UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MESTRADO EM EDUCAÇÃO

NÍVIA MARTINS BERTI

A ANÁLISE DO ERRO SOB A PERSPECTIVA DIDÁTICO-PEDAGÓGICA NO ENSINO-APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA: Um estudo de caso na 5ª série

PONTA GROSSA
2007

NÍVIA MARTINS BERTI

A ANÁLISE DO ERRO SOB A PERSPECTIVA DIDÁTICO-PEDAGÓGICA NO ENSINO-APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA: Um estudo de caso na 5ª série

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Educação, setor de Ciências Humanas, Letras e Arte da Universidade Estadual de Ponta Grossa. Área de concentração: Educação. Linha de pesquisa: Ensino Aprendizagem.

Orientador: Prof. Dr. Ademir José Rosso

PONTA GROSSA
2007

Ficha catalográfica elaborada pelo Setor de Processos Técnicos BICEN/UEPG

Berti, Nívia Martins
B543a A análise do erro sob a perspectiva didático-pedagógica no ensino-aprendizagem da matemática: um estudo de caso na 5ª série / Nívia Martins Berti. Ponta Grossa, 2007.
109 f.

Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientador: Prof. Dr. Ademir José Rosso

1. Matemática - ensino-aprendizagem. 2. Tratamento pedagógico – erros e estratégias. 3. Matemática - ensino fundamental. I. Rosso, Ademir José. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Mestrado em Educação.III. IT.

CDD: 372.7

TERMO DE APROVAÇÃO

NÍVIA MARTINS BERTI

"A ANÁLISE DO ERRO SOB A PERSPECTIVA DIDÁTICO-PEDAGÓGICA NO ENSINO-APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA: UM ESTUDO DE CASO NA 5ª SÉRIE".

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Educação, Setor de Ciências Humanas, Letras e Artes da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora:

Ademir José Rosso

Orientador Prof. Dr. Ademir José Rosso
UEPG

Prof. Dr. José Erno Taglieber
UNIVALI

Burak

Prof. Dr. Dionísio Burak
UEPG

CBrandt

Profa. Dra. Célia Finck Brandt
UEPG

Ponta Grossa, 15 de junho de 2007

Certeza

De tudo, ficaram três coisas:
A certeza de que estamos sempre começando...
A certeza de que precisamos continuar...
A certeza de que seremos interrompidos antes de terminar...

Portanto devemos:
Fazer da interrupção um caminho novo...
Da queda um passo de dança...
Do medo, uma escada...
Do sonho, uma ponte...
Da procura, um encontro...

Fernando Pessoa

DEDICATÓRIA

Ao meu esposo que sempre me apoiou e se alegrou comigo nas minhas conquistas e aos meus filhos: Fernando Lucas, Augusto Cesar e Maria Clara, pelo amor e compreensão.

Dedico também, de uma forma especial, aos alunos participantes deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus, acima de tudo, pois somente ele sabe o quanto fez parte da minha vida nessa caminhada.

Ao professor Ademir, pelo interesse, confiança e paciência que demonstrou durante todo o trajeto desse estudo.

Ao professor Dionísio um grande incentivador, que com seu jeito carinhoso contribuiu muito com este trabalho.

À professora Célia pela leitura dedicada que dispensou a este trabalho.

Ao professor José Erno, pelas valiosas sugestões.

Aos meus colegas de Mestrado, especialmente a Alzenir, Maria Eutêmia, Maurício e Rosemeire, pela amizade.

SUMÁRIO

RESUMO

Esta pesquisa teve como objeto de estudo o erro dos alunos de 5ª série no contexto do ensino-aprendizagem de Matemática e buscou respostas ao problema: Que contribuições o trabalho pedagógico com os erros dos alunos, em sala de aula, pode trazer para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática? Os objetivos da presente investigação foram: investigar a compreensão que os alunos possuem sobre seus próprios erros e as relações destes com o processo de ensino-aprendizagem e, também, identificar e descrever passagens de aula e formas de tratamento pedagógico dado aos erros e estratégias dos alunos que contribuam para o desenvolvimento da operatividade e da autonomia no processo ensino-aprendizagem, por meio da co-operação. Os participantes da pesquisa pertenciam à 5ª série de uma escola estadual paranaense no ano de 2006. Trata-se de uma pesquisa qualitativa e um estudo de caso com características etnográficas. Utilizamos como instrumento de pesquisa para a coleta de informações um questionário exploratório sobre as opiniões dos alunos a respeito de seus erros e o processo de ensino-aprendizagem; um teste com questões matemáticas; observações livres em sala de aula e a socialização e discussão sobre as estratégias apresentadas às situações-problema. A pesquisa nos permitiu concluir que: é possível, em sala de aula, darmos atenção às respostas dos alunos promovendo o aprendizado da Matemática, a operatividade, a co-operação e o pensamento autônomo; as dificuldades encontradas pelos alunos derivam, em grande parte, das condições do ensino da Matemática que não favorecem a análise crítica de resultados e a exploração de estratégias operativas para a construção de conceitos e algoritmos matemáticos; a socialização entre os alunos, dos resultados obtidos, numa determinada situação-problema com a discussão de diferentes perspectivas, tendo o aluno participação ativa, sobre os seus "próprios erros", favorece a reflexão sobre as ações e a descentração do pensamento.

Palavras-chave: Erro, construção do conhecimento, ensino-aprendizagem, matemática.

ABSTRACT

This research investigates the fifth degree students'error in the math learning-teaching context. The research tried to answer th question: "What are the contributions to this process that the work of the teacher, inside the classroom, with the student's error may bring? The main targets in this work were: to investigate the comprehension that the students have about their own errors and the relationship of it with the learning-teaching process, and, also, to identificate and to describe passages of class and ways of pedagogical treatment given to these errors and strategies of students that may contribute to the development of operation and autonomy in the teaching-learning process by co-operation. The participants of the research were from one only class of fifth degree, from a statual public school, in Parana State, in the school year 2006. This is a qualitative research and a study of case with ethnographic characteristics. In the investigation, we considered the student's perspective about his own error and the operation observed from the resolution of a test and the discussion about the kind of answers were presented to the questions. This work brings us to the conclusion that: we may give attention to the answers of the students, promotin the Math learning, the operation, the co-operation and the autonomy of thinking; the difficulties found by students in solving the questions derive, the most of times, from the math teaching conditions that do not favor a critical analysis of results, and the exploration of operation strategies for the construction of concepts and mathematical algorithms; the socialization, among the students, of the results from a specific question with the further discussion in different perspectives, with their active participation, about their "own errors" has increased a reflection about the actions of thinking and acception of others opinion.

Key-words: error, knowledge construction, teaching-learning process, mathematics.

APRESENTAÇÃO

Este estudo apresenta e analisa informações obtidas em uma pesquisa com alunos de 5ª série de uma Escola Estadual no município de Ponta Grossa – PR, no ano letivo de 2006. As informações obtidas dizem respeito ao modo como os alunos percebem o processo de ensino-aprendizagem da Matemática por eles vivenciados, como resolvem problemas e como participam de discussões sobre as estratégias utilizadas e as possíveis contribuições para o processo de ensino-aprendizagem.

A investigação busca, num primeiro momento, conhecer as opiniões dos alunos sobre o conhecimento matemático e as relações com o trabalho de sala de aula, em especial, sobre as formas de correção das atividades propostas por seus professores. Num segundo momento, volta-se para as respostas produzidas pelos alunos, quando resolvem atividades matemáticas, tomando-as como indicativos do conhecimento construído e como reveladoras de dificuldades na resolução de problemas e na compreensão de conceitos matemáticos. Num terceiro momento, destaca as formas de abordagem dos problemas e das respostas dadas, de uma forma socializada, com o intuito de estabelecer um diálogo com os alunos sobre as estratégias utilizadas e da análise e crítica das diversas soluções apresentadas para as questões.

As discussões se deram por meio do diálogo com o grupo-classe, procurando manter um ‘clima’ de segurança e liberdade, para que os alunos se expressassem a respeito do que era percebido por eles nas resoluções.

Assim, os erros e estratégias apresentadas passaram a ser objeto de estudo em sala de aula. A nós, possibilitou, conhecer os alunos e, a eles, a oportunidade de saberem o porquê dos seus erros, oportunizando que a aprendizagem do conhecimento matemático e o desenvolvimento de conteúdos se dessem, também, a partir das estratégias e dos erros identificados.

O conhecimento matemático é considerado difícil para muitos alunos e é, ao mesmo tempo, reconhecido pela sua relevância para a vida. A Matemática revela sua importância por meio da função que exerce em diversas áreas do conhecimento, atribuindo-lhe um grande prestígio em nossa sociedade por suas inúmeras contribuições. Seja na vida escolar, seja na vida cotidiana das pessoas, ela desempenha papel de uma poderosa ferramenta para tomada de decisões e a possibilidade de fazer prognósticos. Diversos setores como a economia, a medicina, a astronomia, o meio ambiente, a física, por exemplo, se desenvolveram, e ainda se desenvolvem, por meio de cálculos e técnicas matemáticas de equacionar os problemas.

Considerada como uma das disciplinas mais difíceis de ser ensinada na escola, a Matemática também se sobressai na opinião das pessoas, o que resulta, por vezes, em prestígio intelectual para aqueles que a compreendem. Também encontramos na escola ou em quem já passou pelos bancos escolares, pessoas que convivem com aversão à matemática ou o medo da reprovação por considerarem-na difícil de aprender.

O ensino da Matemática, em que pese os avanços na pesquisa, métodos e novas técnicas, continua priorizando o mecanicismo de fórmulas e regras que os alunos aprendem a utilizar seguindo modelos, repetindo até que fiquem gravados na memória, conforme Rocha (2001). Os alunos decoram o conteúdo para fazer prova e, logo depois, esquecem o que memorizaram devido à dificuldade de compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos que se tornam, para eles, apenas conteúdos que serão cobrados em testes, pois não vêem relação com os conhecimentos necessários para a vida em sociedade.

As dificuldades nas resoluções das situações-problema, as notas baixas nas provas e possíveis reprovações, estão fortemente ligadas à quantidade de erros que os alunos cometem e que não são informados ou orientados sobre o porquê desses erros para então, superá-los.

Essas preocupações remetem nossos olhares para os erros, como algo importante de ser considerado no processo ensino-aprendizagem da Matemática. Possibilita-nos conhecer os caminhos que o aluno seguiu, perceber coerência ou não no modo de abordar uma determinada situação, saber se o erro ocorreu por simples distração, se o aluno raciocina corretamente mas, erra nos algoritmos, se faz análise do resultado de acordo com os dados do problema, entre outras possibilidades que se abrem por meio da observabilidade dos erros.

Por essas razões é que neste estudo, procuramos considerar o erro do aluno, não no sentido de aceitação pura e simples de tudo o que o aluno faz, mas sim, como revelador dos processos de raciocínio e das reais dificuldades matemáticas que o aluno apresenta.

O que buscamos são maneiras de tornar o erro um elemento de análise e crítica, criando condições para superá-lo em interação com os colegas ou que, “por si mesmo, o aluno possa verificar a contradição, o conflito, e a não-coerência entre suas respostas” (MACEDO, 1994, p.71).

O erro do aluno ou a forma de abordar uma situação-problema, têm sido objeto de estudo e investigação para muitos pesquisadores como: Kamii e De Clark (1986), Davis e Esposito (1990), Macedo (1994), Carraher (1995), Zunino (1995), Santos (1996), Pinto (2000), entre outros, sobre os quais comentaremos no decorrer deste estudo. Tais pesquisas representam as preocupações com o tema em questão. Mas, são raras as investigações que analisam uma prática metodológica de exploração das potencialidades dos erros num trabalho dinâmico, diretamente com os alunos, no seu espaço escolar: a sala de aula.

Os erros quando não acontecem por simples distração são sintomas de dificuldades que, se não forem sanadas, podem ocasionar erros sistemáticos de difícil superação, os quais em muitos casos, só serão percebidos ao final de um ciclo de escolarização e, geralmente, denunciados por avaliações externas tanto nacionais como internacionais.

O Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), por exemplo, mostraram que o conhecimento matemático dos estudantes brasileiros estão aquém do esperado. Conforme

BRASIL (1998), os resultados do SAEB apontaram dados críticos com relação à 5ª série escolar. As provas de Matemática aplicadas em 1993 indicavam que na primeira série do ensino fundamental, 67,7% dos alunos acertavam pelo menos a metade dos testes. Este índice caía para 17,9% na terceira série, tornava a cair para 3,1%, na quinta série e subia para 5,9% na sétima série. Em provas posteriores a mesma característica foi observada, indicando também que as maiores dificuldades encontravam-se nas questões relacionadas à aplicação de conceitos e à resolução de problemas.

Nos resultados do PISA (OCDE, 2000), o conhecimento matemático dos estudantes brasileiros de 15 anos de idade colocou o Brasil nas últimas posições, de acordo com o aprendizado demonstrado pelos alunos participantes. Os resultados apresentados nessas avaliações apontam para a relevância de pensarmos nos porquês de os alunos errarem tanto em Matemática e, também, nas formas de superação dessas dificuldades.

Pelo exposto, o presente estudo buscou respostas ao problema: Que contribuições o trabalho pedagógico com os erros dos alunos, em sala de aula, pode trazer para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática?

A pesquisa tem como pressupostos que:

- As dificuldades encontradas pelos alunos derivam, em grande parte, das características do ensino da Matemática que não favorecem a análise crítica e a exploração de estratégias operativas para a construção de conceitos e compreensão dos algoritmos matemáticos;
- A socialização, entre os alunos, dos resultados obtidos numa determinada situação-problema e a discussão de diferentes perspectivas e respostas, sob condições de co-operação, favorecem a reflexão e a descentração do pensamento.

O objetivo principal é investigar as possibilidades que se abrem com a socialização entre os alunos e dos docentes com os alunos, da diversidade de respostas produzidas na resolução de problemas com o intuito específico de:

- Identificar passagens de aula que contribuam com o ensino-aprendizagem a partir dos erros dos alunos;
- Investigar a compreensão que os alunos possuem sobre seus próprios erros e as relações com o ensino-aprendizagem
- Descrever formas de tratamento pedagógico dados aos erros dos alunos, em sala de aula, que possam contribuir com o desenvolvimento dos conteúdos, da operatividade, da co-operação e das atitudes autônomas do aluno no ensino-aprendizagem.

Para a obtenção das informações foram utilizados diferentes instrumentos e estratégias, como: 1) Um questionário, de natureza exploratória, aplicado aos alunos, em que procurávamos informações sobre conceitos e concepções relativos aos seus próprios erros e as formas de correção experienciadas por eles, até a atual fase de escolarização; 2) Um teste com questões matemáticas envolvendo números e operações; 3) Observações livres em sala de aula; 4) Socialização e discussão com os alunos das respostas dadas ao teste.

Trata-se de uma pesquisa qualitativa e de um estudo de caso, conforme André (1995), em que registramos a diversidade e os processos operativos de raciocínio desencadeados a partir da resolução das atividades do teste e da discussão das estratégias utilizadas. Como a pesquisa se desenvolveu em sala de aula, atuando como professora da disciplina de Matemática, a pesquisa possui um viés etnográfico pela proximidade com os sujeitos envolvidos na investigação. Para o melhor acompanhamento de nosso trabalho, o distribuímos da seguinte forma:

O primeiro capítulo trata das considerações sobre a perspectiva histórica do conhecimento matemático e as relações com o ensino, abordando concepções epistemológicas sobre a aquisição de conhecimentos.

O segundo capítulo aborda a questão dos erros na perspectiva do construtivismo piagetiano com informações de pesquisas relacionadas ao tema. Traz, também, a questão da operatividade, da co-operação e da autonomia do sujeito no processo de ensino-aprendizagem.

No terceiro capítulo são tratados dos procedimentos metodológicos da pesquisa, da apresentação e análise das informações coletadas.

O quarto capítulo apresenta as conclusões do estudo e comentários sobre as possibilidades de continuação deste trabalho e as implicações pedagógicas suscitadas pela pesquisa.

CAPÍTULO I

1. O CONHECIMENTO MATEMÁTICO E O ENSINO

1.1. Trajetória histórica do conhecimento e do ensino da Matemática

Os primeiros indícios de conhecimento matemático são de heranças egípcias e babilônicas. Os povos antigos, por volta de 2000 anos a.C., usavam a Matemática para a resolução de problemas práticos ligados ao comércio, nos cálculos de impostos, nas construções arquitetônicas, medidas de terras. As cheias do rio Nilo são exemplos clássicos que levaram à necessidade de conhecimentos de cálculos e noções geométricas para que fossem refeitas as demarcações das terras após as cheias.

Já a civilização grega, mesmo desenvolvendo como os egípcios e babilônios uma matemática utilitária e empírica, dedicou-se fundamentalmente à organização formal dessas produções. Assim, a Matemática ganhou uma linguagem simbólica própria, substituindo as soluções particulares pelas generalizações e as experimentações pelo método dedutivo. *Os elementos* de Euclides (300 anos a.C.) foi o registro mais importante da época, organizando em treze capítulos grande parte da Matemática até então conhecida (MACHADO 1995, BOYER 1996).

O status de nobreza, o rigor, a exatidão e a formalização da Matemática têm raízes já nessa época. Boyer (1996, p. 69), comenta que "evidentemente Euclides não dava ênfase aos aspectos práticos do assunto, pois há uma história em que um estudante pergunta à Euclides, para que serviria o estudo da geometria e, sem dar resposta, pede ao seu escravo que dê três moedas ao estudante, pois ele precisa ter lucro com o que aprende". Outra história, também em Boyer, diz que Ptolomeu uma vez perguntou a Euclides se havia um caminho mais curto para a geometria do que o estudo de *Os elementos*, e Euclides respondeu dizendo que não havia estrada real para a geometria. Fato ou mito, essas histórias mostram que há milênios a Matemática carrega em sua bagagem as dúvidas do aprendiz sobre a relevância do que é ensinado e o *status* de conhecimento difícil, penoso, de uma ciência acessível somente aos mais iluminados.

Isaac Asimov (*in* Boyer 1996, p. VI), ao se expressar sobre a matemática comenta que "a matemática é um aspecto único do pensamento humano (...) e sua história difere na essência de todas as outras histórias" e comenta fatos que marcaram a Ciência, como por exemplo: O erro de Aristóteles sobre a queda dos corpos, o qual foi corrigido por Galileu; Galeno, um grande médico da antiguidade, não teve permissão para estudar cadáveres humanos e estava errado em suas conclusões anatômicas e fisiológicas; a obra máxima de Newton sobre as leis do movimento e a teoria gravitacional tiveram de ser modificadas por Einstein.

Portanto, o conhecimento científico é marcado por correção e/ou extensão. Esses fatos evidenciam a peculiaridade da matemática. Sobre isso Asimov ressalta que:

> Só na matemática não há correção significativa, só extensão. Uma vez que os gregos desenvolveram o método dedutivo, o que fizeram estava correto, correto para todo o sempre. Euclides foi incompleto e sua obra foi enormemente estendida, mas não teve que ser corrigida. Seus teoremas, todos eles, são válidos até hoje. Ptolomeu pode ter desenvolvido uma representação errônea do sistema planetário, mas o sistema de trigonometria que ele criou para ajudá-lo em seus cálculos permanece correto para sempre (ASIMOV, in BOYER, p. VI).

Mas, apesar das certezas que a matemática pode proporcionar, o ensino desse conhecimento como disciplina escolar é difícil. O aluno como aprendiz, erra. Demora para compreender conceitos. Preocupa-se com o rigor e exatidão dos cálculos. Sabe que qualquer deslize pode representar um erro e perda de nota.

Contudo, quais são as marcas do ensino da matemática em nossas escolas?

Até o início do século XX, a Matemática era dividida em Aritmética, Álgebra e Geometria, todas ensinadas separadamente. No Brasil existia ainda, a cátedra de Trigonometria, conforme Miranda (2003). Após esse período, houve um movimento a nível internacional em favor da unificação das matemáticas em uma única disciplina chamada apenas de Matemática. No Brasil, a fusão das disciplinas escolares sofreu influência direta dos Estados Unidos, e quem encabeçou essa idéia, com uma proposta radical de mudança no programa das Matemáticas, foi o professor Euclides de Medeiros Guimarães Roxo (1890-1950) do Colégio Pedro II no Rio de Janeiro (MIRANDA, 2003).

A idéia fundamental da mudança era que uma disciplina podia auxiliar no aprendizado da outra, beneficiando tanto o professor como o aluno. A mudança foi implantada nacionalmente pela Reforma Francisco Campos em 1931. Em 1942, segundo Miranda (2003), com a Reforma Capanema, o ideário de fusão completa de Euclides Roxo, como metodologia de ensino, não foi levado adiante, mas as quatro cátedras permaneceram com a designação de Matemática sendo ministrada por apenas um professor.

O ensino da Matemática no Brasil, até final da década de 1950, caracterizava-se, segundo Fiorentini (1995), de duas maneiras: primeiro, pela ênfase às idéias e formas da Matemática clássica, no modelo euclidiano de sistematização lógica do conhecimento matemático a partir de elementos primitivos (definições, axiomas, postulados); em segundo lugar, se caracterizava pela concepção platônica de Matemática.

Conforme D'Ambrósio (1996, p.36), a concepção platônica distinguia claramente "uma matemática utilitária, importante para comerciantes e artesãos, mas não para intelectuais, para quem defendia uma matemática abstrata, fundamental para aqueles que seriam os dirigentes, a elite".

A forma de conceber o ensino e o conhecimento matemático desse período é conhecido como *tendência formalista clássica.* Como tendência pedagógica reforçou o ensino acentuadamente livresco e centrado no professor e no seu papel de transmissor e expositor do conteúdo. O aluno era passivo no processo de ensino-aprendizagem que consistia na memorização e na reprodução dos raciocínios e procedimentos ditados pelo professor ou pelos livros.

Após 1950, a educação matemática no Brasil passa por um período de mobilização com a realização de cinco Congressos Brasileiros de Ensino de Matemática entre 1955 e 1966 como mostra Fiorentini (1995), que culminou no chamado *Movimento da Matemática Moderna* (MMM). Tal movimento, com origens internacionais, surgiu em resposta à defasagem científico-tecnológica da sociedade industrial e ao currículo escolar vigente, principalmente nas áreas de Matemática e Ciências.

O lançamento do foguete "Sputnik" pelos soviéticos em 1957, fez com que o governo norte-americano investisse pesadamente em projetos de inovação e modernização dos currículos escolares. Esse novo modelo de ensino privilegiava, conforme atesta Kline (1976), a abordagem internalista da Matemática, ou seja, a Matemática por ela mesma, auto-suficiente.

O desenvolvimento dessa "moderna matemática" culminou com os trabalhos de Nicolas Bourbaki (nome fictício escolhido por um grupo de matemáticos), cujo objetivo central consistia na exposição de toda a matemática de forma axiomática e unificada, em que as estruturas seriam os elementos unificadores.

Segundo Miranda (2003), os trabalhos de Bourbaki orientaram as propostas do Movimento da Matemática Moderna, reforçadas por estudos psicológicos contemporâneos, especialmente pelos de Jean Piaget.

