



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

**CONFIGURAÇÕES CENTRAIS NO PROBLEMA  
RESTRITO DOS 4-CORPOS NO PLANO**

**JEAN FERNANDES BARROS**

**RECIFE - BRAZIL**

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

**CONFIGURAÇÕES CENTRAIS NO PROBLEMA  
RESTRITO DOS 4-CORPOS NO PLANO**

*Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática.*

**JEAN FERNANDES BARROS**  
**Sob orientação do Dr Eduardo Shirlippe Góes Leandro**

Recife, 2008.

**Barros, Jean Fernandes**

**Configurações centrais no problema restrito dos  
4 corpos no plano / Jean Fernandes Barros. –  
Recife: O Autor, 2008.**

**x, 155 p. : il., fig.**

**Tese (doutorado) – Universidade Federal de  
Pernambuco. CCEN. Matemática, 2008.**

**Inclui bibliografia e anexos.**

**1. Mecânica celeste. I. Título.**

**521**

**CDD (22.ed.)**

**MEI2008-099**

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Ciências.

Aprovado:

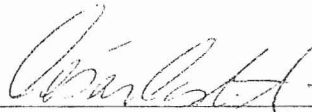


Eduardo Shirlippe Góes Leandro, UFPE

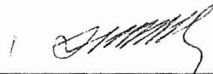
**Orientador**



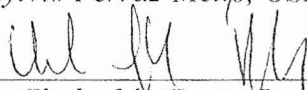
Hildeberto Eulálio Cabral, UFPE



César Augusto Rodrigues Castilho, UFPE



Sylvio Ferraz-Mello, USP



Clodoaldo Grotta Ragazzo, USP

## CONFIGURAÇÕES CENTRAIS NO PROBLEMA RESTRITO DOS 4 CORPOS NO PLANO

por

Jean Fernandes Barros

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415 – Fax: (081) 2126.8410  
RECIFE – BRASIL

Fevereiro – 2008

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço ao meu Deus, o Deus de Abraão de Isaque e de Jacó e Pai do meu Senhor e Salvador Jesus Cristo, pelo Amor e por esta grande vitória. Pois, sem Ele nada disso seria possível.

Agradeço a todos os professores e funcionários do Departamento de Matemática (DMAT) da Universidade Federal de Pernambuco (UFPe) pela atenção e prestação. Em especial, aos professores Eduardo Shirlippe Goes Leandro e Hildeberto Cabral pela amizade, pelo entusiasmo e pela competente orientação deste trabalho e à secretária Tânia Maranhão pela amizade e pela prestação.

Agradeço à Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS) por todo o apoio. Em especial, a todos os professores e funcionários do Departamento de Ciências Exatas (DEXA) pela atenção e prestação. Mais especialmente, aos professores Maria Hildete, Haroldo, Trazíbulo e Carlos Correia pela amizade e pelo incentivo e às secretárias Andiana e Ana pela amizade e pela prestação.

Agradeço aos meus pais, João e Edilde, pelo amor e pela educação que me dispensaram. Agradeço à minha esposa Núbia pelo amor e pela compreensão. Aos meus filhos, Ana Beatriz, Ester e Daniel, pelo amor e pela alegria. Mais geralmente, a todos os meus familiares maternos e paternos pelo amor e pelo incentivo. Em especial, agradeço à minha avó materna Dilma, aos meus tios paternos José e Pedro e aos meus tios maternos Ednalva, Jair, Édula, Joel, João Bosco, Estela e Eliana.

Agradeço aos irmãos Mário e Janete pelo amor, pelos ensinamentos valiosos em Cristo Jesus, pela amizade e pela acolhida. À irmã Suely pelo amor em Cristo Jesus. À Congregação de Jardim São Paulo da Igreja Evangélica Assembléia de Deus da Convenção Abreu e Lima pelo amor em Cristo Jesus. Em especial, ao Pastor Emanuel e sua esposa irmã Diná, à irmã Maria José e à irmã Laodicéia pela amizade e pelos ensinamentos valiosos em Cristo Jesus.

# Abstract

In this research work we explain in analytic form Pedersen's numerical results [16] from the 1940's, which were later numerically verified by Simó [17], in the 1970's. Until our work, the best analytical results could be found in the thesis of Arenstorf's Ph.D. student, J. R. Gannaway [6]. Using analytic methods, Gannaway explained some particular cases of some of Pedersen's results. But the essential part of Pedersen's work was still without analytic demonstration, mainly the parts referring to the degenerate curve and the bifurcation curve. Pedersen's purpose was to count the number of central configurations of the Planar Restricted Four-Body Problem. For that, he tried to know firstly where the problem was degenerate. Then, he concluded that the central configurations satisfying the degeneracy condition form a closed and simple curve inside the equilateral triangle corresponding to the Lagrangean configuration. In chapter 2, we describe analytically that curve. We obtain an algebraic characterization of the degeneracy condition which makes it possible to apply our method. Our method is suggested by Vincent [20], whose work concerns the separation of polynomial roots (Chapter VI, [18]). Together with Vincent's method, we use: the Resultant of Polynomials ([19], page 23) the Descartes' Rule of Signs (Chapter VI, [18]), the Fundamental Theorem about Symmetric Polynomials (Chapter XI, [18]) and Cardano's Formula and the Nature of the Roots of the Cubic Equation (Chapter V, [18]). In order to do the calculations, we use the software MAPLE. In chapter 3, we demonstrate that convex central configurations (Theorem 18, page 42) and nonconvex central configurations outside to triangle (Theorem 19, page 55) are nondegenerate. These theorems are our first contributions to the Planar Restricted Four-Body Problem. In chapter 4, we show that the degenerate curve is closed and simple, in conformity with the numerical results by Pedersen. Besides, we get something new: the degenerate curve is analytic (Chapter 4, Section 4.3 and 4.4, pages 104-132). These results are additional examples of our contributions to the Planar Restricted Four-Body Problem. In chapter 5, we count

the central configurations. At first we map the degenerate curve to the bifurcation curve within parameter space. Then we show that the bifurcation curve is closed and simple (Chapter 5, Section 5.1, pages 133-144). Finally, using the Jordan Curve Theorem and the Inverse Function Theorem, we achieve the counting of the central configurations of the Planar Restricted Four-Body Problem (Chapter 5, Section 5.2, pages 144-145).

**Key-Words:** *n-Body Problem; Central Configurations of the Planar n-Body Problem; Planar Restricted Four-Body Problem; Central Configurations of the Planar Restricted Four-Body Problem; Degenerate Curve; Number of Central Configurations of the Planar Restricted Four-Body Problem.*



# Resumo

Neste trabalho de pesquisa encontram-se demonstrados de forma analítica os resultados numéricos de Pedersen [16], obtidos na década de 40, e confirmados, também, numericamente, por Simó [17], na década de 70. Até nosso trabalho, o melhor que se tinha, neste sentido, era a tese de doutorado de J. R. Gannaway, na Vanderbilt University, Nashville, Tennessee, U.S.A., 1981, intitulada “Determination of all central configurations in the planar four-body problem with one inferior mass” [6], orientada por Arenstorf, na qual, usando métodos analíticos, demonstrou casos particulares de alguns resultados do Pedersen. Porém, a parte substancial do trabalho do Pedersen ainda estava sem demonstração analítica, principalmente, a parte referente à curva de degenerescência.

A intenção de Pedersen era contar o número de configurações centrais no Problema Restrito dos 4 Corpos no Plano (PR4CP). Para isso, Pedersen procurou saber, inicialmente, aonde o problema degenerava-se. E então, concluiu que as configurações centrais na condição de degenerescência formam uma curva fechada e simples no interior do triângulo equilátero, cujos vértices definem a solução Lagrangeana do problema.

No Capítulo 2, ocupamo-nos por descrever analiticamente esta curva. E como uma consequência, obtivemos a caracterização algébrica da condição de degenerescência, a qual torna nosso método eficaz. O nosso método é inspirado no trabalho de Vincent [20], cujo método diz respeito à separação de raízes de um polinômio (ver Capítulo VI de [18]). Conjuntamente ao método de Vincent, utilizamos: o Resultante de Polinômios (ver [19], página 23), a Regra de Sinais de Descartes (ver Capítulo VI de [18]), o Teorema Fundamental sobre Polinômios Simétricos (ver Capítulo XI de [18]), as Fórmulas de Cardano e a Natureza das Raízes da Equação Cúbica (ver Capítulo V de [18]). Para realizarmos os cálculos utilizamos o software MAPLE.

No Capítulo 3, demonstramos, por métodos analíticos, que as configurações cen-

trais convexas (ver Teorema 18, página 42) e não-convexas exteriores ao triângulo (ver Teorema 19, página 55) são não-degeneradas. Estes teoremas são nossas primeiras contribuições ao PR4CP.

No Capítulo 4, mostramos, por métodos analíticos, que a curva de degenerescência é fechada e simples, em conformidade com os resultados numéricos de Pedersen. Além disso, obtivemos algo inédito: a curva de degenerescência é analítica (ver Capítulo 4, Seções 4.3 e 4.4, páginas 104-132). Estes resultados são mais uma das nossas contribuições ao PR4CP.

No capítulo 5, passamos a realizar a contagem do número de configurações no PR4CP. Inicialmente, mapeamos a curva de degenerescência no espaço dos parâmetros, mais precisamente, no interior do 2-simplexo. E verificamos que a curva mapeada é fechada e simples (ver Capítulo 5, Seção 5.1, páginas 133-144). Desta forma, utilizando o Teorema da Curva de Jordan e o Teorema da Aplicação Inversa, realizamos a contagem do número de configurações centrais no PR4CP (ver Capítulo 5, Seção 5.2, páginas 144-145).

**Palavras-Chaves:** *Problema dos  $n$  Corpos; Configurações Centrais no Problema dos  $n$  Corpos no Plano; Problema Restrito dos 4 Corpos no Plano; Configurações Centrais no Problema Restrito dos 4 Corpos no Plano; Curva de Degenerescência; Número de Configurações Centrais no Problema Restrito dos 4 Corpos no Plano.*

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iv</b>
<b>Resumo</b>	<b>vi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Preliminares</b>	<b>9</b>
2.1 Configurações Centrais no Problema Restrito dos 4 Corpos no Plano .	9
2.2 A Condição de Degenerescência . . . . .	15
2.3 O Resultante . . . . .	22
2.4 Um Pouco da Teoria das Equações . . . . .	23
<b>3 Inexistência de Configurações Centrais Convexas Degeneradas e Não-Convexas Exteriores Degeneradas</b>	<b>25</b>
3.1 A Preparação . . . . .	26
3.2 O Nosso Método . . . . .	41
3.3 Os Teoremas . . . . .	41
<b>4 A Curva de Degenerescência</b>	<b>65</b>
4.1 As Soluções Degeneradas no Interior do Triângulo . . . . .	65
4.2 As Soluções Degeneradas sobre as Mediatrizes . . . . .	101
4.3 A Curva de Degenerescência . . . . .	104
4.4 A Analiticidade da Curva de Degenerescência . . . . .	125

<b>5</b>	<b>O Número de Configurações Centrais no PR4CP</b>	<b>133</b>
5.1	A Curva Mapeada no Simplexo . . . . .	134
5.2	A Contagem . . . . .	144
<b>A</b>	<b>Uma Demonstração para o Caso de uma Tripla de Massas em K</b>	<b>146</b>

# Capítulo 1

## Introdução

O nosso trabalho consiste em demonstrar, usando métodos analíticos, os resultados numéricos obtidos, na década de 40, por Pedersen [16]. Na década de 70, Carles Simó em [17], confirmou, também, numericamente, os resultados de Pedersen. O interesse de Pedersen era contar as configurações centrais no Problema Restrito dos 4 Corpos no Plano (PR4CP). Aqui, como veremos abaixo, contar significa: contar classes de equivalência.

Provavelmente, a primeira abordagem do problema foi dada por Lindow [11], na década de 20, demonstrando que existem 10 configurações centrais no PR4CP para as três massas não-nulas supostas iguais e localizadas nos vértices de um triângulo equilátero e a massa nula no mesmo plano deste.

Na década de 80, J. R. Gannaway em sua tese de doutorado, na Vanderbilt University, Nashville, Tennessee, U.S.A., 1981, intitulada “Determination of all central configurations in the planar four-body problem with one inferior mass” [6], orientada por Arenstorf, obteve, usando métodos analíticos, casos particulares de alguns resultados de Pedersen. Porém, a parte substancial do trabalho de Pedersen ainda estava sem demonstração analítica. Principalmente, as afirmações de Pedersen sobre a curva de degenerescência.

Sobre o número de configurações centrais no PR4CP, o Pedersen, usando métodos numéricos, chegou à seguinte conclusão:

*para três massas positivas  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ , e uma massa nula  $m_4$ , com  $\sum_{k=1}^4 m_k = 1$ , existem 8, 9 e 10 configurações centrais para o PR4CP dependendo de que a tripla  $(m_1, m_2, m_3)$ , no espaço de parâmetros, esteja ou exterior ou sobre ou interior à imagem da curva de degenerescência, respectivamente.*

Assim como Pedersen, o nosso caso de interesse é aquele em que os corpos de massas não-nulas estão numa configuração central lagrangeana. O outro caso, o das massas não-nulas numa configuração central colinear (ou euleriana), foi estudado por Palmore [15], mostrando que existem exatamente duas configurações centrais simétricas no PR4CP nesta disposição. O Gannaway [6], Capítulo 1, páginas 12-16, também resolveu este problema.

Para o nosso problema utilizamos os seguintes instrumentos:

- Um certo teorema básico sobre Resultante de Polinômios, qual seja:

*Sejam  $f$  e  $g$  como acima. Então, para cada  $x = (x_2, x_3, \dots, x_n)$ , tem-se que*

$$R(f, g, x_1) = 0 \iff f(x_1, x) \text{ e } g(x_1, x) \text{ admitem raiz comum.}$$

(ver [19], página 23);

- Regra de Sinais de Descartes (ver [18], página 121);
- Teorema Fundamental sobre Polinômios Simétricos (ver [18], página 264);
- Fórmulas de Cardano e Natureza das Raízes da Equação Cúbica (ver [18], páginas 84-90).

Para outros detalhes ver Capítulo 2, Seções 2.3 e 2.4, páginas 22-23.

É imediata a verificação de que o problema de determinarmos as configurações centrais do PR4CP reduz-se a resolver à equação

$$m_1 \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}}{x^3} + m_2 \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}}{y^3} + m_3 \frac{\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}}{z^3} + \mathbf{x} - \mathbf{c} = 0,$$

onde

$$\mathbf{x} = (u, v), \quad \mathbf{x}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right), \quad \mathbf{x}_2 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right), \quad \mathbf{x}_3 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right),$$

$$x = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}\|, \quad y = \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}\|, \quad z = \|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}\| \text{ e}$$

$$\mathbf{c} = m_1\mathbf{x}_1 + m_2\mathbf{x}_2 + m_3\mathbf{x}_3 \quad (\text{Centro de Massa Normalizado})$$

com

$$m_1 + m_2 + m_3 = 1.$$

Neste caso, chamamos  $x$ ,  $y$  e  $z$  as distâncias mútuas relativas ao triângulo equilátero cujos vértices são  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$  e  $\mathbf{x}_3$ . Chamamos o  $(u, v)$ -plano de Plano das Configurações. Para os detalhes ver Capítulo 2, Seção 2.1, páginas 9-15.

Colocando o problema em termos analíticos, as configurações centrais são os pontos críticos da seguinte função real de duas variáveis reais

$$\Psi(u, v) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|^2 + \sum_{k=1}^3 \frac{m_k}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|},$$

onde  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$ ,  $\mathbf{x}_3$  são como acima. A esta função chamamos de Potencial Reduzido.

Escrevendo o potencial reduzido em termos dos quadrados das distâncias mútuas obtemos

$$\Psi(x^2, y^2, z^2) = \frac{1}{2} \left[ m_1 \left( x^2 + \frac{2}{(x^2)^{\frac{1}{2}}} \right) + m_2 \left( y^2 + \frac{2}{(y^2)^{\frac{1}{2}}} \right) + m_3 \left( z^2 + \frac{2}{(z^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \right] + \text{constante.}$$

(ver [10], Seção 3, Lema 3.1, página 328).

E assim, vemos que as configurações centrais são os pontos críticos desta função restrita à superfície

$$F(x^2, y^2, z^2) = 0,$$

onde

$$F(x^2, y^2, z^2) = (x^2)^2 + (y^2)^2 + (z^2)^2 - x^2 y^2 - x^2 z^2 - y^2 z^2 - x^2 - y^2 - z^2 + 1$$

é um polinômio simétrico cujos zeros dão-nos a Condição de Coplanaridade para o problema (ver Capítulo 2, Seção 2.2, página 16).

Então, usando o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange e o fato de que

$$m_1 + m_2 + m_3 = 1,$$

chegamos as equações

$$m_k \left( 1 - \frac{1}{r_k^3} \right) - \rho (r_i^2 + r_j^2 - 2r_k^2 + 1) = 0,$$

onde  $\rho$  é um múltiplo constante do multiplicador de Lagrange (ver [10], página 328) e  $r_s = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|$ , com  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$  e  $\mathbf{x}_3$  como acima (ver página 2),  $s = 1, 2, 3$ , e

$$(i, j, k) = (1, 2, 3),$$

permutações cíclicas de 1, 2 e 3. A partir destas equações, pode-se mostrar que, para massas positivas, as configurações centrais localizam-se em 7 regiões do plano das configurações, as chamadas regiões admissíveis (ver Figura 5), 3 delas são regiões convexas e 4 são não-convexas. As configurações centrais convexas são aquelas localizadas nas regiões admissíveis convexas, enquanto que as configurações centrais não-convexas são aquelas localizadas nas regiões admissíveis não-convexas. Do conhecimento das regiões admissíveis, chega-se à conclusão de que  $\rho < 0$ . Para os detalhes ver Capítulo 2, Seção 2.2, páginas 19-21.

Neste contexto, as configurações centrais degeneradas (respectivamente, não-degeneradas) são os pontos críticos degenerados (respectivamente, não-degenerados) do potencial reduzido, isto é, os pontos nos quais o determinante hessiano do potencial reduzido anula-se (respectivamente, não se anula). Sendo assim, a descrição analítica da condição de degenerescência é dada pela equação

$$\psi(u, v) := \det D\nabla\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial u^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial u\partial v}\right)^2 = 0,$$

a qual retrata uma curva, denotemo-na por  $\mathbb{C}$ . Esta é a curva de degenerescência, que mencionamos acima. Esta é a descrição clássica do problema na condição de degenerescência.

Uma outra descrição analítica, equivalente àquela, da condição de degenerescência, esta sim, revelando-nos a importância de conhecermos os pontos nesta condição, é dada pelas expressões  $m_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Vejamos, estas expressões fornecem-nos uma aplicação

$$M : \mathfrak{R} \longrightarrow \Sigma$$

dada por

$$M(x, y, z) = (m_1, m_2, m_3),$$

onde

$$\Sigma = \{(m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{R}^3 : m_1 + m_2 + m_3 = 1, m_j > 0, j = 1, 2, 3\}$$

e  $\mathfrak{R}$  é a união de todas as regiões admissíveis. Observemos que  $\mathfrak{R}$  é um aberto limitado no plano das configurações. A idéia de utilizar esta aplicação é inteiramente nossa. Provavelmente, alguém deve ter tido esta mesma idéia, porém, nós a utilizamos sem recorrer a nenhum outro autor. Para o que se segue, considerando  $X$  uma matriz  $3 \times 2$ , denotemos por  $J_{ij}(X)$  o menor  $2 \times 2$  de  $X$  tomando as linhas  $i$ -ésima e  $j$ -ésima. Neste caminho, a descrição analítica do problema na condição de degenerescência é a seguinte:



$$J_{ij}(x^0, y^0, z^0) := J_{ij} \left( \frac{\partial M}{\partial(x, y, z)} \Big|_{T_{(x^0, y^0, z^0)} F^{-1}(0)} \right) = 0 \iff (x^0, y^0, z^0) \in \mathbb{C},$$

para todo  $i < j$ , com  $i, j = 1, 2, 3$ .

Ou seja,

**os pontos críticos de  $M$  são os pontos pertencentes à curva de degenerescência.**

(ver Capítulo 5, Seção 5.1, Teorema 41, página 139).

Esta descrição dá-nos a resposta para o problema de contagem:

**o número de configurações centrais no PR4CP é o número de pré-imagens de triplas de massas convenientemente escolhidas em  $\Sigma$ .**

Para os detalhes ver Capítulo 5, páginas 133-145.

Utilizando as idéias dos dois últimos parágrafos, chegamos a uma caracterização algébrica do problema na condição de degenerescência, qual seja: as configurações centrais degeneradas são as soluções do sistema de equações polinomiais

$$\begin{cases} P(x, y, z) = 0 \\ F(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

onde

$$\begin{aligned} P(x, y, z) = & 12x^5y^7z^4 + 12z^5y^7x^4 + 12y^5x^4z^7 + 12y^4x^7z^5 + 12y^5x^7z^4 + 12z^7y^4x^5 - \\ & - 12x^5y^2z^9 - 12y^5x^9z^2 - 12y^9x^2z^5 - 12z^9y^5x^2 - 12y^9x^5z^2 - 12y^2x^9z^5 - 8x^6z^5y^5 - \\ & - 8y^5z^6x^5 - 8z^5y^6x^5 + 4x^{11}y^5 + 4y^{11}z^5 + 4x^{11}z^5 + 4x^5y^{11} + 4z^{11}x^5 + 4z^{11}y^5 - \dots - x^2 - z^2 - y^2 \end{aligned}$$

é um polinômio simétrico com 194 monômios e

$$F(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - x^2y^2 - x^2z^2 - y^2z^2 - x^2 - y^2 - z^2 + 1.$$

A equação

$$P(x, y, z) = 0$$

dá-nos a Condição de Degenerescência para o problema. Isto significa que a curva de degenerescência é a intersecção das variedades algébricas representadas pelas

equações do sistema. Para um detalhamento destas informações ver Capítulo 2, Seção 2.2, página 21.

Conhecendo a caracterização algébrica do problema na condição de degenerescência, e também, sabendo a localização das configurações centrais para massas positivas, demonstramos no Capítulo 3, usando métodos analíticos, os seguintes resultados:

- **as configurações centrais convexas são não-degeneradas (ver Teorema 18, Capítulo 3, página 42);**
- **as configurações centrais não-convexas exteriores são não-degeneradas (ver Teorema 19, Capítulo 3, página 55).**

Estes teoremas são nossas primeiras contribuições ao PR4CP. Estes fatos fazem parte dos resultados numéricos obtidos por Pedersen [16]. O método que empregamos para resolver esta parte do problema, que, de fato, é o nosso método geral, consiste na utilização das conhecidas transformações de Möbius, as quais sabemos que são difeomorfismos analíticos. A sistemática é a seguinte: dado um bloco do espaço euclidiano, construímos de forma adequada a transformação de Möbius relativa a este bloco. E então, utilizando este difeomorfismo, mudamos as variáveis originais para as variáveis transformadas por Möbius. E assim, transformamos o bloco original em um novo bloco. E então, neste novo bloco, olhamos para o polinômio transformado por Möbius e verificamos se este tem variação de sinais. Caso não tenha variação de sinais, concluimos que o polinômio original não muda de sinal no bloco original. Este é o nosso método analítico, que nos possibilitou demonstrar aqueles teoremas. Pelos teoremas acima, as configurações centrais degeneradas estão localizadas no interior do triângulo, na região admissível VII.

Agora, mais especificamente, no Capítulo 4, passamos a estudar a curva de degenerescência, a qual, como sabemos, encontra-se no interior do triângulo. Inicialmente, buscamos por soluções sobre as mediatrizes do triângulo. Para tanto, usamos a Regra de Sinais de Descartes (ver Capítulo 4, Seção 4.2, páginas 100-104). E assim, determinamos duas configurações centrais degeneradas sobre cada uma das mediatrizes, localizando-as com erro arbitrariamente pequeno. Leandro [10], Seção 6, página 348, também determinou estas configurações centrais degeneradas no interior do triângulo. Depois disto, passamos a demonstrar que

**a curva de degenerescência é fechada, simples e analítica**

**(ver Capítulo 4, Seções 4.3 e 4.4, páginas 104-132).**

Este teorema é mais uma das nossas contribuições ao PR4CP. O fato da curva de degenerescência ser fechada e simples é um resultado chave do trabalho de Pedersen. Este é o passo crucial no caminho da contagem do número de configurações centrais no PR4CP. Nosso resultado vai além do obtido por Pedersen, pois nós chegamos a uma propriedade não mencionada da curva de degenerescência, a sua analiticidade. Nem Pedersen, nem Simó e nem Gannaway mencionam esta particularidade da curva. Para demonstrarmos estas propriedades da curva, usamos a caracterização do problema em termos das variáveis simétricas juntamente com o nosso método geral. Para esta passagem, das distâncias mútuas para as variáveis simétricas, utilizamos o algoritmo dado pela demonstração do Teorema Fundamental sobre Polinômios Simétricos (ver [18], página 264). Neste trato, fizemos uso da função discriminante da equação cúbica para a determinação da parte da curva que nos interessa, isto é, a parte da curva nas variáveis simétricas que gera no plano das configurações a curva de degenerescência através de reflexões em torno das mediatrizes, pois, devido a simetria do sistema, precisamos conhecer a curva em  $\frac{1}{6}$  do triângulo, ou seja, em cada setor de  $\frac{\pi}{3}$  radianos.

A última parte do nosso trabalho consiste na contagem do número de configurações centrais no PR4CP (ver Capítulo 5). Primeiramente, tratamos de mapear a curva no espaço de parâmetros, através da aplicação  $M$  (ver Capítulo 5, Seção 5.1, página 134), aquela dada pelas expressões dos  $m_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Aqui, consideramos a seguinte notação:

$$m_1 = U(x, y, z), \quad m_2 = V(x, y, z) \quad \text{e} \quad m_3 = W(x, y, z).$$

E assim, vimos que a curva mapeada  $M(\mathbb{C})$  no espaço de parâmetros, mais precisamente, em  $\Sigma$ , goza do mesmo tipo de simetria da curva de degenerescência. Desta forma, segue-se que a curva  $M(\mathbb{C})$  é fechada. Além disso, demonstramos que

**a curva mapeada não tem auto-intersecção.**

**(ver Capítulo 5, Seção 5.1, Teorema 44, página 144).**

Sendo assim, chegamos a conclusão de que

**a curva mapeada é fechada e simples.**

**(ver Figura 19).**

Todos estes resultados são contribuições nossas ao PR4CP. O Pedersen chegou a estes resultados por métodos numéricos, enquanto nós por métodos analíticos.

A partir da conclusão acima, realizamos a contagem. A idéia é a seguinte: como a curva mapeada é fechada e simples, pelo Teorema da Curva de Jordan,  $\Sigma$  divide-se em duas componentes conexas, tendo a curva mapeada como fronteira de ambas. Pelo Teorema da Aplicação Inversa, conforme Capítulo 5, Seção 5.1, Teorema 41, página 139, o número de pré-imagens de cada tripla na região interior ou exterior à curva mapeada é constante. Procedendo como Lindow [11] ou como Gannaway [6], demonstra-se que

*existem 10 configurações centrais para cada tripla de massas na região interior à curva mapeada.*

O Gannaway [6] demonstrou que

*existem 8 configurações centrais para uma tripla de massas na região exterior à curva mapeada.*

Segue-se destes resultados que

*existem 9 configurações centrais para uma tripla de massas sobre a curva mapeada, uma das quais sobre a curva de degenerescência.*

Desta forma, fechou-se as lacunas de muitos anos na história deste problema.

Recife, Janeiro de 2008  
Jean Fernandes Barros

# Capítulo 2

## Preliminares

Neste segundo capítulo, definimos o que é uma Configuração Central no Problema dos 4 Corpos no Plano. Mostramos que as configurações centrais são invariantes por homotetias e isometrias de  $\mathbb{R}^2$ . Com isso, contá-las significa contá-las módulo homotetias e isometrias de  $\mathbb{R}^2$ . A seguir, caracterizamos as configurações centrais no Problema Restrito dos 4 Corpos no Plano (PR4CP). Exibimos, para massas positivas, as regiões no plano das configurações nas quais podemos encontrá-las, as chamadas Regiões Admissíveis. Passamos a caracterizar a condição de degenerescência para o nosso problema. E mencionamos os instrumentos necessários para atacarmos o problema.

### 2.1 Configurações Centrais no Problema Restrito dos 4 Corpos no Plano

Inicialmente, veremos o que é uma Configuração Central no Problema dos  $n$  Corpos no Plano. Por um momento, definamos o que é o Problema dos  $n$  Corpos em  $\mathbb{R}^d$ , para  $d \geq 2$ . O Problema dos  $n$  Corpos em  $\mathbb{R}^d$  é o estudo da dinâmica de  $n$  corpos  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^d$ , com massas  $m_1, m_2, \dots, m_n > 0$ , respectivamente, segundo à Lei Gravitacional de Newton:

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \sum_{k \neq i} \frac{m_k m_i (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)}{r_{ki}^3}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

onde  $r_{ik} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k\|$  são as denominadas distâncias mútuas. Em geral, para  $n > 2$ , não se tem um tratado completo das soluções deste sistema de equações diferenciais.

Para  $n = 2$ , existe um estudo completo dado por Newton no clássico “Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica” [14], Royal Society, London, 1687. Agora, em certos casos, pode-se obter, de forma explícita, certas soluções denominadas de Soluções Homográficas. Por uma solução homográfica do problema dos  $n$  corpos no plano entendemos uma solução da forma

$$\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{c} = rR(\omega; t)(\mathbf{x}_i(0) - \mathbf{c}), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

para um certo  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ , uma certa função escalar não-negativa  $r = r(t)$  com  $r(0) = 1$ , e uma certa constante real não-nula  $\omega$  tal que

$$R(\omega; t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Isto significa que: as soluções homográficas são tais que a figura formada no instante inicial pelos corpos é preservada ao longo do movimento, a menos de homotetia e rotação. Um caso importante de soluções homográficas no plano é quando

$$r = r(t) \equiv 1.$$

Neste caso, as soluções homográficas são denominadas de Equilíbrios Relativos. Para estas soluções, os corpos giram em torno do centro de massa com velocidade angular constante. Por isso, se consideramos um sistema de coordenadas em rotação uniforme com origem em  $\mathbf{c}$ , uma tal solução estaria em repouso, daí o uso do termo “equilíbrio”. Aqui, cabe uma pergunta: quando uma tal solução é possível? Passemos a responder esta pergunta. Observemos que

$$\ddot{\mathbf{x}}_i = -\omega^2 R(\omega; t)(\mathbf{x}_i(0) - \mathbf{c}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Sendo assim, supondo que uma tal solução é solução do problema dos  $n$  corpos no plano, segue-se que

$$-\omega^2(\mathbf{x}_i(0) - \mathbf{c}) = \sum_{k \neq i} \frac{m_k(\mathbf{x}_k(0) - \mathbf{x}_i(0))}{r_{ki}(0)^3}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Logo, se uma tal solução existe, então as posições iniciais  $\mathbf{x}_i(0)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , satisfazem as equações algébricas

$$\sum_{k \neq i} \frac{m_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)}{r_{ki}^3} + \lambda(\mathbf{x}_i - \mathbf{c}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

com  $\lambda = \omega^2 > 0$ . Estas são as equações de Configurações Centrais para o Problema dos  $n$  Corpos no Plano. Reciprocamente, suponhamos que as posições iniciais  $\mathbf{x}_i(0)$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ , são soluções do sistema de equações algébricas acima para um certo  $\lambda > 0$ , isto é,

$$\sum_{k \neq i} \frac{m_k(\mathbf{x}_k(0) - \mathbf{x}_i(0))}{r_{ki}(0)^3} + \lambda(\mathbf{x}_i(0) - \mathbf{c}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

com  $\lambda > 0$ . Portanto,

$$\mathbf{x}_i(t) = R(\sqrt{\lambda}; t)(\mathbf{x}_i(0) - \mathbf{c}) + \mathbf{c}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

é uma solução para o problema dos  $n$  corpos no plano. De fato,

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}_i &= -\lambda R(\sqrt{\lambda}; t)(\mathbf{x}_i(0) - \mathbf{c}) \\ &= R(\sqrt{\lambda}; t) \left( \sum_{k \neq i} \frac{m_k(\mathbf{x}_k(0) - \mathbf{x}_i(0))}{r_{ki}(0)^3} \right) \\ &= \sum_{k \neq i} \frac{m_k [R(\sqrt{\lambda}; t)(\mathbf{x}_k(0) - \mathbf{c}) - R(\sqrt{\lambda}; t)(\mathbf{x}_i(0) - \mathbf{c})]}{r_{ki}(0)^3} \\ &= \sum_{k \neq i} \frac{m_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)}{r_{ki}^3}. \end{aligned}$$

Resumindo, *existem equilíbrios relativos para o problema dos  $n$  corpos no plano se, e somente se, as posições iniciais  $\mathbf{x}_i(0)$  satisfazem os equações algébricas*

$$\sum_{k \neq i} \frac{m_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)}{r_{ki}^3} + \lambda(\mathbf{x}_i - \mathbf{c}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

para um certo  $\lambda > 0$ .

**Definição 1.** Uma Configuração Central no Problema dos  $n$  Corpos no Plano é a  $n$ -úpla  $(\mathbf{x}_1(0), \mathbf{x}_2(0), \dots, \mathbf{x}_n(0)) \in (\mathbb{R}^2)^n$  cujas componentes são as condições iniciais de um equilíbrio relativo para o problema dos  $n$  corpos no plano, isto é, a  $n$ -úpla  $(\mathbf{x}_1(0), \mathbf{x}_2(0), \dots, \mathbf{x}_n(0)) \in (\mathbb{R}^2)^n$  é solução do sistema de equações algébricas

$$\sum_{k \neq i} \frac{m_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)}{r_{ki}^3} + \lambda(\mathbf{x}_i - \mathbf{c}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

para um certo  $\lambda > 0$ .

Afirmamos que o  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$  na definição de equilíbrio relativo para o problema dos  $n$  corpos no plano é o centro de massa de  $m_1, m_2, \dots, m_n$  nas posições iniciais  $\mathbf{x}_i(0)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . De fato, neste caso, a  $n$ -úpla  $(\mathbf{x}_1(0), \mathbf{x}_2(0), \dots, \mathbf{x}_n)$  é solução das equações algébricas

$$\sum_{k \neq i} \frac{m_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)}{r_{ki}^3} + \lambda(\mathbf{x}_i - \mathbf{c}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

para um certo  $\lambda > 0$ . Sendo assim, para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ , multiplicando-se a  $i$ -ésima equação por  $m_i$ , e depois somando estas  $n$  equações no instante inicial,  $t = 0$ , chegamos a

$$\lambda(M\mathbf{c} - \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{x}_i(0)) = \sum_{i=1}^n \sum_{k \neq i} \frac{m_k m_i (\mathbf{x}_k(0) - \mathbf{x}_i(0))}{r_{ki}(0)^3},$$

onde  $M = \sum_{i=1}^n m_i > 0$  é a massa total de  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Como

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k \neq i} \frac{m_k m_i (\mathbf{x}_k(0) - \mathbf{x}_i(0))}{r_{ki}(0)^3} = 0,$$

temos que

$$\mathbf{c} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{x}_i(0),$$

que é o centro de massa de  $m_1, m_2, \dots, m_n$  nas posições iniciais  $\mathbf{x}_i(0)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

A partir de agora, seja  $n = 4$ . Para o Problema Restrito dos 4 Corpos no Plano consideramos que:

- estes corpos estão sujeitos à ação gravitacional newtoniana;
- $m_4 = 0$ ;
- os corpos de massas não-nulas não estão alinhados;
- o corpo  $\mathbf{x}_4$  não exerce ação gravitacional sobre os demais;
- as massas não-nulas são positivas.

Um resultado básico sobre configurações centrais é dado pela

**Proposição 2.** *As configurações centrais são invariantes por homotetias e isometrias de  $\mathbb{R}^2$ .*



**Demonstração.** Inicialmente, mostremos que as configurações centrais são invariantes por homotetias de  $\mathbb{R}^2$ . Suponhamos que  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \in (\mathbb{R}^2)^4$  é uma configuração central para um certo  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Consideremos  $\sigma \neq 0$  como constante homotética. Sendo assim, multiplicando cada equação na definição de configuração central por  $\frac{\sigma}{|\sigma|^3}$ , chegamos a

$$\sum_{k \neq i} m_k \frac{\sigma \mathbf{x}_k - \sigma \mathbf{x}_i}{\|\sigma \mathbf{x}_k - \sigma \mathbf{x}_i\|^3} + \frac{\lambda}{|\sigma|^3} (\sigma \mathbf{x}_i - \sigma \mathbf{c}) = 0,$$

para  $i = 1, 2, 3, 4$ . Logo,  $(\sigma \mathbf{x}_1, \sigma \mathbf{x}_2, \sigma \mathbf{x}_3, \sigma \mathbf{x}_4)$  é uma configuração central para  $\frac{\lambda}{|\sigma|^3}$ . Portanto, as configurações centrais são invariantes por homotetias. Agora, mostremos que as configurações centrais são invariantes por isometrias. Nós sabemos que toda isometria de  $\mathbb{R}^2$  é uma composição de uma transformação linear ortogonal com uma translação. Seja  $\iota = \theta \circ \tau$  uma isometria, onde  $\theta$  é uma transformação linear ortogonal, isto é,

$$\|\theta(\mathbf{v}) - \theta(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{x}\|,$$

para todos  $\mathbf{v}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ , e  $\tau$  é uma translação por  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ , isto é,

$$\tau(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \mathbf{w},$$

para todo  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ . Seja  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \in (\mathbb{R}^2)^4$  uma configuração central para um certo  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Desta forma,

$$\begin{aligned} & \sum_{k \neq i} m_k \frac{\iota(\mathbf{x}_k) - \iota(\mathbf{x}_i)}{\|\iota(\mathbf{x}_k) - \iota(\mathbf{x}_i)\|^3} + \lambda(\iota(\mathbf{x}_i) - \iota(\mathbf{c})) = \\ &= \sum_{k \neq i} m_k \frac{\theta(\mathbf{x}_k) - \theta(\mathbf{x}_i)}{\|\theta(\mathbf{x}_k) - \theta(\mathbf{x}_i)\|^3} + \lambda(\theta(\mathbf{x}_i) - \theta(\mathbf{c})) = \\ &= \theta \left( \sum_{k \neq i} m_k \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i\|^3} + \lambda(\mathbf{x}_i - \mathbf{c}) \right) = 0. \end{aligned}$$

Logo,  $(\iota(\mathbf{x}_1), \iota(\mathbf{x}_2), \iota(\mathbf{x}_3), \iota(\mathbf{x}_4))$  é uma configuração central para  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Portanto, as configurações centrais são invariantes por isometrias de  $\mathbb{R}^2$ .  $\square$

Com isso, temos que:

*contar configurações centrais significa contar classes de  
equivalência de configurações centrais.*

É imediato que a demonstração acima aplica-se a qualquer dimensão do espaço euclidiano.

Consideremos a hipótese de que  $m_4 = 0$ . Suponhamos que  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)$  é uma configuração central para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Sendo assim,

$$(I) \quad \begin{cases} m_2 \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|^3} + m_3 \frac{\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1\|^3} + \lambda(\mathbf{x}_1 - \mathbf{c}) = 0 \\ m_1 \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^3} + m_3 \frac{\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2\|^3} + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{c}) = 0 \\ m_1 \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3\|^3} + m_2 \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3\|^3} + \lambda(\mathbf{x}_3 - \mathbf{c}) = 0 \end{cases}$$

$$(II) \quad m_1 \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_4}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_4\|^3} + m_2 \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_4}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_4\|^3} + m_3 \frac{\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4}{\|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4\|^3} + \lambda(\mathbf{x}_4 - \mathbf{c}) = 0$$

Usando a hipótese de que o quarto corpo não exerce ação gravitacional sobre os demais, para obtermos as configurações centrais do problema restrito dos 4 corpos no plano resolvemos o sistema (I), e então, substituindo estas soluções na equação (II) encontramos todas as configurações centrais. As soluções do sistema (I) são as configurações centrais do Problema dos 3 Corpos no Plano. Usando a hipótese de que os corpos de massas não-nulas são não-colineares, estas são as soluções lagrangeanas do Problema dos 3 Corpos no Plano. Elas são os vértices de um triângulo equilátero. Usando a invariância por homotetias e isometrias das configurações centrais, podemos fixar uma destas soluções em

$$\mathbf{x}_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \mathbf{x}_2 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right), \quad \mathbf{x}_3 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right).$$

Sendo assim, as configurações centrais são dadas pelas soluções da equação (II).

Observemos que

$$\mathbf{x}_i - \mathbf{c} = \frac{1}{M} \sum_{k \neq i} m_k (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k),$$

para  $i = 1, 2, 3, 4$ . Substituindo esta expressão em qualquer uma das três equações do sistema (I), obtemos

$$\sum_{k \neq i} m_k \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i\|^3} + \frac{\lambda}{M} \sum_{k \neq i} m_k (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k) = 0,$$

donde

$$\sum_{k \neq i} \left( \frac{1}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i\|^3} - \frac{\lambda}{M} \right) m_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) = 0.$$

Como  $\{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i\}_{k \neq i}$  é L.I., para  $i = 1, 2, 3$  e  $k = 1, 2, 3$ , segue-se que

$$\lambda = \frac{M}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i\|^3},$$

para  $i = 1, 2, 3$  e  $k = 1, 2, 3$ , com  $k \neq i$ . Escolhendo a unidade de massa tal que  $M = 1$  e a unidade de comprimento tal que os lados do triângulo tenham comprimentos iguais a 1, temos que  $\lambda = 1$ , o qual passamos a supor.

A partir de agora, consideremos

$$x = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|, \quad y = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2\| \quad \text{e} \quad z = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_3\|.$$

Estas são as distâncias mútuas relativas aos vértices do triângulo equilátero dado por  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$  e  $\mathbf{x}_3$ . Como veremos em todo o andamento do trabalho, estas são as coordenadas ideais para tratarmos o problema utilizando o nosso método. De fato, nosso método aplica-se às equações polinomiais (ver Capítulo 3, Seção 3.1, página 29). Logo, o problema de determinarmos todas as configurações centrais do problema restrito dos 4 corpos no plano reduz-se a resolver a equação

$$m_1 \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}}{x^3} + m_2 \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}}{y^3} + m_3 \frac{\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}}{z^3} + \mathbf{x} - \mathbf{c} = 0,$$

onde

$$\mathbf{x} = (u, v), \quad \mathbf{x}_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \right), \quad \mathbf{x}_2 = \left( -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2} \right), \quad \mathbf{x}_3 = \left( -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2} \right).$$

Chamaremos o  $(u, v)$ -plano de Plano das Configurações.

## 2.2 A Condição de Degenerescência

Consideremos a função real de duas variáveis reais definida, onde faz sentido, por

$$\Psi(u, v) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|^2 + \sum_{k=1}^3 \frac{m_k}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|},$$

onde

$$\mathbf{x} = (u, v), \quad \mathbf{x}_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \right), \quad \mathbf{x}_2 = \left( -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2} \right), \quad \mathbf{x}_3 = \left( -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2} \right),$$

a qual chamamos de Potencial Reduzido.

Escrevendo as coordenadas cartesianas  $u$  e  $v$  em termos de  $x$ ,  $y$  e  $z$  obtemos

$$(0) \begin{cases} u = \frac{1}{2\sqrt{3}}(y^2 + z^2 - 2x^2) \\ v = \frac{1}{2}(z^2 - y^2) \end{cases}$$

Uma pergunta natural é: dados três números positivos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , qual é a relação que eles têm que satisfazer para que as componentes da tripla  $(x, y, z)$  representem distância mútuas relativas aos vértices  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$  e  $\mathbf{x}_3$  no plano das configurações? A resposta é: a tripla  $(x, y, z)$  tem que satisfazer a equação

$$F(x, y, z) = 0,$$

onde

$$F(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - x^2y^2 - x^2z^2 - y^2z^2 - x^2 - y^2 - z^2 + 1,$$

a qual denominamos de Condição de Coplanaridade. De fato, dado um ponto  $(u, v, w)$  no espaço, considerando os pontos

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0\right), \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

e escrevendo as equações das distâncias mútuas e usando as relações (0) em qualquer uma delas, chegamos à conclusão de que

$$w^2 = -\frac{1}{3}F(x, y, z).$$

Logo,  $(u, v, w)$  está no plano das configurações se, e somente se,

$$F(x, y, z) = 0.$$

Isto é, o volume do tetraedro gerado pelos pontos

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0\right), \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}, 0\right), (u, v, w)$$

é zero (ver Figura 2). Observemos que o polinômio  $F(x, y, z)$  é simétrico.

