Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciência Exatas e da Natureza
Programa de Pós-graduação em Matemática

Bruno Luís de Andrade Santos

Equações de Evolução Discretas de Segunda Ordem: Regularidade Maximal e Teoria de Perturbação

Recife, Agosto de 2008.

Bruno Luís de Andrade Santos

Equações de Evolução Discretas de Segunda Ordem: Regularidade Maximal e Teoria de Perturbação

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**

Orientador: Prof. Claudio Cuevas

Recife, Agosto de 2008.

À minha família.

Agradecimentos

Aos meus pais, Edson e Desivânia, meus irmãos, Júlio e Daniel, pelo carinho e por me ajudarem a realizar meus objetivos. Sem o apoio de vocês eu não teria conseguido!

Ao CNPq pelo suporte financeiro.

A Bruna pelo companherismo e para quem copiei os versos da página seguinte. Aos amigos desde os tempos de graduação Zaqueu e Charlene. A Luis, Milk e Diego pelo exelente convivio durante esse ano de mestrado. Aos novos amigos Adecarlos, Allyson, Eder, Joilson e Marcelo por motivos variados.

Ao professor Claudio Cuevas (DMat-UFPE) pela exelente orientação nesta dissertação de mestrado e pelo voto de confiança.

Aos professores Alan Almeida e Natanael Oliveira, ambos do (DMA-UFS), pelas palavras de estímulo e ensinamentos básicos.

À secretária Tânia pela assistência prestada aos alunos do DMat-UFPE.

Universidade Federal de Pernambuco

15 de Agosto de 2008

B. L. A. S.

O valor das coisas não está no tempo em que elas duram, mas na intensidade com que acontecem. Por isso existem momentos inesquecíveis, coisas inexplicáveis e pessoas incomparáveis.

— **Fernando Pessoa**

Resumo da Dissertação apresentada à UFPE como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática

Equações de Evolução Discretas de Segunda Ordem: Regularidade Maximal e Teoria de Perturbação

Bruno Luís de Andrade Santos

Agosto/2008

Orientador: Prof. Claudio Cuevas
Área de Concentração: Análise
Palavras-chaves: Equações de evolução discretas, Regularidade maximal, Teoria de perturbação.
Número de páginas: 62

Usando propriedades espectrais e de R-limitação, caracterizaremos regularidade maximal discreta para equações de evolução discretas de segunda ordem. Via nossa caracterização, estudamos a teoria de perturbação e estabilidade para equações semilineares de segunda ordem, apresentamos um critério de estabilidade baseado apenas nos dados iniciais do problema. As principais referências para esta dissertação são os trabalhos de C. Cuevas e C. Lizama *"Maximal regularity of discrete second order Cauchy problem in Banach spaces"*, Journal of Difference Equations and Applications, 2007, e *"Semilinear evolution equations of second order via maximal regularity"*, Advances in Difference Equations, 2008.

Abstract of Dissertation presented to UFPE as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Mathematics

Second Order Discrete Evolution Equations: Maximal Regularity and Perturbation Theory

Bruno Luís de Andrade Santos

August/2008

Supervisor: Prof. Claudio Cuevas
Area of Concentration: Analysis
Keywords: Discret evolution equations, Maximal regularity, Perturbation theory.
Number of pages: 62

We characterize maximal regularity for second order discrete evolution equation bay means of spectral and R-boundedness properties of the resolvent set. Also we deals with the existence and stability of solutions for semilinear second-order evolution equations on Banach spaces by using our characterizations of discrete maximal regularity.

SUMÁRIO

Introdução

Para criar uma filosofia sã é preciso renunciar à metafísica e tornar-se apenas um bom matemático

— **Bertrand Russel**

Considere T um operador linear limitado definido sobre um espaço de Banach X. Dada uma seqüência $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+} \subset X$ o *problema de Cauchy discreto de segunda ordem* consiste em encontrar uma seqüência $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ verificando a seguinte equação

$$\Delta^2 x_n - Tx_n = f_n, \quad x_0 = x_1 = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{0.1}$$

Na última década, a teoria das equações em diferenças atraiu a atenção de vários pesquisadores das ciências exatas. Tal interesse é, de certa forma, devido ao fato de que os sistemas dinâmicos discritos por tais equações exercem um papel importante em modelos matemáticos para situações concretas da vida real, como por exemplo na física, biologia, economia, estatistica, psicologia e sociologia.

Do ponto de vista matemático, o estudo de regularidade maximal tem recebido uma atenção particular. Em 2001, S. Blunck considerou pela primeira vez (vide [3]) regularidade maximal para equações em diferenças lineares de primeira ordem; usando propriedades de R-limitação do conjunto resolvente do operador que define a equação e técnicas de multiplicadores de Fourier, Blunck conseguiu uma caracterização de regularidade maximal discreta de ordem 1. Através desta caracterização C. Cuevas e C. Lizama obtiveram (vide [6]) resultados significantes no estudo de existência e estabilidade de soluções para equações semilineares sobre espaços de Banach para o problema de evolução discreto de primeira ordem.

Motivados pelo trabalho de Palencia e Piskarev (ver [12]), Cuevas e Lizama introduziram o conceito de regularidade maximal discreta de segunda ordem. No artigo [7], os autores apresentam uma caracterização de regularidade maximal discreta do problema (0.1) mediante propriedades de R-limitação do operador resolvente de $I - T$. O objetivo desta dissertação é apresentar tal caracterização e utilizar tal resultado no estudo de existência de soluções limitadas e estabilidade para o problema semilinear

$$\Delta^2 x_n - T x_n = f(n, x_n, \Delta x_n), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{0.2}$$

Com a intenção de tornar o texto auto-contido apresentamos um primeiro capítulo de preliminares onde são dadas as definições de famílias R-limitadas devida a Bourgain [4], espaços UMD introduzida por D.L. Burkholder em [5] e multiplicadores de Fourier, vide [14]. Na Seção 1.3 enunciamos três resultados sobre multiplicadores de Fourier. Não é objetivo desta dissertação demonstrar tais resultados. Contudo, indicamos referências onde uma tal prova pode ser encontrada.

No segundo capítulo, demonstramos os teoremas de caracterização de regularidade maximal discreta de primeira e segunda ordem obtidos por S. Blunck e C. Cuevas e C. Lizama respectivamente. É importante observar que a propriedade de R-limitação exerce papel fundamental nas demonstrações dos resultados deste capítulo.

No terceiro capítulo, estudamos a teoria de perturbação de equações semilineares de segunda ordem, onde provamos o teorema de Cuevas e Lizama sobre existencia de soluções limitadas. Apresentamos um critério de estabilidade baseado apenas nos dados iniciais do problema.

Por fim, acrescentamos apêndices sobre a transformada de Fourier discreta e a desigualdade de Gronwall discreta, esta última tendo como referência o importante livro de Agarwal [1].

As demostrações dos teoremas são sustentadas, basicamente, nas técnicas desenvolvidas por C. Cuevas, C. Lizama [7; 8] e S. Blunck [3].

Capítulo I

Preliminares

Sans les mathématiques on ne pénètre point au fond de la philosophie. Sans la philosophie on ne pénètre point au fond des mathématiques. Sans les deux on ne pénètre au fond de rien.

— **Leibniz**

Apresentamos neste capítulo as ferramentas básicas utilizadas nesta dissertação. Ressaltamos que não pretendemos demonstrar todas as afirmações feitas aqui. As referências para este capítulo são o artigo de L. Weis [14], a tese de doutorado de T. Hytönen [11] e os artigos [4] e [5].

1.1 Famílias R-limitadas

Para cada $j \in \mathbb{N}$ a $j-$ésima função de Rademacher é definida por:

$$\begin{array}{rcc} r_j : [0,1] & \rightarrow & \{-1,1\} \\ u & \mapsto & sgn(\text{sen}(2^j \pi u)) \end{array}$$

Definição 1.1 Seja $1 \leq q < +\infty$. Dizemos que uma familia $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}(X,Y)$ é *R-limitada* se existe uma constante $C_q > 0$ tal que

$$\left(\int_0^1 \| \sum_{j=1}^{n} r_j(u) T_j x_j \|^q du \right)^{1/q} \leq C_q \left(\int_0^1 \| \sum_{j=1}^{n} r_j(u) x_j \|^q du \right)^{1/q} \tag{1.1}$$

para todos $T_1, \ldots, T_n \in \mathcal{T}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ e $n \in \mathbb{Z}_+$. É comum representar por $\mathcal{R}_q(\mathcal{T})$ a menor constante C_q para a qual a desigualdade (1.1) é válida.

1.1.1 *Propriedades de famílias R-limitadas*

Estabeleceremos as propriedades de R-limitação que utilizaremos nesta dissertação.

Observação 1.1 A desigualdade de Khintchine-Kahane (ver [11], corolário 3.12, pág. 36) garante que a condição (1.1) é equivalente a

$$\left(\int_0^1 \|\sum_{j=1}^n r_j(u)T_jx_j\|^p du\right)^{1/p} \leq C_p \left(\int_0^1 \|\sum_{j=1}^n r_j(u)x_j\|^p du\right)^{1/p}$$

para todo $p \in [1,\infty)$. De fato, tal desigualdade garante que para $0 < p,q < +\infty$ existem constantes $K_{p,q}$ e $K_{q,p}$ tais que

$$\left(\int_0^1 \|\sum_{j=1}^n r_j(u)T_jx_j\|^p du\right)^{1/p} \leq K_{p,q} \left(\int_0^1 \|\sum_{j=1}^n r_j(u)T_jx_j\|^q du\right)^{1/q}$$

e

$$\left(\int_0^1 \|\sum_{j=1}^n r_j(u)x_j\|^q du\right)^{1/q} \leq K_{q,p} \left(\int_0^1 \|\sum_{j=1}^n r_j(u)x_j\|^p du\right)^{1/p}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 \|\sum_{j=1}^n r_j(u)T_jx_j\|^p du\right)^{1/p} &\leq K_{p,q} \left(\int_0^1 \|\sum_{j=1}^n r_j(u)T_jx_j\|^q du\right)^{1/q} \\
&\leq \tilde{C}_q \left(\int_0^1 \|\sum_{j=1}^n r_j(u)x_j\|^q du\right)^{1/q} \\
&\leq \tilde{C}_p \left(\int_0^1 \|\sum_{j=1}^n r_j(u)x_j\|^p du\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Em outras palavras a observação anterior mostra que o conceito de R-limitação independe de p.

Observação 1.2 Algumas propriedades seguem diretamente da definição 1.1. Por exemplo:

(a) Qualquer família finita $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}(X,Y)$ é R-limitada.

(b) Se $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}(X,Y)$ é R-limitada então é uniformemente limitada, com

$$\sup\{\|T\| \ / \ T \in \mathcal{T}\} \leq \mathcal{R}_p(\mathcal{T}).$$

(c) Se $\mathcal{T}$ e $\mathcal{S}$ são famílias R-limitadas então o mesmo se dá para as famílias

$$\mathcal{T} \pm \mathcal{S} = \{T \pm S \ / \ T \in \mathcal{T}, \ S \in \mathcal{S}\}$$

e

$$\mathcal{T} \cdot \mathcal{S} = \{T \circ S \ / \ T \in \mathcal{T}, \ S \in \mathcal{S}\}$$

Com efeito, a primeira asserção segue da desigualdade triangular; a segunda é conseguida usando a definição de R-limitação para a família $\mathcal{T}$ e posteriormente para família $\mathcal{S}$.
(d) Quando X e Y são espaços de Hilbert, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}(X,Y)$ é R-limitado se, e somente se, $\mathcal{T}$ é uniformemente limitado.
(e) Todo subconjunto $M \subset \mathcal{B}(X)$ da forma

$$M = \{\lambda I \ / \ \lambda \in \Omega\}$$

é R-limitado, quando $\Omega \subset \mathbb{C}$ é limitado.
(f) se $\mathcal{T}$ é R-limitada então, na topologia de operadores, seu fecho também o é.

Observação 1.3 Para provar a R-limitação de uma família $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}(X,Y)$ é suficiente verificar a desigualdade 1.1 para uma seqüência de elementos distintos $T_i \in \mathcal{T}$ (vide [11]).

Lema 1.1 Seja I um conjunto de indices. Suponha que $\{T_n(\mu) \ / \ \mu \in I\}_{n=1}^{\infty}$ é R-limitada e assuma que

$$T(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\mu)$$

converge na topologia forte de $\mathcal{B}(X,Y)$. Então

$$\mathcal{R}(\{T(\mu) \ / \ \mu \in I\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}(\{T_n(\mu) \ / \ \mu \in I\}).$$

Demonstração: De fato, faça $S_N(\mu) = \sum_{n=1}^{N} T_n(\mu)$. Para todo $x_1, \ldots, x_n \in X$ e $\mu_1, \ldots, \mu_n \in I$ temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \|\sum_{j=1}^{m} r_j(u) S_N(\mu_j) x_j\| du &\leq \sum_{n=1}^{N} \int_0^1 \|\sum_{j=1}^{m} r_j(u) T_n(\mu_j) x_j\| du \\ &\leq \sum_{n=1}^{N} \mathcal{R}(\{T_n(\mu) \ / \ \mu \in I\}) \int_0^1 \|\sum_{j=1}^{m} r_j(u) x_j\| du. \end{aligned}$$

Como $T(\mu) = \lim_{N \to \infty} S_N(\mu)$ na topologia forte, o resultado segue da observação 1.2 (f). ∎

Proposição 1.1 Seja $J = [a, b) \subset \mathbb{R}$ com $a < b \leq \infty$ e suponha que

$$\begin{array}{rcl} M: \ J & \to & \mathcal{B}(X,Y) \\ t & \mapsto & M(t) \end{array}$$

possui derivada integrável. Então o conjunto $\{M(t) \ / \ t \in J\}$ é R-limitado.

Demonstração: Com efeito, dada uma partição $\sigma = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de J defina

$$M_\sigma(t) = M(a) + \sum_{j=1}^{n} \chi_{[t_{j-1},b)}(t) \int_{t_{j-1}}^{t_j} M'(s)ds,$$

onde $\chi_{[t_{j-1},b)}(t)$ denota a função característica do intervalo $[t_{j-1}, b)$. Seja

$$S_\sigma^j(t) = \frac{1}{n} M(a) + \chi_{[t_{j-1},b)}(t) \int_{t_{j-1}}^{t_j} M'(s)ds.$$

Então $M_\sigma(t) = \sum_{j=1}^{n} S_\sigma^j(t)$ e o conjunto $\{S_\sigma^j(t_j) \ / \ j = 1, \ldots, n\}$ é R-limitado. O lema anterior e a observação 1.3 asseguram que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\{M_\sigma(t) \ / \ t \in J\} &\leq \sum_{j=1}^{n} \mathcal{R}\left(\{S_\sigma^j(t_j) \ / \ j = 1, ..., n\}\right) \\ &\leq \|M(a)\| + \sum_{j=1}^{n} \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} M'(s) \right\| ds \\ &\leq \|M(a)\| + \int_a^b \|M'(s)\| \, ds. \end{aligned}$$

Escolhendo uma sequência de partições $\{\sigma_m\}$ tal que $M_{\sigma_m}(t) \to M(t)$ para $t \in J$ teremos $M(t)$ no fecho de $\{M_{\sigma_m}\}$ e então o resultado é garantido pela observação 1.2 (f). ■

Proposição 1.2 Considere $G \subset \mathbb{C}$ um aberto e K um subconjunto compacto de G. Seja

$$\begin{array}{rcl} M: \ G & \to & \mathcal{B}(X,Y) \\ \omega & \mapsto & M(\omega) \end{array}$$

analítica. Então o conjunto $\{M(\omega) \ / \ \omega \in K\}$ é R-limitado.

