da Geometria? E um gráfico estatístico? Como compreender conceitos de medidas sem idéias geométricas? A história das civilizações está repleta de exemplos ilustrando o papel fundamental que a Geometria (que é carregada de imagens) teve na conquista de conhecimentos artísticos, científicos e, em especial, matemáticos. A imagem desempenha importante papel na aprendizagem e é por isso que a representação de tabelas, fórmulas, enunciados, etc; sempre recebe uma interpretação mais fácil com o apoio geométrico.

Pavanello (1993) contribui com esse pensamento sugerindo uma maior conexão entre a Geometria e outras disciplinas como, por exemplo, entre a álgebra e Geometria.

> O trabalho com álgebra pode conduzir à execução mecânica de operações, pois as transformações algébricas são determinadas somente por um sistema de leis formais que indicam o que se pode fazer em determinada situação. O realizado com a geometria, no entanto, pode favorecer a análise de fatos e de relações, o estabelecimento de ligações entre eles e a dedução, a partir daí, de novos fatos e novas relações. Conseqüentemente, o trabalho com a álgebra pode acostumar o indivíduo a operar sem questionamento sobre regras pré-estebelecidas, a fazer isto ou aquilo, sem questionar o que faz. O efetuado com a geometria, por sua vez, pode proporcionar o desenvolvimento de um pensamento crítico e autônomo.

Verificou-se, por meio de estudos e pesquisas, que as imagens (LEVIN, 1998) possuem propriedade de serem lembradas mais facilmente que seus respectivos textos ou suas representações verbais. Exemplos de resultados desses estudos incluem o positivo efeito que as imagens exercem na aprendizagem dos estudantes. Ainda poderíamos enumerar as várias pesquisas acerca da imagem e suas características frente a aprendizagem, a exemplo de Goldsmith (1987) defendendo sobre alguns tipos de modelos próprios para analisar textos, imagens e suas inter-relações, ou Vézin (1990), fazendo profundas reflexões sobre as expectativas de leitores e autores sobre as imagens.

Procurar analisar as imagens contidas em livros didáticos, saber como é feita a leitura de uma imagem por um estudante e ver a sua aplicação dentro das salas de aula, são questões que há tempos vêm sendo investigadas, pesquisadas e comprovadas, tudo isso como indicadoras de engajamentos culturais, estéticos e até mesmo afetivo do ponto de vista das teorias da semiótica social (MARTINS, 1999). Outras conclusões são tiradas de estudos que apontam para a valorização que os professores dão sobre às ilustrações do livro como um forte critério para escolha deles e avaliação de seu poder didático, ainda como facilitador da aprendizagem sob uma ótica cognitiva (OTERO, 2004).

Devemos nos questionar sobre a *clareza* de uma imagem. Ou seja, pensamos que as imagens possuem um poder de comunicação mais direto e objetivo do que palavras. Pensando como Kress e Van Leeuwen (apud ORLANDI, 1999), observa-se que as imagens constituem-se num conjunto de representações simbólicas, largamente influenciadas pelos princípios que realizam uma organização das possibilidades de significação e representação de uma dada cultura. Assim, abrimos espaço para problematizar não apenas as imagens, mas também os fatores e aspectos que envolvem sua leitura, leitura essa a qual atribuímos o sentido de construção, visto que jogamos a intenção do autor com a materialidade de um texto nas possibilidades de significação do observador.

Na procura de dar significado a uma imagem, há um engajamento em processos elaborados que envolvam uma série de análises dos elementos que a compõem. Há também uma busca na memória pelas experiências importantes envolvendo essas imagens. Ocorre ainda um estabelecimento das relações dessa imagem com as situações do cotidiano (podendo haver experiências do próprio universo escolar). Torna-se natural que os estudantes e observadores de uma imagem realizem leituras descritivas, em especial, de seus fatores comuns e rotineiros, podendo revelar algumas dificuldades na identificação de elementos abstratos, cuja representatividade mostra-se distante, pois não faz parte de seu universo próximo.

É comum encontrar observadores e alunos que precisem de um intervalo de tempo de observação para dar significado a algumas imagens. Ilustrações com alto teor de dados e informações remetem a uma necessidade de intervalo para reflexão e análise de possibilidades descritivas. Imagens podem estabelecer inter-textos junto a outras imagens. Imagens podem remeter-se a outras imagens, ou podem levar a outros contextos de interpretação que visem a aumentar as possibilidades de um entendimento. Imagens também funcionam como um recurso memorístico, pois através delas podem-se recordar outras imagens e destas comparar, classificar e tirar conclusões.

As imagens ensinam quando se atribui a elas significados novos a partir da prática de exercícios comparativos, realizando leituras mais seletivas. Levam em conta só um único aspecto da imagem, mas usam diversas maneiras semióticas para acompanhar ou identificar uma leitura. Por exemplo, ao apontar com o dedo e acompanhar uma imagem, esse gesto auxilia na leitura e no detalhamento dessa imagem; o que muitas vezes acarreta em um observador que *destrincha* uma ilustração, mas não realiza a leitura verbal do texto ao redor da imagem, ou seja, em geral, o texto que *circula* uma imagem é ignorado.

Comumente o leitor de uma imagem atribui certa facilidade em sua leitura acreditando que o texto não seria tão importante para a sua compreensão; geralmente lêem apenas o texto ao redor da imagem. Também é comum leitores que atribuem certa dificuldade na compreensão de uma imagem, sem a leitura dos textos que justificam sua colocação naquele local. Imagens possuem grande papel pedagógico e grande importância quando vêm representadas por legendas. Assim sendo, podem realizar uma leitura mais situada em imagens no seu espaço de representação.

A nitidez das imagens permite um entendimento mais rápido. Estudos apontam para uma variedade de formas de se engajar junto à imagem um grande número de estratégias de leituras (afetivo, cognitivo, estético), que enfatizam, entre outras coisas, o papel do *conhecimento prévio*, e de experiências onde a leitura e as estratégias de leitura conseguem integrar informações verbais e contextualizar as ilustrações no *espaço de representação.*

Se nos questionarmos como as imagens podem contribuir no universo da Matemática poderemos dizer que elas possuem um papel de grande importância, em especial na Geometria, visto que auxilia na resolução de problemas, fator suficiente para se tornar foco de interesse em pesquisas que visam analisar a educação matemática em um plano didático. Haja vista que se considerem a imagem como uma importante ferramenta *heurística*, portadora de muitas análises, qual a questão da visualização, da *semiótica*, da congruência semântica na qual permite que haja uma exploração em termos de ensino/aprendizagem.

O *Wikipédia* traduz Semiótica como sendo (do grego *semeiotiké* ou *a arte dos sinais*), a ciência geral dos signos e da semiose que estuda todos os fenômenos culturais como se fossem sistemas sígnicos, isto é, sistemas de significação. Ocupa-se do estudo do processo de significação ou representação, na natureza e na cultura, do conceito ou da idéia, em oposição à lingüística, que se restringe ao estudo dos signos lingüísticos, ou seja, do sistema sígnico da linguagem verbal. Esta ciência tem por objeto *qualquer sistema sígnico,* como artes visuais, fotografia, cinema, música, culinária, vestuário, gestos, religião, ciência entre outros.

Recorrendo ao dicionário veremos: “Método analítco para o descobrimento de verdades científicas.” (MIGUEL, 2007, p. 1285).

E segundo o *Wikipédia*, Heurística é “uma série de conhecimentos que proporcionam uma rápida solução para algum problema ou dificuldade, com o menor gasto de energia ou esforço ou ainda a arte de descobrir e inventar ou resolver problemas mediante a criatividade.”

A função Heurística (na educação matemática) tem por meta primária orientar uma guia onde o estudante é capaz de seguir uma trilha de informações que gerem uma demonstração, e possa verificar cada passo e cada afirmação a fim de compreender o resultado final.

A finalidade heurística e intuitiva que as imagens possuem, tanto na explicação de processos quanto na resolução de problemas matemáticos, é a forma como as imagens podem ensinar na área da matemática, tudo isso em função da sua característica de dar possibilidade a uma análise de uma situação, permitindo uma exploração de distintos aspectos. Isto culmina na antecipação de uma solução e a seleção de um resultado para algum problema dado (DUVAL, 1995). Contudo, o ensino matemático vem fazendo pouco uso dessa função da imagem, contrariando o passado histórico da matemática, onde desde a antiguidade se fazia uso das figuras em situações-problemas e demonstração de teorias, axiomas. Logo é notório como a imagem pode desempenhar uma função primordial na abstração da matemática de hoje e na resolução de problemas.

O próprio Almouloud (1997) baseando-se em estudos feitos por Duval (1993) defendeu as classificações de imagens geométricas que possuem características afins com a heurística, mas, em particular, para o contexto da função heurística em imagens. Vamos nos fitar de como tal propriedade pode ser útil ao ensino de geometria, tanto na sua formalização quanto em resolução de exercício e situações problemas. Trata-se de uma composição, decomposição, reajustamento de partes de uma imagem.

Ao concordar com Van Hiele (1986), estamos considerando que a visualização possui uma considerável importância para o processo da construção dos conhecimentos. Para este autor, representam passos preparatórios do entendimento e de uma formalização de conceito conseguir representar mentalmente os objetos geométricos bem como realizar uma análise e fazer uma organização formal de propriedades da geometria relativas ao conceito geométrico envolvido.

Kaleff (1998) afirma que mesmo a visualização sendo motivo de debates sobre como tal processo se forma na mente humana, tal habilidade não deve se limitar ao uso do poder da visualização ou dar limites a quantidade de imagens que podem ser exploradas no ensino de Geometria, considerando-se que a visualização pode facilmente ser desenvolvida, sobretudo se cabe aos alunos alcance a algum material didático concreto capaz de representar os objetos geométricos que estão em estudo.

Então discorreremos alguns pontos que facilitam o aprendizado com as imagens, em especial, na Geometria, entre eles, a precisão e variedade na construção de imagens geométricas.

Os termos *Imagem* ou *Figura* são ambíguos e podem ter significados diferentes. A figura geométrica é entendida como uma imagem mental que representa um modelo materializado dessa imagem. O processo de aquisição do conceito de figura geométrica, num contexto de educação formal, parece seguir a trajetória inversa de seu desenvolvimento histórico. Assim,

> ... o homem primeiro deu forma a seus materiais e só mais tarde reconheceu a forma como algo que se imprime à matéria e que pode, por conseguinte, ser considerado em si mesma como uma abstração daquela (ALEKSANDROV, KOLMOGORO, LAURENTIEV, 1985, p.38).

Na busca por uma melhoria de seus instrumentos de trabalho o ser humano foi desenvolvendo a noção abstrata de forma e de figura geométrica. Contudo, ao se transformar esse conhecimento empírico em conhecimento teórico, as definições de figuras geométricas passaram a assumir propriedades específicas (as que hoje lhes são inerentes e apresentadas aos estudantes no processo de escolarização formal).

Logo, toda figura geométrica irá possuir propriedades e características fixadas (direta e indiretamente) por meio de uma definição, ou restrição a um corpo axiomático. Para Fischbein (1993, p.149) "a figura geométrica em si, é apenas a idéia correspondente que é abstrata, idealizada, uma entidade figural purificada e estritamente controlada por sua definição."

É nesse contexto que se afirma que a figura geométrica possui uma natureza conceitual (descrita como portadora de propriedades intrinsecamente conceituais combinadas na imagem visual). Para Fischbein (1993), é por essas propriedades e características que o conceito geométrico diferencia-se de outros conceitos usuais.

Uma dedução lógica pode ser mais facilmente compreendida se ante ela houver configurações geométricas que provem sua veracidade. Logo, a necessidade de se fazer ilustrações corretas e precisas, e até com mais opções de ângulos de visão, para que haja mais possibilidades de abranger todos os observadores na tentativa de lhes proporcionar uma aprendizagem geométrica mais eficaz. Segundo Fischbein (1993, p.143):

> Eu não pretendo afirmar que a representação que temos em mente, quando imaginamos uma figura geométrica é desprovida de alguma qualidade sensorial (como cor), exceto propriedades espaciais. Mas eu afirmo que, ao operar com uma figura geométrica, nós agimos como se nenhuma outra qualidade contasse.

Essa figura percebida de maneira sensorial representa uma imagem pensada que constitui-se em um objeto de pensamento. É nessa fusão entre aspectos figurais e conceituais que se caracteriza o acontecimento dos conceitos geométricos ou dos conceitos figurais em uma entidade unitária.

O componente conceitual pode ser traduzido como as características que expressam uma determinada classe de objetos, por meio da fala ou da linguagem escrita, em um menor ou maior índice de formalismo (depende claro, do nível de axiomatização em questão).

Por sua vez, o componente figural é a ilustração ou a representação mental que vem associada a um conceito ou a uma visualização, feita por meio de reagrupamento, de giros de translação, rotação, enxergando congruências. Mantêm sem variações as relações que comprovam a veracidade de uma figura geométrica, mas explorando-as de diversas maneiras.

Gravina (1996) sublinha que a harmonia e o equilíbrio entre os componentes citados hão de determinar a correta noção sobre um objeto geométrico. Assim, uma ilustração bem definida e bem trabalhada assume significativa harmonia entre ambas componentes, tornando-se um apoio concreto da compreensão e da expressão do objeto geométrico trabalhado, além de possuir uma função importante na hora de realizar a formação de uma imagem mental. Outro ponto facilitador do aprendizado em geometria é a exploração e descoberta.

Gravina (1996) e Laborde (1998) citam duas formas de atividade, as *Atividades de expressão* e as *Atividade de exploração* (definida como caixa preta), que representam o trabalho da Geometria utilizando figuras.

As *atividades de expressão* fornecem ao estudante a independência necessária para a construção de seus modelos próprios, com o objetivo de dar suporte ao domínio de conceitos que se relacionam com as configurações geométricas necessárias para uma construção. Já nas *atividades de exploração* os estudantes já pegam as construções realizadas, assumindo por função compreender essas construções.

Por uso da exploração, experimentação ou análise de características de imagens geométricas, dá-se início a um processo de incentivo ao raciocínio em favor de uma *descoberta* entre as novas relações descobertas com os conceitos geométricos da figura ou da atividade em questão.

Em ambas as atividades fica evidente que há uma forte interação entre o conhecimento acerca do conceito e das propriedades de um objeto e sua visualização. Estamos falando de aspectos lógicos e intuitivos da área do ensino de matemática, em especial da aprendizagem geométrica.

Lorenzato (1995) aponta que talvez o maior de todos os trunfos da geometria, é que ela exige do aluno uma maneira específica de raciocinar; isto quer dizer que ser bom conhecedor de aritmética ou de álgebra não é o suficiente para resolver problemas de geometria. Eis alguns exemplos:

1º exemplo: dado um círculo de raio conhecido e um retângulo conforme a figura 1, quanto mede a diagonal BD?

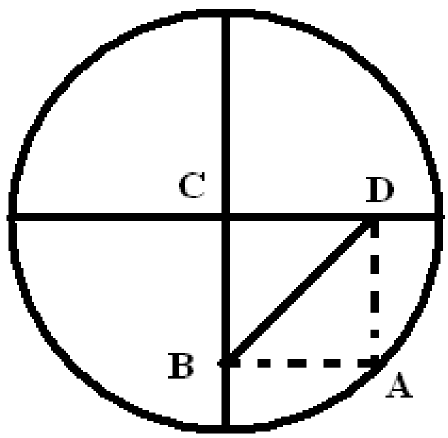


Figura 1 – Exemplo de atividade geométrica.

2º exemplo: compare as áreas dos retângulos escurecidos, na figura 2.

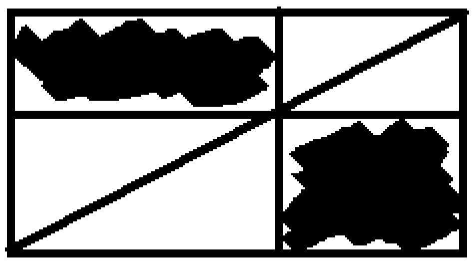


Figura 2 – Atividade que explora cálculo de área.

3º exemplo: na figura 3, quantos triângulos você vê?

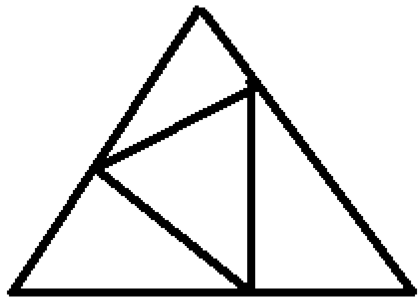


Figura 3 – Ilustração que instiga a contagem de triângulos.

O autor ainda afirma que é muito comum, diante de questões desse tipo, pessoas ficarem sem ação e se justificarem dizendo que não podem resolvê-las porque não foram dados números ou medidas. Isso denota a forte tendência que a nossa educação matemática tem imprimido aos seus alunos: a de aritmetização do raciocínio. Nos três exemplos citados, não há contas a fazer: as questões exigem uma leitura diferente da aritmética ou algébrica, na medida em que, para resolvê-las, é preciso ter *percepção geométrica*, *raciocínio geométrico* e *linguagem geométrica*, fatores estes essenciais na relação real/formal e que pouco tem sido desenvolvidos em nossas escolas devido à quase ausência do estudo da Geometria.

Para alcançar os objetivos principais do ensino de Geometria, é importante que o estudante esteja apto a relacionar visualização com conhecimentos geométricos, identificar visualmente algumas propriedades da Geometria, ler e construir configurações geométricas de uma ilustração ou desenho (LABORDE, 1998).

O ensino de Geometria consegue sucesso sempre que esses objetivos são alcançados em termos de dar subsídio ao aluno para tal intento. Ou seja, saber utilizar um desenho e, com ajuda de um pouco de raciocínio abstrato, selecionar os dados relevantes de uma situação, distinguindo suas propriedades verdadeiras. Laborde (1998) defende que esse é o alicerce para uma elaboração de provas de proposições da Geometria em um ambiente geométrico.

Ainda, como as ilustraçoes são importantes e podem ensinar no campo da Geometria, é importante destacar o estudo de Duval (1989) sobre *Teoria das Apreensões*.

A teoria de Duval considera o desenvolvimento de contextos dominados de modo progressivo, de teoremas e conceitos importantes para manusear de modo eficiente situações problemas e dos símbolos e palavras que possam, de maneira eficaz, representar operações e conceitos para um estudante, de acordo com seu nível cognitivo.

Imagens que ensinam, num contexto heurístico de problemas de Geometria, se referem a uma espécie de registro espacial que favorece as formas de se interpretar imagens com autonomia. Um livro didático é uma ferramenta rica em imagens e ilustrações as quais necessitam dessa leitura para maior compreensão do alunado.

3 IMAGENS NA MATEMÁTICA

Comumente afirma-se a importância da Matemática como aquela que desempenha uma função importante na formação do conhecimento e do pensamento das pessoas. Ela pode interferir na formação da capacidade intelectual, na ativação do raciocínio dedutivo e na estruturação do pensamento do estudante. Entretanto, pesquisas vêm apresentando a continuidade de desempenhos insatisfatórios de alunos nessa disciplina, sobretudo aos conhecimentos oriundos da Geometria (PAVANELLO, 1995; VIANA, 2000; INAF, 2004; SAEB, 1999, 2001 e 2003). Estudos como estes mostram que essa disciplina está presente na grade curricular vigente na Educação, mas não vem sendo abordada adequadamente. Para verificar como o livro didático *Matemática* de Dante (2007) vêm abordando o conteúdo de Geometria com uso da ferramenta das imagens, esta pesquisa apoiou-se em dois suportes teóricos: Duval (1995), que contribuiu como tronco principal de conceitos teóricos próprios; e os estudos de interpretação de Duval realizados por Almouloud (1997).

Estes trabalhos apontam elementos visuais de figuras geométricas que são explorados no ensino dessa disciplina, haja vista que desenvolver apenas a habilidade geométrica visual não permite ao aluno uma aprendizagem satisfatória ou o deixa apto suficiente para executar uma prova, abstrair um teorema ou concluir generalizações de fórmulas matemáticas.

As imagens não devem ser vistas apenas como recursos visuais, elas são elementos cognoscíveis e podem ser exploradas de outros modos. Segundo Coll (1998 apud VIANA 2000), “os conhecimentos escolares são compostos de fatos e conceitos, procedimentos e atitudes.” Logo, pode-se dizer que aprender fatos, conceitos e princípios significa declarar coisas sobre pessoas, acontecimentos e objetos. O que equivale a compreendê-los, reconhecê-los, relacioná-los, estabelecendo novas conexões.

As imagens na Geometria são as conexões que conduzem os processos por meio dos quais o pensamento será guiado até a prova matemática. Entre estes processos, analisaremos aqueles que resultam de uma guia de ações de ordem interna que envolvem símbolos, representações, idéias, imagens, conceitos ou outras abstrações.

3.1 História

As imagens, na Matemática, em especial, na Geometria, são fortes recursos para significação da aprendizagem e auxílio na resolução de problemas. Contudo, a compreensão, por parte do estudante, de um conceito simples ou até mesmo de uma situação-problema necessita de dois instantes: sémiosis / signos [1]; noésis / inteligência [3].

Tais momentos não são independentes, mas são identificáveis, e tempos atrás já representava motivo de estudo para reflexão e interpretação na hora da construção de conhecimento científico. Platão (1989, p.111), aos poucos, sugeria interpretações de que *noésis* seria um forte sinônimo para *inteligência*, que para ele nada mais é que sentir por uso dos sentidos (audição, visão, paladar, tato e olfato), no qual chamou de *testemunho passivo através da alma*.

Para Japiassu (1996), a semiologia ou a Semiótica (que vem do francês: sémiologie ou sémiotique) se refere a ciência que engloba todos os conjuntos de signos. Em um olhar mais específico ao ensino e a aprendizagem da Matemática, os *signos* dizem respeito aos sinais, que são seus símbolos característicos.

Para Ferdinand de Saussure (1913), a semiótica representa um estudo da vida dos signos em um cenário social. Por exemplo, na medicina clássica, a semiótica representaria a técnica de observação de sintomas de doença (signos/sinais), ou seja, as manifestações que indicavam uma doença. Por exemplo, signos que caracterizam o sarampo são as manchas pelo corpo.

John Locke (1690) utilizou a expressão *semiótica* no *Ensaio sobre o entendimento humano*, ao referir-se ao estudo da relação entre as idéias como signos de coisas e as palavras como signos de idéias. Puxando um pouco mais para a atualidade, o filósofo Charles Morris (1946) sugeriu uma constituição teórica geral de signos ao subdividi-los em sintaxe, pragmática e semântica. Portanto, para este autor, *sintaxe* seria a relação entre os próprios signos; *semântica* representaria o estudo das relações que envolvem os signos e o contexto que ele se insere; e a *pragmática* faria menção ao uso concreto do signo.

Na busca de relacionar as observações de Locke e Morris ao livro didático de Dante, compreendemos que a sintaxe, semântica e pragmática são partes constituintes de relações

[1] Sémiosis, de acordo com Duval (1995), é a apreensão ou a produção de uma representação semiótica. Representa, também o 'signo' ou sinal.

[3] Noésis, de acordo com Duval (1995), refere-se mais à mobilização do entendimento, ou ainda, à inteligência no sentido da matemática.

bastante diretas com signos matemáticos. Devemos observar este fato nas próprias relações existentes entre os signos matemáticos e, ainda, desses signos presentes em um cenário real, haja vista que a resolução de situações-problemas ainda é uma razão da disciplina de Matemática existir no currículo atual. Fica claro a ênfase da contextualização do cotidiano nas resoluções de problemas nos atuais livro didáticos de Matemática.

Duval (1995, p.85), defende que o uso da interação entre a realidade e os sinais se processa de modo complexo, ainda mais no contexto do ensino de Matemática, pois:

> ... particularmente na aprendizagem das matemáticas há uma forte tendência às atividades cognitivas, as quais requerem a utilização de um sistema de expressões e representações outras que a das linguagens naturais ou das imagens. Vários sistemas descritos por números, notações simbólicas para os objetos, sistemas de escritas algébricas, ou lógicas chegam a adquirir o 'status' de uma linguagem própria, paralela à linguagem natural, para poder exprimir as relações entre as operações, às figuras geométricas, diagramas, esquemas etc.

O aspecto levantado é bastante difundido nos campos da Matemática. Portanto, fica evidente que clássicos como Locke tenha feito referências em seu trabalho sobre a utilização de signos (sinais ou símbolos) na compreensão de questões contextualizadas. Duval (1995, p. 88) ainda chegaria a afirmar que “a aprendizagem da Matemática nos é apresenta como carente destas "necessidades semióticas" de forma mais premente do que na aprendizagem de outras ciências.”

Sempre há dificuldades de entendimento de explicações e problemas subjacentes ao cenário da aprendizagem matemática escolar. Duval (1995) vai procurar no original grego de Platão (República, VII 524) a gênese do entendimento dos símbolos e ressalva, para confirmar a problemática, a diferença que envolve a *descrição de um conceito* (relacionado a sémiosis-signos) e a construção ou compreensão mental/cognitiva de um conceito (relacionado a noésis) , que em uma visão mais moderna representaria o insight ou estímulo, ou ainda o ato de compreender a idéia e concretizar sua *representação mental.*

Tipologicamente, Duval (1995) apresenta as representações mentais como sendo de três tipos, as *Conscientes e Internas* – mentais e resultados de processos conscientes, objetivos de representação; as *Internas e não-conscientes* – computacionais, de tratamento automático, quase instantaneamente; e as *Externas conscientes* – as semióticas, que nos colocam em contato com símbolos e podem levar, de forma objetiva e consciente, a elaboração de uma representação a partir de estímulos (pontos, caracteres, traçados, letras, símbolos matemáticos).

Duval (1997, p.17) ainda chega a afirmar que:

> um objeto matemático não deve ser confundido com a representação que se faz dele, pois é o conteúdo representado que é importante e não a forma sob a qual é representado. As representações semióticas, que se consideram como representações 'materiais' são um suporte para as representações mentais.

De acordo com essa tipologia, voltamos nosso foco às representações semióticas do tipo externas e conscientes, que a partir da sémiosis e por meio da noésis produzem no aluno uma possível construção de representação mental própria para compreender uma questão ou uma explicação com uso de ilustrações e imagens.

Ainda abordando os signos e a sémiosis, vemos a importância de destacar o que brevemente foi considerado por Peirce. [4] Para ele,

> A "teoria dos signos", precursora da semiótica contemporânea propõe distinção entre "ícones" - signos que guardam uma semelhança com o objeto representado, "índices" - que indicam o objeto representado, e 'símbolos', que são convencionais e supõem uma regra de uso para a sua aplicação (...). (PEIRCE, apud JAPIASSU, 1996).

Para Queiroz (2002), Peirce foi responsável por um genial modelo classificatório de signos, compreendendo esse como processo de ação, relação e até construção de bem elaboradas classificações.

Pode-se citar Foucault (2000, p.40), quando este denomina hermenêutica como "o conjunto de conhecimentos e técnicas que permitem fazer falar os signos e descobrir seu sentido" e semiologia como "o conjunto de conhecimentos e técnicas que permitem distinguir onde estão os signos, definir o que os institui como signos, conhecer seus liames e as leis de seu encadeamento." Logo, buscar o sentido é trazer à luz o que se assemelha. Buscar a lei dos signos é descobrir as coisas que são semelhantes.

Sob esta óptica os enunciados não são frases ou proposições, mas condições que as possibilitam e possibilitam também a transformação de sentido. Um enunciado é uma função que incide sobre um conjunto de signos e possui quatro características que o definem: um referencial, um sujeito, um campo enunciativo e uma materialidade. Ou seja, é pelo signo que “as coisas tornam-se distintas, conservam-se em sua identidade, desenlaçam-se e se ligam.” (FOUCAULT, 2001, p. 84). É através do conhecimento que o signo passará a significar, representando certeza ou probabilidade. Para Foucault (2001, p.168) “o que permite a um signo ser signo não é o tempo, mas o espaço.” E para sabê-lo “a linguagem valerá como o signo das coisas.” (FOUCAULT, 2001, p.45). O discurso é feito à imagem do que anuncia. “A linguagem faz parte da grande distribuição das similitudes e das assinalações.” (FOUCAULT, 2001, p.48). Deste modo, as línguas estão no mundo mais como analogias do que como significações. Saber consiste em fazer tudo falar. (FOUCAULT, 2001, p. 44). Logo,

> é preciso estudar e tentar compreender, mesmo que de forma parcial, os novos espaços de materialização da linguagem e da prática discursiva. É preciso ressaltar que esses espaços não são novos, são espaços que já existiam, apenas não eram percebidos, estudados e analisados pela pesquisa acadêmica. Há dois motivos para que estes espaços possam ser considerados "novos". Primeiro, porque nunca foram estudados pela pesquisa acadêmica, seja essa pesquisa em linguagem ou em outra área da ciência social. Segundo, são espaços tradicionalmente relegados a um nível secundário dentro das preocupações do universo intelectual. Não são os espaços que ocupam o centro das preocupações da ciência social. (FOUCAULT, 2001, p. 171).

Foucault (2000, p.47) deixa clara sua idéia de signo quando afirma que se da interpretação nunca se pode concluir, é muito simplesmente porque nada há a interpretar. Nada há de absolutamente a interpretar, pois no fundo tudo já é interpretação; cada signo é nele mesmo não a coisa que se oferece à interpretação, mas interpretação de outros signos. Logo, a relação de representação entre o signo e o conteúdo representado deixa de ser avaliada tendo em vista as próprias coisas, pois é compreendida agora como a relação entre “a idéia de uma coisa e a idéia de uma outra.” (FOUCAULT, 1995, p.79).

As palavras, portanto, não constituem mais as marcas das próprias coisas, mas tornam-se signos, isto é, substitutos das coisas, seus representantes, e o que se vincula entre os signos são apenas idéias. Signo é uma idéia ou imagem que pode ser associada a uma outra idéia ou imagem, substituindo-a, pois possui em si própria um “poder representativo”. Deste modo, há signo quando uma representação se liga a outra representação e representa em si mesma essa relação. Os signos não precisam ser interpretados, não guardam consigo qualquer opacidade de sentido, precisam apenas ser analisados em seu encadeamento no “quadro completo dos signos”, o qual oferece a “imagem das coisas.” (FOUCAULT,1995, p.81).

Encontramos em Hjelmslev (1948), e defendido por Winfried Noth (1999), outras referências no entendimento da semiótica. Para ambos, *signo* é bem mais amplo que *figura*. As figuras se constituem como partes de signos, entretanto ele não ousa uma generalização, pois admite que haja casos onde é impossível subdividir de signos para figuras, como nos casos dos sinais de trânsito.

Outra sugestão de abordagem, (enquanto desejamos criar uma conexão acerca da sémiosis e as noésis) é recorrer a um recorte sobre *intuição*. Enxergamos que a intuição cede o complemento que precisamos para dar margens às interpretações matemáticas entre o produto final elaborado pela *inteligência* em contato com os *signos*.

Para Husserl (1997, p.16), não se deve citar *intuição* de modo separado da percepção. A fenomenologia, se propõe a uma investigação sistemática da consciência e de seus objetos descrevendo aquilo que se pode ver ao adotar uma certa maneira de olhar.

Compreende-se como percepção, aos olhos de Husserl, um sistema que envolve dois tipos: as percepções simples – percepção sensível, de objetos físicos e reais; e as percepções abstratas – dos objetos abstratos em geral. A *intuição* é na verdade uma ação que fornece significado a um conceito. Para Husserl a palavra *sensibilidade* representa *intuições sensíveis*.

Já Kant, enxerga as intuições aritméticas e geometrias como exemplos de formas puras da sensibilidade. De modo análogo a Husserl, que cria associações entre percepção e intuição, Kant também o faz e distingue ainda a *intuição empírica* do que seria uma *intuição pura*. Kant classifica como *intuição sensível empírica* a percepção dos objetos físicos, por meio dos sentidos, humanos, a qual chama de *intuição a posteriori*.

Já a "intuição sensível pura" mostra-se relacionada aos conceitos temporais e espaciais, classificada também como "intuição a priori", visto que funciona como "esqueleto" da estrutura para qualquer conhecimento e não depende de experiências prévias.

Se abordarmos uma representação de algum problema, compreendemos que ele não se limitaria apenas ao problema prático. Não queremos pensar a matemática representando apenas instrumento de outros campos de ciências. Mas não podemos negar que, em especial para a Geometria, se insistida em abordagens unicamente métricas, haverá uma tendência em resumir as aplicações matemáticas a um viés instrumental. Essa vertente instrumentalista proporcionada pela Geometria é bastante clara em vários fragmentos de livros didáticos.

Estamos situando alguns registros da representação e de análises de classificação no campo do ensino de Geometria, em estudo as publicações de Duval (1995), na tentativa de compreender, dentro do campo da semiótica, as influências das representações de objetos matemáticos acerca do ensino-aprendizagem da matemática. Como mostra Almouloud (1997, p.77):

> um registro (de representação) é uma maneira de representar um objeto matemático ou um problema, ou uma técnica. A noção de registro se refere ao domínio dos sinais que servem pra designar qualquer coisa, por exemplo, um mapa representa um território, mas não é o território! Da mesma forma que as figuras geométricas são representações gráficas. As representações semióticas têm dois aspectos: a forma (ou o representante) e o conteúdo (ou o representado)".

Ainda com Almouloud (2003), para aquisição e compreensão de aptidões geométricas, é necessário desenvolver contextos de aprendizagem dando prioridade a alguns aspectos, entre eles ao processo de aquisição dos conhecimentos (em especial os de Geometria), no que se refere as construções geométricas (conversão do registro discursivo ao figural); atividades de resolução de problemas geométricos; atividades de formulação (registro discursivo); observação de provas associadas a tomadas de decisão; entendimento e redação da solução de problemas.

Outro aspecto ligado à aquisição e compreensão das aptidões da Geometria diz à respeito a resolução de problemas geométricos. A necessidade de raciocinar a resolução desse tipo de problema está vinculada às diferentes apreensões que uma figura pode assumir segundo a teoria das apreensões de Duval (1988).

Existem aspectos ligados também à atividade solicitada na Geometria do ensino fundamental. Necessita-se de três tipos de registros da representação da semiótica e da sua coordenação: registro discursivo, registro das figuras e o registro algébrico.

Para o referido autor, outro aspecto reside na elaboração de situações que envolvam demonstração. Essa possui um importante papel nos estudantes de 6ª ao 9ª anos do Ensino Fundamental, pois dá suporte para concluir uma melhor compreensão de conceitos da Geometria e fornecer mais de habilidades visuais e geométricas. (ALMOULOUD, 2003 p.131).

Talvez Damm (1999, p.137,43) já enxergasse a matemática como sendo a que:

> trabalha com objetos abstratos. Ou seja, os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção, necessitando para sua apreensão o uso de uma representação. Neste caso as representações através de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos, desenhos são bastante significativas, pois

> permitem a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento, permitindo registros de representação diferentes de um mesmo objeto matemático. Por exemplo, a função pode ser apresentada através da expressão algébrica, tabelas e/ou gráficos, que são diferentes registros de representação [...] para que ocorra a apreensão de um objeto matemático é necessário que a noésis (conceitualização) ocorra através de significativas semióses (representações). A apreensão conceitual dos objetos matemáticos somente será possível com a coordenação, pelo sujeito que apreende, de vários registros de representação. Ou seja, quanto maior for a mobilidade com registros de representação diferentes do mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de apreensão deste objeto.

Concordamos com Duval (1998) e Damm (1999), quando afirmam que a imagem pode ser um obstáculo ao aluno, pois ele pode abandonar ou inserir hipóteses de acordo com o desenho. Portanto, a imagem é um suporte intuitivo importante na resolução de problemas de Geometria.

Enfatizar-se-á os estudos de Duval (1997), quanto à classificação de processos cognitivos e funções epistemológicas das imagens geométricas. Tal procedimento será adotado visando justificar os processos de análise das imagens, para conseqüentemente podermos mapear as ilustrações contidas na coleção *Matemática* de Dante.

3.2 Classificação das imagens

Para Duval (apud, ALMOULOUD 2003, p. 126), o ensino de Geometria deve envolver três meios de procedimentos cognitivos que abordem as específicas funções epistemológicas: *visualização* **–** para uma subjetiva exploração heurística de uma situação complexa (processo que analisa o espaço de representação de uma imagem); *construção* **–** com uso de instrumentos para trabalhar um modelo (no qual, os resultados observados e as ações realizadas representadas estão relacionados aos objetos matemáticos em questão); *raciocínio* **–** é o processo que conduz para a prova e explicação (extensão do conhecimento).

Duval (1998) afirma que os três processos cognitivos apresentados estão ligados em suas funções e de modo cognitivo são necessários para uma proficiência de aprendizado geométrico, como mostra o esquema que segue na figura 4.:

Na Figura 4 cada seta representa a maneira que um tipo de processo cognitivo pode apoiar um outro tipo em alguma tarefa.

A seta 2 é pontilhada porque a visualização nem sempre ajuda a raciocinar.

A seta 5(B) enfatiza que o raciocínio B pode ser desenvolvido de uma maneira independente. Em muitos casos nós podemos ter um circuito mais longo. Por exemplo, 2-5(B)–3, pode representar a maneira de encontrar a ordem da construção para uma figura dada; e 4-2-5(A) ou 5(B) pode representar maneiras para descrever a ordem da construção.

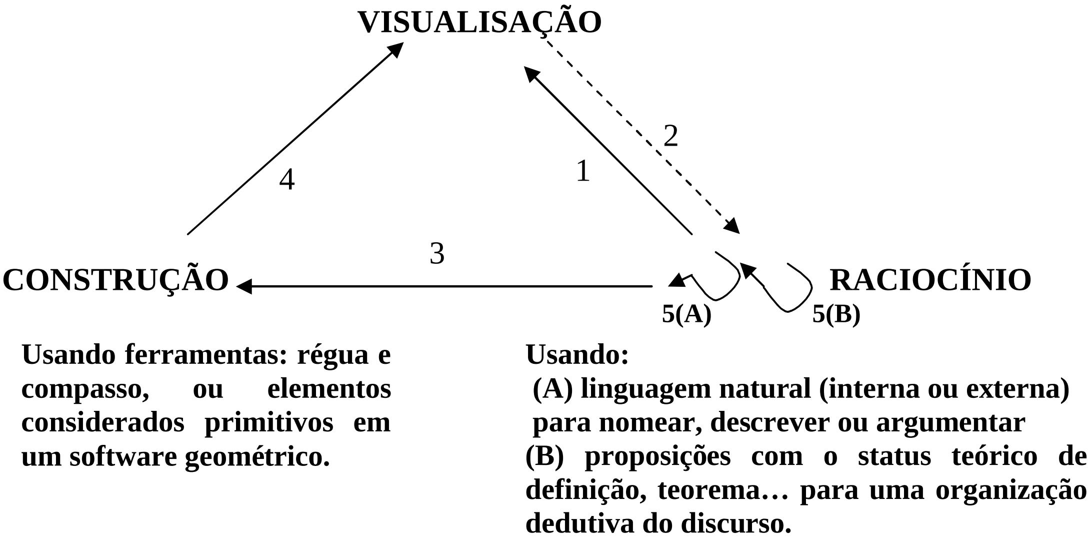


FIGURA 4 - As interações cognitivas básicas envolvidas na atividade geométrica (DUVAL, 1995).

Almouloud (2004) aponta que esses três tipos de processos cognitivos estão entrelaçados em sua sinergia, sendo esta inter-relação cognitivamente necessária para a proficiência em Geometria. Por outro lado, a heurística dos problemas de Geometria refere-se a um registro espacial que dá lugar às formas de interpretações autônomas.

Para esses modos de interpretações, o autor citado acima classifica quatro tipos de apreensões: (i) *seqüencial*: tem o objetivo de reproduzir uma imagem em um contexto de descrição do enunciado ou como auxilio a construção de um exercício. *Possui a função de modelo;* (ii) *perceptiva*: tem o objetivo de fazer uma identificação de uma imagem geométrica. *Possui a função de identificação;*(iii) *discursiva*: tem o objetivo de realizar uma compreensão dos elementos envolvidos na imagem, com o uso de uma articulação entre o enunciado e às propriedades do objeto representado. *Possui a função de prova;* (iv) *operatória*: é a reconfiguração e reorganização de uma imagem com o objetivo de "ver" na ilustração o caminho de solução de um problema ou uma prova geométrica. *Possui a função heurística ou a função intuitiva***,** como afirma: "a apreensão operatória é centrada sobre as modificações possíveis de uma imagem inicial e, em seguida, sobre as reorganizações perceptivas que estas modificações acarretam.” (DUVAL, 1988, p. 62).

Portanto, para Duval (1988), a resolução de um problema de Geometria e a forma como entra o raciocínio na resolução que a questão exige, irá depender das diferenças entre os modos de apreender a imagem.

Para qualquer imagem desenhada em um contexto de atividade matemática, mostram-se possíveis duas atitudes: uma é a apreensão perceptiva das formas geométricas (espontânea e imediata); e a outra é a apreensão discursiva da imagem quanto aos elementos matemáticos (verificação e prova).

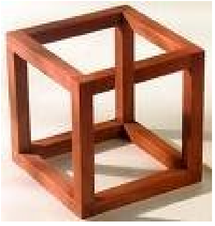
Essas atitudes em alguns momentos se mostram opostas, visto que a ilustração pode chegar a mostrar figuras que os alunos não conseguem associar ao enunciado ou até mesmo esquecem o enunciado para analisar apenas a imagem. Ou seja, as imagens nomeadas nos enunciados por algumas hipóteses não estão necessariamente apresentadas aos alunos de forma espontânea.

Duval (1988, p.61) destaca que o maior problema do uso das imagens na Geometria está na diferença que envolve o modo de apreensão perceptiva e uma interpretação necessariamente guiada pela hipótese. Por isso, afirma que os alunos lêem o enunciado, constroem a imagem, em seguida, se concentram na imagem sem voltar ao enunciado.

Quando ocorre esse abandono do enunciado determina-se nesse instante a ausência de uma interpretação discursiva da ilustração. Dá-se isso pelo fato de que os problemas de acesso aos estudantes representam aqueles em que o enunciado é, de modo semântico, congruente com o desenho construído ou a construir.

Para ficar mais claro, segue um exemplo de imagem perceptiva:

Indique quantas Faces, quantos Vértices e quantas Arestas possuem o cubo abaixo:



A) Faces: ______________

B) Vértices: _____________

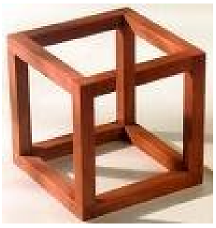
C) Arestas: ______________

FIGURA 5 – Exemplo de imagem perceptiva.

Imagem do tipo perceptiva. Para responder essa questão o aluno se detêm a observar a figura e realizar uma simples contagem abandonando o enunciado.

O mesmo problema estaria explorando a imagem de modo discursivo se optasse por uma articulação entre o enunciado e as propriedades do objeto, como segue:

Prove que a relação de Euller é verdadeira para o sólido abaixo:



A) Faces: ______________

B) Vértices: _____________

C) Arestas: ______________

FIGURA 6 – Exemplo de imagem perceptiva, seqüencial e discursiva.

Imagem do tipo seqüencial, perceptiva e discursiva. A imagem é usada no sentido de provar as propriedades de um objeto visto sua imersão no contexto descrito no enunciado.

Portanto, Duval (1988) defende que ao examinar um problema onde exista congruência da imagem com o enunciado, e uma congruência entre a imagem e um tratamento matemático, estaremos realizando uma questão de estatuto dos desenhos geométricos. Ou seja, as propriedades e características das imagens, são subordinadas e sujeitas às hipóteses ditas no enunciado de um problema.

O tipo de apreensão perceptiva estará sujeita ao tipo de apreensão discursiva, por esta representar uma teorização da representação de uma figura.

As propriedades e os elementos que aparecem em uma imagem, estão comandadas pelos axiomas, teoremas e definições já estabelecidos. O exemplo dado mostra como uma imagem pode ser explorada de modos diferentes, o que é viável sempre que modificarmos o enunciado ao qual ela se refere.

A apreensão do tipo operatória ocorre de maneira gráfica ou mental. O objetivo de recortar, fracionar ou examinar partes elementares que formam um desenho geométrico está ligado à compreensão do que seja uma reconfiguração intermediária e como ela pode auxiliar na leitura de uma imagem geométrica. Para tanto, Duval (1988) classificou esse tipo de reconfiguração de três modos:

1º) *Modificação mereológica*: neste caso a imagem separa-se, fraciona-se ou reagrupa-se em partes, as quais chamamos de sub-imagens da imagem inicialmente apresentada, ou seja, uma relação do todo e da parte.

Ex:

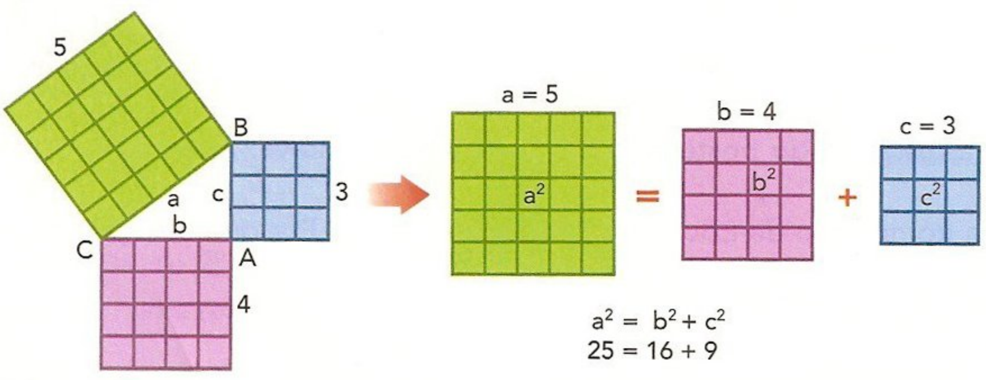


FIGURA 7 - Exemplo de uma figura que sofreu modificação mereológico

2º) *Modificação ótica***:** neste caso existe uma transformação da imagem dada em outra imagem.

Ex:

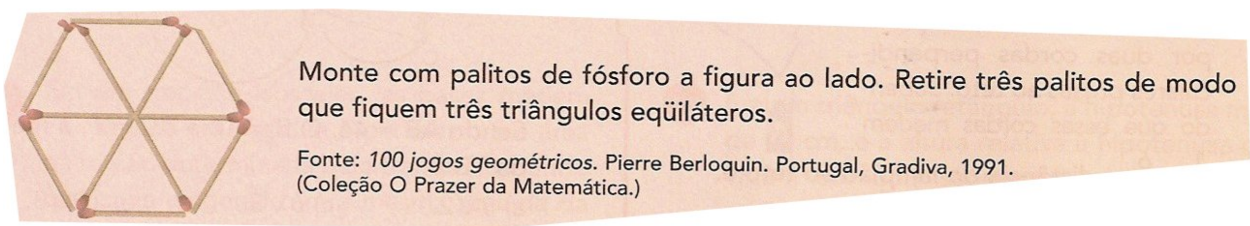


FIGURA 8 - Exemplo de figura onde se espera que o aluno realize uma modificação ótica.

3º) *Modificação posicional*: neste caso haverá um deslocamento de um ou mais desenhos em relação a um referencial.

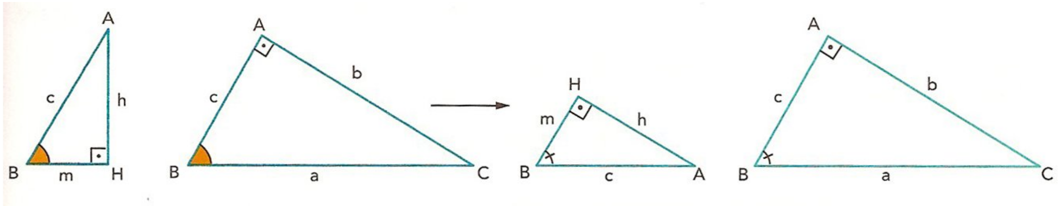


FIGURA 9 - O triângulo BHA foi rotacionado de modo a se tornar mais clara sua congruência com o triangulo BAC.

É, portanto, este tipo de apreensão, que sugere interpretações de caráter dinâmico às propriedades de uma figura.

Duval (1988, p.69) afirma que as maiores dificuldades encontradas pelos alunos para fazer uso de transformações na Geometria Plana é justamente a falta de congruência que envolve o tratamento matemático da questão e a apreensão operatória da figura. Diversos fatores inferem com o intuito de facilitar (ver imediatamente) ou ocultar (não ver), o que seja uma apreensão operatória de uma figura, o que provoca um tratamento matemático que orienta para a solução de um problema.

O autor acredita que a imagem desvia, de algum modo, um fragmento do discurso teórico.

Logo, a falta de congruência ou a forma como ela é abordada na apreensão operatória de uma imagem e seu tratamento matemático, é muitas vezes uma das maiores dificuldades apresentadas nos problemas de Geometria.

Se nos detivermos, em particular, no ponto em que uma figura consegue assumir uma característica de movimento (operação heurístico da qual através da figura se encontra a solução de questões matemáticos), concluiremos então que "a produtividade heurística de uma imagem, em um problema de geometria, está ligada a existência da congruência entre uma destas operações e um dos tratamentos matemáticos possíveis para o problema proposto". (DUVAL 1988, p.62).

Ainda para Duval (1988, p.57) os problemas de caráter geométrico dispõem de uma originalidade especial frente a outras atividades matemáticas que usualmente são propostas aos estudantes. Justificam-se essas observações pelo fato de que as resoluções das questões de Geometria exigem um modo de raciocínio que tende a uma referência axiomática e na qual desenvolvem-se registros de uma linguagem natural. Este modo de raciocínio orienta a um desenvolvimento de uma espécie de discurso que age como uma substituição, como se representasse uma linguagem formalizada. Contudo, este raciocínio se desenvolve quando se apóia em um registro no qual o discurso foi construído, de modo natural, por acumulação e associação. Duval (1988) ainda afirma que permitir o desenvolvimento de funções cognitivas, gerenciando questões de Geometria, em um nível matematicamente próximo em termos de ser necessário usar conhecimentos similares, irá determinar uma categorização cognitiva de fundamental importância à compreensão de demonstrações geométricas e matemáticas.

Foi usando esses vestígios que analisarmos as imagens dos capítulos de Geometria dos livros didáticos da coleção *Matemática* de Dante.

4 IMAGENS NO LIVRO DIDÁTICO

Segundo o guia do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD, 2006), a obra *Matemática* de Dante (2007) aborda em cada uma das unidades, conteúdos de diferentes blocos curriculares, permitindo alternância de temas, o que recomendam os recentes estudos e pesquisas em ensino-aprendizagem da matemática. Os conteúdos são introduzidos, muitas vezes, por meio de situações-problema, e depois sistematizados. Estimula-se, portanto, o aluno a desempenhar papel ativo na construção do conhecimento.

Os livros didáticos estão repletos de informações e textos ilustrativos. São criações artísticas competindo no mercado pedagógico-comercial. O alto número de imagens presentes nestas obras nos faz questionar como o leitor da referida coleção consegue executar, através de demonstrações, as provas matemáticas, e como o livro incentiva a leitura das imagens geométricas. A pesquisa tem interesse em compreender a evolução das observações do autor no que diz respeito a valorização do raciocínio dedutivo com o uso de imagens e à demonstração auxiliada pelas ilustrações em Geometria, no 5ª e 9ª anos do ensino fundamental e no 3º ano do ensino médio.

O guia do PNLD (2006) afirma que a obra em questão destaca-se, em Geometria, pelo trabalho com áreas de figuras planas. Contudo, a atenção dada à trigonometria é excessiva. Quanto à distribuição dos conteúdos, observa-se que a obra buscou, em cada volume, assegurar o estudo dos diversos campos da matemática. Além disso, percebe-se a retomada de conceitos para ampliá-los gradualmente. O desenvolvimento do método dedutivo é visto em toda obra, principalmente na trigonometria, nas noções de áreas e volumes. Na metodologia de ensino-aprendizagem adotada, é atribuído papel central ao aluno, que é posto em interação permanente com o texto e solicitado a responder perguntas, a confrontar soluções, a verificar regularidades e a tirar conclusões. As atividades favorecem o desenvolvimento dos raciocínios indutivo e dedutivo, com pouca ênfase na memorização de fórmulas prontas.

Portanto, justifica-se o fato da relação existente entre o livro didático com as i*magem* e as expressões numéricas para obter esse produto final: *desenvolvimento de métodos dedutivos e indutivos.*

4.1 Imagens na 4ª série

Analisar-se-ão as imagens do livro didático *Matemática* de Dante (2007).