Mas, na ótica de Piaget, a maneira como a Matemática Moderna chegou às salas de aula pouco ou nada poderia contribuir para a compreensão matemática. Segundo o autor:

> O triste paradoxo que nos apresenta o excesso de ensaios educativos contemporâneos é querer ensinar matemática "moderna" com métodos na verdade

> arcaicos, ou seja, essencialmente verbais e fundados exclusivamente na transmissão mais do que na reinvenção ou na redescoberta pelo aluno. Em outras palavras, a iniciação à matemática moderna não pode ser confundida com uma entrada de chofre em sua axiomática. Na realidade, só é possível axiomatizar um dado intuitivo prévio, e, psicologicamente, uma axiomática só tem sentido a título de tomada de consciência ou de reflexão retroativa, o que supõe toda uma construção proativa anterior. A criança desde os 7 anos e o adolescente manipulam o tempo todo operações de conjuntos, de grupos, de espaço vetorial etc., mas não tem qualquer consciência disso, pois estes são esquemas fundamentais de comportamento e depois de raciocínio, muito antes de poderem ser objeto de reflexão. Toda uma gradação é, portanto, indispensável para passar da ação ao pensamento representativo e uma não menos longa série de transições continua sendo necessária para passar do pensamento operatório à reflexão sobre esse pensamento. O último escalão é então a passagem dessa reflexão à axiomatização propriamente dita. (PIAGET 1998, p. 221).

O Brasil aderiu às mudanças no ensino da Matemática de forma acrítica e os problemas com o ensino foram agravados pela falta de preparo dos professores, obrigados a ensinar com métodos para os quais não foram preparados. Portanto, a Matemática Moderna também não conseguiu resolver os problemas do ensino. Ao contrário, agravou ainda mais a situação.

No início do movimento, como destacou Miranda (2003), alguns professores, alertaram paro o risco de um enfoque centralizado apenas na linguagem. Apesar desses alertas iniciais, foi exatamente esse o caminho percorrido pela Matemática Moderna em nossas escolas.

Na pedagogia moderna para o ensino da Matemática, o centro continuou sendo o professor, permanecendo o aluno passivo frente à transmissão dos conhecimentos. Como tendência pedagógica ficou conhecida no Brasil como “tendência formalista moderna”, conforme Fiorentini (1995). Como as expectativas do MMM foram frustradas, um novo movimento a favor de melhorias nos métodos de ensino e na qualidade da educação começou a se formar.

O “Movimento Educação Matemática” surgiu em contraposição ao MMM. Desde a década de 1970, esse novo movimento vem desenvolvendo inúmeros estudos e pesquisas voltados para a melhoria dos processos de ensino-aprendizagem. Os objetivos não visavam apenas a valorização exclusiva dos conteúdos mas, acima de tudo, a promoção existencial do aluno através do saber matemático. Os conhecimentos espontâneos e anteriores à escolarização, as formas próprias de raciocínio e também aspectos culturais, passaram a ser objetos de investigações por educadores adeptos ao novo movimento.

O interesse relacionado ao ensino da Matemática se volta para a valorização da construção do conhecimento, propondo um ensino pautado na interação entre professor e aluno, na problematização, na reflexão sobre a ações e no estabelecimento de relações entre os conhecimentos.

O 1º Congresso Internacional de Educação Matemática (ICME), que marcou o novo movimento, ocorreu em Lyon – França no ano de 1968. Desde então o MMM cedeu lugar a diversos outros congressos e pesquisas relacionadas ao ensino-aprendizagem da Matemática. A preocupação com a melhoria dos processos de ensino e das relações com os sujeitos envolvidos era evidente, e se mostrava urgente e necessária para a superação de problemas relacionados ao ensino e aprendizado.

No Brasil, tanto o Movimento Matemática Moderna como o Movimento Educação Matemática estavam mergulhados no que seria, conforme Fiorentini (1995, p.15), “a pedagogia oficial do regime militar, pós-64, que pretendia inserir a escola nos modelos de racionalização do sistema de produção capitalista”.

Conhecida como *tendência tecnicista*, representava uma corrente pedagógica de origem norte-americana, cujo objetivo era a otimização dos resultados da escola, tornando-os mais eficiente e funcional. Apontava como solução para os problemas do ensino e da aprendizagem o emprego de técnicas especiais de ensino e de administração escolar.

O confronto do Movimento da Matemática Moderna com o tecnicismo pedagógico teve como consequência, como mostra Fiorentini (1995, p.16), “uma combinação de duas concepções: uma referente ao modo de conceber a Matemática (a concepção formalista estrutural), e outra referente ao modo de se conceber a organização do processo ensino-aprendizagem (a concepção tecnicista)". Essa combinação se manifestou nos materiais didáticos que priorizavam o treino e o desenvolvimento de habilidades estritamente técnicas.

Os conteúdos aparecem, nesse enfoque, dispostos em passos sequenciais em forma de instrução programada (*Behaviorismo*), em que o "aluno deve realizar uma série de exercícios do tipo 'siga o modelo', com a finalidade de desenvolver habilidades e atitudes computacionais e manipulativas, capacitando o aluno para a resolução de exercícios ou de problemas-padrão" (FIORENTINI, 1995, p.17).

A pedagogia tecnicista não se centra nem no professor nem no aluno, mas sim, nos objetivos instrucionais, nos recursos e técnicas de ensino. Os erros seriam então relacionados à falta de treino e não à compreensão.

O Movimento Educação Matemática no Brasil encontrou muitos obstáculos, oriundos de um lado do MMM que primava pelo rigor da Matemática e de outro o tecnicismo pedagógico, que privilegiava as técnicas reforçando a memorização, o treino, as listas de exercícios. Como, então, o Movimento da Educação Matemática vem tentando superar esses obstáculos?

1.2. Educação Matemática: novas perspectivas

As pesquisas em educação matemática seguiram uma "tendência construtivista". O conhecimento matemático sendo entendido como resultante da ação reflexiva do sujeito com o meio em que está inserido, não resultando diretamente do mundo físico e, nem estando *a priori* na mente das pessoas.

O construtivismo, segundo Fiorentini (1995, p.20), vê a Matemática como "uma construção humana constituída por estruturas e relações abstratas entre formas e grandezas reais ou possíveis”, priorizando mais o processo que o produto do conhecimento. Assim, o erro cometido pela criança é visto como uma manifestação positiva de grande valor pedagógico, pois oportuniza ao professor entender como o aluno pensou quando produziu o erro e, com essa compreensão, corrigi-lo de forma a contribuir com a construção de seu conhecimento.

As pesquisas em educação matemática buscam dar sentido ao ensino e à aprendizagem.

Burak (1987, 1992), com estudos e pesquisas relacionadas à Modelagem Matemática, a propõe como uma alternativa didático-metodológica diferenciada, para que o ensino se torne significativo ao aluno. A Modelagem Matemática vai ao encontro dos interesses dos alunos, oportunizando a construção do conhecimento por meio de experiências que ele já possui para, a partir daí, possibilitar a construção de novos conhecimentos.

D’Ambrosio (1993), lançou na década de 60, as primeiras idéias da Etnomatemática, definindo-a como “a arte ou técnica de explicar, de entender, de se desempenhar na realidade (mathema), dentro de um contexto cultural próprio (etno). O autor se refere à Etnomatemática como um programa que conduz a uma revisão crítica de teorias correntes a respeito de cognição, epistemologia, história e política. O principal interesse, quando do surgimento das primeiras idéias acerca da etnomatemática, estava em saber: “Por que ensinar Matemática?”. E, a partir desse questionamento, buscar correlações com a realidade, a fim de imprimir significado a esse conhecimento.

Carraher et al (1995), evidenciam com suas pesquisas em educação matemática que, uma criança mal sucedida na escola, em termos de desenvolvimento operatório, não é necessariamente mal sucedida nas atividades cotidianas fora dela, como por exemplo na feira, em situações comerciais, onde usam a matemática no seu dia-a-dia, demonstrando um raciocínio ágil e correto.

Skovsmose (2000) apresenta preocupações relacionadas ao "paradigma do exercício", e propõe que a sala de aula seja um "cenário para investigação", no qual os alunos são convidados a se envolverem em processos de exploração e argumentação justificada. Segundo o autor, "mover-se do paradigma do exercício em direção ao cenário para investigação pode contribuir para o enfraquecimento do autoritarismo da sala de aula tradicional de matemática e engajar os alunos ativamente em seus processos de aprendizagem" (SKOVSMOSE, 2000, p.66).

Apesar de mais de três décadas de muitos estudos e pesquisas no campo da educação matemática, os problemas relacionados ao ensino-aprendizagem ainda resistem. Com relação ao ensino, Rocha (2001, p.23), observa que "em sala de aula, os professores, continuam mostrando exemplos no quadro de como se resolvem as atividades, utilizando determinados conteúdos que os alunos jamais utilizarão – a não ser nas aulas de Matemática - esperando que sejam capazes de resolver uma lista de exercícios exatamente iguais". A autora, em seu estudo, buscou caracterizar o ensino de matemática na escola pública, analisando como este tem servido à reprodução das desigualdades sociais procurando, também, identificar, por meio dos professores, concepções que envolvem o conhecimento matemático e sua articulação com a formação do educando cidadão.

Uma das consequências desses procedimentos de ensino, observada por Rocha, é o fracasso do processo de ensino-aprendizagem, pois não se pode afirmar que o aluno aprendeu a ponto de mudar seus esquemas de ação frente a novas situações, já que o aprendizado se dá pela repetição e reprodução. Outra é que, "ao oferecer um ensino mecanizado aos alunos de escola pública, de certa forma já está sendo condicionada a posição que eles ocuparão na sociedade" (ROCHA, 2001, p.24).

Os estudos citados explicitam as preocupações com o ensino de matemática, e apontam que os problemas relacionados ao ensino-aprendizagem têm origem em questões de natureza epistemológica, social, cultural, psicológica e didático-metodológica. A compreensão do erro em situação de ensino possibilita contribuir com pelo menos alguns desses problemas do ensino da Matemática que resistem a alternativas didático-metodológicas que, em muitos casos, se restringem à reprodução de técnicas, à organização do meio e de materiais. Pensar nos dados qualitativos dos erros e não meramente quantitativos, permite-nos conhecer as reais dificuldades dos alunos.

1.3. O ensino reflete concepções de conhecimento

O processo de ensino-aprendizagem reflete na prática de sala de aula, concepções sobre a aquisição de conhecimentos. O conhecimento matemático pode ser passível de simples acumulação, atribuindo ao meio a origem de todo o saber. Um conteúdo vai preenchendo um espaço vazio que o indivíduo possuía antes de aprender. Ou como simples descoberta, de alguma coisa que o sujeito já possuía em sua bagagem, faltando-lhe apenas estímulos para que sejam aflorados. Ainda pode ser entendido como algo que se constrói, considerando a diversidade de processos pelo qual cada sujeito aprende.

Piaget (1973), distingue três formas de conhecimento. Em primeiro lugar, ele destaca a categoria dos conhecimentos adquiridos graças à experiência física em todas as suas formas, isto é, a experiência dos objetos e de suas relações mas, com a abstração a partir dos objetos como tais – o empirismo. Em segundo lugar, aqueles estruturados por uma programação hereditária inata ou por maturação – o racionalismo. Em terceiro, considera os conhecimentos lógico-matemáticos, "que se tornam rapidamente independentes da experiência e que, se no início procedem dela, não parecem tirados dos objetos como tais, mas, das coordenações gerais das ações exercidas pelo sujeito sobre os objetos" (PIAGET, 1973 p.306). Por meio dessas coordenações, o sujeito constrói o saber.

O **empirismo** explica o conhecimento científico como derivado diretamente da observação dos fatos e postula a existência de um mundo independente do sujeito que o observa. Os fatos falam por si. Os representantes desse pensamento são Locke, Berkeley e Hume, os quais defendiam que o conhecimento é externo ao indivíduo, sendo interiorizado através dos sentidos.

Para Piaget (1973), nessa perspectiva, os conhecimentos consistem essencialmente em informações tiradas do meio (experiência adquirida), sob formas de cópias da realidade e de respostas figurativas ou motoras aos estímulos essenciais (esquema S→R), sem organização interna ou autônoma.

Essa objetividade do empirismo, de acordo com Rabelo (2004, p.37), é a mesma que busca o “Condutismo” ou “Behaviorismo”, que define a aprendizagem como mudança de comportamento e como resultado de treino e experiência, sendo portanto, identificável com o condicionamento.

Becker definiu o empirismo como “a hipótese segundo a qual a capacidade de conhecer ou de aprender do sujeito é devida à experiência adquirida em função do meio físico mediada pelos sentidos. O indivíduo ao nascer é *tabula rasa*[1]” (BECKER, 1997, p.11), tal qual uma folha em branco que precisa ser preenchida.

Nas relações pedagógicas, o pensamento empirista se manifesta na escola quando o aluno é considerado um sujeito que deve aprender tudo porque nada sabe. O professor, detentor de todo saber, é quem deve transmiti-lo ao aluno através dos conteúdos, os quais são recebidos de forma passiva.

O erro nessa perspectiva não é aceitável. Como pode o aluno errar se houve toda a exposição e transmissão do conteúdo pelo professor? Se errou, é porque não prestou atenção, é preguiçoso, não estudou. Não são levados em conta possíveis fatores psicogenéticos

[1] A expressão “tabula rasa” é de John Locke (1632-1704) e significava que a tabuinha de cera que se usava naquela época, estava lisa e pronta para ser utilizada. Naquela época não se tinha papel ou lousas em abundância para escrever as anotações.

relacionados ao desenvolvimento e, nem tampouco, os conhecimentos prévios do aluno. Assim, o objeto é que determina o que o sujeito aprende. O aluno é passivo frente ao conhecimento transmitido. Legitima-se o autoritarismo do professor, o silêncio e a heteronomia do aluno. Expressam essa concepção de ensino as listas de exercícios, como atividades de fixação e memorização, sem estarem necessariamente apoiadas na compreensão do estudado, mas sim, na sua reprodução.

A perspectiva **racionalista** ou pré-determinista, defende que os sentidos podem ser enganadores, causando erros perceptivos, por isso o conhecimento deve passar por um processo dedutivo, rigoroso. Chega-se a um conhecimento verdadeiro por meio da razão. No racionalismo tanto quanto no empirismo, os conhecimentos são sempre transcrições da realidade a serem transferidas ou descobertas por quem aprende, sem portanto, a participação e intervenção do sujeito aprendiz.

Descartes, Spinoza e Kant são representantes dessa corrente de pensamento que destaca o poder da razão contra as ilusões dos sentidos.

Para Becker, o racionalismo é "a hipótese, oposta ao empirismo, segundo a qual o indivíduo, ao nascer, traz consigo, já determinadas, as condições do conhecimento e da aprendizagem que se manifestarão imediatamente (inatismo) ou progressivamente pelo processo geral de maturação" (BECKER, 1997, p.11).

Pedagogicamente, o racionalismo considera que o aluno já possui, *a priori*, toda uma estrutura que determina o conhecimento. Basta apenas que tenha interesse ou seja motivado para aprender. O professor interfere minimamente para não prejudicar o aluno. Acredita-se que com o tempo o aluno aprende e os erros são superados. Corrigir ou apontar os erros pode bloqueá-lo ou traumatizá-lo.

Conforme Piaget (1998, p. 138), "nessa concepção, a escola por certo supõe uma relação social indispensável, mas apenas entre o professor e os alunos: sendo o professor o detentor dos conhecimentos exatos e o perito nas técnicas a serem adquiridas, o ideal é a submissão da criança à sua autoridade, e todo contato intelectual das crianças entre si nada mais é que perda de tempo e risco de deformações ou de erros”. Isto porque considera-se um pensamento já plenamente constituído, exigindo apenas ser exercitado.

Tanto no empirismo como no racionalismo o tratamento dado à aprendizagem mostra-se reducionista. No primeiro caso é o *a priori* do objeto e no outro é o *a priori* do sujeito. Segundo Rabelo (2004, p. 40), “é nesse contexto de cisão entre objetividade e subjetividade que a escola se situa como ‘transmissora de conhecimentos’ e, assim situada não se pode esperar um ensino que proporcione a autonomia intelectual, moral, etc”. O autor conclui que o empirismo é um objetivismo sem objetividade e o racionalismo é um subjetivismo sem subjetividade.

Para a superação dessas concepções, uma outra teoria defende a posição de que o conhecimento é resultado da relação entre sujeito e objeto, entre o organismo e o meio: a teoria construtivista.

O construtivismo piagetiano encontra-se nessa vertente epistemológica, que se opõe à objetividade e a neutralidade das epistemologias empiristas e racionalistas e adota um novo critério de objetividade em que o homem, numa relação dialética sujeito↔objeto, é produtor e, ao mesmo tempo, produto da sociedade.

Na perspectiva piagetiana, o conhecimento se dá por construção. Para o autor, o processo de construir o conhecimento é denominado de *Epigênese,* pois ele considera que é uma construção que vai além dos dados genéticos e da influência do meio (PIAGET, 1973).

Segundo Becker (1997, p.11), o construtivismo é “a hipótese que, negando simultaneamente o empirismo e o apriorismo, afirma que as estruturas do conhecimento e, portanto, da aprendizagem, são construídas pelo sujeito mediante sua ação sobre o meio físico e social; mediante um processo de interação sujeito-meio”.

Piaget qualificou como idéia central de sua teoria que “o conhecimento não procede nem da experiência única dos objetos nem de uma programação inata pré-formada no sujeito mas, de construções sucessivas com elaborações constantes de estruturas novas” (Piaget 1976, p.11).

Para Freitas (1999), a aprendizagem escolar construtivista desenvolve processos de assimilação e acomodação em busca de uma situação de equilíbrio. Na psicologia genética de Piaget, o aprendizado ocorre sempre por uma adaptação a um meio que é fator de contradição e dificuldade. Freitas considera importante observar que “é necessário ocorrer um desequilíbrio para que o aluno possa reorganizar seu pensamento na construção do seu saber e que este saber é resultado de uma adaptação do aluno que consegue novas respostas a uma situação que anteriormente ele não dominava” (FREITAS, 1999, p.85).

De acordo com o construtivismo piagetiano, o sujeito aprende quando precisa reestruturar seus esquemas de conhecimento. García (2002), sintetizou as conclusões epistemológicas do núcleo da teoria piagetiana em sete teses como:

> 1) O desenvolvimento do conhecimento é um processo contínuo que mergulha suas raízes no organismo biológico, prossegue através da infância e da adolescência e se prolonga no adulto até os níveis da atividade científica (..).
> 2) O conhecimento surge num processo de organização das interações entre um sujeito (o sujeito de conhecimento) e essa parte da realidade constituída pelos objetos (o objeto de conhecimento) (..).
> 3) A gênese das relações e as estruturas lógicas e lógico-matemáticas estão nas interações sujeito-objeto. Não provém do objeto, como abstrações e generalizações de percepções empíricas, nem do sujeito, como intuições puras ou idéias platônicas. Sua raiz está nas coordenações das ações do sujeito sobre o objeto (..).
> 4) Organizar objetos, situações, fenômenos da realidade empírica (como objetos de conhecimento) significa estabelecer relações entre eles.
> 5) O desenvolvimento do conhecimento não acontece de maneira uniforme, por simples expansão, nem por acúmulo de elementos. Não é o desenvolvimento de algo que estava pré-formado, nem provém da agregação e elaboração de elementos vindos da experiência. O desenvolvimento se dá por reorganizações sucessivas.
> 6) Em todo domínio da realidade (físico, biológico, social), as interações do sujeito com os objetos de conhecimento dão lugar a processos cognitivos construídos com os mesmos mecanismos, independentemente do domínio. (..) não há dicotomia, no nível psicogenético, entre os fenômenos do mundo físico e os fenômenos do mundo social.
> 7) O sujeito de conhecimento se desenvolve desde o início num contexto social. A influência do meio social (que começa com a relação familiar) aumenta com a aquisição da linguagem e depois através de múltiplas instituições sociais, como a própria ciência (..) (GARCÍA, 2002, p. 48-50).

As teses de García reportam à afirmação de La Taille (1997), quando diz que todo construtivismo é necessariamente interacionista, pois é na interação com o meio que as diversas formas de assimilação são utilizadas pelo sujeito, permitindo o seu desenvolvimento. A perspectiva construtivista da criança é a da criação e não a da transmissão nem da revelação. Algo não está dado; terá de ser construído.

Nesse sentido, Macedo destaca que "erro e acerto são inevitáveis. Não em um sentido de rigor ou complacência excessiva, mas como aquilo com que temos de lidar" (MACEDO, 1994, p. 67). Portanto, fazem parte do processo de conhecimento.

O construtivismo piagetiano segundo Macedo, defende que as estruturas, os esquemas, os conceitos, as idéias, são criados, construídos por um processo de auto-regulação que significa a busca de sintonia porque algo precisa ser corrigido. "O limite entre o favorável e o desfavorável ao que se quer alcançar é construído por meio da auto-regulação, na qual erro e acerto não são predeterminados ou dados externamente" (MACEDO, 1994, p. 69).

No ensino da matemática, o modo de considerar o erro, numa perspectiva construtivista, não pode ser aquele em que o aluno apenas apague o que fez e copie a resposta correta, mas que compreenda o que fez, ampliando seus esquemas de ação e que essa compreensão possa ser transferida para outras situações. Para a construção do conhecimento, é necessária a integração da atividade intelectual dos sujeitos, pois se trata da compreensão de como as ações são coordenadas por quem aprende e também por quem ensina.

Conforme Rosso et al (1998, p. 71), para a visão construtivista o conhecimento não está pronto (...). Sendo assim, assumir uma prática construtivista significa dar oportunidade ao aluno de refazer, reconstruir, reinventar, por meio das operações, seus conhecimentos e as formas de ver o mundo, e não simplesmente repassá-los aos alunos.

No construtivismo, o conhecimento é construído nas inter-relações entre sujeito e objeto. Aquele modifica-se ao modificar o objeto. Segundo Piaget, o conhecimento se dá por meio da ação e problematização das situações gerando conflitos que devem ser superados mediante a ampliação dos esquemas de ação do sujeito sobre o objeto. Os conhecimentos já construídos são a base para a construção de novos conhecimentos.

1.3.1. O construtivismo e o conhecimento lógico-matemático

O conhecimento lógico-matemático para Piaget (1973), é um conhecimento que se constrói. Consiste nas relações mentais que o sujeito estabelece com um objeto, coordenando as ações que realiza. O autor caracteriza, ainda, outros dois tipos de conhecimento: o físico (conhecimento dos objetos) e o social (o conhecimento interpessoal, o que é transmitido). Mas entende que, tanto um quanto o outro requerem uma estrutura lógico-matemática para sua assimilação e organização, pois sem uma estrutura de estabelecimento de relações, o conhecimento já adquirido, seja físico ou social, se torna fragmentado (Piaget, 1978).

Segundo Rabelo (2004), o pensamento matemático é caracterizado por Piaget como abstração reflexiva. É produto da atividade do sujeito. Na abstração reflexiva o sujeito abstrai as regras do conhecimento lógico-matemático da sua própria coordenação de ações e não de propriedades dos objetos em si. Esta última, Piaget (1995) designa como abstração empírica, ou seja, aquela que se apóia sobre os objetos físicos ou sobre os aspectos materiais da própria ação.

Rabelo destaca que "o conhecimento lógico-matemático consiste na criação e coordenação de ações e relações mentais do sujeito sobre o objeto através de abstrações empíricas e reflexivas, não sendo portanto, algo inato ou elaborado apenas pela observação e, sim, uma estrutura interna, construída pelo próprio indivíduo, não podendo, portanto, ser ensinado" (RABELO 2004, p.47).

