

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA E CÁLCULO DO GRADIENTE DE FORMA PARA  
ESTRUTURAS SUBMETIDAS À RESTRIÇÃO DE FADIGA

por

Carlos Eduardo Marcos Guilherme

Tese para obtenção do Título de  
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, outubro de 2006

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA E CÁLCULO DO GRADIENTE DE FORMA PARA  
ESTRUTURAS SUBMETIDAS À RESTRIÇÃO DE FADIGA

por

Carlos Eduardo Marcos Guilherme  
Mestre Engenharia Mecânica

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca

Co-orientador: Prof. Dr. Ignacio Iturrioz

Aprovada por:

Prof. Dr. Eduardo Bittencourt

Prof. Dr. Armando Miguel Awruch

Prof. Dr. Edgar Nobuo Mamiya

Flávio José Lorini  
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, outubro de 2006.

## AGRADECIMENTOS

Todo trabalho, por menor que seja em extensão, depende de apoio e estímulo de várias pessoas, por isso, agradeço:

- ao meu orientador Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca, pelas sugestões, observações, pelo diálogo aberto e pelo seu sólido suporte técnico durante todos esses anos.
- ao meu co-orientador Prof. Dr. Ignacio Iturrioz pelas sugestões.
- a minha irmã Elena Beatriz pela leitura atenta e crítica dos originais deste trabalho.
- a minha esposa e aos meus pais pela caminhada solidária.

## RESUMO

Este trabalho apresenta uma sistemática para a otimização topológica em estruturas contínuas, com o objetivo de minimizar o volume do componente e sujeito a uma restrição de falha baseada em tensão (critério de von Mises ou critério de fadiga multiaxial).

As variáveis de projeto para otimização topológica são as densidades de cada elemento.

As restrições para os problemas apresentados são escritos na forma global, reduzindo desta maneira o número de restrições impostas à estrutura. Esta forma global é uma norma da violação do critério de falha, com expoente variando entre dois e quatro conforme condições de contorno impostas.

Este trabalho apresenta inicialmente a restrição de tensão de von Mises com um caso de carregamento, seguido da restrição de von Mises para múltiplos casos de carregamento e finalmente a restrição de fadiga multiaxial.

As formulações de otimização com restrições de tensão apresentam um problema conhecido como singularidade das tensões, impedindo-as de convergir para o mínimo global. Para contornar essa situação, a técnica matemática conhecida por relaxação  $\epsilon$  é empregada neste trabalho.

A análise de sensibilidade para restrição de tensão e de fadiga para otimização topológica é deduzida utilizando o método adjunto.

Os resultados obtidos demonstram que a metodologia de otimização topológica apresentada permite a obtenção de estruturas que satisfazem as restrições impostas com grande redução de volume.

Adicionalmente, deduz-se analiticamente o gradiente de forma em relação aos pontos de controle de uma B-spline para a restrição de fadiga, como exemplo para a implementação da otimização de forma.

## ABSTRACT

This work presents an approach for the topology optimization of continuum structures, aiming to minimize its volume subject to a stress based failure constraint, in this case either the von Mises criterion or a multi-axial fatigue criterion. Design variables are the finite element densities.

Instead of writing failure constraint as local quantities, a global function is derived. This function is a norm of the failure criteria violation, with exponent chosen between 2 and 4 according to the boundary conditions. Three different constraints are presented: the von Mises criterion for a single load case, von Mises criterion for multiple load cases, and a multi-axial fatigue criterion.

Stress based constraints have a well known difficulty in topology optimization, the stress singularity. This work uses the mathematical technique known as  $\epsilon$ -relaxation to avoid this problem.

Failure criteria sensitivity analyses for the topology design variables are derived using adjoint methods.

Results show that the approach can yield failure constrained structures with significantly lower volumes.

Moreover, the analytical derivation of the failure constraint sensitivities for shape design variables (B-Spline control points) is presented as the first step to define a shape optimization methodology.

## ÍNDICE

|          |                                                                   |    |
|----------|-------------------------------------------------------------------|----|
| 1.       | Introdução.....                                                   | 1  |
| 1.1      | Objetivos e Organização do Trabalho .....                         | 3  |
| 2.       | Conceitos Básicos de Otimização.....                              | 4  |
| 2.1.     | Procedimento Geral.....                                           | 4  |
| 2.2.     | Dificuldades Encontradas.....                                     | 5  |
| 2.3.     | Variável de projeto.....                                          | 5  |
| 2.4.     | Função Objetivo.....                                              | 6  |
| 2.5.     | Restrição de projeto.....                                         | 7  |
| 2.6.     | Vetor Gradiente.....                                              | 8  |
| 2.7.     | Matriz Hessiana.....                                              | 9  |
| 2.8      | Formulação Geral do Problema de Otimização.....                   | 9  |
| 2.9      | Condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).....                        | 13 |
| 3.       | Revisão Bibliográfica.....                                        | 16 |
| 3.1.     | Sensibilidade.....                                                | 16 |
| 3.2.     | Otimização Topológica e de Forma.....                             | 18 |
| 3.3      | Otimização para Fadiga.....                                       | 21 |
| 3.4      | Algoritmos de Otimização.....                                     | 22 |
| 4.       | Otimização Estrutural.....                                        | 23 |
| 4.1.     | Classificação do Problema de Otimização.....                      | 23 |
| 4.2.     | Métodos de Otimização Estrutural.....                             | 25 |
| 4.2.1.   | Crítério de Ótimo.....                                            | 25 |
| 4.2.2.   | Programação Matemática.....                                       | 26 |
| 4.2.2.1. | Programação Linear.....                                           | 27 |
| 4.2.2.2. | Programação Linear Seqüencial.....                                | 28 |
| 5.       | Otimização Topológica.....                                        | 32 |
| 5.1.     | Penalização das Densidades Intermediárias.....                    | 34 |
| 5.2.     | Instabilidade de Tabuleiro.....                                   | 36 |
| 5.3.     | Filtro.....                                                       | 38 |
| 5.4.     | Dependência da Malha.....                                         | 39 |
| 6.       | Otimização de Forma.....                                          | 41 |
| 6.1.     | Representação da Forma – Determinação da Variável de Projeto..... | 41 |
| 6.1.1.   | Nó do Contorno.....                                               | 42 |

|        |                                                                                  |     |
|--------|----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6.1.2. | Representação por Polinômio.....                                                 | 43  |
| 6.1.3. | Parametrização por Curvas de Bézier e B-Splines.....                             | 43  |
| 6.2.   | Conceito “Elemento de Projeto” .....                                             | 46  |
| 6.3.   | Realocação Nodal e Determinação do Campo de Velocidade.....                      | 46  |
| 7.     | Tensão.....                                                                      | 52  |
| 7.1.   | Ótimo Singular.....                                                              | 53  |
| 7.2.   | Relaxação Epsilon.....                                                           | 58  |
| 7.3.   | Restrição de Tensão Local.....                                                   | 62  |
| 7.4.   | Restrição de Tensão Global.....                                                  | 64  |
| 8.     | Fadiga.....                                                                      | 70  |
| 8.1.   | Limite de Fadiga.....                                                            | 71  |
| 8.2.   | Efeito da Tensão Média.....                                                      | 72  |
| 8.3.   | Ciclo de tensão Multiaxial.....                                                  | 76  |
| 8.4    | Limite de Fadiga sob Carregamento Multiaxial.....                                | 76  |
| 9.     | Sensibilidade.....                                                               | 81  |
| 9.1.   | Sensibiliade Topológica.....                                                     | 81  |
| 9.1.1. | Sensibilidade da Função Custo.....                                               | 85  |
| 9.1.2. | Sensibilidade da Restrição de Fadiga.....                                        | 86  |
| 9.1.3  | Sensibilidade da Restrição de Tensão.....                                        | 92  |
| 9.2.   | Sensibilidade de Forma.....                                                      | 96  |
| 9.2.1. | Sensibilidade da Função Custo.....                                               | 101 |
| 9.2.2. | Sensibilidade da Restrição.....                                                  | 101 |
| 10.    | Implementação do Método                                                          | 107 |
| 10.1   | Minimização do Volume com Restrição de Tensão                                    | 108 |
| 10.2   | Linearização da Restrição de Tensão                                              | 109 |
| 10.3   | Minimização do Volume com Restrição de Fadiga                                    | 110 |
| 10.4   | Linearização da Restrição de Fadiga                                              | 111 |
| 10.    | Resultados.....                                                                  | 113 |
| 10.1   | Otimização Topológica com Restrição de Tensão para um Caso de Carga.....         | 112 |
| 10.2   | Otimização Topológica com Restrição de Tensão para Múltiplos Casos de Carga..... | 122 |
| 10.3   | Otimização Topológica com Restrição de Fadiga.....                               | 134 |
| 10.3   | Sensibilidade de Forma para o Problema de Fadiga.....                            | 151 |



|       |                                                       |     |
|-------|-------------------------------------------------------|-----|
| 11.   | Conclusão.....                                        | 153 |
|       | Referência Bibliográfica.....                         | 155 |
| AI.   | Apêndice I: Apresentação do Fluxograma                | 175 |
| AII.  | Apêndice II: Prova Matemática                         | 181 |
| AIII. | Apêndice III: Exemplo do Cálculo de Fadiga Multiaxial | 183 |

## LISTA DE SIMBOLOS

|                    |                                                                |                     |
|--------------------|----------------------------------------------------------------|---------------------|
| $\nabla$           | Vetor gradiente                                                |                     |
| $\lambda$          | Multiplicador de Lagrange                                      |                     |
|                    | Constante do material na equação critério de fadiga multiaxial |                     |
| $\mu$              | Multiplicador de Lagrange                                      |                     |
| $v$                | Coordenada nodal                                               |                     |
| $\rho$             | Densidade do material                                          |                     |
| $\varepsilon$      | Valor da perturbação aplicada às restrições de tensão e fadiga |                     |
| $\Psi$             | Tensão residual                                                | [N/m <sup>2</sup> ] |
| $\Omega$           | Domínio do elemento                                            |                     |
| $\sigma_{ij}$      | Tensão na direção de j perpendicular ao eixo i                 | [N/m <sup>2</sup> ] |
| $\sigma_{vM}$      | Tensão equivalente de von Mises                                | [N/m <sup>2</sup> ] |
| $\sigma_a$         | Tensão alternada                                               | [N/m <sup>2</sup> ] |
| $\sigma_m$         | Tensão média                                                   | [N/m <sup>2</sup> ] |
| $\varepsilon_{ij}$ | Deformação infinitesimal na direção j perpendicular ao eixo i  |                     |
| $\tau$             | Tensão de cisalhamento equivalente                             | [N/m <sup>2</sup> ] |
| $ J $              | Determinante da matriz jacobiana                               |                     |
| $a$                | Magnitudes da componente da tensão desviadora                  |                     |
| $f$                | Vetor de força                                                 | [N]                 |
| $J$                | Matriz jacobiana                                               |                     |
| $k$                | Matriz de rigidez                                              |                     |
|                    | Constante do material na equação critério de fadiga multiaxial |                     |
|                    | Número de casos de carregamento aplicado                       |                     |
| $k_e$              | Matriz de rigidez do elemento                                  |                     |
| $n$                | Vetor normal unitário a uma superfície                         |                     |
| $n_e$              | Número de elementos da malha                                   |                     |
| $p$                | Ponto de controle                                              |                     |
|                    | Constante da função objetivo                                   |                     |
|                    | Constante da restrição global normalizada                      |                     |
| $t_i$              | Nó (curva B-spline)                                            |                     |
| $u$                | Vetor de deslocamentos                                         | [m]                 |
| $v_i$              | Volume do elemento                                             |                     |

|           |                                                  |           |
|-----------|--------------------------------------------------|-----------|
| $w_i$     | Pesos do filtro gaussiano                        |           |
| $x$       | Trajetória da tensão                             |           |
| $B$       | Matriz das derivadas das funções de interpolação |           |
| $E$       | Módulo de elasticidade                           | $[N/m^2]$ |
| $I$       | Matriz identidade                                |           |
| $N$       | Número de elementos da malha                     |           |
| $N_{i,k}$ | Função peso (curva B-spline)                     |           |
| $P$       | Pressão hidrostática                             | $[N/m^2]$ |
| $S$       | Tensor de tensão desviador                       |           |
| $V_{ij}$  | Campo de velocidade no domínio                   |           |
| $V_T$     | Volume total da estrutura                        |           |
| $X$       | Tensor de tensão desviador                       |           |

## ÍNDICE DE FIGURAS

|                                                                                                                    |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 2.1: Vetor gradiente para função $f(x)$ no ponto $x^*$ .....                                                | 8  |
| Figura 2.2: Região admissível para um problema de otimização envolvendo duas variáveis independentes.....          | 10 |
| Figura 2.3: Mínimo local.....                                                                                      | 11 |
| Figura 2.4: Mínimo global.....                                                                                     | 11 |
| Figura 2.5: Domínio não convexo.....                                                                               | 12 |
| Figura 2.6: Domínio convexo.....                                                                                   | 12 |
| Figura 4.1: Tipo de otimização estrutural: (a) dimensional; (b) forma; (c) topológica...                           | 23 |
| Figura 4.2: Exemplo otimização dimensional.....                                                                    | 23 |
| Figura 5.1: Representação do problema de otimização topologica.....                                                | 32 |
| Figura 5.2 Curva para diferentes valores de $p$ .....                                                              | 35 |
| Figura 5.3: Estrutura inicial.....                                                                                 | 37 |
| Figura 5.4: Malha com elemento de alta ordem.....                                                                  | 37 |
| Figura 5.5: Malha com elemento de baixa ordem.....                                                                 | 37 |
| Figura 5.6: Dependência da malha.....                                                                              | 39 |
| Figura 5.7: Diferente soluções para o mesmo problema.....                                                          | 40 |
| Figura 6.1: Movimento dos nós independentemente para um furo na placa: (a) projeto inicial; (b) projeto final..... | 42 |
| Figura 6.2: Curva de Bézier.....                                                                                   | 44 |
| Figura 6.3: Curva de Bézier: (a) continuidade $C^0$ ; (b) continuidade $C^1$ .....                                 | 45 |
| Figura 6.4 Elemento de projeto com curvas B-spline.....                                                            | 46 |
| Figura 6.5: Deformação do corpo.....                                                                               | 47 |
| Figura 6.6: Localização paramétrica.....                                                                           | 48 |
| Figura 6.7: Ponto $P_i$ rodeado por outros pontos (contorno ou domínio).....                                       | 49 |
| Figura 7.1: Viga MBB: (a) Projeto de tensão; (b) projeto de flexibilidade.....                                     | 52 |
| Figura 7.2: Projeto inicial.....                                                                                   | 56 |
| Figura 7.3: Projeto final – Schmit, 1960.....                                                                      | 56 |
| Figura 7.4: Projeto final – Sved e Ginos, 1968.....                                                                | 56 |
| Figura 7.5: Singularidade das tensões em uma treliça de 3 barras.....                                              | 57 |
| Figura 7.6 Singularidade das tensões em uma treliça de 3 barras.....                                               | 57 |
| Figura 7.7: Ótimo local e global.....                                                                              | 58 |
| Figura 7.8: Domínio inicial do projeto.....                                                                        | 63 |

|                                                                             |     |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 7.9: Estrutural otimizada – projeto final (Sant’Anna) .....          | 63  |
| Figura 7.10: Estrutura otimizada – projeto de tensão (Duysinx et al.) ..... | 64  |
| Figura 8.1: Diagrama S-N.....                                               | 71  |
| Figura 8.2: Início e propagação da trinca na vida a fadiga.....             | 72  |
| Figura 8.3: Nomenclatura do parâmetro de tensão para fadiga.....            | 72  |
| Figura 8.4: Tipos de solicitações de fadiga.....                            | 73  |
| Figura 8.5: Exemplo do espectro de carga real.....                          | 74  |
| Figura 8.6 Linhas de vida idêntica à fadiga.....                            | 74  |
| Figura 8.7: Trajetória da tensão desviadora.....                            | 79  |
| Figura 10.1: Esquema geral de um algoritmo de otimização.....               | 106 |
| Figura 11.1: Estrutura inicial (dimensão 1 X 3).....                        | 113 |
| Figura 11.2: Distribuição de densidade.....                                 | 113 |
| Figura 11.3: Tensão von Mises.....                                          | 113 |
| Figura 11.4: Estrutura inicial (dimensão 1 X 3).....                        | 114 |
| Figura 11.5: Distribuição densidade.....                                    | 114 |
| Figura 11.6: Tensão von Mises.....                                          | 114 |
| Figura 11.7: Estrutura inicial (dimensão 1 X 3).....                        | 115 |
| Figura 11.8: Distribuição de densidade.....                                 | 115 |
| Figura 11.9: Tensão de von Mises.....                                       | 115 |
| Figura 11.10: Estrutura inicial (dimensão 1 X 6).....                       | 116 |
| Figura 11.11: Estrutura simplificada pela simetria.....                     | 116 |
| Figura 11.12: Distribuição de densidade.....                                | 116 |
| Figura 11.13: Tensão de von Mises.....                                      | 116 |
| Figura 11.14: Estrutura inicial (dimensão 1 X 3).....                       | 117 |
| Figura 11.15: Distribuição de densidade.....                                | 117 |
| Figura 11.16: Tensão de von Mises.....                                      | 117 |
| Figura 11.17: Estrutura inicial para o exemplo f e g.....                   | 118 |
| Figura 11.18: Distribuição de densidade.....                                | 118 |
| Figura 11.19: Tensão de von Mises.....                                      | 119 |
| Figura 11.20: Distribuição de densidade.....                                | 119 |
| Figura 11.21: Tensão de von Mises.....                                      | 119 |
| Figura 11.22: Estrutura inicial (dimensão 1 X 3).....                       | 121 |
| Figura 11.23: Tensão de von Mises para carga F1.....                        | 121 |
| Figura 11.24: Tensão de von Mises para carga F2.....                        | 121 |

|                                                                               |     |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 11.25: Tensão de von Mises para carga F3.....                          | 122 |
| Figura 11.26: Tensão de von Mises para carga F4.....                          | 122 |
| Figura 11.27: Distribuição de densidade.....                                  | 122 |
| Figura 11.28: Distribuição de densidade.....                                  | 123 |
| Figura 11.29: Distribuição de densidade.....                                  | 123 |
| Figura 11.30: Estrutura inicial (dimensão 1 X 3).....                         | 124 |
| Figura 11.31: Distribuição de densidade.....                                  | 124 |
| Figura 11.32: Estrutura inicial (dimensão 5 X 8).....                         | 125 |
| Figura 11.33: Distribuição de densidade.....                                  | 125 |
| Figura 11.34: Tensão de von Mises para carga F1.....                          | 125 |
| Figura 11.35: Tensão de von Mises para carga F2.....                          | 125 |
| Figura 11.36: Distribuição de densidade.....                                  | 126 |
| Figura 11.37: Tensão de von Mises para carga F1.....                          | 126 |
| Figura 11.38: Tensão de von Mises para carga F2.....                          | 126 |
| Figura 11.39: Distribuição de densidade.....                                  | 127 |
| Figura 11.40: Tensão de von Mises para carga F1.....                          | 127 |
| Figura 11.41: Tensão de von Mises para carga F2.....                          | 127 |
| Figura 11.42: Distribuição de densidade.....                                  | 128 |
| Figura 11.43: Tensão de von Mises para carga F1.....                          | 128 |
| Figura 11.44: Tensão de von Mises para carga F2.....                          | 128 |
| Figura 11.45: Estrutura inicial.....                                          | 129 |
| Figura 11.46: Distribuição de densidade.....                                  | 130 |
| Figura 11.47: Tensão de von Mises para carga F1.....                          | 130 |
| Figura 11.48: Tensão de von Mises para carga F2.....                          | 130 |
| Figura 11.49: Estrutura inicial para o exemplo k e m (dimensão 1 X 3).....    | 132 |
| Figura 11.50: Distribuição de densidade.....                                  | 132 |
| Figura 10.51: Exemplo “h”: otimização topológica com restrição de tensão..... | 132 |
| Figura 11.52: Tensão de von Mises para carga F1.....                          | 133 |
| Figura 11.53: Tensão de von Mises para carga F2.....                          | 133 |
| Figura 11.54: Tensão de von Mises para carga F3.....                          | 133 |
| Figura 11.55: Tensão de von Mises para carga F4.....                          | 134 |
| Figura 11.56: Verificação do critério de fadiga F1.....                       | 134 |
| Figura 11.57: Verificação do critério de fadiga F2.....                       | 134 |
| Figura 11.58: Verificação do critério de fadiga F3.....                       | 134 |

|                                                                                     |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 11.59: Verificação do critério de fadiga F4.....                             | 135 |
| Figura 11.60: Distribuição de densidade.....                                        | 135 |
| Figura 11.61: Estrutura inicial (dimensão 1 X 3).....                               | 136 |
| Figura 11.62: Distribuição de densidade.....                                        | 136 |
| Figura 11.63: Exemplo “i”: Otimização topológica com restrição de tensão.....       | 137 |
| Figura 11.64: Verificação do critério de fadiga F1.....                             | 137 |
| Figura 11.65: Verificação do critério de fadiga F2.....                             | 137 |
| Figura 11.66: Estrutura inicial (dimensão 5 X 8).....                               | 138 |
| Figura 11.67: Distribuição de densidade.....                                        | 138 |
| Figura 11.68: Exemplo j: otimização topológica com restrição de tensão.....         | 138 |
| Figura 11.69: Tensão de von Mises para carga F1.....                                | 139 |
| Figura 11.70: Tensão de von Mises para carga F2.....                                | 139 |
| Figura 11.71: Exemplo j: tensão de von Mises para carga F1.....                     | 140 |
| Figura 11.72: Exemplo j: tensão de von Mises para carga F2.....                     | 140 |
| Figura 11.73: Verificação do critério de fadiga F1.....                             | 140 |
| Figura 11.74: Verificação do critério de fadiga F2.....                             | 141 |
| Figura 11.75: Estrutura inicial.....                                                | 141 |
| Figura 11.76: Distribuição de densidade.....                                        | 142 |
| Figura 11.77: Exemplo l: otimização topológica com restrição de tensão.....         | 142 |
| Figura 11.78: Tensão de von Mises para carga F2.....                                | 143 |
| Figura 11.79: Tensão de von Mises para carga F1.....                                | 143 |
| Figura 11.80: Exemplo “l”: otimização estrutural com restrição de tensão            |     |
| Distribuição da tensão de von Mises para carga F1.....                              | 144 |
| Figura 11.81: Exemplo “l”: otimização estrutural com restrição de tensão            |     |
| Distribuição da tensão de von Mises para carga F2.....                              | 144 |
| Figura 11.82: Verificação do critério de fadiga F1.....                             | 144 |
| Figura 11.83: Verificação do critério de fadiga F2.....                             | 145 |
| Figura 11.84: Distribuição de densidade.....                                        | 146 |
| Figura 11.85: Estrutura inicial (dimensão 5 X 8).....                               | 146 |
| Figura 11.86: Distribuição de densidade.....                                        | 146 |
| Figura 11.87: Estrutura obtida na otimização topológica.....                        | 147 |
| Figura 11.88: Interpretação do contorno da geometria e do remalhamento(exemplo k).. | 147 |
| Figura 11.89: Visualização do ponto de controle.....                                | 148 |
| Figura I.1: Fluxograma do problema de otimização.....                               | 173 |

|                                                                                               |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura I.2: Fluxograma do cálculo da deformação, tensão e critério de von Mises.....          | 174 |
| Figura I.3: Fluxograma do cálculo do tensor desviador e do critério de fadiga multiaxial..... | 175 |
| Figura I.4: Fluxograma do gradiente de tensão ou fadiga e a linearização do problema.         | 176 |
| Figura I.5: Fluxograma dos limites móveis.....                                                | 177 |



## 1. INTRODUÇÃO

Durante a maior parte da história, ferramentas e estruturas elaboradas pela humanidade foram projetadas e construídas com base em tentativas e em experiências anteriores. A necessidade do homem de adaptar-se ao meio ambiente e a obtenção de resultados melhores nos problemas encontrados no dia a dia despertou a curiosidade do saber, do entender e do poder explicar o que acontecia ao seu redor. Esta curiosidade levou ao desenvolvimento de modelos intelectuais que representassem os fenômenos físicos. Este foi o início de uma longa evolução, que nos dias atuais possibilita projetar ferramentas ou estruturas com o mínimo de material possível e com todas as características desejáveis dentro de um projeto.

A otimização estrutural faz parte do arsenal de ferramentas disponíveis pelos engenheiros. A partir de modelos matemáticos, a otimização estrutural visa obter o melhor projeto, desde que as restrições impostas sejam respeitadas. Na busca da ótima solução é necessário entender o problema matematicamente e fisicamente, pois somente assim é possível desenvolver algoritmos eficientes para alcançar a melhor solução dentro de uma região admissível.

O estudo metódico sobre otimização estrutural foi introduzido pela primeira vez por Maxwell em 1872 para barras. Um importante avanço foi o trabalho de Michell de 1904, sobre a otimização de treliças. Estes trabalhos pioneiros não foram seguidos pelo fato das condições de otimalidade serem expressas por complexas equações diferenciais. Um longo interlúdio se decorreu até que este assunto ganhasse relevância novamente, após a disseminação dos computadores digitais. Nas décadas de 50 e 60, a aplicação de computadores na análise matricial de estruturas levou ao desenvolvimento do método dos elementos finitos. A possibilidade de simulação numérica de estruturas complexas reativou a idéia da otimização estrutural, [Kirsch, 1989]. A partir dos anos 60 foram desenvolvidas as ferramentas matemáticas básicas para a otimização com computadores: simulação estrutural pelo método dos elementos finitos, análise de sensibilidade numérica, algoritmos eficientes de programação matemática. As aplicações iniciais foram à engenharia aeronáutica, mas rapidamente se disseminou para a mecânica, civil, nuclear, química, naval, entre outras. Vários livros recentemente foram publicados nesta área [Haftka e Gürdal, 1996, Bendsoe, 1995, Bendsoe e Sigmund, 2003, Chen, 1992, Arora, 1989 e Haug, Choi e Komkov, 1986].

No estágio atual do desenvolvimento da otimização estrutural, distinguem-se algumas idéias básicas. A otimização de um projeto estrutural consiste em escolher a melhor entre as várias configurações que atendam aos requisitos operacionais. Estes requisitos

operacionais estão ligados à resistência dos componentes aos esforços aplicados, à rigidez, ao comportamento dinâmico e vida útil. Já a definição do que é a melhor configuração está ligada diretamente a fatores econômicos; por exemplo, na indústria aeronáutica o objetivo da otimização é produzir o mínimo peso estrutural com a máxima resistência e rigidez. Para que isso seja possível é necessário modificar a geometria da estrutura, tendo conhecimento das condições de contorno e de carregamento. Além dessas duas condições iniciais para o primeiro layout, deve-se levar em consideração a restrição de fabricação e o tipo de material necessário para suportar as solicitações mecânicas.

Atualmente, tratando-se de componentes mecânicos, um dos requisitos operacionais mais importantes é a vida útil, que é ligado aos fenômenos de fadiga e fratura. A consideração errônea destes fenômenos é altamente perigosa, pois além de danificar o equipamento pode colocar em risco a vida de pessoas. Problemas deste tipo são bastante comuns na história da humanidade e dois exemplos clássicos são: a falha do eixo de uma locomotiva devido ao crescimento da trinca causado por flexão rotativa e ao surgimento de trinca na janela de avião, causada por ciclos de pressurização [Suresh, 2003]. Tanto a mecânica da fratura como da fadiga são áreas completamente abertas, pois a pesquisa continua sendo intensa. A escolha do material, da forma, da temperatura e do tipo de carregamento pode mudar completamente o comportamento a fadiga do componente [Branco, Fernandes e Castro, 1999].

Este trabalho propõe considerar a fadiga na otimização estrutural. Entre as várias abordagens existentes, o trabalho propõe adotar como função de restrição à fadiga, escolhendo um critério que seja fechado dentro da mecânica elástica linear e com carregamento multiaxial, conforme o descrito por Mamiya e Araújo, 2002. Este tipo de restrição garante que a peça terá vida infinita ou apenas indicando o início da trinca. O objetivo escolhido é minimizar o peso estrutural ou do componente.

Um processo de otimização estrutural consiste na alteração do projeto buscando sua melhora. Esta mudança pode ser feita na geometria da peça, e um dos métodos mais promissores é a otimização topológica [Bendsoe e Sigmund, 2003], que permite a introdução de novos furos na peça. Este trabalho segue esta abordagem.

O estudo da otimização de forma pode tornar-se mais interessante do que a otimização topológica, pois possibilita o uso de mais restrições. Neste trabalho há uma sugestão para o uso da otimização de forma para refinar os resultados da otimização topológica.

## 1.1. OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho tem como objetivo a otimização de estruturas contínuas. A função objetivo adotada no trabalho é o volume, e busca-se obter o mínimo desta função, de maneira a reduzir o custo de material, em que a restrição imposta ao problema formulado é um critério de fadiga de alto ciclo.

A partir dos conhecimentos dos conceitos sobre otimização foi implementado o programa, em que o primeiro estágio do trabalho é a otimização topológica. A etapa seguinte é a obtenção da sensibilidade de forma, como preâmbulo para a otimização de forma.

Um ponto importante para o início do trabalho da otimização estrutural com restrição de fadiga, é o completo entendimento da formulação do problema de otimização topológica com restrição de tensão global. Quando se trabalha com restrição de tensão é necessário entender o que significa a singularidade que apresenta esse tipo de problema e saber como evitar, através da relaxação  $\epsilon$ .

Em relação à apresentação, este trabalho está organizado da seguinte forma:

No primeiro capítulo refere-se à importância da otimização nos projetos de engenharia, motivação em adotar como restrição a fadiga e os objetivos desejados a serem atingidos.

No segundo capítulo são definidos conceitos importantes como função objetivo, restrição e variável de projeto, bem como dificuldades encontradas no problema de otimização enquanto que o terceiro capítulo trata da revisão bibliográfica sobre sensibilidade e otimização estrutural.

O quarto capítulo é dedicado à classificação do problema de otimização e métodos de otimização estrutural. O quinto e sexto capítulos trata sobre os conceitos de otimização topológica e otimização de forma.

No sétimo capítulo é abordado os problemas que envolve a otimização topológica com restrição de tensão enquanto que no oitavo capítulo trata sobre os critérios de fadiga.

O nono capítulo é dedicado à sensibilidade topológica e de forma e os dois últimos capítulos são os resultados do problema de otimização e a conclusão com sugestões para trabalhos futuros.

## 2. CONCEITOS BÁSICOS DE OTIMIZAÇÃO

A otimização estrutural é um tema advindo de uma fusão das áreas de Engenharia, da Matemática, Ciências e Tecnologia cujo objetivo é a obtenção do projeto (estrutura) com melhor desempenho. Nesse caso, por estrutura entende-se qualquer sistema com a finalidade de transmitir esforços estáticos ou dinâmicos. O desempenho é quantificado geralmente a uma grandeza escalar provinda de fatores econômicos, tais como custo ou lucratividade, que são interpretadas pelo engenheiro em termos de grandezas mecânicas como: mínima massa, mínima flexibilidade, máxima frequência natural crítica, máxima carga crítica de flambagem, mínima tensão de contato entre partes, etc.

A otimização estrutural é uma área de estudo que, na sua essência, procura melhorar o desempenho de componentes ou sistemas mecânicos de maneira sistemática. Assim, primeiramente há a necessidade de identificação das variáveis de projeto que caracterizam um determinado componente. Em seguida, mediante modificações dessas variáveis segundo algum critério, espera-se obter uma melhor solução, dentre as diversas possíveis.

O processo de otimização estrutural busca obter o resultado ótimo, maximizando ou minimizando a função custo (objetivo) através da seleção das variáveis de projeto, limites, condições de contorno e restrições impostas à estrutura para um determinado tipo de carregamento. Para uma melhor compreensão, os significados de alguns conceitos básicos serão mostrados a seguir.

Os conceitos que serão apresentados nesta seção estão baseados principalmente nos trabalhos de Bendsøe 1995, Haftka e Gürdal, 1996 e Arora, 1989.

### 2.1. PROCEDIMENTO GERAL

Não há um único método que pode ser aplicado eficientemente para todos os problemas. O método escolhido para um caso particular depende das características da função objetivo, da natureza das restrições e do número de variáveis do problema. A seguir alguns passos a serem observados para a formulação de um problema de otimização:

- análise do processo e suas variáveis, escolhendo-se algumas delas para a otimização;
- determinação do critério para otimização e a especificação da função custo em termos das variáveis do processo;
- relacionar as variáveis através de restrições de igualdade e de desigualdade;

- aplicação da técnica apropriada para otimização;
- analisar a solução obtida e sua sensibilidade frente a variações em parâmetros do modelo e suas considerações.

## 2.2. DIFICULDADES ENCONTRADAS

Problemas de otimização que apresentam a função objetivo e ou restrições complicadas podem apresentar grandes dificuldades para obter a solução pelo uso de algumas técnicas de otimização. Como exemplo destaca-se a função de tensão, pois não é linear e pode apresentar comportamento singular. As complicações que podem aparecer devido a isto são:

- função objetivo e ou restrições podem apresentar descontinuidades;
- função objetivo e ou restrições não lineares;
- não unicidade da solução;
- podem apresentar pouca sensibilidade à variação das variáveis;
- a função por não ser convexa pode apresentar mínimos locais.

## 2.3. VARIÁVEL DE PROJETO

As variáveis de projeto para o problema de otimização estrutural podem consistir em dimensões dos componentes (membros), e nas variáveis que descrevem a configuração estrutural, as propriedades mecânicas ou físicas do material, bem como outros aspectos qualitativos para o projeto em questão. O processo de otimização não permite a mudança da teoria do comportamento estrutural dentro do processo, por exemplo, mudança de uma estrutura treliçada (esforço axial) para um pórtico (esforço normal e fletor).

Para otimização estrutural, existem diversas possibilidades de escolha da variável de projeto, como dimensões do elemento, representando a seção transversal da viga ou barra, o momento de inércia ou espessura da placa, densidade de cada elemento, entre outras. É importante que as variáveis sejam escolhidas de forma que sejam independentes umas em relação as outras, para evitar complicações adicionais ao problema [Arora, 1989]. Os exemplos de variáveis citados anteriormente podem ser:

- de natureza discreta (assumem apenas valores isolados dentro de um conjunto na forma  $\{x \in X \mid x = (k_1, k_2, \dots, k_n)\}$ ), como por exemplo algumas seções transversais disponíveis comercialmente;

- de natureza contínua (as variáveis podem assumir qualquer valor dentro de um conjunto na forma  $\{x \in X \mid k_{\inf} \leq x \leq k_{\sup}\}$ ).

A otimização com variáveis discretas é de natureza combinatória e requer um esforço computacional muito grande. Prefere-se utilizar uma aproximação contínua destes problemas.

## 2.4. FUNÇÃO OBJETIVO

A função objetivo conhecida também como função custo, trata-se do valor a ser obtido como sendo o mínimo ou máximo no processo de otimização, cujas variáveis de projeto variam entre um valor máximo e mínimo. A função custo é representada por um valor escalar dentro do projeto.

A otimização estrutural considera normalmente o peso, o deslocamento, a tensão, a frequência natural, a carga crítica de flambagem ou uma combinação como possível função custo na busca da ótima estrutura. A combinação de várias funções custo no projeto é conhecida como otimização multi-critério. Como exemplo pode-se imaginar uma estrutura composta por barras, sendo que o objetivo é simultaneamente minimizar o peso e a tensão em seus elementos. Este problema pode ser solucionado por um método de programação matemática, chamado de otimização de Edgeworth-Pareto, estudo por Haftka e Gürdal, 1996, lidando com múltiplas funções objetivos. Sobre este assunto pode-se encontrar uma boa revisão no trabalho de Karwan, Spronk e Wallenius [Karwan et al., 1997].

A utilização da função de multicritério é normalmente evitada, pois essa técnica apresenta grande dificuldade de se trabalhar sob diferentes tipos de funções. Há duas maneiras diferentes de reduzir o número de funções, conforme mostrado por Haftka e Gürdal, 1996. A primeira maneira é reduzir todas as funções custo por apenas uma soma ponderada. Por exemplo: em que  $m$  é a massa da estrutura e a tensão nas barras é dado por  $\sigma_i$ ,  $i=1,2,3$ . então a função objetivo pode ser expressa como:

$$W = \alpha_0 m + \alpha_1 \sigma_1 + \alpha_2 \sigma_2 + \alpha_3 \sigma_3 \quad (1)$$

em que  $\alpha$  é o peso relativo, que reflete a importância da função objetivo. O segundo método trata-se em reduzir o número de funções de custo, isto é, selecionar a função de maior importância, na qual as outras são colocadas como limites ou restrições. A seleção da função objetivo é de extrema importância no processo e sempre deve ser função das variáveis de projeto.

## 2.5. RESTRIÇÃO DO PROJETO

As restrições são condições impostas ao problema, sendo que a violação de qualquer uma, corresponderá a uma solução que não se encontra no espaço admissível. Pode atuar como limitação imposta diretamente na variável de projeto ou em um grupo de variáveis (restrição explícita ou restrição lateral), ou pode representar a limitação de quantidades dependentes da variável de projeto (restrição implícita).

A restrição de igualdade, pode ser explícita ou implícita, sendo designada por

$$h_k(v) = 0, \quad i = 1, \dots, nr, \quad (2)$$

em que  $nr$  refere-se ao número de restrições que o problema deverá satisfazer. Na teoria, cada restrição de igualdade é uma oportunidade para se resolver a variável de projeto, mas normalmente isto na prática não é realizado dada a complexidade das relações entre as variáveis.

A restrição de desigualdade é representada como

$$g_j(v) \leq 0, \quad i = 1, \dots, nd \quad (3)$$

em que  $nd$  é o número total de restrições de desigualdade. Esse tipo de restrição é de maior importância para o projeto estrutural na busca do ótimo, e normalmente é função de tensão, de flexibilidade, de autovalor, entre outras.

Como exemplo, considera-se a minimização da massa de uma estrutura, sujeito aos limites de tensão. O problema é representado da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} \text{mínimo} & W(v) \\ \text{sujeito} & \sigma_i \leq \sigma_{admissível} \quad i = 1, \dots, n. \end{array} \quad (4)$$

As restrições podem ser classificadas como ativas, não ativas ou violadas. Se a restrição de desigualdade  $g_i(x) \leq 0$  é dita ativa, caso um ponto  $x^*$  satisfaz a igualdade  $g_j(x) = 0$ . Então se pode concluir que uma restrição de desigualdade pode ser ativada ou não, mas todas as restrições de igualdades são ativas para todo o domínio de projeto.

A restrição de desigualdade  $g_j(x) \leq 0$  é considerada inativa quando o ponto do projeto  $x^*$  satisfaz a equação  $g_j(x) < 0$ . A restrição de desigualdade  $g_j(x) \leq 0$  é dita violada se o

ponto  $x^*$  for um valor positivo. Em se tratando da restrição de igualdade, esta é violada quando a função for diferente de zero.

Caso o problema satisfaça todas as restrições impostas, então se encontra em uma região admissível (ou viável), ocorrendo o contrário, será uma região não admissível ou inviável.

## 2.6. VETOR GRADIENTE

A sensibilidade de uma função é definida como o gradiente desta função em relação a todas as variáveis de projeto. A análise de sensibilidade é essencial para otimização estrutural com variáveis contínuas, permitindo uma abordagem eficiente da solução do problema através do cálculo variacional.

O gradiente de uma função  $f(x^*)$  é obtido diferenciando parcialmente em relação à  $n$  variáveis de projeto  $x_n$  para um dado ponto  $x^*$ . Pode-se representar a derivada da função  $f(x)$  da seguinte forma:

$$\nabla f(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (5)$$

A função da equação (5) pode ser representada geometricamente para fins de entendimento. O vetor gradiente é definido como sendo normal ao plano tangente no ponto  $x^*$  e o mesmo sempre aponta na direção do máximo aumento da função objetivo. A figura 2.4 ilustra esse conceito para uma função de 3 variáveis.

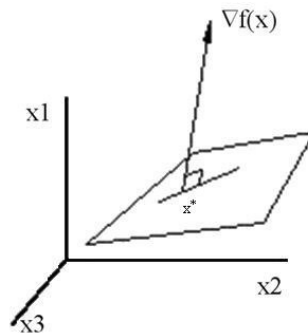


Figura 2.1: Vetor gradiente para função  $f(x)$  no ponto  $x^*$



## 2.7. MATRIZ HESSIANA

Derivando o vetor gradiente (equação (5)) novamente em relação às variáveis de projeto, obtém-se a segunda derivada parcial da função  $f(x^*)$ , conhecida como matriz Hessiana, e normalmente denotada como  $\nabla^2 f$ .

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Em relação à matriz Hessiana pode-se afirmar que um ponto de gradiente nulo:

- $\nabla^2 f$  for positiva definida, representa um ponto de mínimo local;
- $\nabla^2 f$  for negativa definida, representa um ponto de máximo local;
- $\nabla^2 f$  for indefinida, representa um ponto de sela.

## 2.8. FORMULAÇÃO GERAL DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

A formulação geral apresentada para o problema de otimização estrutural apresenta-se da seguinte forma [Haftka, et al., 1996, Cheng, 1992 e Arora, 1989]:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a} && g_j(x) \geq 0, \quad j = 1, \dots, ng \\ &&& h_k(x) = 0, \quad k = 1, \dots, ne \end{aligned} \quad (7)$$

em que  $x$  é a variável de projeto,  $f(x)$  a função custo e  $g_j$  e  $h_k$  são respectivamente restrições de desigualdade e de igualdade. O problema proposto neste trabalho é minimização da função objetivo, mas poderia ser maximizado apenas invertendo o sinal do funcional sem a perda da generalidade,  $f(x) = -f(x)$ .

O gráfico da formulação geral, equação (7), é demonstrado no exemplo a seguir:

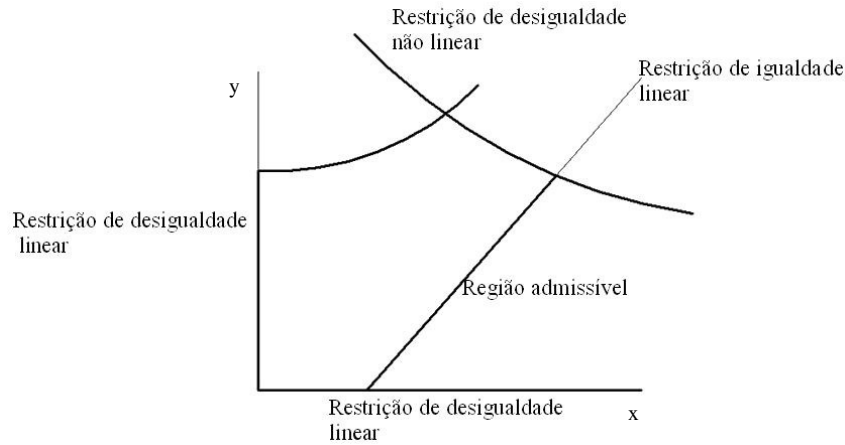


Figura 2.2: Região admissível para um problema de otimização envolvendo duas variáveis independentes

A solução admissível para o problema de otimização significa que as variáveis de projeto devem satisfazer as restrições de igualdade e de desigualdade, conforme mostrado na figura 2.2. De acordo com o demonstrado no gráfico, o espaço viável consiste em uma linha, em restrição de igualdade, e em duas restrições de desigualdade, nas extremidades. A solução ótima do problema deve satisfazer as restrições e, também, conduzir a um ótimo valor da função objetivo. Em alguns casos a solução obtida é única, então se pode afirmar que a resposta obtida é um mínimo global, e, para outros casos, possui “n” soluções, sendo classificado o resultado como mínimo local.

**Mínimo Global (absoluto):** a função  $f(x)$  de “n” variáveis tem um mínimo global para  $x^*$  (usada para designar um ponto em particular na região admissível) se

$$f(x^*) \leq f(x) \quad (8)$$

para todo  $x$  no espaço viável. Se para qualquer  $x$ , o comportamento da equação (8) for de desigualdade, então  $x^*$  é conhecido como mínimo global estritamente [Chen e Ho, 1992, Arora, 1989].

**Mínimo local (relativo):** a função  $f(x)$  de “n” variáveis tem um mínimo local para  $x^*$ , se a desigualdade da equação (8) no domínio admissível possuir um  $x$  menor na vizinhança  $N$  de  $x^*$ . Matematicamente pode-se definir a vizinhança  $N$  do ponto  $x^*$  como:

$$N = \{x \mid x \in S \text{ com } \|x - x^*\| < \delta\} \quad (9)$$

em que  $\delta > 0$  e  $S$  representa todas as regiões viáveis no projeto.

As definições de mínimo global e local não conduzem a um método para localizar o menor valor da função. Para que isso seja possível é necessária uma análise mais aprofundada.

Para o entendimento do significado gráfico do mínimo local e global, considera-se o gráfico da função, mostrado na figura a seguir. Seja uma função  $S: \Re^n \rightarrow \Re$ . Diz-se que  $x^*$  é um mínimo global (ou absoluto) de  $S$  se  $S(x^*) \leq S(x) \forall x \in \Re^n$ , e que  $x^*$  é um mínimo local (ou relativo) de  $S$  se existe  $\varepsilon > 0$ , tal que  $S(x^*) \leq S(x) \forall x$  tal que  $\|x - x^*\| < \varepsilon$ .

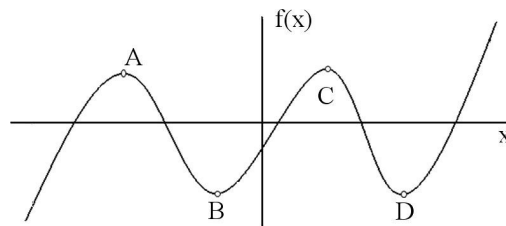


Figura 2.3: Mínimo local

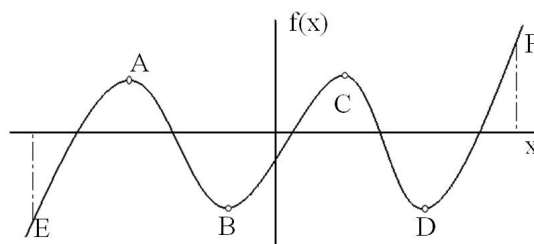


Figura 2.4: Mínimo global

Na maioria dos problemas, de otimização estrutural, é difícil de encontrar o mínimo global da função, pois normalmente as mesmas não são lineares. As respostas obtidas na maioria dos casos são mínimos locais. Este tipo de solução ocorre devido aos algoritmos utilizados para solucionar o problema e pararem nestas regiões, e um dos motivos é devido ao alto custo computacional.

Os mínimos locais e globais ocorrem devido à função objetivo ser classificada de duas formas:

- função convexa: o problema é considerado convexo se o domínio admissível for convexo. O domínio é dito convexo, se as retas que unem dois pontos dentro desta região encontram-se inteiramente dentro da mesma.

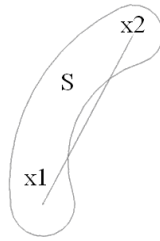


Figura 2.5: Domínio não convexo

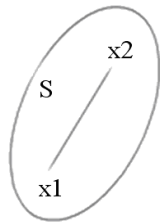


Figura 2.6: Domínio convexo

A função convexa  $f(x)$  é definida de forma que os valores da função  $f(x)$  para dois pontos arbitrários,  $X_1$  e  $X_2$  e suas combinações lineares  $\alpha X_1 + (1-\alpha) X_2$  satisfaçam a seguinte relação:

$$f(\alpha X_1 + (1-\alpha) X_2) \leq \alpha f(X_1) + (1-\alpha) f(X_2) \quad (10)$$

em que  $\alpha$  é um valor entre zero e um ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) e o termo  $\alpha X_1 + (1-\alpha) X_2 \in k$ , sendo  $k$  um subconjunto de um espaço vetorial  $X$ .