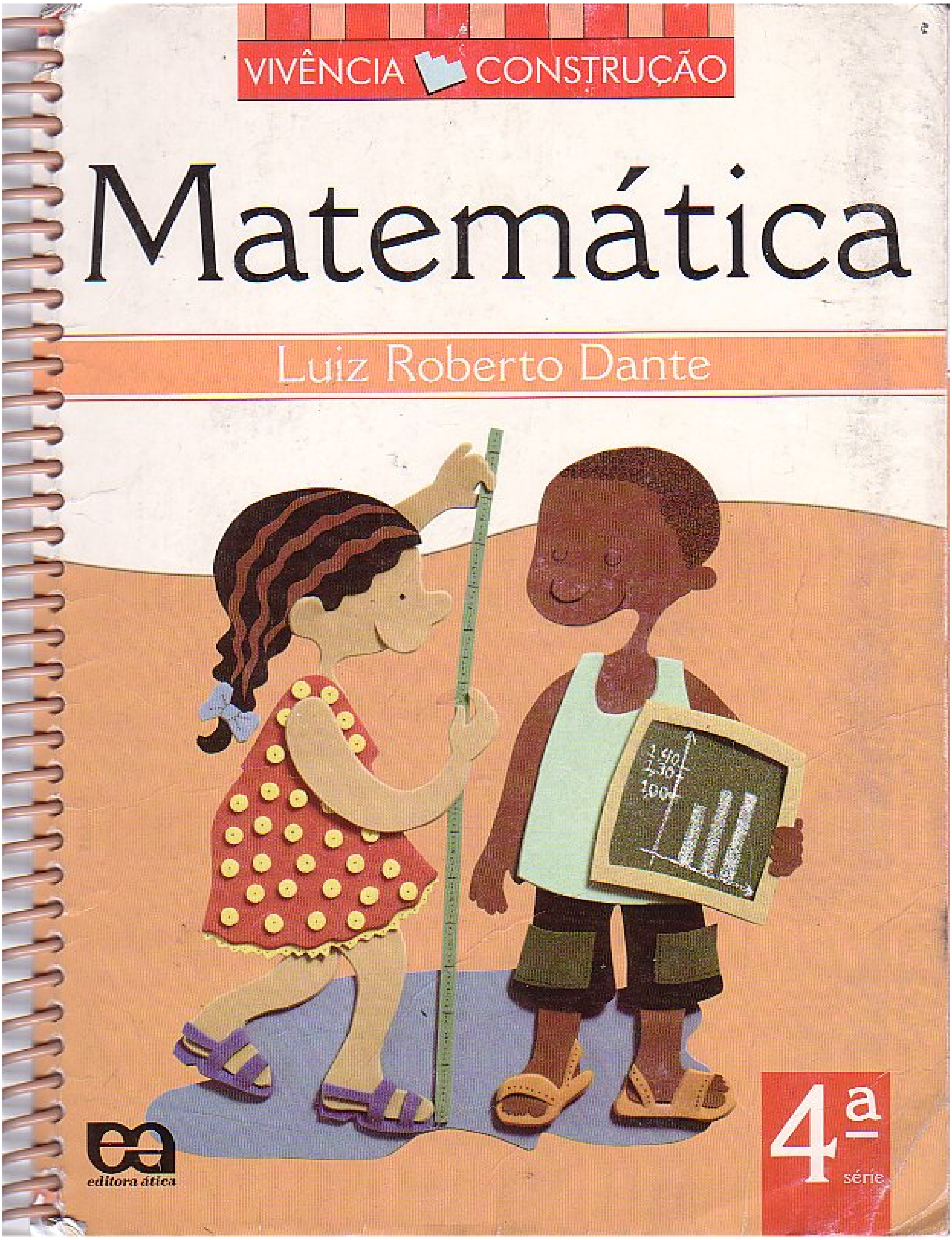


FIGURA 10 – Capa do livro *Matemática* da 4ª série de Dante.

Nossa análise e classificação das imagens segundo a teoria das apreensões de Raymond Duval (1995) é feita sob a óptica do que as imagens podem transmitir de modo mais lógico em conivência com o enunciado a que ela está sendo referida. Deixamos explícito que não há como *rotular* uma imagem geométrica por suas formas de apreensão pelo simples fato das leituras das imagens serem dadas de forma subjetiva e, sendo assim, cada mente a lerá de um modo distinto. Como traduz Lane (2002), “o conceito de subjetividade, como o de competência, é polissêmico, como pode ser visto em algumas definições feitas por estudiosos da área da psicologia.”

> “A subjetividade é construída na relação dialética entre o indivíduo e a sociedade e suas instituições, ambas utilizam as mediações das emoções, da linguagem, dos grupos a fim de apresentar uma objetividade questionável, responsável por uma subjetividade na qual estes códigos substituem a realidade.” (LANE, 2002, P.17)

Os conceitos de subjetividade sempre a retratam como algo móvel, passível a mudanças, pois colocam o sujeito em um contexto social que também muda conforme o tempo e suas necessidades. Logo as imagens podem traduzir mensagens que podem ser aquelas que o autor deseja orientar; aquelas que alguém com uma mente mais sensível para o cálculo possam compreender, aquelas que alguém que já domina as características das imagens as quais o autor se refere, as enxergam inseridas em um contexto onde essas características não estão evidentes no enunciado ou na figura. Logo as imagens, também na Geometria, são lidas de modo subjetivo. Desta forma não haveria como catalogarmos as imagens presente na coleção analisada, então seguimos exemplificando com o que algumas imagens sugerem serem apreendidas e que processos cognitivos estão presentes nessa apreensão no livro do 5ª ano.

Na página 24 encontramos:

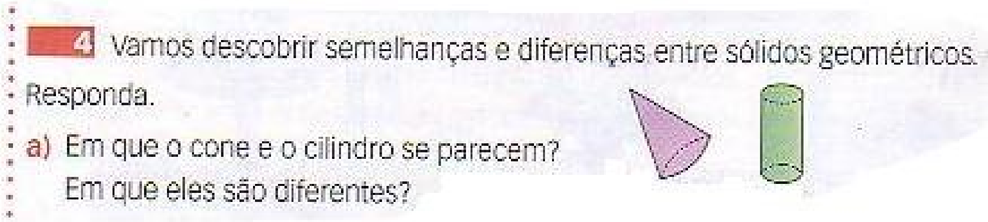


FIGURA 11 – Imagens geométricas tridimensionais.

Processo de Visualização e Raciocínio Geométrico –
Imagens do tipo perceptiva.

Na página 26 temos:

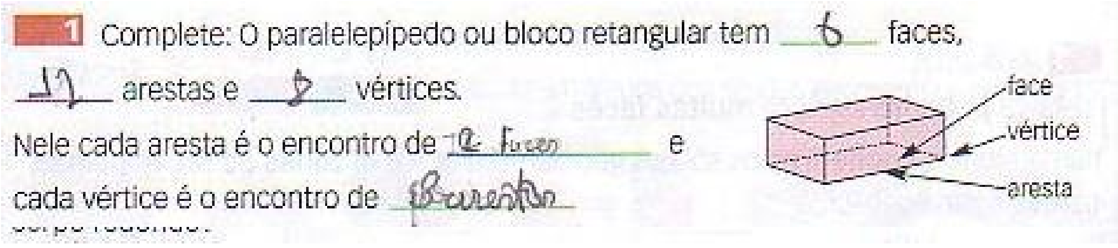


FIGURA 12 – Imagem que explora processo de contagem.
Processo de Visualização.
Imagens do tipo perceptiva.

Na página 28, pode-se encontrar:

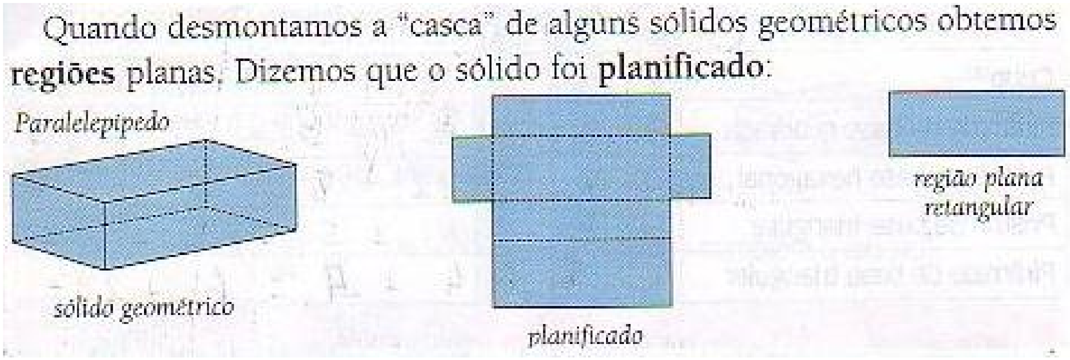


FIGURA 13 – Imagens geométricas 3D trabalhada heuristicamente para tornar-se 2D
Processo de Visualização e Raciocínio Geométrico.
Imagem do tipo perceptiva, discursiva e operatória.
Imagem operatória do tipo mereológico.

Na página 30 temos:

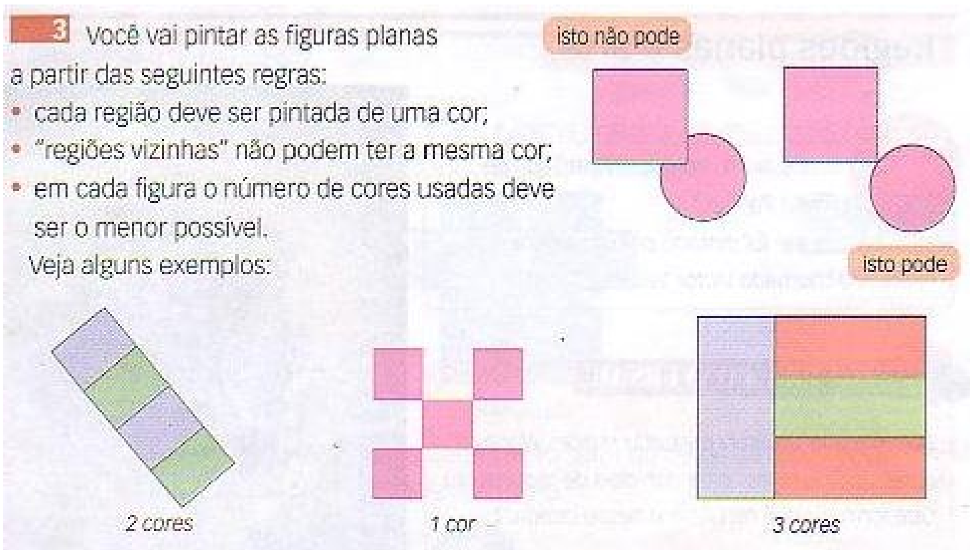


FIGURA 14 – Imagens bidimensionais da página 30.

Processo de Visualização.
Imagem do tipo perceptiva e seqüencial.

Encontramos na página 33:

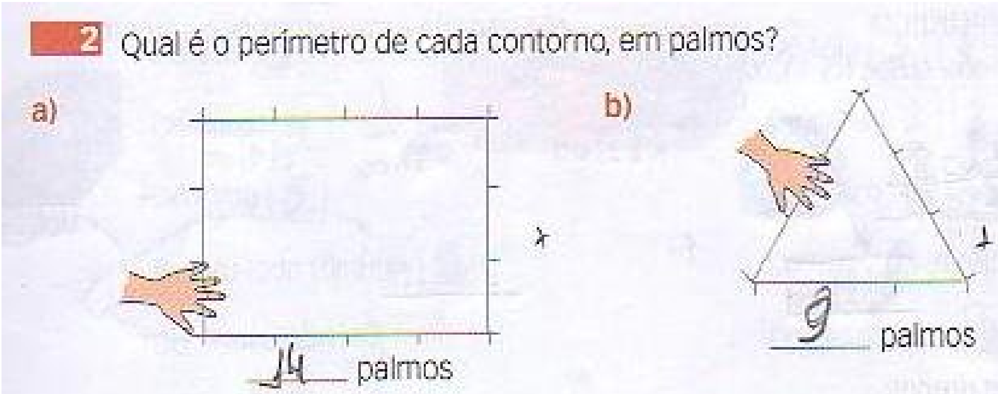


FIGURA 15 – Ilustração mostrando processo de contagem para perímetro de uma figura

Processo de Visualização.
Imagens do tipo perceptiva.

Todas as imagens desse capítulo encontram-se mapeadas no Anexo I. Com base nessa catalogação percebemos que nos capítulos analisados do 5ª ano encontramos bastante ênfase nas situações de percepção de diferenças e semelhanças de objetos geométricos, na classificação de figuras e na construção de modelos. Uma ênfase dada às figuras bidimensionais, como se o autor objetivasse nesse ensino a descrição, a modelagem, o desenho e a classificação de formas. Pensa-se isso pela sugestão que Dante (2007) faz ao incentivar investigação e previsão de resultados balizados nas subdivisões, combinações e modificações de formas.

Para atingir esses fins, além de explicações textuais, Dante utiliza-se de imagens que exploram processos de visualização, raciocínio e construção com a seguinte freqüência:

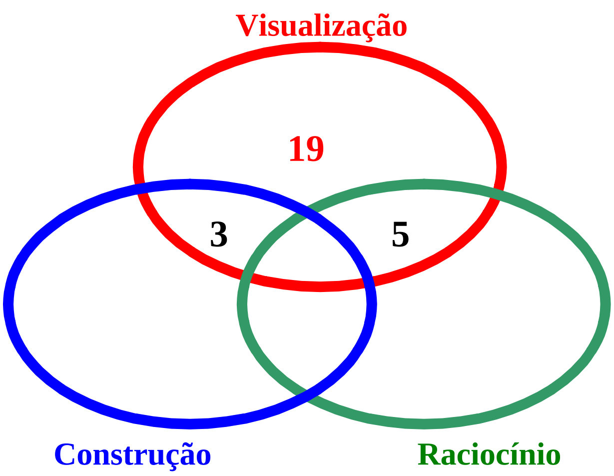


FIGURA A – Número de ocorrência de imagens que evocam os processos cognitivos básicos do conhecimento geométrico no livro do 5º ano segundo Duval.

Em alguns casos, como na tentativa de generalização da relação de Euller, Dante tenta desenvolver por meio de exercícios e imagens o sentido espacial associando idéias geométricas com idéias numéricas. Ainda percebe-se a preocupação do autor em apontar o reconhecimento geométrico no mundo real. Nesse processo, o autor explora imagens que sugerem ser do tipo perceptivo, havendo menos explorações de imagens que podem ser apreendidas de maneira distinta da já enunciada. Vejamos como o autor explora as imagens quanto a suas formas de apreensão:

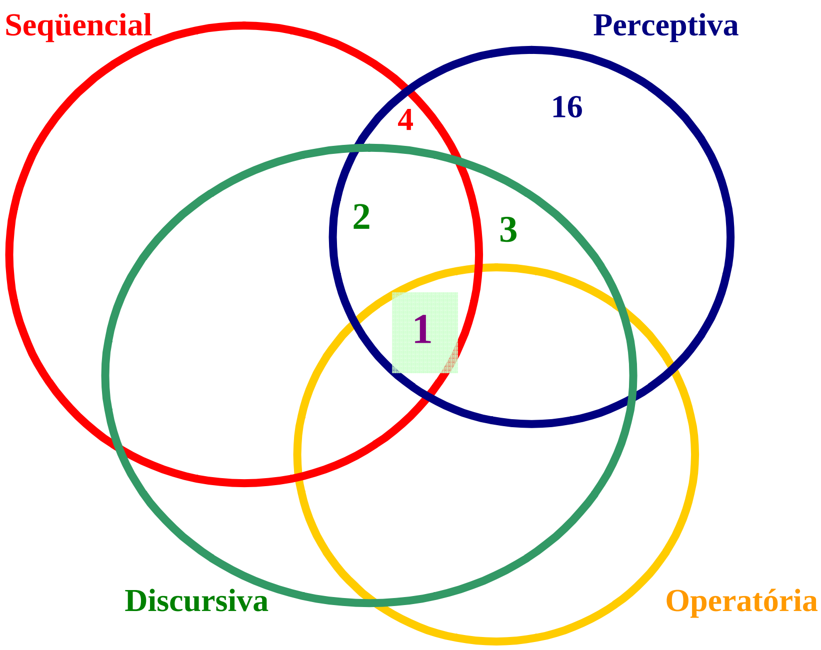


FIGURA A1 – Número de ocorrência de imagens que podem ser apreendidas pelos processos de apreensão descritos por Duval (1995) no livro do 5º ano.

A nossa breve observação nos mostrou que Dante objetiva apresentar elementos fortemente presente no meio ambiente da criança; mostrando a Geometria como sendo natural e familiar, as formas são reproduzidas e investigadas, independentemente de serem bidimensionais ou tridimensionais. Há alguma atenção nas transformações de forma, geralmente heurística de modificação mereológica. As idéias geométricas, sempre que possível, são associadas a idéias sobre medidas.

Lorenzato (1995) aponta que para esta faixa etária, do 2º ao 5º ano, as recomendações para um bom ensino de Geometria devem ser oferecidas com muitas oportunidades para que as crianças explorem objetos geométricos em duas e em três dimensões; desenvolvam senso espacial e estabeleçam relações espaciais e resolvam problemas que envolvam Geometria e suas aplicações a outros tópicos da matemática e a outros campos de conhecimento. Dante não explora muitas vezes a questão da interdisciplinaridade da Geometria e outros ramos.

4.2 Imagens na 8ª série

1

FIGURA 16 – Capa da coleção *Matemática* da 8ª série.

[1] Embora a capa do livro ainda utilize a nomenclatura "8ª série", no texto adotamos a atual equivalência "9ª ano"

As imagens a seguir foram mapeadas conforme a lógica atribuída ao enunciado em que elas estão inseridas. Deixamos evidente que as imagens não possuem um sistema de leitura como o da escrita, onde há um sistema de leitura que obedece uma direção (direita para esquerda e de cima para baixo), as imagens são lidas de forma diferentes, contempladas em sua plenitude. Por esse motivo, as mapeamos em conformidade com o texto a qual são referidas, alegando que elas sugerem ser apreendidas do modo como indicado nos exemplos que seguem.

Na página 166 destacamos as imagens da figura 17, relativas ao Teorema de Pitágoras.

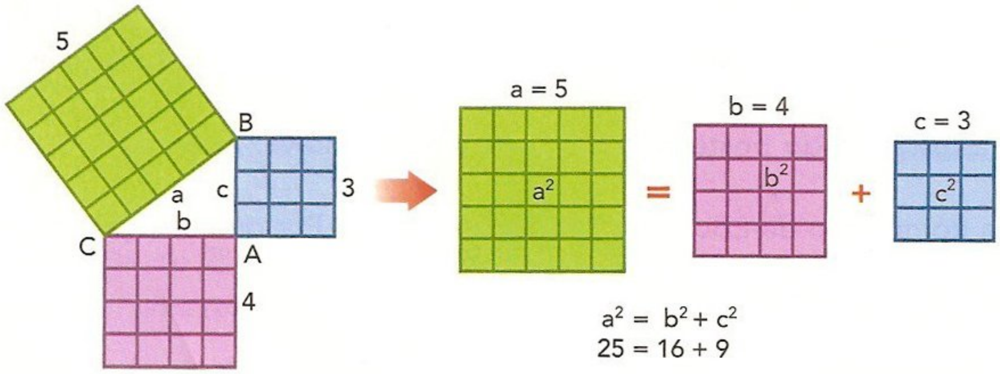


FIGURA 17 – Ilustração de um suporte para compreender o *Teorema de Pitágoras*

Processo de Visualização e Raciocínio Geométrico.
4 Imagens do tipo perceptiva, discursiva e operatória.
A figura inicial sofre uma operação de modificação mereológico.

Na página 168 destacamos exercícios envolvendo Teorema de Pitágoras, como mostrado na figura 18.

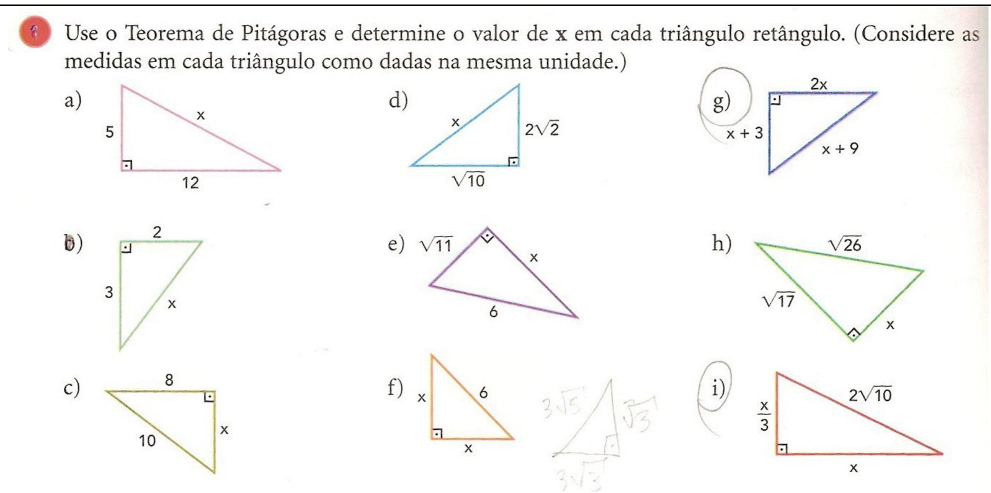


FIGURA 18 – Várias aplicações do *Teorema de Pitágoras* em exercícios

Processo de Visualização.
imagens do tipo perceptiva.

Na página 173, temos uma imagem que funciona como elemento de ilustração para destacar uma propriedade dos triângulos equiláteros:

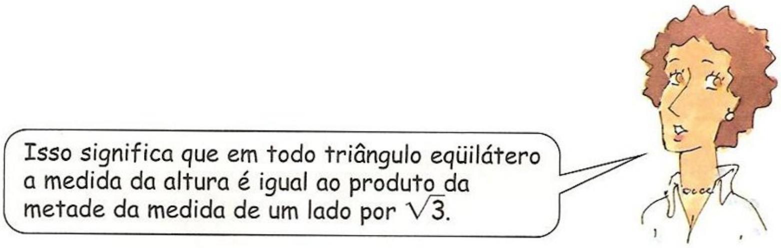


FIGURA 19 – Figura ilustrativa ao longo do capítulo.
Imagem ilustrativa.

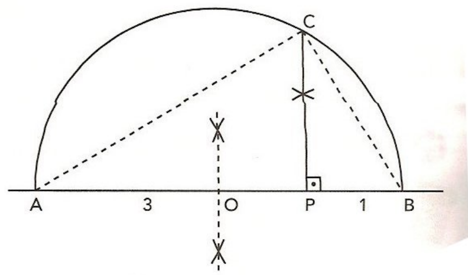
Na página 176, podemos observar a correspondente algébrica da asserção destacada na figura 19.

1º) Traçamos um segmento $\overline{AB}$ de 4 unidades com AP = 3 e PB = 1.

2º) Determinamos **O**, ponto médio de $\overline{AB}$.

3º) Traçamos a semicircunferência de centro **O** e raio $\overline{OA}$ ou $\overline{OB}$.

4º) Traçamos $\overline{CP}$ perpendicular a $\overline{AB}$ com **C** sobre a semicircunferência.



Nestas condições, o $\triangle ABC$ é retângulo em **C** e $\overline{CP}$ é a altura relativa à hipotenusa. Logo: $(CP)^2 = 3 \cdot 1 = 3 \longrightarrow CP = \sqrt{3}$.

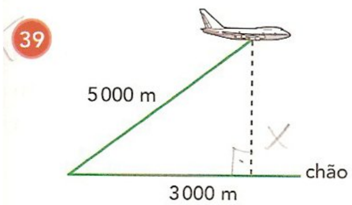
Transportando $\overline{CP}$ para a reta numerada obtemos o ponto correspondente a $\sqrt{3}$:

FIGURA 20 – Exemplo de figura cuja apreensão é a seqüencial e a perceptiva.

Processo de Visualização.
1 Imagem do tipo seqüencial e perceptiva.

Na página 177 encontramos mais um exercício relativo ao Teorema de Pitágoras dado na figura 21.

39



Na figura ao lado, em que altura se encontra o avião em relação ao chão?

FIGURA 21 – Exercício que faz aplicação direta da fórmula.

Processo de Visualização.
imagem do tipo perceptiva.

Na página 186, vemos um exemplo de ilustração que explora heurística na figura 22.

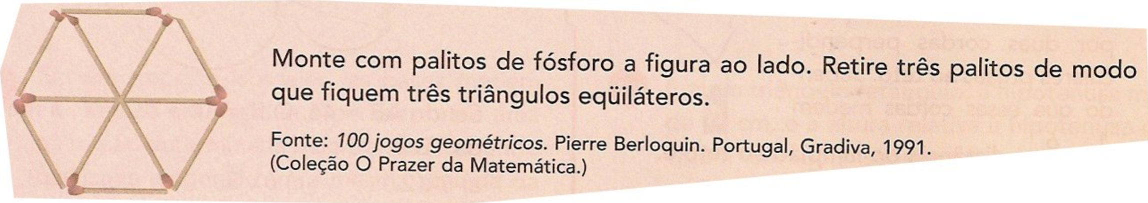
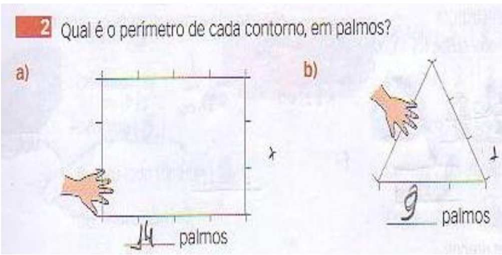


FIGURA 22 – Exemplo de figura que aplica modificação ótica heuristicamente.
Processo de Visualização e Construção.
1 imagem do tipo seqüencial, perceptiva, discursiva e operatória.
A apreensão operatória sofreu modificação ótica.

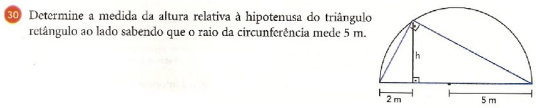
As imagens do capítulo de Geometria do livro do 9º ano foram mapeadas detalhadamente e se encontram no Anexo II. Agora analisar-se-ão algumas comparações entre os livros do 5º ao 9º ano e observar-se-á numericamente a quantidade de uso das imagens quanto às formas de apreensão e quanto ao tipo de função cognitiva usada em cada livro.

Quinto Ano.



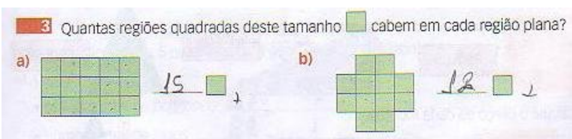
Processo de Visualização.
Imagens do tipo perceptiva.

Nono Ano

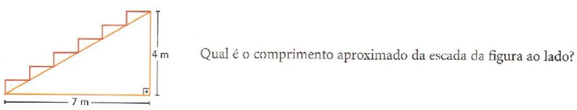


Processo de Visualização.
Imagem do tipo perceptiva.

Ambos os livros exploram bastante as imagens apenas perceptivas fazendo uso apenas de processos de visualização.



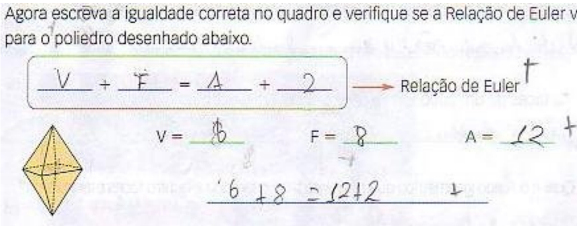
Processo de Visualização
Imagens do tipo perceptiva.



Processo de Visualização.
Imagem do tipo seqüencial.

Outro exemplo de exploração de imagens perceptivas em problemas usando processos apenas de visualização.

Quarta Série

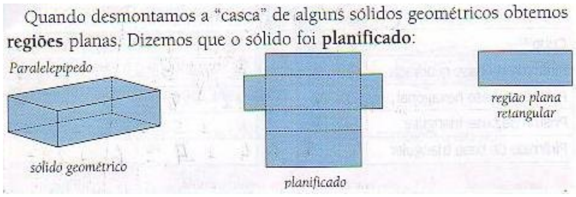


Processo de Visualização e Raciocínio Geométrico.
Imagens perceptivas e discursivas.

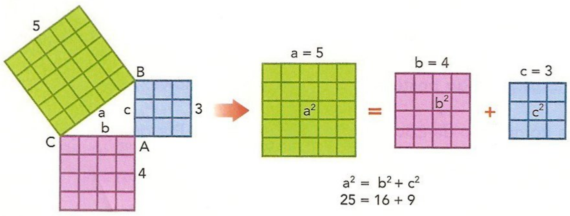
Oitava Série

Processo de Visualização e Raciocínio Geométrico.
Imagem do tipo perceptiva.

Em geral, quando se envolve processos de raciocínio geométrico, na 4ª série são exploradas exercícios que ajudam a deduzir fórmulas, e nas 8ª séries exercícios de exploração de outros caminhos para se resolver um problema.

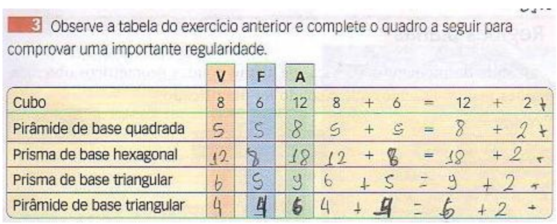


Processo de Visualização e Raciocínio Geométrico.
Imagem do tipo seqüencial, perceptiva, discursiva e operatória.
Imagem operatória do tipo mereológico



Processo de Visualização e Raciocínio Geométrico.
Imagem do tipo seqüencial, perceptiva, discursiva e operatória.
Transformação mereológica da figura.

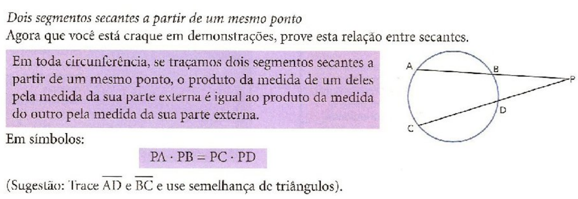
Ambos os livros exploram mais a modificação mereológica da figura para sugerir um raciocínio geométrico. Logo, as figuras que se espera ter apreensão operatória são geralmente reconfiguradas ou reagrupadas.



3 Observe a tabela do exercício anterior e complete o quadro a seguir para comprovar uma importante regularidade.

	V	F	A	
Cubo	8	6	12	8 + 6 = 12 + 2
Pirâmide de base quadrada	5	5	8	5 + 5 = 8 + 2
Prisma de base hexagonal	12	8	18	12 + 8 = 18 + 2
Prisma de base triangular	6	5	9	6 + 5 = 9 + 2
Pirâmide de base triangular	4	4	6	4 + 4 = 6 + 2

Processo de Visualização e Construção.
Imagem do tipo perceptiva e discursiva.



Dois segmentos secantes a partir de um mesmo ponto

Agora que você está craque em demonstrações, prove esta relação entre secantes.

Em toda circunferência, se traçamos dois segmentos secantes a partir de um mesmo ponto, o produto da medida de um deles pela medida da sua parte externa é igual ao produto da medida do outro pela medida da sua parte externa.

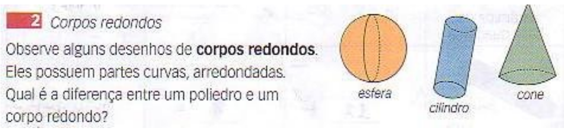
Em símbolos:

$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

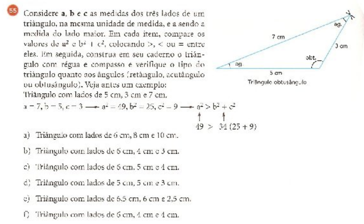
(Sugestão: Trace $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ e use semelhança de triângulos).

Processo de Visualização e Raciocínio Geométrico.
Imagem do tipo perceptiva e discursiva.

Exemplo de problemas que envolvem processos de construção e processos de raciocínio geométrico no 5º e 9º anos respectivamente.



Processo de Visualização e Raciocínio Geométrico.
Imagens do tipo seqüencial e discursiva.


55 Considere **a**, **b** e **c** as medidas dos três lados de um triângulo, na mesma unidade de medida, e a sendo a medida do lado maior. Em cada item, compare os valores de a^2 e $b^2 + c^2$, colocando >, < ou = entre eles. Em seguida, construa em seu caderno o triângulo com régua e compasso e verifique o tipo do triângulo quanto aos ângulos (retângulo, acutângulo ou obtusângulo). Veja antes um exemplo:
Triângulo com lados de 5 cm, 3 cm e 7 cm.
$a = 7, b = 5, c = 3 \longrightarrow a^2 = 49, b^2 = 25, c^2 = 9 \longrightarrow a^2 > b^2 + c^2$
$49 > 34\ (25 + 9)$

a) Triângulo com lados de 6 cm, 8 cm e 10 cm.
b) Triângulo com lados de 6 cm, 4 cm e 3 cm.
c) Triângulo com lados de 6 cm, 5 cm e 4 cm.
d) Triângulo com lados de 5 cm, 5 cm e 3 cm.
e) Triângulo com lados de 6,5 cm, 6 cm e 2,5 cm.
f) Triângulo com lados de 6 cm, 4 cm e 4 cm.

Processo de Visualização e Construção.
Imagem do tipo perceptiva e discursiva.

Em geral, os problemas que utilizam de imagens discursivas e operatórias são pedidos em ambos os livros de forma similar, ora em processos de construção ora em processos de raciocínio geométrico.

Percebemos que Dante não consegue apresentar eficazmente a Geometria como meio de descrever o mundo físico, mas explora as transformações de figuras geométricas através de rotação, translação, simetria e deformação, ressaltando a semelhança e a congruência. Faz uso da aplicação de propriedades geométricas; sugere emissão e verificação de hipóteses; mas ainda não consegue integrar a Geometria com a aritmética e álgebra.

Lorenzato (1995) afirma que os estudos da Geometria do 6º ao 9º ano devem favorecer as oportunidades para os alunos realizarem suas primeiras explorações de modo sistemático. É nessa fase que as primeiras deduções lógicas são construídas; os resultados e os processos devem ser discutidos, embora sem a preocupação com sua formalização.

Lorenzato (1995) continua afirmando que o vocabulário próprio da Geometria também deve ser empregado corretamente, com vistas ao domínio das definições e das propriedades. Longe de valorizar a memorização ou a evocação de definições e enunciados, demonstrações ou fórmulas, o objetivo é o processo pelo qual se chega ao resultado visando à compreensão e o significado. Assim sendo, a exploração informal da Geometria é muito adequada e necessária para os estudantes do 6º e do 9º ano, para os quais devem ser oferecidas oportunidades de comparação, classificação, medição, representação, construção, transformação. Entretanto, Dante explora bastante exercícios mecanizados que sugerem a memorização de passos e padronizações de resoluções de problemas

Portanto, as imagens nos livros de 5º e 9º anos obedecem ao seguinte quadro:

- Quanto aos Processos Cognitivos:

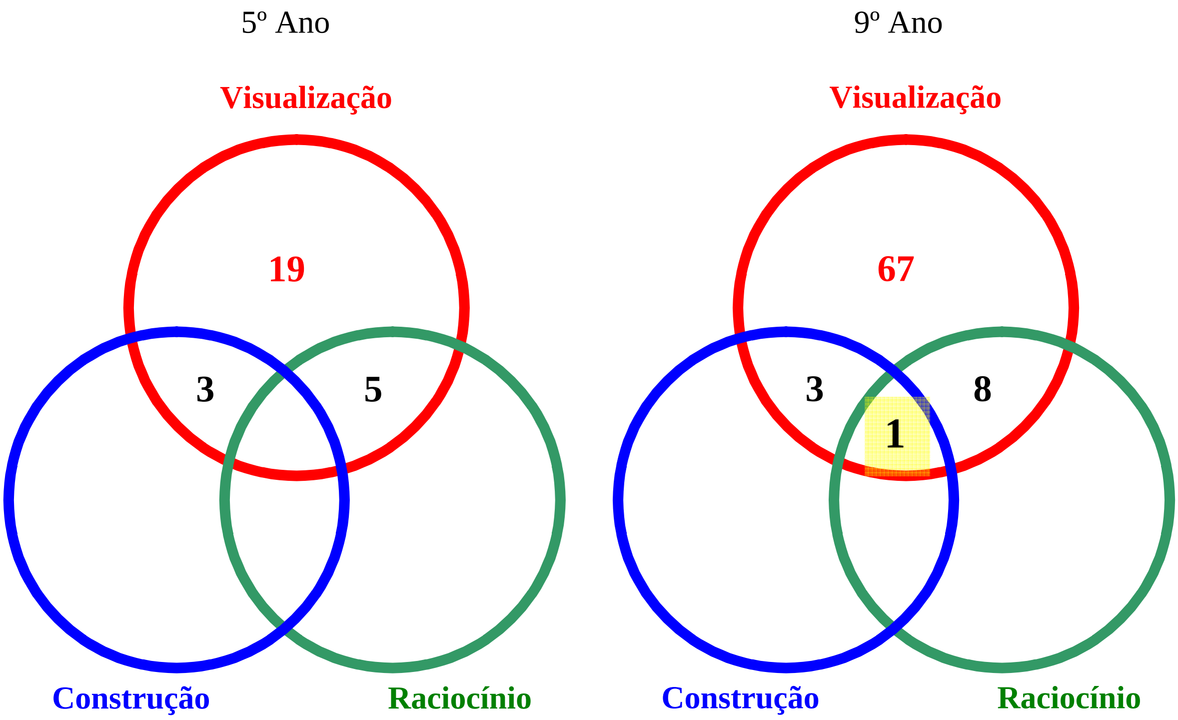


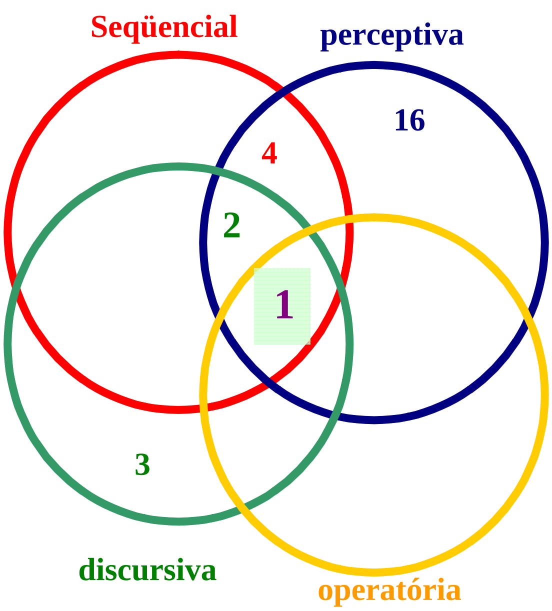
FIGURA B – Número de ocorrência de imagens que evocam os processos cognitivos básicos do conhecimento geométrico no livro do 5º ano comparado ao livro do 9º ano.

Espera-se que os processos de **Visualização** e **Raciocínio** sejam explorados mutuamente para um maior aprendizado em geometria, o livro da 8ª série explora melhor as imagens nesse ponto e ainda consegue usar uma imagem que envolve os três processos cognitivos descritos por Duval.

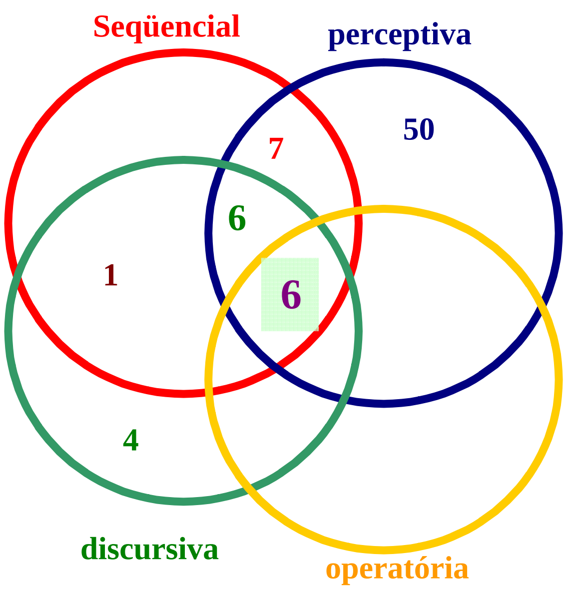
Analisamos também o modo como a coleção *Matemática* de Dante dispõe as imagens quanto as formas de apreensão.

- Quanto aos tipos de formas de apreensão que as imagens sugerem, os livros apresentam os resultados abaixo enunciados.

5º Ano



9º Ano



Percebe-se um baixo número de imagens discursivas e operatórias sendo exploradas quando comparamos ao número de ocorrência de imagens perceptivas. Em termos de processo cognitivo, o livro do 9º ano leva vantagem sobre os dois outros livros analisados, pois explora do leitor uma leitura das imagens com mais ocorrência de processos de construção e de raciocínio geométrico. Isso leva o aluno à descoberta por conta própria, a conseqüência por mais uso de imagens que forcem a uma interpretação dessa natureza. Cria ambientes onde a imagem deve falar mais que o enunciado e o texto. Portanto, as imagens devem ser apreendidas pelo leitor com mais minúcias. Justifica-se, portanto, o porquê do livro do 9º ano ser mais apropriado para a leitura das imagens.

Acompanhe o quadro:

5º Ano	9º Ano	3º Série
18% Apreensão discursiva	14% Apreensão discursiva	13% Apreensão discursiva
3% Apreensão operatória	9% Apreensão operatória	6% Apreensão operatória

Apesar de haver mais imagens discursivas no livro do 5º ano, essas são exploradas mais nos exercícios, o que leva a uma reflexão maior do aluno para compreender a questão e poder generalizar padrões e fórmulas geométricas. Já no 9º ano as imagens discursivas são mais exploradas em explicações de conteúdo, levando o leitor a acompanhar uma seqüência lógica da imagem, sobretudo nas que sugerem envolver apreensão operatória e discursiva simultaneamente. A evidência dessa alegação encontra-se no número de imagens operatórias, que são as que servem para provar propriedades geométricas, e só foram exploradas em textos explicativos ou problemas resolvidos.

No livro do 9º ano encontramos foco em situações de percepção de figuras quanto a semelhanças, classificação de imagens e construção de modelos. Percebe-se a preocupação em apontar descrição e propriedades de figuras bidimensionais e tridimensionais. Para isso, incentivar previsão de resultados presumidos de combinações, re-agrupamentos e modificações de formas e figuras geométricas dando uma atenção maior na questão da visualização e das representações de imagens geométricas; nas transformações e exploração de figuras; muito uso de imagens que são apreendidas de modo operatório; resolução de exercícios com o uso de modelos geométricos; aplicação e compreensão de propriedades e relações da Geometria.

4.3 Imagens no livro da 3ª Série do Ensino Médio

Procedemos de modo análogo às outras imagens analisadas nos ítens anteriores, ou seja, interpretando as imagens e sugerindo suas classificações conforme o contexto do enunciado, considerando-se que no livro do 3ª série médio existe um número maior de imagens utilizadas. Classificá-las-emos sem suscitar detalhadamente todas as imagens. Entretanto, pode-se acompanhar as demais páginas analisadas no Anexo III.

Na primeira página do capítulo de Geometria existem 11 imagens. Todas são exploradas unicamente pela função cognitiva da visualização. As duas primeiras imagens sugerem ser do tipo perceptivas e discursivas.

As demais imagens são apenas perceptivas.

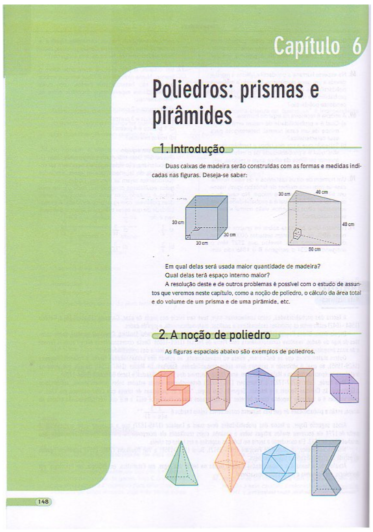


FIGURA 23 – Página 148 da coleção *Matemática* do 3ª série.

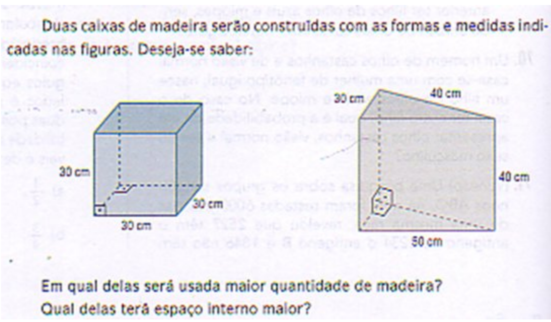


FIGURA 24 – Exemplo de imagens do perceptiva e discursiva.

Na terceira página desse capítulo as imagens são apenas visualizadas como processo cognitivo. Existe um total de 14 imagens e todas sugerem ser do tipo perceptiva.

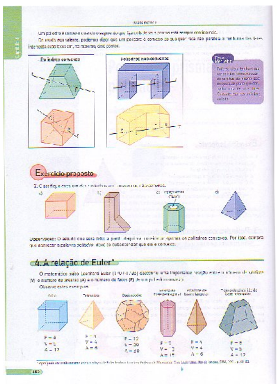


FIGURA 26 – Página 150 da coleção *Matemática* do 3ª série.

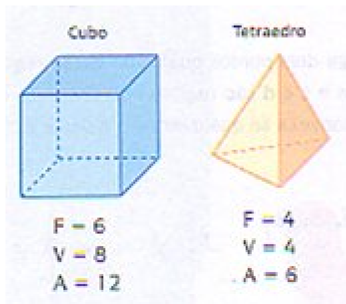


FIGURA 25: Imagens que utilizam apenas o processo de visualização.

Na sexta página desse capítulo há 6 imagens, das quais duas sugerem ser do tipo perceptivas e quatro do tipo perceptiva, discursiva e operatória. Todas as imagens oferecem apenas a possibilidade de exploração visual.

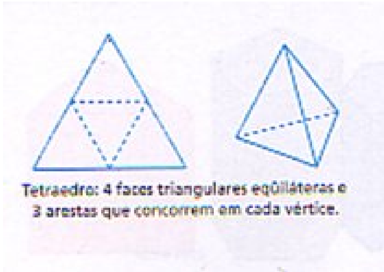


FIGURA 27 – Figura que sofreu modificação do tipo operatório – mereológico.

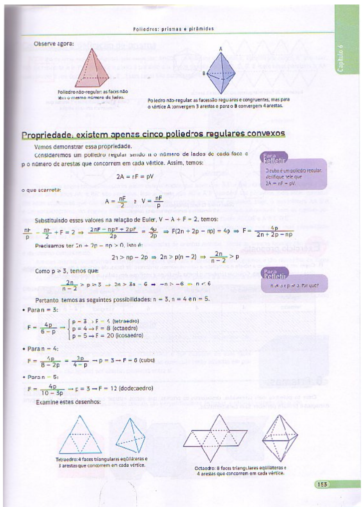


FIGURA 28 – Página 153 da coleção *Matemática* do 3ª série.

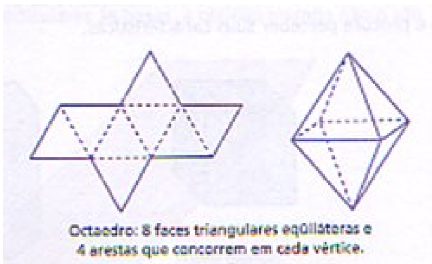


FIGURA 29 – Exemplo de figura que sofreu modificação mereológico.

Na décima página desse capítulo há sete imagens, das quais as duas primeiras são do tipo perceptiva, discursiva e operatória (sofrendo modificação mereológica), são figuras que só podem ser visualizadas. A terceira imagem é do tipo perceptiva e discursiva e pode ser explorada nos campos da visualização e do raciocínio. As três imagens seguintes são do tipo perceptiva, discursiva e operatória, sofrendo dessa vez, modificação posicional. A última imagem pode ser visualizada e pode ser classificada como perceptiva.

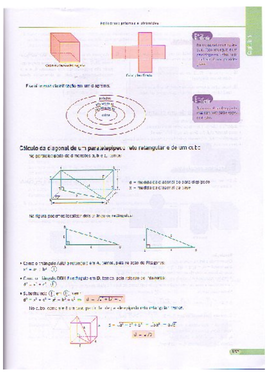


FIGURA 30 – Página 157 da coleção *Matemática* do 3ª série.

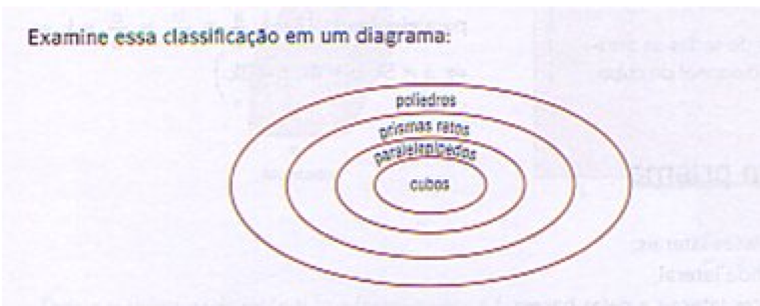
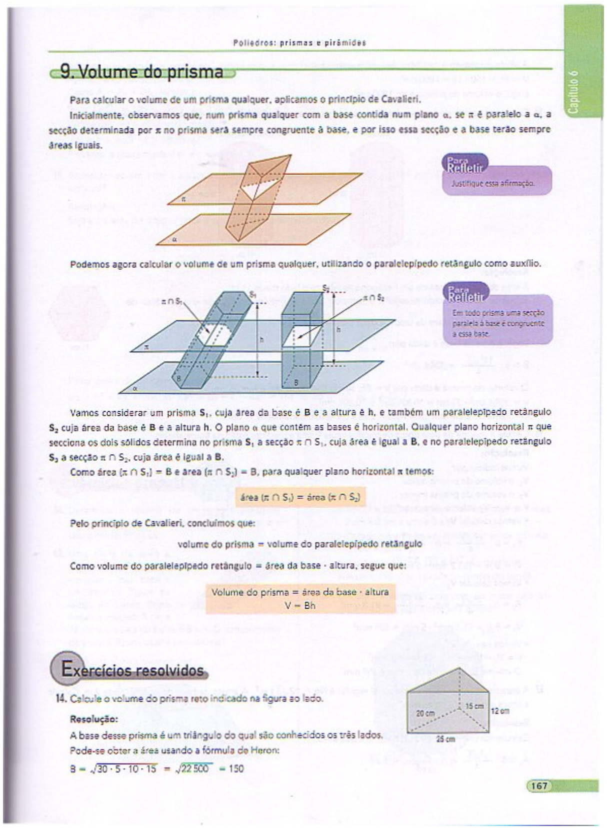


FIGURA 31 – Figura que oferece exploração de visualização e raciocínio geométrico.

Na vigésima página desse capítulo existem três imagens e todas do tipo perceptiva. Todas as imagens dessa pagina exploram apenas a função da visualização.


Poliedros: prismas e pirâmides

Capítulo 6

9. Volume do prisma

Para calcular o volume de um prisma qualquer, aplicamos o princípio de Cavalieri.

Inicialmente, observamos que, num prisma qualquer com a base contida num plano α, se π é paralelo a α, a secção determinada por π no prisma será sempre congruente à base, e por isso essa secção e a base terão sempre áreas iguais.

Para Refletir
Justifique essa afirmação.

Podemos agora calcular o volume de um prisma qualquer, utilizando o paralelepípedo retângulo como auxílio.

Para Refletir
Em todo prisma uma secção paralela à base é congruente a essa base.

Vamos considerar um prisma S_1, cuja área da base é B e a altura é h, e também um paralelepípedo retângulo S_2 cuja área da base é B e a altura h. O plano α que contém as bases é horizontal. Qualquer plano horizontal π que seciona os dois sólidos determina no prisma S_1 a secção $\pi \cap S_1$, cuja área é igual a B, e no paralelepípedo retângulo S_2 a secção $\pi \cap S_2$, cuja área é igual a B.

Como área $(\pi \cap S_1) = B$ e área $(\pi \cap S_2) = B$, para qualquer plano horizontal π temos:

área $(\pi \cap S_1)$ = área $(\pi \cap S_2)$

Pelo princípio de Cavalieri, concluímos que:

volume do prisma = volume do paralelepípedo retângulo

Como volume do paralelepípedo retângulo = área da base · altura, segue que:

Volume do prisma = área da base · altura
$V = Bh$

Exercícios resolvidos

14. Calcule o volume do prisma reto indicado na figura ao lado.

Resolução:

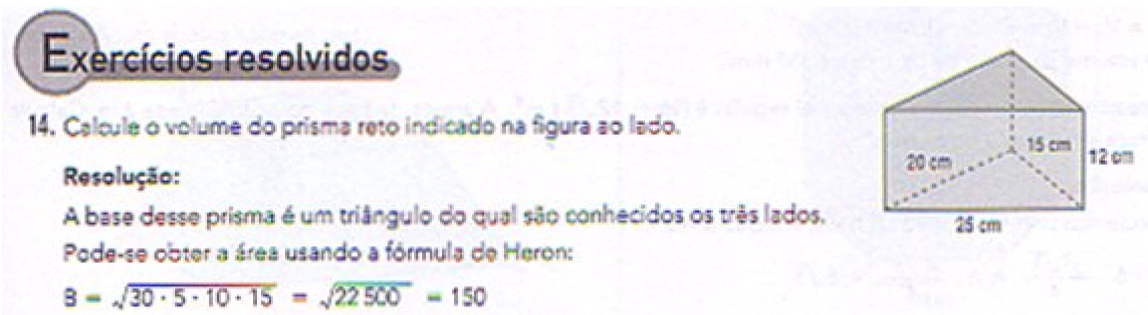
A base desse prisma é um triângulo do qual são conhecidos os três lados.