A fonte do conhecimento lógico-matemático para Piaget, é interna ao sujeito e fruto de estabelecimento de relações que um indivíduo cria ao comparar objetos, através de abstrações reflexivas. A coordenação geral das ações "se dá ao nível da abstração, sendo esta, ponto de partida das operações lógico-matemáticas" (PIAGET, 1973, p.25).

Tratando do conhecimento matemático propriamente dito, a criança de um modo informal tem contato com dados matemáticos desde muito pequenos, seja nas brincadeiras ou em pequenas transações comerciais. Essa experiência do mundo físico é bastante importante, pois a criança começa a estabelecer relações e a representar quantidades.

O número, como representativo de quantidade, ordenação ou codificação é, segundo Kamii e De Clark (1986), uma síntese de dois tipos de relação que a criança elabora entre os objetos: a ordem e a inclusão hierárquica. Ordem no sentido de haver uma necessidade lógica de organização entre objetos e inclusão hierárquica, como a percepção de que o 'um' está no 'dois', o 'dois' está incluído no 'três' e assim sucessivamente.

Para essa compreensão, segundo Piaget (1971), a criança precisa conservar quantidades tanto de dados discretos ou contínuos e depende da reversibilidade das operações, ou seja, a capacidade de desfazer mentalmente a mesma ação. Para o autor, "a construção do número efetua-se em estreita ligação com a construção de estruturas lógicas de grupamento de classes – inclusões e classificação – e de relações de ordem – seriação" (PIAGET, 1973, p.350). Estas duas construções supõem a experiência a partir de objetos, 'o conhecimento físico'. Mas, o conhecimento em nível abstrato, depende do estabelecimento de relações para ser construído.

A concepção de número e sua construção para Piaget (1971), é diferente da maioria dos matemáticos. Para estes o número é uma propriedade de conjuntos, como forma, cor, tamanho. As propriedades se referem aos objetos, portanto, são empíricas e externas, sendo passíveis de transmissão social. Na abstração empírica, a concentração se dá numa propriedade do objeto sem coordenação com outras. Na abstração reflexiva acontece o estabelecimento de relações mentais entre tais propriedades. A abstração do número, para Piaget, é reflexiva.

As considerações sobre a epistemologia possibilita-nos compreender melhor o conhecimento e o ensino. A abordagem e o tratamento dado aos erros podem seguir dois caminhos, dependendo de concepções acerca do conhecimento: a sua eliminação ou a sua observação e exploração. É sob a ótica do construtivismo piagetiano que abordaremos, no próximo capítulo, os estudos sobre erros do aluno no processo ensino-aprendizagem.

CAPÍTULO II

2. OS ERROS NO ENSINO-APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Os erros dos alunos em Matemática, freqüentemente são vistos como problema. Aqueles que erram muito são, por vezes, caracterizados por suas dificuldades de aprendizagem e os sujeitos com maiores possibilidades de reprovação. Em relação ao ensino, o 'que fazer' para superar essas dificuldades é uma questão difícil, pois cada aluno é um sujeito diferente do outro e tem suas necessidades próprias para superação dos obstáculos de aprendizagem.

A resolução de uma atividade pelo aluno, de certa forma, expressa como ele pensa naquele momento e naquela situação em que se encontra. Pode acontecer que em um contexto escolar o aluno apresente uma resposta e fora dele apresente outra.

Nas situações escolares, quando o aluno apresenta uma resposta considerada correta, não causa preocupação, mesmo não sendo garantia de que houve a compreensão da situação proposta. Quando erra, diversas possibilidades se abrem relacionadas à causa do erro.

Numa visão 'tradicional' de ensino, o aluno aprendeu quando não erra nas atividades. O importante é não errar. Na ótica do conhecimento em construção, os erros são potenciais no planejamento das atividades docentes, tendo em vista que possibilita conhecer o aluno aproximando-se de suas dúvidas.

2.1. O erro do aluno na perspectiva do construtivismo piagetiano

A visão de erro, na perspectiva piagetiana, é a da provisoriedade e de parte integrante no processo de construção do conhecimento. Os erros cometidos por uma criança são compreendidos como reveladores do conhecimento construído. Nessa perspectiva, o erro é possível, porque faz parte do processo de aprendizagem. Piaget, em seus estudos não tratou especificamente dos *erros* das crianças, mas sim das ações realizadas por elas, e corretas ou não, trazem informações importantes sobre o desenvolvimento cognitivo.

O importante papel dos erros para a teoria piagetiana também é destacado por Casávola (1988, p.43), quando cita uma frase do próprio Piaget em que diz "um erro corrigido (por ele mesmo) pode ser mais fecundo do que um acerto imediato, porque a comparação de uma hipótese falsa e suas consequências fornece novos conhecimentos e a comparação entre dois erros dá novas idéias". Ainda, para Piaget, mais importante do que a criança apresentar respostas corretas ou não, é ela ter a compreensão de como produziu tal resposta, ou seja, que saiba justificá-la.

La Taille (1997), faz algumas ponderações pedagógicas a respeito do tratamento dado aos erros. A primeira, que o autor chama de óbvia, é a condenação sumária de todo e qualquer erro. Para o autor, esta atitude pode se traduzir tanto na ignorância a respeito do caráter interpretativo da inteligência como um desprezo com relação à inteligência infantil. A ignorância citada diz respeito "aos processos de assimilação quando o erro é tomado somente em relação ao 'certo' e não pensado a partir de suas qualidades intrínsecas" (LA TAILLE, 1997, p. 30). Sobre a condenação sumária do erro e a relação com um desrespeito à inteligência infantil, o autor diz:

> De fato, sendo a inteligência uma organização e seu desenvolvimento uma constante reorganização, deve-se sempre partir do que a criança sabe ou pensa saber, para que aprenda e se desenvolva. Fazer de conta que ela nada pensa, de que ela nada sabe, não somente a humilha como a leva a confundir aquilo que, por conta própria, elaborou com o que lhe é ensinado" (LA TAILLE, 1997, p.31).

A segunda ponderação que faz La Taille é sobre a importância de balizar com bom senso a questão dos erros. O autor destaca que nem sempre é fácil avaliar a qualidade de um erro, pois há alguns que provêm de esquecimento, outros da dificuldade com a linguagem, ou ainda, estão relacionados ao simples desconhecimento a respeito de um tema. Outro ponto importante, também destacado pelo autor, é que as crianças cometem erros sob a perspectiva do adulto, pois para elas, até certa fase do desenvolvimento, suas atitudes não são interpretadas como erros.

Segundo De La Torre *apud* Pinto (2000, p. 63), "o professor tende a agir sobre o erro a partir de uma perspectiva essencialmente empirista, isto é, corretiva". E observa que essa "postura corretiva", que considera o erro como uma incapacidade do aluno, pode ser substituída por uma "postura construtiva", em que se dá mais importância aos procedimentos do que aos resultados.

Em busca de uma postura construtiva, vários autores desenvolvem trabalhos procurando conhecer os alunos na sua maneira de pensar quando resolvem atividades e também para compreender quais concepções permeiam o tratamento dado aos erros pelos professores. Tais estudos apontam caminhos para o planejamento do trabalho docente.

Kamii e De Clark (1986), se interessa pela epistemologia e psicologia genética, sobre as origens do pensamento matemático e insiste que todos os educadores justifiquem seus objetivos a partir do conhecimento científico de como as crianças pensam. Para ela, a habilidade da criança escrever *respostas corretas*, não é um objetivo válido na aritmética inicial, o importante é a atividade mental, ou seja, o processo ativo e autônomo do raciocínio.

Castorina e colaboradores (1988), discutem sobre o papel dos erros na aquisição de conhecimentos, mostrando que suscitam uma grande problemática que envolve: questões pedagógicas, relacionadas ao tipo de atitude que o docente deve assumir diante do erro e a maneira de corrigi-los; questões psicológicas na medida em que é pertinente perguntar se os erros são fatos aleatórios da aprendizagem ou se têm suas razões no mecanismo de aquisição dos conhecimentos; questões epistemológicas, porque o fato de dar ou não significado ao erro pressupõe concepções sobre a constituição do conhecimento como: o apriorismo, o empirismo ou o construtivismo.

Davis e Esposito (1990), discutem a avaliação escolar a partir do enfoque da teoria psicogenética de Piaget, buscando contribuições para a discussão dos problemas da aprendizagem, mais especificamente os que dizem respeito à questão do *erro*. As autoras concluem que os tipos de erros cometidos pelas crianças devem ser distinguidos, fornecendo-lhes condições de superá-los e, que essas condições (que se referem aos métodos, técnicas e procedimentos de ensino) devem ser selecionadas com cuidado, em função da avaliação que se faz da natureza dos erros de aprendizagem. As autoras, ainda, distinguem três tipos de erros: *Erros de procedimento* - cometidos no emprego ou aprimoramento de conhecimentos já construídos e que podem acontecer por distração ou falta de treinamento; *Erros construtivos* – que sinalizam a formação de novas estruturas. A criança erra porque a estrutura de pensamento que possui não é suficiente para realizar a tarefa, ou seja, existem lacunas que dificultam a assimilação dos dados disponíveis; *Erros por limites na estrutura do pensamento* – por não possuir a estrutura necessária à solução da tarefa, a criança fica impossibilitada de compreender o que lhe é solicitado.

Macedo (1994), discute a questão do erro numa perspectiva formal ou "do adulto" e na perspectiva da criança. Na primeira, o errado se opõe ao certo, que é valorizado como verdadeiro ou bom. Na segunda, a criança não sabe que está errando. Mais tarde, ela percebe o conflito entre suas respostas até alcançar a compreensão correta. O autor aponta para a importância dos estudos sobre a aprendizagem operatória em que são criadas situações nas quais o erro pode ser um observável para a criança. Macedo, se valendo da classificação de Piaget, trata a questão do erro em três níveis:

> No nível I, não há erro em uma perspectiva consciente; ele é recalcado e as respostas contraditórias não causam conflito ou problemas para as crianças. As tentativas de denunciá-lo são inoperantes.
>
> No nível II, o erro aparece como um problema. Depois de tê-lo cometido, a criança o reconhece, apesar de já ser tarde. Além disso, as soluções ocorrem por ensaio e erro, ou seja, por tentativas. A interferência exterior do adulto ou de outra criança já surte mais efeito, no sentido de problematizar a situação. Mas, ainda é uma perturbação

> exterior ao sistema cognitivo da criança. As iniciativas exteriores problematizam o erro. Ele instala-se como uma contradição que exige superação.
>
> No nível III, o erro é superado enquanto problema. A criança pode antecipá-lo ou anulá-lo, ou seja, já dispõe de meios, dentro de seu sistema, para pesquisá-lo. Os erros anteriores são evitados nas ações seguintes. Há pré-correção do erro, há antecipação interior no sistema. O sujeito adquire uma certa autonomia (Macedo 1994, p.77 e 78).

Estes níveis possibilitam a classificação das respostas dadas em situações-problema, levando em conta a estrutura cognitiva do sujeito. Sobre a atitude que o professor deve assumir diante do erro para que seja coerente com o construtivismo, Macedo comenta que uma vez entendido que ele faz parte do processo, pode ser analisado de diferentes ângulos, não se tratando de negá-lo ou justificá-lo de maneira complacente, nem de evitá-lo por meio de punições, mas de problematizá-lo, transformando em uma situação de aprendizagem (MACEDO, 1994, p.75).

No estudo de Cury (1995), é apresentada uma retrospectiva histórica da análise de erros em Educação Matemática. Suas observações centram-se no behaviorismo, no processamento da informação e no construtivismo. No behaviorismo, a autora ressalta que as pesquisas procuravam, principalmente, classificar os tipos de erros cometidos por alunos dos primeiros anos escolares. Sob a ótica do processamento da informação, ela observa que foram desenvolvidos programas de computador para detectar padrões de erros. E sob a perspectiva construtivista, Cury enfatiza que os investigadores destacam o papel do erro na construção do conhecimento. A autora comenta, também, que a análise de erros é uma abordagem de pesquisa em Educação Matemática que vem sofrendo as influências das teorias vigentes como, por exemplo, o construtivismo.

Santos e Santos (1996), em pesquisa com 304 alunos do Ensino Fundamental, com idade entre 14 e 35 anos, seguiram a hipótese de que, quando não são considerados os erros que os alunos cometem no processo de ensino-aprendizagem, o seu desenvolvimento cognitivo fica prejudicado. Em uma parte específica da pesquisa apontaram que, de 140 alunos de 8ª série investigados, 72,8% não conseguiram resolver problemas simples envolvendo duas operações aritméticas (adição e multiplicação), e apresentaram ainda, erros que normalmente são superados na 4ª série do ensino fundamental. Com a pesquisa, apontaram que os erros cometidos pelos alunos ao longo do processo de escolarização, não foram trabalhados no sentido de que se buscasse atingir os objetivos propostos para o ensino da Matemática, nem no sentido de proporcionar o desenvolvimento cognitivo. Sobre os erros, nenhum tipo de reflexão foi evidenciado, e não foram tornados observáveis para quem os praticou. Concluíram, enfim, que os alunos não são desafiados cognitivamente.

Gusmão e Emerique (2000), apresentam considerações a respeito da percepção do erro nas aulas de Matemática procurando, numa perspectiva construtivista e epistemológica, vislumbrar um possível espaço para discutir as emoções dos alunos diante do erro que, como pressupõem, constituem obstáculos emocionais para a aprendizagem de matemática. Os resultados dos estudos mostraram a presença de um círculo vicioso: uma vez constituído o obstáculo emocional, ele induz ao erro e, uma vez constituído o erro, este desencadeia emoções como: frustração de expectativas, angústia, raiva, sentimento de inferioridade entre outras.

Pinto (2000), focaliza o erro no processo de aprendizagem da matemática elementar cometidos por alunos da 4ª série do ensino fundamental. Volta suas reflexões para o cotidiano escolar, levando em conta a perspectiva docente, em três níveis de discussão: o da formação continuada de professores, o do ensino de matemática e o do processo de avaliação da aprendizagem escolar. Numa perspectiva piagetiana, a autora, aponta para a necessidade do erro ser “um observável” para o aluno. Outras perspectivas, também por ela analisadas, contribuíram para a percepção da necessidade – nas situações didáticas e, mais particularmente, nas práticas corretivas desenvolvidas no cotidiano da sala de aula – de uma ressignificação do erro.

Brandt (2002), aponta para as dificuldades de compreensão do Sistema de Numeração Decimal (SND) e propõe uma investigação da natureza das dificuldades identificadas na aprendizagem do SND pelos alunos. No estudo busca respostas para a indagação: "De que forma é possível diferenciar dificuldades de obstáculos epistemológicos na aprendizagem do Valor Posicional presente no SND, a partir da análise dos erros dos alunos como constitutivos de sentido do conhecimento adquirido?" Os resultados de suas pesquisas demonstraram que é possível a identificação de formas de reflexão sobre a prática educativa e, ao mesmo tempo, identificar as dificuldades que têm de ser diferenciadas como dificuldades ou obstáculos epistemológicos, os quais se apóiam em conhecimentos anteriores que se tornaram duráveis ou estáveis.

Os estudos citados explicitam a complexidade do trabalho docente. A teoria piagetiana dá condições ao professor de pensar no erro do aluno como um importante objeto de observação das estratégias ou formas de pensar. Para isso é igualmente importante o papel ativo do aluno. Que o erro seja observado e considerado também por ele, por meio da ação/cooperação, a fim de que tenha condições de analisá-lo, refletindo sobre ele, e de superá-lo. Um erro não visto e não compreendido pode passar como verdade para o aluno, impedindo progressos no seu modo de pensar, criando obstáculos epistemológicos (BACHELARD, 1996).

As estratégias *erradas* passam a assumir um papel importante no processo cognitivo e no ensino-aprendizagem mostrando que não basta saber por onde ir, mas também, por onde não ir quando o objetivo é resolver uma situação-problema, se aproximando assim de uma maneira correta de resolução. Esse olhar para o erro do aluno orienta as práticas didático-metodológicas do professor, e nessa relação o professor aprende ao ensinar, sobretudo, quando a prática pedagógica possibilita a exploração das respostas num trabalho cooperativo com os alunos.

É sobre a operatividade, o desenvolvimento de atitudes autônomas e importância da cooperação e socialização entre os alunos como contribuição ao ensino-aprendizagem, que trataremos no próximo item desse estudo.

2.2. Operação, co-operação e autonomia do aluno no processo ensino-aprendizagem

As operações representam a movimentação do pensamento por meio das ações que o sujeito realiza, conscientes ou até mesmo inconscientes, e seguem uma lógica própria. Ações funcionais, interiorizadas, como: reunir, associar, dissociar, ordenar, são exemplos dessas ações, que também "são reversíveis pelas coordenações que delas podem ser abstraídas" (Piaget 1967, p.11).

Para Rosso et al, "as ações são processos interiorizados e envolve o aspecto ativo, atuante da inteligência, que transforma e modifica os dados que o indivíduo põe em ação ao conhecer (...) as operações manifestam o indivíduo atuando, funcionando, desenvolvendo-se como uma totalidade resultante da assimilação e da acomodação" (ROSSO et al, 1998, p. 67).

Para Piaget & Inhelder *apud* Macedo (1994, p.156), as principais ações que caracterizam as operações são as seguintes:

> 1. Ações escolhidas entre as mais gerais, isto é, coordenações de ações, como as que permitem à criança reunir duas classes numa terceira, ordenar objetos, classificá-los, etc.
>
> 2. Ações interiorizáveis, pois podem realizar-se tanto física quanto mentalmente.
>
> 3. Ações reversíveis, isto é, que podem ser anuladas ou compensadas por uma outra ação.
>
> 4. Ações nunca isoladas, mas sempre coordenadas em sistemas de conjuntos.
>
> 5. Ações comuns a todos os indivíduos de mesmo nível mental.
>
> 6. Ações que intervêm tanto nos raciocínios individuais quanto nas trocas cognitivas com outros membros do grupo.

Assim, como salienta Rosso et al (1998, p.71), “a operação envolve o aspecto mais ativo e atuante da inteligência, pois se apóia na transformação da ação, incorporando e modificando significados, tornando estes mais abrangentes e profundos. Não é estática, memorativa ou meramente descritiva; é dinâmica e transformadora”.

As operações, na perspectiva piagetiana, organizam-se em dois níveis sucessivos, conforme Macedo (1994): O primeiro é o denominado “período das operações concretas” ou “pensamento operatório concreto” vai dos 7 aos 11 anos aproximadamente. Neste nível, a criança já é capaz de abstrair dados da realidade, mas ainda é dependente das ações sobre objetos para tal abstração. Desenvolve o pensamento reversível, e as operações de pensamento já possuem uma organização mental integrada.

Esse período é assim denominado porque consiste em operações sobre objetos e não sobre proposições ou enunciados. As principais operações são as que permitem ao sujeito classificar ou seriar objetos, bem como incluí-los numa classe ou série e conservar uma dimensão deles perante alterações em outras dimensões.

O segundo nível das operações é denominado de “período das operações formais” e abrange dos 11 aos 15 anos aproximadamente. Neste, a representação permite a total abstração. O sujeito não é mais dependente da ação sobre objetos. Seu pensamento torna-se hipotético-dedutivo. Pode pensar em diferentes possibilidades e relações lógicas para o mesmo objeto ou conjunto de objetos. As estruturas cognitivas alcançam seu nível mais elevado de desenvolvimento, tornando-os capazes de aplicar o raciocínio lógico a todo tipo de situações. No período das operações formais a criança e/ou adolescente pode realizar as relações possíveis, de modo a prever as situações necessárias para provar uma hipótese, ou seja, não é mais dependente das ações sobre objetos.

A operatividade surge, segundo Piaget (1978, p.16), “somente quando o pensamento da criança torna-se reversível”, ou seja, quando ela é capaz de admitir a possibilidade de se efetuar a operação contrária, ou voltar ao início da operação compreendendo o objeto em sua totalidade. Marca a possibilidade da criança agir seguindo uma lógica nas ações. Para Piaget, a organização das ações mentais em pensamento operatório pode ser descrita em termos de grupamentos matemáticos e agrupamentos lógicos e mais tarde, quando atinge o estágio formal, em termos de agrupamentos de relações, ou seja, de relações de segunda ordem ou relações de relações (Piaget, 1978).

Piaget considera que a passagem da ação à operação "supõe uma descentração fundamental, condição do agrupamento operatório, e que consiste em ajustar as ações uma às outras, até poder compô-las em sistemas gerais aplicáveis a todas as transformações e, estes sistemas, permitem unir operações de um indivíduo às dos outros (PIAGET, 1973b, p.105).

Tomar consciência de uma operação, para Piaget, é efetivamente fazê-la passar do plano da ação para a linguagem. É portanto, reinventá-la na imaginação, para poder exprimi-la em palavras (PIAGET, 1967, p. 199). A isso o autor chama de 'introspecção' e considera ser muito difícil, pois pressupõe não somente a tomada de consciência das relações tecidas pelo pensamento, mas do próprio trabalho deste pensamento.

Ressalta ainda que jamais o próprio pensamento teria chegado a tomar consciência de si mesmo, não fora o embate com o pensamento dos outros e o esforço de reflexão que este provoca. Portanto, a "introspecção é na verdade uma variedade de tomada de consciência, ou mais, exatamente, uma tomada de consciência de segundo grau" (PIAGET, 1967, p. 140).

O estágio das operações concretas (de 7 a 11 anos), é destacado pelo autor como sendo a fase em que os progressos cooperativos da criança, relacionados ao desenvolvimento, se mostram mais presentes. Ele percebe que neste período há um nítido progresso de socialização e a criança torna-se capaz de colaborar com seus pares, de trocar e coordenar pontos de vista, de discutir e de apresentar coerentemente suas idéias. Assim, Piaget (1973b, p.99) destaca que “a cooperação, na ação e no pensamento, ocorrem juntos a um agrupamento sistemático e reversível das relações e operações”.

A cooperação entre os alunos, na perspectiva piagetiana, “liberta cada um de seu egocentrismo espontâneo em benefício da reciprocidade dos pontos de vista, fator de estabelecimento de relações e de reversibilidade” (PIAGET, 1967, p.13). Para o autor, a coordenação progressiva das ações em situações de operação e cooperação favorece o desenvolvimento da inteligência.

A interação entre os alunos aumenta as possibilidades de discussão e argumentação e também a compreensão dos processos de raciocínio envolvidos. Pressupõem a coordenação de ações e pensamentos de dois ou mais sujeitos e estruturam-se num sistema de discussões, numa troca de estratégias, contribuindo com a autonomia do sujeito.

Mesmo promovendo um ambiente cooperativo em sala de aula, em que a maneira de pensar de um contribui para a maneira de pensar do outro, o conhecimento é uma construção individual. Cada aluno vai aprender dispondo da bagagem que possui, o que Piaget chama de “esquemas de pensamento ou de ação”.

Para Piaget (1973b), a cooperação é definida como co-operação no sentido de cooperar na ação. Coordena pontos de vista diferentes pelas ações de correspondência, reciprocidade ou complementaridade e pela existência de regras autônomas de condutas fundamentadas no respeito mútuo. A cooperação ou trabalho em grupo colabora para a solidez do saber, e é mais ativa que o trabalho puramente individual (PIAGET, 1998).