A função convexa apresenta as seguintes propriedades:

- a)  $f(x)$  é contínua em qualquer ponto do interior de  $k$ ;
- b) as seções  $k_\epsilon = \{X \in k \mid f(x) \leq \epsilon\}$  são conjuntos convexos.

- função côncava: é definida quando valores da função  $f(x)$  para dois pontos arbitrários,  $X_1$  e  $X_2$  e sua combinação linear  $\alpha X_1 + (1-\alpha) X_2$  satisfazem a seguinte relação:

$$f(\alpha X_1 + (1-\alpha) X_2) \geq \alpha f(X_1) + (1-\alpha) f(X_2) \quad (11)$$

A função  $f(x)$  é estritamente convexa se a desigualdade for estrita. Uma função  $T(x)$  é côncava quando a função  $f(x) = -T(x)$  for convexa.

Para o caso do problema convexo, pode-se provar que o mínimo local é também mínimo global.

## 2.9. CONDIÇÕES DE KARUSH-KUHN-TUCKER(KKT)

Em 1951, Kuhn e Tucker propuseram as condições matemáticas para um dado ponto no espaço ser considerado um ponto ótimo. Como esses critérios matemáticos haviam sido anteriormente (e independentemente) propostos por Karush, esses teoremas e proposições passaram a ser conhecidos como condições de otimalidade por de Karush-Kuhn-Tucker(KKT). Esta solução é aplicada para problemas convexos, em que a função objetivo é convexa e as restrições contínuas e côncavas.

As condições de KKT são necessárias para solução ótima em problemas que possuam restrições de igualdade e de desigualdade. O critério de ótimo é baseado no KKT e permite que várias restrições sejam imposta ao problema.

Seja  $f(x)$  um funcional tal que  $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , o qual define a função objetivo,  $x \in X$  um vetor que define as variáveis de projeto e  $x^*$  um ponto extremo do funcional  $f(x)$ , têm-se as seguintes condições de otimalidade:

- **condição necessária de 1ª ordem:** para que  $x^*$  seja um mínimo (ou máximo) local da função  $f(x)$ , diferenciável em  $x^*$ , é necessário que:

$$\nabla f(x^*) = 0 \quad (12)$$

- **condição necessária de 2ª ordem:** para que  $x^*$  seja um mínimo (ou máximo) local da função  $f(x)$ , duas vezes diferenciável em  $x^*$ , é necessário que a equação (12) seja satisfeita e que:

$$\nabla^2 f(x^*) \equiv H(x^*) \text{ seja positiva (negativa) semidefinida} \quad (13)$$

em que  $H$  é a matriz Hessiana.

Observa-se que estas condições são apenas necessárias porque os termos de primeira e segunda ordem podem estar nulos, deixando ainda dúvida sobre a natureza de  $x^*$ .

- **condição suficiente:** seja  $f(x)$  duas vezes diferenciável em  $x^*$  tal que a equação (12) esteja satisfeita e que:

$$H(x^*) \text{ seja positiva (ou negativa) definida} \quad (14)$$

Dessa forma,  $x^*$  é mínimo (ou máximo) estrito de  $f(x)$ .

A idéia chave para desenvolver as condições necessárias e suficientes para um problema de otimização com restrições é transformá-lo em um problema de otimização sem restrições e aplicar as condições para este caso. Uma forma de fazer esta transformação é através da introdução de uma função auxiliar, chamada de função de Lagrange definida como:

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda_k^T h_k(x) + \mu_j^T g_j(x) \quad (15)$$

em que  $\lambda$  e  $\mu$  são os multiplicadores de Lagrange associados com as restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente.

Haftka e Gürdal, 1996 e Duysinx et al., 2000, fizeram uso desses conceitos, definindo as condições necessárias de otimalidade para um problema com restrições. Se  $x^*$  é um ponto de ótimo do problema e se  $x^*$  é um ponto regular (todos os vetores gradientes das restrições de desigualdade ativas são linearmente independentes), então um vetor de multiplicadores de Lagrange pode ser encontrado de tal forma que:

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \nabla f(x^*) + (\lambda^*)^T \nabla h(x^*) + (\mu^*)^T \nabla g(x^*) = 0 \quad (16)$$

$$h(x^*) = 0 \quad (17)$$

$$g(x^*) \leq 0 \quad (18)$$

$$\mu_j^{*T} g_j(x^*) = 0, j = 1, \dots, n_g \text{ (condição de complementaridade)} \quad (19)$$

$$\mu^* \geq 0 \quad (20)$$

O método de Karush-Kuhn-Tucker pode ser resumido nos quatro itens a seguir:

- o ótimo ponto deve satisfazer a condição necessária. Pontos que não satisfaçam essa condição, não podem representar a solução;

- o ponto que satisfaz a condição necessária não precisa ser ótimo, isto é, pontos que não representam o ótimo podem também satisfazer a condição necessária;

- o ponto candidato a satisfazer a condição suficiente é de fato o ótimo;

- se a condição suficiente não pode ser usada ou ela não é satisfeita, não se pode concluir nada sobre o ponto em questão.

Os problemas solucionados na prática de engenharia, em sua maioria, não são convexos, mas se usa a condição KKT para se definir ótimos locais.

### 3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O estudo da otimização estrutural iniciou-se com Maxwell, em 1869, que buscou obter o mínimo volume em estruturas uniaxiais, para um dado carregamento e material. A otimização de layout começou com o trabalho pioneiro de Michell, em 1904, que desenvolveu uma teoria para obter a ótima conectividade de uma treliça entre todos os nós possíveis. Suas famosas estruturas ainda hoje são referência na teoria moderna de otimização topológica. Michell projetou estruturas almejando ter o mínimo peso, observando as tensões nas barras para cada caso de carga.

O trabalho de Schmit [Schmit, 1960] em otimização de treliças é considerado o início da moderna otimização estrutural, pois combinou a análise estrutural por computador com programação matemática. Esta metodologia tem sido seguida em inúmeros estudos nas diversas áreas da otimização estrutural [Rozvany et al., 1995].

Alguns artigos de revisão permitem acompanhar o desenvolvimento da otimização estrutural. O artigo publicado por Venkayya, 1978, e o de Kirsch, 1989, retratam o estado deste campo nos respectivos anos de publicação, ambos enfatizando a otimização de estruturas treliçadas. Estes artigos mostram os tipos de problemas e os métodos de solução existentes na época, bem como as dificuldades envolvidas no processo, aproximações e simplificações.

Uma das últimas revisões sobre otimização estrutural encontra-se no artigo publicado por Rozvany, Bendsøe e Kirsch, 1995. O trabalho trata sobre otimização topológica e de forma na busca da melhor configuração estrutural e alguns conceitos estabelecidos há quase um século atrás. Outros tópicos comentados são sobre a solução do problema, da validade e da convergência dos métodos. Da mesma época é a revisão de Ramm et al. [Ramm, Bletzinger e Maute, 1995] que apresentaram os desenvolvimentos obtidos na área da otimização topológica e de forma, em estruturas 2D e 3D.

Vários livros foram publicados com os conceitos básicos para uma introdução à otimização estrutural. Destacam-se os livros de Arora, 1989, Haftka e Gürdal, 1996, Bendsøe, 1995 e Bendsøe Sigmund, 2003.

#### 3.1 SENSIBILIDADE

A sensibilidade é o gradiente de uma função em relação às variáveis de projeto, e tem uma importância fundamental no processo de otimização. Os algoritmos de programação matemática precisam dos gradientes da função objetivo e das restrições em relação às variáveis



de projeto para determinar a direção de busca. Tal é a importância deste assunto, que hoje em dia a análise de sensibilidade é considerada um campo independente de pesquisa [Haug, Choi e Komkov, 1986].

O artigo publicado por Adelman e Haftka [Adelman e Haftka, 1986] e Haftka e Adelman [Haftka e Adelman, 1989] é uma boa revisão sobre o desenvolvimento da análise de sensibilidade. Este estudo aborda métodos analíticos, semi-analíticos e de diferenças finitas, apresentando formulações para a sensibilidade de funções do tipo tensão, deslocamento, autovalor e autovetor.

Uma das maneiras mais simples de calcular o gradiente das funções a partir da definição de derivada é o método das diferenças finitas. Este método, apesar de sua generalidade, apresenta dificuldades para se implementar de forma eficiente. Exemplos de aperfeiçoamento do procedimento básico podem ser encontrados em Haftka [Haftka, 1985]. O método de diferenças finitas é normalmente usado quando não se pode deduzir gradientes analíticos, como em alguns problemas não lineares. Neste trabalho, este procedimento foi utilizado para verificação das derivadas obtidas pelo método analítico.

G.-D. Cheng e Y.W. Liu, 1987 elaboraram o método quase-analítico ou semi-analítico de análise de sensibilidade, utilizando conceitos da derivação analítica e de diferenças finitas. Este método consegue diminuir as dificuldades na análise de sensibilidade e de aumentar a eficiência no processo de otimização estrutural, além de sua fácil implementação computacional e versatilidade para qualquer tipo de variável. Outros exemplos de implementação deste método podem ser encontrados em Pedersen et al. [Pedersen, Cheng e Rasmussen, 1989], Kibsgaard, 1992, Jr. Parente e Vaz, 2001 e Jr. Parente [Jr. Parente, 2000 e Jr. Parente, 2003]. Neste trabalho, este procedimento foi aplicado no cálculo da sensibilidade de forma.

A análise de sensibilidade é especialmente importante na otimização de forma em estruturas contínuas. Os estudos iniciais desta área foram publicados por Rousselet e Haug, 1982, Kumar, Lee e German, 1989, Choi e Haug, 1983, Yang e Choi, 1985, Choi e Seong, 1986, Wang et al. [Wang, Sun, Gallagher, 1985], Sienz e Hinton, 1997, sendo que Wang et al. baseou o cálculo do gradiente no método das diferenças finitas.

O artigo apresentado por Hansen et al. [Hansen, Liu e Olhoff, 2001] para o cálculo da sensibilidade de forma é baseado no modelo de elementos finitos em que as funções de base não modificam quando o domínio é alterado. Este tipo de aproximação apresenta algumas vantagens, como o gradiente do problema ser determinado diretamente com a diferenciação explícita da matriz de rigidez e do vetor de força ou a solução adjunta do problema. Baseado

nesta revisão optou-se neste trabalho pela sensibilidade pelo método analítico e adjunto, conforme mostrado no capítulo 9.

### 3.2 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA E FORMA

Os estudos realizados na área de otimização estrutural, tanto de topologia como de forma, buscam obter o mínimo peso da estrutura sujeito a restrições de projeto, que podem ser de tensão, de flexibilidade, de fadiga, de estabilidade estrutural, de frequência natural. Normalmente os primeiros testes são realizados com treliças, pois se trata de um elemento simples.

O problema de otimização estrutural pode ser constituída por mais de uma função objetivo [Tseng e Lu, 1990], o que normalmente, na prática é evitado. Na maioria das formulações a função custo adotada é o volume ou peso e as restrições impostas ao modelo [Tong e Liu, 2001; Woo, 1987]. Esta é a estratégia usada neste trabalho.

A otimização topológica de estruturas contínuas possui como incógnita a distribuição de uma função relacionada aos parâmetros constitutivos no domínio. Esta função é discretizada no domínio pela mesma malha de elementos finitos utilizada na simulação numérica; neste trabalho, adotaram-se como variáveis de projeto os valores de densidade por elemento.

O grande desafio deste trabalho é a restrição de tensão, um dos maiores problemas dentro da área de otimização topológica, pois este tipo de função apresenta comportamento singular. Diferentes autores estudaram este comportamento, como Guo e Cheng, 2000, Kirsch, 1990, Rozvany e Birker, 1994 e Cheng, 1995.

A busca de uma formulação para a otimização de estruturas com restrição de tensão, gerou diversos trabalhos publicados, podendo-se citar alguns pesquisadores como: Yang e Chen, 1996, Duysinx e Bendsoe, 1998, Duysinx e Sigmund, 1998, Khan, 1984, Zhou et al., 1995, Bojczuk e Mróz, 1999.

As topologias singulares somente ocorrem em problemas de otimização topológica estando sujeita à restrição de tensão. O ótimo singular foi discutido por Rozvany e Birker, 1994, Kirsch, 1990 e Guo e Cheng, 2000. Uma solução deste problema foi proposta através do método da relaxação epsilon ( $\epsilon$ ) proposto por Cheng e Guo, 1997, resolvendo estruturas treliçadas. Uma modificação do método foi aplicada para estruturas contínuas, em que a restrição de tensão pode ser local ou global [Duysinx e Sigmund, 1998; Pereira, Fancello e Barcellos, 2003; Duysinx e Bendsoe, 1998].

A trajetória da aproximação das sucessivas continuações da relaxação epsilon ( $\epsilon$ ) é abordada no artigo de Stolpe e Svanberg, 2001, no qual concluíram que a redução do valor de

epsilon ( $\epsilon$ ) pode conduzir para uma solução que não seja o ótimo global. Apesar desta ressalva, este trabalho adota esta abordagem, já que não há nada melhor disponível.

Mais recentemente, Svanberg e Werme, 2006, propuseram um novo método de otimização topológica em variáveis discretas, com refinamentos sucessivos de malhas e modificações em apenas algumas regiões. Outra maneira de solucionar o problema de otimização com restrição de tensão foi o método do campo de fase proposto por Stainko e Burger, 2006, em que a equação de equilíbrio é perturbada. Nenhum destes métodos acima produziu bons resultados, mas são representativos das tentativas de desenvolver novas formulações de otimização para restrições de tensão sem a relaxação  $\epsilon$ .

Alguns aspectos da otimização topológica de treliças [Cheng, 1995] podem ser estendidos para estruturas contínuas. Em outras palavras, o problema de otimização estrutural de treliça aplicado à restrição de tensão, de flexibilidade, de flambagem, etc. são os mesmos para as estruturas contínuas.

Um problema bem conhecido na otimização topológica é instabilidade de tabuleiro. Este tópico é encontrado nos artigos de Poulsen, 2002, Sigmund e Petersson, 1998 e Díaz e Sigmund, 1995. A solução para problema que apresenta instabilidade de tabuleiro é resolvida pelo método da filtragem das densidades [Sant'Anna, 2002, Cardoso e Fonseca, 2003] ( capítulo 5 apresenta maiores detalhes sobre este tipo de problema). Esta técnica foi implementada neste trabalho.

Em projetos de estruturas contínuas para evitarem a densidade intermediária no final da otimização topológica, o problema proposto sofre algum tipo de penalização, conforme demonstrado por Stolpe e Svanberg, 2001, Tcherniak, 2002, e Duxin e Bendsoe, 1998.

O resultado obtido com a otimização topológica, às vezes pode não descrever corretamente o contorno da geometria, e uma maneira de contornar esta situação é aplicar posteriormente uma otimização de forma. Papalambros e Chirehdast, 1991, propuseram a integração do sistema de otimização estrutural com o objetivo de criar a ótima configuração através da integração automática da otimização da topologia e da forma. Somente as idéias e regras gerais são demonstradas no trabalho, pois as operações dos detalhes de interpretação da imagem e técnicas não são descritas.

Significativos progressos na integração de otimização topológica e de forma em processos automáticos foram obtidos por Bremicker et al., 1991. Chirehdast et al., 1994, divulgou procedimentos para automatizar a integração entre a otimização topológica e a de forma para estruturas 2D. O artigo publicado por Lin e Chao, 2000, desenvolveu completamente o sistema de projeto automatizado, em que a imagem interpretada após a otimização topológica é

transformada para operação de otimização de forma. Recentemente, trabalhando com esses dois tipos de otimização, Schwarz, Maute e Ramm, 2001, aplicaram este método para otimização de estruturas elastoplásticas.

Um dos objetivos iniciais deste trabalho é a integração da otimização topológica e otimização de forma.

O estudo sobre otimização de forma fazendo uso de curvas de Bézier ou de B-spline para descrever o contorno de um componente, foi proposto inicialmente por Braibant e Fleury, 1984. Essa técnica proposta reduziu o número de variáveis de projeto e possibilitou descrever geometrias complexas. Antes da publicação desse trabalho, a variável de projeto de forma adotada era a coordenada nodal [Imam, 1982; Gil e Andreu, 2001] e a geometria era descrita por polinômios, como demonstra o trabalho Bhavikatti e Ramakrishnan, 1980.

Antes do trabalho de Braibant e Fleury, 1984, que reduziu o número de variáveis de projeto, diferentes técnicas foram apresentadas com esse objetivo, conforme está descrito no trabalho de Imam, 1982. Uma dessas técnicas é conhecida como elemento de projeto (este procedimento é comentado no capítulo sobre otimização de forma).

O processo de otimização de forma exige que a malha de elementos finitos seja refeita, pois os elementos da periferia sofrem distorções, prejudicando o cálculo estrutural e a análise de sensibilidade. O estudo realizado por Imam, 1982, propôs que a malha de elementos finitos fosse gerada automaticamente durante o processo de otimização. Durante o processo de remalhamento, a discretização da estrutura poderia constituir-se de um número maior ou menor de nós do que a malha original. Este assunto também foi abordado por Kikuchi, et al., 1986 e Gani e Rajan, 1999.

Ao invés de remalhar a estrutura em análise, é possível determinar um campo de velocidade dos nós, isto é, mudando suas posições originais, tanto os nós do contorno como os do domínio. Este procedimento foi apresentado por Duysinx et al. [Duysinx, Zhang, Fleury, 1993], evitando desta forma a distorção dos elementos. O trabalho de Choi, Chang, 1994, discute e estuda o resultado de cinco exemplos obtidos a partir do método do campo de velocidade [Rajan e Belegundu, 1989, Yao e Choi, 1989].

As estruturas que apresentam concentração de tensão, Wilczynski, 1997, propôs a otimização de forma, com objetivo de reduzir as tensões nessas regiões. Para isto aplicou o método da tensão fictícia conforme proposto por Crouch [Wilczynski, 1997] e o trabalho de Rajan e Belegundu, 1989, realizou a otimização de forma usando carga fictícia para controle dos nós da estrutura. A idéia de reduzir concentrações de tensões no processo de otimização surgiu no final da década de setenta [Schnack, 1979 e Schnack e Weikl, 2002]. O estudo realizado por

Radaj e Zhang, 1990, introduziu multiparâmetros no projeto de otimização em relação à concentração de tensão. Outros autores realizaram o estudo sobre a otimização de forma em que problemas estão sujeitos à restrição de tensão como: Liu et al., 2001, Waldman, Heller e Chen e Rodrigues, 1988.

Diferentes pesquisadores buscam o ótimo projeto, mas é interessante ressaltar o trabalho realizado por Fukushima et al., pois este trata de otimização de forma e demonstra eficiente resultados obtidos em se tratando de chassis de carro ou partes mecânicas. Este artigo apenas confirmou os resultados que foram obtidos ao longo do tempo através da experiência e justificou a pesquisa sobre otimização estrutural na busca do componente ótimo.

Os artigos apresentados por Braibant e Fleury, 1984 e 1985, Kegl, 2000 e Zhang e Beckers, relataram conceitos, procedimentos e exemplos de estruturas obtidas através da otimização de forma. Este assunto despertou o interesse de diferentes autores como Kristensen e Madsen, 1976, Freitas e Cismasiu, 2002, Samareh, 2001, Dems e Mróz, 1980, Dems, 1980, Na, Kikuchi e Taylor, 1983, Liu et al., 2001, Fourment, Balan e Chenot, 1996, Zhao, Wright e Grandhi, 1997 e Bletzinger e Ramm, 2001.

Não se chegou a testar completamente a implementação da otimização de forma neste trabalho.

### 3.3 OTIMIZAÇÃO PARA FADIGA

Na área de projeto mecânico, normalmente existe o interesse em que um componente tenha vida infinita ou tenha o tempo estimado em número de ciclos. Na busca de obter a ótima forma e o mínimo peso, alguns pesquisadores voltaram o estudo da otimização estrutural com restrição a fadiga ou mecânica da fratura. A seguir são comentados alguns trabalhos publicados nesta área recentemente.

A nova aproximação da mecânica do contínuo do dano foi introduzida para caracterizar o comportamento do modelo à fadiga, sendo apresentado por Grunwald et al. [Grunwald e Schnack, 1998]. Este modelo definiu adequadamente a função custo para maximizar o tempo de vida através da otimização de forma estando aplicado carregamento oscilante à estrutura. Os resultados obtidos com este método foram comparados com os resultados de otimização com carga constante.

A mecânica da fratura elástica linear aplicada justamente com a otimização de forma estabeleceu uma relação entre a geometria estrutural e a vida à fadiga [Gani e Rajan, 1999]. A lei adotada para estabelecer o número de ciclos de um componente foi a Regra de Paris.

A formulação do problema proposto por Gani et al. foi maximizar o número de ciclos, que é uma função do fator de intensidade de tensão e do comprimento da trinca, estando sujeito à restrição de tensão e deslocamento. A observação levantada neste trabalho é que a função objetivo é sensível à pequenas mudanças na variável de projeto

As funções custo adotadas no trabalho de Grunwald et al. foram: maximizar a tensão de von Mises, maximizar a tensão equivalente do dano e maximizar o dano para um certo número de ciclos de carga. A principal dificuldade encontrada neste artigo foi à determinação do dano constante. Dentro desta mesma abordagem, Schnack e Weigl, 2002, realizaram estudos numéricos e experimentais. Os testes realizados mostraram um aumento na vida à fadiga em comparação a clássica forma.

A otimização da aresta de trinca de fadiga foi estudada por Rodopoulos et al. [Rodopoulos, Rios e Yates, 1999], cujas fibras unidirecionais são reforçadas, sendo considerado o processo do dano e a tensão deve ser distribuída uniformemente.

Este trabalho propõe uma técnica nova da otimização topológica baseada no estudo do comportamento no tempo da tensão desviadora, sendo que a trajetória desta tensão governa o fenômeno de fadiga. A descrição do assunto de tensão e fadiga encontra-se nos capítulos 7 e 8 respectivamente.

### 3.4 ALGORITMOS DE OTIMIZAÇÃO

O problema de otimização estrutural é solucionado através de métodos matemáticos, como a formulação dual [Beckers e Fleury, 1997; Imai, K., 1983], critério de ótimo [Yin e Yang, 2001], algoritmo genético [Azid, Kwam e Seetharamu, 2002] e a solução das condições necessárias de Kuhn-Tucker [Maute e Raulli, 2003]. Esse método foi utilizado por Gutkowski et al., 1985, comparando os resultados obtidos com a técnica de programação não linear.

A solução ótima de uma estrutura obtida por diferentes métodos como a linearização convexa (CONLIN), método da assíntota móvel (MMA) e programação quadrática seqüencial (SQP), encontra-se no artigo de Zhang e Fleury, 1997. Neste trabalho utiliza a programação linear seqüencial (SLP) [Rojas, 2003 e Wilczynski, 1997, San´tanna, 2002].

## 4. OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

### 4.1. CLASSIFICAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Um problema de otimização estrutural pode ser classificado em três tipos, que remetem a diferentes soluções finais: otimização dimensional, otimização de forma e otimização topológica [Pedersen, 2002]. A figura 4.1 ilustra esses conceitos:

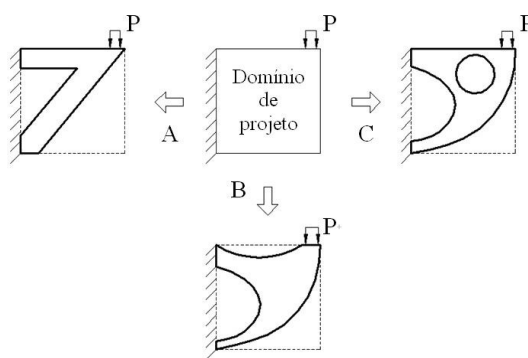


Figura 4.1: Tipo de otimização estrutural: (a) dimensional; (b) forma; (c) topológica

A idéia da otimização dimensional é utilizar alguma dimensão da peça como variável de projeto, tal como a espessura da viga, placa ou casca. A área da barra de uma treliça é também utilizada como variável de projeto dimensional e a definição neste processo de otimização está relacionada no fato que o modelamento do domínio não é modificado ao longo do processo iterativo de otimização. A direção do material não isotrópico também permite ser tratado como variável de projeto.

Como exemplo da otimização dimensional, considera-se uma viga simples apoiada nas extremidades e sujeita a uma carga  $P(x)$ . As propriedades do material, comprimento e volume total da viga são valores conhecidos e a deflexão expressa por  $y(x)$ . Para este problema deseja-se determinar a ótima distribuição da seção transversal em que minimize a deflexão da viga.

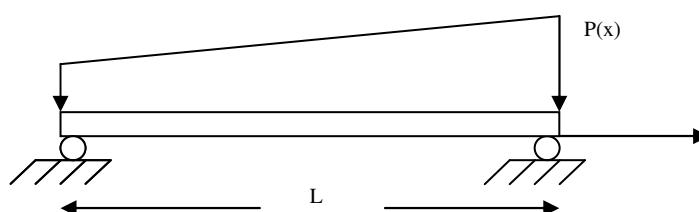


Figura 4.2: Exemplo otimização dimensional

Neste caso fica claro que a seção transversal é a variável de projeto e a função objetivo é a deflexão. Existem duas restrições impostas ao problema, uma o volume total da viga e a outra envolve a relação entre deflexão  $y(x)$ , propriedades da seção transversal e a carga externa  $P(x)$ , dado pela equação diferencial da teoria de viga clássica. Deve ser também especificado a relação entre o momento de inércia e a seção transversal, sendo um ponto muito importante para o ótimo projeto.

Nesse momento é importante lembrar que o método citado é o que apresenta menor complexidade na busca da solução, pois apresenta poucas variáveis de projeto o que permite considerar muitas restrições importantes, Bletzinger et al, 1996.

Em se tratando da otimização de forma, a variável de projeto pode ser a coordenada nodal de uma barra ou o contorno de uma geometria representada por curva B-spline, Bézier ou polinômio. A grande vantagem em se trabalhar com o contorno da geometria está relacionada ao baixo número de variáveis de projeto, permitindo assim considerar várias restrições, como a tensão. Este tipo de formulação de problema permite que a geometria da peça modifique-se ao longo da otimização, buscando a forma ótima do componente, mas respeitando as condições de contorno impostas. Um problema comum nesta formulação é a distorção da malha, que pode muitas vezes invalidar os resultados devido ao problema de convergência da solução de elementos finitos. A solução para este tipo de problema foi apontada por Salagame e Belegume, 1995, aconselhando que a malha deve ser adaptada a cada processo iterativo e estimar os erros. Outro importante trabalho realizado foi por Rojas, em 2003, em que ocorre o remalhamento da estrutura devido ao problema se tratar de grandes deformações. Problemas com concentração de tensão são frequentemente relacionados com o contorno da forma, isto é, a busca da suavização da curva da geometria, evitando desta forma que esta região apresente alto nível de concentração de tensão.

O próximo item trata-se da otimização topológica, a idéia principal desta abordagem é determinar a existência da variável de projeto ou não. Se a variável de projeto adotada é a densidade, esta permitirá abertura ou fechamento de furos durante o processo de otimização, buscando a ótima topologia da estrutura. As variáveis adotadas estão relacionadas diretamente com a malha de elementos finitos. A solução final do problema está diretamente ligada ao tipo da discretização da malha de elementos finitos, considerado por Bendsoe et al. [Bendsoe, 1995, Sigmund e Peterson, 1998] um problema muito comum.

Exemplificando a diferença entre as variáveis dimensionais, de forma e de topologia [Pedersen, 2002], em uma treliça (2D ou 3D), as seções transversais das barras são variáveis dimensionais, as posições dos pontos nodais são variáveis de forma, e a escolha das barras entre



várias possibilidades de ligações entre os nós é a topologia. Para a casca, a espessura e a distribuição de material são variáveis dimensionais, o contorno da superfície e suas curvaturas são variáveis de forma, enquanto o número de furos na superfície é uma descrição da topologia.

## 4.2. MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

Até o presente momento foi demonstrado como formular o problema de otimização estrutural, e juntamente os conceitos importantes para compreensão do procedimento de otimização. O próximo passo é determinar quais os tipos de ferramentas para solucionar um determinado caso estrutural.

O método de otimização pode ser classificado da seguinte forma [Venkayya, 1978]:

- critério de ótimo;
- método da programação matemática.

Esses dois métodos são os mais utilizados para otimização estrutural.

### 4.2.1. CRITÉRIO DE ÓTIMO

O método do critério de ótimo são aproximações para encontrar o ótimo projeto de uma estrutura de maneira indireta. Em outras palavras, as condições de projetos pré-estabelecidas devem ser satisfeitas. A estrutura ideal é alcançada quando se obtém a ótima redistribuição de material apoiado no argumento físico, sendo este método baseado na condição de Kuhn-Tucker. Esta aproximação mostra-se muito eficiente para certos tipos de problemas e em alguns problemas o número de iterações para convergência numérica do algoritmo não depende do número de variáveis de projeto, tornando-se muito atrativo para estruturas de grande escala [Cheng, 1992].

De acordo com Rozvany et al. [Rozvany, Bendsoe e Kirsch, 1995], o critério de ótimo foi formulado pela primeira vez por Maxwell, 1872 e Michell, 1904, procurando o ótimo layout de uma estrutura. Anos mais tarde, Prager e Shield, 1967, empregaram este método, fazendo uso do teorema de energia e outros conceitos simples de mecânica.

O desenvolvimento desse critério pode ser dividido em duas fases distintas. A primeira é encontrar o critério de ótimo relevante ao problema e a segunda fase do projeto é satisfazer o critério de ótimo, e a maior dificuldade nesta fase deve-se a presença de múltiplas restrições [Allwood e Chung, 1984].

Prager, 1972, e Venkayya, 1971, baseado no princípio da mínima energia potencial desenvolveram o critério de ótimo para estrutura sujeita com uma ou múltiplas restrições. Vários autores estabeleceram essencialmente o mesmo critério de ótimo, mas adotando diferentes problemas.

No início da década de noventa Rozvany e Zhou [Rozvany e Zhou, 1991a, 1991b] utilizaram o método do critério ótimo contínuo (COC), em que as condições necessárias de ótimo são primeiramente geradas analiticamente usando o método variacional e foi interpretada em termos de uma estrutura fictícia. Posteriormente foi reformulada sob a denominação de DCOC (critério de ótimo contínuo discretizado) [Zhou e Rozvany, 1992, 1993], utilizando então uma formulação de elementos finitos. Dessa forma, problemas com um grande número de variáveis de projeto puderam ser resolvidos. Posteriormente, os próprios autores reformularam o algoritmo [Zhou e Rozvany, 1995], que apresentava problemas de convergência em alguns casos. Nessa nova formulação, em vez das restrições de deslocamentos serem expressa em função do PTV, eram agora apresentadas em termos de uma aproximação recíproca.

Em outro trabalho, Zhou e Haftka [Zhou e Haftka, 1995] fizeram uma comparação entre o tradicional método do critério de ótimo (OC) e o critério de ótimo contínuo discretizado (DCOC). Não apenas este tipo de comparação foi realizado, pois Canfield, Grandhi e Venkayya [Canfield et al., 1988] confrontaram os métodos de programação matemática e critérios de ótimo.

Atualmente se deduzem algoritmos de solução de problemas de otimização com critérios de ótimo como o KKT, utilizando algum método iterativo para a solução direta das equações diferenciais que representam as condições para o mínimo. Estes são baseados em iterações de Picard, ou busca por bisseção ou razão áurea.

#### 4.2.2. PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

A programação matemática é uma importante área da matemática aplicada, tendo aplicação em diversas disciplinas como: engenharia mecânica, química e outras. De acordo com Cheng, 1992 e Rozvany et al., 1995, o primeiro pesquisador a realizar trabalhos fazendo uso desta ferramenta foi Schmit, 1960.

- programação linear (LP): função objetivo e restrições lineares;
- programação quadrática (QP): função objetivo quadrática e restrições lineares;
- programação não linear (NLP): função objetivo e ou restrições não lineares;

- programação inteira (IP): a solução ótima está dentro de um conjunto de valores discretos.

#### 4.2.2.1. PROGRAMAÇÃO LINEAR

O termo programação linear descreve um problema em que a função objetivo e as restrições são funções lineares com a variável de projeto. Haftka et al., 1996, estudando este tipo de programação matemática, relatou que a derivada da função custo em relação às variáveis são constantes, e não necessariamente zero. Por este motivo, a solução do problema de programação linear nunca estará no interior do espaço admissível, mas sim, em um dos seus vértices, formado por interseções de planos, dados pelas restrições lineares.

Esta ferramenta matemática é um tipo de programação convexa, em que a função objetivo é convexa e as restrições formam um conjunto convexo, portanto o ótimo local é também global.

De acordo com afirmação de Haftka [Haftka et al., 1996], a programação linear é extremamente eficiente para solucionar problemas com um grande número de variáveis de projeto e restrições, e um dos métodos mais conhecido é o simplex.

A solução da programação linear pode ser enunciada através do seguinte teorema: “O ótimo de uma função linear em um poliedro convexo  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  é obtido em no mínimo um vértice. Se ele é obtido em mais de um vértice, então ele é obtido em todos os pontos pertencentes à combinação convexa destes vértices”. Se o problema de programação linear não está bem posto, o mesmo pode apresentar uma solução não única, ou uma solução infinita, ou nenhuma solução, tais problemas são ditos degenerados.

O método simplex é o mais popular por causa da sua eficiência e simplicidade, sendo o primeiro a surgir no ano de 1947, apresentado por Dantzig. As restrições de desigualdades são transformadas em restrições de igualdade, adicionando uma variável de folga. O mesmo conduz o caminho de procura dentro da região admissível, movendo-se de um vértice a outro.

A forma geral de um problema de minimização aplicando a programação linear é a seguinte:

$$\begin{array}{ll}
 \text{encontrar} & x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 \text{mínimo} & f(x) = c^T x \\
 \text{sujeito a} & Ax = b \\
 & x \geq 0
 \end{array} \tag{21}$$

em que  $n$  é o número de variáveis de projeto,  $c$  é o vetor dos coeficientes de dimensão  $n \times 1$ ,  $A$  é uma matriz de dimensão  $m \times n$ , com  $m$  restrições, e  $b$  um vetor de dimensão  $m \times 1$ . A matriz  $A$  pode ser composta por restrições de igualdade e desigualdade.

De acordo com Dantzig [Dantzig, 1963], o problema primal de minimização de uma função linear e as restrições lineares são equivalente ao problema dual de maximização. A função custo e as restrições do problema dual são obtidas a partir da função custo e restrições do problema primal. O problema primal é definido como:

$$\begin{aligned} &\text{mínimo} && f_p = c_1x_1 + \dots + c_nx_n && n \text{ variáveis} \\ &\text{sujeito a} && \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m, && m \text{ restrições} \\ &&& x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (22)$$

Então o problema dual é definido como:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && f_d = b_1\lambda_1 + \dots + b_m\lambda_m && m \text{ variáveis} \\ &\text{sujeito a} && \sum_{i=1}^m a_{ij}\lambda_i = c_j \quad j = 1, \dots, n && n \text{ restrições} \end{aligned} \quad (23)$$

em que  $\lambda_i$  são multiplicadores de Lagrange. Informação mais detalhada sobre este assunto pode ser encontrada no artigo de Beckers e Fleury, 1997, e nos livros de Arora, 1989 e Luenberger, 1969.

#### 4.2.2.2. PROGRAMAÇÃO LINEAR SEQUENCIAL

Normalmente os problemas de otimização estrutural, tanto à função objetivo como a restrição, são representadas por funções não lineares, não podendo ser aplicado à programação linear (LP) diretamente. Este método pode ser usado caso as funções sejam linearizadas através da aplicação da série de Taylor: “qualquer função contínua pode ser aproximada por polinômios na vizinhança de um dado ponto em termos de suas derivadas utilizando-se expansão por série de Taylor”. Dessa forma, uma função  $f(x) \in \Re$  e  $x \in \Re^n$  é expandida por séries de Taylor na vizinhança de  $x^*$  da seguinte forma:

$$f(x) = f(x^*) + \nabla f^T(x - x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)^T H(x - x^*) + R \quad (24)$$

em que  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ ,  $R$  é o resíduo, de magnitude inferior aos demais termos,  $\nabla f$  e  $H$  são respectivamente o vetor gradiente e a matriz Hessiana.

A equação (24) é truncado após o termo linear e o termo da matriz Hessiana não é utilizada, então:

$$f(x) = f(x^*) + \nabla f^T(x - x^*) \quad (25)$$

A informação da equação (25) possibilita o uso do LP, desta forma permite a solução de quase todos os problemas de programação não linear (NLP). A exata resposta para o caso NLP é resolvida pela seqüência repetitiva da programação linear. Este tipo de procedimento é conhecido como programação linear seqüencial (SLP), convergindo para solução exata de um problema original NLP [Haftka et al., 1996, Cheng, 1992, Rozvany et al., 1995, Kirsch, 1989].

O problema de otimização é então colocado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{mínimo} \quad & f(x) = f(x^*) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*) \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x^*} \\ \text{sujeito a} \quad & g(x) = g(x^*) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*) \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_{x^*} \leq 0 \\ & h(x) = h(x^*) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*) \left( \frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{x^*} = 0 \\ & a_i^l \leq x_i - x_i^* \leq a_i^u \end{aligned} \quad (26)$$

em que  $n$  é o número de variáveis de projeto, nesse caso igual ao número de elementos da malha. As duas últimas equações de restrição de desigualdade são conhecidas como limite móvel, e as mesmas são adicionadas artificialmente à formulação original, técnica bem conhecida por Schmit e Farshi [Schmit e Farshi, 1974]. As equações acrescentadas somente são válidas em torno da vizinhança do ponto  $x^*$ , devido à aproximação de primeira ordem da série de Taylor.

A solução do problema (26) usando o SLP segue os seguintes passos:

- as variáveis de projeto assumem um valor máximo ou mínimo do intervalo estipulado ou valores aleatórios que se encontram dentro deste intervalo;
- o cálculo da resposta estrutural (deslocamento, deformação e tensão);

- a determinação da sensibilidade das funções;
- a solução do programa linear e obtenção dos novos valores da variável de projeto;
- a verificação da convergência do problema após a terceira interação, se convergir para, caso contrário inicia-se a próxima interação com os novos valores da variável de projeto.

A solução do SLP pode oscilar por causa da solução do LP encontrar-se sempre em um vértice do domínio admissível ou no hiperplano definido por um número de vértices. O motivo desta oscilação é por causa da existência de duas soluções adjacentes, isto é, a solução pode encontrar-se em dois vértices.

De acordo com Cheng [Cheng, 1992], a oscilação acontece particularmente nos casos em que o número de restrições é menor do que o número de variáveis de projeto, este acontecimento pode ser evitado quando se utiliza limites móveis (última equação do problema (26)). Este tipo de restrição é ajustado a cada interação do SLP, em outras palavras, se a variável de projeto está oscilando o limite móvel é reduzido, e, quando a variável apresenta convergência o limite é aumentado.

Alguns problemas surgem quando se trabalha com essa restrição, sendo os dois maiores problemas são:

- limite móvel grande provoca oscilação ou divergência do problema;
- limite móvel pequeno apresenta lenta convergência do problema, ou a parada prematura do algoritmo de otimização, isto é, ficando preso em um ótimo local e não desejado.

O valor do limite móvel é determinado por um critério matemático [Wujek e Renaud, 1998, e Fadel e Cimalay, 1993], ou heurístico. Vários pesquisadores dedicaram-se em aprofundar os estudos nesta área, como Pourazady et al., 1996, Chen, 1993, Grignon et al., 1994, e entre outros mais, pois o sucesso do algoritmo SLP depende do limite móvel adotado.

Os limites móveis são geralmente expressos em função de uma porcentagem aplicada sobre o valor atual das variáveis de projeto, gerando limites superiores e inferiores para as variáveis em cada interação, a fim de garantir que os novos valores fiquem na vizinhança do ponto  $x^*$ , pelas razões mencionadas anteriormente. Expressões gerais para atualização do valor das variáveis de projeto utilizando limites móveis são mostradas a seguir [Sant'Anna, 2002]:

$$\begin{aligned} x_i^u &= x_i + A|x_i| \rightarrow \text{limite superior} \\ x_i^l &= x_i - A|x_i| \rightarrow \text{limite inferior} \end{aligned} \quad (27)$$

em que  $A$  é um valor percentual. A aproximação mais simples é manter um valor constante para  $A$  durante todo o processo. Entretanto, essa não é uma boa estratégia, pois pode impossibilitar a convergência perto do ótimo.

O uso do SLP depende do perfeito conhecimento do problema, como tipo de variável adotada, restrição imposta e penalização das funções. Outro ponto importante a ser considerado trata-se do valor inicial das variáveis para obter uma solução ótima.

## 5. OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

A otimização topológica atingiu um alto nível de credibilidade desde que sua aplicação tornou-se difundida no meio acadêmico e, posteriormente, em problemas industriais. Não tem sido usada somente para problemas de otimização estrutural, mas também em projeto de materiais, mecanismos, projetos em eletromagnetismo e em outros campos.

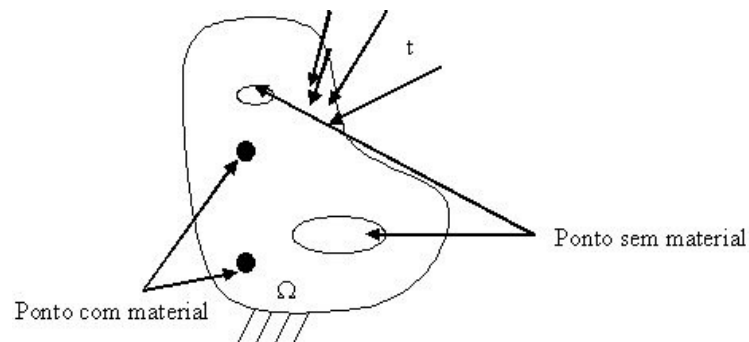


Figura 5.1: Representação do problema de otimização topológica

De acordo com Sigmund e Petersson, 1998, o problema de otimização topológica consiste em encontrar o subdomínio  $\Omega_s$  que limita o volume  $V^*$ , que partindo de um domínio de projeto conhecido  $\Omega$  otimize a função objetivo  $f(\rho)$ , isto é, a ótima distribuição espacial do material para um dado carregamento e condição de contorno, considerando o comportamento mecânico da estrutura, tal como flexibilidade, frequência natural e tensão. A ótima topologia apresentará nova forma e, provavelmente, furos dentro do domínio quando a função custo tenha alcançado o extremo (valor mínimo ou máximo da função).

O novo projeto ( $\Omega_s$ ) é representado pela distribuição ótima de material no domínio  $\Omega$ , que consiste em se verificar quais os pontos desta região conterão material e quais pontos que estarão vazios (problema binário, do tipo 1-0), isto é, a representação geométrica de uma estrutura é apresentada pela imagem de preto e branco respectivamente. O objetivo da otimização topológica é encontrar um subdomínio  $\{\Omega_s \mid \Omega_s \subseteq \Omega\}$  que represente o novo tensor constitutivo  $E_{ijkl}$ . A parametrização do material que constitui o domínio da figura 5.1, pode ser escrita da seguinte forma:



$$\begin{aligned}
E_{ijkl} &\in L^\infty \\
E_{ijkl} &= l_{\Omega^m} E_{ijkl}^0 \\
l_{\Omega^m} &= \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega^m \\ 0 & \text{se } x \in \Omega \setminus \Omega^m \end{cases} \\
\int l_{\Omega^m} d\Omega &= \text{vol}(\Omega^m) \leq V = \text{vol}(\Omega)
\end{aligned} \tag{28}$$

em que a última integral representa o material disponível no novo domínio fixo,  $E_{ijkl}^0$  é o tensor constitutivo linear de quarta ordem, que define o material isotrópico de base e  $L^\infty$  representa um espaço de funções.

Historicamente, várias abordagens foram utilizadas para esta otimização. Segundo Bendsoe, 1995, os desenvolvimentos iniciais foram originalmente feitos para estruturas tipo treliça, nas quais as barras cujas áreas forem a zero são retiradas da treliça. A partir desta idéia criou-se a aproximação de um contínuo por treliças densas com conexões entre nós ocorrendo somente em uma vizinhança limitada. A retirada das barras da treliça gera uma estrutura similar ao de uma estrutura contínua.

No **projeto totalmente tensionado** (“**fully stressed design**”), busca-se uniformizar as tensões efetivas, tensões principais ou energia de deformação ao longo de uma estrutura. Uma estrutura é discretizada através de uma malha de elementos finitos e o valor do módulo de elasticidade é modificado de acordo com a tensão no elemento usando uma recursão simples. Este processo é repetido iterativamente até a solução convergir dentro de algum critério de parada, isto significa que o componente está completamente tensionado [Oda e Yamazaki, 1980]. Este método é bastante antigo, e uma vez que a minimização de massa não é explicitamente buscada, não converge necessariamente para a solução correta [Sienz e Hinton, 1997]. Atualmente é usado somente por algumas formulações evolutivas de otimização, e que equivale a usar uma aproximação diagonal da sensibilidade, isto é, dizer que a tensão em um ponto depende da densidade somente deste ponto.

Bendsoe e Kikuchi, 1988, foram os primeiros a trabalharem com o **método da homogeneização**. Uma vez que o problema original do projeto de topologia (0-1) normalmente não converge para a solução ótima, este método introduz uma aproximação convergente. O sucesso do método gerou enorme interesse na otimização topológica, e os inúmeros avanços estão sumarizados no livro do Bendsoe e Sigmund, 2003.

Para assegurar a convergência da solução do projeto de topologia, introduz-se uma microestrutura de material composto parametrizada, sendo estes parâmetros as novas variáveis de projeto para a otimização. Nos trabalhos iniciais deste método, considerava-se a

microestrutura do material composto com furos infinitesimais, sendo as variáveis de projeto as dimensões deste furos e as propriedades deste material periódico calculadas pelo método da homogeneização. O material composto geralmente é escolhido como anisotrópico ou ortotrópico, o ângulo de rotação  $\theta$  da direção da ortotropia entra como variável de projeto. Observa-se que o método da homogeneização pode conduzir a um problema de otimização caro computacionalmente, pois dependendo da geometria da célula unitária, muitos parâmetros devem ser otimizados. Qualquer material constituído de uma microestrutura cuja densidade de material seja diferente de 0 ou 1, contribuirão para a formação de uma estrutura macroscópica com rigidez intermediária entre o material compacto e o vazio.

Neste trabalho, considera-se uma parametrização mais simples na qual a variável de projeto da base desse material é a densidade do material ( $\rho$ ). A existência de material no ponto é dada por  $\rho = 1$  e o vazio por  $\rho = 0$ . A solução ótima será descrita em termos da distribuição desta densidade no domínio.

### 5.1. PENALIZAÇÃO DAS DENSIDADES INTERMEDIÁRIAS

No processo de otimização topológica estrutural deseja-se obter regiões com material ou sem material. Isto significa que os valores intermediários da função artificial da densidade devem ser penalizados de maneira que seus valores sejam próximos de zero ou um. Uma forma simples e eficiente de realizar a penalização dos valores intermediários é a aproximação que parametriza o tensor constitutivo da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 x &\in \Omega \\
 \rho(x) &\in L^\infty(\Omega) \\
 E_{ijkl}(x) &= \rho^n(x) E_{ijkl}^0 \\
 \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega &\leq V \\
 0 &\leq \rho(x) \leq 1
 \end{aligned} \tag{29}$$

em que  $\rho(x)$  é a função do projeto densidade,  $n$  representa um expoente de penalização da parametrização constitutiva e  $E_{ijkl}^0$  representa as propriedades do material isotrópico. Esta aproximação é conhecida pela sigla SIMP (solid isotropic microstructure with penalization). A formulação mostrada na equação (29) foi proposta por Bendsoe, 1989, e continua a ser usada intensivamente por autores como Rozvany, Zhou e Birker, 1992.