Demonstração: Dado $\omega \in K$ considere a expanção em séries de potências

$$M(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \omega)^j \frac{1}{j!} M^{(j)}(\omega), \quad |\lambda - \omega| < r(\omega),$$

com raio de convergencia $r(\omega)$. Pelo lema (1.1) segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\{M(\lambda) \ / \ |\lambda - \omega| < \frac{r(\omega)}{2}\}) &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{R}\left(\left\{(\lambda - \omega)^j \frac{1}{j!} M^{(j)}(\omega) \ / \ |\lambda - \omega| < \frac{r(\omega)}{2}\right\}\right) \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{r(\omega)}{2}\right)^j \frac{1}{j!} \|M^{(j)}(\omega)\| < +\infty. \end{aligned}$$

Por fim observe que basta uma quantidade finita de bolas da forma

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ |\lambda - \omega| < \frac{r(\omega)}{2}, \quad \omega \in K\}$$

para cobrir K; concluindo assim a demonstração. ■

1.2 Espaços UMD

A definição de espaços de Banach com a propriedade UMD foi introduzida por D.L. Burkholder em [5] e é dada como segue:

Definição 1.2 Dizemos que um espaço de Banach X tem a *propriedade UMD* se para cada $p \in (1, \infty)$ existe uma constante $C_p > 0$ tal que para qualquer martingale $\{f_n\}_{n \geq 0} \subset L^p(\Omega, \Sigma, \mu; X)$, qualquer escolha de sinais $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 0} \subset \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ e todo $N \in \mathbb{N}$ vale a seguinte estimativa:

$$\left\| f_0 + \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n (f_n - f_{n-1}) \right\|_{L^p(\Omega, \Sigma, \mu; X)} \leq C_p \|f_N\|_{L^p(\Omega, \Sigma, \mu; X)}.$$

Recordamos que espaços de Banach X para os quais a transformada de Hilbert definida por

$$(Hf)(t) = \lim_{\epsilon \to 0, R \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{\epsilon \leq |s| \leq R} \frac{f(t-s)}{s} ds$$

é limitada em $L^p(\mathbb{R}, X)$ para algum (e portanto para todo) $p \in (1, \infty)$ são chamados Espaços $\mathcal{H}T$.

Burkholder provou em [5] que todo espaço UMD é um espaço $\mathcal{H}T$ e Bourgain provou que a reciproca é verdadeira (vide [4]).

Os seguintes são exemplos de espaços UMD e suas demonstrações podem ser encontradas em [11]

Exemplo 1.1 Os espaços UMD incluem espaços de Hilbert, espaços de Sobolev $W_p^s(\Omega)$, $1 < p < \infty$, espaços de Lebesgue $L^p(\Omega, \mu)$, $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega, \mu; X)$, $1 < p < \infty$, onde X é um espaço UMD.

Exemplo 1.2 Todo subespaço fechado de um espaço UMD é um espaço UMD.

Exemplo 1.3 Um espaço de Banach é UMD se, e somente se, seu dual X^* é UMD.

Para maiores informações sobre espaços UMD recomendamos a referência [11].

1.3 Multiplicadores de Fourier

Sejam X e Y espaços de Banach. Considere o espaço de Schwartz $\mathcal{S}(X) = \mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$ das funções de decrescimento rápido

$$f : \mathbb{R} \to X,$$

tais que

$$\|f\|_{\alpha,\beta} := \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\| t^\beta D^\alpha f(t) \right\|_X, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N},$$

é finito. Relembramos que a transformada de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R}, X)$ é definida por

$$\mathscr{F} f(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i2\pi t\cdot\xi} dt.$$

Definição 1.3 Um *Multiplicador de Fourier* sobre $L^p(\mathbb{R}, X)$ é uma função

$$M : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathcal{B}(X, Y),$$

para a qual a expressão

$$\mathscr{F}(T_M f) = M(\cdot)[\mathscr{F} f(\cdot)], \quad f \in \mathcal{S}(X),$$

está bem definida e T_M extende-se a um operador limitado

$$T_M : L^p(\mathbb{R}, X) \to L^p(\mathbb{R}, Y).$$

Temos o seguinte resultado devido a L. Weis (ver [14]):

Teorema 1.1 (L. Weis [14]) Se X e Y são espaços UMD e $M : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathcal{B}(X, Y)$ é tal que

$$\{M(t) \ / \ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \quad \text{e} \quad \{tM'(t) \ / \ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\},$$

são R-limitados então M é um multiplicador de Fourier sobre $L^p(\mathbb{R}, X)$, $\forall\ 1 < p < \infty$.

Através deste resultado Weis conseguiu estabelecer condições necessárias e suficientes para que a equação

$$y'(t) = Ay(t) + f(t), \quad t \geq 0, \quad y(0) = 0,$$

possua L^p-regularidade maximal.

Posteriormente S. Blunck demonstrou no artigo [3] uma versão do teorema sobre multiplicadores de Fourier, Teorema 1.1, para $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}$. Mais precisamente, considerando o espaço

$$\ell_p(\mathbb{Z}, X) = \left\{ f : \mathbb{Z} \to X \ / \ \|f\|_p := \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|f(n)\|_X^p \right)^{1/p} < +\infty \right\}, \quad p \in (1, \infty),$$

relembramos que a *Transformada de Fourier Discreta* de f sobre $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}$ é dada por

$$\mathscr{F}f(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} z^{-j} f(j), \quad z \in \mathbb{T}.$$

Blunck estabeleceu o seguinte resultado:

Teorema 1.2 Sejam $p \in (1, \infty)$ e X um espaço UMD. Se $M : (-\pi, \pi) \setminus \{0\} \to \mathcal{B}(X)$ é uma aplicação diferenciável tal que

$$\{M(t), \ (e^{it} - 1)(e^{it} + 1)M'(t) \ / \ t \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}\}$$

é R-limitado. Então existe um operador $T_M \in \mathcal{B}(\ell_p(\mathbb{Z}, X))$ tal que

$$\mathscr{F}\left(T_M f\right)(e^{it}) = M(t)\mathscr{F}f(e^{it}),$$

$t \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}$ e $\mathscr{F}f \in L^\infty(\mathbb{T}, X)$ de suporte compacto.

Ainda neste mesmo artigo, Blunck demonstrou a seguinte proposição que será de grande utilidade.

Proposição 1.3 Sejam $p \in (1, \infty)$, $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}$ e X um espaço de Banach. Suponha que existe um operador $T_M \in \mathcal{B}(\ell_p(\mathbb{Z}_+, X))$ tal que

$$\mathscr{F}(T_M f)(z) = M(z)\left(\mathscr{F}f\right)(z), \quad \forall \ z \in \mathcal{L},$$

e $\mathscr{F}f \in L^\infty(\mathcal{L}, X)$ de suporte compacto, onde $M \in L^1_{Loc}(\mathcal{L}, \mathcal{B}(X))$. Então o conjunto $\{M(z) \ / \ z \in \mathcal{L}\}$ é R-limitado.

Usando estes resultados Blunck conseguiu catacterizar regularidade maximal discreta de primeira ordem para a equação

$$\Delta x_n - (T - I)x_n = f_n, \ n \in \mathbb{Z}_+,$$

$$x_0 = 0$$

com propriedades de R-limitação do conjunto resolvente do operador T que define a equação.

Capítulo II

Regularidade maximal discreta

A Matemática, quando a compreendemos bem, possui não somente a verdade, mas também a suprema beleza.

— **Bertrand Russel**

Introduziremos o conceito de *regularidade maximal discreta* para o problema de Cauchy de primeira ordem devido a S. Blunck vide [3]. Apresentaremos tembém a definição de *regularidade maximal discreta de segunda ordem* formulada por Cuevas e Lizama no artigo [7]. No texto usaremos o simbolo $\mathbb{D}$ para representar o disco unitário no plano complexo e por Σ_δ entederemos o subconjunto aberto $\{z \in \mathbb{C} / \ |\arg(z)| < \delta\}$.

2.1 Regularidade maximal discreta de 1ª ordem

Sobre um espaço de Banach X considere, para $T \in \mathcal{B}(X)$, o problema de Cauchy

$$\Delta x_n - (T - I)x_n = f_n, \quad x_0 = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.1}$$

Fixado $T \in \mathcal{B}(X)$, seja $\mathfrak{T} : \mathbb{Z}_+ \to \mathcal{B}(X)$ determinado pela regra $\mathfrak{T}(n) = T^n$. Pode-se mostrar que a solução x de (2.1) é da forma $x_{n+1} = \mathfrak{T}(n)u + (\mathfrak{T} * f)_n$, onde

$$(\mathfrak{T} * f)_n := \sum_{i=0}^{n} T^i f_{n-i}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Observe que se $(f_n) \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X)$ e x é solução do problema (2.1) com condição inicial $x_0 = 0$ então para $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\Delta x_n = \sum_{i=0}^{n-1} \mathfrak{K}_T(i) f_{n-1-i} + f_n, \qquad \mathfrak{K}_T(n) = (T - I)T^n. \tag{2.2}$$

Seja $T \in \mathcal{B}(X)$ um operador *limitado em potências*, isto é, $\mathfrak{T} \in \ell_\infty(\mathbb{Z}_+, \mathcal{B}(X))$. Definimos

$$\begin{array}{rcl} K_T : \ell_1(\mathbb{Z}_+, X) & \to & \ell_\infty(\mathbb{Z}_+, X) \\ f & \mapsto & \mathfrak{K}_T * f \end{array}$$

Definição 2.1 Seja $p \in (1, \infty)$. Dizemos que a equação (2.1) tem *ℓ_p-regularidade maximal discreta de primeira ordem* se $K_T \in \mathcal{B}(\ell_p(\mathbb{Z}_+, X))$.

Nosso objetivo é mostrar que a definição de ℓ_p-regularidade maximal discreta de primeira ordem independe de $p \in (1, \infty)$.

Recordamos que um operador $T \in \mathcal{B}(X)$ é dito *analítico* quando o conjunto

$$\{n(T - I)T^n / \; n \in \mathbb{N}\}$$

é limitado.

Proposição 2.1 Seja $p \in (1, \infty)$. Se $T \in \mathcal{B}(X)$ é limitado em potências e a equação (2.1) possui ℓ_p-regularidade maximal discreta de primeira ordem então T é analítico.

Demonstração: Dados $b \in \mathbb{N}$ e $x \in X$ considere a sequência $f = f_{b,x} \in X$ definida por

$$f_j = \begin{cases} T^j x, & i = 1, 2, \ldots, b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como T é limitado em potências existe $M < +\infty$ tal que $||T^n|| < M$ para todo n. Então

$$\begin{aligned} ||f||_p &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} ||f_n||^p \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{b} ||f_n||^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{b} M^p ||x||^p \right)^{1/p} \\ &= M b^{1/p} ||x||. \end{aligned}$$

Daí segue $f \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X)$. Além disso, $\forall \; n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\begin{aligned} (\mathfrak{K} * f)_n &= \sum_{j=1}^{n} (T - I) T^{n-j} f_j \\ &= \min\{n, b\}(T - I)T^n x. \end{aligned}$$

Ademais, para $1 \leq n \leq b$ temos

$$
\begin{aligned}
\|(T-I)T^b x\| &= \|(T-I)T^n T^{b-n} x\| \\
&\leq \|T^{b-n}\| \|(T-I)T^n x\| \\
&\leq \|(T-I)T^n x\| M.
\end{aligned}
$$

Através da estimativa

$$
\begin{aligned}
||\mathfrak{K} * f||_p &\geq \left(\sum_{n=1}^{b} ||(\mathfrak{K} * f)_n||^p \right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{b} n^p ||(T-I)T^n x||^p \right)^{1/p} \\
&\geq M^{-1} \left(\sum_{n=1}^{b} n^p \right)^{1/p} ||(T-I)T^b x|| \\
&\geq (2M)^{-1} b^{1+1/p} ||(T-I)T^b x||,
\end{aligned}
$$

obtemos finalmente que $||(T-I)T^b x|| \leq 2M^2 ||K_T|| b^{-1} ||x||$. ∎

Para obtermos a p-independência afirmada anteriormente usaremos o seguinte teorema, devido a Benedek-Calderón-Panzone [2], cuja demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em Dore [9] página 31.

Teorema 2.1 Seja $k \in \ell_\infty(\mathcal{B}(X))$ e $q \in [1, \infty]$. Considere $S \in \mathcal{B}(\ell_q(\mathbb{Z}_+, X))$ tal que

$$
(Sf)_n = \sum_{m=1}^{\infty} k(n-m) f_m, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+,
$$

para toda $f \in \ell_1(X) \cap \ell_q(X)$. Se a condição de *Hörmander*

$$
\sup_{\mathrm{m} \in \mathbb{Z}_+} \sum_{n > 2m} ||k(n-m) - k(n)|| < +\infty, \tag{2.3}
$$

é satisfeita então $S \in \mathcal{B}(\ell_p(X))$ para todo $p \in (1, \infty)$.

Corolário 2.1 Sejam $p, q \in (1, \infty)$. Se a equação (2.1) possui ℓ_q-regularidade maximal então (2.1) possui ℓ_p-regularidade maximal.

Demonstração: Com efeito, como T limitado em potências e (2.1) pussui ℓ_q-regularidade maximal discreta de ordem 1 segue que T é analítico. Então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$||(T-I)^2T^n|| \leq \frac{C}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Pelo teorema anterior concluimos que (2.1) possui ℓ_p-regularidade maximal. ∎

Doravante diremos que a equação (2.1) possui *regularidade maximal discreta de primeira ordem* quando possuir ℓ_p-regularidade maximal discreta de primeira ordem para algum $p \in (1, \infty)$.

O próximo resultado é uma caracterização de regularidade maximal discreta da equação (2.1) através de propriedades de R-limitação do operador resolvente $R(\lambda, T)$.

Teorema 2.2 (S. Blunck [3]) Seja X um espaço UMD. Suponha que $T \in \mathcal{B}(X)$ é limitado em potências e analítico então a equação (2.1) possui regularidade maximal discreta de primeira ordem se, e somente se, $\{(\lambda-1)R(\lambda,T) \;/\; |\lambda| = 1,\ \lambda \neq 1\}$ é R-limitado.

