



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.001/09

**Natação no espaço-tempo: um efeito de fases geométricas em
relatividade geral**

Adriano Contini Torres

Orientador

Prof. Dr. *George Emanuel Avraam Matsas*

Fevereiro de 2009

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Dedico esta dissertação à Thereza De Lucca, minha querida avó Ziza, com saudade e amor extremados.

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, ao Prof. George Matsas, pela orientação atenciosa e pela amizade paternal e dedicada que tanto me têm estimulado e ensinado.

À minha família, cujo amor e apoio me conduziram, com segurança e satisfação, desde o meu nascimento até o término deste trabalho.

Aos meus amigos Guilherme Nascimben e Cláudia Correa, pela sustentação que representaram para mim durante a redação desta dissertação.

À minha amiga Cristiane Targon, pelo imprescindível auxílio técnico no emprego do LaTeX.

Aos meus colegas e amigos do Instituto de Física Teórica, Rafael de Sá, Ana Carolina Machado, Caio Gomes, Franciane Azevedo, Thiago Tomei e André Landulfo, pela agradável convivência dentro de nosso ambiente de trabalho comum, assim como fora dele. Em especial, à Elaine Fortes, pelo auxílio prestado, com máxima gentileza, inúmeras vezes.

A todo o grupo de gravitação semiclássica do IFT e a todos os participantes habituais das suas sessões de *Journal Club*. Em especial, a Clóvis Maia, pelas estimulantes (ainda que, infelizmente, não muito freqüentes) discussões sobre física.

Ao Prof. Eduardo Guéron, pelas discussões sobre o efeito de natação no espaço-tempo.

A Deus, pelas oportunidades que ultrapassam em muito o que mereço de fato, e pelas alegrias que tornam esta longa jornada, antes de qualquer outra coisa, um prazer.

À FAPESP, pelo auxílio financeiro.

Resumo

Em 2003, Jack Wisdom desvendou um novo efeito de relatividade geral, um fenômeno de fases geométricas no qual, ao contrário do resultado tradicional da mecânica newtoniana em espaços euclidianos, sistemas de partículas em espaços ambientes curvos podem deslocar-se rigidamente sem auxílio de forças externas ou ejeção de matéria. Mais precisamente, sistemas vinculados formando corpos quase-rígidos podem transladar-se sobre variedades com curvatura intrínseca, incluindo espaços-tempos relativísticos, pela realização de deformações cíclicas geradas por forças puramente internas, como num processo usual de natação. Esse efeito, à parte seu inegável próprio mérito conceitual, parece abrir um novo filão no intrincado estudo de corpos rígidos em relatividade geral, além de representar um mecanismo incomum de auto-propulsão. Nesta dissertação, realizamos uma revisão exaustiva da literatura sobre esse tema e, ademais, damos uma contribuição original pela extensão dos resultados de Wisdom, obtidos para a geometria de Schwarzschild, para soluções cosmológicas de Friedmann-Robertson-Walker, em cujo contexto o efeito pode, a princípio, manifestar-se de forma mais significativa.

Palavras Chaves: natação no espaço-tempo; fases geométricas; auto-propulsão; mecânica em espaços curvos.

Área do conhecimento: Relatividade e Gravitação

Abstract

In 2003, Jack Wisdom unveiled a new general relativity effect, a geometric phase phenomenon in which, contrary to the traditional result for Newtonian mechanics in Euclidean spaces, particle systems in curved ambient spaces are able to rigidly move themselves without neither external thrust nor matter ejection. Stating it in a more precise fashion, constrained systems which compose quasi-rigid bodies can achieve translation on curved manifolds with intrinsic curvature, including relativistic spacetimes, by means of cyclic changes in their shape provided by exclusively internal strains, much like in an usual swimming process. Such an effect, besides its undeniable own conceptual merit, seems to open a new vein in the intricate study of rigid bodies in general relativity, in addition to representing an uncommon mechanism for self-propulsion. In this dissertation, we carry through an exhaustive review of the literature on that matter and, furthermore, present an original contribution by means of the extension of Wisdom's results on Schwarzschild geometry to the cosmological solutions of Friedmann-Robertson-Walker, in whose context the effect may, at first, turn out to be more significant.

Sumário

1	Introdução	1
2	Movimento de um corpo extenso por variações cíclicas de formato	5
2.1	Cinemática de corpos deformáveis	6
2.1.1	Cálculo da reorientação de um corpo sob variações de formato	7
2.1.2	Dinâmica	9
2.1.3	Exemplo: duas esferas concêntricas	10
2.1.4	Natação de corpos rígidos conectados sobre espaços curvos	13
2.2	Nadando em espaços curvos	18
2.2.1	Contraste do movimento de corpos quase-rígidos deformáveis em espaços ambientes planos e curvos	19
3	Natação de corpos quase-rígidos em campos gravitacionais estáticos e esfericamente simétricos. Estudo relativístico e newtoniano	24
3.1	Vínculos e sincronização das deformações no caso relativístico	25
3.2	Espaço-tempo de Schwarzschild, construção do nadador e especificação de sua dinâmica	26
3.3	Manifestação do efeito de natação em espaços-tempos curvos	29
3.3.1	Regime de altas frequências de deformação em Schwarzschild	31
3.3.2	Distância nadada pelo tripé em Schwarzschild devido a deformações cíclicas	34
3.4	Estudo do movimento de corpos deformáveis num campo gravitacional newtoniano	46
3.4.1	Alteração da órbita de um haltere ciclicamente deformável em um campo gravitacional newtoniano simetricamente esférico e estático	47
3.4.2	Efeito de balanço de um tripé num campo gravitacional newtoniano: estudo comparativo com o efeito de natação relativístico de Wisdom	54
3.4.3	Demonstração da inexistência do efeito de natação em espaços euclidianos com potenciais newtonianos e pós-newtonianos	62

4	Natação de corpos deformáveis não-relativísticos em espaços-tempos estáticos e espacialmente homogêneos e isotrópicos	65
4.1	Considerações sobre o espaço ambiente, sobre o sistema e definição de movimento rígido	66
4.2	Leis de conservação oriundas das isometrias espaciais	68
4.3	Deformações e movimentos rígidos	73
4.3.1	Expansão, shear e twist	76
4.3.2	Liberdade de gauge dos campos de deformação	82
4.4	Descrição da evolução do sistema sob deformações e deslocamentos rígidos dados	86
4.4.1	Equações de natação para ciclos infinitesimais de deformações	91
4.5	A 2-forma de Killing	95
4.5.1	Campos de Killing em espaços euclidianos	96
4.6	Translações em espaços curvos	100
4.6.1	Referenciais localmente euclidianos	100
4.6.2	A 2-forma de Killing para translações em espaços curvos	101
4.6.3	Translação de nadadores pequenos em espaços curvos	103
5	Natação de corpos quase-rígidos deformáveis no espaço-tempo cosmológico de Friedmann-Robertson-Walker	106
5.1	Solução de Friedmann-Robertson-Walker das equações de Einstein	107
5.1.1	A dinâmica do modelo de FRW	110
5.2	Natação no universo de FRW	112
6	Conclusões e considerações finais	125
	Referências	128

Capítulo 1

Introdução

Entre os temas mais instigantes que permeiam toda a física teórica estão os chamados efeitos de *fase geométrica* (as referências [1] e [2] trazem revisões exaustivas sobre o tema). Considerando-se sistemas quântico-mecânicos, destacamos a chamada *fase de Berry*. Para um sistema quântico descrito por um operador hamiltoniano que depende de parâmetros que variam adiabaticamente e de forma cíclica (isto é, de modo que o hamiltoniano final é igual ao inicial), M. Berry mostrou (veja referência [3]), em 1984, que os auto-estados de energia associados variam, ao término do ciclo, não apenas pela fase dinâmica

$$\exp -\frac{i}{\hbar} \int E(t) dt, \quad (1.1)$$

que claramente depende da duração do processo, mas também por uma fase geométrica adicional que depende apenas do circuito percorrido no espaço de parâmetros (ou seja, da seqüência de valores que os parâmetros assumem), e não de quão rapidamente a variação é realizada. Esse resultado permitiu que diversos fenômenos conhecidos fossem explicados e outros, novos, fossem previstos. Um exemplo é o *efeito Aharonov-Bohm* (referências [4] e [5]), descoberto em 1959, que pode ser interpretado como um fator de fase geométrico. De acordo com ele, uma partícula carregada é afetada por campos eletromagnéticos de regiões que ela mesma não pode acessar, mostrando que a ação local dos campos sobre as partículas não é suficiente para determinar o seu comportamento na descrição prescrita pela mecânica quântica (o caso mais comum é aquele em que a função de onda de uma partícula carregada movendo-se em torno de um solenóide sofre um deslocamento de fase como resultado do campo magnético interno ao aparelho, apesar de ele ser nulo na região externa, onde a partícula pode ser de fato encontrada). De maneira geral, fenômenos de fase geométrica estão associados efeitos de anolonomia, isto é, à integração num circuito fechado no espaço de parâmetros de uma forma diferencial não-exata, que pode, então, dar uma contribuição não-nula. É uma condição necessária para haver fase geométrica, então, que o espaço de parâmetros

seja pelo menos bidimensional (na medida em que qualquer integral unidimensional fechada é zero).

No contexto clássico, exemplos de fases geométricas também são conhecidos. Nesse caso, de modo geral, a chamada *fase de Hannay* (geométrica) está associada a efeitos de anolonomia na variável de ângulo de um sistema hamiltoniano integrável descrito por variáveis de ângulo e ação (veja referência [6]). Um caso clássico especialmente interessante é a translação líquida de corpos deformáveis em fluidos com baixo número de Reynolds (veja as referências [7], [8] e [9]) - isto é, caracterizado pelo domínio das forças viscosas sobre os efeitos inerciais - promovida apenas por variações cíclicas de formato. Uma aplicação desse efeito permitiu um melhor entendimento do mecanismo de locomoção (ou, em outras palavras, de natação) de microorganismos como protozoários. O resultado contundente é que a distância nadada num ciclo completo de deformações depende apenas da seqüência de formatos assumidos pelo corpo, e não da rapidez com que as deformações são realizadas.