Autores como Allaire e Francfort, 1993, Allaire e Kohn, 1993 e Haber et al., 1993, utilizaram penalizações diretamente na função objetivo  $f(\rho)$ , substituindo-a por uma expressão na forma de:

$$f(\rho) + c \int_{\Omega} \rho(1-\rho) d\Omega \quad (30)$$

em que o parâmetro  $c$  determina o grau de penalização.

Sant'Anna, 2002, utilizou o método da continuação, em que a função objetivo é penalizada através de uma relação exponencial na forma:

$$f(\rho) = \int_{\Omega} \rho^p d\Omega \quad (31)$$

em que  $p \leq 1$ . A solução para o problema de otimização topológica de flexibilidade  $p = 1$ , a equação (4) é convexa, em que o resultado utiliza densidades intermediárias que são difíceis de interpretar como uma estrutura de fácil fabricação. Daí a necessidade de penalizar o problema, que piora a função objetivo, isto é, o valor do expoente vai sendo reduzido, gerando novas topologias com cada vez menos regiões com densidades intermediárias.

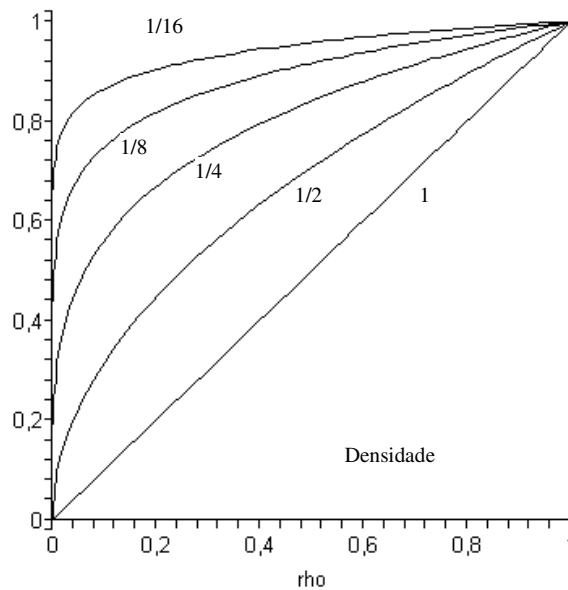


Figura 5.2: Curva para diferentes valores de p

O valor de  $p < 1$  torna a relação (31) não convexa, mas reduz as densidades intermediárias, conforme mostra o gráfico na figura 5.2. Quando necessário outro tipo de penalização pode ser utilizado, com o objetivo de reduzir os elementos com densidades intermediárias. Outra forma de penalizar a função objetivo é demonstrada a seguir:

$$f(\rho) = \int_{\Omega} [\rho^p + \alpha\rho(1-\rho)] d\Omega \quad (32)$$

em que  $\alpha$  é um valor selecionado heurísticamente.

O problema de otimização considera que o funcional tem uma dependência linear sobre a distribuição do parâmetro de projeto  $\rho$ . Isto implica que  $\alpha = 0$  e que a energia de deformação é uma função linear de  $\rho$ .

Para o caso em que o funcional do problema não é uma função linear da distribuição do parâmetro  $\rho$ , isto significa que  $\alpha > 0$ , ou, que a energia de deformação é uma função não linear de  $\rho$ .

## 5.2 INSTABILIDADE DE TABULEIRO

A instabilidade de tabuleiro (instabilidade xadrez- “checkerboard instability”) é comumente observada em solução de problema de topologia [Jog e Haber, 1996]. A meta dentro da otimização topológica é determinar a ótima distribuição de material dentro do domínio estabelecido, de maneira que a função objetivo encontre-se em um extremo. Quando a função é minimizada ou maximizada, procura-se obter pontos com vazios ou com material, isto é, a densidade tem que ser zero ou um. A propriedade do material é expressa como função contínua da densidade ( $\rho$ ) (conforme o modelo de homogeneização da microestrutura [Bendsøe e Kikuchi, 1988]).

Como a densidade intermediária no problema de otimização topológica não é desejada, é comum a penalização da função, forçando que  $\rho$  ser igual a um ou zero, o que provoca uma instabilidade na solução, aparente nos gráficos de densidade como uma variação brusca em um padrão xadrez. Este tipo de problema não está associado com nenhum modelo de material específico. Os trabalhos publicados por Jog, Haber e Bendsøe, 1994, Bendsoe e Kikuchi, 1988 e Diaz e Kikuchi, 1995 apresentaram resultados com xadrez. Este comportamento não é desejável, pois representa uma instabilidade numérica e não corresponde a ótima distribuição de material.

O exemplo (figura 5.3) é reproduzido de Bendsoe e Kikuchi, 1988, e foi discretizado com dois tipos de elementos, sendo o primeiro com oito nós e o segundo com quatro nós. A figura 5.4 mostra que existe uma suavidade na variação do campo da densidade obtido com o elemento de oito nós, enquanto que a figura 5.5, obtida com elemento de quatro nós, apresenta o problema de checkerboard.

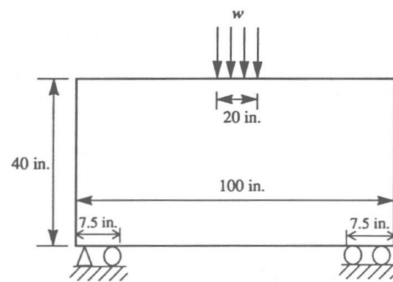


Figura 5.3: Estrutura inicial

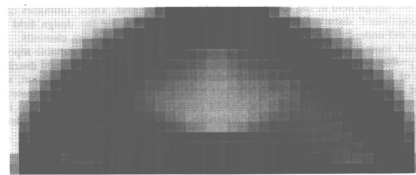


Figura 5.4: Malha com elemento de alta ordem

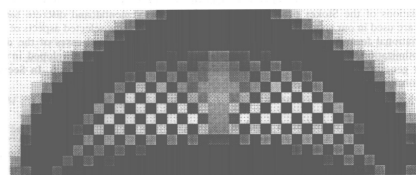


Figura 5.5: Malha com elemento de baixa ordem

Este tipo de problema também foi relatado em pesquisas realizadas na área da biomecânica do remodelamento de ossos, Weinans et al., 1992. No entanto, este trabalho associou erroneamente a instabilidade de tabuleiro com as regiões de osso trabecular ou esponjoso.

Vários pesquisadores apontaram a relação entre esta instabilidade e a aproximação dos campos de deslocamento e densidade pelo método dos elementos finitos. Alguns trabalhos

[Jog e Haber, 1992, Bendsoe, 1995, Diaz e Sigmund, 1995] sugeriram que o problema está relacionado à violação da condição de Babuska-Brezzi (LBB), consequência da mistura do problema da variável de densidade ( $\rho$ ) e do campo de deslocamento  $u$ . Para evitar a formação do tabuleiro, pesquisadores sugeriram que diferentes funções deveriam ser usadas para interpolar a variável de projeto e o campo de deslocamento. Os trabalhos de Jog et al., 1994 e Jog, Haber, 1996 sugeriram que a instabilidade é relacionada aos modos espúrios de elementos finitos, e demonstra que certas combinações de densidade e funções de interpolação de deslocamento gerada na solução de elementos finitos estão livres da instabilidade de tabuleiro.

### 5.3. FILTRO

O uso de elementos de alta ordem no projeto de topologia, apesar de evitar a instabilidade de tabuleiro, tem um impacto significativo no aumento do esforço computacional. Desta forma é atrativo desenvolver de procedimentos e métodos alternativos para a utilização de elementos de baixa ordem, computacionalmente mais econômicos.

Técnicas baseadas na solução de problemas incompressíveis, como fluxo de Stokes ou hiperelasticidade foram aplicadas inicialmente, como os “patches” de quatro elementos quadriláteros de quatro nós [Bendsoe, 1995]. Atualmente, técnicas de filtragem derivadas do tratamento digital de imagens têm se revelado eficazes e econômicas.

Experiências computacionais têm mostrado que a filtragem da informação da sensibilidade nos problemas de otimização é bastante eficiente, de maneira a assegurar a independência da malha [Bendsoe e Sigmund, 2003]. Isto significa modificar a sensibilidade de cada elemento, baseado sobre a média do peso da sensibilidade dos elementos da vizinhança. O filtro é puramente heurístico, sendo os resultados semelhantes aos obtidos com a restrição do gradiente local. O esforço computacional requerido não é muito significativo e sua implementação é simples. Pesquisadores que estudaram esta técnica foram Sigmund, 1994, Mullender, Huiskes e Weinans, 1994 e Leblond, Perrin e Deveaux, 1994.

Cardoso [Cardoso, 2000] propôs uma técnica de filtragem espacial, no qual os elementos vizinhos são obtidos por um raio de varredura em torno de um elemento central. Se o centróide de um determinado elemento estiver dentro do círculo de raio, esse elemento terá sua densidade considerada no cálculo da densidade do elemento central.

A técnica de filtragem utilizada nesse trabalho é semelhante à utilizada por Fonseca [Fonseca, 1997], que utilizou o filtro gaussiano (Gaussian Blur), aplicado diretamente aos limites

superiores e inferiores das variáveis de projeto em cada iteração, sendo modificado pela seguinte equação:

$$x_i = w_1 x_{i-1} + w_2 x_i + w_3 x_{i+1} \quad (33)$$

em que  $w_j$  são os pesos do filtro e  $x_k$  são os valores limite de densidade dos elementos nas direções  $X_1$  e  $X_2$ . A diferença em relação ao trabalho de Fonseca é que este considera 2 elementos vizinhos de cada lado, enquanto que no presente trabalho optou-se por utilizar apenas 1 elemento vizinho de cada lado.

As principais vantagens dessa técnica de filtragem são:

- reduz o aparecimento da instabilidade de tabuleiro, mesmo usando elementos de baixa ordem, como o elemento bilinear isoparamétrico;
- simplifica a topologia final facilitando sua interpretação;
- reduz o problema da não unicidade da solução, pois restringe a variação das densidades.

Algumas desvantagens que podem ser citadas:

- aparecem grandes áreas com material composto de densidade intermediária;
- necessidade de malhas refinadas para garantir a convergência;
- a filtragem faz com que o processo de otimização leve mais iterações para convergir, às vezes até duas vezes mais iterações do que sem o filtro [Fonseca, 1997].

#### 5.4. DEPENDÊNCIA DA MALHA

A dependência da malha refere-se ao problema de não obter qualitativamente o mesmo resultado para diferentes tamanho de malha ou discretização do domínio. A dependência da solução sobre o refinamento da malha é ilustrada na figura 5.6, em que o refinamento na discretização do contínuo por elemento finito resulta em soluções mais detalhadas e uma melhor descrição do contorno.

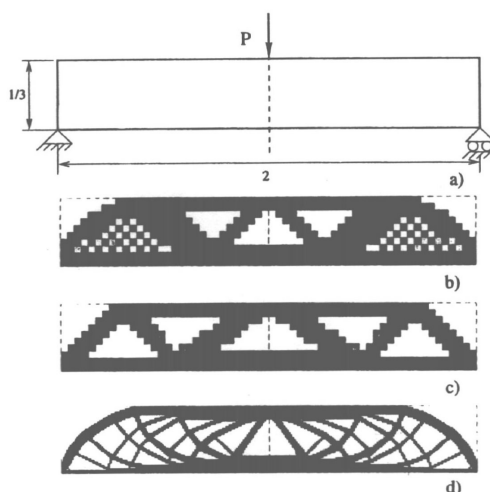


Figura 5.6: Dependência da malha

O refinamento da malha possibilitou a obtenção de valores cada vez menores para a função custo, mas torna-se impossível à construção da mesma, devido aos inúmeros detalhes gerados e complexidade.

A não unicidade da solução é realmente um problema numérico na área de otimização topológica, ou problemas que possuam vários pontos de ótimo, que é o caso do projeto de uma estrutura uniaxial sob tensão, figura 5.7 [Sigmund e Petersson, 1998, Bendsoe e Sigmund, 2003]. Alguns artifícios podem ser introduzidos para evitar problemas que contenham várias soluções ou de não existir solução. Este assunto está bem esclarecido no artigo publicado por Sigmund e Petersson.



Figura 5.7: Diferente soluções para o mesmo problema

Existem formulações do problema de otimização topológica cujo resultado é pouco sensível à discretização de elementos finitos. Estas formulações normalmente possuem uma restrição na integral do gradiente das densidades. Esta restrição torna o problema bem mais complexo e computacionalmente trabalhoso, mas na prática é substituída pela filtragem.

A escolha da filtragem pode reduzir consideravelmente a dependência da malha, desde que o filtro leve em consideração o tamanho dos elementos.



## 6. OTIMIZAÇÃO DE FORMA

De acordo com Haftka e Grandhi [Haftka e Grandhi, 1986], as duas primeiras décadas sobre o estudo de otimização estrutural foi praticamente voltada a variáveis dimensionais, como espessura da placa e a área de seção transversal do elemento de barra. Esse tipo de problema não modifica o modelo de elementos finitos da estrutura, enquanto que a variável de forma modifica a malha de elementos finitos a cada iteração, o que torna a otimização de forma mais complexa do que a otimização de tamanho.

Na maioria dos casos o uso da variável de forma é mais eficiente do que a variável dimensional. Um exemplo que comprova essa afirmação é o exemplo de uma placa com furo no centro, sujeito à restrição de tensão. Quando a variável de projeto adota é o tamanho, a espessura da placa varia próximo ao orifício, enquanto que a variável de forma apenas muda o contorno do furo.

A otimização de forma pode ser de grande importância após a otimização topológica. No término do processo de otimização topológica, a estrutura final pode possuir regiões de densidades intermediárias, pequenos furos, e formação incompleta de reforços, tornando-se necessário uma interpretação da imagem [Lin, Chao, 2000, Sienz e Hinton, 1997] obtida da estrutura. Após esta interpretação é possível que o projeto não atenda mais aos requisitos originais. Identificam-se então regiões a modificar através da otimização de forma, tanto para recuperar os requisitos original de projeto quanto para introduzir novas restrições.

Dada a importância desta técnica para o projeto de componentes mecânicos, há um grande interesse na comunidade acadêmica na solução dos problemas da otimização de forma, tais como:

- a necessidade da modificação do modelo de elementos finitos a cada iteração, pois os elementos que representam o contorno podem sofrer grandes distorções, que dificulta o cálculo da análise estrutural e da sensibilidade;
- o custo de obtenção da sensibilidade em relação a variável de projeto de forma é mais caro do que em relação à variável de tamanho.

### 6.1. REPRESENTAÇÃO DA FORMA - DETERMINAÇÃO DA VARIÁVEL DE PROJETO

O caminho usado para descrever o contorno de uma geometria é o principal elemento no processo de busca da ótima estrutura. Se a variável de projeto não for cuidadosamente bem

selecionada, os resultados obtidos podem não representar a realidade. Três métodos são possíveis de representar a forma estrutural:

- os nós do contorno da malha de elementos finitos;
- a descrição geométrica do contorno por polinômios independentemente da malha.

Esta descrição pode ser feita por uma interpolação simples por polinômios de alto grau, ou através de definições recursivas como curvas de Bezier ou B-spline.

#### 6.1.1. NÓ DO CONTORNO

O uso da coordenada nodal dos nós do modelo de elementos finitos como variável de projeto é uma prática normal no processo de otimização de estruturas discretas (elemento de barra e viga). A aproximação é simples e instintiva, e como exemplo pode-se citar o trabalho de Rojas et al., 2000, otimizando o layout de treliças espaciais.

Este tipo de escolha apresenta alguns problemas para estrutura contínuas que são citados a seguir:

- o número elevado de variável de projeto, e um alto custo e dificuldade no processo de otimização;
- a dificuldade de garantir compatibilidade e continuidade na declividade entre os nós do contorno (o resultado pode conduzir a uma estrutura impossível de ser construída – exemplo figura 6.1 [Ding, 1986, Haftka e Grandhi, 1986]);

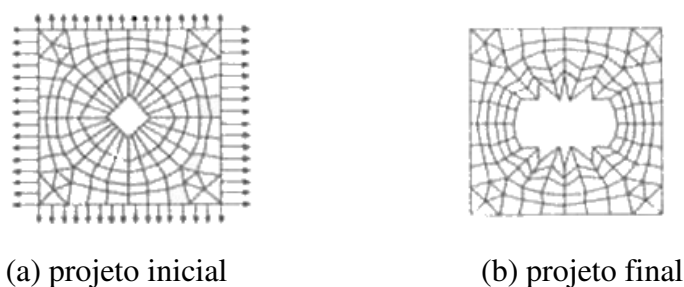


Figura 6.1: Movimento dos nós independentemente para um furo na placa

- a dificuldade de manter a malha adequada de elementos finitos durante a otimização.

### 6.1.2. REPRESENTAÇÃO POR POLINÔMIO

Os polinômios são usados para descrever a geometria de componentes em duas ou três dimensões em problemas de otimização. De acordo com Ding [Ding, 1986], poucos nós do contorno devem ser selecionados para controlar o formato da peça e as variáveis de projeto de serão os nós ou as direções preferenciais de movimento. As funções de forma são utilizadas para definir a geometria entre esses nós de contorno [Imam, 1982, Botkin, 1982, Bhavikatti e Ramakrishnan, 1980, Kristensen e Madsen, 1976].

O exemplo da aplicação com polinômio é encontrado no trabalho de Bhavikatti e Ramakrishnan, 1980 e Imam, 1982.

Os polinômios que usam os nós como controle para representar a forma reduzem o número de variáveis de projeto, mas surgem inconvenientes quando se trata de uma geometria complexa, conforme citado a seguir:

- a utilização de polinômios de alta ordem pode resultar em contornos com geometria oscilatória, devido à natureza de influência global destas funções;
- a utilização de vários segmentos de polinômios de baixa ordem introduz a necessidade de impor continuidade  $C_1$ , o que muitas vezes representam a inclusão de equações altamente não-lineares.

### 6.1.3. PARAMETRIZAÇÃO POR CURVAS DE BÉZIER E B-SPLINES

A representação da forma através das curvas de Bézier ou B-splines, elimina os problemas dos polinômio de alta ordem. Em outras palavras, estas curvas são compostas de segmentos de polinômio de baixa ordem que são combinados para maximizar a sua suavidade Braibant and Fleury, 1984.

**Curva de Bézier:** a função de Bézier está associada com os vértices de um polígono que unicamente define a forma da curva. O primeiro e o último vértice do polígono encontram-se sobre a curva, enquanto que os outros vértices definem as derivadas, ordem e forma da curva. Então a função de Bézier é definida como [Ding, 1986]:

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i J_{n,i}(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (34)$$

em que

$$J_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad (35)$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (36)$$

em que  $n$  é o grau do polinômio e  $P_i$  são os  $n+1$  vértices que definem o polígono.

A seguir propriedades importantes são citadas:

- cada curva encontra-se dentro da casca convexa definida pelos pontos de controle (figura 6.2);

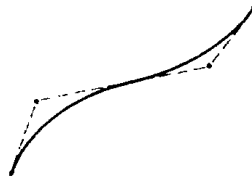


Figura 6.2: Curva de Bézier

- são independentes do sistema de coordenada usada para medir a localização dos pontos de controle;

- a formulação paramétrica da curva de Bézier permite representar qualquer tipo de função;

- nos pontos extremos, a curva é tangente nas bordas do polígono dos pontos de controle, isto é, garante continuidade  $C^1$  na interface entre dois segmentos de curvas. Para assegurar continuidade das derivadas das curvas neste ponto, basta impor que o mesmo e os seus vértices sejam colineares.

Duas características importantes devem ser ressaltadas, pois limitam a aplicação da curva de Bézier. Primeiro, o número de pontos de controle fixa o grau do polinômio que define a curva, como exemplo a figura 6.2, em que quatro pontos definem uma curva cúbica. O uso desse tipo de função pode ser de polinômios de alta ordem ou dividido em segmentos de polinômio de baixa ordem; neste caso, deve-se garantir a continuidade de primeira ordem entre as curvas (figura 6.3).



Figura 6.3: Curva de Bézier: (a) continuidade  $C^0$ ; (b) continuidade  $C^1$

A segunda característica da curva de Bézier é não permitir o controle local, isto é, movimentando algum ponto de controle, toda a curva é modificada. Conseqüentemente a localização de cada ponto de controle influencia a forma da curva.

**Curva B-spline:** a curva B-spline apresenta as quatro primeiras características a da curva de Bézier, porém apresentando duas importantes vantagens. A primeira é o controle local do comportamento e o segundo ponto importante refere-se ao grau da curva, pois a adição de pontos de controle não aumenta o grau do polinômio. Pode-se concluir que a B-spline oferece mais parâmetros de projeto do que a curva de Bézier.

Qualquer ponto de uma B-spline pode ser determinado usando a expressão

$$P(t) = \sum_{i=1}^n P_i N_{i,k}(t), \quad 0 < t < t_{\max} \quad (37)$$

em que

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } X_i \leq t \leq X_{i+1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (38)$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t - X_i) N_{i,k-1}(t)}{X_{i+k-1} - X_i} + \frac{(X_{i+k} - t) N_{i+1,k-1}(t)}{X_{i+k} - X_{i+1}} \quad (39)$$

em que  $P_i$  são os  $n+1$  vértices ou pontos de controle,  $k$  é a ordem da B-spline e  $N_{i,k}(t)$  é a função peso.  $X$  é um vetor de nós usado na curva B-spline. Splines cúbica aproximam uma série de  $m+1$  pontos de controle  $P_0, P_1, \dots, P_m$ ,  $m \geq 3$  com uma curva que consiste de  $m-2$  segmentos de polinômios cúbicos  $Q_3, Q_4, \dots, Q_m$ . Cada um destes segmentos é definido num domínio parametrizado  $t \in [t_1, t_2]$ . Pode-se ajustar esse parâmetro de forma que os domínios de cada segmento sejam sequenciais. O ponto de junção entre dois segmentos é denominado nó (“knot”).

## 6.2. CONCEITO “ELEMENTO DE PROJETO”

A malha de elementos finitos adequada em duas ou três dimensões pode ser obtida através do conceito de super-elemento de projeto (“design element”), que foi apresentado pela primeira vez por Imam, 1982. A estrutura é dividida em poucos super-elementos, cada um deles é constituído de diversos elementos finitos. Essas regiões são descritas por nós que controlam a geometria. Associado a cada super-elemento estão as variáveis de projeto que especificam a localização das coordenadas nodais deste “design element”.

Braibant e Fleury [Braibant e Fleury, 1984 e 1985] representaram o contorno de um superelemento (design element) usando as funções de B-spline e Bézier, com a vantagem de que as variáveis de projeto não são mais posições nodais, mas pontos que controlam essas duas famílias de curva (figura 6.4).

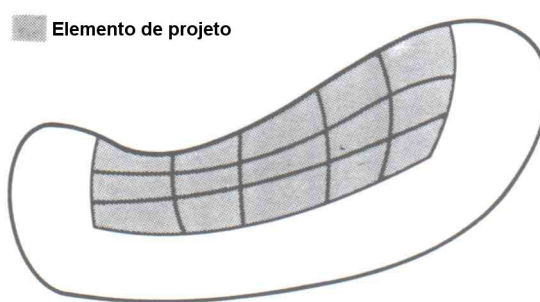


Figura 6.4: Elemento de projeto com curvas B-spline

## 6.3. REALOCAÇÃO NODAL E DETERMINAÇÃO DO CAMPO DE VELOCIDADE

De acordo com Choi e Chang [Choi e Chang, 1994], a malha de elementos finitos deve ser construída a cada interação do projeto para a análise estrutural e determinação da sensibilidade. Uma forma de determinar a mudança da malha durante um processo iterativo é calcular o campo de velocidade dos nós, pois desta forma os valores obtidos com na análise estrutural e de sensibilidade estão corretos. Para o caso que não ocorra o remalhamento ou realocação nodal, a solução obtida durante a otimização de forma não será a solução ótima. O resultado da análise estrutural e sensibilidade apresentarão valores errados para o caso em que o campo de velocidade ser inapropriado [Hou et al., 1988].

A relação entre a variação da forma do domínio contínuo e a determinação da análise estrutural e da sensibilidade pode ser descrito usando a derivada material da mecânica do

contínuo [Choi et al., 1994]. Utilizando a teoria da derivada do material, introduz-se o campo de velocidade que representa o movimento dos pontos materiais para mudar a forma do domínio estrutural.

Considerando a estrutura como um meio contínuo e uma sucessão de mudança de forma do domínio de  $\Omega$  para  $\Omega_\tau$ , figura 6.5, como um processo dinâmico que deforma continuamente. O mapeamento  $T$  representa este processo que pode ser definido como:

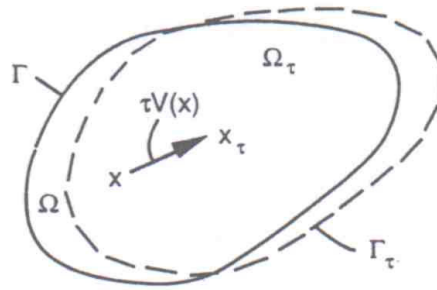


Figura 6.5: Deformação do corpo

$$T : x \rightarrow x_\tau(x), \quad x \in \Omega \quad (40)$$

com

$$x_\tau \equiv T(x, \tau), \quad (41)$$

$$\Omega_\tau \equiv T(\Omega, \tau), \quad (42)$$

$$\Gamma_\tau \equiv T(\Gamma, \tau). \quad (43)$$

Supõe-se que o ponto material  $x \in \Omega$  no domínio inicial para  $\tau = 0$ , e move-se para uma nova localização  $x_\tau \in \Omega_\tau$  no domínio perturbado. Então, o campo de velocidade  $V$  pode ser definido como:

$$V(x_\tau, \tau) \equiv \frac{dx_\tau}{d\tau} = \frac{dT(x, \tau)}{d\tau} = \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} \quad (44)$$

Considerando que o tempo inicial seja  $\tau = 0$  e desprezando os termos de alta ordem, pode-se aproximar  $T$  por:

$$T(x, \tau) = T(x, 0) + \tau \frac{\partial T(x, 0)}{\partial \tau} + O(\tau^2) \quad (45)$$

$$T(x, \tau) \approx x + \tau V(x, 0), \quad (46)$$

em que  $x \equiv T(x, 0)$  e  $V(x) \equiv V(x, 0)$ .

Quando o campo de velocidade é usado para atualizar a malha de elementos finitos para o novo projeto ou interação, o nó deve encontrar-se sobre o contorno da geometria, desta maneira tornando consistente o modelo de elementos finitos com o modelo geométrico. A atualização do nó do contorno deve encontrar-se sobre o contorno geométrico, isto é, seu movimento deve ser restringido. Uma simples maneira de realizar esta tarefa é assegurar que o nó sempre fique sob a mesma localização paramétrica da curva de contorno ou da superfície no projeto original ou perturbado. Como exemplo considera-se a figura 6.6.

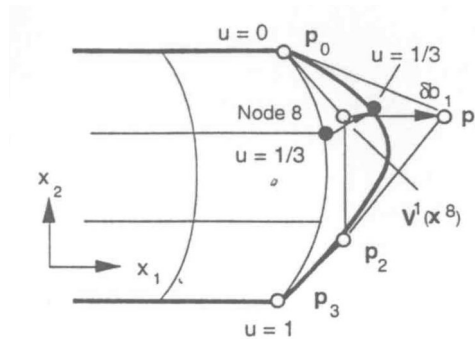


Figura 6.6: Localização paramétrica

Supondo que o nó oito está fixo para uma localização paramétrica  $t = u = \frac{1}{3}$  na curva de Bézier original. Quando o projeto é perturbado, o nó oito continua fixo para mesma localização paramétrica,  $t = u = \frac{1}{3}$ . Para garantir que o nó sempre estará sobre o contorno geométrico, deve-se fazer uso também do campo de velocidade.

Neste trabalho, a curva B-spline de ordem cúbica é utilizada para determinar qualquer ponto sobre este segmento, através da expressão a seguir:



$$Q_i(t) = p_{i-3}N_{i-3,4} + p_{i-2}N_{i-2,4} + p_{i-1}N_{i-1,4} + p_iN_{i,4}$$

$$3 \leq i \leq m,$$

$$t_i \leq t \leq t_{i-1},$$
(47)

em que  $p_i$  é o ponto de controle e  $t_i$  é o “knot”. Se  $Q_i(t)$  é a coordenada X de um ponto,  $p_i$  é a coordenada X do ponto de controle e o mesmo ocorre para Y [Rojas, 2003]. Então, o campo de velocidade para os nós que se encontram sobre a curva é:

$$\frac{\partial Q_i(t)}{\partial p_k} = N_{k,4}(t).$$
(48)

A equação (48) somente fornece o campo de velocidade no contorno da malha. O estudo realizado por Duysinx et al., 1993, demonstraram como determinar a velocidade dos nós no domínio da malha através do procedimento de suavização Laplaciana (Laplacian smoothing).

Para obter a velocidade no domínio da malha, considere um ponto  $P_i$  rodeado por outros  $P_i$  pontos, conforme mostra a figura 6.7 a seguir.

|  |     |     |     |
|--|-----|-----|-----|
|  | Pi3 | Pi2 | Pi1 |
|  | Pi4 |     | Pi  |
|  | Pi5 | Pi6 | Pi7 |
|  |     |     |     |
|  |     |     |     |

Figura 6.7: Ponto  $P_i$  rodeado por outros pontos (contorno ou domínio)

O esquema básico de suavização Laplaciana é dado por:

$$P_i = \frac{1}{N_i^k} \sum_{k=1}^{N_i^k} P_k$$
(49)

A equação (49) pode ser aplicada tanto para malha estrutura, quanto a não estruturada (elementos quadrilaterais lineares). Porém, esta equação pode ser modificada, isto é, adicionando informações sobre a geometria. Então, a equação (49) pode ser reescrita como:

$$P_i = \frac{1}{\sum s_{ij}} \sum_{j=1}^{N_i^k} s_{ij} P_j^i \quad (50)$$

em que o termo  $s_{ij}$  tem o comportamento de uma mola, e sua função é fazer a conexão entre os nós  $i$  e  $j$ . Essa equação linear pode ser expressa na forma de uma matriz.

$$\begin{bmatrix} s_{dd} & s_{db} \\ s_{bd} & s_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_d \\ P_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ R_b \end{bmatrix} \quad (51)$$

O índice  $b$  refere-se aos nós do contorno e o índice  $d$  aos nós do domínio. O sistema de equação (51), somente a parte superior é necessária para determinar o campo de velocidade dos nós do domínio. Então, a equação é expressa como:

$$s_{dd} P_d + s_{db} P_b = 0 \quad (52)$$

Os valores  $P_d$  e  $P_b$  na equação (52) são substituídos respectivamente por  $V_{ij_d}$  (campo de velocidade no domínio) e  $V_{ij_b}$  (campo de velocidade no contorno, obtido através da equação (48)). A equação (52) é reescrita da seguinte forma:

$$V_{ij_d} = -[s_{dd}]^{-1} [s_{db}] V_{ij_b} \quad (53)$$

Possíveis esquemas de Laplaciano que podem ser usados.

|                           |                                                                                        |
|---------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| Laplaciana Pura           | $s_{ij} = 1$ para $i$ e $j$ conectados<br>$s_{ij} = 0$ para $i$ e $j$ desconectados    |
| Laplaciana Isoparamétrica | $s_{ij} = 1$ para $i$ e $j$ conectados<br>$s_{ij} = -0.5$ para $i$ e $j$ desconectados |

|                             |                                       |                                    |
|-----------------------------|---------------------------------------|------------------------------------|
| Laplaciana Potência Inversa | $s_{ij} = 1/L^p$<br>$1 \leq p \leq 2$ | L = comprimento da interface (i,j) |
|-----------------------------|---------------------------------------|------------------------------------|

## 7. TENSÃO

Para otimização de uma estrutura é necessário considerar todas as restrições possíveis como rigidez, frequência natural, flambagem global e local, entre outros. Certamente entre as restrições mais importante estão os critérios de falha baseados em tensão, como von Mises, Tresca e Rankine. Nas aplicações em engenharia mecânica, normalmente o material trabalha no seu regime elástico linear e não pode superar a tensão limite ou de escoamento do material ( $\sigma_l$ ).

A otimização topológica iniciou com restrição somente de flexibilidade. Mas esta formulação dá bons resultados para tensão.

Sigmund e Bendsoe, 2003, fazem menção da importância da tensão no exemplo de uma viga MBB conforme é mostrado a seguir. O problema é primeiro otimizado para obter o mínimo peso com restrição de tensão equivalente de von Mises (tamanho da malha – 45 por 15) e o resultado pode ser visualizado na figura 7.1 “a”. Este projeto tem a flexibilidade de 306.3 Nm e volume de 1.0632 m<sup>3</sup>. Este valor de flexibilidade é usado como a única restrição para um novo problema de minimização de volume. A figura 7.1 “b” mostra o resultado desta otimização completamente diferente do resultado para tensão, com volume desta nova solução menor, equivalente a 0.9177 m<sup>3</sup>. Este exemplo demonstra que a restrição de tensão tem uma influência fundamental no projeto de topologia.



(a) Projeto de tensão



(b) projeto de flexibilidade

Figura 7.1 Viga MBB

Quando o problema apresentar concentração de tensão, é necessário ter atenção especial pois existe a possibilidade de ocorrer singularidades. A dificuldade não se encontra no processo de otimização, mas sim na análise de tensões que apresenta problemas numéricos nas zonas de concentração de tensão (Bendsoe et al., 2003). Em situações deste tipo deve-se ter a

preocupação de proceder a uma análise precisa discretizando a geometria em elementos finitos da melhor forma possível.

Encontra-se na literatura vários trabalhos em otimização com restrição de tensão. Como exemplo de otimização de forma, para otimizar a concentração de tensão por elementos finitos, Schnack, 1979, apresentou um procedimento procurando minimizar a máxima tensão tangencial em uma superfície com entalhe. Um exemplo mais próximo da otimização topológica foi publicado no ano seguinte, na busca de obter um domínio “fully stressed”; Oda e Yamazaki, 1980, propuseram otimizar a distribuição da propriedade do material tal como módulo de elasticidade ou a espessura da placa, usando como exemplo uma região em forma de “L”.

### 7.1. ÓTIMO SINGULAR

A otimização estrutural nas últimas décadas obteve significativos progressos. As respostas de estruturas otimizadas estão sendo obtidas através de eficientes métodos desenvolvidos por vários pesquisadores, com objetivo de obter geometrias possíveis de serem construídas com as ferramentas existentes hoje na manufatura.

Os métodos empregados para solucionar os problemas têm apresentado algumas dificuldades neste campo, como por exemplo, o fenômeno do ótimo singular. Esta singularidade aparece em problemas hiperestáticos que incorporam a restrição de tensão. O problema surge quando no processo iterativo a solução se aproxima da solução ótima, sendo observado pela primeira vez por Sved e Ginos, 1968.

Na otimização de uma treliça hiperestática, à medida que a força em uma barra vai diminuindo, reduz-se a área da barra. No entanto, quando esta área está muito próxima a zero, a tensão definida pela força sobre a área configura um limite matematicamente indefinido. Numericamente isto se reflete na oscilação descontrolada da tensão nas áreas que tendem a desaparecer. O processo iterativo de otimização não consegue convergir.

Normalmente os problemas do ótimo singular foram estudados em estruturas treliçadas (devido à simplicidade do elemento, tendo dois graus de liberdade por nó e também possuem uma única componente de tensão) compostas por três elementos e condições de carregamento.

Os pesquisadores Sved e Ginos sugeriram que:

*“Se existe uma simples redundância, é sistematicamente necessário procurar todas estruturas perfeitas (estrutura em que a rigidez não é singular) que pode ser obtida frente a um problema original omitindo-se um membro.”*

O estudo realizado por Sved e Ginos apenas descreve o fenômeno do ótimo singular, isto é, não utiliza nenhuma técnica adequada para obter a resposta ou para eliminar o problema existente. Dobbs e Felton, 1969, através do estudo realizado, mostraram que membros de uma estrutura (ground structure) não podem ser eliminados, confirmando a hipótese levantada por Sved e Ginos.

A partir desta descrição, vários pesquisadores têm se dedicado ao assunto, procurando as propriedades que fundamentam este fenômeno [Kirsch, 1987 e 1989a, 1989b, Kirsch e Taye, 1986].

Em relação ao ótimo singular, alguns estudiosos se preocuparam, ou acharam muito importante estabelecer uma formulação racional, em que se permite unificar a otimização dimensional e topológica dentro da mesma estrutura.

O estudo de Kirsch, 1990, observou em alguns exemplos que na busca da ótima solução poderia ocorrer um ponto singular no espaço de projeto, conhecido também como o ótimo singular. Esse tipo de problema pode tornar-se difícil ou impossível de obter a verdadeira solução através da busca de algoritmos numéricos.

Na tentativa de compreender a singularidade foram abordados alguns pontos para estudo, tais como:

- esclarecer algumas propriedades da topologia ótima singular;
- discutir o efeito de várias restrições no problema de otimização;
- apresentar algumas considerações no projeto relacionadas à dificuldade envolvendo a otimização topológica.

No desenvolvimento do trabalho, Kirsch utilizou-se de três tipos de restrição diferente:

- tensão: no cálculo das restrições em que um ou mais membros são eliminados resultou na modificação das equações de compatibilidade, desta forma mudando a topologia da estrutura, isto significa mudança no espaço de projeto. A modificação no espaço de procura provoca algumas dificuldades, como a solução numérica através de algoritmos de programação matemática. Este tipo de problema é evitado considerando aproximação da restrição, conforme demonstrado neste artigo[Kirsch, 1990].

- deslocamento: no que se refere a este item, se a variável de projeto da estrutura for igual a zero, não resultará necessariamente em descontinuidade ou solução singular na determinação da resposta estrutural.

- dimensional: dois casos diferentes são apresentados para este tipo de restrição: o primeiro quando a variável é um valor muito pequeno (próximo de zero) e o segundo caso

quando se considera a variável igual a zero. Para esta última consideração, pode conduzir o problema para uma solução que não seja o ótimo layout.

O processo de otimização estrutural torna-se difícil ou impossível de se obter à ótima solução nos casos em que exista topologia singular. Este fenômeno é um grande obstáculo que deve ser superado, pois só será possível obter a solução ótima no processo de otimização estrutural se o espaço admissível degenerado for eliminado. Kirsch, 1990, propôs um procedimento para encontrar as topologias singulares aplicando a técnica de programação linear, e negligenciando as condições de compatibilidade. Este método é muito eficiente nos casos em que o projeto ótimo é estaticamente determinado. Um estudo posterior de Kirsch [Kirsch, 1996], apresenta outro método para solucionar o ótimo singular. O procedimento utilizado foi a otimização topológica em dois estágios, consistindo na expansão e redução da região de procura para eliminar as dificuldades causada pela singularidade.

A teoria do ótimo layout é utilizada para explicar características básicas da topologia singular. O significado da otimização estrutural é obter a ótima topologia e geometria da estrutura. Normalmente na busca do ótimo faz-se uso de funções que apresentam comportamento não convexo e a solução obtida geralmente é um mínimo local.

Para o caso de topologia singular, o domínio flexível do problema com  $n$  variáveis de projeto consiste de  $n$  dimensões e algumas conectadas por hiperplanos ( $k$  dimensão com  $k < n$ ), sendo que ótimo global é localizado em uma dessas regiões, o que torna difícil ou impossível de obter a ótima estrutura (Rozvany et. al., 1994).

De acordo com Rozvany a singularidade ocorre em problemas de otimização estrutural quando:

- impõe-se restrição de tensão,
- em alguns membros o valor da deformação excede a deformação correspondente à tensão permitida, isto é, a variável de projeto torna-se igual a zero.

Este tipo de problema pode apresentar várias soluções diferentes, dependendo do ponto inicial, isto é, valores iniciais das variáveis de projeto, ficando claro que o resultado obtido é um mínimo local e não global. O exemplo utilizado por Rozvany é demonstrado abaixo, onde o mesmo fez uso da programação matemática e do processo iterativo.

Estrutura inicial:

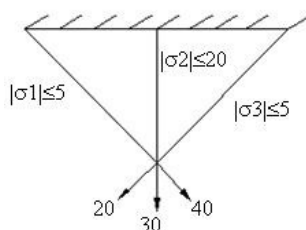


Figura 7.2 Projeto inicial

A figura 7.3 abaixo representa o resultado obtido por Schmit, 1960, com peso total da estrutura de 15,985.

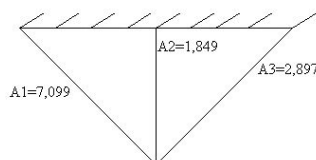


Figura 7.3 Projeto final – Schmit, 1960

O próximo exemplo foi apresentado por Sved e Ginos, 1968. A solução apresentada apenas por duas barras tem peso menor do que a obtida anteriormente.

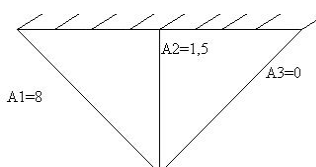


Figura 7.4 Projeto final – Sved e Ginos, 1968

Rozvany et. al., 1994, expressaram a restrição de tensão para uma treliça como restrição de deslocamento. As dificuldades encontradas foram as seguintes:

- número infinito de restrição de deslocamento equivalente,
- tornar-se inválido quando a variável de projeto assume um valor zero.

Cheng e Jiang, 1992, estudaram o problema do ótimo singular na otimização topológica de treliças sujeitas a restrições de tensões, demonstrando que a existência de ótimos singulares está relacionada com a descontinuidade da função tensão quando a área de alguma barra tende ao valor nulo. Nesse trabalho, eles esclareceram a forma do domínio (região de busca



da solução ótima) da solução ocasionado pela descontinuidade nas tensões (figura 7.5): o domínio de projeto não é um conjunto disjunto, e o ponto ótimo está conectado ao resto do domínio através de um segmento de linha, ou seja, é dimensionalmente inferior ao domínio de projeto no qual se busca a solução [Rozvany, Zhou e Birker, 1994].

O exemplo demonstrado por Cheng e Jiang, 1992, aplica-se de forma semelhante aos modelos contínuos, cuja variável de projeto é a densidade de material em cada elemento: variando de 1 a 0,000001, em que regiões com baixa densidade permanecem altamente tensionadas.

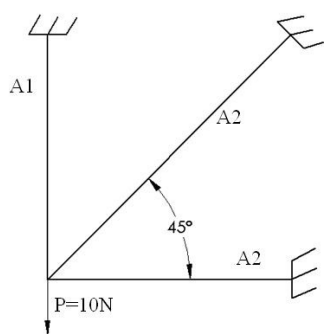


Figura 7.5: Singularidade das tensões em uma treliça de 3 barras

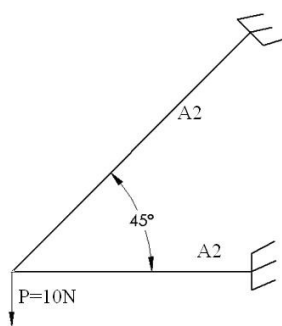


Figura 7.6 Singularidade das tensões em uma treliça de 3 barras

Apesar de a figura 7.6 representar apenas qualitativamente a solução do problema mostrado na figura 7.5, os cálculos efetuados pelo autor, que verificou que o ótimo global realmente se encontra no ponto C, que corresponde à remoção da barra com área A1 (figura 7.6). Os algoritmos que solucionam o problema de otimização topológica estão baseados nas condições de Karush-Kuhn-Tucker, não conseguindo penetrar na região degenerada do domínio, representada pelo segmento de linha BC, que faz parte do domínio de projeto. O algoritmo usado

neste trabalho, SLP, por exemplo, encontram o ótimo como sendo o ponto B, uma vez que computacionalmente não é possível a remoção completa de uma determinada barra.

Hoback, 1996, propôs o método da porcentagem para encontrar a solução do ótimo singular. Obteve alguns resultados, mas este método não é muito eficaz para problemas com muitas variáveis de projeto. Neste mesmo ano, Rozvany [Rozvany, 1996] sugeriu que a otimização topológica de treliças sujeita à restrição de tensão, envolvendo funções descontínuas fossem substituídas por outra função, evitando a singularidade do problema.

## 7.2. RELAXAÇÃO $\varepsilon$

Cheng, 1995, observou que o ótimo global da solução da equação (58) é singular, isto é, encontra-se num subdomínio degenerado do espaço admissível. Se este subdomínio é cortado desta região de procura, perde-se a solução do ótimo projeto (ou mínimo global), mas em termos matemáticos, denota-se que o ótimo global da equação (58) como  $\bar{W}_\varepsilon$ , mas não se garante que  $\bar{W}_\varepsilon \rightarrow W_0$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

$$\begin{array}{ll}
 \text{encontrar} & A_1, \dots, A_n \\
 \text{mínimo} & C(A_1, \dots, A_n) \\
 \text{sujeito} & G_i(A_1, \dots, A_n, \varepsilon) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\
 & A_j \geq A \quad j = 1, \dots, n
 \end{array} \tag{54}$$

O estudo realizado por Cheng e Guo, 1997, comprovou o exemplo dos autores Cheng e Jiang, 1992. A existência do ótimo singular é causada quando uma das variáveis de projeto assume o valor zero, provocando descontinuidade na função da restrição de tensão [Cheng e Jiang, 1992]. Como exemplo, observar o gráfico abaixo, onde o ponto G representa o ótimo singular (figura 7.7).

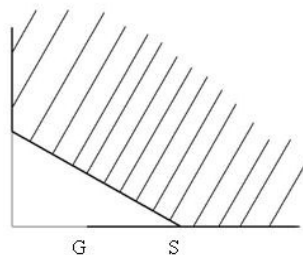


Figura 7.7 Ótimo local (S) e global (G)

O ótimo singular encontra-se no subdomínio degenerado, impossibilitando que se obtenha ótimo, de acordo como está ilustrado no exemplo acima. Para superar a dificuldade gerada pelo ótimo singular, Cheng propôs que a restrição de tensão fosse substituída por força interna possibilitando a seção transversal de uma treliça possa assumir o valor zero. Este tipo de abordagem foi demonstrado por Rojas, 2000. Como trata do mesmo problema anterior, as dificuldades permaneceram na busca da ótima estrutura, isto significa que o domínio admissível permanece igual.

Outra maneira encontrada para solucionar o problema [Cheng e Guo, 1997] foi a relaxação  $\varepsilon$  (epsilon), sendo o problema formulado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 &\text{encontrar} && A_1, \dots, A_N \\
 &\text{mínimo} && W = \sum_{i=1}^N \rho_i L_i A_i \\
 &\text{sujeito} && K_j U_j = P \quad j = 1, \dots, N \\
 & && (\sigma_i^L - \sigma_{ij}) A_i \leq \varepsilon \\
 & && (\sigma_{ij} - \sigma_i^U) A_i \leq \varepsilon \\
 & && \varepsilon^2 \leq A_i \quad i = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{55}$$

em que  $0 < \varepsilon \ll 1$ , determinando o quanto o problema esta relaxado.

Da maneira como o problema foi formulado, o ótimo singular deixou de existir, pois não há mais um subdomínio admissível degenerado e no momento que se assume  $\varepsilon = 0$  o problema volta à forma original. Este método mostra-se eficaz, pois possibilita que o domínio admissível mude de forma e que a variável de projeto fique muito próximo de zero.