Demonstração: $\Rightarrow$) Tendo em vista que o operador T é analítico, segue da Proposição A.2 que

$$\mathscr{F}\mathfrak{K}_T(\lambda) = \lambda((\lambda-1)R(\lambda,T) - I), \quad \lambda \in \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \;/\; |z| = 1\}.$$

Em termos de multiplicadores de Fourier escrevemos

$$T_M \in \mathcal{B}(\ell_p(\mathbb{Z}_+, X)), \quad \text{onde } \mathscr{F}(T_M f)(\lambda) := (\lambda-1)R(\lambda,T)\mathscr{F}f(\lambda). \tag{2.4}$$

Explicitamente, seja $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$g(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ 0, & \text{se } n \neq 1. \end{cases}$$

Então para $(T_M f)(n) = (\mathfrak{K} * (g * f))(n-1) + f(n)$, temos que

$$\begin{aligned} \mathscr{F}\left(T_M f\right)(\lambda) &= \mathscr{F}\mathfrak{K}(\lambda) \cdot \mathscr{F}g(\lambda) \cdot \mathscr{F}f(\lambda) + \mathscr{F}f(\lambda) \\ &= \lambda((\lambda-1)R(\lambda,T) - I)\lambda^{-1}\mathscr{F}f(\lambda) + \mathscr{F}f(\lambda) \\ &= (\lambda-1)R(\lambda,T)\mathscr{F}f(\lambda). \end{aligned}$$

Pela Proposição 1.3 podemos concluir de (2.4) que o conjunto

$$\{(\lambda-1)R(\lambda,T) \;/\; \lambda \in \mathbb{T}, \lambda \neq 1\}$$

é R-limitado.

$\Leftarrow$) Seja $M(t) := (e^{it} - 1)R(e^{it}, T)$. Então o conjunto $\{M(t)\ /\ t \in (0, 2\pi)\}$ é R-limitado. Mostraremos que o mesmo se dá para o conjunto

$$\{(e^{it} - 1)M'(t)\ /\ t \in (0, 2\pi)\}.$$

Ora, é suficiente observar que

$$\begin{aligned} M'(t) &= ie^{it}R(e^{it}, T) - ie^{it}R(e^{it}, T)^2(e^{it} - 1) \\ &= ie^{it}R(e^{it}, T)[1 - M(t)]. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} (e^{it} - 1)M'(t) &= ie^{it}(e^{it} - 1)R(e^{it}, T)[1 - M(t)] \\ &= ie^{it}M(t)[1 - M(t)]. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.2 segue que a equação (2.1) possui regularidade maximal discreta de primeira ordem. ∎

2.2 Regularidade maximal discreta de 2ª ordem

O escopo desta seção é apresentar a definição de regularidade maximal discreta de segunda ordem introduzida por C. Cuevas e C. Lizama.

Seja $T \in \mathcal{B}(X)$ e denotemos a identidade $I : X \to X$ por $C(0)$. Definimos o operador *cosseno* pela relação

$$C(n) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \begin{pmatrix} n \\ 2k \end{pmatrix} (I - T)^k, \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.5}$$

e $C(n) = C(-n)$ se $n = -1, -2, \ldots$ Analogamente, fazendo $S(0) = 0$ o operador *seno* é definido por

$$S(n) = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \begin{pmatrix} n \\ 2k+1 \end{pmatrix} (I - T)^k, \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.6}$$

e $S(n) = -S(-n)$ se $n = -1, -2, \ldots$

Para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ consideremos a equação

$$\begin{cases} \Delta^2 x_n - (I - T)x_n = f_n, \\ x_0 = x,\ \Delta x_0 = x_1 - x_0 = y, \end{cases} \tag{2.7}$$

onde $f : \mathbb{Z}_+ \to X$ e $\Delta^2 x_n = \Delta(\Delta x_n)$.

Proposição 2.2 A solução da equação (2.7) é da forma

$$x_{m+1} = C(m)x + S(m)y + (S * f)_m.$$

Além disso,

$$\Delta x_{m+1} = (I - T)S(m)x + C(m)y + (C * f)_m.$$

Demonstração: Queremos reduzir a equação (2.7) a uma equação de primeira ordem. Para isso, sejam $v_n = [x_n, \Delta x_n]$, $F_n = [0, f_n]$ e

$$R_T = \begin{bmatrix} I & I \\ I - T & I \end{bmatrix} \in \mathcal{B}(X \times X).$$

Observe que x_n é solução de (2.7) se, e somente se, $v_n = [x_n, \Delta x_n]$ é solução do problema

$$\begin{cases} v_{n+1} - R_T v_n = F_n, \\ v_0 = [x_0, \Delta x_0] = [x, y], \end{cases} \tag{2.8}$$

Com efeito, temos que

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \Delta x_{n+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I & I \\ I - T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ \Delta x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_n \end{bmatrix}$$

se, e somente se,

$$\Delta^2 x_n - (I - T)x_n = f_n.$$

Ademais, podemos verificar que $v_{m+1} = R_T^m v_0 + \sum_{n=0}^{m} R_T^n F_{m-n}$, onde

$$R_T^m = \begin{bmatrix} C(m) & S(m) \\ (I - T)S(m) & C(m) \end{bmatrix},$$

é a solução do problema (2.8). ■

Dado $T \in \mathcal{B}(X)$ defina $\mathfrak{S} : \mathbb{Z}_+ \to \mathcal{B}(X)$ por $\mathfrak{S}(n) = (I - T)S(n)$.

Definição 2.2 Dizemos que a equação

$$\begin{cases} \Delta^2 x_n - (I - T)x_n = f_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+ \\ x_0 = x_1 = 0, \end{cases} \tag{2.9}$$

possui *regularidade maximal discreta de segunda ordem* se

$$\begin{array}{rcl} K_T : \ell_1(\mathbb{Z}_+, X) & \to & \ell_\infty(\mathbb{Z}_+, X) \\ f & \mapsto & \mathfrak{S} * f \end{array}$$

onde $(\mathfrak{S} * f)_n = \sum_{k=0}^{n}(I-T)S(k)f_{n-k}$, define um operador limitado em $\ell_p(\mathbb{Z}_+, X)$ com $p \in (1, \infty)$.

Uma consequência desta definição é que se a equação

$$\begin{cases} \Delta^2 x_n - (I-T)x_n = f_n, \\ x_0 = x_1 = 0, \end{cases} \tag{2.10}$$

possui regularidade maximal discreta de segunda ordem então ela possui ℓ_p-regularidade maximal, isto é, para cada $(f_n) \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X)$ temos que $\Delta^2 x_n \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X)$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \Delta^2 x_n &= (I-T)x_n + f_n \\ &= (I-T)\sum_{k=0}^{n-1} S(k)f_{n-1-k} + f_n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(I-T)S(k)f_{n-1-k} + f_n \\ &= (K_T f)_{n-1} + f_n \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X). \end{aligned}$$

LEMA 2.1 Seja $T \in \mathcal{B}(X)$ um operador analítico. Então $\sigma(I-T) \subseteq \mathbb{D}(1,1) \cup \{0\}$. Em particular, $(z-1)^2 \in \rho(I-T)$ sempre que $|z| = 1$, $z \neq 1$.

Demonstração: Seja $M > 0$ tal que

$$\|(T-I)T^n\| \leq \frac{M}{n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Definamos $p(z) = z^{n+1} - z^n$. Pelo Teorema Espectral (ver[13]) temos que

$$\begin{aligned} \|(T-I)T^n\| &= \|p(T)\| \geq \sup\{|\lambda| \ / \ \lambda \in \sigma(p(T))\} \\ &= \sup\{|\lambda| \ / \ \lambda \in p(\sigma(T))\} = \sup\{|z^n(z-1)| \ / \ z \in \sigma(T)\} \\ &= \sup\{|w(1-w)^n| \ / \ w \in \sigma(I-T)\} \geq |w||1-w|^n, \end{aligned}$$

para todo $w \in \sigma(I-T)$, $n \in \mathbb{N}$. Então para $w \neq 0$ temos que

$$\begin{aligned}
\frac{M}{n} &\geq |w||1-w|^n \\
&\Rightarrow \frac{\sqrt[n]{M}}{\sqrt[n]{n}} \geq \sqrt[n]{|w|}|1-w| \\
&\Rightarrow 1 \geq |1-w|.
\end{aligned}$$

Observe que $|1-w| = 1 \Rightarrow w = 0$. Logo, $\sigma(I-T) \subset \mathbb{D}(1,1) \cup \{0\}$. Finalmente, para $z = e^{i\theta}$ segue que

$$\begin{aligned}
|(e^{i\theta}-1)^2 - 1| &= |e^{2i\theta} - 2e^{i\theta}| \\
&= |e^{i\theta}(2-e^{i\theta})| = |e^{i\theta}||2-e^{i\theta}| \\
&= |2-e^{i\theta}| \geq 2 - |e^{i\theta}| = 1.
\end{aligned}$$

Portanto, $(z-1)^2 \in \rho(I-T)$. ■

Teremos o seguinte teorema de caracterização de regularidade maximal:

Teorema 2.3 (Cuevas-Lizama[8]) Seja X um espaço UMD. Se $T \in \mathcal{B}(X)$ é analítico então as seguintes condições são equivalentes:

(i) A equação (2.9) possui regularidade maximal discreta de segunda ordem;

(ii) O conjunto $\{(\lambda-1)^2 R((\lambda-1)^2, I-T) \ / \ |\lambda| = 1, \lambda \neq 1\}$ é R-limitado.

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$ Defina a aplicação $\mathfrak{S} : \mathbb{Z} \to \mathcal{B}(X)$ por

$$\mathfrak{S}(n) = \begin{cases} (I-T)S(n), & \text{se } n \in \mathbb{Z}_+; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja

$$\begin{aligned}
K_T : \ell_p(\mathbb{Z}_+, X) &\to \ell_p(\mathbb{Z}_+, X) \\
f &\mapsto \mathfrak{S} * f
\end{aligned}$$

onde $(\mathfrak{S} * f)_n = \sum_{k=0}^{n} (I-T)S(k) f_{n-k}$. Por hipótese, temos que $K_T \in \mathcal{B}(\ell_p(\mathbb{Z}_+, X))$. Como T é analítico o Lema 2.1 garante que

$$\{(z-1)^2 \ / \ |z| = 1, \ z \neq 1\} \subseteq \rho((I-T)).$$

Então

$$[(z-1)^2 - (I-T)]R((z-1)^2, I-T) = I$$

$$\Rightarrow (z-1)^2R((z-1)^2, I-T) - (I-T)R((z-1)^2, I-T) = I$$

$$\Rightarrow (z-1)^2R((z-1)^2, I-T) - I = (I-T)R((z-1)^2, I-T).$$

Usando a Proposição A.1 temos que

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(\mathfrak{S})(z) &= (I-T)\mathscr{F}S(z) = z(I-T)R((z-1)^2, I-T) \\
&= z\left[(z-1)^2R((z-1)^2, I-T) - I\right] \\
\Rightarrow & \quad z^{-1}\mathscr{F}(\mathfrak{S})(z) = (z-1)^2R((z-1)^2, I-T) - I \\
\Rightarrow & \quad z^{-1}\mathscr{F}(\mathfrak{S})(z)\mathscr{F}(f)(z) = (z-1)^2R((z-1)^2, I-T)\mathscr{F}(f)(z) - \mathscr{F}(f)(z) \\
\Rightarrow & \quad z^{-1}\mathscr{F}(\mathfrak{S} * f)(z) + \mathscr{F}(f)(z) = (z-1)^2R((z-1)^2, I-T)\mathscr{F}(f)(z) \\
\Rightarrow & \quad \mathscr{F}((\mathfrak{S} * f)(\bullet - 1))(z) + \mathscr{F}(f)(z) = (z-1)^2R((z-1)^2, I-T)\mathscr{F}(f)(z) \\
\Rightarrow & \quad \mathscr{F}(\mathfrak{S} * f + f)(z) = (z-1)^2R((z-1)^2, I-T)\mathscr{F}(f)(z).
\end{aligned}$$

Segue-se que existe $L_M \in \mathcal{B}\left(\ell_p(\mathbb{Z}_+, X)\right)$ tal que

$$\mathscr{F}(L_M f)(z) = (z-1)^2R((z-1)^2, I-T)\mathscr{F}f(z).$$

Explicitamente $(L_M f)(n) = (K_T f)(n-1) + f(n)$. Pela Proposição 1.3 segue que o conjunto

$$\{(z-1)^2R((z-1)^2, I-T) \; / \; |z| = 1, \; z \neq 1\}$$

é R-limitado.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Defina

$$M(t) = e^{it}(e^{it}-1)^2R((e^{it}-1)^2, I-T) - e^{it}I, \quad t \in (0, 2\pi).$$

Por hipótese, $\{(e^{it}-1)^2R((e^{it}-1)^2, I-T)\}$ é R-limitado e, como $|e^{it}| = 1$, o mesmo se dá para $\{e^{it}I\}$ (ver observação 1.2 (e)). Logo, $\{M(t) \; / \; t \in (0, 2\pi)\}$ também é R-limitado. Por outro lado,

$$M'(t) = ie^{it}N(t) + e^{it}N'(t)$$

onde $N(t) = (e^{it}-1)^2 R((e^{it}-1)^2, I-T) - I$. Daí, multiplicando os dois lados desta última igualdade por $(e^{it}-1)$ obtemos

$$(e^{it}-1)M'(t) = i(e^{it}-1)e^{it}N(t) + e^{it}(e^{it}-1)N'(t).$$

Mas,

$$(e^{it}-1)N'(t) = 2ie^{it}[N(t)+I] - 2ie^{it}[N(t)+I]^2.$$

Então $\{(e^{it}-1)M'(t) \ / \ t \in (0,2\pi)\}$ é R-limitado e assim $\{(e^{it}+1)(e^{it}-1)M'(t) \ / \ t \in (0,2\pi)\}$ é R-limitado. Segue do Teorema 1.2 que existe $L_M \in \mathcal{B}(\ell_p(\mathbb{Z}, X))$ tal que

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(L_M f)(z) &= z(z-1)^2 R((z-1)^2, I-T)\mathscr{F}f(z) - z\mathscr{F}f(z) \\ &\Rightarrow \ \mathscr{F}(L_M f) = \mathscr{F}(K_T f), \quad \forall\ f \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X) \\ &\Rightarrow \ L_M = K_T \in \mathcal{B}(\ell_p(\mathbb{Z}_+, X)). \end{aligned}$$

■

Considerando os espaços de Hilbert obtemos o seguinte corolário

Corolário 2.2 Seja H um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(H)$ um operador analítico. As seguintes condições são equivalentes:

(i) A equação (2.9) possui regularidade maximal discreta de segunda ordem.

(ii) O conjunto $\{(\lambda-1)^2 R\left((\lambda-1)^2, I-T\right) \ / \ |\lambda| = 1, \quad \lambda \neq 1\}$ é limitado.

Demonstração: De fato, no capítulo anterior observamos que todo espaço de Hilbert é um espaço UMD. Além disso, as definições de conjunto R-limitado e conjunto limitado são equivalentes num espaço de Hilbert.

Q.E.D.

2.3 Redução a equações de 1ªordem

Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{B}(X)$. Dada a equação de segunda ordem

$$\begin{cases} \Delta^2 x_n - (I-T)x_n = f_n, \\ x_0 = x_1 = 0, \end{cases} \tag{2.11}$$

considere em $X \times X$ o problema

$$v_{n+1} - R_T v_n = F_n, \tag{2.12}$$

onde $v_n = [x_n, \Delta x_n]$, $F_n = [0, f_n]$ e $R_T \in \mathcal{B}(X \times X)$ é definido por

$$R_T[x, y] = [x + y, x - Tx + y].$$

Teorema 2.4 Seja $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $1 \in \rho(T)$. Então (2.11) possui ℓ_p-regularidade maximal discreta se, e somente se, (2.12) possui ℓ_p-regularidade maximal discreta.