Um fato importante sobre a condição de coplanaridade é que  $F^{-1}(0)$  é uma superfície no primeiro octante do  $(x, y, z)$ -espaço tanto nas variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  quanto nas variáveis  $x^2$ ,  $y^2$  e  $z^2$ . De fato, observemos que

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x} = -2xU_1, \quad F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = -2yV_1 \quad \text{e} \quad F_z = \frac{\partial F}{\partial z} = -2zW_1,$$

onde

$$U_1(x, y, z) = y^2 + z^2 - 2x^2 + 1, \quad V_1(x, y, z) = z^2 + x^2 - 2y^2 + 1 \quad \text{e} \\ W_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2 + 1$$

Agora, no plano das configurações, olhando para o triângulo dado pelos vértices

$$\mathbf{x}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right), \quad \mathbf{x}_2 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right), \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_3 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)$$

e usando as relações (0), chegamos a conclusão de que as retas definidas pelos pares de pontos

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}, \quad \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3\} \quad \text{e} \quad \{\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\},$$

escritas em termos de distâncias mútuas, são dadas pelas equações

$$U_1(x, y, z) = 0, \quad V_1(x, y, z) = 0 \quad \text{e} \quad W_1(x, y, z) = 0,$$

respectivamente. Logo, no plano das configurações, o sistema dado por estas equações não tem solução. Sendo assim, o único ponto crítico de  $F(x, y, z)$  é a tripla  $(0, 0, 0)$ , a qual não é de nosso interesse. Desta forma, em particular, 0 é valor regular de  $F(x, y, z)$ , como queríamos demonstrar. Também, de forma análoga, podemos mostrar que 0 é valor regular de  $F(x^2, y^2, z^2)$ . Basta observar que

$$F_{x^2} = \frac{\partial F}{\partial x^2} = -U_1, \quad F_{y^2} = \frac{\partial F}{\partial y^2} = -V_1 \quad \text{e} \quad F_{z^2} = \frac{\partial F}{\partial z^2} = -W_1.$$

Consideremos a aplicação

$$\Gamma : F^{-1}(0) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \longmapsto (u, v).$$

Queremos saber se esta aplicação é um difeomorfismo. Claramente, esta aplicação é uma bijecção. Agora, considerando a base

$$\beta = \{(-F_z, 0, F_x), (0, -F_z, F_y)\}$$

de  $T_{(x,y,z)}F^{-1}(0)$ , obtemos

$$\det \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial (x, y, z)} \Big|_{T_{(x,y,z)}F^{-1}(0)} \right) = 8\sqrt{3}W_1(x, y, z)xyz^2.$$

De forma cíclica, usando as outras possíveis bases obtidas das componentes de  $\nabla F(x, y, z)$ , quais sejam:

$$\beta_1 = \{(-F_z, 0, F_x), (-F_y, F_x, 0)\} \text{ e } \beta_2 = \{(0, -F_z, F_y), (-F_y, F_x, 0)\},$$

chegamos a

$$\det \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial(x, y, z)} \Big|_{\Gamma(x, y, z)^{F^{-1}(0)}} \right) = 8\sqrt{3}U_1(x, y, z)x^2yz$$

e

$$\det \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial(x, y, z)} \Big|_{\Gamma(x, y, z)^{F^{-1}(0)}} \right) = 8\sqrt{3}V_1(x, y, z)xy^2z,$$

respectivamente. Sendo assim, concluímos que  $\Gamma$  é um difeomorfismo em

$$U_1(x, y, z) \neq 0 \text{ ou } V_1(x, y, z) \neq 0 \text{ ou } W_1(x, y, z) \neq 0.$$

Nesse contexto, as configurações centrais são os pontos críticos de  $\Psi$ , isto é, são soluções do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial v} = 0 \end{cases}$$

A condição para que estes pontos críticos sejam degenerados é que o determinante hessiano de  $\Psi$ , isto é,

$$\psi(u, v) := \det D\nabla\Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2} - \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u \partial v} \right)^2,$$

anule-se. Esta é a primeira descrição analítica da condição de degenerescência.

Observando que

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|^2 - (m_1x^2 + m_2y^2 + m_3z^2)$$

independe de  $x$ ,  $y$  e  $z$  (ver [10], página 328), podemos escrever o potencial reduzido na forma

$$\Psi(x^2, y^2, z^2) = \frac{1}{2} \left[ m_1 \left( x^2 + \frac{2}{(x^2)^{\frac{1}{2}}} \right) + m_2 \left( y^2 + \frac{2}{(y^2)^{\frac{1}{2}}} \right) + m_3 \left( z^2 + \frac{2}{(z^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \right] + \text{constante}.$$

E assim, vemos que as configurações centrais são os pontos críticos desta função restrita à superfície

$$F(x^2, y^2, z^2) = 0.$$

Então, usando o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, chegamos as equações

$$m_k \left(1 - \frac{1}{r_k^3}\right) - \rho(r_i^2 + r_j^2 - 2r_k^2 + 1) = 0,$$

as quais consideramos restritas à superfície

$$F(x, y, z) = 0,$$

onde  $r_s = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|$ ,  $s = 1, 2, 3$ , e  $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ , permutações cíclicas de 1, 2 e 3. Devemos lembrar que  $x = r_1$ ,  $y = r_2$  e  $z = r_3$ .

Usando o fato de que

$$m_1 + m_2 + m_3 = 1$$

chegamos a

$$\rho = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 m_k \left(1 - \frac{1}{r_k^3}\right).$$

Uma consequência imediata das equações acima é que  $\rho \neq 0$ , pois, se não fosse assim, chegaríamos a uma impossibilidade geométrica no plano das configurações.

**Lema 3.** *Para todas as massas positivas, as configurações centrais correspondentes estão localizadas nas seguintes regiões do plano das configurações:*

$$\text{Região I: } 1 < x < 2, \quad 0 < y < 1 \quad e \quad 0 < z < 1$$

$$\text{Região III: } 0 < x < 1, \quad 1 < y < 2 \quad e \quad 0 < z < 1$$

$$\text{Região V: } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \quad e \quad 1 < z < 2$$

*Estas são as regiões convexas, isto é, dado um ponto em qualquer uma delas, a fronteira do fecho convexo do conjunto formado por este ponto e pelos vértices do triângulo contém todos os pontos do próprio conjunto.*

$$\text{Região II: } 0 < x < 1, \quad v > -\frac{\sqrt{3}}{3}u + \frac{1}{3} \quad e \quad v < \frac{\sqrt{3}}{3}u - \frac{1}{3}$$

$$\text{Região IV: } u < -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad 0 < y < 1 \quad e \quad v > -\frac{\sqrt{3}}{3}u + \frac{1}{3}$$

$$\text{Região VI: } u < -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad v < \frac{\sqrt{3}}{3}u - \frac{1}{3} \quad e \quad 0 < z < 1$$

$$\text{Região VII: } v < -\frac{\sqrt{3}}{3}u + \frac{1}{3}, \quad v > \frac{\sqrt{3}}{3}u - \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad u > -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Estas são as regiões não-convexas, isto é, dado um ponto em qualquer uma delas, o interior do fecho convexo do conjunto formado por este ponto e pelos vértices do triângulo contém algum ponto do próprio conjunto (ver Figura 5).

**Demonstração.** Ver [10], página 329.  $\square$

Segue-se do Lema 3 que, em particular,  $\Gamma$  é um difeomorfismo sobre a união das regiões admissíveis, a qual denotamos por  $\mathfrak{R}$ . Observemos que  $\mathfrak{R}$  é um aberto limitado no plano das configurações.

Como consequência da demonstração do Lema 3, temos que  $\rho < 0$ . Das equações acima, obtemos as expressões

$$m_k = \frac{1}{1 - \frac{1}{r_k^3}} \rho (r_i^2 + r_j^2 - 2r_k^2 + 1),$$

onde  $r_s = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|$ ,  $s = 1, 2, 3$ , e  $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ , permutações cíclicas de 1, 2 e 3. Usando o fato de que

$$m_1 + m_2 + m_3 = 1,$$

chegamos a

$$\rho = \frac{1}{\sum_{k=1}^3 \frac{1}{1 - \frac{1}{r_k^3}} (r_i^2 + r_j^2 - 2r_k^2 + 1)} = \frac{(x^3 - 1)(y^3 - 1)(z^3 - 1)}{Q(x, y, z)},$$

com

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) = & 3x^3y^3z^3 + x^5y^3 + x^5z^3 + x^3y^5 - 2x^3y^3z^2 - 2x^3y^2z^3 + x^3z^5 - 2x^2y^3z^3 + \\ & + y^5z^3 + y^3z^5 - 2x^3y^3 - 2x^3z^3 - 2y^3z^3 - 2x^5 + x^3y^2 + x^3z^2 + x^2y^3 + \\ & + x^2z^3 - 2y^5 + y^3z^2 + y^2z^3 - 2z^5 + x^3 + y^3 + z^3, \end{aligned}$$

o qual é um polinômio simétrico. Segue-se que, nas regiões admissíveis, o polinômio  $Q(x, y, z)$  não se anula. Na realidade, podemos estabelecer, com precisão, o sinal de  $Q(x, y, z)$  em cada região admissível. Por exemplo, na região VII, como  $x < 1$ ,  $y < 1$  e  $z < 1$ , temos que o numerador de  $\rho$ , na sua última expressão, é negativo. Logo, como  $\rho < 0$ , temos que

$$Q(x, y, z) > 0$$



na região VII, o interior do triângulo. E assim, sucessivamente.

Olhando para as expressões de  $m_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , vemos que o polinômio  $Q(x, y, z)$  é caracterizado pela condição

$$m_1 + m_2 + m_3 = 1,$$

isto é,

$$Q(x, y, z) = \sum_{k=1}^3 r_i^3 (1 - r_j^3) (1 - r_k^3) (r_i^2 + r_j^2 - 2r_k^2 + 1),$$

com  $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ .

Como veremos no Capítulo 4, as expressões para  $m_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , dão-nos uma aplicação que nos mostra uma descrição analítica chave da condição de degenerescência. É claro que esta descrição é equivalente àquela que demos acima.

**Definição 4.** As Configurações Centrais Convexas são aquelas localizadas nas regiões admissíveis convexas I, III e V.

**Definição 5.** As Configurações Centrais Não-convexas são aquelas localizadas nas regiões admissíveis não-convexas II, IV, VI e VII. Denominamos de Não-Convexas Exteriores às localizadas em II, IV e VI, e de Não-Convexas Interiores às localizadas em VII.

Substituindo as expressões de  $m_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,

$$u = \frac{1}{2\sqrt{3}}(y^2 + z^2 - 2x^2)$$

e

$$v = \frac{1}{2}(z^2 - y^2)$$

na função  $\psi$  chegamos a

$$\psi(x, y, z) = \frac{3(x^3 - 1)(y^3 - 1)(z^3 - 1)P(x, y, z)}{4x^2y^2z^2Q(x, y, z)^2},$$

onde  $Q(x, y, z)$  é como acima. Logo, em  $\mathfrak{A}$ , a equação

$$\psi(u, v) = 0$$

equivale ao sistema de equações polinomiais

$$(1) \begin{cases} P(x, y, z) = 0 \\ F(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

onde

$$P(x, y, z) = 12x^5y^7z^4 + 12z^5y^7x^4 + 12y^5x^4z^7 + 12y^4x^7z^5 + 12y^5x^7z^4 + 12z^7y^4x^5 - \\ -12x^5y^2z^9 - 12y^5x^9z^2 - 12y^9x^2z^5 - 12z^9y^5x^2 - 12y^9x^5z^2 - 12y^2x^9z^5 - 8x^6z^5y^5 - \\ -8y^5z^6x^5 - 8z^5y^6x^5 + 4x^{11}y^5 + 4y^{11}z^5 + 4x^{11}z^5 + 4x^5y^{11} + 4z^{11}x^5 + 4z^{11}y^5 - \dots - x^2 - z^2 - y^2$$

é um polinômio simétrico com 194 monômios e

$$F(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - x^2y^2 - x^2z^2 - y^2z^2 - x^2 - y^2 - z^2 + 1.$$

O sistema (1) dá-nos a caracterização algébrica do caso degenerado.

A condição

$$P(x, y, z) = 0$$

é a Condição de Degenerescência.

Nosso objetivo principal é demonstrar que:

*as soluções do sistema (1) estão sobre uma curva analítica,  
fechada e simples no plano das configurações,*

a qual denominamos de Curva de Degenerescência.

## 2.3 O Resultante

A referência básica para esta seção é [19]. Sejam  $f$  e  $g$  polinômios nas variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  com coeficientes reais. Escrevamos

$$f = a_px_1^p + \dots + a_0 \quad \text{e} \quad g = b_qx_1^q + \dots + b_0$$

com  $a_p \neq 0$  e  $b_q \neq 0$ , onde  $a_i, b_i$  são polinômios nas variáveis  $x_2, x_3, \dots, x_n$  com coeficientes reais.



**Teorema 9.** (*Teorema Fundamental sobre Polinômios Simétricos*) *Todo polinômio simétrico das variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  pode ser expresso como um polinômio nos polinômios simétricos elementares. Ademais, os coeficientes deste polinômio são construídos por adições e subtrações dos coeficientes do polinômio simétrico. Em particular, se os coeficientes do polinômio simétrico são inteiros, os do polinômio obtido serão inteiros.*

**Demonstração.** Ver [18], página 264. □

A demonstração do Teorema 9 é algorítmica. Em várias partes do trabalho, lançamos mão deste algoritmo, utilizando o software MAPLE.

A parte referente à Equação Cúbica será toda vista no corpo do trabalho, ordenada segundo a nossa necessidade. Para esta parte a referência é [18], Capítulo V, páginas 84-90.

## Capítulo 3

# Inexistência de Configurações Centrais Convexas Degeneradas e Não-Convexas Exteriores Degeneradas

Neste terceiro capítulo, ocupamo-nos por demonstrar que as configurações centrais convexas e não-convexas exteriores são não-degeneradas. A estratégia que utilizamos para isto é a seguinte: partindo da caracterização algébrica da condição de degenerescência, como vista no Capítulo 2, Seção 2.2, a qual é dada por um sistema de equações polinomiais, formado por dois polinômios simétricos, um dos quais, dá-nos a condição de degenerescência, e o outro, a condição de coplanaridade, determinamos os blocos que, no plano das configurações, contêm as regiões convexas e não-convexas exteriores. De posse destes blocos, subdividimo-nos em sub-blocos, e utilizando as transformações de Möbius em cada um destes sub-blocos, verificamos que um ou outro dos polinômios que compõem o sistema não se anula nestes sub-blocos. E assim, concluímos que as variedades algébricas dadas por cada equação polinomial do sistema não se intersectam naquelas regiões. E assim, concluímos que as configurações centrais nestas regiões são não-degeneradas. Aqui, utilizamos sobremodo o software MAPLE para efetuarmos os cálculos.

### 3.1 A Preparação

Relembremos alguns fatos do Capítulo 2. Chamamos de Plano das Configurações ao plano onde está localizado o triângulo dado pelos vértices

$$\mathbf{x}_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \mathbf{x}_2 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right), \quad \mathbf{x}_3 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right),$$

os quais correspondem às soluções lagrangeanas, as quais fixamos, do problema de configurações centrais no PR4CP, e no qual descrevemos o movimento do quarto corpo, o de massa nula, em relação aos corpos fixos nos vértices do triângulo descrito. É neste plano que tomamos as distâncias mútuas relativas a cada um dos vértices,  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$  e  $\mathbf{x}_3$ . Em termos de distâncias mútuas, podemos escrever estes vértices,  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$  e  $\mathbf{x}_3$ , como  $(0, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 1)$  e  $(1, 1, 0)$ , respectivamente. E mais, vimos que: denotando por  $(u, v)$  as coordenadas cartesianas de um ponto no plano das configurações e escrevendo as coordenadas cartesianas em termos das distâncias mútuas, chegamos a

$$(0) \quad \begin{cases} u = \frac{1}{2\sqrt{3}}(y^2 + z^2 - 2x^2); \\ v = \frac{1}{2}(z^2 - y^2), \end{cases}$$

onde  $x$ ,  $y$  e  $z$  são as distâncias mútuas relativas aos vértices  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$  e  $\mathbf{x}_3$ , respectivamente. Já sabemos que a condição de degenerescência leva-nos ao sistema de equações polinomiais

$$(1) \quad \begin{cases} P(x, y, z) = 0 \\ F(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

onde

$$P(x, y, z) = 12x^5y^7z^4 + 12z^5y^7x^4 + 12y^5x^4z^7 + 12y^4x^7z^5 + 12y^5x^7z^4 + 12z^7y^4x^5 - \\ - 12x^5y^2z^9 - 12y^5x^9z^2 - 12y^9x^2z^5 - 12z^9y^5x^2 - 12y^9x^5z^2 - 12y^2x^9z^5 - 8x^6z^5y^5 -$$

$-8y^5z^6x^5 - 8z^5y^6x^5 + 4x^{11}y^5 + 4y^{11}z^5 + 4x^{11}z^5 + 4x^5y^{11} + 4z^{11}x^5 + 4z^{11}y^5 - \dots - x^2 - z^2 - y^2$

é um polinômio simétrico com 194 monômios e

$$F(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - x^2y^2 - x^2z^2 - y^2z^2 - x^2 - y^2 - z^2 + 1.$$

Esta é a caracterização algébrica da condição de degenerescência para o PR4CP. Sabemos que a equação

$$P(x, y, z) = 0$$

dá-nos a condição de degenerescência para o problema e

$$F(x, y, z) = 0$$

dá-nos a condição de coplanaridade para o problema.

Como os polinômios em (1) são simétricos, temos a seguinte mudança de variáveis natural

$$(2) \quad \begin{cases} a = x + y + z \\ b = xy + xz + yz \\ c = xyz \end{cases}$$

Chamemos estas variáveis  $a, b$  e  $c$  de simétricas. Pelo Teorema Fundamental sobre Polinômios Simétricos (ver Capítulo 2, Seção 2.4, página 23), no qual a demonstração descreve um algoritmo que permite passarmos das variáveis  $x, y$  e  $z$  para as simétricas, chegamos ao sistema de equações polinomiais

$$(3) \quad \begin{cases} P(a, b, c) = 0 \\ F(a, b, c) = 0 \end{cases}$$

onde

$$P(a, b, c) = 4a^{13} - \dots - 12c^2 + 2b$$

é um polinômio com 132 monômios e

$$F(a, b, c) = a^4 - a^2 - 4a^2b + b^2 + 6ca + 2b + 1.$$

Da equação  $F(a, b, c) = 0$  e do fato de que  $a > 0$ , obtemos

$$(4) \quad c = -\frac{a^4 - a^2 - 4a^2b + b^2 + 2b + 1}{6a}.$$

Substituindo  $c$  em  $P(a, b, c)$ , e simplificando, e tomando o numerador chegamos a equação

$$p(a, b) = 0,$$

onde o polinômio

$$p(a, b) = 20a^{20} + \dots + 2$$

é um polinômio com 120 monômios. Nós desejamos conhecer o comportamento desta curva algébrica numa vizinhança do ponto  $(2, 1)$ , o qual corresponde aos três vértices do triângulo, que em termos de distâncias mútuas são  $(0, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 0)$ . Fazendo a translação

$$(5) \quad \begin{cases} a = X + 2 \\ b = Y + 1 \end{cases}$$

chegamos ao polinômio

$$p(X, Y) = 2X^{20} - \dots - 6718464Y^4 - 6718464X^4 + 26873856Y^3X - \\ -40310784Y^2X^2 + 26873856YX^3$$

que tem 111 monômios.

**Notação 10.** Para o que se segue, consideremos a notação

$$G(k_1, w_1, k_2, w_2, \dots, k_n, w_n)$$

como o numerador da função racional

$$G(\phi(k_1, w_1, x_1), \phi(k_2, w_2, x_2), \dots, \phi(k_n, w_n, x_n)),$$

onde  $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$  é um polinômio com coeficientes reais em  $n$  variáveis e

$$\phi(k, w, x) = \frac{kx + w}{x + 1},$$

com  $0 \leq k < w$  ou  $k < w \leq 0$ . Sempre usaremos o mesmo nome tanto para a variável original como para a variável na definição de  $\phi$ .



**Observação 11.** Observemos que, para  $w < k$  (respectivamente,  $k < w$ ),  $\phi$  é um difeomorfismo global que transforma o intervalo  $[0, \infty)$  no intervalo  $[w, k)$  (respectivamente,  $(k, w]$ ). Estes difeomorfismos são comumente conhecidos como transformações de Möbius. Devemos salientar que se

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [w_1, k_1) \times [w_2, k_2) \times \dots \times [w_n, k_n),$$

então

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \iff G(w_1, k_1, w_2, k_2, \dots, w_n, k_n) = 0.$$

Sendo assim, se no bloco  $[0, \infty)^n$ ,  $G(w_1, k_1, w_2, k_2, \dots, w_n, k_n)$  não muda de sinal, temos que  $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$  não muda de sinal em  $[w_1, k_1) \times [w_2, k_2) \times \dots \times [w_n, k_n)$ .

Neste ponto, é importante salientar que a **Observação 11** é o nosso método geral, o qual utilizaremos para demonstrar os resultados deste capítulo, e dos outros. De fato, para mostrarmos que um determinado polinômio não se anula num determinado bloco, aplicamos as transformações de Möbius ao polinômio, neste bloco, e então verificamos que o polinômio transformado por Möbius não muda de sinal no bloco transformado por Möbius. Logo, o polinômio original não muda de sinal no bloco original.

O lema a seguir mostra-nos que no  $(X, Y)$ -plano

**Lema 12.** *O polinômio  $p(X, Y)$  não se anula em  $R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4$ , onde*

$$R_1 = (0, 4] \times (0, 1/100], \quad R_2 = (-1/6, 0] \times (0, 71/50] \quad R_3 = [0, 4) \times [-1, 0) \text{ e} \\ R_4 = (-1/6, 0) \times \{0\}$$

(ver Figura 3).

**Demonstração.** A idéia da demonstração é usarmos as transformações de Möbius sobre cada intervalo especificado mudando o campo de variação das variáveis do polinômio  $p(X, Y)$  e verificando que nestas regiões o polinômio não varia de sinal. Observemos que  $p(X, Y)$  anula-se na origem, já que  $p(0, 0) = 0$ . Observamos que o polinômio

$$p(-1/6, 0, 0, 71/50) = -31979367503718510150909423828125X^{20}Y^{10} - \\ - \dots - 926726784447710496927687800151038976$$

tem 221 monômios, todos negativos. Sendo assim,  $p(X, Y)$  não se anula em

$$R_2 = (-1/6, 0] \times (0, 71/50].$$



no plano  $(X, Y)$ -plano. Resta analisarmos o que acontece em  $R_4$ . Vejamos, o polinômio  $p(X) := p(X, 0)$  fatora-se como segue:

$$p(X) = X^4(X + 1)(X + 4)^2(X + 3)^3p_1(X),$$

onde

$$p_1(X) = 2X^{10} + 8X^9 - 333X^8 - 4610X^7 - 28364X^6 - 102426X^5 - 234301X^4 - \\ -340924X^3 - 296628X^2 - 129168X - 15552$$

Para  $-\frac{1}{6} < X < 0$ , temos que:

$$p(X) = 0 \text{ se, e somente se, } p_1(X) = 0.$$

Agora, o polinômio

$$p_1(-1/6, 0) = -25804612553X^{10} - \dots - 470184984576$$

tem 11 monômios, todos negativos. Logo,  $p_1(X)$  não se anula em  $(-1/6, 0]$ . Portanto,  $p(X)$  não se anula em

$$R_4 = (-1/6, 0) \times \{0\}.$$

E assim, chegamos a conclusão de que o polinômio  $p(X, Y)$  não se anula em

$$R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4.$$

□

**Observação 13.** Consideremos o polinômio  $p(X)$  como na demonstração do Lema 12. O polinômio

$$p(-1/6, 0) = -335327972595791405X^{20} - \dots - 9476762676643233792X^4$$

tem 17 monômios negativos e não tem termo independente, isto é,  $X = 0$  é uma solução de

$$p(-1/6, 0) = 0.$$



Com isso, concluiremos que não existem soluções do sistema (1) numa vizinhança perfurada do vértice  $(0, 1, 1)$ . Antes disto, relembremos alguns fatos concernentes à Teoria das Equações, mais especificamente, à Equação Cúbica. Dado  $(a, b, c)$  uma tripla de números reais, busquemos  $(x, y, z)$  satisfazendo (2), página 27. Aqui, cabe observar que, no nosso contexto, necessitamos apenas da dupla  $(a, b)$ , já que o  $c$  de interesse vem de (4), na página 28. Pela Teoria das Equações, buscamos as soluções da equação cúbica

$$t^3 - at^2 + bt - c = 0.$$

Sendo assim, deparamo-nos com as fórmulas de Cardano

$$(6) \quad \begin{cases} x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} + \frac{a}{3} \\ y = e^{\frac{2\pi}{3}i} \sqrt[3]{A} + e^{\frac{4\pi}{3}i} \sqrt[3]{B} + \frac{a}{3} \\ z = e^{\frac{4\pi}{3}i} \sqrt[3]{A} + e^{\frac{2\pi}{3}i} \sqrt[3]{B} + \frac{a}{3} \end{cases}$$

imposta a condição

$$\Delta = 4\left(b - \frac{a^2}{3}\right)^3 + 27\left(-c + \frac{ab}{b} - \frac{2a^3}{27}\right)^2 \leq 0,$$

a qual diz que estamos interessados em soluções reais, onde  $A$  e  $B$  são as soluções da equação quadrática

$$t^2 + \left(-c + \frac{ab}{3} - \frac{2a^3}{27}\right)t - \frac{1}{27}\left(b - \frac{a^2}{3}\right)^3 = 0.$$

Esta condição equivale a termos as fórmulas de Cardano na forma

$$(7) \quad \begin{cases} x = 2\alpha + \frac{a}{3} \\ y = -\alpha - \beta\sqrt{3} + \frac{a}{3} \\ z = -\alpha + \beta\sqrt{3} + \frac{a}{3} \end{cases}$$

onde  $\sqrt[3]{A} = \alpha + i\beta$  e  $\sqrt[3]{B} = \overline{\sqrt[3]{A}}$ , podendo ser  $\beta = 0$ , no caso  $\Delta = 0$ . Observemos que (7) dá-nos um difeomorfismo global, qual seja  $(\alpha, \beta, a) \mapsto (x, y, z)$ , por ser um isomorfismo linear em  $\mathbb{R}^3$ . Utilizando este difeomorfismo, podemos escrever o sistema (1) como

$$(8) \begin{cases} P(\alpha, \beta, a) = 0 \\ F(\alpha, \beta, a) = 0 \end{cases}$$

onde o polinômio

$$P(\alpha, \beta, a) = \frac{320}{6561}a^{12}\beta^4 - \dots - \frac{1}{3}a^2 - 6\beta^2 - 6\alpha^2$$

tem 478 monômios e

$$F(\alpha, \beta, a) = 4a^2\beta^2 + 4a^2\alpha^2 - 36a\beta^2\alpha + 12a\alpha^3 + 9\beta^4 + 18\beta^2\alpha^2 + 9\alpha^4 - \frac{1}{3}a^2 - 6\beta^2 - 6\alpha^2 + 1.$$

O polinômio  $P(\alpha, \beta, a)$  tem a seguinte propriedade:

$$P(\alpha, \beta, a) = P(\alpha, -\beta, a).$$

O motivo para isto ocorrer é que em todos os monômios de  $P(\alpha, \beta, a)$  os expoentes de  $\beta$  são pares.

**Observação 14.** Aqui, cabe observar que o sistema (1), página 26, retrata um problema puramente algébrico: o de determinar as soluções de um sistema de equações polinomiais. Porém, não devemos esquecer que as variáveis  $x, y$  e  $z$  envolvidas em (1) representam as distâncias mútuas no plano das configurações. Por isso, quando passamos da caracterização algébrica do problema para a caracterização do problema no plano das configurações devemos ser cuidadosos na interpretação. Por exemplo, no contexto do plano das configurações, o lado relativo aos vértices  $(0, 1, 1)$  e  $(1, 0, 1)$  é dado por  $x + y = 1$ .

Mostremos a seguinte

**Proposição 15.** *Não existem soluções do sistema (1) numa vizinhança perfurada do vértice  $(0, 1, 1)$ .*

**Demonstração.** A técnica para demonstrarmos isto é a mesma utilizada no Lema 12, página 29. Observemos que o vértice  $(0, 1, 1)$  no  $(x, y, z)$ -espaço corresponde ao ponto  $(-1/3, 0, 2)$  no  $(\alpha, \beta, a)$ -espaço, através da bijeção  $(\alpha, \beta, a) \mapsto (x, y, z)$ . Também, observemos que para  $a \leq 2$  e  $\alpha \leq -\frac{1}{3}$  temos, por (7), página 33, que

$x = 2\alpha + \frac{a}{3} \leq 0$ . Sendo assim, para  $a = 2$ , só precisamos nos preocupar com os valores de  $\alpha$  maiores do que  $-\frac{1}{3}$ . Consideremos o polinômio

$$T(\alpha, \beta) := P(\alpha, \beta, 2) = -52488\beta^{16} + 34992\beta^{14}\alpha^2 + 81648\beta^{12}\alpha^4 - 136080\beta^{10}\alpha^6 - \\ -1485216\beta^8\alpha^8 - 3129840\beta^6\alpha^{10} - 2186352\beta^4\alpha^{12} - 418608\beta^2\alpha^{14} - 7128\alpha^{16} - \dots - \frac{629356}{4782969}$$

o qual tem 80 monômios. Pelo fato de que, em todos os monômios, os expoentes de  $\beta$  são pares, temos que  $T(\alpha, \beta) = T(\alpha, -\beta)$ . Sendo assim, só precisamos verificar se o polinômio  $T(\alpha, \beta)$  não se anula num dos semiplanos relativos ao  $\alpha$ -eixo do  $(\alpha, \beta)$ -plano. O polinômio

$$T(-1/3, -1/10, -1/2, 0) = 80666471943117828369140625\alpha^{16}\beta^{16} + \\ + \dots + 41616142484197678411$$

tem 277 monômios, todos positivos. Logo,  $T(\alpha, \beta)$  não se anula no retângulo

$$(-1/3, -1/10) \times (-1/2, 0),$$

o qual está localizado no semiplano inferior, mais precisamente, no terceiro quadrante do  $(\alpha, \beta)$ -plano. Por continuidade na variável  $a$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que  $P(\alpha, \beta, a)$  não se anula em

$$(-1/3, -1/10) \times (-1/2, 0) \times (2 - \epsilon, 2 + \epsilon).$$

Este bloco, com a condição

$$\frac{23}{30} - \frac{\epsilon}{3} > 0 \quad (\Leftrightarrow \epsilon < \frac{23}{10}),$$

dá-nos no primeiro octante do  $(x, y, z)$ -espaço, através do difeomorfismo

$$(\alpha, \beta, a) \longmapsto (x, y, z),$$

o bloco

$$(0, \frac{7}{15} + \frac{\epsilon}{3}) \times (\frac{23}{30} - \frac{\epsilon}{3}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\epsilon}{3}) \times (0, 1 + \frac{\epsilon}{3}).$$

Este bloco, devidamente interpretado em termos de distâncias mútuas, dá-nos uma vizinhança perfurada do vértice  $(0, 1, 1)$  no plano das configurações. De fato, basta considerarmos, no plano das configurações, a região delimitada pelas circunferências

$$y = \frac{23}{30} - \frac{\epsilon}{3}, \quad y = 1 + \frac{\epsilon}{3}, \quad z = \frac{23}{30} - \frac{\epsilon}{3}, \quad z = 1 + \frac{\epsilon}{3}$$

interseccionada pela bola aberta centrada no ponto  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$  e de raio  $\frac{7}{15} + \frac{\epsilon}{3}$  (ver Figura 4). Certamente, esta região contém uma vizinhança perfurada do vértice  $(0, 1, 1)$ , na qual não existem soluções do sistema (1), como queríamos.  $\square$

E assim, juntando o Lema 12, página 29, e a proposição que acabamos de mostrar, temos que existe uma vizinhança perfurada da origem no  $(X, Y)$ -plano na qual  $p(X, Y)$  não se anula.

Um outro fato é que a origem do plano das configurações, que corresponde a tripla  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$  no  $(x, y, z)$ -espaço, não é solução do sistema (1), já que

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{77}{2187}\sqrt{3} - \frac{1}{9} < 0.$$

Além disso, não existem soluções do sistema (1) sobre os lados do triângulo. Para mostrarmos este segundo fato, basta considerarmos um dos lados, digamos o lado dado por  $x + y = 1$  (ver Observação 14, página 34). Substituindo  $x = 1 - y$  em (1), obtemos o sistema

$$(9) \quad \begin{cases} P(1 - y, y, z) = 0 \\ F(1 - y, y, z) = 0 \end{cases}$$

onde

$$P(y, z) = P(1 - y, y, z) = -8y^{16} + 24y^{14}z^2 - 24y^{12}z^4 + 8y^{10}z^6 - \dots - 12y$$

é um polinômio com 94 monômios e

$$F(y, z) = F(1 - y, y, z) = y^4 - 2y^2z^2 + z^4 - 2y^3 + 2yz^2 + 3y^2 - 2z^2 - 2y + 1.$$

Calculando o resultante dos polinômios  $P(y, z)$  e  $F(y, z)$  com respeito a  $y$  obtemos o polinômio

$$R(z) = 20736(z^2 + z + 1)^4(z^4 - 8z^2 - 2)^4(z + 1)^{12}(z - 1)^{16}z^8.$$



Sendo assim,  $R(z)$  não se anula em  $(0, 2) \setminus \{1\}$ . Segue-se, do Teorema 7, Capítulo 2, Seção 2.3, página 23, que o sistema (9) não tem solução para  $z \in (0, 2)$ , exceto para  $z = 1$ , que não faz parte das 7 regiões admissíveis (ver Capítulo 2, Seção 2.3, página 19). Em geral, é neste contexto que aplicamos o teorema mencionado. Desta forma, isto significa que o sistema (1) não tem solução sobre os lados do triângulo. Portanto, sabemos que nem a origem do plano das configurações e nem os pontos sobre os lados do triângulo, que devem ser interpretados em termos de distâncias mútuas, são soluções do sistema (1). E mais, que não existem soluções do sistema (1) numa vizinhança perfurada dos vértices. Para o que se segue, é de fundamental importância exibirmos uma vizinhança perfurada do vértice no plano das configurações na qual não existem soluções do sistema (1). Pela Proposição 15, na página 34, sabemos que uma tal vizinhança existe.

Usando a translação dada por (5), página 28, temos, pelo Lema 12, página 29, que o polinômio  $p(a, b)$  não se anula em

$$((2, 6] \times (1, 101/100)) \cup ((11/6, 2] \times (1, 121/50)) \cup ([2, 6] \times [0, 1)) \cup ((11/6, 2) \times \{2\})$$

do  $(a, b)$ -plano. Agora, procuraremos explicitar uma vizinhança perfurada do vértice  $(0, 1, 1)$ , que devido ao fato do sistema (1) ser simétrico, isto é, que devido ao fato do sistema (1) ser composto por polinômios simétricos, dá-nos também vizinhanças perfuradas dos demais vértices, nas quais não encontramos soluções do sistema (1). De fato, basta-nos rotacionar a vizinhança encontrada para o vértice  $(0, 1, 1)$  de  $\frac{2\pi}{3}$  radianos, e assim, encontrarmos vizinhanças perfuradas dos outros vértices com a mesma propriedade para o sistema (1). Já vimos que só precisamos considerar o caso em que  $0 < a < 2$  e  $0 < b < 1$ , conforme vimos na página 32. Este é o único caso em que se faz necessário usarmos o difeomorfismo

$$(\alpha, \beta, a) \longmapsto (x, y, z).$$

Já sabemos, como vimos acima, na página 34, que se  $\alpha \leq -\frac{1}{3}$  e  $a \leq 2$ , temos que  $x = 2\alpha + \frac{a}{3} \leq 0$ . Logo, só precisamos nos preocupar com  $\alpha > -\frac{1}{3}$ .

Da Teoria das Equações Algébricas temos que:

*x, y, e z são soluções da equação cúbica  $t^3 - at^2 + bt - c = 0$ , se, e somente se,*

$$(10) \quad \begin{cases} x + y + z = a \\ xy + xz + yz = b \\ xyz = c \end{cases}$$

Sendo assim, substituindo as expressões para  $x$ ,  $y$  e  $z$  dadas por (7), na página 33, temos que (10) equivale a

$$(11) \begin{cases} x + y + z - a = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{3}(b - \frac{a^2}{3}) = 0 \\ 2\alpha^3 - \alpha^2 a - 6\alpha\beta^2 - a\beta^2 + \frac{1}{27}a^3 - c = 0 \end{cases}$$

Consideremos

$$H(\alpha, \beta, a, b) = \alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{3}(b - \frac{a^2}{3}).$$

O interesse na segunda equação de (11) vem do fato dela relacionar todas as variáveis que estamos interessados. Devemos lembrar que o  $c$  de nosso interesse depende de  $a$  e  $b$ , através de (4), página 28. Um fato é que se substituirmos o  $c$  dado por (4) no primeiro membro da terceira equação de (11), e em seguida, o  $b$  dado pela segunda equação de (11), e tomarmos o numerador, e igualarmos a zero, obteremos a condição de coplanaridade em termos de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $a$ , isto é,

$$F(\alpha, \beta, a) = 0.$$

Por isso, não nos preocupamos com a terceira equação de (11). Agora, calculando o resultante dos polinômios  $F(\alpha, \beta, a)$  e  $H(\alpha, \beta, a, b)$  com respeito à variável  $a$  obtemos o polinômio

$$T(\alpha, \beta, b) = 25\beta^8 - 44\beta^6\alpha^2 + 102\beta^4\alpha^4 + 180\beta^2\alpha^6 + 9\alpha^8 + \dots + \frac{1}{81}$$

com 31 monômios. Pelo fato de que, em todos os monômios, os expoentes de  $\beta$  são pares, temos que  $T(\alpha, \beta, b) = T(\alpha, -\beta, b)$ . Sendo assim, só precisamos verificar se o polinômio  $T(\alpha, \beta, b)$  não se anula num dos semi-espacos relativos ao  $(\alpha, b)$ -plano do  $(\alpha, \beta, b)$ -espaco. Como

$$T(-1/3, -1/10, -2/10, 0, 0, 1) = 399520000\beta^8 b^2 \alpha^8 + \dots + 670761$$

é um polinômio com 237 monômios, todos positivos, temos, pelo Teorema 7, Capítulo 2, Seção 2.3, página 23, que não existem

$$(\alpha, \beta, a, b) \in (-1/3, -1/10) \times (-2/10, 0) \times (0, 2) \times (0, 1)$$

tais que

$$F(\alpha, \beta, a) = 0 \text{ e } H(\alpha, \beta, a, b) = 0.$$

E assim, as quadrúplas  $(\alpha, \beta, a, b)$  em

$$(-1/3, -1/10) \times (-2/10, 0) \times (0, 2) \times (0, 1)$$

são tais que

$$H(\alpha, \beta, a, b) \neq 0 \text{ ou } F(\alpha, \beta, a) \neq 0.$$

Lembremos que pelas fórmulas de Cardano para o caso  $\Delta \leq 0$ , por (7), na página 33, temos um difeomorfismo global

$$(\alpha, \beta, a) \longmapsto (x, y, z),$$

o qual, para cada  $(\alpha, \beta, a)$ , gera as triplas  $(x, y, z)$ . Sendo assim, no caso

$$H(\alpha, \beta, a, b) \neq 0, \text{ com } (\alpha, \beta, a, b) \in (-1/3, -1/10) \times (-2/10, 0) \times (0, 2) \times (0, 1),$$

as triplas  $(x, y, z)$  assim geradas não podem ser soluções da equação cúbica. Já no segundo caso,

$$F(\alpha, \beta, a) \neq 0, \text{ com } (\alpha, \beta, a) \in (-1/3, -1/10) \times (-2/10, 0) \times (0, 2),$$

mesmo que as triplas  $(x, y, z)$  sejam soluções da equação cúbica, elas não são distâncias mútuas no plano das configurações. Neste caso, as triplas  $(x, y, z)$  estão no  $(u, v, w)$ -espaço.

Passemos a determinar os extremos dos intervalos para  $x, y$  e  $z$ , para obtermos uma vizinhança perfurada do vértice  $(0, 1, 1)$  no plano das configurações. Pelo Lema 12, na página 29, e pela translação dada por (5), na página 28, temos as seguintes exigências para  $a$  e  $b$ :

$$a = x + y + z > \frac{11}{6} \text{ e } b = xy + xz + yz < \frac{101}{100}.$$

Usando as expressões em (7), página 33, transformamos o seguinte bloco do  $(\alpha, \beta, a)$ -espaço

$$\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{10}\right) \times \left(-\frac{2}{10}, 0\right) \times \left(\frac{11}{6}, 4\right)$$

no bloco

$$\left(0, \frac{17}{15}\right) \times \left(\frac{32}{45}, \frac{5}{3} + \frac{\sqrt{3}}{5}\right) \times \left(\frac{32}{45} - \frac{\sqrt{3}}{5}, \frac{5}{3}\right)$$

do primeiro octante do  $(x, y, z)$ -espaço. Para este bloco do  $(x, y, z)$ -espaço,  $b$  varia em

$$\left(\frac{1024}{2025} - \frac{32\sqrt{3}}{225}, \frac{59}{9} + \frac{14\sqrt{3}}{25}\right).$$

Mas, para este intervalo,

$$\frac{59}{9} + \frac{14\sqrt{3}}{25} > \frac{101}{100}.$$

Escolhendo não alterar os extremos dos intervalos para  $\alpha$  e  $\beta$ , para nos enquadrarmos nas exigências, precisaremos diminuir os extremos do intervalo para  $a$ . Adotando esta escolha, conseguimos a seguinte vizinhança de  $(0, 1, 1)$  no primeiro octante do  $(x, y, z)$ -espaço:

$$(0, 3/1000) \times (999/1000, 1001/1000) \times (999/1000, 1001/1000).$$

Para esta vizinhança, as exigências para  $a$  e  $b$  são atendidas, já que

$$\frac{998001}{1000000} < b < \frac{1008007}{1000000} < \frac{101}{100}$$

e

$$\frac{11}{6} < \frac{999}{500} < a < \frac{401}{200}.$$

Como veremos adiante, esta vizinhança é suficiente para as nossas necessidades. Com isso, temos o seguinte

**Lema 16.** *Na vizinhança*

$$\left(0, \frac{3}{1000}\right) \times \left(\frac{999}{1000}, \frac{1001}{1000}\right) \times \left(\frac{999}{1000}, \frac{1001}{1000}\right)$$

de  $(0, 1, 1)$ , no primeiro octante do  $(x, y, z)$ -espaço, não existem soluções do sistema (1).

Observemos que a vizinhança do Lema 16 também é uma vizinhança adequada do vértice  $(0, 1, 1)$  no plano das configurações, já que tal vizinhança está contida na intersecção da bola aberta centrada no vértice  $(0, 1, 1)$  e de raio  $\frac{3}{1000}$  com a bola aberta centrada no vértice  $(1, 0, 1)$  e de raio  $\frac{1001}{1000}$ . De fato, basta determinarmos as intersecções dos círculos

$$z = \frac{999}{1000}, z = \frac{1001}{1000}, y = \frac{999}{1000}, y = \frac{1001}{1000}$$

no plano das configurações, para  $u > 0$ , e verificarmos que a região delimitada por estes pontos e os arcos correspondentes está contida na intersecção da bola aberta centrada no vértice  $(0, 1, 1)$  e de raio  $\frac{3}{1000}$  com a bola aberta centrada no vértice  $(1, 0, 1)$  e de raio  $\frac{1001}{1000}$  (ver Figura 6).

## 3.2 O Nosso Método

Em conformidade com a Seção 2.2 do Capítulo 2, as configurações centrais que são soluções do sistema (1) são ditas configurações centrais degeneradas (pontos críticos degenerados do potencial reduzido), e as que não são soluções de (1), são ditas configurações centrais não-degeneradas (pontos críticos não-degenerados do potencial reduzido). Isto justifica denominarmos as soluções do sistema (1) de degeneradas, e as que não são soluções de (1), de não-degeneradas.