Para Kamii e De Clark (1986), no domínio lógico-matemático, a confrontação de pontos de vista serve para aumentar a capacidade de raciocinar a um nível sempre mais elevado. A autora também enfatiza que a interação com os colegas deve ser maximizada e, quando o aluno erra, as idéias erradas devem ser por ele modificadas e não eliminadas pelo professor. E além disso, “a natureza do conhecimento matemático é tal que o professor pode estar seguro de que as crianças chegarão a respostas corretas, se discutirem o suficiente entre elas" (KAMII E DE CLARCK, 1986, p. 64).

Para o construtivismo, a relação professor-aluno e aluno-aluno assumem papel fundamental no processo de desenvolvimento operatório e da autonomia. Quando pensamos em erros dos alunos e nas formas de superá-los, é importante também pensarmos na autonomia do aluno frente às situações desafiantes com as quais ele se depara.

A cooperação entre os alunos e a socialização das respostas levam em conta fatores relacionados a sua autonomia, tais como: a exposição de seu modo de pensar, a troca de idéias entre os colegas, o uso de estratégias, o diálogo com o professor e, acima de tudo, o papel do professor como questionador e propiciador das situações de discussões e reflexões. Ao aceitar o modo de pensar do aluno, favorece as mudanças de opiniões pelo confronto de posições e argumentações. Se o ambiente escolar não contribuir para o desenvolvimento da autonomia do aluno, questões como a aprendizagem com os erros e a superação dos mesmos num ambiente colaborativo de ensino-aprendizagem, não surtirão o efeito desejado.

Referindo-se à autonomia, Kamii e De Clark considera que as crianças aprendem com exercícios e através da transmissão, e geralmente chegam mais rápido à resposta certa do que pelo seus próprios esforços de construção. Mas isso se realiza de modo mecânico. A autora sugere que "temos que pensar em um contexto mais amplo do que a memorização de somas e a capacidade de produzir bons resultados em testes e exames. Refiro-me à autonomia como o objetivo da educação" (KAMII E DE CLARCK, 1986, p. 64).

A autonomia, segundo Piaget (*apud* KAMII e DE CLARCK 1986, p.68), é o principal objetivo da educação e significa ser governando por si mesmo. O oposto, a heteronomia, quer dizer ser governado por outra pessoa. Para o autor, a autonomia tem um aspecto moral e intelectual.

A autonomia de aspecto moral inclui questões de certo ou errado, como no caso de "contar uma mentira". A autonomia de aspecto intelectual inclui as questões de verdadeiro ou falso, como no caso das atividades escolares que, por sua vez, envolvem a operatividade, ou seja, os processos de pensamento, o ir e vir rumo às decisões a serem tomadas.

Comparados a outros animais, ao nascer, os seres humanos são os mais dependentes e heterônomos. Com o crescimento aliado ao desenvolvimento, a expectativa é de que as pessoas conquistem a autonomia necessária à participação social, tomando decisões com segurança e reavaliando tomadas de decisões, levando em conta opiniões de outras pessoas num sentido cooperativo e colaborativo e não por persuasão de outros ou de situações de controle.

A escola favorece situações de controle – as "provas" são parte dessas situações - que levam os alunos por medo, insegurança, vergonha, timidez, a freqüentemente tomar decisões que podem ser contrárias à sua vontade ou decisões inconscientes, pelo hábito que o aluno cria, devido à própria heteronomia, de achar que a sua opinião não vai fazer diferença. Então, ele dá uma resposta qualquer ou aquilo que julga que o professor queira como resposta, em detrimento de seu próprio desenvolvimento.

Nesse sentido, e educação escolar passa a contribuir com a heteronomia, formando alunos que não sustentam suas posições pessoais, isentando-se do processo de ensino-aprendizagem. A falta de participação leva a duas atitudes, ambas prejudiciais ao desenvolvimento: a apatia e desatenção de alguns alunos e indisciplina de outros, por sentirem que a educação escolar não está fazendo diferença para eles.

Aos alunos mais "rebeldes", ou "indisciplinados", talvez seja justamente essa percepção que os revoltam, mas, inconscientes do que fazer e sem saber como participar, acabam praticamente alienando-se do processo educativo.

Piaget (1973b) considera que os adultos reforçam a heteronomia natural da criança quando usam recompensa e punição, mas quando trocam pontos de vista com a criança, estão incentivando-as a se desenvolverem autonomamente. Isso é válido tanto para a educação familiar como para a educação escolar. Em ambos os contextos, as recompensas e as punições são formas de controle e moldagem das pessoas e das situações.

Os estudos de Piaget, segundo Kamii e De Clark (1986), nos convida para, ao invés de recompensar ou punir, olhar diretamente nos olhos da criança e dizer a ela, com afeição, o que se pensa sobre suas ações, sejam elas positivas ou negativas. Assim a criança, ou o aluno, será posto a pensar e, talvez até argumentar, incentivando as trocas de pontos de vista, contribuindo para o desenvolvimento da autonomia.

A autora, seguindo o pensamento de Piaget, diz que as punições levam a três resultados possíveis: o mais comum é o cálculo dos riscos, a segunda possibilidade é a conformidade cega e o terceiro resultado possível é a revolta.

Levando em conta essas três possibilidades, em casos de punição, e o que acontece na escola, o primeiro pode vir de uma situação em que o aluno é pego fazendo algo moralmente errado. A punição nesse caso não garante que o mesmo fato ou algo semelhante não possa ocorrer devido ao ato punitivo, mas o aluno pode aprender a calcular os riscos e evitar de ser pego na próxima vez.

O segundo resultado comum na escola é o conformismo. O conformismo gera a necessidade apenas de obedecer concordando ou não, sem encontrar espaço para negociações. Para o aluno conformista as decisões já estão previamente tomadas pelos professores, bastando segui-las.

A revolta, como o terceiro resultado da punição, pode se tornar um fator desencadeante de indisciplina em sala de aula, porque os alunos punidos demonstram não concordar com a punição, e se julgam injustiçados, passando a agir conforme seus desejos sem pensar nas conseqüências de seus atos.

Em casos como esse, Kamii e De Clark (1986, p.71) ressalta que “esse comportamento pode ser confundido com uma atitude autônoma porque o aluno age por si mesmo, mas há uma grande diferença entre autonomia e revolta e que a revolta é geralmente baseada em raiva pela repressão real ou imaginada”.

A punição e a recompensa, assim entendidas, reforçam a heteronomia enquanto impedem o desenvolvimento da autonomia.

Mas o que tudo isso tem a ver com os erros dos alunos no processo de ensino-aprendizagem?

Kamii e De Clark considera que a recompensa, embora melhor que a punição, também reforça a heteronomia, pois a conquista se dá pelo estímulo de conseguir algo em troca. Os alunos que estudam somente com o intuito de conseguir boas notas acabam caindo na falácia da memorização de fatos, questionários, fórmulas, regras que são facilmente esquecidas após a prova.

O respeito mútuo é essencial para o desenvolvimento da autonomia do aluno. Este sente-se respeitado na sua maneira de pensar e sentir, e tem mais probabilidade de respeitar a maneira como as outras pessoas pensam ou sentem. De acordo com Piaget, as crianças adquirem valores morais, não absorvendo-os do meio ambiente, mas construindo-os do seu próprio interior, através da interação com outras pessoas.

A heteronomia no campo intelectual significa seguir a opinião de outra pessoa. A história das ciências está repleta de situações heterônomas que somente se rompem quando alguém ou um grupo de pessoas têm autonomia suficiente para defender outro ponto de vista. Pessoas heterônomas acreditam no que lhes dizem, sem questionamentos, mesmo que as conclusões lhes pareçam duvidosas. Não ousam duvidar.

A Matemática, dependendo das concepções que permeiam o processo de ensino-aprendizagem, se torna uma disciplina que colabora muito com o não-desenvolvimento da autonomia. As listas de exercícios, geralmente preparadas para que os alunos passem um bom tempo em silêncio tentando resolver as atividades propostas, provocam nos alunos o desejo de descobrir as respostas que a professora já sabe quais são, porque foi ela quem preparou as questões e será ela quem irá corrigi-las. Se preocupam com as respostas e não com o processo de raciocínio que elas exigem.

Os estudantes também criam a representação de que todas as informações numéricas colocadas no problema têm que ser utilizadas. Assim os alunos ficam numa tentativa quase desesperada de usar todos os dados do problema mesmo que resultem em respostas absurdas. A reflexão e análise do problema e das respostas dadas não fazem parte das atitudes de alunos heterônomos.

Uma situação relatada por Kamii e De Clark (1986), é muito observada nas aulas de Matemática e são situações em que fica clara a insegurança dos alunos: quando é perguntado ao aluno como ele chegou a determinada resposta, a primeira reação que este tem é de pegar a borracha e começar apagar, mesmo que esteja certa. Os alunos não confiam em sua maneira de pensar. Assim, aqueles que não são incentivados a pensar autonomamente, construirão menos conhecimento que aqueles que são mais seguros em expor sua maneira de pensar. Kamii e De Clark, sugere que

> Se uma criança diz que 8+5=12, a melhor reação é evitar corrigi-la e incentivá-la a discutir sua resposta (certa ou errada) com as outras crianças. A professora pode também perguntar “Como você obteve essa resposta?”As crianças freqüentemente se corrigem quando tentam explicar seu raciocínio às outras. A criança que tenta explicar seu raciocínio para outra tem de sair de si para se fazer entender. Tentando coordenar seu ponto de vista com o de outra pessoa, ela mesma entende seu próprio erro. (KAMII e DE CLARCK, 1986, p. 76).

A autonomia intelectual só poderá ser desenvolvida se as idéias certas e erradas forem respeitadas e discutidas, procurando preencher lacunas no modo de pensar. O próprio trabalho pedagógico será diferente se o objetivo for o desenvolvimento do raciocínio autônomo.

Em sala de aula, para favorecer um ambiente onde a autonomia faz parte dos objetivos de ensino-aprendizagem, se torna importante o estabelecimento de regras que farão parte das relações entre os sujeitos. Criar um clima de respeito entre colegas e professores é fundamental para a tomada de atitudes autônomas.

Zunino considera que "é necessário e urgente mudar o clima de aula; é preciso convencer-se – porque só assim se consegue convencer às crianças – de que o erro é válido porque faz parte do processo de aprendizagem, tem que se valorizar todas as intervenções das crianças porque elas refletem seus esforços para adquirir o conhecimento" (ZUNINO, 1995, p.24).

Nos capítulos anteriores procuramos estruturar as perspectivas que tomamos sobre o conhecimento matemático, o ensino e os erros dos alunos. Levamos em conta o erro, como obstáculo natural e provisório do aprendizado e, também, a cooperação e a socialização como formas de superar obstáculos de aprendizagem por meio da discussão e justificação dos porquês dessa ou daquela maneira de pensar. No próximo capítulo passaremos a tratar dos dados empíricos da pesquisa e proceder às análises das informações obtidas de acordo com as teorias apresentadas.

CAPÍTULO III

3. PRINCÍPIOS METODOLÓGICOS, INFORMAÇÕES COLETADAS E ANALISADAS

3.1. Os participantes da pesquisa

Para o desenvolvimento do presente estudo buscamos as informações em uma turma de 5ª série de uma escola estadual paranaense, composta por 36 alunos na qual atuo como professora da disciplina de Matemática.

A escola se situa num bairro que se localiza a 3 km do centro da cidade. Possui cerca de 40 professores dos quais apenas 50%, aproximadamente, pertencem ao quadro efetivo da escola. No ano letivo de 2006 havia 765 alunos matriculados e distribuídos em 22 turmas de 5ª a 8ª séries, sendo 11 turmas no período matutino e 11 no vespertino, com 35 alunos por turma, em média. Do total das turmas, seis eram de 5ª série, sendo duas do turno da manhã e quatro do turno da tarde.

A 5ª série participante era do turno vespertino e formada por alunos de 10 anos de idade que completaram 11 no decorrer do ano de 2006, com exceção de dois alunos que já estavam com 12 e 13 anos devido a reprovações anteriores. São filhos de mães donas de casa sem renda própria ou diaristas domésticas que trabalham na informalidade. Alguns pais são operários que possuem, no máximo, o ensino médio como grau de escolarização. Muitos deles também são trabalhadores informais sem renda fixa ou desempregados. Segundo informações obtidas junto à diretora da escola, cerca de 40% das famílias desses alunos são beneficiadas pelo programa “Bolsa Família” do Governo Federal.

O ambiente que compreende a sala de aula é formado basicamente pelo quadro de giz, a mesa do professor e as carteiras dos alunos. Dos 36 alunos da turma, 15 são meninas e 21 meninos. Na sala de aula estavam dispostos em cinco fileiras e, para formação de grupos, os alunos deslocavam as carteiras dos lugares. Mas, independente da formação espacial das carteiras em sala de aula, consideramos a classe em si como um grupo. Os componentes desse grupo-classe tinham a liberdade de se ajudarem co-operativamente na compreensão das situações propostas em aula.

O interesse pela investigação numa 5ª série foi devido a fatores tais como: ser a primeira série da segunda etapa do ensino fundamental que consideramos relevante para o estudo com os erros pois, os alunos, além dos conhecimentos informais que trazem do seu cotidiano, já possuem, também, pelo menos quatro anos de aprendizagem escolar em nível formal; a idade dos alunos de 5ª série ser compatível com o final do estágio das operações concretas da teoria piagetiana, pois nesta fase, segundo Piaget (1973b), as relações de cooperação se fortalecem, tendo em vista a descentração do pensamento pela capacidade que o sujeito desenvolve de considerar pontos de vistas diferentes dos seus; a partir da 5ª série inicia-se, também, uma cobrança maior relacionada a atitudes independentes e autônomas do aluno.

Na passagem para a 5ª série, os alunos geralmente mudam de escola e também muda a forma de se relacionar com ela. Até a 4ª série, há um professor responsável pela turma que passa a maior parte do tempo com eles, criando um vínculo de aproximação entre educador e educando mais favorável para as relações escolares. Nestas condições, o professor consegue se aproximar mais das dificuldades de cada aluno mas, também, favorece relações de dependência que, ao entrar na 5ª série, necessitam ser superadas, pois os trabalhos de sala de aula se diferenciam do habitual a que os alunos estavam acostumados. As mudanças de professor e disciplina, geralmente a cada 50 minutos, se tornam uma situação conflitante e exigem novas adaptações e uma consequente autonomia nas ações.

3.2. Caracterizando a pesquisa

A investigação foi do tipo pesquisa qualitativa, categorizada como estudo de caso, em que registramos a percepção dos alunos sobre o processo de ensino-aprendizagem, a diversidade e os processos operativos de raciocínio desencadeados a partir da resolução de um teste com atividades matemáticas e da discussão das estratégias utilizadas.

O estudo de caso, conforme André (1995), enfatiza o conhecimento do particular e o interesse do pesquisador em compreendê-lo. É um sistema bem delimitado, neste estudo, uma sala de aula. O fato de a pesquisa ter-se desenvolvido em sala, durante as aulas de Matemática, imprimiu à pesquisa um caráter etnográfico. A proximidade com os sujeitos envolvidos na investigação e o interesse pelo ponto de vista dos indivíduos pesquisados, tentando compreendê-los no seu ambiente, tanto individualmente quanto em interação com seus pares, são características da etnografia, conforme André (1995). A etnografia parte do princípio de que o pesquisador tem sempre um grau de interação com a situação estudada, afetando-a e sendo afetado por ela. Uma das características importantes desse tipo de pesquisa é "a ênfase no processo, naquilo que está ocorrendo e não no produto ou nos resultados finais" (ANDRÉ, 1995, p. 29).

A pesquisa é, sobretudo, qualitativa, mas os dados quantitativos não foram dispensados, pois possibilitaram pelo menos à primeira vista, a compreensão do erro como um problema a ser tratado expresso pela quantidade de erros apresentados nas atividades, como mostra o anexo 4.

3.3. Procedimentos de coleta de informações

No desenvolvimento da pesquisa, utilizamos os seguintes instrumentos e estratégias para a obtenção das informações: 1) Um questionário aplicado aos alunos, de natureza exploratória, em que procurávamos informações sobre conceitos e concepções relativas aos seus próprios erros e as formas de correção experienciadas por eles, até a atual fase de escolarização; 2) um teste composto de 11 questões matemáticas envolvendo números e operações; 3) observações livres dos alunos durante as aulas; 4) socialização e discussão das respostas atribuídas ao teste com a participação dinâmica dos alunos.

1) Da utilização do questionário (anexo I): Com este instrumento buscamos perceber a existência de possíveis concepções epistemológicas relacionadas ao ensino-aprendizagem, expressas nas opiniões dos alunos. Viabilizou a coleta de informações sobre o gosto pela Matemática, a importância do conhecimento matemático e questões específicas relacionadas ao tema "erro" e ensino. Cada aluno recebeu uma folha com as questões, a qual deveria ser entregue à professora quando fossem respondidas. A aplicação deste instrumento ocorreu no dia 02 de março de 2006 a todos os 36 alunos da 5ª série participante da pesquisa.

2) Da utilização do teste (anexo 2): A aplicação deste instrumento de pesquisa teve por objetivo identificar as formas como os alunos resolvem problemas e possibilitar a discussão das diferentes estratégias e respostas, em sala de aula. As informações obtidas com a resolução do teste configuraram-se em operações individualizadas, tendo em vista que cada aluno deveria resolver os problemas de acordo com suas próprias condições e interpretações. O teste constou de 11 atividades matemáticas. Compreendiam problemas que podiam ser resolvidos tanto por algoritmos como por outras estratégias alternativas de resolução. Outras questões requeriam, em especial, o conhecimento sobre o sistema posicional de numeração. A aplicação do teste ocorreu nos dias 06, 07 e 08 de março de 2006, em que usamos 1h/aula por dia. A 'demora' na aplicação do teste se deu pelo fato de que as questões eram entregues uma de cada vez, com o intuito de diminuir a ansiedade do aluno em querer terminar rapidamente de responder as questões. A passagem de uma questão para a seguinte ocorria quando todos os alunos já haviam terminado a questão anterior.

3) Das observações livres: O objetivo deste instrumento foi observar reações e atitudes dos alunos durante as aulas, na resolução do teste e na discussão das diferentes estratégias e respostas. As observações que se mostraram relevantes para a pesquisa foram anotadas em caderno utilizado como diário de campo. O período de coleta de informações compreendeu aproximadamente 36 h/aulas nos meses de março e abril de 2006.

4) Da socialização e discussão das respostas: Este foi o principal instrumento e teve por objetivo a socialização das respostas atribuídas ao teste. Nesse momento, o interesse centrava-se na tentativa, por parte dos alunos e da professora, de identificar formas de pensamento e raciocínio que deram origem às respostas num clima de co-operação.

As diferentes estratégias e respostas encontradas no teste foram expostas no quadro de giz, como mostra o anexo 4, para que fosse possível a análise coletiva pelos alunos. Além disso, tínhamos em mãos, um relatório com as diferentes resoluções e o nome do aluno que as produziu com o intuito de que alguns questionamentos fossem dirigidos à determinados alunos em especial. Com as discussões das respostas passamos para o nível da co-operação, pois os diálogos estavam sob a mediação da professora levando em conta tanto a estratégia utilizada no teste como os comentários dos alunos.

Os diálogos entre professora-aluno, aluno-professora ou aluno-aluno, sobre as estratégias utilizadas no teste, foram documentados com gravações digitais de áudio, num total aproximado de 16 h/aulas nos meses de março e abril de 2006. Optamos por fazê-las, preferencialmente, nas segundas-feiras, pois neste dia da semana tínhamos 2 h/aula, conforme o horário escolar da 5ª série participante.

Os questionamentos e os diálogos foram feitos na forma de “devolução” para o aluno de suas próprias contradições, dúvidas, inquietações e perguntas.

A devolução tem características do “método clínico” de Piaget, em que o experimentador propõe algum tipo de tarefa à criança e assim que recebe uma resposta, o experimentador faz uma pergunta ou coloca variação do problema ou de algum modo cria uma situação nova que favoreça a compreensão de seu pensamento. Num processo contínuo, cada resposta da criança determina parcialmente o próximo passo do experimentador que usa toda a capacidade de que dispõe para compreender o que a criança diz ou faz e para adaptar sua própria ação em função desta compreensão. Piaget entrevistava as crianças individualmente. Mas, nesta investigação, as discussões aconteceram de forma coletiva e seguiu a estratégia de devolver perguntas às crianças, tentando entendê-las ou colocando a necessidade de reflexão sobre suas próprias ações e/ou dos colegas de classe.

Segundo Lerner/Zunino (1996), a primeira - mas não a única - forma de intervenção imprescindível por parte do professor é a devolução explícita da situação problemática para o aluno, delegando a ele uma parte da responsabilidade a partir da qual será possível construir conhecimento.

Com o interesse voltado para as falas dos alunos, nossa função foi mediar e orientar as discussões, procurando interferir minimamente com ‘explicações’, mas sempre devolvendo perguntas aos alunos com a finalidade de incentivá-los a falar sobre as formas de raciocínio próprias ou dos colegas. Tentávamos entender como o aluno pensou ou no porquê da resposta, que seguiu uma certo caminho, não satisfez a questão proposta, procurando gerar desequilíbrios cognitivos e a reflexão sobre as ações.

A forma de tratamento das diferentes estratégias e respostas, num trabalho com o grupo-classe implicou na necessidade do estabelecimento de regras de interação, como por exemplo: o respeito à forma de pensar do colega; não zombar quando o colega der uma resposta errada; que todos tem o direito de expor seu pensamento; a compreensão do erro como algo sempre presente e provisório na relação com o conhecimento entre outras.

As regras precisaram ser construídas colaborativamente com os alunos para que se sentissem mais responsáveis por elas. Conforme Macedo (1994), se o estabelecimento das regras parte sempre do professor, o aluno as toma como lei, o que pode gerar o desejo de transgredi-la por ter sido imposta. Pisar no terreno das atitudes particularizadas, como o modo de pensar do aluno, se torna difícil porque entram em jogo sentimentos relacionados ao medo, insegurança, timidez, constrangimento. Um clima de segurança e respeito se tornou fundamental durante os diálogos.

Zunino (1995) considera como necessário a mudança do "clima da aula", ou seja, que as relações entre professor-aluno e aluno-aluno sejam mais dinâmicas, ativas e afetivas. A autora diz ainda que é preciso convencer-se, pois só assim, nós professores, conseguiremos convencer as crianças de que o erro é válido porque faz parte do processo de aprendizagem.

A forma de abordar as estratégias dos alunos – certas ou erradas – que será apresentada nos episódios de sala de aula, traduz o que estamos chamando de socialização dos erros (ou das formas de resolução) num ambiente co-operativo.

Os dados coletados nos quatro instrumentos de pesquisa serão discutidos conforme a organização em categorias a saber: 1) Sob o ponto de vista psicológico e epistemológico; 2) Sob o ponto de vista da operação, co-operação e autonomia e 3) Sob o ponto de vista didático-pedagógico.

3.4. Das categorias e análise dos dados coletados

Com base no referencial teórico que tratou das concepções sobre a aquisição de conhecimentos, sobre o tratamento dado aos erros e sobre a importância da interação e socialização entre os alunos no processo ensino-aprendizagem, trataremos as informações levando em conta o que ficou mais evidente. As informações interagem e são dependentes umas das outras o que dificulta o isolamento de um dado em uma única categoria de análise, sendo assim, o fato de lançarmos um olhar sobre um determinado dado não descarta a possibilidade de novas perspectivas. Passaremos agora a discutir as informações coletadas.