Demonstração: Suponha que (2.11) possui ℓ_p-regularidade maximal discreta. Seja $F_n = [f_n, g_n] \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X \times X)$. Defina

$$\tilde{G}_n = [\tilde{f}_n, \tilde{g}_n] = \begin{cases} [0, g_0], & n = 0, \\ [f_n, g_n], & n \neq 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Sejam $\tilde{V}_n = [\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n]$ a solução da equação

$$\begin{cases} \tilde{V}_{n+1} - R_T \tilde{V}_n = \tilde{G}_n, \\ \tilde{V}_0 = 0, \end{cases} \tag{2.14}$$

e V_n a solução de

$$\begin{cases} V_{n+1} - R_T V_n = F_n, \\ V_0 = 0, \end{cases} \tag{2.15}$$

Podemos verificar que $V_{n+1} = \tilde{V}_{n+1} + R_T^n(F_0 - \tilde{G}_0)$. Notemos que

$$\Delta V_n = V_{n+1} - V_n = \Delta \tilde{V}_n + (R_T - I) R_T^{n-1}(F_0 - \tilde{G}_0).$$

Desta forma, para provar que $\Delta V_n \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X \times X)$ basta mostrar que $\Delta \tilde{V}_n \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X \times X)$, visto que $(R_T - I) R_T^{n-1}(F_0 - \tilde{G}_0) \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X \times X)$. Para provar esta última afirmação observe que

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} \|(R_T - I) R_T^{m-1}(F_0 - \tilde{G}_0)\|_{X \times X}^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|(R_T - I) R_T^{n}(F_0 - \tilde{G}_0)\|_{X \times X}^p \right)^{1/p}. \tag{2.16}$$

Como $F_0 - \tilde{G}_0 = [f_0, g_0] - [0, g_0] = [f_0, 0]$ segue que

$$\begin{aligned} (R_T - I) R_T^n &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ I - T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C(n) & S(n) \\ (I - T)S(n) & C(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (I - T)S)(n) & C(n) \\ (I - T)C(n) & (I - T)S(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I - T)S(n) f_0 \\ (I - T)C(n) f_0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, segue de (2.16) e da desigualdade de Minkoviskii que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\|(I-T)S(n)f_0\|_X^p+\|(I-T)C(n)f_0\|_X^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty}\|(I-T)S(n)f_0\|_X^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=0}^{\infty}\|(I-T)C(n)f_0\|_X^p\right)^{1/p} \quad (2.17)$$

Para provar que esta última soma é finita considere o problema

$$\begin{cases} \Delta^2 x_n = (I-T)x_n + h_n, & h_n \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X), \\ x_0 = x_1 = 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

A solução deste problema é

$$x_n = (S*h)_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} S(k)h_{n-1-k}.$$

Também,

$$\Delta^2 x_n = (I-T)x_n + h_n = \sum_{k=0}^{n-1}(I-T)S(k)h_{n-1-k} + h_n \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X).$$

Logo,

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1}(I-T)S(k)h_{n-1-k}\right) \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X), \quad \forall\ h_n \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X).$$

Escolha

$$h_n = \begin{cases} f_0, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Então

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\|(I-T)S(n)f_0\|_X^p\right)^{1/p} < +\infty.$$

Para mostrar que a segunda parcela de (2.17) é finita considere o problema

$$\Delta^2 x_n - (I-T)x_n = h_n$$

$$\Rightarrow (I-T)x_n = \Delta^2 x_n - h_n.$$

Como $1 \in \rho(T)$ segue que

$$x_n = (I-T)^{-1}\left(\Delta^2 x_n - h_n\right) \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X).$$

Então $\Delta x_n \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X)$. Entretanto,

$$\begin{aligned}
\Delta x_n &= (C * h)_{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} C(k) h_{n-1-k} \\
&\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \| \sum_{k=0}^{n-1} C(k) h_{n-k} \|_X^p < +\infty.
\end{aligned}$$

Resta mostrar que $\Delta \tilde{V}_n \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X)$. Com este intuito, observe que a equação (2.14) é equivalente a

$$\begin{cases} \Delta \tilde{x}_n - \tilde{y}_n = \tilde{f}_n, \\ (I - T)\tilde{x}_n + \Delta \tilde{y}_n = \tilde{g}_n. \end{cases} \tag{2.19}$$

Desta última equação temos

$$\begin{cases} \Delta^2 \tilde{x}_n - (I - T)\tilde{x}_n = \tilde{h}_n, \\ \tilde{x}_0 = \tilde{x}_1 = 0, \end{cases}$$

onde $\tilde{h}_n = \Delta \tilde{f}_n + \tilde{g}_n$. Como

$$\begin{aligned}
(\tilde{f}_n), (\tilde{g}_n) \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X) &\Rightarrow \Delta \tilde{f}_n + \tilde{g}_n \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X) \\
&\Rightarrow \tilde{h}_n \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X) \\
&\Rightarrow \Delta^2 \tilde{x}_n \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X).
\end{aligned}$$

Analogamente, $1 \in \rho(T) \Rightarrow \tilde{x}_n \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X)$. Finalmente,

$$\begin{aligned}
\Delta \tilde{V}_n &= [\Delta \tilde{x}_n, \Delta \tilde{y}_n] \\
&= [\Delta \tilde{x}_n, \Delta^2 \tilde{x}_n - \Delta \tilde{f}_n] \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X \times X).
\end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que (2.12) possui ℓ_p-regularidade maximal discreta. Sejam $(f_n) \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X)$ e x_n a solução de

$$\begin{cases} \Delta^2 x_n - (I - T)x_n = f_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \\ x_0 = x_1 = 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

Defina $F_n = [0, f_n]$. Por hipótese a única solução v_n da equação

$$\begin{cases} \Delta v_n - (R_T - I)v_n = F_n, \\ v_0 = 0, \end{cases} \tag{2.21}$$

satisfaz $(\Delta v_n) \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X)$. Pela unicidade da solução x_n do problema (2.20) devemos ter $v_n = [x_n, \Delta x_n]$. Daí, como $\Delta v_n \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X)$ temos que

$$\begin{aligned} \Delta v_n &= [\Delta x_n, \Delta^2 x_n] \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X) \\ &\Rightarrow \Delta^2 x_n \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X). \end{aligned}$$

■

Capítulo III

Teoria de perturbação para equação de 2^{a} ordem

A Matemática é a honra do espírito humano.

— **Leibniz**

Estudaremos agora as consequências da caracterização de regularidade maximal discreta de segunda ordem estabelecida no capítulo anterior vide Teorema 2.3. A referência para os resultados aqui demonstrados é o artigo de Cuevas e Lizama [8].

3.1 Equações semilineares de segunda ordem

Nesta seção investigaremos a existência de soluções limitadas para a equação

$$\begin{cases} \Delta^2 x_n - (I - T)x_n = f(n, x_n, \Delta x_n), & n \in \mathbb{Z}_+ \\ x_0 = x_1 = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

via regularidade maximal. O resultado a seguir será de grande utilidade na demostração do principal teorema deste capítulo.

Lema 3.1 Seja (α_n) uma sequência em $\mathbb{R}_+$. Para todos $n, l \in \mathbb{Z}_+$ temos que

$$\sum_{m=0}^{n-1} \alpha_n \left(\sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j \right)^l \leq \frac{1}{l+1} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j \right)^{l+1}.$$

Demonstração: Façamos $A_m = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j$. Temos que

$$\begin{aligned}(l+1)(A_{m+1}-A_m)A_m^l &= (A_{m+1}-A_m)(A_m^l + A_m^{l-1}A_m + \cdots + A_m A_m^{l-1} + A_m^l)\\ &\leq (A_{m+1}-A_m)(A_{m+1}^l + A_{m+1}^{l-1}A_m + \cdots + A_{m+1}A_m^{l-1} + A_m^l)\\ &= A_{m+1}^{l+1} - A_m^{l+1}.\end{aligned}$$

Então,

$$(l+1)\sum_{m=0}^{n-1}(A_{m+1}-A_m)A_m^l \leq \sum_{m=0}^{n-1}(A_{m+1}^{l+1} - A_m^{l+1}) = A_n^{l+1}.$$

■

Afim de estabelecer os resultados deste capítulo levaremos sempre em consideração a seguinte condição:

Condição 3.1 Assuma que são validas as seguintes afirmações:

(i) Existe $\alpha := (\alpha_n) \in \ell_1(\mathbb{Z}_+, X)$ tal que, para todo $z, w \in X \times X$ e $n \in \mathbb{Z}_+$, a função

$$f : \mathbb{Z}_+ \times X \times X \to X$$

satisfaz $\|f(n,z) - f(n,w)\|_X \leq \alpha_n \|z-w\|_{X\times X}$.

(ii) $f(\bullet, 0, 0) \in \ell_1(\mathbb{Z}_+, X)$.

Consideremos o espaço de Banach $\mathcal{W}_0^{2,p}$ das sequências $V = (V_n) \in \ell_\infty(\mathbb{Z}_+, X)$ tais que $V_0 = V_1 = 0$ e $\Delta^2 V \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X)$ equipado com a norma $|||V||| = \|V\|_\infty + \|\Delta^2 V\|_p$.

Lema 3.2 Assuma a Condição 3.1. Se $V \in \mathcal{W}_0^{2,p}$ então $g(\bullet) := f(\bullet, 0, 0) \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X)$.

Demonstração: Com efeito, levando em conta que $(a+b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$ temos que

$$\begin{aligned}\|g\|_p^p &= \sum_{n=0}^{\infty}\|f(n,V_n,\Delta V_n)\|_X^p\\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty}(\|f(n,V_n,\Delta V_n) - f(n,0,0)\|_X + \|f(n,0,0)\|_X)^p\\ &\leq 2^p\sum_{n=0}^{\infty}\|f(n,V_n,\Delta V_n) - f(n,0,0)\|_X^p + 2^p\sum_{n=0}^{\infty}\|f(n,0,0)\|_X^p\\ &\leq 2^p\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n^p\|(V_n,\Delta V_n)\|_{X\times X}^p + 2^p\sum_{n=0}^{\infty}\|f(n,0,0)\|_X^p. \qquad (3.2)\end{aligned}$$

Ademais,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \|f(n,0,0)\|_X^p &= \sum_{n=0}^{\infty} \|f(n,0,0)\|_X^{p-1} \|f(n,0,0)\|_X \\
&\leq \|f(\bullet,0,0)\|_\infty^{p-1} \sum_{n=0}^{\infty} \|f(n,0,0)\|_X \\
&= \|f(\bullet,0,0)\|_\infty^{p-1} \|f(\bullet,0,0)\|_1. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Analogamente, temos também que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^p \leq \|\alpha\|_\infty^{p-1} \|\alpha\|_1. \qquad (3.4)$$

Em contrapartida, como $V \in \ell_\infty(\mathbb{Z}_+, X)$, temos

$$\|(V_n, \Delta V_n)\|_{X\times X} = \|V_n\|_X + \|V_{n+1} - V_n\|_X \leq 2\|V_n\|_X + \|V_{n+1}\|_X \leq 3\|V\|_\infty. \qquad (3.5)$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\|g\|_p^p &\leq 6^p \|V\|_\infty^p \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^p + 2^p \|f(\bullet,0,0)\|_\infty^{p-1} \|f(\bullet,0,0)\|_1 \\
&\leq 6^p \|V\|_\infty^p \|\alpha\|_\infty^{p-1} \|\alpha\|_1 + 2^p \|f(\bullet,0,0)\|_\infty^{p-1} \|f(\bullet,0,0)\|_1, \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

provando que $g \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X)$; completando a demonstração do lema. ■

Chamaremos de *S-limitado* um operador $T \in \mathcal{B}(X)$ para o qual o operador seno associado satisfaz $S \in \ell_\infty(\mathbb{Z}_+, \mathcal{B}(X))$.

Enunciaremos a seguir o teorema central deste capítulo.

Teorema 3.1 (Cuevas-Lizama[8]) Assuma que a Condição 3.1 é satisfeita. Se T é S-limitado e a equação

$$\begin{cases} \Delta^2 x_n - (I-T)x_n = f_n, & n \in \mathbb{Z}_+ \\ x_0 = x_1 = 0, \end{cases} \qquad (3.7)$$

possui regularidade maximal discreta de segunda ordem. Então existe uma única solução limitada $x = (x_n)$ de (3.1) tal que $(\Delta^2 x_n) \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X)$. Além disso, valem as seguintes estimativas a priori

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}_+} [\|x_n\|_X + \|\Delta x_n\|_X] \leq 3M\|f(\bullet,0,0)\|_1 e^{3M\|\alpha\|_1}, \qquad (3.8)$$

$$\|\Delta^2 x\|_p \leq C\|f(\bullet,0,0)\|_1 e^{6M\|\alpha\|_1}, \quad 1<p<\infty, \tag{3.9}$$

onde $M := \sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\|S(n)\|$ e $C>0$.

Demonstração: Seja $V \in \mathcal{W}_0^{2,p}$ e defina $g_n = f(n, V_n, \Delta V_n)$. O Lema 3.2 e a regularidade maximal discreta da equação (3.7) garantem que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} z_{n+2} - 2z_{n+1} + Tz_n = g_n, & n \in \mathbb{Z}_+, \\ z_0 = z_1 = 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

possui uma única solução (z_n) tal que $(\Delta^2 z_n) \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X)$, a qual é da forma

$$z_n = [\mathcal{K}V]_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0,1, \\ \sum_{k=1}^{n-1-m} S(k) f(n-1-k, V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k}), & \text{se } n \geq 2. \end{cases} \tag{3.11}$$

Nosso objetivo é mostrar que o operador $\mathcal{K} : \mathcal{W}_0^{2,p} \to \mathcal{W}_0^{2,p}$ possui um único ponto fixo. Primeiramente mostraremos que $\mathcal{K}$ está bem definido. Seja $M := \sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\|S(n)\|$ a Condição 3.1 garante que

$$\begin{aligned}
\|[\mathcal{K}V]_n\|_X &= \|\sum_{k=1}^{n-1} S(k) f(n-1-k, V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k})\|_X \\
&\leq M\sum_{k=1}^{n-1} \|f(n-1-k, V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k}) - f(n-1-k,0,0)\|_X \\
&+ M\sum_{k=1}^{n-1}\|f(n-1-k,0,0)\|_X \\
&\leq M\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{n-1-k}\|(V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k})\|_{X\times X} + M\sum_{j=0}^{n-1}\|f(n-1-k,0,0)\|_X \\
&= M\sum_{j=0}^{n-2}\alpha_j\|(V_j,\Delta V_j)\|_{X\times X} + M\sum_{j=0}^{n-2}\|f(j,0,0)\|_X \\
&\leq 3M\|V\|_\infty \sum_{j=0}^{n-2}\alpha_j + M\sum_{j=0}^{n-2}\|f(j,0,0)\|_X \\
&\leq M[3\|V\|_\infty\|\alpha\|_1 + \|f(\bullet,0,0)\|_1].
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Segue então que $\mathcal{W}_0^{2,p}$ é invariante por $\mathcal{K}$.