Visando os dois teoremas da próxima seção, fazemos neste momento uma sistemática do método que empregaremos. Partimos de um bloco  $B$ . Usando o comando `implicitplot` do software MAPLE, visualizamos a situação entre as superfícies algébricas dadas por

$$P(x, y, z) = 0 \text{ e } F(x, y, z) = 0.$$

De acordo com a visualização, determinamos um sub-bloco de  $B$ , denotemo-no por  $B_1$ , e vemos que nele

$$P(x, y, z) \neq 0 \text{ ou } F(x, y, z) \neq 0.$$

E então, verificando-se um destes dois fatos, passamos a construir as transformações de Möbius adequadas. Esta é a parte numérica da pesquisa. A partir daqui, temos a parte analítica da pesquisa. De fato, é neste ponto que verificamos, de forma analítica, que as transformações construídas são as desejadas. Feito isto, passamos a investigar o que ocorre no complemento de  $B_1$  com relação a  $B$ . E assim seguimos até, num número finito de sub-blocos, chegarmos a completude do bloco  $B$ . É claro que este método está sujeito sobremodo à visualização de como cada superfície algébrica se dispõe em relação à outra. O objetivo é mostrar que no bloco  $B$  as superfícies algébricas dadas pelas equações polinomiais não se intersectam. A idéia sempre presente é reduzir a análise a um sub-bloco de  $B$ , construído como acima, que estará contido naquela vizinhança do vértice  $(0, 1, 1)$ , dada pelo Lema 16, página 40, na qual já sabemos que não existem soluções do sistema (1).

## 3.3 Os Teoremas

Antes de enunciarmos e demonstrarmos os teoremas desta seção, fazemos uma observação.

**Observação 17.** Seja  $G(x, y, z)$  um polinômio simétrico. Suponhamos que  $G(x, y, z)$  não se anula no bloco

$$\mathbb{I}_1 \times \mathbb{I}_2 \times \mathbb{I}_3,$$

onde  $\mathbb{I}_k$  é um intervalo da reta real, para  $k = 1, 2, 3$ . Então, pela simetria do polinômio  $G(x, y, z)$ , temos que este polinômio não se anula em nenhum bloco obtido daquele por permutações dos intervalos  $\mathbb{I}_k$ , para  $k = 1, 2, 3$ . De fato, por exemplo, como

$$G(x, y, z) = G(y, x, z),$$

temos que o polinômio  $G(x, y, z)$  não se anula em

$$\mathbb{I}_2 \times \mathbb{I}_1 \times \mathbb{I}_3.$$

E assim, sucessivamente. Além disso, se

$$A \subset \mathbb{I}_1 \times \mathbb{I}_2 \times \mathbb{I}_3,$$

temos que  $G(x, y, z)$  não se anula em  $A$ .

A seguir, demonstremos o primeiro resultado importante deste capítulo.

**Teorema 18.** *As configurações centrais convexas são não-degeneradas.*

**Demonstração.** A técnica de demonstração é a mesma empregada nos resultados anteriormente obtidos e delineada acima. Neste caso, iremos mostrar que o bloco  $B = (0, 1) \times (1, 2) \times (0, 1)$  não tem solução do sistema (1). Devemos observar que quando interpretamos este bloco no plano das configurações a região obtida contém a região III, uma das regiões convexas (ver página 19). E de fato, basta mostrarmos o resultado numa qualquer daquelas regiões convexas, uma vez que por rotação de  $\frac{2\pi}{3}$  radianos estendemos o resultado para as outras. A idéia, como vimos acima, é subdividirmos o bloco  $B$  em sub-blocos de tal maneira que em cada um destes sub-blocos tenhamos que  $F(x, y, z)$  não se anula ou  $P(x, y, z)$  não se anula. Vejamos, como o polinômio

$$P(0, 1, 33/25, 2, 0, 1) = 156727466851706432352y^{13}z^{13}x^{13} +$$

$$+ \dots + 16689300537109375000000$$

tem 2744 monômios, todos positivos, temos que  $P(x, y, z)$  não tem zeros em

$$(0, 1] \times (132/100, 2] \times (0, 1].$$

Desta forma, o sistema (1) não tem solução em

$$B_1 = (0, 1) \times (132/100, 2] \times (0, 1).$$

E assim, reduzimos a investigação da inexistência de soluções do sistema (1) ao bloco

$$B_2 = (0, 1) \times (1, 132/100] \times (0, 1),$$

que é o complemento de  $B_1$  em relação à  $B$  (ver Figura 7). Observando que o polinômio

$$F(0, 1/2, 1, 33/25, 0, 1/2) = 6250000z^4y^4x^4 + \dots + 6155361$$

tem 125 monômios, todos positivos, temos que o polinômio  $F(x, y, z)$  não se anula em

$$(0, 1/2] \times (1, 132/100] \times (0, 1/2].$$

Desta forma, o sistema (1) não tem solução em

$$B_3 = (0, 1/2] \times (1, 132/100] \times (0, 1/2].$$

Agora, verifiquemos a inexistência de soluções do sistema (1) no bloco

$$B_4 = (0, 1/2] \times (1, 132/100] \times (1/2, 1),$$

que é o complemento de  $B_3$  com relação ao bloco

$$B_5 = (0, 1/2] \times (1, 132/100] \times (0, 1)$$

(ver Figura 8).

O polinômio

$$P(0, 1/2, 1, 33/25, 1/2, 17/20) = 20764160156250000000000000z^{13}y^{13}x^{13} + \dots + 4598034387064838292949899363$$

tem 2744 monômios, todos positivos. Logo, o polinômio  $P(x, y, z)$  não se anula em

$$B_6 = (0, 1/2] \times (1, 132/100] \times (1/2, 17/20].$$

Mostremos a inexistência de soluções de (1) no bloco

$$B_7 = (0, 1/2] \times (1, 132/100] \times (17/20, 1),$$

que é o complemento de  $B_6$  com relação à  $B_4$  (ver Figura 9). Observamos que

$$P(0, 1/2, 6/5, 33/25, 17/20, 1) = 994535106787482965332031250z^{13}y^{13}x^{13} + \\ + \dots + 2165914566517431036520120320$$

tem 2744 monômios, todos positivos. E assim, o polinômio  $P(x, y, z)$  não se anula em

$$B_8 = (0, 1/2] \times (6/5, 132/100] \times (17/20, 1].$$

Verifiquemos que não existem soluções de (1) em

$$B_9 = (0, 1/2] \times (1, 6/5] \times (17/20, 1),$$

que é o complemento de  $B_8$  com relação à  $B_7$  (ver Figura 10). Observamos que o polinômio

$$F(9/25, 1/2, 1, 6/5, 17/20, 1) = -25903359z^4y^4x^4 - \dots - 60390000$$

tem 125 monômios, todos negativos. Portanto,  $F(x, y, z)$  não se anula em

$$B_{10} = (9/25, 1/2] \times (1, 6/5] \times (17/20, 1].$$

Agora, mostremos a inexistência de soluções do sistema (1) no bloco

$$B_{11} = (0, 9/25] \times (1, 12/10] \times (17/20, 1),$$

que é o complemento de  $B_{10}$  com relação à  $B_9$  (ver Figura 11). Vejamos, o polinômio

$$P(0, 9/25, 1, 6/5, 17/20, 23/25) = 25343195322050800323486328125z^{13}y^{13}x^{13} + \\ + \dots + 695173744669028926882463088640$$

tem 2744 monômios, todos positivos. E assim, o polinômio  $P(x, y, z)$  não se anula em

$$B_{12} = (0, 9/25] \times (1, 12/10] \times (17/20, 23/25].$$

Investiquemos a inexistência de soluções de (1) no bloco

$$B_{13} = (0, 9/25] \times (1, 12/10] \times (23/25, 1),$$

que é o complemento de  $B_{12}$  com relação à  $B_{11}$ . O polinômio

$$F(3/10, 9/25, 1, 6/5, 23/25, 1) = -1403019z^4y^4x^4 - \dots - 1471424$$



tem 125 monômios, todos negativos. Logo, o sistema (1) não tem solução em

$$B_{14} = (3/10, 9/25] \times (1, 12/10] \times (23/25, 1).$$

Mostremos a inexistência de soluções do sistema (1) no bloco

$$B_{15} = (0, 3/10] \times (1, 12/10] \times (23/25, 1),$$

que é o complemento de  $B_{14}$  com relação à  $B_{13}$ . O polinômio

$$P(0, 3/10, 11/10, 6/5, 23/25, 1) = 24960582727215874391736z^{13}y^{13}x^{13} + \\ + \dots + 116849839699613671875000$$

tem 2744 monômios, todos positivos. Sendo assim,  $P(x, y, z)$  não se anula no bloco

$$B_{16} = (0, 3/10] \times (11/10, 12/10] \times (23/25, 1].$$

Vejamos a inexistência de soluções de (1) no bloco

$$B_{17} = (0, 3/10] \times (1, 11/10] \times (23/25, 1],$$

que é o complemento de  $B_{16}$  com relação à  $B_{15}$ . Observamos que o polinômio

$$F(19/100, 3/10, 1, 11/10, 23/25, 1) = -7785887z^4y^4x^4 - \dots - 23670000$$

tem 125 monômios, todos negativos. E assim, vemos que  $F(x, y, z)$  não se anula em

$$B_{18} = (19/100, 3/10] \times (1, 11/10] \times (23/25, 1).$$

Agora, veremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{19} = (0, 19/100] \times (1, 11/10] \times (23/25, 1),$$

que é o complemento de  $B_{18}$  com relação à  $B_{17}$ . O polinômio

$$P(0, 19/100, 1, 11/10, 23/25, 97/100) = 193219162540954104102912000000z^{13}y^{13}x^{13} + \\ + \dots + 1818740345024573233006244167030$$

tem 2744 monômios, todos positivos. Portanto,  $P(x, y, z)$  não se anula em

$$B_{20} = (0, 19/100] \times (1, 11/10] \times (23/25, 97/100].$$

Mostremos a inexistência de soluções em

$$B_{21} = (0, 19/100] \times (1, 11/10] \times (97/100, 1),$$

que é o complemento de  $B_{20}$  com relação à  $B_{19}$ . O polinômio

$$F(7/50, 19/100, 1, 11/10, 97/100, 1) = -5376467z^4y^4x^4 - \dots - 7047779$$

tem 125 monômios, todos negativos. Logo,  $F(x, y, z)$  não se anula em

$$B_{22} = (7/50, 19/100] \times (1, 11/10] \times (97/100, 1).$$

Mostremos que não existem soluções de (1) no bloco

$$B_{23} = (0, 7/50] \times (1, 11/10] \times (97/100, 1),$$

que é o complemento de  $B_{22}$  com relação à  $B_{21}$ . O polinômio

$$P(0, 7/50, 26/25, 11/10, 97/100, 1) = 3301056916105048995076398450z^{13}y^{13}x^{13} + \\ + \dots + 33887109929658244766707200000$$

tem 2744 monômios, todos positivos. Desta forma, o sistema (1) não tem solução em

$$B_{24} = (0, 7/50] \times (26/25, 11/10] \times (97/100, 1).$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{25} = (0, 7/50] \times (1, 26/25] \times (97/100, 1),$$

que é o complemento de  $B_{24}$  com relação à  $B_{23}$ . Para tanto, observamos que o polinômio

$$F(2/25, 7/50, 1, 26/25, 97/100, 1) = -1528799z^4y^4x^4 - \dots - 5335664$$

tem 125 monômios, todos negativos. Logo, o sistema (1) não tem solução em

$$B_{26} = (2/25, 7/50] \times (1, 26/25] \times (97/100, 1).$$

Mostremos a inexistência de soluções do sistema (1) em

$$B_{27} = (0, 2/25] \times (1, 26/25] \times (97/100, 1),$$

que é o complemento de  $B_{26}$  com relação à  $B_{25}$ . Como o polinômio

$$P(0, 2/25, 127/125, 26/25, 97/100, 1) = 13559281390114517058116682627175221z^{13}y^{13}x^{13} + \\ + \dots + 15633019533029070864384000000000000$$

tem 2744 monômios, todos positivos, temos que  $P(x, y, z)$  não se anula em

$$B_{28} = (0, 2/25] \times (127/125, 26/25] \times (97/100, 1).$$

Agora, verifiquemos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{29} = (0, 2/25] \times (1, 127/125] \times (97/100, 1),$$

que é o complemento de  $B_{28}$  com relação à  $B_{27}$ . Como o polinômio

$$F(1/20, 2/25, 1, 127/125, 97/100, 1) = -240824375z^4y^4x^4 - \dots - 1145314304$$

tem 125 monômios, todos negativos, temos que o polinômio  $F(x, y, z)$  não se anula em

$$B_{30} = (1/20, 2/25] \times (1, 127/125] \times (97/100, 1).$$

Vejam os que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{31} = (0, 1/20] \times (1, 127/125] \times (97/100, 1),$$

que é o complemento de  $B_{30}$  com relação à  $B_{29}$ . O polinômio

$$P(0, 1/20, 1, 127/125, 97/100, 249/250) = \\ = 761122882333925184475250244140625000000z^{13}y^{13}x^{13} + \\ + \dots + 122572881126605671417764479466985956192$$

tem 2744 monômios, todos positivos. Portanto,  $P(x, y, z)$  não tem zeros em

$$B_{32} = (0, 1/20] \times (1, 127/125] \times (97/100, 249/250].$$

Verifiquemos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{33} = (0, 1/20] \times (1, 127/125] \times (249/250, 1),$$

que é o complemento de  $B_{32}$  com relação à  $B_{31}$ . Como o polinômio

$$F(11/500, 1/20, 1, 127/125, 249/250, 1) = -86509827z^4y^4x^4 - \dots - 408371279$$

tem 125 monômios, todos negativos, temos que  $F(x, y, z)$  não tem zeros em

$$B_{34} = (11/500, 1/20] \times (1, 127/125] \times (249/250, 1).$$

Verifiquemos que no bloco

$$B_{35} = (0, 11/500] \times (1, 127/125] \times (249/250, 1)$$

o sistema (1) não tem solução. Observamos que o bloco  $B_{35}$  é o complemento de  $B_{34}$  com relação à  $B_{33}$ . Como o polinômio

$$\begin{aligned} P(0, 11/500, 1, 127/125, 249/250, 499/500) = \\ = 275490833298416379075326976000000000z^{13}y^{13}x^{13} + \\ + \dots + 100108992646383926467310161911533122674 \end{aligned}$$

tem 2744 monômios, todos positivos, chegamos a conclusão de que  $P(x, y, z)$  não se anula em

$$B_{36} = (0, 11/500] \times (1, 127/125] \times (249/250, 499/500].$$

Mostremos a inexistência de soluções do sistema (1) em

$$B_{37} = (0, 11/500] \times (1, 127/125] \times (499/500, 1),$$

que é o complemento de  $B_{36}$  com relação à  $B_{35}$ . Observamos que o polinômio

$$F(1/50, 11/500, 1, 127/125, 499/500, 1) = -73892099x^4y^4z^4 - \dots - 26683007$$

tem 125 monômios, todos negativos. Logo,  $F(x, y, z)$  não se anula em

$$B_{38} = (1/50, 11/500] \times (1, 127/125] \times (499/500, 1).$$

Vejam os que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{39} = (0, 1/50] \times (1, 127/125] \times (499/500, 1),$$

que é o complemento de  $B_{38}$  com relação à  $B_{37}$ . O polinômio

$$\begin{aligned} P(0, 1/50, 1003/1000, 127/125, 499/500, 1) = \\ = 817223659520079652839069494517795501801y^{13}z^{13}x^{13} + \\ + \dots + 158520557788481561764981468636486041600000 \end{aligned}$$

tem 2744 monômios, todos positivos. Portanto,  $P(x, y, z)$  não tem zeros em

$$B_{40} = (0, 1/50] \times (1003/1000, 127/125] \times (499/500, 1).$$

Verifiquemos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{41} = (0, 1/50] \times (1, 1003/1000] \times (499/500, 1),$$

que é o complemento de  $B_{40}$  com relação à  $B_{39}$ . Como o polinômio

$$F(3/500, 1/50, 1, 1003/1000, 499/500, 1) = -91886832x^4y^4z^4 - \dots - 1166135519$$

tem 125 monômios, todos negativos, concluímos que o polinômio  $F(x, y, z)$  não tem zeros em

$$B_{42} = (3/500, 1/50] \times (1, 1003/1000] \times (499/500, 1].$$

Precisamos mostrar que o sistema (1) não tem zeros em

$$B_{43} = (0, 3/500] \times (1, 1003/1000] \times (499/500, 1],$$

que é o complemento de  $B_{42}$  com relação à  $B_{41}$ . Agora, como o polinômio

$$\begin{aligned} P(0, 3/500, 1, 1003/1000, 499/500, 1999/2000) = \\ = 2335028761355724833624795627126784000000000y^{13}z^{13}x^{13} + \\ + \dots + 17204749973057988090041638203013785789831237 \end{aligned}$$

tem 2744 monômios, todos positivos, temos que o polinômio não se anula em

$$B_{44} = (0, 3/500] \times (1, 1003/1000] \times (499/500, 1999/2000].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{45} = (0, 3/500] \times (1, 1003/1000] \times (1999/2000, 1),$$

que é o complemento de  $B_{44}$  com relação à  $B_{43}$ . O polinômio

$$F(1/250, 3/500, 1, 1003/1000, 1999/2000, 1) = -751747967x^4y^4z^4 - \dots - 1153711152$$

tem 125 monômios, todos negativos. E assim, temos que o polinômio  $F(x, y, z)$  não tem zeros em

$$B_{46} = (1/250, 3/500] \times (1, 1003/1000] \times (1999/2000, 1).$$

Verifiquemos a inexistência de soluções em

$$B_{47} = (0, 1/250] \times (1, 1003/1000] \times (1999/2000, 1),$$

que é o complemento de  $B_{46}$  com relação à  $B_{45}$ . Observamos que o polinômio

$$\begin{aligned} P(0, 1/250, 2001/2000, 1003/1000, 1999/2000, 1) = \\ = 2654212976640749952006432000895999931999998y^{13}z^{13}x^{13} + \\ + \dots + 387334391529314275983342034967598574495334400 \end{aligned}$$

tem 2744 monômios, todos positivos. Logo,  $P(x, y, z)$  não tem zeros em

$$B_{48} = (0, 1/250] \times (2001/2000, 1003/1000] \times (1999/2000, 1).$$

Verifiquemos a inexistência de soluções de (1) em

$$B_{49} = (0, 1/250] \times (1, 2001/2000] \times (1999/2000, 1),$$

que é o complemento de  $B_{48}$  com relação à  $B_{47}$ . Como o polinômio

$$F(1/500, 1/250, 1, 2001/2000, 1999/2000, 1) = -175943759z^4y^4x^4 - \dots - 752243967$$

tem 125 monômios, todos negativos, temos que  $F(x, y, z)$  não se anula em

$$B_{50} = (1/500, 1/250] \times (1, 2001/2000] \times (1999/2000, 1).$$

Consideremos

$$B_{51} = (0, 1/500] \times (1, 2001/2000] \times (9995/10000, 1).$$

Observando que

$$B_{51} \subset (0, 3/1000) \times (1, 1001/1000) \times (999/1000, 1)$$

e sabendo que o sistema (1) não tem solução em

$$(0, 3/1000) \times (1, 1001/1000) \times (999/1000, 1),$$

concluimos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{51} = (0, 1/500] \times (1, 2001/2000] \times (9995/10000, 1).$$

E com isso, chegamos a conclusão de que o sistema (1) não tem solução em

$$B_4 = (0, 1/2] \times (1, 132/100] \times (1/2, 1)$$

(ver página 43).

Sendo assim, como não existem soluções do sistema (1) em  $B_3$  ou  $B_4$ , temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_5 = (0, 1/2] \times (1, 132/100] \times (0, 1)$$

( ver página 43).

Resta mostrarmos o mesmo em

$$(1/2, 1) \times (1, 132/100] \times (0, 1).$$

Como os polinômios do sistema (1) são simétricos, pela observação acima, página 42, segue-se, por  $B_4$ , que não existem soluções de (1) em

$$(1/2, 1) \times (1, 132/100] \times (0, 1/2].$$

Portanto, precisamos mostrar que não existem soluções de (1) em

$$B_{52} = (1/2, 1) \times (1, 132/100] \times (1/2, 1).$$

Observamos que o polinômio

$$F(431/500, 1, 1, 33/25, 1/2, 1) = -34827163379z^4y^4x^4 - \dots - 136952640000$$

tem 125 monômios, todos negativos. Sendo assim,  $F(x, y, z)$  não se anula em

$$B_{53} = (431/500, 1) \times (1, 132/100] \times (1/2, 1).$$

Mostremos a inexistência de soluções de (1) em

$$B_{54} = (1/2, 862/1000] \times (1, 132/100] \times (1/2, 1),$$

que é o complemento de  $B_{53}$  com relação à  $B_{52}$ . Pela simetria de  $F(x, y, z)$  e pelo fato de que

$$(1/2, 862/1000] \times (1, 132/100] \times (862/1000, 1)$$

está contido em

$$(1/2, 1) \times (1, 132/100] \times (862/1000, 1)$$

temos, pela observação acima, página 42, que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{55} = (1/2, 431/500] \times (1, 33/25] \times (431/500, 1).$$

É neste contexto que aplicamos a observação acima. Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{56} = (1/2, 431/500] \times (1, 33/25] \times (1/2, 431/500],$$

que é o complemento de  $B_{55}$  com relação à  $B_{54}$ . O polinômio

$$\begin{aligned} P(1/2, 431/500, 127/100, 33/25, 1/2, 431/500) = \\ = 102066733339983724445989294738769531250000000z^{13}y^{13}x^{13} + \\ + \dots + 16876283996507444121911645194839213774714162 \end{aligned}$$

tem 2744 monômios, todos positivos. Logo,  $P(x, y, z)$  não tem zeros em

$$B_{57} = (1/2, 431/500] \times (127/100, 33/25] \times (1/2, 431/500].$$

Agora, mostremos que não existem soluções de (1) em

$$B_{58} = (1/2, 431/500] \times (1, 127/100] \times (1/2, 431/500],$$

que é o complemento de  $B_{57}$  com relação à  $B_{56}$ . Para tanto, observando que o polinômio

$$\begin{aligned} F(1/2, 431/500, 1, 127/100, 4/5, 431/500) = \\ = -29243750000x^4y^4z^4 - \dots - 83896158704 \end{aligned}$$

tem 125 monômios, todos negativos, concluímos que  $F(x, y, z)$  não tem zeros em

$$B_{59} = (1/2, 431/500] \times (1, 127/100] \times (4/5, 431/500].$$

Pelo fato do polinômio  $F(x, y, z)$  ser simétrico e

$$(8/10, 862/100] \times (1, 127/100] \times (1/2, 8/10]$$

está contido em

$$(8/10, 862/1000] \times (1, 127/100] \times (1/2, 862/1000]$$



temos que  $F(x, y, z)$  não se anula em

$$B_{60} = (8/10, 862/1000] \times (1, 127/100] \times (1/2, 8/10].$$

Verifiquemos a inexistência de solução de (1) em

$$B_{61} = (1/2, 8/10] \times (1, 127/100] \times (1/2, 8/10],$$

que é o complemento de  $B_{60}$  com relação à  $B_{59}$ . Observamos que o polinômio

$$\begin{aligned} P(1/2, 279/500, 1, 127/100, 1/2, 4/5) = \\ = 1073330640792846679687500000000000000000z^{13}y^{13}x^{13} + \\ + \dots + 11083163052595018232227697133375066890778 \end{aligned}$$

tem 2744 monômios, todos positivos. Logo,  $P(x, y, z)$  não tem zeros em

$$B_{62} = (1/2, 279/500] \times (1, 127/100] \times (1/2, 4/5].$$

Verifiquemos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{63} = (558/1000, 8/10] \times (1, 127/100] \times (1/2, 4/5],$$

que é o complemento de  $B_{62}$  com relação à  $B_{61}$ . Como o polinômio

$$\begin{aligned} F(279/500, 4/5, 1, 127/100, 73/100, 4/5) = \\ = -29595245319x^4y^4z^4 - \dots - 59147849375 \end{aligned}$$

tem 125 monômios, todos negativos, temos que  $F(x, y, z)$  não tem zeros em

$$B_{64} = (279/500, 4/5] \times (1, 127/100] \times (73/100, 4/5].$$

Verifiquemos a inexistência de solução de (1) em

$$B_{65} = (279/500, 4/5] \times (1, 127/100] \times (1/2, 73/100],$$

que é o complemento de  $B_{64}$  com relação à  $B_{63}$ . O polinômio

$$\begin{aligned} P(279/500, 67/100, 1, 127/100, 1/2, 73/100) = \\ = 929453672247484711054710669616605060000z^{13}x^{13}y^{13} + \\ + \dots + 10600760260346472202445805833745117187500 \end{aligned}$$

tem 2744 monômios, todos positivos. Por conseguinte,  $P(x, y, z)$  não se anula em

$$B_{66} = (279/500, 67/100] \times (1, 127/100] \times (1/2, 73/100].$$

Mostremos a inexistência de soluções de (1) em

$$B_{67} = (67/100, 8/10] \times (1, 127/100] \times (1/2, 73/100],$$

que é o complemento de  $B_{66}$  com relação à  $B_{65}$ . O polinômio

$$\begin{aligned} F(67/100, 4/5, 1, 1169/1000, 1/2, 73/100) = \\ = -246013790000x^4z^4y^4 - \dots - 922285020179 \end{aligned}$$

tem 125 monômios, todos negativos. E assim,  $F(x, y, z)$  não se anula em

$$B_{68} = (67/100, 8/10] \times (1, 1169/1000] \times (1/2, 73/100].$$

Observamos que o polinômio

$$\begin{aligned} P(67/100, 4/5, 1169/1000, 127/100, 1/2, 73/100) = \\ = 9650480152003918049192590914207225001080483x^{13}y^{13}z^{13} + \\ + \dots + 11387116884174208097354552340887800000000000 \end{aligned}$$

tem 2744 monômios, todos positivos. Logo,  $P(x, y, z)$  não se anula em

$$B_{69} = (67/100, 4/5] \times (1169/1000, 127/100] \times (1/2, 73/100].$$

Como o sistema (1) não tem solução em  $B_{68}$  ou  $B_{69}$ , temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{67} = (67/100, 8/10) \times (1, 127/100] \times (1/2, 73/100).$$

Portanto, mostramos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{52} = (1/2, 1) \times (1, 132/100] \times (1/2, 1)$$

(ver página 51).

Com isso, mostramos que o sistema (1) não tem solução em

$$B = (0, 1) \times (1, 2) \times (0, 1)$$

(ver página 42).

Logo, mostramos que as configurações centrais convexas são não-degeneradas.  $\square$

O teorema acima mostra a inexistência de configurações centrais convexas degeneradas. Com isso, temos uma demonstração analítica de um dos principais resultados numéricos de Pedersen. Um outro resultado numérico importante de Pedersen é a inexistência de configurações centrais não-convexas exteriores degeneradas. A seguir, daremos uma demonstração analítica deste fato.

**Teorema 19.** *As configurações centrais não-convexas exteriores são não-degeneradas.*

**Demonstração.** A técnica de demonstração é a mesma. Mostraremos que no bloco  $B = (0, 1) \times (1, 2) \times (1, 2)$  o sistema (1) não tem solução. Observemos que a região no plano das configurações determinada pelo bloco  $B$  contém a região não-convexa  $\Pi$  (ver página 19). Como antes, se temos o resultado para esta região, por rotação de  $\frac{2\pi}{3}$  radianos, estendemos o resultado para as demais regiões não-convexas no exterior do triângulo. A idéia é a mesma do Teorema 18, página 42, qual seja: subdividir o bloco  $B$  em sub-blocos e mostrar que em cada sub-bloco da subdivisão,  $P(x, y, z)$  não se anula ou  $F(x, y, z)$  não se anula. Observando que o polinômio

$$P(0, 1, 8/5, 2, 1, 2) = 669961124352z^{13}x^{13}y^{13} + \dots + 103359375000000$$

tem 2744 monômios, todos positivos, temos que  $P(x, y, z)$  não tem zeros em

$$B_1 = (0, 1) \times (8/5, 2) \times (1, 2).$$

Investiguemos a inexistência de solução de (1) em

$$B_2 = (0, 1) \times (1, 16/10] \times (1, 2),$$

que é o complemento de  $B_1$  com relação à  $B$ . Como  $P(x, y, z)$  é simétrico, e por  $B_1$ , temos que  $P(x, y, z)$  não se anula em

$$(0, 1) \times (1, 2) \times (16/10, 2).$$

Como

$$(0, 1) \times (1, 16/10] \times (16/10, 2) \subset (0, 1) \times (1, 2) \times (16/10, 2),$$

temos que  $P(x, y, z)$  não se anula em

$$(0, 1) \times (1, 16/10] \times (16/10, 2).$$

Agora, mostremos que não existem soluções de (1) em

$$B_3 = (0, 1) \times (1, 16/10] \times (1, 16/10].$$

Como

$$F(4/5, 1, 1, 8/5, 1, 8/5) = -944x^4y^4z^4 - \dots - 1679$$

tem 125 monômios, todos negativos, temos que  $F(x, y, z)$  não tem zeros em

$$B_4 = (4/5, 1) \times (1, 8/5] \times (1, 8/5].$$

Verifiquemos que não existem soluções do sistema (1) em

$$B_5 = (0, 8/10] \times (1, 8/5] \times (1, 8/5],$$

que é o complemento de  $B_4$  com relação à  $B_3$ . Como o polinômio

$$P(0, 4/5, 3/2, 8/5, 1, 8/5) = 55446624755859375z^{13}x^{13}y^{13} + \\ + \dots + 265107723477549056$$

tem 2744 monômios, todos positivos, temos que  $P(x, y, z)$  não tem zeros em

$$B_6 = (0, 4/5] \times (3/2, 8/5] \times (1, 8/5].$$

Mostremos a inexistência de soluções do sistema (1) em

$$B_7 = (0, 4/5] \times (1, 3/2] \times (1, 8/5],$$

que é o complemento de  $B_6$  com relação à  $B_5$ . Pela simetria do polinômio  $P(x, y, z)$ , e por  $B_6$ , temos que  $P(x, y, z)$  não tem zeros em

$$(0, 4/5] \times (1, 8/5] \times (3/2, 8/5].$$

Como

$$(0, 8/10] \times (1, 3/2] \times (3/2, 8/5] \subset (0, 4/5] \times (1, 8/5] \times (3/2, 8/5],$$

temos que  $P(x, y, z)$  não tem zeros em

$$B_8 = (0, 8/10] \times (1, 3/2] \times (3/2, 8/5].$$

Investiguemos a inexistência de soluções em

$$B_9 = (0, 8/10] \times (1, 3/2] \times (1, 3/2],$$

que é o complemento de  $B_8$  com relação à  $B_7$ . O polinômio

$$F(16/25, 4/5, 1, 3/2, 1, 3/2) = -6631424x^4y^4z^4 - \dots - 9674375$$

tem 125 monômios, todos positivos. Portanto, concluímos que o polinômio  $F(x, y, z)$  não se anula em

$$B_{10} = (16/25, 4/5] \times (1, 3/2] \times (1, 3/2].$$

Vejamos a inexistência de soluções de (1) em

$$B_{11} = (0, 16/25] \times (1, 3/2] \times (1, 3/2],$$

que é o complemento de  $B_{10}$  com relação à  $B_9$ . Como o polinômio

$$P(0, 16/25, 7/5, 3/2, 1, 3/2) = 5847651532800000000000000z^{13}x^{13}y^{13} + \dots + 37511773018232205519123030$$

tem 2744 monômios, todos positivos, temos que  $P(x, y, z)$  não se anula em

$$B_{12} = (0, 16/25] \times (7/5, 3/2] \times (1, 3/2].$$

Verifiquemos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{13} = (0, 16/25] \times (1, 7/5] \times (1, 3/2],$$

que é o complemento de  $B_{12}$  com relação à  $B_{11}$ . Como  $P(x, y, z)$  é um polinômio simétrico e

$$(0, 16/25] \times (1, 7/5] \times (7/5, 3/2] \subset (0, 16/25] \times (0, 3/2] \times (7/5, 3/2],$$

temos que  $P(x, y, z)$  não tem zeros em

$$B_{14} = (0, 16/25] \times (1, 7/5] \times (7/5, 3/2].$$

Mostremos a inexistência de soluções de (1) em

$$B_{15} = (0, 16/25] \times (1, 7/5] \times (1, 7/5],$$

que é o complemento de  $B_{14}$  com relação à  $B_{13}$ . Como o polinômio

$$F(1/2, 16/25, 1, 7/5, 1, 7/5) = -4296875x^4y^4z^4 - \dots - 5786624$$

tem 125 monômios, todos negativos, temos que o polinômio  $F(x, y, z)$  não se anula em

$$B_{16} = (1/2, 16/25] \times (1, 7/5] \times (1, 7/5].$$

Precisaremos verificar que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{17} = (0, 1/2] \times (1, 7/5] \times (1, 7/5],$$

que o complemento de  $B_{16}$  com relação à  $B_{15}$ . O polinômio

$$\begin{aligned} P(0, 1/2, 13/10, 7/5, 1, 7/5) &= 24521921249553000z^{13}x^{13}y^{13}+ \\ &+ \dots + 211062115979640072 \end{aligned}$$

tem 2744 monômios, todos positivos. Logo,  $P(x, y, z)$  não se anula em

$$B_{18} = (0, 1/2] \times (13/10, 7/5] \times (1, 7/5].$$

Novamente, pela simetria de  $P(x, y, z)$  e pelo fato de que

$$(0, 1/2] \times (1, 13/10] \times (13/10, 7/5] \subset (0, 1/2] \times (1, 7/5] \times (13/10, 7/5],$$

segue-se que o polinômio  $P(x, y, z)$  não se anula em

$$B_{19} = (0, 1/2] \times (1, 13/10] \times (13/10, 7/5].$$

Investiguemos a inexistência de solução do sistema (1) em

$$B_{20} = (0, 1/2] \times (1, 13/10] \times (1, 13/10],$$

que é o complemento de  $B_{19}$  com relação à  $B_{18}$ . Como o polinômio

$$F(37/100, 1/2, 1, 13/10, 1, 13/10) = -39195839x^4y^4z^4 - \dots - 55640000$$

tem 125 monômios, todos positivos, temos que o polinômio  $F(x, y, z)$  não tem solução em

$$B_{21} = (37/100, 1/2] \times (1, 13/10] \times (1, 13/10].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{22} = (0, 37/100] \times (1, 13/10] \times (1, 13/10],$$

que é o complemento de  $B_{21}$  com relação à  $B_{20}$ . Observando que o polinômio

$$P(0, 37/100, 6/5, 13/10, 1, 13/10) = 30719231262720000000000000z^{13}x^{13}y^{13} +$$

$$+... + 4118693407679052929983074588$$

tem 2744 monômios, todos positivos, chegamos a conclusão de que  $P(x, y, z)$  não se anula em

$$B_{23} = (0, 37/100] \times (6/5, 13/10] \times (1, 13/10].$$

Verifiquemos que em

$$B_{24} = (0, 37/100] \times (1, 6/5] \times (1, 13/10]$$

o sistema (1) não tem solução. Observemos que  $B_{24}$  é o complemento de  $B_{23}$  com relação à  $B_{22}$ . Pela simetria do polinômio  $P(x, y, z)$  e pelo fato de que

$$(0, 37/100] \times (1, 6/5] \times (6/5, 13/10] \subset (0, 37/100] \times (1, 13/10] \times (6/5, 13/10],$$

podemos concluir que  $P(x, y, z)$  não se anula em

$$B_{25} = (0, 37/100] \times (1, 6/5] \times (6/5, 13/10].$$

Verifiquemos a inexistência de soluções de (1) em

$$B_{26} = (0, 37/100] \times (1, 6/5] \times (1, 6/5],$$

que é o complemento de  $B_{25}$  com relação à  $B_{24}$ . Sabendo que o polinômio

$$F(6/25, 37/100, 1, 6/5, 1, 6/5) = -16948224x^4y^4z^4 - \dots - 31883039$$

tem 125 monômios, todos negativos, concluímos que  $F(x, y, z)$  não se anula em

$$B_{27} = (6/25, 37/100] \times (1, 6/5] \times (1, 6/5].$$

Agora, mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{28} = (0, 6/25] \times (1, 6/5] \times (1, 6/5],$$

que é o complemento de  $B_{27}$  com relação à  $B_{26}$ . O polinômio

$$P(0, 6/25, 28/25, 6/5, 1, 6/5) = 2534756445282978000000z^{13}x^{13}y^{13}$$

$$+.. + 44097270722849127712500$$

tem 2744 monômios, todos positivos. Sendo assim, o polinômio  $P(x, y, z)$  não tem zeros em

$$B_{29} = (0, 6/25] \times (28/25, 6/5] \times (1, 6/5].$$

Verifiquemos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{30} = (0, 6/25] \times (1, 28/25] \times (1, 6/5],$$

que é o complemento de  $B_{29}$  com relação à  $B_{28}$ . Pela simetria do polinômio  $P(x, y, z)$  e pelo fato de que

$$(0, 6/25] \times (1, 28/25] \times (28/25, 6/5] \subset (0, 6/25] \times (1, 6/5] \times (28/25, 6/5],$$

temos que  $P(x, y, z)$  não se anula em

$$B_{31} = (0, 6/25] \times (1, 28/25] \times (28/25, 6/5].$$

Investiguemos a não existência de soluções do sistema (1) em

$$B_{32} = (0, 6/25] \times (1, 28/25] \times (1, 28/25],$$

que é o complemento de  $B_{31}$  com relação à  $B_{30}$ . Como o polinômio

$$F(71/500, 6/25, 1, 28/25, 1, 28/25) = -3755338319x^4y^4z^4 - \dots - 8379360000$$

tem 125 monômios, todos negativos, temos que  $F(x, y, z)$  não se anula em

$$B_{33} = (71/500, 6/25] \times (1, 28/25] \times (1, 28/25].$$

Verifiquemos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{34} = (0, 71/500] \times (1, 28/25] \times (1, 28/25],$$

que é o complemento de  $B_{33}$  com relação à  $B_{32}$ . Como o polinômio

$$\begin{aligned} P(0, 71/500, 53/50, 28/25, 1, 28/25) = \\ = 193157854457122855912500000000000000z^{13}x^{13}y^{13} + \\ + \dots + 5626759803537329082295261786184081742 \end{aligned}$$

tem 2744 monômios, todos positivos, temos que  $P(x, y, z)$  não tem zeros em

$$B_{35} = (0, 71/500] \times (53/50, 28/25] \times (1, 28/25].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{36} = (0, 71/500] \times (1, 53/50] \times (1, 28/25],$$



que é o complemento de  $B_{35}$  com relação à  $B_{34}$ . Pela simetria de  $P(x, y, z)$  e pelo fato de que

$$(0, 71/500] \times (1, 53/50] \times (53/50, 28/25] \subset (0, 71/500] \times (1, 28/25] \times (53/50, 28/25],$$

temos que  $P(x, y, z)$  não se anula em

$$B_{37} = (0, 71/500] \times (1, 53/50] \times (53/50, 28/25].$$

Vejam os que não existem soluções de (1) em

$$B_{38} = (0, 71/500] \times (1, 53/50] \times (1, 53/50],$$

que é o complemento de  $B_{37}$  com relação à  $B_{36}$ . O polinômio

$$F(7/100, 71/500, 1, 53/50, 1, 53/50) = -917249375x^4y^4z^4 - \dots - 3112062119$$

tem 125 monômios, todos negativos. E assim,  $F(x, y, z)$  não se anula em

$$B_{39} = (7/100, 71/500] \times (1, 53/50] \times (1, 53/50].$$

Mostremos a não existência de soluções do sistema (1) em

$$B_{40} = (0, 7/100] \times (1, 53/50] \times (1, 53/50],$$

que é o complemento de  $B_{39}$  com relação à  $B_{38}$ . Como o polinômio

$$\begin{aligned} P(0, 7/100, 51/50, 53/50, 1, 53/50) = \\ = 39896369124017446656000000z^{13}x^{13}y^{13} + \\ + \dots + 4698505833632991438959552652 \end{aligned}$$

tem 2744 monômios, todos positivos, concluímos que  $P(x, y, z)$  não se anula em

$$B_{41} = (0, 7/100] \times (51/50, 53/50] \times (1, 53/50].$$

Veriquemos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{42} = (0, 7/100] \times (1, 51/50] \times (1, 53/50],$$

que é o complemento de  $B_{41}$  com relação à  $B_{40}$ . Pela simetria de  $P(x, y, z)$  e pelo fato de que

$$(0, 7/100] \times (1, 51/50] \times (51/50, 53/50] \subset (0, 7/100] \times (1, 53/50] \times (51/50, 53/50],$$

chegamos a conclusão de que  $P(x, y, z)$  não se anula em

$$B_{43} = (0, 7/100] \times (1, 51/50] \times (51/50, 53/50].$$

Verifiquemos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{44} = (0, 7/100] \times (1, 51/50] \times (1, 51/50],$$

que é o complemento de  $B_{43}$  com relação à  $B_{42}$ . Como o polinômio

$$F(3/125, 7/100, 1, 51/50, 1, 51/50) = -107979264x^4y^4z^4 - \dots - 839984375$$

tem 125 monômios, todos negativos, temos que  $F(x, y, z)$  não se anula em

$$B_{45} = (3/125, 7/100] \times (1, 51/50] \times (1, 51/50].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{46} = (0, 3/125] \times (1, 51/50] \times (1, 51/50],$$

que é o complemento de  $B_{45}$  com relação à  $B_{44}$ . Observando que o polinômio

$$\begin{aligned} P(0, 3/125, 201/200, 51/50, 1, 51/50) = \\ = 28859998841367641511994171142578125z^{13}x^{13}y^{13} + \\ + \dots + 8473780348143346519309913939452624896 \end{aligned}$$

tem 2744 monômios, todos positivos, chegamos a conclusão de que  $P(x, y, z)$  não se anula em

$$B_{47} = (0, 3/125] \times (201/200, 51/50] \times (1, 51/50].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{48} = (0, 3/125] \times (1, 201/200] \times (1, 51/50],$$

que é o complemento de  $B_{47}$  com relação à  $B_{46}$ . Pela simetria de  $P(x, y, z)$  e pelo fato de que

$$(0, 3/125] \times (1, 201/200] \times (201/200, 51/50] \subset (0, 3/125] \times (1, 51/50] \times (201/200, 51/50],$$

concluimos que  $P(x, y, z)$  não se anula em

$$B_{49} = (0, 3/125] \times (1, 201/200] \times (201/200, 51/50].$$

Verifiquemos a inexistência de soluções do sistema (1) em

$$B_{50} = (0, 3/125] \times (1, 201/200] \times (1, 201/200],$$

que é o complemento de  $B_{49}$  com relação à  $B_{48}$ . O polinômio

$$F(3/500, 3/125, 1, 201/200, 1, 201/200) = -107998704x^4y^4z^4 - \dots - 1638716399$$

tem 125 monômios, todos negativos. Desta forma, segue-se que  $F(x, y, z)$  não se anula em

$$B_{51} = (3/500, 3/125] \times (1, 201/200] \times (1, 201/200].$$

Agora, mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{52} = (0, 3/500] \times (1, 201/200] \times (1, 201/200],$$

que é o complemento de  $B_{51}$  com relação à  $B_{50}$ . Observando que o polinômio

$$\begin{aligned} P(0, 3/500, 20019/20000, 201/200, 1, 201/200) = \\ = 12069463661781563962272127486644472714660292647500000y^{13}x^{13}z^{13} + \\ + \dots + 9604745940309185402794557481433121895680000000000000000 \end{aligned}$$

tem 2744 monômios, todos positivos, chegamos a conclusão que  $P(x, y, z)$  não tem zeros em

$$B_{53} = (0, 3/500] \times (20019/20000, 201/200] \times (1, 201/200].$$

Vejamos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{54} = (0, 3/500] \times (1, 20019/20000] \times (1, 201/200],$$

que é o complemento de  $B_{53}$  com relação à  $B_{52}$ . Pela simetria de  $P(x, y, z)$  e pelo fato de que

$$(0, 3/500] \times (1, 20019/20000] \times (20019/20000, 201/200]$$

está contido em

$$(0, 3/500] \times (1, 201/200] \times (20019/20000, 201/200],$$

concluimos que  $P(x, y, z)$  não tem zeros em

$$B_{55} = (0, 3/500] \times (1, 20019/20000] \times (20019/20000, 201/200].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{56} = (0, 3/500] \times (1, 20019/20000] \times (1, 20019/20000],$$

que é o complemento de  $B_{55}$  com relação à  $B_{54}$ . Como o polinômio

$$F(1/500, 3/500, 1, 20019/20000, 1, 20019/20000) = -1919997440000x^4y^4z^4 - \dots - 16723542186479$$

tem 125 monômios, todos negativos, temos que  $F(x, y, z)$  não se anula em

$$B_{57} = (1/500, 3/500] \times (1, 20019/20000] \times (1, 20019/20000].$$

Como

$$(0, 1/500] \times (1, 20019/20000] \times (1, 20019/20000]$$

está contido em

$$(0, 3/1000) \times (1, 1001/1000) \times (1, 1001/1000)$$

e o sistema (1) não tem solução em

$$(0, 3/1000) \times (1, 1001/1000) \times (1, 1001/1000),$$

temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{58} = (0, 1/500] \times (1, 20019/20000] \times (1, 20019/20000].$$

Como o sistema (1) não tem solução em  $B_{57}$  ou  $B_{58}$ , temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{56} = (0, 3/500] \times (1, 20019/20000] \times (1, 20019/20000].$$

Com isso, concluímos que o sistema (1) não tem solução em

$$B = (0, 1) \times (1, 2) \times (1, 2)$$

(ver página 55).