Pode-se obter a área usando a fórmula de Heron:

$B = \sqrt{30 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 15} = \sqrt{22\,500} = 150$

167

FIGURA 32 – Página 167 da coleção *Matemática* do 3º ano.


Exercícios resolvidos

14. Calcule o volume do prisma reto indicado na figura ao lado.

Resolução:

A base desse prisma é um triângulo do qual são conhecidos os três lados.

Pode-se obter a área usando a fórmula de Heron:

$B = \sqrt{30 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 15} = \sqrt{22\,500} = 150$

FIGURA 33 – Exemplo de figura usada para aplicar seus dados diretamente na fórmula.

O capítulo analisado do livro do 3ª série do Ensino Médio apresenta 212 imagens. É significativamente mais numeroso em termos de imagens utilizadas que os capítulos analisados nos livros do 5º e 9º anos do Ensino Fundamental.

Quanto aos processos cognitivos explorados, o livro do ensino médio apresentou:

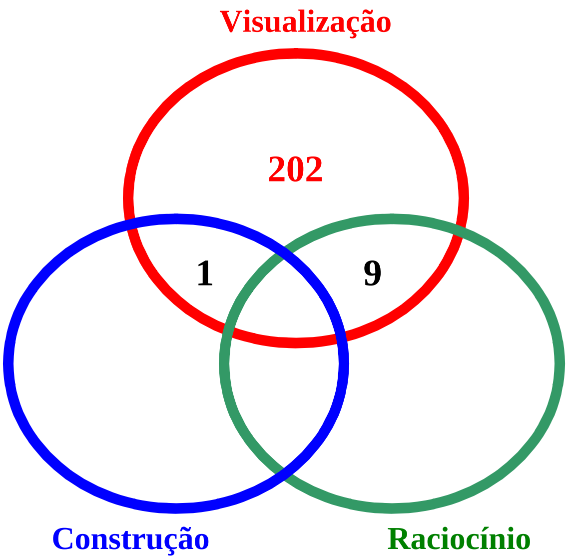


FIGURA C - Número de ocorrência de imagens que evocam os processos cognitivos básicos do conhecimento geométrico no livro da 3ª série do Ensino Médio segundo Duval

Nenhuma imagem conseguiu abraçar os três processos cognitivos que se esperam para que haja uma exploração mais eficiente das propriedades geométricas de um desenho.

Quanto às formas de apreensão da imagem, o livro da 3ª série consegue explorar em maior número as imagens que possuem mais categorizações de apreensão, contudo as inserem em um contexto de pouca exploração, elas são muito “mastigadas” nos enunciados e textos e a imagem muitas vezes não oferece um *diálogo* a se propor com o leitor. Mesmo as imagens discursivas são trabalhadas de modo processual, sobretudo nos exercícios propostos e resolvidos.

Observe o quadro abaixo referente à contagem das imagens do capítulo do livro terceiro ano e como as imagens sugerem ser apreendidas:

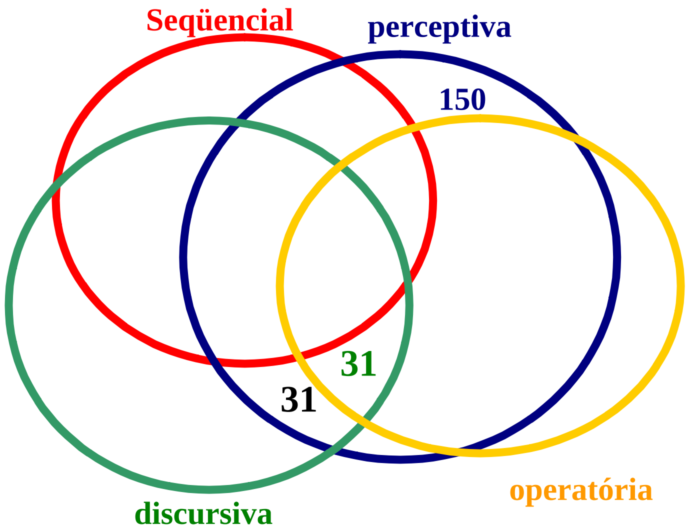


FIGURA C1 – Número de ocorrência de imagens que podem ser apreendidas pelos processos de apreensão descritos por Duval (1995) no livro da 3ª Série

Porcentagem das imagens no livro da 3ª série que podem ser discursivas e operatória: 13% retrata a apreensão discursiva e 6% a apreensão operatória.

Contudo, há uma carência muito grande quanto a criatividade dos problemas propostos, sendo eles muitas vezes aplicações diretas de fórmulas. Observe o quadro abaixo, também referente aos problemas que envolvem ilustração no livro do ensino médio:

Exercícios ou problemas que envolvem imagens perceptivas: 94 %

Exercícios ou problemas que envolvem imagens discursivas: 6 %

Exercícios ou problemas que envolvam as quatro apreensões de imagem: 0 %

Podemos observar essa questão nos problemas resolvidos (extensão de uma explicação) e dos exercícios propostos por Dante. Observe o quadro:

Exercícios ou Problemas da 5º Ano com ilustrações:	Exercícios ou Problemas da 9º ano com ilustrações:	Exercícios ou Problemas do 3º ano com ilustrações:
Imagens Perceptivas – 73% Imagens Discursivas – 27% Todas as apreensões – 0 %	Imagens Perceptivas – 86% Imagens Discursivas – 10% Todas as apreensões - 4%	Imagens Perceptivas – 94 % Imagens Discursivas – 6 % Todas as apreensões – 0 %

Segundo as classificações de Raymond Duval, os problemas que exploram imagens discursivas ou com mais de um tipo de apreensão exigem do aluno uma análise da imagem com uma associação à coordenação dos registros e à compreensão global do problema. A coordenação dos diferentes registros de representação semiótica ligados ao tratamento dos conhecimentos não se opera espontaneamente, mesmo ao curso de um ensino que mobilize essa diversidade de registros.

Por essa óptica vemos como o livro da 3ª série do Ensino Médio deixa a desejar por fazer uso de imagens que são exploradas apenas de modo visual, e não induzindo a um processo de construção e raciocínio.

Hershkowitz (1990, p.87) corrobora desse pensamento:

> ... é essencial um processo de conjecturas e provas como pensamento geométrico de alto nível, contudo a estrutura dedutiva da geometria não tem obtido sucesso na escola, bem como os processos de descoberta indutiva formulada como conjecturas têm sido negligenciados.

A autora mostra que a dedutividade da Geometria vem falhado por ela ser tratada de modo imposto e nunca de modo reinventado. Uma boa forma de enxergamos esse contexto em Dante na 3ª série é ver que as imagens exploradas em grande número são puramente expositivas, postas no capítulo com o intuito único de serem visualizadas (foram 202 de um total de 212). Hershkowitz (1990) discute possíveis causas para as falhas apontadas:

> ... o sistema lógico, como apresentado aos alunos, só enfatiza o produto final da descoberta matemática, sem destacar os processos subjacentes; e o aluno, muitas vezes, ainda não tem maturidade lógica para uma demonstração ou não sente necessidade da prova em situações que, muitas vezes, o desenho ou um processo de medição parecem ser suficientes para a garantia de uma propriedade da figura.

O uso de processos puramente visuais, sem o incentivo de processos de construção e raciocínio é uma forma de valorizar apenas o produto final. Na busca para reverter esse quadro de falhas a autora pensa ser necessária uma ação pedagógica que possibilite descobertas empíricas e indutivas na Geometria, isso visto que, além da característica da descoberta, o estudante sente a necessidade de provar uma veracidade e suas conjecturas, sem esquecer de que as experiências indutivas formam a base desse tipo de estudo.

Portanto, percebe-se que Dante (2007) em sua coleção Matemática opta por partir no livro do 5º ano, de reconhecimento de formas geométricas mais freqüentes, da sua caracterização por meio de estudo das propriedades do objeto, focando o trabalho da passagem das relações do objeto em um encadeamento de suas propriedades. Tudo isto para que no livro do 9º ano do ensino fundamental o estudante possa aproximar-se de uma sistematização e observe algumas provas matemáticas. Na 3ª série do Ensino Médio o aluno acompanha apenas visualmente os processos seguidos nas demonstrações para generalizações de fórmulas.

O autor preocupa-se em executar uma abordagem pedagógica que parte de atividades de percepção espacial, das séries iniciais para as séries finais, buscando uma sistematização de propriedades dessas figuras exploradas. Somente no 9º ano o autor sugere algumas demonstrações geométricas, mais tarde exploradas no livro do ensino médio de modo exclusivamente visual.

4.4 Comparando as imagens

Percebe-se um grande número de imagens nos capítulos do livro analisado exploradas de modo unicamente visual. Se a meta central do ensino de Geometria está voltada para a aquisição teórica de um corpo de conhecimento que torne apto o estudante, em seu produto final, a realizar uma prova matemática ou realizar uma generalização de uma fórmula de modo satisfatório, então para se atingir esse nível de abstração é importante uma vivência experimental. Isso permitirá a aquisição de habilidades espaciais e evidencia-se a importância dos processos de construção e raciocínio geométrico também.

Os conceitos geométricos possuem aspectos figurais e conceituais, e os figurais decorrem de imagens visuais. O processo de visualização passa a ser considerado como uma habilidade espacial de grande importância para a formação de conceitos geométricos, como destaca Hershkowitz (1990, p.75) “A visualização geralmente, se refere à habilidade para representar, transformar, gerar, comunicar, documentar e refletir sobre informação visual.”

São as representações visuais que contribuem para uma organização global das informações; elas dão concretude às imagens visuais / mentais, permitindo a análise dessa informação. É o que Duval (1997) chama de Raciocínio Geométrico quando associadas a elementos geométricos. Nesse sentido, Hershkowitz dialoga com McGee / Michael (apud BISHOP, 1983, p. 182-183) que aponta dois tipos de habilidade espacial: a visualização espacial, na qual a autora entende por a habilidade de manipular mentalmente, rotacionar, mudar de direção ou inverter um objeto apresentado pictorialmente.

As orientações espaciais, são entendidas como “a habilidade para compreender os arranjos dos objetos segundo um padrão e a capacidade de perceber, sem confusão, as mudanças de orientação realizadas nesse objeto.”

Percebe-se que para Hershkowitz (1990) a habilidade de visualização vem mesclada de imagens mentais apreendidas de forma operatória e que as orientações espaciais são as habilidades desenvolvidas por apreensões discursivas. A autora enxerga a visualização como um processo que funde raciocínio geométrico e construções mentais. Duval (1997) separa essa tríade para maiores análises.

As imagens que exploram, ao mesmo tempo, os processos que Duval classificou como visualização, construção e raciocínio são as melhores para se construir um conhecimento firme nos campos da Geometria, contudo, nossa análise apontou para o baixo uso dessas imagens nos capítulos dos livros estudados.

Se partirmos da premissa de que dominar o pensamento geométrico envolve dominar seu campo teórico e sabê-lo aplicá-lo na prática, então devemos considerar as frases de Gonseth (apud Pais, 1996, p.71-72) quando este aponta os três aspectos fundamentais de um conhecimento geométrico: o intuitivo, o experimental e o teórico. Assim,

> A intuição é uma forma de conhecimento imediato que está sempre disponível no espírito das pessoas e cuja explicitação não requer uma dedução racional guiada por uma seqüência lógica de argumentos deduzidos uns dos outros. Um conhecimento baseado na intuição caracteriza-se, antes de tudo, por uma funcionalidade quase imediata quando comparada com o desenvolvimento necessário de uma seqüência dedutiva do raciocínio lógico. Mas esta disponibilidade é evidentemente relativa ao conjunto de conhecimentos já acumulados pelo sujeito. O que pode ser intuitivo e evidente para uma pessoa pode não ser para outra.

Segundo Pais (1996), a intuição possui relações com as imagens mentais que o indivíduo já trás consigo. O autor fundamenta em Denis (1979, 1989) a sua análise das propriedades das imagens mentais. Pensa-se que a pessoa possui tais imagens quando apresenta-se apto para descrever propriedades de um objeto quando este está ausente. São imagens caracterizadas por abstração e subjetividade. Subjetivismo não é característica de uma natureza cientifica, mas Pais (1996, p.72) defende que a "construção da objetividade passa necessariamente pelo estagio subjetivo da concepção individual."

Por isso ocorre essa relação entre imagem mental e intuição. Os argumentos intuitivos não são registros de *verdades* matemáticas também não são conceitos, mas podemos usá-los diretamente ou experimentá-los, como uma verdade estabelecida, por uso de demonstrações e provas.

As experimentações, dentre outras formas, ocorrem por uso de figuras ou manipulação de objetos reais. Mesmo o objeto e a figura sendo integrantes de itens cuja natureza seja concreta, são de níveis representacionais distintos. Descreve Pais (1996, p.68) que "o objeto pode ser considerado uma forma de representação primária do conceito. Primária no sentido que ele é a forma mais acessível e imediata à sensibilidade humana."

A figura já é de um nível maior de complexidade por exigir leitura, interpretação e associação com o objeto real e, conseqüentemente, exige uma imagem mental, mas ambos são representações particulares, que se opõem às características abstratas e gerais do conceito.

Partindo-se da intuição pode-se chegar ao conceito matemático, por meio de provas matemáticas e demonstrações. O conceito está situado no plano geral e abstrato, sendo que "a generalidade e a abstração dos conceitos geométricos são construídos pouco a pouco, num processo dialético que envolve necessariamente a influencia do mundo físico e uma representação intelectual sobre este mundo." (PAIS, 1996, p. 70-71).

Esse processo se constitui pelas representações que utilizam objetos e figuras e, posteriormente, são incorporadas como imagens mentais, novamente citamos Fischbein (1993, p.160) para enfatizar a importância do que sejam os conceitos figurais:

> Os conceitos figurais são entidades abstratas, gerais, ideais, puras e logicamente determináveis, embora ainda reflitam e manipulem mentalmente representações de propriedades espaciais (como forma, posição, magnitudes expressas metricamente).

São os conceitos figurais que permitem a possibilita da resolução de um problema ou uma intervenção na geometria. Nacarato (2000, p.96) vem a afirmar que:

> No processo de invenção geralmente, a inspiração vem por intuição e não por uma cadeia / estrutura lógica de instrumentos. As tentativas, as experimentações, nesse processo de invenção, vêm do uso de analogias ou processos indutivos pela manipulação de imagens mentais, controladas por conceitos. Ainda nesse processo inventivo, o corpo axiomático, com seus pressupostos, definições, teoremas e provas são utilizados para verificar os passos.

Desse modo os três aspectos do conhecimento geométrico (o intuitivo, experimental e teórico) estão interligados. O entendimento destes aspectos permite o desenvolvimento de maneiras de intervenção pedagógica. Fischbein (1993, p.161) pensa que muitos dos erros cometidos pelos estudantes em um raciocínio geométrico são explicados pela separação entre os aspectos conceitual e figural do conceito da geometria. É comum que a *força* de uma figura enfraqueça os aspectos conceituais. Nesse âmbito enxergasse que o leitor, mesmo frente a uma prova matemática irá tender a uma necessidade de ter constatações empíricas. Pois a estrutura figural pode dominar a dinâmica do raciocínio, em vez de ser controlada pelas restrições formais correspondentes.

Assim Fischbein (1993) defende que uma das tarefas da educação matemática deveria ser a criação de contextos de ensinos que favoreçam uma cooperação entre os aspectos conceituais e figurais do conceito geométrico, possibilitando a fusão deles. E um dos obstáculos da aquisição de conceitos geométricos pelo estudante está no fato de os processos de desenvolvimento de conceitos figurais não serem, na verdade, um processo natural. A instrução é quem ocupa o papel essencial desse processo.

Na matemática, e em especial, na Geometria, a fusão já enunciada por Fischbein (1993) poderia se aplicar a teoria de Duval (1995) quando se pensa que as imagens discursivas exploradas tanto nos problemas como nos textos-explicativos de um conteúdo geométrico representam a chave do diálogo entre o leitor e a imagem. São elas que possuem o poder de levar o leitor, de forma objetiva e consciente, a elaboração de uma representação (classificando-se como uma representação mental externa consciente). Portanto, quanto mais exploradas melhor para o desenvolvimento de um pensamento geométrico.

Fischbein (1993, p.144) já havia pensado parecido sobre as imagens que Duval classificou como discursivas no campo da Geometria ao analisar seu papel nos constructos geométricos, e defendeu a hipótese de que, em tal processo, “uma rede conceitual ativa interage com as fontes imaginativas”. Afirma ainda que existem razões para acreditar e admitir que, no percurso de uma ação recíproca como esta, os “significados mudam de uma categoria para outra, as imagens ganham significação mais generalizada e os conceitos enriquecem mais amplamente suas conotações e o seu poder combinatório”.

Percebe-se que as imagens discursivas são ainda exploradas em pequeno número frente às imagens do tipo perceptiva. As imagens perceptivas, apesar de representam um recurso diversificado nos livros didáticos, muitas vezes dando dados numéricos para serem aplicados diretamente a fórmula, ainda não é capaz de assumir a posição de objeto cognoscível.

Quando os livros didáticos de matemática utilizam um número muito grande de imagens puramente perceptivas estão optando muito mais por um recurso estético ou mnemônico, estético no sentido de que ajuda a ilustrar e embelezar o livro e memorístico por funcionar como recurso de fixação, memorização visual do assunto ou tema a qual está associado. Assim, Carlos (2002, p.67) já explicita sua opinião sobre as imagens que não trazem consigo alguma mensagem ao leitor. Não fazer perguntas à imagem soa como se ela não tivesse nada a dizer.

Para o autor, uma imagem-muda sofre mudismo quando não comporta a possibilidade de ser portadora de mensagem. Completamos o autor alegando que na Geometria essa imagem-muda representa a imagem que só atinge o nível de perceptiva quando sequer é explorada para transmitir dados numéricos.

A imagem perceptiva produz um atrofiamento da sensibilidade e da racionalidade do leitor em relação a ela e as suas variações, ao passo que as imagens discursivas aguçam a sensibilidade e a racionalidade geométrica do interprete dela. Sabemos que uma imagem do tipo perceptiva poderia ser trabalhada em enunciados de tal modo a transformar-se em imagem discursiva. Sem essa transformação a imagem perceptiva, em último caso, acaba eliminando do imaginário e da racionalidade dos alunos a possibilidade de poder ser vista e tratada como um objeto gnosiológico e comunicante. Ao converter essa imagem para discursiva, optaríamos por um tratamento que deixasse de ser tão somente memorístico ou estético para passarem a ser tratadas como objetos cognoscentes.

Não existe solução imediata à problemática apresentada, até porque os fatores que levam as críticas de um ensino de Geometria que deixe a desejar são fundamentadas em vários e distintos fatores. Entre esses, nós apontamos como sugestão, visto as questões teóricas apontadas até aqui, que seria interessante orientar uma organização curricular na escola que vise na incorporação do ensino de Geometria um modo de possibilitar o aluno a, no final da Educação Básica, aptidão para provar um teorema, ou pensar dedutivamente. Hershkowitz (1990, p.93) afirma que:

> ... a criança começa a aprender geometria quando começa a "ver" e "conhecer" o mundo físico a sua volta e continua para níveis mais elevados do pensamento geométrico, por meio de processos indutivos e dedutivos. O papel da educação escolarizada é de possibilitar e ampliar essas habilidades e processos visuais e espaciais.

Talvez, um modo de aliviar o vão dessa lacuna, esteja na utilização de imagens mais ricas em mensagens para os leitores de Geometria e um novo olhar na formação do professor, esta sugestão no sentido de dar-lhe indícios de se trabalhar imagens geométricas discursivas quando elas não estão figuradas nas páginas do livro didático adotado. Para isso, sugere-se também, uma maior publicação de materiais didáticos voltados ao ensino da Geometria, sobretudo materiais que surgiram atividades interessantes na área e permitam a formação do pensamento geométrico do alunado e do professorado.

5 IMAGENS RECORRENTES

Vivemos hoje rodeados de incontáveis imagens transmissoras de informações como acontece com texto escrito. Existe a necessidade de aprender a lê-las. Negar a inter-relação entre linguagem verbal e não-verbal é tender a falhar em quesitos de ensino - aprendizagem, não apenas nos livros didáticos, mas em todos os meios de comunicação (televisão, internet, cinema, entre outras) de que o estudante dispõe para aprender.

Atualmente uma palavra fortemente abordada ao se discutir Educação e seus objetivos é *paradigma*. Ela é utilizada, sobretudo, nos contextos de novos desafios. *Paradigma* é o mesmo que *modelo, padrão, cultura geral vigente* (MIGUEL, 2007). Em outras palavras, *paradigma* poderia retratar a idéia de que existe uma percepção geral sobre alguma temática. Refere-se ao modo como um conjunto de indivíduos enxerga um fato, compreendem um fenômeno ou defendem uma crença. Assim como pensa Thomas Kuhn (1994 apud MORAES 2001), "Paradigma refere-se a modelo ou a padrões compartilhados que permitem a explicação de certos aspectos da realidade. É mais do que uma teoria, implicando uma estrutura que gera novas teorias."

Logo, *quebrar paradigma* significa alterar uma idéia disseminada. Salientando-se que paradigmas nunca deixarão de existir, e na verdade, a *quebra de paradigma* representa uma *substituição desse paradigma*. Como pensa Moraes (2001):

> Ruptura significa rompimento, suspensão ou corte. Trata-se de uma cisão, de uma transformação na forma de compreender as coisas. A ruptura de um paradigma ocorre a partir da existência de um conjunto de problemas, cujas soluções já não se encontram no horizonte de determinado campo teórico, dando origem a anomalias ameaçadoras da construção científica. Um repensar sobre o assunto passa a ser requerido. Novos debates, novas idéias, articulações, buscas e reconstruções passam a acontecer a partir de novos fundamentos.

A substituição de paradigmas, na perspectiva de *novos desafios*, foi a responsável por ceder um novo ideal às disciplinas em suas aplicações e na sua formação. Visava-se descartar a memorização de Estados e Capitais na Geografia, as datas e os nomes de presidentes, imperadores, revolucionários na História, a memorização de fórmulas matemáticas, entre outras.

Era comum nas escolas de 1950 memorizar a tabuada. Poucos professores ousavam questionar a importância dessa mecanização. Uma década depois, com a chegada da *Matemática Moderna,* ocorreram algumas tentativas de mudar esse fato. Passou-se a enfatizar o valor da aprendizagem com compreensão. Então, surgiram as críticas ao ensino tradicional e a mecanização não só da tabuada, mas a memorização matemática em um âmbito geral. Logo, diversas escolas expurgaram a memorização e o professor que com ela trabalhasse com seus alunos seria considerado retrógrado.

O argumento seria criar condições de compreensão da multiplicação e vetar o ato de decorar a tabuada por parte do aluno. E apesar da polêmica, parecia unânime a opinião de que o certo seria condenar a mecanização simples e pura da tabuada. Compreender passou a ser fundamental. E tornou-se inconcebível exigir dos alunos, o recital que dizia: *duas vezes um, dois*; *duas vezes dois, quatro*; sem que o mesmo tivesse entendido o significado do que dizia.

Entretanto, os atuais livros didáticos de matemática, apesar de assumirem uma postura que aponta para uma quebra de paradigma do sistema de pedagogia tradicional – conservador, ainda vêem explorando em demasia o recurso da memorização. Moraes (2001) explicita seu pensamento sobre o atual sistema escolar quando menciona:

> Em vez dos processos interativos de construção do conhecimento, continua exigindo memorização, repetição, cópia, dando ênfase ao conteúdo, ao resultado, ao produto, recompensando o seu conformismo, a sua "boa conduta", punindo "erros" e suas tentativas de liberdade e expressão. Em vez de convergentes e inseparáveis, educação e liberdade constituem palavras antagônicas e excludentes.

Define-se a pedagogia conservadora ou tradicional, como uma educação do tipo *enciclopedista,* onde livro didático e professor representam os porta-vozes da razão, verdade e conhecimento. Essa idéia representa o *paradigma da educação conservadora*, onde ao estudante cabe responder às perguntas do professor e o seu local de aprendizagem restringe-se a escola. Nessa teoria defende-se a dicotomia entre aluno e professor: “O professor sabe e o aluno não sabe” (MIZUKAMI, 1986, p. 32), além de titular o livro didático como indispensável fonte de informação. Moraes (2001) corrobora desse pensamento ao afirmar que:

> Em resumo, o paradigma tradicional baseava-se no conhecimento “objetivo” obtido pela experimentação e na observação controlada, buscando o critério de verdade na experimentação (sensação) e na lógica matemática (razão). Esta visão deu origem a duas correntes filosóficas importantes: o racionalismo e o empirismo. Foi o período do primado da razão, onde a essência do ser estava na deusa razão e através da racionalidade atingia-se a verdade e solucionavam-se os problemas. Acreditava-se que todo pensamento lógico era verdadeiro.

A autora aponta que toda a verdade, segundo a óptica deste paradigma, existia fora do sujeito. Os sentidos e os órgãos captariam esse conhecimento exterior em uma espécie de mundo *pentasensorial*, delimitado pelo uso dos cinco sentidos. Falamos de um conhecimento que poderia ser cheirado, apalpado, degustado, ouvido, examinado e a partir do qual se podia manipular e controlar as coisas. Moraes (2001) continua seu pensamento sobre esse paradigma registrando:

> De acordo com esse modelo, dividir era necessário e o pensamento caminhava do mais simples ao mais complexo. Mente e matéria eram duas coisas fundamentalmente distintas e separadas, sendo a primeira mais importante do que a segunda. O mundo era concebido como uma máquina perfeita que poderia ser descrita objetivamente independente do observador humano. O progresso era linear, irreversível e unidirecional, fundado na ordem natural, política e social. É toda uma visão de mundo fundamentada na ciência da ordem, no mecanicismo, na separatividade e no determinismo. Conseqüentemente, o papel do sujeito era muito insignificante, os modelos eram muito autoritários, os indivíduos estavam separados uns dos outros, o aluno como um sujeito obediente e pouco atuante.

Sobre um olhar matemático, compreender expressões geométricas e saber ler as imagens de onde essas expressões podem ser deduzidas no livro didático de matemática representa uma prática cotidiana para professores e alunos. Como afirma Silva Júnior (2005) “Observamos que o Livro Didático de matemática é para o professor algo mais que um simples material de uso no ensino-aprendizagem. Ele é um objeto de apoio didático que os professores, em sua grande maioria, utilizam para estruturar e ministrar as suas aulas.” O fato do livro adotado partir de uma escolha de entidades e de pessoas envolvidas com a educação e que aferem diretamente a prática do professor, nos faz questionar o porquê da opção por livros que buscam as novas tendências e a quebra desse paradigma tradicional.

Como afirma Pitombeira & Figueiredo (apud MORAES 2001) “professores de matemática preconizam os livros que utilizam variedade de linguagens ou formas de expressão – textos corridos ou diálogos em língua materna, quadrinhos gráficos, diagramas, ilustrações, etc. em busca de os tornarem atraentes."

Percebe-se, como aponta Moraes (2001), que a problemática maior estava na forma de apropriação do livro didático pela escola, nos modelos pedagógicos utilizados e que, apesar de haver exploração de imagens e uma provocativa maior ao diálogo com o leitor, continuam perpetuando o velho ensino, *otimizando o péssimo*, a partir de uma nova versão tecnológica visualmente mais bonita e agradável, mas política e pedagogicamente vazia.

A autora ainda aponta que o fato de haver uma integração de imagens, textos e mesmo a interligação de informações em seqüências não-lineares, como ocorre na produção de ferramentas de multimídia e hipermídia, não garantem a boa qualidade pedagógica. Programas e projetos visualmente agradáveis, bonitos e até criativos, podem continuar representando o paradigma instrucionista, ao colocar no recurso tecnológico uma série de informações a ser repassada ao aluno, sendo este concebido como uma *tabula rasa* que tudo absorve. E assim, continuamos preservando e expandindo a velha forma com que fomos educados, sem refletir sobre o significado de uma nova prática pedagógica utilizando esses novos instrumentos.

Contudo, existe muito ainda para se pensar nesse contexto se levarmos em conta que o livro didático é o instrumento de leitura mais importante para o ensino. Vários aspectos precisam de aprofundamento por parte dos autores dos livros didáticos de matemática.

Conclui-se, após essa pesquisa, que não há uma metodologia definida de interpretação ou leitura das imagens geométricas no livro didático *Matemática* de Dante (2007), atualmente o mais adotado nas escolas de Campina Grande, na Paraíba. E ainda há pouca exploração entre estabelecer uma relação da imagem com o texto-verbal enunciado, conforme foi mapeado nesta pesquisa. Percebe-se que as formas de apreender as imagens nos capítulos referentes à Geometria da coleção *Matemática* analisada são insuficientes. Os exercícios mecanizados, as figuras que só podem ser exploradas visualmente através da apreensão perceptiva utilizada com tanta ênfase nesta obra, nos margeia à conclusão de que há uma prioridade de memorização de fórmulas e aplicações e não há incentivo do leitor à reflexão do *pensar geométrico*. É a *Tabuada do século XXI* com outra roupagem. E o professor conservador, que baliza sua proposta de lecionar no livro didático, também encontra na avaliação de modo tradicional, praticidade e facilidade, pois apenas executa uma tarefa de transmitir conhecimento e cobrar esse conhecimento sistêmico de maneira objetiva, exigindo apenas a memorização de saberes.

Moraes (2001) critica esse tipo de pedagogia, a da transmissão e mecanização quando afirma:

> Uma ciência do passado produz uma escola morta, dissociada da realidade, do mundo e da vida. Uma educação sem vida produz seres incompetentes, incapazes de pensar, de construir e reconstruir conhecimento. Uma escola morta, voltada para uma educação do passado, produz indivíduos incapazes de se auto-conhecerem como fonte criadora e gestora de sua própria vida, como indivíduos autores de sua própria história e responsáveis pela sua trajetória de vida.

Essa *Tabuada do século XXI* ou *Ciência do passado* caracteriza-se por um cientificismo cartesiano. Quando se faz um recorte da história da educação e se entende suas raízes em termos de teoria, as *pedagogias tradicionais* (conhecidas como: escola-novista, tecnicista e tradicional), trazem consigo propostas de educação bastante parecidas quando priorizam uma racionalidade distante de um pensamento reflexivo.

São pedagogias conhecidas como *pedagogias da resposta*, ou seja, aquelas que o aluno repete e decora as respostas, uma vez que estas são universais e absolutas.

Para execução das propostas que essas pedagogias sugerem, a metodologia empregada consiste em as aulas expositivas, focadas na repetição de conceitos e fórmulas fundamentadas no: *Escute, leia, decore e repita*. A avaliação prioriza a reprodução e repetição dos conteúdos (BEHRENS, 2000, p. 43).

Essa educação tradicional chegou ao Brasil com os a hegemonia dos jesuítas (1549-1759), e foi posteriormente continuada pelo plano do tradicionalismo laico (1759-1930), futuramente passada para a Escola-nova.

Os processos de aprendizagem nos livros didáticos possuem muitas semelhanças com as pedagogias descritas. Os exercícios de fixação no final de cada capítulo geométrico mapeado da 8ª série e do 3º ano apontam para o uso de imagens, sendo exploradas unicamente como extensão do enunciado em dados para serem jogados diretamente nas fórmulas.

Silva Júnior (2005) destaca que

> o professor de matemática faz uso constante do livro didático em seus estudos, sendo muitas vezes o único apoio para suprir suas deficiências de formação, constituindo-se em algo mais que uma simples ferramenta didática em sua utilização diária, e por isto, vislumbra o contexto de que ele não se direciona ao aluno e sim ao professor, pois é ele quem o indica e escolhe para adoção.

Moraes (2001) Acredita que as coisas não mudam na educação, principalmente, pelas dificuldades enfrentadas por todos aqueles e aquelas que nela exercem as suas atividades profissionais, ao tentarem se adaptar a uma nova cultura de trabalho que, por sua vez, requer, mais do que nunca, uma profunda revisão na maneira de ensinar e de aprender. Embora quase todos percebam que o mundo ao redor está se transformando de forma bastante acelerada, entretanto, a grande maioria dos professores ainda continua privilegiando a velha maneira com que foram ensinados, reforçando o velho ensino, afastando o aprendiz do seu próprio processo de construção do conhecimento, conservando, assim, um modelo de sociedade que produz seres incompetentes, incapazes de criar, pensar, construir e reconstruir conhecimento.

Pensamos que essa dificuldade apontada por Moraes (2001) é uma das responsáveis de observarmos ainda, com freqüência, enunciados na matemática, como: c*alcule a área e o perímetro dos triângulos abaixo*; e em seguida um rol de figuras geométricas com valores numéricos de base e altura.

Essa negligência, dado o valor que a exploração da imagem possui no ensino de Geometria, pode ser uma das responsáveis pelo livro didático oferecer ao leitor apenas uma síntese do que na verdade é o real conhecimento. Portanto, passa-se a minimizar excessos de informações, origens e outras aplicações das fórmulas de Geometria. Trabalha-se apenas as fórmulas que podem ser exploradas sucessivamente em resoluções de problemas, cujos dados da questão lhe são aplicados diretamente, sem uma reflexão geométrica, apenas uma mecanização de passos priorizando, dessa forma, um ato memorístico e, fatalmente, gerando uma informação geométrica desvinculada da realidade.

Sobre esse tipo de abordagem geométrica, pode-se refletir sobre o que dizem os PCN (1999, p.18):

> Tínhamos um ensino descontextualizado, compartimentalizado e baseado no acúmulo de informações. Ao contrário disso, buscamos dar significado ao conhecimento escolar, mediante a contextualização; evitar a compartimentalização, mediante a interdisciplinaridade; e incentivar o raciocínio e a capacidade de aprender.

Entretanto, existem ainda algumas aplicações da leitura em proximidade da estética e do casamento entre a leitura do texto literário com a imaginação heurística do aluno leitor da obra em tela d 9º ano. No que se refere ao *Teorema de Pitágoras*, por exemplo, o autor demonstra preocupação em ilustrar a dedução da fórmula de várias maneiras distintas, ou seja, o leitor é motivado a interpretar a imagem bem como incentivado a pensar heuristicamente na verdade do reagrupamento figural da imagem. Tudo isso a fim de constatar a veracidade da fórmula nas situações distintas que o autor aponta. No entanto, Dante (2007) não explora bem aplicações de exercícios onde apenas o uso da fórmula é necessário para a obtenção da resposta esperada.

Então, questiona-se: o que impede aos alunos de conseguirem pensar geometricamente, visto que os conteúdos abordados no programa são cientificamente válidos e, muitas vezes, apresentados de modo satisfatório?

Analisando-se casos concretos da vida cotidiana, chega-se à conclusão de as razões da falta de sucesso escolar generalizada justificam-se com a deficiência metódica e pedagógica, presente desde o ensino infantil, quando trabalha-se apenas a memorização do assunto e não sua compreensão da generalização que leva a memorização.

Então voltamos a bater na tecla de que há uma inabilidade do sistema atual, mesmo no eixo de uma visão voltada para a *quebra de paradigmas*, de proporcionar uma formação ao leitor do livro didático de matemática, o *pensar matemático*, ou ainda, *o pensar geométrico*, quando este aborda exercícios de Geometria. Observe as palavras de Moraes (2001):

> A escola atual continua influenciada pelo velho paradigma, submetida a um sistema paternalista, hierárquico, autoritário e dogmático, não percebendo as mudanças ao seu redor e, na maioria dos casos, resistindo a elas. Continuamos dividindo o conhecimento em assuntos, especialidades, sub-especialidades, transformando o todo em partes, separando o corpo em cabeça, tronco e membros, as flores em pétalas, a história em fatos isolados, sem nos preocuparmos com integração, interação, continuidade e síntese.

Os exames de qualificação (vestibulares, concursos, exames nacionais) ajudam a contribuir para que os livros didáticos adotem essa postura, visto que está envolto na nossa cultura uma formação que prepare o estudante para passar nesses exames. Moraes (2001) corrobora esse pensamento ao afirmar:

> Sob esse ponto de vista paradigmático, a avaliação é classificatória e seletiva e as provas assumem um papel central determinando o comportamento do aluno, privilegiando a memória e a capacidade de expressar o que foi acumulado. O diploma é visto como um princípio organizador importante, símbolo do coroamento e da consagração de todo um ciclo de estudos. O conhecimento

> possui uma natureza estática, podendo ser representado por um pergaminho pendurado na parede simbolizando o seu ponto de chegada, o "final da linha".

Essa é uma semelhança que os livros didáticos adotam na resolução de questões com uso de imagens geométricas. Sabe-se que os conteúdos de matemática e Geometria são interiorizados de modos diferentes de aluno para aluno. Como, por exemplo, aqueles que possuem habilidades para aprender mais rapidamente cálculos e raciocínio lógico e aqueles que possuem mais facilidade de interpretação de problemas e fenômenos abstratos. Da mesma forma, aqueles que conseguem enxergar as situações diárias e abstraem suas respostas vinculadas as leituras realizadas do livro didático e da prática do professor em sala de aula. Mas a cultura de se valorizar o produto final (resposta correta) sem importar os meios (processo de incorporação do conhecimento) infere ao aluno o sentimento de inutilidade da disciplina após os exames de qualificação, onde o que supostamente fora aprendido será abandonado após a obtenção da sua nota. Percebem-se as semelhanças dessas ações com a escola tecnicista, como aponta Libâneo (1985) ao dizer que “no tecnicismo acredita-se que a realidade contém em si suas próprias leis, bastando aplica-las. Dessa forma, o essencial não é o conteúdo da realidade, mas as técnicas (forma) de descoberta e aplicação.”

É este o pensamento que engendra no aluno o sentimento de perda de tempo, onde raciocinar matematicamente em quase nada lhe acrescenta no cotidiano, sendo explorados apenas nas qualificações, acirrando o preceito de que se chegar à resposta é sobressair-se ao conhecimento propriamente em si. Ninguém quer perder tempo em ações onde as aplicabilidades não sejam evidentes, justificando-se, portanto, que para o aluno aquele conhecimento transmitido sem utilidade prática seja descartado no momento apropriado, ou irá parar em uma espécie de *arquivo-mental morto e desnecessário*. Libâneo (1986) afirma que:

> No tecnicismo, o aluno é um recipiente da informação, condicionado e não possui espírito reflexivo e crítico, ele simplesmente recebe, aprende e fixa em sua memória as informações. Essa abordagem utiliza muito a psicologia comportamentalista, baseada em testes de estímulo e resposta, que têm por finalidade modificar o comportamento dos indivíduos.

Muitos foram os autores que contribuíram com idéias e sugestões que visavam um ato menos memorístico na educação geral e apontavam para um ato mais reflexivo e crítico. Libâneo (1985, p. 28) já pensava como Freire (1996) quando afirmou que substituir o ato de raciocínio pelo ato memorístico, é inevitavelmente mudar de profissão, de educador para adestrador. Aceitar essa perspectiva é excluir, limitar e empobrecer a arte de se educar. Atualmente, pensa-se que é suficiente partir da aplicação de mecanismos técnicos e por meio de repetições incessantes, tornar o aluno capaz e consciente de suas atribuições e atitudes. Em um sistema social harmônico, funcional e orgânico, a instituição escolar passa a funcionar como uma modeladora do comportamento do homem por meio de técnicas específicas. Logo, a educação escolar passa a organizar um processo de aquisição de atitudes, habilidades e informações específicas úteis e necessárias para que os alunos se integrem na maquinaria de um sistema social implantado globalmente.

Formam-se, portanto, *adestrados* que se comportam da mesma maneira, obedecem os mesmos rituais que lhes fora transmitidos. Seu dever não é mais exercitar o raciocínio e sim reproduzir a seqüência de passos diante de um problema, visando o produto final, ou seja, a resposta. A subjetividade da educação em relação aos sujeitos é eliminada diante da idéia do conhecimento observável e mensurável. Portanto, não raro, observamos um tratamento tornar-se técnico, sistematizado e organizado em apostilas ou manuais aplicados para obter respostas objetivas, rápidas e concretas as finalidades desejadas. Para tanto Moraes (2001) sugere uma saída para isso, afirmando:

> Em vez de enfatizar conteúdos, resultados, quantidade de noções, informações e conceitos a serem memorizados, repetidos e copiados, reconhecemos a importância do processo, de uma metodologia voltada para a melhoria da qualidade do processo de aprendizagem, que valoriza a metodologia de pesquisa e os trabalhos em grupo. Estas novas pautas implicam programas, horários e currículos mais flexíveis e adaptáveis às condições dos alunos, o respeito ao ritmo individual e grupal de trabalho, bem como ao tempo necessário para que ocorram os processos de assimilação e de acomodação no sujeito aprendiz.

Morin (2006) soma as falas de Moraes (2001) quando aponta que é necessário também ensinamos as condições de um *conhecimento pertinente*, isto é, de um conhecimento que não mutila o seu objeto. Porque nós seguimos em primeiro lugar, um mundo formado pelo ensino disciplinar e é evidente que as disciplinas de toda ordem que ajudaram o avanço do conhecimento são insubstituíveis, o que existe entre as disciplinas é invisível e as conexões entre elas também são invisíveis, isto não significa que seja necessário conhecer somente uma parte da realidade, é preciso ter uma visão que possa situar o conjunto. É necessário dizer que não é a quantidade de informações, nem a sofisticação em matemática que podem dar sozinhas um conhecimento pertinente, é mais a capacidade de colocar o conhecimento no contexto.

Se estamos falando em alunos e leitores capazes de enxergar o contexto e a importância de pensar geometricamente, então estamos atribuindo a esses sujeitos o adjetivo que comporta a um ser *competente*, ou seja, capaz de atingir resultados esperados, de desenvolver um pensamento crítico e independente, de se tornar um ser criativo, ativo e útil socialmente.

Pensa-se que uma pessoa é competente, educativamente falando, quando esta atinge resultados esperados e faz o que se espera dela. O *competente compete,* é *competitivo*. Apesar destas palavras pertencerem ao mesmo grupo, não se pode avaliar a competência educativa de uma pessoa apenas pelos resultados que esta produziu. Mas deve-se levar em consideração duas variáveis: aplicabilidade do conhecimento escolar no dia-a-dia e o poder de criação e reflexão para constante atualização de conhecimentos.

Logo, competência e aprendizado contínuo passam a andar juntos, criando-se assim mais um paradigma. Competência é um paradigma, visto a importância que possui como desenvolvimento e atualização. Formar seres competentes tornou-se objetivo de planejamentos pedagógicos, roteiro de exposição de conteúdos, planos de educação, organizações de ensino e até de países. Como pensa Werneck (2002, p.35):

> A grande diferença na educação se faz à medida que se revelam não apenas grandes, mas, o maior número possível de cidadãos pensantes, críticos e inventivos. A escola criativa permitirá aos seus alunos imaginar, porque quem imagina, cria. Na maioria das vezes costuma-se banir das salas de aula a imaginação como se fosse uma perda de tempo, no entanto, quem não imagina não cria e não sobreviverá diante do futuro incerto. A escola que permite falar estará preparando o aluno para o futuro porque, hoje, as melhores carreiras estão entregues aos que falam. Calar a boca é um processo dentro das escolas que cheira a um insuportável mofo pedagógico.

Portanto, pensa-se que a escola possui, como objetivo primário, o papel de ensinar. Não apenas ensinar, como também possui a função de habilitar o aluno a manobrar os instrumentos essenciais à sua vida política, profissional e social.

Logo, é relevante que se priorize uma aquisição de conhecimentos na área da matemática que revele poder de síntese, lógica e argumentação. Uma das maneiras mais viáveis para tornar concreta tais competências é buscar um desenvolvimento de ações que incentive a utilização de fatores intrínsecos ao aluno. Para o ensino de geometria, seria interessante pensar sobre uma exploração mais profunda da imagem. Utilizando-a além dos recursos de embelezamento do livro e além de suas habilidades memorísticas, mas pensar nelas como elemento cognoscível, transmissora de informação e de grande poder de abstração de deduções matemáticas, fórmulas geométricas e teoremas. Preparar o aluno para ler essas imagens e extrair delas esse tipo de informação nada mais é que confirmar a validade de informações adquiridas. Quando da sua reorganização (caso seja necessário), lhes servirá como eixo do *pensar geométrico* e na construção de um conhecimento matemático concreto. Assim como pensa Esclarín (2002, p.15)

> É importante ressaltar que, entre a opção de desenvolver alguma atividade que possivelmente ou não enriqueça mesmo que de maneira simplória as aulas, a nada fazer, é predileta a primeira opção, pois é preferível dar mais um passo para o crescimento profissional, a viver preso no "seguro comodismo" e condenar-se ao mundo estático dos infrutíferos. Desse modo, faz-se necessário avançar, ao invés de continuar lamentando as dificuldades inerentes à profissão. 'Outros falam da necessidade de buscar novos caminhos, de que as velhas rotas já não servem, mas permanecem instalados em suas seguranças, falando do caminho em lugar de começar a percorre-lo'.

A ideal educação não é a que treina e doutrina de modo eficiente o aluno, mas a que melhor contribui para formação específica e geral do estudante.

O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) é quem faz a distribuição gratuita dos livros didáticos atuais. Torna-se assim, indiscutível o valor eficaz do uso do livro didático em sala de aula quando este facilita o planejamento do professor, auxiliando-o a elaborar aulas com mais rapidez. Facilita o processo de cópia, visto que como os conteúdos abordados estão nos livros, o estudante não precisa copiar todas informações do quadro-negro, o que possibilita maiores oportunidades para discussões. O que nos leva a pensar que se passa a ser tarefa do professor fazer a mediação entre processos equacionais e a leitura da imagem para justificar as verdades matemáticas. Mas o professor por si só não conseguirá despertar através da mediação uma racionalização das leituras das imagens resultando o *pensar geométrico* se não há universos para se praticar o *raciocínio da geometria*, nem nas questões propostas pelo livro didático, nem pelos exames de qualificação.

Moraes (2001) destaca a importância de se perceber que *a missão da escola mudou,* que em vez de atender a uma massa amorfa de alunos, despersonalizados, é preciso *focalizar o indivíduo,* aquele sujeito original, singular, diferente e único; dotado *de inteligências múltiplas,* que possui diferentes estilos de aprendizagem e, conseqüentemente, diferentes habilidades para resolver problemas. Mas um *sujeito coletivo,* inserido numa *ecologia cognitiva* da qual fazem parte outros humanos, cujo pensamento é também influenciado pelas pessoas integrantes do ambiente, a partir de uma relação contínua existente entre o pensamento e o ambiente em geral, dois aspectos inseparáveis de um único processo, cuja análise em partes distintas já não faz mais sentido.

Moraes (2001) ainda reconhece a importância de se focalizar e valorizar mais o *processo de aprendizagem* do que a instrução e transmissão de conteúdos, lembrando que hoje é mais relevante o *como* você sabe do que *o que* e o *quanto* você sabe. É necessário levar o indivíduo *a aprender a aprender,* traduzido pela capacidade de refletir, analisar e tomar consciência do que sabe, dispor-se a mudar os próprios conceitos, buscar novas informações, substituir velhas *verdades* por teorias transitórias, adquirir os novos conhecimentos que vêm sendo requeridos pelas alterações existentes no mundo, resultantes da rápida evolução das tecnologias da informação.

Lorenzato (1995) mostra que ainda falta isso no atual ensino de Geometria, quando afirma que o ensino da geometria, se comparado com o ensino de outras partes da matemática, tem sido o mais desvairador. Alunos, professores, autores de livros didáticos, educadores e pesquisadores, de tempos em tempos, tem se deparado com modismos fortemente radicalizantes, desde o formalismo impregnado de demonstrações apoiadas no raciocínio lógico co-dedutivo, passando pela algebrização e indo até o empirismo inoperante. Concordamos com Almouloud (2004) quando este afirma:

> Alguns livros didáticos também contribuem para a origem de vários problemas, pois as situações de ensino apresentadas neles e que são propostas para os alunos, de maneira geral, pela maioria dos professores, não enfatizam suficientemente a coordenação de registros de representação semiótica e a importância da figura para a visualização e exploração. Os problemas geométricos propostos por esses

> livros privilegiam resoluções algébricas, e poucos exigem raciocínio dedutivo ou demonstração. E ainda, quase não existe a passagem da geometria empírica para a geometria dedutiva, além de poucos trabalhos focarem a leitura e a interpretação de textos matemáticos. Essas abordagens criam no aluno concepções inadequadas no que diz respeito ao aprimoramento dos conceitos geométricos.

Lorenzato (1995) completementa nosso raciocínio sobre essa temática quando afirma que em muitos livros didáticos, a Geometria ainda é apresentada apenas como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, desligado de quaisquer aplicações ou explicações de natureza histórica ou lógica; noutros, a Geometria é reduzida a meia dúzia de formas banais do mundo físico. Como se isso não bastasse, ela quase sempre é apresentada na ultima parte do livro, aumentando a probabilidade dela não vir a ser estudada por falta de tempo letivo. Assim, apresentada aridamente, desligada da realidade, não integrada com as outras disciplinas do currículo e até mesmo não integrada com as outras partes da própria matemática, a geometria, a mais bela página do livro dos saberes matemáticos, tem recebido efetiva contribuição por parte dos livros didáticos para que ela seja realmente preterida na sala de aula.

Moraes (2001) ainda afirma que não se deve mais adotar essa metodologia que valoriza a cópia da cópia voltada para a dependência intelectual do aluno em relação ao professor, devemos adotar uma nova construção que desenvolva a autonomia intelectual do ser *aprendente*, que deixe o aluno propor os seus próprios projetos e os problemas que deseja resolver, de acordo com os seus interesses. Baseia-se, portanto, na investigação, na solução do problema, onde este passa a ser um mecanismo auto-regulador do processo de pesquisa. É uma metodologia que leva o indivíduo a aprender a aprender, a aprender a pensar, utilizando-se técnicas adequadas que permitem o estudo de alternativas e tomadas de decisão. Isto significa preparar o indivíduo para aprender a investigar, trabalhar em grupo, dominar diferentes formas de acesso às informações, desenvolver capacidade crítica de avaliar, reunir e organizar informações mais relevantes. É uma metodologia que permite a apropriação do conhecimento e seu manejo criativo e crítico.

Na matemática e na Geometria são diversos e incontáveis os caminhos que levam à deduções, por trabalhar-se visualmente uma figura. Mesmo o livro didático trazendo todos os benefícios da facilidade de trabalho que fornece ao educador, ainda precisa-se repensar, como as propostas de leituras de imagens são abordadas. Ou seja, como se processa a relação entre essas imagens e as expressões matemáticas ou geométricas que se objetiva incorporar ao pensamento dedutivo do leitor. Sugerimos assim como Moraes (2001):

> Estamos propondo abandonar uma abordagem pedagógica tradicional que enfatiza a transmissão, a linguagem, a cópia da cópia, onde conteúdos e informações são passados diretamente do professor para o aluno, mediante um processo reprodutivo, para criar uma nova situação educacional que enfatize a construção realizada pelo indivíduo através de uma pedagogia ativa, criativa, dinâmica, encorajadora, apoiada na descoberta, na investigação e no diálogo.

É pelas funções cognoscíveis que a imagem oferece a uma melhor compreensão da Geometria que assim apontamos para a urgência da educação em passar a preocupar-se com a leitura imagética diversa nos livros didáticos de matemática, praticando a heurística para se tirar verdades matemáticas ao invés de ceder à fórmula e pedir-lhe uma aplicação.

Ressaltamos de acordo com Moraes (2001), como um dos itens integrantes dessa nova agenda, *uma educação centrada no sujeito coletivo*. Deve-se reconhecer a existência de processos coletivos de construção do saber e sua relevância de se criar *ambientes de aprendizagens* que favoreçam o desenvolvimento do *conhecimento interdisciplinar,* da *intuição e da criatividade*. Tudo isso para que possamos receber o legado natural de criatividade que existe no mundo. Oferecer-se-á a nossa parcela de contribuição para a perpetuação das práticas sociais.

Esse exercício apresentará resultados satisfatórios não apenas no conhecimento geométrico, mas despertará o *raciocínio geométrico* e *matemático* bem como será capaz de dar uma visão mais crítica de mundo. Visto que ao passar do tempo e da experiência, o leitor de imagens tenderá a ampliar sua formação e seu exercício de leitura imagética. Logo, as imagens podem facilitar o aprendizado.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S.A. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de educação.** Set/Out/Nov/Dez. n 27. 2004

___. **Fundamentos da didática da matemática e metodologia de pesquisa**. São Paulo, 1997. (Caderno de Educação Matemática PUC/SP).

____. Registros de Representação Semiótica e Compreensão de Conceitos Geométricos. In: MACHADO, S.D.A. (org.). **Aprendizagem em Matemática –** Registros de Representação Semiótica. Campinas: Papirus, 2003.

____. Outil informatique de révélation du rôle de la figure et d'apprentissage de la démonstration au collège. **REPÈRES-IREM**. n. 9, 1992.

ALEKSANDROV, A. D., et al. Vision general de la matemática**.** In: **La Matemática: Su contenido, métodos y significado.** v. 1. Madrid: Alianza Universidad, 1985.

BACON, E. **Designing of cities**, London: Architectural Press, 1967. p. 48-49.

BEHRENS, M. A. **Formação continuada e a prática pedagógica**. Curitiba: Champagnat, 1996.