Então é possível afirmar que  $W\varepsilon \rightarrow W_0$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $W\varepsilon$  é ótimo local da estrutura. A prova matemática encontra-se no artigo Cheng et. al, 1997.

Um dos aspectos a observar é a escolha do valor de  $\varepsilon$ , pois diferentes valores de  $\varepsilon$  podem conduzir a diferentes soluções de ótimo. Uma maneira de evitar a dependência da solução do valor de  $\varepsilon$  é fazer uso do chamada aproximação contínua usado por Guo e Cheng, Jog e Sigmund [Guo e Cheng, 1998]. A idéia da aproximação contínua é iniciar o problema com um valor  $\varepsilon$ , e para cada convergência diminuir este valor de um  $\Delta\varepsilon$ , até o momento em que  $\varepsilon$  seja igual a  $\varepsilon_{\min}$ . Quando o valor de  $\varepsilon$  tiver alcançado o seu valor mínimo, a restrição do problema deve estar satisfeita.

De acordo com Guo e Cheng, 2000, ótimas soluções, partindo de um projeto inicial, são obtidas através da aproximação contínua de  $\varepsilon$ , porém deve ser notado que o esforço

computacional associado a esse método é alto, pois para cada  $\varepsilon$  é um novo problema a ser otimizado.

Cheng e Guo, 1997, apresentaram uma solução para ótimo singular, através do desenvolvimento da relaxação  $\varepsilon$ . Em outras palavras, o problema é aproximado relaxando localmente o comportamento da restrição. A solução do problema é considerada ótima no momento que a restrição de tensão é satisfeita.

O método da relaxação  $\varepsilon$  apresenta ótimos resultados através da aproximação sucessiva, mas não é possível afirmar que a solução obtida seja um ótimo global, pois a função não é convexa e o algoritmo de otimização também não garante encontrar o mínimo da função. Então todas as soluções achadas serão um ótimo local ou mínimo local.

O emprego dessa formulação através da aproximação contínua para problema ótimo singular exige um grande esforço computacional, pois esta técnica de aproximação requer que o problema relaxado seja re-otimizado várias vezes, até que a solução do ótimo singular corresponda a  $\varepsilon = 0$ .

Guo e Cheng, 2000, propuseram a extrapolação da aproximação para solucionar o problema do ótimo singular, tendo como objetivo reduzir o esforço computacional. A intenção desta formulação é determinar a sensibilidade das variáveis ativas do projeto e os múltiplos de Lagrange associados à restrição ativa com relação ao parâmetro da relaxação.

A vantagem deste processo é permitir a parada do problema com um valor de  $\varepsilon$  alto, obtendo assim a ótima solução do problema. Um fator observado no início deste estudo, refere-se à dificuldade encontrada no processo quando se utiliza um  $\varepsilon$  pequeno, mas este problema foi eliminado com essa formulação.

A formulação do problema inicial:

$$\begin{array}{ll}
 \text{encontrar} & A_1, \dots, A_n \\
 \text{mínimo} & C(A_1, \dots, A_n) \\
 \text{sujeito} & G_i(A_1, \dots, A_n, \varepsilon) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\
 & A_j \geq A \quad j = 1, \dots, n
 \end{array} \tag{56}$$

Introduzindo-se  $n + m$  múltiplos de Lagrange  $\lambda_i$ , o problema é exposto da seguinte forma:

$$L = C(A_1, \dots, A_n, \varepsilon) + \sum_{i=1}^n \lambda_i (A - A_i) + \sum_{j=m+1}^{n+m} G_{j-n}(A_1, \dots, A_n, \varepsilon) \tag{57}$$

A solução do problema será obtida quando as condições necessárias forem satisfeitas. A formulação da relaxação de  $\varepsilon$  e aproximação de  $\varepsilon$  contínuo são ambas eficientes, afirmação feita por Guo e Cheng, 2000.

A solução do ótimo singular encontrada Cheng e Guo, 1997, utilizou-se de uma estrutura treliçada, pois simplificou a explicação referente ao uso da relaxação  $\varepsilon$ . A formulação do problema será minimizar o peso estrutural com restrição de tensão. Baseado num universo (ground structure), o problema de otimização topológica pode ser expresso como:

$$\begin{aligned}
 &\text{encontrar: } A_1, A_2, \dots, A_n \\
 &\text{minimo } W = \sum_{i=1}^N \rho_i A_i L_i \\
 &\text{sujeito } KU_j = P_j \quad j = 1, 2, \dots, M \\
 &\quad \sigma_i^L \leq \sigma_{ij} \leq \sigma_i^U \\
 &\quad \varepsilon \leq A_i \quad i = 1, 2, \dots, N
 \end{aligned} \tag{58}$$

em que  $N$  é o número total de elementos,  $M$  o número de casos de carga,  $A_i$ ,  $\rho_i$ ,  $L_i$  são seção transversal, densidade, e comprimento da barra e  $\sigma_i^L$ ,  $\sigma_i^U$  tensão limite superior e inferior.

Quando se admite que a variável de projeto em uma estrutura pode assumir um valor zero, essa consideração acarreta um problema na matriz de rigidez, podendo torná-la singular (hipoestática). Uma técnica utilizada para evitar este transtorno é considerar um valor mínimo na ordem de grandeza  $1 \times 10^{-6}$ , isto é,  $\varepsilon \leq A_i$  onde  $\varepsilon$  é um valor próximo de zero.

Essa técnica é utilizada para solução de problemas de otimização topológica podendo ser interpretada da seguinte forma: quando a variável de projeto de um elemento da estrutura torna-se próximo do valor de  $\varepsilon$  no final do processo iterativo, esse elemento pode ser eliminado da estrutura. Este procedimento exige que a solução final obtida seja interpretada, pois as variáveis próximas do valor de zero não são retiradas no final do processo de otimização. Após realizar esta última etapa, é necessário realizar uma análise estrutural verificando se as restrições impostas estão sendo respeitadas. O procedimento citado pode ser observado nos trabalhos de Sant'anna, 2002, Guilherme, 2000 e Cardoso, 2000, sendo um ótimo método de aproximação da resposta estrutural quando não existe o ótimo singular.

Se ótimo global e local é singular e localiza-se em um ponto do subdomínio degenerado, então se tenta eliminar esse espaço, procurando localizar a solução do problema de otimização topológica em um subdomínio admissível, isto significa obter a ótima estrutura.

O método da relaxação  $\epsilon$  foi utilizado por Duysinx e Bendsoe, 1998, nos problemas de otimização topológica em estruturas contínuas, podendo observar o fenômeno do ótimo singular perfeitamente, tanto em estruturas discretizadas quanto nas contínuas. Assim, o problema proposto consistia em minimizar o peso sujeito à restrição de tensão.

O estudo realizado por Stolpe e Svanberg, 2001, sobre a trajetória da aproximação da relaxação  $\epsilon$  para restrição de tensão, concluíram que a sequência de soluções aproximadas pode não convergir para um ótimo global do problema original. Nos exemplos que foram investigados, mostraram que a trajetória global pode ser descontínua para valores pequenos de  $\epsilon$ , mas maior do que zero. Nesses exemplos, o ótimo não convergia para o ponto singular, mesmo se o ponto de partida estivesse em uma vizinhança do ótimo global. Esse fato não chega a ser um fator comprometedor do método, pois foi constatado apenas em alguns exemplos patológicos, porém faz com que seja aberta uma nova gama de estudos futuros a respeito desse problema.

### 7.3. RESTRIÇÃO DE TENSÃO LOCAL

A restrição local é aplicada em estrutura simples, que tem por objetivo apenas o estudo e verificar o comportamento do problema. Este tipo de restrição deve ser aplicado a todos os pontos do domínio. Para o caso da restrição de tensão local, aplica-se em todos os pontos de recuperação de tensão de todos os elementos.

Para os casos que se deseja aplicar este tipo de restrição é recomendado utilizar elementos finitos de baixa ordem com um ponto de tensão por elemento. Desta forma temos o número de restrição igual ao número de elementos.

O artigo apresentado por Duysinx e Bendsoe, 1998, baseou-se no estudo realizado por Cheng e Guo, 1997, tratando da restrição de tensão local para um meio contínuo da mesma forma como foi exposto para uma treliça (elementos discretizados). A função restrição é escrita da seguinte forma:

$$\rho \left( \frac{\sigma_{vM}}{\sigma_l} - 1 \right) \leq \epsilon \quad (59)$$

em que  $\sigma_{vM}$  é tensão de von Mises,  $\sigma_l$  limite de tensão e  $\rho$  densidade.

Sant'anna, 2002, trabalhando com otimização topológica de estruturas contínuas tendo como função de restrição tensão local, propôs-se a reproduzir os mesmos resultados apresentado por Duysinx et.al., 1998.

Formato inicial da estrutura.

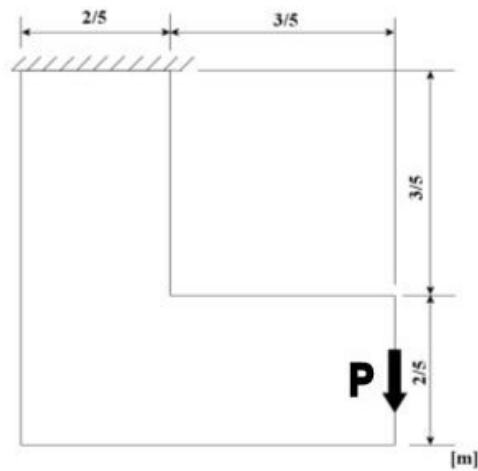


Figura 7.8 Domínio inicial do projeto

Resultado obtido na dissertação de Sant'Anna.



Figura 7.9 Estrutural otimizada – projeto final (Sant'Anna)

Resultado publicado por Duysinx et.al..

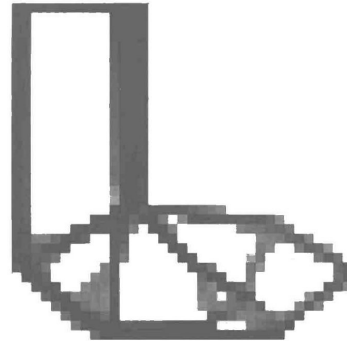


Figura 7.10 Estrutura otimizada – projeto de tensão (Duysinx et al.)

A diferença entre os resultados obtidos é devido ao tipo de problema apresentar solução local e não global.

#### 7.4. RESTRIÇÃO DE TENSÃO GLOBAL

Yang e Chen, 1996, propuseram transformar a restrição de tensão local em uma restrição de tensão global. O motivo dessa modificação está relacionado à complexidade da otimização topológica quando se trabalha com restrição de tensão, e o alto custo computacional na determinação da análise de sensibilidade. A vantagem em fazer este tipo de substituição ou troca está na redução do número de restrições, pois para cada caso de carregamento considerando a formulação global representará uma restrição. Somente para recordar o citado anteriormente, para o caso de restrição local o número de restrições será igual ao número de pontos de tensão calculada, isto para cada caso de carregamento.

A desvantagem em utilizar a restrição de tensão global é devido à dificuldade para encontrar uma função que seja robusta e geral, isto é, possibilitar aplicação para todos os casos estruturais. Yang e Chen propuseram o uso de dois tipos de função de tensão:

- função Kreisselmeier – Steinhauser (KS),

$$G_{KS} = \frac{1}{p} \ln \sum_{i=1}^N e^{p \frac{f_i}{f_{\max}}} \quad (60)$$

em que N é número de elementos,  $f_{\max}$  máxima tensão de von Mises,  $f_i$  tensão de von Mises de cada elemento e p a diferença entre a função original e aproximação;

- função Park e Kikuchi (KK),



$$G_{kk} = \left\{ \int_{\Omega} \left[ \frac{f_i}{f_{\max}} \right]^p d\Omega \right\}^{1/p} \quad (61)$$

em que  $\Omega$  é o domínio de projeto,  $f_{\max}$  máxima tensão de von Mises e  $f_i$  tensão de von Mises de cada elemento.

Os dois tipos de funções apresentados para o problema com restrição de tensão, não conduziram para resultados satisfatórios, pois apresentou oscilação ou divergência durante o processo iterativo. Uma possível causa desta falha inicial foi a desconsideração da singularidade de tensão descrita anteriormente.

Recentes publicações tratando da restrição de tensão na forma global foram estudadas por Duysinx e Sigmund, 1998, Pereira, Fancello e Barcellos, 2003, e Fancello e Pereira, 2003. Os artigos citados serão abordados mostrando o tipo de função e a formulação do problema utilizada.

A pesquisa de Duysinx et. al, 1998, baseou-se nos mesmos objetivos de Yang et. al., 1996. A solução do problema consiste em encontrar a ótima topologia da estrutura, que possa suportar a carga aplicada usando o mínimo de material. A formulação do problema, equação (62), para uma estrutura linear elástica, cujo material é submetido a uma determinada tensão, deve-se encontrar abaixo do valor de limite de tensão ( $\sigma_l$ ) pré-estabelecido ( $\sigma_l < \sigma_e$  – tensão limite de escoamento).

$$\begin{aligned} \text{mínimo} \quad & \int_{\Omega} \rho(x) dx, \quad 0 \leq \rho(x) \leq 1 \\ \text{sujeito} \quad & \sigma_{vm}(\rho(x), x) \leq \sigma_l, \quad \text{se } \rho(x) > 0 \end{aligned} \quad (62)$$

em que  $\rho(x)$  é a densidade do material em um ponto  $x$  e  $\sigma_{vm}$  a tensão de von Mises para o ponto  $x$ .

Uma das maiores dificuldades em trabalhar com a restrição de tensão, conforme relatado por Duysinx et. al., 1998, é como tratar o fenômeno do ótimo singular [Kirsch, 1990, Rozvany, 1994]. Este tipo de situação impede criar ou remover buracos durante o processo de otimização, mas a partir desta época este problema já tinha sido solucionado por Cheng e Guo, 1997, aplicando uma perturbação na função, conhecido como técnica da relaxação  $\epsilon$ .

A solução do problema não foi obtida usando diretamente a técnica da relaxação  $\epsilon$ , pois não apresentou bons resultados para estruturas contínuas. A redução do parâmetro  $\epsilon$  conduz

a violação da restrição e com a diminuição da velocidade para a convergência do problema. Com a dificuldade encontrada, Duysinx et. al., 1998, propuseram uma modificação no método da relaxação, de maneira que melhorou a eficiência do procedimento, conforme mostrado na equação (63).

$$\rho \left( \frac{\sigma_{vm}}{\rho^n \sigma_l} - 1 \right) \leq \varepsilon - \varepsilon \rho$$

$$1 \geq \rho \geq \varepsilon^2$$
(63)

Esta nova forma de relaxação para restrição de tensão é similar a técnica de relaxação original desenvolvida por Cheng e Guo, 1997, possibilitando assim no processo de otimização topológica a criação ou remoção de buracos. Baseado nas experiências numéricas, problemas com altas perturbações não precisam ser resolvidos com alta precisão. A perturbação do parâmetro pode ser reduzida assim que a solução do problema otimizado satisfaça o critério de parada.

Duas funções de restrição de tensão foram abordadas por Duysinx e Sigmund [Duysinx e Sigmund, 1998]:

- primeira restrição de tensão global – “norma p”

$$\left[ \sum_{e=1}^N \left( \max \left\{ 0, \frac{\sigma_{VM,e}}{\rho_e^\eta \sigma_l} + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\rho_e} \right\} \right)^p \right]^{1/p} \leq 1$$
(64)

- segunda restrição de tensão global – média-p

$$\left[ \frac{1}{N} \sum_{e=1}^N \left( \max \left\{ 0, \frac{\sigma_{VM,e}}{\rho_e^\eta \sigma_l} + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\rho_e} \right\} \right)^p \right]^{1/p} \leq 1$$
(65)

A razão em utilizar a norma p é devido à função de restrição adotada existir a possibilidade de valores negativos, e dentro desta formulação só existe o interesse nos valores que sejam maior ou igual a zero. Isto impede que valores negativos no critério da relaxação contribuam para norma. Os valores menores do que zero na função representam baixas tensões nos elementos, não sendo crítico, e desta forma podem ser truncados sem influenciar na restrição global.

Outros pesquisadores, como Perreira, Fancello e Barcellos, 2003, estudaram a otimização topológica estrutural, com o objetivo de obter a mínima massa de um domínio ( $\Omega$ ) sujeito à restrição de tensão, para um caso de carregamento. A importância de ressaltar este trabalho publicado é devido à função restrição adotada, como é demonstrado na equação (66).

$$\begin{aligned} g_i(x) &\equiv \rho(x)F(\sigma(x)) - \varepsilon(1 - \rho(x)) \leq 0 & \text{em } \Omega \\ 0 < \varepsilon^2 &\leq \rho_{\min} \leq \rho(x) \leq 1 & \forall x \in \Omega \end{aligned} \quad (66)$$

em que várias formas para  $F(\sigma)$  foram usadas, inclusive

$$F(\sigma(x)) = \frac{\sigma_{vM}}{\sigma_l} - 1 \quad (67)$$

Pereira et.al., 2003, propuseram solucionar o problema através da técnica do Lagrangeano aumentado e a análise de sensibilidade, utilizando o método adjunto. Ainda tratando do mesmo problema, Fancello e Pereira, 2003, realizaram o estudo para o caso de múltiplos carregamentos, sendo este estudo formulado no mesmo caminho como foi desenvolvido por Duysinx e Bendsoe, 1998.

Sant'Anna, Guilherme e Fonseca, 2003, continuaram o estudo de otimização topológica de estrutura sujeita à função de tensão global. O problema inicialmente proposto tem como objetivo minimizar a tensão sujeito à restrição de volume, conforme mostrado na equação (68).

$$\begin{aligned} \text{mínimo} \quad & \frac{\sigma_{vM}}{\sigma_l} - 1 \\ \text{sujeito} \quad & \text{volume} \leq V_l \end{aligned} \quad (68)$$

Como se pode observar não foi necessário fazer uso da relaxação  $\varepsilon$ , pois a formulação proposta não propicia o aparecimento do espaço degenerado, isto é, o fenômeno do ótimo singular surge nos casos de otimização com restrição de tensão quando a variável de projeto atinge um valor zero ou muito próximo de zero, fazendo com que a tensão assuma um valor infinito ao invés de nulo em uma determinada região de busca.

Nos projetos de engenharia, a otimização de estrutura minimizando tensão não tem muito significado de ser, pois o interesse se encontra em obter uma peça com mínimo peso

possível, sabendo que a mesma poderá suportar determinado tipo de carregamento. Tendo-se conhecimento deste fato, a justificativa para formulação do problema anterior foi somente para compreensão e entendimento do comportamento das funções.

O próximo passo para o estudo deste tipo de problema foi proposto por Guilherme e Fonseca (a ser publicado), como demonstra a equação (69).

$$\begin{aligned} \text{mínimo} \quad & \int_{\Omega} \rho(x) dx \\ \text{sujeito} \quad & \sigma_{vM}(\rho(x), x) \leq \sigma_l \quad \text{se } \rho(x) > 0 \\ & 0 \leq \rho \leq 1 \end{aligned} \quad (69)$$

em que  $\rho(x)$  é a densidade do material para um ponto  $x$  e  $\sigma_{vM}(\rho(x), x)$  é a tensão de von Mises para um ponto  $x$ . O problema é solucionado discretizando o domínio em  $N$  elementos finitos e a densidade de cada elemento é considerada como variável de projeto.

Na prática, a implementação da técnica da relaxação  $\varepsilon$ , que inicialmente foi desenvolvida para problemas de otimização topológica de treliças, não é totalmente satisfatório para encontrar a ótima topologia de uma estrutura contínua (Duysinx e Sigmund, 1998).

Por causa desta dificuldade propõe-se uma modificação no método original da relaxação, sendo a restrição de tensão escrita da seguinte forma:

$$\left( \frac{\sigma_{vM}}{\sigma_l} - 1 \right) \leq \varepsilon^\rho - \varepsilon \quad (70)$$

Esta nova forma de relaxação da restrição de tensão é similar à técnica original desenvolvida por Cheng e Guo, 1997, e o sentido do mapeamento entre  $\varepsilon$  e problema perturbado e a solução ótima é contínua. O lado direito da equação (70) fica igual a zero quando o valor de  $\rho = 1$  ou  $\varepsilon = 0$ . O valor mínimo adotado para a variável de projeto ( $\rho$ ) é sempre maior do que zero, para não ocorrer a singularidade na matriz de rigidez e ao mesmo tempo evitando a descontinuidade da função restrição.

A equação (70) [Rozvany, 1996] permite gerar um espaço que não seja degenerado, possibilitando criar ou remover material no domínio ( $\Omega$ ) do projeto, sem que a restrição de tensão seja violada. Conforme observado inicialmente por Duysinx e Sigmund, 1998, pode-se afirmar, que a perturbação alta não precisa ser resolvida com alta precisão. O parâmetro de perturbação pode ser reduzido assim que a solução otimizada satisfaça o critério de convergência.

A restrição de tensão será escrita na forma global, conforme realizado por Duysinx et. al, 1998, Yang et. al., 1996, Fancello et. al., 2003, com objetivo de reduzir o custo computacional, conforme é demonstrado a seguir:

$$g = \left[ \sum_{i=1}^N \left( \frac{v_i}{V_t} \left( \frac{\sigma_{vM}}{\sigma_l} + \varepsilon^\rho - \varepsilon \right) \right)^p \right]^{1/p} \leq 1 \quad (71)$$

onde  $v_i$  é volume do elemento,  $V_t$  o volume total da estrutura,  $N$  número total de elementos e  $p$  valor maior ou igual a 1.

Neste trabalho o método de restrições ativas é aplicado. Esse procedimento avalia cada elemento, verificando se equação (72) maior do que zero. Se esta expressão apresentar valor positivo é considerado na equação da restrição global do problema.

$$\frac{\sigma_{vM}}{\sigma_l} + \varepsilon^\rho - \varepsilon > 0 \quad (72)$$

## 8. FADIGA

Os projetos na área de engenharia utilizam materiais metálicos e não metálicos para componentes ou estruturas. Um problema encontrado nesta área é justamente a escolha do material, pois o mesmo deve ter as suas propriedades conhecidas, garantindo que o componente ou estrutura não apresente dano, por ter superado o limite o critério de falha.

Além da importância de conhecer as propriedades do material é necessário determinar todas as condições de contorno que a estrutura ou componente vai ser submetida, exigindo o conhecimento de inúmeros fatores como: tipo de carregamento, acabamento superficial após a fabricação, técnicas de redução de concentração de tensão, determinação dos pontos críticos da estrutura em funcionamento, bem como uma análise de fadiga completa. Nos casos que os fatores que influenciam no estudo do comportamento do componente não estão bem determinados, se compensa com o fator de segurança elevado na análise de tensão. A escolha destes fatores é usualmente um processo empírico baseado na experiência acumulada.

Os projetos de engenharia ao longo do tempo apresentaram uma crescente sofisticação, influenciado por razões de segurança, redução de peso e diminuição do custo de fabricação. Com isso surgiu a necessidade de melhor compreensão do comportamento dos materiais sujeito aos carregamentos oscilantes.

Há mais de cem anos, Wöhler publicou resultados relativos a experimentos de fadiga em corpos de prova lisos sem entalhes, concluindo que: para o caso dos aços, existe um valor mínimo da amplitude de tensão abaixo do qual o corpo de prova não parte, independente do número de ciclos de carga aplicados.

Em algumas situações não é desejado que um determinado componente tenha vida infinita, como exemplo, componentes utilizados na indústria aeronáutica. Esta abordagem conduziu a um novo tipo de estudo da fadiga, fadiga oligocíclica, em que os ciclos de carga contem uma componente de deformação plástica. Este estudo é baseado em experiências realizadas com corpos de provas lisos e não entalhados.

Quando um componente em um determinado serviço apresenta uma fissura, é desejado saber se a mesma irá se propagar ou não. Para determinar a condição de propagação da falha do material, se faz uso das condições de plasticidade restringida a uma pequena extensão. Neste trabalho não será abordada a mecânica da fratura, somente a parte de fadiga trabalhando com vida infinita e o trabalho de Mamyia et al. que trata a fadiga para casos de carregamento multiaxiais.

## 8.1 LIMITE DE FADIGA

O tempo de vida de uma peça pode ser caracterizado em termos de amplitude de tensão nominal ( $\sigma_a$ ), dados que são levantados experimentalmente – trabalho de Wöhler, 1860. Através das informações obtidas é possível traçar um gráfico de amplitude de tensão ( $\sigma_a$ ) por número de ciclos que levam à falha por fadiga.

Observando-se a linha cheia do gráfico (figura 8.1), a partir de um determinado valor da tensão alternada ( $\sigma_a$ ), o componente terá vida infinita sem que ocorra fratura no corpo de prova.

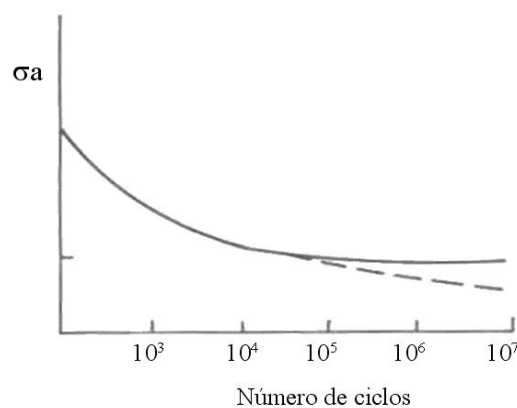


Figura 8.1: Diagrama S-N

No caso do alumínio (linha tracejada), não existe limite de fadiga, isto significa que o material apresentará fratura. Em outras palavras  $\sigma_a$  (amplitude de tensão) continua a decrescer com aumento do número de ciclos. Para este tipo de material o limite da fadiga ou limite de resistência é definido para uma amplitude de tensão ( $\sigma_a$ ) menor  $10^7$  ciclos de fadiga.

No ano de 1910, Basquin propôs uma fórmula para o número de ciclos de uma peça em fadiga, considerando que amplitude de tensão fosse constante conforme é mostrado na equação (73)

$$\sigma_a = \sigma_f \cdot (2N_f)^b \quad (73)$$

$$-0.05 \leq b \leq -0.12 \quad (74)$$

em que  $N_f$  é o número de ciclos para o dano,  $\sigma_f$  é o coeficiente de resistência a fadiga e  $b$  conhecido como expoente de resistência a fadiga ou expoente de Basquin. Utilizando-se do gráfico S–N, pode-se determinar o número de ciclos e a amplitude de tensão com que uma trinca inicia e propaga-se.

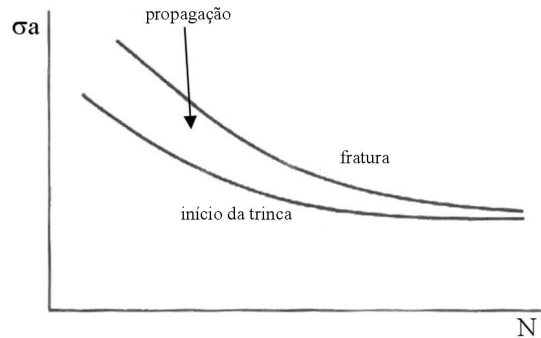


Figura 8.2: Início e propagação da trinca na vida a fadiga

## 8.2. EFEITO DA TENSÃO MÉDIA

O gráfico a seguir apresenta ao longo do tempo a oscilação da tensão, limitado pela tensão máxima ( $\sigma_{\text{máxima}}$ ) e mínima ( $\sigma_{\text{mínima}}$ ):

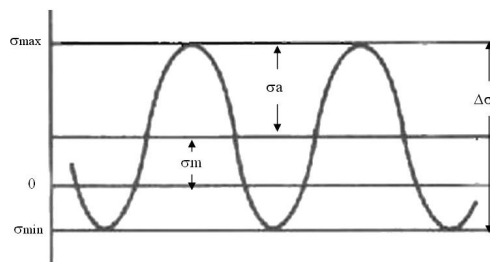


Figura 8.3: Nomenclatura do parâmetro de tensão para fadiga

$$\Delta\sigma = \sigma_{\text{máximo}} - \sigma_{\text{mínimo}} \quad (75)$$

-  $\Delta\sigma$  representa o quanto a tensão oscila durante um intervalo de tempo.

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\text{máximo}} - \sigma_{\text{mínimo}}}{2} \quad (76)$$

-  $\sigma_a$  representa a amplitude da tensão.

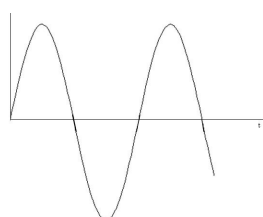


$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\text{máximo}} + \sigma_{\text{mínimo}}}{2} \quad (77)$$

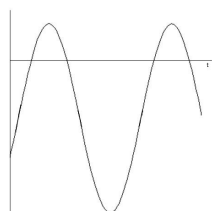
-  $\sigma_m$  representa a tensão média.

O valor da tensão média tem influência no comportamento de um corpo à fadiga, isto é claramente observado quando a tensão média de tração reduz o número de ciclos, já para o caso de tensão média de compressão é benéfica.

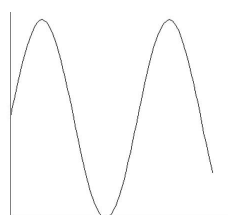
Conforme o valor médio da solicitação a tensão é denominada alternada pura, alternada, repetida ou ondulada (figura 8.4). O espectro de carga pode ser distinto em qualquer destes casos, e apresentar distribuições aleatória, isto é, levantamento real de dados de equipamentos, como a instrumentação da asa de uma aeronave, eixo de carro, entre outras situações adversas. Estes casos podem ser tratados agrupando as solicitações semelhantes em blocos (figura 8.5). Este procedimento facilita ou torna possível o estudo do caso prático, mas pode introduzir erros na análise [Branco et al. 1999].



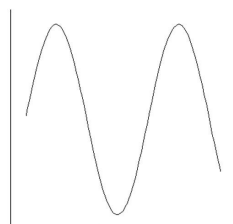
Alternada pura



Alternada



Repetida



Ondulada

Figura 8.4 Tipos de solicitações de fadiga

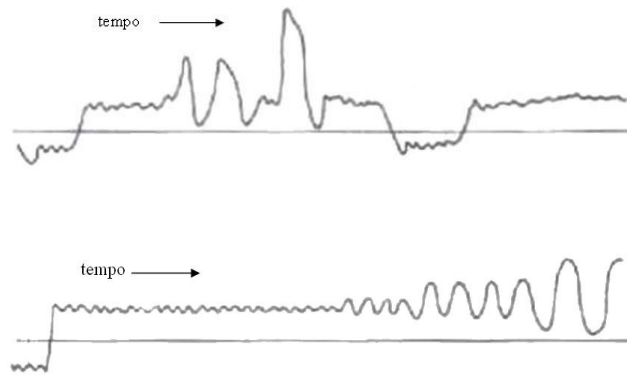


Figura 8.5: Exemplo do espectro de uma carga real

A tensão média pode ser caracterizada pela razão do carregamento, da seguinte forma:

$$R = \frac{\sigma_{\text{mínima}}}{\sigma_{\text{máxima}}} \quad (78)$$

sendo que:

-  $R = -1$ :  $\sigma_{\text{mínima}} = -\sigma_{\text{máxima}}$  ;

-  $R = 0$ :  $\sigma_{\text{mínima}} = 0$  ;

-  $R = 1$ : carregamento estático, a amplitude da tensão é igual a zero, e a tensão média deve ser menor que a tensão de escoamento ou ruptura.

Diferentes modelos foram formulados, combinando tensão alternada e média. Os mais conhecidos são Gerber (1874), Goodman (1899) e Soderberg (1939), conforme mostrado na figura 8.6.

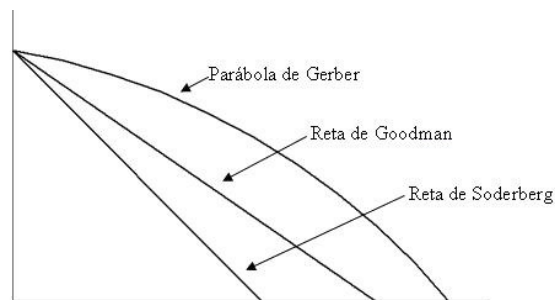


Figura 8.6: Linhas de vida idêntica à fadiga

Relação de Soderberg:

$$\sigma_a = \sigma_{f0} \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_{escoamento}} \right) \quad (79)$$

Relação de Goodman:

$$\sigma_a = \sigma_{f0} \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_R} \right) \quad (80)$$

no caso do critério de Goodman modificado para tomar em consideração a necessidade de evitar deformação plástica,

$$\begin{cases} \sigma_a = \sigma_{f0} \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_R} \right) \\ \sigma_m + \sigma_a = \sigma_{ced} \end{cases} \quad (81)$$

Relação de Gerber:

$$\sigma_a = \sigma_{f0} \left( 1 - \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_R} \right)^2 \right) \quad (82)$$

em que  $\sigma_a$  é tensão alternada,  $\sigma_m$  tensão média,  $\sigma_R$  tensão de ruptura e  $\sigma_{f0}$  tensão limite de fadiga.

Observações:

- as equações 8, 9 e 10 são expressões expressas em função da tensão média (carga estática) e em função da tensão alterna (carga dinâmica);
- a relação de Soderberg é uma equação conservativa na estimativa de vida de fadiga;
- a equação 8 é uma expressão que assume que a tensão média não fornece um efeito benéfico à vida a fadiga;
- a equação 10, que representa a relação de Gerber, não faz distinção entre tensão de tração ou compressão na vida a fadiga.

### 8.3. CICLO DE TENSÃO MULTIAXIAL

A partir desta seção, lida-se com cargas multiaxiais. O carregamento aplicado à peça na análise em fadiga é caracterizado por serem forças combinadas (flexão, torção, compressão e tração), e podem apresentar-se em fase ou não. Este tipo de problema está menos esclarecido do que no caso das solicitações uniaxiais. Os dados experimentais são relativamente escassos, e existe uma certa diversidade de opiniões acerca de como encarar o problema.

Considerando-se um ciclo de carregamento cujo todas as cargas cíclicas estão em fase ou não e as componentes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  são componentes normais a superfície em estudo (tensão máxima e mínima) e  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{zx}$  são componentes de cisalhamento (cisalhamento máximo e mínimo). A forma tradicional para analisar este tipo de problema é aplicar o critério de von Mises para tensão alternada e média e após verificar através de um dos critérios de fadiga (Goodman, Soderberg ou Gerber) se o componente ou estrutura terá finita infinita ou não.

A determinação do tempo de vida de um componente ( $N_f$ ) sujeito a múltiplos carregamentos é expresso como:

$$\sigma_{a,e} = \sigma_f (2N_f)^b \quad (83)$$

em que  $b$  é o expoente de Basquin,  $\sigma_f$  coeficiente de resistência de fadiga e  $\sigma_{a,e}$  obtido como exposto anteriormente.

### 8.4 LIMITE DE FADIGA SOB CARREGAMENTO MULTIAXIAL

A primeira solução apresentada para um caso de carga de fadiga multiaxial, foi proposto por Lanza (Balthazar e Malcher, 2007), em que foi considerada a combinação da carga de torção e flexão. Após este primeiro passo outros pesquisadores deram continuidade ao assunto, como Mason, Haigh, Nishiara, Gough e outros (Balthazar e Malcher, 2007), apresentando dados experimentais.

O modelo de fadiga multiaxial esta dividido em três partes:

- modelo baseado na tensão;
- modelo baseado em deformação;
- modelo de energia.

Neste trabalho adotou-se modelos baseado na tensão.

O método da deformação ou tensão equivalente consiste basicamente na determinação da amplitude de deformação ou tensão uniaxial em que produz a mesma vida à fadiga como se fosse um estado de tensão multiaxial, podendo fazer uso da curva S-N. Os modelos de Sines e Crossland são exemplos deste tipo de teoria. A diferença entre estes dois modelos é que o estudo de Crossland considera o máximo valor da tensão hidrostática como valor médio da tensão (Balthazar e Malcher, 2007).

O estudo apresentado no componente sujeito à fadiga com múltiplo carregamento está baseado no trabalho realizado por Mamiya e Araújo, 2002. Este tópico abordado é de grande interesse no trabalho, pois é utilizado como restrição do problema de otimização topológica e calculo da sensibilidade de forma como será mostrado adiante.

O critério de fadiga para múltiplos casos de força apresentado por Mamiya e Araújo, 2002, é baseado na proposta de Crossland, Deperrois, Bin Li et al. entre outros, podendo ser escrito como:

$$\tau_{eq} + kp_{max} \leq \lambda \quad (84)$$

em que  $\tau_{eq}$  é amplitude da tensão cisalhante equivalente,  $p_{max}$  o máximo valor da pressão hidrostática observada ao longo do tempo, enquanto  $k$  e  $\lambda$  são parâmetros do material. É possível fazer uma analogia em que a amplitude da tensão cisalhante equivalente ( $\tau_{eq}$ ) corresponde à amplitude da tensão ( $\sigma_m$ ) e a pressão hidrostática máxima ( $p_{max}$ ) tensão media ( $\sigma_m$ ).

A diferença no critério de fadiga apresentado por diferentes autores está na determinação da  $\tau_{eq}$ . Apresenta-se a seguir dois critérios como exemplo para a determinação da amplitude de tensão cisalhante equivalente ( $\tau_{eq}$ ). Para o critério de Crossland, a amplitude da tensão cisalhante equivalente é determinada como o mínimo raio da hiperesfera na região da trajetória da tensão. No caso proposto por Deperrois a amplitude da tensão cisalhante equivalente é dada por:

$$\tau_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\sum_{i=1}^5 D_i^2} \quad (85)$$

em que  $D_i$  é determinado da seguinte maneira: o primeiro segmento formado,  $D_5$ , entre dois pontos distintos da trajetória da tensão no espaço desviador, e o próximo valor  $D_i$  é determinado num subespaço ortogonal projetado sobre o primeiro segmento formado.

De acordo com Dang Van et. al., 1989, a degradação de fadiga em alto ciclo ocorre se o ponto material atingir um estado de “shakedown” plástico – nível mesoscópico – conduzindo à formação contínua de planos de deslizamentos na microestrutura, mesmo que o material demonstre comportamento elástico em nível macroscópico. Por outro lado, caso o material encontre-se no estado de “shakedown” elástico, não existirá falha por fadiga. Esta interpretação foi observada experimentalmente por Sines e Ohgi, 1981, mostrando que sobrepondo tensão de cisalhamento estática não influencia no limite de fadiga dos materiais metálicos. Mamiya et.al, 2002, assumiram que a variável que governa o fenômeno de fadiga é o tensor tensão desviador,  $X$ , definido como:

$$X = S - dev(\psi) \quad (86)$$

$$dev(\psi) = \psi - \frac{1}{3}(tr\psi)I \quad (87)$$

em que  $S$  é o tensor tensão desviador,  $\psi$  a tensão residual após o “shakedown” e  $dev(\psi)$  a parte desviadora de  $\psi$ .

O trabalho assume que não são todos os estados de tensão  $X(t)$  pertencente à trajetória de tensão  $\Delta$  que contribuem para o dano à fadiga, apenas os estados definidos sobre o envelope convexo ameaçam a integridade do material. O envelope descrito pode ser considerado para definir a sollicitação de cisalhamento para falha em fadiga. É importante notar que determinar este envelope não é uma tarefa muito simples.

O uso de elipsóide como medida de falha de fadiga pode conduzir a resultados satisfatórios em casos em que o mesmo seja uma boa aproximação para o envelope convexa para trajetória da tensão. Então pode-se definir a tensão de cisalhamento equivalente  $\tau_{eq}$  como:

$$\tau_{eq} = \sqrt{\sum_{i=1}^5 \lambda_i^2} \quad (88)$$

em que  $\lambda_i$  são magnitudes do semi-eixo principal circunscrito no elipsóide de maneira a fornecer o mínimo valor de  $\tau_{eq}$ . A equação (88) como definida é difícil de se obter, então Mamiya et al. propuseram uma forma diferente para se obter essa tensão cisalhante equivalente, conforme demonstrado a seguir.

Então  $\text{dev}^3$  denota um espaço simétrico do tensor desviador de  $\mathbb{R}^3$  para  $\mathbb{R}^3$  e tendo  $N_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , que são bases ortonormais arbitrárias. O estado de tensão desviador,  $X(t)$ , é expresso como:

$$X(t) = \sum_{i=1}^5 x_i(t) N_i \quad (89)$$

Se a base  $\text{dev}^3$  é dada por:

então o componente de  $x_i$  de  $X(t)$  desta base pode ser expressa como:

A equação (89) possibilita descrever a trajetória da tensão, expressa como:

$$x(t) = \{x_1(t) \dots x_5(t)\}^T \quad (90)$$

Todos os pontos de  $x(t)$  descrevem a trajetória da tensão desviadora em  $\mathbb{R}^5$  representada pelo símbolo  $\Delta$ .

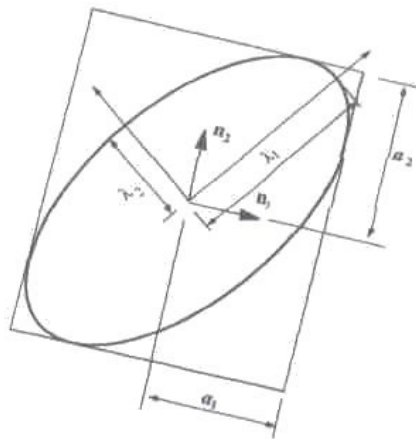


Figura 8.7: Trajetória da tensão desviadora

Proposição: Dado um elipsóide  $\xi$  em  $\mathbb{R}^m$  com centro localizado na origem e uma base arbitrária ortonormal  $\{n_i, i = 1, \dots, m\}$  de  $\mathbb{R}^m$ , sendo  $\mathfrak{R}$  um prisma retangular circunscrito em  $\xi$  tal que suas faces são ortogonais para cada um dos elementos bases. Se  $\lambda_i, i = 1, \dots, m$  são magnitudes

do semi-eixo principal de  $\xi$  e  $a_i$ ,  $i=1,...,m$  significa a distância do centro do elipsóide até as faces do prisma retangular, então

$$\tau_{eq} = \sum_{i=1}^5 \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^5 a_i^2. \quad (91)$$

em que  $a_i$ ,  $i = 1,...,5$  são magnitudes da componente  $x_i(t)$  da tensão desviadora microscópica definida como:

$$a_i = \max_t |x_i(t)|, \quad i = 1,...,5. \quad (92)$$

Anexo 2 apresenta prova matemática, e anexo 3 exemplo de aplicação considerando EPT (estado plano de tensão) e determinação das bases ortonormais.

As vantagens de utilizar o método proposto por Mamiya e Araújo, 2002, são:

- é uma restrição de tensão, baseada na história da tensão da peça;
- visa somente à iniciação da trinca, não a propagação;
- é fácil de implementar em otimização.

Para muitas peças fabricadas em massa na mecânica (como bielas) que devem ter vida infinita não interessa a propagação, só à iniciação. Desta forma este critério pode ser usado para a otimização deste tipo de componente.



## 9. SENSIBILIDADE

A derivada da função com relação à variável do projeto representa e caracteriza a tendência da variação da função quando a mesma vier a sofrer uma mudança em seu valor na busca do ótimo projeto [Adelman e Haftka, 1986]. O gradiente da função possui importante informação para determinar a direção de procura para obter um melhor ponto de projeto dentro da região admissível. O cálculo da derivada da função custo (objetivo) e da restrição em relação à variável de projeto, conhecido como análise de sensibilidade de projeto, é uma importante ferramenta para os algoritmos de otimização.

Este interesse foi claramente percebido no início da década de 60, por uma pesquisa desenvolvida por Kelley, pois, a otimização estrutural conduziu ao uso do gradiente, baseado no método da programação matemática. A análise da sensibilidade não é somente aplicada à otimização eficientemente, mas também, no desenvolvimento da aproximação explícita da função de restrição e algum tipo de reanálise. Em diferentes áreas de pesquisa, como termodinâmica, aerodinâmica, física, fisiologia, química tem se utilizado a metodologia da sensibilidade para estimar a variação do efeito do parâmetro nos modelos analíticos e criar projetos que sejam insensíveis a esta variação.

### 9.1. SENSIBILIDADE TOPOLÓGICA

De acordo com Sienz e Hinton, 1997, análise da sensibilidade é uma importante parte da otimização, pois a determinação do gradiente é muito mencionada no contexto da otimização estrutural, desta forma, trata-se de um tópico de grande pesquisa nesta área. Diversas técnicas diferentes foram desenvolvidas, podendo ser notada pela eficiência numérica atingida nos últimos anos. Os métodos utilizados para obtenção da derivada podem partir desde o método variacional, apresentando normalmente excelente resultado, ou a utilização de uma técnica mais simples, diferença finita. Este último método citado, o esforço para implementação é baixo, mas o custo computacional torna-se alto e os resultados obtidos podem apresentar-se errados. Dependendo do tipo do problema analisado, o tempo gasto para análise de sensibilidade, independente do método, pode variar de 50 a 90% do esforço computacional no processo iterativo de otimização. Nos dias atuais buscam-se métodos que sejam eficientes, isto significa a redução do tempo gasto no cálculo do gradiente, sendo de grande importância para otimização estrutural.

A determinação da análise de sensibilidade é dividida em dois grupos:

- método discreto;
- método variacional.

O método discreto que determina o valor do gradiente ou sensibilidade é avaliado para estruturas que são discretizadas em elementos finitos – derivada deslocamento, tensão, flexibilidade, volume e etc., para função objetivo ou restrição. Essas funções são implícitas e não lineares com a variável de projeto. A vantagem do método discreto em relação ao variacional, é a sua simplicidade. Três métodos são demonstrados a seguir.

- método da diferenças finitas: uma técnica simples para o cálculo da derivada de autovalores em relação a uma variável de projeto é a aproximação por diferenças finitas, [Haftka e Gürdal, 1992]. Este tipo de procedimento é computacionalmente caro, mas de fácil implementação e, por isso, muito popular. A resposta do método analítico pode ser verificada através da diferenças finitas. Nesta seção é discutida a obtenção do gradiente pelo método da aproximação por diferenças finitas [Guilherme, 2000].

Aproximação por diferenças finitas pode ser de primeira ordem ou de segunda ordem. Ordens mais altas também podem ser empregadas, mas são raramente utilizadas em aplicações de otimização estrutural, por demandarem um alto custo computacional.

Conforme Adelman e Haftka, 1986, o método por diferenças finitas quase sempre é inferior ao método analítico quando se realiza análise de sensibilidade para respostas estáticas. Para os problemas em que calcula-se a derivada para respostas transientes, isto nem sempre ocorrerá. Quando os métodos explícitos são usados para integrar a equação diferencial, a linearidade das equações de sensibilidade não constitui uma vantagem computacional. Para os casos de integração explícita, aproximação por diferenças finitas é freqüentemente superior computacionalmente do que o método direto. Quando as técnicas de integração implícita são utilizadas, a aproximação por diferenças finitas é menos atrativa computacionalmente, mas de fácil implementação do que aproximação direta.

Falhas neste tipo de processo ocorrem devido ao tamanho do passo ( $\Delta x$ ) a ser selecionado. No caso do tamanho do passo ser grande, ocorrerá erros por causa do truncamento. Esse tipo de erro normalmente aparece quando os termos na expansão da série de Taylor são negligenciados, isto é, utilizando somente os termos de baixa ordem. Se o passo selecionado for pequeno, ocorrerá erro em virtude do condicionamento, isto é, a diferença entre o cálculo numérico da função e o seu valor exato em razão do arredondamento das operações numéricas.

O gradiente para uma função qualquer se apresenta da seguinte forma utilizando diferenças finitas:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} \cong \frac{\Delta \lambda}{\Delta v} = \frac{\lambda(v + \Delta v) - \lambda(v)}{\Delta v} \quad (93)$$

A expressão acima é obtida por diferenças finitas à frente.