3.4.1. Sob o ponto de vista psicológico e epistemológico: Sob o ponto de vista psicológico trataremos as informações que, na perspectiva do aluno expressam: a sua manifestação sobre a matemática; a sua interpretação sobre a própria atividade intelectual e do significado das suas ações; como aceitam, concebem ou interpretam a forma de correção dos erros pelos seus professores, sobre o porquê dos erros, a significância positiva ou negativa atribuída ao erro relacionada tanto ao conhecimento matemático como a si próprios e sobre o que consideram importante para o processo de ensino-aprendizagem. As informações se referem aos significados que o próprio aluno imprime à Matemática. Estes significados podem ser afetados pela escola, pela atuação dos professores, pela família e pela sociedade.

Na perspectiva epistemológica, destacaremos as informações que se referem à interação sujeito-objeto, às concepções sobre o processo de ensino-aprendizagem e sobre o que consideram necessário para a aquisição de conhecimentos.

O levantamento das opiniões dos alunos feito por meio do questionário (anexo 1) mostrou que a maioria da turma considera o conhecimento matemático como importante para a vida. Relacionaram a Matemática como uma das condições para conseguir emprego e como possibilitadora de um futuro melhor. Também consideraram que tal conhecimento pode diminuir as possibilidades de serem enganados em situações comerciais, como apontam as seguintes falas:

- (JMR) *"Sim* (a Matemática é importante*) porque se não aprender, 'nunca' vai ter um trabalho e não consegue fazer conta e sempre será roubado".*

- (LFRP) *"É necessário* (saber matemática) *porque a gente fica mais inteligente e não vai ser enganado".*

- (JLOb) *"Porque se não souber Matemática reprova e no futuro não vai ter emprego".*

- (JLOa) *"Eu acho importante porque ajuda até nas compras, as lojas cobram as coisas muito caro e tem muito juro".*

A Matemática é vista, assim, como algo necessário para a vida e tomam o saber matemático como um instrumento de crítica que permite analisar o certo, o errado ou o mais favorável diante de situações muitas vezes impostas pela sociedade.

Os exemplos de sucesso ou insucesso profissional mostrados pela família, também influenciam as opiniões sobre o conhecimento escolar, como apontaram as alunas:

- (VAP) *"É importante porque tem matemática em tudo e meu pai fala para estudar bem porque a Matemática ajuda a gente entender bem as coisas".*

- (ARC) *"Eu acho importante para mim arrumar trabalho e saber fazer as contas, senão o patrão me demite igual aconteceu com meu pai. Ele disse que vai voltar estudar para arrumar um emprego".*

As opiniões dos pais afetaram positivamente as alunas. Gómez Chacón (2003) diz que os professores de matemática e os pais têm uma visão própria dessa disciplina, de seu ensino e de sua aprendizagem e podem afetar positiva ou negativamente as crenças do aprendiz.

Os alunos citados expressaram a significância positiva do conhecimento matemático destacando sua função social numa perspectiva emancipadora. Sendo grande parte da turma proveniente de um meio sócio-econômico pouco favorável, as falas representam as esperanças depositadas no saber escolar como um caminho para superar dificuldades da vida cotidiana.

Apenas dois alunos da turma expressaram uma significância negativa em relação à Matemática dizendo:

- (EMSP) *"Não acho nada de importante na Matemática".*

- (GB) *“Eu não acho nada em Matemática, porque é muito difícil e eu ‘se bato’ para fazer as contas de dividir e eu me acho incapaz de somar muito rápido”.*

Estes alunos erraram muitas questões do teste, como mostra o anexo 3. A falta de compreensão da Matemática e o processo de ensino-aprendizagem podem estar influenciando as opiniões negativas. Conforme Gómez Chacón (2003), a significância se relaciona com a afetividade e esta inclui atitudes, crenças, considerações, gostos e preferências, emoções, sentimentos e valores. O meio social em que o aluno vive mobiliza o domínio afetivo podendo desencadear um sentimento de incapacidade.

Os dados, também, mostraram que o aluno que acerta é exaltado e o aluno que erra é ignorado ou ‘punido’, como mostraram os alunos:

- (ADP) *“Eu quase nem ia no quadro porque eu sempre errava e a professora mandava no quadro para fazer as contas só quem acertava”.*

- (JP) *“Mandava a gente no quadro se a gente errava ia outro até acertar”.*

Estes alunos evidenciaram a supremacia do acerto. O fato de ir ao quadro quem acerta ou se um aluno que erra deve dar a vez para outro tentar resolver corretamente a atividade, mostra a ausência de discussão sobre os erros. Um sentimento de exclusão pode surgir também dessa prática corretiva o que pode interferir na significância do aprendizado e do conhecimento matemático.

Um dado coletado pelas observações livres em sala de aula, se refere ao comportamento de alguns alunos frente às suas próprias ações. Das atitudes observadas destacamos a reação de esconder o que fizeram, colocando o braço em cima do caderno, pelo simples fato de nos aproximarmos de suas carteiras ou de seu grupo. Estas atitudes representam medo, insegurança, timidez e podem determinar o maior ou menor envolvimento com o processo ensino-aprendizagem.

Um aluno, em sua fala, evidenciou o lado negativo dos erros quando disse:

- (MAO) *"Já me xingaram e falaram bem alto e eu acabei ficando com vergonha"*. Em outra ocasião pedimos que contasse o que havia ocorrido e ele completou: *"Ah! Foi uma vez que eu fui no quadro e não sabia fazer o cálculo de menos de emprestar aí eu fiquei um tempão no quadro"*.

Embora tenha sido o único caso que expressou 'xingamento', o aluno mostrou que ainda existe na escola o lado vexatório dos erros, como algo passível de ser punido levando o sujeito ao constrangimento por não conseguir resolver um cálculo perante os colegas de classe. Conforme OCDE/PISA (2000), a motivação e o envolvimento são a 'fonte de energia' da aprendizagem e podem afetar a qualidade de vida dos estudantes bem como a intensidade, continuidade e a profundidade do conhecimento adquirido, influenciando a busca por uma educação ulterior ou por oportunidades no mercado de trabalho.

Os alunos também pediram por atenção como mostra a aluna:

- (VAP) *"Eu acho que a professora devia mandar a gente no quadro fazer do jeito que a gente sabe e depois a professora corrigia falando com a gente mesmo"*.

A aluna VAP retratou o desejo e necessidade de atenção para suas formas próprias de resolução, considerando que assim teria mais contribuições na construção de seu conhecimento. Pede que seja falado diretamente com ela. Um dado coletado em uma outra 5ª série, em que fazíamos as experiências preliminares com a utilização dos erros[2], evidenciou essa necessidade de atenção. Um aluno chegou a forjar um erro durante a resolução de uma atividade, para que fosse dado atenção ao que foi feito por ele, mesmo sendo errado, justificando com o seguinte comentário: *"É que senão a senhora não vai por a minha resposta no quadro e eu quero falar sobre ela"* (anexo 5). Estes dados evidenciam que os alunos querem 'falar' sobre suas estratégias e compreender os motivos de seus erros.

---

[2] As informações apresentadas nesse estudo são de uma 5ª série no ano letivo de 2006, mas as pesquisas com o tema dessa investigação, iniciaram-se em 2004. Numa determinada 5ª série, em 2005, aconteceu o fato inusitado de um aluno forjar um erro para apresentar à professora. Por considerarmos a situação bastante curiosa é que trazemos esta informação, mesmo tendo ocorrido em outra 5ª série.

A aprendizagem é uma atividade subjetiva e consiste, conforme Piaget (1973), nas relações mentais que o próprio sujeito estabelece com o objeto de conhecimento, coordenando as ações que realiza. O aluno ao dizer:

- (CMS) *"Eu erro muito porque a professora não explicava direito e ficava brava se a gente perguntasse".*

Coloca a atuação dos professores como responsável pelos seus erros. Em sua fala evidencia a homogeneização da classe e um não reconhecimento da subjetividade da aprendizagem. Segundo Zunino (1995, p. 13), "como não se pode interromper a aula, sem uma boa razão, nós professores, perdemos a oportunidade de conhecer quais são as preocupações das crianças, que transcendem a aprendizagem dos mecanismos operatórios". A preocupação com a "perda de tempo", muitas vezes, impede a participação ativa do aluno.

O ensino escolar acontece obedecendo um tempo cronológico: passa-se uma quantidade de conteúdos, faz-se atividades de fixação e em seguida, uma prova, normalmente após a prova ou muda o conteúdo ou o seu nível de dificuldade. Ao aluno que ainda não aprendeu "'não pode" ser dado mais tempo, sob pena de prejudicar a programação de conteúdos. Tal paradigma reflete as marcas deixadas pelo tecnicismo pedagógico. Marcas da eficiência empresarial onde qualquer perda de tempo é considerada prejudicial ao sistema.

Outros alunos também apontaram a atuação do professor como causa de suas dificuldades de aprendizagem, como por exemplo:

- (LGA) *"A professora explicava muito rápido e não dava tempo de entender".*

- (EMSP) *"Corrigia tudo ligeiro nem dava tempo da gente copiar direito".*

- (VKP) *"A professora devia corrigir com calma assim a gente aprendia"* (...) "*eu queria que tivesse mais explicação e não tinha".*

A pressa, a ligeireza do professor foram apontados como problemas. Alguns alunos desejavam mais calma e mais explicações. Estes dados evidenciam que a lógica do professor é diferente da lógica do aluno ou, o que é óbvio para um não é necessariamente óbvio para outro. Ao considerarem que o professor "faz tudo ligeiro" expressam a dificuldade que têm em acompanhar o ritmo da aula e do professor o que pode contribuir para que algumas dificuldades se instalem transformando-se em obstáculos para aprendizagens posteriores.

As considerações dos alunos refletem as concepções que orientam o processo de ensino-aprendizagem. Sob o ponto de vista epistemológico, muitos alunos consideram que não aprendem ou "erram muito" porque não prestam atenção, o que aponta para a visão empirista do conhecimento. Nesta perspectiva, conforme Piaget (1973), o conhecimento deriva diretamente da observação dos fatos e consiste, essencialmente, em informações tiradas do meio, sob formas de cópia da realidade, sem organização interna ou autônoma. Isso pressupõe que a reprodução correta é evidência de que a aprendizagem ocorreu.

Sobre as próprias atuações e suas consequências no processo de aprendizagem, vinte e um alunos disseram que erram muito, pelo motivo a seguir:

- (MJA) *"Eu erro muito porque não presto atenção".*

E um aluno disse:

- (RR) *"Eu não erro muito porque presto muita atenção".*

Estes alunos consideram que 'ver e ouvir' o que o professor 'faz e fala' são as razões do aprendizado, o que faz com que se culpem pelos próprios erros.

O aluno considera que o professor é o detentor de todo o saber e deve transmiti-lo, sendo assim, se prestar bastante atenção conseguirá aprender. Nessa posição, que o próprio aluno se coloca, ou é colocado, torna-se passivo frente ao objeto de conhecimento.

A memorização, pura e simples, também se relaciona à concepção empirista de aquisição de conhecimentos. A preocupação em decorar a tabuada apareceu nas falas de oito alunos como mostrado pela aluna:

- (ADP) *"Eu erro muito porque não sei a tabuada e não sei fazer as contas, a de dividir é muito difícil e não consigo decorar a tabuada".*

Estes alunos relacionaram a tabuada com a memorização desvinculada da compreensão. Os resultados do PISA (2000/2003) mostraram que estudantes brasileiros de 15 anos não dominaram conceitos básicos da multiplicação. Rocha (2003), aponta que na escola, ainda, se prioriza a memorização de técnicas e "macetes". No caso da tabuada, muitas vezes, exige-se a memorização como condição necessária para aprender o algoritmo da multiplicação e divisão e não como produto da compreensão dessas operações aritméticas.

Outras informações relacionadas ao empirismo referem-se à forma de correção das atividades pelos professores. Os alunos investigados apontaram para a prática corretiva "empirista" (cf. Pinto, 2000):

- (VAP) *"Elas corrigiam no quadro e daí a gente olhava se tinha erro e daí a gente copiava do quadro".*
- (JSM) *"Não corrigia muito bem. Ela passava a correção no quadro e a gente copiava e ganhava nota".*

A maior evidência obtida com as respostas, que se relacionaram com a correção dos erros, apontaram para o conhecimento como reprodução e cópia, sem questionamentos que viessem a produzir desequilíbrios nos alunos e a consequente reorganização do pensamento. Segundo Pinto (2000), essa prática deixa na penumbra as reais dificuldades dos que ainda estão em processo de construção do conhecimento e as ações dos alunos consistem em substituir, sem a devida reflexão, os erros pelas formas corretas apresentadas na lousa, o que pode caracterizar uma forma punitiva do erro.

Em tal prática, o aluno que erra deve ver a resolução correta que o colega ou o professor faz. O conhecimento está nas coisas, nos objetos, nos cálculos, no método de ensino, sendo portanto, externo ao sujeito que aprende. Segundo Zunino (1995), isso revela a concepção de que ensinar consiste em explicar e aprender consiste em reproduzir o ensinado pelo professor. O conhecimento não é compreendido como resultante do estabelecimento de relações e coordenações do objeto aprendido com os seus próprios conhecimentos já adquiridos.

Um dado coletado com as observações livres, após uma das aulas em que discutíamos sobre a resolução do teste, mostra a preocupação do aluno LFRP com a ausência de conteúdo escrito no caderno. O aluno veio até nós e disse:

- (LFRP) *"Ih, professora a gente não fez nada hoje"*.
- (Prof.) *"Mas como assim, nada?*
- (LFRP) *"A gente não fez nada no caderno"*.
- (Prof.) *"E o que nós fizemos, hoje"?*
- (LFRP) *"É que não teve matéria"*.

Para o aluno a qualidade da aula está atrelada à quantidade de matéria dada no caderno. Este aluno participava muito bem das aulas em que discutíamos as resoluções do teste. Chegou, inclusive, a pedir para ser mudado de lugar na sala para ficar mais perto do quadro, mas para ele talvez faltasse ainda um "algo mais", pois não se deu conta que estávamos trabalhando os conteúdos matemáticos nas discussões.

A principal característica observada na resolução das situações-problema do teste foi a reprodução de técnicas algorítmicas que muitos alunos faziam de modo mecânico sem a reflexão sobre as ações. No momento do teste, foi solicitado que os alunos refletissem sobre a adequação do resultado encontrado. Porém, a maioria resolvia rapidamente e virava as fichas avisando do término da resolução. Conforme estudos de Saiz (in PARRA e SAIZ, 1996, p. 170), "os alunos não atribuem significado ao algoritmo que aplicam, portanto, não podem interpretar o que obtiveram nas diferentes etapas do cálculo, em termos de problema formulado". O que não impede que o aluno interprete em outras situações como veremos mais adiante.

A autora destaca ainda, que o algoritmo ensinado na escola aparece como um puro trabalho com os números, independente dos dados da situação enunciada, o que reflete uma relação superficial com o conhecimento provocada por um ensino centrado em "chaves linguísticas", isto é, em que o aluno tenta adivinhar o cálculo que precisa ser feito baseado em determinadas palavras do enunciado do problema.

Outras informações relacionaram-se à concepção racionalista/inatista do conhecimento. Alguns alunos apontaram que o sucesso ou insucesso na Matemática se deve à quantificação de inteligência ou que com o passar do tempo fica-se pronto para aprender, como por exemplo:

- (LTG) *"Erro por causa de mim mesmo acho que não sou muito inteligente".*
- (JMR) *"Não sou muito inteligente, não sou bom para fazer contas".*
- (KFF) *"Eu não erro muito porque sou uma menina esperta e inteligente".*
- (CS) *"O meu forte é Matemática"*
- (LGBC) *"Os erros acontecem porque sabemos só um pouco de Matemática e não estamos prontos".*

Enquanto alguns alunos demonstraram auto-confiança e segurança, outros parecem conformados com suas condições de "pouco inteligentes". Kamii e De Clark (1986), destacou que o conformismo gera a necessidade apenas de obedecer, concordando ou não, sem encontrar espaço para negociações, pois considera-se que tudo já está posto como deve.

Expressaram, também, o conhecimento como "dom" ou como um *a priori* que se adquire hereditariamente ou pelo processo de maturação do organismo.

Piaget (1976) identifica como idéia central de sua teoria que o conhecimento não procede nem da experiência única com os objetos nem de uma programação inata pré-formada no sujeito mas, de construções sucessivas com elaborações constantes de novas estruturas. Tanto o racionalismo como o empirismo tomam o conhecimento como cópia a ser transferido ou descoberto por quem aprende, sem portanto, a participação e intervenção ativa do sujeito.

A informação que expressou uma prática mais construtiva foi a seguinte:

- (JLOa) *“A professora mandava a gente ir na mesa dela mostrar como a gente tinha feito, se tinha erro ela ajudava a gente entender”.*

Na perspectiva construtiva do conhecimento o erro é encarado como indicador do nível em que o aluno se encontra e como ponto de partida para a compreensão e superação. O aluno JLOa indicou que sua professora não lhe dava ou mostrava a resposta para o problema, mas sim, ajudava-o a compreender o motivo de seus erros.

Houve dados também que mostraram que os alunos desejam uma prática construtiva, como por exemplo:

- (AS) *“A professora precisa explicar bem porque às vezes eu não sei porque errei”.*

A aluna AS apontou algo que consideramos importante: o fato do aluno ter acesso à qualidade de seu erro, saber porque errou para, a partir daí, reorganizar seu pensamento ampliando seus esquemas de ação frente a situações conflitantes. Como citou Casávola (1988), um erro corrigido pode ser mais fecundo do que um acerto imediato, pois a comparação de uma hipótese falsa e suas consequências fornece novos conhecimentos e a comparação entre dois erros dá novas idéias. A aluna está, assim, considerando o seu próprio erro como provisório e parte do processo de construção do seu conhecimento.

Na próxima categoria trataremos das informações que referem-se à operação, co-operação e a autonomia dos alunos destacando as discussões com os alunos sobre as estratégias utilizadas no teste.

3.4.2. Sob a perspectiva da operação, co-operação e autonomia nas ações: Trataremos as informações que representam o pensamento do aluno por meio das ações que realiza. Tais ações, conforme Rosso et al (1998), são processos interiorizados e envolve o aspecto ativo e atuante da inteligência que transforma e modifica os dados e caracterizam a operatividade que pode intervir tanto nos raciocínios individuais quanto nas trocas cognitivas com os membros do grupo-classe.

Como vimos anteriormente, na perspectiva piagetiana, as operações se organizam em dois níveis sucessivos. O primeiro denominado de "período da operações concretas", a criança abstrai dados da realidade, mas ainda depende das ações sobre os objetos para tal abstração. Piaget (1973b) destaca que no período das operações concretas há um nítido progresso de socialização entre as crianças, o que promove a co-operação. O segundo nível é denominado de "período das operações formais" em que o sujeito não é mais dependente das ações sobre objetos, pois pode operar sobre as relações possíveis de modo a prever as situações necessárias para a realização de uma tarefa. O pensamento torna-se hipotético-dedutivo e as ações mais autônomas.

A co-operação é a ação que permite unir operações de um indivíduo às dos outros, seja de forma espontânea com os colegas do grupo-classe ou mediadas pelo professor. A exposição do modo de pensar, a troca de idéias, o uso de estratégias alternativas de resolução, a co-operação, levam em conta fatores relacionados à autonomia do aluno.

Autonomia significa ser governado por si mesmo tomando suas próprias decisões, tanto individual como coletivamente, colaborando com seus pares. A heteronomia é o oposto da autonomia e significa ser governado por outra pessoa ou opiniões alheias. As decisões são tomadas pelo aluno levando em conta o que julga ser a expectativa do professor ou das considerações dos colegas de forma acrítica e conformista.

Os procedimentos adotados referentes às resoluções apresentadas para os problemas do teste permitem evidenciar a operação, a co-operação e a autonomia. O problema 1 do teste dizia:

Uma classe tem 37 alunos e a professora pretende levá-los a um parque de diversões. O ingresso custa 3 reais e a professora quer levá-los em 2 grupos, porque ela acha difícil cuidar de todos de uma só vez. Para conseguir o dinheiro necessário ao passeio, a professora está fazendo algumas promoções e já conseguiu 50 reais. Com esse valor quantas crianças a professora poderá levar ao parque?

As respostas dadas à esta questão foram expostas no quadro de giz (como mostra o anexo 4). As discussões iniciaram com um questionamento à aluna CCSR que tinha atribuído um valor bem acima do número de alunos da professora do problema. Este questionamento tinha a finalidade de comparar a resposta que ela daria no momento do diálogo com a resposta dada no teste, mas procurando não chamar a atenção para o fato de que ela mesma havia produzido tal resposta. A aluna resolveu e respondeu o problema 1 da seguinte maneira:

$$\begin{array}{r} 37 \\ \underline{\times 3} \\ 111 \\ \underline{+50} \\ 161 \end{array}$$

R: 161 alunos que vão poder ir ao parque.

(Prof.) "CCSR, o que você acha daquela resposta em que um aluno diz que a professora poderá levar 161 alunos ao parque"? (depois de observar um pouco ela diz):

(CCSR) *"Acho que tá errado"*.

(Prof.) "Por que você acha que tá errado"?

(CCSR) *"Ah! Porque só tem 37 alunos"*.

(Prof.) "Por que você acha, então, que algum colega respondeu dessa maneira"?.

(CCSR) *"Ah! De certo não pensou direito"*.

A aluna encontra com a primeira parte de seu cálculo, o valor que gastaria para levar todas as crianças ao parque, mas em seguida, adiciona a esse valor a quantia que a professora havia arrecadado com as promoções resultando no valor 161 que ela considerou como quantidade de alunos que poderiam ser levados ao parque. O diálogo mostrou que a reflexão não feita pela aluna no momento do teste, é realizada com bastante segurança no momento do questionamento feito direto para ela. Demonstrou ter consciência do erro exposto no quadro por relacionar os dados do problema. Pareceu-nos que a aluna não se lembrava que havia dado aquela resposta no teste. A pergunta, de forma direta para ela, fez com o erro aparecesse como uma contradição o que exigiu reflexão sobre a adequação da resposta.

A socialização das estratégias e o diálogo fez com que a turma se agitasse passando a observar todas as respostas semelhantes que estavam expostas no quadro, ou seja, com valores acima dos 37 alunos da professora do problema e, admirados, comentavam uns com os outros sobre a impossibilidade daquele tipo de resposta. A partir dessa primeira passagem de aula já pudemos perceber a existência de diferenças qualitativas entre as respostas dadas ao teste escrito feito individualmente e o questionamento dialogado em que a atuação do aluno passa a ser de forma co-operativa. A necessidade de se fazerem entender perante os colegas, colocou os alunos na posição de críticos e passaram a refletir sobre as ações realizadas e a pensarem na situação apresentada como um dado real e significativo.

Este não foi um caso isolado. Fato semelhante ocorreu com o aluno JLOb sobre a resolução do problema 4:

> Em 1985 uma grande fábrica de automóveis tinha 18 345 funcionários. Em 1998 a fábrica entrou em crise financeira e demitiu 3 477 funcionários. Qual o número de funcionários que ficou na empresa após as demissões?