Como no plano das configurações  $B$  é uma região que contém a região não-convexa II (ver página 19), temos que não existem configurações centrais degeneradas na região II. E assim, por rotação de  $\frac{2\pi}{3}$  radianos, mostramos que todas as configurações centrais não-convexas exteriores são não-degeneradas.  $\square$

Olhando para as regiões admissíveis, na página 19, e para os resultados anteriormente obtidos relativos às soluções do sistema (1) e para os dois teoremas acima, concluímos que as soluções do sistema (1) devem estar no interior do triângulo equilátero, na região VII.

# Capítulo 4

## A Curva de Degenerescência

Neste quarto capítulo, demonstraremos que a curva de degenerescência é analítica, fechada e simples. Já sabemos que esta curva está contida no interior do triângulo, na região admissível VII. A analiticidade da curva de degenerescência é algo absolutamente novo, nem Pedersen, nem Simó e nem Gannaway mencionam esta propriedade da curva. A estratégia para a demonstração destas propriedades da curva é a seguinte: utilizamos, fortemente, as funções simétricas, já que os polinômios envolvidos são simétricos. E assim, estas são as variáveis naturais para trabalharmos. Desta forma, chegamos a uma única equação em duas variáveis. Sendo assim, usando a Teoria das Equações, mais precisamente, a Equação Cúbica, a Regra de Sinais de Descartes e o Teorema Fundamental sobre Polinômios Simétricos (ver Capítulo 1, Seção 2.4, página 23), obtemos a parte da curva, referente àquela equação, que no plano das configurações gera, por reflexão em torno de cada mediatriz, isto é, em cada setor de  $\frac{\pi}{3}$  radianos, a curva de degenerescência. Para tanto, de modo especial, utilizamos a função discriminante da equação cúbica para estudarmos, no  $(a, b)$ -plano, a natureza das raízes, e assim, determinamos com precisão a parte da curva de interesse. E então, concluímos que a curva de degenerescência é fechada, simples e analítica. Aqui, também, utilizamos o software MAPLE para fazer os cálculos necessários.

### 4.1 As Soluções Degeneradas no Interior do Triângulo

Já sabemos que não existem soluções do sistema (1), qual seja:

$$\begin{cases} P(x, y, z) = 0 \\ F(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

onde

$$\begin{aligned} P(x, y, z) = & 12x^5y^7z^4 + 12z^5y^7x^4 + 12y^5x^4z^7 + 12y^4x^7z^5 + 12y^5x^7z^4 + 12z^7y^4x^5 - \\ & -12x^5y^2z^9 - 12y^5x^9z^2 - 12y^9x^2z^5 - 12z^9y^5x^2 - 12y^9x^5z^2 - 12y^2x^9z^5 - 8x^6z^5y^5 - \\ & -8y^5z^6x^5 - 8z^5y^6x^5 + 4x^{11}y^5 + 4y^{11}z^5 + 4x^{11}z^5 + 4x^5y^{11} + 4z^{11}x^5 + 4z^{11}y^5 - \dots - x^2 - z^2 - y^2 \end{aligned}$$

é um polinômio simétrico com 194 monômios e

$$F(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - x^2y^2 - x^2z^2 - y^2z^2 - x^2 - y^2 - z^2 + 1,$$

nas regiões admissíveis convexas, I, III e V, e não-convexas exteriores, II, IV e VI. Isto significa que as configurações centrais convexas e não-convexas exteriores são não-degeneradas. Passemos a estudar as soluções do sistema (1) no interior do triângulo, região admissível VII, mais precisamente, na região delimitada pelas circunferências

$$x = \frac{3}{1000}, \quad x = \frac{999}{1000}, \quad y = \frac{3}{1000}, \quad y = \frac{999}{1000}, \quad z = \frac{3}{1000}, \quad z = \frac{999}{1000}.$$

Já mostramos que a origem do  $(u, v)$ -plano, o plano das configurações, não é solução do sistema (1), que os lados do triângulo não contêm soluções do sistema (1) e que não existem soluções do sistema (1) numa determinada vizinhança de  $(0, 1, 1)$  no  $(x, y, z)$ -espaço, que corresponde a uma vizinhança perfurada do vértice  $(0, 1, 1)$  no plano das configurações, qual seja:

$$(0, 3/1000) \times (999/1000, 1001/1000) \times (999/1000, 1001/1000).$$

Agora, mostremos que se existem soluções do sistema (1) no interior do triângulo, então, estas soluções estão em

$$(37/100, 73/100] \times (37/100, 73/100] \times (37/100, 73/100].$$

A idéia para mostrarmos isto é a de sempre. Olhando para um determinado bloco, construímos as transformações de Möbius adequadas, e assim, observando que um dos polinômios que compõe o sistema (1) não se anula neste bloco, concluímos que o sistema (1) não tem solução no bloco. Passemos a demonstrar a afirmação feita. Para tanto, dividiremos a demonstração em alguns lemas.

**Lema 20.** *O sistema (1) não tem solução em*

$$B_1 = (0, 1) \times (8/10, 1) \times (8/10, 1).$$

**Demonstração.** O polinômio

$$\begin{aligned} P(0, 37/100, 4/5, 9/10, 4/5, 1) &= 12211390985011200000000000y^{13}x^{13}z^{13} + \\ &+ \dots + 3666037948581103662357207 \end{aligned}$$

tem 2744 monômios, todos positivos. Logo,  $P(x, y, z)$  não se anula em

$$(0, 37/100] \times (4/5, 9/10] \times (4/5, 1).$$

Sendo assim, temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_1^0 = (0, 37/100] \times (4/5, 9/10] \times (4/5, 1).$$

Mostremos a inexistência de soluções do sistema (1) em

$$B_2^0 = (0, 37/100] \times (9/10, 1) \times (8/10, 1),$$

que é o complemento de  $B_1^0$  com relação ao bloco

$$B_0^0 = (0, 37/100] \times (4/5, 1) \times (4/5, 1).$$

Como  $P(x, y, z)$  é simétrico e

$$(0, 37/100] \times (9/10, 1) \times (8/10, 9/10] \subset (0, 37/100] \times (8/10, 1) \times (8/10, 9/10],$$

temos, pela observação 17, página 42, que  $P(x, y, z)$  não se anula em

$$(0, 37/100] \times (9/10, 1) \times (8/10, 9/10].$$

Logo, o sistema (1) não tem solução em

$$B_3^0 = (0, 37/100] \times (9/10, 1) \times (8/10, 9/10].$$

Mostremos a inexistência de soluções de (1) em

$$B_4^0 = (0, 37/100] \times (9/10, 1) \times (9/10, 1),$$

que é o complemento de  $B_3^0$  com relação à  $B_2^0$ . O polinômio

$$F(3/25, 37/100, 9/10, 1, 9/10, 1) = -142064x^4z^4y^4 - \dots - 39195839$$

tem 125 monômios, todos negativos. Logo,  $F(x, y, z)$  não tem zeros em

$$(3/25, 37/100] \times (9/10, 1) \times (9/10, 1).$$

E assim, o sistema (1) não tem solução em

$$B_5^0 = (3/25, 37/100] \times (9/10, 1) \times (9/10, 1).$$

Mostremos a inexistência de soluções do sistema (1) em

$$B_6^0 = (0, 3/25] \times (9/10, 1) \times (9/10, 1),$$

que é o complemento de  $B_5^0$  com relação à  $B_4^0$ . O polinômio

$$\begin{aligned} P(0, 3/25, 9/10, 49/50, 9/10, 1) &= 3944455905209655761718750y^{13}x^{13}z^{13} + \\ &+ \dots + 32724916824418955320968 \end{aligned}$$

tem 2744 monômios, todos positivos. Desta forma, o sistema (1) não tem solução em

$$B_7^0 = (0, 3/25] \times (9/10, 49/50] \times (9/10, 1).$$

Como  $P(x, y, z)$  é simétrico e

$$(0, 12/100] \times (98/100, 1) \times (9/10, 98/100] \subset (0, 12/100] \times (9/10, 1) \times (9/10, 98/100],$$

temos, pela observação 17, página 42, que o sistema (1) não tem solução em

$$B_8^0 = (0, 12/100] \times (98/100, 1) \times (9/10, 98/100].$$

Mostremos a inexistência de soluções do sistema (1) em

$$B_9^0 = (0, 12/100] \times (98/100, 1) \times (98/100, 1),$$

que é o complemento de  $B_8^0$  com relação ao bloco

$$(0, 12/100] \times (98/100, 1) \times (9/10, 1).$$

O polinômio

$$F(3/125, 3/25, 49/50, 1, 49/50, 1) = -444879x^4z^4y^4 - 167940000$$

tem 125 monômios, todos negativos. Logo, o sistema (1) não tem solução em

$$B_{10}^0 = (3/125, 3/25] \times (49/50, 1) \times (49/50, 1).$$



Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{11}^0 = (0, 3/125] \times (49/50, 1) \times (49/50, 1),$$

que é o complemento de  $B_{10}^0$  com relação à  $B_9^0$ . Como o polinômio

$$\begin{aligned} P(0, 3/125, 49/50, 199/200, 49/50, 1) = \\ = 5930354608233998424433459200000000000y^{13}x^{13}z^{13} + \\ + \dots + 32526203134543857189379804910781123 \end{aligned}$$

tem 2744 monômios, todos positivos, temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{12}^0 = (0, 3/125] \times (49/50, 199/200] \times (49/50, 1).$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{13}^0 = (0, 3/125] \times (199/200, 1) \times (49/50, 1),$$

que é o complemento de  $B_{12}^0$  com relação à  $B_{11}^0$ . Pela simetria de  $P(x, y, z)$  e pelo fato de que

$$(0, 24/1000] \times (995/1000, 1) \times (98/100, 995/1000]$$

está contido em

$$(0, 24/1000] \times (98/100, 1) \times (98/100, 995/1000],$$

temos, pela observação 17, página 42, que o sistema (1) não se anula em

$$B_{14}^0 = (0, 24/1000] \times (995/1000, 1) \times (98/100, 995/1000].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{15}^0 = (0, 24/1000] \times (995/1000, 1) \times (995/1000, 1),$$

que é o complemento de  $B_{14}^0$  com relação à  $B_{13}^0$ . O polinômio

$$F(3/500, 3/125, 199/200, 1, 199/200, 1) = -7779879x^4z^4y^4 - \dots - 1727668224$$

tem 125 monômios, todos negativos. Portanto, o sistema (1) não tem solução em

$$B_{16}^0 = (3/500, 3/125] \times (199/200, 1) \times (199/200, 1).$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{17}^0 = (0, 3/500] \times (199/200, 1) \times (199/200, 1),$$

que é o complemento de  $B_{16}^0$  com relação à  $B_{15}^0$ . Como o polinômio

$$\begin{aligned} P(0, 3/500, 199/200, 999/1000, 199/200, 1) = \\ = 42888474254205510448398662353820800781250y^{13}z^{13}x^{13} + \\ + \dots + 78058315602358785133105990718692011168 \end{aligned}$$

tem 2744 monômios, todos positivos, temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{18}^0 = (0, 3/500] \times (199/200, 999/1000] \times (199/200, 1).$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{19}^0 = (0, 3/500] \times (999/1000, 1) \times (199/200, 1),$$

que é o complemento de  $B_{18}^0$  com relação à  $B_{17}^0$ . Pela simetria de  $P(x, y, z)$  e pelo fato de que

$$(0, 6/1000] \times (999/1000, 1) \times (995/1000, 999/1000]$$

está contido em

$$(0, 6/1000] \times (995/1000, 1) \times (995/1000, 999/1000],$$

temos, pela observação 17, página 42, que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{20}^0 = (0, 6/1000] \times (999/1000, 1) \times (995/1000, 999/1000].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{21}^0 = (0, 6/1000] \times (999/1000, 1) \times (999/1000, 1),$$

que é o complemento de  $B_{20}^0$  com relação à  $B_{19}^0$ . O polinômio

$$F(1/500, 3/500, 999/1000, 1, 999/1000, 1) = -7987991x^4z^4y^4 - \dots - 107998704$$

tem 125 monômios, todos negativos. Sendo assim, o sistema (1) não tem solução em

$$B_{22}^0 = (1/500, 3/500] \times (999/1000, 1) \times (999/1000, 1).$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{23}^0 = (0, 1/500] \times (999/1000, 1) \times (999/1000, 1),$$

que é o complemento de  $B_{22}^0$  com relação à  $B_{21}^0$ . Como

$$(0, 2/1000] \times (999/1000, 1) \times (999/1000, 1)$$

está contido em

$$(0, 3/1000) \times (999/1000, 1) \times (999/1000, 1),$$

e nós sabemos que neste bloco não existem soluções do sistema (1), temos que o sistema (1) não tem solução em

$$(0, 2/1000] \times (999/1000, 1) \times (999/1000, 1).$$

Portanto, juntando todas estas informações, mostramos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_0^0 = (0, 37/100] \times (8/10, 1) \times (8/10, 1).$$

Finalmente, mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{24}^0 = (37/100, 1) \times (8/10, 1) \times (8/10, 1),$$

que é o complemento de  $B_0^0$  com relação à  $B_1$ . Ora, como o polinômio

$$F(37/100, 1, 4/5, 1, 4/5, 1) = -16379039x^4z^4y^4 - \dots - 200000000$$

tem 125 monômios, todos negativos, concluímos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{24}^0 = (37/100, 1) \times (8/10, 1) \times (8/10, 1).$$

Portanto, o sistema (1) não tem solução em

$$B_1 = (0, 1) \times (8/10, 1) \times (8/10, 1),$$

como queríamos demonstrar. □

**Lema 21.** *O sistema (1) não tem solução em*

$$B_1^1 = (0, 1) \times (8/10, 1) \times (0, 1).$$

**Demonstração.** Pelo Lema 20, página 66, basta-nos mostrar que o sistema (1) não tem solução em

$$B_2^1 = (0, 1) \times (8/10, 1) \times (0, 8/10],$$

que é o complemento de  $B_1$  com relação à  $B_1^1$ . O polinômio

$$F(0, 1/2, 4/5, 1, 0, 37/100) = 76960000x^4y^4z^4 + \dots + 27321661$$

tem 125 monômios, todos positivos. Logo, o sistema (1) não tem solução em

$$B_3^1 = (0, 1/2] \times (4/5, 1) \times (0, 37/100].$$

Como o polinômio

$$\begin{aligned} P(1/2, 4/5, 4/5, 1, 0, 37/100) &= 58381945341300000000000000y^{13}z^{13}x^{13} \\ &+ \dots + 39805545111478617676791154 \end{aligned}$$

tem 2744 monômios, todos positivos. Logo, o sistema (1) não tem solução em

$$B_4^1 = (1/2, 4/5] \times (4/5, 1) \times (0, 37/100].$$

Segue-se que o sistema não tem solução em

$$B_5^1 = (0, 4/5] \times (4/5, 1) \times (0, 37/100]$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_6^1 = (8/10, 1) \times (8/10, 1) \times (0, 37/100].$$

Pela simetria dos polinômios que compõem o sistema (1), pelo fato de que o sistema (1) não tem solução em

$$B_1 = (0, 1) \times (8/10, 1) \times (8/10, 1),$$

(ver página 66), e pelo fato de que

$$(8/10, 1) \times (8/10, 1) \times (0, 37/100]$$

está contido em

$$(8/10, 1) \times (8/10, 1) \times (0, 1),$$

temos que o sistema (1) não tem solução em  $B_6^1$ . Logo, o sistema (1) não tem solução em

$$B_7^1 = (0, 1) \times (8/10, 1) \times (0, 37/100].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_8^1 = (0, 1) \times (8/10, 1) \times (37/100, 8/10],$$

que é o complemento de  $B_7^1$  com relação à  $B_2^1$ . Como o polinômio

$$F(0, 18/100, 4/5, 1, 37/100, 4/5) = 56382561x^4y^4z^4 + \dots + 4511376$$

tem 125 monômios, todos positivos, temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_9^1 = (0, 18/100] \times (4/5, 1) \times (37/100, 4/5].$$

Sendo assim, precisamos mostrar que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{10}^1 = (18/100, 1) \times (4/5, 1) \times (37/100, 4/5].$$

O polinômio

$$F(67/100, 1, 4/5, 1, 37/100, 4/5) = -3231359x^4y^4z^4 - \dots - 151040000$$

tem 125 monômios, todos negativos. Logo, o sistema (1) não tem solução em

$$B_{11}^1 = (67/100, 1) \times (4/5, 1) \times (37/100, 4/5].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{12}^1 = (18/100, 67/100] \times (4/5, 1) \times (37/100, 4/5],$$

que é o complemento de  $B_{11}^1$  com relação à  $B_{10}^1$ . O polinômio

$$\begin{aligned} P(9/50, 12/25, 4/5, 1, 37/100, 4/5) &= 197777074147831734478273166319y^{13}z^{13}x^{13} \\ &+ \dots + 89159179338687183637708800000 \end{aligned}$$

tem 2744 monômios, todos positivos. Portanto, o sistema (1) não tem solução em

$$B_{13}^1 = (9/50, 12/25] \times (4/5, 1) \times (37/100, 4/5].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{14}^1 = (48/100, 67/100] \times (4/5, 1) \times (37/100, 4/5],$$

que é o complemento de  $B_{13}$  com relação à  $B_{12}^1$ . O polinômio

$$F(12/25, 67/100, 4/5, 1, 14/25, 4/5) = -4338432x^4y^4z^4 - \dots - 85398479$$

tem 125 monômios, todos negativos. Então, o sistema (1) não tem solução em

$$B_{15}^1 = (12/25, 67/100] \times (4/5, 1) \times (14/25, 4/5].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{16}^1 = (48/100, 67/100] \times (8/10, 1) \times (37/100, 56/100],$$

que é o complemento de  $B_{15}^1$  com relação à  $B_{14}^1$ . Como o polinômio

$$\begin{aligned} P(12/25, 67/100, 4/5, 1, 37/100, 14/25) = \\ = 6803947896307995196047510358848y^{13}z^{13}x^{13} + \\ + \dots + 8941031211735488437390345912000 \end{aligned}$$

tem 2744 monômios, todos positivos, temos que o sistema (1) não tem solução em  $B_{16}^1$ . E assim, mostramos que o sistema (1) não tem solução no bloco

$$B_{10}^1 = (18/100, 1) \times (8/10, 1) \times (37/100, 8/10]$$

(ver página 73).

Como o sistema (1) não tem solução em  $B_7^1$  ou  $B_9^1$  ou  $B_{10}^1$  (ver página 73), temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_2^1 = (0, 1) \times (8/10, 1) \times (0, 8/10]$$

(ver página 72).

Desta forma, segue-se que o sistema (1) não tem solução em

$$B_1^1 = (0, 1) \times (8/10, 1) \times (0, 1),$$

como queríamos demonstrar. □

Segue-se do Lema 21, página 71, que se existirem soluções do sistema (1), elas estão em

$$(0, 1) \times (0, 8/10] \times (0, 1),$$

que é o complemento de  $B_1^1$  com relação à

$$B = (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1).$$

Observemos que o bloco  $B$  contém a região VII. Pela simetria do sistema (1) e pelo fato de que

$$(8/10, 1) \times (0, 8/10] \times (0, 1) \subset (8/10, 1) \times (0, 1) \times (0, 1),$$

temos, pela observação 19, página 42, e pelo Lema 21, página 71, que o sistema (1) não tem solução em

$$(8/10, 1) \times (0, 8/10] \times (0, 1).$$

Sendo assim, se existirem soluções do sistema (1), elas estão em

$$(0, 8/10] \times (0, 8/10] \times (0, 1).$$

Pela simetria do sistema (1) e pelo fato de que

$$(0, 8/10] \times (0, 8/10] \times (8/10, 1) \subset (0, 1) \times (0, 1) \times (8/10, 1),$$

temos, pela observação 17, página 42, e pelo Lema 21, página 71, que o sistema (1) não tem solução em

$$(0, 8/10] \times (0, 8/10] \times (8/10, 1).$$

Sendo assim, se existirem soluções do sistema (1), elas estão em

$$(0, 8/10] \times (0, 8/10] \times (0, 8/10].$$

O polinômio

$$F(0, 6/25, 0, 4/5, 0, 4/5) = 390625x^4y^4z^4 + \dots + 621$$

tem 125 monômios, todos positivos. Logo, o sistema (1) não tem solução em

$$(0, 24/100] \times (0, 8/10] \times (0, 8/10].$$

Portanto, de forma análoga ao que fizemos acima, se existirem soluções do sistema (1), elas estão em

$$(24/100, 8/10] \times (24/100, 8/10] \times (24/100, 8/10].$$

Poderíamos pensar que este bloco seria o suficiente para as nossas necessidades, mas não o é, como mostraremos em momento oportuno.

**Lema 22.** *O sistema (1) não tem solução em*

$$B_1^2 = (24/100, 8/10] \times (24/100, 37/100] \times (24/100, 8/10].$$

**Demonstração.** O polinômio

$$F(6/25, 16/25, 6/25, 37/100, 6/25, 4/5) = 82720000x^4y^4z^4 + \dots + 377953$$

tem 125 monômios, todos positivos. Sendo assim, o sistema (1) não tem solução em

$$B_2^2 = (6/25, 16/25] \times (6/25, 37/100] \times (6/25, 4/5].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_3^2 = (64/100, 8/10] \times (24/100, 37/100] \times (24/100, 8/10],$$

que é o complemento de  $B_2^2$  com relação à  $B_1^2$ . Pela simetria de  $F(x, y, z)$  e pelo fato de que

$$(64/100, 8/10] \times (24/100, 37/100] \times (24/100, 64/100]$$

está contido em

$$(24/100, 8/10] \times (24/100, 37/100] \times (24/100, 64/100],$$

temos, pela observação 17, página 42, que o sistema (1) não tem solução em

$$B_4^2 = (64/100, 8/10] \times (24/100, 37/100] \times (24/100, 64/100].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_5^2 = (64/100, 8/10] \times (24/100, 37/100] \times (64/100, 8/10],$$

que é o complemento de  $B_4^2$  com relação à  $B_3^2$ . O polinômio

$$\begin{aligned} P(18/25, 4/5, 6/25, 37/100, 16/25, 4/5) &= \\ &= 16626296228690719727683633152x^{13}y^{13}z^{13} + \\ &+ \dots + 16256612310494703946259278125 \end{aligned}$$

tem 2744 monômios, todos positivos. Desta forma, o sistema (1) não tem solução em

$$B_6^2 = (18/25, 4/5] \times (6/25, 37/100] \times (16/25, 4/5].$$



Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_7^2 = (64/100, 72/100] \times (24/100, 37/100] \times (64/100, 8/10],$$

que é o complemento de  $B_6^2$  com relação à  $B_5^2$ . Pela simetria de  $P(x, y, z)$  e pelo fato de que

$$(64/100, 72/100] \times (24/100, 37/100] \times (72/100, 8/10]$$

está contido em

$$(64/100, 8/10] \times (24/100, 37/100] \times (72/100, 8/10],$$

temos, pela observação 17, página 42, que o sistema (1) não tem solução em

$$B_8^2 = (64/100, 72/100] \times (24/100, 37/100] \times (72/100, 8/10].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_9^2 = (64/100, 72/100] \times (24/100, 37/100] \times (64/100, 72/100],$$

que é o complemento de  $B_8^2$  com relação à  $B_7^2$ . O polinômio

$$\begin{aligned} F(16/25, 18/25, 6/25, 37/100, 16/25, 689/1000) &= 247104000000x^4y^4z^4 + \\ &+ \dots + 765566541 \end{aligned}$$

tem 125 monômios, todos positivos. Logo, o sistema (1) não tem solução em

$$B_{10}^2 = (16/25, 18/25] \times (6/25, 37/100] \times (16/25, 689/1000].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{11}^2 = (64/100, 72/100] \times (24/100, 37/100] \times (689/1000, 72/100],$$

que é o complemento de  $B_{10}^2$  com relação à  $B_9^2$ . Como o polinômio  $F(x, y, z)$  é simétrico e

$$(64/100, 689/1000] \times (24/100, 37/100] \times (689/1000, 72/100]$$

está contido em

$$(64/100, 689/1000] \times (24/100, 37/100] \times (64/100, 72/100],$$

temos, pela observação 17, página 42, que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{12}^2 = (64/100, 689/1000] \times (24/100, 37/100] \times (689/1000, 72/100].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{13}^2 = (689/1000, 72/100] \times (24/100, 37/100] \times (689/1000, 72/100],$$

que é o complemento de  $B_{12}^2$  com relação à  $B_{11}^2$ . Como o polinômio

$$\begin{aligned} P(711/1000, 18/25, 6/25, 37/100, 689/1000, 18/25) = \\ = 7951067607269462288056514930776905891748385278y^{13}x^{13}z^{13} + \\ + \dots + 34035945371011909260967883040000000000000000000 \end{aligned}$$

tem 2744 monômios, todos positivos, temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{14}^2 = (711/1000, 18/25] \times (6/25, 37/100] \times (689/1000, 18/25].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{15}^2 = (689/1000, 711/1000] \times (24/100, 37/100] \times (689/1000, 72/100],$$

que é o complemento de  $B_{14}^2$  com relação em  $B_{13}^2$ . Como  $P(x, y, z)$  é simétrico e

$$(689/1000, 711/1000] \times (24/100, 37/100] \times (711/1000, 72/100]$$

está contido em

$$(689/1000, 72/100] \times (24/100, 37/100] \times (711/1000, 72/100],$$

temos, pela observação 17, página 42, que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{16}^2 = (689/1000, 711/1000] \times (24/100, 37/100] \times (711/1000, 72/100].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{17}^2 = (689/1000, 711/1000] \times (24/100, 37/100] \times (689/1000, 711/1000],$$

que é o complemento de  $B_{16}^2$  com relação à  $B_{15}^2$ . O polinômio

$$F(689/1000, 697/1000, 6/25, 37/100, 689/1000, 711/1000) =$$

$$= 166947928641x^4y^4z^4 + \dots + 773747433$$

tem 125 monômios, todos positivos. Portanto, o sistema (1) não tem solução em

$$B_{18}^2 = (689/1000, 697/1000] \times (6/25, 37/100] \times (689/1000, 711/1000].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{19}^2 = (697/1000, 711/1000] \times (24/100, 37/100] \times (689/1000, 711/1000],$$

que é o complemento de  $B_{18}^2$  com relação à  $B_{17}^2$ . Como o polinômio  $F(x, y, z)$  é simétrico e

$$(697/1000, 711/1000] \times (24/100, 37/100] \times (689/1000, 697/1000]$$

está contido em

$$(689/1000, 711/1000] \times (24/100, 37/100] \times (689/1000, 697/1000],$$

temos, pela observação 17, página 42, que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{20}^2 = (697/1000, 711/1000] \times (24/100, 37/100] \times (689/1000, 697/1000].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{21}^2 = (697/1000, 711/1000] \times (24/100, 37/100] \times (697/1000, 711/1000],$$

que é o complemento de  $B_{20}^2$  com relação à  $B_{19}^2$ . Como o polinômio

$$\begin{aligned} &P(697/1000, 711/1000, 6/25, 37/100, 353/500, 711/1000) = \\ &= 7738625855692400202409242480178171724837356320y^{13}x^{13}z^{13} + \\ &+ \dots + 1804421792240026379601585913496055136832309322 \end{aligned}$$

tem 2744 monômios, todos positivos, temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{22}^2 = (697/1000, 711/1000] \times (6/25, 37/100] \times (353/500, 711/1000].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{23}^2 = (697/1000, 711/1000] \times (24/100, 37/100] \times (697/1000, 706/1000],$$

que é o complemento de  $B_{22}^2$  com relação à  $B_{21}^2$ . Como  $P(x, y, z)$  é simétrico e

$$(706/1000, 711/1000] \times (24/100, 37/100] \times (697/1000, 706/1000]$$

está contido em

$$(706/1000, 711/1000] \times (24/100, 37/100] \times (697/1000, 711/1000]$$

temos, pela observação 17, página 42, que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{24}^2 = (706/1000, 711/1000] \times (24/100, 37/100] \times (697/1000, 706/1000].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{25}^2 = (697/1000, 706/1000] \times (24/100, 37/100] \times (697/1000, 706/1000],$$

que é o complemento de  $B_{24}^2$  com relação à  $B_{23}^2$ . O polinômio

$$\begin{aligned} F(697/1000, 353/500, 6/25, 37/100, 697/1000, 351/500) = \\ = 154144947681x^4y^4z^4 + \dots + 563827968 \end{aligned}$$

tem 125 monômios, todos positivos. Então, o sistema (1) não tem solução em

$$B_{26}^2 = (697/1000, 353/500] \times (6/25, 37/100] \times (697/1000, 351/500].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{27}^2 = (697/1000, 706/1000] \times (24/100, 37/100] \times (702/1000, 706/1000],$$

que é o complemento de  $B_{26}^2$  com relação à  $B_{25}^2$ . Como  $F(x, y, z)$  é simétrico e

$$(697/1000, 702/1000] \times (24/100, 37/100] \times (702/1000, 706/1000]$$

está contido em

$$(697/1000, 702/1000] \times (24/100, 37/100] \times (697/1000, 706/1000],$$

temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{28}^2 = (697/1000, 702/1000] \times (24/100, 37/100] \times (702/1000, 706/1000].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{29}^2 = (702/1000, 706/1000] \times (24/100, 37/100] \times (702/1000, 706/1000],$$

que é o complemento de  $B_{28}^2$  com relação à  $B_{27}^2$ . O polinômio

$$\begin{aligned} & P(351/500, 353/500, 6/25, 37/100, 351/500, 353/500) = \\ & = 58936491329609565676705585457294638987401y^{13}x^{13}z^{13} + \\ & + \dots + 6508854053160014823115884907161923478846 \end{aligned}$$

tem 2744 monômios, todos positivos. Logo, o sistema (1) não tem solução em

$$B_{29}^2 = (351/500, 353/500] \times (6/25, 37/100] \times (351/500, 353/500].$$

Portanto, juntando todas estas informações, mostramos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_1^2 = (24/100, 8/10] \times (24/100, 37/100] \times (24/100, 8/10].$$

□

Segue-se do Lema 22, página 75, que se existirem soluções do sistema (1), elas estão em

$$(24/100, 8/10] \times (37/100, 8/10] \times (24/100, 8/10],$$

que é o complemento de  $B_1^2$  com relação à

$$(24/100, 8/10] \times (24/100, 8/10] \times (24/100, 8/10].$$

Pela simetria do sistema (1) e pelo fato de que

$$(24/100, 37/100] \times (37/100, 8/10] \times (24/100, 8/10]$$

está contido em

$$(24/100, 37/100] \times (24/100, 8/10] \times (24/100, 8/10],$$

temos, pela observação 17, página 42, e pelo Lema 22, página 75, que não existem soluções do sistema (1) em

$$(24/100, 37/100] \times (37/100, 8/10] \times (24/100, 8/10].$$

Sendo assim, se existirem soluções do sistema (1), elas estão em

$$(37/100, 8/10] \times (37/100, 8/10] \times (24/100, 8/10].$$

Analogamente, podemos mostrar que não existem soluções do sistema (1) em

$$(37/100, 8/10] \times (37/100, 8/10] \times (24/100, 37/100].$$

Portanto, se existirem soluções do sistema (1), elas estão em

$$(37/100, 8/10] \times (37/100, 8/10] \times (37/100, 8/10].$$

Agora, mostraremos que

**Lema 23.** *O sistema (1) não tem solução em*

$$B_1^3 = (73/100, 8/10] \times (37/100, 8/10] \times (37/100, 8/10].$$

**Demonstração.** O polinômio

$$F(73/100, 4/5, 69/100, 4/5, 37/100, 4/5) = -835056x^4y^4z^4 - \dots - 92000000$$

tem 125 monômios, todos negativos. Desta forma, o sistema (1) não tem solução em

$$B_2^3 = (73/100, 4/5] \times (69/100, 4/5] \times (37/100, 4/5].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_3^3 = (73/100, 8/10] \times (37/100, 69/100] \times (37/100, 8/10],$$

que é o complemento de  $B_2^3$  com relação à  $B_1^3$ . Pela simetria de  $F(x, y, z)$  e pelo fato de que

$$(73/100, 8/10] \times (37/100, 69/100] \times (69/100, 8/10]$$

está contido em

$$(73/100, 8/10] \times (37/100, 8/10] \times (69/100, 8/10],$$

temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_4^3 = (73/100, 8/10] \times (37/100, 69/100] \times (69/100, 8/10].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_5^3 = (73/100, 8/10] \times (37/100, 69/100] \times (37/100, 69/100],$$

que é o complemento de  $B_4^3$  com relação à  $B_3^3$ . O polinômio

$$\begin{aligned} P(73/100, 4/5, 37/100, 2/5, 37/100, 69/100) = \\ = 3660028945306258844056280381100z^{13}x^{13}y^{13} + \\ + \dots + 1929567332210668837402033800000 \end{aligned}$$

tem 2744 monômios, todos positivos. Sendo assim, o sistema (1) não tem solução em

$$B_6^3 = (73/100, 4/5] \times (37/100, 2/5] \times (37/100, 69/100].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_7^3 = (73/100, 8/10] \times (4/10, 69/100] \times (37/100, 69/100],$$

que é o complemento de  $B_6^3$  com relação à  $B_5^3$ . Pela simetria de  $P(x, y, z)$  e pelo fato de que

$$(73/100, 8/10] \times (4/10, 69/100] \times (37/100, 4/10]$$

está contido em

$$(73/100, 8/10] \times (37/100, 69/100] \times (37/100, 4/10],$$

temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_8^3 = (73/100, 8/10] \times (4/10, 69/100] \times (37/100, 4/10].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_9^3 = (73/100, 8/10] \times (4/10, 69/100] \times (4/10, 69/100],$$

que é o complemento de  $B_8^3$  com relação à  $B_7^3$ . Como o polinômio

$$F(73/100, 4/5, 2/5, 69/100, 13/20, 69/100) = -532559z^4x^4y^4 - \dots - 56533679$$

tem 125 monômios, todos negativos, temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{10}^3 = (73/100, 4/5] \times (2/5, 69/100] \times (13/20, 69/100].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução

$$B_{11}^3 = (73/100, 8/10] \times (4/10, 69/100] \times (4/10, 65/100],$$

que é o complemento de  $B_{10}^3$  com relação à  $B_9^3$ . Como o polinômio  $F(x, y, z)$  é simétrico e

$$(73/100, 8/10] \times (65/100, 69/100] \times (4/10, 65/100]$$

está contido em

$$(73/100, 8/10] \times (65/100, 69/100] \times (4/10, 69/100],$$

temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{12}^3 = (73/100, 8/10] \times (65/100, 69/100] \times (4/10, 65/100].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{13}^3 = (73/100, 8/10] \times (4/10, 65/100] \times (4/10, 65/100],$$

que é o complemento de  $B_{12}^3$  com relação à  $B_{11}^3$ . O polinômio

$$\begin{aligned} P(73/100, 4/5, 2/5, 41/100, 2/5, 13/20) = \\ = 3224733762767214804659922600000z^{13}x^{13}y^{13} + \\ + \dots + 2678233621687598487035030231250 \end{aligned}$$

tem 2744 monômios, todos positivos. Logo, o sistema (1) não tem solução em

$$B_{14}^3 = (73/100, 4/5] \times (2/5, 41/100] \times (2/5, 13/20].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{15}^3 = (73/100, 4/5] \times (41/100, 65/100] \times (4/10, 65/100],$$

que é o complemento de  $B_{14}^3$  com relação à  $B_{13}^3$ . Como  $P(x, y, z)$  é simétrico e

$$(73/100, 8/10] \times (41/100, 65/100] \times (4/10, 41/100]$$

está contido em

$$(73/100, 8/10] \times (4/10, 65/100] \times (4/10, 41/100],$$

temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{16}^3 = (73/100, 8/10] \times (41/100, 65/100] \times (4/10, 41/100].$$



Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{17}^3 = (73/100, 8/10] \times (41/100, 65/100] \times (41/100, 65/100],$$

que é o complemento de  $B_{16}^3$  com relação à  $B_{15}^3$ . O polinômio

$$F(73/100, 4/5, 16/25, 13/20, 41/100, 13/20) = -729791z^4x^4y^4 - \\ - \dots - 43769375$$

tem 125 monômios, todos negativos. Sendo assim, o sistema (1) não tem solução em

$$B_{18}^3 = (73/100, 4/5] \times (16/25, 13/20] \times (41/100, 13/20].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{19}^3 = (73/100, 8/10] \times (41/100, 64/100] \times (41/100, 65/100],$$

que é o complemento de  $B_{18}^3$  com relação à  $B_{17}^3$ . Como o polinômio  $F(x, y, z)$  é simétrico e

$$(73/100, 8/10] \times (41/100, 64/100] \times (64/100, 65/100]$$

está contido em

$$(73/100, 8/10] \times (41/100, 65/100] \times (64/100, 65/100],$$

temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{20}^3 = (73/100, 8/10] \times (41/100, 64/100] \times (64/100, 65/100].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{21}^3 = (73/100, 8/10] \times (41/100, 64/100] \times (41/100, 64/100],$$

que é o complemento de  $B_{20}^3$  com relação à  $B_{19}^3$ . Como o polinômio

$$P(73/100, 4/5, 41/100, 21/50, 41/100, 16/25) = \\ = 3039790007659777437057447124428z^{13}y^{13}x^{13} + \\ + \dots + 2810637257144231351018850877440$$

tem 2744 monômios, todos positivos, temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{22}^3 = (73/100, 4/5] \times (41/100, 21/50] \times (41/100, 16/25].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{23}^3 = (73/100, 8/10] \times (42/100, 64/100] \times (41/100, 64/100],$$

que é o complemento de  $B_{22}^3$  com relação à  $B_{21}^3$ . Pela simetria de  $P(x, y, z)$  e pelo fato de que

$$(73/100, 8/10] \times (42/100, 64/100] \times (41/100, 42/100]$$

está contido em

$$(73/100, 8/10] \times (41/100, 64/100] \times (41/100, 42/100],$$

temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{24}^3 = (73/100, 8/10] \times (42/100, 64/100] \times (41/100, 42/100].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{25}^3 = (73/100, 8/10] \times (42/100, 64/100] \times (42/100, 64/100],$$

que é o complemento de  $B_{24}^3$  com relação à  $B_{23}^3$ . O polinômio

$$\begin{aligned} F(73/100, 4/5, 21/50, 16/25, 623/1000, 16/25) = & -988969059x^4y^4z^4 - \\ & \dots - 406115840000 \end{aligned}$$

tem 125 monômios, todos negativos. Sendo assim, o sistema (1) não tem solução em

$$B_{26}^3 = (73/100, 4/5] \times (21/50, 16/25] \times (623/1000, 16/25].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{27}^3 = (73/100, 8/10] \times (42/100, 64/100] \times (42/100, 623/1000],$$

que é o complemento de  $B_{26}^3$  com relação à  $B_{25}^3$ . Como  $F(x, y, z)$  é simétrico e

$$(73/100, 8/10] \times (623/1000, 64/100] \times (42/100, 623/1000]$$

está contido

$$(73/100, 8/10] \times (623/1000, 64/100] \times (42/100, 64/100],$$

temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{28}^3 = (73/100, 8/10] \times (623/1000, 64/100] \times (42/100, 623/1000].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{29}^3 = (73/100, 8/10] \times (42/100, 623/1000] \times (42/100, 623/1000],$$

que é o complemento de  $B_{28}^3$  com relação à  $B_{27}^3$ . O polinômio

$$\begin{aligned} P(73/100, 4/5, 21/50, 87/200, 61/100, 623/1000) = \\ = 105024245660490624430861267274880000000000y^{13}x^{13}z^{13} + \\ + \dots + 9752245823096756428891340043157147277770314 \end{aligned}$$

tem 2744 monômios, todos positivos. Sendo assim, o sistema (1) não tem solução em

$$B_{30}^3 = (73/100, 4/5] \times (21/50, 87/200] \times (61/100, 623/1000].$$

O polinômio

$$\begin{aligned} F(73/100, 4/5, 87/200, 623/1000, 61/100, 623/1000) = -5518794375x^4y^4z^4 - \\ - \dots - 352818999359 \end{aligned}$$

tem 125 monômios, todos negativos. Desta forma, o sistema (1) não tem solução em

$$B_{31}^3 = (73/100, 4/5] \times (87/200, 623/1000] \times (61/100, 623/1000].$$