- método analítico: as funções de custo, restrição e equações de equilíbrio são diferenciadas analiticamente. Normalmente, a implementação deste método é complexa, pois torna necessário acesso ao código e grande conhecimento da modelagem matemática do problema, mas por outro lado mostra-se eficiente, obtendo valores exatos e menor custo computacional.

- método adjunto: esta maneira de estabelecer o gradiente de uma função é semelhante ao método analítico. O motivo de estabelecer esta abordagem é devido à complexidade de algumas funções para determinar a derivada em relação a uma variável de projeto, ou devido ao alto custo computacional se determinado pelo método analítico, ou das diferenças finitas.

Para exemplificar o método, considera-se uma função qualquer ( $F(v)$ ), e soma-se a mesma, uma parcela. Esta parcela é definida da seguinte forma:

$$\lambda' (ku - f) = 0 \quad (94)$$

em que  $\lambda$  é considerado como um multiplicador de Lagrange e a parcela entre parentes é a equação de equilíbrio.

A função é escrita da seguinte forma:

$$F(v) = F(v) + \lambda' (ku - f) \quad (95)$$

Derivando a equação (95) em relação a uma variável de projeto, obtém-se:

$$\frac{dF(v)}{dv} = \frac{\partial F(v)}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial v} \left( \frac{\partial F(v)}{\partial u} + \lambda' k \right) + \lambda' \frac{\partial k}{\partial v} u \quad (96)$$

em que o segundo termo da equação (96) é igual a zero, desta forma determinando o valor de  $\lambda^t$ .

$$\lambda' k = - \frac{\partial F(v)}{\partial u} \quad (97)$$

em que o segundo termo desta equação (97)  $\left( \frac{\partial F(v)}{\partial u} \right)$  é conhecido como pseudoforça.

Deve-se observar que para cada restrição imposta ao problema resolve-se um sistema de equações para determinação do vetor  $\lambda^t$  correspondente. A derivada da função F é:

$$\frac{dF(v)}{dv} = \frac{\partial F(v)}{\partial v} + \lambda' \frac{\partial k}{\partial v} u \quad (98)$$

- método semi-analítico: análise estrutural é amplamente usada através da discretização do sistema em equações de equilíbrio para representar o campo deslocamento. Para um caso estático linear elástico, a equação apresenta-se como:

$$ku = f \quad (99)$$

em que k é a matriz de rigidez, f o vetor de carga e u o campo de deslocamento. Diferenciando a equação (99) em relação a uma variável de projeto obtém-se:

$$ku' = -k'u + f' \quad (100)$$

O método semi-analítico é baseado na estimativa de  $k'$  e  $f'$ , para determinação de  $u'$ , utilizando-se para isto diferenças finitas para a determinação da pseudocarga (lado direito da equação (100))[Haftka, Adelman, 1989]. A combinação do método analítico e diferenças finitas são facilmente implementadas, obtendo-se bons resultados e com eficiência computacional. Essa possibilidade de determinar o gradiente, também é conhecido como método quase-analítico [Cheng e Yingwei, 1987]. A derivada de  $k'$  é calculada ao nível do sistema, ou a pseudocarga pode ser calculada a nível de elemento[Sienz et. al., 1997].

O método semi-analítico funciona muito bem com variáveis de tamanho, como seção transversal da barra ou espessura da placa. Nas variáveis de projeto para forma, o erro de truncamento associado com aproximação por diferenças finitas de  $k'$  pode ser substancial. O estudo apresentado por Pedersen, Cheng e Rasmussen, 1989, trata sobre a análise de erro para um problema de viga com mudança no comprimento. Foi mostrado que o erro de sensibilidade é proporcional à relativa diferença do comprimento, mas também é proporcional ao quadrado do número de elementos.

O método variacional é fundamentado no princípio do trabalho virtual que conduz a uma boa fundamentação da análise de sensibilidade baseado no contínuo e discreto.

Empregando-se o método dos elementos finitos para solucionar as equações de equilíbrio, a abordagem variacional elimina a necessidade de derivar a matriz de rigidez para o cálculo da sensibilidade, por isso o esforço de implementação é maior do que o método discreto.

### 9.1.1. SENSIBILIDADE DA FUNÇÃO CUSTO

O método analítico é utilizado para determinar o gradiente da função custo em relação à variável de projeto ( $\rho$ ) [Sant'Anna, 2002]. A função objetivo apresentada neste trabalho, tanto na sua forma convexa, conforme descrito na equação (101):

$$V = \sum_{i=1}^{ne} \rho_i V_i \quad (101)$$

quanto nas formas não convexas, equação (102), é função direta da variável de projeto.

$$V = \sum_{i=1}^{ne} [\rho_i^p + \alpha \rho_i (1 - \rho_i)] V_i \quad (102)$$

em que  $p$  e  $\alpha$  são constantes arbitrárias. A função objetivo apresentada na equação (101) ou (102) aplica-se em problemas de otimização com restrição de tensão ou de fadiga.

Assim derivando a equação (102), a forma mais geral, obtém-se:

$$\frac{\partial V}{\partial \rho_i} = [p(\rho_i^{p-1}) + \alpha(1 - 2\rho_i)] V_i \quad (103)$$

Quando  $p = 1$  e  $\alpha = 0$ , a equação (103) reduz-se a:

$$\frac{\partial V}{\partial \rho_i} = V_i \quad (104)$$

ou seja, a equação (103) retorna a sua forma convexa (original), isto é, derivada da função objetivo é constante e equivale ao volume de cada elemento finito.

Para o caso em que  $p < 1$  e  $\alpha = 0$ , a expressão (103) tem a seguinte forma:

$$\frac{\partial V}{\partial \rho_i} = \left[ p(\rho_i^{p-1}) \right] V_i \quad (105)$$

### 9.1.2. SENSIBILIDADE DA RESTRIÇÃO DE FADIGA

Utiliza-se o método adjunto para determinação do gradiente da restrição do critério de fadiga para carregamento multiaxial (equação (106)). O uso deste método tornou-se muito interessante pelo motivo de não existir a necessidade de determinar a derivada do deslocamento em relação à densidade (variável de projeto) e, porque, o problema possui apenas uma restrição.

$$g = \left[ \sum_{i=1}^{ne} \left( \frac{V_i}{V_t} \left( \frac{\tau_i + kP_{\text{máximo}}}{\bar{\tau}} + \varepsilon^{\rho_i} - \varepsilon - 1 \right) \right)^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad (106)$$

em que  $ne$  é o número de elemento,  $V_i$  é o volume de cada elemento,  $V_t$  é o volume total da estrutura,  $\varepsilon$  a relaxação epsilon,  $\tau_i$  é a tensão equivalente de cisalhamento e  $\bar{\tau}$  é a tensão limite de cisalhamento,  $k$  constante do material e  $P_{\text{máximo}}$  é a pressão hidrostática máximo no intervalo de tempo pré-determinado.

Esta função tem um comportamento não linear, e a variável de projeto está implícita dentro da mesma. A derivada da função de restrição é obtida a partir da expressão (106) somada a equação de equilíbrio multiplicada por um Lagrangeano, tendo a seguinte forma:

$$h = \left[ \sum_{i=1}^{ne} \left( \frac{V_i}{V_t} \left( \frac{\tau_i + kP_{\text{máximo}}}{\bar{\tau}} + \varepsilon^{\rho_i} - \varepsilon - 1 \right) \right)^p \right]^{\frac{1}{p}} + \lambda^t (ku - f) \quad (107)$$

$$h = g + \lambda^t (ku - f)$$

Derivando a equação (107) em relação à variável de projeto ( $\rho$ ), obtém-se:

$$\frac{dh}{d\rho_j} = \frac{\partial g}{\partial \tau_k} \frac{\partial \tau_k}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial S_{mn}} \frac{\partial S_{mn}}{\partial \varepsilon_{op}} \frac{\partial \varepsilon_{op}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \rho_j} + \frac{\partial g}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial \varepsilon_{op}} \frac{\partial \varepsilon_{op}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \rho_j} + \frac{\partial g}{\partial \rho_j} + \lambda^t \left( \frac{\partial k}{\partial \rho_j} u + k \frac{\partial u}{\partial \rho_j} - \frac{\partial f}{\partial \rho_j} \right) \quad (108)$$

Colocando em evidência o termo  $\frac{\partial u}{\partial \rho_j}$ , a equação (108) fica da seguinte forma:

$$\frac{dh}{d\rho_j} = \left( \frac{\partial g}{\partial \tau_k} \frac{\partial \tau_k}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial S_{mn}} \frac{\partial S_{mn}}{\partial \varepsilon_{op}} \frac{\partial \varepsilon_{op}}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial \varepsilon_{op}} \frac{\partial \varepsilon_{op}}{\partial u} + \lambda^t k \right) \frac{\partial u}{\partial \rho_j} + \frac{\partial g}{\partial \rho_j} + \lambda^t \left( \frac{\partial k}{\partial \rho_j} u - \frac{\partial f}{\partial \rho_j} \right) \quad (109)$$

Considerando o termo  $\frac{\partial f}{\partial \rho_j} = 0$  e igualando o primeiro termo a zero, obtém-se o valor de  $\lambda$ , conforme mostrado abaixo.

$$\frac{\partial g}{\partial \tau_k} \frac{\partial \tau_k}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial S_{mn}} \frac{\partial S_{mn}}{\partial \varepsilon_{op}} \frac{\partial \varepsilon_{op}}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial \varepsilon_{op}} \frac{\partial \varepsilon_{op}}{\partial u} + \lambda^t k = 0 \quad (110)$$

$$\lambda^t k = - \frac{\partial g}{\partial \tau_k} \frac{\partial \tau_k}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial S_{mn}} \frac{\partial S_{mn}}{\partial \varepsilon_{op}} \frac{\partial \varepsilon_{op}}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial \varepsilon_{op}} \frac{\partial \varepsilon_{op}}{\partial u} \quad (111)$$

Então a derivada da restrição se resume à equação apresentada abaixo:

$$\frac{dh}{d\rho_j} = \frac{\partial g}{\partial \rho_j} + \lambda^t \frac{\partial k}{\partial \rho_j} u \quad (112)$$

Os valores de cada parcela da equação (108) é aberto a seguir detalhadamente.

Derivada da função restrição, equação (106), em relação à densidade do elemento (variável de projeto).

$$\frac{\partial g}{\partial \rho_j} = \frac{1}{p} \left[ \sum_{i=1}^{ne} \left( \frac{V_i}{V_t} \left( \frac{\tau_i + kP_{\text{máximo}}}{\tau_l} + \varepsilon^{\rho_i} - \varepsilon - 1 \right) \right)^p \right]^{\frac{1-p}{p}} \frac{\partial}{\partial \rho_j} \left[ \sum_{i=1}^{ne} \left( \frac{V_i}{V_t} \left( \frac{\tau_i + kP_{\text{máximo}}}{\tau_l} + \varepsilon^{\rho_i} - \varepsilon - 1 \right) \right)^p \right] \quad (113)$$

Assume-se que:

$$fel = \left( \frac{V_i}{V_t} \left( \frac{\tau_i + kP_{\text{máximo}}}{\tau_l} + \varepsilon^{\rho_i} - \varepsilon - 1 \right) \right) \quad (114)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \rho_j} = \frac{1}{p} \left[ \sum_{i=1}^{ne} (fel)^p \right]^{\frac{1-p}{p}} \sum_{i=1}^{ne} \left[ p (fel)^{p-1} \frac{\partial}{\partial \rho_j} (fel) \right] \quad (115)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \rho_j} = \frac{1}{p} \left[ \sum_{i=1}^{ne} (fel)^p \right]^{\frac{1-p}{p}} \sum_{i=1}^{ne} \left[ p (fel)^{p-1} \varepsilon^{\rho_i} \ln \varepsilon \delta_{ij} \right] \quad (116)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \rho_j} = \left[ \sum_{i=1}^{ne} (fel)^p \right]^{\frac{1-p}{p}} (fel)^{p-1} \frac{V_i}{V_t} \varepsilon^{\rho_i} \ln \varepsilon \quad (117)$$

Determinação da derivada  $\frac{\partial g}{\partial \tau_k}$ .

$$\frac{\partial g}{\partial \tau_j} = \frac{1}{p} \left[ \sum_{i=1}^{ne} (fel)^p \right]^{\frac{1-p}{p}} \frac{\partial}{\partial \tau_j} \left[ \sum_{i=1}^{ne} (fel)^p \right] \quad (118)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \tau_j} = \frac{1}{p} \left[ \sum_{i=1}^{ne} (fel)^p \right]^{\frac{1-p}{p}} \sum_{i=1}^{ne} \left[ p (fel)^{p-1} \frac{\partial}{\partial \tau_j} (fel) \right] \quad (119)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \tau_j} = \frac{1}{p} \left[ \sum_{i=1}^{ne} (fel)^p \right]^{\frac{1-p}{p}} \sum_{i=1}^{ne} \left[ p (fel)^{p-1} \frac{V_i}{V_t \tau_i} \delta_{ij} \right] \quad (120)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \tau_j} = \left[ \sum_{i=1}^{ne} (fel)^p \right]^{\frac{1-p}{p}} (fel)^{p-1} \frac{V_i}{\tau_i V_t} \quad (121)$$

Determinação da derivada  $\frac{\partial g}{\partial P_k}$ .

$$\frac{\partial g}{\partial P_j} = \frac{1}{p} \left[ \sum_{i=1}^{ne} (fel)^p \right]^{\frac{1-p}{p}} \frac{\partial}{\partial P_j} \left[ \sum_{i=1}^{ne} (fel)^p \right] \quad (122)$$



$$\frac{\partial g}{\partial P_j} = \frac{1}{p} \left[ \sum_{i=1}^{ne} (fel)^p \right]^{\frac{1-p}{p}} \sum_{i=1}^{ne} \left[ p (fel)^{p-1} \frac{\partial}{\partial P_j} (fel) \right] \quad (123)$$

$$\frac{\partial g}{\partial P_j} = \frac{1}{p} \left[ \sum_{i=1}^{ne} (fel)^p \right]^{\frac{1-p}{p}} \sum_{i=1}^{ne} \left[ p (fel)^{p-1} \frac{V_i k}{V_l \tau_l} \delta_{ij} \right] \quad (124)$$

$$\frac{\partial g}{\partial P_j} = \left[ \sum_{i=1}^{ne} (fel)^p \right]^{\frac{1-p}{p}} (fel)^{p-1} \frac{k V_i}{\tau_l V_l} \quad (125)$$

Cálculo da derivada  $\frac{\partial \tau_{eq}}{\partial a_j}$ :

$$\tau_k = \tau_{eq} = \left( \sum_{i=1}^5 a_i^2 \right)^{1/2} \quad (126)$$

$$\frac{\partial \tau_k}{\partial a_j} = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^5 a_i^2 \right)^{-1/2} \left[ \sum_{i=1}^5 \frac{\partial a_i^2}{\partial a_j} \right] \quad (127)$$

$$\frac{\partial \tau_k}{\partial a_j} = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^5 a_i^2 \right)^{-1/2} 2 \sum_{i=1}^5 a_i \delta_{ij} \quad (128)$$

$$\frac{\partial \tau_k}{\partial a_j} = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^5 a_i^2 \right)^{-1/2} 2 a_j \quad (129)$$

$$\frac{\partial \tau_k}{\partial a_j} = \frac{1}{(\tau_k)^{1/2}} a_j \quad (130)$$

Como exemplo, a representação da máxima amplitude de tensão é formulada para o caso de estado de tensão plano. Determinação da derivada  $\frac{\partial a_1}{\partial S_{xx}}$ :

$$\frac{\partial a_1}{\partial S_{xx}} = \frac{\partial}{\partial S_{xx}} \left( \frac{\sqrt{6}}{2} S_{xx} \right) = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad (131)$$

Determinação da derivada  $\frac{\partial a_2}{\partial S_{xx}}$  e  $\frac{\partial a_2}{\partial S_{yy}}$ :

$$\frac{\partial a_2}{\partial S_{xx}} = \frac{\partial}{\partial S_{xx}} \left( \sqrt{2} S_{yy} + \frac{\sqrt{2}}{2} S_{xx} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (132)$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial S_{yy}} = \frac{\partial}{\partial S_{yy}} \left( \sqrt{2} S_{yy} + \frac{\sqrt{2}}{2} S_{xx} \right) = \sqrt{2} \quad (133)$$

Os termos  $a_3, a_4$  e  $a_5$  são iguais a zero.

Determinação da derivada  $\frac{\partial S_{op}}{\partial \epsilon_{mn}}$ :

$$S_{xx} = \frac{2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz}}{3} \quad (134)$$

$$S_{yy} = \frac{2\sigma_{yy} - \sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{3} \quad (135)$$

$$S_{xy} = \sigma_{xy} \quad (136)$$

As equações (134), (135) e (136) referem-se à parcela do tensor desviador que é obtido da seguinte forma:  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{2} tr(\sigma_{kk}) \delta_{ij}$ .

$$\frac{\partial S_{xx}}{\partial \epsilon_{xx}} = \frac{2}{3} C_{11} - \frac{1}{3} C_{21} \quad (137)$$

$$\frac{\partial S_{xx}}{\partial \epsilon_{yy}} = \frac{2}{3} C_{12} - \frac{1}{3} C_{22} \quad (138)$$

$$\frac{\partial S_{xx}}{\partial \varepsilon_{xy}} = 0 \quad (139)$$

$$\frac{\partial S_{yy}}{\partial \varepsilon_{xx}} = -\frac{1}{3}C_{11} + \frac{2}{3}C_{21} \quad (140)$$

$$\frac{\partial S_{yy}}{\partial \varepsilon_{yy}} = -\frac{1}{3}C_{12} + \frac{2}{3}C_{22} \quad (141)$$

$$\frac{\partial S_{yy}}{\partial \varepsilon_{xy}} = 0 \quad (142)$$

$$\frac{\partial S_{xy}}{\partial \varepsilon_{xx}} = 0 \quad (143)$$

$$\frac{\partial S_{xy}}{\partial \varepsilon_{yy}} = 0 \quad (144)$$

$$\frac{\partial S_{xy}}{\partial \varepsilon_{xy}} = C_{33} \quad (145)$$

Determinação da derivada  $\frac{\partial P}{\partial \varepsilon_{mn}}$ :

$$\frac{\partial P}{\partial \varepsilon_{xx}} = \frac{(C_{11} + C_{21})}{3} \quad (146)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \varepsilon_{yy}} = \frac{(C_{12} + C_{22})}{3} \quad (147)$$

O valor da derivada da deformação em relação ao deslocamento,  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial u}$ , é a matriz B

O método de diferenças finitas é utilizado neste trabalho para simples verificação do valor da sensibilidade, obtido pelo método adjunto ou analítico.

### 9.1.3. SENSIBILIDADE DA RESTRIÇÃO DE TENSÃO

A determinação da derivada da restrição de tensão utiliza-se do método adjunto, pelo mesmo motivo já supracitado.

A função de restrição de tensão é escrita na forma global e faz uso da norma p:

$$g(\sigma(\rho), \rho) = \left[ \sum_{i=1}^{ne} \left( \frac{v_i}{V_i} \left( \frac{\sigma_{vM}}{\sigma_i} + \varepsilon^p - \varepsilon \right) \right)^p \right]^{1/p} - 1 \leq 0 \quad (148)$$

Resolvendo a derivada da equação (148) pelo método adjunto, obtém-se:

$$h = g(\sigma(\rho), \rho) + \lambda^t (Ku - f) \quad (149)$$

em que o segundo termo da equação (149) é a equação de equilíbrio e  $\lambda$  é um multiplicador para não alterar a equação(148) original.

$$\frac{dh}{d\rho_i} = \frac{\partial g(\sigma(\rho), \rho)}{\partial \sigma_k} \frac{\partial \sigma_k}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \rho_j} + \frac{\partial g(\sigma(\rho), \rho)}{\partial \rho_j} + \lambda^t \left[ K \frac{\partial u}{\partial \rho_j} + \frac{\partial K}{\partial \rho_j} u - \frac{\partial f}{\partial \rho_j} \right] \quad (150)$$

em que o último termo dentro do colchete é considerado igual zero, pois forças de corpo neste problema são desprezadas. Isolando o termo  $\frac{\partial u}{\partial \rho_j}$  na equação (150), tem-se:

$$\frac{dh}{d\rho_j} = \left[ \frac{\partial g(\sigma(\rho), \rho)}{\partial \sigma_k} \frac{\partial \sigma_k}{\partial u} + \lambda^t K \right] \frac{\partial u}{\partial \rho_j} + \lambda^t \frac{\partial K}{\partial \rho_j} u + \frac{\partial g}{\partial \rho_j} \quad (151)$$

em que o termo entre colchetes é igualado a zero, pois corresponde a equação de equilíbrio. A expressão (151) é expressa como:

$$\frac{dh}{d\rho_j} = \lambda^t \frac{\partial K}{\partial \rho_j} u + \frac{\partial g}{\partial \rho_j} \quad (152)$$

em que o valor de  $\lambda$  para solucionar a equação (151) é obtido da seguinte forma:

$$\left[ \frac{\partial g(\sigma(\rho), \rho)}{\partial \sigma_k} \frac{\partial \sigma_k}{\partial u} + \lambda^t K \right] = 0 \quad (153)$$

$$\lambda^t = -K^{-1} \frac{\partial g(\sigma(\rho), \rho)}{\partial \sigma_k} \frac{\partial \sigma_k}{\partial u} \quad (154)$$

em que  $\frac{\partial g(\sigma(\rho), \rho)}{\partial \sigma_k}$  é expressa como:

$$\frac{\partial g(\sigma(\rho), \rho)}{\partial \sigma_k} = \frac{1}{p} \left[ \sum_{i=1}^{ne} \left( \frac{v_i}{V_t} \left( \frac{\sigma_{vM}}{\sigma_l} + \varepsilon^\rho - \varepsilon \right) \right)^p \right]^{1-p/p} \frac{\partial}{\partial \sigma_k} \left[ \sum_{i=1}^{ne} \left( \frac{v_i}{V_t} \left( \frac{\sigma_{vM}}{\sigma_l} + \varepsilon^\rho - \varepsilon \right) \right)^p \right] \quad (155)$$

sendo

$$gh = \frac{\sigma_{vM}}{\sigma_l} + \varepsilon^\rho - \varepsilon \quad (156)$$

$$\frac{\partial g(\sigma(\rho), \rho)}{\partial \sigma_k} = \frac{1}{p} \left[ \sum_{i=1}^{ne} \left( \frac{v_i}{V_t} (gh) \right)^p \right]^{1-p/p} \left[ p \sum_i^{ne} (gh)^{p-1} \frac{\partial}{\partial \sigma_k} \left( \frac{v_i}{V_t} \left( \frac{\sigma_{ik}}{\sigma_l} + \varepsilon^\rho - \varepsilon \right) \right) \right] \quad (157)$$

$$\frac{\partial g(\sigma(\rho), \rho)}{\partial \sigma_k} = \left[ \sum_{i=1}^{ne} \left( \frac{v_i}{V_t} (gh) \right)^p \right]^{1-p/p} \left[ \sum_i^{ne} (gh)^{p-1} \left( \frac{v_i}{V_t} \frac{1}{\sigma_l} \delta_{ik} \right) \right] \quad (158)$$

$$\frac{\partial g(\sigma(\rho), \rho)}{\partial \sigma_k} = \left[ \sum_{i=1}^{ne} \left( \frac{v_i}{V_t} (gh) \right)^p \right]^{1-p/p} \left( \frac{v_i}{V_t} gh \right)^{p-1} \frac{v_i}{V_t} \frac{1}{\sigma_l} \quad (159)$$

O critério de von Mises, tensão equivalente, é calculada a partir dos autovalores do tensor de Cauchy, uma medida euleriana de tensões, que considera a posição inicial, sendo uma função da posição final de cada ponto do corpo, ou seja, uma espécie de referencial móvel [Atkin e Fox, 1980].

Existem diversas formas de escrever a tensão equivalente de von Mises, utilizando as tensões nas direções principais ou nos eixos coordenados. Uma das representações mais comuns desse critério de falha, aplicado ao problema da elasticidade bidimensional (EPT) é mostrada a seguir:

$$\sigma_{vM} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2 + 3\sigma_{12}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}} \quad (160)$$

Neste trabalho adotou-se uma formulação mais conveniente para o cálculo da tensão equivalente, utilizando diretamente o vetor deslocamento:

$$\sigma_k = \sigma_{vM} = \sqrt{u^T M u} \quad (161)$$

em que:

$$M = T^T V T \quad (162)$$

$$T = \rho E^0 B \quad (163)$$

$$\sigma_k = \left( u^T \rho_k^2 E^0 B^T V E^0 B u \right)^{1/2} \quad (164)$$

então o termo  $\frac{\partial \sigma_k}{\partial u}$

$$\frac{\partial \sigma_k}{\partial u} = \frac{1}{2} \left( u^T \rho_k^2 E^0 B^T V E^0 B u \right)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial u} \left( u^T \rho_k^2 E^0 B^T V E^0 B u \right) \quad (165)$$

$$\frac{\partial \sigma_k}{\partial u} = \frac{1}{2\sigma_k} \rho_k^2 E^0 B^T V E^0 B \frac{\partial}{\partial u} (u^T u) \quad (166)$$

$$\frac{\partial \sigma_k}{\partial u} = \frac{1}{\sigma_k} \rho_k^2 E^0 B^T V E^0 B u \quad (167)$$

$$\frac{\partial \sigma_k}{\partial u} = \frac{1}{\sigma_k} \rho_k^2 T^{0'} V T^0 u \quad (168)$$

$$\frac{\partial \sigma_k}{\partial u} = \frac{1}{\sigma_k} \rho_k^2 M^0 u \quad (169)$$

$$\frac{\partial \sigma_k}{\partial u} = \frac{1}{\sigma_k^0} M^0 u \quad (170)$$

O próximo termo da equação (152) a ser calculado é  $\frac{\partial g(\sigma(\rho), \rho)}{\partial \rho_j}$ :

$$\frac{\partial g(\sigma(\rho), \rho)}{\partial \rho_j} = \frac{1}{p} \left[ \sum_{i=1}^{ne} \left( \frac{v_i}{V_t} \left( \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_l} + \varepsilon^{\rho_i} - \varepsilon \right) \right)^p \right]^{1-p/p} \frac{\partial}{\partial \rho_j} \left[ \sum_{i=1}^{ne} \left( \frac{v_i}{V_t} \left( \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_l} + \varepsilon^{\rho_i} - \varepsilon \right) \right)^p \right] \quad (171)$$

$$\frac{\partial g(\sigma(\rho), \rho)}{\partial \rho_j} = \frac{1}{p} \left[ \sum_{i=1}^{ne} \left( \frac{v_i}{V_t} gh \right)^p \right]^{1-p/p} \left[ p \sum_{i=1}^{ne} \left( \frac{v_i}{V_t} gh \right)^{p-1} \frac{\partial}{\partial \rho_j} \left( \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_l} + \varepsilon^{\rho_i} - \varepsilon \right) \right] \quad (172)$$

$$\frac{\partial g(\sigma(\rho), \rho)}{\partial \rho_j} = \left[ \sum_{i=1}^{ne} \left( \frac{v_i}{V_t} gh \right)^p \right]^{1-p/p} \left[ \sum_{i=1}^{ne} \left( \frac{v_i}{V_t} gh \right)^{p-1} \varepsilon^{\rho_i} \ln(\varepsilon) \delta_{ij} \right] \quad (173)$$

$$\frac{\partial g(\sigma(\rho), \rho)}{\partial \rho_j} = \left[ \sum_{i=1}^{ne} \left( \frac{v_i}{V_t} gh \right)^p \right]^{1-p/p} \left[ \left( \frac{v_i}{V_t} gh \right)^{p-1} \varepsilon^{\rho_i} \ln(\varepsilon) \right] \quad (174)$$

O termo  $\frac{\partial K}{\partial \rho_j}$  é facilmente calculado, pois a matriz de rigidez global tem relação

direta com a densidade de material.

## 9.2. SENSIBILIDADE DE FORMA

A otimização de forma para estruturas contínuas em 2D foi primeiramente estudada por Zienkiewicz e Campbell, 1973, e Ramakrishnan e Francavilla, 1974, sendo formulada as expressões de sensibilidade analítica. Para o caso de estrutura em 3D, a expressão de sensibilidade para forma foi formulado por Wang, Sun, Gallagher, 1985.

O cálculo do gradiente da função em relação à variável de projeto de forma é mais propenso a apresentar problemas do que o cálculo da sensibilidade em relação à variável de tamanho, observação feita por Haftka e Adelman, 1989, Pedersen et. al., 1989, Barthelemy e Haftka, 1988 e Cheng et al., 1989. Essa observação foi comprovada por Sienz e Hinton, 1997, mostrando que o método semi-analítico pode apresentar sérios problemas envolvendo a variável de projeto de forma. A imprecisão ou erro na determinação da sensibilidade do deslocamento se manifesta rapidamente com o refinamento da malha de elementos finitos. Deve-se notar que este tipo de erro não ocorre com os métodos analítico e de diferenças finitas. Este tipo de problema é atribuído à diferenciação numérica da matriz de rigidez que é inerente ao método [Olhoff et. al., 1992].

O problema aparece na diferenciação numérica da matriz de rigidez do elemento em relação à variável de projeto de forma e o componente do vetor pseudocarga é associado à rotação de corpo rígido por não desaparecer. Isto significa que o uso da aproximação de diferença finita de primeira ordem introduz um erro na forma de um momento extra para a pseudocarga, este momento é resultante da aproximação da pseudocarga com a rotação de corpo rígido de um elemento. Tal fenômeno ocorre quando o campo de deslocamento é caracterizado pelo domínio de rotação de corpo rígido, mas este tipo de erro não aparece somente em estruturas que tenham graus de liberdade de translação e rotação, mas também para elementos planos e sólidos, que tenham apenas grau de liberdade de translação. A sugestão de Olhoff et. al. em realizar a diferenciação numérica exata da matriz de rigidez.

A utilização deste método exige um fator de correção para a obtenção da derivada. O método proposto de correção é simples, pode ser facilmente computada na análise de sensibilidade através do contorno da geometria descrito com B-spline, definindo o fator de correção para derivada.

Há duas possibilidades de formulação para o cálculo da sensibilidade do projeto de forma:



- derivada do material [Haftka et. al., 1996]: considerando o campo de variação da forma  $\phi$  tal que uma partícula localizada em  $x$  (a coordenada  $x$  é associada como coordenada material ou Lagrangiana) seja deslocada para  $x_\phi$

$$x_\phi = x + \phi(x, p) \quad (175)$$

em que  $p$  é variável de projeto de forma.

A variação modifica o domínio  $V$  e o contorno  $S$  da estrutura.

Ao considerar uma função  $f(x, p)$  definida no domínio estrutural  $V$  modificado, pode-se denotar a derivada parcial,  $\frac{\partial f}{\partial p}$ , medindo a mudança da posição de  $f$  na estrutura fixa, sendo conhecida como derivada local. A mesma mede a mudança em um ponto fixo ( $f$ ) do material levando em conta a mudança de  $x$  tal como a mudança de  $p$ . Essa é conhecida como derivada do material ou total, sendo denotada como:

$$\frac{df}{dp} = \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial x_\phi} \frac{dx_\phi}{dp} \quad (176)$$

sendo que  $\frac{dx_\phi}{dp} = \frac{\partial x_\phi}{\partial p}$  e  $f_p = \frac{df}{dp}$ ,  $f_{,p} = \frac{\partial f}{\partial p}$ . Então a expressão (176) pode ser escrita da seguinte forma:

$$f_p = f_{,p} + \nabla f' x_{\phi,p} = f_{,p} + \nabla f' v \quad (177)$$

em que

$$v = x_{\phi,p} = \phi_{,p} \quad (178)$$

sendo denominado como campo de velocidade de forma. Esta terminologia é baseada na variável  $p$ .

Para diferenciar a equação do trabalho virtual em relação à variável  $p$  é necessário calcular a derivada da integral sobre o volume e sobre a superfície da estrutura. A integral  $I_v$  representa o domínio da estrutura,

$$I_V = \int_V f(x, p) dV \quad (179)$$

A derivada da equação (179) em relação à variável p:

$$I_{Vp} = \int_V f_p dV + \int_V f (dV)_p = \int_V \left( f_p + \bar{V}_p f \right) dV \quad (180)$$

em que  $\bar{V}_p$  é a mudança relativa do volume.

A integral sobre a superfície

$$I_S = \int_S f(x, p) dS \quad (181)$$

A derivada da equação (181) em relação à variável p é

$$I_{Sp} = \int_S f_p dS + \int_S f (dS)_p \quad (182)$$

A derivada da superfície do elemento é:

$$(dS)_p = \bar{S}_p dS = -Hn^t v dS \quad (183)$$

em que n é o vetor normal no contorno de S, e H é a curvatura de S em duas dimensões e duas vezes a curvatura média em 3D.

- parametrização do domínio: o vetor de coordenada material x é dado em relação a um domínio como:

$$x = x(r, p) \quad (184)$$

em que r é o vetor de coordenada referente ao domínio  $\Omega$  com contorno  $\Gamma$ , e p é o parâmetro de forma.

O método dos elementos finitos é usado de maneira que cada elemento é referenciado como um domínio, então o vetor de coordenada  $x$  do elemento pode ser escrito como:

$$x = \sum_{i=1}^{nnel} N_i(r) d_i(p) \quad (185)$$

em que  $N_i$  são as funções de forma do elemento,  $r$  um vetor de coordenada local, e  $d_i$  são os vetores de coordenada nodal. A mudança na geometria é representada pela variação da coordenada nodal, com a função de forma.

A transformação entre o domínio de referência e do material é caracterizada pela matriz jacobiana euleriana ( $J$ ) e sua inversa ( $J^{-1}$ ).

$$J_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial x_j} = r_{i,j} \quad (186)$$

$$J_{ij}^{-1} = \frac{\partial x_i}{\partial r_j} = x_{i,j} \quad (187)$$

A equação (186) refere-se à diferenciação relativa à coordenada material e a equação (187) denota a diferenciação com relação à coordenada de referência. O volume e uma área diferencial na configuração material são expressos em termos da configuração usando o determinante do jacobiano euleriano.

$$dV = \det(J^{-1}) d\Omega \quad (188)$$

$$dS = \det(k^{-1}) d\Gamma \quad (189)$$

em que

$$\det(k^{-1}) = \left( J_{ji}^E J_{ki}^E n_j^r n_k^r \right)^{1/2} \det(J^{-1}) \quad (190)$$

em que  $n_i^r$  são componentes de um vetor unitário normal à superfície  $\Gamma$  no domínio de referência.

A derivada de  $J^{-1}$  com relação à  $p$  é obtida da definição

$$J_{ij,p}^{-1} = (x_{i,j})_{,p} \quad (191)$$

A derivada de J pode ser calculada da seguinte forma:

$$JJ^{-1} = I \quad (192)$$

$$J_{,p} J^{-1} + JJ_{,p}^{-1} = 0 \quad (193)$$

$$J_{,p} = -JJ_{,p}^{-1}J \quad (194)$$

A aproximação da parametrização do domínio (deslocamento, tensão, deformação) é considerada função da coordenada de referência (r). Ao efetuar a derivada da função em relação à p e manter a posição r constante, a resposta obtida é a quantidade da derivada material.

A integral do volume pode ser escrita em termos da coordenada de referência, como:

$$I_V = \int_V f(x, p) dV = \int_{\Omega} \bar{f}(r, p) \det(J^{-1}) d\Omega \quad (195)$$

em que  $\bar{f}$  é a nova forma da função escrito em termo da coordenada de referência. Então:

$$I_{Vp} = \int_{\Omega} \left( f_p + \bar{V}_p \bar{f} \right) \det(J^{-1}) d\Omega \quad (196)$$

em que

$$\bar{V} = \frac{(\det(J^{-1}))_p}{\det(J^{-1})} \quad (197)$$

E da mesma forma para integral da superfície.

$$I_{Sp} = \int_{\Gamma} \left( f_p + \bar{S}_p \bar{f} \right) \det(k^{-1}) d\Gamma \quad (198)$$

em que

$$\bar{S}_p = \frac{\left(\det(k^{-1})\right)_p}{\det(k^{-1})} \quad (199)$$

### 9.2.1. SENSIBILIDADE DA FUNÇÃO CUSTO

A função objetivo do problema é minimizar o volume e a derivada é representada pelo determinante da equação (224).

### 9.2.2. SENSIBILIDADE DA RESTRIÇÃO

A equação (200) representa a restrição do critério de fadiga para carregamento multiaxial imposta ao problema de otimização de forma. Uma característica importante desta função é caracterizada por não ser linear e não convexa.

$$g = \sum_{i=1}^{ne} \left( \frac{\tau_k + kP_{máximo}}{\tau_l} - 1 \right) \quad (200)$$

A expressão acima é derivada sob a forma da regra da cadeia, ficando em função da coordenada nodal ( $v$ ), que está implícita dentro da restrição, e da variável de projeto, ponto de controle ( $p$ ).

$$\frac{dg}{dp} = \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial p} \quad (201)$$

O termo  $\frac{\partial v}{\partial p}$  corresponde ao campo de velocidade do nó. A derivada da função em relação à coordenada do nó, é mostrada a seguir:

$$\frac{\partial g}{\partial v_j} = \frac{\partial g}{\partial \tau_k} \frac{\partial \tau_k}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial S_{nm}} \frac{\partial S_{nm}}{\partial \varepsilon_{op}} \frac{\partial \varepsilon_{op}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial v_j} + \frac{\partial g}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_{op}} \frac{\partial \varepsilon_{op}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial v_j} \quad (202)$$

em que  $\tau$  é a tensão de cisalhamento equivalente de cada elemento,  $a_i$  é a máxima amplitude no ciclo de tensão durante um intervalo de tempo e  $i = 1,2$ ,  $S_{nm}$  é uma componente da tensão de cisalhamento,  $\varepsilon_{op}$  corresponde ao vetor de deformação e  $u$  o deslocamento global.

O próximo passo neste estudo é a determinação da derivada do deslocamento em relação à coordenada nodal (variável de projeto), procedimento utilizado por vários autores, citando Haftka e Gürdal [Haftka e Gürdal, 1992]. Considerando a equação de equilíbrio:

$$ku = f \quad (203)$$

Isolando o termo do deslocamento na equação (203), obtém-se:

$$u = k^{-1}f \quad (204)$$

então

$$\frac{\partial u}{\partial v_j} = \frac{\partial}{\partial v_j}(k^{-1}f) = \frac{\partial k^{-1}}{\partial v_j}f + k^{-1}\frac{\partial f}{\partial v_j} \quad (205)$$

A equação (205) é uma expressão analítica geral que pode ser utilizada para o cálculo da derivada do deslocamento. Essa expressão, entretanto, não se encontra em uma forma conveniente. A derivada da matriz de rigidez global é facilmente calculada, pois tem dependência direta com a densidade. Sua inversa deve ser determinada e uma propriedade básica da álgebra linear afirma que qualquer matriz quadrada multiplicada pela sua inversa resulta em uma matriz identidade de mesma dimensão. Conforme demonstrado a seguir obtém-se:

$$k \cdot k^{-1} = I \quad (206)$$

Derivando a equação (206) em relação à variável de projeto tem-se:

$$\frac{\partial k}{\partial v_j}k^{-1} + k\frac{\partial k^{-1}}{\partial v_j} = \frac{\partial I}{\partial v_j} \quad (207)$$

Na equação (207), o termo da derivada da identidade em relação à coordenada nodal é igual a zero, pois trata-se de um valor constante e isolando o termo  $\frac{\partial k^{-1}}{\partial v_j}$  obtém-se:

$$\frac{\partial k^{-1}}{\partial v_j} = -k^{-1} \frac{\partial k}{\partial v_j} k^{-1} \quad (208)$$

Substituindo a equação (208) na (205) e considerando que o segundo termo da equação (205) seja igual, pois não vai se considerar força de corpo neste problema. Assim:

$$\frac{\partial u}{\partial v_j} = -k^{-1} \frac{\partial k}{\partial v_j} k^{-1} f \quad (209)$$

Uma observação importante trata-se do estudo realizado por Wang et. al., 1985, pois consideraram a possibilidade do carregamento externo ser dependente das variáveis de projeto, mas esse ponto não será tratado neste trabalho.

Aplicando a equação (204) em (209), chega-se a seguinte expressão:

$$\frac{\partial u}{\partial v_j} = -k^{-1} \frac{\partial k}{\partial v_j} u \quad (210)$$

O passo seguinte é a determinação da derivada da matriz de rigidez em relação à variável de projeto (coordenada nodal), estudo já detalhado por Pablo [?]. Considerando a matriz de rigidez elementar de um elemento

$$k_e = \int \int_e B' C B dx dy dz = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B' C B |J| d\xi d\eta \quad (211)$$

e assumindo que os parâmetros materiais que definem a matriz constitutiva não sejam dependentes das variáveis de projeto, a sua derivada é dada por

$$\frac{\partial k_e}{\partial v_j} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial B'}{\partial v_j} C B |J| d\xi d\eta + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B' C \frac{\partial B}{\partial v_j} |J| d\xi d\eta + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B' C B \frac{\partial |J|}{\partial v_j} d\xi d\eta \quad (212)$$

A equação (212) faz uso do método da parametrização do domínio. Para a determinação do gradiente da matriz de rigidez depende do cálculo das derivadas  $\frac{\partial B}{\partial v_j}$  e  $\frac{\partial |J|}{\partial v_j}$ .

A matriz B para um estado plano de tensão é dado por:

$$B = [b_1, \dots, b_n] \quad (213)$$

em que n corresponde ao número de nós do elemento e b tem a seguinte forma:

$$b_i = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,z} \\ N_{i,y} & N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,z} & N_{i,y} \\ N_{i,z} & 0 & N_{i,x} \end{bmatrix} \quad (214)$$

A derivada de B em relação à variável de projeto é dada como:

$$\frac{\partial B}{\partial v_j} = \left[ \frac{\partial b_1}{\partial v_j}, \dots, \frac{\partial b_n}{\partial v_j} \right] \quad (215)$$

em que

$$\frac{\partial b_i}{\partial v_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{i,x}}{\partial v_j} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_{i,y}}{\partial v_j} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_{i,z}}{\partial v_j} \\ \frac{\partial N_{i,y}}{\partial v_j} & \frac{\partial N_{i,x}}{\partial v_j} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_{i,z}}{\partial v_j} & \frac{\partial N_{i,y}}{\partial v_j} \\ \frac{\partial N_{i,z}}{\partial v_j} & 0 & \frac{\partial N_{i,x}}{\partial v_j} \end{bmatrix} \quad (216)$$



Para determinar os termos  $\frac{\partial}{\partial v_j} \begin{bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \\ N_{i,z} \end{bmatrix}$ , deve-se partir da seguinte expressão mostrada

abaixo:

$$\begin{bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \\ N_{i,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial X} & \frac{\partial \eta}{\partial X} & \frac{\partial \zeta}{\partial X} \\ \frac{\partial \xi}{\partial Y} & \frac{\partial \eta}{\partial Y} & \frac{\partial \zeta}{\partial Y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial Z} & \frac{\partial \eta}{\partial Z} & \frac{\partial \zeta}{\partial Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \\ N_{i,\zeta} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \\ N_{i,\zeta} \end{bmatrix} \quad (217)$$

então

$$\frac{\partial}{\partial v_j} \begin{bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \\ N_{i,z} \end{bmatrix} = \frac{\partial J^{-1}}{\partial v_j} \begin{bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \\ N_{i,\zeta} \end{bmatrix} \quad (218)$$

A derivada da inversa do jacobiano pode ser obtida utilizando-se das mesmas condições expressas para equação (206).

$$J^{-1} \cdot J = I \quad (219)$$

$$\frac{\partial J^{-1}}{\partial v_j} J + J^{-1} \frac{\partial J}{\partial v_j} = 0 \quad (220)$$

$$\frac{\partial J^{-1}}{\partial v_j} = J^{-1} \frac{\partial J}{\partial v_j} J^{-1} \quad (221)$$

Portanto, pode-se escrever a equação (218) da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial v_j} \begin{bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \\ N_{i,z} \end{bmatrix} = J^{-1} \frac{\partial J}{\partial v_j} J^{-1} \begin{bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \\ N_{i,\zeta} \end{bmatrix} \quad (222)$$

Pode-se concluir pela equação (222) que o cálculo do gradiente do deslocamento só depende da derivada da matriz do jacobiano e do determinante do jacobiano.

O cálculo da derivada da matriz do jacobino é demonstrado a seguir:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} & \frac{\partial Z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} & \frac{\partial Z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial X}{\partial \zeta} & \frac{\partial Y}{\partial \zeta} & \frac{\partial Z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix} \quad (223)$$

$$\frac{\partial J}{\partial v_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial x_i}{\partial v_j} & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial y_i}{\partial v_j} & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial z_i}{\partial v_j} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial x_i}{\partial v_j} & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial y_i}{\partial v_j} & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial z_i}{\partial v_j} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\partial x_i}{\partial v_j} & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\partial y_i}{\partial v_j} & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\partial z_i}{\partial v_j} \end{bmatrix} \quad (224)$$

## 10. IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO

Nos capítulos anteriores os principais conceitos relativos ao problema de otimização topológica foram apresentados nesse trabalho, em que a revisão bibliográfica voltou-se aos principais trabalhos e pesquisadores desta área até os dias atuais. Os tópicos citados foram estabelecidos uma sólida fundamentação teórica, ou seja, a minimização do volume de estruturas contínuas bidimensionais sujeitas à restrição de fadiga ou tensão.

Na área de otimização, tanto topológica quanto de forma, busca obter a melhor forma geométrica do componente para um determinado carregamento, com o objetivo principal em reduzir peso e consumo de matéria prima.

O processo de otimização topológica pode ser descrito nos seguintes passos:

- estrutura inicial;
- modelo de elementos finitos do projeto otimizado;
- representação do contorno do projeto otimizado (pós-processamento da imagem);
- produto final.

Fluxograma geral de um algoritmo de otimização (em anexo encontra-se detalhado o fluxograma).

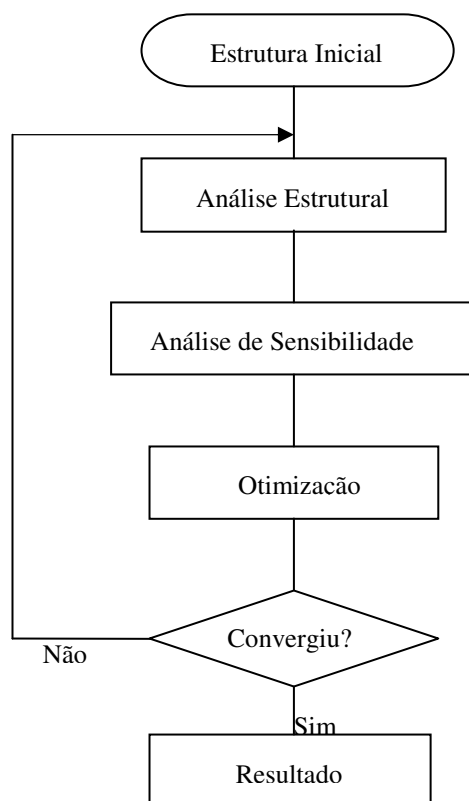


Figura 10.1: Esquema geral de um algoritmo de otimização

## 10.1 MINIMIZAÇÃO DO VOLUME COM RESTRIÇÃO DE TENSÃO

A primeira parte deste trabalho deseja-se encontrar o mínimo volume( $V$ ) de um componente, em que a restrição de tensão admissível( $\bar{\sigma}$ ) é imposta à estrutura, de maneira que a mesma esteja completamente tensionada. No capítulo 7 é realizada uma revisão sobre a otimização topológica com restrição de tensão, em que o problema do ótimo singular é abordado e a solução adotada para este caso a relaxação  $\varepsilon$  (Chen e Guo, 1997). O problema da singularidade acontece quando elementos de baixas densidades que tenderiam a desaparecer violam a restrição de tensão, fazendo com que os algoritmos baseados nas condições de ótimo de Karush-Kuhn-Tucker não consigam atingir a solução ótima.