(GB)	(JLOb)
1985	18345
18345	+ 1985
+ 1998	20380
3477	
26806	1998
	+3477
R: 26806 funcionários.	5475
	20380
	5475
	(Sem resposta)

JLOb ao observar a estratégia utilizada pelo colega GB comentou:

(JLOb) *"Ih, como é que vai ser demitido tudo isso, já é mais do que todos!"*.

Como mostra a resolução, JLOb, também tentou resolver o problema de maneira semelhante. O fato de não terminar o problema demonstra que o aluno pode ter percebido contradições em suas operações, mas não conseguiu compreendê-las a ponto de superá-las. Conforme Macedo (1994), o erro aparece como um problema, a criança o reconhece, mas tardiamente e a interferência de um adulto (ou dos colegas) surte mais efeito no sentido de problematizar a situação, pois é, ainda, uma perturbação exterior ao seu sistema cognitivo.

Os alunos GB e JLOb, assim como muitos outros alunos, usaram todos os dados numéricos que apareceram no problema, mas sem relacioná-los com a situação proposta. A lógica que evidenciamos por estas estratégias operativas é que, “se a professora colocou esses números no problema, então, precisamos usá-los”. Seguindo essa lógica, é natural usarem as datas nos cálculos, mesmo que sejam apenas dados complementares irrelevantes para responder a questão pois, para eles, tanto os algoritmos quanto os valores expressos perdem o significado. Como salientou Saiz (in PARRA e SAIZ, 1996), o algoritmo aparece como um puro trabalho mecânico independente dos dados da situação enunciada.

Os comentários de CCSR e JLOb confirmam que apesar de não analisarem e não refletirem sobre os resultados dados por eles no teste, têm condições de criticá-los relacionando com o problema proposto quando é oportunizado espaço para reflexões e discussões. Este fato aponta que os erros podem se relacionar mais à significação do que à compreensão da situação proposta.

Quando estes dois alunos reconheceram as inadequações das respostas dadas ao problema 1 e 4, respectivamente, agiram de forma autônoma, raciocinando por meios próprios. A constatação de tal fato só foi possível pelo confronto com os erros. A forma como as estratégias de resolução dos alunos foram utilizadas possibilitou a análise coletiva na forma de co-operação, pois as operações individuais eram mediadas pela operação do outro e da professora.

A falta de diferenciação inicial entre os dados dos problemas, na resolução do teste, tornou-se diferenciável para esses alunos devido à socialização dos erros e das estratégias utilizadas. Conforme Piaget (1967, p. 140), “jamais o próprio pensamento teria chegado a tomar consciência de si mesmo, não fora o choque com o pensamento dos outros e o esforço de reflexão que este choque provoca”.

Retornando ao problema 1, na resolução da aluna VAP, verificamos que ela inicia a resolução se valendo da noção de proporcionalidade operando corretamente, mas desiste da estratégia como veremos a seguir:

10 crianças = 30 reais (apagou e fez):

37 |50
20 7

R: A professora leva 7 crianças.

A aluna compreende o problema e se houvesse dado continuidade ao seu raciocínio inicial poderia ter solucionado o problema. A falta de confiança em sua estratégia operativa fez com que ela desistisse e substituísse por outra em que usa, de forma incorreta, o algoritmo da divisão, evidenciando a falta de domínio do conceito dessa operação. A aluna não percebeu as incoerências entre as duas operações feitas por ela, que de início calculou que para 10 crianças gastariam 30 reais em ingressos, mas mesmo assim, respondeu que a professora poderia levar somente 7 crianças ao parque.

Por que a aluna prefere usar um algoritmo, com o qual ela não consegue uma resposta satisfatória, em detrimento de um raciocínio correto com o qual, certamente, chegaria a uma resposta correta? Sobre isto Carraher et al (1995, p.65) consideram que, "aparentemente, aprendemos na escola não somente a resolver operações aritméticas, mas também atitudes e valores relativos ao que é apropriado em matemática". Assim, é mais apropriado e confiável usar as técnicas ensinadas na escola do que buscar por alternativas próprias de resolução de uma tarefa. Mas, o raciocínio que a aluna não concluiu no problema 1 foi concluído na resolução de outro problema, como veremos mais adiante.

As informações apontaram, também, que os alunos raciocinam ou operam de maneiras diferentes dependendo do contexto e da significação das situações. Um dado coletado com as observações livres mostrou o conflito da aluna JP ao tentar responder um problema proposto em aula. Após ter tentado várias vezes fazer um cálculo para encontrar o troco que sobraria de uma compra comentou: *"Professora eu sei qual é o troco porque eu ajudo minha mãe, mas eu não sei que conta fazer"!* A aluna sabia qual era o resultado, mas não conseguia fazer a subtração com empréstimo. Uma das formas de dar troco em situações cotidianas, é a de operar com adições sucessivas até que se chegue ao valor do dinheiro dado no ato do pagamento. Nesta estratégia de dar troco, os números têm significado para o sujeito. Na escola trabalha-se com o algoritmo onde os algarismos são dispostos em colunas conforme sua posição no numeral como se fossem valores independentes da totalidade do número, interferindo no seu significado. Conforme Carraher et al (1995), esse tipo de procedimento leva a criança a focalizar sua atenção nos símbolos escritos perdendo, assim, tanto o significado da situação como o significado dos algarismos dentro de um sistema de quantificação. É o que aconteceu, também, com a aluna VAP ao responder que a professora poderia levar apenas 7 crianças ao parque, contradizendo seu próprio pensamento.

Segundo os autores, a perda de significado também se deve ao fato de que a resolução de problemas na escola tem objetivos diferentes daqueles que movem o sujeito para resolver problemas matemáticos fora da sala de aula. Isto se relaciona, também, com a facilidade com que a criança aceita resultados absurdos. Evidencia-se assim dois contextos: o da vida escolar e o da vida extra-escolar. O comentário da aluna JP mostra que, mesmo havendo compreensão da situação-problema, preocupa-se com o uso e reprodução de técnicas algorítmicas para resolver o problema que acabam sendo utilizadas de modo puramente mecânico.

Conforme Piaget (1973), o conhecimento é construído nas inter-relações entre sujeito e objeto e o sujeito modifica-se ao modificar o objeto por meio da ação e problematização das situações gerando conflitos que devem ser superados mediante a ampliação dos esquemas de ação do sujeito sobre o objeto. As coordenações das ações relacionam-se com uma estrutura interna construída pelo próprio sujeito e a oportunidade de pensar nas próprias ações e nas dos outros, num ambiente co-operativo, possibilita a superação das contradições e a construção do conhecimento de forma mais autônoma.

Com as discussões verificamos que alguns alunos procuram pela resposta dada ao problema e não nas causas que levaram a tal resposta. Ao observarem a forma como JLOb resolveu o problema 1 tivemos os seguintes comentários:

(JLOb)

$$\begin{array}{r|l} 37 & \underline{3} \\ 07 & 12 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 50 & \underline{2} \\ 00 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \underline{-\ \ 2} \\ 10 \end{array}$$

(sem resposta)

(Alunos) *"Tá errado".*

(Prof.) "Mas, porque está errado"?

(EMSP) *"Tem três contas e não tem resposta".*

(Prof.) "Mas observem os cálculos. E quem quiser fazer algum comentário pode fazer"! (Houve silêncio enquanto observavam)

(DSA) *"Professora, a primeira e a última conta, tá tudo certo, mas a do 50 não, porque se dividiu por 2, tinha que dar 25 e não 2".*

(Prof.) "Como você chegou nesse valor 25".

(DSA) *"Eu sei que é a metade do 50".*

(Prof.) "O que mais vocês podem observar"?

(RR) *"Aquele 37 é o número de alunos e se dividir por 3, é como se fossem três grupos, então pra dá certo o problema, essa conta não pode fazer".*

(Prof.) "Quem poderia explicar melhor o que o colega (RR), falou"?

(VAP) *"Professora eu acho que é assim: se a gente fosse fazer uma conta pra dividir a nossa sala em três grupos teria que fazer esse tipo de cálculo que é dividir por três e no problema só fala de dois grupos".*

A aluna EMSP procura pela resposta sem levar em conta os cálculos utilizados ao dizer "tem três contas e não tem resposta". A aluna DSA se referiu ao erro da divisão de 50 por 2, sem relacioná-lo com os dados do problema, mas apenas pensando no cálculo em si. Já o aluno RR faz essa relação, pois percebe que a divisão de 37 por 3, divide a turma da professora do problema em três grupos e não em dois, como diz a questão.

Ao serem solicitados para esclarecerem melhor o que o aluno RR acabara de falar a aluna VAP busca uma situação análoga para explicar sua compreensão, colocando a própria sala de aula na situação. O exemplo da aluna representa características do pensamento operatório concreto que necessita da experiência com os objetos, nesse caso, de situações tiradas da realidade próxima para auxiliar na compreensão.

Os diálogos seguintes mostram a indecisão dos alunos sobre “o número que sobe”, devido às técnicas algorítmicas, ao se referirem ao primeiro cálculo feito pela aluna ARC:

$$\begin{array}{lll} {}^{2} & & \\ 37 & 11 & 22 \\ \underline{x3} & \underline{x2} & \underline{-50} \\ 11 & 22 & 30 \end{array}$$

R: Pode levar 30 alunos ao parque.

(CS) *“Prof. a primeira conta tá quase certa, é que esqueceram de somar o dois.*
(Prof.) “E o que significa aquele 2 que não foi somado”?
(KCL) *“É o dois que subiu do 21”.*
(Prof.) “Mas ele vale 2”?
(KCL) *“Vale”.*
(LFRP) *“Não professora vale 20 porque é do 21”.*
(Prof.) “E por que não dá pra por o 21 todo embaixo”.
(Alunos) *“Porque a conta fica errada”.* (Após tentativas de obter uma resposta mais bem elaborada o aluno RR diz):
(RR) *“Professora é porque é assim, nos cálculos se a gente observar bem, vai ver que só pode ir do zero até o nove. Quando passa de nove, aquele tanto precisa ir pro outro lugar ou da dezena ou da centena, porque se deixar embaixo vai dá um resultado muito grande que vai ser errado”.*
(Prof.) “E quando ‘sobe’ um número, a gente pode colocar em qualquer lugar desde que seja em cima”? (Mesmo após o comentário do aluno RR, a turma se agita com alguns alunos falando que pode e outros que não pode).
(Prof.) “Quem gostaria de comentar”.
(SCS) *“Pode ser em qualquer lugar, mas se a gente esquecer de somar a conta fica errada”.*
(JM) *“Acho que não prof., o 2 é dezena e tem que ficar na linha da dezena, senão a gente pode achar que é centena aí vai dá errado*”.
(Prof.) *“E agora quem tem razão”.*
(SCS) *“É ele tá certo, prof. cada parte tem seu valor”.*

Por esta passagem de aula evidenciamos que a co-operação, proporcionada pelos diferentes pontos de vista, contribuiu para que a aluna SCS firmasse opinião a respeito do valor relativo de um número que “sobe” devido à estrutura do sistema de numeração decimal posicional.

A cooperação é definida como co-operação por Piaget (1973b) no sentido de cooperar na ação, coordenando pontos de vista pelas ações de reciprocidade, correspondência ou complementaridade. Assim, a co-operação possibilitou a descentração superando a perspectiva egocêntrica, pois a aluna necessitou refazer o percurso cognitivo do colega para que concordasse com ele.

Durante a fase de discussões das estratégias utilizadas com os alunos, tínhamos a preocupação em saber se os diálogos estavam sendo significativos também para os alunos que ficavam em silêncio, normalmente por timidez e insegurança em expor seus raciocínios. Escolhemos, então, um aluno que havia errado o problema e praticamente só ouvia para que comentasse sobre a forma de resolução da aluna PAA, que estava exposta no quadro (o sinal “(...)”, indica onde fazíamos novas perguntas ao aluno sobre os cálculos expostos).

$$\begin{array}{r} 37 \\ \underline{\times 3} \\ 111 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 37 & \underline{2} \\ 17 & 18 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \underline{\times 3} \\ 54 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 17 \\ \underline{\times 3} \\ 51 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16 \\ \underline{\times 3} \\ 48 \end{array}$$

R: Ela poderá levar 16 crianças.

(LGA) *(...) “Aquele 111 é o tanto que vai gastar pra levar todos os alunos (...) o 18 é que vai ter ir 18 num grupo e sobra 1, daí no outro vai 19 (...) aquele 54 é o quanto ia gastar se levasse 18 alunos, o 51 é se levasse 17 e como só tinha 50* (reais) *então, só leva 16 alunos”.*

(Prof.) “É necessário fazer todos esses cálculos para resolver o problema”?

(DSA) *“Nesse problema a gente faz todas as contas se quiser saber bem direito todas as coisas, senão é só pegar o dinheiro que tem e dividir pelo preço do ingresso”.*

O aluno LGA, que errou o problema 1 no teste, demonstrou que compreendia todos os cálculos feitos pela colega. A socialização das estratégias possibilitou a reestruturação de seu pensamento coordenando as ações corretamente, estabelecendo relações entre todos os dados do problema. Mesmo em silêncio, o aluno LGA co-operava com os colegas, não de uma forma conjunta, mas ativa, o que permitiu a compreensão do problema.

De outra resposta correta dada ao problema 1 destacamos a estratégia utilizada pelo aluno MJA que somou várias parcelas de valor 3 e depois várias parcelas de valor 15, como mostrado a seguir:

(MJA)		
3	15	45
3	+ 15	+ 3
+3	30	48
3	+15	
3	45	
15		

R: Leva 16 crianças e sobra 2 reais.

A estratégia do aluno não foi, à primeira vista, aceita como fácil por alguns alunos que diziam não entender aquele jeito de fazer. A pergunta sobre esta estratégia foi dirigida ao próprio aluno que a fez:

(Prof.) "MJA, como você explicaria aquele jeito de resolver?"

(MJA) *"Ah! Prof. é que eu tentei fazer a divisão e vi que tava errada, então eu fiz assim".*

(Prof.) "Bom, está correto. Então tenta explicar seu raciocínio pra gente".

(MJA) *"É que eu fui somando os 3 e vi que cinco três dava 15, então eu pensei que se 5 ingresso dá 15, então 10 vai dá 30 e mais 5 ingresso dá mais 15, aí já dava 45 reais, então faltava só mais um pra completar e sobrava 2 reais".*

O aluno acabou somando os ingressos um a um até atingir um conjunto de 5 ingressos e depois somou três conjuntos de 5 ingressos mais um ingresso, totalizando 48 reais. O aluno percebeu seu erro inicial, quando tentou fazer a divisão e buscou uma estratégia alternativa que desse conta de resolver o problema. A atitude do aluno evidencia a pré-correção do erro, a confiança em seu próprio raciocínio e a superação de seus conflitos cognitivos. Conforme Macedo (1994), o erro é superado enquanto problema. A criança pode antecipá-lo ou anulá-lo, pois já dispõe de meios para pesquisá-lo adquirindo, assim, uma certa autonomia.

Na forma como o aluno MJA resolveu corretamente o problema 1 e ainda soube explicar sua estratégia aos colegas de sala de aula demonstra, na perspectiva piagetiana, a tomada de consciência da operação realizada.

Piaget (1967), considera tal atitude muito difícil, pois efetivamente, se caracteriza pela passagem do plano da ação para a linguagem, reinventando as ações na imaginação para poder exprimi-la em palavras. Pressupõe não somente a tomada de consciência das relações tecidas pelo pensamento, mas do próprio trabalho deste pensamento caracterizando uma operação de segunda potência ou, dito de outra forma, um processo metacognitivo.

Dos diálogos com os alunos sobre as respostas referentes ao problema 3 que dizia:

No pátio de um estacionamento estão 11 caminhões. Sabendo que cada um desses caminhões tem 12 pneus, diga quantos pneus há nesse pátio de acordo com o número de caminhões apresentados?

Destacamos a participação da aluna PCS que antes de qualquer pergunta inicial pede a vez para falar:

(14 alunos usaram esta estratégia)

$$\begin{array}{r} 11 \\ +\underline{12} \\ 23 \end{array}$$

R: 23 pneus.

(VAP)
fez $\begin{array}{r} 11 \\ +\underline{12} \\ 23 \end{array}$ (apagou e substituiu por):

1→ 12
2→ 24
3→ 36
4→ 48
5→ 60
6→ 72
7→ 84
8→ 96
9→ 108
10→ 120
11→ 132 pneus.

(PCS) *"Professora, aquele jeito da primeira tá errado, porque dois caminhões já dá 24 pneus e lá só deu 23".*

(Prof.) "Por que será que muitos alunos somaram os dados do problema?

(CMS) *"É que no problema dá para saber que vai dar mais pneus, por isso 'eles' acham que a conta é de somar".*

A aluna PCS fez uma observação correta demonstrando a idéia de proporcionalidade, que não foi possível sabermos se era próprio da aluna ou se concluiu a partir da estratégia usada pela aluna VAP, tendo em vista que esta forma de resolução já se encontrava exposta no quadro. Mas, de qualquer forma, chamou-nos a atenção o comentário da aluna PCS, pois ela errou em todas as questões do teste tendo apenas um acerto parcial na questão 10, como mostra o anexo 3. Os 14 alunos que resolveram o problema pela soma dos dados, apontaram para o aprendizado de um procedimento, mas que não corresponde à compreensão do conceito de adição.

O aluno CMS justificou o uso da estratégia de adicionar os dados apontando para a procura de "chaves linguísticas" que indicariam o cálculo a ser feito. Este aluno também havia somado os dados do problema e observando a forma como VAP resolveu ele comentou:

(CMS) *"Ah!Se eu soubesse que podia fazer assim eu também tinha feito".*
(Prof.) "E por que você acha que não pode"?
(CMS) *"Ah! Porque eu achei que tinha que fazer com cálculo".*

A identificação desse fato só foi possível pela socialização das estratégias e pelo diálogo com o aluno CMS. Seu comentário chama a atenção para as atitudes heterônomas do aluno que, mesmo de forma inconsciente, acaba esperando uma ordem para liberar seu raciocínio. O uso excessivo de técnicas e regras ao invés do uso de estratégias próprias do aluno na resolução dos problemas, acaba por suprimir as atitudes autônomas enquanto reforça as heterônomas. Nas atitudes heterônomas o aluno não age por conta própria, mas guiado pelo que julga ser a expectativa do professor ou de uma regra ou condição a ser satisfeita do tipo "tinha que fazer cálculo".

A aluna VAP ao tentar resolver o problema somando os dados, percebeu a contradição do resultado e buscou por uma outra estratégia que desse conta de resolver a situação caracterizando a pré-correção do erro. A aluna havia tentado resolver o problema 1 usando a mesma idéia de proporcionalidade, mas desistiu da estratégia. Neste problema 3, superou seu conflito inicial e conseguiu concluir a situação proposta de acordo com seu próprio raciocínio. Segundo OCDE/PISA (2000), a aprendizagem autônoma requer um julgamento crítico e realista do grau de dificuldade da tarefa e a capacidade de investir energia suficiente para realizá-la. A aluna ao conseguir chegar à solução correta por seus próprios meios reforçou sua autonomia. A socialização da estratégia da aluna contribuiu com a percepção dos outros alunos de que é possível seguir caminhos alternativos, conforme a própria compreensão da situação proposta.

As informações apresentadas mostraram que a socialização das estratégias de resolução de atividades favoreceram atitudes co-operativas e, estas, estão ligadas diretamente a atitudes de autonomia. Para participar das discussões, comentando ou simplesmente acompanhando os comentários, os alunos precisaram refletir sobre o percurso cognitivo do colega e pensar numa mesma situação sob diferentes pontos de vista, tanto certo ou errado.

A forma de tratamento dada às resoluções dos alunos favoreceu a ação didático-pedagógica reflexiva, tendo em vista que os conteúdos surgidos durante as discussões foram abordados de forma mais significativa. É sobre este ponto de vista que discutiremos as próximas informações.

3.4.3. Sob o ponto de vista didático-pedagógico: Trataremos as informações que relacionam professor-aluno-conteúdo no processo de ensino-aprendizagem e que consideramos significativa para o desenvolvimento tanto do conteúdo em si como para a atividade do aluno, levando em conta as relações interpessoais e com os conteúdos de ensino na sala de aula.

Com relação a resposta apresentada pela aluna ARC, no problema 1, levantou-se um questionamento pelos alunos devido ao fato de não trabalharem, na 5ª série, com os números negativos, vejamos o que disse o aluno sobre a resolução:

$$\begin{array}{ccc} \overset{2}{37} & 11 & 22 \\ \underline{\text{x}3} & \underline{\text{x}2} & \underline{-50} \\ 11 & 22 & 30 \end{array}$$

R: Ela poderá levar 30 alunos.

O aluno CS comenta:

(CS) *"A primeira conta tá quase certa, é que esqueceram de somar o dois, a do meio tá certa, mas a última tá errada, porque não dá pra tirar 50 de 22 e mesmo assim estaria errada".*
(Prof.) "Vamos fazer duas observações e a 1ª é: Porque não pode fazer aquela subtração".
(MAO) *"É que não dá pra tirar 50 de 22".* (Repetiu novamente o que o colega havia falado sem acrescentar novas informações).

Na 5ª série, os alunos não consideram que existam números negativos e que possam operar com eles. Sendo assim, para eles, esse cálculo é impossível. Neste momento, para o tratamento didático das dúvidas que os alunos apresentaram, envolvemos nas discussões situações com valores negativos, como por exemplo, a pontuação em jogos que as crianças lidam com mais naturalidade. Os alunos reconheceram as situações e participaram com bastante curiosidade do assunto novo para eles, mas que continuou causando estranheza o fato de ser possível, matematicamente, tirar uma quantidade maior de outra menor. As técnicas algorítmicas da subtração também foram retomadas aproveitando a situação surgida em aula.

Um aluno, numa atitude comparativa, se interessa pela resolução do aluno JSM e pergunta:

$$\begin{array}{l|l} 37 & \underline{50} \\ 2 & 7 \\ & \underline{\text{x}3} \\ & 21 \ \text{alunos} \end{array}$$

(LFRP) *"E aquele 37 dividido por 50, dá?*
(Prof.) "O que vocês acham"?

Os alunos que participaram da discussão sobre essa pergunta concordaram que não daria e tentaram exemplificar com situações reais em que não consideraram valores menores do que 1, como por exemplo, a distribuição de algum objeto entre eles dizendo que *"daí não* *dá nem um para cada pessoa"*. Mesmo o assunto "fração" não sendo novidade para eles, pareceu que os alunos "esqueceram" das possibilidades de fracionar quantidades. O que evidenciou, novamente, que os alunos não relacionam as situações matemáticas da escola com as situações reais da vida cotidiana. Houve novamente a necessidade de tratarmos de situações reais que ajudassem na compreensão da possibilidade dessa operação o que permitiu a retomada do assunto divisão e também a constatação da dificuldade que tal operação apresenta para eles. Com as discussões ficou evidente que, quando colocávamos nas situações valores monetários, as dificuldades de compreensão eram, praticamente, inexistentes e faziam uso do cálculo mental com certa naturalidade. Os alunos apresentaram dificuldades em compreender que, assim como podem fracionar "dinheiro", também, podem fazer o mesmo com outros objetos ou situações, seguindo a mesma lógica nas ações.

Uma das resoluções que consideramos como correta, apresentada pelo aluno JM, dizia que a professora poderia levar 17 crianças ao parque e foi comentada pelo próprio aluno que a produziu da seguinte maneira:

$$\begin{array}{r|l} 50 & \underline{\ 3\ } \\ 20 & 16 \\ 2 & \end{array}$$

R: 17 alunos[3].