O objetivo agora é mostrar que para n suficientemente grande o iterado $\mathcal{K}^n$ é uma contração. Sejam V e W em $\mathcal{W}_0^{2,p}$. Sendo $M<\infty$ segue da Condição 3.1 a seguinte estimativa

$$
\begin{aligned}
&\|[\mathcal{K}V]_n - [\mathcal{K}W]_n\|_X \\
&\quad = \left\| \sum_{k=1}^{n-1} S(k)\left(f(n-1-k, V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k}) - f(n-1-k, W_{n-1-k}, \Delta W_{n-1-k})\right) \right\|_X \\
&\qquad\qquad \leq M \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{n-1-k} \|\left((V-W)_{n-1-k}, \Delta(V-W)_{n-1-k}\right)\|_{X\times X} \\
&\qquad\qquad = M \sum_{j=0}^{n-2} \alpha_j \|\left((V-W)_j, \Delta(V-W)_j\right)\|_{X\times X} \\
&\qquad\qquad \leq 3M\|\alpha\|_1 \|V-W\|_\infty.
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

Segue então que

$$
\|\mathcal{K}V - \mathcal{K}W\|_\infty \leq 3M\|\alpha\|_1 |\!|\!| V - W |\!|\!|. \tag{3.14}
$$

Em contrapartida, lembrando que $S(1) = I$, observamos que

$$
\begin{aligned}
&\Delta[\mathcal{K}V]_n = [\mathcal{K}V]_{n+1} - [\mathcal{K}V]_n \\
&\quad = \sum_{j=0}^{n+1} S(j) f(n+1-j, V_{n+1-j}, \Delta V_{n+1-j}) - \sum_{j=0}^{n} S(j) f(n-j, V_{n-j}, \Delta V_{n-j}) \\
&\quad = f(n-1, V_{n-1}, \Delta V_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(S(k+1) - S(k)\right) f(n-1-k, V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k}).
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

Como $S(2) = 2I$ temos que

$$
\begin{aligned}
\Delta^2[\mathcal{K}V]_n &= f(n, V_n, \Delta V_n) - f(n-1, V_{n-1}, \Delta V_{n-1}) + \left(S(2) - I\right) f(n-1, V_{n-1}, \Delta V_{n-1}) \\
&+ \sum_{k=1}^{n-1} \left(S(k+2) - 2S(k+1) + S(k)\right) f(n-1-k, V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k}) \\
&= f(n, V_n, \Delta V_n) \\
&+ \sum_{k=1}^{n-1} \left(S(k+2) - 2S(k+1) + TS(k)\right) f(n-1-k, V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k}) \\
&+ \sum_{k=1}^{n-1} (I-T) S(k) f(n-1-k, V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k}).
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

Relembrando que a solução de (3.10) é $z_n = (S * g)_n$, obtemos a identidade

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=1}^{n+2-1} S(k)f(n+2-1-k, V_{n+2-1-k}, \Delta V_{n+2-1-k}) \\
&- 2\sum_{k=1}^{n+1-1} S(k)f(n+1-1-k, V_{n+1-1-k}, \Delta V_{n+1-1-k}) \\
&+ \sum_{k=1}^{n-1} S(k)f(n-1-k, V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} S(k+2)f(n-1-k, V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k}) \\
&- 2\sum_{k=1}^{n-1} S(k+1)f(n-1-k, V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k}) \\
&+ \sum_{k=1}^{n-1} S(k)f(n-1-k, V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left(S(k+2) - 2S(k+1) + TS(k)\right) f(n-1-k, V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k}). \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

Segue, para $n \geq 1$, que

$$
\Delta^2[\mathcal{K}V]_n = f(n, Vn, \Delta V_n) + \sum_{k=1}^{n-1} (I-T)S(k)f(n-1-k, V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k}), \qquad (3.18)
$$

implicando que, para $n \geq 1$

$$
\Delta^2[\mathcal{K}V]_n - \Delta^2[\mathcal{K}W]_n = f(n, V_n, \Delta V_n) - f(n, W_n, \Delta W_n)
$$

$$
+ \sum_{k=1}^{n-1} (I-T)S(k)\left(f(n-1-k, V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k}) - f(n-1-k, W_{n-1-k}, \Delta W_{n-1-k})\right).
$$

A desigualdade de Minkowskii e o fato de que $\Delta^2[\mathcal{K}V]_0 = f(0,0,0)$ asseguram que

$\|\Delta^2\mathcal{K}V - \Delta^2\mathcal{K}W\|_p$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\|f(0,0,0) - f(0,0,0)\|_X^p + \sum_{n=1}^{\infty} \|\Delta^2[\mathcal{K}V]_n - \Delta^2[\mathcal{K}W]_n\|_X^p \right)^{1/p} \\
&\leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} \|f(n, V_n, \Delta V_n) - f(n, W_n, \Delta W_n)\|_X^p \right]^{1/p} +
\end{aligned}
$$

$$
\left[\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n-1} (I-T)S(k)\left(f(n-1-k, V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k}) - f(n-1-k, W_{n-1-k}, \Delta W_{n-1-k})\right) \right\|_X^p \right]^{1/p}
$$

Da limitação do operador K_T sobre $\ell_p(\mathbb{Z}_+, X)$ e da Condição 3.1 resulta que

$$\begin{aligned}
\|\Delta^2 \mathcal{K}V - \Delta^2 \mathcal{K}W\|_p &\leq (1 + \|K_T\|) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \|f(n, V_n, \Delta V_n) - f(n, W_n, \Delta W_n)\|_X^p \right]^{1/p} \\
&\leq (1 + \|K_T\|) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^p \|(V_n, \Delta V_n) - (W_n, \Delta W_n)\|_{X\times X}^p \right]^{1/p} \\
&\leq (1 + \|K_T\|) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^p 3^p \|V - W\|_\infty^p \right]^{1/p} \\
&\leq 3(1 + \|K_T\|)\|\alpha\|_1 \|V - W\|_\infty. \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

Obtemos então de (3.14) e (3.19) que

$$\begin{aligned}
|||\mathcal{K}V - \mathcal{K}W||| &= \|\mathcal{K}V - \mathcal{K}W\|_\infty + \|\Delta^2 \mathcal{K}V - \Delta^2 \mathcal{K}W\|_p \\
&\leq 3M\|\alpha\|_1 |||V - W||| + 3(1 + \|K_T\|)\|\alpha\|_1 |||V - W||| \\
&= 3(M + 1 + \|K_T\|)\|\alpha\|_1 |||V - W||| \\
&= ab|||V - W|||, \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

onde $a := 3M\|\alpha\|_1$ e $b := 1 + (1 + \|K_T\|)M^{-1}$.

Calcularemos agora iterações de $\mathcal{K}$. Sejam $V, W \in \mathcal{W}_0^{2,p}$. Relembrando que $S(0) = 0$, $S(1) = I$ e $V_0 = V_1 = W_0 = W_1 = 0$, obtemos inicialmente, para $n \geq 2$ que

$$\begin{aligned}
&\Delta[\mathcal{K}V]_n - \Delta[\mathcal{K}W]_n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (S(k+1) - S(k)) \left(f(n-1-k, V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k}) - f(n-1-k, W_{n-1-k}, \Delta W_{n-1-k}) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (S(n-k) - S(n-k-1)) \left(f(k, V_k, \Delta V_k) - f(k, W_k, \Delta W_k) \right), \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
\|\Delta[\mathcal{K}V]_n - \Delta[\mathcal{K}W]_n\|_X &\leq 2M \sum_{k=1}^{n-1} \|f(k, V_k, \Delta V_k) - f(k, W_k, \Delta W_k)\|_X \\
&\leq 2M \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \| ((V - W)_k, \Delta(V - W)_k) \|_{X\times X}. \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

Por outro lado, segue da estimativa (3.13) que

$$\|[\mathcal{K}V]_n - [\mathcal{K}W]_n\|_X \leq M \sum_{k=1}^{n-2} \| ((V-W)_k, \Delta(V-W)_k) \|_{X\times X} \tag{3.23}$$

Então para $n \geq 2$ temos que

$$\| ([\mathcal{K}V - \mathcal{K}W]_n, \Delta[\mathcal{K}V - \mathcal{K}W]_n) \|_{X\times X} \leq 3M \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \| ((V-W)_k, \Delta(V-W)_k) \|_{X\times X}. \tag{3.24}$$

Como $[\mathcal{K}V]_0 = [\mathcal{K}V]_1 = 0$ obtemos das estimativas (3.24), (3.5) e tendo em conta o Lema 3.1 que

$$\begin{aligned}
\|[\mathcal{K}^2V]_n - [\mathcal{K}^2W]_n\|_X &\leq M \sum_{j=0}^{n-2} \|f(j, [\mathcal{K}V]_j, \Delta[\mathcal{K}V]_j) - f(j, [\mathcal{K}W]_j, \Delta[\mathcal{K}W]_j)\|_X \\
&\leq M \sum_{j=1}^{n-2} \alpha_j \| ([\mathcal{K}V - \mathcal{K}W]_j, \Delta[\mathcal{K}V - \mathcal{K}W]_j) \|_{X\times X} \\
&\leq 3M^2 \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \left(\sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i \| ((V-W)_i, \Delta(V-W)_i) \|_{X\times X} \right) \\
&\leq \frac{1}{2}(3M)^2 \left(\sum_{r=1}^{n-1} \alpha_r \right)^2 \|V-W\|_\infty. \qquad (3.25)
\end{aligned}$$

Observando que $[\mathcal{K}^2V]_0 = [\mathcal{K}^2V]_1 = 0$ obtemos a estimativa

$$\|\mathcal{K}^2V - \mathcal{K}^2W\|_\infty \leq \frac{1}{2} \left(3M\|\alpha\|_1\right)^2 \|\!|V-W|\!\|. \tag{3.26}$$

Usando a identidade

$$\begin{aligned}
&\Delta^2[\mathcal{K}^2V]_n - \Delta^2[\mathcal{K}^2W]_n \\
&\quad = f(n, [\mathcal{K}V]_n, \Delta[\mathcal{K}V]_n) - f(n, [\mathcal{K}W]_n, \Delta[\mathcal{K}W]_n) + \\
&\sum_{k=1}^{n-1} (I-T)S(k)(f(n-1-k, [\mathcal{K}V]_{n-1-k}, \Delta[\mathcal{K}V]_{n-1-k}) - f(n-1-k, [\mathcal{K}W]_{n-1-k}, \Delta[\mathcal{K}W]_{n-1-k})),
\end{aligned}$$

o Lema 3.2 e o fato de que para todo $V \in \mathcal{W}_0^{2,p}$, $\Delta^2[\mathcal{K}^2V]_0 = f(0,0,0)$ obtemos

$$\begin{aligned}
&\|\Delta^2\mathcal{K}^2V - \Delta^2\mathcal{K}^2W\|_p \\
&\quad = \left(\|\Delta^2[\mathcal{K}^2V]_0 - \Delta^2[\mathcal{K}^2W]_0\|_X^p + \sum_{n=1}^{\infty} \|\Delta^2[\mathcal{K}^2V]_n - \Delta^2[\mathcal{K}^2W]_n\|_X^p \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|\Delta^2[\mathcal{K}^2V]_n - \Delta^2[\mathcal{K}^2W]_n\|_X^p\right)^{1/p} \\
&\leq (1+\|K_T\|)\left[\sum_{n=1}^{\infty} \|f(n,[\mathcal{K}V]_n,\Delta[\mathcal{K}V]_n) - f(n,[\mathcal{K}W]_n,\Delta[\mathcal{K}W]_n)\|_X^p\right]^{1/p} \\
&\leq (1+\|K_T\|)\left[\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^p\|([\mathcal{K}V-\mathcal{K}W]_n,\Delta[\mathcal{K}V-\mathcal{K}W]_n)\|_{X\times X}^p\right]^{1/p} \\
&\leq 3M(1+\|K_T\|)\left[\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^p\left(\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k\|\left([V-W]_k,\Delta[V-W]_k\right)\|_{X\times X}\right)^p\right]^{1/p} \\
&\leq 3^2M(1+\|K_T\|)\left[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^p\left(\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\right)^p\|V-W\|_\infty^p\right]^{1/p} \\
&\leq 3^2M(1+\|K_T\|)\frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j\right)^2\|V-W\|_\infty, \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

então

$$\|\Delta^2\mathcal{K}^2V - \Delta^2\mathcal{K}^2W\|_p \leq \frac{1}{2}(3M\|\alpha\|_1)^2(1+\|K_T\|)M^{-1}|\!|\!|V-W|\!|\!|. \qquad (3.28)$$

Somando (3.26) e (3.28) concluimos que

$$|\!|\!|\mathcal{K}^2V - \mathcal{K}^2W|\!|\!| \leq \frac{b}{2}a^2|\!|\!|V-W|\!|\!|. \qquad (3.29)$$

com a e b definidos como antes. Segue das estimativas (3.22), (3.24), (3.25) e (3.5) que

$$\|\left([\mathcal{K}^2V-\mathcal{K}^2W]_j,\Delta[\mathcal{K}^2V-\mathcal{K}^2W]_j\right)\|_{X\times X} \leq \frac{3}{2}(3M)^2\left(\sum_{r=1}^{j-1}\alpha_r\right)^2\|V-W\|_\infty. \qquad (3.30)$$

Desta desigualdade e do Lema 3.1 resulta que

$$
\begin{aligned}
\|[\mathcal{K}^3V]_n - [\mathcal{K}^3W]_n\|_X &\leq M\sum_{j=1}^{n-2}\alpha_j\|\left([\mathcal{K}^2V-\mathcal{K}^2W]_j,\Delta[\mathcal{K}^2V-\mathcal{K}^2W]_j\right)\|_{X\times X} \\
&\leq \frac{1}{2}(3M)^3\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_j\left(\sum_{r=1}^{j-1}\alpha_r\right)^2\|V-W\|_\infty \\
&\leq \frac{1}{6}(3M)^3\left(\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j\right)^3\|V-W\|_\infty. \qquad (3.31)
\end{aligned}
$$

Implicando que

$$\|\mathcal{K}^3V - \mathcal{K}^3W\|_\infty \leq \frac{1}{6}(3M\|\alpha\|_1)^3|\!|\!|V-W|\!|\!|. \qquad (3.32)$$

Novamente da estimativa (3.30) e do Lema 3.1 concluimos que

$$
\begin{aligned}
&\|\Delta^2\mathcal{K}^3V-\Delta^2\mathcal{K}^3W\|_p\\
&\quad\leq (1+\|K_T\|)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^p\|\left([\mathcal{K}^2V-\mathcal{K}^2W]_n,\Delta[\mathcal{K}^2V-\mathcal{K}^2W]_n\right)\|_{X\times X}^p\right]^{1/p}\\
&\quad\leq 3(3M)^2(1+\|K_T\|)\frac{1}{6}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j\right)^3\|V-W\|_\infty, \qquad (3.33)
\end{aligned}
$$

donde

$$\|\Delta^2\mathcal{K}^3V-\Delta^2\mathcal{K}^3W\|_p\leq\frac{1}{6}(3M\|\alpha\|_1)^3(1+\|K_T\|)\|\!|V-W|\!\|. \qquad (3.34)$$

Das estimativas (3.32) e (3.34) obtemos

$$\|\!|\mathcal{K}^3V-\mathcal{K}^3W|\!\|\leq\frac{b}{3!}a^3\|\!|V-W|\!\|.$$

Por um argumento indutivo podemos mostrar que

$$\|\!|\mathcal{K}^nV-\mathcal{K}^nW|\!\|\leq\frac{b}{n!}a^n\|\!|V-W|\!\|.$$

Como $ba^n/n!<1$ para n suficientemente grande, segue que $\mathcal{K}$ possui um único ponto fixo $V\in\mathcal{W}_0^{2,p}$.