Como o sistema (1) não tem solução em  $B_{30}^3$  ou  $B_{31}^3$ , temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{32}^3 = (73/100, 8/10] \times (42/100, 623/1000] \times (61/100, 623/1000].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{33}^3 = (73/100, 8/10] \times (42/100, 623/1000] \times (42/100, 61/100],$$

que é o complemento de  $B_{32}^3$  com relação à  $B_{29}^3$ . Pela simetria do sistema (1) e pelo fato de que

$$(73/100, 8/10] \times (61/100, 623/1000] \times (42/100, 61/100]$$

está contido em

$$(73/100, 8/10] \times (61/100, 623/1000] \times (42/100, 623/1000],$$

temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{34}^3 = (73/100, 8/10] \times (61/100, 623/1000] \times (42/100, 61/100].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{35}^3 = (73/100, 8/10] \times (42/100, 61/100] \times (42/100, 61/100],$$

que é o complemento de  $B_{34}^3$  com relação à  $B_{33}^3$ . O polinômio

$$\begin{aligned} P(73/100, 4/5, 21/50, 11/25, 21/50, 61/100) = \\ = 2836801547457363671936262825600y^{13}x^{13}z^{13} + \\ + \dots + 3299906867798279245192192473408 \end{aligned}$$

tem 2744 monômios, todos positivos. Logo, o sistema (1) não tem solução em

$$B_{36}^3 = (73/100, 4/5] \times (21/50, 11/25] \times (21/50, 61/100].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{37}^3 = (73/100, 8/10] \times (44/100, 61/100] \times (42/100, 61/100],$$

que é o complemento de  $B_{36}^3$  com relação à  $B_{35}^3$ . Como o polinômio  $P(x, y, z)$  é simétrico e

$$(73/100, 8/10] \times (44/100, 61/100] \times (42/100, 44/100]$$

está contido em

$$(73/100, 8/10] \times (42/100, 61/100] \times (42/100, 44/100],$$

temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{38}^3 = (73/100, 8/10] \times (44/100, 61/100] \times (42/100, 44/100].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{39}^3 = (73/100, 8/10] \times (44/100, 61/100] \times (44/100, 61/100],$$

que é o complemento de  $B_{38}^3$  com relação à  $B_{37}^3$ . Como o polinômio

$$F(73/100, 4/5, 3/5, 61/100, 11/25, 61/100) = -14607x^4y^4z^4 - \\ - \dots - 31242959$$

tem 125 monômios, todos negativos, temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{40}^3 = (73/100, 4/5] \times (3/5, 61/100] \times (11/25, 61/100].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{41}^3 = (73/100, 8/10] \times (44/100, 6/10] \times (44/100, 61/100],$$

que é o complemento de  $B_{40}^3$  com relação à  $B_{39}^3$ . Como o polinômio  $F(x, y, z)$  é simétrico e

$$(73/100, 8/10] \times (44/100, 6/10] \times (6/10, 61/100]$$

está contido em

$$(73/100, 8/10] \times (44/100, 61/100] \times (6/10, 61/100],$$

temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{42}^3 = (73/100, 8/10] \times (44/100, 6/10] \times (6/10, 61/100].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{43}^3 = (73/100, 8/10] \times (44/100, 6/10] \times (44/100, 6/10],$$

que é o complemento de  $B_{42}^3$  com relação à  $B_{41}^3$ . O polinômio

$$P(73/100, 4/5, 11/25, 91/200, 11/25, 3/5) = \\ = 4879178756848113973153266569183232y^{13}x^{13}z^{13} + \\ + \dots + 6853316921267980119923865513150000$$

tem 2744 monômios, todos positivos. Portanto, o sistema não tem solução em

$$B_{44}^3 = (73/100, 4/5] \times (11/25, 91/200] \times (11/25, 3/5].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{45}^3 = (73/100, 8/10] \times (455/1000, 6/10] \times (44/100, 6/10],$$

que é o complemento de  $B_{44}^3$  com relação à  $B_{43}^3$ . Pela simetria de  $F(x, y, z)$  e pelo fato de que

$$(73/100, 8/10] \times (455/1000, 6/10] \times (44/100, 455/1000]$$

está contido em

$$(73/100, 8/10] \times (44/100, 6/10] \times (44/100, 455/1000],$$

temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{46}^3 = (73/100, 8/10] \times (455/1000, 6/10] \times (44/100, 455/1000].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{47}^3 = (73/100, 8/10] \times (455/1000, 6/10] \times (455/1000, 6/10],$$

que é o complemento de  $B_{46}^3$  com relação à  $B_{45}^3$ . O polinômio

$$F(73/100, 4/5, 91/200, 3/5, 73/125, 3/5) = -499527539x^4y^4z^4 - \\ - \dots - 281600000000$$

tem 125 monômios, todos negativos. Sendo assim, o sistema (1) não tem solução em

$$B_{48}^3 = (73/100, 4/5] \times (91/200, 3/5] \times (73/125, 3/5].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{49}^3 = (73/100, 8/10] \times (455/1000, 6/10] \times (455/1000, 584/1000],$$

que é o complemento de  $B_{48}^3$  com relação à  $B_{47}^3$ . Como  $F(x, y, z)$  é simétrico e

$$(73/100, 8/10] \times (584/1000, 6/10] \times (455/1000, 584/1000]$$

está contido em

$$(73/100, 8/10] \times (584/1000, 6/10] \times (455/1000, 6/10],$$

temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{50}^3 = (73/100, 8/10] \times (584/1000, 6/10] \times (455/1000, 584/1000].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{51}^3 = (73/100, 8/10] \times (455/1000, 584/1000] \times (455/1000, 584/1000],$$

que é o complemento de  $B_{50}^3$  com relação à  $B_{49}^3$ . O polinômio

$$\begin{aligned} P(73/100, 4/5, 91/200, 47/100, 89/200, 73/125) = \\ = 6826480186545584344480922362924128417968750z^{13}x^{13}y^{13} + \\ + \dots + 11240211699989151231615073145744596156809216 \end{aligned}$$

tem 2744 monômios, todos positivos. Portanto, o sistema (1) não tem solução em

$$(73/100, 4/5] \times (91/200, 47/100] \times (89/200, 73/125].$$

Em particular, o sistema (1) não tem solução em

$$B_{52}^3 = (73/100, 4/5] \times (91/200, 47/100] \times (91/200, 73/125].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{53}^3 = (73/100, 8/10] \times (47/100, 584/1000] \times (455/1000, 584/1000],$$

que é o complemento de  $B_{52}^3$  com relação à  $B_{51}^3$ . Pela simetria de  $P(x, y, z)$  e pelo fato de que

$$(73/100, 8/10] \times (47/100, 584/1000] \times (455/1000, 47/100]$$

está contido em

$$(73/100, 8/10] \times (455/1000, 584/1000] \times (455/1000, 47/100],$$

temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{54}^3 = (73/100, 8/10] \times (47/100, 584/1000] \times (455/1000, 47/100].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{55}^3 = (73/100, 8/10] \times (47/100, 584/1000] \times (47/100, 584/1000],$$

que é o complemento de  $B_{54}^3$  com relação à  $B_{53}^3$ . Como o polinômio

$$F(73/100, 4/5, 47/100, 73/125, 71/125, 73/125) = -29382239x^4y^4z^4 - \dots - 14546530304$$

tem 125 monômios, todos negativos, temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{56}^3 = (73/100, 4/5] \times (47/100, 73/125] \times (71/125, 73/125].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{57}^3 = (73/100, 8/10] \times (47/100, 584/1000] \times (47/100, 568/1000],$$

que é o complemento de  $B_{56}^3$  com relação à  $B_{55}^3$ . Pela simetria de  $F(x, y, z)$  e pelo fato de que

$$(73/100, 8/10] \times (568/1000, 584/1000] \times (47/100, 568/1000]$$

está contido em

$$(73/100, 8/10] \times (568/1000, 584/1000] \times (47/100, 584/1000],$$

temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{58}^3 = (73/100, 8/10] \times (568/1000, 584/1000] \times (47/100, 568/1000].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{59}^3 = (73/100, 8/10] \times (47/100, 568/1000] \times (47/100, 568/1000],$$

que é o complemento de  $B_{58}^3$  com relação à  $B_{57}^3$ . O polinômio

$$\begin{aligned} P(73/100, 4/5, 47/100, 121/250, 47/100, 71/125) = \\ = 244923036735056755277973683029174804687500z^{13}x^{13}y^{13} + \\ + \dots + 559335537803329894618660393357549651886080 \end{aligned}$$

tem 2744 monômios, todos positivos. Desta forma, o sistema (1) não tem solução em

$$B_{60}^3 = (73/100, 4/5] \times (47/100, 121/250] \times (47/100, 71/125].$$



Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{61}^3 = (73/100, 8/10] \times (484/1000, 568/1000] \times (47/100, 568/1000],$$

que é o complemento de  $B_{60}^3$  com relação à  $B_{59}^3$ . Pela simetria de  $P(x, y, z)$  e pelo fato de que

$$(73/100, 8/10] \times (484/1000, 568/1000] \times (47/100, 484/1000]$$

está contido em

$$(73/100, 8/10] \times (47/100, 568/1000] \times (47/100, 484/1000],$$

temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{62}^3 = (73/100, 8/10] \times (484/1000, 568/1000] \times (47/100, 484/1000].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{63}^3 = (73/100, 8/10] \times (484/1000, 568/1000] \times (484/1000, 568/1000],$$

que é o complemento de  $B_{62}^3$  com relação à  $B_{61}^3$ . Como o polinômio

$$F(73/100, 4/5, 553/1000, 71/125, 121/250, 71/125) = -25803587x^4y^4z^4 - \dots - 184520474624$$

tem 125 monômios, todos negativos, temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{64}^3 = (73/100, 4/5] \times (553/1000, 71/125] \times (121/250, 71/125].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{65}^3 = (73/100, 8/10] \times (484/1000, 553/1000] \times (484/1000, 568/1000],$$

que é o complemento de  $B_{64}^3$  com relação à  $B_{63}^3$ . Pela simetria de  $F(x, y, z)$  e pelo fato de que

$$(73/100, 8/10] \times (484/1000, 553/1000] \times (553/1000, 568/1000]$$

está contido em

$$(73/100, 8/10] \times (484/1000, 568/1000] \times (553/1000, 568/1000/,$$

temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{66}^3 = (73/100, 8/10] \times (484/1000, 553/1000] \times (553/1000, 568/1000].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{67}^3 = (73/100, 8/10] \times (484/1000, 553/1000] \times (484/1000, 553/1000],$$

que é o complemento de  $B_{66}^3$  com relação à  $B_{65}^3$ . Como o polinômio

$$\begin{aligned} P(73/100, 4/5, 121/250, 1/2, 121/250, 553/1000) = \\ = 379891422787255109254765525330297676478283776z^{13}x^{13}y^{13} + \\ + \dots + 1165477273677858337279908846023122458843750000 \end{aligned}$$

tem 2744 monômios, todos positivos, temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{68}^3 = (73/100, 4/5] \times (121/250, 1/2] \times (121/250, 553/1000].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{69}^3 = (73/100, 8/10] \times (1/2, 553/1000] \times (484/1000, 553/1000],$$

que é o complemento de  $B_{68}^3$  com relação à  $B_{67}^3$ . Pela simetria de  $P(x, y, z)$  e pelo fato de que

$$(73/100, 8/10] \times (5/10, 553/1000] \times (484/1000, 5/10]$$

está contido em

$$(73/100, 8/10] \times (484/1000, 553/1000] \times (484/1000, 5/10],$$

temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{70}^3 = (73/100, 8/10] \times (5/10, 553/1000] \times (484/1000, 5/10].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{71}^3 = (73/100, 8/10] \times (5/10, 553/1000] \times (5/10, 553/1000],$$

que é o complemento de  $B_{70}^3$  com relação à  $B_{69}^3$ . O polinômio

$$F(73/100, 4/5, 1/2, 553/1000, 537/1000, 553/1000) = -618999939x^4y^4z^4 -$$

–...– 139934375519

tem 125 monômios, todos negativos. Desta forma, o sistema (1) não tem solução em

$$B_{72}^3 = (73/100, 4/5] \times (1/2, 553/1000] \times (537/1000, 553/1000].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{73}^3 = (73/100, 8/10] \times (5/10, 553/1000] \times (5/10, 537/1000],$$

que é o complemento de  $B_{72}^3$  com relação à  $B_{71}^3$ . Pela simetria de  $F(x, y, z)$  e pelo fato de que

$$(73/100, 8/10] \times (537/1000, 553/1000] \times (5/10, 537/1000]$$

está contido em

$$(73/100, 8/10] \times (537/1000, 553/1000] \times (5/10, 553/1000],$$

temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{74}^3 = (73/100, 8/10] \times (537/1000, 553/1000] \times (5/10, 537/1000].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{75}^3 = (73/100, 8/10] \times (5/10, 537/1000] \times (5/10, 537/1000],$$

que é o complemento de  $B_{74}^3$  com relação à  $B_{73}^3$ . Como o polinômio

$$\begin{aligned} P(73/100, 4/5, 1/2, 103/200, 1/2, 537/1000) = \\ = 243101584499549972593330560000000000000000z^{13}x^{13}y^{13} + \\ + \dots + 12148819580819325220182656659142829944599734 \end{aligned}$$

tem 2744 monômios, todos positivos, temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{76}^3 = (73/100, 4/5] \times (1/2, 103/200] \times (1/2, 537/1000].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{77}^3 = (73/100, 8/10] \times (515/1000, 537/1000] \times (5/10, 537/1000],$$

que é o complemento de  $B_{76}^3$  com relação à  $B_{75}^3$ . Como  $P(x, y, z)$  é simétrico e

$$(73/100, 8/10] \times (515/1000, 537/1000] \times (5/10, 515/1000]$$

está contido em

$$(73/100, 8/10] \times (5/10, 537/1000] \times (5/10, 515/1000],$$

temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{78}^3 = (73/100, 8/10] \times (515/1000, 537/1000] \times (5/10, 515/1000].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{79}^3 = (73/100, 8/10] \times (515/1000, 537/1000] \times (515/1000, 537/1000],$$

que é o complemento de  $B_{78}^3$  com relação à  $B_{77}^3$ . Como o polinômio

$$F(73/100, 4/5, 21/40, 537/1000, 103/200, 537/1000) = -4775754375x^4y^4z^4 - \\ - \dots - 93093639839$$

tem 125 monômios, todos negativos, temos que o sistema não tem solução em

$$B_{80}^3 = (73/100, 4/5] \times (21/40, 537/1000] \times (103/200, 537/1000].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{81}^3 = (73/100, 8/10] \times (515/1000, 525/1000] \times (515/1000, 537/1000],$$

que é o complemento de  $B_{80}^3$  com relação à  $B_{79}^3$ . Como  $F(x, y, z)$  é simétrico e

$$(73/100, 8/10] \times (515/1000, 525/1000] \times (525/1000, 537/1000]$$

está contido em

$$(73/100, 8/10] \times (515/1000, 537/1000] \times (525/1000, 537/1000],$$

temos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{82}^3 = (73/100, 8/10] \times (515/1000, 525/1000] \times (525/1000, 537/1000].$$

Mostremos que o sistema (1) não tem solução em

$$B_{83}^3 = (73/100, 8/10] \times (515/1000, 525/1000] \times (515/1000, 525/1000],$$

que é o complemento de  $B_{82}^3$  com relação à  $B_{81}^3$ . O polinômio

$$\begin{aligned} P(73/100, 4/5, 103/200, 21/40, 103/200, 21/40) = \\ = 10789495787374901696979832297662117z^{13}y^{13}x^{13} + \\ + \dots + 126058416488706493230288238525390625 \end{aligned}$$

tem 2744 monômios, todos positivos. Logo, o sistema (1) não tem solução em

$$B_{83}^3 = (73/100, 4/5] \times (103/200, 21/40] \times (103/200, 21/40].$$

Logo, o sistema (1) não tem solução em

$$B_1^3 = (73/100, 8/10] \times (37/100, 8/10] \times (37/100, 8/10]$$

(ver página 82), como queríamos demonstrar.  $\square$

Pela simetria do sistema (1), concluímos que

**Proposição 24.** *Se existirem soluções do sistema (1), elas estão em*

$$(37/100, 73/100] \times (37/100, 73/100] \times (37/100, 73/100]$$

(ver Figura 12).

Sabemos que as fórmulas de Cardano,

$$\begin{cases} x = 2\alpha + \frac{a}{3} \\ y = -\alpha - \beta\sqrt{3} + \frac{a}{3} \\ z = -\alpha + \beta\sqrt{3} + \frac{a}{3} \end{cases}$$

no caso em que  $\Delta \leq 0$ , dão-nos um difeomorfismo global, cujo difeomorfismo inverso é dado por

$$(x, y, z) \mapsto \left( \frac{1}{6}(2x - y - z), \frac{1}{2\sqrt{3}}(z - y), x + y + z \right).$$

Sendo assim, o bloco

$$(37/100, 73/100] \times (37/100, 73/100] \times (37/100, 73/100]$$

é transformado pelo difeomorfismo inverso em

$$\left(-3/25, 3/25\right] \times \left(-\frac{3\sqrt{3}}{50}, \frac{3\sqrt{3}}{50}\right] \times (111/100, 219/100].$$

Escrevendo o sistema (1) nas coordenadas  $(\alpha, \beta, a)$  obtemos

$$(1') \begin{cases} P(\alpha, \beta, a) = 0 \\ F(\alpha, \beta, a) = 0 \end{cases}$$

onde o polinômio

$$P(\alpha, \beta, a) = \frac{320}{6561}a^{12}\beta^4 - \dots - \frac{1}{3}a^2 - 6\beta^2 - 6\alpha^2$$

tem 478 monômios e

$$F(\alpha, \beta, a) = 4a^2\beta^2 + 4a^2\alpha^2 - 36a\beta^2\alpha + 12a\alpha^3 + 9\beta^4 + 18\beta^2\alpha^2 + 9\alpha^4 - \frac{1}{3}a^2 - 6\beta^2 - 6\alpha^2 + 1.$$

Os polinômios  $P(\alpha, \beta, a)$  e  $F(\alpha, \beta, a)$  têm a seguinte propriedade:

$$P(\alpha, \beta, a) = P(\alpha, -\beta, a) \quad \text{e} \quad F(\alpha, \beta, a) = F(\alpha, -\beta, a) \quad (\text{Paridade em } \beta).$$

O motivo para isto ocorrer é que em todos os monômios de  $P(\alpha, \beta, a)$  e de  $F(\alpha, \beta, a)$  os expoentes de  $\beta$  são pares. Como o polinômio

$$F(-3/25, 0, -109/1000, 0, 2, 6) = -9381824053\alpha^4\beta^4a^2 - \dots - 33000000000000$$

tem 75 monômios, todos negativos, temos que o sistema (1') não tem solução em

$$(-3/25, 0] \times (-109/1000, 0] \times (2, 6].$$

Pela paridade de  $F(\alpha, \beta, a)$  em  $\beta$ , o sistema (1') não tem solução em

$$(-3/25, 0] \times [0, 109/1000) \times (2, 6].$$

Logo, o sistema (1') não tem solução em

$$B'_1 = (-3/25, 0] \times (-109/1000, 109/1000) \times (2, 6].$$

O polinômio

$$F(0, 3/25, -109/1000, 0, 2, 6) = -639758729653\alpha^4\beta^4a^2 - \dots - 26659553280000$$

tem 75 monômios, todos negativos. Desta forma, o sistema (1') não tem solução em

$$(0, 3/25] \times (-109/1000, 0] \times (2, 6].$$

Pela paridade de  $F(\alpha, \beta, a)$  em  $\beta$ , o sistema (1') não tem solução em

$$(0, 3/25] \times [0, 109/1000) \times (2, 6].$$

Logo, o sistema (1') não tem solução em

$$B'_2 = (0, 3/25] \times (-109/1000, 109/1000) \times (2, 6].$$

Como o sistema (1') não tem solução em  $B'_1$  ou  $B'_2$ , temos que o sistema (1') não tem solução em

$$B'_3 = (-12/100, 12/100] \times (-109/1000, 109/1000) \times (2, 6].$$

Como

$$(-12/100, 12/100] \times \left(-\frac{3\sqrt{3}}{50}, \frac{3\sqrt{3}}{50}\right] \times (2, 6] \subset B'_3,$$

temos que o sistema (1') não tem solução em

$$(-12/100, 12/100] \times \left(-\frac{3\sqrt{3}}{50}, \frac{3\sqrt{3}}{50}\right] \times (2, 6].$$

**Observação 25.** Aqui cabe observar que se nós procedêssemos como acima com o bloco

$$(24/100, 8/10] \times (24/100, 8/10] \times (24/100, 8/10]$$

(ver página 75), isto não seria verdade, nem mesmo para  $a \in (2, 219/100]$ . Neste caso, há variação de sinal. Por isso, foi importante encolhermos este bloco até obtermos

$$(37/100, 73/100] \times (37/100, 73/100] \times (37/100, 73/100].$$

Sendo assim, se existirem soluções do sistema (1'), elas estão em

$$(-12/100, 12/100] \times \left(-\frac{3\sqrt{3}}{50}, \frac{3\sqrt{3}}{50}\right] \times (111/100, 2].$$

Como o polinômio

$$F(-1/3, 0, -29/100, 0, 0, 173/100) = 154529761\alpha^4\beta^4a^2 + \dots + 2130000$$

tem 75 monômios, todos positivos, temos que o sistema (1') não tem solução em

$$(-1/3, 0] \times (-29/100, 0] \times (0, 173/100].$$

Pela paridade de  $F(\alpha, \beta, a)$  em  $\beta$ , o sistema (1') não tem solução em

$$(-1/3, 0] \times [0, 29/100) \times (0, 173/100].$$

Logo, o sistema (1') não tem solução em

$$B'_4 = (-1/3, 0] \times (-29/100, 29/100) \times (0, 173/100].$$

Como o polinômio

$$F(0, 1/6, -29/100, 0, 0, 173/100) = 503149761\alpha^4\beta^4a^2 + \dots + 244170000$$

tem 75 monômios, todos positivos, temos que o sistema (1') não tem solução em

$$(0, 1/6] \times (-29/100, 0] \times (0, 173/100].$$

Pela paridade de  $F(\alpha, \beta, a)$  em  $\beta$ , o sistema (1') não tem solução em

$$(0, 1/6] \times [0, 29/100) \times (0, 173/100].$$

E assim, o sistema (1') não tem solução em

$$B'_5 = (0, 1/6] \times (-29/100, 29/100) \times (0, 173/100].$$

Como o sistema (1') não tem solução em  $B'_4$  ou  $B'_5$ , temos que o sistema (1') não tem solução em

$$B'_6 = (-1/3, 1/6] \times (-29/100, 29/100) \times (0, 173/100].$$

Como o bloco

$$(-12/100, 12/100] \times (-109/1000, 109/1000] \times (0, 173/100] \subset B'_6,$$

temos que o sistema (1') não tem solução em

$$(-12/100, 12/100] \times (-109/1000, 109/1000] \times (0, 173/100].$$

Logo, acabamos de demonstrar que

**Proposição 26.** *Se existirem soluções do sistema (1'), elas estão em*

$$(-12/100, 12/100] \times \left(-\frac{3\sqrt{3}}{50}, \frac{3\sqrt{3}}{50}\right] \times (173/100, 2].$$



## 4.2 As Soluções Degeneradas sobre as Mediatrizes

Procuremos ao longo das mediatrizes soluções para o sistema (1). Estas soluções são caracterizadas ou por  $x = y$  ou por  $x = z$  ou por  $y = z$ . Basta-nos determinar as soluções de (1) no interior do triângulo, pois, já sabemos que no exterior do triângulo, nas regiões admissíveis, não existem soluções de (1). Ademais, basta-nos determinar as soluções ao longo de uma das mediatrizes, pois, as outras soluções são obtidas destas por permutações cíclicas das distâncias mútuas, ou seja, dadas por rotações de  $\frac{2\pi}{3}$  radianos. Além disso, nós reduzimos bastante a região de localização das soluções do sistema (1), que é a região no interior do triângulo delimitada pelas circunferências

$$x = \frac{37}{100}, \quad x = \frac{73}{100}, \quad y = \frac{37}{100}, \quad y = \frac{73}{100}, \quad z = \frac{37}{100}, \quad z = \frac{73}{100}$$

Consideremos  $z = y$ . Do sistema (1), obtemos

$$(1'') \begin{cases} P(x, y) := P(x, y, y) = 0 \\ F(x, y) := F(x, y, y) = 0 \end{cases}$$

onde

$$P(x, y) = 8x^{11}y^5 - 24x^9y^7 + 24x^7y^9 - 8x^6y^{10} - 8x^5y^{11} + \\ + 24x^4y^{12} - 24x^2y^{14} + 8y^{16} - \dots - x^2 - 2y^2$$

é um polinômio com 64 monômios e

$$F(x, y) = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - x^2 - 2y^2 + 1.$$

Fatorando o polinômio  $F(x, y)$ , obtemos

$$F_1(x, y)F_2(x, y)$$

onde

$$F_1(x, y) = x^2 - x\sqrt{3} + 1 - y^2$$

e

$$F_2(x, y) = x^2 + x\sqrt{3} + 1 - y^2.$$

Observando que

$$F_2(37/100, 73/100, 37/100, 73/100) = 925\sqrt{3}x^2y^2 + 2500x^2y^2 + 1850\sqrt{3}x^2y + 4334x^2y +$$

$$+2750\sqrt{3}xy^2 + 5666xy^2 + 925\sqrt{3}x^2 + 1510x^2 + 5500\sqrt{3}xy + 10000xy + 3490y^2 + \\ +1825\sqrt{3}y^2 + 2750\sqrt{3}x + 3686x + 3650\sqrt{3}y + 6314y + 1825\sqrt{3} + 2500$$

é um polinômio com 18 monômios, todos positivos, concluímos que

$$F(x, y) = 0 \text{ em } (37/100, 73/100] \times (37/100, 73/100]$$

se, e somente se,

$$F_1(x, y) = 0 \text{ em } (37/100, 73/100] \times (37/100, 73/100].$$

Calculando o resultante dos polinômios  $P(x, y)$  e  $F_1(x, y)$  com respeito à variável  $x$  obtemos o polinômio

$$R(y) = -144y^{30} + \dots + 162$$

com 53 monômios. Como os coeficientes do polinômio  $R(37/100, 1037/2000)$  são demasiadamente extensos não o representaremos como de costume, tomando o coeficiente de maior grau e o termo independente, apenas descreveremos o procedimento de como mostrar que este polinômio tem 31 monômios positivos. Os coeficientes deste polinômio são da forma  $n + m\sqrt{3}$ , com  $n, m \in \mathbb{Z}$ . Para mostrar que todos os coeficientes são positivos consideremos

$$\frac{172}{100} < \sqrt{3} < \frac{174}{100},$$

e então, observemos que todos os valores de  $n + m\frac{172}{100}$  e  $n + m\frac{174}{100}$  são positivos. Como o valor de  $n + m\sqrt{3}$  tem que está entre o menor e o maior destes dois valores, concluímos que os coeficientes de  $R(37/100, 1037/2000)$  são todos positivos. Com isso, temos que  $R(y)$  não se anula em  $(37/100, 1037/2000]$ . O polinômio

$$R(13/25, 7/10) = (-19454602647914105681115205961621814269611868160000\sqrt{3} + \\ +33413573315027993260591057179407624248408582127616)y^{30} + \\ + \dots + (-4402530898078404333507229015231132507324218750000\sqrt{3} + \\ +976968179307603921433874647133052349090576171875)$$

tem 31 monômios, todos negativos. O fato de que todos os coeficientes são negativos é demonstrado de forma análoga ao do polinômio anterior. Com isso, temos que  $R(y)$  não se anula em  $(13/25, 7/10]$ . Como o polinômio  $R(703/1000, 73/100)$  tem 31 monômios, todos positivos, e é de escrita bastante extensa, procedemos com este como procedemos com o polinômio  $R(37/100, 1037/2000)$ , e assim, concluímos que  $R(y)$  não se anula em  $(703/1000, 73/100]$ . Agora, como cada um dos polinômios

$$R(5185/10000, 52/100) \text{ e } R(7/10, 703/1000)$$

tem uma variação de sinal, temos, pela Regra de Sinais de Descartes (ver Capítulo 1, Secção 4), que existe uma raiz simples da equação

$$R(y) = 0$$

em cada um dos respectivos intervalos,  $(5185/10000, 52/100)$  e  $(7/10, 703/1000)$ . Uma forma de vermos isto é: considerando

$$\frac{1732}{1000} < \sqrt{3} < \frac{17321}{10000},$$

e procedendo como acima, com o cuidado de ordenarmos decrescente ou crescentemente os monômios dos polinômios considerados, e verificando que só existe uma variação de sinal para os coeficientes.

Para  $F_1(x, y) = 0$  e  $y > \frac{1}{2}$ , temos as soluções, em termos de  $y$ ,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{-1 + 4y^2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{-1 + 4y^2}}{2}.$$

Como  $\frac{37}{100} < x < \frac{73}{100}$ , temos que os valores de  $x$  correspondentes aos zeros de  $R(y)$  nos intervalos acima especificados são dados por

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{-1 + 4y^2}}{2},$$

já que

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{-1 + 4y^2}}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{73}{100}.$$

Como

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{2y}{\sqrt{-1 + 4y^2}} < 0,$$

para  $y > \frac{1}{2}$ , temos que  $x = x(y)$  é decrescente em  $(\frac{1}{2}, \infty)$ . Logo,

$$\frac{7231}{10000} < x\left(\frac{52}{100}\right) < x_0 = x(y_0) < x\left(\frac{5185}{10000}\right) < \frac{72876}{100000} < \frac{73}{100}$$

e

$$\frac{37}{100} < \frac{3718}{10000} < x\left(\frac{703}{1000}\right) < x_1 = x(y_1) < x\left(\frac{7}{10}\right) < \frac{3762}{10000}$$

onde  $y_0$  e  $y_1$  são as soluções de  $R(y)$  em

$(5185/10000, 52/100)$  e  $(7/10, 703/1000)$ ,

respectivamente. E assim,

**Proposição 27.** *As soluções sobre a mediatriz  $y = z$  são  $(x_0, y_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1, y_1)$  tais que*

$(x_0, y_0, y_0) \in (7231/10000, 72876/100000) \times (5185/10000, 52/100) \times (5185/10000, 52/100)$

e

$(x_1, y_1, y_1) \in (3718/10000, 3762/10000) \times (7/10, 703/1000) \times (7/10, 703/1000)$ .

É claro que podemos nos aproximar das soluções tanto quanto desejarmos. Mas, para os nossos propósitos, a aproximação obtida é o suficiente. Observemos que no plano das configurações tais soluções estão sobre o eixo  $v = 0$  com

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(y_0^2 - x_0^2) < 0 \quad \text{e} \quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(y_1^2 - x_1^2) > 0.$$

E assim, sabemos que o sistema (1) tem solução na região esperada. E mais, sabemos onde estão localizadas sobre as mediatrizes as soluções do sistema (1), com erro arbitrariamente pequeno (ver Figura 13).

### 4.3 A Curva de Degenerescência

Como vimos acima, página 100, no  $(a, b)$ -plano, temos que a parte da curva algébrica, dada por

$$p(a, b) = 0,$$

que nos interessa está na faixa  $\frac{173}{100} < a \leq 2$ , onde

$$p(a, b) = 20a^{20} + \dots + 2$$

(ver página 28).

Calculando o resultante dos polinômios  $F(\alpha, \beta, a)$  e  $H(\alpha, \beta, a, b)$  (ver página 38) com respeito à variável  $a$  obtemos o polinômio

$$T(\alpha, \beta, b) = 25\beta^8 - 44\beta^6\alpha^2 + 102\beta^4\alpha^4 + 180\beta^2\alpha^6 + 9\alpha^8 + \dots + \frac{1}{81},$$

com 31 monômios. O polinômio  $T(\alpha, \beta, b)$  satisfaz a propriedade da paridade em  $\alpha$  e em  $\beta$ , isto é,

$$T(\alpha, \beta, b) = T(\alpha, -\beta, b) \quad \text{e} \quad T(\alpha, \beta, b) = T(-\alpha, \beta, b).$$

Como o polinômio

$$T(-3/25, 0, -109/1000, 0, 0, 1) = 25243667939013291937777\beta^8 b^2 \alpha^8 + \\ + \dots + 4000000000000000000000000b^2$$

tem 227 monômios, todos positivos, já que  $b > 0$ , temos que os polinômios  $F(\alpha, \beta, a)$  e  $H(\alpha, \beta, a, b)$  não têm zeros em comum no bloco

$$(-3/25, 0] \times (-109/1000, 0] \times (0, 2] \times (0, 1].$$

Pela paridade de  $T(\alpha, \beta, b)$  em  $\beta$ , temos que os polinômios  $F(\alpha, \beta, a)$  e  $H(\alpha, \beta, a, b)$  não têm zeros em comum no bloco

$$(-3/25, 0] \times [0, 109/1000) \times (0, 2] \times (0, 1].$$

Desta forma, vemos que os polinômios  $F(\alpha, \beta, a)$  e  $H(\alpha, \beta, a, b)$  não têm zeros em comum no bloco

$$B_1^s = (-3/25, 0] \times (-109/1000, 109/1000) \times (0, 2] \times (0, 1].$$

O polinômio

$$T(0, 3/25, -109/1000, 0, 0, 1) = 32358477753388520655601\beta^8 b^2 \alpha^8 + \\ + \dots + 56554250305536000000$$

tem 227 monômios, todos positivos. Desta forma, os polinômios  $F(\alpha, \beta, a)$  e  $H(\alpha, \beta, a, b)$  não tem zeros em comum no bloco

$$(0, 3/25] \times (-109/1000, 0] \times (0, 2] \times (0, 1].$$

Pela paridade de  $T(\alpha, \beta, b)$  em  $\beta$ , temos que os polinômios  $F(\alpha, \beta, a)$  e  $H(\alpha, \beta, a, b)$  não tem zeros em comum no bloco

$$(0, 3/25] \times [0, 109/1000) \times (0, 2] \times (0, 1].$$

Logo, os polinômios  $F(\alpha, \beta, a)$  e  $H(\alpha, \beta, a, b)$  não têm zeros em comum no bloco

$$B_2^s = (0, 3/25] \times (-109/1000, 109/1000) \times (0, 2] \times (0, 1].$$

Como os polinômios  $F(\alpha, \beta, a)$  e  $H(\alpha, \beta, a, b)$  não têm zeros em comum em  $B_1^s$  ou  $B_2^s$ , temos que os polinômios  $F(\alpha, \beta, a)$  e  $H(\alpha, \beta, a, b)$  não tem zeros em comum no bloco

$$(-3/25, 3/25] \times (-109/1000, 109/1000) \times (0, 2] \times (0, 1].$$

Sendo assim, no bloco

$$(-3/25, 3/25] \times (-109/1000, 109/1000) \times (0, 2] \times (0, 1]$$

não existem soluções para o sistema de equações polinomiais

$$(2') \begin{cases} H(\alpha, \beta, a, b) = 0 \\ F(\alpha, \beta, a) = 0 \end{cases}$$

**Observação 28.** A equação

$$H(\alpha, \beta, a, b) = 0$$

é uma das condições necessárias e suficientes para que a tripla  $(x, y, z)$ , dada pelas fórmulas de Cardano, seja constituída por soluções da equação cúbica

$$t^3 - at^2 + bt - c = 0,$$

onde  $a, b, c$  são as variáveis simétricas. Já a equação

$$F(\alpha, \beta, a) = 0$$

mostra-nos se a tripla  $(x, y, z)$ , dada pelas fórmulas de Cardano, está no plano das configurações.

Como

$$(-12/100, 12/100] \times \left(-\frac{3\sqrt{3}}{50}, \frac{3\sqrt{3}}{50}\right] \times (0, 2] \times (0, 1]$$

está contido em

$$(-3/25, 3/25] \times (-109/1000, 109/1000) \times (0, 2] \times (0, 1],$$

temos que não existem soluções do sistema acima em

$$(-12/100, 12/100] \times \left(-\frac{3\sqrt{3}}{50}, \frac{3\sqrt{3}}{50}\right] \times (0, 2] \times (0, 1].$$

Segue-se que para cada quadrúpla

$$(\alpha, \beta, a, b) \in (-3/25, 3/25] \times (-109/1000, 109/1000) \times (0, 2] \times (0, 1],$$

temos que

$$H(\alpha, \beta, a, b) \neq 0 \text{ ou } F(\alpha, \beta, a) \neq 0.$$

Lembremos que as fórmulas de Cardano, para o caso  $\Delta \leq 0$  (ver página 33), dão-nos um difeomorfismo global

$$(\alpha, \beta, a) \longmapsto (x, y, z),$$

o qual, para cada  $(\alpha, \beta, a)$ , gera a tripla  $(x, y, z)$ . Sendo assim, pela observação acima, página 106, no primeiro caso, a tripla  $(x, y, z)$  não pode ser constituída de soluções da equação cúbica. Já no segundo caso, mesmo que a tripla  $(x, y, z)$  seja constituída de soluções da equação cúbica, suas componentes não são distâncias mútuas no plano das configurações. De qualquer modo, segue-se que a parte da curva algébrica

$$p(a, b) = 0$$

que nos interessa está em

$$\left(\frac{173}{100}, 2\right] \times (1, +\infty).$$

Agora, considerando o bloco

$$(37/100, 73/100] \times (37/100, 73/100] \times (37/100, 73/100]$$

temos que

$$1 < b \leq \frac{15987}{10000}.$$

Portanto, a parte da curva algébrica que estamos interessados encontra-se no seguinte retângulo do  $(a, b)$ -plano:

$$\left(\frac{173}{100}, 2\right] \times \left(1, \frac{15987}{10000}\right].$$

Consideremos a função polinomial dada por

$$p : (a, b) \longmapsto p(a, b).$$

O polinômio

$$\frac{\partial p}{\partial b}(67/50, 2, 1, 169/100) = -17398730331524982035401866390644028b^9 a^{18} -$$

—... — 1079932590876331683680156707763671875

tem 187 monômios, todos negativos. Sendo assim, o polinômio  $\frac{\partial p}{\partial b}(a, b)$  não se anula em

$$(67/50, 2] \times (1, 169/100].$$

Segue-se que

**Proposição 29.**  *$p^{-1}(0)$  é uma curva suave, mais precisamente, uma curva analítica em*

$$(173/100, 2] \times (1, 169/100).$$

Logo,  $p^{-1}(0)$  é localmente o gráfico de uma função analítica real de uma variável real em

$$(173/100, 2] \times (1, 169/100),$$

isto é, para cada  $(a^0, b^0) \in (173/100, 2] \times (1, 169/100)$ , no  $(a, b)$ -plano, com

$$p(a^0, b^0) = 0,$$

existem intervalos abertos  $\mathbb{K}$  e  $\mathbb{J}$ , com  $(a^0, b^0) \in \mathbb{K} \times \mathbb{J}$ , e  $\xi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{J}$  uma função analítica tais que  $(\mathbb{K} \times \mathbb{J}) \cap p^{-1}(0)$  é o gráfico da função analítica  $\xi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{J}$ .

Para o que se segue

**Notação 30.** Denotemos por  $\mathbb{B}$  a região que no plano das configurações, no interior do triângulo, é determinada pelo bloco

$$(37/100, 73/100] \times (37/100, 73/100] \times (37/100, 73/100].$$

Sendo assim, usando o fato de que o sistema (1) é simétrico, temos que: só precisamos conhecer as soluções do sistema (1) em  $\frac{1}{6}$  do triângulo, isto é, em um dos setores de  $\frac{\pi}{3}$  radianos interseccionado com a região  $\mathbb{B}$ . No interior de cada setor de  $\frac{\pi}{3}$  radianos, temos que a aplicação

$$\Phi : (x, y, z) \mapsto (a, b, c),$$

onde



$$\begin{cases} a = x + y + z \\ b = xy + xz + yz \\ c = xyz \end{cases}$$

é um difeomorfismo global. De fato, o determinante jacobiano de  $\Phi$  é o polinômio

$$D(x, y, z) = (x - y)(x - z)(y - z).$$

Ou seja, as triplas  $(x, y, z)$  que anulam o polinômio  $D(x, y, z)$  no plano das configurações estão sobre as mediatrizes. Portanto, fora das mediatrizes  $\Phi$  é um difeomorfismo local. Agora,  $\Phi$  é injetivo no interior de cada setor de  $\frac{\pi}{3}$  radianos. Desta forma, concluímos que  $\Phi$  é um difeomorfismo global sobre a imagem do interior de cada setor de  $\frac{\pi}{3}$  radianos. Concentremos nossa atenção no setor de  $\frac{\pi}{3}$  radianos, o qual denotaremos por  $\mathbb{S}$ , que interseccionado com  $\mathbb{B}$  (ver Notação 30, página 108), está contido no bloco

$$\begin{aligned} \frac{37}{100} < x < \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{73}{100}\right)^2 + \frac{1}{4}} < y < \sqrt{\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{37}{100}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{37}{100}\right)} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} < z \leq \frac{73}{100}. \end{aligned}$$

Para o cálculo dos extremos em  $y$  usamos o teorema de Pitágoras e a lei dos cossenos (ver Figura 14). Aproximando em centésimos por falta e por excesso, temos que  $\mathbb{S}$  interseccionado com  $\mathbb{B}$  (ver Notação 30, página 108), está contido em

$$(37/100, 58/100) \times (51/100, 71/100) \times (57/100, 73/100].$$

No  $(a, b)$ -plano, este bloco corresponde ao retângulo

$$\left(\frac{29}{20}, \frac{101}{50}\right) \times \left(\frac{6903}{10000}, \frac{2707}{2000}\right).$$

Como o polinômio

$$\begin{aligned} p(1817/1000, 2, 1, 169/100) = \\ = -218875048634179527514839166621322858428273257033804355344399b^{10}a^{20} - \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&+24269801734800a^2b + 6937255850040ab^2 + 13205231303400a^2+ \\
&+15367997764080ab + 1607615382879b^2 + 8423685914040a+ \\
&+3601880917758b + 1992501534879
\end{aligned}$$

tem 15 monômios, todos positivos, temos que  $c = c(a, b)$  não se anula em

$$(173/100, 1817/1000] \times (1, 1042/1000].$$

Logo,  $c = c(a, b)$  tem sinal constante em

$$(173/100, 1817/1000] \times (1, 1042/1000].$$

Como

$$c_1(175/100, 104/100) = \frac{361919}{160000} > 0,$$

temos que  $c = c(a, b)$  tem sinal constante positivo em

$$(173/100, 1817/1000] \times (1, 1042/1000].$$

**Observação 31.** Observemos que

$$\frac{\partial c}{\partial a} = -\frac{3a^4 - a^2 - 4a^2b - 1 - b^2 - 2b}{6a^2}$$

tem o mesmo sinal do polinômio

$$c_2(a, b) = -3a^4 + 4a^2b + a^2 + b^2 + 2b + 1.$$

Como o polinômio

$$\begin{aligned}
c_2(173/100, 2, 1, 148/100) = &-263595041a^4b^2 - 271644482a^4b - 1457873600a^3b^2 - \\
&-369441a^4 - 1833776000a^3b - 2910810000a^2b^2 - 345182400a^3 - 4104314400a^2b - \\
&-2516000000ab^2 - 1147424400a^2 - 3821120000ab - 800000000b^2 - 1274400000a - \\
&-1280000000b - 472320000
\end{aligned}$$

tem 15 monômios, todos negativos e

$$c_2(175/100, 104/100) = -\frac{10990818439619241}{160000} < 0,$$

temos que  $\frac{\partial c}{\partial a}$  tem sinal constante negativo. Logo, na direção do  $a$ -eixo,  $\frac{\partial c}{\partial a}$  decresce. Observemos que

$$\frac{\partial c}{\partial b} = \frac{-b + 2a^2 - 1}{3a}$$

tem o mesmo sinal do polinômio

$$c_3(a, b) = 2a^2 - b - 1.$$

Como o polinômio

$$c_3(173/100, 2, 1, 148/100) = 6643a^2b + 5843a^2 + 16400ab + 14800a + 10000b + 9200$$

tem 6 monômios, todos positivos e

$$c_3(175/100, 104/100) = \frac{45760057}{400} > 0,$$

temos que  $\frac{\partial c}{\partial b}$  tem sinal constante positivo. Logo, na direção do  $b$ -eixo,  $\frac{\partial c}{\partial b}$  cresce.

Observemos que, originalmente,  $c = xyz$ . Para o bloco

$$(37/100, 58/100) \times (51/100, 71/100) \times (57/100, 73/100],$$

$c = xyz$  varia em

$$\left( \frac{107559}{1000000}, \frac{150307}{500000} \right).$$

Enquanto que

$$c = -\frac{a^4 - a^2 - 4a^2b + b^2 + 2b + 1}{6a}$$

no bloco

$$(173/100, 1817/1000] \times (1, 1042/1000]$$

varia em

$$\left( \frac{535871794293}{3634000000000}, \frac{78003093}{346000000} \right) \subset \left( \frac{107559}{1000000}, \frac{150307}{500000} \right),$$

conforme **Observação 31**, página 111, segundo a qual, sabemos que os pontos de mínimo e de máximo são, respectivamente,

$$(1817/1000, 1) \text{ e } (173/100, 1042/1000).$$

Este fato é essencial para podermos admitir a atuação do difeomorfismo (analítico) inverso  $\Phi^{-1}$  na imagem através de  $\Phi$  do interior de qualquer um dos setores de  $\frac{\pi}{3}$  radianos. Segue-se que, no plano das configurações, a inversa da curva analítica  $p^{-1}(0)$ , através do difeomorfismo (analítico) inverso  $\Phi^{-1}$ , definido na imagem através de  $\Phi$  do interior de qualquer um dos setores de  $\frac{\pi}{3}$  radianos, dá-nos uma curva analítica no interior de qualquer um dos setores de  $\frac{\pi}{3}$  radianos. Já sabemos onde esta curva toca nas mediatrizes. Com isso, temos uma curva contínua no plano das configurações que é analítica no interior de cada setor de  $\frac{\pi}{3}$  radianos, a qual denominaremos de Curva de Degenerescência. Esta curva é obtida por reflexão no plano das configurações da parte da curva contida em qualquer um dos setores de  $\frac{\pi}{3}$  radianos. Sendo assim, concluímos que esta curva é fechada. Agora, mostraremos que esta curva é simples, isto é, não tem auto-intersecções. Para tanto, mostraremos que a curva  $p^{-1}(0)$  no retângulo

$$(173/100, 1817/1000] \times (1, 1042/1000]$$

do  $(a, b)$ -plano é um gráfico, isto é, que existe um intervalo  $\mathbb{I} \subset (173/100, 1817/1000]$  tal que, para todo  $a \in \mathbb{I}$ , existe um, e somente um,  $b \in (1, 1042/1000]$  tal que  $b = b(a)$  com  $p(a, b) = 0$ .

O polinômio

$$p(173/100, 1817/1000, 1, 1042/1000) = \sum_{i=0}^{10} f_i(a)b^i$$

tem 11 monômios cujos coeficientes  $f_i(a)$  são polinômios na variável  $a$  ordenados em ordem decrescente dos graus dos monômios tais que  $\deg(f_i(a)) = 20$ , para  $i = 0, \dots, 10$ ,  $f_0(a)$  tem 21 monômios negativos e, para cada  $i = 1, \dots, 10$ ,  $f_i(a)$  tem uma única variação de sinal, mais precisamente,  $f_i(a)$  tem os  $2i$  primeiros monômios positivos e os restantes  $21 - 2i$ , monômios negativos, para  $i = 1, \dots, 10$ . Para cada  $i = 1, \dots, 10$ , seja  $a_i$  a única solução de  $f_i(a) = 0$ . Neste caso,

$$\begin{aligned} \frac{3}{10000} < a_{10} < \frac{4}{10000} < \frac{13}{10} < a_9 < \frac{14}{100} < \frac{29}{100} < a_8 < \frac{3}{10} < \frac{5}{10} < a_7 < \frac{6}{10} < \frac{7}{10} < \\ < a_6 < \frac{8}{10} < \frac{11}{10} < a_5 < \frac{12}{10} < \frac{17}{10} < a_4 < \frac{18}{10} < \frac{27}{10} < a_3 < \frac{28}{10} < \frac{47}{10} < a_2 < \frac{48}{10} < 11 < \\ &< a_1 < 12 \end{aligned}$$

e

$$f_i(a) < 0, \text{ para } a < a_i \text{ e } f_i(a) > 0, \text{ para } a > a_i.$$

**Observação 32.** Relembremos que o polinômio  $p(173/100, 1817/1000, 1, 1042/1000)$  é o numerador da função racional

$$p(\phi(173/100, 1817/1000, a), \phi(1, 1042/1000, b)),$$

onde

$$\phi(173/100, 1817/1000, a) = \frac{173}{100}a + \frac{1817}{1000} \quad \text{e} \quad \phi(1, 1042/1000, b) = \frac{b + \frac{1042}{1000}}{b + 1}.$$

Observemos que o mesmo nome é usado tanto para a variável na definição de cada uma das transformações de Möbius quanto para as variáveis correspondentes no polinômio original. Para o que se segue, tenhamos estas considerações em mente.