De maneira geral, o problema de fases geométricas em mecânica dos fluidos está relacionado com o ambiente onde se dá o movimento do corpo em questão. Pensando nesse ambiente como o próprio espaço-tempo, podemos nos perguntar se movimentos cíclicos em variedades com curvatura não-nula poderiam levar a efeitos onde fases geométricas desempenhariam algum papel relevante - tendo em vista o resultado em fluidos, em especial, a uma translação ou, pelo menos, a uma reorientação rígida de corpos deformáveis. A princípio, uma resposta afirmativa poderia causar alguma surpresa, uma vez que um teorema bem conhecido de mecânica clássica garante que sistemas de partículas no espaço euclidiano são incapazes de transladar-se rigidamente (isto é, mover o seu centro de massa) na ausência de forças externas (veja referência [10]). O que impede a natação nesse caso, contudo, é a ausência de curvatura no espaço ambiente. De fato, J. Wisdom mostrou (referência [11] - veja também [12] e [13]), em 2003, que corpos livres que realizam movimentos cíclicos em espaços com curvatura espacial não-nula podem conseguir algum tipo de deslocamento, seja de translação ou uma simples reorientação. Esse efeito é geométrico, isto é, depende apenas da geometria de formatos assumidos pelo corpo, e não da rapidez com que as deformações são realizados, e é intrinsecamente de relatividade geral, na medida em que se anula quando $G \rightarrow 0$ e $c \rightarrow \infty$. Chamamo-lo de *natação no espaço-tempo*. Ao contrário da natação usual, nele o sistema não força nenhum meio massivo a fluir na direção contrária, aproveitando-se de forças de reação para se locomover - ele tira proveito apenas das leis de conservação inerentes à natureza do espaço ambiente para se deslocar, sem nenhum auxílio de forças externas. No caso espaço-temporal tratado especificamente por Wisdom, foi considerado um tripé caindo livremente no campo gravitacional de um corpo estático esfericamente simétrico descrito pela métrica de Schwarzschild (veja referência [14]). O tripé é projetado para abrir/fechar e contrair/estender os seus braços ciclicamente, isto é, recuperando o seu

formato original depois de um certo intervalo de tempo. Ao final, dependendo da ordem de deformação, o tripé pode retardar ou apressar a sua queda. Vale notar que isso é conseguido graças ao trabalho realizado pelo próprio tripé, mas que, ao contrário de deslocamentos a jato (ou seja, por ejeção de matéria ou radiação), onde parte da energia do combustível é perdida por ejeção, usando o efeito proposto por Wisdom para propulsão, em princípio, toda a energia do combustível seria aproveitada para a locomoção. Esse efeito causou alguma perplexidade na comunidade científica (veja as referências [15] e [16]), pois há anos já se conhecia um efeito de gravitação newtoniana em que corpos extensos deformáveis eram capazes de alterar a sua órbita por meio de deformações não-locais (consulte as referências [17] e [18]). No entanto, em 2006, E. Guéron, C. Maia e G. Matsas esclareceram (referência [19]) de forma definitiva a distinção entre os dois efeitos. Enquanto o *efeito Wisdom*, ou *efeito de natação*, é um fenômeno local, de fases geométricas e dependente da existência de curvatura não-nula na variedade ambiente, o efeito newtoniano a ele comparado é não-local e depende fortemente da rapidez com que as variações de formato são realizadas. Ele não se deve à curvatura ambiente, mas ao fato de as diferentes fases do processo de deformação se darem em regiões distantes do espaço, com campo gravitacional de valores significativamente diferentes, de modo que há um trabalho líquido do sistema contra as forças de maré quando o ciclo se fecha (ou seja, quando o corpo retoma o seu formato original), o que altera a sua energia total e, conseqüentemente, a sua órbita. A sua manifestação mais prosaica ocorre nos balanços, brinquedos de parques de diversão (veja a referência [20]).

Ainda em 2006, J. Avron e O. Kenneth estudaram (referência [21]) o efeito de natação para o caso de espaços homogêneos e isotrópicos e nadadores não-relativísticos, isto é, a baixas velocidades. Os autores consideraram corpos suficientemente pequenos realizando deformações cíclicas sobre tais variedades, e mostraram que uma condição necessária para que haja rotação ou deslocamento rígido líquido é que a 1-forma de Killing que gera movimento rígido *não* seja uma forma diferencial fechada, isto é, seja uma *anolonomia*. Como aplicação desse resultado, eles mostraram, por exemplo, que um sistema *não* pode se transladar em um espaço de fundo euclidiano, mas pode rodar em torno de seus eixos principais (consulte a referência [22] para uma revisão sobre o assunto), o exemplo mais cotidiano disso sendo a capacidade dos gatos de caírem sobre suas patas quando abandonados, de certa altura, com as suas costas voltadas para baixo (referência [23]). Ademais, mostraram que magnitude da natação é proporcional ao tensor de Riemann associado à métrica espacial.

Além de a natação no espaço-tempo inserir a relatividade geral no elenco de teorias físicas com efeitos de fase geométrica, ela abre novas possibilidades no intrincado estudo de corpos rígidos em relatividade geral (as referências [24] e [25] apresentam o formalismo canônico para esse problema), introduzindo a possibilidade de auto-propulsão

sem ejeção de matéria nem de radiação. De acordo com F. Wilczek (referência [13]), o efeito Wisdom levanta questionamentos sobre o próprio significado de movimento no tecido espaço-temporal no caso de não haver estrelas ou galáxias como referências para julgar deslocamentos relativos, um problema discutido na comunidade científica desde que foi mencionado pela primeira vez, por E. Mach.

A despeito de ser conceitualmente importante, a natação no espaço-tempo de Schwarzschild leva a deslocamentos desprezíveis, se pensarmos em sistemas astrofísicos realistas. Por exemplo, um corpo com comprimento da ordem de 1 metro, realizando deformações da mesma ordem de grandeza nas proximidades da superfícies da Terra, seria capaz de atingir apenas deslocamentos da ordem de 10^{-27} metro por ciclo. Realizando um ciclo de deformações por segundo, um tal nadador levaria centenas de milhares de anos para transladar uma distância igual somente à largura de um átomo. Em soluções cosmológicas das equações de Einstein (veja referências [26] e [27]), no entanto, a natação pode eventualmente ser um meio eficiente de navegação, uma vez que o efeito é cumulativo e nesse caso não há, em princípio, um tempo limite restringindo o número de repetições do ciclo. Além disso, como tais soluções são isotrópicas, a natação seria igualmente viável em qualquer direção. No Capítulo 5, estudamos o fenômeno de natação em espaços-tempos de Friedmann-Robertson-Walker.

Além de estudar a natação cosmológica, nos demais capítulos realizamos uma revisão da literatura relativa ao efeito de natação no espaço-tempo. Na Conclusão, apresentamos um resumo do trabalho e apontamos possibilidades e perspectivas para estudos futuros do efeito.

Capítulo 2

Movimento de um corpo extenso por variações cíclicas de formato

A experiência cotidiana nos fornece vários exemplos de corpos extensos que, em se deformando, são capazes de alterar a sua orientação espacial sem o auxílio de forças externas. Por exemplo, quando se segura um gato com as patas viradas para cima e se solta o animal do repouso, contanto que a altura inicial a que ele se localiza do solo seja suficientemente elevada, ele é capaz de girar sobre o seu próprio corpo e cair sobre as suas patas. Um outro exemplo tradicional é o de atletas que praticam salto ornamental, modalidade esportiva na qual um mergulhador, depois de saltar do trampolim sem momento angular, e antes de cair na água, realiza diversas manobras com o seu corpo livre no ar. Em ambos os casos, a reorientação dos corpos em questão é obtida sem momento angular líquido ou forças externas, mas exclusivamente pela aplicação de tensões internas que geram uma seqüência de deformações que começa e termina no mesmo formato. Isso ilustra o fato de que, a despeito da impossibilidade de um sistema de partículas no espaço euclidiano poder transladar-se rigidamente (isto é, mover o seu centro de massa) exclusivamente por meio de interações internas, ele pode ainda realizar rotações rígidas, desde que se deforme apropriadamente, retomando o formato original ao término do processo¹.

Neste capítulo, inicialmente, estudamos um formalismo geral, desenvolvido por Alfred Shapere e Frank Wilczek (veja a referência [18]), que fornece, se a variação de formatos é uma função dada, de quanto se dá a reorientação de um corpo deformável, mostrando que se trata de um efeito geométrico, e exemplificamos a aplicação desse método com um exemplo simples². Em seguida, passamos a estudar problemas mais complicados, resolvidos por Jack Wisdom (veja a referência [11]), de corpos deformáveis

¹É importante que o corpo retome o seu formato original para que possamos comparar as suas localizações e orientações iniciais e finais, calculando precisamente de quanto foi o seu movimento rígido.

²Nesse trabalho, os autores também mostram que é possível formular o problema como uma teoria de gauge. Não obstante, aqui vamos omitir esse tratamento, que foge ao escopo de nossas intenções.

sobre subvariedades curvas do espaço euclidiano, e mostramos que esse fenômeno está essencialmente ligado à curvatura do espaço, e não propriamente ao fato de os corpos serem extensos. Em particular, um resultado surpreendente que emerge do trabalho de Wisdom é que, em variedades de base curvas, os corpos deformáveis podem não apenas modificar a sua orientação, mas até mesmo se transladar rigidamente. A esse fenômeno damos o nome de *efeito de natação*.

Essa conclusão motiva a extensão da idéia para espaços-tempos curvos relativísticos, que é o foco principal desta dissertação, e que passaremos a estudar minuciosamente no Capítulo 3.

2.1 Cinemática de corpos deformáveis

Consideremos um corpo extenso, no espaço euclidiano tridimensional, capaz de alterar o seu formato. Vamos calcular, dada a seqüência de formatos assumidos como uma função do tempo, de quanto ele roda líquidamente (ou seja, como a sua orientação se altera) como uma consequência exclusiva de tais deformações, isto é, assumindo que não haja forças ou torques externos atuando, de modo que o seu momento angular inicial seja conservado. Uma das propriedades mais interessantes desse fenômeno é que, conforme vamos mostrar, a rotação obtida *não* depende da *rapidez* com que as deformações são realizadas, uma vez que as equações de movimento se mostram invariantes sob reparametrização temporal - apenas a *geometria* das deformações é relevante.

O espaço de configurações de um corpo deformável é o espaço de todos os seus possíveis formatos, providos de orientação e localização. É útil definir, porém, um *espaço de formatos delocalizados*, que considera apenas os formatos propriamente ditos, independentemente da orientação e da localização do corpo. Em outras palavras, nesse espaço, duas configurações com mesmo formato, mas orientação e localização diferentes, são consideradas equivalentes. Se não há forças externas atuando sobre o corpo, o seu centro de massa permanece em equilíbrio (em repouso ou em movimento retilíneo e uniforme) e, então, é possível e conveniente trabalhar no referencial do seu centro de massa. Nesse caso, o espaço de configurações se reduz ao espaço de formatos com orientação, sempre centrado na origem. A questão que queremos resolver pode, nesse contexto, ser colocada da seguinte forma: dado um caminho no espaço de formatos delocalizados, qual é o caminho correspondente no espaço de configurações? A conservação de momento angular é o ingrediente fundamental para responder a essa pergunta. Em termos meramente descritivos, a reorientação ocorre porque, quando o corpo muda de formato, o movimento de suas partes constituintes envolvido tem, em geral, um momento angular líquido, e então o sistema como um todo precisa rodar para compensar essa variação, de forma a manter o seu momento angular inicial.