Passaremos agora a demonstração das estimativas (3.8) e (3.9). Seja $V\in\mathcal{W}_0^{2,p}$ o ponto fixo de $\mathcal{K}$. Pela Condição 3.1 temos que

$$
\begin{aligned}
\|V_n\|_X &= \left\|\sum_{k=1}^{n-1}S(k)f(n-1-k,V_{n-1-k},\Delta V_{n-1-k})\right\|_X\\
&\leq M\sum_{k=0}^{n-2}\|f(k,V_k,\Delta V_k)-f(k,0,0)\|_X+M\sum_{k=0}^{n-2}\|f(k,0,0)\|_X\\
&\leq M\sum_{k=0}^{n-2}\alpha_k\|(V_k,\Delta V_k)\|_{X\times X}+M\|f(\bullet,0,0)\|_1, \qquad (3.35)
\end{aligned}
$$

donde

$$\|V_n\|_X\leq M\|f(\bullet,0,0)\|_1+M\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\|(V_k,\Delta V_k)\|_{X\times X}. \qquad (3.36)$$

Em contrapartida, temos que

$$
\begin{aligned}
\|\Delta V_n\|_X &= \left\|\sum_{k=1}^{n-1}\left(S(k+1)-S(k)\right)f(n-1-k,V_{n-1-k},\Delta V_{n-1-k})\right\|_X\\
&\leq 2M\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\|(V_k,\Delta V_k)\|_{X\times X}+2M\sum_{k=0}^{n-1}\|f(k,0,0)\|_X, \qquad (3.37)
\end{aligned}
$$

e então

$$\|\Delta V_n\|_X \leq 2M\|f(\bullet,0,0)\|_1 + 2M\sum_{k=0}^{n-1}\|(V_k,\Delta V_k)\|_{X\times X}.$$

Desta última desigualdade e da estimativa (3.36) segue que

$$\|(V_n,\Delta V_n)\|_{X\times X} \leq 3M\|f(\bullet,0,0)\|_1 + 3M\sum_{k=0}^{n-1}\|(V_k,\Delta V_k)\|_{X\times X}.$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall discreta obtemos

$$\begin{aligned}
\|(V_n,\Delta V_n)\|_{X\times X} &\leq 3M\|f(\bullet,0,0)\|_1\prod_{j=0}^{n-1}(1+3M\alpha_j)\\
&\leq 3M\|f(\bullet,0,0)\|_1\prod_{j=0}^{n-1}e^{3M\alpha_j}\\
&= 3M\|f(\bullet,0,0)\|_1 e^{3M\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_j}\\
&\leq 3M\|f(\bullet,0,0)\|_1 e^{3M\|\alpha\|_1}. \qquad (3.38)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}[\|(V_n,\Delta V_n)\|_{X\times X}] \leq 3M\|f(\bullet,0,0)\|_1 e^{3M\|\alpha\|_1}. \qquad (3.39)$$

Finalmente, por (3.18) obtemos

$$\Delta^2 V_n = f(n,V_n,\Delta V_n) + \sum_{k=1}^{n-1}(I-T)S(k)f(n-1-k,V_{n-1-k},\Delta V_{n-1-k}).$$

Usando o fato que $\Delta^2 V_0 = f(0,0,0)$ e procedendo como em (3.19) temos que

$$\begin{aligned}
\|\Delta^2 V\|_p &= \left(\|f(0,0,0)\|_X^p + \sum_{n=1}^{\infty}\|\Delta^2 V_n\|_X^p\right)^{1/P}\\
&\leq \|f(0,0,0)\|_X + \left(\sum_{n=1}^{\infty}\|f(n,V_n,\Delta V_n)\right.\\
&+ \left.\sum_{k=1}^{n-1}(I-T)S(k)f(n-1-k,V_{n-1-k},\Delta V_{n-1-k})\|_X^p\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|f(0,0,0)\|_X + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|f(n,V_n,\Delta V_n)\|_X^p\right)^{1/p} + \|K_T\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|f(n,V_n,\Delta V_n)\|_X^p\right)^{1/p} \\
&\leq 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} \|f(n,V_n,\Delta V_n)\|_X^p\right)^{1/p} + \|K_T\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|f(n,V_n,\Delta V_n)\|_X^p\right)^{1/p} \\
&\leq (2+\|K_T\|) \sum_{n=0}^{\infty} \|f(n,V_n,\Delta V_n)\|_X. \qquad (3.40)
\end{aligned}
$$

Pela Condição 3.1 e estimativa (3.39) concluimos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \|f(n,V_n,\Delta V_n)\|_X &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \|(V_k,\Delta V_k)\|_{X\times X} + \|f(\bullet,0,0)\|_1 \\
&\leq 3M\|\alpha\|_1 \|f(\bullet,0,0)\|_1 e^{3M\|\alpha\|_1} + \|f(\bullet,0,0)\|_1 \\
&\leq \|f(\bullet,0,0)\|_1 e^{6M\|\alpha\|_1}.
\end{aligned}
$$

E isto completa a demonstração do teorema. ■

Como consequência do teorema anterior, juntamente com o Teorema 2.3 de caracterização de regularidade maximal, temos o seguinte corolário:

Corolário 3.1 Seja X um espaço UMD. Assuma que vale a Condição 3.1 e suponha que $T \in \mathcal{B}(X)$ é um operador analítico e S-limitado tal que o conjunto

$$\{(\lambda-1)^2 R((\lambda-1)^2, I-T) \ / \ |\lambda| = \ \ \lambda \neq 1\}$$

é R-limitado. Então existe uma única solução $x = (x_n)$ de (3.1) tal que $(\Delta^2 x_n) \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X)$. Além disso valem as estimativas (3.8) e (3.9). ■

Aplicação 3.1 Seja H um espaço de Hilbert. Para uma função $f : H \to H$ lipschitziana, com constante de Lipschitz L, considere o problema semilinear

$$\Delta^2 x_n - (I-T)x_n = q_n f(x_n), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \ x_0 = x_1 = 0, \qquad (3.41)$$

onde $(q_n) \in \ell_1(\mathbb{Z}_+)$. Se $T \in \mathcal{B}(H)$ é um operador analítico, S-limitado e tal que o conjunto

$$\{(\lambda-1)^2 R((\lambda-1)^2, I-T) \ / \ |\lambda| = 1, \ \lambda \neq 1\}$$

é limitado. Então existe uma única solução limitada $x = (x_n)$ de (3.41) tal que $(\Delta^2 x_n) \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, H)$. Além disso,

$$\max\left\{\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\left[||x_n||_H + ||\Delta x_n||_H\right], ||\Delta^2 x||_p\right\} \leq C||f(0)||_H||q||_1 e^{6LM||q||_1}. \tag{3.42}$$

Em particular, para $T = I$ o seguinte resultado complementa um resultado de Drozdowiscz e Popenda [10].

Corolário 3.2 Suponha que f é definida e lipschitziana com constante de Lipschitz L sobre o espaço de Hilbert H. Seja $(q_n) \in \ell_1(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C})$ então a equação

$$\Delta^2 x_n = q_n f(x_n)$$

possui uma única solução $x = (x_n)$ tal que $(\Delta^2 x_n) \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, H)$ e as estimativas (3.9) e (3.8) é válidas. ∎

3.2 Um critério para estabilidade

Como consequência da caracterização de regularidade maximal discreta de 2° ordem vista no Capítulo 2, estabeleceremos um critério de estabilidade para a equação semilinear (3.1) baseado apenas nas condições iniciais do problema.

Teorema 3.2 Seja X um espaço UMD. Assuma que a Condição 3.1 é verificada e suponha que $T \in \mathcal{B}(X)$ é analítico e $1 \in \rho(T)$. Então a solução (x_n) de (3.1) é tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Demonstração: Como T é analítico segue que $\sigma(T) \subset \mathbb{D}$ (ver [3]). Além disso, $1 \in \rho(T)$. Pela Proposição 1.2 segue que o conjunto

$$\{(\lambda - 1)^2 R((\lambda-1)^2, I - T) \ / \ |\lambda| = 1, \ \lambda \neq 1\}$$

é R-limitado, visto que $(\lambda-1)^2 R((\lambda-1)^2, I-T)$ é uma função analítica numa vizinhança do círculo. A hipótese de S-limitação do operador T segue da regularidade maximal e pelo fato de $I - T$ ser invertível. Com efeito, dado $x \in X$ considere uma sequência $f \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X)$ tal que $f_0 = x$ e $f_n = 0$ para todo $n \neq 0$. Valem as estimativas

$$\|(I-T)S(n)f_0\|_X \quad = \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|(I-T)S(k)x\|_X^p\right)^{1/p}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\|(I-T)S(k)f_{n-k}\|_X^p\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty}\|(K_Tf)_n\|_X^p\right)^{1/p} \\
&= \|K_Tf\|_p \leq \|K_T\|\cdot\|f\|_p = \|K_T\|\cdot\|x\|.
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

Logo, $\|(I-T)S(n)\| \leq \|K_T\|$. Assim,

$$\|S(n)\| = \|(I-T)^{-1}(I-T)S(n)\| \leq \|(I-T)^{-1}\|\|K_T\|.$$

Garantindo que

$$\sup_{n\geq 0}\|S(n)\| \leq \|(I-T)^{-1}\|\|K_T\|.$$

Pelo Corolário 3.1 existe uma única solução limitada $x=(x_n)$ de (3.1) tal que

$$(\Delta^2 x_n) \in \ell_p(\mathbb{Z}_+, X).$$

Então $\Delta^2 x_n \to 0$ quando $n\to\infty$. Pela Condição 3.1 segue que

$$
\begin{aligned}
\|f(n,x_n,\Delta x_n)\|_X &\leq \|f(n,x_n,\Delta x_n) - f(n,0,0)\|_X + \|f(n,0,0)\|_X \\
&\leq \alpha_n\|(x_n,\Delta x_n)\|_{X\times X} + \|f(n,0,0)\|_X \\
&\leq \alpha_n \sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\|(x_n,\Delta x_n)\|_{X\times X} + \|f(n,0,0)\|_X \\
&\leq 3\alpha_n\|x\|_\infty + \|f(n,0,0)\|_X.
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

Como $f(\bullet,0,0)\in\ell_1(\mathbb{Z}_+,X)$ e $(\alpha_n)\in\ell_1(\mathbb{Z}_+)$ obtemos que $f(n,x_n,\Delta x_n)\to 0$ quando $n\to\infty$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\Delta^2 x_n - (I-T)x_n = f(n,x_n,\Delta x_n) &\Rightarrow (I-T)x_n = \Delta^2 x_n - f(n,x_n,\Delta x_n) \\
&\Rightarrow x_n = (I-T)^{-1}[\Delta^2 x_n - f(n,x_n,\Delta x_n)] \\
&\Rightarrow x_n \to 0.
\end{aligned}
$$

■

Do ponto de vista das aplicações é conveniente enfatizar o caso particular dos espaços de Hilbert.

Corolário 3.3 Seja H um espaço de Hilbert. Assuma que a Condição 3.1 é válida em H. Se $T \in \mathcal{B}(H)$ é tal que $\|T\| < 1$ então o sistema (3.1) é estável.

Demonstração: Observe que $\|T\| < 1$ implica que T é analítico e $1 \in \rho(T)$. De fato,

$$\|n(T-I)T^n\| \leq n\|(T-I)\| \cdot \|T\|^n.$$

Como $\|T\| < 1$ devemos ter $\sup_n\{n\|T\|^n\} < +\infty$. Logo $\sup_n\{n\|(T-I)T^n\|\} < +\infty$, isto é, T é analítico. Ademais,

$$\begin{aligned}(I-T)^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} T^n \\ \Rightarrow \|(I-T)^{-1}\| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n \\ &= \frac{1}{1-\|T\|}.\end{aligned}$$

Para $|\lambda| = 1$ e $\lambda \neq 1$, a desigualdade

$$\|(\lambda-1)^2 R((\lambda-1)^2, I-T)\| = \left\| \frac{(\lambda-1)^2}{\lambda(\lambda-2)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda(\lambda-2)} \right)^n \right\| \leq \frac{|\lambda-1|^2}{|\lambda-2| - \|T\|} \leq \frac{4}{1-\|T\|}$$

mostra que o conjunto $\{(\lambda-1)^2 R((\lambda-1)^2, I-T) \ / \ |\lambda| = 1, \ \lambda \neq 1\}$ é limitado. ■

3.3 Perturbações locais

Nesta seção estudaremos perturbações locais da equação (3.1). Assumiremos sempre que vale a seguinte condição:

Condição 3.2 Suponha que são válidas as seguintes afirmações:

(i) Para cada $R > 0$ existe uma função não decrescente $l : \mathbb{Z}_+ \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ tal que

$$\|f(n,z) - f(n,w)\|_X \leq l(n,R)\|z-w\|_{X \times X}, \tag{3.45}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, $z, w \in X \times X$ com $\|z\|_{X\times X} \leq R$ e $\|w\|_{X\times X} \leq R$.

(ii) Existe a real positivo tal que $\sum_{n=0}^{\infty} l(n,a) < +\infty$.

(iii) $f(\bullet,0,0) \in \ell_1(\mathbb{Z}_+,X)$.

Generalizando os espaços das seções anteriores consideraremos o espaço de Banach $\mathcal{W}_m^{2,p}$ das sequências $V = (V_n)$ em $\ell_\infty(\mathbb{Z}_+,X)$, tais que $V_n = 0$ se $0 \le n \le m$, e $\Delta^2 V \in \ell_p(\mathbb{Z}_+,X)$ equipado com a norma $\|\!| \bullet |\!\|$. Para $\lambda > 0$, denote por $\mathcal{W}_m^{2,p}[\lambda]$ a bola $\|\!|V|\!\| \le \lambda$ em $\mathcal{W}_m^{2,p}$.

Teorema 3.3 Suponha que a Condição 3.2 é satisfeita. Se T é um operador S-limitado e a equação (3.7) possui regularidade maximal discreta então existe constante $m \in \mathbb{N}$ e uma única solução limitada $x = (x_n)$ de (3.1) para $n \ge m$ tal que $x_n \in \mathcal{W}_m^{2,p}$. Além disso, temos que

$$\|x\|_\infty + \|\Delta^2 x\|_p \le a, \tag{3.46}$$

onde a é a constante da Condição 3.2 (ii).