Com o objetivo de reduzir o tamanho do problema, adotou-se a restrição de tensão escrita na forma global, uma restrição por caso de carregamento, já que para o problema com restrição de tensão local, haveriam “n” restrições ( $n$  = número de elementos finitos) para cada caso de carga. O problema é formulado baseado na equação 21, sendo escrito de forma simples:

$$\begin{aligned} \min \quad & V \\ \text{sujeito a} \quad & \frac{\sigma^k}{\bar{\sigma}} \leq 1 \quad \text{em } \Omega \\ & \rho_{\min} \leq \rho \leq 1 \end{aligned} \quad (225)$$

em que  $\sigma^k$  é uma medida de tensão equivalente global relativa ao caso de carregamento  $k$ ,  $\bar{\sigma}$  é a medida de tensão equivalente limite e  $V$  é o volume da estrutura (função objetivo).

$$V = \sum_{i=1}^{ne} \rho_i^p V_i \quad (226)$$

em que  $p$  é o expoente de penalização,  $V_i$  é o volume do elemento  $i$  e  $ne$  é o número de elementos da malha. Quando  $p = 1$ , o problema é convexo e se  $p > 1$ , a equação torna-se não convexa, mas faz com que os elementos com densidades intermediárias tendam a desaparecer, obtendo uma estrutura com elementos com densidade igual a zero ou um, pois materiais porosos são muito difíceis de serem construídos. A equação do volume pode ser melhor compreendida observando a figura 5.2 (capítulo 5).

A penalização aplicada na função objetivo acima para o problema com restrição de flexibilidade (trabalho das forças externas) é o suficiente para ter uma estrutura bem definida, o

que não ocorre para o problema com restrição de tensão. Uma relação bastante interessante é mostrada na equação (32), que pode ser escrita da seguinte forma:

$$V = \sum_{i=1}^{ne} [\rho_i^p + \alpha \rho_i (1 - \rho_i)] V_i \quad (227)$$

em que  $\alpha$  é um valor selecionado heurísticamente. O gráfico desta função é mostrado na figura 5.3 (capítulo 5).

Nesse trabalho foi utilizado o critério de von Mises, mas a formulação 1 não resolve o problema da singularidade das tensões, fenômeno estudado por diversos autores e resolvido por Cheng e Guo, 1997, usando a técnica da relaxação  $\varepsilon$ , embora contestada por Stolpe e Svanberg, 2001. Aplicando a relaxação  $\varepsilon$ , o problema é reformulado seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \min \quad & V \\ \text{sujeito a} \quad & \frac{\sigma^k}{\sigma} - 1 \leq \varepsilon \\ & \varepsilon^2 = \rho_{\min} \leq \rho \\ & \rho_{\min} \leq \rho \leq 1 \end{aligned} \quad (228)$$

No problema acima, as restrições estão reformuladas, acrescidas da relaxação. O problema é solucionado aplicando o método da continuação, começando com valores elevados de  $\varepsilon$ , resolvendo sucessivos problemas de otimização com valores cada vez menores para  $\varepsilon$  até que o mesmo seja igual a zero, retornando ao problema original (equação 1).

Uma comparação entre o problema com restrição de tensão global com a restrição de tensão local, trata-se dos valores de  $\varepsilon$  adotado. Para o caso com restrição de tensão local o valor inicial de  $\varepsilon$  é 0,1 diminuindo para valores  $10^{-6}$  a  $10^{-8}$  [Sant'Anna, 2002], enquanto para restrição de tensão global o valor inicial de  $\varepsilon$  é 0,5 e o último valor de  $\varepsilon$  antes de iniciar a penalização é zero.

## 10.2 LINEARIZAÇÃO DA RESTRIÇÃO DE TENSÃO

Os algoritmos de programação matemática, na sua maioria, necessitam de informações sobre a derivada e o valor da função, para que possam encontrar a solução ótima do problema. Nesse trabalho foi adotado o método da programação linear sequencial (SLP), em que os valores da sensibilidade e da função são essenciais para solução do problema.

O método da programação linear seqüencial (SLP) tem como particularidade o uso de funções lineares, por esse motivo a restrição de tensão é expandida por série de Taylor e truncada na primeira derivada.

Equação da restrição de tensão global:

$$g = \left[ \sum_{i=1}^{ne} \left( \frac{v_i}{V_t} \left( \frac{\sigma_{vM}}{\sigma} + \varepsilon^p - \varepsilon \right) \right)^q \right]^{1/q} \leq 1 \quad (229)$$

Equação da restrição de tensão global expandida em série de Taylor:

$$g^k(\rho_0) + \frac{\partial g^k}{\partial \rho_i}(\rho_i - \rho_0) \leq 1 \quad (230)$$

Reagrupando os termos da inequação para ficar na forma  $Ax \leq b$  que é o padrão para a rotina de programação linear utilizada, então:

$$\frac{\partial g^k}{\partial \rho_i}(\rho_i) \leq 1 - g^k(\rho_0) + \frac{\partial g^k}{\partial \rho_i}(\rho_0) \quad (231)$$

A derivada da inequação (230) é determinada conforme demonstrado no capítulo 9 sobre sensibilidade, fazendo uso do método adjunto.

### 10.3 MINIMIZAÇÃO DO VOLUME COM RESTRIÇÃO DE FADIGA

Na área de projeto mecânico é muito importante ter o conhecido do comportamento do componente ao longo da sua vida, isto é, se o mesmo terá vida finita ou infinita. Por esse motivo, o limite à fadiga na estrutura é considerado como uma das principais restrições imposta. Nesse trabalho somente será considerado os componentes com vida infinita.

A formulação do problema para minimização do volume com restrição de fadiga é baseada no problema com restrição de tensão global, escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
& \min \quad V \\
& \text{sujeito a} \quad \frac{\tau_{\text{eq}} + kp_{\text{max}}}{\lambda} \leq 1 \quad \text{em } \Omega \\
& \quad \rho_{\min} \leq \rho \leq 1
\end{aligned} \tag{232}$$

Todos os problemas apresentados para a otimização estrutural topológica com restrição de tensão global são os mesmos para com restrição de fadiga. A solução da relaxação epsilon é aplicada da mesma forma a este tipo de problema.

Então o problema é reformulado como se segue:

$$\begin{aligned}
& \min \quad V \\
& \text{sujeito a} \quad \frac{\tau_{\text{eq}} + kp_{\text{max}}}{\lambda} - 1 \leq \varepsilon \\
& \quad \varepsilon^2 = \rho_{\min} \leq \rho \\
& \quad \rho_{\min} \leq \rho \leq 1
\end{aligned} \tag{233}$$

Observando a equação, as restrições são reformuladas, em que a relaxação  $\varepsilon$  é somada a restrição de fadiga. Como no caso anterior, aplica-se o método da continuação começando com valores elevados de  $\varepsilon$ , que para este caso de restrição é 0,1; resolvendo sucessivos problemas de otimização com valores cada vez menores para  $\varepsilon$ , atingindo o valor igual a zero.

#### 10.4 LINEARIZAÇÃO DA RESTRIÇÃO DE FADIGA

O mesmo procedimento usado para resolver o problema de minimização de volume com restrição de tensão é aplicado para o caso com minimização de volume com restrição de fadiga. O algoritmo de programação linear aplicado nesta situação tem a necessidade da informação da derivada em relação à densidade e do valor da restrição de fadiga linearizada.

Da mesma forma que é linearizada a restrição de tensão por série de Taylor, aplica-se o mesmo conceito para a restrição de fadiga, escrevendo da seguinte maneira:

$$g = \left[ \sum_{i=1}^{ne} \left( \frac{v_i}{V_t} \left( \frac{\tau_{\text{eq}} + kp_{\text{max}}}{\lambda} + \varepsilon^\rho - \varepsilon \right) \right)^q \right]^{1/q} \leq 1 \tag{234}$$

$$g^k(\rho_0) + \frac{\partial g^k}{\partial \rho_i}(\rho_i - \rho_0) \leq 1 \quad (235)$$

Efetuada as operações necessárias e agrupando os termos desconhecidos do lado esquerdo da desigualdade, obtém-se a forma linearizada da restrição:

$$\frac{\partial g^k}{\partial \rho_i}(\rho_i) \leq 1 - g^k(\rho_0) + \frac{\partial g^k}{\partial \rho_i}(\rho_0) \quad (236)$$

Nesse momento é importante ressaltar que a solução obtida somente faz uso das restrições dos elementos ativos, escrita na forma global após a verificação dessas restrições, tanto de tensão como de fadiga. Esse procedimento diminui o custo computacional e torna o problema mais estável.

A verificação de cada elemento é realizada conforme a equação a seguir:

$$\frac{\tau_{eq} + kp_{max}}{\lambda} + \varepsilon^\rho - \varepsilon - 1 > 0 \quad (237)$$

Se o valor da função for maior do que zero, a restrição é ativa, mas se for igual ou menor do que zero é considerada como inativa.

O mesmo conceito é aplicado para o problema de otimização topológica com restrição de tensão.



## 11. RESULTADOS

Os resultados alcançados neste trabalho foram obtidos com o uso da implementação apresentada no capítulo anterior. As geometrias das estruturas e dimensões estão baseados em exemplos apresentados na literatura, como exemplo Bendsoe e Sigmund, 2033. Para solução destes casos foi desenvolvido um programa na linguagem C, com o elemento finito isoparamétrico bilinear de quatro nós para um estado plano de tensão [Bathe, 1996]. Este elemento foi escolhido por ser simples, de fácil implementação e baixo custo computacional para o cálculo das sensibilidades (gradientes). Apenas a tensão no ponto central é considerada.

A primeira parte deste capítulo de resultados trata da otimização topológica estrutural na qual se busca o mínimo volume com restrição de tensão global para um caso de carga. Na segunda etapa, o problema é encontrar o mínimo volume com restrição de tensão global para “n” casos de carregamento. Em ambos os casos descritos, alguns exemplos são comparados com resultados existentes, servindo de base para o desenvolvimento da segunda etapa do trabalho.

A próxima fase do trabalho é a solução do problema de otimização topológica estrutural em que busca o mínimo volume com restrição de fadiga. Nesse momento, não existe nenhum caso na literatura que possa ser comparado, o mais próximo é o problema com restrição de tensão. Após obter a resposta estrutural para este caso, é calculada a derivada de forma, servindo não somente para a otimização de forma como também uma maneira de assegurar que a resposta obtida esteja correta.

### 11.1 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA COM RESTRIÇÃO DE TENSÃO PARA UM CASO DE CARGA

A primeira etapa dos resultados é a otimização topológica com restrição de tensão, em estruturas submetidas apenas um caso de carregamento, com o objetivo de testar a formulação na forma da restrição global, isto é, apenas uma restrição para cada caso de carregamento.

A formulação para este problema é escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\text{mínimo} && V = \sum_{i=1}^{ne} [\rho_i^p + \alpha \rho_i (1 - \rho_i)] V_i \\
&\text{sujeito a} && g^k = \left[ \sum_{i=1}^{ne} \left( \frac{v_i}{V_t} \left( \frac{\sigma_{vM}}{\sigma} + \varepsilon^p - \varepsilon \right) \right)^q \right]^{1/q} \leq 1 \quad k = 1 \\
&&& \rho_{\min} \leq \rho \leq 1
\end{aligned} \tag{238}$$

em que  $V$  corresponde ao volume da estrutura,  $g$  a restrição de tensão global,  $k$  é o número de casos de carregamento aplicados.

Nos resultados a seguir foram aplicados esforços de compressão, tração ou flexão e as respostas dos exemplos mostram a distribuição de densidade na estrutura otimizada e a seguir a tensão de von Mises. Esta por sua vez confirma que a restrição do problema foi respeitada.

**Exemplo a):** Estrutura submetida a esforço de tração, em que a força se localiza a  $L/2$  e sua intensidade igual 1N. A região superior para este caso está com restrição em toda sua extensão.

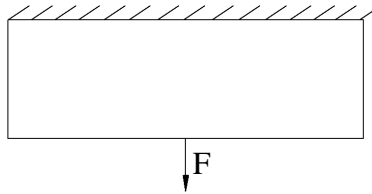


Figura11.1: Estrutura inicial (dimensão 1 X 3)



Figura11.2: Distribuição de densidade

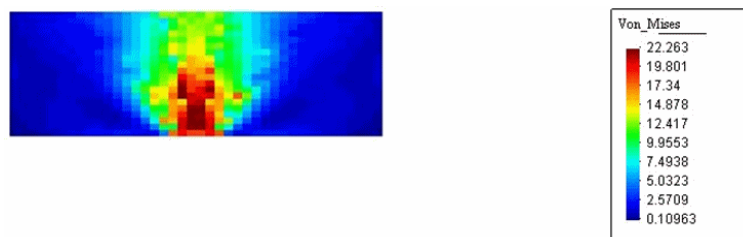


Figura11.3: Tensão von Mises

A restrição imposta ao problema foi a tensão de 22 (N/mm<sup>2</sup>), e conforme é observado no gráfico acima, a tolerância está dentro da tolerância estabelecida.

O exemplo “a)” comparado com o resultado de Fancello e Pereira, 2003, apresentou-se equivalente, já para o exemplo “b)” foi notado uma diferença na simetria da estrutura publicada por Fancello e Pereira. Este fato apenas comprova a existência de mais de uma solução possível para o mesmo problema.

**Exemplo b):** Estrutura submetida à flexão apresenta as mesmas dimensões, intensidade de carga e restrições do exemplo a).

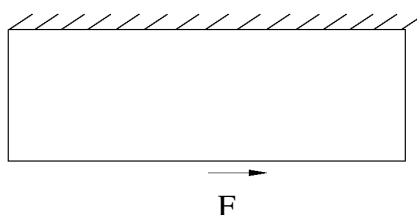


Figura11.4: Estrutura inicial (dimensão 1 X 3)

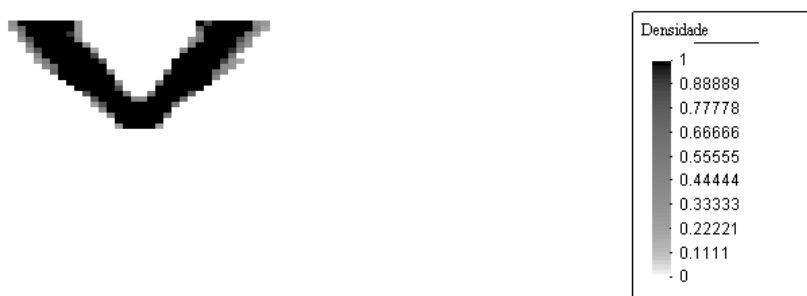


Figura11.5: Distribuição densidade

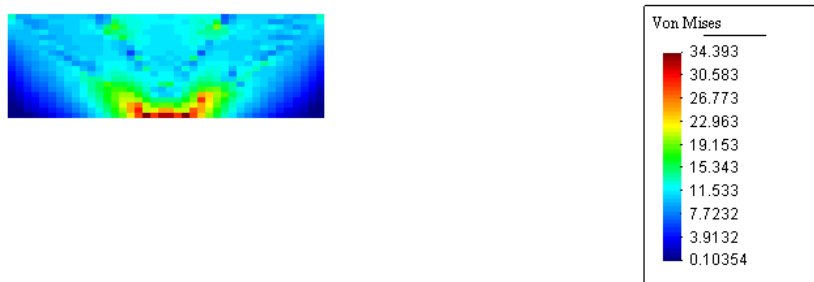


Figura11.6: Tensão von Mises

Nos exemplos a) e b) é observado que apresenta concentração de tensão, isto ocorre por considerar carga concentrada nas estruturas.

No exemplo “b)”, a tensão limite é de  $35 \text{ (N/mm}^2\text{)}$ , e o resultado está dentro da tolerância estipulada.

**Exemplo c):** Estrutura submetida à flexão. O problema é semelhante ao exemplo b), porém com diferença na vinculação imposta, isto é, neste caso a restrição somente é aplicada nos extremos da estrutura.

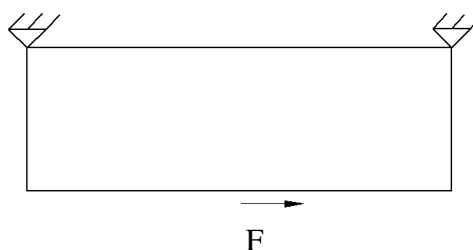


Figura11.7: Estrutura inicial (dimensão 1 X 3)



Figura11.8: Distribuição de densidade

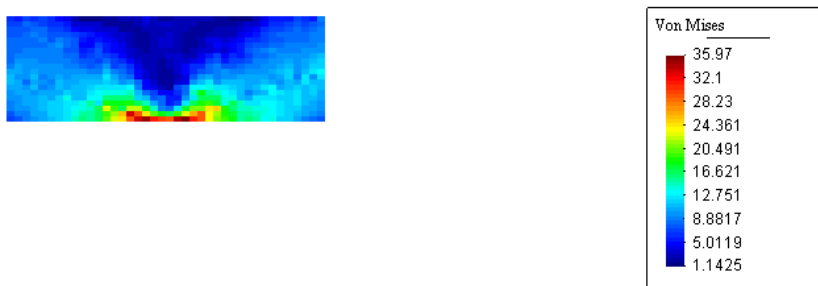


Figura11.9: Tensão de von Mises

Nos exemplos b) e c), apenas mudando a maneira de vincular o problema, é possível observar mudança na topologia final da estrutura e na distribuição de tensão de von Mises.

Para o caso “c)”, o limite de tensão aplicado é igual ao caso “b)”, e a diferença entre os dois resultados referente a restrição imposta é notada claramente no gráfico de von Mises. No exemplo “c)” o valor encontra-se acima ao estipulado para a tensão ( $35 \text{ N/mm}^2$ ), enquanto para o exemplo “b)” apresenta-se abaixo do valor estabelecido, mas os dois exemplos estão dentro da tolerância estabelecida para o problema.

**Exemplo d):** O problema a seguir é o clássico caso da ponte. A intensidade da força é igual a  $1\text{N}$ , com a dimensão da estrutura sendo  $2L \times L/3$ .

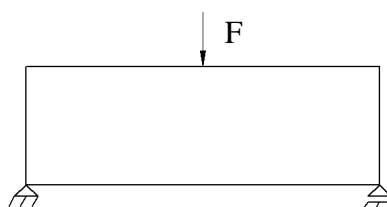


Figura11.10: Estrutura inicial (dimensão  $1 \times 6$ )

A solução para este problema faz uso da simetria da estrutura, em que a estrutura a ser analisada tem o lado direito com restrição da simetria e no extremo apresenta uma restrição de apoio.

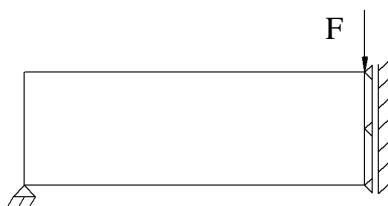


Figura11.11: Estrutura simplificada pela simetria



Figura11.12: Distribuição de densidade

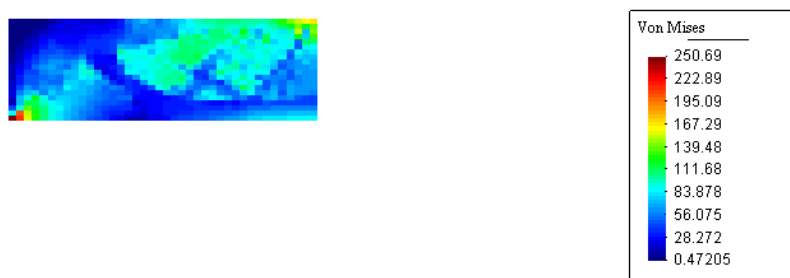


Figura11.13: Tensão de von Mises

O valor do limite da tensão é igual a  $250 \text{ (N/mm}^2\text{)}$  para este exemplo. A restrição imposta conforme mostra o gráfico de von Mises acima é respeitada.

**Exemplo e):** Estrutura submetida à compressão com dimensão  $L \times L/3$ . A força aplicada é igual a 1N e a restrição aplicada nas extremidades, de forma que o problema fica hiperestático.

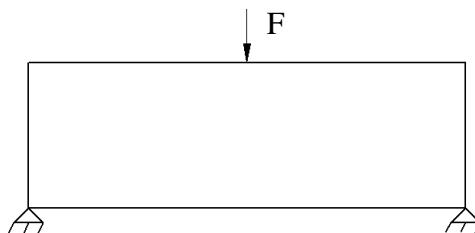


Figura11.14: Estrutura inicial (dimensão 1 X 3)



Figura11.15: Distribuição de densidade

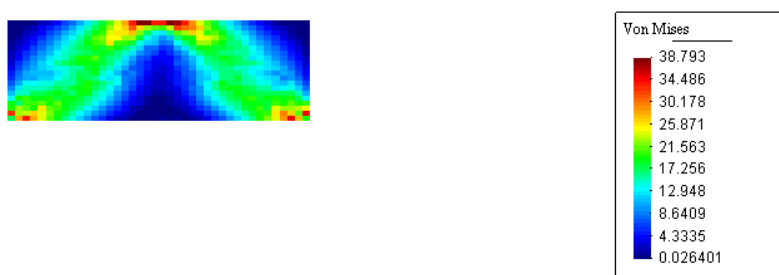


Figura11.16: Tensão de von Mises

Neste exemplo a restrição imposta ( $39 \text{ (N/mm}^2\text{)})$  foi respeitada, conforme mostra o gráfico de von Mises acima.

O próximo exemplo representa uma geometria no formato em “L”, que favorece o aparecimento da concentração de tensão, que por sua vez contribui com aparecimento do ótimo singular. Este fenômeno no processo de otimização topológica não é desejado, pois não permite representar todos os valores das variáveis corretamente.

O carregamento aplicado na estrutura é o mesmo para os dois casos. Neste exemplo objetivo é comparar a estrutura obtida no exemplo “f” com 1024 elementos e no exemplo “g” com 4096 elementos. A diferença básica entre as duas estruturas esta na descrição do contorno,

isto é, o exemplo “g” apresenta a curvatura da geometria mais suave, sem a formação de transições serrilhadas.

**Exemplo f): Flexão (domínio “L”)**

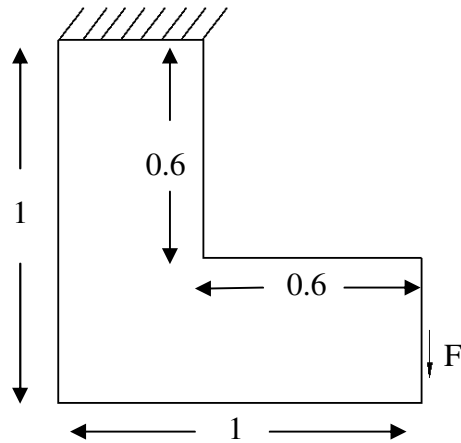


Figura11.17: Estrutura inicial para o exemplo f e g



Figura11.18: Distribuição de densidade

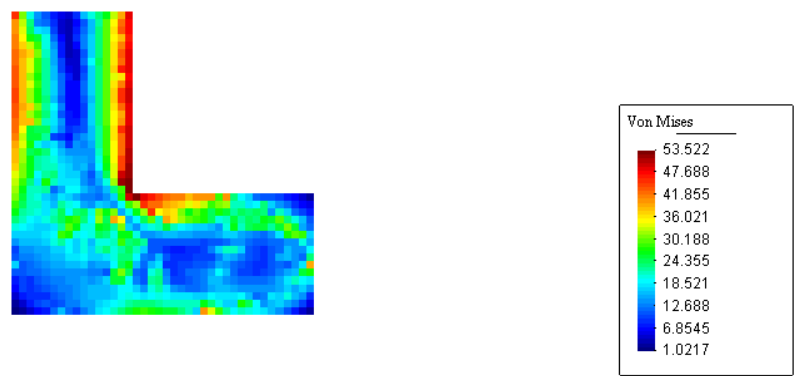


Figura11.19: Tensão de von Mises



O valor da restrição de tensão imposta ao problema é de 53 (N/mm<sup>2</sup>), e que foi respeitada dentro da tolerância estabelecida.

**Exemplo g):**



Figura 11.20: Distribuição de densidade

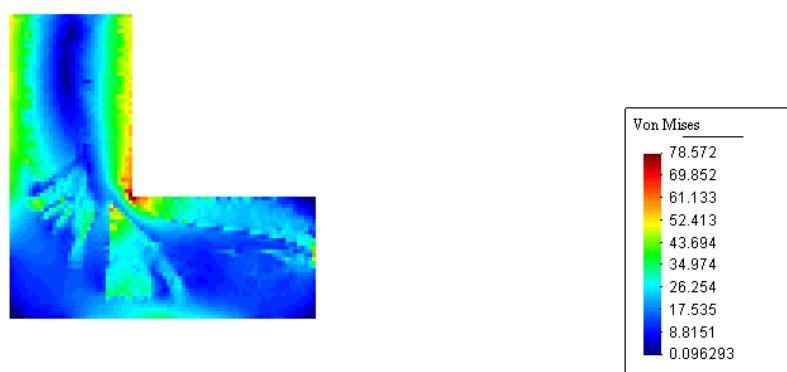


Figura 11.21: Tensão de von Mises

Para o mesmo exemplo, o valor da restrição de tensão passou a ser de 79 (N/mm<sup>2</sup>), e como é observado no gráfico de von Mises acima, a restrição está dentro do limite estabelecido.

A solução encontrada por Pereira et al. (2003), é comparado com o resultado obtido neste trabalho. A primeira diferença é na formação interna da estrutura, isto é, o resultado obtido por Pereira apresenta uma definição clara da estrutura. Tratando-se da geometria externa na região de concentração de tensão, a resposta estrutural neste trabalho se mostra mais suave na mudança do contorno.

## 11.2 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA COM RESTRIÇÃO DE TENSÃO PARA MÚLTIPLOS CASOS DE CARGA

A segunda etapa dos resultados é uma comparação das estruturas obtidas por Fancello e Pereira, 2003, no processo de otimização topológica com restrição de tensão global com n casos de carregamento, tendo a finalidade de validar a formulação do problema.

Formulação do problema para “n” casos de carregamento.

$$\begin{aligned}
 &\text{mínimo} && V = \sum_{i=1}^{ne} [\rho_i^p + \alpha \rho_i (1 - \rho_i)] V_i \\
 &\text{sujeito a} && g^k = \left[ \sum_{i=1}^{ne} \left( \frac{v_i}{V_t} \left( \frac{\sigma_{vM}}{\sigma} + \varepsilon^\rho - \varepsilon \right) \right)^q \right]^{1/q} \leq 1 \quad k = 1 \dots n \\
 &&& \rho_{\min} \leq \rho \leq 1
 \end{aligned} \tag{239}$$

em que V corresponde ao volume da estrutura, g a restrição de tensão global, k é o número de carregamento aplicado.

O trabalho de Fancello e Pereira, 2003, que fez uso de multiplicadores de Lagrange para solucionar o problema com restrição de tensão global como uma otimização irrestrita, enquanto este trabalho se propõe a solucionar o problema através de otimização com restrições com a programação linear seqüencial. O primeiro caso a ser analisado está representado no exemplo h.

**Exemplo h):** A estrutura a seguir tem dimensão L x L/3, com a parte superior completamente restrita e os valores das forças aplicadas são igual a 1N.

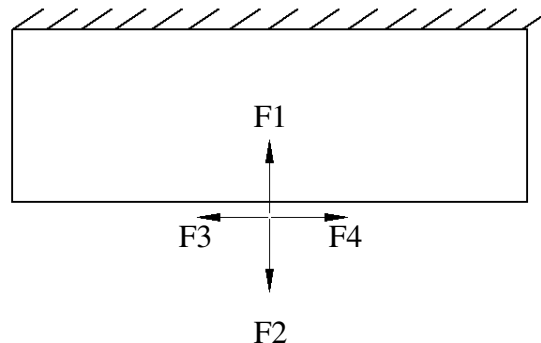


Figura 11.22: Estrutura inicial (dimensão 1 X 3)

A seguir é demonstrado a distribuição da tensão de von Mises para cada caso de carregamento, em que todas as densidades são igual a um.

- Tensão de von Mises para o carregamento F1 (compressão):



Figura 1.23: Tensão de von Mises para carga F1

- Tensão de von Mises para o carregamento F2 (tração):



Figura 1.24: Tensão de von Mises para carga F2

- Tensão de von Mises para o carregamento F3 (flexão):

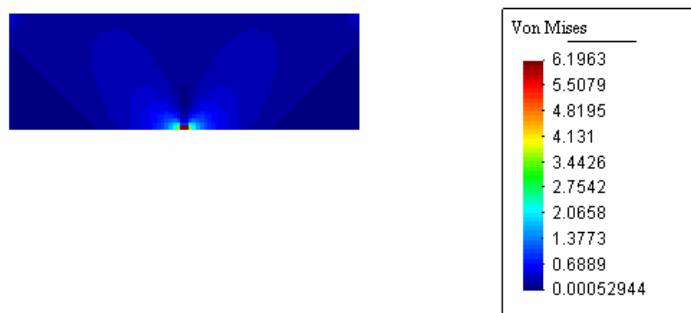


Figura 1.25: Tensão de von Mises para carga F3

- Tensão de von Mises para o carregamento F4 (flexão):

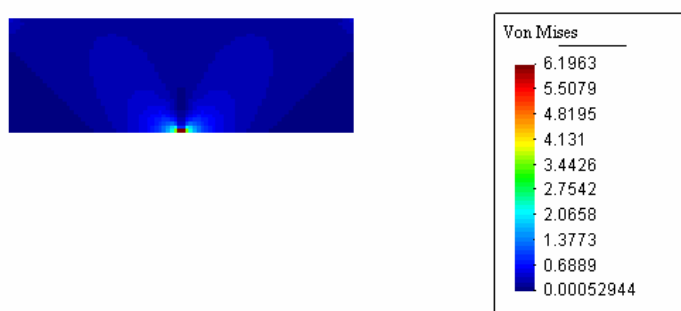


Figura 1.26: Tensão de von Mises para carga F4

No exemplo “h)”, o diagrama de distribuição de tensão de von Mises quando aplicado todas as forças em apenas um carregamento demonstra que a tensão na estrutura é nula, por esse motivo o processo de otimização estrutural é analisado por caso de carregamento, desta forma evitando que a estrutura assuma valores igual a zero para a densidade em todo o seu domínio.

A seguir são demonstrados diferentes resultados para o exemplo h.



Figura11.27: Distribuição de densidade



Figura11.28: Distribuição de densidade



Figura11.29: Distribuição de densidade

A solução do exemplo “h)” mostra três diferentes respostas para a mesma estrutura, em que ambas satisfazem o critério de restrição. Este problema tem em comum o mesmo valor de densidade inicial nas três respostas obtidas, isto é, a densidade de cada elemento inicialmente foi considerada igual a 0.01. Neste momento fica claro que a solução não é única, pois a representação da função de tensão é não convexa, tendo mais de um mínimo local.

Um importante ponto a ser citado no uso da relaxação  $\epsilon$  é que essa não garante que exista um mínimo global, mas garante que o problema não terá o ótimo singular.

Comparando a estrutura obtida no exemplo h com a solução Fancello e Pereira, 2003, é possível verificar que as duas estruturas possuem a mesma geometria em forma de “V”, mas com uma diferença, em que a solução obtida neste trabalho apresenta uma região sem material e a geometria externa do resultado de Fancello e Pereira, 2003, está bem definida.

O próximo exemplo é apenas ilustrativo, tendo como objetivo demonstrar o resultado de uma estrutura sujeita a carga não simétrica.

**Exemplo i):** A estrutura a seguir tem as mesmas dimensões e restrições do exemplo “h)”, porém sendo aplicadas duas forças apenas com intensidade igual 1N cada uma.

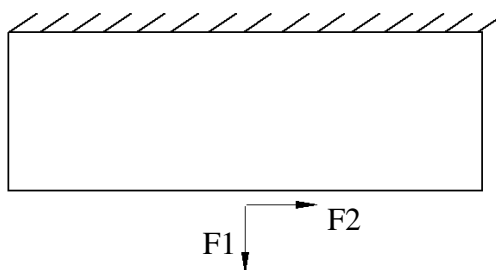


Figura11.30: Estrutura inicial (dimensão 1 X 3)



Figura11.31: Distribuição de densidade

O exemplo a seguir tem por objetivo demonstrar a dificuldade em obter uma estrutura quando sujeito a n casos de carregamentos. O caso adotado para essa demonstração é uma viga engastada sujeita a esforço de tração e flexão.

Os três resultados demonstrados iniciaram com os valores das densidades iguais e respeitaram a restrição imposta ao problema, porém a única resposta considerada satisfatória é a

última para este exemplo. A causa principal é a função de tensão não ser convexa, mas para esses diferentes pontos de respostas serem alcançados, é necessário observar como a relaxação  $\epsilon$ , e os fatores de penalização são aplicados no decorrer da solução. Outro ponto importante a ser salientado, trata-se do limite móvel, pois este para iniciar o primeiro processo iterativo foi adotado o valor de 0.3 ou 0.2, sendo que este valor inicial caiu pelo menos pela metade no passo seguinte.

**Exemplo j):** A estrutura a seguir é uma viga engastada com relação de proporção 5 por 3.

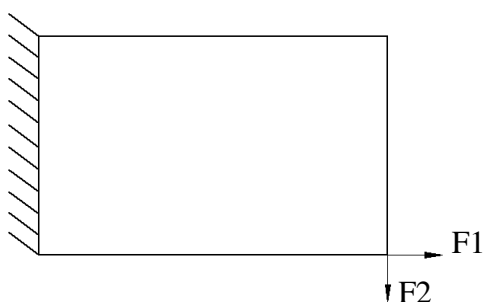


Figura11.32: Estrutura inicial (dimensão 5 X 8)



Figura11.33: Distribuição de densidade

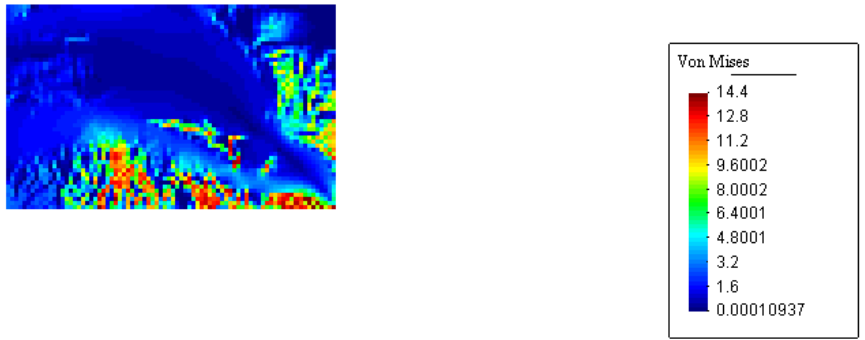


Figura11.34: Tensão de von Mises para carga F1

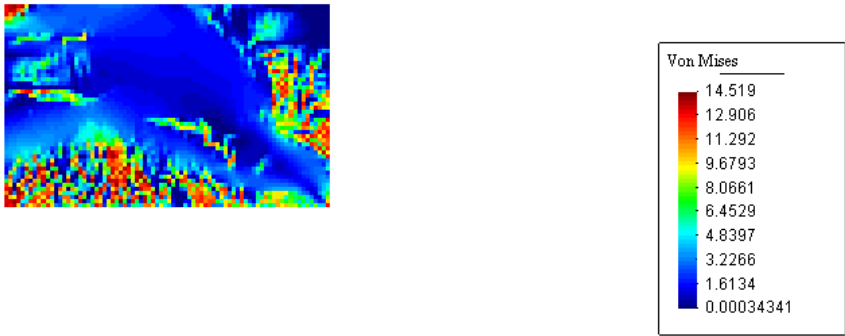


Figura11.35: Tensão de von Mises para carga F2



Figura11.36: Distribuição de densidade



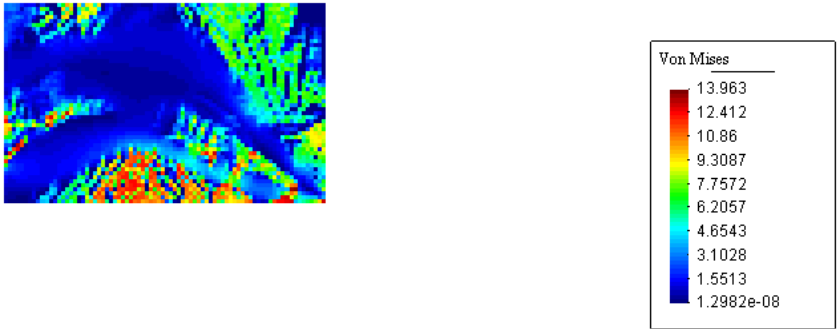


Figura11.37: Tensão de von Mises para carga F1

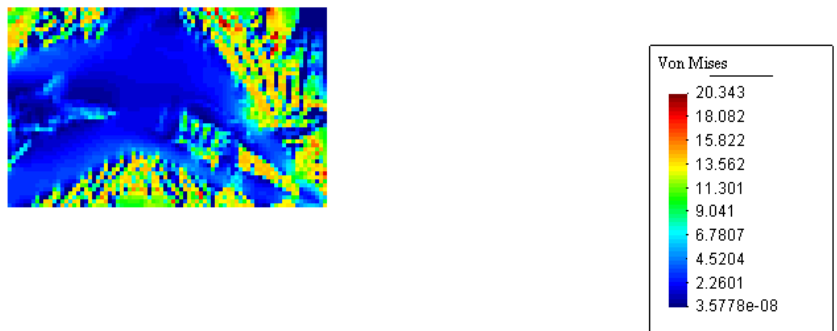


Figura11.38: Tensão de von Mises para carga F2



Figura11.39: Distribuição de densidade

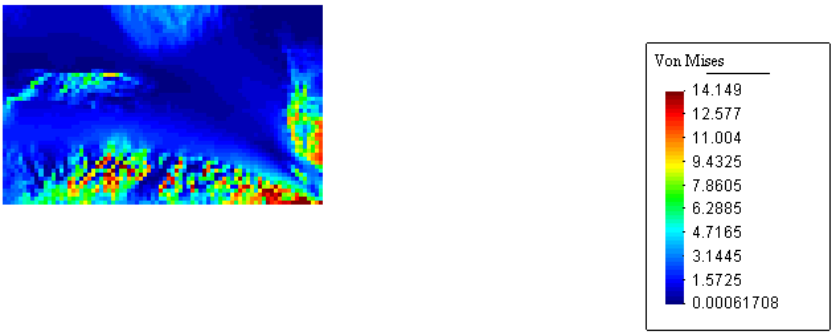


Figura11.40: Tensão de von Mises para carga F1

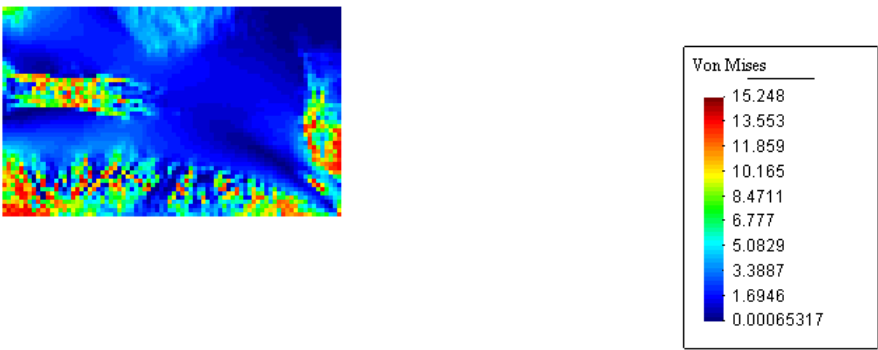


Figura11.41: Tensão de von Mises para carga F2



Figura11.42: Distribuição de densidade

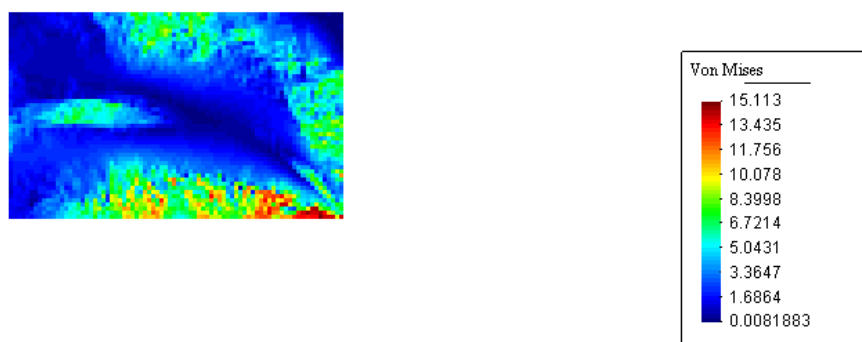


Figura 1.43: Tensão de von Mises para carga F1

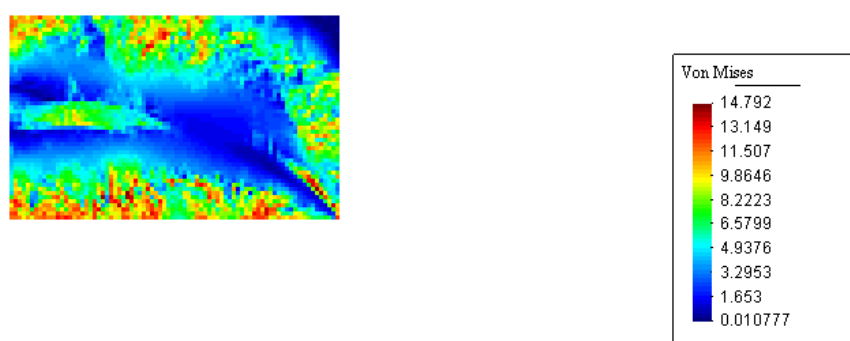


Figura 1.44: Tensão de von Mises para carga F2

No exemplo “j)”, em todas as situações a restrição imposta ao problema é respeitada. O valor estipulado para a restrição de tensão é de 15 (N/mm<sup>2</sup>).

O próximo exemplo trata-se de uma estrutura com o formato em “L”, em que se aplica uma carga vertical e uma horizontal, produzindo esforços de tração e flexão e conseqüentemente concentração de tensão. Cada caso de força é considerado um caso de carregamento, em outras palavras, para este problema tem-se dois casos de carregamento, o que significa duas restrições impostas à estrutura.

#### Exemplo I:

A tabela a seguir apresenta os valores para a solução do problema.

|         | $\varepsilon$ | p | alpha | P |
|---------|---------------|---|-------|---|
| Nível 1 | 0,5           | 1 | 0     | 4 |
| Nível 1 | 0,25          | 1 | 0     | 4 |
| Nível 1 | 0,125         | 1 | 0     | 4 |
| Nível 1 | 0,0625        | 1 | 0     | 4 |

|         |   |     |     |   |
|---------|---|-----|-----|---|
| Nível 1 | 0 | 1   | 0   | 4 |
| Nível 1 | 0 | 0,8 | 0   | 4 |
| Nível 1 | 0 | 0,5 | 0   | 4 |
| Nível 1 | 0 | 0,1 | 0   | 4 |
| Nível 1 | 0 | 0,1 | 0,1 | 4 |
| Nível 1 | 0 | 0,1 | 0,5 | 4 |
| Nível 1 | 0 | 0,1 | 1   | 4 |
| Nível 1 | 0 | 0,1 | 10  | 4 |
| Nível 1 | 0 | 0,1 | 20  | 4 |
| Nível 1 | 0 | 0,1 | 30  | 4 |
| Nível 1 | 0 | 0,1 | 40  | 4 |

- o fator  $P$  corresponde à normalização da restrição;
- a variável  $p$  e  $\alpha$  correspondem a penalização da função objetivo.

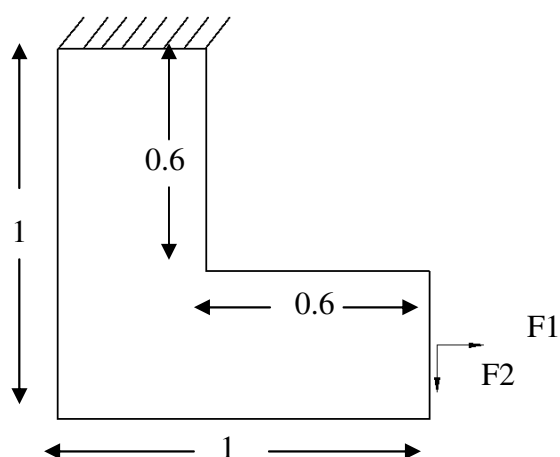


Figura 1.45: Estrutura inicial

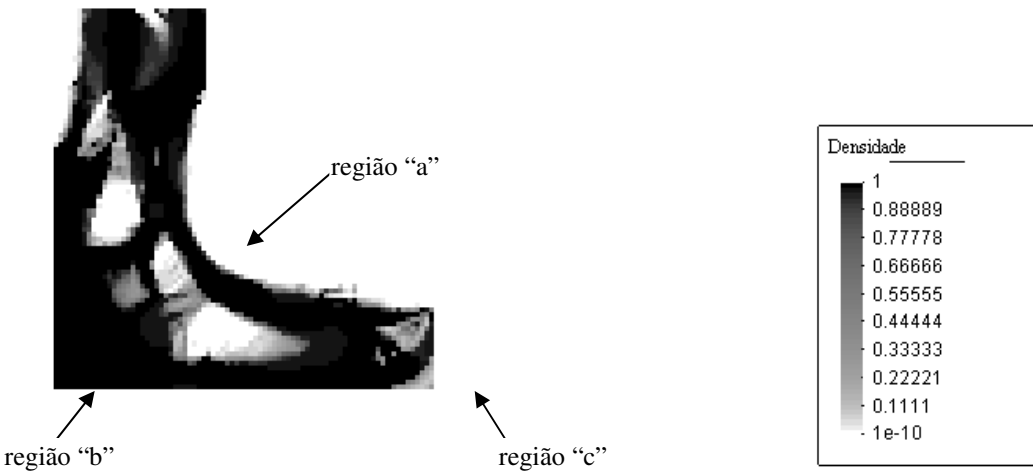


Figura11.46: Distribuição de densidade

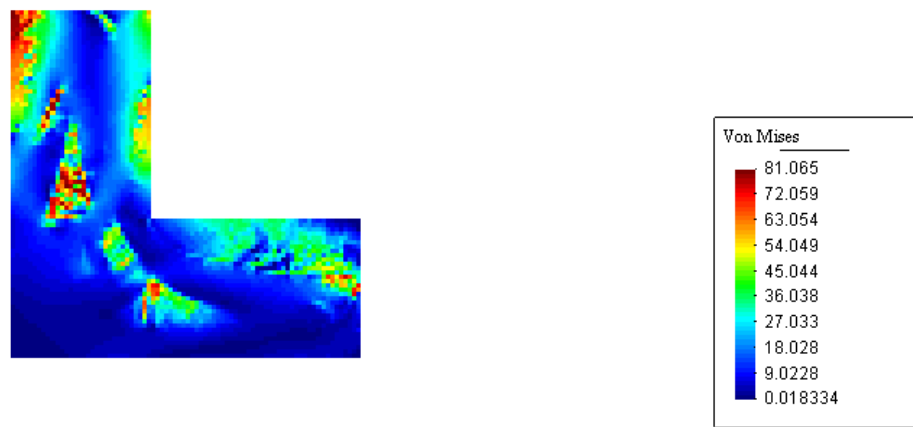


Figura11.47: Tensão de von Mises para carga F1

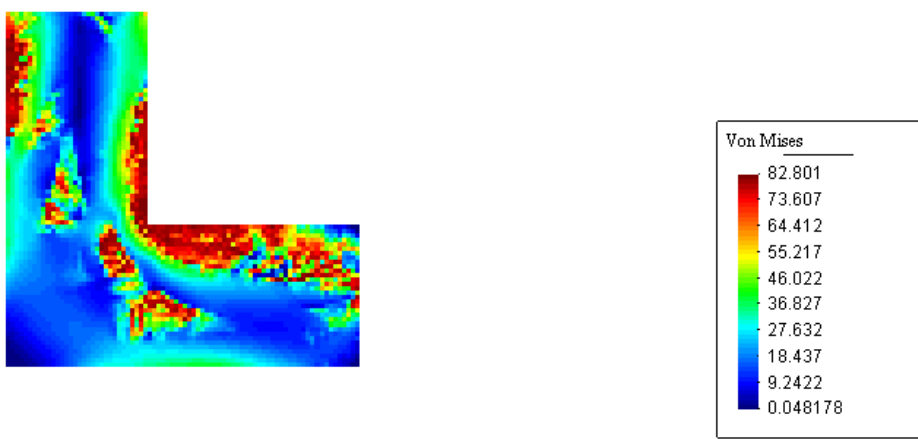


Figura11.48: Tensão de von Mises para carga F2

Comparando o resultado obtido por Fancello e Pereira com o exemplo 1 deste trabalho é possível observar a diferença na parte interna da estrutura, em que regiões sem material não se apresentam da mesma posição. A segunda diferença esta na região “a”, figura 11.46, em que se apresenta concentração de tensão. Como já mencionado anteriormente o resultado obtido apresenta um raio de curvatura mais suave do que o resultado de Fancello e Pereira, mas em contra partida o resultado de Fancello é mais eficaz nas regiões “b” e “c”, locais que não devem apresentar material.