BISHOP, A. Space and Geometry. In: LESH, R & LANDAU, M. (ed.) **Acquisition of mathematics concepts and processes**. New York: Academic Press. 1983

BRANDÃO, C. R. **Pesquisa Participante**. 1.ed. São Paulo: Editora Brasiliense, 1981.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: primeiro e segundo ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

___. ___. ___. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

___. ___. ___. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1999.

___. ___. ___. **Programa Nacional do Livro Didático:** histórico e perspectivas. Brasília: MEC/SEF, 2000.

BUORO, A.B. **Olhos que pintam:** a leitura da imagem e o ensino da arte. São Paulo: Cortez, 2002.

CANTORAL, R. La sensibilidad a la contradicción: Un estudio sobre la noción de logaritmode números negativos y el origen de la variable compleja. En C. R. CRESPO (ed.). **ActaLatinoamericana de Matemática Educativa**. V. 15. p. 35-42. México: Iberoamérica, 2002.

CALVINO, I. **Seis propostas para o próximo milênio:** lições americanas. Tradução Ivo Barroso. São Paulo: Companhia da Letras, 1990.

___. **Palomar.** São Paulo: Companhia das letras, 1994.

CHOPPIN, A**.** História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Revista Educação e Pesquisa.** v.30. n.3. p. 549-566. São Paulo. 2004

DAMAZIO, A. A prática docente do professor de matemática: marcas das concepções do livro didático. **Revista Eletrônica de Educação Matemática.** v. 2. p.14-25. Santa Catarina. 2006.

DANTE, L.R. **Matemática**. v. 4. 1. ed. São Paulo: Ática, 2007.

____. **Matemática**. v 3. 1. ed. São Paulo: Ática, 2007.

____. **Matemática**. v. 8. 1. ed. São Paulo: Ática, 2007.

DASSIE, B.A. ROCHA, J.L. Uma coleção revolucionária. Revista História e Educação matemática. Sociedade Brasileira de História da Matemática. Rio Claro, SP. v.2, n. 2, jun/dez 2001, jan/dez, 2002, jan/jun, 2003.

DUVAL, R. Registres de répresentation sémiotique et fonctionnement congnitif de la pensée. In: **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.** IREM de Strasbourg, v. 5 . 1997. p. 37-65.

____. Approche cognitive des problemes de geometrie en termes de congruence. In: **Annales de Didactique et de sciences cognitives.** IREM de Strasbourg, 1988.

____. Geometry from a congnitive point of view. In. **Perspectives on the teaching of Geometry for the 21st Century**, Na ICMI Study, MAMMANA, C & VILLANI, V. (Orgs). Londres: Kluwer, 1998.

____. Sémiosis et pensée humaine. Berne: Peter Lang, 1995.

ESCLARÍN, A. P. **Educar Valores e o Valor de Educar:** Parábolas. Tradução Maria Stela Gonçalves. São Paulo. Editora Paulus, 2002.

FAINGUELERNT, E. K. **Educação matemática:** representação e construção em geometria. Porto Alegre: Artmed, 1998. 227p.

FISCHBEIN, E. **The Theory of Figural Concepts -** Educacional studies in mathmatics, v. 2. n. 24. 1993.

FOUCAULT, M. A arqueologia do saber. 2000. 6 ed. Rio de Janeiro,Forense Universitária.

___. Linguagem e literatura. In: MACHADO, Roberto. Foucault, a filosofia e a literatura. 2001. 2 ed. Rio de Janeiro, Jorge Zahar.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia:** saberes necessários à prática educativa. 28 ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GRAVINA, M.A. **Geometria Dinâmica:** Uma Nova Abordagem para o Aprendizado da Geometria. In: VII SBIE – Simpósio Brasileiro de Informática na Educação. Belo Horizonte, 1996.

GIL**,** A.C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

HERSHKOWITZ, R. Psychological aspects of learning Geometry. In: NESHER, P., KILPATRICK, J. (coods). **Mathematics and Cognition (A research synthesis by the International Group for the PME**. ICMI Study Series. 1990.

HALLEWELL, L. O livro no Brasil. São Paulo: Edusp, 1985

HJELMSLEV, L. Lingüística Estrutural. In: **HJELMSLEV, L. Coleção de artigos. Ensaios Lingüísticos.** Tradução Antônio de Pádua. São Paulo: Perspectiva, 1948.

IMAGEM. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Imagem>. Acesso em: 05 jul 2007.

INAF-Indicador Nacional de Alfabetismo Funcional. Instituto Paulo Montenegro. Disponível em: <http://www.ipm.org.br/an_ind_inaf_2.php>. Acesso em: 13 out. 2007.

INEP- Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais. Informe de resultados do SAEB 1995, 1997 e 1999. Brasília: Ministério da Educação, 2002.

JAPIASSU, H.; MARCONDES, D. **Dicionário de Filosofia**. Rio de Janeiro: Zahhar, 1996.

KALEFF, A.M.M.R. **Vendo e entendendo poliedros**. Niterói: EdUFF, 1998.

LABORDE, C. Visual Phenomena in the Teaching/Learning of Geometry in a Computer-Based Environment**.** In: MAMMANA, C., VILLANI,V.(eds.).**Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century – An ICMI Study**. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic, 1998.

LIBÂNEO, J. C. **Democratização da Escola Pública:** A pedagogia crítico-social dos Conteúdos. São Paulo: Loyola, 1985.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **Revista À educação matemática em revista – SBEM.** n 14. 1995.

___. **Democratização da escola pública:** a pedagogia histórico-crítico-social dos conteúdos. São Paulo: Loyola, 1986.

MANGUEL, A. **Uma história da leitura**. Tradução Pedro Maia Soares. São Paulo: Companhia das Letras, 1997.

____ . **Lendo Imagens:** uma história de amor e ódio**.** Tradução Rubens Figueiredo, Rosaura Eichemberg e Cláudia Strauck. São Paulo: Companhia das Letras, 2001.

MARTINS, M.H. (org.). **Questões de linguagem**. 6. ed, São Paulo: Brasiliense, 1999. (Contexto, Coleção Repensando o ensino).

MARTINS, M. C. Aquecendo uma transforma-ação: atitudes e valores no ensino de arte. In. BARBOSA, A.M.T. (org.). **Inquietações e mudanças no ensino da arte**. São Paulo: Cortez, 2002.

MERLEAU-PONTY, M. O olho e o espírito. In. **Os pensadores. XLI.** Tradução e notas de Gerardo Dantas Barreto. São Paulo: Abril, 1975.

MIORIM, M.A.; et al. Ressonâncias e dissonâncias do movimento pendular entre álgebra e geometria mo currículo escolar brasileiro**. Revista Zetetiké**. Campinas: Unicamp. ano 1, n. 1.1993.

MIZUKAMI, M. G. N. **Ensino:** as abordagens do processo. São Paulo: EPU, 1986.

MORIN, E. **Os sete saberes necessários à educação do futuro.** São Paulo: Cortez, 2006.

MORAES, M. C. **O paradigma educacional emergente.** São Paulo: Papirus, 2001.

NACARATO, A.M. **Educação continuada sob a perspectiva da pesquisa-ação:** currículo em ação de um grupo de professoras ao aprender ensinando Geometria. 2000. Tese de Doutorado em Educação. Curso de Pós-Graduação Educação Matemática, Faculdade de Educação de Campinas. Campinas: Unicamp. 2000.

NEVES, E.R.C. **Uma trajetória pela história da atividade editorial brasileira:** livro didático de matemática, autores e editoras. 2005. Dissertação (Mestrado profissional em ensino da matemática). Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, 2005.

OLIVEIRA, J. B. A.; GUIMARÃES, S. D. P.; BOMÉNY, H. M. B. **A política do livro didático.** Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 1984.

PÁDUA, E. M. M. de. **Metodologia da pesquisa:** abordagem teóricoprática**.** 10. ed. Campinas: Papirus, 2004.

PAIS, L.C. Intuição, experiência e teoria geométrica. **Revista Zetetiké**. v. 4, n. 6. Campinas: Unicamp. 1996.

PAVANELLO, R. M. **Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental:** a pesquisa e a sala de aula. v. 2, São Paulo, 2004. (Coleção SBEM).

___. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências. **Revista Zeteteké.** a. 1. n 1. 1993.

PEIXOTO, N. B. **Ver o invisível –** a ética das imagens. São Paulo: Companhia das Letras, 1992.

PLANO NACIONAL DO LIVRO DIDÁTICO - PNLD 2000/2001: Ministério da Educação e Cultura - MEC, Brasília, 2000.

PLATÃO. **A República:** Livro VII - Comentários de Bernard Piettre. Tradução de Elza Moreira Marcelina. São Paulo: Ática, 1989.

QUEIROZ, J.A.M. de. **Modelos das relações sígnica na semiose segundo C.S. Peirce:** evidências empírico-teóricas. Tese de doutorado, PUC/SP. São Paulo, 2002.

RANGEL, E.O. **Para não arruinar talentos.** n. 23. São Paulo: Proleitura, 1998.

SILVA JUNIOR, C. G. da.. **Critérios de adoção e utilização do livro didático de matemática no ensino fundamental, e a participação do professor na adoção**: o caso do Agreste de Pernambuco. Dissertação de mestrado em Ensino das ciências. Recife. 2005

VALENTE, W. R. Controvérsias sobre educação matemática no Brasil: Malba Tahan versus Jacomo Stávale. **Cadernos de Pesquisa**. n. 120. p. 151-167. São Paulo. 2003

VAN HIELE, P. **Structure and Insight.** Orlando: Academic Press, 1986.

VIANA, O.A. **O conhecimento geométrico de alunos do Cefam sobre figuras espaciais:** um estudo das habilidades e dos níveis de conceito. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2000.

WERNECK, H. **A nota prende, a sabedoria liberta**. 3. ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2002.

ANEXO I

As imagens são apreendidas de formas diferentes, pois cada mente pode enxergar de uma figura propriedades diferentes, o que vai interferir na sua inclusão ou retirada de hipóteses sobre a figura avaliada. Entretanto, ao mapearmos as imagens do livro didático, da 4ª série, buscamos mapear com mais lógica possível, a interação do que o enunciado explora junto à figura. Então vemos que as imagens sugerem ter o tipo de classificação aqui descrito.

Na primeira página do capítulo 2 há uma única ilustração, que não possui características heurísticas ou está no quadro de categorização que Duval apresenta. Logo não iremos mapeá-la, pois sua função é apenas ilustrativa.

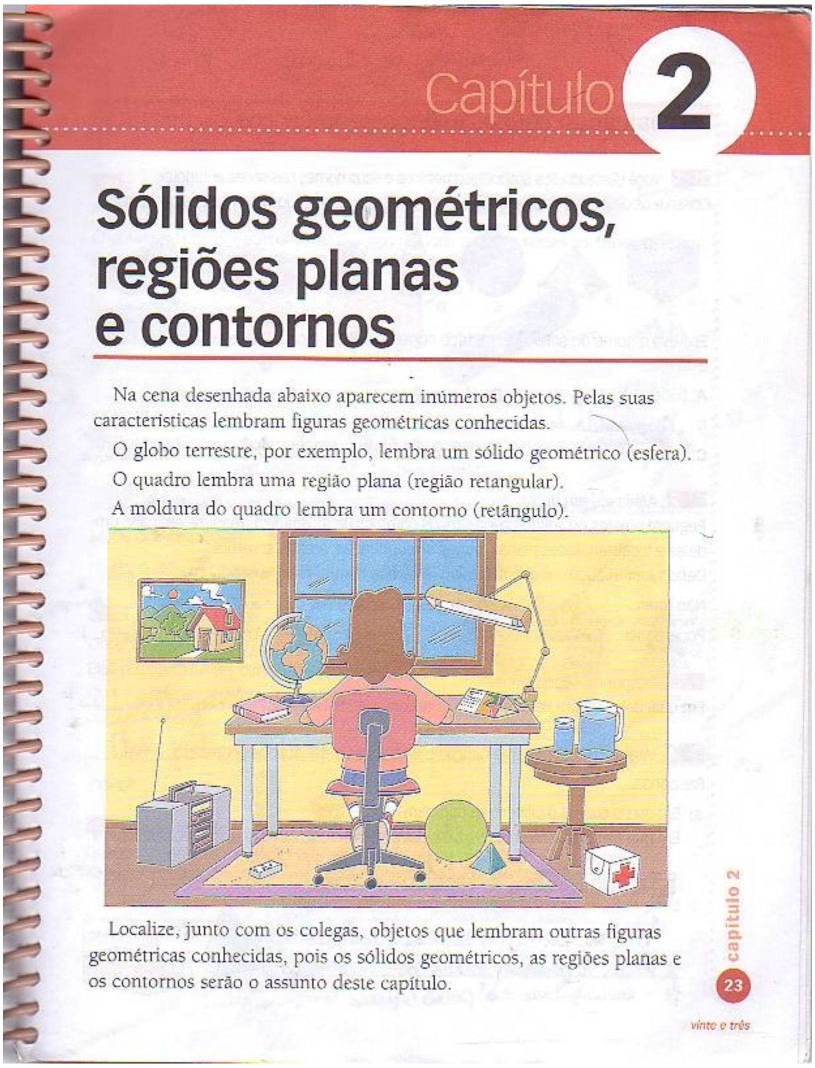


FIGURA 8 – Página inicial do capítulo *sólidos geométricos, regiões planas e contornos*.

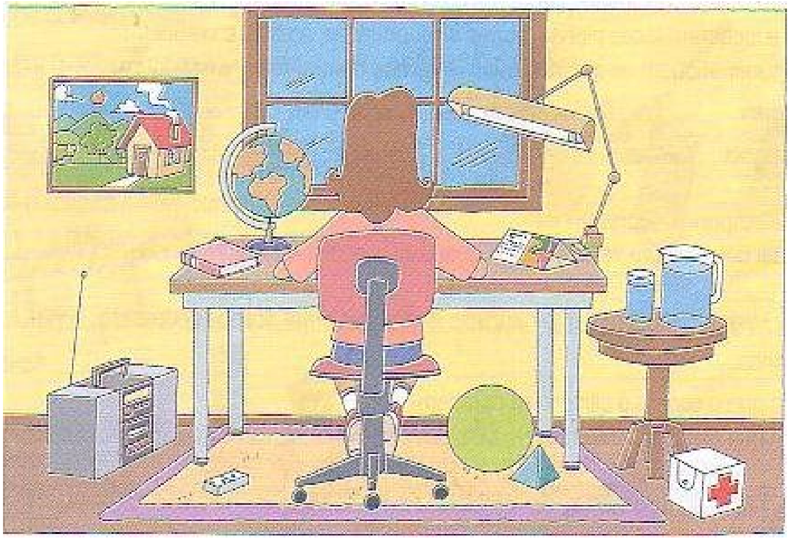
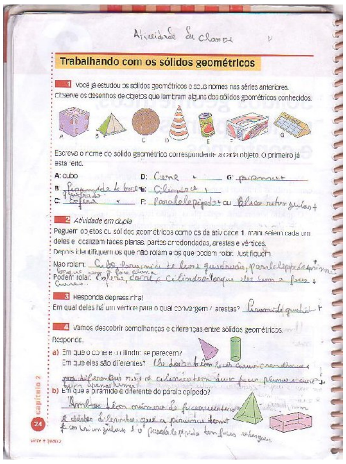


FIGURA 9 - Imagem ilustrando elementos que serão analisados no decorrer do capítulo.

Já na Página 24 existem 11 imagens:



Trabalhando com os sólidos geométricos

1 Você já estudou os sólidos geométricos e seus nomes nas séries anteriores.
Observe os desenhos de objetos que lembram alguns dos sólidos geométricos conhecidos.

A B C D E F G

Escreva o nome do sólido geométrico correspondente a cada objeto. O primeiro já está feito.

A: cubo
B:
C:
D:
E:
F:
G:

2 *Atividade em dupla*
Peguem objetos ou sólidos geométricos como os da atividade 1, manuseiem cada um deles e localizem faces planas, partes arredondadas, arestas e vértices.
Depois identifiquem os que não rolam e os que podem rolar. [illegible]
Não rolam:
Podem rolar:

3 Responda depressinha!
Em qual deles há um vértice para o qual convergem [illegible] arestas?

4 Vamos descobrir semelhanças e diferenças entre sólidos geométricos.
Responda.
a) Em que o cone e o cilindro se parecem?
Em que eles são diferentes?
b) Em que a pirâmide é diferente do paralelepípedo?

24 capítulo 2
vinte e quatro

FIGURA 10 – Página 24 da coleção *Matemática* da 4ª série.

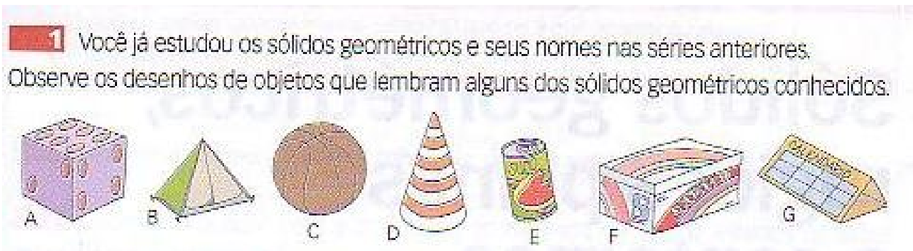
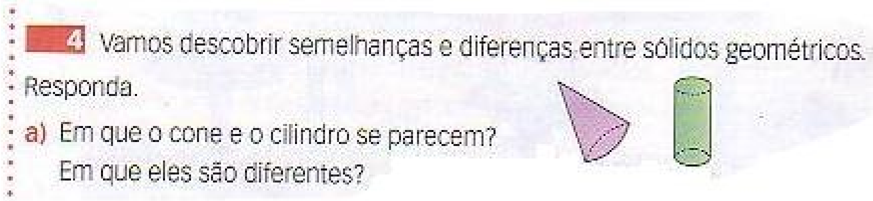


FIGURA 11 – Imagens que representam utensílios diários.

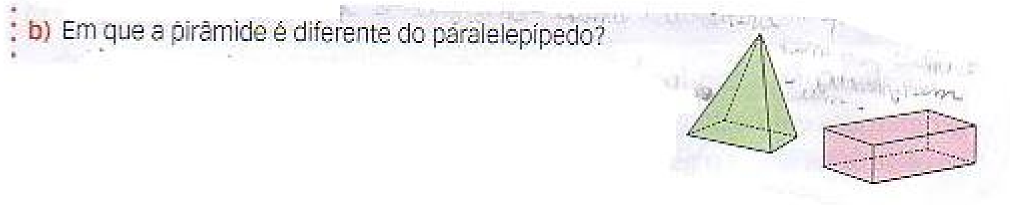
Processo de Visualização.
Imagens do tipo perceptiva.



4 Vamos descobrir semelhanças e diferenças entre sólidos geométricos.
Responda.
a) Em que o cone e o cilindro se parecem?
Em que eles são diferentes?

FIGURA 12 – Imagens geométricas tridimensionais.

Processo de Visualização e Raciocínio Geométrico
Imagens do tipo perceptiva.

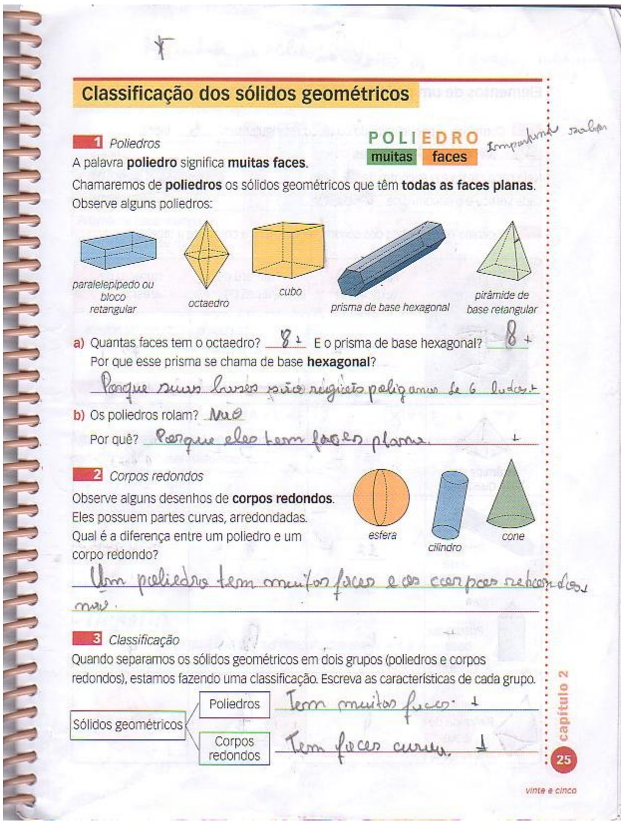


b) Em que a pirâmide é diferente do paralelepípedo?

FIGURA 13 – Imagens geométricas tridimensionais.

Processo de Visualização e Raciocínio Geométrico.
Imagens do tipo perceptiva.

Na página 25 existem 8 ilustrações:



Classificação dos sólidos geométricos

1 Poliedros

POLI EDRO
muitas faces

A palavra **poliedro** significa **muitas faces**.

Chamaremos de **poliedros** os sólidos geométricos que têm **todas as faces planas**.
Observe alguns poliedros:

paralelepípedo ou bloco retangular
octaedro
cubo
prisma de base hexagonal
pirâmide de base retangular

a) Quantas faces tem o octaedro? ___ E o prisma de base hexagonal? ___
Por que esse prisma se chama de base **hexagonal**?

b) Os poliedros rolam? ___
Por quê? ___

2 Corpos redondos

Observe alguns desenhos de **corpos redondos**.
Eles possuem partes curvas, arredondadas.
Qual é a diferença entre um poliedro e um corpo redondo?

esfera
cilindro
cone

3 Classificação

Quando separamos os sólidos geométricos em dois grupos (poliedros e corpos redondos), estamos fazendo uma classificação. Escreva as características de cada grupo.

Sólidos geométricos
Poliedros
Corpos redondos

capítulo 2
25
vinte e cinco

FIGURA 14 – Página 25 da coleção *Matemática* da 4ª série.

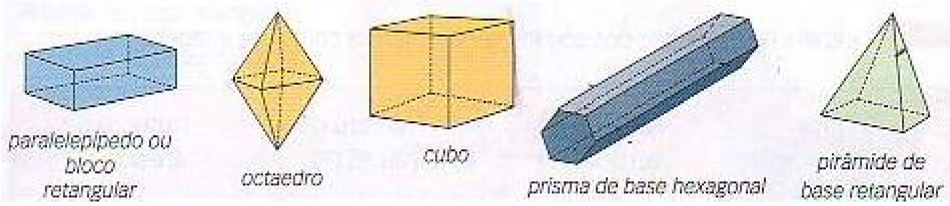


FIGURA 15 – Imagens geométricas tridimensionais.

Processo de Visualização
Imagens do tipo perceptiva.

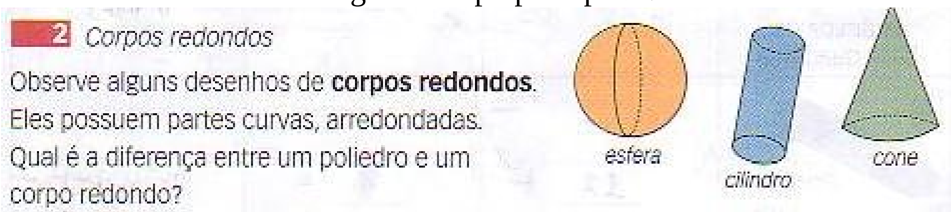
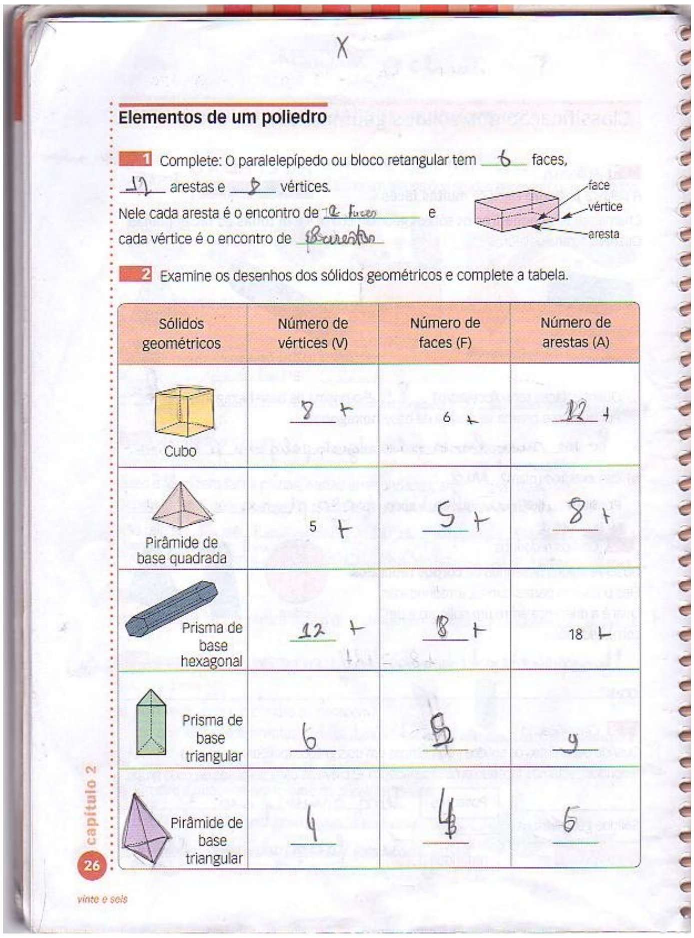


FIGURA 16 – Imagens geométricas tridimensionais.

Processo de Visualização e Raciocínio Geométrico.
Imagens do tipo perceptiva.

Na página 26, segue o mesmo tipo de classificação abordado nas páginas anteriores. São imagens perceptivas:


X

Elementos de um poliedro

1 Complete: O paralelepípedo ou bloco retangular tem 6 faces, 12 arestas e 8 vértices.
Nele cada aresta é o encontro de 2 faces e cada vértice é o encontro de 3 arestas

face
vértice
aresta

2 Examine os desenhos dos sólidos geométricos e complete a tabela.

Sólidos geométricos	Número de vértices (V)	Número de faces (F)	Número de arestas (A)
Cubo	8	6	12
Pirâmide de base quadrada	5	5	8
Prisma de base hexagonal	12	8	18
Prisma de base triangular	6	5	9
Pirâmide de base triangular	4	4	6

capítulo 2
26
vinte e seis

FIGURA 17 – Página 26 da coleção *Matemática* da 4ª série.

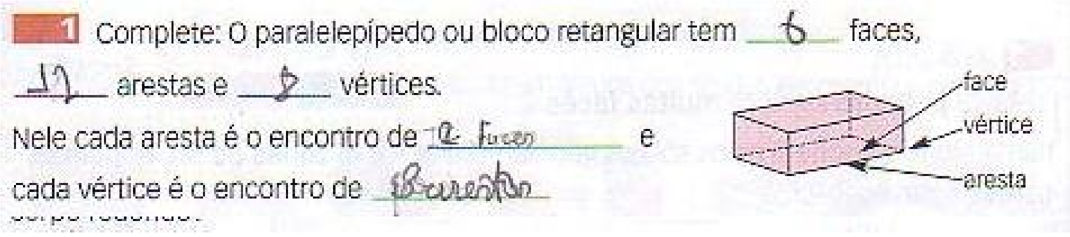


FIGURA 18 – Imagem que explora processo de contagem.

Processo de Visualização.
Imagens do tipo perceptiva.

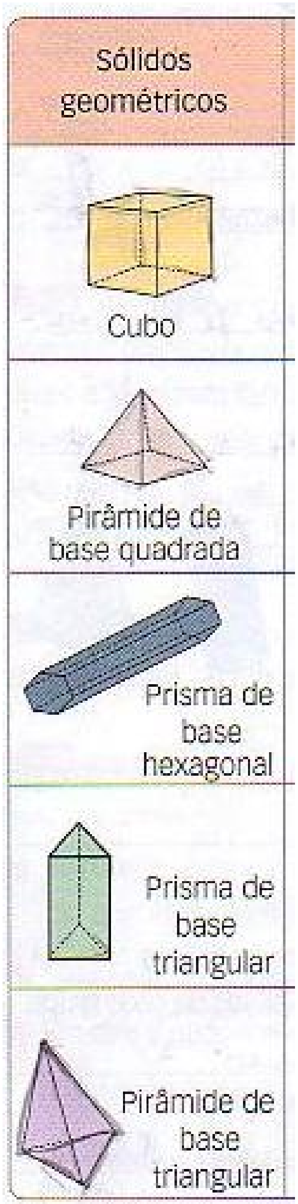


FIGURA 19 – Imagens geométricas em 3D.
Processo de Visualização.
Imagens do tipo perceptiva.

Na página 27 há 6 imagens:

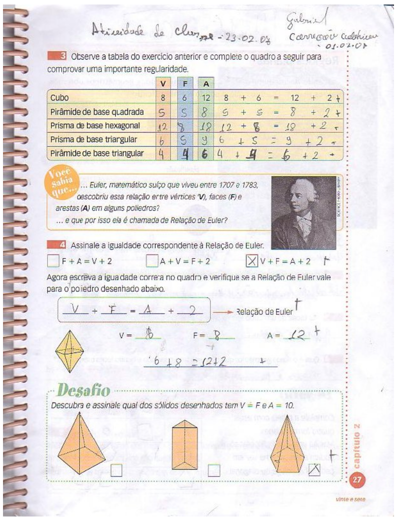
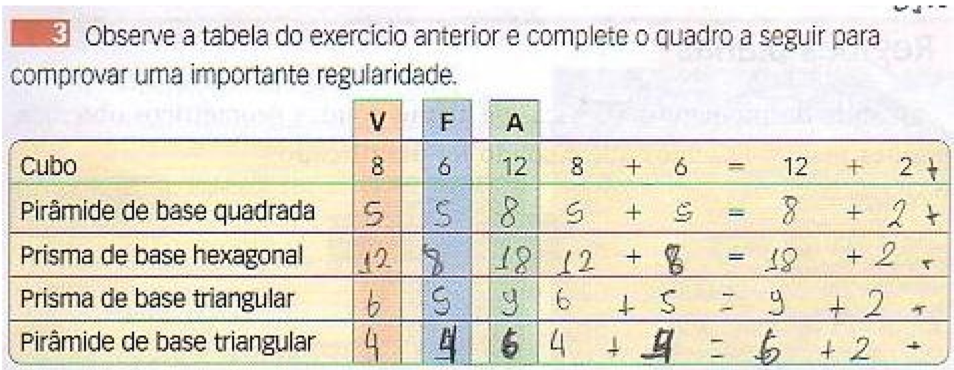


FIGURA 20 – Página 27 da coleção *Matemática* da 4ª série.



3 Observe a tabela do exercício anterior e complete o quadro a seguir para comprovar uma importante regularidade.

	V	F	A							
Cubo	8	6	12	8	+	6	=	12	+	2
Pirâmide de base quadrada	5	5	8	5	+	5	=	8	+	2
Prisma de base hexagonal	12	8	18	12	+	8	=	18	+	2
Prisma de base triangular	6	5	9	6	+	5	=	9	+	2
Pirâmide de base triangular	4	4	6	4	+	4	=	6	+	2

FIGURA 21 – Imagem que visa dar vestígios ao leitor de generalização de uma fórmula. *A Relação de Euller*.

Processo de Visualização e Construção.
Imagem do tipo perceptiva e discursiva.

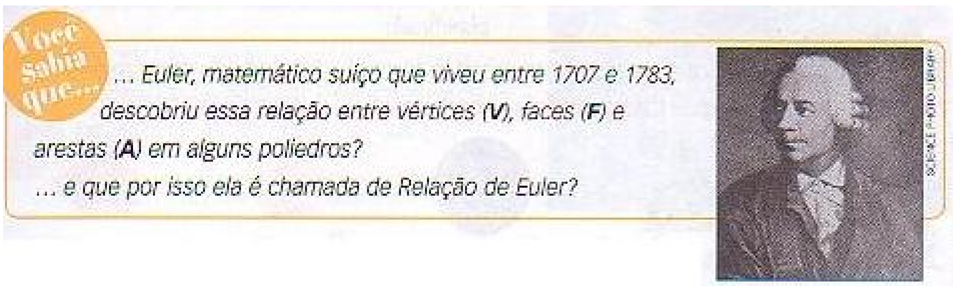


FIGURA 22 – Ilustração do matemático Euller.

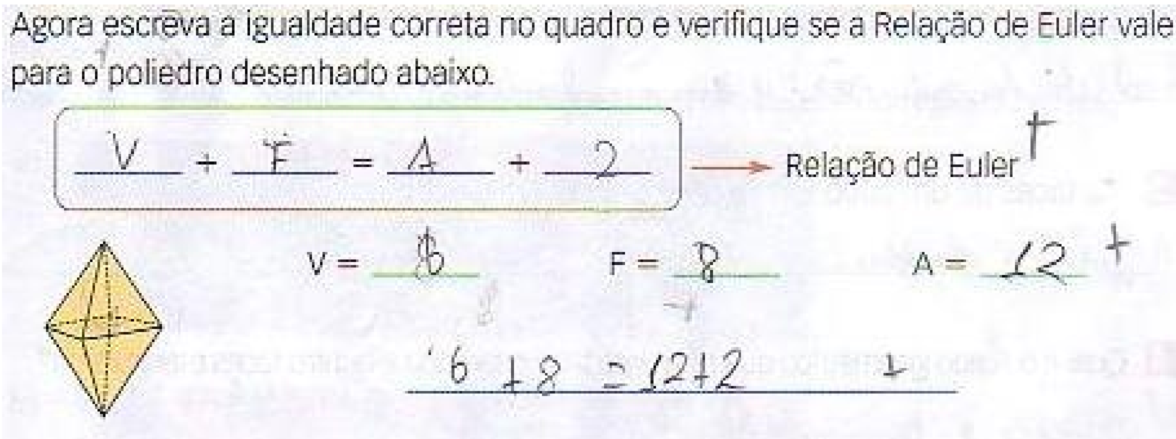


FIGURA 23 – Imagens geométricas em 3D utilizada para exemplificar a verdade da *Relação de Euller*.

Processo de Visualização e Raciocínio Geométrico.
Imagens do tipo perceptiva e discursiva.

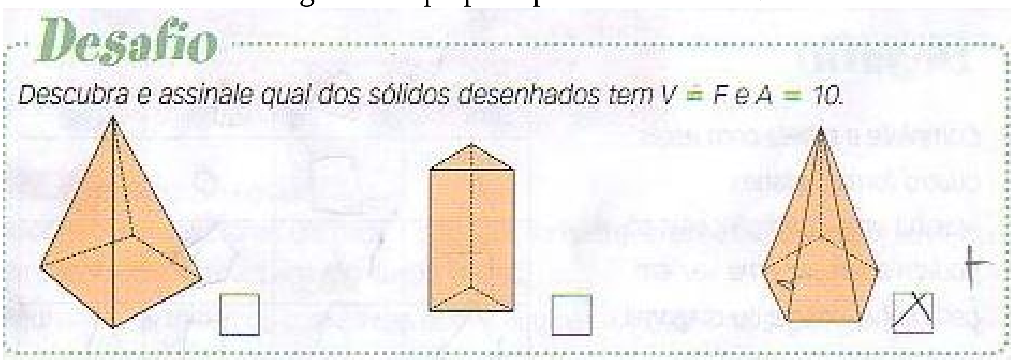


FIGURA 24 – Exercício envolvendo imagens geométricas tridimensionais.

Processo de Visualização.
Imagens do tipo perceptiva.

Na página 28 existem 12 ilustrações:

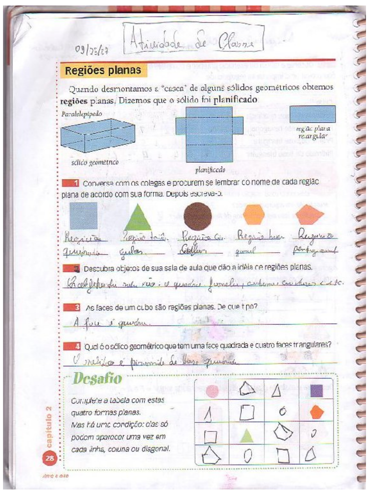


FIGURA 25 – Página 28 da coleção *Matemática* da 4ª série.

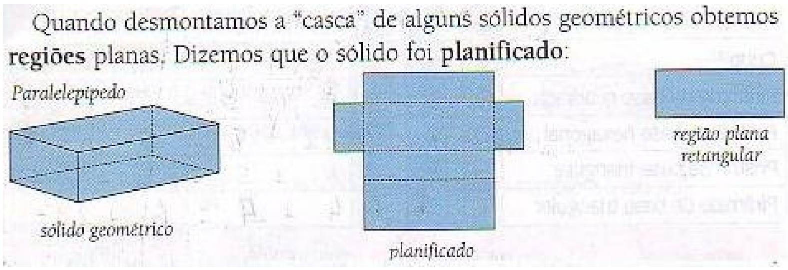


FIGURA 26 – Imagens geométricas 3D trabalhada heuristicamente para tornar-se 2D.

Processo de Visualização e Raciocínio Geométrico.
Imagem do tipo perceptiva, discursiva e operatória.
Imagem operatória do tipo mereológico.

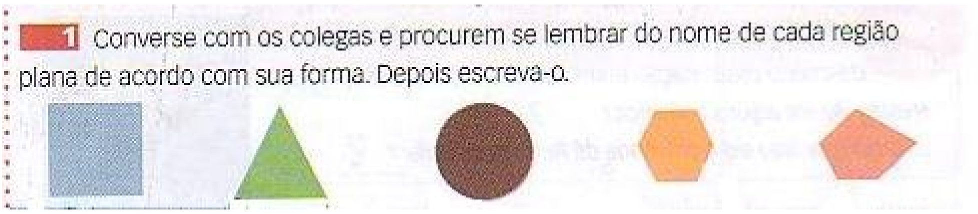


FIGURA 27 – Imagens geométricas 2D utilizadas com objetivo de memorização de formas geométricas.

Processo de Visualização.
Imagens do tipo perceptiva.

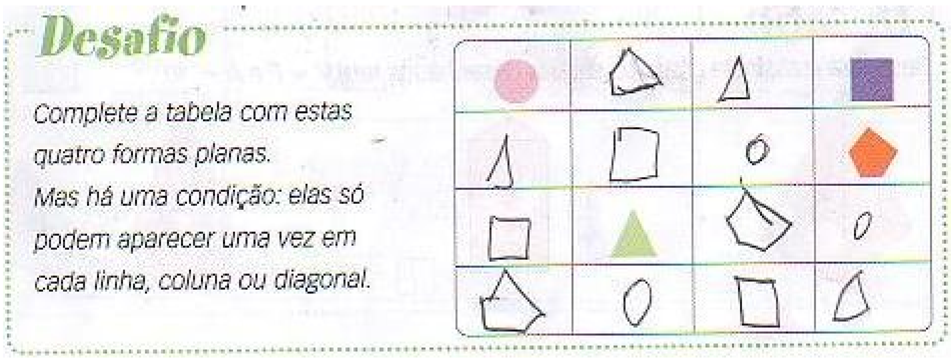
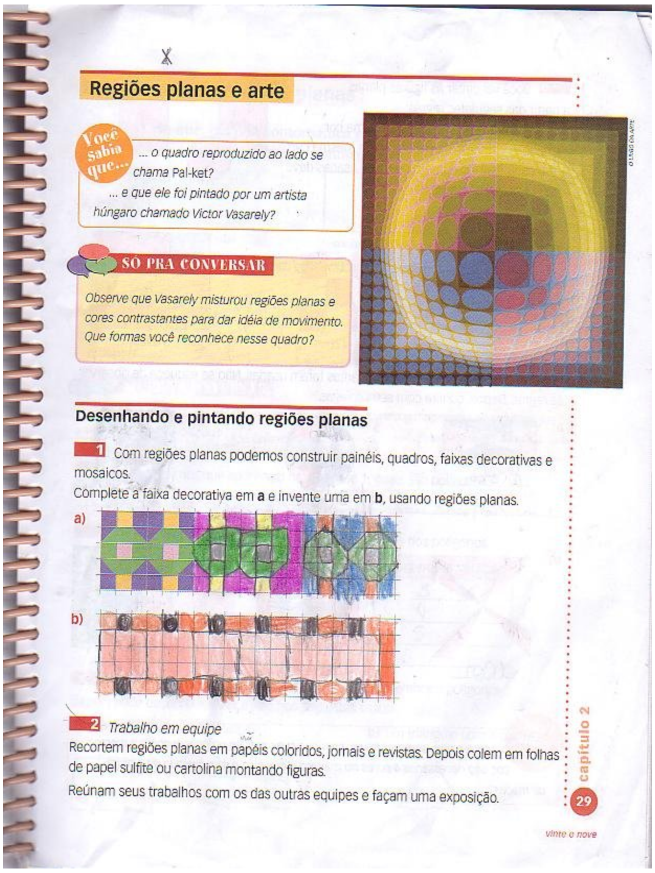


FIGURA 28 – Imagens trabalhadas de modo que se exercite lógica e dedução.

Processo de Visualização.
Imagens do tipo perceptiva, seqüencial e discursiva.

Na página 29 há apenas uma única imagem:



Regiões planas e arte

Você sabia que...

... o quadro reproduzido ao lado se chama Pal-ket?

... e que ele foi pintado por um artista húngaro chamado Victor Vasarely?

SÓ PRA CONVERSAR

Observe que Vasarely misturou regiões planas e cores contrastantes para dar idéia de movimento. Que formas você reconhece nesse quadro?

Desenhando e pintando regiões planas

1 Com regiões planas podemos construir painéis, quadros, faixas decorativas e mosaicos.

Complete a faixa decorativa em **a** e invente uma em **b**, usando regiões planas.

a)

b)

2 Trabalho em equipe

Recortem regiões planas em papéis coloridos, jornais e revistas. Depois colem em folhas de papel sulfite ou cartolina montando figuras.

Reúnam seus trabalhos com os das outras equipes e façam uma exposição.

capítulo 2

29

vinte e nove

FIGURA 29 – Página 29 da coleção *Matemática* da 4ª série.

Você sabia que...

... o quadro reproduzido ao lado se chama Pal-ket?

... e que ele foi pintado por um artista húngaro chamado Victor Vasarely?

SÓ PRA CONVERSAR

Observe que Vasarely misturou regiões planas e cores contrastantes para dar idéia de movimento. Que formas você reconhece nesse quadro?

FIGURA 30 – Exemplo de imagem utilizada para explorar problemas de contagem e reconhecimento de figuras.

Processo de Visualização.

Imagem do tipo perceptiva.

Na página 30 existem 11 imagens:

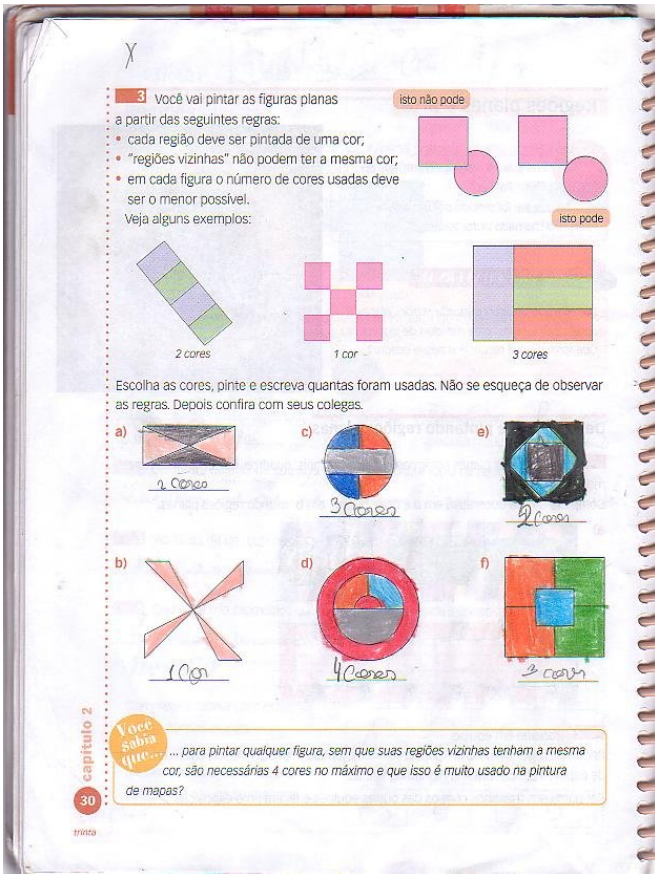


FIGURA 31 – Página 30 da coleção *Matemática* da 4ª série.

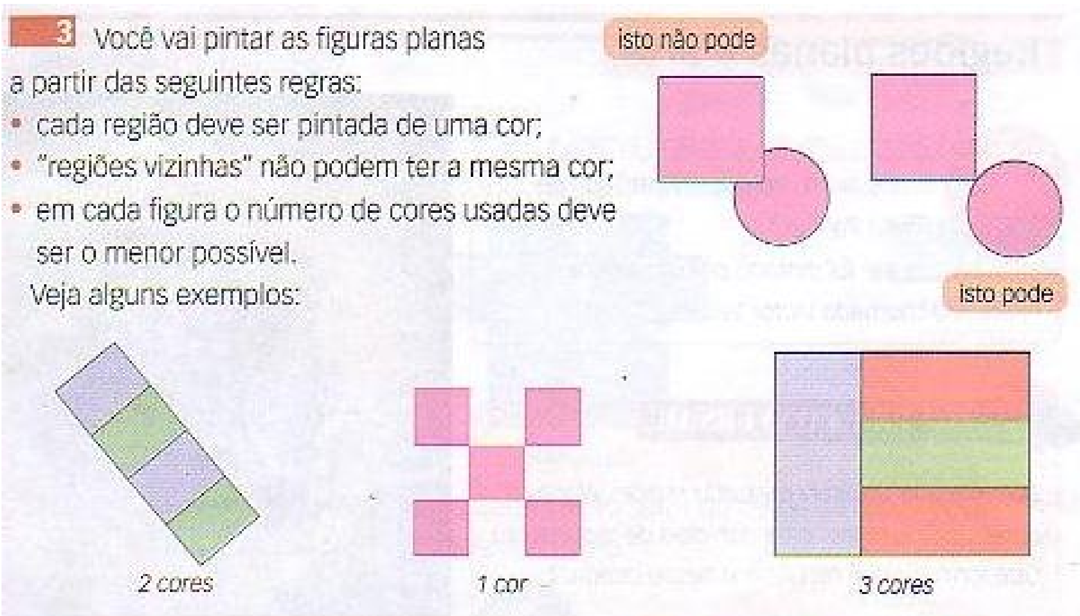


FIGURA 32 – Imagens bidimensionais.

Processo de Visualização.
Imagem do tipo perceptiva e seqüencial.

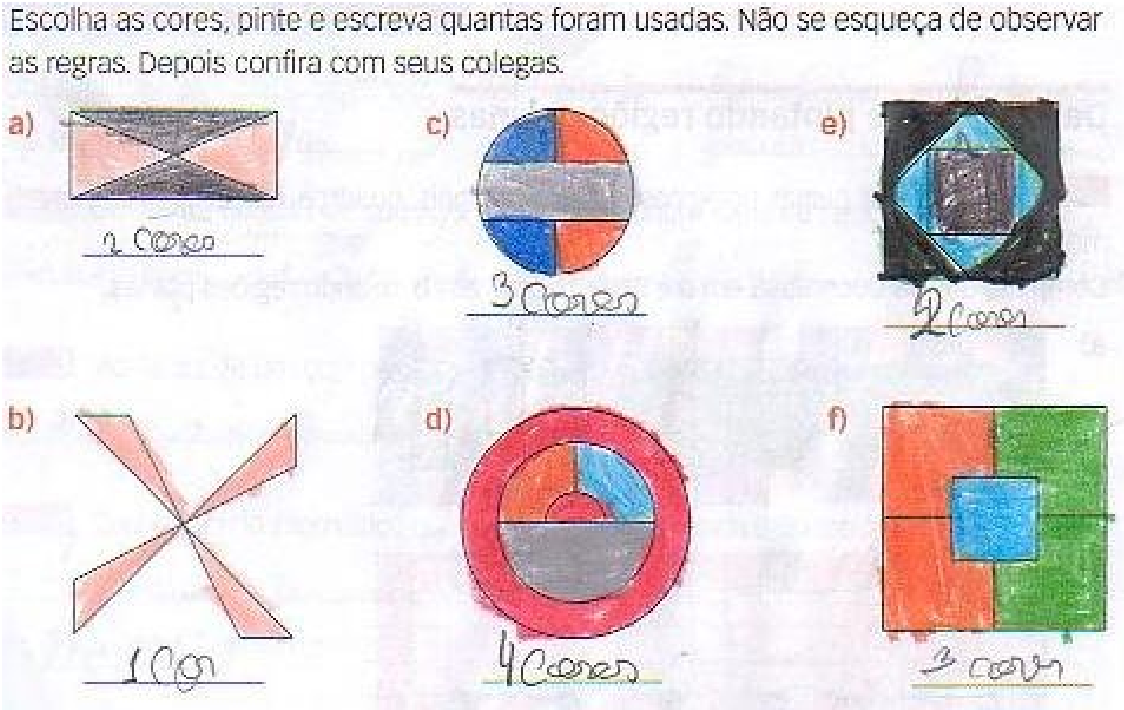
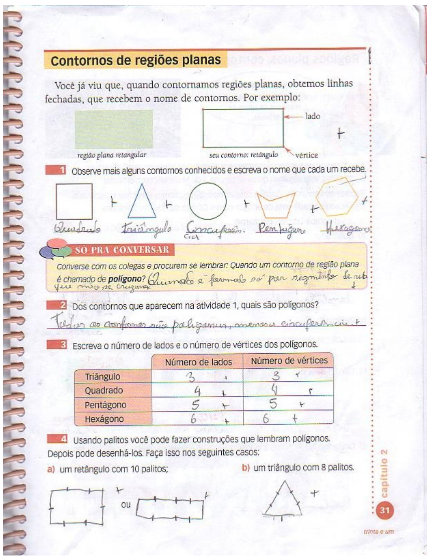


FIGURA 33 – Imagens bidimensionais usada para explorar lógica e dedução.

Processo de Visualização.
Imagem do tipo perceptiva e seqüencial.

Já na página 31 existem 8 imagens:



Contornos de regiões planas

Você já viu que, quando contornamos regiões planas, obtemos linhas fechadas, que recebem o nome de contornos. Por exemplo:

região plana retangular

seu contorno: retângulo

lado

vértice

1 Observe mais alguns contornos conhecidos e escreva o nome que cada um recebe.

Quadrado   Triângulo   Circunferên.   Pentágono   Hexagono

SÓ PRA CONVERSAR

Converse com os colegas e procurem se lembrar: Quando um contorno de região plana é chamado de ***polígono****?*

2 Dos contornos que aparecem na atividade 1, quais são polígonos?

3 Escreva o número de lados e o número de vértices dos polígonos.

	Número de lados	Número de vértices
Triângulo	3	3
Quadrado	4	4
Pentágono	5	5
Hexágono	6	6

4 Usando palitos você pode fazer construções que lembram polígonos. Depois pode desenhá-los. Faça isso nos seguintes casos:

a) um retângulo com 10 palitos;

ou

b) um triângulo com 8 palitos.

capítulo 2

31

trinta e um

FIGURA 34 – Página 31 da coleção *Matemática* da 4ª série.

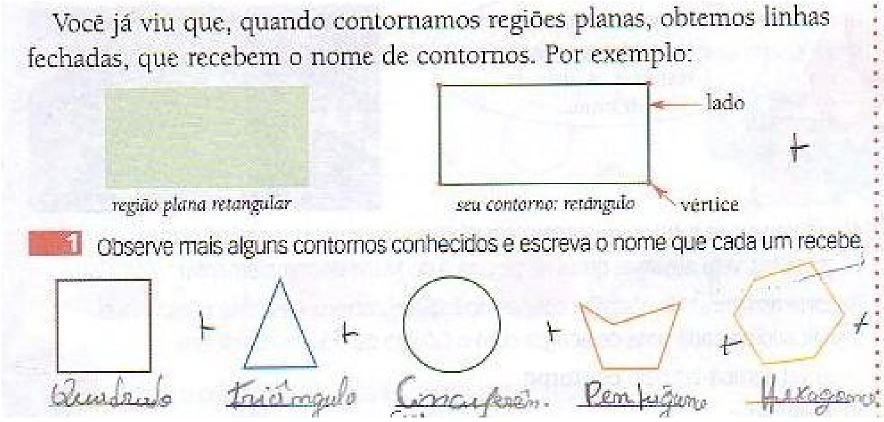
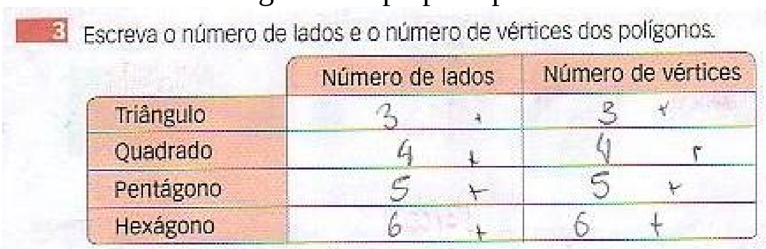


FIGURA 35 – Figuras planas bidimensionais.