Demonstração: Seja $\beta \in (0,1/3)$. A Condição 3.2 garante a existência de $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$(M + 2 + \|K_T\|) \sum_{j=n_1}^{\infty} \|f(j,0,0)\|_X \le \beta a, \tag{3.47}$$

$$\Upsilon := \beta + (M + 2 + \|K_T\|) \sum_{j=n_2}^{\infty} l(j,a) < \frac{1}{3}, \tag{3.48}$$

onde $M := \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \|S(n)\|$. Seja $V \in \mathcal{W}_m^{2,p}[a/3]$ com $m = \max\{n_1,n_2\}$. Seja

$$g_n := \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \le n \le m, \\ f(n,V_n,\Delta V_n), & \text{se } n > m. \end{cases} \tag{3.49}$$

Então segue que g pertence a $\ell_p(\mathbb{Z}_+,X)$. Com efeito, temos

$$\begin{aligned}
\|g\|_p^p &= \sum_{n=0}^{\infty} \|f(n,V_n,\Delta V_n)\|_X^p \\
&\le \sum_{n=0}^{\infty} (\|f(n,V_n,\Delta V_n) - f(n,0,0)\|_X + \|f(n,0,0)\|_X)^p \\
&\le 2^p \sum_{n=0}^{\infty} \|f(n,V_n,\Delta V_n) - f(n,0,0)\|_X^p + 2^p \sum_{n=0}^{\infty} \|f(n,0,0)\|_X^p \\
&\le 2^p \sum_{n=0}^{\infty} l(n,a)^p \|(V_n,\Delta V_n)\|_{X\times X}^p + 2^p \sum_{n=0}^{\infty} \|f(n,0,0)\|_X^p.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\|f(n,0,0)\|_X^p &\leq \|f(\bullet,0,0)\|_\infty^{p-1}\sum_{n=0}^{\infty}\|f(n,0,0)\|_X \\ &= \|f(\bullet,0,0)\|_\infty^{p-1}\|f(\bullet,0,0)\|_1. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Em contrapartida,

$$\|(V_n,\Delta V_n)\|_{X\times X} = \|V_n\|_X + \|V_{n+1}-V_n\|_X \leq 2\|V_n\|_X + \|V_{n+1}\|_X \leq 3\|V\|_\infty. \tag{3.52}$$

Portanto,

$$\|g\|_p^p \leq 6^p\|V\|_\infty^p\sum_{n=0}^{\infty} l(n,a)^p + 2^p\|f(\bullet,0,0)\|_\infty^{p-1}\|f(\bullet,0,0)\|_1, \tag{3.53}$$

provando que $g \in \ell_p(\mathbb{Z}_+,X)$. A regularidade maximal discreta de (3.7) estabelece que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} z_{n+2}-2z_{n+1}+Tz_n = g_n, \quad n\in\mathbb{Z}_+ \\ z_0 = z_1 = 0, \end{cases} \tag{3.54}$$

possui uma única solução (z_n) tal que $(\Delta^2 z_n)\in\ell_p(\mathbb{Z}_+,X)$, a qual é dada por

$$z_n = [\tilde{\mathcal{K}}V]_n = \begin{cases} 0, & \text{se } 0\leq n\leq m \\ \sum_{k=1}^{n-1} S(k)f(n-1-k,V_{n-1-k},\Delta V_{n-1-k}), & \text{se } n\geq m+1. \end{cases} \tag{3.55}$$

Mostraremos que $\tilde{\mathcal{K}}$ é uma contração. Inicialmente observe que $\mathcal{W}_m^{2,p}[a/3]$ é invariante por $\tilde{\mathcal{K}}$. De fato, como

$$\|(V_j,\Delta V_j)\|_{X\times X} \leq 3\|V\|_\infty \leq \|\!|V|\!\| < a, \tag{3.56}$$

segue da Condição 3.2 que

$$\begin{aligned}\|[\tilde{\mathcal{K}}V]_n\|_X &= M\sum_{j=m}^{n-2}\|f(j,V_j,\Delta V_j)\|_X \\ &\leq M\sum_{j=m}^{n-2}\|f(j,V,\Delta V_j)-f(j,0,0)\|_X + M\sum_{j=m}^{n-2}\|f(j,0,0)\|_X \\ &\leq M\sum_{j=m}^{n-2} l(j,a)\|(V_j,\Delta V_j)\|_{X\times X} + M\sum_{j=m}^{n-2}\|f(j,0,0)\|_X \\ &\leq M\sum_{j=m}^{\infty} l(j,a)a + M\sum_{j=m}^{\infty}\|f(j,0,0)\|_X. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Como $S(2) = 2I$, temos que

$$\begin{aligned}
\Delta^2[\tilde{\mathfrak{K}}V]_n &= f(n, V_n, \Delta V_n) - f(n-1, V_{n-1}, \Delta V_{n-1}) + (S(2) - I)\, f(n-1, V_{n-1}, \Delta V_{n-1}) \\
&+ \sum_{k=1}^{n-1-m} (S(k+2) - 2S(k+1) + S(k))\, f(n-1-k, V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k}) \\
&= f(n, V_n, \Delta V_n) + \sum_{k=1}^{n-1-m} [S(k+2) - 2S(k+1) \\
&+ TS(k)]\, f(n-1-k, V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k}) \\
&+ \sum_{k=1}^{n-1-m} (I - T)S(k)f(n-1-k, V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k}). \qquad (3.58)
\end{aligned}$$

Relembrando que a solução de (3.54) é $z_n = (S * g)_n$ obtemos a identidade

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=1}^{n+2-1-m} S(k)f(n+2-1-k, V_{n+2-1-k}, \Delta V_{n+2-1-k}) \\
&- 2\sum_{k=1}^{n+1-1-m} S(k)f(n+1-1-k, V_{n+1-1-k}, \Delta V_{n+1-1-k}) \\
&+ \sum_{k=1}^{n-1-m} S(k)f(n-1-k, V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1-m} S(k+2)f(n-1-k, V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k}) \\
&- 2\sum_{k=1}^{n-1-m} S(k+1)f(n-1-k, V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k}) \\
&+ \sum_{k=1}^{n-1-m} S(k)f(n-1-k, V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1-m} (S(k+2) - 2S(k+1) + TS(k))\, f(n-1-k, V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k}). \qquad (3.59)
\end{aligned}$$

Segue, para $n \geq m$, que

$$\Delta^2[\tilde{\mathfrak{K}}V]_n = f(n, Vn, \Delta V_n) + \sum_{k=1}^{n-1-m} (I - T)S(k)f(n-1-k, V_{n-1-k}, \Delta V_{n-1-k}). \qquad (3.60)$$

Então,

$$\begin{aligned}
\|\Delta^2\tilde{\mathfrak{K}}V\|_p &= \left[\|f(m,V_m,\Delta V_m)\|_X^p + \sum_{n=m+1}^{\infty}\|\Delta^2[\tilde{\mathfrak{K}}V]_n\|_X^p\right]^{1/p} \\
&\leq \|f(m,V_m,\Delta V_m)\|_X + \left[\sum_{n=m+1}^{\infty}\|f(n,V_n,\Delta V_n)\right. \\
&+ \left.\sum_{k=1}^{n-1-m}(I-T)S(k)f(n-1-k,V_{n-1-k},\Delta V_{n-1-k}\|_X^p\right]^{1/p} \\
&\leq \|f(m,V_m,\Delta V_m)\|_X + (1+\|K_T\|)\left[\sum_{n=m}^{\infty}\|f(n,V_n,\Delta V_n)\|_X^p\right]^{1/p} \\
&\leq (2+\|K_T\|)\sum_{n=m}^{\infty}\|f(n,V_n,\Delta V_n)\|_X. \qquad (3.61)
\end{aligned}$$

Usando (3.57) temos que

$$\|\Delta^2\tilde{\mathfrak{K}}V\|_p \leq (2+\|K_T\|)\left[\sum_{j=m}^{\infty}l(j,a)a + \sum_{j=m}^{\infty}\|f(j,0,0)\|_X\right]. \qquad (3.62)$$

Portanto, segue das desigualdades (3.57) e (3.62), juntamente com (3.47) e (3.48) que

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\mathfrak{K}}V\| &\leq (M+2+\|K_T\|)\sum_{j=m}^{\infty}l(j,a)a + (M+2+\|K_T\|)\sum_{j=m}^{\infty}\|f(j,0,0)\|_X \\
&\leq \left(\frac{1}{3}-\beta\right)a + \beta a \\
&= \frac{1}{3}a, \qquad (3.63)
\end{aligned}$$

mostrando então que $\tilde{\mathfrak{K}}V$ pertence a $\mathcal{W}_m^{2,p}[a/3]$. Agora, para todos $V,W \in \mathcal{W}_m^{2,p}[a/3]$ vale a estimativa

$$\begin{aligned}
&\|[\tilde{\mathfrak{K}}V]_n - [\tilde{\mathfrak{K}}W]_n\|_X \\
&= \left\|\sum_{k=1}^{n-1-m}S(k)\left((f(n-1-k,V_{n-1-k},\Delta V_{n-1-k}) - f(n-1-k,W_{n-1-k},\Delta W_{n-1-k})\right)\right\|_X \\
&\leq M\sum_{k=1}^{n-1-m}l(n-1-k,a/3)\|\left((V-W)_{n-1-k},\Delta(V-W)_{n-1-k}\right)\|_{X\times X}
\end{aligned}$$

$$\leq \quad M\sum_{j=m}^{n-2} l(j,a)\|\left((V-W)_j,\Delta(V-W)_j\right)\|_{X\times X}$$

$$\leq \quad M\sum_{j=m}^{\infty} l(j,a)\|V-W\|_{\infty}. \tag{3.64}$$

Logo,

$$\|\tilde{\mathcal{K}}V-\tilde{\mathcal{K}}W\|_{\infty}\leq 3M\sum_{j=m}^{\infty} l(j,a)\|\|V-W\|\|.$$

Além disso, segue de (3.60) que, para $n\geq m$

$$\Delta^2[\tilde{\mathcal{K}}V]_n-\Delta^2[\tilde{\mathcal{K}}W]_n=f(n,V_n,\Delta V_n)-f(n,W_n,\Delta W_n)$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1-m}(I-T)S(k)\left(f(n-1-k,V_{n-1-k},\Delta V_{n-1-k})-f(n-1-k,W_{n-1-k},\Delta W_{n-1-k})\right).$$

Da desigualdade de Minkowskii e do fato de que

$$\Delta^2[\tilde{\mathcal{K}}V]_0=f(0,0,0)$$

resulta a estimativa

$$\begin{aligned}
&\|\Delta^2\tilde{\mathcal{K}}V-\Delta^2\tilde{\mathcal{K}}W\|_p\\
&=\left(\|f(0,0,0)-f(0,0,0)\|_X^p+\sum_{n=1}^{\infty}\|\Delta^2[\tilde{\mathcal{K}}V]_n-\Delta^2[\tilde{\mathcal{K}}W]_n\|_X^p\right)^{1/p}\\
&\leq\left[\sum_{n=1}^{\infty}\|f(n,V_n,\Delta V_n)-f(n,W_n,\Delta W_n)\|_X^p\right]^{1/p}\\
&+\quad\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n-1-m}(I-T)S(k)\left(f(n-1-k,V_{n-1-k},\Delta V_{n-1-k})\right.\right.\right.\\
&-\quad\left.\left.\left. f(n-1-k,W_{n-1-k},\Delta W_{n-1-k})\right)\right\|_X^p\right]^{1/p}.
\end{aligned} \tag{3.65}$$

A limitação de K_T em $\ell_p(\mathbb{Z}_+,X)$ e a Condição 3.2 nos permitem escrever

$$\|\Delta^2\tilde{\mathcal{K}}V-\Delta^2\tilde{\mathcal{K}}W\|_p \quad\leq\quad (1+\|K_T\|)\left[\sum_{n=m}^{\infty}\|f(n,V_n,\Delta V_n)-f(n,W_n,\Delta W_n)\|_X^p\right]^{1/p} \tag{3.66}$$

$$\leq \quad (1+\|K_T\|)\left[\sum_{n=m}^{\infty} l(n,a/3)\|(V_n,\Delta V_n)-(W\|\!|V-W|\!\|_n,\Delta W_n)\|_{X\times X}^p\right]^{1/p}$$

$$\leq \quad 3(1+\|K_T\|)\sum_{n=m}^{\infty} l(n,a)\|V-W\|_{\infty}. \tag{3.67}$$

Implicando que

$$\|\Delta^2\tilde{\mathfrak{K}}V-\Delta^2\tilde{\mathfrak{K}}W\|_p \leq 3(1+\|K_T\|)\sum_{j=m}^{\infty} l(j,a)|\!\|V-W|\!\|,$$

Finalmente,

$$|\!\|\tilde{\mathfrak{K}}V-\tilde{\mathfrak{K}}W|\!\| \leq 3(M+1+\|K_T\|)\sum_{j=m}^{\infty} l(j,a)|\!\|V-W|\!\| = 3(\Upsilon-\beta)|\!\|V-W|\!\|.$$

Como $3(\Upsilon-\beta)<1$ segue que $\tilde{\mathfrak{K}}$ é uma $3(\Upsilon-\beta)$-contração. ∎

Corolário 3.4 Sejam $B_i : X\times X\to X$, $i=1,2$, operadores bilineares limitados, $y\in \ell_1(\mathbb{Z}_+,X)$ e $\alpha,\beta\in \ell_1(\mathbb{Z}_+,\mathbb{R})$. Suponha que T é S-limitado e que a equação (3.7) possui regularidade maximal discreta. Então existe uma única solução limitada $x=(x_n)$ tal que $(\Delta^2 x)\in \ell_p(\mathbb{Z}_+,X)$ para a equação

$$x_{n+2}-2x_{n+1}+Tx_n = y_n+\alpha_n B_1(x_n,x_n)+\beta_n B_2(\Delta x_n,\Delta x_n).$$

Demonstração: Defina $l(n,R)=2R(|\alpha_n|+|\beta_n|)(\|B_1\|+\|B_2\|)$. A hipótese de que $\alpha,\beta\in \ell_p(\mathbb{Z}_+,\mathbb{R})$ garante que $\sum_{n=0}^{\infty} l(n,1)<\infty$. Além disso, $f(n,0,0)=y_n\in \ell_1(\mathbb{Z}_+,X)$. Basta então aplicarmos o teorema anterior para garantirmos o resultado. ∎

Apêndice A

A transformada de Fourier discreta

Toda a educação científica que não se inicia com a Matemática é, naturalmente, imperfeita na sua base.

— **Auguste Conté**

Seja X um espaço de Banach. Para $T \in \mathcal{B}(X)$ consideremos os operadores $\mathfrak{K}_T$, C e S definidos em (2.2), (2.5) e (2.6) respectivamente. O objetivo dessa seção é calcular a transformada de Fourier discreta desses operadores.