A dificuldade principal é como descrever a rotação de um corpo que está conti-

nuamente alterando o seu formato. Para descrever a rotação de um corpo rígido, em geral, usamos parâmetros, como ângulos de Euler, que variam com o tempo à medida que o corpo roda, e que são definidos a partir de um conjunto de eixos fixos sobre o corpo, como os seus eixos principais, e uma orientação de referência, que pode ser, por exemplo, aquela em que os eixos principais estão alinhados com os eixos retangulares do sistema de coordenadas. No caso de um corpo deformável arbitrário, por outro lado, é preciso definir *um conjunto de eixos de referência para cada formato possível*. Uma escolha natural que pareceria eficiente à primeira vista é a dos próprios eixos principais (variáveis), ordenados conforme a magnitude dos seus momentos de inércia principais (também variáveis), mas uma tal escolha se torna singular quando dois ou mais momentos de inércia se degeneram e, assim, ela não se mostra especialmente conveniente. No entanto, não importa qual conjunto de eixos escolhamos para cada formato possível, o problema ainda deve ter solução, e a escolha é, pois, totalmente arbitrária. (É claro que cada problema específico pode, eventualmente, permitir uma escolha mais conveniente do que as outras, dependendo de suas simetrias. O formalismo geral, contudo, é totalmente independente dessa particularidade.)

Assim, defrontamo-nos com uma degenerescência infinita de possíveis descrições cinemáticas do problema, todas elas, naturalmente, equivalentes. Em cada ponto do espaço de formatos, que tem dimensão infinita, devemos escolher um conjunto de eixos de referência de um espaço que se parece com o grupo de rotações $SO(3)$. Na próxima seção, vamos desenvolver um formalismo que funciona para qualquer uma dessas infinitas possibilidades de escolha e, além disso, dá uma prescrição simples de como passar de uma dada descrição para outra qualquer.

2.1.1 Cálculo da reorientação de um corpo sob variações de formato

Suponhamos que escolhemos um conjunto de eixos ortogonais de referência para cada possível *formato desorientado*³ do corpo. Essa escolha de eixos fornece automaticamente uma *orientação padrão*, que denotaremos genericamente por S_0 , para cada formato possível. Ou seja, dado um formato, temos automaticamente uma orientação associada a ele, pela escolha que fizemos do conjunto de eixos de referência. Essa orientação, contudo, não passa de uma construção arbitrária e não corresponde, em geral, à orientação física real S do corpo quando ele assume um dado formato. Não obstante, para cada formato, a orientação física real pode ser obtida da orientação padrão por uma rotação em torno do centro de massa. Nosso objetivo é, dado um caminho no

³Como estamos trabalhando no referencial do centro de massa do corpo, a sua localização não se altera. Dessa maneira, além do formato, o único dado necessário para a especificação completa da configuração do sistema é a sua orientação. Quando falamos em *formato desorientado* estamos nos referindo, assim, ao formato do corpo independentemente da sua orientação.

espaço desorientado de formatos, ou, equivalentemente, uma seqüência de orientações padrão $S_0(t)$, obter a seqüência de orientações físicas $S(t)$ correspondente. Como já comentamos, elas devem estar relacionadas por rotações $R(t)$,

$$S(t) = R(t) S_0(t). \quad (2.1)$$

Nessa equação, para cada instante t , $R(t)$ é uma matriz 3×3 ortogonal e com determinante $+1$. Além disso, $R(t)$ depende da escolha de eixos de referência para cada formato. De fato, suponhamos que fazemos uma mudança de eixos de referência para cada formato,

$$S_0 \mapsto \tilde{S}_0 = \Omega[S_0] S_0. \quad (2.2)$$

É claro que as orientações físicas $S(t)$ *não* devem ser alteradas por essa mudança de referências; são as rotações que fazem a transição da orientação padrão para a orientação real que devem ser correspondentemente alteradas. Mantendo a forma da equação (2.1),

$$S(t) = R(t) S_0(t) = \tilde{R}(t) \tilde{S}_0(t),$$

e usando a equação (2.2), obtemos

$$R(t) S_0(t) = \tilde{R}(t) \Omega[S_0(t)] S_0(t),$$

de modo que a rotação $R(t)$ deve se transformar conforme

$$R(t) \mapsto \tilde{R}(t) = R(t) \Omega^{-1}[S_0(t)]. \quad (2.3)$$

Nosso problema reduziu-se, de acordo com a equação (2.1), a determinar $R(t)$. Vamos computá-lo para uma deformação infinitesimal e integrar o resultado para resolver o caso de variações finitas de formato. Definimos uma quantidade A por meio de

$$\frac{dR}{dt} = R \left(R^{-1} \frac{dR}{dt} \right) \doteq RA, \quad (2.4)$$

ou seja,

$$A \doteq R^{-1} \frac{dR}{dt}. \quad (2.5)$$

Fica claro da definição que A é uma matriz 3×3 , e também que se trata de uma quantidade local. Como veremos em seguida, A é univocamente determinada pelo caminho de deformação, representado por $S_0(t)$, por meio dos vínculos impostos pela conservação de momento angular.

Uma vez que A é conhecida, a rotação completa $R(t)$ associada a $S_0(t)$ pode ser

expressa, resolvendo-se a equação (2.4) com condição inicial⁴ $R(0) = \mathbf{1}$ (onde $\mathbf{1}$ é a matriz identidade), como uma exponencial ordenada⁵,

$$R(t) = \bar{P} \exp \left[\int_0^t A(t') dt' \right], \quad (2.6)$$

onde \bar{P} indica que, em se expandindo a exponencial da integral, todas as matrizes A são ordenadas com tempos maiores à direita,

$$\begin{aligned} R(t) = \mathbf{1} &+ \int_0^t dt_1 A(t_1) + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 A(t_1) A(t_2) \\ &+ \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 A(t_1) A(t_2) A(t_3) + \dots \end{aligned} \quad (2.7)$$

com $t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t$.

Notemos, agora, que essa expressão é invariante sob reparametrizações temporais arbitrárias, $t \mapsto \tau(t)$. De fato, sob uma tal transformação, a medida se reescala como $dt \rightarrow d\tau = \dot{\tau} dt$, ao passo que $A(t) \rightarrow A(\tau) = A(t)/\dot{\tau}$, uma vez que

$$A(t) = R^{-1}(t) (dR/dt) = R^{-1}(\tau) (dR/d\tau) \dot{\tau} = A(\tau) \dot{\tau}.$$

Isso mostra que a reorientação do corpo é independente da rapidez com que as deformações são realizadas; apenas a seqüência de formatos assumidos importa. O fenômeno é completamente geométrico, conforme já havíamos adiantado.

Obtivemos, em suma, a solução do problema de reorientação a partir de variações de formatos, expressa pelas equações (2.1) e (2.6), para um dado caminho de deformações $S_0(t)$ no espaço de formatos. No entanto, essa solução foi expressa em termos da matriz A , que permanece indeterminada. Na próxima seção, fechamos a resolução da questão que nos propomos, calculando A explicitamente.

2.1.2 Dinâmica

A dinâmica de um corpo deformável livre é totalmente determinada pela conservação de momento angular. Vamos calcular A explicitamente usando essa lei de conservação, considerando, em particular, o caso em que o momento angular L é zero.

Consideremos que o corpo é formado por partículas de massa $m_{(n)}$ localizadas em posições $x_{(n)}(t)$. A i -ésima componente do momento angular total do corpo é, então, simplesmente

⁴Assim escolhida por conveniência.

⁵A exponencial ordenada é a solução da equação (2.4) para álgebras não-comutativas, como a álgebra de matrizes, análoga à exponencial usual, relativa a álgebras comutativas, como a dos números reais.

$$L_i = \epsilon_{ijk} \sum_n m_{(n)} x_{(n)}^j \dot{x}_{(n)}^k, \quad (2.8)$$

onde índices repetidos são somados de 1 até 3. Cada possível configuração das posições $x_{(n)}$ determina um único formato (e uma única orientação física) para o corpo. Assim, a cada configuração dos vetores $x_{(n)}$ associa-se uma única orientação padrão S_0 , na qual as partículas teriam, digamos, posições $\tilde{x}_{(n)}$. Num instante t , essas duas configurações são relacionadas pela rotação $R(t)$,

$$x_{(n)}(t) = R(t) \tilde{x}_{(n)}(t). \quad (2.9)$$

Dessa maneira, podemos reescrever a equação (2.8), em termos de $\tilde{x}_{(n)}$ e $R(t)$, como

$$L_i = \epsilon_{ijk} \sum_n m_{(n)} \left(R^{jl} \tilde{x}_{(n)l} R^{km} \dot{\tilde{x}}_{(n)m} + R^{jl} \tilde{x}_{(n)l} \dot{R}^{km} \tilde{x}_{(n)m} \right). \quad (2.10)$$

Basta, então, impor $L_i = 0$ e resolver para $A = R^{-1}\dot{R}$. O resultado é

$$A_{ij}(t) = \left(R^{-1}\dot{R} \right)_{ij} = \epsilon_{ijk} \left(\tilde{I}^{-1} \right)^{kl} \tilde{L}_l, \quad (2.11)$$

onde \tilde{I} é o tensor de inércia do corpo na orientação padrão $S_0(t)$ no instante t e \tilde{L} é o momento angular aparente correspondente, dados por

$$\tilde{I}^{ij} = \sum_n m_{(n)} \left[(\tilde{x}_{(n)})^2 \delta^{ij} - \tilde{x}_{(n)}^i \tilde{x}_{(n)}^j \right], \quad (2.12)$$

$$\tilde{L}_i = \epsilon_{ijk} \sum_n m_{(n)} \tilde{x}_{(n)}^j \dot{\tilde{x}}_{(n)}^k. \quad (2.13)$$

Em resumo, as equações (2.1), (2.6) e (2.11) fornecem uma solução completa para o problema de se obterem as rotações de um corpo deformável realizando um dado caminho de deformações $S_0(t)$ no espaço de formatos desorientados.

2.1.3 Exemplo: duas esferas concêntricas

Consideremos duas esferas concêntricas rodando em torno do seu centro de massa comum, pelo qual estão conectadas, formando um corpo articulado. As deformações desse sistema correspondem às rotações relativas das esferas. Para cada uma das esferas individualmente, o espaço de possíveis orientações é $SO(3)$, que pode ser parametrizado, por exemplo, por ângulos de Euler. Assim, o espaço de configurações do corpo articulado como um todo é $SO(3) \times SO(3)$.

A cada possível formato do sistema, isto é, a cada orientação relativa das esferas, precisamos associar uma orientação padrão S_0 , e é claro que o espaço de todas as

orientações padrão também deve ser isomorfo a $SO(3)$. Vamos escolher as orientações padrão como aquelas em que a esfera de maior raio tem orientação fixa, com o seu pólo norte sobre a parte positiva do eixo- z e o seu meridiano $\phi = 0$ sobre o plano- xz . Qualquer rotação da esfera de raio menor relativa à de raio maior deve ser compensada por uma rotação em sentido contrário desta última, de modo a conservar o momento angular total e, na base de orientações padrão que escolhermos, essa rotação da esfera exterior é igual à rotação líquida do sistema (ou seja, a rotação da esfera maior é igual à rotação que leva da orientação padrão até a orientação física real).