Processo de Visualização.
Imagens do tipo perceptiva.


3 Escreva o número de lados e o número de vértices dos polígonos.

	Número de lados	Número de vértices
Triângulo	3	3
Quadrado	4	4
Pentágono	5	5
Hexágono	6	6

FIGURA 36 – Tabela que explora relação entre número de lados e número de vértices.

Processo de Visualização e Construção.
Imagem do tipo perceptiva e discursiva.

Na página 32 há 2 imagens:

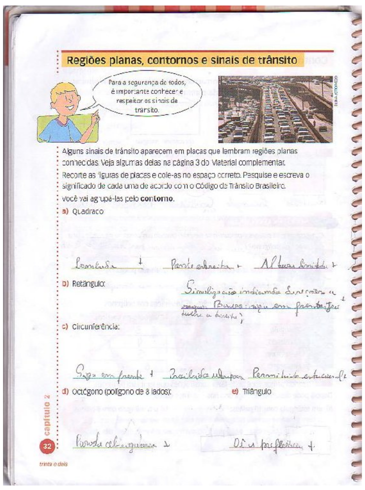


FIGURA 37 – Página 32 da coleção *Matemática* da 4ª série.

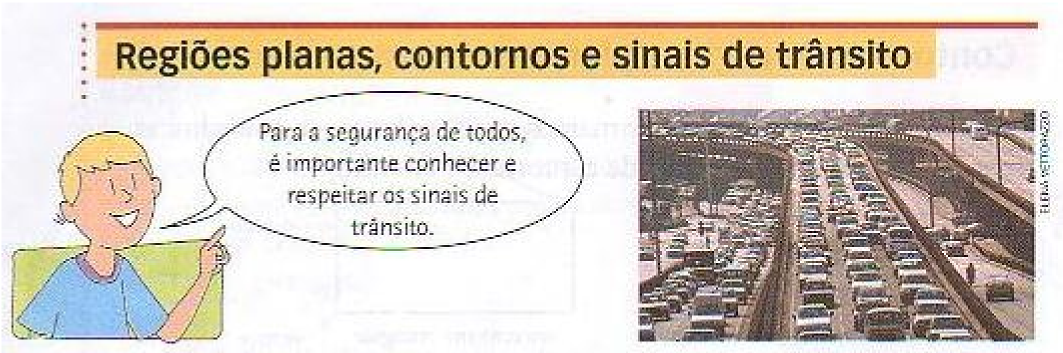


FIGURA 38 – Imagem apenas ilustrativa abordando fatores do dia-a-dia.

Na página 33 existem 13 imagens. As classificações seguem abaixo:

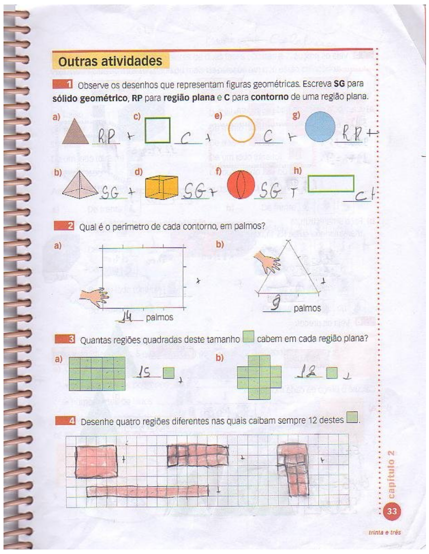


FIGURA 39 – Página 33 da coleção *Matemática* da 4ª série.

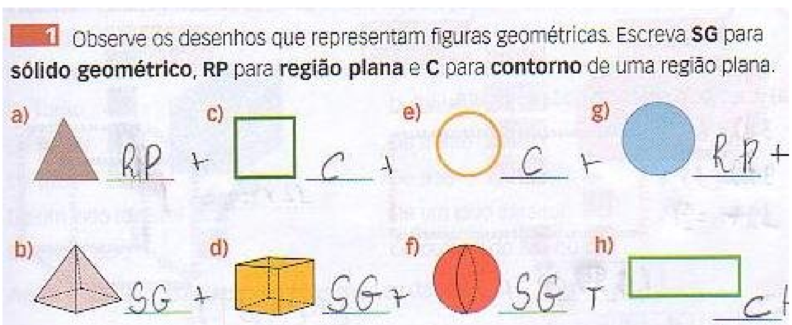


FIGURA 40 – Exemplo de figuras planas 2D e suas variações 2D/3D.

Processo de Visualização.
Imagem do tipo perceptiva.

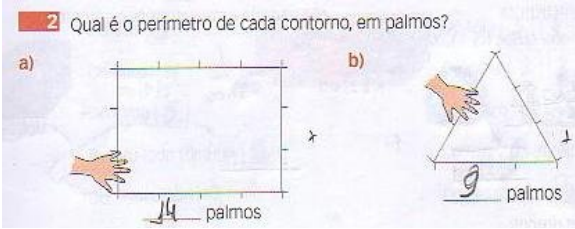


FIGURA 41 – Ilustração mostrando processo de contagem para perímetro de uma figura.

Processo de Visualização.
Imagens do tipo perceptiva.

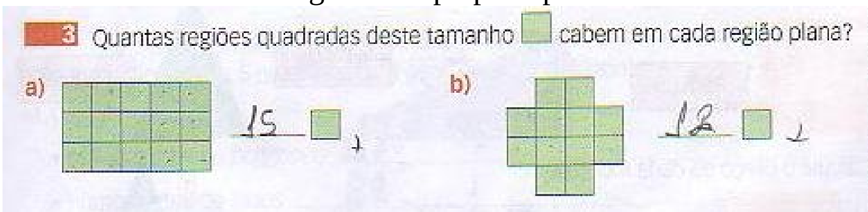


FIGURA 42 – Ilustração mostrando processo de contagem para área de uma figura.

Processo de Visualização.
Imagens do tipo perceptiva.

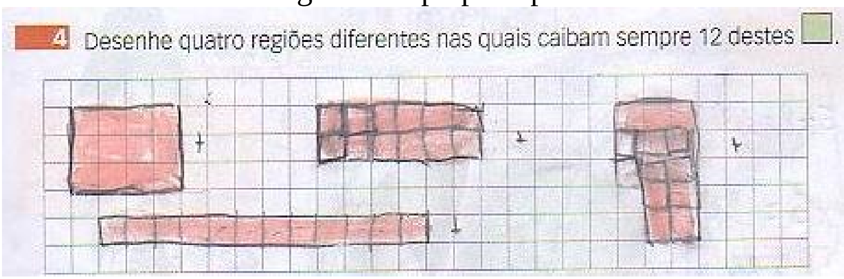


FIGURA 43 – Ilustração explorando construção de áreas de figuras planas.

Processo de Visualização e Construção.
Imagens do tipo seqüencial, perceptiva, discursiva.

Na página 34 existem 8 imagens:

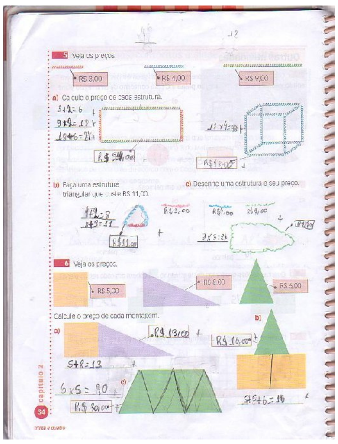


FIGURA 44 – Página 34 da coleção *Matemática* da 4ª série.

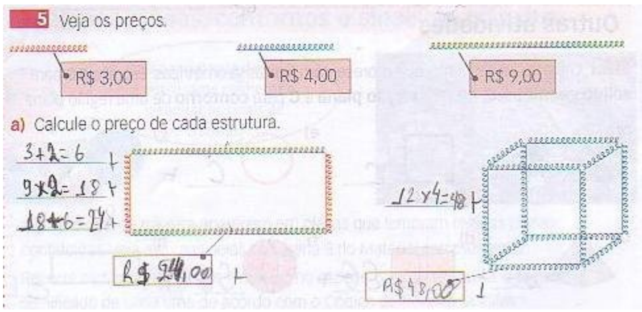


FIGURA 45 – Figuras perceptivas exploradas em exercícios.

Processo de Visualização.
Imagem do tipo perceptiva.

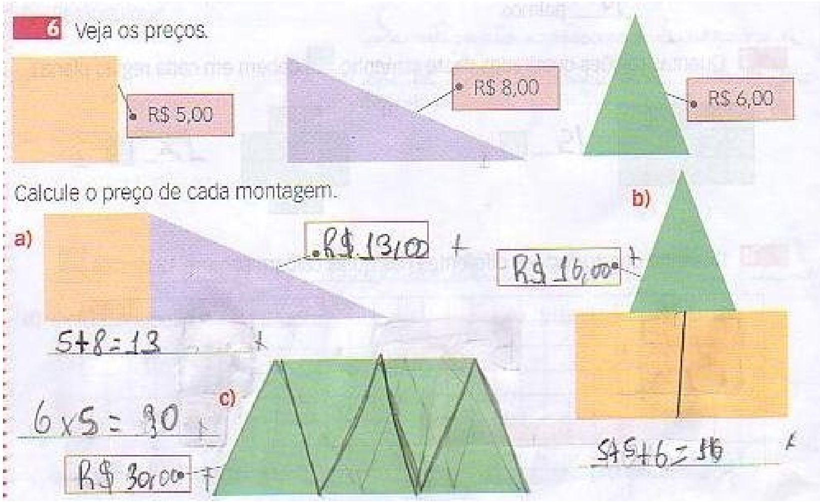


FIGURA 46 – Figuras planas exploradas de modo perceptivo.

Processo de Visualização.
Imagem do tipo perceptiva.

Na página 35 existem 4 imagens:

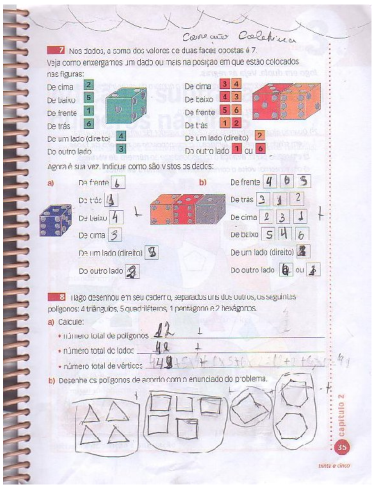


FIGURA 47 – Página 35 da coleção *Matemática* da 4ª série.

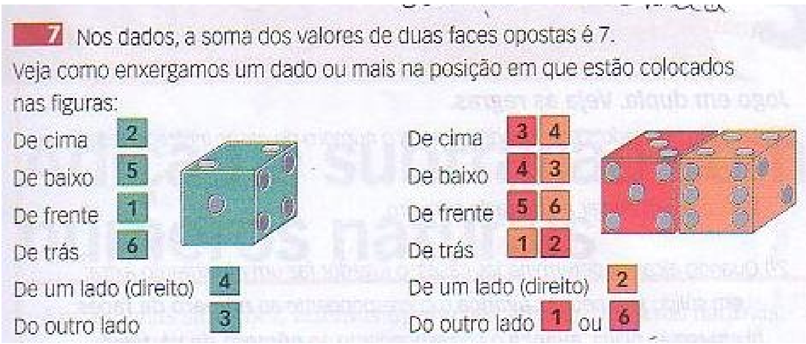


FIGURA 48 – Figuras que utilizam apenas o elemento cognoscível da visualização.

Processo de Visualização.
Imagens do tipo perceptivas.

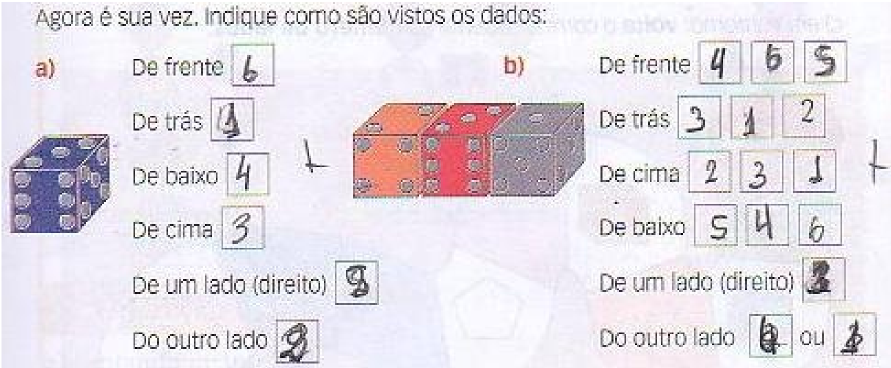


FIGURA 49 – Problema que utiliza processo de contagem.

Processo de Visualização.
Imagens do tipo perceptivas.

Na página 36 há 10 imagens espalhadas em um labirinto:

FIGURA 50 – Página 36 da coleção *Matemática* da 4ª série.

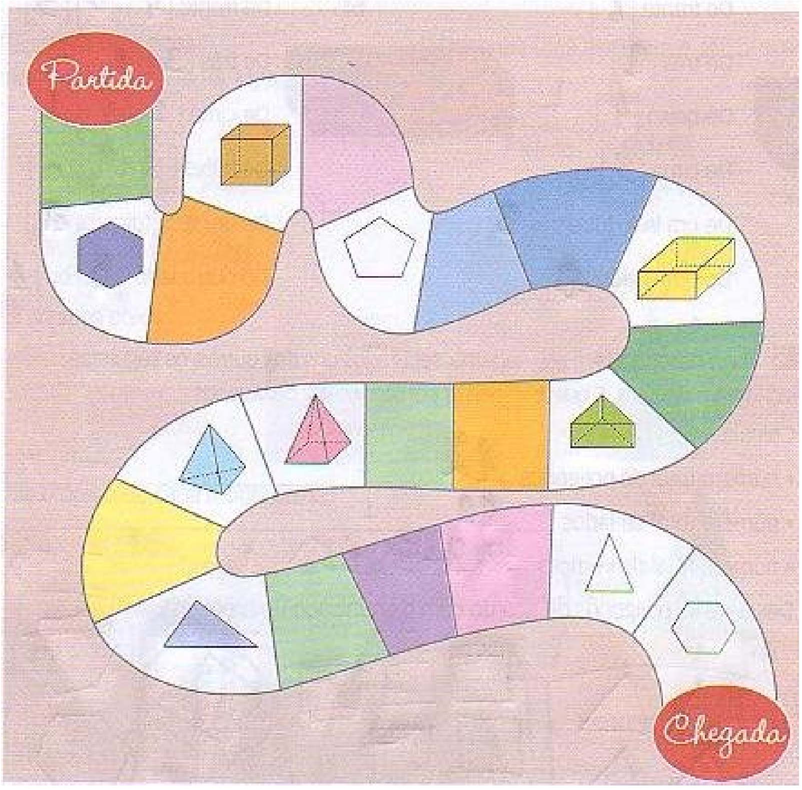


FIGURA 51 – Ilustração de um jogo lúdico / pedagógico que utiliza formas geométricas.

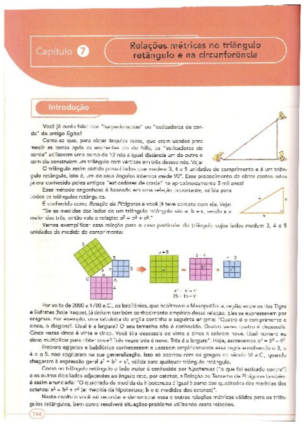
Processo de Visualização.
Todas as imagens são do tipo perceptiva.

ANEXO II

Nosso mapeamento das imagens exploradas nos livros didáticos, foi feita em referência ao contexto com o enunciado que descreve a imagem, ou seja, tentamos mapear as imagens de acordo com as características que o autor gostaria de explorar naquela imagem, naquele enunciado, para a estruturação de alguma idéia.

Deixamos claro que as imagens aqui sugerem possuir esse tipo de classificação, mas na verdade cada mente, e cada indivíduo, pode apreender uma imagem de modo distinto a outros indivíduos.

Na primeira página:


Capítulo 7 Relações métricas no triângulo retângulo e na circunferência

Introdução

FIGURA 53 – Página 166 da coleção *Matemática* da 8ª série.

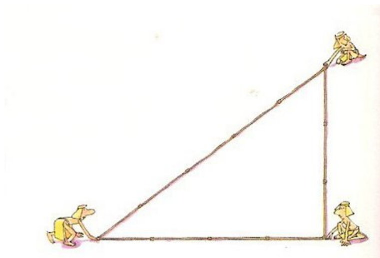


FIGURA 54 – Figura ilustrativa. Portanto, perceptiva.
Processo de Visualização.
1 Imagem do tipo perceptiva.

É conhecido como *Relação de Pitágoras* e você já teve contato com ela. Veja: "Se as medidas dos lados de um triângulo retângulo são **a**, **b** e **c**, sendo **a** a maior das três, então vale a relação: $a^2 = b^2 + c^2$."

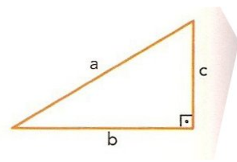


FIGURA 55 – Exemplo de triângulo retângulo.
Processo de Visualização.
1 Imagem do tipo perceptiva.

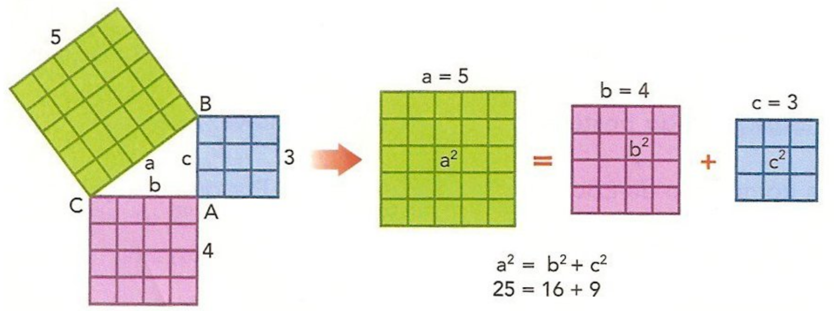
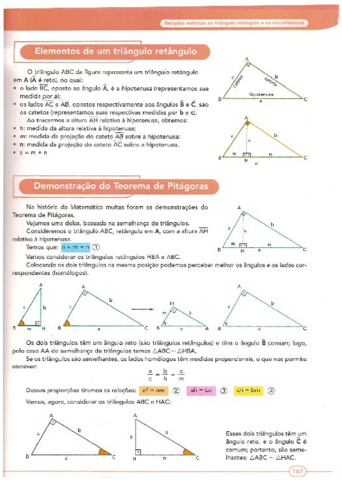


FIGURA 56 – Ilustração de um suporte para compreender o *Teorema de Pitágoras*.

Processo de Visualização e Raciocínio Geométrico.
4 Imagens do tipo perceptiva, discursiva e operatória.
A figura inicial sofre uma operação de modificação mereológico.

Na segunda página:



Relações métricas no triângulo retângulo e na circunferência

Elementos de um triângulo retângulo

O triângulo ABC da figura representa um triângulo retângulo em A ($\hat{A}$ é reto), no qual:

- o lado $\overline{BC}$, oposto ao ângulo $\hat{A}$, é a *hipotenusa* (representamos sua medida por a);
- os lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, opostos respectivamente aos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, são os catetos (representamos suas respectivas medidas por b e c).

Ao traçarmos a altura $\overline{AH}$ relativa à hipotenusa, obtemos:

- h: medida da altura relativa à hipotenusa;
- m: medida da projeção do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa;
- n: medida da projeção do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa.
- $a = m + n$

Demonstração do Teorema de Pitágoras

Na história da Matemática muitas foram as demonstrações do Teorema de Pitágoras.

Vejamos uma delas, baseada na semelhança de triângulos.

Consideremos o triângulo ABC, retângulo em A, com a altura $\overline{AH}$ relativa à hipotenusa.

Temos que: $a = m + n$ ①

Vamos considerar os triângulos retângulos HBA e ABC.

Colocando os dois triângulos na mesma posição podemos perceber melhor os ângulos e os lados correspondentes (homólogos).

Os dois triângulos têm um ângulo reto (são triângulos retângulos) e têm o ângulo $\hat{B}$ comum; logo, pelo caso AA de semelhança de triângulos temos $\triangle ABC \sim \triangle HBA$.

Se os triângulos são semelhantes, os lados homólogos têm medidas proporcionais, o que nos permite escrever:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m}$$

Dessas proporções tiramos as relações: $c^2 = am$ ② $ah = bc$ ③ $ch = bm$ ④

Vamos, agora, considerar os triângulos ABC e HAC:

Esses dois triângulos têm um ângulo reto, e o ângulo $\hat{C}$ é comum; portanto, são semelhantes: $\triangle ABC \sim \triangle HAC$.

167

FIGURA 57 – Página 167 da coleção *Matemática* da 8ª série.

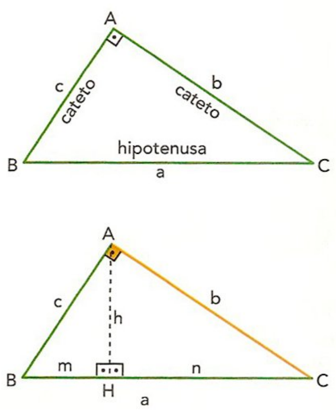


FIGURA 58 – Imagem mostrando altura relativa à hipotenusa.

Processo de Visualização.
2 imagens do tipo perceptiva e discursiva.

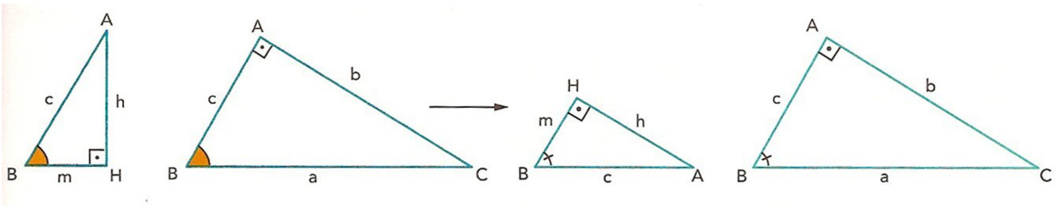


FIGURA 59 – Rotação de um triângulo para percepção da semelhança entre dois triângulos.

Processo de Visualização e Raciocínio Geométrico.
4 imagens do tipo perceptiva, discursiva e operatória.
Apreensão operatória sofreu uma modificação posicional.

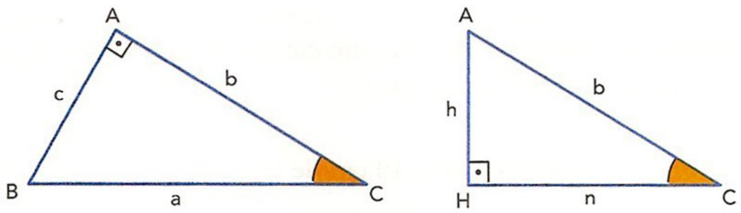
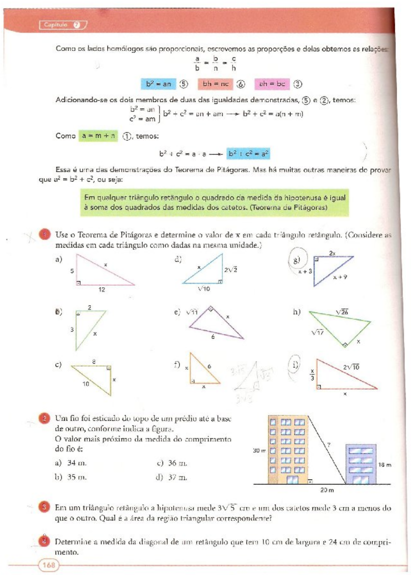


FIGURA 60 – O contexto dessas ilustrações mostra dois triângulos idênticos em posições diferentes.

Processo de Visualização.
2 Imagens do tipo perceptiva.

Na terceira página:



Capítulo 7

Como os lados homólogos são proporcionais, escrevemos as proporções e delas obtemos as relações:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} = \frac{c}{h}$$

$\boxed{b^2 = an}$ ⑤ $\boxed{bh = nc}$ ⑥ $\boxed{ah = bc}$ ③

Adicionando-se os dois membros de duas das igualdades demonstradas, ⑤ e ②, temos:

$$\left.\begin{matrix} b^2 = an \\ c^2 = am \end{matrix}\right\} b^2 + c^2 = an + am \longrightarrow b^2 + c^2 = a(n + m)$$

Como $\boxed{a = m + n}$ ①, temos:

$$b^2 + c^2 = a \cdot a \longrightarrow \boxed{b^2 + c^2 = a^2}$$

Essa é uma das demonstrações do Teorema de Pitágoras. Mas há muitas outras maneiras de provar que $a^2 = b^2 + c^2$, ou seja:

Em qualquer triângulo retângulo o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos. (Teorema de Pitágoras)

1 Use o Teorema de Pitágoras e determine o valor de x em cada triângulo retângulo. (Considere as medidas em cada triângulo como dadas na mesma unidade.)

a) 5, 12, x
b) 2, 3, x
c) 8, 10, x
d) x, $2\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$
e) $\sqrt{11}$, x, 6
f) x, 6, x
g) 2x, x + 3, x + 9
h) $\sqrt{26}$, $\sqrt{17}$, x
i) $\frac{x}{3}$, $2\sqrt{10}$, x

2 Um fio foi esticado do topo de um prédio até a base de outro, conforme indica a figura.
O valor mais próximo da medida do comprimento do fio é:

a) 34 m.
b) 35 m.
c) 36 m.
d) 37 m.

30 m
?
18 m
20 m

3 Em um triângulo retângulo a hipotenusa mede $3\sqrt{5}$ cm e um dos catetos mede 3 cm a menos do que o outro. Qual é a área da região triangular correspondente?

4 Determine a medida da diagonal de um retângulo que tem 10 cm de largura e 24 cm de comprimento.

168

FIGURA 61 – Página 168 da coleção *Matemática* da 8ª série.

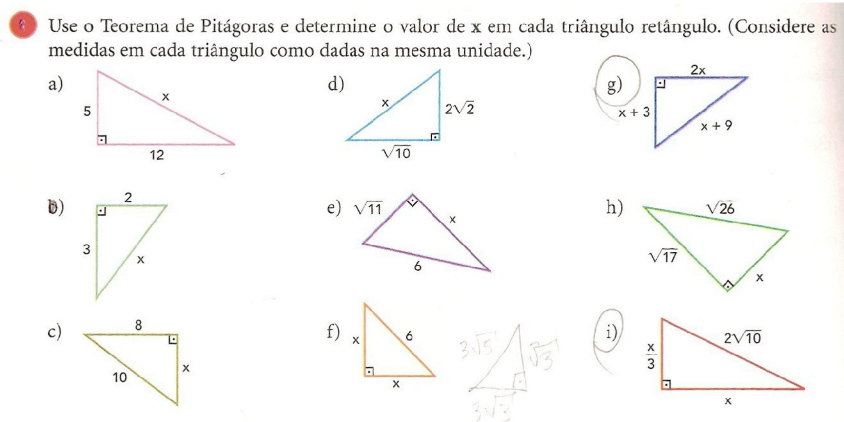


FIGURA 62 – Várias aplicações do *Teorema de Pitágoras* em exercícios.

Processo de Visualização.
9 imagens do tipo perceptiva.

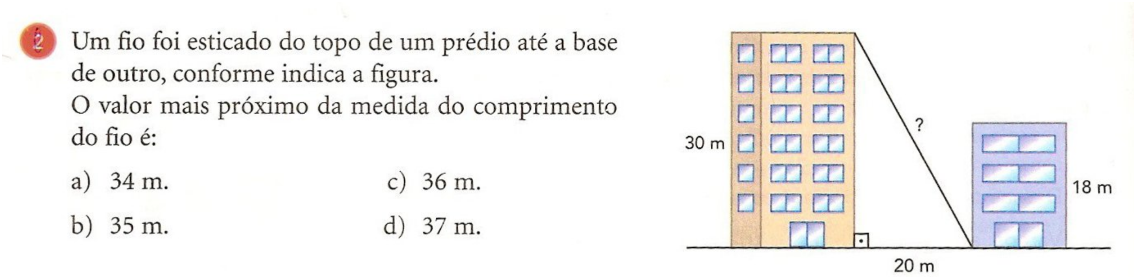


FIGURA 63 – Ilustração de um triângulo retângulo feito por um fio e dois prédios.

Processo de Visualização.
1 imagem do tipo perceptiva.

Na quarta página:

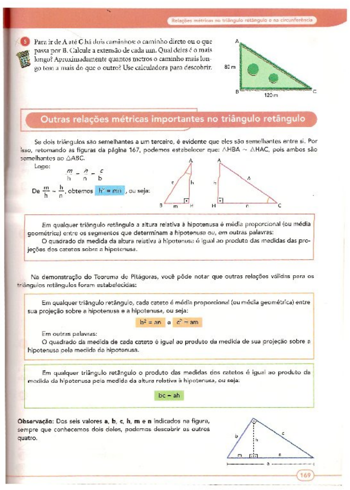


FIGURA 64 – Página 169 da coleção *Matemática* da 8ª série.

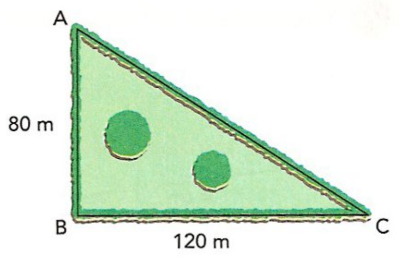


FIGURA 65 – Imagem ilustrando um triângulo retângulo.

Processo de Visualização.
1 Imagem do tipo perceptiva.

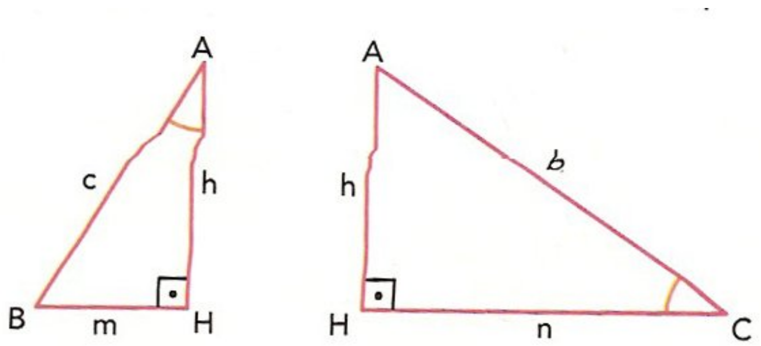


FIGURA 66 – Separação da altura relativa a hipotenusa de um triângulo retângulo em dois outros triângulos.

Processo de Visualização.
2 imagens do tipo perceptiva, discursiva e operatória.
Figura operatória sofreu modificação mereológico.

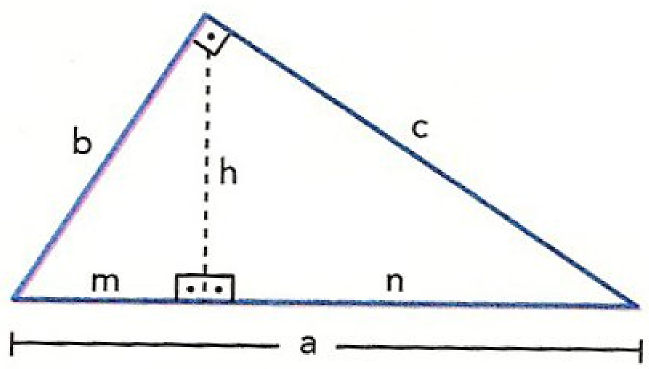


FIGURA 67 – Ilustração dos componentes de um triângulo retângulo.

Processo de Visualização.
1 imagem do tipo perceptiva.

Na quinta página:

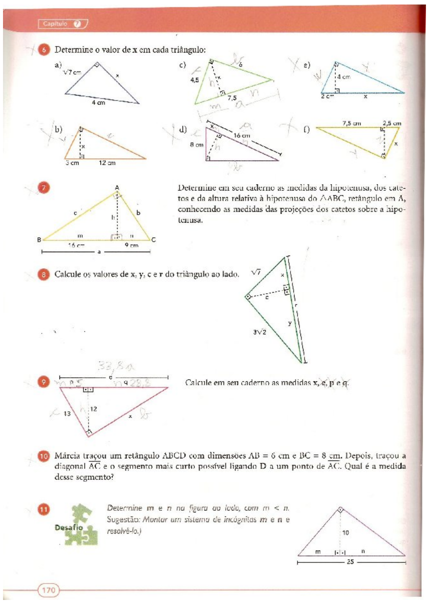


FIGURA 68 – Página 170 da coleção *Matemática* da 8ª série.

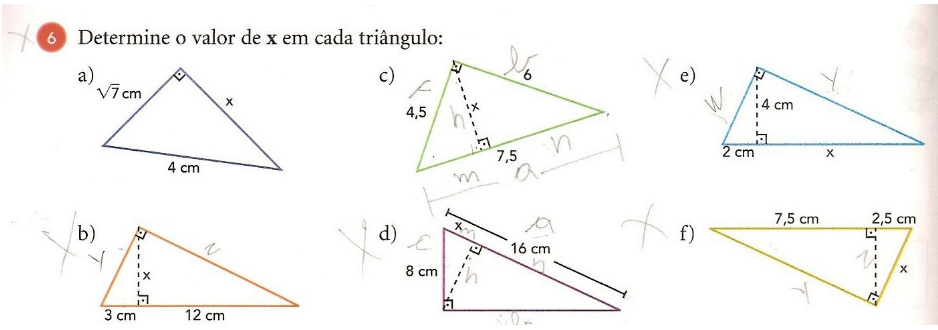


FIGURA 69 – Figuras que exploram aplicação direta de fórmulas.

Processo de Visualização.
6 Imagens do tipo perceptiva.

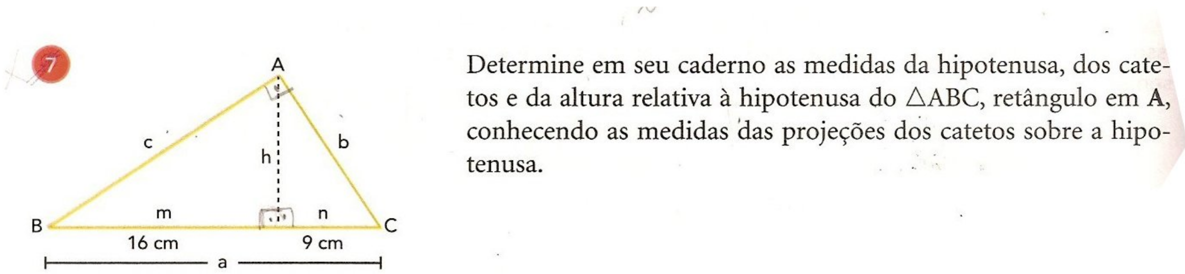


FIGURA 70 – Exemplo de figura explorada em um exercício.

Processo de Visualização.
1 Imagem do tipo perceptiva.

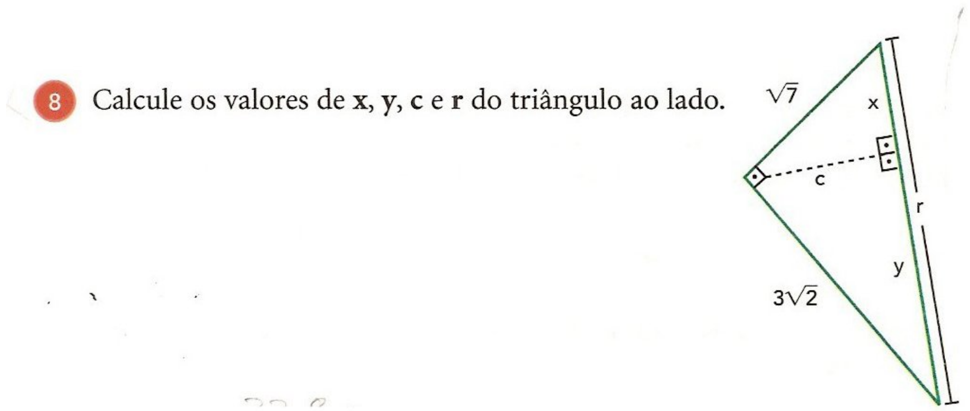


FIGURA 71 – Exemplo de figura que utiliza apenas o processo de visualização.

Processo de Visualização.
1 Imagem do tipo perceptiva.

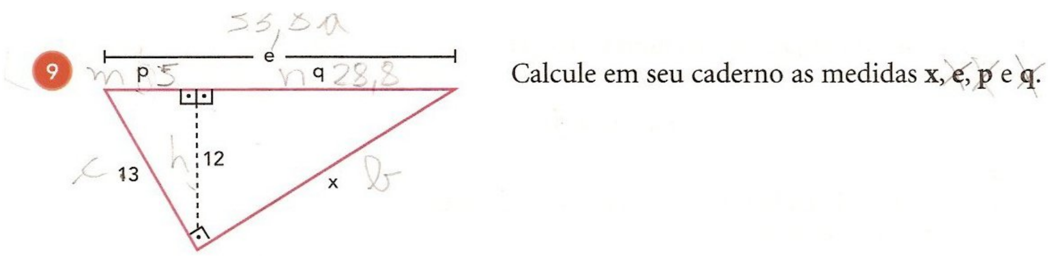


FIGURA 72 – Exemplo de figura que utiliza apreensões perceptivas.

Processo de Visualização.
1 Imagem do tipo perceptiva.

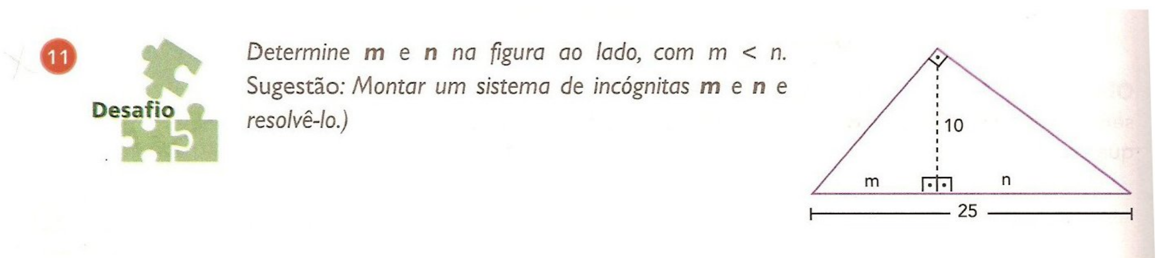
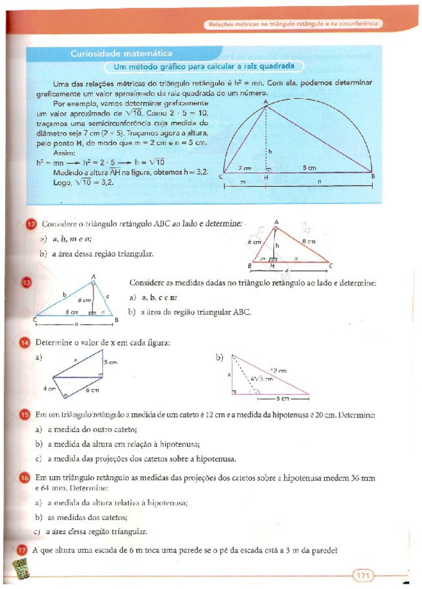


FIGURA 73 – Figura explorando algebrização em uma componente geométrica.

Processo de Visualização.
1 Imagem do tipo perceptiva.

Na sexta página:



Relações métricas no triângulo retângulo e na circunferência

Curiosidade matemática

Um método gráfico para calcular a raiz quadrada

Uma das relações métricas do triângulo retângulo é $h^2 = mn$. Com ela, podemos determinar graficamente um valor aproximado da raiz quadrada de um número.

Por exemplo, vamos determinar graficamente um valor aproximado de $\sqrt{10}$. Como $2 \cdot 5 = 10$, traçamos uma semicircunferência cuja medida do diâmetro seja 7 cm (2 + 5). Traçamos agora a altura, pelo ponto H, de modo que m = 2 cm e n = 5 cm.

Assim:

$h^2 = mn \longrightarrow h^2 = 2 \cdot 5 \longrightarrow h = \sqrt{10}$

Medindo a altura $\overline{AH}$ na figura, obtemos h = 3,2.

Logo, $\sqrt{10} \cong 3,2$.

12 Considere o triângulo retângulo ABC ao lado e determine:

a) a, h, m e n;

b) a área dessa região triangular.

13 Considere as medidas dadas no triângulo retângulo ao lado e determine:

a) a, b, c e n;

b) a área da região triangular ABC.

14 Determine o valor de x em cada figura:

a)

b)

15 Em um triângulo retângulo a medida de um cateto é 12 cm e a medida da hipotenusa é 20 cm. Determine:

a) a medida do outro cateto;

b) a medida da altura em relação à hipotenusa;

c) a medida das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

16 Em um triângulo retângulo as medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa medem 36 mm e 64 mm. Determine:

a) a medida da altura relativa à hipotenusa;

b) as medidas dos catetos;

c) a área dessa região triangular.

17 A que altura uma escada de 6 m toca uma parede se o pé da escada está a 3 m da parede?

171

FIGURA 74 – Página 171 da coleção *Matemática* da 8ª série.

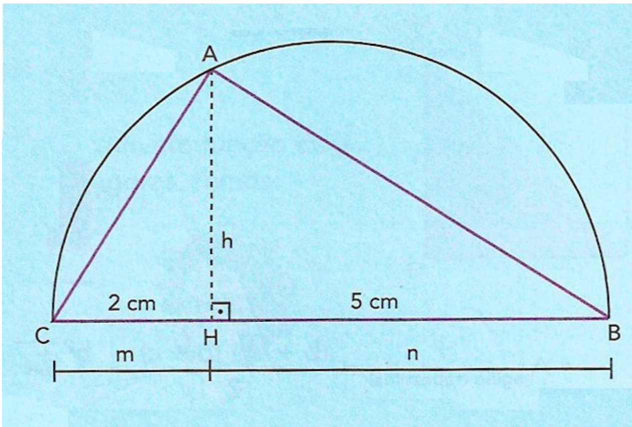


FIGURA 75 – Imagem que sugere a construção para desenvolvimento de uma idéia conseqüente ao *Teorema de Pitágoras*.

Processo de Visualização e Construção.

1 Imagem do seqüencial, perceptiva e discursiva.

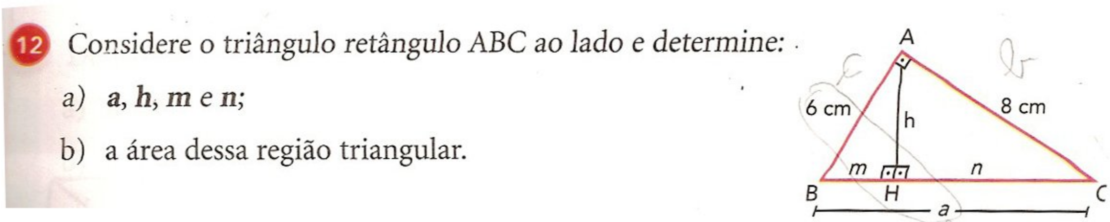
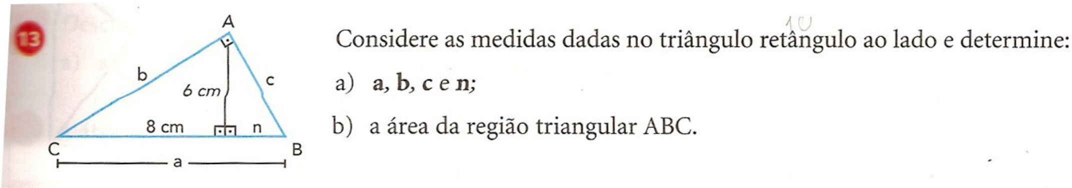


FIGURA 76 – Exemplo de imagem que sugere uma aplicação direta da fórmula.

Processo de Visualização.

1 Imagem do perceptiva.



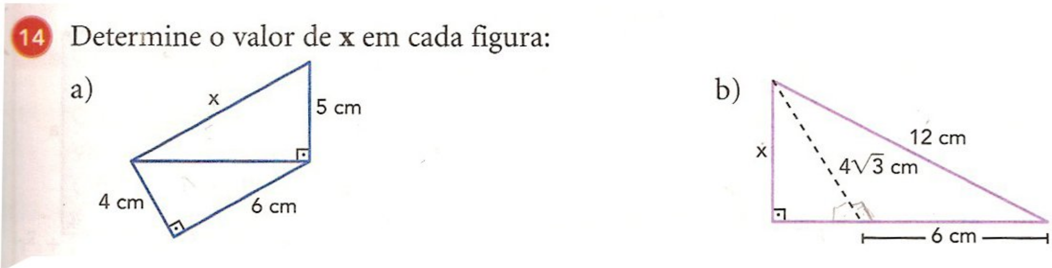
13 Considere as medidas dadas no triângulo retângulo ao lado e determine:

a) **a, b, c** e **n**;

b) a área da região triangular ABC.

FIGURA 77 – Figura utilizando apenas o processo de visualização em um exercício.

Processo de Visualização.
1 Imagem perceptiva.

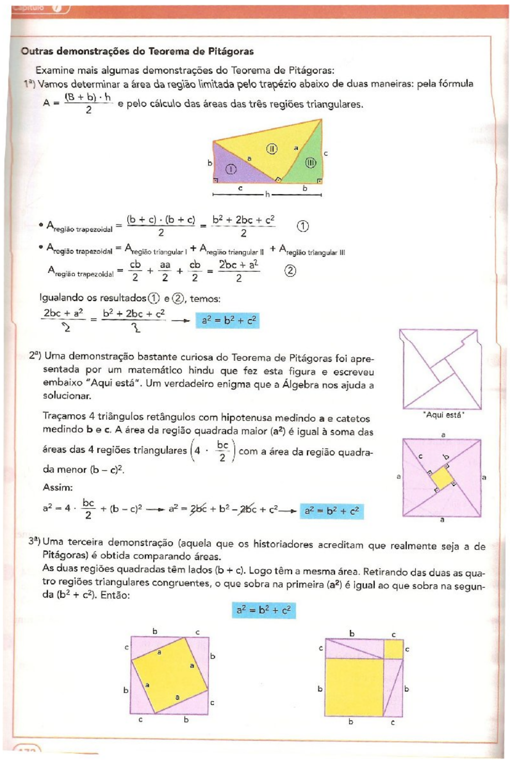


14 Determine o valor de **x** em cada figura:

FIGURA 78 – Exemplo de figuras onde o *Teorema de Pitágoras* deve ser utilizado duas vezes.

Processo de Visualização.
1 Imagem perceptiva.

Na sétima página:



Outras demonstrações do Teorema de Pitágoras

Examine mais algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras:

1ª) Vamos determinar a área da região limitada pelo trapézio abaixo de duas maneiras: pela fórmula $A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$ e pelo cálculo das áreas das três regiões triangulares.

- $A_{\text{região trapezoidal}} = \frac{(b + c) \cdot (b + c)}{2} = \frac{b^2 + 2bc + c^2}{2}$ ①
- $A_{\text{região trapezoidal}} = A_{\text{região triangular I}} + A_{\text{região triangular II}} + A_{\text{região triangular III}}$

$A_{\text{região trapezoidal}} = \frac{cb}{2} + \frac{aa}{2} + \frac{cb}{2} = \frac{2bc + a^2}{2}$ ②

Igualando os resultados ① e ②, temos:

$\frac{2bc + a^2}{2} = \frac{b^2 + 2bc + c^2}{2} \longrightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

2ª) Uma demonstração bastante curiosa do Teorema de Pitágoras foi apresentada por um matemático hindu que fez esta figura e escreveu embaixo "Aqui está". Um verdadeiro enigma que a Álgebra nos ajuda a solucionar.

"Aqui está"

Traçamos 4 triângulos retângulos com hipotenusa medindo **a** e catetos medindo **b** e **c**. A área da região quadrada maior (**a²**) é igual à soma das áreas das 4 regiões triangulares $\left(4 \cdot \frac{bc}{2}\right)$ com a área da região quadrada menor $(b - c)^2$.

Assim:

$a^2 = 4 \cdot \frac{bc}{2} + (b - c)^2 \longrightarrow a^2 = \cancel{2bc} + b^2 - \cancel{2bc} + c^2 \longrightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

3ª) Uma terceira demonstração (aquela que os historiadores acreditam que realmente seja a de Pitágoras) é obtida comparando áreas.
As duas regiões quadradas têm lados (b + c). Logo têm a mesma área. Retirando das duas as quatro regiões triangulares congruentes, o que sobra na primeira (**a²**) é igual ao que sobra na segunda (b² + c²). Então:

$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

FIGURA 79 – Página 172 da coleção *Matemática* da 8ª série.

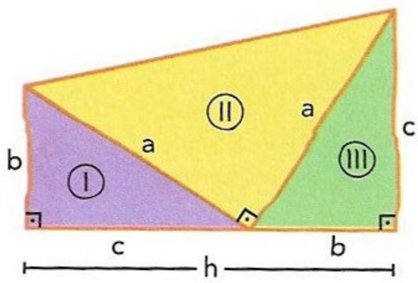


FIGURA 80 – Figura de três triângulos retângulos agrupados no formato de um trapézio.

Processo de Visualização.
1 Imagem perceptiva.

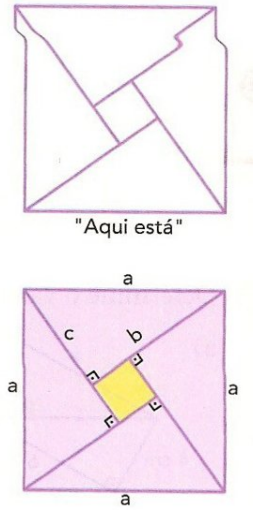
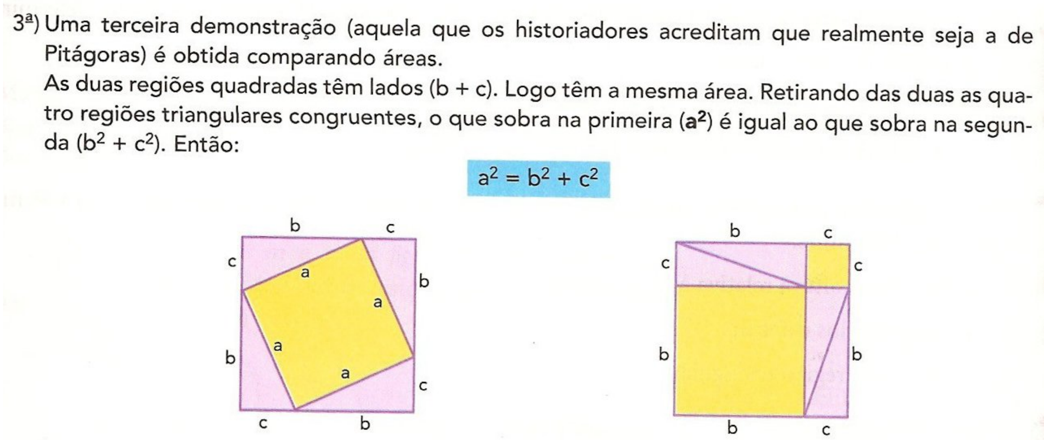


FIGURA 81 – Figura que mostra outro processo de abstração do *Teorema de Pitágoras*.

Processo de Visualização e Raciocínio Geométrico.
2 Imagens do tipo perceptiva e discursiva.



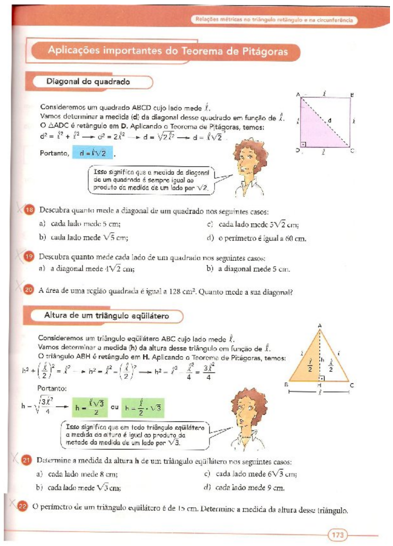
3ª) Uma terceira demonstração (aquela que os historiadores acreditam que realmente seja a de Pitágoras) é obtida comparando áreas.
As duas regiões quadradas têm lados (b + c). Logo têm a mesma área. Retirando das duas as quatro regiões triangulares congruentes, o que sobra na primeira (**a²**) é igual ao que sobra na segunda ($b^2 + c^2$). Então:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

FIGURA 82 – Figura trabalhada heuristicamente para provar o *Teorema de Pitagoras*.

Processo de Visualização e Raciocínio Geométrico.
1 Imagem seqüencial, perceptiva, discursiva e operatória
A figura sofre modificação do tipo mereológico.

Na oitava página:


Relações métricas no triângulo retângulo e na circunferência

Aplicações importantes do Teorema de Pitágoras

Diagonal do quadrado

Consideremos um quadrado ABCD cujo lado mede ℓ.
Vamos determinar a medida (d) da diagonal desse quadrado em função de ℓ.
O $\triangle ADC$ é retângulo em D. Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:
$d^2 = \ell^2 + \ell^2 \longrightarrow d^2 = 2\ell^2 \longrightarrow d = \sqrt{2\ell^2} \longrightarrow d = \ell\sqrt{2}$

Portanto, $\boxed{d = \ell\sqrt{2}}$.