Definição A.1 A *Transformada de Fourier Discreta* de f sobre $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}$ é dada por

$$\mathscr{F}f(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} z^{-j} f(j), \quad z \in \mathbb{T}.$$

Proposição A.1 Suponha que $\{(z-1)^2 \ / \ z \in \mathbb{T} \setminus \{1\}\} \subset \rho(I - T)$. Então

(i) $\mathscr{F}S(z) = z((z-1)^2 - (I-T))^{-1}, \quad z \in \mathbb{T} \setminus \{1\}.$

(ii) $\mathscr{F}C(z) = z(z-1)((z-1)^2 - (I-T))^{-1}, \quad z \in \mathbb{T} \setminus \{1\}.$

Demonstração: Dado $x \in X$ defina

$$f_n = \begin{cases} x, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Então $\mathscr{F}f(z) = x$. Considere o problema

$$\begin{cases} \Delta^2 x_n - (I-T)x_n = f_n, & n \in \mathbb{Z}_+ \\ x_0 = x_1 = 0. \end{cases} \tag{A.1}$$

A Proposição (2.2) nos garante que a solução de (A.1) é dada por $x_{n+1} = (S * f)_n$. Observe que

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}x_{n+1}(z) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} z^{-j}x_{j+1} \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}} z^{-i+1}x_i \\
&= z\sum_{i\in\mathbb{Z}} z^{i}x_i \\
&= z\mathscr{F}x(z). \qquad \text{(A.2)}
\end{aligned}$$

Em contrapartida,

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(S * f)(z) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} z^{-j}(S * f)_j \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} z^{-j}\sum_{k=0}^{j} S(k)f_{j-k} \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} S(j)x \\
&= \mathscr{F}S(z)x. \qquad \text{(A.3)}
\end{aligned}$$

Logo, $z\mathscr{F}x(z) = \mathscr{F}S(z)x$. Analogamente, a transformada de Fourier discreta de Δx é

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\Delta x(z) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} z^{-j}\Delta x(j) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} z^{-j}x(j+1) - \sum_{j\in\mathbb{Z}} z^{-j}x(j) \\
&= z\mathscr{F}x(z) - \mathscr{F}x(z) \\
&= (z-1)\mathscr{F}x(z). \qquad \text{(A.4)}
\end{aligned}$$

Segue deste fato que

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\Delta^2 x(z) &= \mathscr{F}\Delta(\Delta x)(z) \\
&= (z-1)\mathscr{F}\Delta x(z) \\
&= (z-1)^2\mathscr{F}x(z). \qquad (A.5)
\end{aligned}$$

Voltando ao Problema (A.1), quando aplicamos a transformada de Fourier ficamos com

$$(z-1)^2\mathscr{F}x(z) - (I-T)\mathscr{F}x(z) = \mathscr{F}f(z) = x. \qquad (A.6)$$

Multiplicando por z a identidade anterior, temos

$$z(z-1)^2\mathscr{F}x(z) - z(I-T)\mathscr{F}x(z) = zx$$

$$\Rightarrow ((z-1)^2 - (I-T))z\mathscr{F}x(z) = zx.$$

Como $z\mathscr{F}x(z) = \mathscr{F}S(z)x$ temos

$$((z-1)^2 - (I-T))\mathscr{F}S(z)x = zx.$$

Por hipótese $(z-1)^2 \in \rho(I-T)$. Podemos então escrever

$$\mathscr{F}S(z)x = z((z-1)^2 - (I-T))^{-1}x.$$

Como x é arbitrário, temos que

$$\mathscr{F}S(z) = z((z-1)^2 - (I-T))^{-1}.$$

Além disso,

$$\Delta x_{n+1} = (C * f)_n \Rightarrow (z-1)z\mathscr{F}x(z) = \mathscr{F}C(z)x.$$

Multiplicando (A.6) por $z(z-1)$ segue que

$$((z-1)^2 - (I-T))z(z-1)\mathscr{F}x(z) = z(z-1)x$$

Como $(z-1)^2 \in \rho(I-T)$, segue que

$$\mathscr{F}C(z)x = z(z-1)((z-1)^2 - (I-T))^{-1}x.$$

Então

$$\mathscr{F}C(z) = z(z-1)((z-1)^2 - (I-T))^{-1}.$$

■

PROPOSIÇÃO A.2 Se $z \in \rho(T)$ então a transformada de Fourier de $\mathfrak{K}_T$ é

$$z((z-1)R(z,T)-I).$$

Demonstração: Dado $x \in X$ considere o problema

$$\begin{cases} \Delta x_n - (T-I)x_n = f_n, \\ x_0 = 0, \end{cases} \tag{A.7}$$

onde a sequência f_n é como na demostração da Proposição A.1. Sabemos que a solução de (A.7) é $x_{n+1} = (\mathfrak{T} * f)_n$ com $\mathfrak{T}$ definido por $\mathfrak{T}(n) = T^n$, $n = 0, 1, \ldots$. Observe que

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(\mathfrak{T} * f)(z) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} z^{-1} (\mathfrak{T} * f)_j \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} z^{-1} T^j x \\ &= \mathscr{F}\mathfrak{T}(z)x. \end{aligned} \tag{A.8}$$

Logo $z\mathscr{F}x(z) = \mathscr{F}\mathfrak{T}(z)x$. Aplicando a transformada de Fourier em $\Delta x_n - (T-I)x_n = f_n$ obtemos

$$(z-1)\mathscr{F}x(z) - (T-I)\mathscr{F}x(z) = x.$$

Então

$$\begin{aligned} &(zI - I - (T-I))\mathscr{F}x(z) = x \\ &(zI - I - T + I)\mathscr{F}x(z) = x \\ &(z-T)\mathscr{F}x(z) = x. \end{aligned}$$

Multiplicando por z temos

$$\begin{aligned} &(z-T)z\mathscr{F}x(z) = zx \\ &(z-T)\mathfrak{T}(z)x = zx. \end{aligned}$$

Como $z \in \rho(T)$ segue que

$$\mathscr{F}\mathfrak{T}(z)x = zR(z,T)x.$$

Ademais, $\mathfrak{K}_T(n) = (T-I)T^n = (T-I)\mathfrak{T}(n)$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}\mathfrak{K}_T(z)x &- (T-I)\mathscr{F}\mathfrak{T}(z)x \\
&= (T-I)zR(z,T)x \\
&= z(T-I)R(z,T)x \\
&= z\left[TR(z,T) - R(z,T)\right]x \qquad \text{(A.9)}
\end{aligned}
$$

Note que

$$
\begin{aligned}
& (z-T)R(z,T) = I \\
\Rightarrow \quad & zR(z,T) - TR(z,T) = I \\
\Rightarrow \quad & TR(z,T) = zR(z,T) - I.
\end{aligned}
$$

Desta identidade concluimos que (A.9) escreve-se como

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}\mathfrak{K}_T(z)x &= z\left[zR(z,T) - I - R(z,T)\right]x \\
&= z\left[z(z-1)R(z,T) - I\right]x,
\end{aligned}
$$

e finalmente

$$\mathscr{F}\mathfrak{K}_T(z) = z\left((z-1)R(z,T) - I\right).$$

■

Apêndice B

A desigualdade de Gronwall discreta

Esta seção teve como base a referência clássica de Agarwal [1]. Como de costume, representaremos por $\mathbb{N}(a)$ o conjunto dos números naturais maiores do que, ou iguais a a. O teorema seguinte é a versão discreta da desigualdade de Gronwall.

Teorema B.1 Suponha que para todo $k \in \mathbb{N}(a)$ a desigualdade

$$u(k) \leq p(k) + q(k) \sum_{l=a}^{k-1} f(l)u(l). \tag{B.1}$$

é satisfeita. Então, para todo $k \in \mathbb{N}(a)$ temos

$$u(k) \leq p(k) + q(k) \sum_{l=a}^{k-1} p(l)f(l) \prod_{r=l+1}^{k-1} (1 + q(r)f(r)). \tag{B.2}$$

Demonstração: Considere em $\mathbb{N}(a)$ a função

$$v(k) = \sum_{l=a}^{k-1} f(l)u(l).$$

Observe que $v(a) = 0$ e

$$\begin{aligned}
\Delta v(k) &= v(k+1) - v(k) \\
&= \sum_{l=a}^{k} f(l)u(l) - \sum_{l=a}^{k-1} f(l)u(l) \\
&= f(k)u(k).
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Como $u(k) \leq p(k) + q(k)v(k)$ e $f(k) \geq 0$ segue de (B.3) que

$$v(k+1) - (1 + q(k)f(k))v(k) \leq p(k)f(k). \tag{B.4}$$

Ademais, $(1 + q(k)f(k)) > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}(a)$. Logo multiplicando (B.4) por

$$\prod_{l=a}^{k}(1 + q(l)f(l))^{-1},$$

obtemos

$$\Delta\left[\prod_{l=a}^{k-1}(1 + q(l)f(l))^{-1}v(k)\right] \leq p(k)f(k)\prod_{l=a}^{k}(1 + q(l)f(l))^{-1}.$$

Somando ambos os lados desta desigualdade de a até $k-1$ e usando o fato de que $v(a) = 0$ temos

$$\prod_{l=a}^{k-1}(1 + q(l)f(l))^{-1}v(k) \leq \sum_{l=a}^{k-1}p(k)f(k)\prod_{r=a}^{k}(1 + q(r)f(r))^{-1}.$$

Isto é,

$$v(k) \leq \sum_{l=a}^{k-1}p(k)f(k)\prod_{r=l+1}^{k-1}(1 + q(r)f(r)).$$

O resultado segue então desta última desigualdade e da estimativa $u(k) \leq p(k) + q(k)v(k)$. ■

O lema a seguir servirá para demonstrar uma importante consequência do Teorema B.1.

Lema B.1 Seja $v(k)$ definida em $\mathbb{N}(a)$. Para todo $k \in \mathbb{N}(a)$ temos que

$$1 + \sum_{l=a}^{k-1}v(l)\prod_{t=l+1}^{k-1}(1 + v(t)) = \prod_{l=a}^{k-1}(1 + (v(l)).$$

Demonstração: De fato, desenvolvendo o produtório $\prod_{l=a}^{k-1}(1 + (v(l))$ obtemos

$$\begin{aligned}
\prod_{l=a}^{k-1}(1 + (v(l)) \quad &= \quad (1 + v(a+1)) \cdot (1 + v(a+2)) \cdots (1 + v(k-1)) \\
&+ \quad v(a) \cdot \big[(1 + v(a+1)) \cdot (1 + v(a+2)) \cdots (1 + v(k-1))\big] \\
&= \quad (1 + v(a+2)) \cdot (1 + v(a+3)) \cdots (1 + v(k-1)) \\
&+ \quad v(a+1) \cdot \big[(1 + v(a+2)) \cdot (1 + v(a+3)) \cdots (1 + v(k-1))\big] \\
&+ \quad v(a)\big[(1 + v(a+1)) \cdot (1 + v(a+2)) \cdots (1 + v(k-1))\big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 1 + v(k-1) + \cdots + v(a+1) \cdot \big[(1+v(a+2)) \cdots (1+v(k-1))\big] \\ &+ v(a) \cdot \big[(1+v(a+1)) \cdot (1+v(a+2)) \cdots (1+v(k-1))\big] \\ &= 1 + \sum_{l=a}^{k-1} v(l) \prod_{t=l+1}^{k-1} (1+v(t)). \end{aligned}$$

■

O próximo corolário foi de grande serventia para nosso trabalho, por exemplo, na demosntração do Teorema 3.1.

Corolário B.1 Suponha que no Teorema B.1 tenhamos $p(k) = p$ e $q(k) = q$ para todo $k \in \mathbb{N}(a)$. Então para todo $k \in \mathbb{N}(a)$ temos

$$u(k) \leq p \prod_{l=a}^{k-1} (1 + qf(l)).$$

Demonstração: Com efeito, segue do Teorema B.1 que

$$u(k) \leq p + p \sum_{l=a}^{k-1} qf(l) \prod_{r=l+1}^{k-1} (1 + qf(r)).$$

Logo,

$$u(k) \leq p \left(1 + \sum_{l=a}^{k-1} qf(l) \prod_{r=l+1}^{k-1} (1 + qf(r)) \right).$$

Fazendo $v(n) = qf(n)$ segue do lema anterior que

$$u(n) \leq p \left(1 + \sum_{l=a}^{k-1} v(l) \prod_{r=l+1}^{k-1} (1 + v(r)) \right) = p \prod_{l=a}^{k-1} (1 + v(l)).$$

■

Bibliografia

[1] Agarwal, R. P., **Difference Equations and Inequalities**, ser. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. New York: Marcel Dekker, 1992, v. 155.

[2] Benedek, A., Calderón, A. P., & R. Panzone, Convolution operators on banach space valued functions, In: Nat. Acad. Sci. U.S.A., v. 48, 1962, p. 356–365.

[3] Blunck, S., Maximal regularity of discrete and continuous time evolution equations, *Studia Mathematica*, v. 146, n. 2, p. 157 – 176, 2001.

[4] Bourgaim, J., Some remarks on Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional, *Ark. Mat.*, v. 21, p. 163–168, 1983.

[5] Burkholder, D., Martingales and fourier analysis in Banach spaces. in probability and analysis, *Lectures Notes in Math, Springer Verlag*, v. 1206, p. 61–108, 1986.

[6] Cuevas, C. & Lizama, C., Semilinear evolution equations on discrete time and maximal regularity, *Submitted*, 2008.

[7] Cuevas, C. & Lizama, C., Maximal regularity of discrete second order Cauchy problem in Banach spaces, *Journal of Difference Equations and Applications*, v. 13, p. 1129–1138, 2007.

[8] Cuevas, C. & Lizama, C., Semilinear evolution equations of second order via maximal regularity, *Advances in Difference Equations*, v. 2008, p. 1–20, 2008.

[9] Dore, G., L^p regularity for abstract differential equations, In: **Functional Analysis and Related Topics**, ser. Lectures Notes in Math., H. Komatsu, Ed., v. 1540, 1993, p. 25–28.

[10] Drozdowicz, A. & Popenda, J., Asymptotic behavior of the solutions of the second order difference equation, *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 99, p. 135–140, 1987.

[11] HYTÖNEN, T., R-boundedness and multiplier theorems, Dissertação, Helsinki University of Technology. Institute of Mathematics Research Reports.

[12] PALENCIA, C. & PISKAREV, S., On multiplicative perturbations of c_0-groups and c_0-cosine operator families, *Semigroup Forum*, v. 63, p. 127–152, 2001.

[13] YOSIDA, K., **Functional Analysis**. Springer-Verlag, 1966.

[14] WEIS, L., Operator-valued fourier multiplier theorems and maximal lp -regularity, *Mathematische Annalen*, v. 319, p. 735–758, 2001.

Sobre o Autor

O autor nasceu em Aracaju, Sergipe, no dia 31 de março de 1983. Realizou seus estudos de graduação em Matemática na Universidade Federal de Sergipe (UFS). Em agosto de 2007 iniciou o mestrado no Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco (Dmat-UFPE).

Endereço: Rua Sebastião de Alencastro Salazar, 59
Várzea,
Recife – PE, Brasil
C.E.P.: 50741–370

e-mail: `bruno00luis@gmail.com`

Esta dissertação foi diagramada usando LaTeX 2ε[1] pela Terminus[2].

[1] LaTeX 2ε é uma extensão do LaTeX. LaTeX é uma coleção de macros criadas por Leslie Lamport para o sistema TeX, que foi desenvolvido por Donald E. Knuth. TeX é uma marca registrada da Sociedade Americana de Matemática ($\mathcal{AMS}$). O estilo usado na formatação desta dissertação foi escrito por Dinesh Das, Universidade do Texas. Modificado em 2001 por Renato José de Sobral Cintra, Universidade Federal de Pernambuco, e em 2005 por André Leite Wanderley.

[2] Sociedade com fins lucrativos formada pelos membros permanentes: André Leite, Bruno de Andrade, Luís Henrique de Santana, Peron Rios; e membros associados: Haroldo Vital, Diogo de Carvalho e Zaqueu Ramos.