Suponhamos que o momento angular inicial do sistema seja nulo e que as rotações relativas se dêem todas num plano fixado. Se θ e θ' são as orientações físicas das duas esferas nesse plano e se I e I' são os momentos de inércia de cada uma delas (em relação a *qualquer* eixo que passe pelo centro de massa comum), temos então

$$L = I\dot{\theta} + I'\dot{\theta}' = 0. \quad (2.14)$$

Consideremos que θ' e I' referem-se à esfera exterior. Nesse caso, a especificação de uma seqüência de formatos do sistema significa que as orientações relativas são funções dadas, isto é, que sabemos a diferença $\theta - \theta'$ em todos os instantes de tempo. Usando a equação acima, podemos facilmente escrever $\dot{\theta}'$ em termos da derivada dessa função. Somando e subtraindo $I\dot{\theta}'$ ao membro direito e fatorando, obtemos

$$\dot{\theta}' = -\frac{I}{I + I'} (\dot{\theta} - \dot{\theta}'). \quad (2.15)$$

Essa é a equação diferencial que dá a orientação física da esfera exterior, que, conforme comentamos, especifica a orientação do sistema. Ela se aplica apenas, porém, no caso em que a rotação relativa dada se passa num plano fixado. Num caso mais geral, as deformações do sistema podem envolver rotações em diversos planos. Vamos, então, generalizar esse resultado.

Sejam $\{J_1, J_2, J_3\}$ os três geradores de rotações relativas entre as duas esferas, com $[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} J^k$. Uma variação infinitesimal de formato do corpo pode ser, pois, escrita genericamente como

$$\Omega = \omega^i J_i, \quad (2.16)$$

Num tempo finito t , a orientação relativa entre as duas esferas é dada por

$$R_0(t) = \bar{P} \exp \left[\int_0^t dt' \Omega(t') \right]. \quad (2.17)$$

Reforcemos que, neste problema específico, a orientação relativa é equivalente ao formato do sistema como um todo. A nossa escolha de orientações padrão considera a esfera exterior parada. Logo, R_0 representa, para um dado caminho de deformações

no espaço de formatos, rotações da esfera de menor raio. No entanto, não são rotações reais do sistema físico; elas se referem apenas às alterações de formato delocalizados do sistema. Observemos, também, que a função $\theta - \theta'$ da nossa formulação inicial corresponde à função dada $R_0(t)$ do problema mais geral que agora abordamos.

Agora, dada a simetria esférica, os momentos de inércia das esferas são, como já observamos, os mesmos em relação a qualquer eixo que passe pelo centro do sistema, de modo que a conservação de momento angular implicará, a exemplo do que acontecia no caso de rotações num plano fixado, que a reorientação infinitesimal do sistema sob a deformação infinitesimal Ω será

$$A = -\frac{I}{I + I'} \Omega, \quad (2.18)$$

e, para um caminho $\Omega(t)$ de deformações no espaço de formatos, temos da equação (2.6), num tempo finito,

$$R(t) = \bar{P} \exp \left[-\frac{I}{I + I'} \int_0^t dt' \Omega(t') \right]. \quad (2.19)$$

Vamos considerar um caso particular que, conquanto simples, mostra que, num ciclo fechado de deformações, ou seja, tal que $R_0(T) = \mathbf{1}$, o sistema pode se reorientar, isto é, podemos ter $R(T) \neq \mathbf{1}$, onde T é o tempo total do ciclo. Suponhamos que rodemos a esfera exterior de um ângulo infinitesimal ϵ em torno do eixo- x e do eixo- y , sucessivamente; depois de $-\epsilon$ em torno dos mesmos eixos; finalmente, de $-\epsilon^2$ em torno do eixo- z . Suponhamos, também, que cada uma dessas rotações é feita com velocidade angular constante. Esse ciclo de deformações é fechado (isto é, retorna aproximadamente ao ponto inicial do espaço de formatos) até ordem de ϵ^3 , pois, de acordo com a equação (2.17),

$$R_0(T) = e^{-i\epsilon^2 J_z} e^{-i\epsilon J_y} e^{-i\epsilon J_x} e^{i\epsilon J_y} e^{i\epsilon J_x} = \mathbf{1} + O(\epsilon^3). \quad (2.20)$$

Para tornar a notação mais compacta, definimos

$$\alpha = \frac{I}{I + I'}. \quad (2.21)$$

De acordo com a equação (2.19), a nova orientação do sistema será dada pela rotação rígida

$$R(T) = e^{i\alpha\epsilon^2 J_z} e^{i\alpha\epsilon J_y} e^{i\alpha\epsilon J_x} e^{-i\alpha\epsilon J_y} e^{-i\alpha\epsilon J_x} = e^{i(\alpha - \alpha^2)\epsilon^2 J_z}. \quad (2.22)$$

Isso quer dizer que o sistema como um todo sofre uma rotação de $(\alpha - \alpha^2)\epsilon^2$ em torno do eixo- z .

Resumindo, embora o sistema sofra uma seqüência de deformações que o leva de volta ao seu formato original a menos de $O(\epsilon^3)$, ele realiza uma rotação rígida de $O(\epsilon^2)$.

O sistema poderia ser levado de volta ao seu formato original exato por uma nova rotação de $O(\epsilon^3)$, mas a rotação rígida total permaneceria de $O(\epsilon^2)$. Esse exemplo ilustra bem como a reorientação do sistema não depende de quão rapidamente são realizadas as deformações, mas apenas do caminho percorrido no espaço de formatos. A rotação líquida do sistema é uma fase geométrica.

Esse fenômeno pode se passar de forma a ser ainda mais instigante. Duas esferas com momento angular total nulo realizam rotação relativas de ângulos da ordem de ϵ e sofrem uma rotação rígida da ordem de ϵ^2 . Agora, se essa seqüência de deformações é realizada repetidamente, obtemos uma taxa média de rotação rígida por unidade de tempo. O ângulo ϵ pode ser tomado tão pequeno quanto se queira, enquanto a taxa média de rotação rígida pode ser mantida, desde que as deformações sejam repetidas suficientemente rápido. Se ϵ é pequeno o suficiente para que o movimento relativo das duas esferas seja microscópico, ele pode ser não-observável, ao passo que a taxa de reorientação do sistema como um todo o é. Dessa forma, seria, em princípio, possível observar as duas esferas girando como um todo, sem rotações relativas entre si, e com momento angular zero.

2.1.4 Natação de corpos rígidos conectados sobre espaços curvos

Nesta seção, vamos considerar, mais uma vez, um caso em que o corpo deformável é constituído de dois corpos rígidos conectados, de modo que as deformações do sistema como um todo correspondem a reorientações das duas partes rígidas. No entanto, agora, vamos considerar que o sistema localiza-se sobre um espaço curvo, e verificar que, nesse caso, a natação rígida do sistema ocorre mesmo no limite em que o tamanho dos corpos constituintes é infinitesimal.

Consideremos duas calotas esféricas circulares de raio angular γ e massa m uniformemente distribuída, ambas imersas numa superfície esférica de raio R . Suponhamos que elas estejam conectadas entre si e que não haja forças externas, de modo que o movimento de uma deve levar a um movimento da outra, para que as leis de conservação sejam respeitadas. Vamos mostrar que variação cíclica da orientação relativa das duas calotas pode levar a uma rotação rígida do sistema completo sobre a esfera que serve de espaço ambiente.

Seja $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ uma base ortonormal dextrógira centrada no centro da esfera. As duas calotas são posicionadas simetricamente acima e abaixo do plano- xy de um ângulo ϕ , e rodadas em sentidos contrários em relação ao seu próprio centro de um ângulo θ . As coordenadas θ e ϕ são os parâmetros de deformação do sistema. À medida que eles variam, o sistema se ajusta dinamicamente, e as duas calotas se deslocam ao longo da esfera; por causa da simetria, esse movimento será uma rotação em torno do eixo- z . Seja ψ o ângulo de longitude do sistema, de modo que rotações em torno do eixo-

z representam variações de ψ e vice-versa. Desse modo, ψ é a variável dinâmica do sistema, que mede a sua localização sobre a esfera. A Figura 2.1 ilustra a configuração do sistema e dos parâmetros θ , ϕ e ψ .

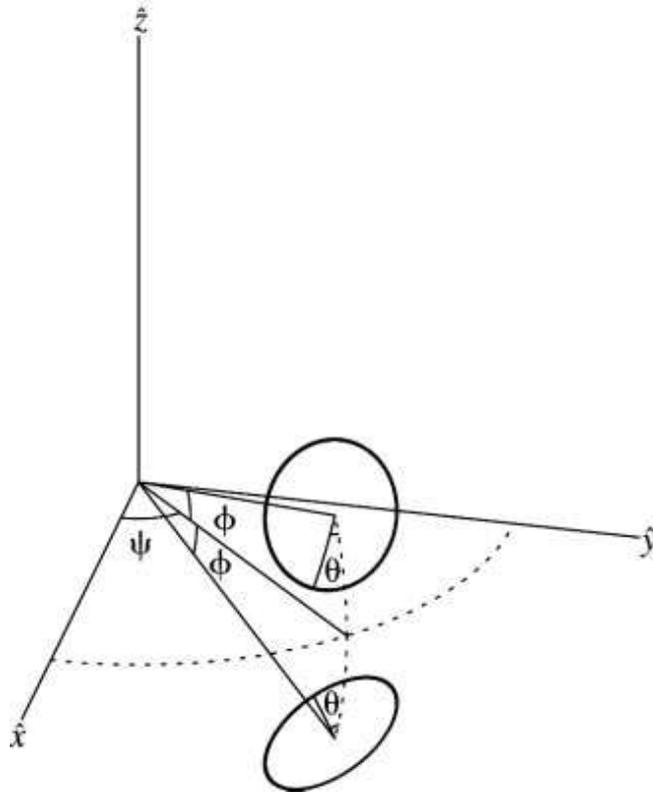


Figura 2.1: Duas calotas circulares sobre uma esfera. Os dois parâmetros de deformação são os ângulos θ e ϕ , enquanto o ângulo ψ mede a localização (longitude) do sistema como um todo sobre a esfera. Os parâmetros de deformação variam conforme um programa pré-estabelecido, e a coordenada de localização se ajusta dinamicamente como resposta, de acordo com as leis de conservação.