18 Descubra quanto mede a diagonal de um quadrado nos seguintes casos:
a) cada lado mede 5 cm;
b) cada lado mede $\sqrt{5}$ cm;
c) cada lado mede $5\sqrt{2}$ cm;
d) o perímetro é igual a 60 cm.

19 Descubra quanto mede cada lado de um quadrado nos seguintes casos:
a) a diagonal mede $4\sqrt{2}$ cm;
b) a diagonal mede 5 cm.

20 A área de uma região quadrada é igual a 128 cm². Quanto mede a sua diagonal?

Altura de um triângulo eqüilátero

Consideremos um triângulo eqüilátero ABC cujo lado mede ℓ.
Vamos determinar a medida (h) da altura desse triângulo em função de ℓ.
O triângulo ABH é retângulo em H. Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:
$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2 \longrightarrow h^2 = \ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \longrightarrow h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} = \frac{3\ell^2}{4}$

Portanto:
$h = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}} \longrightarrow \boxed{h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}$ ou $\boxed{h = \frac{\ell}{2} \cdot \sqrt{3}}$

21 Determine a medida da altura h de um triângulo eqüilátero nos seguintes casos:
a) cada lado mede 8 cm;
b) cada lado mede $\sqrt{3}$ cm;
c) cada lado mede $6\sqrt{3}$ cm;
d) cada lado mede 9 cm.

22 O perímetro de um triângulo eqüilátero é de 15 cm. Determine a medida da altura desse triângulo.

173

FIGURA 83 – Página 173 da coleção *Matemática* da 8ª série.

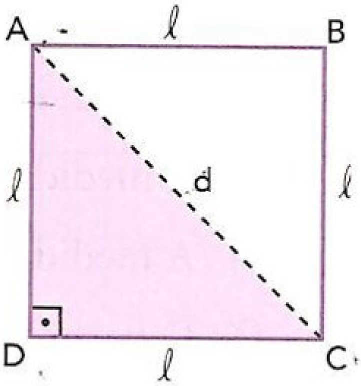


FIGURA 84 – Figura que sugere a generalização da fórmula da diagonal de um quadrado de lado qualquer.

Processo de Visualização.
1 imagem do tipo perceptiva e discursiva.

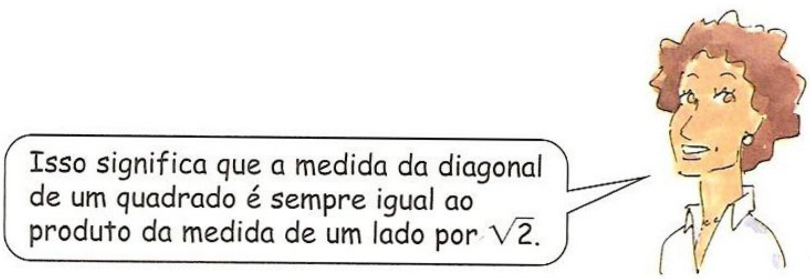


FIGURA 85 – Exemplo de imagem ilustrativa.

1 imagem do tipo Ilustrativa.

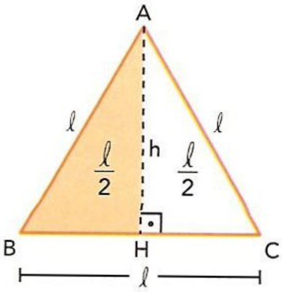


FIGURA 86– Figura trabalhando generalização da altura de um triângulo eqüilátero.

Processo de Visualização.
1 Imagem perceptiva e discursiva.

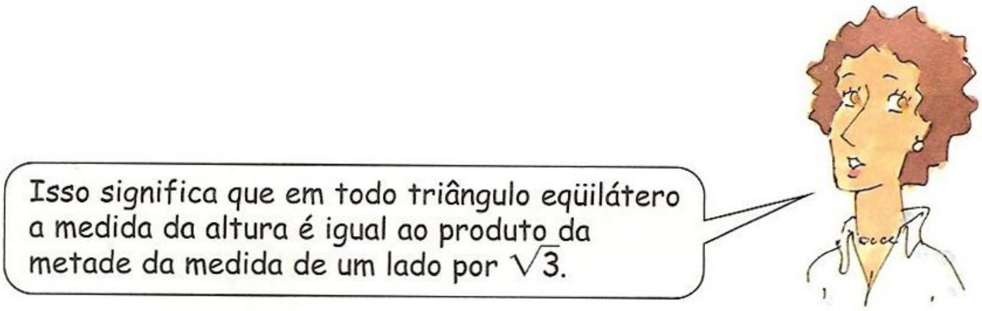
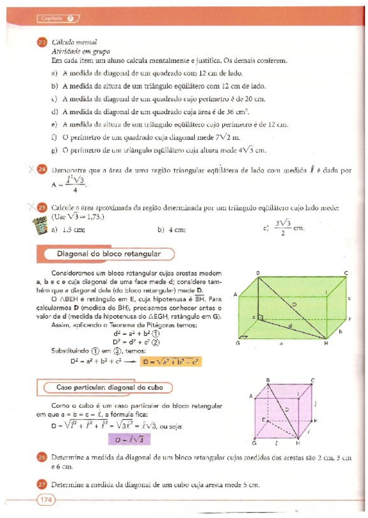


FIGURA 87 – Figura ilustrativa ao longo do capítulo.

1 Imagem ilustrativa.

Na nona página:



Capítulo 7

23 *Cálculo mental*
Atividade em grupo
Em cada item um aluno calcula mentalmente e justifica. Os demais conferem.

a) A medida da diagonal de um quadrado com 12 cm de lado.
b) A medida da altura de um triângulo eqüilátero com 12 cm de lado.
c) A medida da diagonal de um quadrado cujo perímetro é de 20 cm.
d) A medida da diagonal de um quadrado cuja área é de 36 cm^2.
e) A medida da altura de um triângulo eqüilátero cujo perímetro é de 12 cm.
f) O perímetro de um quadrado cuja diagonal mede $7\sqrt{2}$ m.
g) O perímetro de um triângulo eqüilátero cuja altura mede $4\sqrt{3}$ cm.

24 Demonstre que a área de uma região triangular eqüilátera de lado com medida ℓ é dada por $A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$.

25 Calcule a área aproximada da região determinada por um triângulo eqüilátero cujo lado mede: (Use $\sqrt{3} = 1,73$.)
a) 1,5 cm; b) 4 cm; c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm.

Diagonal do bloco retangular

Consideremos um bloco retangular cujas arestas medem a, b e c e cuja diagonal de uma face mede d; considere também que a diagonal dele (do bloco retangular) mede **D**.

O △BEH é retângulo em E, cuja hipotenusa é $\overline{BH}$. Para calcularmos **D** (medida de BH), precisamos conhecer antes o valor de d (medida da hipotenusa do △EGH, retângulo em G).

Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras temos:

$$d^2 = a^2 + b^2 \quad (1)$$
$$D^2 = d^2 + c^2 \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), temos:

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 \longrightarrow \boxed{D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Caso particular: diagonal do cubo

Como o cubo é um caso particular do bloco retangular em que $a = b = c = \ell$, a fórmula fica:

$D = \sqrt{\ell^2 + \ell^2 + \ell^2} = \sqrt{3\ell^2} = \ell\sqrt{3}$, ou seja:

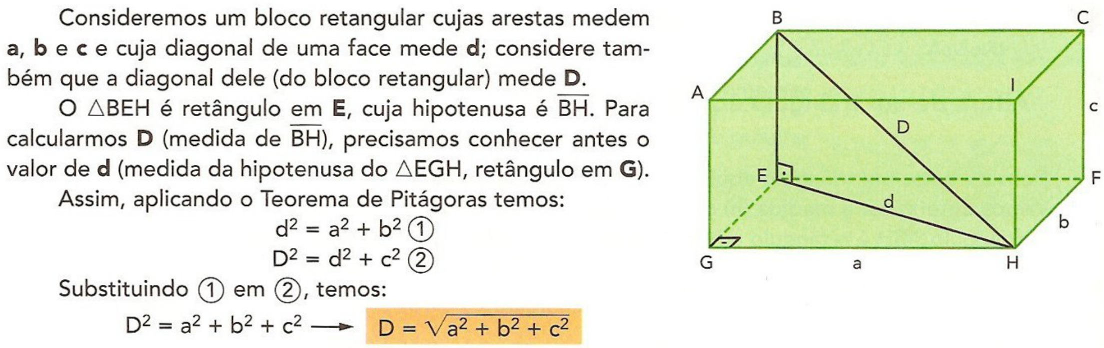
$$\boxed{D = \ell\sqrt{3}}$$

26 Determine a medida da diagonal de um bloco retangular cujas medidas das arestas são 2 cm, 3 cm e 6 cm.

27 Determine a medida da diagonal de um cubo cuja aresta mede 5 cm.

174

FIGURA 88 – Página 174 da coleção *Matemática* da 8ª série.


Consideremos um bloco retangular cujas arestas medem **a**, **b** e **c** e cuja diagonal de uma face mede **d**; considere também que a diagonal dele (do bloco retangular) mede **D**.

O △BEH é retângulo em **E**, cuja hipotenusa é $\overline{BH}$. Para calcularmos **D** (medida de $\overline{BH}$), precisamos conhecer antes o valor de **d** (medida da hipotenusa do △EGH, retângulo em **G**).

Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras temos:

$$d^2 = a^2 + b^2 \quad (1)$$

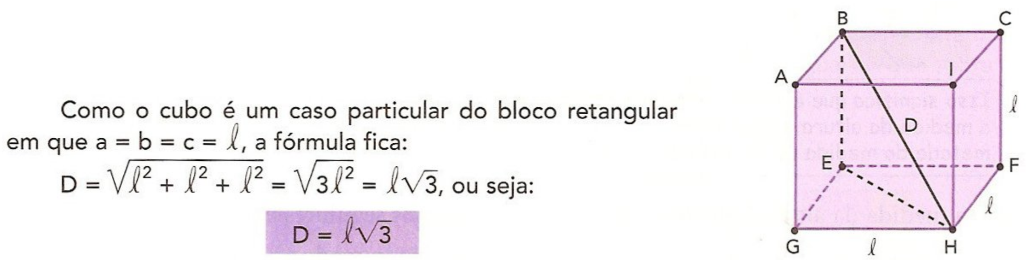
$$D^2 = d^2 + c^2 \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), temos:

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 \longrightarrow \boxed{D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

FIGURA 89 – Imagem 2D/3D utilizada pra expor um triângulo retângulo.

Processo de Visualização.
1 Imagem do tipo seqüencial, perceptiva e discursiva.


Como o cubo é um caso particular do bloco retangular em que $a = b = c = \ell$, a fórmula fica:

$D = \sqrt{\ell^2 + \ell^2 + \ell^2} = \sqrt{3\ell^2} = \ell\sqrt{3}$, ou seja:

$$\boxed{D = \ell\sqrt{3}}$$

FIGURA 90 – Figura que mostra a generalização da fórmula da diagonal de um cubo.

Processo de visualização.
1 Imagem do tipo perceptiva e discursiva.

Na décima página:

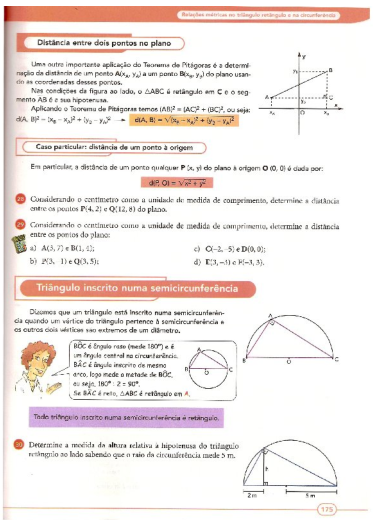


FIGURA 91 – Página 175 da coleção *Matemática* da 8ª série.

Uma outra importante aplicação do Teorema de Pitágoras é a determinação da distância de um ponto $A(x_A, y_A)$ a um ponto $B(x_B, y_B)$ do plano usando as coordenadas desses pontos.

Nas condições da figura ao lado, o $\triangle ABC$ é retângulo em **C** e o segmento $\overline{AB}$ é a sua hipotenusa.

Aplicando o Teorema de Pitágoras temos $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$, ou seja:

$d(A, B)^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \longrightarrow \boxed{d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$

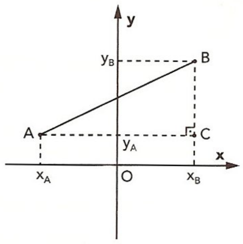


FIGURA 92 – Figura generalizando a fórmula da distância entre dois pontos.

Processo de Visualização.
1 Imagem do tipo perceptiva e discursiva.

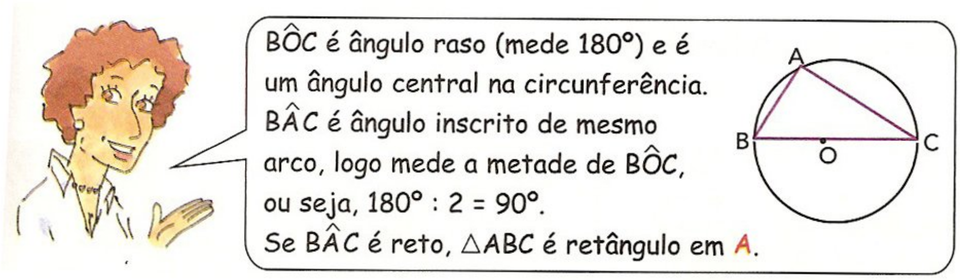


FIGURA 93 – Exemplo de figura ilustrativa.

Processo de Visualização.
1 Imagem do tipo perceptiva.

Dizemos que um triângulo está inscrito numa semicircunferência quando um vértice do triângulo pertence à semicircunferência e os outros dois vértices são extremos de um diâmetro.

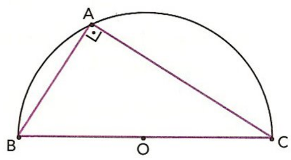


FIGURA 94 – Triângulo retângulo inscrito em uma semi-circunferência.

Processo de Visualização.
1 Imagem do tipo perceptiva.

30 Determine a medida da altura relativa à hipotenusa do triângulo retângulo ao lado sabendo que o raio da circunferência mede 5 m.

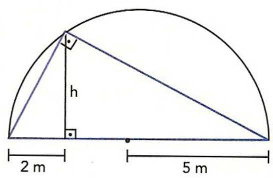


FIGURA 95 – Imagem que explora aplicação direta da fórmula.

Processo de Visualização.
1 Imagem do tipo perceptiva.

Na décima primeira página:

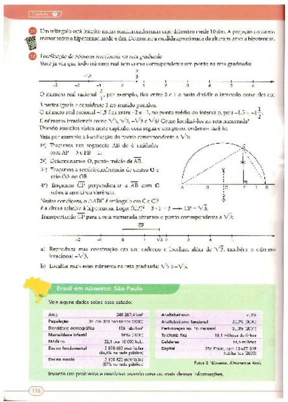
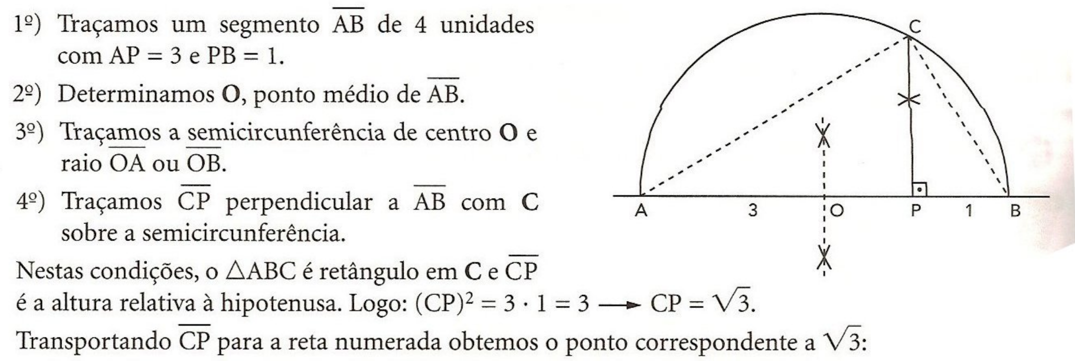


FIGURA 96 – Página 176 da coleção *Matemática* da 8ª série.



1º) Traçamos um segmento $\overline{AB}$ de 4 unidades com AP = 3 e PB = 1.

2º) Determinamos **O**, ponto médio de $\overline{AB}$.

3º) Traçamos a semicircunferência de centro **O** e raio $\overline{OA}$ ou $\overline{OB}$.

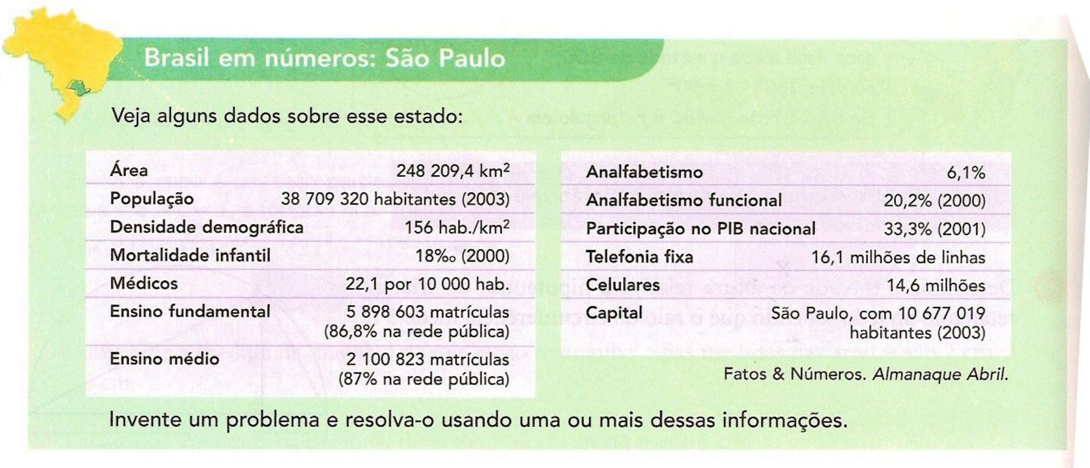
4º) Traçamos $\overline{CP}$ perpendicular a $\overline{AB}$ com **C** sobre a semicircunferência.

Nestas condições, o $\triangle ABC$ é retângulo em **C** e $\overline{CP}$ é a altura relativa à hipotenusa. Logo: $(CP)^2 = 3 \cdot 1 = 3 \longrightarrow CP = \sqrt{3}$.

Transportando $\overline{CP}$ para a reta numerada obtemos o ponto correspondente a $\sqrt{3}$:

FIGURA 97 – Exemplo de figura cuja apreensão é a seqüencial e a perceptiva.

Processo de Visualização.
1 Imagem do tipo seqüencial e perceptiva.



Brasil em números: São Paulo

Veja alguns dados sobre esse estado:

Área	248 209,4 km²	Analfabetismo	6,1%
População	38 709 320 habitantes (2003)	Analfabetismo funcional	20,2% (2000)
Densidade demográfica	156 hab./km²	Participação no PIB nacional	33,3% (2001)
Mortalidade infantil	18‰ (2000)	Telefonia fixa	16,1 milhões de linhas
Médicos	22,1 por 10 000 hab.	Celulares	14,6 milhões
Ensino fundamental	5 898 603 matrículas (86,8% na rede pública)	Capital	São Paulo, com 10 677 019 habitantes (2003)
Ensino médio	2 100 823 matrículas (87% na rede pública)		

Fatos & Números. *Almanaque Abril.*

Invente um problema e resolva-o usando uma ou mais dessas informações.

FIGURA 98 – Tabela que sugere a construção de um problema.

Processo de Visualização e Raciocínio
1 Imagem do tipo perceptiva e discursiva.

Na décima segunda página:

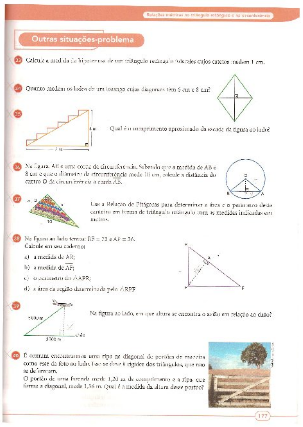


FIGURA 99 – Página 177 da coleção *Matemática* da 8ª série.

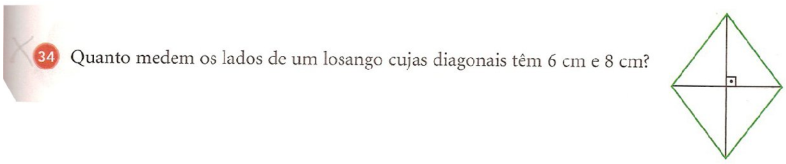


FIGURA 100 – Exercício explorando aplicação direta da fórmula.

Processo de Visualização.
1 imagem do tipo perceptiva.

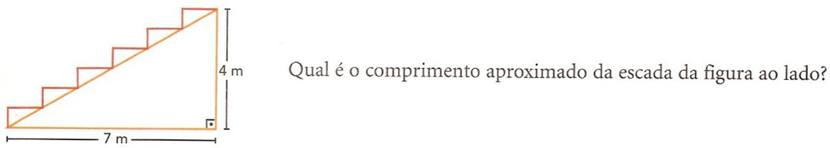


FIGURA 101 – Exemplo de problema que faz uso de imagens.

Processo de Visualização.
1 Imagem do tipo perceptiva.

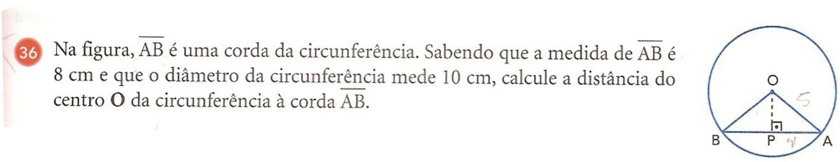


FIGURA 102 – Exemplo de figura perceptiva.

Processo de Visualização.
1 Imagem do tipo perceptiva.

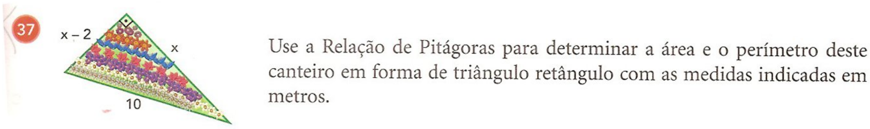


FIGURA 103 – Exemplo de exercício que utiliza aplicação direta da fórmula.

Processo de Visualização.
1 imagem do tipo perceptiva.

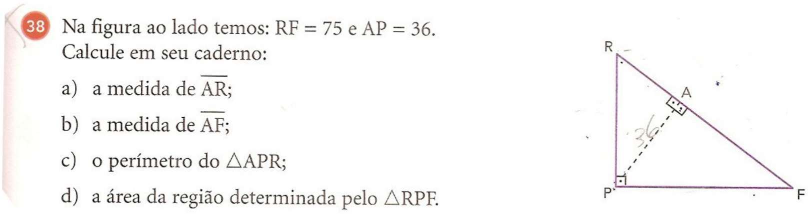


FIGURA 104 – Figura utilizando apenas o processo de visualização.

Processo de Visualização.
1 imagem do tipo perceptiva.

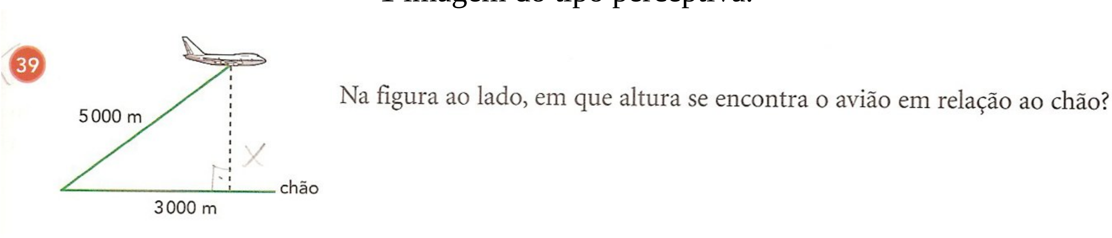


FIGURA 105 – Exercício que faz aplicação direta da fórmula.

Processo de Visualização.
1 imagem do tipo perceptiva.

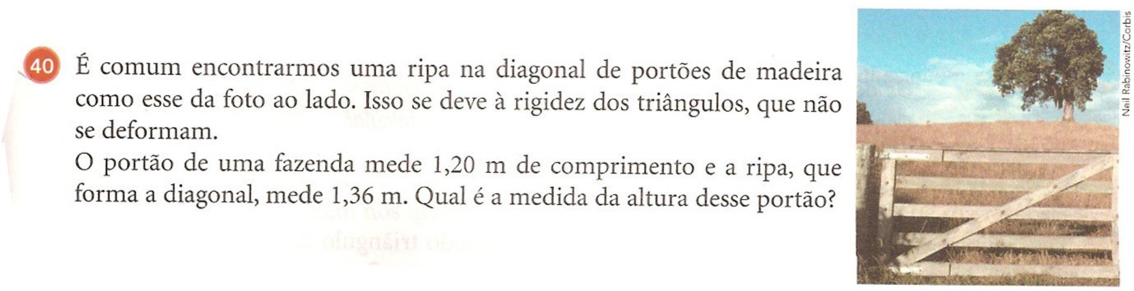
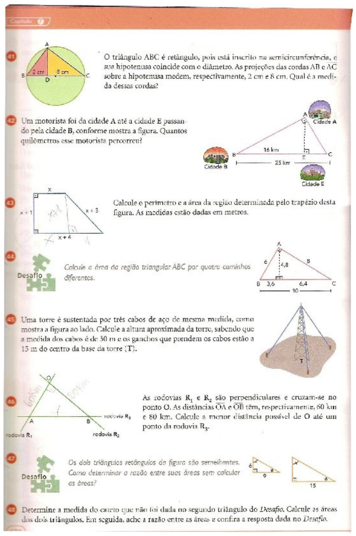


FIGURA 106 – Figura ilustrativa de contexto discursivo.

Processo de Visualização.
1 imagem do tipo discursiva.

Na décima terceira:



Capítulo 7

41 O triângulo ABC é retângulo, pois está inscrito na semicircunferência, e sua hipotenusa coincide com o diâmetro. As projeções das cordas $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa medem, respectivamente, 2 cm e 8 cm. Qual é a medida dessas cordas?

42 Um motorista foi da cidade **A** até a cidade **E** passando pela cidade **B**, conforme mostra a figura. Quantos quilômetros esse motorista percorreu?

43 Calcule o perímetro e a área da região determinada pelo trapézio desta figura. As medidas estão dadas em metros.

44 Desafio *Calcule a área da região triangular ABC por quatro caminhos diferentes.*

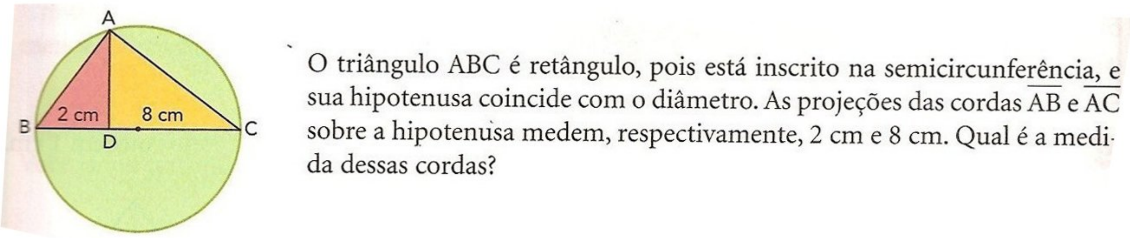
45 Uma torre é sustentada por três cabos de aço de mesma medida, como mostra a figura ao lado. Calcule a altura aproximada da torre, sabendo que a medida dos cabos é de 30 m e os ganchos que prendem os cabos estão a 15 m do centro da base da torre (T).

46 As rodovias R_1 e R_2 são perpendiculares e cruzam-se no ponto O. As distâncias $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ têm, respectivamente, 60 km e 80 km. Calcule a menor distância possível de O até um ponto da rodovia R_3.

47 Desafio *Os dois triângulos retângulos da figura são semelhantes. Como determinar a razão entre suas áreas sem calcular as áreas?*

48 Determine a medida do cateto que não foi dada no segundo triângulo do *Desafio*. Calcule as áreas dos dois triângulos. Em seguida, ache a razão entre as áreas e confira a resposta dada no *Desafio*.

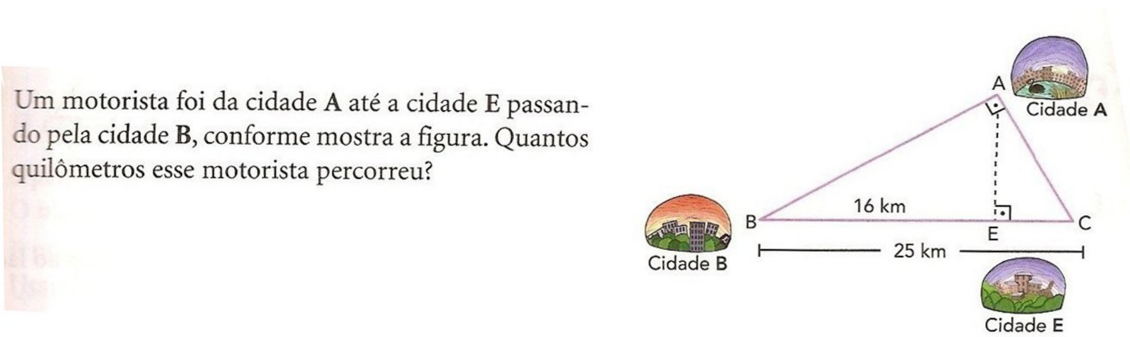
FIGURA 107 – Página 178 da coleção *Matemática* da 8ª série.



O triângulo ABC é retângulo, pois está inscrito na semicircunferência, e sua hipotenusa coincide com o diâmetro. As projeções das cordas $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa medem, respectivamente, 2 cm e 8 cm. Qual é a medida dessas cordas?

FIGURA 108 – Exemplo de exercício que aplica diretamente na fórmula.

Processo de Visualização.
1 Imagem do tipo perceptiva.



Um motorista foi da cidade **A** até a cidade **E** passando pela cidade **B**, conforme mostra a figura. Quantos quilômetros esse motorista percorreu?

FIGURA 109 – Exemplo de figura perceptiva.

Processo de Visualização.
1 Imagem do tipo perceptiva.

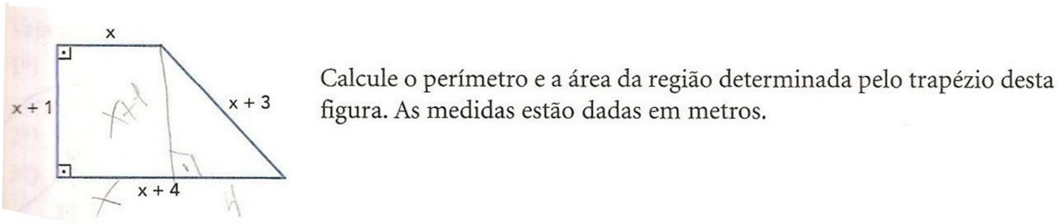


FIGURA 110 – Exercício onde haverá aplicação direta da fórmula duas vezes.

Processo de Visualização.
1 imagem do tipo perceptiva.

FIGURA 111 – Exemplo de figura que explora raciocínio geométrico.

Processo de Visualização e Raciocínio Geométrico.
1 imagem do tipo perceptiva e discursiva.

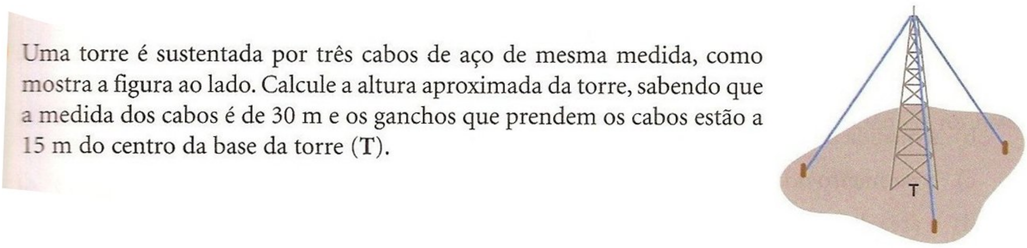


FIGURA 112 – Exemplo de figura que utiliza processo de visualização.

Processo de Visualização.
1 imagem do tipo perceptiva.

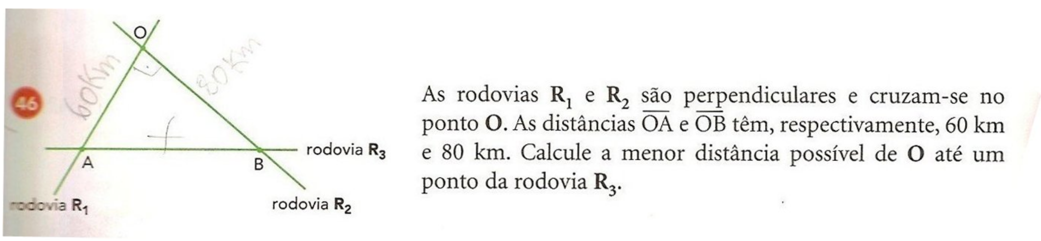


FIGURA 113 – Exemplo de figura que explora processo de visualização.

Processo de Visualização.
1 imagem do tipo perceptiva.

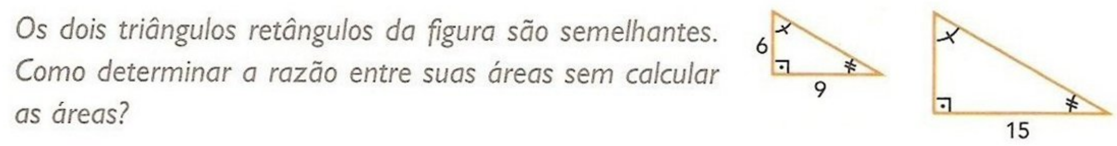
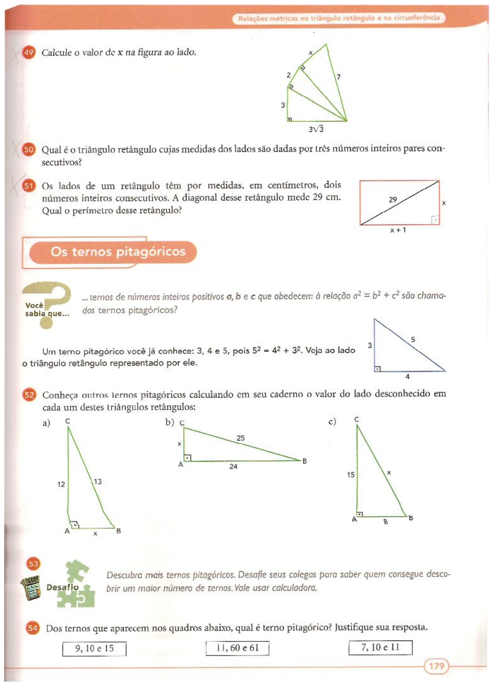


FIGURA 114 – Exemplos de problema que envolvam figuras discursivas.

Processo de Visualização e Raciocínio Geométrico.
2 Imagens do tipo perceptiva e discursiva.

Na décima quarta página:



Relações métricas no triângulo retângulo e na circunferência

49 Calcule o valor de **x** na figura ao lado.

50 Qual é o triângulo retângulo cujas medidas dos lados são dadas por três números inteiros pares consecutivos?

51 Os lados de um retângulo têm por medidas, em centímetros, dois números inteiros consecutivos. A diagonal desse retângulo mede 29 cm. Qual o perímetro desse retângulo?

Os ternos pitagóricos

Você sabia que...

*... ternos de números inteiros positivos **a**, **b** e **c** que obedecem à relação $a^2 = b^2 + c^2$ são chamados ternos pitagóricos?*

Um terno pitagórico você já conhece: 3, 4 e 5, pois $5^2 = 4^2 + 3^2$. Veja ao lado o triângulo retângulo representado por ele.

52 Conheça outros ternos pitagóricos calculando em seu caderno o valor do lado desconhecido em cada um destes triângulos retângulos:

a) b) c)

53 Desafio

Descubra mais ternos pitagóricos. Desafie seus colegas para saber quem consegue descobrir um maior número de ternos. Vale usar calculadora.

54 Dos ternos que aparecem nos quadros abaixo, qual é terno pitagórico? Justifique sua resposta.

9, 10 e 15	11, 60 e 61	7, 10 e 11

179

FIGURA 115 – Página 179 da coleção *Matemática* da 8ª série.

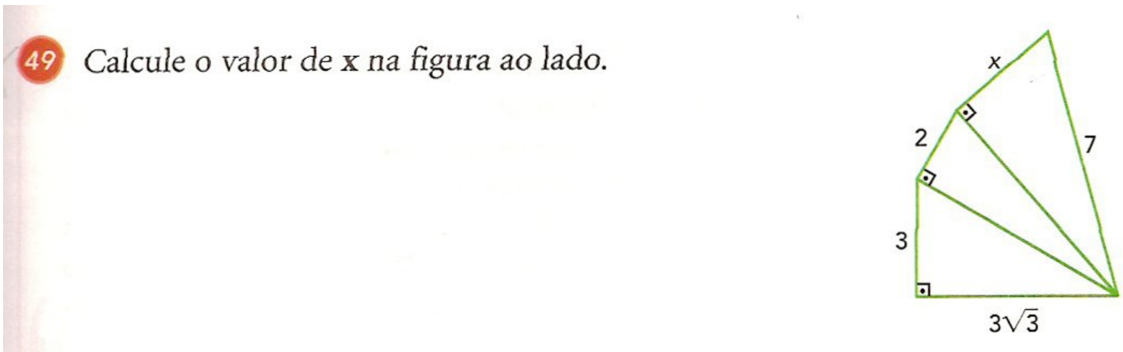


FIGURA 116 – Exemplo de figura que utiliza aplicação direta da formula três vezes.

Processo de Visualização
1 Imagem do tipo perceptiva.

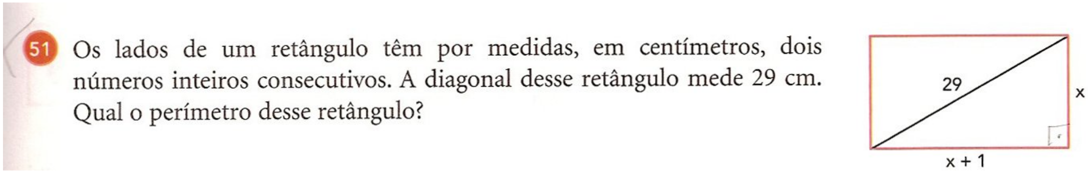

51 Os lados de um retângulo têm por medidas, em centímetros, dois números inteiros consecutivos. A diagonal desse retângulo mede 29 cm. Qual o perímetro desse retângulo?

FIGURA 117 – Exemplo de processo de visualização em exercícios.

Processo de Visualização
1 Imagem do tipo perceptiva.

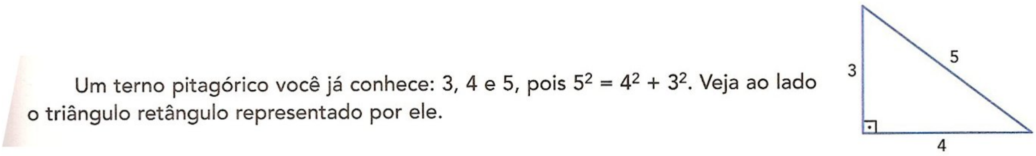

Um terno pitagórico você já conhece: 3, 4 e 5, pois $5^2 = 4^2 + 3^2$. Veja ao lado o triângulo retângulo representado por ele.

FIGURA 118 – Exemplo de imagem como recurso memorístico.

Processo de Visualização
1 Imagem do tipo perceptiva.

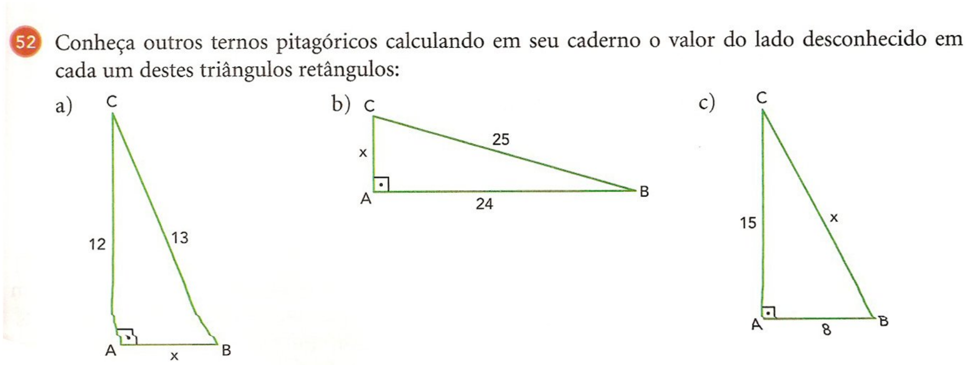

52 Conheça outros ternos pitagóricos calculando em seu caderno o valor do lado desconhecido em cada um destes triângulos retângulos:

FIGURA 119 – Exemplos de figuras com aplicações diretas da fórmula.

Processo de Visualização.
3 Imagens do tipo perceptiva.

Na décima quinta página:

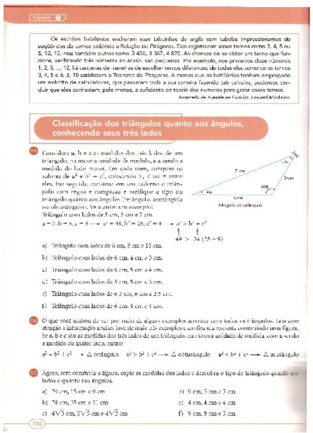
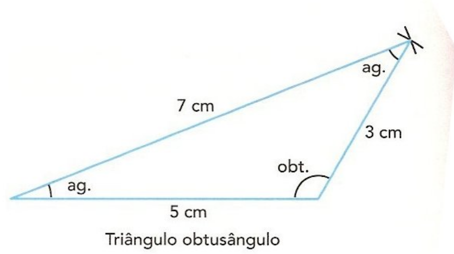

Classificação dos triângulos quanto aos ângulos, conhecendo seus três lados

FIGURA 120 – Página 180 da coleção *Matemática* da 8ª série.

55 Considere **a**, **b** e **c** as medidas dos três lados de um triângulo, na mesma unidade de medida, e **a** sendo a medida do lado maior. Em cada item, compare os valores de $\mathbf{a}^2$ e $b^2 + c^2$, colocando >, < ou = entre eles. Em seguida, construa em seu caderno o triângulo com régua e compasso e verifique o tipo do triângulo quanto aos ângulos (retângulo, acutângulo ou obtusângulo). Veja antes um exemplo:



Triângulo com lados de 5 cm, 3 cm e 7 cm.

$$a = 7,\ b = 5,\ c = 3 \longrightarrow a^2 = 49,\ b^2 = 25,\ c^2 = 9 \longrightarrow \underset{49\ >\ 34\ (25\ +\ 9)}{a^2 > b^2 + c^2}$$

a) Triângulo com lados de 6 cm, 8 cm e 10 cm.

b) Triângulo com lados de 6 cm, 4 cm e 3 cm.

c) Triângulo com lados de 6 cm, 5 cm e 4 cm.

d) Triângulo com lados de 5 cm, 5 cm e 3 cm.

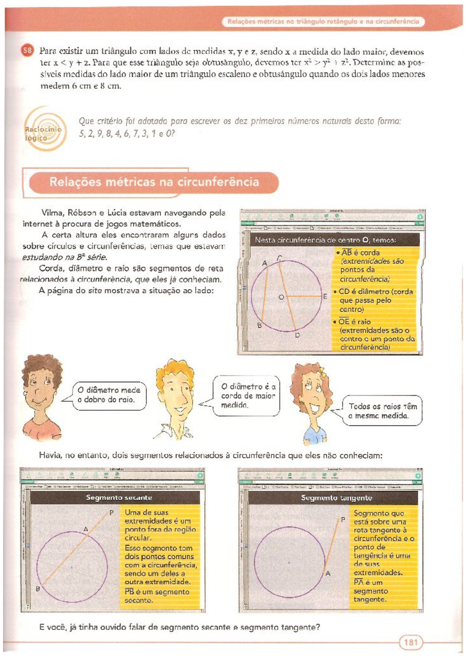
e) Triângulo com lados de 6,5 cm, 6 cm e 2,5 cm.

f) Triângulo com lados de 6 cm, 4 cm e 4 cm.

FIGURA 121 – Exemplo de problema que explora enunciado e ilustração.

Processo de Visualização e Construção.
1 Imagem do tipo perceptiva e discursiva.

Na décima sexta página:



Relações métricas no triângulo retângulo e na circunferência

58 Para existir um triângulo com lados de medidas x, y e z, sendo x a medida do lado maior, devemos ter $x < y + z$. Para que esse triângulo seja obtusângulo, devemos ter $x^2 > y^2 + z^2$. Determine as possíveis medidas do lado maior de um triângulo escaleno e obtusângulo quando os dois lados menores medem 6 cm e 8 cm.

Raciocínio lógico

Que critério foi adotado para escrever os dez primeiros números naturais desta forma: 5, 2, 9, 8, 4, 6, 7, 3, 1 e 0?

Relações métricas na circunferência

Vilma, Róbson e Lúcia estavam navegando pela internet à procura de jogos matemáticos.

A certa altura eles encontraram alguns dados sobre círculos e circunferências, temas que estavam *estudando na 8ª série*.

Corda, diâmetro e raio são segmentos de reta *relacionados à circunferência, que eles já conheciam.*

A página do *site* mostrava a situação ao lado:

Havia, no entanto, dois segmentos relacionados à circunferência que eles não conheciam:

E você, já tinha ouvido falar de segmento secante e segmento tangente?

181

FIGURA 122 – Página 181 da coleção *Matemática* da 8ª série.

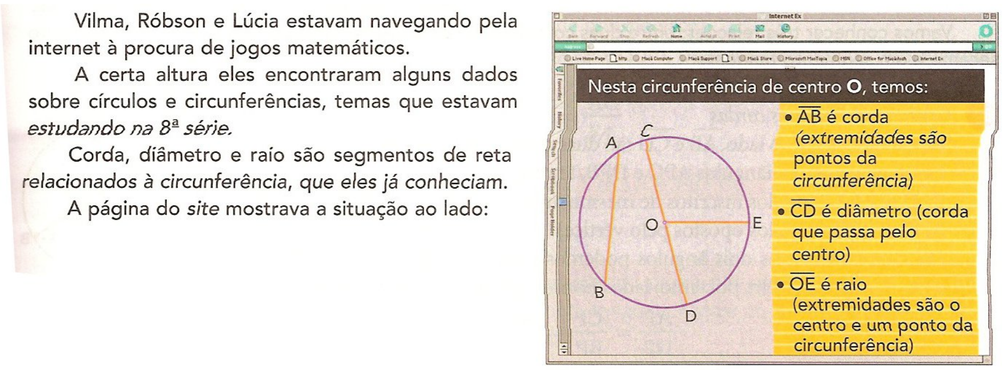


FIGURA 123 – Figura explorando os recursos memorísticos.

Processo de Visualização.
1 Imagem do tipo perceptiva.

FIGURA 124 – Recursos ilustrativos. 3 Imagens ilustrativas

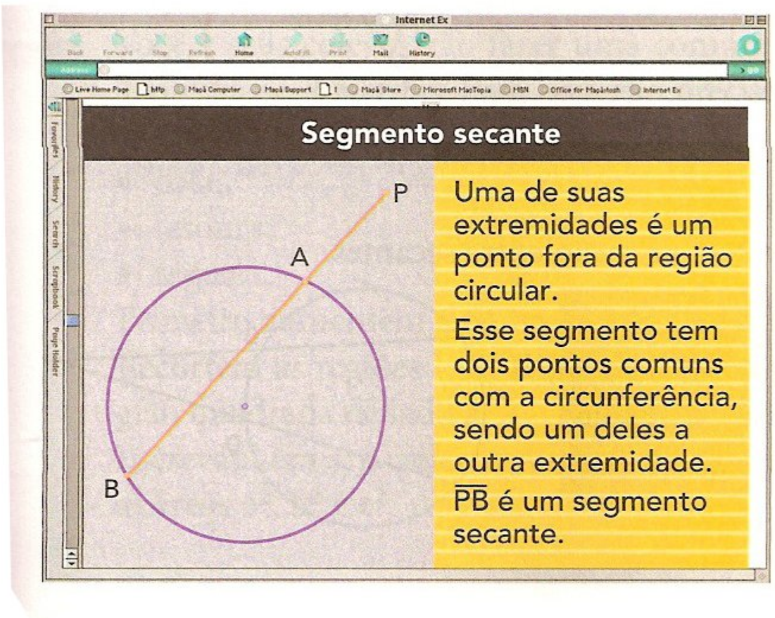


FIGURA 125 - Figura exemplificando segmento secante em uma circunferência.

Processo de Visualização.
1 Imagem do tipo perceptiva.

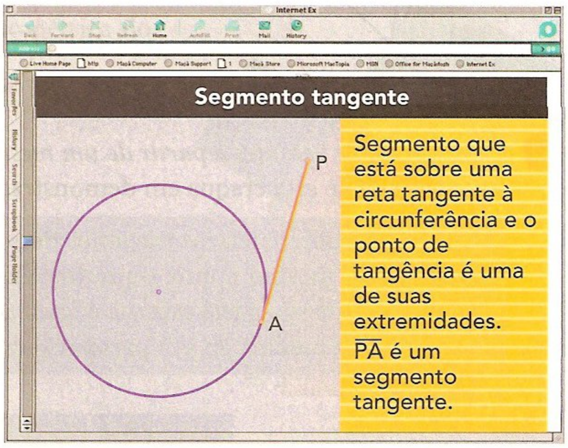


FIGURA 126 – Figura exemplificando segmento tangente em uma circunferência.

Processo de Visualização.
1 imagem do tipo perceptiva.

Na décima sétima página:

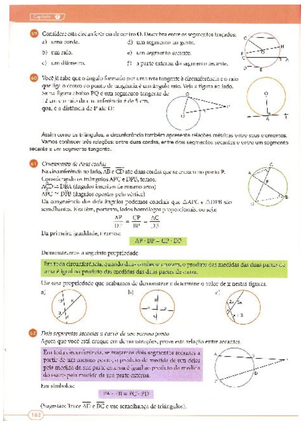
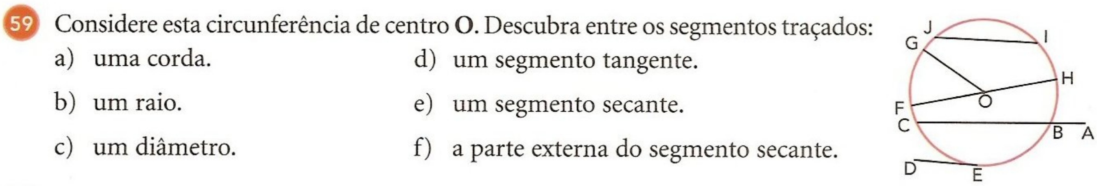


FIGURA 127 – Página 182 da coleção *Matemática* da 8ª série.



59 Considere esta circunferência de centro **O**. Descubra entre os segmentos traçados:

a) uma corda.

b) um raio.

c) um diâmetro.

d) um segmento tangente.

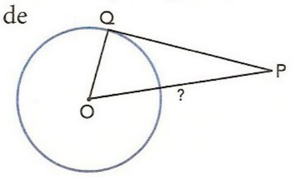
e) um segmento secante.

f) a parte externa do segmento secante.

FIGURA 128 – Figura explorando apenas processo de visualização.

Processo de Visualização.
1 imagem do tipo perceptiva.

60 Você já sabe que o ângulo formado por uma reta tangente à circunferência e o raio que liga o centro ao ponto de tangência é um ângulo reto. Veja a figura ao lado.
Se na figura abaixo $\overline{PQ}$ é um segmento tangente de 12 cm e o raio da circunferência é de 5 cm, qual é a distância de **P** até **O**?



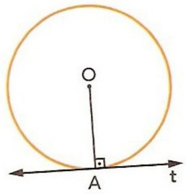
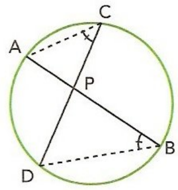


FIGURA 129 – Exemplos de figuras explorando problemas.

Processo de Visualização.
2 imagens do tipo perceptiva.

61 *Cruzamento de duas cordas*
Na circunferência ao lado, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são duas cordas que se cruzam no ponto **P**.
Considerando os triângulos APC e DPB, temos:
$A\hat{C}D \cong D\hat{B}A$ (ângulos inscritos de mesmo arco)
$A\hat{P}C \cong D\hat{P}B$ (ângulos opostos pelo vértice)
Da congruência dos dois ângulos podemos concluir que $\triangle APC$ e $\triangle DPB$ são semelhantes. Eles têm, portanto, lados homólogos proporcionais, ou seja:



$$\frac{AP}{DP} = \frac{CP}{BP} = \frac{AC}{DB}$$

Da primeira igualdade, tiramos:

$$AP \cdot BP = CP \cdot DP$$

Demonstramos a seguinte propriedade:

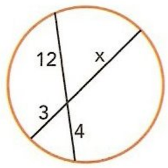
Em toda circunferência, quando duas cordas se cruzam, o produto das medidas das duas partes de uma é igual ao produto das medidas das duas partes de outra.