(JM) *"É que sempre dão desconto pra escola"*.
(Prof.) "E se não derem desconto?
(JM) *"Daí a gente bate no porteiro"*.

Esta situação direcionou o assunto para questões éticas como valores morais, respeito mútuo e sobre a particularidade daquela resposta final que, a rigor, é considerada errada. A resposta do aluno oportunizou a transversalidade, integrando a Matemática com as opiniões e relações interpessoais o que contribuiu com o desenvolvimento da autonomia moral, das

[3] Esta resposta foi considerada correta devido aos cálculos que o aluno apresentou e, sobretudo, pelos comentários que ele fez em sala de aula, demonstrando que compreendeu a situação proposta. Mas, não deixamos de ressaltar sobre o erro que tal estratégia apresenta, tendo em vista que o aluno se baseou em suposições da sua própria opinião para considerá-la correta.

capacidades de intervenção e transformação da realidade. A idéia do próprio aluno foi ponto de partida para o tratamento didático-pedagógico, pois permitiu que assuntos relacionados com a formação ética do cidadão fossem tratados de maneira que aproveitasse a situação trazida à tona pela sua opinião que acabou motivando outros comentários violentos como "quebrar o parque" por exemplo.

Ainda com relação ao problema 1 do teste evidenciamos a generalização de uma opinião previamente firmada. O diálogo a seguir se refere à estratégia de resolução do aluno LS:

$$\begin{array}{r} 50 \\ -\underline{37} \\ 13 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 \\ +\underline{37} \\ 50 \end{array}$$

R: Ela já poderá levar ao parque 13 crianças.

(RMO) *"Professora aquele lá tá errado porque misturou dinheiro com gente".*
(Prof.) "Mas, por que não pode misturar dinheiro com gente".
(RMO) *"Porque como é que vai tirar 37 alunos de 50 reais".*

O fato de não falarmos de imediato que o comentário poderia estar inadequado fez com que os alunos aceitassem a consideração do colega como correta para qualquer situação. Isso causou agitação na turma que começou a procurar nas outras resoluções situações semelhantes. Nesse momento propomos uma reflexão:

(Prof.) "Bem vamos pensar! Se eu tiver 10 reais e dividir com duas pessoas. Quando devo dar a cada um"? (Os alunos responderam prontamente que daria 5 reais):
(Prof.) "Mas e daí? Eu não misturei dinheiro com gente?
(RMO) *"Ué? Como é que agora pode?*
(Prof.) "Alguém sabe explicar"? (Houve silêncio)

Na adição opera-se com dados de mesma grandeza, por isso que, nessa operação, não dá para 'misturar dinheiro com gente'. Mas, no caso da multiplicação ou divisão a operação se dá com grandezas distintas em que se estabelece uma relação de correspondência.

Os alunos não perceberam, no momento, que as informações se relacionam dependendo do contexto da situação. O aluno RMO pode ter se lembrado de algum problema em que não podia "misturar dinheiro com gente" e tomou essa perspectiva como correta para qualquer problema que envolvesse dados semelhantes. As discussões, sobre tal situação, se deram em torno das possibilidades de relacionarmos informações numa situação-problema, explorando, também, situações que trazem dados irrelevantes na produção de uma resposta para determinada situação, como no caso de datas e outros códigos numéricos.

Com relação à resolução apresentada pela aluna LTG, no problema 3, provocamos uma situação de análise do cálculo pelo tipo de erro apresentado.

$$\begin{array}{r} 11 \\ \underline{\times 12} \\ 22 \\ \underline{+11} \\ 33 \end{array}$$

R: 33 pneus

(Prof.) "O que tem de errado nesse cálculo?"

(LTG) *"Deu pouco pneu"*.

(Prof.) "Mas, porque que deu pouco pneu?"

(A aluna não soube responder)

(DSA) *"Professora, precisava por o sinal de mais embaixo do primeiro 2 e lá não tá"*.

(Prof.) "Mas o que significa esse 'mais' que você está falando?"

(DSA) *"É que depois que a gente faz vezes com os dois números tem que somar"*.

(VAP) *"Prof. eu não coloco sinal de mais, eu deixo sem nada, só pulo o número pra lá* (para a esquerda)*"*.

(RR) *"A professora da 4ª série também disse que pode ser o zero também, que não muda nada"*.

(Prof.) "Mas porque não muda nada?"

(Nenhum aluno soube ou quis explicar)

Os alunos não conseguiram estabelecer relações entre o zero que o aluno RR comentou com a ordem das dezenas. Multiplicam o algarismo das dezenas como sendo unidades simples. Esses comentários apontam para o uso mecânico das técnicas algorítmicas que são 'decoradas' sem compreensão dos seus porquês. Essa passagem de aula fez com que a multiplicação e as técnicas algorítmicas se tornassem o tema de continuação da aula levando em conta os tipos de erros apresentados pelos alunos.

Ao problema 4 do teste a aluna LTG calculou da seguinte maneira:

$$\begin{array}{r} \cancel{1}8345 \\ -\ \underline{\cancel{3}477} \\ 05132 \end{array}$$

(sem resposta)

O aluno RR descobre a lógica que a aluna seguiu e comenta:

(RR) *"Prof. naquela resposta fizeram sem emprestar e desse jeito a conta fica errada (...) fizeram de baixo para cima"*.

LTG inverte as funções do minuendo e subtraendo. A aluna subtrai o menor do maior independente da posição que os algarismos ocupam no cálculo e ainda faz um empréstimo para o 3 que passa a ter o valor 13, do qual ela subtrai 8 resultando o 5 que aparece na resposta. A maneira como a aluna fez mostra como ela operou, mas destacamos esta forma de resolução nesta categoria devido ao potencial didático da situação que solicitou a retomada do assunto.

A subtração com empréstimo é temida por muitos alunos porque não a compreendem. A propriedade comutativa da adição permite que a operação seja feita independente de certas posições do algarismo no cálculo. Na subtração a comutatividade não ocorre, mas alguns alunos generalizam informações que são particulares causando erros que, para muitos são incompreensíveis.

A questão 6 do teste que dizia:

O lanche, hoje, na escola será bolachas recheadas com vitamina de bananas. Se há aproximadamente 300 alunos para lanchar e se em cada pacote tem 20 bolachas. Quantos pacotes de bolachas serão necessários para dar 5 bolachas a cada aluno"? (Esse problema se baseou numa situação real acontecida na escola).

Essa questão foi a que apresentou o maior número de erros (os exemplos de erros apresentados a este problema são mostrados no anexo 4). Apenas 3 alunos acertaram completamente. Alguns faziam uma etapa do problema mas não avançava para a seguinte. Na discussão das respostas a mesma dificuldade que sentiram ao resolver o problema se refletiu. O diálogo não avançava. Então, lançamos mão de problemas análogos, com valores pequenos em que prevaleceu a idéia de proporcionalidade que os alunos demonstraram acompanhar com naturalidade, talvez, por aparecer no "concreto" em situações comerciais ou até mesmo nas brincadeiras. Com dados pequenos muitos alunos operavam mentalmente tendo consciência da operação que deveria ser realizada, mas não conseguiam transpor o mesmo raciocínio para situações com valores maiores como apareceu no problema.

A questão 2 do teste solicitava aos alunos que passassem para a forma numérica duas informações a respeito das populações de uma cidade e de um país, como segue:

a) noventa mil e quarenta e sete habitantes.
b) dois milhões, trezentos e quarenta mil e trinta e dois habitantes.

As respostas apresentadas a essa questão são as que seguem:

a)	b)	
9047	234. 32	2. 3400. 32
9. 0. 47	2. 340. 030	20000340.032
90. 47	23. 432	2: 340: 32
9407	2. 340. 32	2. 0000 340 32
90,047	2000 340	2. 3432
90 040	2. 034032	2. 340. 302
90000407	002, 340, 32	30. 4030
	20,34. 032	

(Dos 36 alunos da turma, 17 erraram a letra 'a' e 28 erraram a letra 'b')

Das discussões e do trabalho pedagógico com estas respostas destacamos o comentário do aluno RR que disse:

(RR) *"Professora, sabe o que eu percebi? Eram só dois números que a senhora pediu né? E olha só quanto número a gente leu."*

Após reorganizarmos os valores conforme as considerações dos alunos - tendo em vista que algumas respostas apresentavam vírgulas, dois pontos, vírgula e ponto, deixando evidente a dificuldade com os conceitos pertinentes ao sistema de numeração decimal, como por exemplo as ordens e classes numéricas - fazíamos a leitura e escrita do número formado, que era diferente do solicitado na atividade. Assim, os alunos fizeram o registro de mais de vinte valores na forma simbólica com algarismos e na forma escrita por extenso.

Essa situação e o comentário do aluno fez com que repensássemos a 'lista de exercícios' como fixação de atividades. Uma situação, se bem explorada, ramifica-se em diversas outras de forma dinâmica com os alunos, pois em uma turma, a diversidade de estratégias, erros e acertos que aparecem são grandes.

Nessa questão 2 e também nas questões 5, 7, 8, 9, 10 e 11, foram identificadas as dificuldades pela maioria dos alunos da turma, relacionadas com o sistema de numeração decimal, responsáveis por muitos dos erros cometido. Zunino (1995 p.140), comenta que "a humanidade levou muitos séculos para inventar um sistema de numeração como este, um sistema que é muito econômico, porque permite escrever qualquer número utilizando só dez símbolos. Porém, justamente por ser tão econômico, pode se tornar bastante misterioso para aqueles que estão procurando pistas (ou elementos) que lhes permitam reconstruir seus princípios".

Ao responderem o questionário alguns alunos apontaram suas dificuldades para a resolução das atividades matemáticas, relacionando-as ao sistema de numeração, como mostram as falas:

(JM) *"Eu erro muito porque eu não entendo, acho difícil e me atrapalho com os números".*

(PCS) *"Eu coloco os números nos lugares errados, me confundo com os números".*

A necessidade de retomada do assunto ficou evidente e oportunizou também a abordagem de temas relacionadas à historia dos números, como por exemplo, a construção de um sistema de numeração para atender necessidades humanas de padronização de um sistema de contagem. Fazia parte da programação de conteúdos para a 5ª série, o estudo de outras formas de registros de quantidades, como por exemplo, o sistema de numeração dos egípcios, dos maias, dos romanos bem como a existência de outras bases de contagem.

A exploração das estratégias dos alunos possibilitou que o processo de ensino se tornasse mais eficaz em relação à aprendizagem dos alunos, pois alguns conteúdos foram tratados de modo a formarem uma rede de significados, sem considerar o conhecimento como acúmulo e linearidade.

CAPÍTULO IV

4. CONCLUINDO...

O erro se insere no complexo sistema que constitui o pensar e a provisoriedade do conhecimento. Assim compreendido não expressa a negação do ato de conhecer, mas a dinâmica própria de produzir conhecimento. A pesquisa se mostrou relevante no sentido de proporcionar um conhecimento sobre os alunos, suas opiniões e a organização de estratégias de ação a partir da problematização da situação.

O estudo apresentado permite-nos retomar o problema de pesquisa, os objetivos que nos propusemos atingir e verificar as hipóteses apresentadas inicialmente, a fim de estabelecermos as conclusões a cerca da presente investigação.

O problema foi expresso pela questão: Que contribuições o trabalho pedagógico com os erros dos alunos, em sala de aula, pode trazer para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática? A resposta dada, no seu sentido mais amplo, é de que é possível, em sala de aula, darmos atenção às respostas dos alunos. O trabalho pedagógico com os erros e estratégias diferenciadas para a resolução de uma situação-problema pode contribuir com o aprendizado da Matemática, a operatividade, a co-operação e a autonomia nas ações.

O objetivo principal era investigar as possibilidades que se abrem com a socialização, entre os alunos, da diversidade de respostas produzidas na resolução de problemas.

Investigar a compreensão que os alunos possuíam sobre seus próprios erros e as relações destes com o processo de ensino-aprendizagem e, também, identificar e descrever episódios de sala de aula e formas de tratamento dos erros dos alunos, foram os objetivos específicos desse estudo.

Ao iniciarmos a investigação partimos dos pressupostos que: as dificuldades dos alunos em matemática se devem, em grande parte, às características do ensino que não favorecem a análise crítica e a exploração de estratégias operativas para a construção de conceitos e compreensão dos algoritmos e, ainda, que a socialização entre os alunos dos resultados obtidos numa determinada situação-problema e a discussão de diferentes perspectivas e estratégias, sob condições de co-operação, favorecem a reflexão e a descentração do pensamento.

Ao analisarmos as informações podemos apresentar algumas contribuições obtidas por meio das estratégias que se fizeram presentes na investigação. Assim, estaremos reportando ao problema, aos objetivos e às hipóteses de pesquisa de maneira indireta devido à natureza imbricada das informações.

A sondagem, proporcionada pelo questionário, nos indicou que os alunos depositam na escola e no saber matemático suas esperanças de um futuro mais digno e promissor. A maioria dos alunos considerou que a Matemática é importante. Para eles, o bom emprego está diretamente relacionado ao conhecimento matemático que receberem ao longo do seu processo de escolarização. Portanto, mostrou que a escola exerce um papel fundamental na formação do aluno/cidadão.

Verificamos, também, que os alunos culpam a si próprios pelos seus erros com a justificativa de que não prestam atenção e se atrapalham com as contas e os números ou culpam os professores pela falta de paciência e explicação, pela pressa, pela forma de correção dos erros que não possibilita a compreensão dos seus porquês. Foram apontadas, ainda, características que pertencem ao domínio afetivo que se manifestaram pelo (des)interesse, (in)satisfação, curiosidade/apatia e (des)valorização do conhecimento matemático.

As falas dos alunos apontaram para a prática didático-pedagógica e o que se sobressai na sala de aula, como: a aprendizagem passiva, o caráter individualizante do ensino, a supremacia do acerto, o erro como algo constrangedor e a prática corretiva sem discussão coletiva. A prática corretiva "empirista", expressada pela cópia da resolução correta do quadro e a individualização do ensino, pela ausência de discussão sobre os erros evidenciaram as condições do ensino da matemática. O conhecimento pautado na reprodução, na repetição de modelos, regras e técnicas incompreendidas, fixadas por memorização, sem reflexão crítica, não favorecem a exploração de estratégias operativas para a construção de conceitos e a compreensão de algoritmos e, também, não favorecem atitudes de autonomia. Assim, a aprendizagem não é satisfatória, para muitos alunos, porque não entendem o que se está tentando ensinar. Copiar o certo não os fazem compreender os motivos de seus erros.

As discussões que ocorreram por meio da estratégia de devolução aos alunos das resoluções apresentadas no teste, bem como das questões surgidas decorrentes das observações dos alunos, oportunizou a reflexão sobre as próprias ações. As devoluções evidenciaram formas de raciocínio que seguiam lógicas próprias pautadas: em idéias pré-estabelecidas, em 'dicas' ou 'chaves linguísticas', na significação da situação proposta, no uso de algoritmos que expressavam uma forma de resolução mecanizada em que não importava o resultado encontrado. Evidenciamos, ainda, que decisões podem ser tomadas ou deixarem de ser tomadas, pelos alunos, por atitudes heterônomas que geram conformismo ou aceitação acrítica de opiniões alheias.

A sala de aula pode ser um ambiente socializador. Consideramos que a socialização, como estratégia didática, favoreceu, além do desenvolvimento dos conteúdos, a aproximação das dúvidas dos alunos e de suas representações. Também, abriu espaço para a co-operação e, esta, favoreceu atitudes de autonomia.

A socialização entre os alunos dos resultados obtidos nas situações-problema e as discussões de diferentes perspectivas e respostas, sob condições de co-operação, favoreceram a reflexão e a descentração do pensamento, ou seja, o aluno precisava operar levando em conta, não somente a própria maneira de pensar mas, também, o pensamento do outro. As discussões estimulavam os alunos a cooperarem uns com os outros seguindo as regras de relacionamento que foram respeitadas e cobradas pelos próprios alunos numa atitude de co-responsabilidade.

A mudança de opinião, com relação ao resultado produzido no teste, após observação e análise das diferentes estratégias de resolução, identificando contradições, permitiu que os alunos refizessem o caminho percorrido nas resoluções de forma co-operativa. O choque de opiniões favoreceu a tomada de consciência da situação tratada. Assim, o aluno pode construir uma representação de si mesmo como alguém capaz de aprender se for valorizado o contato do aluno com o seu erro para que seja superado.

Uma das principais contribuições desta estratégia foi a constatação de que um aluno pode dar uma resposta absurda no teste, mas, perceber a contradição e incoerência do resultado quando confrontado com sua própria resposta. Este confronto provocou a reflexão e o estabelecimento de relações entre a resposta dada e a situação enunciada. Atitudes que não foram tomadas na resolução individual do teste, ocorreram com bastante naturalidade no momento do diálogo, evidenciando atitudes de autonomia.

Os alunos da turma ao observarem as estratégias de resolução, mesmo que inconscientemente, precisavam pensar no que podia ou não ser satisfatório para responder a situação-problema. Isso expressa o procedimento da validação. Na prática pedagógica, tal procedimento, leva o aluno a analisar o resultado por meios próprios, identificando contradição ou a consistência dos argumentos, o que auxilia no desenvolvimento da autonomia.

As discussões também promoveram a contextualização, que se dava no desenvolvimento de conteúdos mediante explicitação das situações apresentadas na resolução do teste, recuperando conceitos trabalhados anteriormente e ligando-os aos conteúdos presentes. Isto favoreceu uma melhor compreensão das operações fundamentais e das técnicas algorítmicas, do sistema de numeração decimal, dos números inteiros e fracionários e também, o desenvolvimento de temas transversais.

Outro aspecto que se mostrou relevante é que uma atividade vale por muitas, se for bem explorada. A "lista de exercícios", usada para promover a fixação de conteúdos, se tornou ainda mais questionável pelo seu caráter de reforço e treinamento, que não garante o conhecimento.

A forma de tratamento dada às estratégias de resolução, descrita nesse estudo, contribuiu também com os alunos que se mantinham em silêncio e participavam pouco da aula com seus próprios comentários. O fato de terem a oportunidade de ouvir as considerações dos colegas permitiu a reestruturação do pensamento pela atividade co-operativa. Nesse caso, o aluno não participava conjuntamente, mas sim, ativamente.

As informações coletadas com os alunos da 5ª série participante dessa investigação mostraram que as práticas pautadas no construtivismo são raras e evidenciaram, sob o ponto de vista dos alunos, a concepção empirista do conhecimento. A ênfase nas "explicações", no conhecimento como reprodução, a memorização e a prática corretiva dos erros apontaram para a necessidade de reflexão sobre as práticas didático-pedagógicas de modo que vá ao encontro das expectativas dos alunos.

A prática pedagógica que considera o aluno como sujeito ativo leva em conta o que já foi construído por ele, suas dúvidas e dificuldades e favorece a aprendizagem. Na interação, professor e aluno co-participam decisivamente para o êxito do processo ensino-aprendizagem.

Autonomia, reflexão e crítica são ações que podem ser conquistadas e aprendidas quando os ambientes familiar, escolar ou social sejam propícios para que tais aprendizados aconteçam. O grupo formado pela sala de aula favorece tais ações. Zunino (1995, p. 35) considera que "de maneira geral, é preciso apelar à cooperação entre as crianças, incentivar a confrontação de suas diversas estratégias, discutir a respeito da validade de cada uma delas". Foi isso que procuramos fazer nessa investigação e consideramos muito pertinentes as situações observadas. Para conhecer as dificuldades dos alunos em matemática e auxiliá-los na construção dos conhecimentos, precisamos ouvi-los, dar espaço para suas dúvidas que são, em suma, um potencial didático.

A pesquisa desenvolvida nos permitiu concluir que das estratégias dos alunos podemos obter contribuições enriquecedoras para o processo de ensino-aprendizagem e estabelecer possíveis implicações pedagógicas se considerarmos:

- As variadas respostas dos alunos apresentadas às situações-problema;
- A apresentação de atividades que admitem mais de uma solução, as chamadas "questões abertas" que podem proporcionar debates e discussões, ainda mais significativos, sobre os temas abordados, sendo de grande valor pedagógico.
- O trabalho com os erros que sua aceitação libera o aluno de ansiedades, fazendo-o sentir-se mais livre em sua forma de raciocinar e expor seus pensamentos, promovendo a auto-confiança e contribuindo para o desenvolvimento de atitudes autônomas.
- A abordagem das diferentes estratégias utilizadas na resolução de uma questão, tem também um sentido dialógico do pensar no que pode ou não pode ser aceitável nessa, ou naquela situação. A exploração da potencialidade dessas estratégias, certas ou erradas, contribui para a formação de conceitos evitando a memorização mecânica e acrítica.

- O trabalho com as diferentes respostas pressupõe ouvir os alunos. Não devendo esse "ouvir" se traduzir, para o professor como "perda" de tempo, mas sim, como um tempo dispensado que possibilita construções mais sólidas de conhecimento podendo ser otimizado em situações posteriores.
- O diálogo com os alunos como um importante instrumento de avaliação, pois permite a reorganização das ações sobre aspectos necessários ao conhecimento do aluno e auxilia na superação de dificuldades que possam tornar obstáculos para a aprendizagem.

A educação matemática solicita que se leve em conta questões como: para que, para quem e como educar por meio da Matemática, pois os alunos desde pequenos, como expressaram no questionário, depositam na escola suas esperanças de participar na sociedade com mais dignidade. Reconhecem que a escola é um caminho, não suficiente, mas necessário à vida cidadã.

Devido às contribuições que nos trouxeram o presente estudo, destacamos algumas possibilidades de continuação deste trabalho com estudos que investiguem:

- Se os cursos de formação de professores estão capacitando profissionais que levem em conta a diversidade de estratégias de pensamento, a fim de contribuir com o desenvolvimento do aluno/cidadão.
- Diferentes estratégias metodológicas utilizadas no tratamento do erro, experienciadas pelos professores, que possam contribuir com o desenvolvimento operatório dos alunos e a construção de conhecimentos.
- Qual a percepção e concepção dos professores sobre suas práticas no tratamento dado aos erros e suas "correções".
- As principais dificuldades encontradas para a promoção de um ensino de qualidade, sob a perspectiva dos professores.

As possibilidades de continuação do trabalho mostram um processo dinâmico e integrado. O mau desempenho dos alunos, indicados por instrumentos avaliativos, não têm causa única, mas se devem a fatores multifacetados que passam pela formação dos professores, pelo currículo escolar, pela organização do sistema educacional, pelos investimentos na educação pública de qualidade, pelo envolvimento familiar entre outros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRÉ, M. E. D. A. *Etnografia da Prática Escolar.* (Série Prática Pedagógica). Campinas: Papirus, 1995.

BACHELARD, G. *A formação do espírito científico*. Rio de Janeiro: Contraponto,1996.

BECKER, F. *Da ação à operação*: o caminho da aprendizagem em J. Piaget e P. Freire. RJ: DP&A Editora e Palmarinca, 2ª ed., 1997.

BOYER, C. B. *História da Matemática.* São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1996.

BRANDT, C. F. Desenvolvimento histórico do sistema de numeração decimal e do processo de aprendizagem a partir das recentes concepções matemático-didáticas: erro e obstáculo epistemológico. Itajaí: *Contrapontos*, ano 2, set./dez., p.389-409, 2002.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais*: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BURAK, D. *Modelagem Matemática: uma metodologia alternativa para o ensino de matemática na 5ª série.* Rio Claro: Universidade Estadual Paulista Júlio Mesquita, 1987. Dissertação.