A área de cada calota esférica é dada, em coordenadas esféricas (ρ, Θ, Φ) , pela integral

$$S = \int_{calota} dS = R^2 \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^\gamma d\Theta \sin \Theta, \quad (2.23)$$

o que resulta em

$$S = 2\pi R^2 (1 - \cos \gamma). \quad (2.24)$$

Assim, o momento de inércia C de cada calota em relação ao eixo radial que passa pelo seu centro é dado por

$$C = \frac{m}{2\pi R^2 (1 - \cos \gamma)} \int_{calota} (R \sin \Theta)^2 dS$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{mR^2}{2\pi(1-\cos\gamma)} \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^\gamma d\Theta \sin^3 \Theta \\
&= \frac{mR^2}{(1-\cos\gamma)} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos^3 \gamma - \cos \gamma \right), \tag{2.25}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$C = mR^2 \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cos \gamma - \frac{1}{3} \cos^2 \gamma \right). \tag{2.26}$$

Já o momento de inércia A de cada calota em relação a qualquer eixo que seja perpendicular a esse eixo radial e passe pelo centro da esfera é dado por

$$\begin{aligned}
A &= \frac{m}{2\pi R^2 (1-\cos\gamma)} R^2 \int_{calota} (\cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta \cos^2 \Phi) dS \\
&= \frac{mR^2}{2\pi(1-\cos\gamma)} \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^\gamma d\Theta \sin \Theta (\cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta \cos^2 \Phi). \tag{2.27}
\end{aligned}$$

Resolvendo a integral, obtemos

$$A = \frac{mR^2}{2(1-\cos\gamma)} \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cos^3 \gamma - \cos \gamma \right),$$

ou, finalmente,

$$A = mR^2 \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6} \cos^2 \gamma + \frac{1}{6} \cos \gamma \right). \tag{2.28}$$

Além disso, é possível provar⁶ que o momento de inércia de cada calota em relação ao eixo- z é

$$I_z = A \cos^2 \phi + C \sin^2 \phi. \tag{2.29}$$

É fácil ver que, na medida em que as calotas giram em sentidos contrários tanto para uma deformação $\theta \rightarrow \theta + d\theta$ quanto para uma deformação $\phi \rightarrow \phi + d\phi$ e dada a simetria do sistema em relação ao plano- xy , os seus momentos angulares são opostos para uma rotação $d\phi$ em relação ao equador, anulando-se na soma, ao passo que, para uma rotação $d\theta$ em torno dos eixos radiais que passam pelo seus centros, as componentes de seus momentos angulares nas direções de \hat{x} e \hat{y} se anulam e as componentes na direção de \hat{z} são iguais (mesma magnitude e mesmo sentido), resultando numa resultante não-nula nessa direção que é o dobro de cada uma delas individualmente. Logo, dado um caminho $(\theta(t), \phi(t))$ no espaço de formatos/orientações relativas, surge um momento angular líquido na direção- z , o que leva o sistema a rodar como um todo em torno desse eixo, de modo a compensar essa variação e manter o momento angular total

⁶Um caso inteiramente análogo é estudado na referência [29].

conservado. Ou seja, o sistema realiza uma rotação $\psi \rightarrow \psi + d\psi$. Notemos que, sob um tal movimento, as duas calotas dão a mesma contribuição de momento angular. O momento angular de cada calota quando gira em torno do seu próprio centro tem magnitude $C\dot{\theta}$ e aponta para o centro da esfera; a projeção sobre o eixo- z é, pois, $C \sin \phi \dot{\theta}$. Assumindo que o momento angular total seja zero, temos, então, pela sua conservação,

$$2 I_z \dot{\psi} - 2 C \sin \phi \dot{\theta} = 0,$$

ou seja, a equação de movimento para $\psi(t)$ é, usando a equação (2.29),

$$\dot{\psi}(t) = \frac{C \sin \phi(t)}{A \cos^2 \phi(t) + C \sin^2 \phi(t)} \dot{\theta}(t). \quad (2.30)$$

Vamos computar a rotação rígida do sistema quando ele realiza um caminho fechado no espaço de formatos, retornando à sua configuração relativa original ao término do processo de deformação. Consideremos o seguinte ciclo: variamos θ de $\Delta\theta$ mantendo ϕ fixado; variamos ϕ de $\Delta\phi$ mantendo θ fixado; finalmente, retornamos ao valor inicial de θ sem alterar ϕ e, em seguida, ao valor inicial ϕ sem alterar θ . Nas partes do ciclo em que θ é constante, como já observamos, o movimento relativo das calotas não tem momento angular líquido e, por conseguinte, o sistema não roda. Reorientações do corpo articulado ocorrem nas duas fases do ciclo em que θ varia, e essas duas rotações não se cancelam porque cada uma delas ocorre a um valor diferente de ϕ .

Notemos que podemos reescrever a equação (2.30) como

$$d\psi = \frac{C \sin \phi}{A \cos^2 \phi + C \sin^2 \phi} d\theta, \quad (2.31)$$

vendo $d\theta$ como uma 1-forma no espaço de formatos. A rotação rígida total do sistema pode ser escrita como uma integral de linha

$$\Delta\psi = \oint_{\partial\Pi} \omega, \quad (2.32)$$

sobre o contorno $\partial\Pi$ da região Π descrita pelo ciclo no espaço de formatos coberto com coordenadas $\{\theta, \phi\}$ da 1-forma

$$\omega(\theta, \phi) = \frac{C \sin \phi}{A \cos^2 \phi + C \sin^2 \phi} d\theta. \quad (2.33)$$

Usando o teorema de Stokes, podemos reescrever $\Delta\psi$ em termos da integral sobre a região Π da diferencial exterior $d\omega$,

$$\Delta\psi = \int_{\Pi} d\omega, \quad (2.34)$$

ou seja,

$$\Delta\psi = \int_{\Pi} \frac{\partial}{\partial\phi} \left(\frac{C \sin\phi}{A \cos^2\phi + C \sin^2\phi} \right) d\phi \wedge d\theta. \quad (2.35)$$

Como a 1-forma ω não é fechada, $\Delta\psi$ não será, em geral, zero. Para deformações suficientemente pequenas, a integral acima é aproximadamente proporcional à área da região Π ,

$$\Delta\psi = \frac{\partial}{\partial\phi} \left(\frac{C \sin\phi}{A \cos^2\phi + C \sin^2\phi} \right) \Delta\theta \Delta\phi. \quad (2.36)$$

Se as calotas são pequenas, ou seja, se γ é pequeno, os momentos de inércia podem ser aproximados por $C \approx m\gamma^2 R^2/2$ e $A \approx mR^2$. Suponhamos que, além disso, também é pequeno o ângulo de separação ϕ entre cada uma das calotas e o plano- xy . Nesse caso,

$$\frac{C \sin\phi}{A \cos^2\phi + C \sin^2\phi} \approx \frac{C\phi}{A - A\phi^2 + C\phi^2} \approx \frac{m\gamma^2 R^2 \phi/2}{mR^2 - mR^2\phi^2 + m\gamma^2 R^2 \phi^2/2}.$$

Considerando o termo dominante em ϕ , temos assim

$$\frac{C \sin\phi}{A \cos^2\phi + C \sin^2\phi} \approx \frac{\gamma^2 \phi/2}{1 - \phi^2 + \gamma^2 \phi^2/2} \approx \frac{1}{2} \gamma^2 \phi.$$

Logo, a equação (2.36) pode ser aproximada por

$$\Delta\psi \approx \frac{\partial}{\partial\phi} \left(\frac{1}{2} \gamma^2 \phi \right) \Delta\theta \Delta\phi,$$

e então

$$\Delta\psi \approx \frac{1}{2} \gamma^2 \Delta\theta \Delta\phi. \quad (2.37)$$

Essa é a rotação em torno do eixo- z que o sistema articulado realiza rigidamente como uma consequência do ciclo de deformação executado, no caso de calotas pequenas e pequena separação angular entre elas. Notemos, revendo na Figura 2.1 o sentido definido como positivo para θ e para ψ , que se $\Delta\theta > 0$, a reorientação se dá no sentido anti-horário, em que ψ cresce, pois o momento angular gerado pela deformação aponta na direção de $-\hat{z}$ e a rotação líquida deve, pois, ter momento angular com sentido oposto.

Enfatizemos que a rotação líquida alcançada por reorientações relativas é independente da rapidez com que se realizam estas últimas. Novamente, estamos diante de um fenômeno totalmente geométrico.

Tendo tomado todos os comprimentos do sistema pequenos frente ao raio da esfera ambiente, podemos suspeitar que a essência do efeito liga-se ao fato de que o sistema

articulado localiza-se sobre um espaço curvo, e não ao fato de ser constituído por partes extensas rígidas. Na próxima seção, vamos confirmar essa suspeita ao estudar a natação de partículas pontuais ligadas por hastes deformáveis.

2.2 Nadando em espaços curvos

Na seção anterior, estudamos um exemplo de sistema que pode nadar - isto é, alterar a sua localização ou orientação rígidas por meio de ciclos fechados de deformação - sobre uma variedade de curvatura constante, uma esfera S^2 . Também é possível ocorrer natação em variedades de curvatura não-constante, mas, para isso, o conceito de *corpo rígido* deve ser enfraquecido. Corpos rígidos são definidos como sistemas de partículas tais que a distância de qualquer par permanece constante. Isso significa que há um grande número de vínculos redundantes entre os constituintes, no sentido de que mais vínculos são especificados do que seria necessário para estabelecer as suas *localizações relativas*. Corpos rígidos não podem, em geral, mover-se sobre uma variedade de curvatura variável, porque os vínculos posicionais não permaneceriam consistentes à medida que ele se deslocasse, já que distâncias dependem da curvatura ambiente.

Consideremos três partículas nos vértices de um triângulo, com geodésicas de comprimento fixo conectando-as, e suponhamos que há uma quarta partícula no centro do triângulo, ou seja, equidistante de cada partícula nos vértices. Esse corpo não pode se mover para regiões com curvatura diferente sem que alguma das distâncias entre as partículas constituintes se altere. Se, em vez de especificar que a partícula central é equidistante de cada uma das outras partículas, impuséssemos apenas que ela está a uma distância constante de duas delas, o corpo poderia se deslocar sobre variedades curvas sem desrespeitar nenhum vínculo. Damos a um corpo definido por vínculos não-redundantes o nome de corpo *quase-rígido*. Um tal corpo sempre possui uma configuração bem definida, muito embora as distâncias de cada par de partículas não seja constante.

Uma classe particular de corpos quase-rígidos possui topologia de árvore. Cada partícula constituinte se localiza num vértice do qual se estende um número arbitrário de ramos que a conectam a mais vértices, onde se localizam outras partículas. A configuração relativa de um tal sistema é determinada pela especificação do comprimento dos ramos e dos ângulos que cada um deles forma com os ramos vizinhos. É importante notar que os ramos não precisam ser geodésicas do espaço ambiente.

Na prática, corpos quase-rígidos podem ser construídos conectando partículas com hastes aproximadamente rígidas. Se essas hastes são pequenas em comparação com a curvatura intrínseca da variedade, então elas podem manter os vínculos que definem o corpo, sem que as tensões sejam fortes o suficiente para deformá-las, ao mesmo tempo em que se adaptam à variedade em larga escala.

2.2.1 Contraste do movimento de corpos quase-rígidos deformáveis em espaços ambientes planos e curvos

Para um corpo quase-rígido nadar numa dada variedade ambiente sem o auxílio de forças externas, ele deve se deformar pela aplicação de tensões internas. Se as variações de formato tiverem momentum líquido não-nulo, a orientação e a localização do corpo se ajustam dinamicamente para compensá-lo, de acordo com as leis de conservação. Para isso, é preciso que o ciclo de deformações seja não-trivial. Ao estudar o exemplo das calotas circulares sobre uma esfera, vimos que a reorientação do sistema se devia ao fato de as suas rotações em torno do seu próprio centro se darem, em cada parte do ciclo fechado, em latitudes diferentes. Uma condição necessária para haver natação é, pois, que o espaço de formatos seja, no mínimo, bidimensional.