**Observação 33.** Seja

$$\phi(k, w, x) = \frac{kx + w}{x + 1}.$$

Sendo assim,

$$\frac{d\phi}{dx}(x) = \frac{k - w}{(x + 1)^2}.$$

Se  $k < w$ ,  $\phi$  é estritamente decrescente em  $[0, +\infty)$ . Se  $k > w$ ,  $\phi$  é estritamente crescente em  $[0, +\infty)$ .

Do que vimos acima, temos que, para  $a \leq a_{10}$ , o polinômio

$$p(173/100, 1817/1000, 1, 1042/1000)$$

não varia de sinal. De fato, como  $a \leq a_{10} < a_j$ , para  $j = 1, 2, \dots, 9$ , temos que  $f_j(a) < 0$ , para  $j = 1, 2, \dots, 9$ , e  $f_{10}(a) \leq 0$ . Logo, para  $b \geq 0$ ,

$$\sum_{k=0}^{10} f_k(a)b^k < 0,$$

já que  $f_0(a) < 0$ ,  $\forall a \geq 0$ . Agora, se  $a > a_{10}$ , o polinômio

$$p(173/100, 1817/1000, 1, 1042/1000)$$

tem sempre uma variação de sinal. Isto significa que podemos diminuir o extremo superior do intervalo de variação de  $a$  ( $a$  como variável do polinômio original). De fato, basta tomarmos

$$\frac{173}{100} < a < \alpha_0 := \phi(173/100, 1817/1000, a_{10}) = \frac{\frac{173}{100}a_{10} + \frac{1817}{1000}}{a_{10} + 1} < \frac{1817}{1000}.$$

Logo, para todo  $a \in \mathbb{I} = (\frac{173}{100}, \alpha_0)$ , como

$$p(173/100, \alpha_0, 1, 1042/1000)$$

tem uma variação de sinal, existe um único  $b \in (1, \frac{1042}{1000}]$  com  $b = b(a)$  e  $p(a, b) = 0$ . Portanto, no retângulo

$$\mathbb{I} \times (1, \frac{1042}{1000}],$$

$p^{-1}(0)$  é o gráfico da função  $b = b(a)$  definida em  $\mathbb{I}$ . Disto, segue-se que a curva de degenerescência é simples. Além disso,  $p^{-1}(0)$  é conexo em

$$(173/100, 1817/1000] \times (1, 1042/1000].$$

**Observação 34.** Já observamos que

$$a_{10} \in (\frac{3}{10000}, \frac{4}{10000}).$$

Sendo assim, como  $\phi(173/100, 1817/1000, a)$  é estritamente decrescente, página 114, temos que

$$\begin{aligned} \frac{181696}{100000} &< \phi(173/100, 1817/1000, 4/10000) < \alpha_0 := \phi(173/100, 1817/1000, a_{10}) < \\ &< \phi(173/100, 1817/1000, 3/10000) < \frac{181698}{100000}. \end{aligned}$$

Aqui, cabe observar que a função  $b = b(a)$  é analítica em  $\mathbb{I}$ . De fato, dado  $(a, b(a)) \in p^{-1}(0)$ , com  $a \in \mathbb{I}$ , existem intervalos abertos  $\mathbb{K}$  e  $\mathbb{J}$ , com  $(a, b(a)) \in \mathbb{K} \times \mathbb{J}$ , tais que  $(\mathbb{K} \times \mathbb{J}) \cap p^{-1}(0)$  é o gráfico de uma função analítica  $\xi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{J}$ . Como  $b(a) = \xi(a)$ , para todo  $a \in \mathbb{I} \cap \mathbb{K}$ , temos que  $b = b(a)$  é analítica em  $\mathbb{I}$ .

Agora, determinemos, precisamente, a parte da curva  $p^{-1}(0)$ , no  $(a, b)$ -plano, que gera toda a curva de degenerescência no plano das configurações. Já demonstramos que a curva de degenerescência é simples.

Para tanto, relembremos alguns outros fatos relativos à equação cúbica com coeficientes reais

$$t^3 - at^2 + bt - c = 0.$$

Nós sabemos que o sinal do discriminante

$$\Delta = 4(b - \frac{a^2}{3})^3 + 27(-c + \frac{ab}{3} - \frac{2a^3}{27})^2$$

revela a natureza das raízes. De fato,

$\Delta > 0$  equivale a uma raiz real e duas imaginárias conjugadas;

$\Delta = 0$  equivale a três raízes reais, sendo duas delas iguais;

$\Delta < 0$  equivale a três raízes reais distintas.

Sendo  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  tais raízes, temos que

$$\Delta = -(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2,$$

como é fácil ver, basta substituímos  $a = x_1 + x_2 + x_3$ ,  $b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$  e  $c = x_1x_2x_3$  em  $\Delta$ . E daqui, segue-se os dois últimos fatos acima referentes à natureza das raízes, que são os casos que estamos interessados. E mais, nestes casos, a aplicação  $\Phi$  é sobrejetiva.

Substituindo

$$c = -\frac{a^4 - a^2 - 4a^2b + b^2 + 2b + 1}{6a}$$

em  $\Delta$  e simplificando, obtemos a função racional cujo numerador é o polinômio

$$\begin{aligned} \Delta(a, b) = & a^8 - 4a^6b - 10a^6 - 2a^4b^2 + 56a^4b + 12a^2b^3 + 19a^4 - 90a^2b^2 + \\ & + 9b^4 - 72a^2b + 36b^3 - 18a^2 + 54b^2 + 36b + 9, \end{aligned}$$

e o denominador é o monômio  $12a^2$ . Como  $a > 0$ , temos que a função racional  $\Delta$  e o polinômio  $\Delta(a, b)$  têm o mesmo sinal.

Por um momento, procuremos no  $(a, b)$ -plano o correspondente geométrico das mediatrizes no plano das configurações. Para tanto, consideremos uma das mediatrizes, digamos,  $x = y$ , já que o procedimento para as outras é totalmente análogo. Desta forma, temos as equações

$$(3') \quad \begin{cases} 2x + z - a = 0 \\ 2xz + x^2 - b = 0 \\ x^2z - c = 0 \end{cases}$$

Substituindo  $z = a - 2x$  na segunda e terceira equações acima obtemos



$$(4') \begin{cases} f(x, a, b, c) := 3x^2 - 2xa + b = 0 \\ g(x, a, b, c) := 2x^3 - x^2a + c = 0 \end{cases}$$

Agora, calculando o resultante dos polinômios  $f(x, a, b, c)$  e  $g(x, a, b, c)$  com relação à variável  $x$  obtemos o polinômio

$$r(a, b, c) = 4a^3c - a^2b^2 - 18abc + 4b^3 + 27c^2.$$

Substituindo

$$c = c(a, b) = -\frac{a^4 - a^2 - 4a^2b + b^2 + 2b + 1}{6a}$$

em  $r(a, b, c)$  e simplificando obtemos

$$r(a, b) := r(a, b, c(a, b)) = \frac{\Delta(a, b)}{12a^2},$$

que é a mesma função racional  $\Delta$  obtida acima. Logo, no  $(a, b)$ -plano, as mediatrizes correspondem à curva algébrica

$$\Delta(a, b) = 0.$$

Estudemos o sinal do polinômio  $\Delta(a, b)$  ao longo de  $p^{-1}(0)$  em

$$(173/100, 1817/1000] \times (1, 1042/1000].$$

Como vimos acima,  $p^{-1}(0)$  em

$$(173/100, 1817/1000] \times (1, 1042/1000]$$

é o gráfico da função analítica real de uma variável real  $b = b(a)$ , com  $a \in \mathbb{I}$ . Inicialmente, procuremos as soluções do sistema

$$(5') \begin{cases} p(a, b) = 0 \\ \Delta(a, b) = 0 \end{cases}$$

em

$$(173/100, 1817/1000] \times (1, 1042/1000].$$

Como o polinômio

$$\begin{aligned} \Delta(173/100, 441/250, 128/125, 521/500) &= 96156155740250390625b^4a^8 + \\ &+ \dots + 79235493640261042176 \end{aligned}$$

tem 45 monômios, todos positivos, temos que o sistema (5') não tem solução em

$$(173/100, 441/250] \times (128/125, 521/500].$$

Já o polinômio

$$\begin{aligned} p(441/250, 1817/1000, 128/125, 521/500) &= \\ &= -15793610564804773938448037123493070440970722264654944009191424b^{10}a^{20} - \\ &- \dots - 1296350111155184675234366036909117676486449034669022814618904399 \end{aligned}$$

tem 231 monômios, todos negativos. Sendo assim, o sistema (5') não tem solução em

$$(441/250, 1817/1000] \times (128/125, 521/500].$$

Logo, o sistema (5') não tem solução em

$$(173/100, 1817/1000] \times (128/125, 521/500].$$

E mais, a curva  $p^{-1}(0)$  não intersecta o bloco

$$(441/250, 1817/1000] \times (128/125, 521/500].$$

Com isso, a parte da curva  $p^{-1}(0)$  que está no bloco

$$(173/100, 1817/1000] \times (128/125, 521/500]$$

localiza-se em

$$(173/100, 441/250] \times (128/125, 521/500].$$

Também, temos que a curva algébrica dada por  $\Delta(a, b) = 0$  não intersecta o bloco

$$(173/100, 441/250] \times (128/125, 521/500].$$

E assim, neste bloco, o sinal de  $\Delta(a, b)$  é constante. Como

$$\Delta(175/100, 104/100) = \frac{866936449}{25600000000} > 0,$$

temos que  $\Delta(a, b)$  tem sinal positivo em

$$(173/100, 441/250] \times (128/125, 521/500].$$

Logo,  $\Delta > 0$  neste bloco. Como estamos interessados em três raízes reais, temos que desconsiderar a parte da curva  $p^{-1}(0)$  no bloco

$$(173/100, 441/250] \times (128/125, 521/500].$$

Como o polinômio

$$\begin{aligned} p(173/100, 889/500, 1, 1271/1250) = \\ = 1728549504705761821379302143711858741356811618804931640625b^{10}a^{20} + \\ + \dots + 600665804663839038916355869509933310854716881853361201 \end{aligned}$$

tem 231 monômios, todos positivos, temos que o sistema (5') não tem solução em

$$(173/100, 889/500] \times (1, 1271/1250].$$

E mais, a curva  $p^{-1}(0)$  não intersecta o bloco

$$(173/100, 889/500] \times (1, 1271/1250].$$

Logo, a parte da curva  $p^{-1}(0)$  que está em

$$(173/100, 1817/1000] \times (1, 10168/10000]$$

está no sub-bloco

$$(889/500, 1817/1000] \times (1, 10168/10000].$$

O polinômio

$$\begin{aligned} \Delta(889/500, 1817/1000, 1, 1271/1250) = 18298370959570613166336b^4a^8 + \\ + \dots + 11183791842947423291841 \end{aligned}$$

tem 45 monômios, todos positivos. Portanto, o sistema (5') não tem solução em

$$(889/500, 1817/1000] \times (1, 10168/10000].$$

Logo, o sistema (5') não tem solução em

$$(173/100, 1817/1000] \times (1, 10168/10000].$$

E mais, a curva algébrica dada por  $\Delta(a, b) = 0$  não intersecta este bloco. Logo, o sinal de  $\Delta(a, b)$  é constante em

$$(889/500, 1817/1000] \times (1, 10168/10000].$$

Como

$$\Delta(18/10, 101/100) = \frac{60993}{4000000} > 0,$$

temos que  $\Delta(a, b) > 0$  em

$$(889/500, 1817/1000] \times (1, 10168/10000].$$

Logo,  $\Delta > 0$  neste bloco. Como estamos interessados em três raízes reais, temos que desconsiderar a parte da curva  $p^{-1}(0)$  no bloco

$$(889/500, 1817/1000] \times (1, 10168/10000].$$

Sendo assim, a intersecção das curvas algébricas dadas por (5') está em

$$(173/100, 1817/1000] \times (10168/10000, 1024/1000].$$

Como o polinômio

$$p(173/100, 881/500, 1271/1250, 128/125) =$$

$$= 1173243458380314101161969872925568246957650852203369140625b^{10}a^{20} + \\ + \dots + 25004146936619539789859858194249190903846274255164999601$$

tem 231 monômios, todos positivos, temos que o sistema (5') não tem solução em

$$(173/100, 881/500] \times (1271/1250, 128/125].$$

Além disso, temos que a curva  $p^{-1}(0)$  não intersecta o bloco

$$(173/100, 881/500] \times (1271/1250, 128/125].$$

Com isso, as soluções do sistema (5') estão em

$$(881/500, 1817/1000] \times (10168/10000, 1024/1000].$$

Como o polinômio

$$\begin{aligned} & p(1779/1000, 1817/1000, 1271/1250, 128/125) = \\ & = -15633918049091560950360323357369753510666533138270181163057599b^{10}a^{20} - \\ & \quad - \dots - 610471995766260890654477581430430474958890751833001604471664399 \end{aligned}$$

tem 231 monômios, todos negativos, temos que o sistema (5') não tem solução em

$$(1779/1000, 1817/1000] \times (1271/1250, 128/125].$$

Com isso, temos que as soluções do sistema (5') estão em

$$(881/500, 1779/1000] \times (10168/10000, 1024/1000].$$

Aqui, afirmamos que a função  $b = b(a)$  é monótona estritamente decrescente em

$$(173/100, 1812/1000] \times (1, 1042/1000].$$

De fato, consideremos a função racional

$$\frac{db}{da} = -\frac{\frac{\partial p}{\partial a}}{\frac{\partial p}{\partial b}}.$$

Lembremos que  $\frac{\partial p}{\partial b}$  tem sinal constante em

$$(67/50, 2] \times (1, 169/100].$$

Como o polinômio

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p}{\partial a}(173/100, 453/250, 1, 521/500) = \\ & -3486271625122888960077217032444400508763370513916015625b^9a^{19} - \\ & \quad - \dots - 23821477756523269187578719573592283184210247579336704 \end{aligned}$$

tem 200 monômios, todos negativos, temos que  $\frac{db}{da}$  tem sinal constante em

$$(173/100, 1812/1000] \times (1, 1042/1000].$$

Como

$$\frac{db}{da}(175/100, 104/100) = -\frac{6310229486155676803499448151}{14762851007025775587132946940} < 0,$$

temos que  $\frac{db}{da}$  é negativa em

$$(173/100, 1812/1000] \times (1, 1042/1000].$$

Logo,  $b = b(a)$  é estritamente decrescente, e conseqüentemente, injetiva, em

$$(881/500, 1779/1000] \times (10168/10000, 1024/1000].$$

Portanto,

**Proposição 35.** *A curva  $p^{-1}(0)$  é o gráfico da função analítica injetiva  $b = b(a)$  em*

$$(881/500, 1779/1000] \times (10168/10000, 1024/1000].$$

Até este momento, temos que a solução do sistema (1) dá-nos uma curva contínua fechada e simples que é obtida por reflexão no plano das configurações de qualquer uma das suas partes em qualquer um dos setores de  $\frac{\pi}{3}$  radianos. E mais, no interior de cada um destes setores a curva de degenerescência é analítica. Mais adiante, demonstraremos que esta curva é de fato analítica no plano das configurações. De fato, precisamos demonstrar a analiticidade da curva nos pontos de intersecção desta com as mediatrizes.

Continuemos a determinar, precisamente, a parte da curva  $p^{-1}(0)$ , no  $(a, b)$ -plano, que gera toda a curva de degenerescência no plano das configurações. Agora, determinemos a solução do sistema (5'). Sabemos que, como vimos na página 104, a menos de rotação de  $\frac{2\pi}{3}$ , existem duas soluções do sistema (1) sobre as mediatrizes, que naquela altura denominamos de  $(x_0, y_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1, y_1)$ . Conseqüentemente, obtemos duas soluções do sistema (5') no  $(a, b)$ -plano, denotemo-nas por

$$(a^0, b^0) \text{ e } (a^1, b^1),$$

onde

$$a^i = x_i + 2y_i \text{ e } b^i = 2x_i y_i + y_i^2, \text{ para } i = 0, 1.$$

Claramente, estas soluções estão no bloco

$$(881/500, 1779/1000] \times (10168/10000, 1024/1000].$$

Afirmamos que só existem estas duas soluções do sistema (5') neste bloco. Vejamos, por um lado, calculando o resultante dos polinômios  $p(a, b)$  e  $\Delta(a, b)$  com respeito à variável  $a$  obtemos o polinômio

$$r(b) = 981442558066553631277056b^{80} - 113847336735720221228138496b^{78} + \\ + \dots + 74413168051827830275126189163387440594944$$

com 80 monômios. O polinômio  $r(10168/10000, 1024/1000)$  tem duas variações de sinal, uma em  $(10169/10000, 1017/1000)$  e outra em  $(10234/10000, 10235/10000)$ . Por outro lado, calculando o resultante dos polinômios  $p(a, b)$  e  $\Delta(a, b)$  com respeito à variável  $b$  obtemos o polinômio

$$s(a) = 990677827584a^{80} - 49533891379200a^{78} + \dots + 185857891611295208177664a^{20}$$

com 60 monômios. O polinômio  $s(1762/1000, 1779/1000)$  tem duas variações de sinal, uma em  $(1764/1000, 1765/1000)$ , digamos  $a^0$ , e outra em  $(1777/1000, 1778/1000)$ , digamos  $a^1$ . Lembrando que  $b = b(a)$  é estritamente decrescente, concluímos que  $b^1 \in (10169/10000, 1017/1000)$  e  $b^0 \in (10234/10000, 10235/10000)$ . Logo,  $(a^0, b^0)$  e  $(a^1, b^1)$  são as únicas soluções do sistema (5') no  $(a, b)$ -plano.

Lembremos que  $p^{-1}(0)$  é conexo em

$$(173/100, \alpha_0) \times (1, 1042/1000]$$

e observemos que

$$(881/500, 1779/1000] \times (10168/10000, 1024/1000] \subset (173/100, \alpha_0) \times (1, 1042/1000].$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário (TVI) aplicado a função racional  $\Delta$  restrita à  $p^{-1}(0) \cap ((173/100, \alpha_0) \times (1, 1042/1000])$ , temos que a parte da curva que nos interessa está em  $[a^0, a^1] \times [b^1, b^0]$ . De fato, sobre a curva  $p^{-1}(0)$  no complemento de  $[a^0, a^1] \times [b^1, b^0]$  com respeito ao retângulo

$$(173/100, \alpha_0) \times (1, 1042/1000]$$

$\Delta$  tem sinal constante positivo, pois, se  $\Delta$  mudasse de sinal sobre a curva  $p^{-1}(0)$  neste complemento, sabendo que  $\Delta$  tem sinal constante positivo sobre a curva  $p^{-1}(0)$  tanto no bloco

$$(173/100, 441/250] \times (1024/1000, 1042/1000]$$

como no bloco

$$(1778/1000, \alpha_0) \times (1, 10168/10000],$$

e mais, sabendo que  $p^{-1}(0)$  é conexo em

$$(173/100, \alpha_0) \times (1, 1042/1000],$$

isto implicaria, pelo TVI, que existiria uma solução do sistema (5') diferente de  $(a^0, b^0)$  e  $(a^1, b^1)$ , mas, isto seria um absurdo, já que as únicas soluções do sistema (5') em

$$(173/100, \alpha_0) \times (1, 1042/1000]$$

são estas. Logo, sobre a parte da curva  $p^{-1}(0)$  fora do retângulo

$$[a^0, a^1] \times [b^1, b^0],$$

$\Delta$  tem sinal constante positivo. De forma análoga, podemos mostrar que  $\Delta$  tem sinal constante em

$$(a^0, a^1) \times (b^1, b^0),$$

já que

$$(353/200, 1111/625] \times (1017/1000, 5117/5000] \subset (a^0, a^1) \times (b^1, b^0)$$

e

$$\begin{aligned} \Delta(353/200, 1111/625, 1017/1000, 5117/5000) = & -339269272184985198974609375b^4a^8 - \\ & - \dots - 916948140235842873659387904 \end{aligned}$$

tem 45 monômios, todos negativos. Como

$$\Delta(177/100, 102/100) = -\frac{13966049221119}{10000000000000000} < 0,$$

temos que  $\Delta$  tem sinal constante negativo em  $(a^0, a^1) \times (b^1, b^0)$ . Portanto, a parte da curva  $p^{-1}(0)$  que nos interessa está em

$$[a^0, a^1] \times [b^1, b^0]$$

(ver Figura 15). Esta é a parte da curva  $p^{-1}(0)$  que gera no plano das configurações toda a curva de degenerescência. Sendo assim, pela observação 31, página 111, dados

$$(a^s, b^s), (a^t, b^t) \in [a^0, a^1] \times [b^1, b^0],$$



com, digamos,  $a^s < a^t$ , temos que  $b^t < b^s$  e

$$0 < c^t = c(a^t, b^t) < c^s = c(a^s, b^s).$$

Logo,  $c = c(a, b)$  é injetiva. Desta forma, cada um dos

$$c^s \in \left( \frac{535871794293}{3634000000000}, \frac{78003093}{346000000} \right)$$

produzidos por  $c = c(a, b)$  vem de um único

$$(a^s, b^s) \in [a^0, a^1] \times [b^1, b^0]$$

tal que  $c^s = c(a^s, b^s)$ . E assim, através do difeomorfismo  $\Phi^{-1}$ , o qual é definido na imagem através de  $\Phi$  de qualquer um dos setores de  $\frac{\pi}{3}$  radianos, a tripla  $(a^s, b^s, c^s)$  é levada, biunivocamente, na tripla

$$(x^s, y^s, z^s) \in (37/100, 73/100] \times (37/100, 73/100] \times (37/100, 73/100]$$

tal que

$$P(x^s, y^s, z^s) = 0 \quad \text{e} \quad F(x^s, y^s, z^s) = 0.$$

Lembremos que a tripla  $(x^s, y^s, z^s)$  é constituída por soluções da equação cúbica

$$t^3 - a^s t^2 + b^s t - c^s = 0,$$

e que, como  $\Delta(a^s, b^s) \leq 0$ , as componentes da tripla  $(x^s, y^s, z^s)$  são, de fato, números reais, e como sabemos, positivos. Logo,  $(x^s, y^s, z^s)$  é um ponto da curva de degenerescência. Ademais, por permutações das componentes deste ponto, obtemos outros cinco pontos sobre a curva de degenerescência. Cada um destes seis pontos está em um, e somente um, setor de  $\frac{\pi}{3}$  radianos. É desta forma que o difeomorfismo  $\Phi^{-1}$  trabalha. Com isso, nós determinamos precisamente a parte da curva  $p^{-1}(0)$  que, através do difeomorfismo analítico inverso  $\Phi^{-1}$ , é levada na parte da curva de degenerescência, contida em qualquer um dos setores de  $\frac{\pi}{3}$  radianos, que por reflexão em torno de cada mediatriz gera toda a curva de degenerescência.

## 4.4 A Analiticidade da Curva de Degenerescência

Passemos a demonstrar que de fato a curva de degenerescência é analítica. Para tanto, basta-nos analisar a analiticidade da curva sobre as mediatrizes. Pela simetria

do sistema, basta analisarmos sobre uma das mediatrizes. Para isto, utilizamos a mesma técnica com a qual Leandro [10], páginas 339-351, retratou as configurações centrais simétricas.

Lembremos que a curva de degenerescência é dada por

$$\psi(u, v) = 0,$$

onde

$$\psi(u, v) = \det D\nabla\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial u^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial u\partial v}\right)^2.$$

Após algumas substituições, conforme vimos no Capítulo 2, Secção 2.2, página 21, chegamos a

$$\psi(x, y, z) = \frac{3(x-1)(x^2+x+1)(y-1)(y^2+y+1)(z-1)(z^2+z+1)P(x, y, z)}{4x^2y^2z^2Q(x, y, z)^2},$$

com

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) = & 3x^3y^3z^3 + x^5y^3 + x^5z^3 + x^3y^5 - 2x^3y^3z^2 - 2x^3y^2z^3 + x^3z^5 - 2x^2y^3z^3 + \\ & + y^5z^3 + y^3z^5 - 2x^3y^3 - 2x^3z^3 - 2y^3z^3 - 2x^5 + x^3y^2 + x^3z^2 + x^2y^3 + \\ & + x^2z^3 - 2y^5 + y^3z^2 + y^2z^3 - 2z^5 + x^3 + y^3 + z^3. \end{aligned}$$

Já sabemos que o polinômio  $Q(x, y, z)$  não se anula nas regiões admissíveis e que a equação  $\psi(u, v) = 0$  equivale ao sistema

$$\begin{cases} P(x, y, z) = 0 \\ F(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Determinemos a analiticidade da curva nos pontos de intersecção com a mediatriz  $y = z$ , no interior do triângulo. Segue-se que  $v = 0$ , e conseqüentemente,  $\frac{\partial\Psi}{\partial v}$  reduz-se a

$$\left(\frac{1}{y^3} - \frac{1}{2}\right)(m_2 - m_3).$$

Como  $0 < y < 1$ , temos que uma condição necessária para a existência de configurações centrais sobre a mediatriz  $y = z$  no interior do triângulo é que  $m_2 = m_3$ . Neste caso, podemos escrever

$$m_1 = \frac{1}{1+2m} \quad \text{e} \quad m_2 = \frac{m}{1+2m},$$

onde  $m = \frac{m_2}{m_1}$ . Desta forma,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2}(u, 0) = 1 + \frac{2}{(1+2m)x^3} - \frac{2m}{(1+2m)y^3} + \frac{6m(\frac{\sqrt{3}}{2} - x)^2}{(1+2m)y^5}$$

e

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2}(u, 0) = 1 - \frac{1}{(1+2m)x^3} - \frac{2m}{(1+2m)y^3} + \frac{3m}{2(1+2m)y^5}.$$

Como  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial u \partial v}(u, 0) = 0$ , temos que

$$\psi(u, 0) = \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2} \right)(u, 0)$$

e

$$\frac{\partial \psi}{\partial u}(u, 0) = \left( \frac{\partial^3 \Psi}{\partial u^3} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial u \partial v^2} \right)(u, 0).$$

Nós sabemos que existem somente duas soluções de  $\psi(u, v) = 0$  sobre a mediatriz  $y = z$ , uma para  $u < 0$  e outra para  $u > 0$ . Sejam  $(u_0, 0)$  e  $(u_1, 0)$  estas soluções sobre  $y = z$ , com  $u_0 < 0$  e  $u_1 > 0$ , ver página 104. Sendo assim,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2}(u_0, 0) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2}(u_0, 0) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2}(u_1, 0) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2}(u_1, 0) = 0.$$

**Proposição 36.** (1)  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2}(u_1, 0) \neq 0$  e (2)  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2}(u_0, 0) \neq 0$ .

**Demonstração.** Mostremos que (1) ocorre. Observemos que

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2}(u, 0) = \frac{f(x, y, m)}{2(1+2m)x^3y^5}$$

tem o mesmo sinal do polinômio

$$f(x, y, m) = f_1(x, y)m + 2x^3y^5 + 4y^5,$$

onde

$$f_1(x, y) = f_{11}(x, y)x^3,$$

com  $f_{11}(x, y) = 4y^5 + 12x^2 - 4y^2 - 12\sqrt{3}x + 9$ . Como o polinômio

$$f_{11}(3718/10000, 3762/10000, 7/10, 703/1000)$$

tem grau total 7 e 18 monômios, todos positivos, e

$$f_{11}(375/1000, 701/1000) = \frac{2349747934903501}{2500000000000000} - \frac{9\sqrt{3}}{2} > 0,$$

temos que  $f_{11}(x, y)$  tem sinal constante positivo em

$$(3718/10000, 3762/10000] \times (7/10, 703/1000].$$

Logo,  $f_1(x, y)$  tem sinal constante positivo em

$$(3718/10000, 3762/10000] \times (7/10, 703/1000].$$

E assim,  $f(x, y, m)$  tem sinal constante positivo em

$$(3718/10000, 3762/10000] \times (7/10, 703/1000].$$

Desta forma,  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2}(u, 0)$  tem sinal constante positivo em

$$(3718/10000, 3762/10000] \times (7/10, 703/1000].$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2}(u_1, 0) \neq 0.$$

Mostremos (2). Substituindo  $y = z$ , e conseqüentemente,  $m_2 = m_3$ , bem como,  $u = \frac{1}{\sqrt{3}} - x$ ,  $m_1 = \frac{1}{1+2m}$  e  $m_2 = \frac{m}{1+2m}$  em

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u} = 0,$$

e resolvendo esta equação para  $m$  obtemos

$$m = \frac{(x^3 - 1)y^3}{(y^3 - 1)(\sqrt{3} - 2x)x^2}.$$

Substituindo este valor de  $m$  em  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2}(u, 0)$  obtemos

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2}(u, 0) = \frac{g_1(x, y)}{g_2(x, y)},$$

onde

$$g_1(x, y) = 2\sqrt{3}x^3y^5 - 2\sqrt{3}x^3y^2 - 2\sqrt{3}y^5 + 3x^4 + 2\sqrt{3}y^2 - 3x$$

e

$$g_2(x, y) = 2xy^2g_{22}(x, y),$$

com  $g_{22}(x, y) = \sqrt{3}x^2y^3 + 2x^3 - 2y^3 - \sqrt{3}x^2$ . Como o polinômio

$$g_{22}(7231/10000, 72876/100000, 5185/10000, 52/100)$$

tem grau total 6 e 16 monômios, todos negativos, temos que  $g_2(x, y)$  não se anula em

$$(7231/10000, 72876/100000] \times (5185/10000, 52/100].$$

Logo, o polinômio  $g_2(x, y)$  tem sinal constante em

$$(7231/10000, 72876/100000] \times (5185/10000, 52/100].$$

O polinômio

$$g_1(7231/10000, 72876/100000, 5185/10000, 52/100)$$

tem grau total 9 e 30 monômios, todos negativos. Logo, o polinômio  $g_1(x, y)$  tem sinal constante em

$$(7231/10000, 72876/100000] \times (5185/10000, 52/100].$$

Portanto,  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2}(u, 0)$  tem sinal constante em

$$(7231/10000, 72876/100000] \times (5185/10000, 52/100].$$

E assim,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2}(u_0, 0) \neq 0,$$

como queríamos demonstrar. □

Segue-se da proposição acima que

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2}(u_0, 0) = 0 \quad e \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2}(u_1, 0) = 0.$$

**Proposição 37.** (3)  $\frac{\partial^3 \Psi}{\partial u^3}(u_0, 0) \neq 0$  e (4)  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial u \partial v^2}(u_1, 0) \neq 0$ .

**Demonstração.** Mostremos (3). Derivando  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2}(u, 0)$  com respeito à variável  $u$ , obtemos

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial u^3}(u, 0) = \frac{6}{(1+2m)x^4} + \frac{18m(\frac{\sqrt{3}}{2} - x)}{(1+2m)y^5} - \frac{30m(\frac{\sqrt{3}}{2} - x)^3}{(1+2m)y^7}.$$

Simplificando esta expressão, chegamos à

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial u^3}(u, 0) = \frac{h(x, y, m)}{4(1+2m)x^4y^7},$$

onde

$$h(x, y, m) = h_1(x, y)m + 24y^7,$$

com

$$h_1(x, y) = 120x^7 - 72x^5y^2 - 180\sqrt{3}x^6 + 36\sqrt{3}x^4y^2 + 270x^5 - 45\sqrt{3}x^4.$$

Observemos que a função racional  $\frac{\partial^3 \Psi}{\partial u^3}(u, 0)$  tem o mesmo sinal do polinômio  $h(x, y, m)$ . Como o polinômio

$$h_1(7231/10000, 72876/100000, 5185/10000, 52/100)$$

tem grau total 9 e 24 monômios, todos positivos e

$$h_1(725/1000, 519/1000) = \frac{402122368347387}{6400000000000} - \frac{5742922974039\sqrt{3}}{160000000000} > 0,$$

temos que  $h_1(x, y)$  tem sinal constante positivo em

$$(7231/10000, 72876/100000] \times (5185/10000, 52/100].$$

Logo,  $h(x, y, m)$  tem sinal constante positivo em

$$(7231/10000, 72876/100000] \times (5185/10000, 52/100].$$

E assim,  $\frac{\partial^3 \Psi}{\partial u^3}(u, 0)$  tem sinal constante positivo em

$$(7231/10000, 72876/100000] \times (5185/10000, 52/100].$$

Portanto,

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial u^3}(u_0, 0) \neq 0.$$

Agora, mostremos (4). Derivando  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2}(u, 0)$  com respeito à variável  $u$ , obtemos

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial u \partial v^2}(u, 0) = -\frac{3}{(1+2m)x^4} + \frac{6m(\frac{\sqrt{3}}{2} - x)}{(1+2m)y^5} - \frac{15m(\frac{\sqrt{3}}{2} - x)}{2(1+2m)y^7}.$$

Simplificando esta expressão, chegamos à

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial u \partial v^2}(u, 0) = \frac{q(x, y, m)}{4(1+2m)x^4y^7},$$

onde

$$q(x, y, m) = q_1(x, y)m - 12y^7,$$

com

$$q_1(x, y) = -24x^5y^2 + 12\sqrt{3}x^4y^2 + 30x^5 - 15\sqrt{3}x^4.$$

Observemos que a função racional  $\frac{\partial^3 \Psi}{\partial u \partial v^2}(u, 0)$  tem o mesmo sinal do polinômio  $q(x, y, m)$ . Como o polinômio

$$q_1(3718/10000, 3762/10000, 7/10, 703/1000)$$

tem grau total 7 e 18 monômios negativos e

$$q_1(375/1000, 701/1000) = \frac{553018671}{4096000000} - \frac{184339557\sqrt{3}}{1024000000} < 0,$$

temos que  $q_1(x, y)$  tem sinal constante negativo em

$$(3718/10000, 3762/10000] \times (7/10, 703/1000].$$

Logo,  $q(x, y, m)$  tem sinal constante negativo em

$$(3718/10000, 3762/10000] \times (7/10, 703/1000].$$

E assim,  $\frac{\partial^3 \Psi}{\partial u \partial v^2}(u, 0)$  tem sinal constante negativo em

$$(3718/10000, 3762/10000] \times (7/10, 703/1000].$$

Portanto,

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial u \partial v^2}(u_1, 0) \neq 0,$$

como queríamos demonstrar.  $\square$

Das proposições acima, segue-se que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial u}(u_0, 0) = \left( \frac{\partial^3 \Psi}{\partial u^3} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2} \right)(u_0, 0) \neq 0$$

e

$$\frac{\partial \psi}{\partial u}(u_1, 0) = \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial u \partial v^2} \right)(u_1, 0) \neq 0.$$

Logo, pelo Teorema das Funções Implícitas (versão analítica), para  $i = 0, 1$ , existem  $\mathbb{J}_i$  e  $\mathbb{K}_i$  intervalos abertos, com  $(u_i, 0) \in \mathbb{J}_i \times \mathbb{K}_i$ , e  $\xi_i : \mathbb{K}_i \rightarrow \mathbb{J}_i$  função analítica tais que

$$(\xi_i(v), v) \in \mathbb{J}_i \times \mathbb{K}_i \text{ e } \psi(\xi_i(v), v) = 0.$$

De outra forma,  $\psi^{-1}(0) \cap (\mathbb{J}_i \times \mathbb{K}_i)$  é o gráfico da função analítica  $\xi_i$ , para  $i = 0, 1$ . Portanto,

**Teorema 38.** *A curva de degenerescência é analítica no plano das configurações.*

Este teorema mostra-nos um resultado inédito. Nem Pedersen, nem Simó e nem Gannaway mencionam este fato. Lembramos que os resultados de Pedersen e Simó são numéricos. Eles afirmaram numericamente que a curva de degenerescência era fechada e simples. Neste ponto, o Gannaway recorreu a métodos numéricos. Nós, de forma analítica, mostramos que a curva, além de fechada e simples, é uma curva analítica.



## Capítulo 5

# O Número de Configurações Centrais no PR4CP

Neste quinto capítulo, demonstramos que, assim como Pedersen tinha afirmado, Simó confirmado e Gannaway utilizado, a imagem da curva de degenerescência no espaço de parâmetros,  $(m_1, m_2, m_3)$ -espaço, é fechada e simples. Com maior precisão, vemos que esta curva está no interior do simplexo, isto é, em

$$\Sigma = \{(m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{R}^3 : m_1 + m_2 + m_3 = 1, m_j > 0, j = 1, 2, 3\},$$

como mostra-nos as expressões das componentes da aplicação de mapeamento. A primeira propriedade da curva mapeada é imediata: fechada, por causa da curva de degenerescência, a qual é fechada, e pelo fato de que  $M$  preserva a simetria da curva  $\mathbb{C}$ . Segue-se, pelo Teorema da Curva de Jordan, que  $\Sigma$  tem duas componentes conexas, tendo a curva mapeada como fronteira de ambas as componentes. Desta forma, os casos particulares tomados por Gannaway (ver [6], Capítulo 2, páginas 29-45), para estudar o número de configurações centrais no PR4CP, agora, são os casos de interesse. De fato, usando o Teorema da Aplicação Inversa, vemos que aquelas escolhas particulares retratam a situação geral da contagem no interior do simplexo, pois, a função que associa cada tripla de massas em  $\Sigma$ , exceto sobre a curva mapeada, ao número de pré-imagens desta tripla, pela aplicação de mapeamento, é uma função contínua. As idéias contidas aqui são genuinamente nossas.

## 5.1 A Curva Mapeada no Simplexo

Já sabemos que a curva de degenerescência, a qual denotamos por  $\mathbb{C}$ , é uma curva fechada, simples e analítica. Agora, vejamos esta curva no espaço dos parâmetros, o  $(m_1, m_2, m_3)$ -espaço, mais precisamente, em

$$\Sigma = \{(m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{R}^3 : m_1 + m_2 + m_3 = 1, m_j > 0, j = 1, 2, 3\}.$$

Para tanto, consideremos  $\mathfrak{R}$  como a união de todas as regiões admissíveis. É imediato que  $\mathfrak{R}$  é um aberto limitado no plano das configurações. Neste caso, utilizaremos a aplicação

$$M : \mathfrak{R} \longrightarrow \Sigma$$

dada por

$$M(x, y, z) = (U(x, y, z), V(x, y, z), W(x, y, z)),$$

com

$$U(x, y, z) = \frac{x^3(1-y^3)(1-z^3)(y^2+z^2-2x^2+1)}{Q(x, y, z)}$$

$$V(x, y, z) = \frac{y^3(1-z^3)(1-x^3)(z^2+x^2-2y^2+1)}{Q(x, y, z)}$$

$$W(x, y, z) = \frac{z^3(1-x^3)(1-y^3)(x^2+y^2-2z^2+1)}{Q(x, y, z)},$$

onde  $Q(x, y, z)$  é um polinômio simétrico caracterizado pela condição

$$U(x, y, z) + V(x, y, z) + W(x, y, z) = 1.$$

Explicitamente,

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) = & 3x^3y^3z^3 + x^5y^3 + x^5z^3 + x^3y^5 - 2x^3y^3z^2 - 2x^3y^2z^3 + x^3z^5 - 2x^2y^3z^3 + \\ & + y^5z^3 + y^3z^5 - 2x^3y^3 - 2x^3z^3 - 2y^3z^3 - 2x^5 + x^3y^2 + x^3z^2 + x^2y^3 + \\ & + x^2z^3 - 2y^5 + y^3z^2 + y^2z^3 - 2z^5 + x^3 + y^3 + z^3. \end{aligned}$$

Já sabemos que este polinômio não se anula em  $\mathfrak{R}$ . Como é fácil ver, temos, também, que

$$U(x, y, z) > 0, V(x, y, z) > 0 \text{ e } W(x, y, z) > 0$$

em  $\mathfrak{R}$ . Com isso,  $M$  está bem definida sobre  $\Sigma$ . Na realidade, a definição de  $M$  vem das expressões das massas,  $m_k$ , em termos das distâncias mútuas, as quais foram obtidas do potencial reduzido  $\Psi$  escrito em termos dos quadrados das distâncias mútuas, onde buscamos os pontos críticos de  $\Psi$  sobre a superfície dada por

$$F(x, y, z) = 0,$$

onde

$$F(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - x^2y^2 - x^2z^2 - y^2z^2 - x^2 - y^2 - z^2 + 1,$$

que é uma aplicação rotineira do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, juntamente com a condição

$$m_1 + m_2 + m_3 = 1$$

(ver Capítulo 2, Seção 2.2, página 20).

Lembremos que a equação

$$F(x, y, z) = 0$$

dá-nos a condição de coplanaridade. Além disso, lembremos que  $F^{-1}(0)$  é uma superfície no primeiro octante do  $(x, y, z)$ -espaço, pois, 0 é valor regular de  $F(x, y, z)$  (ver página 16).

Passamos a demonstrar que

**Proposição 39.** *Sobre a curva  $\mathbb{C}$  tem-se que*

*$U = V$ ,  $U = W$  e  $V = W$  se, e somente se,  $x = y$ ,  $x = z$  e  $y = z$ , respectivamente.*

**Demonstração.** Basta mostrarmos uma das possíveis equivalências, digamos, demonstrarmos que

$$V = W \iff y = z.$$

Para tanto, considerando o polinômio

$$H(x, y, z) = V(x, y, z) - W(x, y, z),$$

simplificando-o, chegamos a

$$H(x, y, z) = \frac{(1 - x^3)(y - z)S(x, y, z)}{Q(x, y, z)},$$

onde

$$S(x, y, z) = 3y^4z^3 + 3y^3z^4 + x^2y^2 + x^2yz + x^2z^2 - 2y^4 - \\ - 2y^3z - y^2z^2 - 2yz^3 - 2z^4 + y^2 + yz + z^2$$

e  $Q(x, y, z)$  é o polinômio da página 134. Sendo assim, obtemos a condição:

$$H(x, y, z) = 0 \iff y = z \text{ ou } S(x, y, z) = 0.$$

Pela fatoração de  $H(x, y, z)$ , temos, claramente, a implicação

$$y = z \implies V = W.$$

Consideremos o sistema de equações polinomiais

$$(0) \begin{cases} S(x, y, z) = 0 \\ P(x, y, z) = 0 \\ F(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Demonstraremos que o sistema (0) não tem solução fora da mediatriz  $y = z$ . Sendo assim, concluiremos que

$$V = W \iff y = z.$$

Para isso, utilizamos o Teorema 7, Capítulo 1, Seção 2.3, página 23. Primeiro, calculando e simplificando os resultantes  $R(S, P, x)$  e  $R(S, F, x)$  obtemos

$$T(y, z) = R(S, P, x) = 9(1 - y^3)^2(1 - z^3)^2(y - z)^4 T_1(y, z)$$

e

$$L(y, z) = R(S, F, x) = 9L_1(y, z)^2,$$

onde  $T_1(y, z)$  é um polinômio simétrico de grau total 75 com 1415 monômios e

$$\begin{aligned} L_1(y, z) = & 3y^8z^6 + 6y^7z^7 + 3y^6z^8 - 3y^8z^3 - 6y^7z^4 - 3y^6z^5 - 3y^5z^6 - 6y^4z^7 - \\ & - 3y^3z^8 + 3y^6z^3 + 6y^5z^4 + 6y^4z^5 + 3y^3z^6 + y^8 + 2y^7z + y^6z^2 + y^5z^3 + \\ & + 2y^4z^4 + y^3z^5 + y^2z^6 + 2yz^7 + z^8 - 2y^6 - 4y^5z - 5y^4z^2 - 5y^3z^3 - \\ & - 5y^2z^4 - 4yz^5 - 2z^6 + y^4 + 2y^3z + 3y^2z^2 + 2yz^3 + z^4 \end{aligned}$$

é um polinômio simétrico. Sendo assim, usando a hipótese de que  $y \neq z$ , do sistema (0) obtemos o sistema

$$(1) \begin{cases} T_1(y, z) = 0 \\ L_1(y, z) = 0 \end{cases}$$

Como  $T_1(y, z)$  e  $L_1(y, z)$  são simétricos, usando a mudança de variáveis

$$(2) \begin{cases} a = y + z \\ b = yz \end{cases}$$

chegamos ao sistema

$$(3) \begin{cases} T_1(a, b) = 0 \\ L_1(a, b) = 0 \end{cases}$$

onde  $T_1(a, b)$  é um polinômio de grau total 48 com 627 monômios e

$$\begin{aligned} L_1(a, b) = & a^8 - 3a^5b^3 + 3a^2b^6 - 6a^6b + 9a^3b^4 - 2a^6 + 9a^4b^2 + 3a^3b^3 + \\ & + 8a^4b - a^2b^3 - 3ab^4 + a^4 - 7a^2b^2 - 2a^2b + b^3 + b^2. \end{aligned}$$

O polinômio

$$K(b) = R(T_1(a, b), L_1(a, b), a)$$

fatora-se como

$$K(b) = 31381059609b^{116}(b+1)^4(b^2+b+1)^{18}(b-1)^{24}K_1(b),$$

onde  $K_1(b)$  é um polinômio de grau 112 com 113 monômios. Através de (2), transformamos o retângulo

$$(37/100, 73/100] \times (37/100, 73/100],$$

do  $(y, z)$ -plano, no retângulo

$$(37/50, 73/50] \times (1369/10000, 5329/10000],$$

do  $(a, b)$ -plano. Agora, verificando que  $K_1(11/100, 8/10)$  não muda de sinal, concluímos que  $K(b)$  não muda de sinal em

$$(1369/10000, 5329/10000] \subset (11/100, 8/10].$$

Desta forma, o sistema (3) não tem solução em

$$(37/50, 73/50] \times (1369/10000, 5329/10000].$$

E então, o sistema (1) não tem solução em

$$(37/100, 73/100] \times (37/100, 73/100].$$

Portanto, o sistema (0) não tem solução em

$$(37/100, 73/100] \times (37/100, 73/100] \times (37/100, 73/100].$$

Bem, nós já sabemos que a curva  $\mathbb{C}$  está contida neste bloco. Logo, fora da mediatriz  $y = z$ ,  $H(x, y, z)$  não se anula. Sendo assim,

$$V = W \iff y = z,$$

como queríamos demonstrar. □

**Observação 40.** A Proposição 39 mostra-nos que sobre cada mediatriz do simplexo, isto é, sobre  $U = V$  ou  $U = W$  ou  $V = W$ , existem exatamente dois pontos da curva mapeada. Este fato mostra-nos que não se pode gerar uma auto-intersecção na curva mapeada refletindo-a em torno das mediatrizes do simplexo, pois, isto implicaria a existência de outros pontos da curva mapeada sobre as mediatrizes do simplexo de um mesmo lado relativo à tripla  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ .

Considerando no  $(m_1, m_2, m_3)$ -espaço o triângulo dado pelos vértices  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$  e  $(0,0,1)$ , podemos considerar a tripla  $(U, V, W)$  como as coordenadas baricêntricas de um ponto no triângulo considerado. Sendo assim, qualquer um dos pares

$$(U, V), (U, W) \text{ e } (V, W)$$

serve como coordenadas de um ponto em  $\Sigma$  (ver Figura 16). Nosso interesse é demonstrar que  $M(\mathbb{C})$  é uma curva fechada e simples. Como, claramente, a curva  $M(\mathbb{C})$  é fechada, resta-nos mostrar que em  $\Sigma$  a curva mapeada não tem auto-intersecção. É fato que:

*se um dos pares  $(U, V)$  ou  $(U, W)$  ou  $(V, W)$  detectar uma auto-intersecção, todos os outros a detectarão.*

Sendo assim, se um deles não detectar, nenhum detectará. A seguir, mostraremos que o par  $(U, V)$  não detecta auto-intersecção.

Inicialmente, considerando  $X$  uma matriz  $3 \times 2$  e denotando por  $J_{ij}(X)$  o menor  $2 \times 2$  de  $X$  tomando as linhas  $i$ -ésima e  $j$ -ésima, mostremos que

**Proposição 41.**

$$J_{ij}(x^0, y^0, z^0) := J_{ij} \left( \frac{\partial M}{\partial(x, y, z)} \Big|_{\mathbb{T}_{(x^0, y^0, z^0)} F^{-1}(0)} \right) = 0 \iff (x^0, y^0, z^0) \in \mathbb{C},$$

para todo  $i < j$ , com  $i, j = 1, 2, 3$ . Ou seja, os pontos críticos de  $M$  são os pontos pertencentes à curva  $\mathbb{C}$ .

**Demonstração.** Vê-se facilmente que este resultado independe da particular base que tomamos em

$$\mathbb{T}_{(x^0, y^0, z^0)} F^{-1}(0) = \langle \nabla F(x^0, y^0, z^0) \rangle^\perp.$$

Sendo assim, para o que se segue fixemos a base

$$\beta = \{(-F_z, 0, F_x), (0, -F_z, F_y)\}.$$

Desta forma, para cada par

$$(U, V), (U, W) \text{ e } (V, W),$$

obtemos

$$J_{12}(x, y, z) = \frac{36x^2y^2z^3(x^3 - 1)(y^3 - 1)(z^3 - 1)W_1(x, y, z)P(x, y, z)}{Q(x, y, z)^3},$$

$$J_{13}(x, y, z) = -J_{12}(x, y, z) \text{ e } J_{23}(x, y, z) = J_{12}(x, y, z),$$

respectivamente, onde

$$\begin{aligned} P(x, y, z) = & 12x^5y^7z^4 + 12z^5y^7x^4 + 12y^5x^4z^7 + 12y^4x^7z^5 + 12y^5x^7z^4 + 12z^7y^4x^5 - \\ & - 12x^5y^2z^9 - 12y^5x^9z^2 - 12y^9x^2z^5 - 12z^9y^5x^2 - 12y^9x^5z^2 - 12y^2x^9z^5 - 8x^6z^5y^5 - \\ & - 8y^5z^6x^5 - 8z^5y^6x^5 + 4x^{11}y^5 + 4y^{11}z^5 + 4x^{11}z^5 + 4x^5y^{11} + 4z^{11}x^5 + 4z^{11}y^5 - \dots - x^2 - z^2 - y^2 \end{aligned}$$

é o polinômio simétrico com 194 monômios que nos dá a condição de degenerescência,

$$P(x, y, z) = 0,$$

$$W_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2 + 1$$

e  $Q(x, y, z)$  é o polinômio da página 134. Portanto,

$$J_{ij}(x, y, z) = 0 \iff P(x, y, z) = 0 \text{ e } F(x, y, z) = 0,$$

para  $i < j$ , com  $i, j = 1, 2, 3$ , como queríamos.  $\square$

A Proposição 41 diz-nos que em  $\mathfrak{R} \setminus \mathbb{C}$  a aplicação  $M$  é um difeomorfismo local. Esta é a descrição analítica chave para que realizemos a contagem do número de configurações centrais no PR4CP, como veremos na próxima seção.

Observemos que o vetor

$$\nabla P(x, y, z) \times \nabla F(x, y, z) = (P_y F_z - P_z F_y, P_z F_x - P_x F_z, P_x F_y - P_y F_x),$$

é paralelo ao vetor tangente à curva  $\mathbb{C}$  em  $(x, y, z)$ . A partir daqui, utilizemos sobre  $\Sigma$  o sistema de coordenadas dado pelo par  $(U, V)$ . E assim, escrevendo o vetor  $\nabla P(x, y, z) \times \nabla F(x, y, z)$  sobre o plano tangente  $T_{(x,y,z)}F^{-1}(0)$ , com respeito à base

$$\beta = \{(-F_z, 0, F_x), (0, -F_z, F_y)\},$$

obtemos as coordenadas

$$-\frac{1}{F_z}(P_y F_z - P_z F_y, P_z F_x - P_x F_z).$$

É importante salientarmos que, de fato,  $F_z(x, y, z)$  não se anula em

$$(37/100, 73/100] \times (37/100, 73/100] \times (37/100, 73/100],$$

já que

$$F_z = -2zW_1,$$

onde, como antes,

$$W_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2 + 1.$$

Agora, aplicando a matriz da transformação

$$\frac{\partial(U, V)}{\partial(x, y, z)} \Big|_{T_{(x,y,z)}F^{-1}(0)} = \begin{bmatrix} -U_x F_z + U_z F_x & -U_y F_z + U_z F_y \\ -V_x F_z + V_z F_x & -V_y F_z + V_z F_y \end{bmatrix},$$

transformamos o vetor

$$-\frac{1}{F_z}(P_y F_z - P_z F_y, P_z F_x - P_x F_z)$$

de  $T_{(x,y,z)}F^{-1}(0)$  no vetor

$$(\dot{U}, \dot{V})$$



de  $\mathbb{R}^2$ , onde

$$\dot{U}(x, y, z) = -\frac{1}{F_z} [(-U_x F_z + U_z F_x)(P_y F_z - P_z F_y) + (-U_y F_z + U_z F_y)(P_z F_x - P_x F_z)]$$

e

$$\dot{V}(x, y, z) = -\frac{1}{F_z} [(-V_x F_z + V_z F_x)(P_y F_z - P_z F_y) + (-V_y F_z + V_z F_y)(P_z F_x - P_x F_z)].$$

O vetor  $(\dot{U}, \dot{V})$  é paralelo ao vetor tangente de  $M(\mathbb{C})$ . Como a curva  $\mathbb{C}$  é dada pelo anulamento do determinante

$$\begin{vmatrix} -U_x F_z + U_z F_x & -U_y F_z + U_z F_y \\ -V_x F_z + V_z F_x & -V_y F_z + V_z F_y \end{vmatrix},$$

temos que existe uma função racional  $\lambda = \lambda(x, y, z)$  tal que

$$(-U_x F_z + U_z F_x, -U_y F_z + U_z F_y) = \lambda(-V_x F_z + V_z F_x, -V_y F_z + V_z F_y).$$

Segue-se que  $\dot{U} = \lambda \dot{V}$  ao longo de  $\mathbb{C}$ . Denotemos por  $\lambda$  tanto a função racional quanto a sua restrição à  $\mathbb{C}$ . Oportunamente, cabe observar que, devido a simetria da curva  $M(\mathbb{C})$  no triângulo de massas, precisamos ater-nos a  $\frac{1}{6}$  deste triângulo. Sendo assim, basta considerarmos a tripla  $(x, y, z)$  no bloco

$$(37/100, 58/100] \times (51/100, 71/100] \times (57/100, 73/100]$$

(ver Figura 14).

A seguir, demonstraremos que

**Lema 42.**  $\lambda$  tem sinal constante negativo em

$$(37/100, 58/100] \times (51/100, 71/100] \times (57/100, 73/100].$$

**Demonstração.** Podemos determinar o sinal de  $\lambda$  observando os sinais das funções racionais  $U^{xz} := -U_x F_z + U_z F_x$  e  $V^{xz} := -V_x F_z + V_z F_x$ . Observemos que

$$U^{xz} = \frac{6x^2 z(1 - y^3)J(x, y, z)}{Q(x, y, z)^2}$$

e

$$V^{xz} = \frac{6xy^3 z(y^3 - 1)(x - z)L(x, y, z)}{Q(x, y, z)^2},$$

onde

$$J(x, y, z) = 6x^5y^5z^6 - 6x^5y^3z^8 + \dots + z^3$$

é um polinômio com 162 monômios e

$$L(x, y, z) = 6x^7z^6 + 6x^6z^7 - \dots - 2xz - 2z^2 + 1$$

é um polinômio com 137 monômios. Segue-se das expressões de  $U^{xz}$  e  $V^{xz}$  que

$$U^{xz} = 0 \iff J(x, y, z) = 0$$

e

$$V^{xz} = 0 \iff x = z \text{ ou } L(x, y, z) = 0.$$

Já sabemos que sobre as mediatrizes  $V = W$  e  $U = V$  do triângulo de massas, a curva  $M(\mathbb{C})$  intersecta-as no  $(U, V)$ -plano, a menos de rotação de  $\frac{2\pi}{3}$  radianos, em

$$(U(x_1, y_1, y_1), V(x_1, y_1, y_1)), (U(x_0, y_0, y_0), V(x_0, y_0, y_0)), (U(y_1, y_1, x_1), U(y_1, y_1, x_1)) \\ \text{e } (U(y_0, y_0, x_0), U(y_0, y_0, x_0))$$

(ver Figura 17).

Com isso, mostramos que a parte da curva  $\mathbb{C}$  que se encontra no setor contido na região definida pelo bloco

$$(37/100, 58/100] \times (51/100, 71/100] \times (57/100, 73/100],$$

no plano das configurações, é levada pela aplicação  $M$  na parte da curva  $M(\mathbb{C})$  que se encontra no setor delimitado pelas mediatrizes  $V = W$  e  $U = V$ , o qual contém o vértice  $(0, 0, 1)$  (ver Figura 18). Disto, também, segue-se que a curva  $M(\mathbb{C})$  não passa pelo centro geométrico do triângulo de massas, isto é,  $U = V = W = \frac{1}{3}$ . Logo,

$$V^{xz} = 0 \iff L(x, y, z) = 0.$$

Como

$$J(37/100, 29/50, 51/100, 71/100, 57/100, 73/100) = \\ = 1070042863192704003409152168501y^9x^{11}z^{12} + \\ + \dots + 1216086198188325408254902258899$$

tem 1560 monômios, todos positivos, temos que  $U^{xz}$  não se anula em

$$(37/100, 58/100] \times (51/100, 71/100] \times (57/100, 73/100].$$

Observando que

$$U^{xz}(1/2, 7/10, 7/10) = \frac{1808185657929}{1668888651125} > 0,$$

temos que  $U^{xz}$  tem sinal constante positivo em

$$(37/100, 58/100] \times (51/100, 71/100] \times (57/100, 73/100].$$

Agora, como

$$\begin{aligned} L(37/100, 58/100, 51/100, 71/100, 57/100, 73/100) = \\ = -9521109402274881644888438y^6x^{11}z^{11} - \\ - \dots - 18855561643936720752878712 \end{aligned}$$

tem 1008 monômios, todos negativos, temos que  $V^{xz}$  não se anula em

$$(37/100, 58/100] \times (51/100, 71/100] \times (57/100, 73/100].$$

Como

$$V^{xz}(1/2, 7/10, 7/10) = -\frac{91553513100238}{365486614596375} < 0,$$

temos que  $V^{xz}$  tem sinal constante negativo em

$$(37/100, 58/100] \times (51/100, 71/100] \times (57/100, 73/100].$$

Sendo assim,  $\lambda$  tem sinal constante negativo em

$$(37/100, 58/100] \times (51/100, 71/100] \times (57/100, 73/100].$$

Aqui, não nos preocupamos com a restrição de  $\lambda = \lambda(x, y, z)$  à parte da curva  $\mathbb{C}$  que se encontra no bloco

$$(37/100, 58/100] \times (51/100, 71/100] \times (57/100, 73/100],$$

pois, mostramos que o sinal de  $\lambda$  é constante negativo no bloco

$$(37/100, 58/100] \times (51/100, 71/100] \times (57/100, 73/100].$$

□

Do Lema 42, vemos que

**Proposição 43.**  $(\dot{U} \geq 0 \text{ e } \dot{V} \leq 0)$  ou  $(\dot{U} \leq 0 \text{ e } \dot{V} \geq 0)$ .

Relembremos que o nosso interesse é demonstrar que a curva mapeada por  $M$ , isto é,  $M(\mathbb{C})$ , não tem auto-intersecção. Nós sabemos que o vetor  $(\dot{U}, \dot{V})$  é paralelo ao vetor tangente de  $M(\mathbb{C})$ . Desta forma, segue-se que as componentes do vetor tangente de  $M(\mathbb{C})$  têm sinais contrários sobre a parte da curva  $\mathbb{C}$  que se encontra em

$$(37/100, 58/100] \times (51/100, 71/100] \times (57/100, 73/100].$$

Logo, se numa direção, digamos, do  $U$ -eixo, não-decresce, na outra direção, no caso, do  $V$ -eixo, não-cresce. Disto e da Observação 40, página 138, segue-se que a parte da curva  $M(\mathbb{C})$  que se encontra no setor delimitado pelas mediatrizes  $V = W$  e  $U = V$ , o qual contém o vértice  $(0, 0, 1)$ , não tem auto-intersecção. Portanto, por simetria,

**Teorema 44.** *A curva  $M(\mathbb{C})$  não tem auto-intersecção.*

## 5.2 A Contagem

Como vimos na Secção 1, a curva mapeada por  $M$  é fechada e simples. Pelo Teorema da Curva de Jordan,  $\Sigma$  divide-se em duas componentes conexas, tendo  $M(\mathbb{C})$  como fronteira de ambas. Sejam  $L$  e  $K$  os abertos conexos correspondentes às componentes conexas, isto é,  $L$  e  $K$  são as componentes conexas excetuando-se a fronteira, com  $L$  contendo a tripla  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  e  $K$  não a contendo (ver Figura 19).

Para o que se segue, denotemos por  $\text{card}(X)$  o número de elementos de  $X$ . Como  $M$  é contínua, temos que, para cada tripla de massas  $m \in \Sigma \setminus M(\mathbb{C})$ ,

$$\text{card}(M^{-1}(m)) < \infty,$$

já que  $M^{-1}(m)$  é fechado e limitado no plano das configurações, isto é,  $M^{-1}(m)$  é compacto, e os pontos de  $M^{-1}(m)$  são isolados, como consequência do Teorema da Aplicação Inversa, conforme Proposição 41, página 139. Novamente, pelo Teorema da Aplicação Inversa, conforme Proposição 41, página 139, dado uma tripla de massas  $m^0 \in L$  (respectivamente,  $m^0 \in K$ ), existe  $\mathcal{U} \subset L$  (respectivamente,  $\mathcal{U} \subset K$ ) aberto, com  $m^0 \in \mathcal{U}$ , tal que

$$\text{card}(M^{-1}(m)) = \text{card}(M^{-1}(m^0)), \quad \forall m \in \mathcal{U}.$$

Segue-se que a aplicação  $N : L \cup K \longrightarrow \mathbb{N}$  dada por

$$N(m) = \text{card}(M^{-1}(m)),$$

onde  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ , é contínua. Desta forma,  $N(L)$  e  $N(K)$  são conexos. Logo,  $N$  é constante em  $L$  e em  $K$ .

Sendo assim, para calcularmos o número de configurações centrais no PR4CP, basta-nos tomar triplas de massas particulares, uma em  $L$  e uma em  $K$ , e contarmos o número de pré-imagens de cada uma delas. Para uma tripla de massas iguais, localizadas nos vértices de um triângulo equilátero, um resultado de Lindow [11] mostra-nos que existem 10 configurações centrais no PR4CP. O Gannaway, de forma bastante simples, usando  $m_1 = m_2 = m_3 = \frac{1}{3}$ , chega ao mesmo resultado, qual seja:

**Teorema 45.** *Para  $m_1 = m_2 = m_3 = \frac{1}{3}$ , existem 10 configurações centrais no PR4CP, uma em cada região admissível exterior e quatro na região admissível VII.*

**Demonstração.** Ver [6], Capítulo 2, páginas 29-34. □

No caso de  $K$ , o Gannaway demonstrou que

**Teorema 46.** *Para  $m_2 = m_3$  e  $m_1$  suficientemente pequeno tal que  $(m_1, m_2, m_3) \in K$ , existem 8 configurações centrais no PR4CP, uma em cada região admissível exterior e duas na região admissível VII.*

**Demonstração.** Ver Apêndice A. □

Pelos teoremas acima, se a tripla de massas está sobre a curva mapeada, temos que

*existem 9 configurações centrais, uma das quais está sobre a curva de degenerescência.*

Portanto, obtivemos todos os resultados de Pedersen, os quais foram confirmados por Simó, referentes ao número de configurações centrais no PR4CP. E mais, completamos o estudo analítico feito por Gannaway.

# Apêndice A

## Uma Demonstração para o Caso de uma Tripla de Massas em $K$

A finalidade deste Apêndice é exibir uma demonstração do Teorema 46, página 145. O motivo para isto é que não é fácil ter acesso ao trabalho do Gannaway [6]. Enquanto foi possível, ao fazermos referências ao trabalho do Gannaway, tomamos o cuidado de antecipadamente mencionar outras referências que tratam do mesmo interesse e que são facilmente encontradas. De fato, no caso do PR4CP em que as massas não-nulas estão numa configuração central euleriana, fizemos referência ao trabalho do Palmore [15], já no caso da contagem com massas iguais fizemos referência ao trabalho do Lindow [11]. Existe uma referência ao trabalho do Gannaway dada por Arenstorf [5]. O Arenstorf [5] conduz o leitor ao trabalho do Gannaway, supondo que nele encontram-se os detalhes das suas afirmações acerca da curva de degenerescência e da contagem do número de configurações centrais no PR4CP, o que efetivamente não se observa. Para o caso da contagem na região exterior à curva, o Gannaway dá uma demonstração analítica de que existem 8 configurações centrais para cada tripla de massas nesta região. Como não dispomos de nenhuma outra referência senão o Gannaway, passamos a enunciar e delinear a demonstração do Gannaway para o caso de uma tripla de massas em  $K$ . Antes disso, observemos que, em  $\mathfrak{R}$ , ver página 134, as equações

$$E_k : m_k \left(1 - \frac{1}{r_k^3}\right) = \rho(r_i^2 + r_j^2 - 2r_k^2 + 1),$$

para  $k = 1, 2, 3$  e  $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ , são equivalentes às equações

$$C_{kj} : m_k \left(1 - \frac{1}{r_k^3}\right) \beta_j = m_j \left(1 - \frac{1}{r_j^3}\right) \beta_k,$$

para  $1 \leq k < j \leq 3$ , onde

$$\beta_k = \frac{1}{3}(r_i^2 + r_j^2 - 2r_k^2 + 1),$$

com  $k = 1, 2, 3$  e  $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ . De fato, para a implicação direta, basta multiplicarmos a equação  $E_k$  por  $\beta_j$ , com  $j > k$ , para obtermos  $C_{kj}$ . Para a implicação inversa, definamos em  $\mathfrak{A}$

$$\rho = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 m_k \left(1 - \frac{1}{r_k^3}\right).$$

Substituindo

$$m_j \left(1 - \frac{1}{r_j^3}\right) = 3\rho - m_k \left(1 - \frac{1}{r_k^3}\right) - m_i \left(1 - \frac{1}{r_i^3}\right)$$

em  $C_{kj}$ , com  $k < j$ , e usando o fato de que

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1,$$

chegamos a  $E_k$ , como queríamos demonstrar. É fácil ver que  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\beta_3$  são as coordenadas baricêntricas de um ponto  $\mathbf{x}$  no plano das configurações e que

$$r_i^2 = \beta_j^2 + \beta_j\beta_k + \beta_k^2.$$

**Teorema 47.** *Para  $m_2 = m_3$  e  $m_1$  suficientemente pequeno tal que  $(m_1, m_2, m_3) \in K$ , existem 8 configurações centrais no  $PR_4CP$ , uma em cada região admissível exterior e duas na região admissível VII.*

**Demonstração.** Procuremos contar o número de interseções das curvas  $C_{ij}$ , com  $1 \leq i < j \leq 3$ , para  $m_2 = m_3$ . Inicialmente, observemos que  $\beta_2 = \beta_3$  é uma componente, a qual denotemos por  $Q$ , da curva  $C_{23}$ . De fato, nestas condições, como

$$r_i^2 = \beta_j^2 + \beta_j\beta_k + \beta_k^2,$$

temos que  $r_2 = r_3$ . Observemos que sobre  $Q$ ,  $C_{12} = C_{13}$ . Passemos a investigar as interseções de  $C_{12}$  com  $Q$ . Para tanto, consideremos  $\beta_1 = u$  e  $\beta_2 = \beta_3 = \frac{1-u}{2}$ . Sendo assim, como

$$r_i^2 = \beta_j^2 + \beta_j\beta_k + \beta_k^2,$$

temos que

$$r_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}|1-u| \text{ e } r_2 = r_3 = \frac{1}{2}\sqrt{1+3u^2}.$$

Então, a equação para  $C_{12}$  pode ser escrita como

$$f(u) := \frac{r_1^3(1-r_2^3)\beta_1}{r_2^3(1-r_1^3)\beta_2} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Na região admissível II, tem-se que  $1 \leq u \leq a := \frac{2\sqrt{3}+3}{3}$ . Desta forma,

$$f(u) = \frac{-6\sqrt{3}(1-u)^2(8-(1+3u^2)^{\frac{3}{2}})u}{(1+3u^2)^{\frac{3}{2}}(8-3\sqrt{3}(u-1)^3)}.$$

Segue-se que

$$f(u) > 0, \text{ para } u \in (1, a), \quad f(a-) = +\infty \text{ e } f(1) = 0.$$

Como  $f(u)$  é diferenciável em  $[1, a)$ , temos que existe  $c \in (1, a)$  tal que  $f'(u) > 0$ , para  $u \in (1, c)$ . E mais, desde que  $f(a-) = +\infty$ , existe  $d \in (c, a)$  tal que  $f(u) > 1$ , para  $u \in (d, a)$ . Agora, pela continuidade de  $f(u)$ , existe  $e > 0$  valor mínimo de  $f(u)$  em  $[c, d]$ . Conseqüentemente, tomando  $\frac{m_1}{m_2} < \min\{1, e\}$ , temos que  $f(u) = \frac{m_1}{m_2}$  para exatamente um  $u \in (1, c)$ . E assim,  $f(u) = \frac{m_1}{m_2}$  para exatamente um  $u \in (1, a)$ . Agora, consideremos  $u \leq 1$ . Sendo assim,

$$f(u) = \frac{6\sqrt{3}(1-u)^2(8-(1+3u^2)^{\frac{3}{2}})u}{(1+3u^2)^{\frac{3}{2}}(8-3\sqrt{3}(u-1)^3)}.$$

Nas regiões admissíveis I e VII, tem-se que  $u \in (-1, b)$  e  $u \in (0, 1)$ , respectivamente, onde  $b := \frac{3-2\sqrt{3}}{3}$ . Desta forma,  $f(u) > 0$  em  $(-1, b) \cup (0, 1)$ ,  $f(-1) = 0$ ,  $f(b-) = +\infty$ ,  $f(0) = 0$  e  $f(1) = 0$ . Desde que  $f(u)$  é diferenciável para  $u < 1$  e  $u \neq b$ , segue-se, por um argumento análogo àquele empregado para a região II, que, para  $\frac{m_1}{m_2}$  suficientemente pequeno,  $f(u) = \frac{m_1}{m_2}$  para exatamente dois valores  $u \in (0, 1)$  e um valor  $u \in (-1, b)$ . Logo, sobre as mediatrizes, para uma tripla de massas nas condições do enunciado do teorema, existem 8 configurações centrais. A próxima etapa na demonstração deste teorema, consiste em demonstrar que as curvas algébricas  $C_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq 3$  não se interceptam fora das mediatrizes. Inicialmente, façamos algumas considerações acerca da curva  $C_{23}$ , continuando a supor  $m_2 = m_3$ .

1.  $\beta_2 = 0$  ou  $r_3 = 1$  se, e somente se,  $\beta_3 = 0$  ou  $r_2 = 1$ . Isto é imediato.



2. Se  $\beta_1 = 0$  e  $\beta_2, \beta_3 > 0$ , então  $\beta_2 = \beta_3 = \frac{1}{2}$ . De fato, como

$$r_i^2 = \beta_j^2 + \beta_j\beta_k + \beta_k^2,$$

temos que  $r_2 = \beta_3$  e  $r_3 = \beta_2$ . Desta forma, fazendo  $\beta_2 = v$ , e assim,  $\beta_3 = 1 - v$ , a equação para  $C_{23}$  torna-se

$$(2v - 1)(v^4 - 2v^3 + v^2 + 1) = 0.$$

Como

$$v^4 - 2v^3 + v^2 + 1 > 0,$$

temos que  $\beta_2 = \beta_3 = \frac{1}{2}$ .

3.  $Q$  é a única componente de  $C_{23}$  que passa através de  $\beta_1 = -1$ ,  $\beta_2 = 1$  e  $\beta_3 = 1$ . De fato, considerando  $u = \beta_3$  e  $v = \beta_2$ , temos que a equação para  $C_{23}$  pode ser escrita na forma

$$g(u, v) := (r_2^3 - r_3^3 r_2^3)v - (r_3^3 - r_3^3 r_2^3)u = 0,$$

com

$$r_2^2 = 1 - u - 2v + u^2 + uv + v^2$$

e

$$r_3^2 = 1 - v - 2u + u^2 + uv + v^2.$$

Como uma consequência imediata desta forma de escrever  $C_{23}$ , temos que os vértices  $(0,0)$ ,  $(0,1)$  e  $(1,0)$  são pontos sobre a curva  $C_{23}$ . Agora, como

$$\frac{\partial g}{\partial u}(1, 1) = -\frac{\partial g}{\partial v}(1, 1) = \frac{3}{2},$$

temos, pelo Teorema da Função Implícita, que  $v = v(u)$  é a única função nas proximidades de  $u = 1$  tal que  $v'(1) = 1$ . E assim, temos o desejado.

4. Exatamente uma componente de  $C_{23}$  passa por  $\beta_1 = 0$ ,  $\beta_2 = 0$  e  $\beta_3 = 1$ , a qual é tangente à linha  $\beta_2 = 0$ . De fato, nas proximidades de  $(u, v) = (1, 0)$ , consideremos  $u = 1 + \epsilon$ . Sendo assim, usando o fato de que

$$r_i^2 = \beta_j^2 + \beta_j\beta_k + \beta_k^2,$$

bem como a expansão em série de Taylor, chegamos a

$$r_3^3 = (\epsilon^2 + \epsilon v + v^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$r_2^3 = 1 + \frac{3}{2}\epsilon - \frac{3}{2}v + \dots$$

e

$$r_2^{-3} = 1 - \frac{3}{2}\epsilon + \frac{3}{2}v + \dots$$

Desta forma, podemos escrever  $g(u, v) = 0$  como

$$vr_2^3 = r_3^3[r_2^3v + (1 - r_2^3)u].$$

Conseqüentemente,

$$0 = v^2 - r_3^6 r_2^{-3} [r_2^3 v + (1 - r_2^3) u]^2 = v^2 - \frac{27}{4} \epsilon^7 v - \frac{9}{4} \epsilon^8 + \dots =: G(\epsilon, v).$$

Pelo Teorema de Preparação de Weierstrass, existe uma função holomorfa  $W(\epsilon, v) = 1 + \dots$  tal que

$$GW = v^2 - 2H_1(\epsilon)v + H_0(\epsilon)$$

com  $H_1, H_0$  holomorfas numa vizinhança de  $\epsilon = 0$ . Logo,

$$v^2 - 2H_1(\epsilon)v + H_0(\epsilon) = 0,$$

com  $H_1(\epsilon) = \frac{27}{8}\epsilon^7 + \dots$  e  $H_0(\epsilon) = -\frac{9}{4}\epsilon^8 + \dots$ . Portanto,

$$\begin{aligned} v &= H_1(\epsilon) \pm \sqrt{H_1(\epsilon)^2 - H_0(\epsilon)} \\ &= \pm \frac{3}{2}\epsilon^4 + \dots \end{aligned}$$

Substituindo esta última expressão em  $g(u, v) = 0$  chegamos a

$$\begin{aligned} v &= r_3^3 r_2^{-3} [r_2^3 v + (1 - r_2^3) u] \\ &= -\frac{3}{2} |\epsilon|^3 \epsilon + \dots \end{aligned}$$

Disto, segue-se o desejado.

5. Exatamente uma componente de  $C_{23}$  passa por  $\beta_1 = 0$ ,  $\beta_2 = 1$  e  $\beta_3 = 0$ , a qual é tangente à linha  $\beta_3 = 0$ . A demonstração é análoga à anterior.
6. Exatamente duas componentes de  $C_{23}$  passam por  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = 0$  e  $\beta_3 = 0$ , uma delas é  $Q$ , e a outra é tangente à linha  $\beta_1 = 1$ . De fato, em  $(0,0)$ , temos que

$$r_3^3 = (1 - 2u - v + u^2 + uv + v^2)^{\frac{2}{3}} = 1 - 3u - \frac{3}{2}v + \dots,$$

$$r_2^3 = (1 - u - 2v + u^2 + uv + v^2)^{\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2}u - 3v + \dots$$

Sendo assim,

$$g(u, v) = \frac{3}{2}(v^2 - u^2 + \dots).$$

Novamente, pelo Teorema de Preparação de Weierstrass, existe uma função holomorfa  $W(u, v) = \frac{3}{2} + \dots$  tal que

$$Wg = v^2 + 2H_1(u)v + H_0(u),$$

com  $H_1$  e  $H_0$  holomorfas numa vizinhança de  $u = 0$ . Desta forma,  $v = \pm u + \dots$ . Logo, segue-se o desejado.

Voltemos a determinar as interseções de  $C_{12}$  e  $C_{23}$ , para  $m_1$  suficientemente pequeno e  $m_2 = m_3$ .

Nós trataremos de cada região separadamente. Inicialmente, de acordo com a equação de  $C_{12}$ , temos o seguinte fato:

$$\text{Se } m_1 \simeq 0, \text{ então } r_1 \simeq 0 \text{ ou } r_2 \simeq 1 \text{ ou } \beta_1 \simeq 0.$$

Sendo assim, para a região I,  $\beta_1 \simeq 0$  ou  $r_2 \simeq 1$ . Pelas considerações acima, sabemos que  $C_{23}$  não entra na região I nem por  $r_2 = 1$ , e nem por  $r_3 = 1$ , exceto pela componente  $Q$ . E assim, como  $C_{23}$  é uma curva algébrica, qualquer outra componente dela, na região I, está a uma distância positiva de  $r_2 = 1$  ou  $r_3 = 1$ . Logo, para  $m_1$  suficientemente pequeno,  $C_{23}$  não intersecta  $C_{12}$  na região I (ver Figura A1).

Na região II, temos que  $r_1 \simeq 0$  ou  $r_2 \simeq 1$ . Nós já sabemos que  $C_{23}$  não entra na região II nem por  $\beta_2 = 0$ , e nem por  $\beta_3 = 0$ , exceto pela componente  $Q$ . Desta forma, procedendo como acima, concluímos que, para  $m_1$  suficientemente pequeno,  $C_{23}$  não intersecta  $C_{12}$  na região II (ver Figura A2).

Na região VII, temos que  $r_2 \simeq 1$  ou  $r_1 \simeq 0$  ou  $\beta_1 \simeq 0$ . Sendo assim, um ponto em  $C_{12}$  ou está próximo à  $\mathbf{x}_1$  ou está próximo à linha  $\beta_1 = 0$ . Procedendo, como nos dois casos anteriores, vemos facilmente que, para  $m_1$  suficientemente pequeno, qualquer componente de  $C_{23}$ , outra que não seja  $Q$ , não pode intersectar  $C_{12}$  próximo à  $\mathbf{x}_1$ . Agora, verifiquemos a situação nas proximidades da linha  $\beta_1 = 0$ . Devido ao comportamento simétrico das curvas  $C_{12}$  e  $C_{13}$ , basta-nos estudar as interseções das curvas  $C_{12}$  e  $C_{23}$  nas regiões referidas por  $B$  e  $C$  (ver Figura A3). A região  $B$  é limitada por  $\beta_1 = 0$ ,  $\beta_2 = \beta_3$ ,  $\beta_1 = \beta_2$  e  $\beta_1 = \beta(m_1)$ , já a região  $C$  é limitada por  $\beta_2 = 0$ ,  $\beta_1 = \beta_2$  e  $\beta_1 = \beta(m_1)$ , onde  $\beta(m_1)$  decresce com  $m_1$ . Pelas considerações

acima, sabemos que  $C_{23}$  intersecta o segmento que une  $\mathbf{x}_3$  a  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  somente nos extremos, e que a interseção em  $\mathbf{x}_3$  é tangente à linha  $\beta_2 = 0$  e que a interseção em  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  é com  $Q$ . Disto, segue-se que, para  $m_1$  suficientemente pequeno,  $C_{23}$  e  $C_{12}$  não se intersectam em  $B$ . Passemos a demonstrar que as curvas  $C_{23}$  e  $C_{12}$  não se intersectam em  $C$ . Consideremos

$$f(\beta) = \frac{r_1^3(1 - r_2^3)\beta_1}{r_2^3(1 - r_1^3)\beta_2} := H(\beta)K(\beta),$$

onde

$$H(\beta) := \frac{r_1^3(1 + r_1)(1 + r_2 + r_2^2)}{r_2^3(1 + r_2)(1 + r_1 + r_1^2)}$$

e

$$K(\beta) := \frac{(1 - r_2^2)\beta_1}{(1 - r_1^2)\beta_2}.$$

Observemos que  $H(\beta)$  converge uniformemente a 1, quando  $\beta$  tende a  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (0, 0, 1)$ . Fazendo  $u = \beta_1$  e  $v = \frac{\beta_2}{w}$ , temos que

$$K(u; w) := K(\beta) = \frac{w^3 + 2w^2 - uw(w^2 + w + 1)}{2w^2 + w - u(w^2 + w + 1)}.$$

Nós afirmamos que, para  $u < \frac{2}{3}$  e  $w > 1$ ,  $K(u; w) > 1$ . E então, segue-se que: se  $m_1$  é suficientemente pequeno (e menor do que  $\frac{1}{5}$ ),  $f(\beta) > \frac{1}{2}$  em  $C$ . Disto, temos que, para  $m_1$  suficientemente pequeno,  $f(\beta)$  não pode ser igual a  $\frac{m_1}{m_2}$ , isto é,  $C_{12}$  não está na região  $C$ . A seguir, demonstraremos a afirmação feita.

Supondo que  $w > 1$ , temos que

$$\frac{w^2 + w}{w^2 + w + 1} = 1 - \frac{1}{w^2 + w + 1} > 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Sendo assim, para  $u < \frac{2}{3}$ ,

$$\frac{w^2 + w}{w^2 + w + 1} > u,$$

ou

$$w^3 - w > (w - 1)(w^2 + w + 1)$$

ou

$$w^3 + 2w^2 - uw(w^2 + w + 1) > 2w^2 + w - u(w^2 + w + 1).$$

Este último fato significa que  $K(u; a) > 1$ , já que

$$\frac{2w^2 + w}{w^2 + w + 1} > 1 > u$$

ou

$$2w^2 + w - u(w^2 + w + 1) > 0,$$

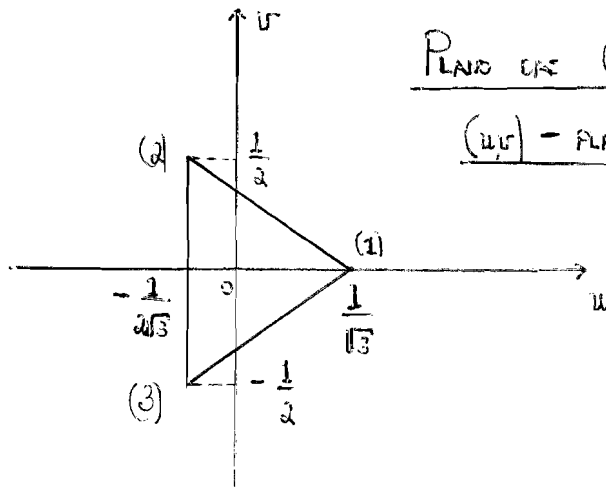
como queríamos demonstrar. □

# Referências Bibliográficas

- [1] Albouy, A., Recherches sur le problème des  $n$  corps, Notes scientifiques es techniques du Bureau des Longitudes. Paris (1997).
- [2] Albouy, A. and Chenciner, A., Le problème des  $N$  corps et les distances mutuelles, *Inventiones Mathematicae* 131 (1998) 151-184.
- [3] Albouy, A., On a paper of Moeckel on central configurations, *Regular and Chaotic Dynamics* 8 (2003) 133-142.
- [4] Alvarez-Ramírez, M. and Delgado, J., Central configurations of the symmetric restricted 4-body problem, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 87 (2003) 371-381.
- [5] Arenstorf, R. F., Central configurations of four bodies with one inferior mass, *Celestial Mech.* 28 (1982) 9-15.
- [6] Gannaway, J. R., Determination of all central configurations in the planar four-body problem with one inferior mass, Thesis, Vanderbilt University, TN (1981).
- [7] Hampton, M., Concave central configurations in the four-body problem, Thesis (2002).
- [8] Hampton, M. and Moeckel, R., Finiteness of relative equilibria of the four-body problem, *Inventiones Mathematicae* 163 (2006) 289-312.
- [9] Leandro, E. S. G., Finiteness and bifurcations of some symmetrical classes of central configurations, *Arch. Rational Mech. Anal.* 167 (2003) 147-177.
- [10] Leandro, E. S. G., On the configurations of the planar restricted four body problem, *Journal of Differential Equations* 226 (2006) 323-351.
- [11] Lindow, M., Ein Spezialfall des Vierkörperproblems, *Astron. Nachr.* 216 (1922).

- [12] MacMillan, W. D. and Bartky, W., Permanent configurations in the problem of four bodies, *Trans. Amer. Math Soc.* 34 (1932) 838-875.
- [13] Meyer, K. R. and Schimdt, D. S., Bifurcations of relative equilibria in the 4- and 5-body problem, *Ergodic Theory Dynam. Systems* 8 (1988) 215-225.
- [14] Newton, I., *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, Royal Society, London (1687).
- [15] Palmore, J. I., Collinear relative equilibria of the planar N-body problem. *Celestial Mech.* 28 (1982) 17-24.
- [16] Pedersen, P., Librationspunkte im restringierten Vierkörperproblem, *Dan. Mat-Fys. Medd* 21 (6) (1944) 80.
- [17] Simó, C., Relative equilibrium solutions in the four body problem. *Celestial Mech.* 18 (1978) 165-184.
- [18] Uspensky, J. V., *Theory of Equations*, McGraw-Hill, New York (1948).
- [19] Vainsencher, I., *Introdução às Curvas Algébricas Planas*. Coleção Matemática Universitária, vol 5, IMPA, Rio de Janeiro (1996).
- [20] Vincent, A. J. H.. Sur la résolution des equations numériques, *J. Math. Pures Appl.* 1 (1836) 341-372.