A restrição de tensão imposta ao problema é de 82 (N/mm<sup>2</sup>), e o gráfico de tensão de von Mises acima demonstra que o problema é satisfeito.

Os diferentes resultados são justificados por causa da restrição de tensão possuir diferentes mínimos locais e cada resultado deve ser analisado e interpretado conforme necessidade de projeto.

## 10.2 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA COM RESTRIÇÃO DE FADIGA

A seguir são apresentados os resultados com restrição de fadiga e os exemplos de estruturas utilizados são os mesmos para o caso da restrição de tensão, possibilitando a comparação dos mesmos.

Para todos os casos apresentados para a restrição de fadiga é adotada a relaxação  $\varepsilon$  inicial igual a 0,1.

Formulação do problema para otimização topológica com restrição de fadiga.

$$\begin{aligned}
 &\text{mínimo} && V = \sum_{i=1}^{ne} [\rho_i^p + \alpha \rho_i (1 - \rho_i)] V_i \\
 &\text{sujeito a} && g^k = \left[ \sum_{i=1}^{ne} \left( \frac{V_i}{V_t} \left( \frac{\tau_i + k P_{\text{máximo}}}{\bar{\tau}} + \varepsilon^{\rho_i} - \varepsilon - 1 \right) \right)^p \right]^{1/p} \leq 1 \quad k = 1 \dots n \\
 &&& \rho_{\min} \leq \rho \leq 1
 \end{aligned} \tag{240}$$

**Exemplo k):** A estrutura a seguir apresenta dimensão L x L/3, em que a todos os nós da aresta superior estão vinculados. Neste exemplo quatro casos de carga são aplicados conforme mostrado abaixo, e a intensidade da força varia ao longo do tempo conforme uma função conhecida.

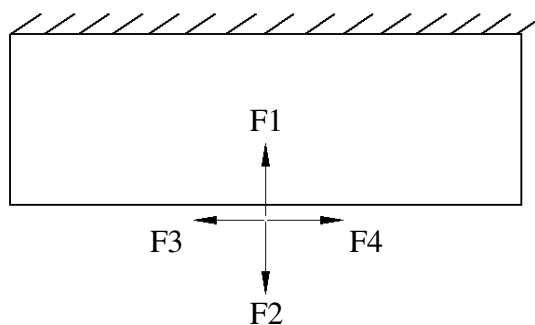


Figura11.49: Estrutura inicial para o exemplo k e m (dimensão 1 X 3)



Figura11.50: Distribuição de densidade

Valor inicial da função objetivo: 2700.

Valor final da função objetivo: 145,5.



Figura11.51: Exemplo “h”): otimização topológica com restrição de tensão

Comparando o resultado obtido no exemplo k, restrição de fadiga, e o exemplo h, com restrição de tensão, é possível perceber que as estruturas formadas são completamente diferentes. Um importante ponto observado é o valor da função objetivo que para o problema

com restrição de fadiga tem o valor igual a 145,5, enquanto que para a restrição de tensão este valor é de 1110.

A seguir é possível visualizar a tensão de von Mises obtida na estrutura otimizada com restrição de fadiga.



Figura11.52: Tensão de von Mises para carga F1



Figura11.53: Tensão de von Mises para carga F2

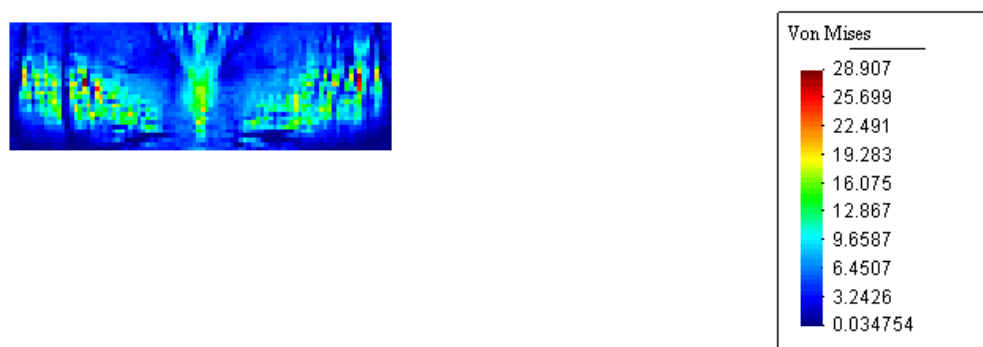


Figura11.54: Tensão de von Mises para carga F3



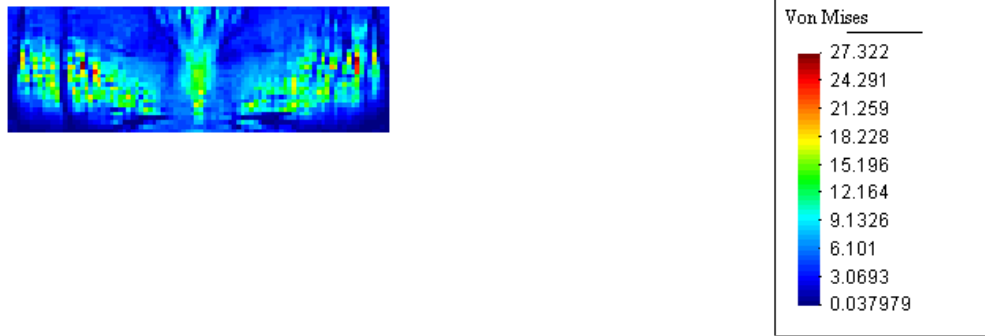


Figura 1.55: Tensão de von Mises para carga F4

Nos resultados de tensão von Mises apresentados nas figuras acima é possível concluir que a restrição de tensão não é respeitada, pois os valores máximos para o caso de flexão é aproximadamente de 27 (N/mm<sup>2</sup>), enquanto para tração ou compressão é 7 (N/mm<sup>2</sup>).

As quatro figuras a seguir mostram que a restrição a fadiga foi satisfeito.

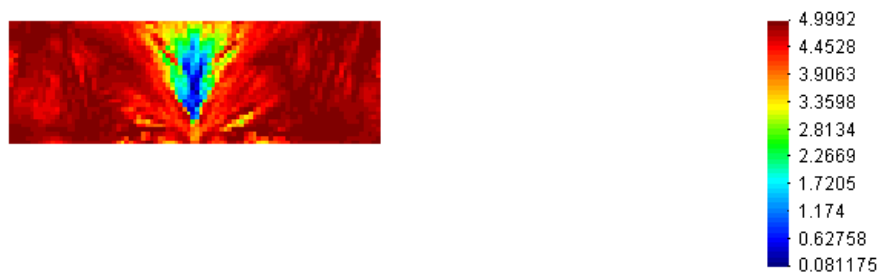


Figura 1.56: Verificação do critério de fadiga F1

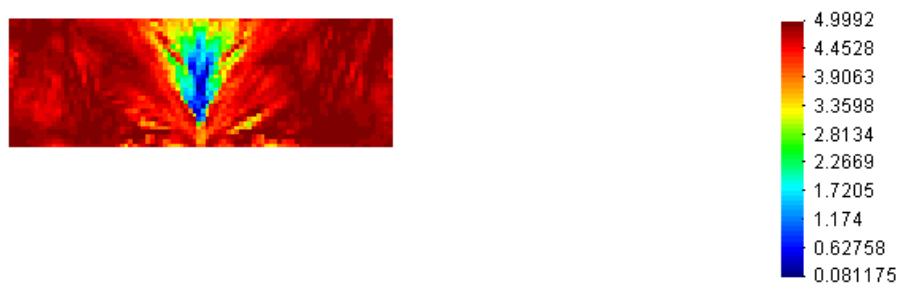


Figura 1.57: Verificação do critério de fadiga F2

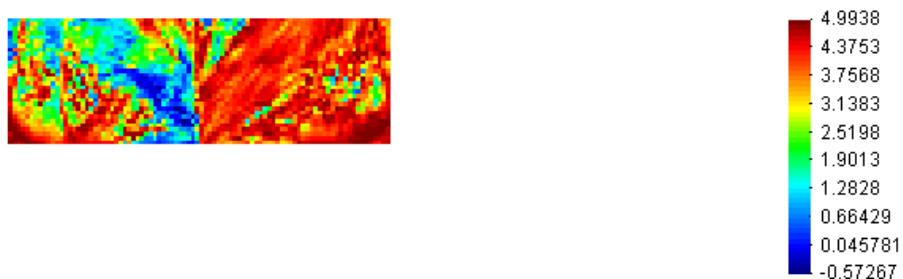


Figura11.58: Verificação do critério de fadiga F3

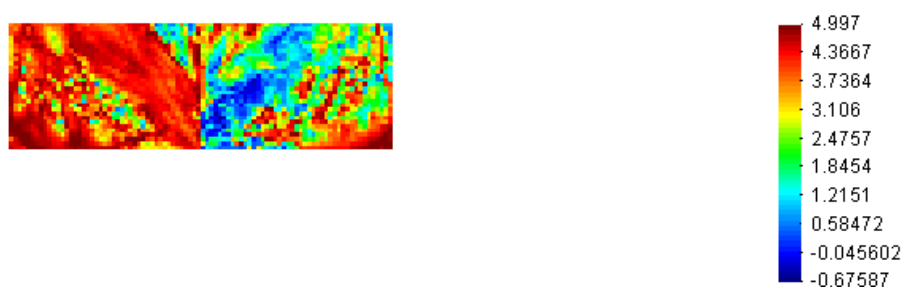


Figura11.59: Verificação do critério de fadiga F4

Restrição de fadiga é igual a 5 ( $\text{N/mm}^2$ ), e conforme observado nos gráficos acima o problema é satisfeito.

**Exemplo m):** As dimensões, restrições e força aplicadas são iguais ao do exemplo k.



Figura11.60: Distribuição de densidade

O exemplo “m)” é uma estrutura em que não se aplica a relaxação  $\epsilon$ . A característica marcante nesta estrutura é a quantidade de cinza, não permitindo uma perfeita definição da mesma, ao contrário do exemplo k, em que as densidades intermediárias são poucas.

Para este caso fica claro o problema do ótimo singular. A seguir segue uma tabela detalhando os passos para obter o exemplo “m”).

|          | E | p   | alpha | P |
|----------|---|-----|-------|---|
| Nível 1  | 0 | 1   | 0     | 2 |
| Nível 2  | 0 | 0,8 | 0     | 2 |
| Nível 3  | 0 | 0,5 | 0     | 2 |
| Nível 4  | 0 | 0,1 | 0     | 2 |
| Nível 5  | 0 | 0,1 | 0,1   | 2 |
| Nível 6  | 0 | 0,1 | 0,5   | 2 |
| Nível 7  | 0 | 0,1 | 1     | 2 |
| Nível 8  | 0 | 0,1 | 10    | 2 |
| Nível 9  | 0 | 0,1 | 20    | 2 |
| Nível 10 | 0 | 0,1 | 30    | 2 |

- o fator P corresponde à normalização da restrição;
- a variável p e alpha correspondem a penalização da função objetivo.

**Exemplo n):** A próxima estrutura tem dimensão  $L \times L/3$ , a parte superior apresenta todos os nos restritos e na posição  $L/2$  tem dois casos de carga, em que a função varia ao longo do tempo.

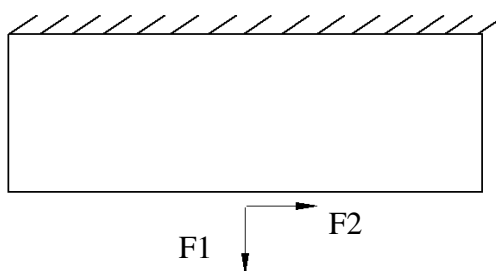


Figura11.61: Estrutura inicial (dimensão 1 X 3)



Figura 11.62: Distribuição de densidade

Valor inicial da função objetivo: 2700.

Valor final da função objetivo: 119.

A figura a seguir apresenta o resultado da otimização topológica com restrição de tensão, com o objetivo de comparar as duas estruturas.



Figura 11.63: Exemplo "i)": otimização topológica com restrição de tensão

A diferença marcante neste resultado é que a otimização topológica com restrição de tensão apresenta um reforço na parte interna e a falta de simetria na estrutura, enquanto que a otimização topológica com restrição de fadiga apresenta uma estrutura sem reforço na região central e mostra-se com uma simetria. O resultado final da função objetivo para o problema com restrição de tensão é de 368, enquanto para o caso com restrição de fadiga é 119.

A seguir é demonstrado que a restrição do critério de fadiga é satisfeito.



Figura 11.64: Verificação do critério de fadiga F1

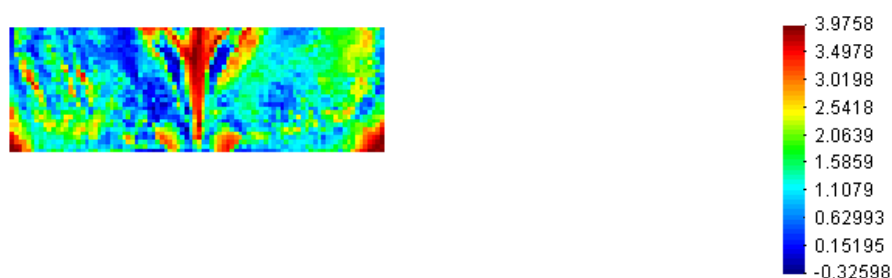


Figura 11.65: Verificação do critério de fadiga F2

A restrição de fadiga é igual a 4 ( $\text{N/mm}^2$ ).

**Exemplo o):** A estrutura a seguir é uma viga engastada, com dimensão na proporção 5 x 3. O carregamento é aplicado na extremidade da estrutura livre, em que a carga varia ao longo do tempo.



Figura 11.66: Estrutura inicial (dimensão 5 X 8)



Figura 11.67: Distribuição de densidade

Valor inicial da função objetivo: 4000.

Valor final da função objetivo: 270.

O resultado a seguir representa a otimização topológica com restrição de tensão para uma viga engasta para fins de comparação com o resultado da otimização topológica com restrição de fadiga.



Figura 11.68: Exemplo j: otimização topológica com restrição de tensão

Comparando os dois resultados é possível perceber claramente a diferença na estrutura. Para o problema com restrição de fadiga apresenta-se pouco definido, com muito cinza claro, enquanto que o problema de tensão apresenta o resultado com uma maior definição e a geometria completamente diferente em relação ao problema com restrição de fadiga.

Para o caso da otimização topológica com restrição de tensão a função objetivo é de 1310 enquanto que para fadiga é de 270.

Na sequência é demonstrada a tensão de von Mises para estrutura otimizada com restrição de fadiga.

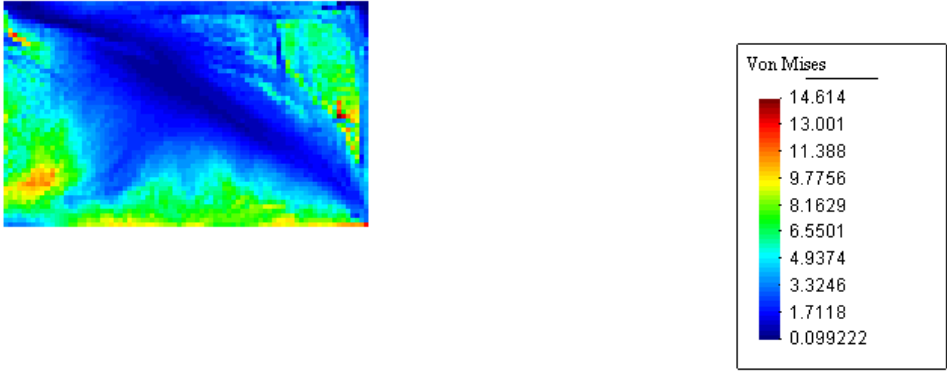


Figura11.69: Tensão de von Mises para carga F1

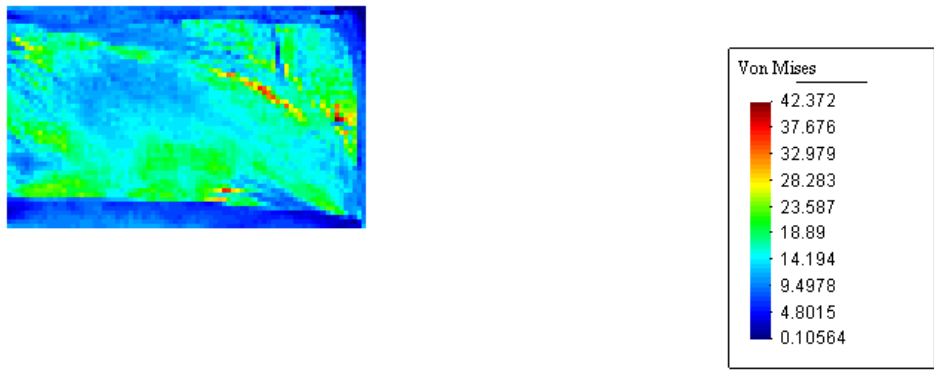


Figura11.70:Tensão de von Mises para carga F2

A seguir é apresentado a tensão de von Mises para estrutura da figura 11.68, em que representa o resultado da otimização topológica com restrição de tensão.

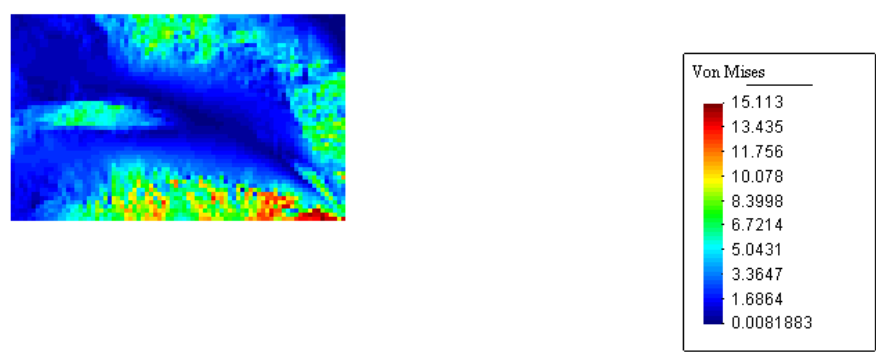


Figura11.71: Exemplo j: tensão de von Mises para carga F1

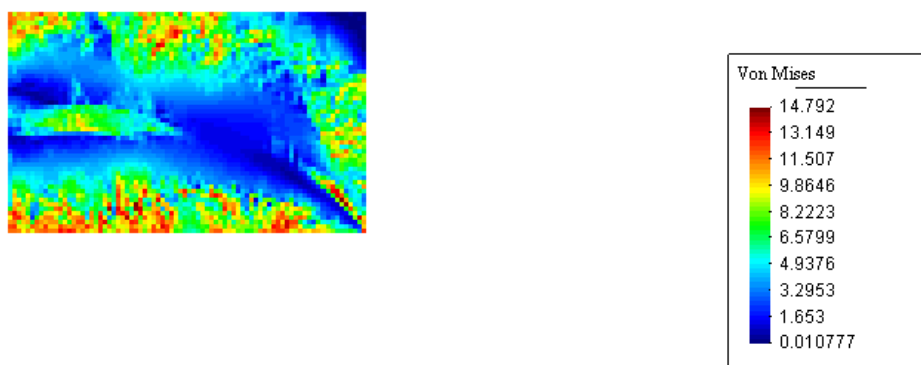


Figura11.72: Exemplo j: tensão de von Mises para carga F2

No caso da viga engastada, é possível notar claramente que a tensão de von Mises para o caso do carregamento F1, a estrutura otimizada com restrição de fadiga atende a necessidade do problema com restrição de tensão, mas isso não acontece para o caso de carregamento F2, que viola a restrição de tensão.

A seguir é demonstrado que a restrição do critério de fadiga é satisfeito.

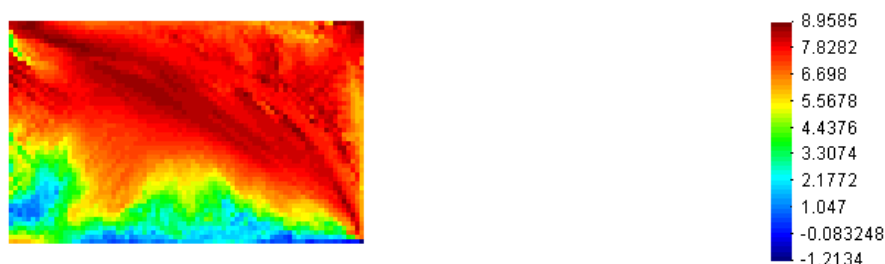


Figura11.73: Verificação do critério de fadiga F1

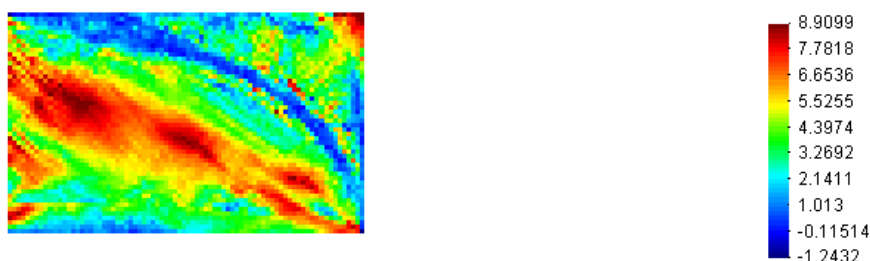


Figura11.74: Verificação do critério de fadiga F2

Restrição de fadiga igual 9 (N/mm<sup>2</sup>)



**Exemplo p):** O próximo exemplo analisado é um problema clássico da literatura da otimização topológica, tratando-se do componente estrutural em formato em L. As dimensões desta geometria é mostrado na figura a seguir.

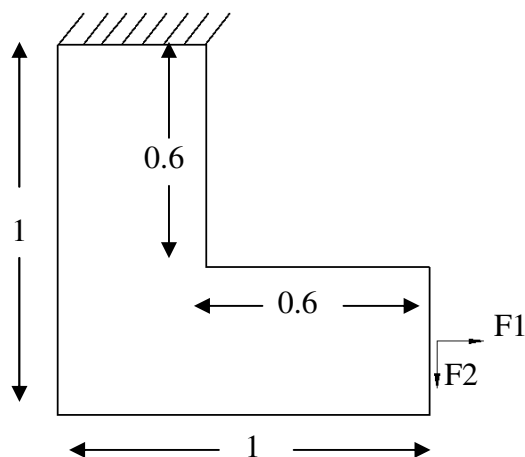


Figura11.75: Estrutura inicial

O modelo está engastado na parte superior e na região central da extremidade esquerda são aplicados dois casos de carregamento, conforme mostrado na figura anterior.



Figura11.76: Distribuição de densidade

Valor inicial da função objetivo: 4096.

Valor final da função objetivo: 658.

A figura seguinte mostra o resultado da otimização topológica com restrição de tensão.



Figura 11.77: Exemplo 1: otimização topológica com restrição de tensão

A diferença entre os resultados com restrição de fadiga e tensão, mostra-se em todo o contorno da geometria. O problema referente a restrição de tensão apresenta maior quantidade de material na estrutura e na parte inferior à direita e a esquerda permaneceu com material, enquanto o problema com restrição de fadiga a quantidade de material é menor e na parte inferior à direita e a esquerda não tem material.

Comparando o valor da função objetivo para cada caso obteve-se 2690 para a otimização topológica com restrição de tensão enquanto para a restrição de fadiga foi de 658.

Em relação à tensão de von Mises foi observado que o resultado obtido para a estrutura otimizada com restrição de fadiga não tem capacidade de satisfazer o problema de otimização topológica com restrição de tensão, como pode ser observado a seguir.

A tensão de von Mises representa a estrutura otimizada com restrição de fadiga.



Figura11.78: Tensão de von Mises para carga F2

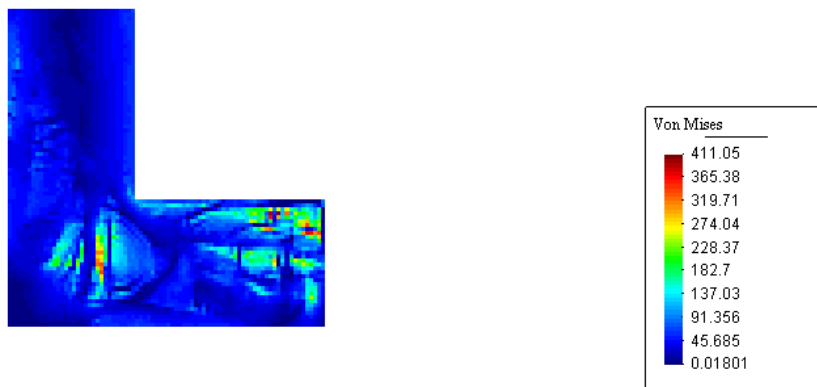


Figura11.79: Tensão de von Mises para carga F2

A seguir é demonstrado novamente o resultado de von Mises para uma estrutura otimizada com restrição de tensão e sendo satisfeita a restrição imposta.

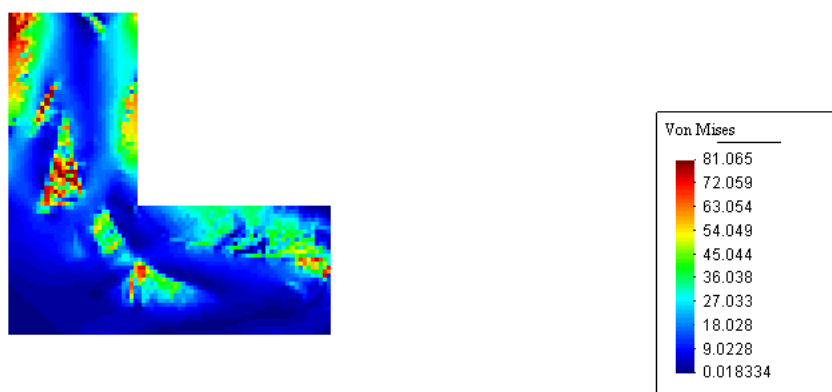


Figura11.80: Exemplo “1)”: otimização estrutural com restrição de tensão

Distribuição da tensão de von Mises para carga F1

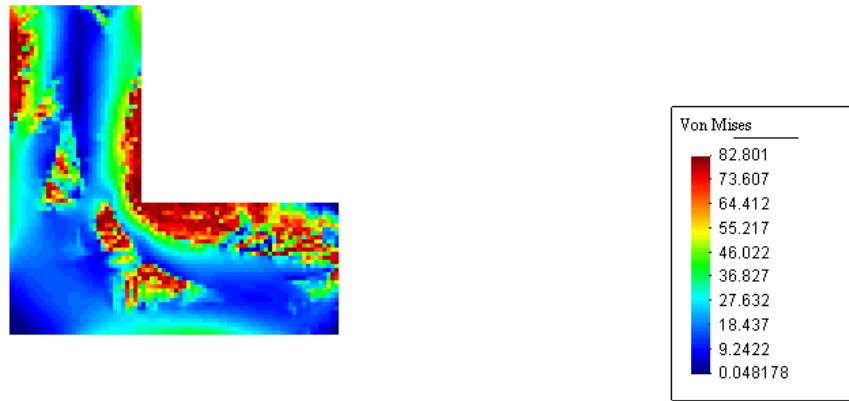


Figura11.81: Exemplo “1)”: otimização estrutural com restrição de tensão  
Distribuição da tensão de von Mises para carga F2

A seguir é demonstrado que a restrição do critério de fadiga é satisfeito.

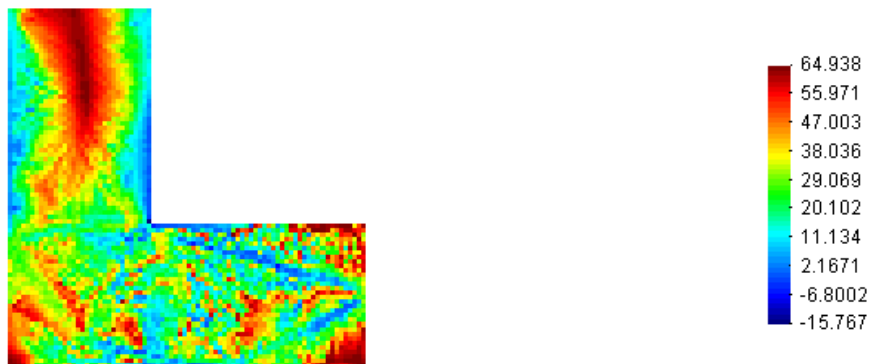


Figura11.82: Verificação do critério de fadiga F1

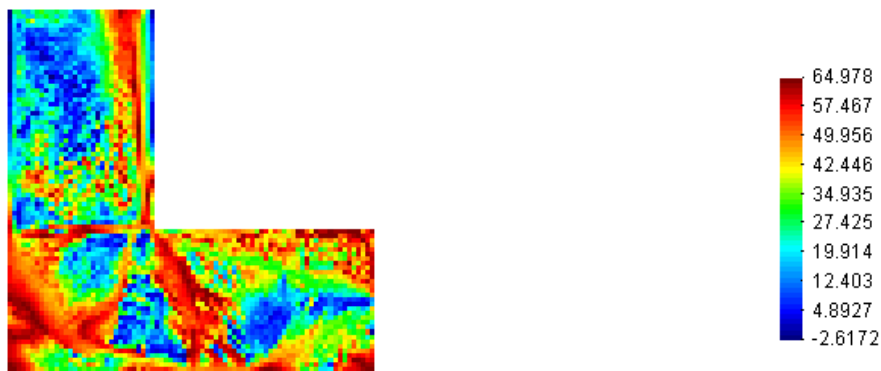


Figura11.83: Verificação do critério de fadiga F2

A restrição de fadiga é igual a 65 (N/mm<sup>2</sup>).

A tabela a seguir contém os valores para que a solução do exemplo p possa ser repetida.

|          | $\varepsilon$ | p   | Alpha | P |
|----------|---------------|-----|-------|---|
| Nível 1  | 0,1           | 1   | 0     | 4 |
| Nível 2  | 0,05          | 1   | 0     | 4 |
| Nível 3  | 0,025         | 1   | 0     | 4 |
| Nível 4  | 0,0125        | 1   | 0     | 4 |
| Nível 5  | 0             | 1   | 0     | 4 |
| Nível 6  | 0             | 0,8 | 0     | 4 |
| Nível 7  | 0             | 0,5 | 0     | 4 |
| Nível 8  | 0             | 0,1 | 0     | 4 |
| Nível 9  | 0             | 0,1 | 0,1   | 4 |
| Nível 10 | 0             | 0,1 | 0,5   | 4 |
| Nível 11 | 0             | 0,1 | 1     | 4 |
| Nível 12 | 0             | 0,1 | 10    | 4 |
| Nível 13 | 0             | 0,1 | 20    | 4 |
| Nível 14 | 0             | 0,1 | 30    | 4 |
| Nível 15 | 0             | 0,1 | 40    | 4 |
| Nível 16 | 0             | 0,1 | 50    | 4 |

- o fator P corresponde à normalização da restrição;
- a variável p e alpha correspondem a penalização da função objetivo.

O exemplo a seguir representa um único caso de carregamento, representado por uma viga engastada, em que duas cargas na extremidade são aplicadas e não existe ângulo de defasagem entre as mesmas. O efeito sobre a estrutura é um momento fletor com sentido horário e o outro no sentido anti-horário.

#### **Exemplo q):**



Figura1.84: Distribuição de densidade

**Exemplo r):** este exemplo representa um caso de uma viga engastada, sujeito a dois carregamentos fora de fase (30 graus), isto é, o critério de fadiga aplicado com as duas cargas atuando simultaneamente. O resultado obtido não apresenta-se bem definido.

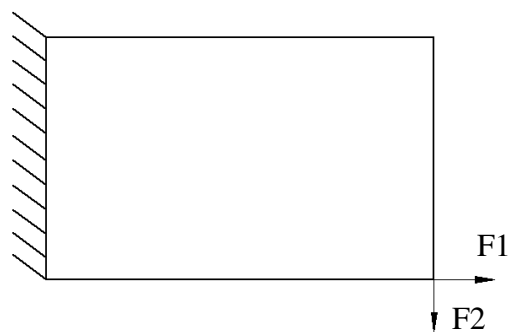


Figura1.85: Estrutura inicial (dimensão 5 X 8)



Figura1.86: Distribuição de densidade

### 10.3 SENSIBILIDADE DE FORMA PARA O PROBLEMA DE FADIGA

O gradiente para otimização de forma é aplicado no exemplo k. O primeiro passo é a interpretação do contorno da nova geometria e a geração da nova malha.

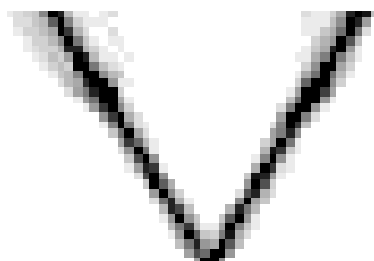


Figura 11.87: Estrutura obtida na otimização topológica

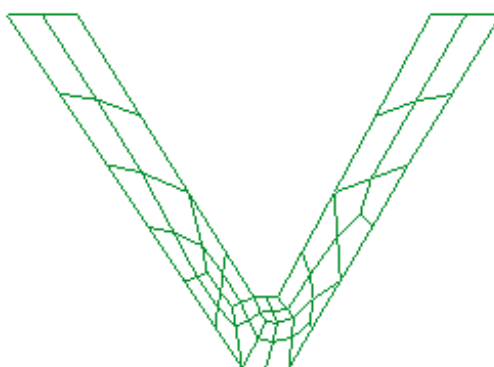


Figura 11.88: Interpretação do contorno da geometria e do remalhamento (exemplo k)

O próximo passo é determinar qual a região a ser aplicada a otimização de forma, para que este contorno possa ser descrito por uma curva b-spline, em que os pontos de controle ( $P_i$ ) são as variáveis de projeto, conforme demonstrado a seguir.

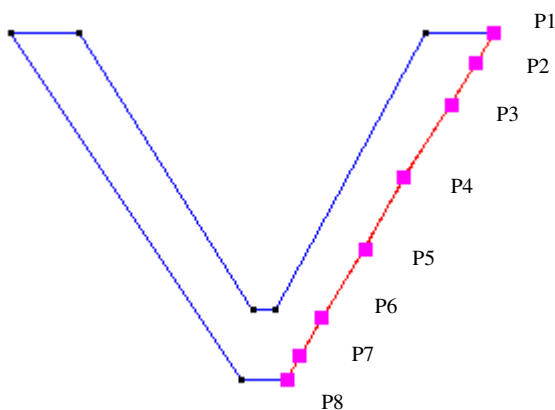


Figura11.89: Visualização do ponto de controle

A tabela abaixo apresenta os valores das derivadas na direção x e y em cada ponto de controle ( $P_i$ ).

| Ponto de controle | Derivada na direção x | Derivada na direção y |
|-------------------|-----------------------|-----------------------|
| P1                | -1,39                 | 1,28                  |
| P2                | -1,99                 | 1,57                  |
| P3                | -6,09                 | 4,49                  |
| P4                | -12,70                | 9,44                  |
| P5                | -13,12                | 9,41                  |
| P6                | -13,42                | 9,37                  |
| P7                | -13,04                | 9,55                  |
| P8                | -13,92                | 7,45                  |

O resultado do gradiente de forma está correto, pois a geometria interpretada foi considerada o contorno externo do componente, desta maneira aumentando o volume do mesmo, e o valor esperado para sensibilidade é o deslocamento dos pontos de controle para esquerda, diminuindo assim o volume da estrutura.



## 11. CONCLUSÕES

Neste capítulo são apresentadas as conclusões obtidas no desenvolvimento deste trabalho e sugestões para trabalhos futuros nesta área.

O principal objetivo alcançado neste estudo foi desenvolver formulações para a minimização do volume de estruturas contínuas através da otimização estrutural. Os problemas abordados buscam minimizar uma função objetivo envolvendo volume do componente, sujeito às restrições de um critério de falha baseado em tensão (von Mises) ou um critério de fadiga multiaxial. Estes problemas estão ainda em aberto no estágio atual do desenvolvimento tecnológico, no sentido que inexistem soluções satisfatórias. Os resultados apresentados neste trabalho são comparáveis aos melhores disponíveis na literatura, de Fancello e Pereira 2003.

Como explicado no capítulo 7, a otimização de estruturas contínuas com restrição de critério de tensão pode ser abordada por dois pontos de partida: o primeiro consiste em aplicar a restrição localmente (em cada ponto do componente) [Duysinx e Bendsoe, 1998] e o segundo consiste em aplicar uma restrição global. Neste trabalho somente foi abordado o estudo sobre restrição global devido ao menor custo computacional advindo do menor número de restrições.

O estudo realizado por Duysinx e Bendsoe, 1998, serviu de base para comparar e confirmar a manifestação do fenômeno do ótimo singular. A relaxação  $\epsilon$  mostrou-se eficaz para mitigar este problema, tanto para tensão quanto para fadiga.

A relaxação  $\epsilon$  aplicada neste trabalho foi modificada em relação dos trabalhos dos pesquisadores Fancello e Pereira, 2003 e Duysinx e Sigmund, 1998. A verificação da restrição de tensão escrita com essa nova relaxação mostrou-se eficiente. A formulação do problema de fadiga foi escrita a partir dos dados obtidos para otimização topológica de tensão, e o critério adotado para carregamento multiaxial é descrito por Mamiya e Araújo, 2002.

Os problemas de otimização topológica com restrição de tensão ou fadiga apresentam instabilidades na convergência, isto é, pequenas variações em algum parâmetro como um limite móvel ou um fator de penalização pode provocar grandes oscilações, e até impedir a convergência para um mínimo local. Para estes casos a aplicação da penalização da função objetivo deve ser feita lentamente e o limite móvel não pode ser muito elevado, diminuindo ao longo do processo iterativo.

Os resultados obtidos na otimização topológica não fizeram uso do filtro nos limites móveis, uma vez que sua aplicação tornou a formulação mais instável. Numerosos experimentos numéricos foram conduzidos variando-se os parâmetros de filtragem, mas em todos os casos provocaram saltos na convergência. Esse comportamento está associado à restrição escrita na

forma global, já que formulações com restrição local não apresentam esta dificuldade, conforme Sant'Anna 2002.

Para esta formulação, os valores iniciais aplicados na relaxação  $\epsilon$  não são os mesmos para os problemas de otimização com restrição de tensão e de fadiga. No caso da restrição de tensão o valor inicial da relaxação  $\epsilon$  é igual a 0.5, enquanto que na restrição de fadiga este valor é igual a 0.1. Em ambos os casos,  $\epsilon$  é reduzido a cada ciclo de convergência até alcançar zero.

Uma observação importante a ser ressaltada na obtenção dos resultados é a definição da sequência da relaxação  $\epsilon$  que influencia a convergência da otimização. A variação brusca do parâmetro  $\epsilon$  pode impedir a convergência, mas reduzir lentamente este parâmetro significa aumentar o número de iterações e o tempo de computação. Desta maneira, esta sequência foi ajustada heurísticamente para cada problema. Notou-se também uma interação entre a relaxação  $\epsilon$  e o ajuste do algoritmo de programação matemática, a programação linear sequencial.

Uma alternativa encontrada para definir melhor a estrutura após a otimização topológica é realizar a otimização de forma, com o objetivo de melhor definir o contorno da região. Neste trabalho, apresenta-se um exemplo para a determinação da sensibilidade de forma, mostrando a viabilidade de se realizar a otimização de forma a partir da otimização topológica aqui desenvolvida.

### 11.1. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

- Implementação das formulações em 3D;
- interpretação automática da geometria;
- implementação de outras metodologias de filtragem (filtragem da sensibilidade ou limitação da norma do gradiente de densidades);
- implementação de um critério de fadiga tradicional, como Goodman ou Soderberg, para verificação dos resultados obtidos por critérios multiaxiais proposto por diferentes pesquisadores e validação das respostas obtidas;
- busca da automação da escolha dos vários parâmetros da formulação, possibilitando uma definição melhor dos resultados de uma forma mais amigável ao usuário.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Achtziger, W., 2000. "Optimization with Variable Sets of Constraints and an Application to Truss Design", **Computational Optimization and Applications**, vol. 15, pp. 69-96.

Adelman, H. M., Haftka, R. T., 1986. "Sensitivity analysis of discrete structural system", **AIAA Journal**, vol. 24, pp. 823-832.

Allaire, G. e Francfort, G. A., "A Numerical Algorithm for Topology and Shape Optimization", In: Bendsoe, M. P., Mota Soares, C. A. (eds) *Topology Design of structures*, pp. 239-248. Dordrecht: Kluwer, 1993.

Allaire, G. e Kohn, R. V., "Topology Optimization and Optimal Shape Design Using Homogenization", **Topology Design of Structures**, pp. 207-218, 1993.

Allwood, R. J. e Chung, Y. S., 1984. "Minimum-Weight Design of Trusses by an Optimality Criteria Method", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 20, pp. 697-713.

Alotto, P. e Nervi, M. A., 2001. "An efficient hybrid algorithm for the optimization of problems with several local minima", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 50, pp. 847-868.

Arora, J. S., "Introduction to Optimum Design", McGraw-Hill, 1989.

Arsham, H., Gradisar, M. e Stemberger, M. I., 2001. "Linearly constrained global optimization: a general solution algorithm with applications", **Applied Mathematics and Computation**, xxxx, xxx-xxxx.

Azid, I. A., Kwan, A. S. K. e Seetharamu, K. N., 2002. "A GA-based technique for layout optimization of truss with stress and displacement constraints", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 53, pp. 1641-1674.

Barthelemy, B. e Haftka, R. T., 1988. “**Accuracy analysis of the semi-analytical method sensitivity** Proc. AIAA/ASME/ESCE/AHS/ASC 29<sup>th</sup> Structures Dynamics and Materials Conf., Williamsburg, Virginia, Apr. 18-20, Part 1, pp. 572-581.

Beckers, M. e Fleury, C., 1997. “A primal-dual approach in truss topology optimization”, **Computers & Structures**, vol. 64, pp. 77-88.

Belegundu, A. D. e Arora, J. S., 1985<sup>a</sup>. “A study of Mathematical Programming Methods for Structural Optimization. Part I: Theory”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 21, pp. 1583-1599.

Belegundu, A. D. e Arora, J. S., 1985<sup>b</sup>. “A study of Mathematical Programming Methods for Structural Optimization. Part II: Numerical Results”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 21, pp. 1601-1623.

Bendsoe, M. P., 1989. “Optimal Shape Design as a Material Distribution Problem”, **Structural Optimization**, vol. 1, pp. 193-202.

Bendsoe, M. P., 1995. “**Optimization of Structural Topology, Shape and Material**”, Springer Verlag, Berlin Heidelberg.

Bendsoe, M. P. e Kikuchi, N., 1988. “Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method”, **Computer Methods in Applied Mechanics Engineering**, vol.71, pp. 197-224.

Bendsoe, M. P. e Sigmund, O., 2003. “**Topology Optimization – Theory, Methods and Applications**”, Springer, London.

Bhavikatti, S. S. e Ramakrishnan, C. V., 1980. “Optimum shape design of rotating disks”, **Computers & Structures**, vol. 11, pp. 397-401.

Bletzinger, K. U., Maute, K. e Ramm, E., 1996. “Structural Concepts by Optimization”, Institut für Baustatik, University of Stuttgart, IASS-Symposium, October 7-11.

Bletzinger, K. U. e Ramm, E., 2001. “Structural optimization and form finding of light weight structures”, **Computers & Structures**, vol. 79, pp.2053-2062.

Bobaru, F. e Mukherjee, S., 2001. “Shape sensitivity analysis and shape optimization in planar elasticity the element-free Galerkin method”, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 190, pp. 4319-4337.

Bojczuk, D. e Mróz, Z., 1999. “Optimal topology and configuration design of trusses with stress and buckling constraints”, **Structural Optimization**, vol.17, pp. 25-35.

Bonnet, M., Burczynski, T. e Nowakowski, M., 2002. “Sensitivity analysis for shape perturbation of cavity or internal crack using BIE and adjoint variable approach”, **International Journal of Solids and Structures**, vol. 39, pp. 2365-2385.

Botkin, M. E., 1982. “Shape optimization of plate and shell structures”, **AIAA Journal**, vol. 20, pp. 268-273.

Branco, C. M., Fernandes, A. A., Castro, P. M. S. T., 1999. “**Fadiga de Estruturas Soldadas**”, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.

Braibant, V. e Fleury, C., 1984. “Shape Optimal Design Using B-splines”, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 44, pp. 247-267.

Braibant, V. e Fleury, C., 1985. “An Approximation concepts approach to shape optimal design”, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 53, pp. 119-148.

Bremicker, M.; Chirehdast, M., Kikuchi, N. e Papalambros, P. Y., 1991. “Integrated topology and shape optimization in structural design”, **Mech. Struct. Mach.**, vol. 19, pp. 551-587.

Canfield, R. A. Grandhi, R. V. e Venkayya, V. B., “Optimum Design of Structures with Multiple Constraints”, **AIAA Journal**, vol. 26/1, pp. 78-85, 1988.

Cardoso, E. L., “**Controle de Complexidade na Otimização Topológica de Estruturas Contínuas**”, Dissertação de Mestrado, PROMEC-UFRGS, 2000.

Cardoso, E. L. e Fonseca, J. S. O., 2003. “Complexity Control in the Topology Optimization of Continuum Structures”, **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, vol. XXV, pp. 293-301.

Chen, J. L. e Ho, J. S., 1992. “Direct Variational Method for Sizing Design Sensitivity Analysis of Beam and Frame Structures”, **Computers & Structures**, vol. 42, pp. 503-509.