Estamos considerando que o espaço em que se localiza o sistema é uma subvariedade do espaço euclidiano \mathbb{E}^3 e vamos utilizar a mecânica newtoniana para descrever o seu movimento. A lagrangiana que descreve o movimento geodésico livre de uma partícula de massa m sobre um espaço com métrica g é dada pela sua energia cinética, $mg(v, v)/2$, onde v é a sua velocidade. A lagrangiana para um corpo quase-rígido livre pode ser escrita como a soma das lagrangianas de cada partícula constituinte, considerando-se coordenadas generalizadas que incorporem os vínculos dependentes do tempo⁷. As órbitas do sistema podem ser obtidas resolvendo-se as equações de conservação de momenta para as taxas de variação das coordenadas dinâmicas (que descrevem a localização e a orientação do sistema) em termos dos parâmetros de deformação e das suas taxas de variação. No caso em que os momenta dependem linearmente das velocidades generalizadas, esse processo envolve apenas a solução de equações algébricas lineares.

Consideremos, em particular, um corpo quase rígido com estrutura de árvore formado por três partículas, uma de massa m_0 no vértice central e duas de mesma massa m_1 conectadas a ela por duas hastes geodésicas de dado comprimento e formando um dado ângulo. As deformações do corpo consistem na variação desse comprimento e desse ângulo, resultando num espaço de formatos bidimensional no qual podem ser realizados ciclos de deformação fechados não-triviais, isto é, que definem uma região com área não-nula. Vamos analisar o comportamento de tal corpo sobre duas subvariedades totalmente simétricas⁸ do espaço euclidiano tridimensional, um plano e uma esfera, a primeira sem curvatura, e a segunda de curvatura positiva constante⁹. Devido à simetria da variedade e do corpo, em ambos os casos o sistema poderá se mover apenas ao

⁷Naturalmente, os vínculos são dependentes do tempo porque precisam descrever as alterações de formato do sistema.

⁸Estamos considerando que a métrica sobre a variedade é aquela induzida nela pela métrica euclidiana tridimensional.

⁹Tanto o plano quanto a esfera têm curvatura constante, de modo que não exigem a adoção de corpos quase-rígidos - corpos rígidos podem nadar sobre tais superfícies.

longo da direção da bissetriz das suas duas hastes. É conveniente, pois, escolher uma das coordenadas generalizadas coincidente com essa direção.

Caso 1: plano

Começemos analisando o que acontece com o nadador sobre o plano. Cobrimos a variedade com coordenadas cartesianas $\{x, y\}$, com o eixo- x sobre a bissetriz das duas hastes, que têm comprimento $l(t)$ e formam com esse eixo um ângulo $\alpha(t)$, ambas funções dadas do tempo, expressando a programação do corpo para variações de seu formato. Sejam $(x_0(t), y_0(t))$ as coordenadas do vértice do corpo no instante t . Então as coordenadas das duas outras partículas, nesse instante, são

$$x_1(t) = x_2(t) = x_0(t) + l(t) \cos \alpha(t), \quad (2.38)$$

$$y_1(t) = -y_2(t) = l(t) \sin \alpha(t), \quad (2.39)$$

de modo que seus momenta se escrevem como

$$p_{1x}(t) = p_{2x}(t) = m_1 \left[\dot{x}_0(t) + \dot{l}(t) \cos \alpha(t) - l \dot{\alpha}(t) \sin \alpha(t) \right],$$

$$p_{1y}(t) = -p_{2y}(t) = m_1 \left[\dot{l}(t) \sin \alpha(t) + l \dot{\alpha}(t) \cos \alpha(t) \right].$$

Supondo que o momentum total inicial seja nulo, a sua conservação implica que

$$m_0 \dot{x}_0(t) + 2m_1 \left[\dot{x}_0(t) + \dot{l}(t) \cos \alpha(t) - l \dot{\alpha}(t) \sin \alpha(t) \right] = 0,$$

$$m_0 \dot{y}_0(t) = 0.$$

Portanto,

$$dx_0 = \frac{2m_1}{m_0 + 2m_1} (-\cos \alpha dl + l \sin \alpha d\alpha), \quad (2.40)$$

$$dy_0 = 0, \quad (2.41)$$

onde estamos vendo dl e $d\alpha$ como 1-formas no espaço de formatos. Vemos imediatamente que, como havíamos adiantado por considerações de simetria, o corpo não se desloca na direção- y .

Para um ciclo fechado de deformações, a translação do corpo na direção- x pode ser escrito como a integral de linha

$$\Delta x_0 = \oint_{\partial\Pi} \omega, \quad (2.42)$$

sobre o caminho $\partial\Pi$ descrito no espaço de parâmetros $\{l, \alpha\}$ da 1-forma

$$\omega = \frac{2m_1}{m_0 + 2m_1} (-\cos \alpha dl + l \sin \alpha d\alpha). \quad (2.43)$$

Agora, como ela é fechada, na medida em que

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (-\cos \alpha) = \frac{\partial}{\partial l} (l \sin \alpha) = \sin \alpha,$$

o teorema de Stokes implica que *não* ocorre natação do corpo quase-rígido no plano,

$$\Delta x_0 = 0. \quad (2.44)$$

Caso 2: esfera

Agora, vamos estudar o movimento do mesmo nadador localizado sobre uma esfera de raio R . Tomamos sobre ela coordenadas esféricas com latitude θ e longitude ψ , com a bissetriz das hastes sobre o equador. O comprimento das hastes, que são geodésicas, ou seja, segmentos de grandes círculos, é especificado pelo ângulo $e(t)$ entre os eixos radiais que interceptam as partículas no vértice central e em cada um dos extremos do corpo. A separação angular entre as hastes e a linha do equador é de $\alpha(t)$. A Figura 2.2 ilustra essa descrição.

Os dois parâmetros de deformação são $l(t) = Re(t)$ e $\alpha(t)$. Essas duas quantidades seguem um caminho fechado dado no espaço de formatos. As coordenadas do vértice central num instante t são $(\theta_0(t), \psi_0(t))$. Pelas mesmas considerações de simetria do caso anterior, vemos que a latitude do sistema não se altera, ao contrário da longitude, que pode, a princípio, variar por natação, ajustando-se dinamicamente para que se respeitem as leis de conservação vigentes. Assim, é não-trivial apenas o movimento longitudinal do corpo, no qual vamos, pois, focar nossa atenção. A conservação de momento angular determina o movimento do sistema à medida que ele se deforma,

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_0(t) = & \frac{2m_1 \sin e(t) \cos e(t) \sin \alpha(t)}{m_0 + 2m_1 \cos^2 \alpha(t) + 2m_1 \sin^2 \alpha(t) \cos^2 e(t)} \dot{\alpha}(t) \\ & - \frac{2m_1 \cos \alpha(t)}{m_0 + 2m_1 \cos^2 e(t) + 2m_1 \cos^2 \alpha(t) \sin^2 e(t)} \dot{e}(t), \end{aligned} \quad (2.45)$$

ou, equivalentemente, mas vendo $d\alpha$ e de como 1-formas no espaço de parâmetros de deformação $\{e, \alpha\}$,

$$d\psi_0 = \mathcal{A} de + \mathcal{B} d\alpha, \quad (2.46)$$

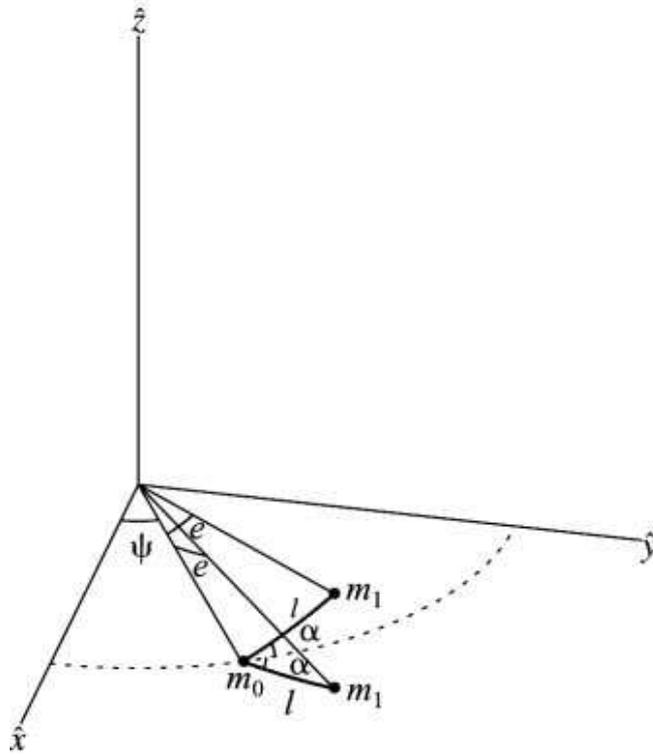


Figura 2.2: Um corpo quase-rígido sobre uma esfera de raio R . As hastes geodésicas subentendem um ângulo $e = l/R$ no centro da esfera. O ângulo de separação α é medido entre as hastes e a linha de simetria do sistema, que se localiza sobre o equador. O ângulo ψ dá a longitude do sistema.

onde

$$\mathcal{A} = \frac{-\cos \alpha}{(m_0/2m_1) + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 e}, \quad (2.47)$$

$$\mathcal{B} = \frac{\sin e \cos e \sin \alpha}{(m_0/2m_1) + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 e}. \quad (2.48)$$

Para um ciclo fechado de deformações, a translação rígida longitudinal do sistema é dada pela integral

$$\Delta\psi_0 = \oint_{\partial\Pi} \mathcal{A} de + \mathcal{B} d\alpha, \quad (2.49)$$

sobre o caminho $\partial\Pi$ descrito, ou, usando o teorema de Stokes, como

$$\Delta\psi_0 = \int_{\Pi} \left(\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial e} - \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\alpha} \right) de \wedge d\alpha. \quad (2.50)$$

A natação é possível porque a 1-forma $\mathcal{A} de + \mathcal{B} d\alpha$ não é fechada. Se o caminho fechado $\partial\Pi$ tem área não-nula, o corpo se reorienta rigidamente após retomar o seu formato. Para deformações suficientemente pequenas, obtemos

$$\Delta\psi_0 \approx \left(\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial e} - \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\alpha} \right) \Delta e \Delta\alpha. \quad (2.51)$$

Se o corpo for pequeno em relação à esfera, obtemos

$$\Delta\psi_0 \approx -\frac{4m_0m_1}{(m_0 + 2m_1)^2} \sin^2 e \sin\alpha \Delta e \Delta\alpha. \quad (2.52)$$

Em suma, vemos que a natação no plano, que é uma variedade sem curvatura, não é possível. Por outro lado, ela ocorre na esfera, que possui curvatura não-nula. Isso levanta a questão de ser possível ou não nadar no próprio espaço-tempo curvo descrito pela relatividade geral. No próximo capítulo, passaremos a estudar essa questão.