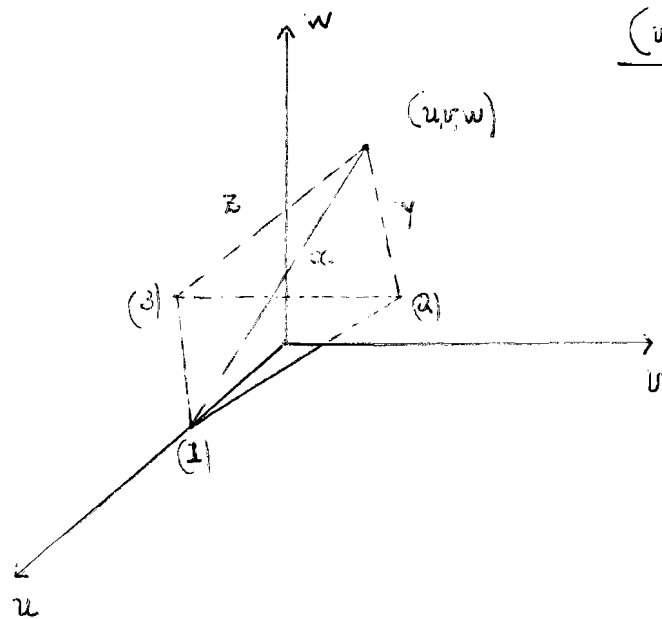
FIGURA 1



PLANO DE CONFIGURAÇÃO

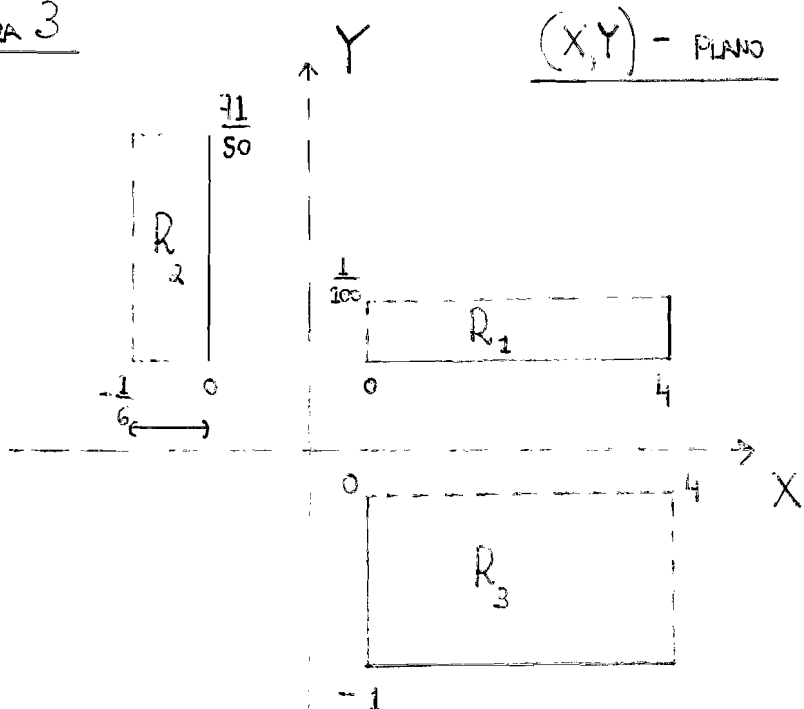
(u,v) - PLANO

FIGURA 2



(u,v,w) - ESPAÇO

FIGURA 3



(X,Y) - PLANO

$$R_1 = [0, 4] \times [0, \frac{1}{100}]$$

$$R_2 = [-\frac{1}{6}, 0] \times [0, \frac{71}{50}]$$

$$R_3 = [0, 4] \times [-1, 0]$$

$$R_4 = [-\frac{1}{6}, 0] \times \{0\}$$



RURURUR  
<sub>1 2 3 4</sub>

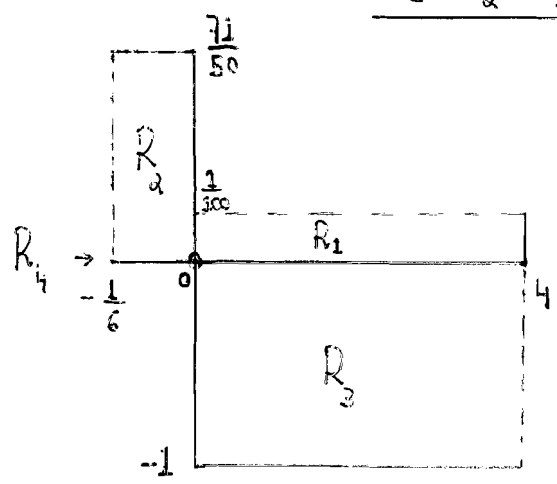
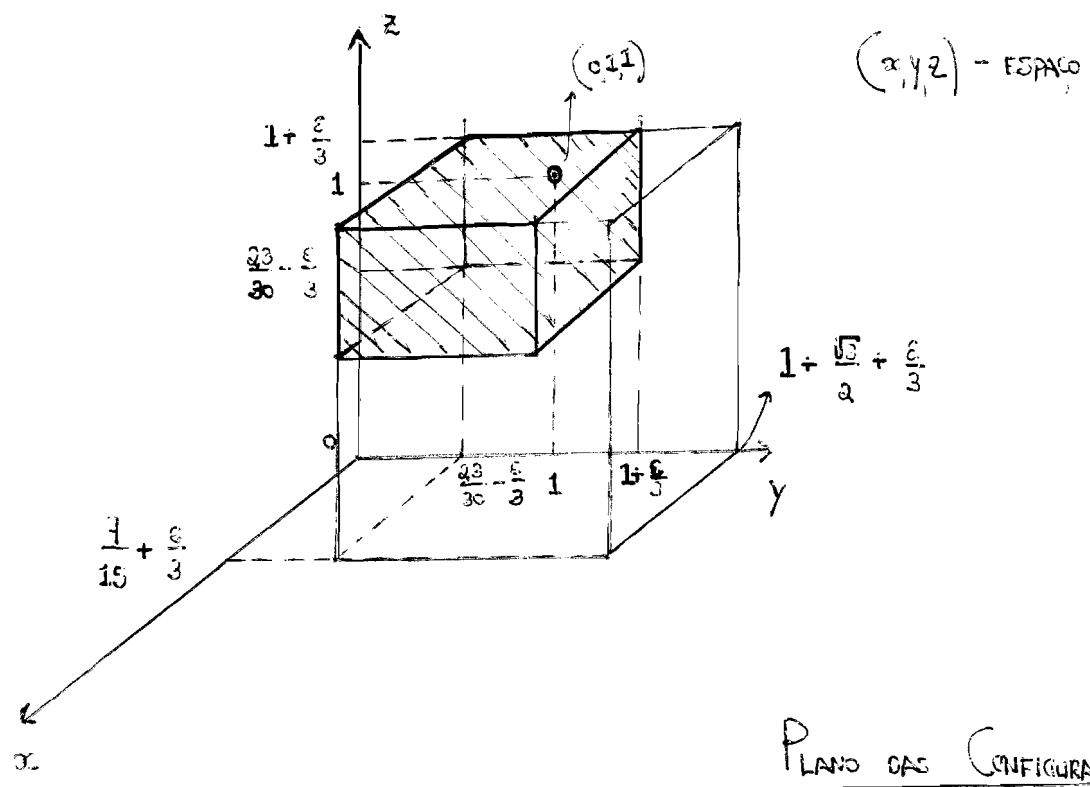


FIGURA 4



PLANO DAS CONFIGURAÇÕES

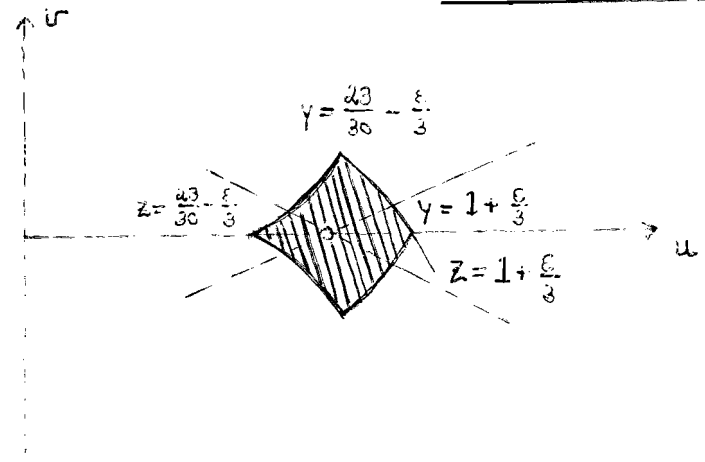
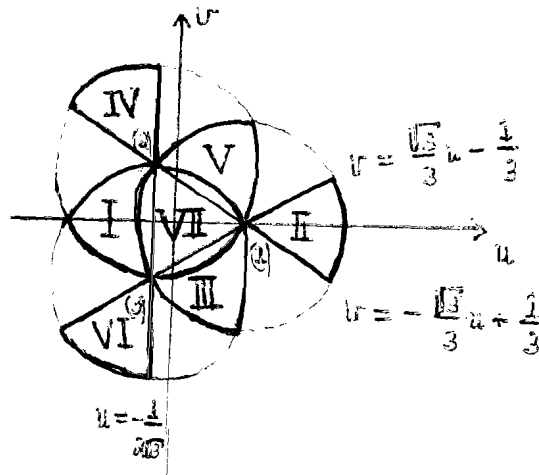


FIGURA 5

(u,v) - PLANO



REGIÕES ADMISSÍVEIS

FIGURA 6

(1)  $\begin{cases} y = \frac{333}{1000} \\ z = \frac{999}{1000} \end{cases}$       (2)  $\begin{cases} y = \frac{1001}{1000} \\ z = \frac{999}{1000} \end{cases}$   
 (3)  $\begin{cases} y = \frac{1001}{1000} \\ z = \frac{1001}{1000} \end{cases}$       (4)  $\begin{cases} y = \frac{999}{1000} \\ z = \frac{1001}{1000} \end{cases}$

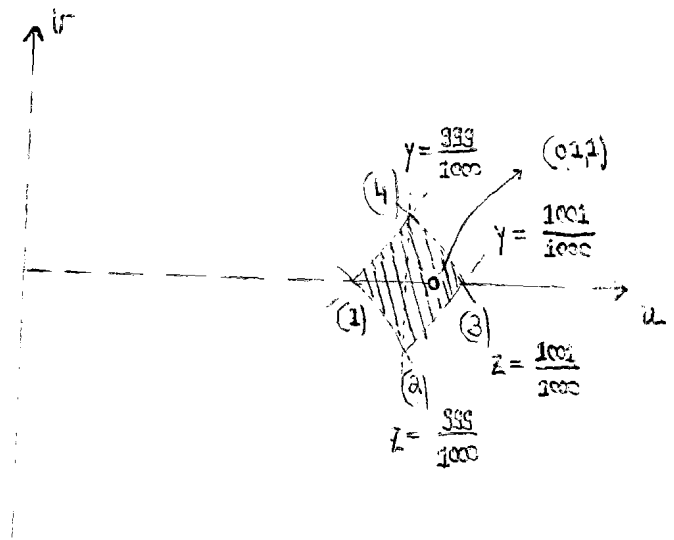


FIGURA 7

No (x,y,z) - ESPACO

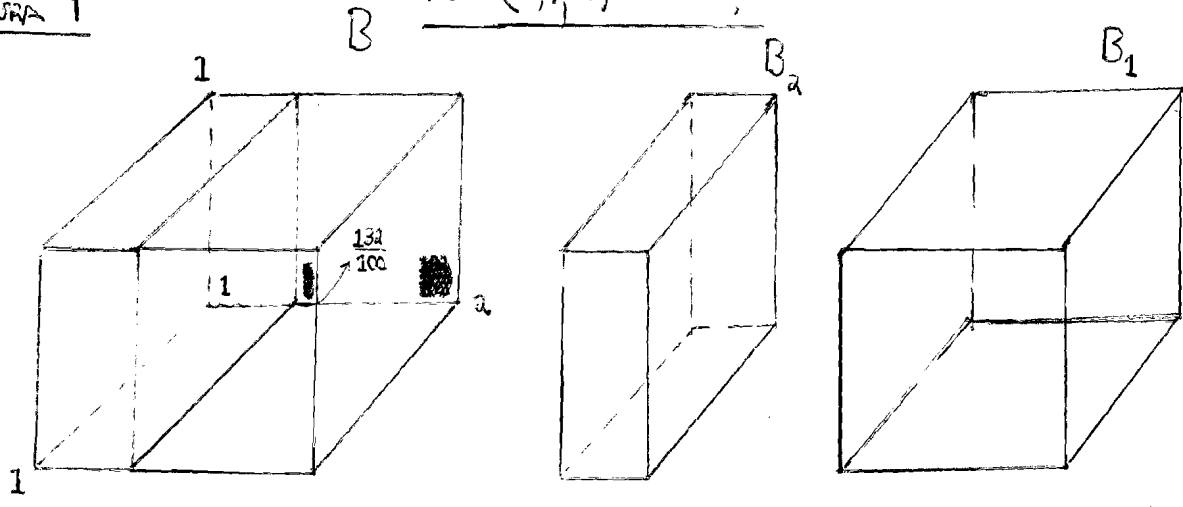


FIGURA 8

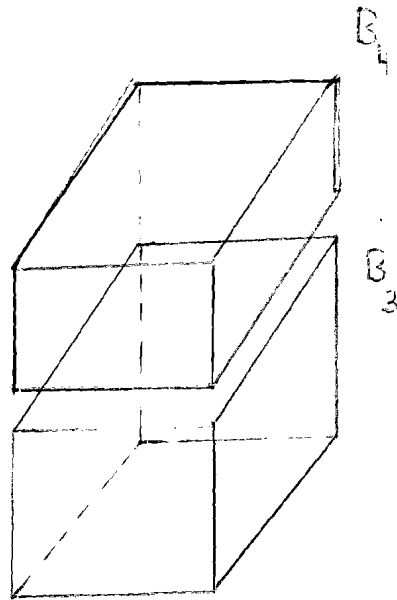
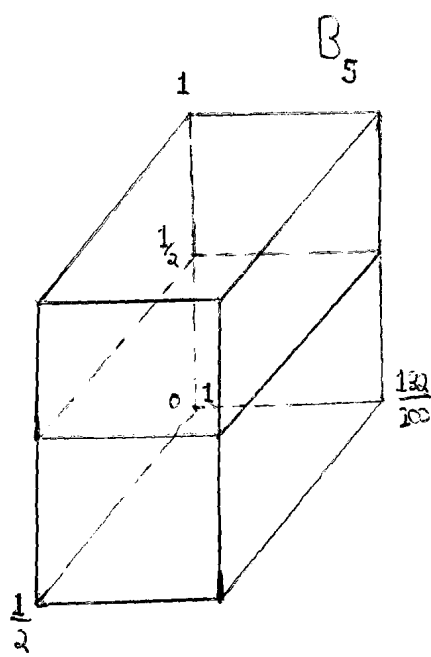


FIGURA 9

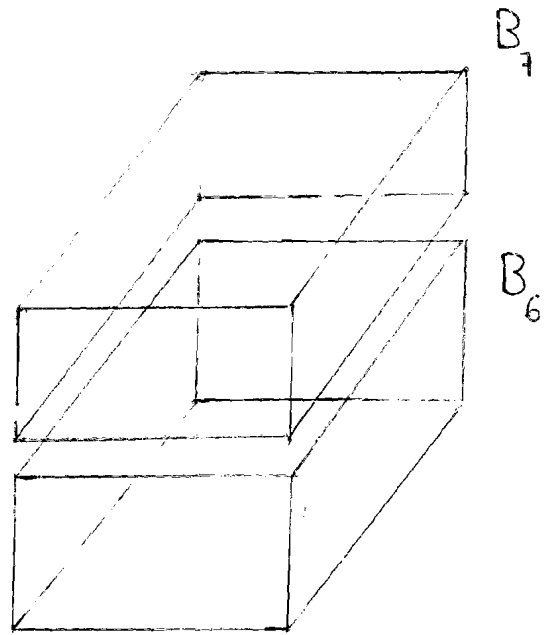
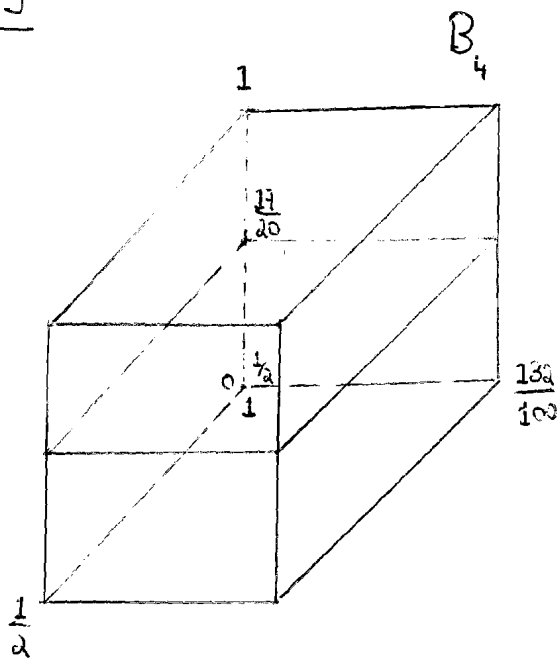


FIGURA 10

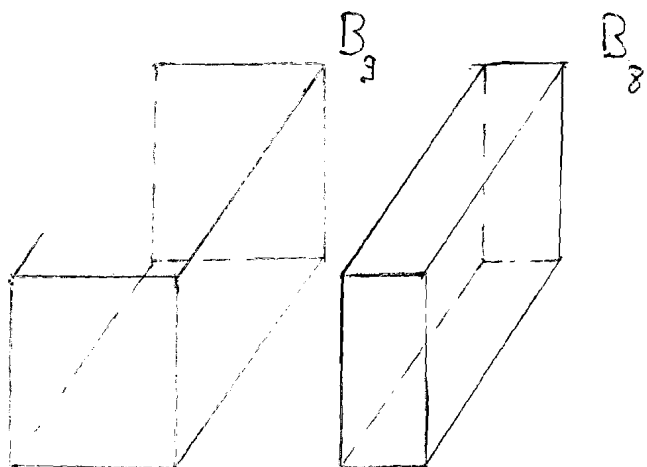
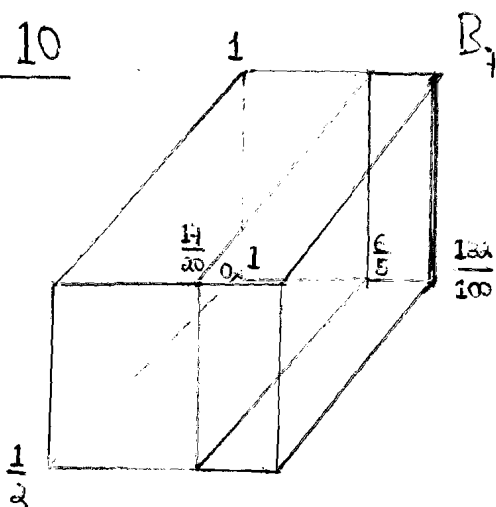
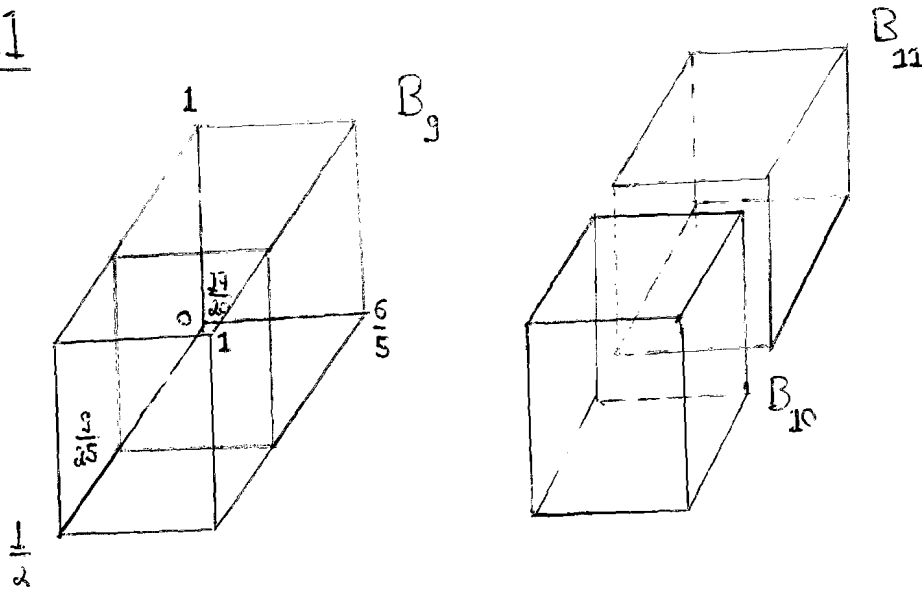


FIGURA 11



NO PLANO DAS CONFIGURAÇÕES

FIGURA 7

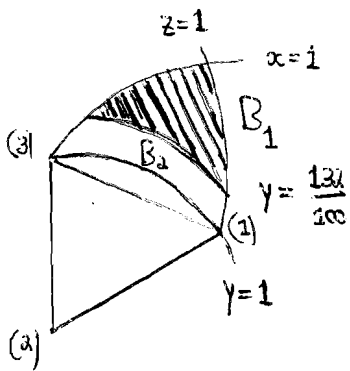


FIGURA 8

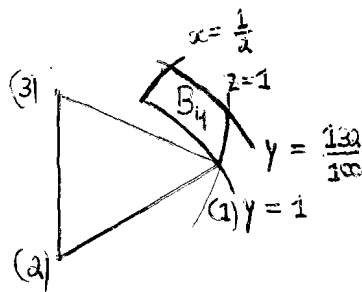


FIGURA 9

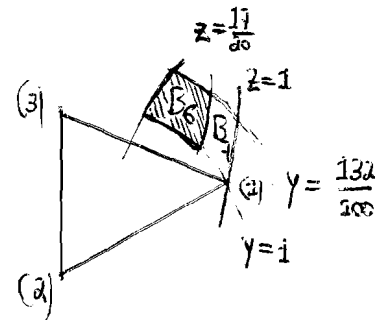


FIGURA 10

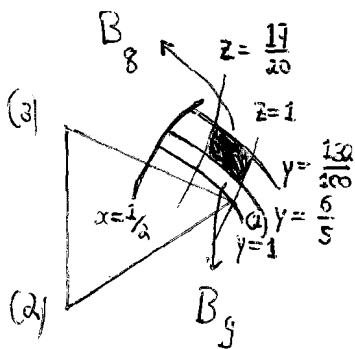


FIGURA 11

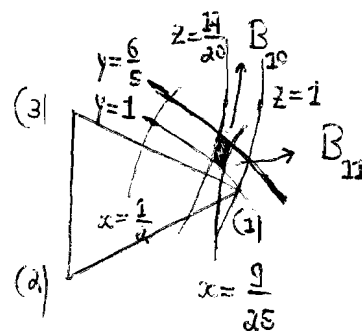


FIGURA 12

$(x,y,z)$  - ESPAÇO

PLANO DAS CONFIGURAÇÕES

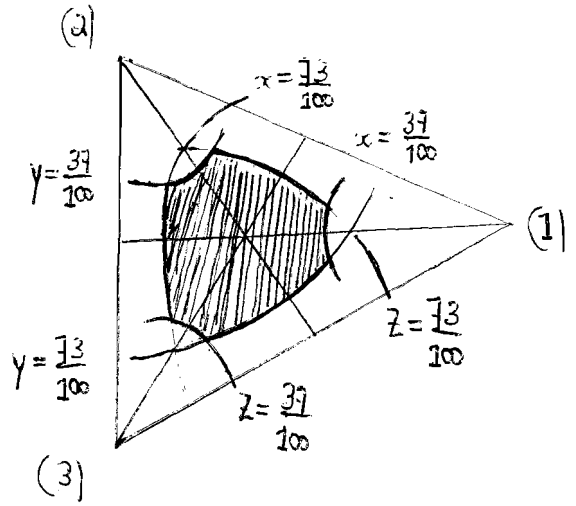
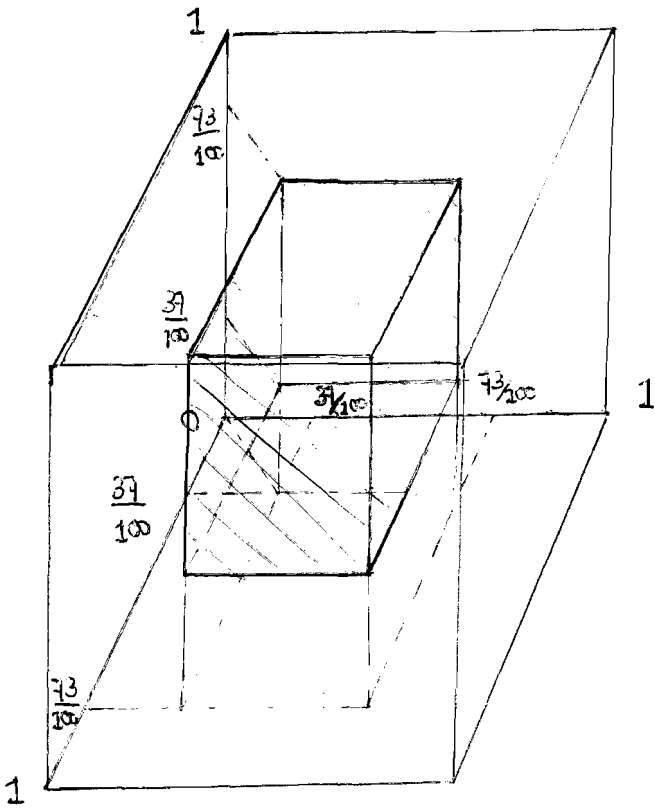


FIGURA 13

PLANO DAS CONFIGURAÇÕES

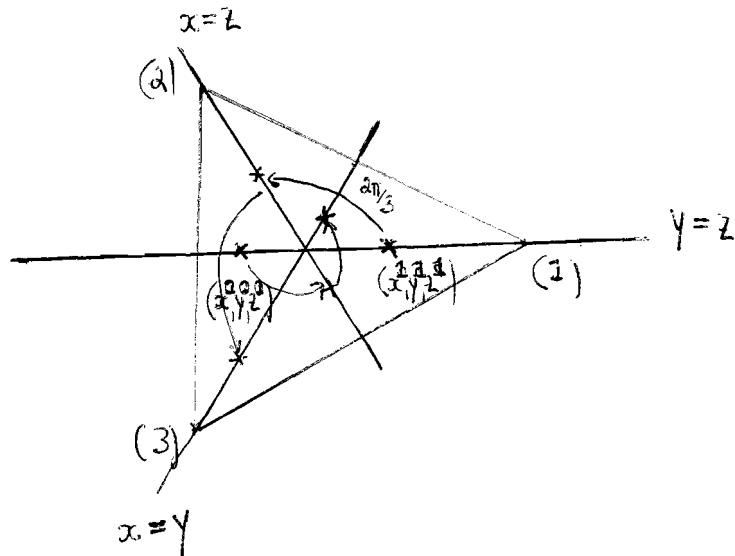


FIGURA 14

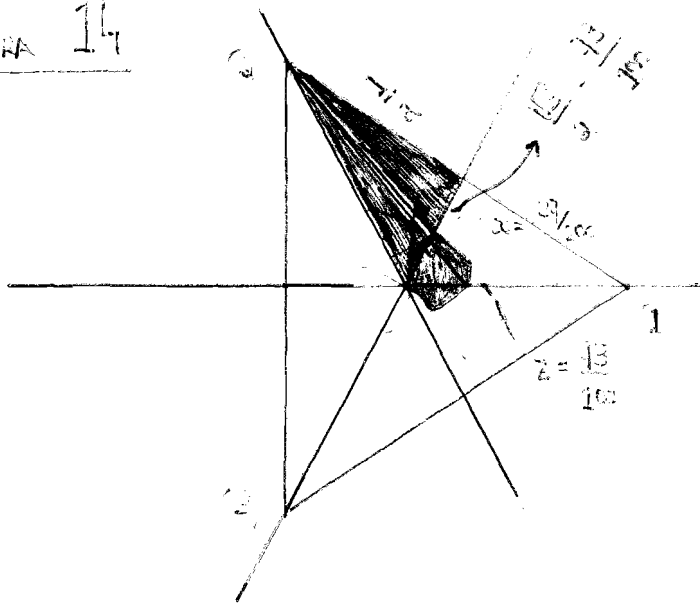


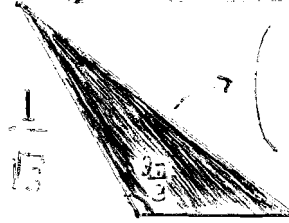
FIGURA 14



$$\frac{13}{2} = \frac{13}{100}$$

$$\frac{13}{2} = \frac{13}{100} + \frac{1}{4}$$

FIGURA 14



$$\frac{1}{15} = \frac{31}{100}$$

$$\left( \frac{1}{3} + \left( \frac{1}{15} - \frac{31}{100} \right) \right)^2 + \frac{1}{15} \left( \frac{1}{15} - \frac{31}{100} \right)$$

FIGURA 15

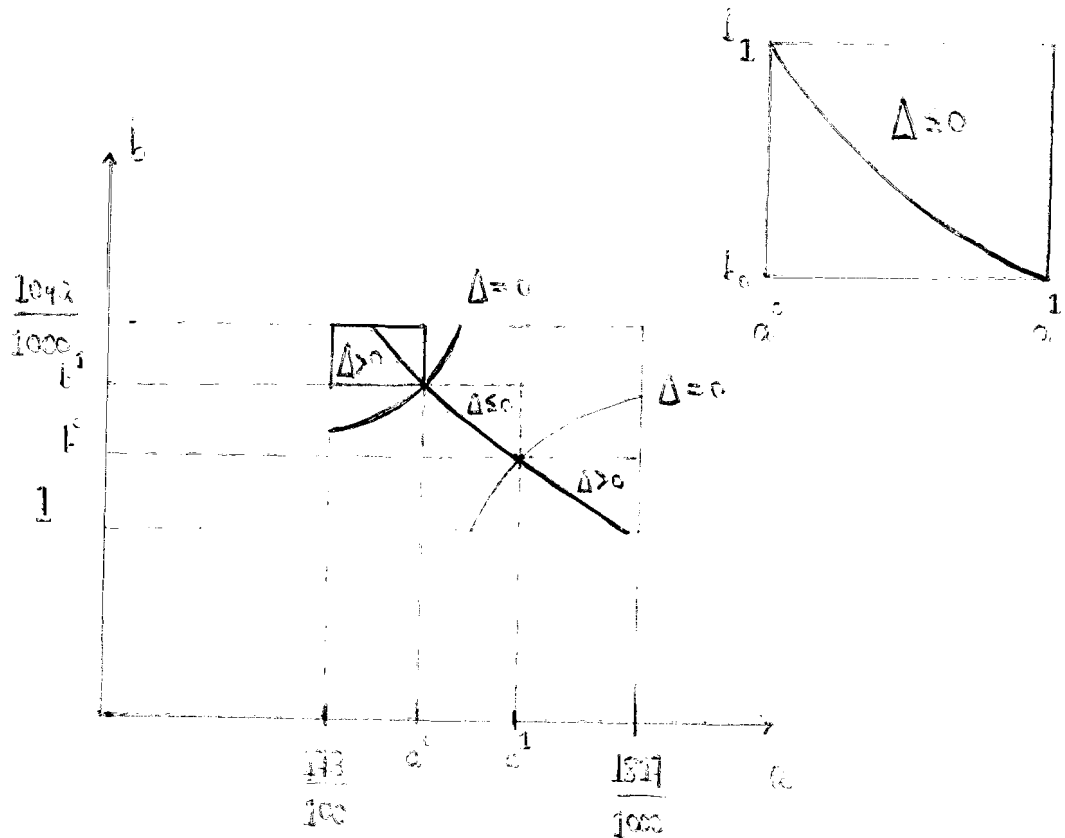
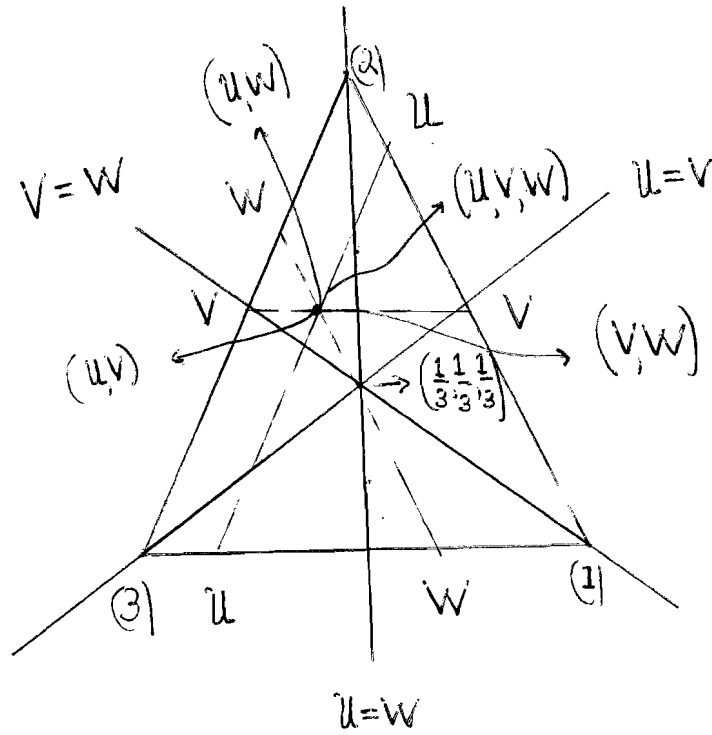


FIGURA 16

COORDENADAS BARICÉNTICAS NO

TRIÂNGULO DE MASSAS



$(m_1, m_2, m_3)$  - ESPACO

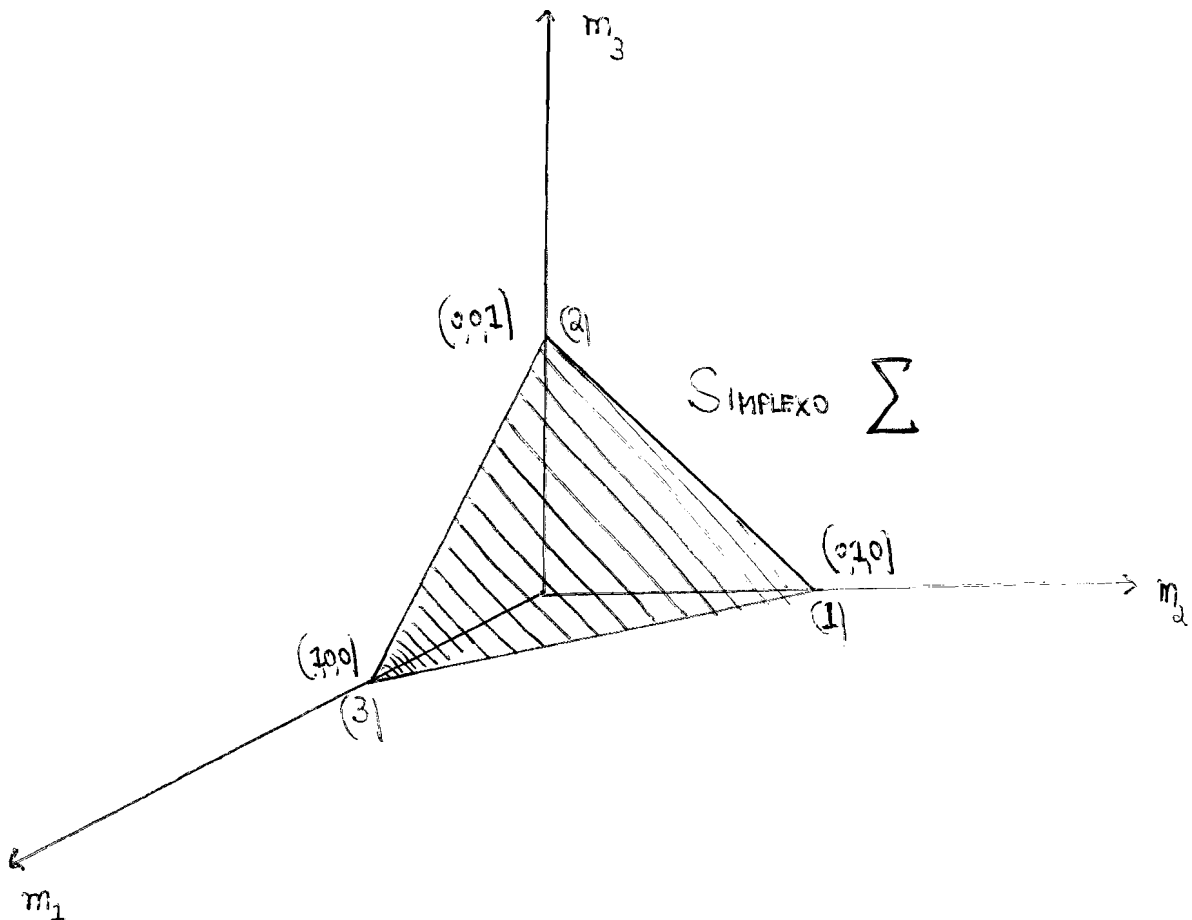
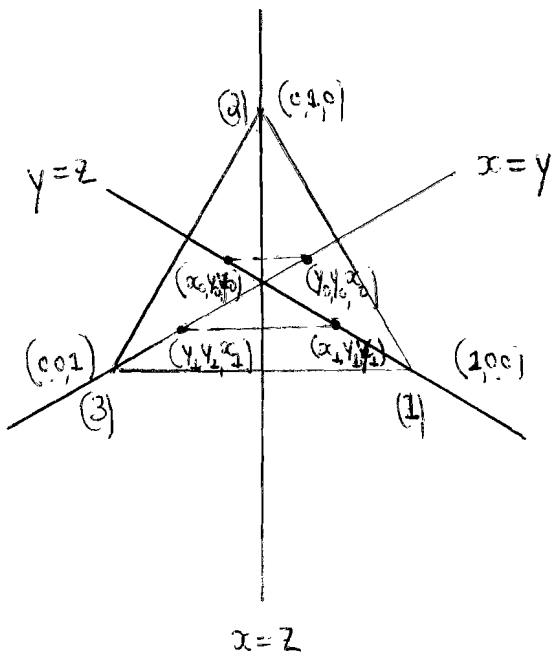


FIGURA 17

PLANO DAS CONFIGURAÇÕES



SIMPLEXO

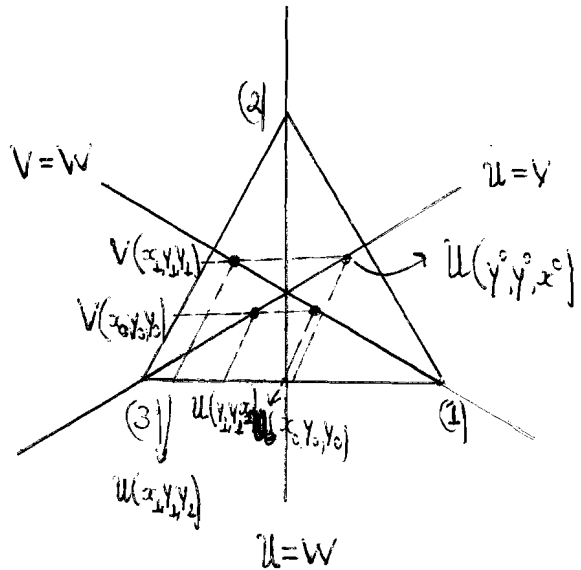
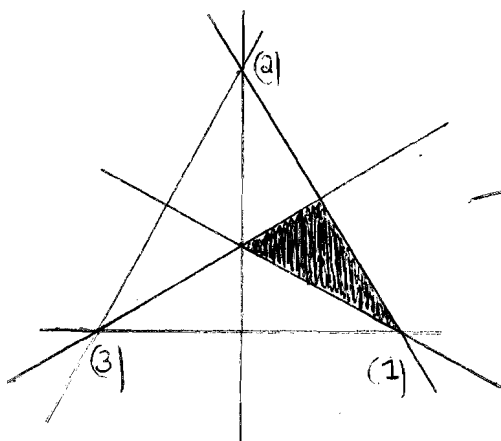


FIGURA 18

PLANO DAS CONFIGURAÇÕES



SIMPLEXO

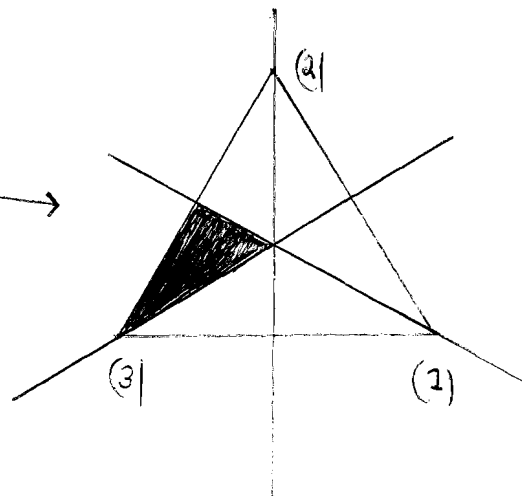
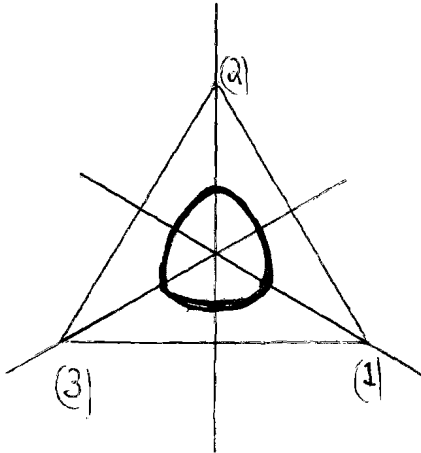


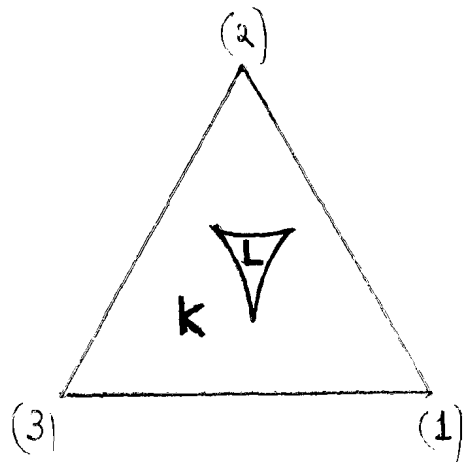
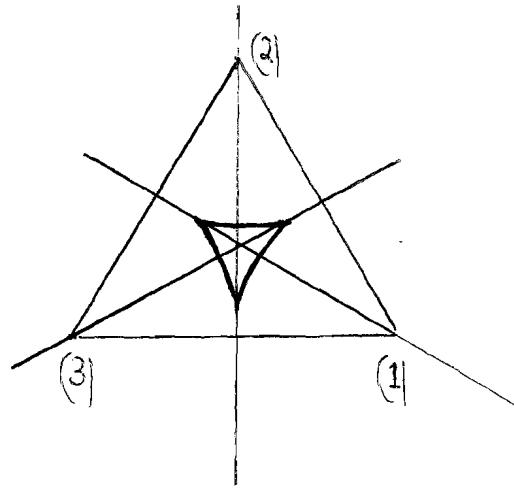


FIGURA 19

PLANO DAS CONFIGURAÇÕES



SIMPLEXO



Γ, P, Q, R

FIGURA A<sub>2</sub>

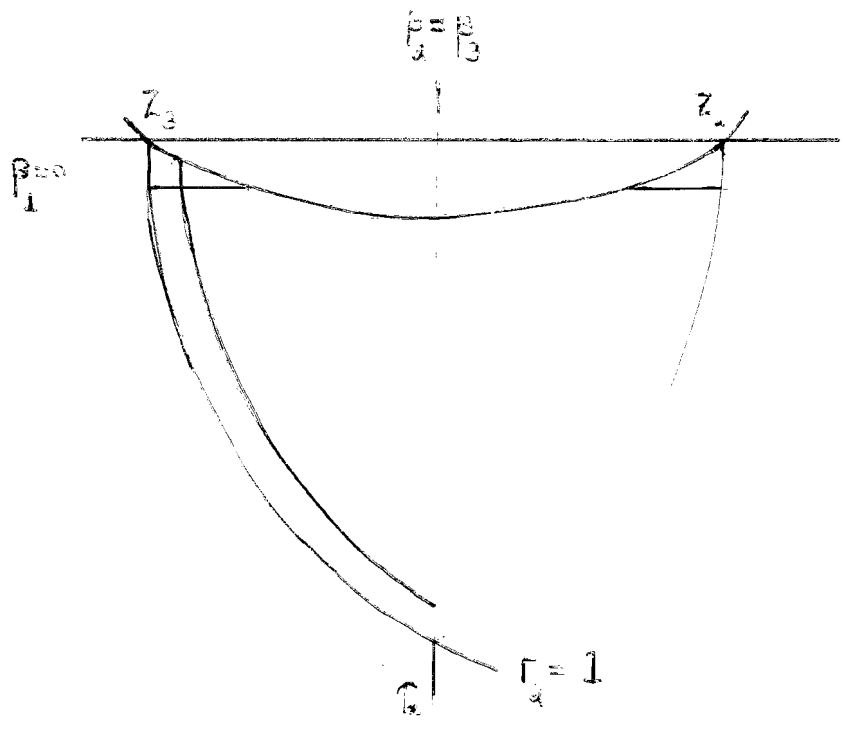
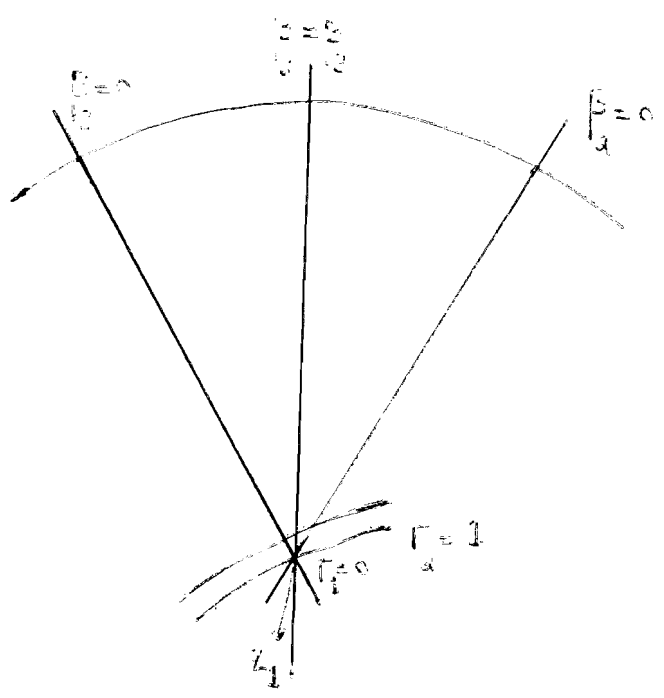


FIGURA A<sub>3</sub>





# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)