BURAK, D. *Modelagem Matemática: ações e interações no processo ensino-aprendizagem.* Universidade de Campinas, Campinas, 1992. Tese.

CARRAHER, T. et al. *Na vida dez na escola zero*. 9ª ed., São Paulo: Cortez, 1995.

CASÁVOLA, H. M. O papel construtivo dos erros na aquisição dos conhecimentos. In: CASTORINA, J.A. et al. *Psicologia genética:* aspectos metodológicos e implicações pedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1988, p. 32-44.

CURY, H. N. Retrospectiva histórica e perspectivas atuais da análise de erros em Educação Matemática*.* Campinas: *Zetetiké*, v.3, n.4, p. 39-50, nov., 1995.

D'AMBROSIO, U. Etnomatemática. *Educação Matemática em Revista*, ano 1, n. 1, 1993.

D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática.* Campinas: Papirus, 1996.

DAVIS, C. e ESPOSITO, Y. L. O papel e a função do erro na avaliação escolar. *Cadernos de Pesquisa*, n.74, agosto, 1990.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino de Matemática no Brasil São Paulo: *Zetetiké*, ano 3, n.4, p.1-37, 1995.

FREITAS, J. L. M. de. Situações Didáticas. In: MACHADO, Sílvia Dias A. *Educação Matemática:* uma introdução. *S*ão Paulo: EDUC, 1999.

GARCÍA, R. *O conhecimento em construção.* Das formulações de Piaget à teoria de sistemas complexos. Porto Alegre: Artmed, 2002.

GÓMEZ CHACÓN, I. M. *Matemática emocional:* os afetos na aprendizagem matemática. Porto Alegre: Artmed, 2003.

GUSMÃO, T C. R. S. e EMERIQUE, P. S. Do erro construtivo ao erro epistemológico. Rio Claro, SP: *Bolema* , ano 13, n.14, p. 51 a 65, 2000.

KAMII, C., DECLARCK, G. *Reinventando a aritmética*: implicações da teoria de Piaget. Campinas, SP: Papirus, 1986.

KLINE, M. *O Fracasso da Matemática Moderna*. São Paulo: Ibrasa, 1976.

LA TAILLE, Y. O erro na perspectiva piagetiana. In: AQUINO, J. G. (Org). *Erro e fracasso na escola:* alternativas teóricas e práticas. São Paulo: SUMMUS, 1997.

LERNER, D. O ensino e o aprendizado escolar: Argumentos contra uma falsa oposição. In: CASTORINA, J. A (Org). *Piaget - Vygotsky*: Novas contribuições para o debate. 3ª ed. São Paulo: Ática, 1996.

MACEDO, L. de. *Ensaios construtivistas.* São Paulo: Casa do Psicólogo, 1994.

MACHADO, M. da P L. Antiguidade. *Revista Presença Pedagógica*, n. 3, junho, 1995.

MIRANDA, M. M. *A experiência norte-americana de fusão da Aritmética, Álgebra e Geometria e sua apropriação pela Educação Matemática Brasileira.* São Paulo: PUC, 2003. Dissertação.

OCDE – Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômicos. *Conhecimentos e atitudes para a vida: resultados do PISA 2000 – Programa Internacional de Avaliação de Estudantes.* São Paulo: Ed. Moderna, 2000.

PARRA, Cecília. *Didática da Matemática:* reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

PIAGET, Jean. *Sobre a Pedagogia*. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1998.

____________. *Abstração Reflexionante:* relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

____________. *A epistemologia genética; Sabedoria e ilusões da filosofia; Problemas de psicologia genética*. São Paulo: Abril Cultural, 1978.

____________. *Equilibração das estruturas cognitivas.* Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

____________. *Biologia e Conhecimento*. Petrópolis: Vozes, 1973.

____________. *Estudos Sociológicos.* São Paulo: Forense, 1973b.

____________ e SZEMINSKA, A. *A gênese do número na criança.* RJ: ZAHAR, 1971.

____________. *O raciocínio na criança.* (trad. de Valerie R. Chaves). RJ: Editora Record, 3ª ed., 1967.

PINTO, N. B. *O erro como estratégia didática:* Estudo do erro no ensino da matemática elementar. Campinas, SP: Papirus, 2000.

RABELO, E. H. *Textos Matemáticos:* produção, interpretação e resolução de problemas. 3ª ed. verif. e ampl. Petrópolis RJ: Vozes, 2004.

ROCHA, I. C. B. da. Ensino de Matemática: Formação para a exclusão ou para a cidadania? *Educação Matemática em Revista*. SP: SBEM. n.9/10, p.22-31, 2001.

ROSSO, A. J. ; BECKER, F. ; TAGLIEBER, J. E. . A produção do conhecimento e a ação pedagógica. *Educação e Realidade*, Porto Alegre, v. 23, n. 2, 1998, p. 63-81.

SANTOS, G. C. e SANTOS, S. R. O erro na aprendizagem de Matemática: uma abordagem construtivista. *Revista da FAEEBA*, Salvador, n.6, jul/dez, 1996.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. Rio Claro, SP: *Bolema*, ano 13, n.14, p.66-91, 2000.

ZUNINO, D. L. de. *A matemática na escola*: aqui e agora. 2ª ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

ANEXOS

ANEXO I – Questionário

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

QUESTIONÁRIO PARA FINS DE DISSERTAÇÃO

Nome:____Idade:____

1. Já reprovou alguma série? Qual? Por que?
2. Você gosta de Matemática? Sim ou Não? Por que?
3. Você erra muito em Matemática? Por que?
4. Por que os erros acontecem?
5. Como seus professores corrigiam os erros?
6. Como vocês gostariam que os erros fossem corrigidos pelos professores?
7. Vocês se lembram de alguma experiência "legal" com a utilização dos erros em que os professores usaram os erros para poder ensinar?
8. Que tipo de atitude os professores de Matemática tomam em relação aos erros? Tente justificar a alternativa escolhida:

   ( ) Apenas corrigem no quadro e quem errou apaga e copia a resposta certa.

   ( ) Os alunos vão no quadro resolver a atividade.

   ( ) Chamam a atenção, ficam bravos, dão algum castigo.

   ( ) Usam os erros para ensinar.
9. Existe um culpado pelos erros em Matemática? Se existe, quem e por que?
10. O que é necessário para aprender Matemática?
11. Você acha importante saber Matemática? Por que?

ANEXO 2 - Teste

1- Uma classe tem 37 alunos e a professora pretende levá-los a um parque de diversões. O ingresso custa 3 reais e a professora quer levá-los em 2 grupos, porque ela acha difícil cuidar de todos de uma só vez. Para conseguir o dinheiro necessário ao passeio, a professora está fazendo algumas promoções e já conseguiu 50 reais. Com esse valor quantas crianças a professora já poderá levar ao parque?

2- a) A população de uma cidade é de noventa mil e quarenta e sete habitantes. Escreva essa população usando algarismos. b) A população de um país é de aproximadamente dois milhões, trezentos e quarenta mil e trinta e dois habitantes. Escreva esse número usando algarismos.

3- No pátio de um estacionamento estão 11 caminhões. Sabendo que cada um desses caminhões tem 12 pneus. Diga quantos pneus há nesse pátio levando em conta o números de caminhões que lá estão.

4- Em 1985 uma grande fábrica de automóveis tinha 18 345 funcionários. Em 1988 a fábrica entrou em crise financeira e demitiu 3 477 funcionários. Qual o número de funcionários após as demissões?

5- Para a gincana de aniversário da escola, três amigos combinaram de coletar latinhas de alumínio e contá-las no dia seguinte. O 1º deles coletou oitenta e oito latinhas, o 2º coletou cento e cinquenta e duas (porque o pai dele tem uma lanchonete) e o 3º conseguiu apenas nove. Com quantas latinhas, esses amigos, contribuíram na gincana?

6- O lanche hoje na escola será bolachas recheadas com vitaminas de bananas. Há aproximadamente 300 alunos para lanchar. Em cada pacote vem 20 bolachas. Quantos pacotes serão necessários para dar 5 bolachas a cada aluno?

7- Quanto vale cada algarismo do número 210368 de acordo com a posição que ele ocupa no número?

8- O nosso sistema de numeração decimal tem dez símbolos que chamamos de algarismos: o 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Usando esses símbolos, podendo repeti-los quantas vezes quisermos, até que número podemos escrever?

9- Imagine que você está num jogo de casas numeradas, desenhadas no chão. Se você está na casa de número 1010 e precisa ir para a casa que vale uma unidade a menos, qual o número da casa que você ficará?

10- Complete os espaços vazios com o antecessor e o sucessor dos números:

	99	

	8009	

	10000	

11- Escreva como você lê os números abaixo:

7603____

21742____

80010____

3489150____

ANEXO 3

Lista de alunos participantes da pesquisa e os itens considerados como acertos (A), erros (E) ou parcialmente corretos (P), nas questões do teste do anexo 2.

(QUESTÕES)

N^{O}. - INICIAIS DO ALUNO	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
1- ARC	E	A	A	A	E	E	E	A	A	A	A
2- AS	E	E	A	A	A	E	P	A	A	P	A
3- ADP	E	P	E	E	E	E	E	E	E	P	A
4- CMS	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E
5- CS	E	P	A	A	A	E	A	A	A	A	A
6- CCSR	E	E	E	E	E	E	E	A	A	P	P
7- DSA	A	P	A	A	A	E	A	A	A	A	A
8- DFM	E	P	A	E	A	P	A	E	A	A	A
9- EMSP	E	P	E	E	A	E	A	E	E	P	E
transferido											
11- GB	E	E	E	E	A	E	A	E	A	A	P
12- JSM	E	E	A	A	A	E	P	E	A	A	P
13- JMR	E	E	A	E	E	E	E	E	A	P	P
14- JLOa[4]	E	P	E	A	A	E	A	E	A	A	P
15- JM	A	E	A	A	A	A	A	A	A	P	A
16- JLOb	E	E	E	E	E	E	E	E	A	P	P
17- JP	A	E	E	E	E	E	E	E	E	P	E
18- KFF	A	A	A	A	A	E	E	A	A	A	A
19- KCL	E	E	E	E	A	E	A	E	E	P	A
transferido											
21- LS	E	A	A	A	A	A	E	E	E	A	A
22- LGA	E	A	E	E	E	E	E	E	E	A	E
23- LTG	E	P	E	E	E	E	P	A	A	P	P
24- LFFL	E	E	A	A	A	E	A	A	A	A	P
25- LGBC	E	E	E	A	A	P	P	E	A	P	P
26- MAO	E	A	A	E	A	E	E	E	A	A	A
27- MJA	A	E	E	E	A	P	E	E	E	A	A
28- PAA	A	E	A	E	A	P	A	A	A	P	A
29- PCS	E	E	E	E	E	E	E	E	E	P	E
30- PLS	E	E	A	A	A	P	A	A	E	A	A
31- RR	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	P
32- RMO	A	E	A	A	A	E	A	E	A	A	A
33- RAF	A	A	A	A	A	E	A	E	A	A	A
34- SCS	E	E	E	E	A	E	P	A	E	P	P
35- VKP	E	E	E	A	E	E	E	E	A	P	P
36- VAP	E	E	A	E	E	E	P	A	A	A	A
37- LFRP	A	A	E	E	A	E	A	E	E	A	E
38- CHFM	E	E	A	A	E	E	P	A	P	P	P

[4] Dois alunos que são irmãos, possuem as mesmas iniciais em seus nomes e a diferenciação entre eles foi feita pela vogal *a* e *b*, minúscula colocada ao final das iniciais do nome.

ANEXO 4

Os quadros, a seguir, mostram exemplos de respostas apresentadas na resolução das questões do teste e expressam também o modo como as respostas foram expostas no quadro de giz, a fim de possibilitar a observação e os diálogos com os alunos, mas sem as iniciais dos nomes:

QUADRO I: (Respostas erradas dadas ao problema 1)

(JLOb) 37 |3 50 |2 07 12 00 2 1 12 - 2 10 (sem resposta)	(LS) 50 -37 13 13 +37 50 R:13crianças	(ARC) 2 37 11 22 x3 x2 -50 11 22 30 R: 30 alunos	(CCSR) 37 x 3 111 +50 161 R: 161 alunos	(JP) 35 40 3 +50 + 2 90 40 R: 90 alunos	(EMSP) 50 +37 80 R:80 alunos

(JSM) 37 |50 2 7 x3 21 R: 21 alunos	(JLOa) 37 |3 50 07 16 x 2 100 R: 100 alunos.	(SCS) 37 3 2 50 91 R:91 crianças.	(LGBC) 50 |3 21 14 2 (sem resposta)	(VAP) 10 crianças = 30 reais (apagou e fez:) 37 |50 20 7 R: 7 crianças.	(MAO) (apenas escreve) R: A professora vai levar 34 crianças ao parque, porque tem só 50 reais e se todos fossem tinham que ter 59 reais.

(Dos 36 alunos, 26 erraram esta questão)

QUADRO II: (Respostas corretas apresentadas ao problema 1)

(PAA) 37 37 |2 x 3 17 18 111 1 18 17 16 x3 x3 x3 54 51 48 R: 16 crianças.	(DSA) 37 |2 17 18 1 50 |3 20 16 2 R: 16 alunos.	(MJA) 3 15 45 3 + 15 + 3 +3 30 48 3 +15 3 45 15 R: Leva 16 crianças e sobra 2 reais.	(JM) 50 |3 22 16 2 R: 17 alunos[5].

(Dos 36 alunos, 10 apresentaram resoluções corretas nesta questão)

[5] Esta resposta foi considerada correta devido aos cálculos que o aluno apresentou e, sobretudo, pelos comentários que ele fez em sala de aula, demonstrando que compreendeu a situação proposta. Mas, não deixamos de ressaltar sobre o erro que tal estratégia apresenta, tendo em vista que o aluno se baseou em suposições da sua própria opinião para considerá-la correta.

QUADRO III: (Respostas apresentadas ao problema 3)

(14 alunos responderam dessa maneira)	(ADP)	(LFRP)	(MJA)	(LTG)	(VAP)
11 +12 23 R: 23 pneus	11⌊ 12 1 (sem resposta)	11 x12 122 R: 122 pneus	11 x12 1122 R: 1122 pneus	11 x12 22 +11 33 R: 33 pneus	fez 11 +12 23 apagou e substituiu por: 1→ 12 6→ 72 2→ 24 7→ 84 3→ 36 8→ 96 4→ 48 9→ 108 5→ 60 10→ 120 11→132 pneus

(Dos 36 alunos, 17 erraram esta questão)

QUADRO IV: (Exemplos de respostas apresentadas ao problema 4)

(GB)	(CCSR)	(LGA)	(JLOb)	(EMSP)	(PCS)	(JP)	(LTG)	(JMR)
1985 18345 + 1998 3477 26806 R: 2686 func.	1985 +1835 3820 (sem resposta)	18345 + 1998 20343 20343 + 3477 20820 R: O n. de funcionários é 20820.	18345 + 1985 20380 1998 +3477 5475 20380 5475 (Sem resposta)	1985 + 3477 5462 R: Ficou 5462.	18345 + 3477 21822 R: Ficou 21822.	1985 - 18345 38195 1998 -3477 2721 R: 2721 demitidos.	18345 3477 05132 (sem resposta)	1998 - 3477 0521 R: O n. foi de 0521 após as demissões.

(Dos 36 alunos, 19 erraram esta questão)

QUADRO V: (Exemplos de respostas apresentadas ao problema 6)

(LTG)	(KFF)	(JLOa)	(LFRP)	(SCS)	(PLS)	(JM)
300 + 20 320 R: Serão necessários 320 pacotes de bolachas.	300⌊5 00 60 0 R: 60 pacotes de bolchas.	300 x 20 300 600+ 6300	300⌊5 100 R: 100 pacotes de bolachas.	300 + 20 5 325 R: Serão necessários 325 pacotes.	300 x 5 1500 R: 1500 pacotes.	300 x 5 1500⌊20 100 75 0 R: Serão necessários 75 pacotes de bolachas.

(Dos 36 alunos, apenas 3 acertaram completamente a questão)

QUADRO VI: (Respostas apresentadas à questão 2 do teste)

a)	b)	
9047	234. 32	2. 3400. 32
9. 0. 47	2. 340. 030	20000340.032
90. 47	23. 432	2: 340: 32
9407	2. 340. 32	2. 0000 340 32
90,047	2000 340	2. 3432
90 040	2. 034032	2. 340. 302
90000407	002, 340, 32	30. 4030
	20,34. 032	

(Dos 36 alunos da turma, 17 erraram a letra 'a' e 28 erraram a letra 'b')

QUADRO VII: (Erros apresentados na resolução da questão 5 do teste)

(JMR)	(JP)	(CCSR)	(ADP)	(PCS)	(VAP)
88 + 152 9 1 031	88 + 5502 9 15 311	52 x 9 468	88 x150 088 + + 400 488	152 88 9 240 x3 27 240 27 267	88 + 152 9 1 041
R: Contribuíram com 1031 latinhas.	R: 15311 latinhas.		R: 488 latinhas.	R: 267 latinhas.	

(Dos 36 alunos da turma, 13 erraram essa questão)

QUADRO VIII: (Exemplos de respostas apresentadas à questão 7 do teste)

(ARC)	(CHFM)	(JMR)	(SCS)
2= 200.0001 **1**= 1 **0**= 0 **3**= 30 **6**= 600 **8**= 80	**2**= 200 **1**= 10 **0**= 0 **3**= 300 **6**=60 **8**= 8	**2**= mil **1**= cem **0**= dez **3**= trezentos **6**= sessenta **8**= oito	**2**= 2.0000 **1**= 1.000 **0**= 0 **3**= 300 **6**= 60 **8**= 8

(Dos 36 alunos da turma, 21 erraram total ou parcialmente essa questão)

QUADRO IX: (Respostas apresentadas à questão 8 do teste)

(KCL)	Podemos escrever mais de cem vezes.
(MAO)	Podemos escrever até 99.
(JSM)	Até 10 vezes.
(KFF)	Podemos escrever até quanto quisermos.
(PAA)	Podemos escrever infinitos números.
(AS)	Ele vai até o infinito não acaba.
(EMSP)	Podemos escrever até nove vezes.
(ADP)	123.456.789 (a aluna colocou o zero em várias posições e apagou).
(GB)	123, 321, 213, 212, 1000, 234, 564...(o aluno escreveu um total de 15 números)
(VKP)	Até 1000.
(VAP)	Até milhões, bilhões, trilhões, etc.
(LFRP)	102, 354, 687, 891, 389, 456, 789
(RAF)	9.999.999.999
(JMR)	27, porque eu fiz a conta.

(Dos 36 alunos da turma, 21 erraram essa questão)

QUADRO X: (Exemplos de respostas dadas à questão 9 do teste)

(CMS) 1000 ← **1 010**	(LFRP) 1 090 ← **1 010**	(SCS) 1008 ← **1 010**
(PCS) 8 ← **1 010**	(CHFM)109 ← **1 010**	(MJA) **1010** |<u>1</u> 0 1010 0

(Dos 36 alunos da turma, 13 erraram essa questão)

QUADRO XI: (Exemplos de respostas apresentadas à questão 10 do teste)

98- **99**- 100	98- **99**- 100
808- **809**- 810	808- **809**- *1000*
9 000- **10 000**- *10 001*	*90 000*- **10 000**- *200001*

(Dos 36 alunos da turma, 17 erraram total ou parcialmente essa questão)

QUADRO XII: (Exemplos de erros apresentados na questão 11 do teste)

(CHFM)	(errou somente a letra 'd') d)Três bilhões quatrocentos e oitenta e nove e cento e cinquenta.
(SCS)	(errou somente a letra 'd') d) Trinta e quatro milhões, oitenta e nove mil cento e cinquenta.
(PCS)	a) setenta e seisento e três. b) vinte e um setessento e quarenta e dois c) oitosente e dez. d) trezentos e quatro e oitonta e nove e sento e cinquenta.
(JP)	a) cetenta e setecentos e tres. b) dozento, um, cetesentos, quatrosento e dois. c) oitosento e um d) trezentos, quatrocentos, oitocentos, novesentos, um e sinco.

(Dos 36 alunos da turma, 19 erraram total ou parcialmente essa questão)

ANEXO 5 – OBSERVAÇÕES LIVRES

Este instrumento da pesquisa esteve presente em todas as aulas em que estávamos com a turma participante, observando situações do dia-a-dia da sala e possibilitou–nos destacar dados relacionados ao tempo que os alunos dispensam para resolver atividades, suas reações, atitudes e opiniões sobre as aulas.

Caso 1 – No momento das discussões das respostas, chamou-nos a atenção o respeito entre os colegas, com relação aos comentários que cada um fazia, não havendo necessidade de intervenção por indisciplina.

Caso 2 – Um fato demonstrou que a abordagem dos erros estava sendo interessante para a aluna VAP quando, fora do horário das aulas na turma, ela perguntou: *"Professora vai ter aula daquele jeito de novo"?*

Caso 3 - Ao final de uma das aulas em que discutíamos as respostas, um aluno comentou:
(LFRP) *"Ih professora, a gente não fez nada hoje"?*
(Prof.) "Mas como assim, nada"?
(LFRP) *"A gente não fez nada no caderno".*

Caso 4 - A aluna JP, resolvendo um problema em que procurava o troco que sobraria de uma compra, após ter tentado várias vezes fazer o cálculo e apagado, comentou: *"Prof. eu sei qual é o troco porque eu ajudo minha mãe, mas eu não sei que conta fazer!"*

Caso 5 – Ao serem questionados sobre como pensaram para produzir a resposta de algum problema, os alunos, de um modo geral, falam a resposta final do exercício e não a justificativa da resposta.

Caso 6 - O que destacamos também, dessas observações, se referem ao comportamento de alguns alunos frente às suas próprias ações. Das atitudes observadas percebemos a de esconder o que fizeram, pondo o braço em cima do caderno, numa atitude que podemos caracterizar como: medo, insegurança, vergonha ou timidez frente aos seus próprios raciocínios. Outra atitude observada em alguns alunos revela que, ao ser perguntado sobre como pensaram para responder desta ou daquela maneira, acontece a reação de pegar a borracha e começar a apagar o que foi feito.

Caso 7 - Em contraposição ao caso anterior, relataremos um fato curioso ocorrido com um aluno, que não pertence à turma participante de 2006, mas de uma outra 5ª série, onde fazíamos as observações preliminares a respeito do tema desse estudo.

Na atividade, em que ocorreu o fato, os alunos precisavam transcrever um número da forma escrita por extenso para a forma numérica com algarismos. Quando os alunos terminavam de responder passávamos recolhendo os diferentes tipos de respostas que apareceram para a questão. Como estávamos trabalhando o sistema de numeração decimal, já há alguns dias, um dos alunos - com dificuldades na compreensão do sistema - não estava mais apresentando erros, para esse tipo de questão, então, ele forjou uma resposta errada para nos entregar. Mas, como antes de recolhermos as respostas, havíamos feito uma "sondagem" preliminar, percebemos que esse aluno não havia errado. Ao questionarmos sobre o porque de ter tomado tal atitude ele respondeu: *"É que senão a senhora não vai por a minha resposta no quadro e eu quero falar sobre ela"* .