Capítulo 3

Natação de corpos quase-rígidos em campos gravitacionais estáticos e esfericamente simétricos. Estudo relativístico e newtoniano

Como vimos no capítulo anterior, corpos quase-rígidos podem nadar em variedades com curvatura intrínseca por meio de alterações cíclicas de seu formato. Considerando que, em relatividade geral, o próprio espaço-tempo é retratado como uma variedade quadridimensional curva, surge naturalmente a questão: é possível que um corpo quasi-rígido nade no espaço-tempo pela realização de deformações periódicas, ou seja, que ele possa desviar de sua trajetória geodésica sem a aplicação de forças externas, mas apenas alterando ciclicamente o seu formato? Neste capítulo, vamos verificar que a resposta é afirmativa, considerando, em particular, um nadador em forma de tripé no espaço-tempo de Schwarzschild. À natação em espaços-tempos curvos damos o nome de *efeito Wisdom*, em homenagem a Jack Wisdom, o primeiro a notar esse fato, em 2003 (referência [11]). Também vamos mostrar que esse efeito *não* tem um limite newtoniano, isto é, que se trata de um fenômeno puramente relativístico, e fazer uma análise comparativa entre ele e um efeito de gravitação newtoniana bastante conhecido, no qual corpos deformáveis realizando deformações cíclicas *não-locais* num campo gravitacional não-uniforme podem deslocar-se devido ao fato de que, pelas forças de maré, o trabalho líquido do processo é não-nulo.

3.1 Vínculos e sincronização das deformações no caso relativístico

Como discutimos no capítulo anterior, o conceito de corpo quase-rígido é um relaxamento da noção de corpo rígido que, por remover os vínculos redundantes, se mostra útil para contornar a dificuldade de se manterem os vínculos posicionais entre as partículas constituintes do nadador à medida que ele se move, ao longo da variedade, entre regiões com curvatura diferentes. Dentro do contexto relativístico, contudo, outras dificuldades emergem.

A primeira delas advém do fato de que, relativisticamente, as forças de vínculo são transmitidas com velocidades finitas. Como conseqüência, se uma força é aplicada numa parte do sistema, necessariamente existe um atraso na resposta das suas outras partes. Isso deixa claro que corpos reais não podem ser descritos por vínculos puramente posicionais. Por exemplo, consideremos uma barra unidimensional de comprimento L , inicialmente em repouso. Se uma força é aplicada num dos extremos da barra, puxando-a, as partículas constituintes próximas desse extremo respondem mais prontamente a esse impulso, e as mais distantes só são arrastadas à medida que essa força é transmitida, com velocidade finita, ao longo da extensão do corpo, por meio das forças de coesão. Desse modo, a barra sofre um estiramento e então, naturalmente, as distâncias entre as partículas não são mantidas constantes. Nesse exemplo fica claro como, relativisticamente, os vínculos de corpos naturais não podem ser posicionais¹. Por outro lado, do ponto de vista de engenharia, não há obstáculos em se projetar um corpo quase-rígido que, para todos os fins práticos, efetivamente mantenha os vínculos posicionais, contanto que se conheça antecipadamente qual é o programa de deformações do corpo. Forças internas podem, nesse caso, ser aplicadas *simultaneamente* para simular um efeito de transmissão instantânea das forças de vínculo. Basta, para tanto, acrescentar a cada parte do corpo um mecanismo que aplique forças adicionais que compensem o atraso da transmissão da força de reação e mantenham fixas as distâncias que definem o corpo extenso. É claro que, idealmente, isso teria de ser feito ponto a ponto, o que é impossível na realidade. No entanto, para todos os fins práticos, esses mecanismos podem apenas estar tão próximos quanto necessário para manter a adequação do modelo idealizado com os dados experimentais.

A segunda dificuldade está relacionada à relatividade da noção de simultaneidade. Como comentamos no parágrafo anterior, para que sejam mantidos os vínculos posicionais que definem o corpo quase-rígido, forças internas ao longo de toda a sua extensão devem ser programadas para atuar simultaneamente. No entanto, em relatividade geral, a noção de simultaneidade é dependente de observador. Assim, o programa de deformações do nadador só pode, em geral, ser sincronizado para uma única classe

¹É nesse sentido que, a rigor, não existem corpos rígidos em relatividade.

de observadores, que definem a noção de simultaneidade na natação. Como aponta Wisdom, uma dança, como um balé, não é invariante de Lorentz. A sincronização dos bailarinos é feita de acordo com a noção de simultaneidade da platéia. Observadores em movimento em relação ao palco veriam os dançarinos fora de sincronia (naturalmente, o efeito só seria visualmente perceptível se as velocidades envolvidas fossem suficientemente altas). A mesma idéia vale para o caso dos nadadores num espaço-tempo relativístico.

Essa idéia de corpo quase-rígido projetado para manter os vínculos posicionais num dado referencial permite tratar o problema de natação em espaços-tempos curvos de maneira semelhante àquela que empregamos no capítulo anterior. No entanto, ela não parece ser essencial para que um corpo deformável possa nadar no espaço-tempo; trata-se apenas de uma simplificação útil para desenvolver o formalismo e efetuar os cálculos de forma segura. Como se sabe, o problema completo de corpos rígidos em relatividade geral é notoriamente complicado (veja as referências [24] e [25]).

3.2 Espaço-tempo de Schwarzschild, construção do nadador e especificação de sua dinâmica

O espaço-tempo de Schwarzschild é a solução das equações de Einstein que descreve o campo gravitacional de um corpo simetricamente esférico e estático, de massa M , sem carga elétrica nem rotação. Em coordenadas de Schwarzschild, $x^\mu = \{t, r, \theta, \phi\}$, onde t é o tempo coordenado, r é a coordenada radial e θ e ϕ são coordenadas angulares esféricas, o elemento de linha que descreve essa geometria é escrito como

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.1)$$

onde G é a constante gravitacional e c , a velocidade da luz no vácuo.

De acordo com a relatividade geral, partículas de teste massivas num dado espaço-tempo (\mathcal{M}, g) , onde \mathcal{M} é a variedade diferenciável de base e g é a métrica lorentziana (solução das equações de Einstein), seguem curvas geodésicas. Se a linha de mundo de uma tal partícula é $x^\mu(\lambda) = (t(\lambda), r(\lambda), \theta(\lambda), \phi(\lambda))$, onde λ é um parâmetro afim ao longo da trajetória, as geodésicas são soluções das equações de Euler-Lagrange (veja a referência [14]),

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0, \quad (3.2)$$

onde $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\lambda$, para a lagrangiana livre

$$L = g_{\mu\nu}(x^\rho) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}. \quad (3.3)$$

Se escolhermos como parâmetro afim o próprio tempo coordenado t das coordenadas de Schwarzschild, o movimento de um sistema de várias partículas pode ser seguido com essa mesma parametrização temporal para todas elas. Isso permitirá que as deformações do nadador sejam sincronizadas no referencial dos observadores estáticos, isto é, daqueles com quadrivelocidade $u \propto \partial_t$.

Para construir um nadador, isto é, um corpo quase-rígido deformável, com vínculos posicionais dependentes do tempo, é mais natural utilizar o formalismo lagrangiano. O funcional ação para uma partícula de massa m que percorre uma curva γ tipo-tempo entre os pontos $p_1, p_2 \in \mathcal{M}$ é dada por

$$S[\gamma](p_1, p_2) = mc \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{-ds^2} = mc \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{-g_{\mu\nu}(x^\alpha) \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}}, \quad (3.4)$$

se usamos o tempo coordenado para parametrizar² γ , t_1 e t_2 são, respectivamente, os tempos coordenados dos eventos p_1 e p_2 , e $x^\mu(t)$ são as coordenadas da partícula. No caso do espaço-tempo de Schwarzschild, em particular, temos

$$S[\gamma](p_1, p_2) = mc \times \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 - \left[\frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} + r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)\right]}, \quad (3.5)$$

onde os pontos sobre as coordenadas indicam sua derivada com respeito ao tempo coordenado t . Daí inferimos que a função lagrangiana para uma partícula massiva em Schwarzschild é

$$L(t, x^\alpha, \dot{x}^\alpha) = mc \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 - \left[\frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} + r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)\right]}. \quad (3.6)$$

Nessa lagrangiana, a variável independente é o tempo coordenado t ; as coordenadas generalizadas são as coordenadas espaciais de Schwarzschild, $x^i = (r, \theta, \phi)$, e as velocidades generalizadas são as taxas de variação dessas últimas com respeito ao tempo coordenado.

O corpo quase-rígido será formado por partículas massivas ligadas por hastes deformáveis de massa desprezível. Essas hastes são construídas nas hipersuperfícies espaciais

²É fácil mostrar que essa integral é independente da escolha de parametrização.

$t = \text{constante}$ ³, das quais elas são, por construção, geodésicas de comprimento próprio dado⁴. Os vínculos posicionais entre as partículas dependem, pois, dos comprimentos e das orientações relativas das hastes, que variam de acordo com funções dadas de t . Por um arranjo apropriado dessas hastes, um corpo rígido de formato arbitrário pode ser engendrado.

Como já comentamos, as hastes têm de ser constantemente monitoradas para garantir que os vínculos posicionais entre as partículas sejam mantidos. Esse monitoramento pode ser realizado localmente, ao longo da haste, por dispositivos que aplicam forças internas, cada um responsável por um segmento suficientemente pequeno da estrutura. Como também já mencionamos, cada dispositivo local deve saber de antemão que tensão aplicar para manter os requeridos vínculos posicionais globais.

Nosso objetivo é determinar se a natação num espaço-tempo curvo é possível, então nos é suficiente considerar um nadador com formato e orientação particulares. Como corpo quase-rígido, vamos considerar um tripé com uma partícula de massa m_0 num vértice central do qual se estendem três hastes de mesmo comprimento próprio $l(t)$ e que formam todas um mesmo ângulo próprio $\alpha(t)$ com um eixo de simetria que passa pelo vértice central, onde $l(t)$ e $\alpha(t)$ são os valores de comprimento e ângulo conforme medidos pelos observadores estáticos nas coordenadas de Schwarzschild, com as hastes igualmente distribuídas angularmente em torno desse eixo de simetria, e partículas de mesma massa m_1 nos extremos. Os parâmetros de deformação do corpo quase-rígido são $l(t)$ e $\alpha(t)$. Quanto à orientação, consideramos que o eixo de simetria do nadador é descrito por um segmento da curva integral do campo vetorial ∂_r que passa pelo vértice central. Essa escolha particular de orientação garante que, devido à simetria da geometria de Schwarzschild e do formato do nadador, qualquer possível translação do corpo originada por deformações cíclicas ocorrerá apenas na direção radial, o que simplifica sobremaneira o problema. Veja a Figura 3.1 para um desenho da geometria e da orientação do tripé.

É importante entender o porquê da requisição de que as hastes sejam geodésicas das seções espaciais dos observadores estáticos. Como já comentamos, o movimento de deformação do corpo quase-rígido deve ser sincronizado para uma família específica de observadores, que aqui escolhemos, por simplicidade, como sendo os observadores estáticos. A condição de que as hastes sejam geodésicas das seções espaciais desses observadores garante que l e α sejam medidas próprias, de modo que as condições $l(t + T) = l(t)$ e $\alpha(t + T) = \alpha(t)$ implicam, de fato, que o movimento de deformação é sincronizado e cada ciclo, fechado.