FIGURA 130 – Figura sendo usada para ilustrar as deduções de uma fórmula matemática.

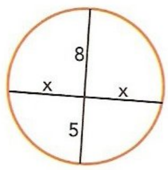
Processo de Visualização.
1 imagem do tipo perceptiva.

Use essa propriedade que acabamos de demonstrar e determine o valor de **x** nestas figuras:

a)



b)



c)

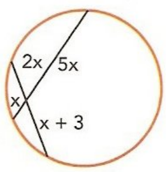
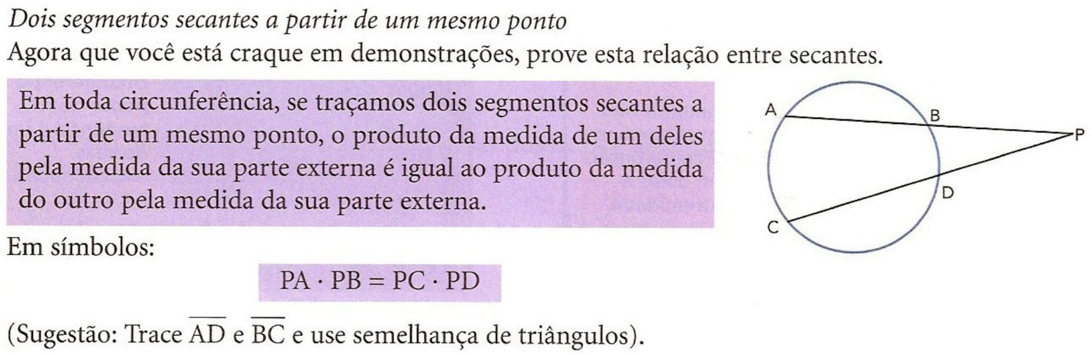


FIGURA 131 – Exemplos de problemas que faz aplicação direta da fórmula.

Processo de Visualização
3 imagens do tipo perceptiva



Dois segmentos secantes a partir de um mesmo ponto

Agora que você está craque em demonstrações, prove esta relação entre secantes.

Em toda circunferência, se traçamos dois segmentos secantes a partir de um mesmo ponto, o produto da medida de um deles pela medida da sua parte externa é igual ao produto da medida do outro pela medida da sua parte externa.

Em símbolos:

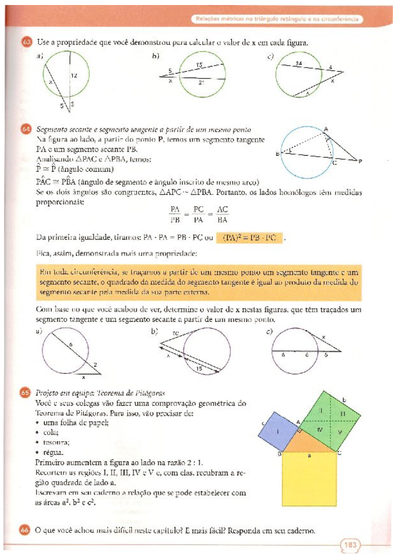
$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

(Sugestão: Trace $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ e use semelhança de triângulos).

FIGURA 132 – Exemplo de problema que explora imagem e enunciado.

Processo de Visualização e Raciocínio Geométrico.
1 imagem do tipo perceptiva e discursiva.

Na décima oitava página:



Relações métricas no triângulo retângulo e na circunferência

63 Use a propriedade que você demonstrou para calcular o valor de **x** em cada figura.

a) b) c)

64 *Segmento secante e segmento tangente a partir de um mesmo ponto*

Na figura ao lado, a partir do ponto **P**, temos um segmento tangente PA e um segmento secante PB.

Analisando $\triangle PAC$ e $\triangle PBA$, temos:

$\hat{P} \cong \hat{P}$ (ângulo comum)

$P\hat{A}C \cong P\hat{B}A$ (ângulo de segmento e ângulo inscrito de mesmo arco)

Se os dois ângulos são congruentes, $\triangle APC \sim \triangle PBA$. Portanto, os lados homólogos têm medidas proporcionais:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PA} = \frac{AC}{BA}$$

Da primeira igualdade, tiramos: $PA \cdot PA = PB \cdot PC$ ou $(PA)^2 = PB \cdot PC$.

Fica, assim, demonstrada mais uma propriedade:

Em toda circunferência, se traçamos a partir de um mesmo ponto um segmento tangente e um segmento secante, o quadrado da medida do segmento tangente é igual ao produto da medida do segmento secante pela medida da sua parte externa.

Com base no que você acabou de ver, determine o valor de x nestas figuras, que têm traçados um segmento tangente e um segmento secante a partir de um mesmo ponto.

a) b) c)

65 *Projeto em equipe: Teorema de Pitágoras*

Você e seus colegas vão fazer uma comprovação geométrica do Teorema de Pitágoras. Para isso, vão precisar de:

- uma folha de papel;
- cola;
- tesoura;
- régua.

Primeiro aumentem a figura ao lado na razão 2 : 1.

Recortem as regiões I, II, III, IV e V e, com elas, recubram a região quadrada de lado a.

Escrevam em seu caderno a relação que se pode estabelecer com as áreas a^2, b^2 e c^2.

66 O que você achou mais difícil neste capítulo? E mais fácil? Responda em seu caderno.

183

FIGURA 133 – Página 183 da coleção *Matemática* da 8ª série.

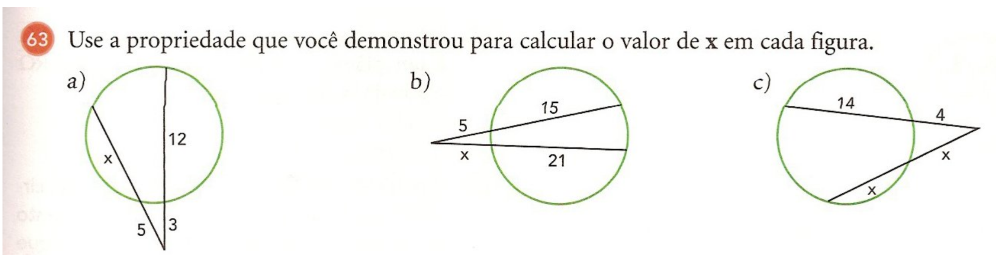
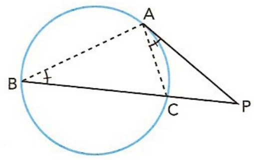


FIGURA 134 – Exercício cuja resolução resulta em aplicação da fórmula.

Processo de Visualização.
3 imagens do tipo perceptiva.

64 *Segmento secante e segmento tangente a partir de um mesmo ponto*

Na figura ao lado, a partir do ponto **P**, temos um segmento tangente $\overline{PA}$ e um segmento secante $\overline{PB}$.



Analisando $\triangle PAC$ e $\triangle PBA$, temos:

$\hat{P} \cong \hat{P}$ (ângulo comum)

$P\hat{A}C \cong P\hat{B}A$ (ângulo de segmento e ângulo inscrito de mesmo arco)

Se os dois ângulos são congruentes, $\triangle APC \sim \triangle PBA$. Portanto, os lados homólogos têm medidas proporcionais:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PA} = \frac{AC}{BA}$$

Da primeira igualdade, tiramos: $PA \cdot PA = PB \cdot PC$ ou $\boxed{(PA)^2 = PB \cdot PC}$.

Fica, assim, demonstrada mais uma propriedade:

FIGURA 135 – Ilustração usada como auxílio a dedução de uma fórmula.

Processo de Visualização.
1 imagem do tipo perceptiva.

Com base no que você acabou de ver, determine o valor de **x** nestas figuras, que têm traçados um segmento tangente e um segmento secante a partir de um mesmo ponto.

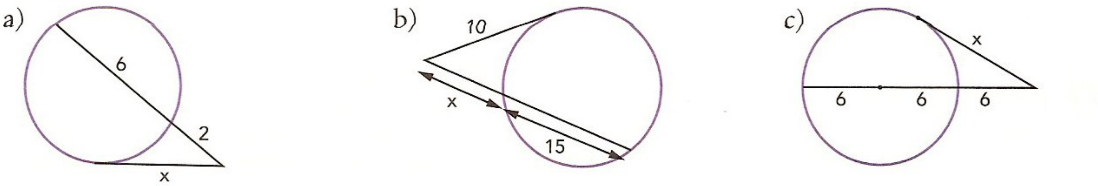


FIGURA 136 – Exemplo de figuras que fazem aplicação direta da fórmula.

Processo de Visualização.
3 imagens do tipo perceptiva.

Projeto em equipe: Teorema de Pitágoras

Você e seus colegas vão fazer uma comprovação geométrica do Teorema de Pitágoras. Para isso, vão precisar de:

- uma folha de papel;
- cola;
- tesoura;
- régua.

Primeiro aumentem a figura ao lado na razão 2 : 1.

Recortem as regiões I, II, III, IV e V e, com elas, recubram a região quadrada de lado **a**.

Escrevam em seu caderno a relação que se pode estabelecer com as áreas $\mathbf{a^2}$, $\mathbf{b^2}$ e $\mathbf{c^2}$.

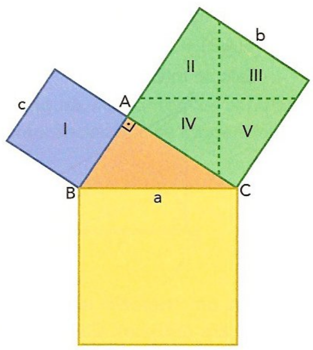
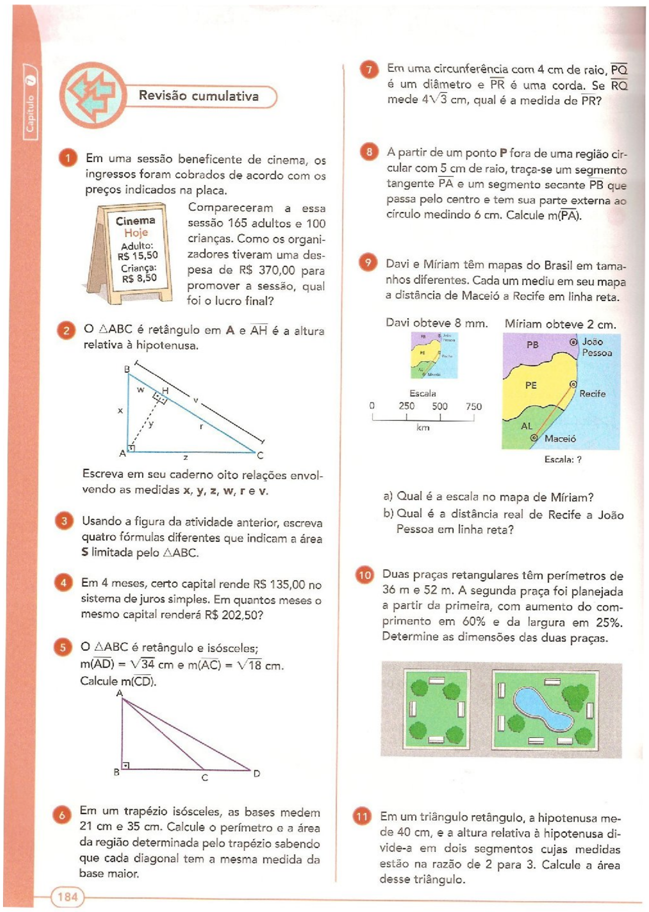


FIGURA 137 – Figura trabalhando heurística.

Processo de Visualização, Construção e Raciocínio Geométrico.
1 imagem do tipo seqüencial, perceptiva, discursiva e operatória.
Apreensão operatória sofreu modificação mereológico.

Na décima nona página:



Capítulo 7

Revisão cumulativa

1 Em uma sessão beneficente de cinema, os ingressos foram cobrados de acordo com os preços indicados na placa.

Compareceram a essa sessão 165 adultos e 100 crianças. Como os organizadores tiveram uma despesa de R$ 370,00 para promover a sessão, qual foi o lucro final?

2 O $\triangle ABC$ é retângulo em **A** e $\overline{AH}$ é a altura relativa à hipotenusa.

Escreva em seu caderno oito relações envolvendo as medidas **x**, **y**, **z**, **w**, **r** e **v**.

3 Usando a figura da atividade anterior, escreva quatro fórmulas diferentes que indicam a área **S** limitada pelo $\triangle ABC$.

4 Em 4 meses, certo capital rende R$ 135,00 no sistema de juros simples. Em quantos meses o mesmo capital renderá R$ 202,50?

5 O $\triangle ABC$ é retângulo e isósceles; $m(\overline{AD}) = \sqrt{34}$ cm e $m(\overline{AC}) = \sqrt{18}$ cm. Calcule $m(\overline{CD})$.

6 Em um trapézio isósceles, as bases medem 21 cm e 35 cm. Calcule o perímetro e a área da região determinada pelo trapézio sabendo que cada diagonal tem a mesma medida da base maior.

7 Em uma circunferência com 4 cm de raio, $\overline{PQ}$ é um diâmetro e $\overline{PR}$ é uma corda. Se $\overline{RQ}$ mede $4\sqrt{3}$ cm, qual é a medida de $\overline{PR}$?

8 A partir de um ponto **P** fora de uma região circular com 5 cm de raio, traça-se um segmento tangente $\overline{PA}$ e um segmento secante $\overline{PB}$ que passa pelo centro e tem sua parte externa ao círculo medindo 6 cm. Calcule $m(\overline{PA})$.

9 Davi e Míriam têm mapas do Brasil em tamanhos diferentes. Cada um mediu em seu mapa a distância de Maceió a Recife em linha reta.

Davi obteve 8 mm. Míriam obteve 2 cm.

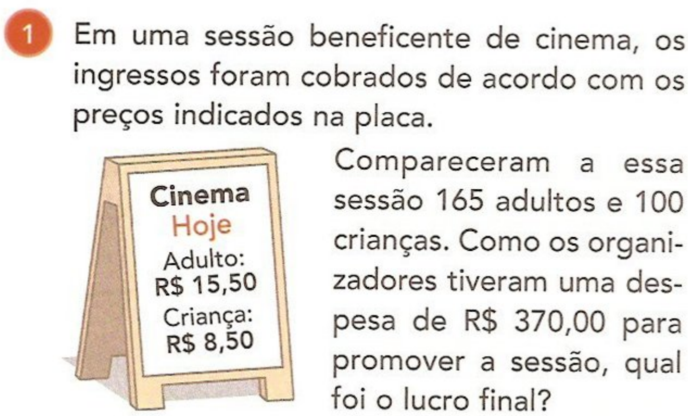
a) Qual é a escala no mapa de Míriam?
b) Qual é a distância real de Recife a João Pessoa em linha reta?

10 Duas praças retangulares têm perímetros de 36 m e 52 m. A segunda praça foi planejada a partir da primeira, com aumento do comprimento em 60% e da largura em 25%. Determine as dimensões das duas praças.

11 Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 40 cm, e a altura relativa à hipotenusa divide-a em dois segmentos cujas medidas estão na razão de 2 para 3. Calcule a área desse triângulo.

184

FIGURA 138 – Página 184 da coleção *Matemática* da 8ª série.



1 Em uma sessão beneficente de cinema, os ingressos foram cobrados de acordo com os preços indicados na placa.

Compareceram a essa sessão 165 adultos e 100 crianças. Como os organizadores tiveram uma despesa de R$ 370,00 para promover a sessão, qual foi o lucro final?

FIGURA 139 – Figura ilustrativa.

Processo de Visualização.
1 imagem ilustrativa.

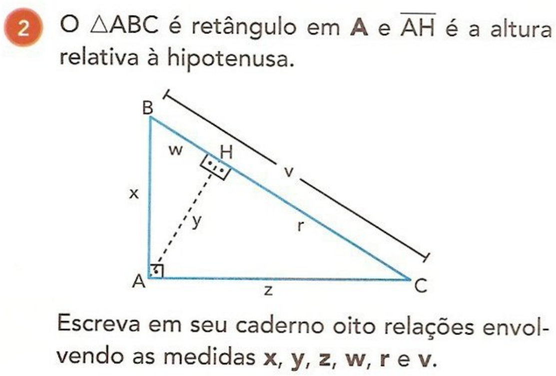


FIGURA 140 – Exemplo de enunciado que privilegia o caráter discursivo da imagem.

Processo de Visualização.
1 imagem do tipo perceptiva e discursiva.

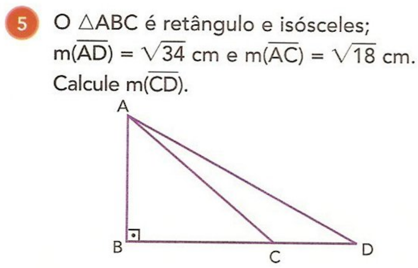


FIGURA 141 – Exemplo de figura que explora apenas o processo de visualização.

Processo de Visualização.
1 imagem do tipo perceptiva.

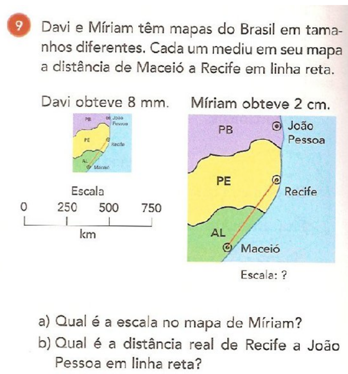


FIGURA 142 – Exemplo de figura usada apenas como recurso de ilustração.

Processo de Visualização.
2 imagens ilustrativas.

10 Duas praças retangulares têm perímetros de 36 m e 52 m. A segunda praça foi planejada a partir da primeira, com aumento do comprimento em 60% e da largura em 25%. Determine as dimensões das duas praças.

FIGURA 143 – Exemplo de figuras usadas para embelezar o livro.

Processo de Visualização.
1 imagem do tipo perceptiva.

Na vigésima página:

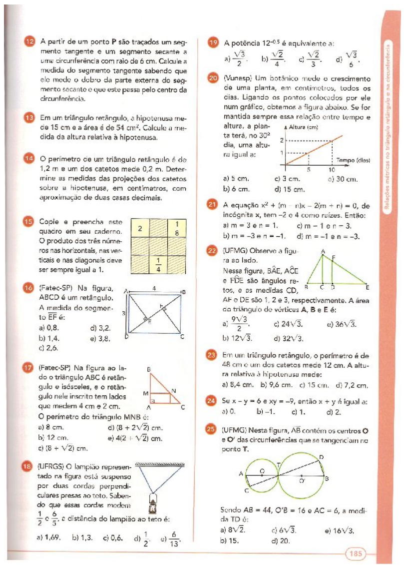
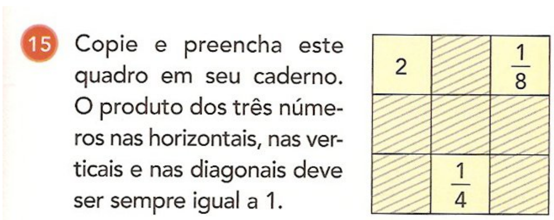


FIGURA 144 – Página 185 da coleção *Matemática* da 8ª série.

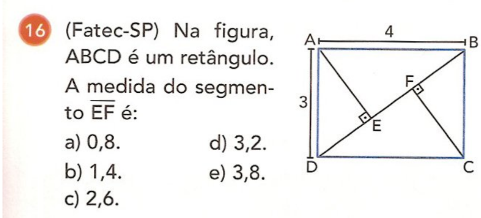


15 Copie e preencha este quadro em seu caderno. O produto dos três números nas horizontais, nas verticais e nas diagonais deve ser sempre igual a 1.

2		$\frac{1}{8}$
	$\frac{1}{4}$	

FIGURA 145 – Exemplo de problema que articula figura e enunciado.

Processo de Visualização.
1 imagem do tipo seqüencial, perceptiva e discursiva.

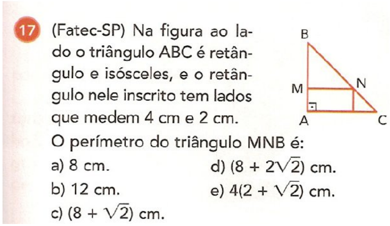


16 (Fatec-SP) Na figura, ABCD é um retângulo. A medida do segmento $\overline{EF}$ é:

a) 0,8. d) 3,2.
b) 1,4. e) 3,8.
c) 2,6.

FIGURA 146 – Exemplo de figura que explora processo de visualização.

Processo de Visualização.
1 imagem do tipo perceptiva.

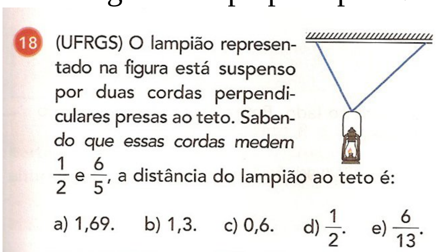


17 (Fatec-SP) Na figura ao lado o triângulo ABC é retângulo e isósceles, e o retângulo nele inscrito tem lados que medem 4 cm e 2 cm.
O perímetro do triângulo MNB é:

a) 8 cm. d) $(8 + 2\sqrt{2})$ cm.
b) 12 cm. e) $4(2 + \sqrt{2})$ cm.
c) $(8 + \sqrt{2})$ cm.

FIGURA 147 – Exemplo de figura perceptiva.

Processo de Visualização.
1 imagem do tipo perceptiva.

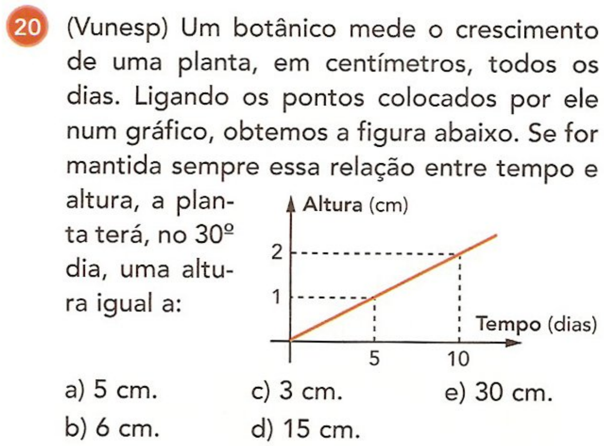


18 (UFRGS) O lampião representado na figura está suspenso por duas cordas perpendiculares presas ao teto. Sabendo que essas cordas medem $\frac{1}{2}$ e $\frac{6}{5}$, a distância do lampião ao teto é:

a) 1,69. b) 1,3. c) 0,6. d) $\frac{1}{2}$. e) $\frac{6}{13}$.

FIGURA 148 – Exemplo de figura apenas ilustrativa.

Processo de Visualização.
1 imagem do tipo perceptiva.

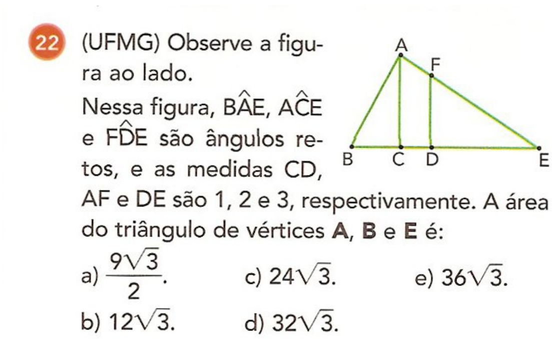


20 (Vunesp) Um botânico mede o crescimento de uma planta, em centímetros, todos os dias. Ligando os pontos colocados por ele num gráfico, obtemos a figura abaixo. Se for mantida sempre essa relação entre tempo e altura, a planta terá, no 30º dia, uma altura igual a:

a) 5 cm. c) 3 cm. e) 30 cm.
b) 6 cm. d) 15 cm.

FIGURA 149 – Exemplo de figura perceptiva.

Processo de Visualização.
1 imagem do tipo perceptiva.

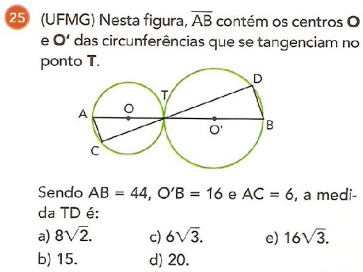


22 (UFMG) Observe a figura ao lado.
Nessa figura, $B\hat{A}E$, $A\hat{C}E$ e $F\hat{D}E$ são ângulos retos, e as medidas CD, AF e DE são 1, 2 e 3, respectivamente. A área do triângulo de vértices **A**, **B** e **E** é:

a) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.
b) $12\sqrt{3}$.
c) $24\sqrt{3}$.
d) $32\sqrt{3}$.
e) $36\sqrt{3}$.

FIGURA 150 – Exemplo de figura usada em problema.

Processo de Visualização.
1 imagem do tipo perceptiva.



25 (UFMG) Nesta figura, $\overline{AB}$ contém os centros **O** e **O'** das circunferências que se tangenciam no ponto **T**.

Sendo AB = 44, O'B = 16 e AC = 6, a medida TD é:

a) $8\sqrt{2}$.
b) 15.
c) $6\sqrt{3}$.
d) 20.
e) $16\sqrt{3}$.

FIGURA 151 – Figura onde se deve aplicar a fórmula diretamente duas vezes.

Processo de Visualização.
1 imagem do tipo perceptiva.

Na vigésima primeira página:

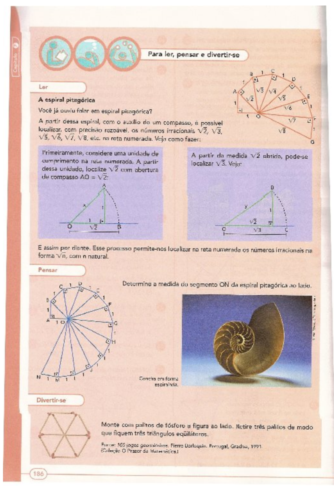


FIGURA 152 – Página 186 da coleção *Matemática* da 8ª série.

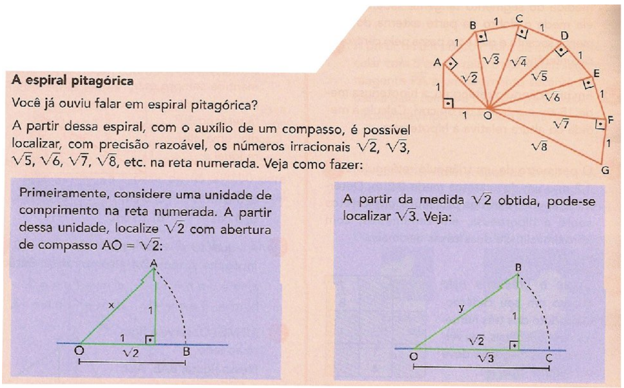


FIGURA 153 – Figura mostrando a aplicação do teorema de Pitágoras várias vezes.

Processo de Visualização.
3 Imagens do tipo perceptiva.

FIGURA 154 – Exercício onde se deve aplicar a fórmula várias vezes.

Processo de Visualização.
2 imagens, uma do tipo perceptiva e a outra ilustrativa.

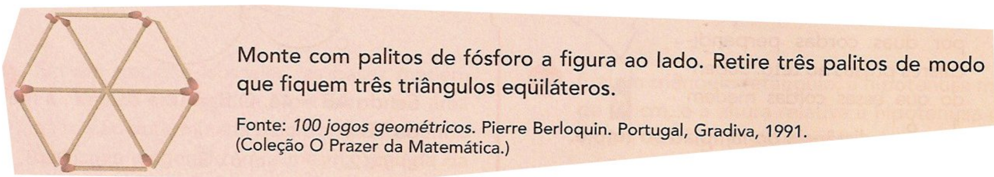


FIGURA 155 – Exemplo de figura que aplica modificação ótica heuristicamente.

Processo de Visualização e Construção.
1 imagem do tipo seqüencial, perceptiva, discursiva e operatória.
A apreensão operatória sofreu modificação ótica.

ANEXO III

As imagens aqui mapeadas seguem a lógica das analisadas nos anexos anteriores. Analisamo-las aquelas referentes ao contexto as quais estão impostas pelo enunciado e que sugere como devem ser exploradas. Realçamos que cada imagem pode ser lida, ou apreendida de forma distinta, mas as mapeamos aqui por ser uma sugestão do autor de como ele deveria ser lida.

Na 1ª página existem 11 imagens. Todas são exploradas unicamente pela função cognitiva da visualização. As duas primeiras imagens são do tipo perceptivas e discursivas.

As demais imagens são apenas perceptivas.

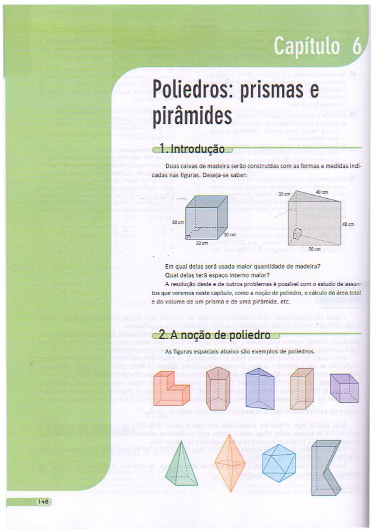


FIGURA 156 – Página 148 da coleção *Matemática* do 3º ano.

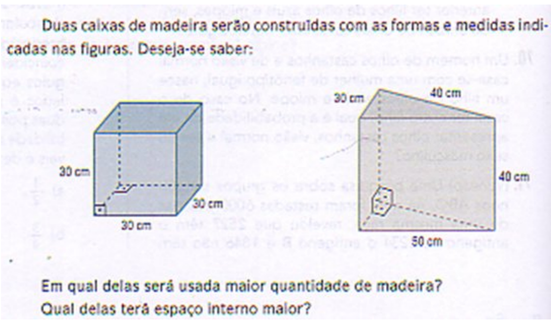


FIGURA 157 – Exemplo de imagens do perceptiva e discursiva.

Já na 2ª página existem 10 imagens que se utilizam apenas do processo cognitivo da visualização. Todas as imagens são do tipo perceptiva.

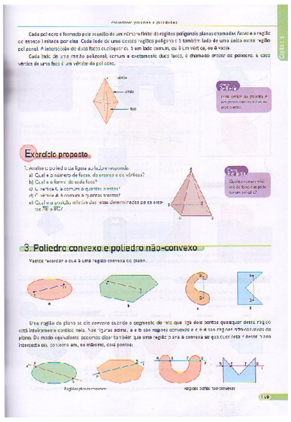


FIGURA 157 – Página 149 da coleção *Matemática* do 3º ano.

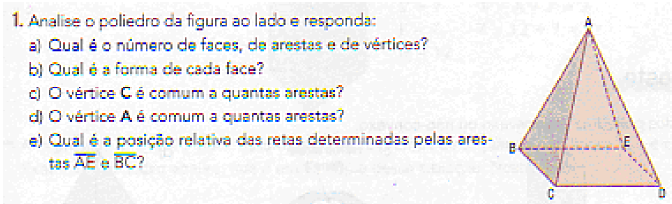
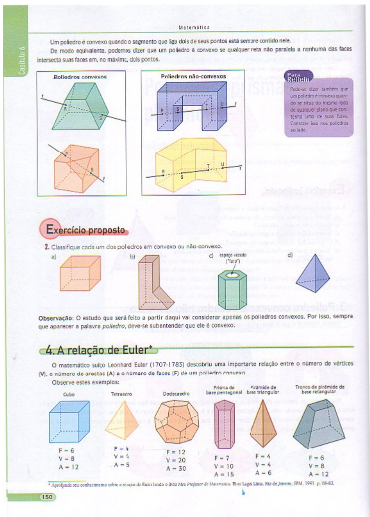


FIGURA 158: Exemplo de problema que utiliza processo de contagem

Na 3ª página as imagens são apenas visualizadas como processo cognitivo. Existe um total de 14 imagens e todas são do tipo perceptiva.


Matemática

Exercício proposto

4. A relação de Euler*

150

FIGURA 159 – Página 150 da coleção *Matemática* do 3º ano.

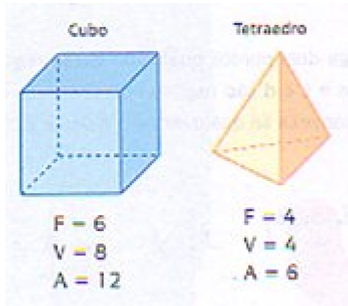
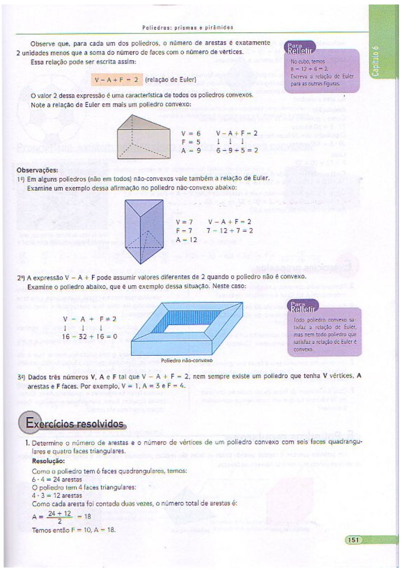


FIGURA 160: Imagens que utilizam apenas o processo de visualização.

Na 4ª página as 3 imagens são apenas visualizadas e sugerem ser classificadas como do tipo perceptivas.


Poliedros: prismas e pirâmides

V − A + F = 2 (relação de Euler)

Exercícios resolvidos

151

FIGURA 161 – Página 151 da coleção *Matemática* do 3º ano.

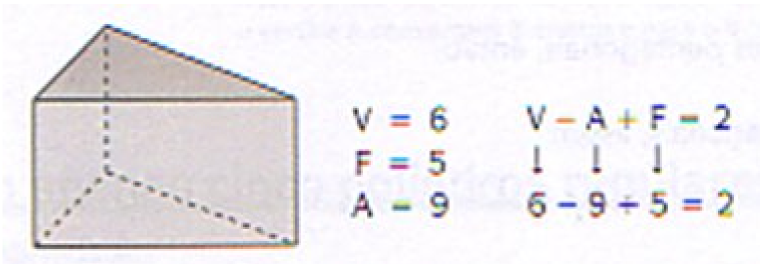


FIGURA 162: Imagem do tipo perceptiva

Na 5ª página existem 4 imagens que oferecem apenas a condição de visualização e imagens do perceptiva.

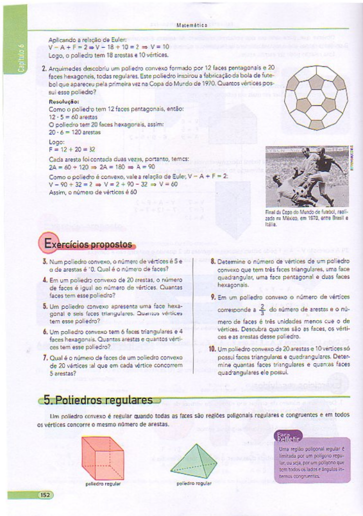


FIGURA 163 – Página 152 da coleção *Matemática* do 3º ano.

Na 6ª página são 6 imagens, das quais 2 são do tipo perceptivas e 4 do tipo perceptivas discursiva e operatória. Todas as imagens oferecem apenas a possibilidade de exploração visual.

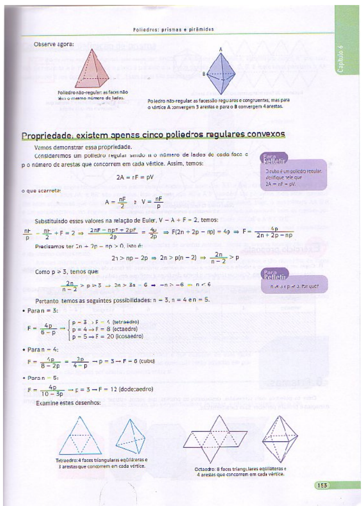


FIGURA 164 – Página 153 da coleção *Matemática* do 3º ano.

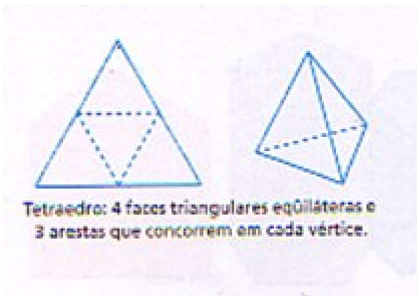


FIGURA 165: Figura que sofreu modificação do tipo operatório – mereológico.

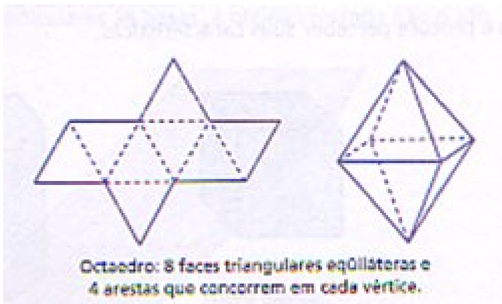
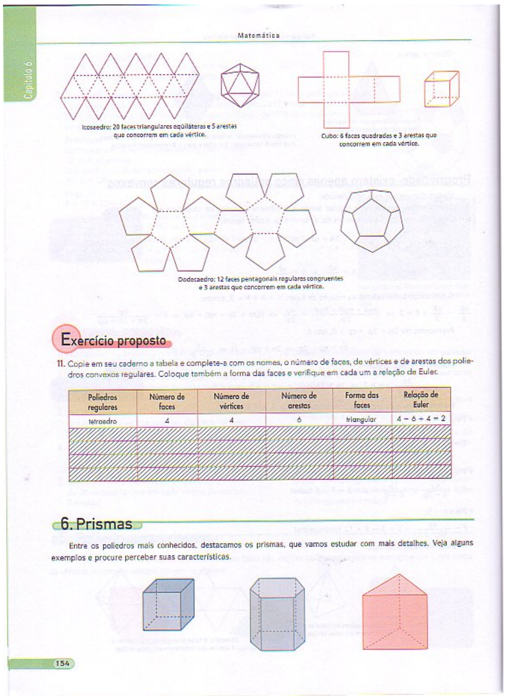


FIGURA 166: Exemplo de figura que sofreu modificação mereológico.

Na 7ª página existem 11 imagens, das quais: as 7 primeiras são do tipo perceptiva, discursiva e operatória. Elas oferecem a possibilidade de serem visualizadas. Essas 7 imagens sofreram modificações mereológicas. A oitava imagem é uma tabela que oferece a possibilidade de visualização e construção. Ainda assim é uma figura apenas perceptiva. Já as 3 últimas imagens são do tipo perceptivas e discursivas e oferecem a possibilidade de uma exploração visual.



Capítulo 6

Matemática

Icosaedro: 20 faces triangulares eqüiláteras e 5 arestas que concorrem em cada vértice.

Cubo: 6 faces quadradas e 3 arestas que concorrem em cada vértice.

Dodecaedro: 12 faces pentagonais regulares congruentes e 3 arestas que concorrem em cada vértice.

Exercício proposto

11. Copie em seu caderno a tabela e complete-a com os nomes, o número de faces, de vértices e de arestas dos poliedros convexos regulares. Coloque também a forma das faces e verifique em cada um a relação de Euler.

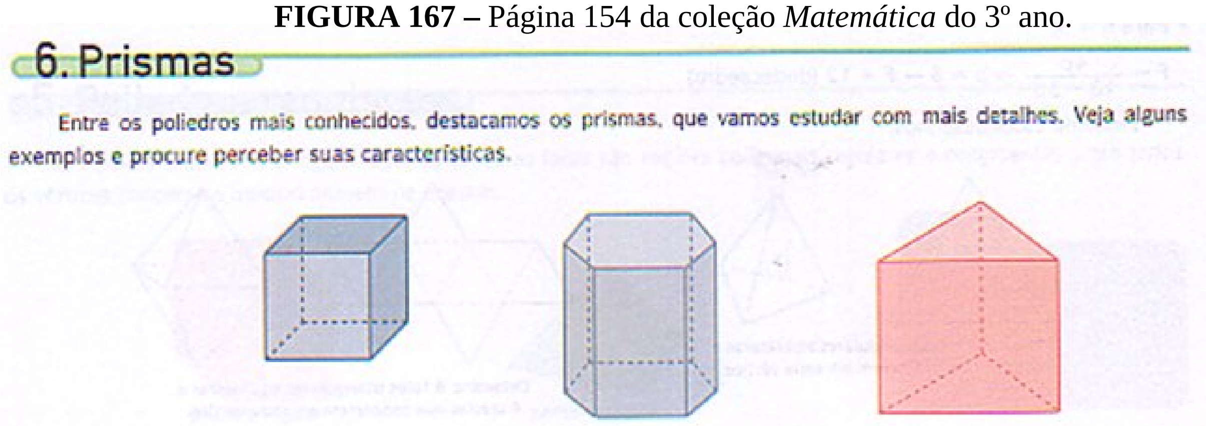
Poliedros regulares	Número de faces	Número de vértices	Número de arestas	Forma das faces	Relação de Euler
tetraedro	4	4	6	triangular	4 − 6 + 4 = 2

6. Prismas

Entre os poliedros mais conhecidos, destacamos os prismas, que vamos estudar com mais detalhes. Veja alguns exemplos e procure perceber suas características.

154

FIGURA 167 – Página 154 da coleção *Matemática* do 3º ano.

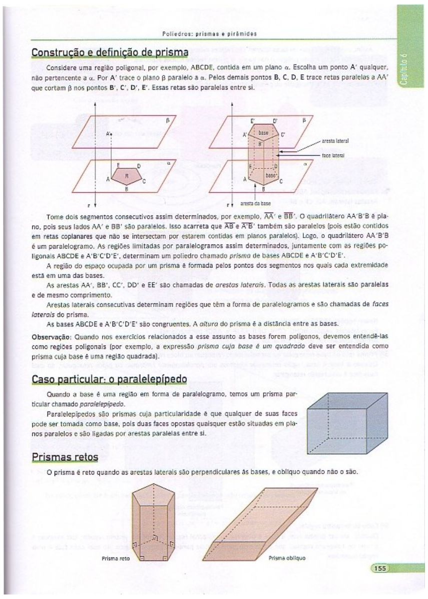


6. Prismas

Entre os poliedros mais conhecidos, destacamos os prismas, que vamos estudar com mais detalhes. Veja alguns exemplos e procure perceber suas características.

FIGURA 168 – Figuras perceptivas e discursivas em problemas.

Na 8ª página são 5 imagens onde todas são do tipo perceptiva.


Poliedros: prismas e pirâmides

Capítulo 6

Construção e definição de prisma

Considere uma região poligonal, por exemplo, ABCDE, contida em um plano α. Escolha um ponto A′ qualquer, não pertencente a α. Por A′ trace o plano β paralelo a α. Pelos demais pontos B, C, D, E trace retas paralelas a AA′ que cortam β nos pontos B′, C′, D′, E′. Essas retas são paralelas entre si.

Tome dois segmentos consecutivos assim determinados, por exemplo, $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$. O quadrilátero AA′B′B é plano, pois seus lados AA′ e BB′ são paralelos. Isso acarreta que $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ também são paralelos (pois estão contidos em retas coplanares que não se intersectam por estarem contidas em planos paralelos). Logo, o quadrilátero AA′B′B é um paralelogramo. As regiões limitadas por paralelogramos assim determinados, juntamente com as regiões poligonais ABCDE e A′B′C′D′E′, determinam um poliedro chamado *prisma* de bases ABCDE e A′B′C′D′E′.

A região do espaço ocupada por um prisma é formada pelos pontos dos segmentos nos quais cada extremidade está em uma das bases.

As arestas AA′, BB′, CC′, DD′ e EE′ são chamadas de *arestas laterais*. Todas as arestas laterais são paralelas e de mesmo comprimento.

Arestas laterais consecutivas determinam regiões que têm a forma de paralelogramos e são chamadas de *faces laterais* do prisma.

As bases ABCDE e A′B′C′D′E′ são congruentes. A *altura* do prisma é a distância entre as bases.

Observação: Quando nos exercícios relacionados a esse assunto as bases forem polígonos, devemos entendê-las como regiões poligonais (por exemplo, a expressão *prisma cuja base é um quadrado* deve ser entendida como prisma cuja base é uma região quadrada).

Caso particular: o paralelepípedo

Quando a base é uma região em forma de paralelogramo, temos um prisma particular chamado *paralelepípedo*.

Paralelepípedos são prismas cuja particularidade é que qualquer de suas faces pode ser tomada como base, pois duas faces opostas quaisquer estão situadas em planos paralelos e são ligadas por arestas paralelas entre si.

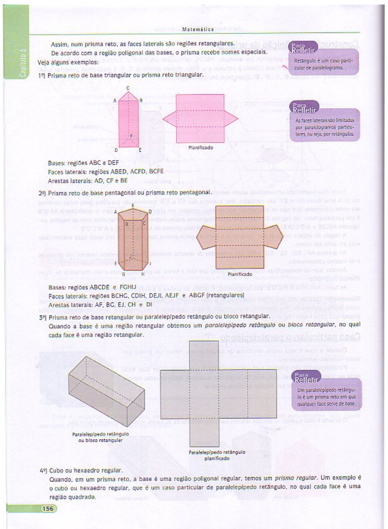
Prismas retos

O prisma é reto quando as arestas laterais são perpendiculares às bases, e oblíquo quando não o são.

155

FIGURA 169 – Página 155 da coleção *Matemática* do 3º ano.

Na 9ª página existem 6 imagens, todas são do tipo perceptiva, discursiva e operatória, sofrendo modificação mereológica. As figuras exploram apenas a visualização de propriedades.


Matemática

Capítulo 6

Assim, num prisma reto, as faces laterais são regiões retangulares.

De acordo com a região poligonal das bases, o prisma recebe nomes especiais.

Veja alguns exemplos:

1º) Prisma reto de base triangular ou prisma reto triangular.

Bases: regiões ABC e DEF
Faces laterais: regiões ABED, ACFD, BCFE
Arestas laterais: AD, CF e BE

2º) Prisma reto de base pentagonal ou prisma reto pentagonal.

Bases: regiões ABCDE e FGHIJ
Faces laterais: regiões BCHG, CDIH, DEJI, AEJF e ABGF (retangulares)
Arestas laterais: AF, BG, EJ, CH e DI

3º) Prisma reto de base retangular ou paralelepípedo retângulo ou bloco retangular.

Quando a base é uma região retangular obtemos um *paralelepípedo retângulo* ou *bloco retangular*, no qual cada face é uma região retangular.

4º) Cubo ou hexaedro regular.

Quando, em um prisma reto, a base é uma região poligonal regular, temos um *prisma regular*. Um exemplo é o cubo ou hexaedro regular, que é um caso particular de paralelepípedo retângulo, no qual cada face é uma região quadrada.

Para Refletir
Retângulo é um caso particular de paralelogramo.

Para Refletir
As faces laterais são limitadas por paralelogramos particulares, ou seja, por retângulos.

Para Refletir
Um paralelepípedo retângulo é um prisma reto em que qualquer face serve de base.

156

FIGURA 170 – Página 156 da coleção *Matemática* do 3º ano.

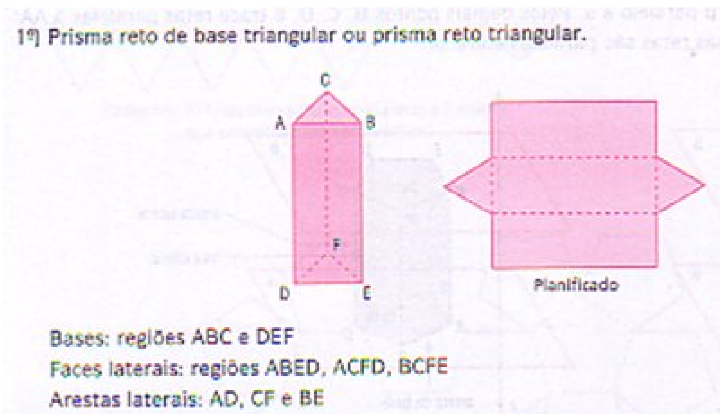


FIGURA 171: Figura do tipo operatória trabalhada mereologicamente.

Na 10ª página há 7 imagens, das quais as 2 primeiras são do tipo perceptiva, discursiva e operatória (sofrendo modificação mereológica), são figuras que só podem ser visualizadas. A terceira imagem é do tipo perceptiva e discursiva e pode ser explorada nos campos da visualização e do raciocínio. As 3 imagens seguintes são do tipo perceptiva, discursiva e operatória, sofrendo dessa vez, modificação posicional. A última imagem pode ser visualizada e pode ser classificada como perceptiva.

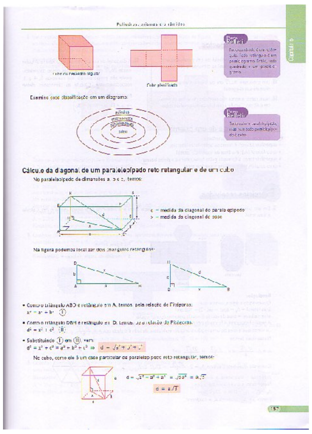


FIGURA 172 – Página 157 da coleção *Matemática* do 3º ano.

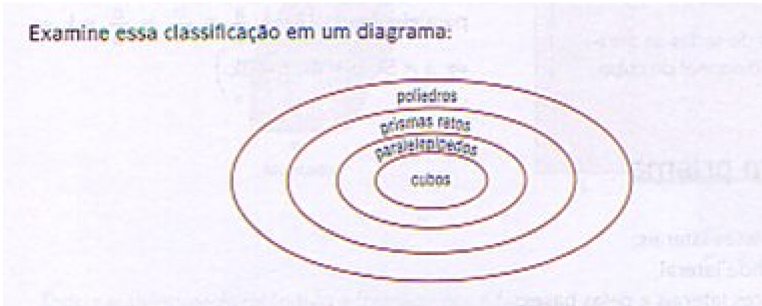


FIGURA 173: Figura que oferece exploração de visualização e raciocínio geométrico.

A 11ª página possui 3 imagens, onde as duas primeiras são do tipo perceptiva, discursiva e operatória. A última é apenas perceptiva. As figuras dessa página oferecem apenas a possibilidade de visualização.

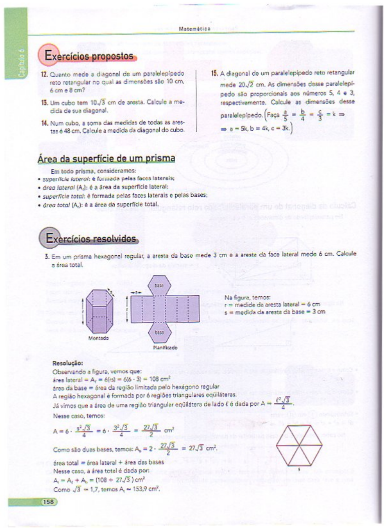


FIGURA 174 – Página 158 da coleção *Matemática* do 3º ano.

Na 12ª página existem 7 imagens, das quais: as 6 primeiras fazem parte de um exercício resolvido. Essas imagens são do tipo perceptiva e operatória (sofrendo modificação mereológica) . A última imagem é apenas perceptiva.

Todas as imagens dessa página só podem ser exploradas visualmente.

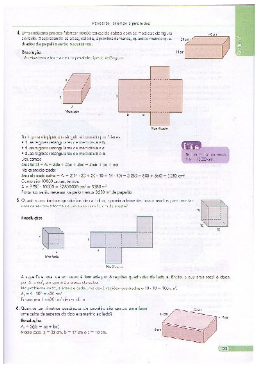


FIGURA 175 – Página 159 da coleção *Matemática* do 3º ano.

A 13ª página apresenta 5 imagens onde a primeira é do tipo perceptiva, e pode apenas ser visualizada. As duas imagens seguintes são do tipo perceptiva, discursiva e operatória modificado opticamente (oferecem condições de serem exploradas com visualização e raciocínio geométrico). As duas imagens seguintes são extensões de exercícios propostos, onde são apenas perceptivas. Essas imagens só oferecem a possibilidade de serem exploradas mediante a visualização.

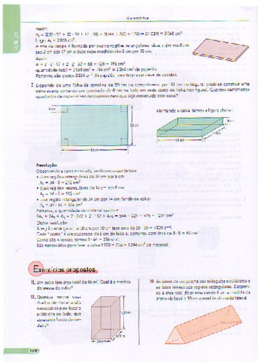


FIGURA 176 – Página 160 da coleção *Matemática* do 3º ano.

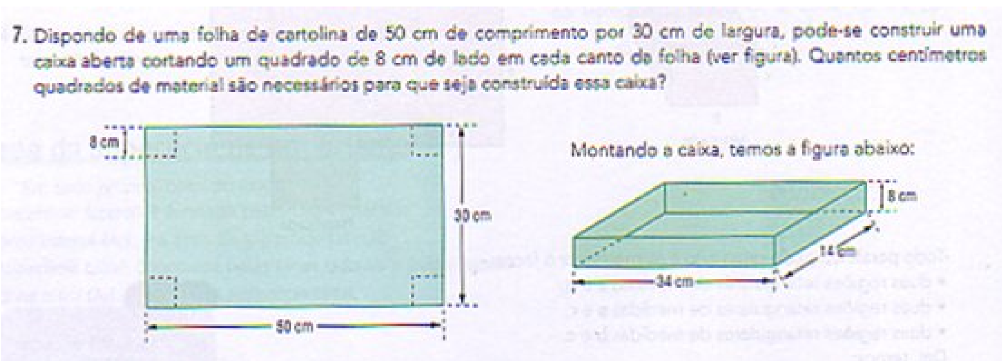


FIGURA 177: A imagem operatória sofreu modificação óptica onde o retângulo inicial modificou-se em um paralelepípedo a sua imagem.