Chen, T. Y., 1993. “Calculation of the Move Limits for the Sequential Linear Programming Method”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 36, pp. 2661-2679.

Cheng, G., “**Introduction to Structural Optimization: Theory, Methods and Solution**”, Lecture Notes, Dalian University of Technology, 1992

Cheng, G., 1995. “Some aspects of truss topology optimization”, **Structural Optimization**, vol. 10, pp. 173-179.

Cheng, G. e Guo, X., “ $\epsilon$ -Relaxed Approach in Structural Topology Optimization”, **Structural Optimization**, vol. 13, pp. 258-266, 1997

Cheng, G., Gu, Y. e Zhou, Y., 1989. “Accuracy of semi-analytical sensitivity”, **Finite Elements Anal. Des.**, vol. 6, pp. 113-128.

Cheng, G., Jiang, Z., 1992. “Study on topology optimization with stress constraints”, **Eng. Opt.** vol. 20, pp. 129-148.

Cheu S., 1989. “Sensitivity Analysis and Shape Optimization of Axisymmetric Structures”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 28, pp. 95-108.

Chirehdast, M., Gea, H. C., Kikuchi, N. e Papalambros, P. Y., 1994. “Stuctural configuration examples of na integrated optimal design process”, **J. Mech. Design**, vol. 116, pp. 997-1004.

Choi, K. K. e Chang, K. H., 1994. “A study of design velocity field computation for shape optimal design”, **Finite Elements in Analysis and Design**, vol. 15, pp. 317-341.

Choi, K. K. e Haug, E. J., 1983. “Shape Design Sensitivity Analysis of Elastic Structures”, **Journal Struct. Mech.**, vol. 11, pp. 231-269.

Choi, K. K. e Seong, H. G., 1986. “A domain Method for Shape Design Sensitivity Analysis of Built-up Structures”, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 57, pp. 1-15.

Ciavarella, M. e Demelio, G., 1999. “Numerical methods for the optimisation of specific sliding, stress concentration and fatigue life of gear”, **International Journal of Fatigue**, vol. 21, pp. 465-474.

Collins, J. A., 1993. “**Failure of Materials in Mechanical Design**”, John Wiley & Sons, New York.

Dang Van, K., Griveau, B., Message, O., 1989. “Biaxial e Multiaxial Fatigue”, **EFG**, vol. 3, pp. 479.

Dantzig, G., “**Linear Programming and Extensions**”, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963.

Dems, K., 1980. “Multiparameter shape optimization of elastic bars in torsion”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 15, pp. 1517-1539.

Dems, K. e Mróz, Z., 1980. “Optimal Shape Design of Multicomposite Structures”, **J. Struct. Mech.**, vol. 8, pp. 309-329.

Díaz, A. R. e Kikuchi, N., 1992. “Solutions to shape and topology eigenvalue optimization problems using a homogenization method”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 35, pp. 1487-1502.

Díaz, A. e Sigmund, 1995. “Checkerboard pattern in layout optimization”, **Structural Optimization**, vol. 10, pp. 40-45.

Ding, Y., 1986. “Shape Optimization of Structures: A Literature Survey”, **Computers & Structures**, vol.24, pp. 985-1004.

Dobbs, M. W. e Felton, L. P., 1969. “Optimization of truss geometry”, **Journal Structure Div. ASCE**, vol. 95, pp. 2105-2118.

Duysinx, P. e Bendsoe, M. P., “Topology Optimization of Continuum Structures with Local Stress Constraints”, **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, vol. 43, pp. 1453-1478, 1998.

Duysinx, P. Bruyneel, M. e Fleury, C., “**Solution of Topology Optimization Problems with Sequential Convex Programming**”, Lecture Notes, 2000.

Duysinx, P. e Sigmund, O., 1998. “**New developments in handling stress constraints in optimal material distribution**”,  $\gamma$ th Symposium on Multidiciplinary Analysis and Optimization, AIAA/USAF/NASA/ISSMO, AIAA-98-4906, pp.1501-1509.

Duysinx, P., Zhang, W. H. e Fleury, C., 1993. “Sensitivity Analysis with Unstructurer Free Mesh Generators in 2-D Shape Optimization”, Report AO-31, Aerospace Laboratory, LTASm Universidade de Liège, Bélgica / **World Congress on Optimal Design of Structural System, “Structural Optimization 93”**, Rio de Janeiro, Brasil.

Fadel, G. M. e Cimalay, S., 1993. “Automatic evaluation of move limits in structural optimization”, **Structural Optimization**, vol. 6, pp. 233 – 237.

Fancello, E. A. e Pereira, J. T., 2003. “Structural topology optimization considering material failure constraints and multiple load conditions”, **Latin American Journal of Solids & Structures**, vol., pp.



Fonseca, J. S. O., “**Design of Microstructures of Periodic Composite Materials**”, Tese de Doutorado, The University of Michigan, 1997.

Fourment, L., Balan T. e Chenot, J. L., 1996. “Optimal Design for Non-Steady-State Metal Forming Processes-II. Application of Shape Optimization in Forging”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol.39, pp. 51-65.

Fourment, L. e Chenot, J. L., 1996. “Optimal Design for Non-Steady-State Metal Forming Processes-I. Shape Optimization Method”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol.39, pp. 33-50.

Freitas, J. A. T., e Cismasiu, I., 2002. “Shape optimization with hybrid-Trefftz displacement elements”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol.53, pp. 473-498.

Fukushima, J., Kobayashi, Y., Nakamura, M., Otsubo, Y. e Kurumatani, K.. “Development of Shape Optimization Technique Based on the Basis Vector Method”, 950575.

Gani, L. e Rajan, S. D., 1999. “Use of Frature Mechnics and Shape Optimization for Component Designs”, **AIAA Journal**, vol.37, pp. 255-260.

G.-D. Cheng e Y.W. Liw, 1987. “A new computation scheme for sensitivity analysis”, **Eng. Opt.**, vol. 12, pp. 219-239.

Gengdong, C. e Yingwei, L., 1987. “A New Computation Scheme for Sensitivity Analysis”, **Eng. Opt.**, vol. 12, pp. 219-234.

Gea, H. C. e Luo, J., 2001. “Topology optimization of structures with geometrical nonlinearities”, **Computers & Structures**, vol. 79, pp. 1977-1985.

Gil, L. e Andreu, A., 2001. “Shape and cross-section optimisation of truss structure”, **Computers & Structures**, vol. 79, pp. 681-689.

Godoy, L. A., Taroco, E. O. e Feijoo, R. A., 1994. “Second-Order Sensitivity Analysis in Vibration and Buckling Problems”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 37, pp. 3999-4014.

Grignon, P. e Fadel, G. M., 1994. “Fuzzy Move Limit Evaluation in Structural Optimization”, **AIAA Journal**, vol.42, pp.81-94.

Grunwald, J. e Schnack, E., 1998. “Modeling fatigue for shape optimization of dynamically loaded parts”, **Advances in Engineering Software**, vol. 29, pp. 63-67.

Guilherme, C. E. M., 2000. “**Otimização topológica de treliças e pórticos com restrições de flambagem e flexibilidade**”, Dissertação de Mestrado, PROMEC-UFRGS.

Guo, X., Cheng, G. 1998. “ $\epsilon$ -continuation approach for the solution of singular problems”, **Eng. Opt.**

Guo, X. e Cheng, G. D., 2000. “Na extrapolation approach for the solution of singular optima”, **Structure Multidisc Optim**, vol. 19, pp. 255-262.

Gutkowski, W., Bauer, J. e Iwanow, Z., 1985. “Discrete Structural Optimization”, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 51, pp.71-78.

Haber, R. B., Bendsoe, M. P. e Jog, C., “A New Approach to Variable – Topology Shape Design Using a Constraint on the Perimeter”, **Structural Optimization**, vol. 11, pp. 1-12, 1996.

Haftka, R. T., 1985. “Sensitivity Calculations for Iteratively Solved Problems”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 21, pp. 1535-1546.

Haftka, R. T., Adelman, H. M., 1989. “Recent developments in structural sensitivity analysis”, **Structural Optimization**, vol. 1, pp. 137-151.

Haftka, R. T., e Gürdal, Z., 1996. “**Elements of structural optimization**”, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht

Haftka, R. T. e Grandhi, R. V., 1986. “Structural shape optimization – a survey”, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 57, pp. 91-106.

Hansen, J. S., Liu, Z. S. e Olhof, N., 2001. “Shape sensitivity analysis using a fixed basis function finite element approach”, **Struct Multidisc Optim**, vol. 21, pp. 177-195.

Haug, E. J., Choi, K. K. e Komkov, V., 1986. “**Design Sensitivity Analysis of Structural System**”, Academic Press, Inc., New York.

Hoback, A., “Optimization of Singular Problems”, **Structural Optimization**, vol.12, pp. 739-756, 1998;

Hou, J. W. e Sheen, J. S., 1988. “On the design velocity field in the domain and boundary methods for shape optimization”, **AIAA Journal**, vol. 88, pp. 1032-1040.

Imam, M. H., 1982. “Three-dimensional shape optimization”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 18, pp. 661-673.

Imai, K., 1983. “Structural Optimization to Include Material Selection”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 19, pp. 217-235.

Jog, C. S., 2001. “A robust dual algorithm for topology design of structures in discrete variables”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 50, pp. 1607-1618.

Jog, C. S. e Haber, R. B., 1994. “Stability of finite elements models for distributed-parameter optimization and topology design”. TAM Report N. 758. Theoretical and Applied Mechanics, University of Illinois at Urbana-Champaign.

Jog, C. S., Haber, R. B. e Bendsoe, M. P., 1992. “Topology design using a material with self-optimizing microstructure”. In Bendsoe, M. P.; Mota Soares, C. A. (eds.) **Topology design of structures**, pp. 219-238. Dordrecht: Kluwer.

Jog, C. S., Haber, R. B. e Bendsoe, M. P., 1994. “Topology design with optimized, self-adaptive materials”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 37, pp. 1323-1350.

Jog, C. S. e Haber, R. B., “Stability of Finite Element Models for Distributed-Parameter Optimization and Topology Design”, **Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.**, vol. 130, pp.203-226, 1996

Jr. Parente, E., 2000. “Análise de Sensibilidade e Otimização de Forma de Estruturas Geometricamente Não-Lineares”, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – Departamento de Engenharia Civil, Rio de Janeiro.

Jr. Parente, E., 2003. “A simples and Accurate Procedure for Shape Sensitivity Analysis”, COBEM.

Jr. Parente, E. e Vaz, L. E., 2001. “Improvement of semi-analytical design sensitivity of non-linear structures using equilibrium relations”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 50, pp. 2127-2142.

Jr. Parente, E. e Vaz, L. E., 2001. “On Evaluation of Shape Sensitivities of Nonlinear Critical Loads”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol., pp.1-36.

Karwan, M., Spronk, J., and Wallenius, J. (Eds.): Essays in Decision Making, “**Reference Direction Approach to Multiple Objective Linear Programming: Historical Overview**”, (A Volume in Honour of Stanley Zionts), Springer, pp. 74-92, 1997.

Kegl, M., 2000. “Shape optimal design of structures: an efficient shape representation concept”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol.49, pp. 1571-1588.

Khan, M. R., 1984. “Optimality Criterion Techniques Applied to Frames Having General Cross-Sectional Relationships”, **AIAA Journal**, vol. 22, pp.669-676.

Kibsgaard, S., 1992. “Sensitivity Analysis – The Basis for Optimization”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 34, pp. 901-932.

Kikuchi, N., Chung, K. Y., Torigaki, T. e Taylor, J. E., 1986. "Adaptive Finite Element Methods for Shape Optimization of Linearly Elastic Structures", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 57, pp. 67-89.

Kim, N. H., Park, Y. H. e Choi, K. K., 2001. "Optimization of a hyper-elastic structure with multibody contact using continuum-based shape design sensitivity analysis", **Struct Multidisc Optim**, vol. 21, pp. 196-208.

Kim, H. Y. e Kwak, B. M., 2002. "Design space optimization using a numerical design continuation method", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 53, pp. 1979-2002.

Kirsch, U. e Taye, S., 1986. "On optimal topologies of grillage structures", **Eng. Comp.**, vol.1, pp. 229-243.

Kirsch, U., 1987. "Optimal topologies of flexural system", **Eng. Opt.** vol. II, pp. 141-149.

Kirsch, U., 1989a. "Optimal topologies of structures", **Appl. Mech. Rev.** vol. 42, pp. 223-239.

Kirsch, U., 1989b. "Optimal topologies of truss structures", **Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.**, vol. 72, pp. 15-28.

Kirsch, U., 1990. "On singular topologies in optimum structural design", **Structural Optimization** vol. 2, pp. 133-142.

Kodiyalam, S., e Vanderplaats, G. N., 1989. "Shape Optimization of Three-Dimensional Continuum Structures via Force Approximation Techniques", **AIAA Journal**, vol. 27, pp. 1256-1263.

Kolakowski, P. e Holnicki-Szulc, J., 1998. "Sensitivity Analysis of Truss Structures (Virtual Distortion Method Approach)", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol.43, pp. 1085-1108.

Kowalczyk, P. e Kleiber, M., 1999. "Shape sensitivity in elasto-plastic computations", **Computer methods in applied mechanics and engineering**, vol. 171, pp. 371-386.

Kristensen, E. S. e Madsen, N. F., 1976. "On the optimum shape of fillets in plates subjected to multiple in-plane loading cases", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol.10, pp. 1007-1019.

Kumar, V., Lee S. J. e German, M. D., em 1989. "Finite Element Design Sensitivity Analysis and its Integration with Numerical Optimization Techniques for Structural Design, **Computers & Structures**, vol. 32, pp. 883-897.

Leblond, J. B., Perrin, G. e Deveaux, J., 1994. "Bifurcation effects in ductile metals with damage delocalization", **Journal of Applied Mechanics**, vol. 61, pp. 236-242.

Liu, Q., Steven, G. P., Querin, O. M. e Xie, Y. M., 2001. "Stress based optimization of torsional shafts using na evolutionary procedure", **International Journal of Solids and Structures**, vol. 38, pp. 5661-5667.

Lin, C. Y. e Chao, L. S., 2000. "Automated image interpretation for integrated topology and shape optimization", **Structural Multidisc. Optim.**, vol. 20, pp. 125-137.

Luenberg, D. G., "**Optimization by Vector Space Methods**", John Wiley & Sons, 1969.

Lukié, M. e Cremona, C., 2001. "Probabilistic optimization of welded joints maintenance versus fatigue and fracture", **Reliability Engineering & System Safety**, vol. 72, pp. 253-264.

Mamiya, E. N. e Araújo, J. A., 2002. "Fatigue limit under multiaxial loadings : on the definition of the equivalent shear stress", **Mechanics Research communications**, vol. 29, pp. 141-151.

Manickarajah, D., Xie, Y. M. e Steven, G. P., 1998. “An evolutionary method for optimization of plate buckling resistance”, **Finite Elements in Analysis and Design**, vol. 29, pp. 205-230.

Maxwell, J. C., 1872. “On reciprocal figures, frames, and diagrams of force”, **Trans Roy Soc Edinb**, vol.26, n1.

Maute, K. e Rauli, M., 2003. “An interactive method for the selection of design criteria and the formulation of optimization problems in computer aided optimal design”, **Computers & Structures**, vol. xx, pp. xxx-xxx.

Michell, A. G. M., 1904. “The limits of economy of material in frame-structures”, **Phil Mag**, vol. 8, pp. 589-597.

Mullender, M. G., Huiskes, R. e Weinans, H., 1994. “A physiological approach to the simulation of bone remodelling as a self-organizational control process”, **Journal of Biomechanics**, vol. 11, pp. 1389-1394.

Na, M. S., Kikuchi, N. e Taylor, J. E., 1983. “Optimal Modification of Shape for Two-Dimensional Elastic Bodies”, **J. Struct. Mech.**, vol. 11, pp. 111-135.

Newman, W. M. e Sproull, R. F., 1979. “**Principles of Interactive Computer Graphics**”, McGraw-Hill, New York.

Novotny, A. A., Feijóo, R. A., Taroco, E. e Padra, C., 2003. “Topological sensitivity analysis”. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, vol. 192, pp. 803-829.

Oda, J. e Yamazaki, 1980. “Short communications a procedure to obtain a fully stressed shape of elastic continuum”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 15, pp. 1095-1105.

Olhoff, N., Rasmussen, J., e Lund, E., 1992. Method of exact numerical differentiation for error estimation in finite element based semi-analytical shape sensitivity analyses. Special Report no. 10, Institute of Mechanical Engineering, Alborg University.

Papalambros, P. Y. e Chirehdast, M., 1991. “An integrated enviromment for structural configuration design”, **J. Engrg. Design**, vol.1, pp. 73-96.

Pedersen, P., 2002. “**Optimal designs Size, Shape and Topology**”, Lyngby, Dept. of Mechanical Eng., Solid Mechanics Technical University of Denmark.

Pedersen, P., Cheng, G. e Rasmussen, J., 1989. “On accuracy problems for semi-analytical sensitivity analyses”, **Mech. Structural Machines**, vol. 17, pp. 373-384.

Pereira, J. T., Fancello, E. A., e Barcellos, C. S., 2003. “Topology optimization of continuum structures with material failure constraints”, **Struct. Multidisc. Optim.**, vol. 25, pp. 1-17.

Pitukhin, A. V., 1997. “Optimal Design Problems Using Fracture Mechanics Methods”, **Computers & Structures**, vol.65, pp. 621-624.

Pourazady, M., Fu, Z., 1996. “Approch to Structural Shape Optimzation”, **Computers and Structures**, vol. 60, pp. 279-289.

Poulsen, T. A., 2002. “Topology optimization in wavelet space”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol.53, pp. 567-582.

Prager, W., 1972. “Conditions for structural optimality”, **Computers Structure**, vol. 2, pp. 833-840.

Prager, W. e Shield, R. T., 1967. “A general theory of optimal plastic design”, **J. Applied Mech.**, vol. 34, pp. 184-186.

Putresza, J. T. e Kolakowski, P., 2001. “Sensitivity analysis of frame structures (virtual distortion method approach)”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol.50, pp. 1307-1329.



Queau, J. P., e Trompette, P., 1980. “Two-dimensional shape optimal design by the finite element method”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 15, pp. 1603-1612.

Rajan, S. D. e Belegundu, A. D., 1989. “Shape Optimal Design Using Fictitious Loads”, **AIAA Journal**, vol. 27, pp. 102-107.

Ramm, E., Bletzinger, K. U. e Maute, K. 1995. “Structural Optimization”, Institute of Structural Mechanics, University of Stuttgart, Germany.

Ramakrishnan, C. V. e Francavilla, A., 1974. “Structural shape optimization using penalty functions”, **J. Structural Mech.**, vol. 3, pp. 403-422.

Rodrigues, H. C., 1988. “Shape Optimal Design of Elastic Bodies Using a Mixed Variational Formulation”, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 69, pp. 29-44.

Rodopoulos, C. A., Rios, E. R. e Yates, J. R., 1999. “Optimising the crack arrest ability of unidirectional metal matrix composites”, **International Journal of Fatigue**, vol. 21, pp. 1007-1012.

Rojas, P. A. M., 2003, “**Otimização de Pré-Formas e Matrizes em Problemas Bidimensionais de Forjamento**”. Tese de Doutorado, PROMEC-UFRGS.

Rojas, P. A. M., 2000. “Solução de Problemas de Treliças Não-lineares pelo Método dos Elementos Finitos”, **Relatório interno, Gmap, DEMEC, UFRGS**.

Rojas, P. A. M., Fonseca, J. S. O. e Creus, G. J., 2000. “Otimização do layout de treliças espaciais elastoplásticas com não-linearidade geométrica”, **XXIX Jornadas Sudamericanas de Ingenieria Estructural**.

Rojas, P. A. M., Fonseca, J. S. O. e Creus, G. J., . “A new approach for 2D preform optimization using na elastic-plastic material model and unstructured mesh generators”,

Rojas, P. A. M., Bittencourt, E., Fonseca, J. S. O. e Creus, G. J., xxxx. “Preform optimization of 2D forged components using sequential linear programming”, XXXX.

Rousselet, B. e Haug, E. J., 1982. “Design Sensitivity Anlysis in Structural Mechanics. III. Effects of Shape Variation”, **Journal Struct. Mech.**, vol. 10, pp. 273-310.

Rozvany, G I. N. e Birker, T. “On Singular Topologies in Exact Layout Optimization”, *Structural Optimization*, vol.8, pp. 228-235, 1994

Rozvany, G. I. N., 1996. “Difficulties in truss topology optimization with local buckling and system stability constraints”, **Structural Optimization** vol. 11, pp. 213-221.

Rozvany, G. I. N., Bendsoe, M. P. e Kirsch, U., 1995. “Layout optimization of structures”, **Applied Mechanics Reviews**, vol. 48, pp. 41-119.

Rozvany, G.I.N. e Zhou, M., 1991. “The COC algorithm, Part I: Cross-section optimization or sizing”, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 89, pp. 281-308.

Rozvany, G.I.N. e Zhou, M., 1991. “The COC algorithm, Part II: topological, geometrical and generalized shape optimization”, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 89, pp. 309-336.

Rozvany, G. I. N., Zhou, M. e Birker, T., 1992. “Generalized Shape Optimization without Homogenization”, **Structural Optimization**, vol. 4, pp. 250-252.

Sadek, E. A., 1989. “An Optimality Criterion Method for Dynamic Optimization of Structures”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 28, pp. 579-592.

Salagame, R. R. E Belegume, A. D., “Shape Optimization with p-Adaptivity”, **American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal**, vol. 33 (12), pp. 2399-2405, 1995.

Samareh, J. A., 2001. "Survey of Shape Parameterization Techniques for High-Fidelity Multidisciplinary Shape Optimization", **AIAA Journal**, vol. 39, pp. 877-884.

Sant'Anna, H. M., 2002. "**Otimização Topológica de Estruturas Bidimensionais Contínuas Submetidas a Restrições de Flexibilidade e Tensão**", Dissertação de Mestrado, PROMEC-UFRGS.

Schmit, L. A., 1960. "**Structural design by systematic synthesis**", Proc. 2nd Nat. Conf. on Elec. Comp. ASCE, pp. 105-132.

Schmit, L. A. Jr. E Farshi, B., 1974. "Some Approximation Concepts for Structural Synthesis", **AIAA Journal**, vol. 12, pp. 692-699.

Schnack, E., 1979. "An optimization procedure for stress concentrations by the finite element technique", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 14, pp. 115-124.

Schnack, E. e Weikl, W., 2002. "Shape optimization under fatigue using continuum damage mechanics", **Computer-Aided Design**, vol. 34, pp. 929-938.

Schwarz, S., Maute, K. e Ramm, Ekkehard, 2001. "Topology and shape optimization for elastoplastic structural response", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 190, pp. 2135-2155.

Sienz, J. e Hinton, E., 1997. "Reliable structural optimization with error estimation, adaptivity and robust sensitivity", **Computers & Structures**, vol.64 pp. 31-63.

Sigmund, O., 1994. "**Design of Material Structures Using Topology Optimization**", Thesis, Department of Solid Mechanics, Technical University of Denmark.

Sigmund, O., Petersson, J., 1998. "Numerical Instabilities in Topology Optimization: A Survey on Procedures Dealing with Checkerboards, Mesh-Dependencies and Local Minima", **Structural Optimization**, vol. 16, pp. 68-75.

Sines, G., Ohgi, G., 1981. **ASME, J. Eng. Mater. Tech.** 103, 82.

Stolpe, M. e Svanberg, K., 2001. “On the trajectories of penalization methods for topology optimization”, **Struct Multidisc Optim**, vol. 21, pp. 128-139.

Stolpe, M. e Svanberg, K., 2001. “On the trajectories of the epsilon-relaxation approach for stress-constrained truss topology optimization”, **Struct Multidisc Optim**, vol. 21, pp. 140-151.

Suresh, S., 2003. “**Fatigue of Materials**”, Cambridge University Press, New York.

Sved, G. e Ginos, Z., 1968. “**Structural optimization under multiple loading**”, *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 10, pp. 803-805.

Tada, Y. e Minami, E., 1993. “Optimum Design of 3-D Truss Structure and its Effect on Control”, **JSME International Journal**, vol. 36, pp. 90-96.

Tcherniak, D., 2002. “Topology optimization of resonating structures using SIMP method”, **Interntional Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 54, pp. 1605-1622.

Tong, W. H. e Liu, G. R., 2001. “An optimization procedure for truss structures with discrete design variables and dynamic constraints”, **Computers & Structures**, vol. 79, pp. 155-162.

Tseng, C. H. e Lu, T. W., 1990. “Minimax Multiobjective Optimization in Structural Design”, **Interntional Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 30, pp. 1213-1228.

Venkayya, V. B., 1971. “Design of optimum structures”, **Computers Structures**, vol. 1, pp. 265-309.

Venkayya, V. B., 1978. "Structural optimization: a review and some recommendations", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 13, pp. 203-228.

Waldman, W., Heller, M. e Chen, G. X., 2001. "Optimal free-form shapes for shoulder fillets in flat plates under tension and bending", "**International Journal of Fatigue**", vol. 23, pp. 509-523.

Wang, S.Y., Sun, Y. e Gallagher, R. H., 1985. "Sensitivity analysis in shape optimization of continuum structures", **Computers & Structures**, vol.20, pp. 855-867.

Weinans, H., Huiskes, R. e Grootenboer, H. J., 1992. "The behavior of adaptive bone-remodeling simulation models", **J. Biomechanics**, vol. 25, pp. 1425-1441.

Wilczynski, B., 1997. "Shape optimisation for stress reduction around single and interacting notches based on the fictitious stress method", **Engineering Analysis with Boundary Elements**, vol. 19, pp. 117-128.

Woo, T. H., 1987. "Space Frame Optimization Subject to Frequency Constraints", **AIAA Journal**, vol. 25, pp. 1396-1403.

Wu, C. C. e Arora, J. S., 1987. "Design Sensitivity Analysis and Optimization of Nonlinear Structural Response Using Incremental Procedure", **AIAA Journal**, vol. 25, pp. 1118-1125.

Wujek, B. A. e Renaud, J. E., 1998. "New Adaptive Move Limit Management Strategy for Approximate Optimization, Part 1", **AIAA Journal**, vol. 36, pp. 1911-1921.

Yang, R. J. e Chen, C. J., 1996. "Stress-based topology optimization", **Structural Optimization**, vol. 12, pp. 98-105.

Yang, R. J. e Choi, K. K., 1985. "Accuracy of Finite Element Based Shape Design Sensitivity Analysis", **Journal Struct. Mech.**, vol. 13, pp. 223-239.

Yao, T. M. e Choi, K. K., 1989. “3-D Shape Optimal Design and Automatic Finite Element Regridding”, **International Journal for Numerical Methods Engineering**, vol. 28, pp. 369-384.

Yin, L. e Yang, W., 2001. “Optimality criteria method for topology optimization under multiple constraints”, **Computers & Structures**, vol. 79, pp. 1839-1850.

Zhang, W. e Beckers, P., “A systematic strategy to select design variables for shape optimization of structures”, Aerospace Laboratory, University of Liege, Liege, Belgium.

Zhang, W. H. e Fleury, C., 1997. “A modification of convex approximation methods for structural optimization”, **Computers & Structures**, vol. 64, pp. 89-95.

Zhao, G., Wright, E. D. e Grandhi, R. V., 1997. “Preform Die Shape Design in Metal Forming Using an Optimal”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol.40, pp. 1213-1230.

Zhou, M. e Haftka, R. T., 1995. “A comparison of optimality criteria methods for stress and displacement constraints”, **Computer methods in applied mechanics and engineering**, vol. 124, pp. 253-271.

Zhou, M. e Rozvany, G. I. N., 1992. “DCOC: na optimality criteria method for large system. Part I: Theory”, **Structural Optimization**, vol. 5, pp. 12-25.

Zhou, M. e Rozvany, G. I. N., 1993. “DCOC: na optimality criteria method for large system. Part II: Algorithm”, **Structural Optimization**, vol. 6, pp. 250-262.

Zhou, M. e Rozvany, G. I. N., 1995. “An improved approximation technique for the DCOC Method of sizing optimization”, **Computer & Structures**, vol.60, pp. 763-769.

Zienkiewicz, O. C. e Campbel, J. S., “Shape optimization and sequential linear programming”, Optimum Structural Design (Ed. by R.H. Gallagher and O. C. Zienkiewicz), John Wiley, New York, pp. 109-126, 1973.

## AI. APÊNDICE I: APRESENTAÇÃO DO FLUXOGRAMA

Este anexo apresenta uma descrição simplificada do programa implementado nesta tese. O primeiro fluxograma apresentado, figura I.1, apresenta os principais blocos do programa, estando dividido em quatro partes principais, sendo o fluxograma básico do programa de otimização implementado.

O primeiro bloco apresentado na figura I.1 trata da entrada de dados, em que as coordenadas, conectividades, número de elementos, nós, restrições e forças são informados. Esta malha inicial foi gerada no programa GID.

A segunda figura I.2 apresenta o fluxograma para solução das equações de equilíbrio, cálculo da deformação, tensão e critério de von Mises utilizado para problemas em que somente apresenta restrição de tensão global. No terceiro fluxograma, figura I.3, além de apresentar o fluxograma para solução das equações de equilíbrio, cálculo da deformação e tensão, apresenta a determinação do tensor desviador e do critério de fadiga multiaxial. Este fluxograma é utilizado para problemas que apresentam a restrição de fadiga.

A figura I.4, esta relacionada diretamente com o programa de otimização, pois neste fluxograma apresenta o cálculo das derivadas de tensão ou fadiga e a linearização do problema. As novas densidades para os elementos são obtidas através da programação linear, em que busca-se obter o mínimo da função objetivo.

O fluxograma da figura I.5 mostra a determinação dos limites móveis para cada elemento. Se para as três últimas iterações não houver variação do sinal na variável de projeto, o limite é aumentado, caso contrário é diminuído. O valor adotado para o aumento ou diminuição do limite móvel é de acordo com o problema a ser solucionado.

O último bloco da figura I.1 trata da convergência do problema. Esta é avaliada pela variação da função objetivo e pela satisfação da função das restrições. Se em duas iterações sucessivas a variação da função custo for inferior ou igual 0.001 e as restrições forem satisfeitas, o problema é terminado.

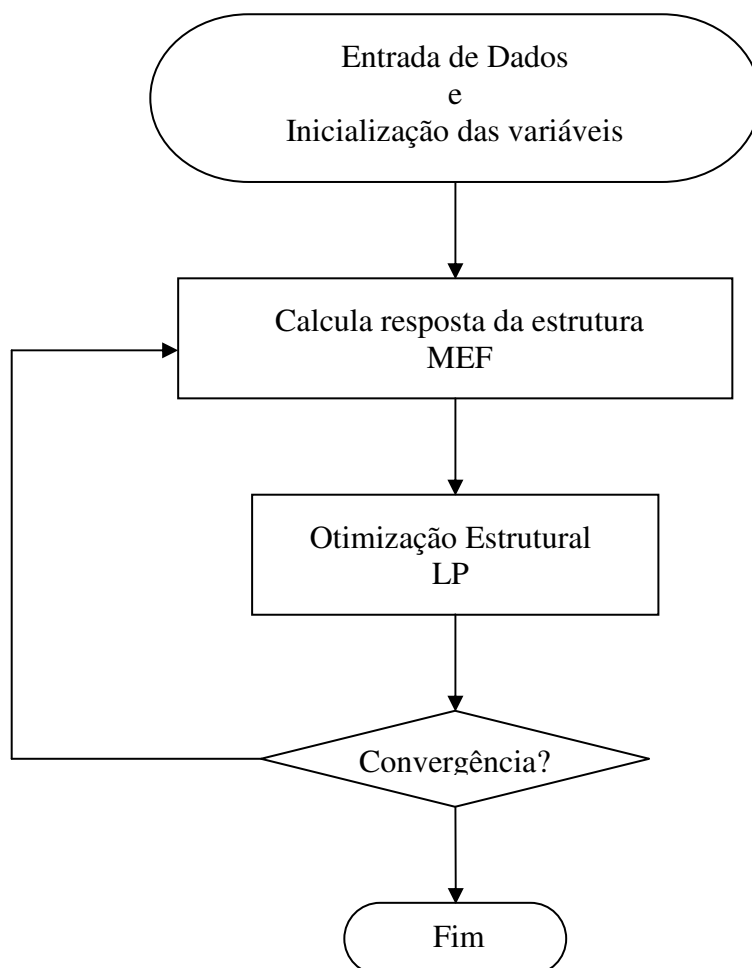


Figura I.1: Fluxograma do problema de otimização



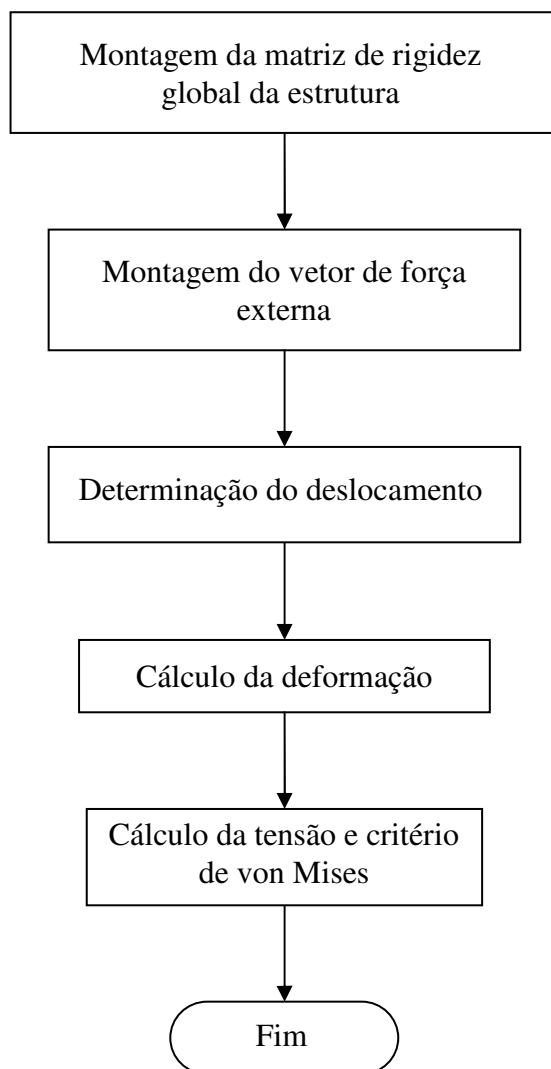


Figura I.2: Fluxograma do cálculo da deformação, tensão e critério de von Mises

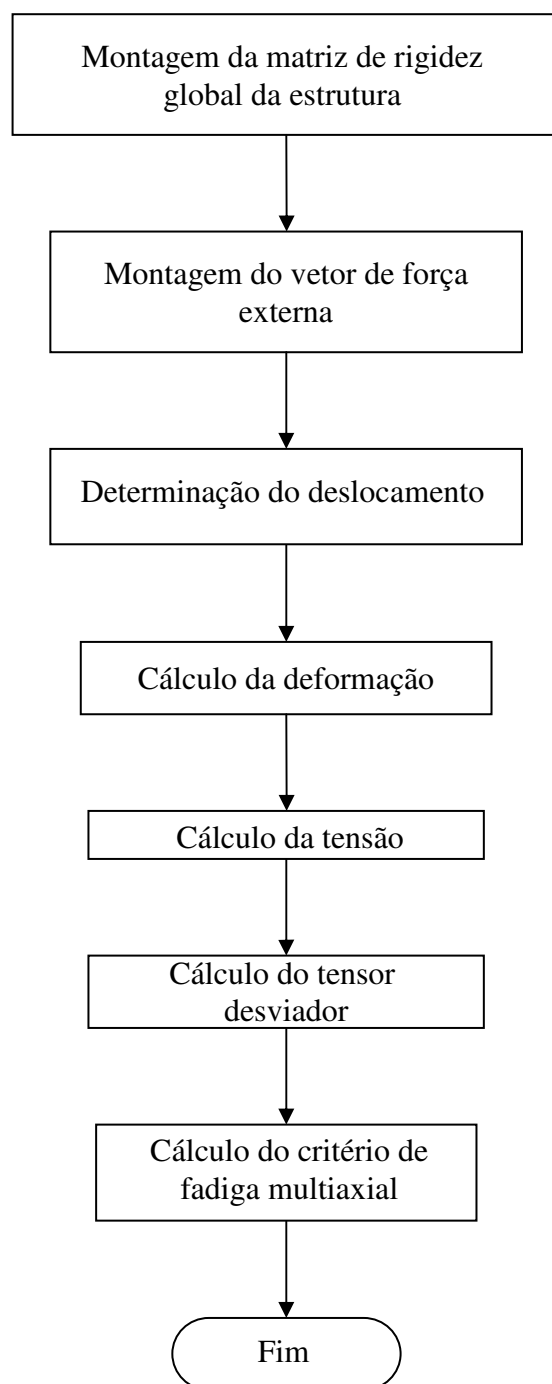


Figura I.3: Fluxograma do cálculo do tensor desviador e do critério de fadiga multiaxial

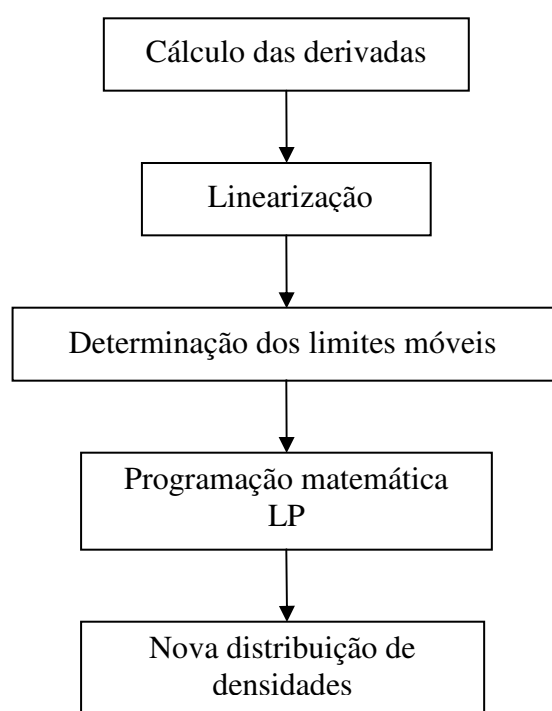


Figura I.4: Fluxograma do gradiente de tensão ou fadiga e a linearização do problema

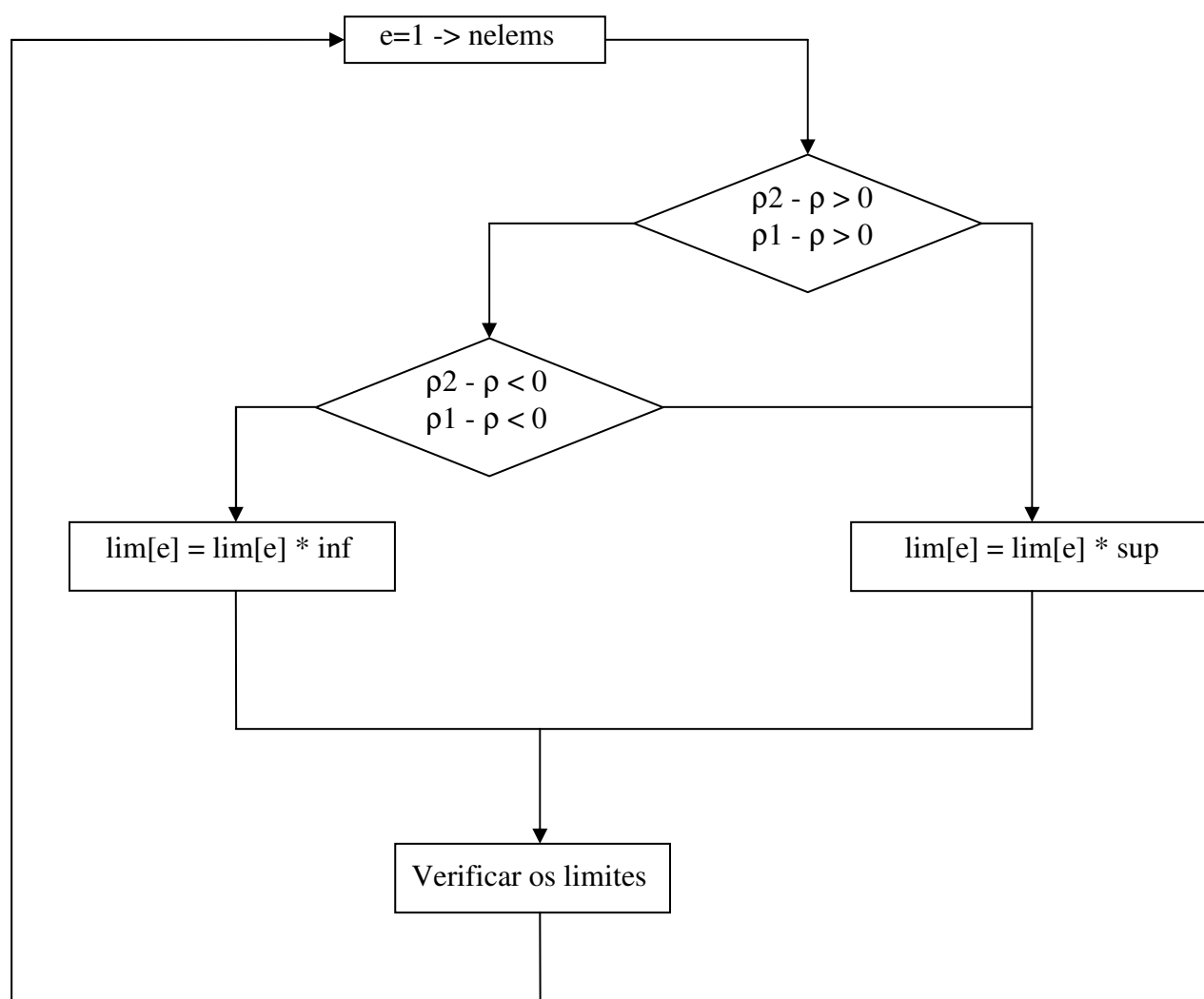


Figura I.5: Fluxograma dos limites móveis

## AII. APÊNDICE II: PROVA MATEMÁTICA

**Prova:** Temos  $b_1$  é uma esfera unitária em  $\mathbb{R}^m$ :

$$b_1 = \{y \in \mathbb{R}^m; \|y\| = 1\} \quad (241)$$

onde

$$\|y\| = (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_m^2)^{1/2} \quad (242)$$

é uma norma clássica Euclidean em  $\mathbb{R}^m$ . O elipsóide pode ser caracterizado como um grupo de pontos:

$$x \in \mathbb{R}^m \quad (243)$$

$$x = Ly \quad (244)$$

$$y \in b_1 \quad (245)$$

onde  $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é matriz simétrica, positiva semi-definida com autovalores dado pela magnitude  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  dos semi-eixos de  $\xi$ . Por outro lado, a face do prisma retangular, ortogonal para o elemento de base  $n_i$  e localizado a uma distância  $a_i$  do centro do elipsóide, pode ser caracterizado como grupo de pontos:

$$x \in \mathbb{R}^m \quad (246)$$

$$x \cdot n_i = a_i. \quad (247)$$

Substituindo a equação (244) na (247) obtém-se

$$Ly \cdot n_i = a_i \quad (248)$$

ou equivalentemente

$$y.Ln_i = a_i \quad (249)$$

O grupo de pontos  $x = Ly$  satisfazendo a equação (248) ou  $y$  satisfazendo a equação (249).

O grupo de  $y \in b_1$  satisfazendo a equação (249) é unitária (significa que o hiperplano definido na equação (247) é tangente ao elipsóide  $\xi$ ) se  $y$  é paralelo  $Ln_i$ .

$$Ln_i = \|Ln_i\| y \quad (250)$$

que juntamente com equação (249), implica que a distância do hiperplano para o centro do elipsóide deve ser

$$a_i = \|Ln_i\|. \quad (251)$$

Então se pode escrever

$$\sum_{i=1}^m \|Ln_i\|^2 = \sum_{i=1}^m a_i^2 \quad (252)$$

De acordo com Lemma [Mamiya, et. al., 2002]

$$\|L\|_F = \left( \sum_{i,j=1}^m L_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (253)$$

Então:

$$\tau_{eq} = \left( \sum_{i=1}^5 a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (254)$$

### AIII. APÊNDICE III: EXEMPLO DO CALCULO DE FADIGA MULTIAXIAL

**Exemplo:** Considerando dois casos de carregamento em uma barra com cargas de cisalhamento e normal em um dos seus extremos e outro completamente vinculado.

- Primeiro caso de carregamento:

$$\begin{aligned}\sigma_{1,xx}(t) &= k_1 \text{sen}(w_1 t) \\ \sigma_{1,xy}(t) &= k_2 \text{sen}(w_1 t)\end{aligned}\tag{255}$$

- Segundo caso de carregamento:

$$\sigma_{2,xx}(t) = k_3 \text{sen}(w_2 t)\tag{256}$$

onde  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  são amplitudes e  $t$  o tempo.

Tensão total na barra solicitada.

$$\sigma_1(t) = \begin{vmatrix} k_1 \text{sen}(w_1 t) & k_2 \text{sen}(w_1 t) \\ k_2 \text{sen}(w_1 t) & 0 \end{vmatrix}\tag{257}$$

$$\sigma_2(t) = \begin{vmatrix} K_3 \text{sen}(w_1 t) & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\sigma(t) = \sigma_1(t) + \sigma_2(t)\tag{258}$$

$$\sigma(t) = \begin{vmatrix} k_1 \text{sen}(w_1 t) + K_3 \text{sen}(w_1 t) & k_2 \text{sen}(w_1 t) \\ k_2 \text{sen}(w_1 t) & 0 \end{vmatrix}\tag{259}$$

Calculo do tensor desviador.

$$\begin{aligned}p &= \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma(t)) I = \frac{1}{2} (\sigma_{11}(t) + \sigma_{22}(t)) I \\ p &= \frac{1}{2} (k_1 \text{sen}(w_1 t) + K_3 \text{sen}(w_1 t)) I\end{aligned}\tag{260}$$

onde  $I$  é uma matriz diagonal unitária.

$$S(t) = \sigma(t) - p \quad (261)$$

$$S(t) = \begin{vmatrix} k_1 \text{sen}(w_1 t) + K_3 \text{sen}(w_1 t) & k_2 \text{sen}(w_1 t) \\ k_2 \text{sen}(w_1 t) & 0 \end{vmatrix} - \frac{1}{2} (k_1 \text{sen}(w_1 t) + K_3 \text{sen}(w_1 t)) I \quad (262)$$

$$S(t) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} (k_1 \text{sen}(w_1 t) + K_3 \text{sen}(w_1 t)) & k_2 \text{sen}(w_1 t) \\ k_2 \text{sen}(w_1 t) & -\frac{1}{2} (k_1 \text{sen}(w_1 t) + K_3 \text{sen}(w_1 t)) \end{vmatrix} \quad (263)$$

As matrizes ortonormais são:

$$N_1 = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix} \quad (264)$$

$$N_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2/\sqrt{8} \\ 2/\sqrt{8} & 0 \end{vmatrix}$$

Considerou-se que a tensão residual é igual a zero, tanto neste problema como no trabalho desenvolvido.

$$X(t) = S(t) = \sum_{i=1}^2 x_i(t) N_i \quad (265)$$

$$X(t) = x_1 N_1 + x_2 N_2 \quad (266)$$

$$x_1(t) = \sqrt{2} X_{xx}(t) \quad x_2(t) = \frac{\sqrt{8}}{2} X_{xy}(t) \quad (267)$$



# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)