A 14ª página é dedicada apenas a exercícios propostos, como todas as 8 imagens dessa página são do tipo perceptiva. Elas oferecem apenas a possibilidade de ser explorada visualmente.

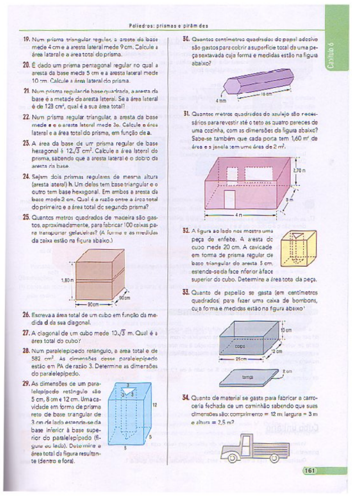


FIGURA 178 – Página 161 da coleção *Matemática* do 3º

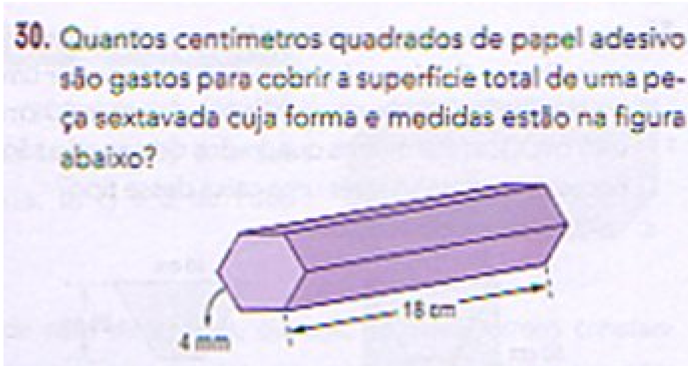


FIGURA 179 - Exemplo problema envolvendo imagem.

A 15ª página continua os exercícios propostos na página anterior. Das 9 imagens, as 6 primeiras são do tipo perceptiva, oferecem condição de visualização. As 3 demais começam a explicar uma idéia de volume de um sólido, mas ainda são imagens do tipo perceptiva, e são exploradas de modo visual.

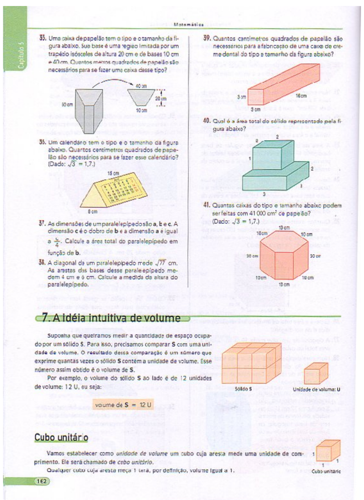


FIGURA 180 – Página 162 da coleção *Matemática* do 3º

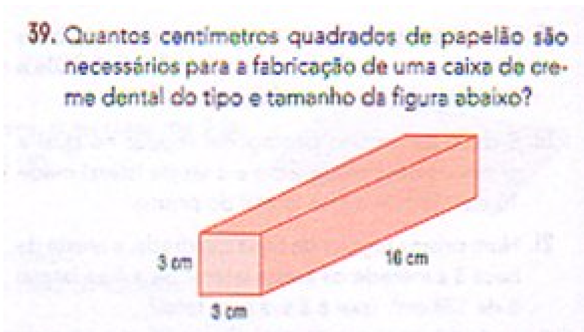
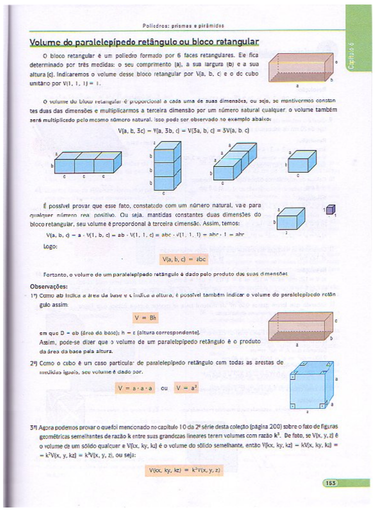


FIGURA 181 – Problema de nível 1.

É comum o uso de imagens apenas para explorar cálculos de áreas, perímetros ou volumes.

A 16ª página apresenta 9 imagens para desenvolver a idéia de volume, onde 5 são do tipo perceptiva e discursiva, pois oferecem as possibilidades de se explorar tanto a visualização quanto o raciocínio. As 4 seguintes são do tipo perceptiva e oferecem a possibilidade de serem exploradas apenas de modo visual.


Poliedros: prismas e pirâmides

Volume do paralelepípedo retângulo ou bloco retangular

FIGURA 182 – Página 163 da coleção *Matemática* do 3º ano.

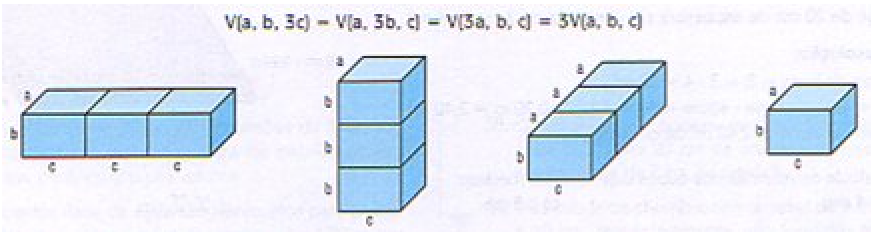


FIGURA 183 – Exemplo de imagem que abstrai a idéia da fórmula de cálculo do volume de um paralelepípedo.

A 17ª página apresenta 4 imagens, todas do tipo perceptiva, ilustrando problemas e fazendo uso de uma exploração unicamente visual..

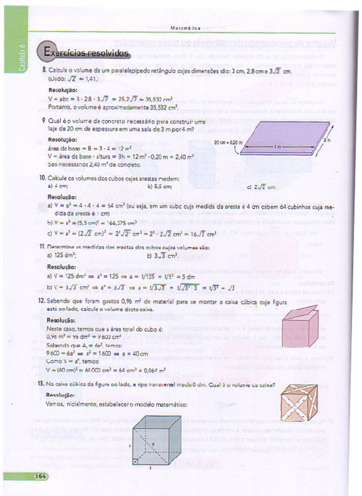
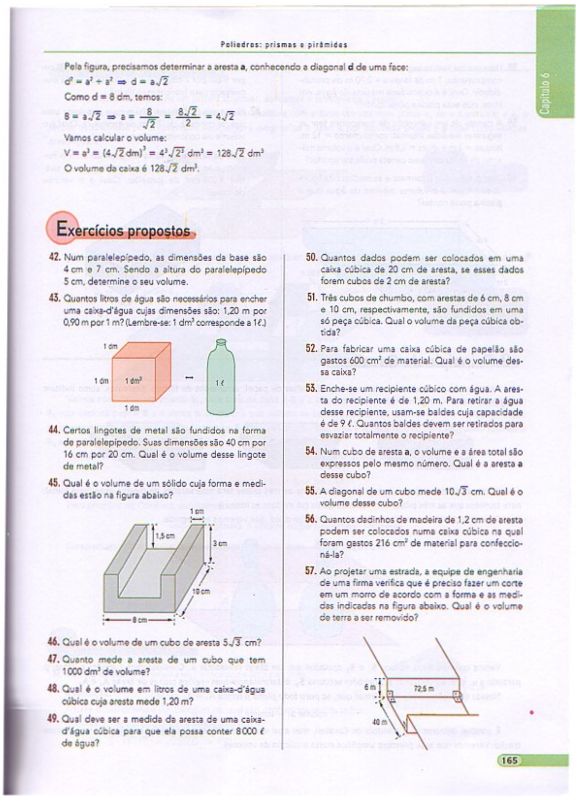

Exercícios resolvidos

FIGURA 184 – Página 164 da coleção *Matemática* do 3º ano.

Na 18ª página existem problemas propostos e as 4 imagens utilizadas são do tipo perceptiva e são exploradas apenas pela função de visualização.



Poliedros: prismas e pirâmides

Capítulo 6

Pela figura, precisamos determinar a aresta **a**, conhecendo a diagonal **d** de uma face:

$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d = a\sqrt{2}$

Como d = 8 dm, temos:

$8 = a\sqrt{2} \Rightarrow a = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

Vamos calcular o volume:

$V = a^3 = (4\sqrt{2}\,dm)^3 = 4^3\sqrt{2^3}\,dm^3 = 128\sqrt{2}\,dm^3$

O volume da caixa é $128\sqrt{2}\,dm^3$.

Exercícios propostos

42. Num paralelepípedo, as dimensões da base são 4 cm e 7 cm. Sendo a altura do paralelepípedo 5 cm, determine o seu volume.

43. Quantos litros de água são necessários para encher uma caixa-d'água cujas dimensões são: 1,20 m por 0,90 m por 1 m? (Lembre-se: 1 dm³ corresponde a 1 ℓ.)

1 dm
1 dm
1 dm³
1 ℓ
1 dm

44. Certos lingotes de metal são fundidos na forma de paralelepípedo. Suas dimensões são 40 cm por 16 cm por 20 cm. Qual é o volume desse lingote de metal?

45. Qual é o volume de um sólido cuja forma e medidas estão na figura abaixo?

1 cm
1,5 cm
3 cm
10 cm
8 cm

46. Qual é o volume de um cubo de aresta $5\sqrt{3}$ cm?

47. Quanto mede a aresta de um cubo que tem 1000 dm³ de volume?

48. Qual é o volume em litros de uma caixa-d'água cúbica cuja aresta mede 1,20 m?

49. Qual deve ser a medida da aresta de uma caixa-d'água cúbica para que ela possa conter 8000 ℓ de água?

50. Quantos dados podem ser colocados em uma caixa cúbica de 20 cm de aresta, se esses dados forem cubos de 2 cm de aresta?

51. Três cubos de chumbo, com arestas de 6 cm, 8 cm e 10 cm, respectivamente, são fundidos em uma só peça cúbica. Qual o volume da peça cúbica obtida?

52. Para fabricar uma caixa cúbica de papelão são gastos 600 cm² de material. Qual é o volume dessa caixa?

53. Enche-se um recipiente cúbico com água. A aresta do recipiente é de 1,20 m. Para retirar a água desse recipiente, usam-se baldes cuja capacidade é de 9 ℓ. Quantos baldes devem ser retirados para esvaziar totalmente o recipiente?

54. Num cubo de aresta **a**, o volume e a área total são expressos pelo mesmo número. Qual é a aresta **a** desse cubo?

55. A diagonal de um cubo mede $10\sqrt{3}$ cm. Qual é o volume desse cubo?

56. Quantos dadinhos de madeira de 1,2 cm de aresta podem ser colocados numa caixa cúbica na qual foram gastos 216 cm² de material para confeccioná-la?

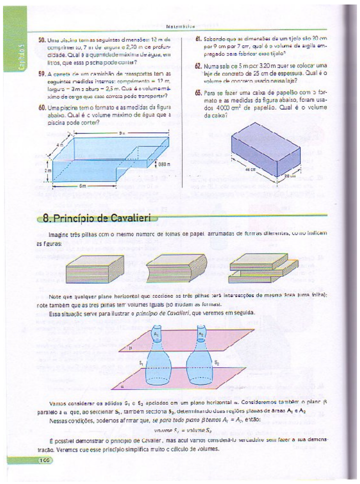
57. Ao projetar uma estrada, a equipe de engenharia de uma firma verifica que é preciso fazer um corte em um morro de acordo com a forma e as medidas indicadas na figura abaixo. Qual é o volume de terra a ser removido?

6 m
72,5 m
40 m

165

FIGURA 185 – Página 165 da coleção *Matemática* do 3º ano.

Na 19ª página existem 6 imagens das quais todas são do tipo perceptiva. Todas as imagens dessa página oferecem apenas a possibilidade de serem exploradas com a visualização.



Matemática

Capítulo 5

58. Uma piscina tem as seguintes dimensões: 12 m de comprimento, 7 m de largura e 2,70 m de profundidade. Qual é a quantidade máxima de água, em litros, que essa piscina pode conter?

59. A carreta de um caminhão de transportes tem as seguintes medidas internas: comprimento = 12 m, largura = 3 m e altura = 2,5 m. Qual é o volume máximo de carga que essa carreta pode transportar?

60. Uma piscina tem o formato e as medidas da figura abaixo. Qual é o volume máximo de água que a piscina pode conter?

9 m
4 m
0,80 m
2 m
6 m

61. Sabendo que as dimensões de um tijolo são 20 cm por 9 cm por 7 cm, qual é o volume de argila empregado para fabricar esse tijolo?

62. Numa sala de 5 m por 3,20 m quer se colocar uma laje de concreto de 25 cm de espessura. Qual é o volume de concreto usado nessa laje?

63. Para se fazer uma caixa de papelão com o formato e as medidas da figura abaixo, foram usados 4000 cm² de papelão. Qual é o volume da caixa?

40 cm
20 cm

8. Princípio de Cavalieri

Imagine três pilhas com o mesmo número de folhas de papel, arrumadas de formas diferentes, como indicam as figuras:

Note que qualquer plano horizontal que seccione as três pilhas terá intersecções de mesma área (uma folha); note também que as três pilhas têm volumes iguais (só mudam as formas).

Essa situação serve para ilustrar o *princípio de Cavalieri*, que veremos em seguida.

A_1
A_2
β
S_1
S_2
α

Vamos considerar os sólidos S_1 e S_2 apoiados em um plano horizontal α. Consideremos também o plano β paralelo a α que, ao seccionar S_1, também secciona S_2, determinando duas regiões planas de áreas A_1 e A_2.

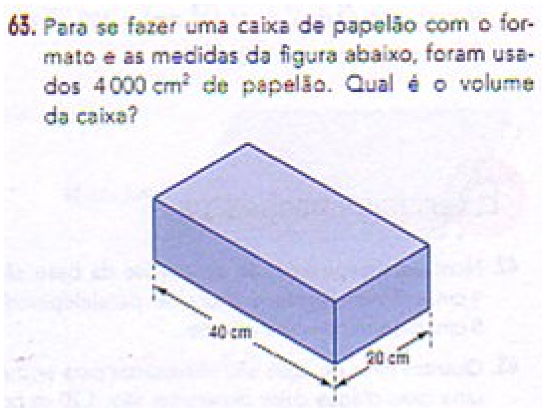
Nessas condições, podemos afirmar que, *se para todo plano β temos $A_1 = A_2$*, então:

volume S_1 = volume S_2

É possível demonstrar o princípio de Cavalieri, mas aqui vamos considerá-lo verdadeiro sem fazer a sua demonstração. Veremos que esse princípio simplifica muito o cálculo de volumes.

166

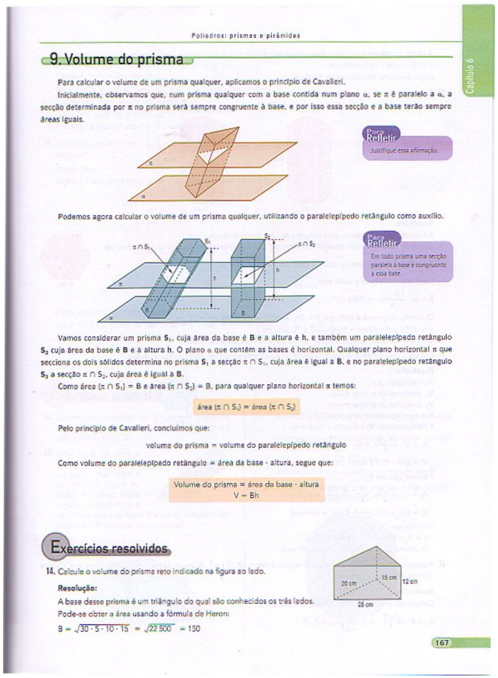
FIGURA 186 – Página 166 da coleção *Matemática* do 3º ano.



63. Para se fazer uma caixa de papelão com o formato e as medidas da figura abaixo, foram usados 4 000 cm² de papelão. Qual é o volume da caixa?

FIGURA 187: Exemplo de Problema utilizando imagem.

Na 20ª página existem 3 imagens e todas do tipo perceptiva. Todas as imagens dessa pagina exploram apenas a função da visualização.


Poliedros: prismas e pirâmides

Capítulo 6

9. Volume do prisma

Para calcular o volume de um prisma qualquer, aplicamos o princípio de Cavalieri.

Inicialmente, observamos que, num prisma qualquer com a base contida num plano α, se π é paralelo a α, a secção determinada por π no prisma será sempre congruente à base, e por isso essa secção e a base terão sempre áreas iguais.

Para Refletir: Justifique essa afirmação.

Podemos agora calcular o volume de um prisma qualquer, utilizando o paralelepípedo retângulo como auxílio.

Para Refletir: Em todo prisma uma secção paralela à base é congruente a essa base.

Vamos considerar um prisma S_1, cuja área da base é B e a altura é h, e também um paralelepípedo retângulo S_2 cuja área da base é B e a altura h. O plano α que contém as bases é horizontal. Qualquer plano horizontal π que secciona os dois sólidos determina no prisma S_1 a secção $\pi \cap S_1$, cuja área é igual a B, e no paralelepípedo retângulo S_2 a secção $\pi \cap S_2$, cuja área é igual a B.

Como área $(\pi \cap S_1) = B$ e área $(\pi \cap S_2) = B$, para qualquer plano horizontal π temos:

área $(\pi \cap S_1)$ = área $(\pi \cap S_2)$

Pelo princípio de Cavalieri, concluímos que:

volume do prisma = volume do paralelepípedo retângulo

Como volume do paralelepípedo retângulo = área da base · altura, segue que:

Volume do prisma = área da base · altura
$V = Bh$

Exercícios resolvidos

14. Calcule o volume do prisma reto indicado na figura ao lado.

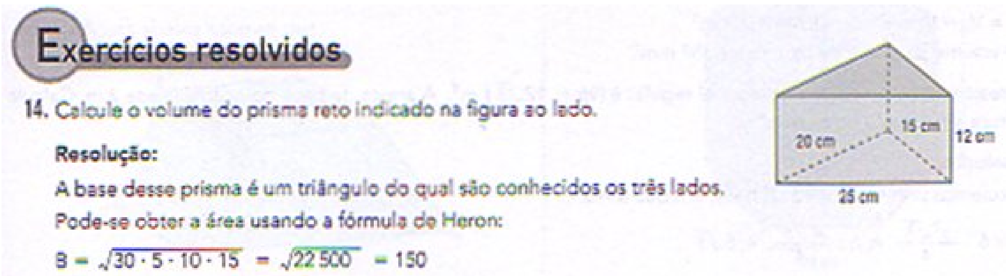
Resolução:

A base desse prisma é um triângulo do qual são conhecidos os três lados.
Pode-se obter a área usando a fórmula de Heron:

$B = \sqrt{30 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 15} = \sqrt{22\,500} = 150$

167

FIGURA 188 – Página 167 da coleção *Matemática* do 3º ano.


Exercícios resolvidos

14. Calcule o volume do prisma reto indicado na figura ao lado.

Resolução:

A base desse prisma é um triângulo do qual são conhecidos os três lados.
Pode-se obter a área usando a fórmula de Heron:

$B = \sqrt{30 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 15} = \sqrt{22\,500} = 150$

FIGURA 189 – Exemplo de figura usada para aplicar seus dados diretamente na fórmula.

A 21ª página trata apenas de exercícios propostos. As 4 imagens que ela possui são do tipo perceptiva e o processo de visualização é o único explorado.

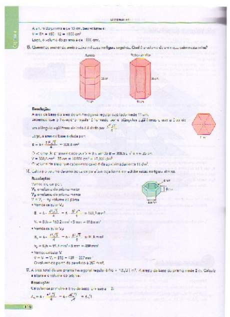


FIGURA 190 – Página 168 da coleção *Matemática* do 3º ano.

Na 22ª página existe uma mescla de exercícios resolvidos e exercícios propostos, usam no total 5 imagens, todas do tipo perceptiva e o único processo explorado é o da visualização.

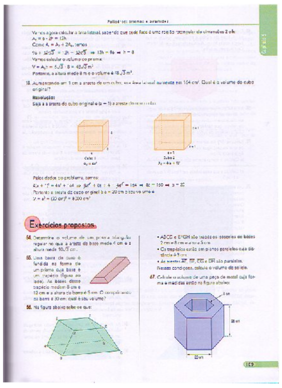


FIGURA 191 – Página 169 da coleção *Matemática* do 3º ano.

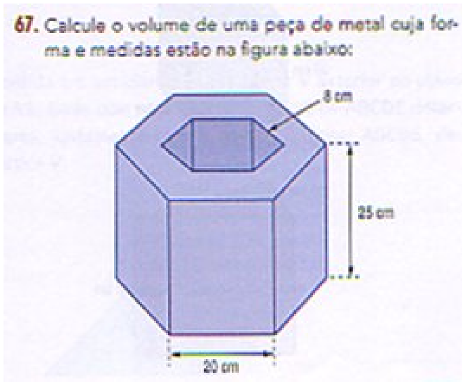


FIGURA 192: Ilustração de um problema utilizando imagem geométrica.

A 23ª página é a continuação dos exercícios propostos da página anterior, ela possui 4 imagens, todas se classificam como do tipo perceptiva e recurso explorado visualização

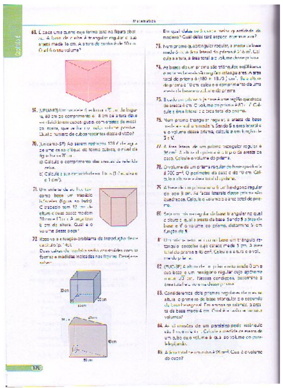


FIGURA 193 – Página 170 da coleção *Matemática* do 3º ano.

A 24ª página apresenta 3 imagens, das quais: 2 do perceptiva e 1 ilustrativa , o único recurso utilizado é o de visualização.

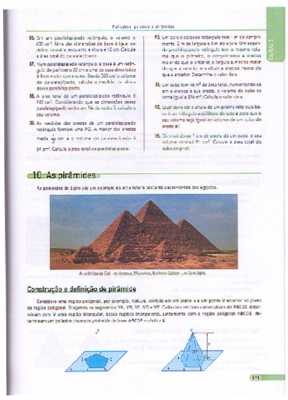


FIGURA 194 – Página 171 da coleção *Matemática* do 3º ano.

A 25ª página apresenta 7 imagens, onde as 3 primeiras são do tipo perceptiva, as 2 que seguem são do tipo perceptiva, discursiva e operatória e sofreram modificação mereológico. As duas últimas são do tipo perceptiva e operatória, sofrendo modificação mereológico também. A única função explorada é a de visualização.

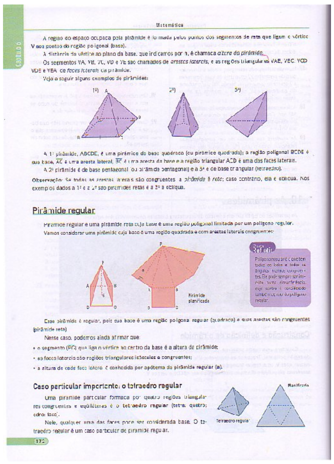
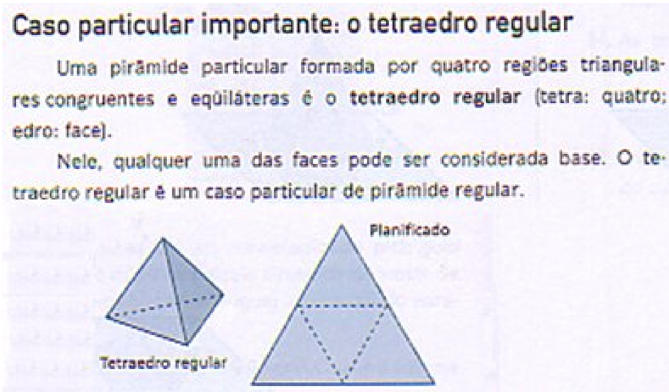


FIGURA 195 – Página 172 da coleção *Matemática* do 3º ano.



Caso particular importante: o tetraedro regular

Uma pirâmide particular formada por quatro regiões triangulares congruentes e eqüiláteras é o **tetraedro regular** (tetra: quatro; edro: face).

Nele, qualquer uma das faces pode ser considerada base. O tetraedro regular é um caso particular de pirâmide regular.

FIGURA 196 - Exemplo de imagem perceptiva e operatória.

Na 26ª página há uma busca para a compreensão dos elementos da pirâmide. Logo Dante utiliza de 5 imagens do tipo perceptiva exploradas unicamente de modo visual, a última delas trata-se de um exercício resolvido.

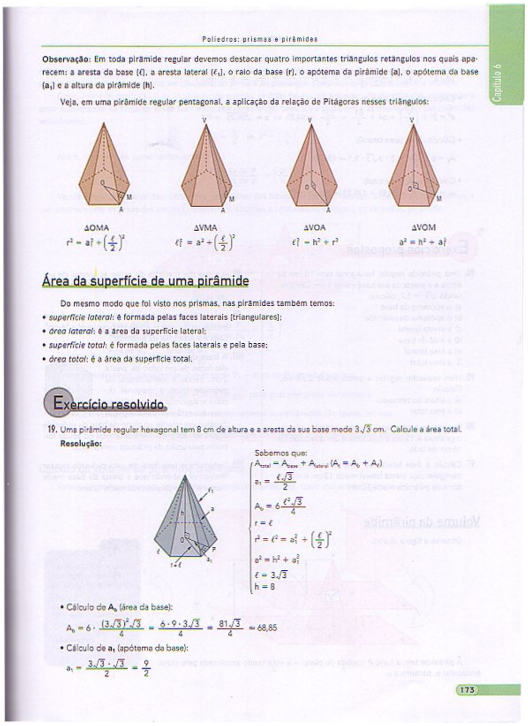


FIGURA 197 – Página 173 da coleção *Matemática* do 3º ano.

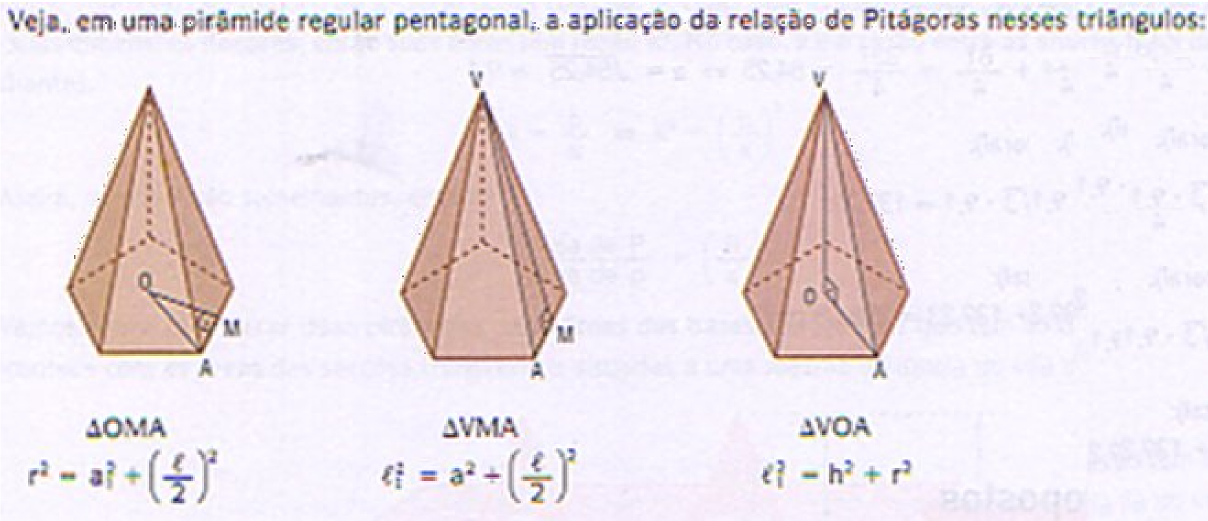
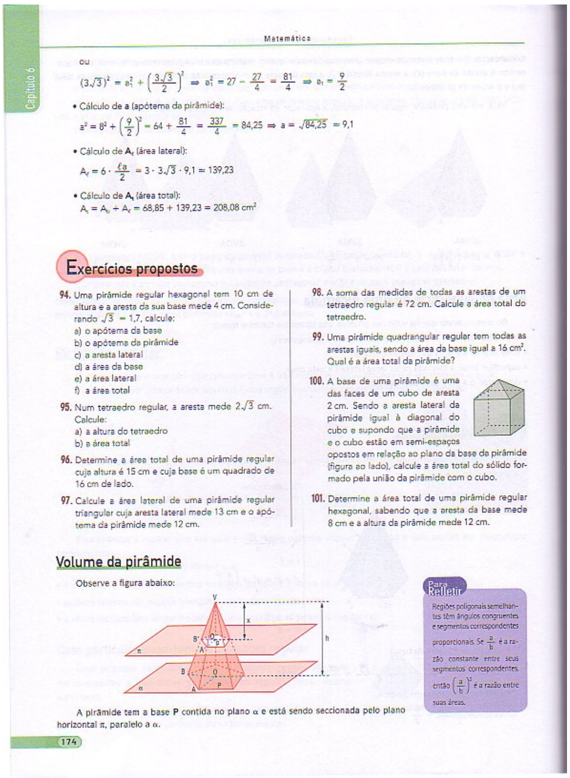


FIGURA 198 – Imagem utilizando processo de visualização em apótemas de pirâmides.

A 27ª página apresenta 2 imagens do tipo perceptiva. A primeira delas trata de um exercício proposto. As imagens utilizadas nessa página oferecem como forma de exploração apenas a visualização.



Matemática

Capítulo 6

ou

$(3\sqrt{3})^2 = a_1^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow a_1^2 = 27 - \frac{27}{4} = \frac{81}{4} \Rightarrow a_1 = \frac{9}{2}$

- Cálculo de a (apótema da pirâmide):

$a^2 = 8^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 64 + \frac{81}{4} = \frac{337}{4} = 84{,}25 \Rightarrow a = \sqrt{84{,}25} = 9{,}1$

- Cálculo de A_ℓ (área lateral):

$A_\ell = 6 \cdot \frac{\ell a}{2} = 3 \cdot 3\sqrt{3} \cdot 9{,}1 = 139{,}23$

- Cálculo de A_t (área total):

$A_t = A_b + A_\ell = 68{,}85 + 139{,}23 = 208{,}08\ cm^2$

Exercícios propostos

94. Uma pirâmide regular hexagonal tem 10 cm de altura e a aresta da sua base mede 4 cm. Considerando $\sqrt{3} = 1{,}7$, calcule:
a) o apótema da base
b) o apótema da pirâmide
c) a aresta lateral
d) a área da base
e) a área lateral
f) a área total

95. Num tetraedro regular, a aresta mede $2\sqrt{3}$ cm. Calcule:
a) a altura do tetraedro
b) a área total

96. Determine a área total de uma pirâmide regular cuja altura é 15 cm e cuja base é um quadrado de 16 cm de lado.

97. Calcule a área lateral de uma pirâmide regular triangular cuja aresta lateral mede 13 cm e o apótema da pirâmide mede 12 cm.

98. A soma das medidas de todas as arestas de um tetraedro regular é 72 cm. Calcule a área total do tetraedro.

99. Uma pirâmide quadrangular regular tem todas as arestas iguais, sendo a área da base igual a 16 cm². Qual é a área total da pirâmide?

100. A base de uma pirâmide é uma das faces de um cubo de aresta 2 cm. Sendo a aresta lateral da pirâmide igual à diagonal do cubo e supondo que a pirâmide e o cubo estão em semi-espaços opostos em relação ao plano da base da pirâmide (figura ao lado), calcule a área total do sólido formado pela união da pirâmide com o cubo.

101. Determine a área total de uma pirâmide regular hexagonal, sabendo que a aresta da base mede 8 cm e a altura da pirâmide mede 12 cm.

Volume da pirâmide

Observe a figura abaixo:

A pirâmide tem a base P contida no plano α e está sendo seccionada pelo plano horizontal π, paralelo a α.

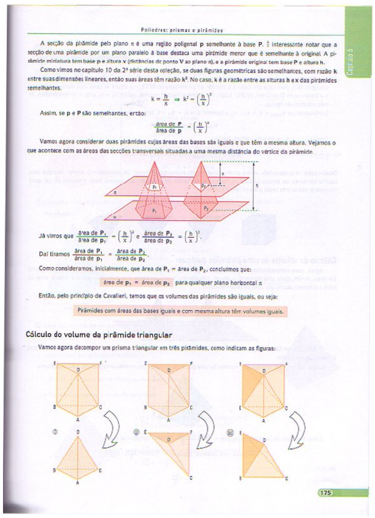
Para Refletir

Regiões poligonais semelhantes têm ângulos congruentes e segmentos correspondentes proporcionais. Se $\frac{a}{b}$ é a razão constante entre seus segmentos correspondentes, então $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ é a razão entre suas áreas.

174

FIGURA 199 – Página 174 da coleção *Matemática* do 3º ano.

A 28ª página possui 7 imagens, das quais, a primeira é do tipo perceptiva. As seguintes são perceptivas e operatórias (com modificação mereológica da figura). O processo usado ainda é apenas o de visualização.



Poliedres: prismas e pirâmides

A secção da pirâmide pelo plano π é uma região poligonal p semelhante à base P. É interessante notar que a secção de uma pirâmide por um plano paralelo à base destaca uma pirâmide menor que é semelhante à original. A pirâmide miniatura tem base p e altura x (distâncias do ponto V ao plano π), e a pirâmide original tem base P e altura h.

Como vimos no capítulo 10 da 2ª série desta coleção, se duas figuras geométricas são semelhantes, com razão k entre suas dimensões lineares, então suas áreas têm razão k^2. No caso, k é a razão entre as alturas h e x das pirâmides semelhantes.

$$k = \frac{h}{x} \Rightarrow k^2 = \left(\frac{h}{x}\right)^2$$

Assim, se p e P são semelhantes, então:

$$\frac{\text{área de } P}{\text{área de } p} = \left(\frac{h}{x}\right)^2$$

Vamos agora considerar duas pirâmides cujas áreas das bases são iguais e que têm a mesma altura. Vejamos o que acontece com as áreas das secções transversais situadas a uma mesma distância do vértice da pirâmide.

Já vimos que $\frac{\text{área de } P_1}{\text{área de } p_1} = \left(\frac{h}{x}\right)^2$ e $\frac{\text{área de } P_2}{\text{área de } p_2} = \left(\frac{h}{x}\right)^2$.

Daí tiramos $\frac{\text{área de } P_1}{\text{área de } p_1} = \frac{\text{área de } P_2}{\text{área de } p_2}$.

Como consideramos, inicialmente, que área de P_1 = área de P_2, concluímos que:

área de p_1 = área de p_2 para qualquer plano horizontal π

Então, pelo princípio de Cavalieri, temos que os volumes das pirâmides são iguais, ou seja:

Pirâmides com áreas das bases iguais e com mesma altura têm volumes iguais.

Cálculo do volume da pirâmide triangular

Vamos agora decompor um prisma triangular em três pirâmides, como indicam as figuras:

175

FIGURA 200 – Página 175 da coleção *Matemática* do 3º ano.

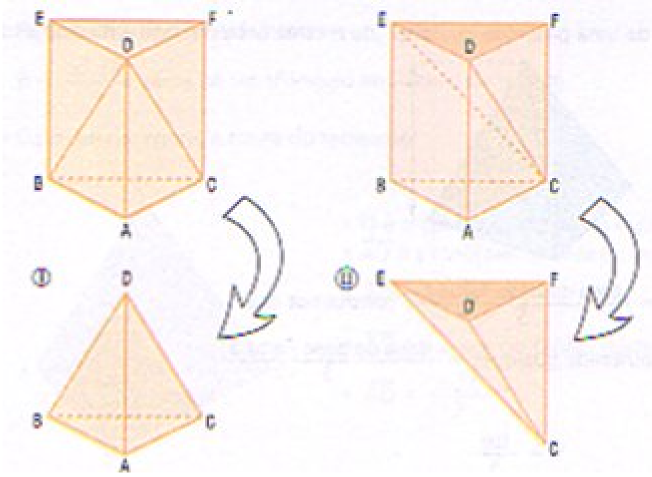
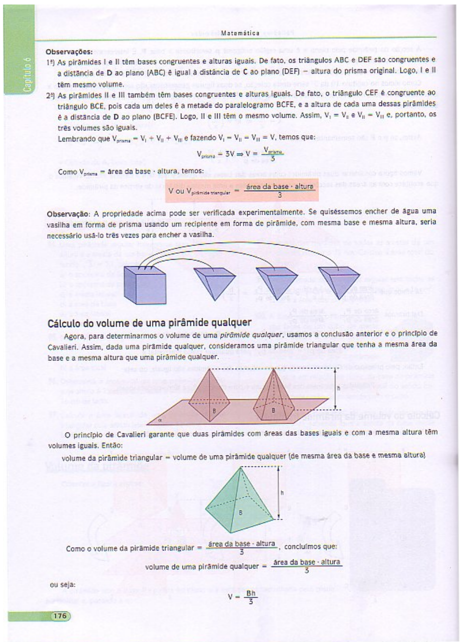


FIGURA 201 - Exemplo de imagem perceptiva e operatória.

Na 29ª página existem 6 imagens as 4 primeiras são do tipo perceptiva e discursiva e as duas últimas são imagens do tipo perceptiva. Todas exploram apenas a função de visualização.



Matemática

Observações:

1ª) As pirâmides I e II têm bases congruentes e alturas iguais. De fato, os triângulos ABC e DEF são congruentes e a distância de D ao plano (ABC) é igual à distância de C ao plano (DEF) – altura do prisma original. Logo, I e II têm mesmo volume.

2ª) As pirâmides II e III também têm bases congruentes e alturas iguais. De fato, o triângulo CEF é congruente ao triângulo BCE, pois cada um deles é a metade do paralelogramo BCFE, e a altura de cada uma dessas pirâmides é a distância de D ao plano (BCFE). Logo, II e III têm o mesmo volume. Assim, $V_I = V_{II}$ e $V_{II} = V_{III}$ e, portanto, os três volumes são iguais.

Lembrando que $V_{prisma} = V_I + V_{II} + V_{III}$ e fazendo $V_I = V_{II} = V_{III} = V$, temos que:

$$V_{prisma} = 3V \Rightarrow V = \frac{V_{prisma}}{3}$$

Como V_{prisma} = área da base · altura, temos:

$$V \text{ ou } V_{\text{pirâmide triangular}} = \frac{\text{área da base} \cdot \text{altura}}{3}$$

Observação: A propriedade acima pode ser verificada experimentalmente. Se quiséssemos encher de água uma vasilha em forma de prisma usando um recipiente em forma de pirâmide, com mesma base e mesma altura, seria necessário usá-lo três vezes para encher a vasilha.

Cálculo do volume de uma pirâmide qualquer

Agora, para determinarmos o volume de uma *pirâmide qualquer*, usamos a conclusão anterior e o princípio de Cavalieri. Assim, dada uma pirâmide qualquer, consideramos uma pirâmide triangular que tenha a mesma área da base e a mesma altura que uma pirâmide qualquer.

O princípio de Cavalieri garante que duas pirâmides com áreas das bases iguais e com a mesma altura têm volumes iguais. Então:

volume da pirâmide triangular = volume de uma pirâmide qualquer (de mesma área da base e mesma altura)

Como o volume da pirâmide triangular $= \frac{\text{área da base} \cdot \text{altura}}{3}$, concluímos que:

$$\text{volume de uma pirâmide qualquer} = \frac{\text{área da base} \cdot \text{altura}}{3}$$

ou seja:

$$V = \frac{Bh}{3}$$

176

FIGURA 202 – Página 176 da coleção *Matemática* do 3º ano.

A 30ª página dedica-se a resolver exercícios sobre pirâmides, para isso dispõe de 4 imagens do tipo perceptiva que possam ser exploradas de modo único com a visualização.

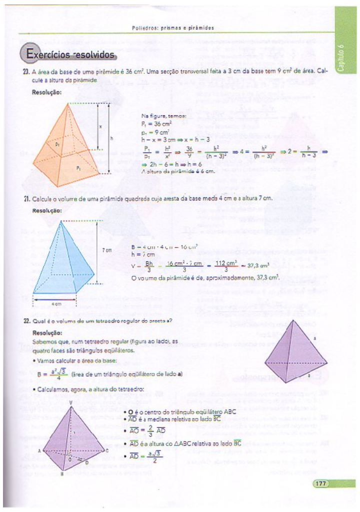


FIGURA 203 – Página 177 da coleção *Matemática* do 3º ano.

A 31ª página tratará da continuação de exercícios propostos da página anterior. As 2 imagens utilizadas podem ser classificadas como perceptiva e processo cognitivo de uso a visualização.

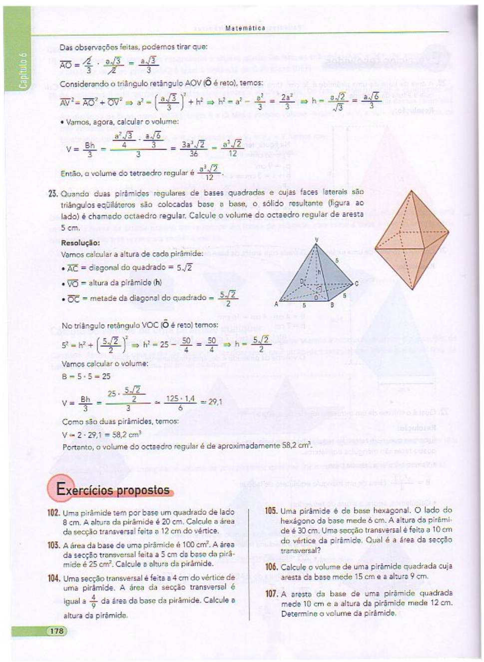


FIGURA 204 – Página 178 da coleção *Matemática* do 3º ano.

A 32ª página apresenta 7 imagens, todas do tipo perceptiva. A única ferramenta cognitiva explorada é a visualização.

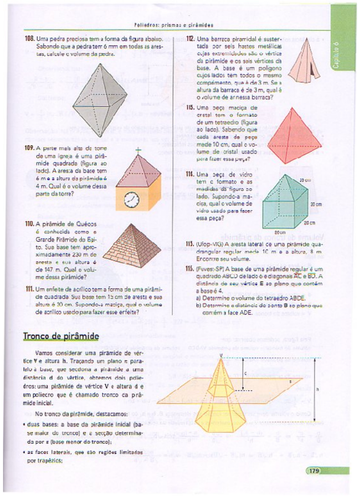


FIGURA 205 – Página 179 da coleção *Matemática* do 3º ano.

A 33ª página mostra 3 imagens onde as 2 primeiras são do tipo perceptiva e operatória, pois a imagem de baixo é um *corte* do tronco da pirâmide acima ilustrada, típico exemplo de modificação mereológico da figura. A outra imagem é do tipo perceptiva. A visualização é o único processo cognitivo utilizado.

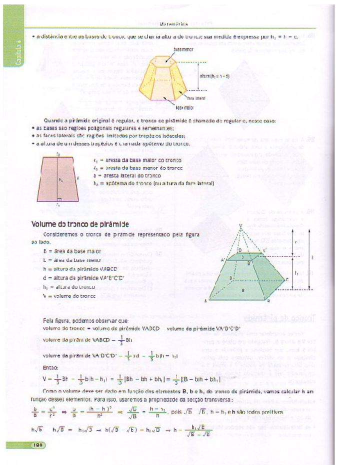


FIGURA 206 – Página 180 da coleção *Matemática* do 3º ano.

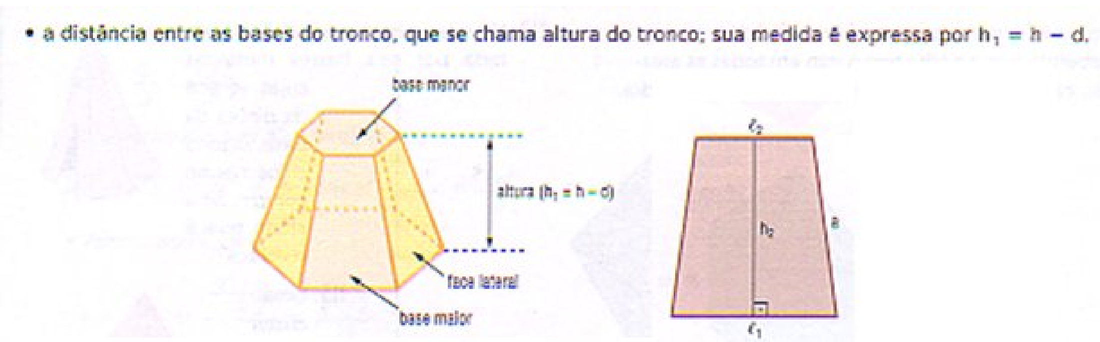


FIGURA 207 – Exemplo de modificação mereológico da figura.

A 34ª página apresenta exercícios propostos, para isso Dante faz uso de 2 imagens do tipo perceptiva e explora a função da visualização apenas.

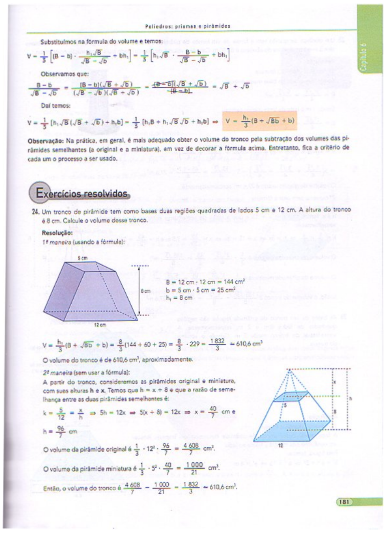


FIGURA 208 – Página 181 da coleção *Matemática* do 3º ano.

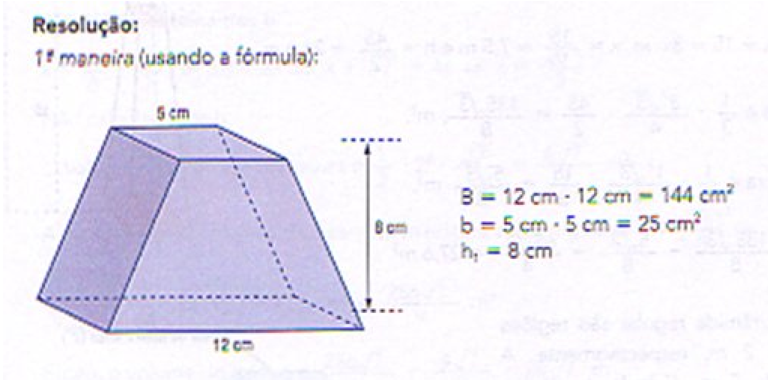


FIGURA 209 – Exemplo de problema onde se faz aplicação direta da fórmula.

Por tratar-se de uma continuação dos exercícios propostos na página 181, a 35ª página deste capítulo trata as 4 imagens que possui como sendo exploradas visualmente. As duas primeiras imagens são do tipo perceptiva, e as duas últimas imagens são perceptiva e operatória, sofrendo modificação mereológico da figura.

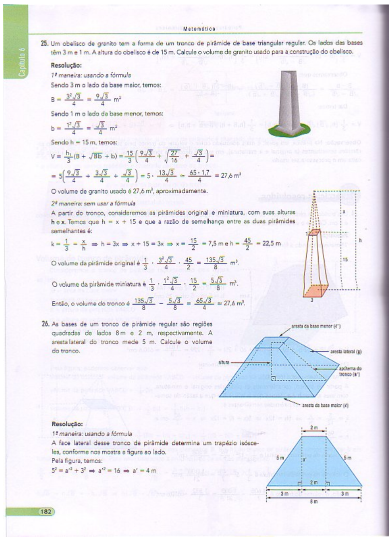


FIGURA 210 – Página 182 da coleção *Matemática* do 3º ano.

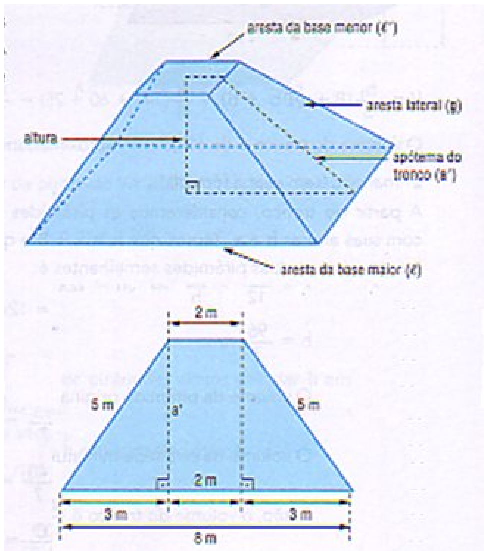


FIGURA 211 – Desenho do tronco de uma pirâmide.

A 36ª página desse capítulo continua a explorar exercícios propostos resolvidos. Utiliza então 3 imagens do tipo perceptiva e explora a função da visualização.

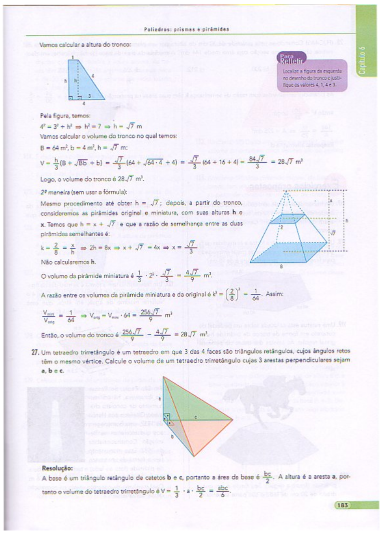


FIGURA 212 – Página 183 da coleção *Matemática* do 3º ano.

A 37ª página deste capítulo trata de exercícios propostos. Dante utiliza 5 imagens das quais todas são do tipo perceptiva. A função cognitiva utilizada é apenas a visualização.

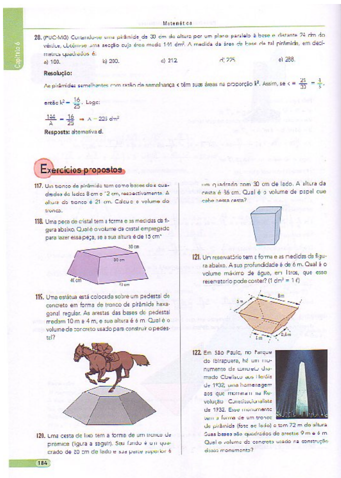


FIGURA 213 – Página 184 da coleção *Matemática* do 3º ano.

A 38ª página possui 3 imagens para complementar enunciados de problemas. As duas primeiras imagens são do tipo perceptiva e permite apenas uma exploração visual. A última imagem desta página é perceptiva e discursiva. Oferece além da visualização a função cognitiva do raciocínio geométrico.

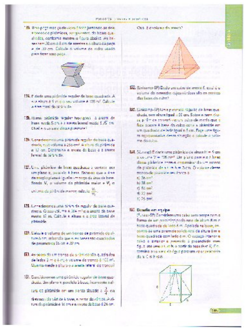
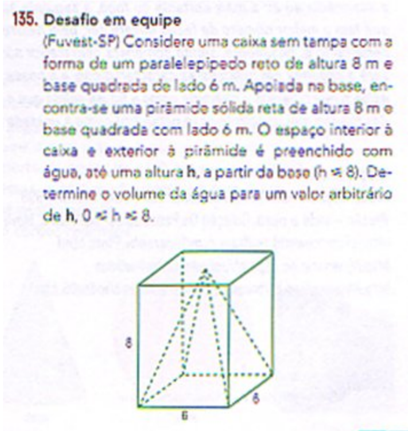


FIGURA 214 – Página 185 da coleção *Matemática* do 3º ano.



135. Desafio em equipe
(Fuvest-SP) Considere uma caixa sem tampa com a forma de um paralelepípedo reto de altura 8 m e base quadrada de lado 6 m. Apoiada na base, encontra-se uma pirâmide sólida reta de altura 8 m e base quadrada com lado 6 m. O espaço interior à caixa e exterior à pirâmide é preenchido com água, até uma altura **h**, a partir da base ($h \leq 8$). Determine o volume da água para um valor arbitrário de **h**, $0 \leq h \leq 8$.

FIGURA 215 – Pirâmide inscrita em um paralelepípedo

Figura discursiva sendo explorada por um problema.
Criar uma propriedade de cálculo de volume para qualquer altura compreendida entre 0 e 8.

Já a 39ª página deste capítulo apresenta apenas 1 imagem ilustrativa.

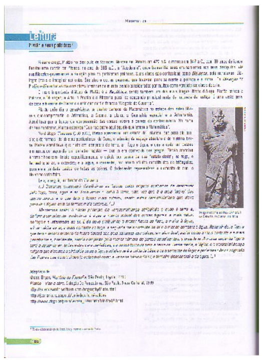


FIGURA 216 – Página 186 da coleção *Matemática* do 3º ano.