Assumimos que o nadador é programado para contrair e estender, fechar e abrir

³Essas hipersuperfícies são as seções espaciais dos observadores estáticos no sistema de coordenadas de Schwarzschild, isto é, daqueles com quadrivelocidade $u \propto \partial_t$.

⁴Notemos que as hastes têm comprimento fixado em cada hipersuperfície $t = \text{constante}$, mas esse comprimento varia ao longo das hipersuperfícies, ou seja, é uma função do tempo coordenado.

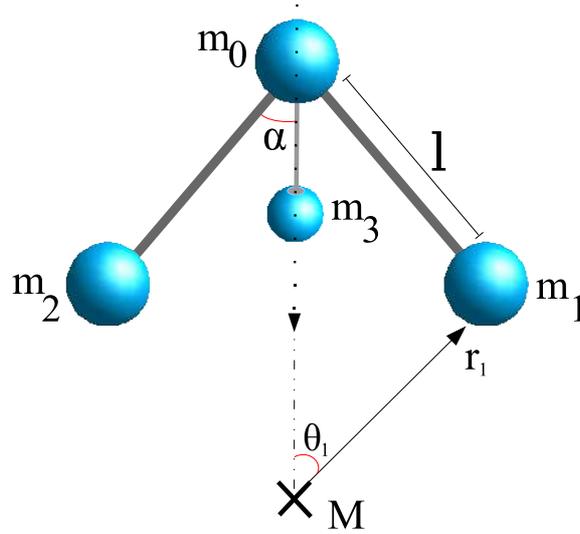


Figura 3.1: Geometria e orientação do tripé.

suas hastes - de Δl e $\Delta\alpha$, respectivamente - de forma cíclica, isto é, retomando o seu formato original depois de um ciclo completo. O nosso objetivo é calcular a distância coordenada Δr pela qual o nadador, num período T de deformações, falha em seguir a sua trajetória geodésica, acelerando ou retardando a sua queda devido ao efeito de natação. O caso $\Delta r \neq 0$ indicará a existência do efeito em espaços-tempos curvos.

3.3 Manifestação do efeito de natação em espaços-tempos curvos

Assumimos que o sistema vinculado segue trajetórias de ação estacionária. A lagrangiana do sistema é obtida somando-se as lagrangianas livres de cada uma das partículas e, pelos vínculos posicionais do sistema, eliminando-se as variáveis redundantes. Escrevemos, assim,

$$L = \sum_{a=0}^3 m_a c \sqrt{f(r_a) c^2 - \left[f(r_a)^{-1} \dot{r}_a^2 + r_a^2 (\dot{\theta}_a^2 + \sin^2 \theta_a \dot{\phi}_a^2) \right]}, \quad (3.7)$$

onde

$$f(r_a) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r_a}, \quad (3.8)$$

e $a = 0, 1, 2, 3$ rotula as massas e coordenadas de cada uma das quatro partículas constituintes do tripé ($a = 0$ refere-se à partícula no vértice central, e $a = 1, 2, 3$ às restantes). Pelas considerações de simetria que efetuamos, sabemos de antemão que $\dot{\theta}_0 = 0$ e $\dot{\phi}_a = 0$, e, além disso, por construção, que $r_i = r_1$ e $\theta_i = \theta_1$ para $i = 1, 2, 3$.

Dessa forma, a lagrangiana se simplifica e assume a forma

$$L = m_0 c \sqrt{f(r_0) c^2 - f(r_0)^{-1} \dot{r}_0^2} + 3m_1 c \sqrt{f(r_1) c^2 - f(r_1)^{-1} \dot{r}_1^2 - r_1^2 \dot{\theta}_1^2}. \quad (3.9)$$

Como mencionamos, os vínculos,

$$r_1 = g(r_0, l, \alpha), \quad (3.10)$$

$$\theta_1 = h(r_0, l, \alpha), \quad (3.11)$$

são obtidos requerendo-se que as hastes do tripé sejam geodésicas das seções espaciais $t = \text{constante}$ dos observadores estáticos em Schwarzschild. Temos, assim, como coordenadas e velocidades independentes apenas $r_0(t)$ e $\dot{r}_0(t)$, respectivamente.

Essa lagrangiana não é quadrática nas velocidades, de modo que os momenta também não serão quadráticos nas velocidades generalizadas. Nesse caso, se usarmos a mesma estratégia utilizada nos problemas do capítulo anterior, a resolução das velocidades generalizadas em termos das taxas de variação dos parâmetros de deformação envolverá a solução de equações não-lineares. No entanto, no limite em que as velocidades são pequenas comparadas à velocidade da luz, podemos expandir a lagrangiana até ordem de $(v/c)^2$, tornando-a quadrática nas velocidades generalizadas. Vamos, então, por simplicidade, assumir que o tripé está nesse regime. Reescrevendo a lagrangiana na forma

$$L = m_0 c^2 f^{1/2}(r_0) \sqrt{1 - f^{-2}(r_0) \left(\frac{\dot{r}_0}{c}\right)^2} + 3m_1 c^2 f^{1/2}(r_1) \sqrt{1 - f^{-2}(r_1) \left(\frac{\dot{r}_1}{c}\right)^2 - f^{-1}(r_1) \left(\frac{r_1 \dot{\theta}_1}{c}\right)^2},$$

obtemos facilmente

$$L \approx m_0 c^2 f_0^{1/2} \left[1 - \frac{1}{2} f_0^{-2} \left(\frac{\dot{r}_0}{c}\right)^2 \right] + 3m_1 c^2 f_1^{1/2} \left[1 - \frac{1}{2} f_1^{-2} \left(\frac{\dot{r}_1}{c}\right)^2 - \frac{1}{2} f_1^{-1} \left(\frac{r_1 \dot{\theta}_1}{c}\right)^2 \right], \quad (3.12)$$

onde usamos a notação $f_a = f(r_a)$, $a = 0, 1$. Além disso, aqui e adiante, f^{-1} representa o recíproco da função f , e não o seu inverso.

Neste problema, não temos conservação do momentum p_{r_0} conjugado à coordenada independente r_0 . Contudo, ainda podemos empregar a mesma estratégia que usamos no Capítulo 2 para resolver os problemas iniciais, mais simples, de natação (sobre superfícies curvas totalmente simétricas do \mathbb{R}^3) contanto que os parâmetros que definem o formato do corpo quase-rígido variem de modo suficientemente rápido (regime de altas frequências). Sendo esse o caso, um ciclo completo de deformações ocorre sem que o corpo tenha se deslocado significativamente - em outras palavras, todo um ciclo se dá sobre uma hipersuperfície $t \approx \text{constante}$, e podemos considerar que o momentum praticamente não se altera num período T , ou seja, que

$$\dot{p}_{r_0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_0} \right) \approx 0, \quad (3.13)$$

no intervalo do movimento que nos interessa.

Precisamos, todavia, entender quantitativamente o que significa *regime de altas frequências* no problema específico que estamos estudando.

3.3.1 Regime de altas frequências de deformação em Schwarzschild

Por regime de altas frequências queremos dizer que, num período T de deformações, o tripé se move muito pouco em comparação à magnitude Δl da extensão/contração do tripé. Essa condição é equivalente à de que todo o ciclo se dê aproximadamente sobre uma hipersuperfície de tempo coordenado constante.

Consideremos uma partícula geodésica de massa m , com quadrivelocidade u , movendo-se no espaço-tempo de Schwarzschild. Suponhamos que ela se mova apenas radialmente, de modo que, na base coordenada de Schwarzschild,

$$u^\mu = \frac{dt}{d\tau} (1, \dot{r}, 0, 0), \quad (3.14)$$

onde o ponto denota a derivada com respeito ao tempo coordenado t .

Um observador estático no infinito, isto é, com quadrivelocidade $\xi = \partial_t$, atribui a essa partícula uma energia

$$E = -mg(\xi, u) = -m g_{00}u^0 = mf(r) \frac{dt}{d\tau}, \quad (3.15)$$

que é uma quantidade conservada, pelo fato de ξ ser um campo de Killing e de que $D_u u = 0$.

Impondo a normalização da quadrivelocidade da partícula, $g(u, u) = -1$, temos

$$g_{00} (u^0)^2 + g_{11} (u^1)^2 = -1,$$

e assim,

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 [f(r) - f^{-1}(r) \dot{r}^2] = 1.$$

Se escrevemos $dt/d\tau$ em termos de E , usando a equação (3.15), essa última equação fica

$$f(r) - f^{-1}(r) \dot{r}^2 = \frac{m^2 f^2(r)}{E^2},$$

o que leva diretamente a

$$\dot{r} = -f(r) \sqrt{1 - \frac{m^2 f(r)}{E^2}}, \quad (3.16)$$

onde escolhemos a raiz negativa pelo fato de requeremos que o corpo esteja caindo rumo à fonte, ou seja, que os valores de r sejam decrescentes.

Supondo, agora, que a partícula seja abandonada em repouso, num instante t_0 , em r_0 , temos, da última equação calculada nesse instante particular,

$$E = m\sqrt{f(r_0)}, \quad (3.17)$$

cuja interpretação é imediata: o observador estático no infinito mede, para a partícula, sua energia de repouso com um *redshift* dado pelo fator $\sqrt{f(r_0)}$. Como a energia medida por esse observador é, conforme observamos, uma constante de movimento, podemos substituir esse valor de E na expressão geral para $\dot{r}(t)$, dada pela equação (3.16):

$$\dot{r} = -f(r) \sqrt{1 - \frac{f(r)}{f(r_0)}}. \quad (3.18)$$

Consideremos que, num intervalo de tempo Δt suficientemente pequeno, a partícula tenha sofrido um deslocamento coordenada $\Delta r = r - r_0 < 0$, com $|\Delta r| \ll r_0 > 2M$. Sob essa condição,

$$\begin{aligned} f(r) &= 1 - \frac{2M}{r} = 1 - \frac{2M}{r_0 + \Delta r} \\ &= 1 - \frac{2M}{r_0} \frac{1}{1 + (\Delta r/r_0)} \approx 1 - \frac{2M}{r_0} \left(1 - \frac{\Delta r}{r_0}\right), \end{aligned}$$

isto é,

$$f(r) \approx f(r_0) + \frac{2M\Delta r}{r_0^2}. \quad (3.19)$$

Logo, num tal intervalo de tempo, usando a equação (3.18), temos

$$\begin{aligned} \frac{\Delta r}{\Delta t} &\approx -f(r_0) \sqrt{-\frac{2M\Delta r}{r_0^2 f(r_0)}} \\ &\approx -\sqrt{\frac{2Mf(r_0)}{r_0^2}} \sqrt{|\Delta r|}, \end{aligned}$$

de modo que

$$\Delta r \approx -\frac{2Mf(r_0)}{r_0^2} (\Delta t)^2. \quad (3.20)$$

Essa última equação fornece uma estimativa de quanto uma partícula livre inicialmente em repouso cai num intervalo de tempo Δt . Para obter o regime de altas frequências, impomos que, quando $\Delta t = T$ (período de um ciclo de deformações), $|\Delta \tilde{r}| \ll \Delta l$, onde $\Delta \tilde{r}$ é a distância própria⁵ correspondente ao deslocamento coordenada Δr , medida pelos observadores estáticos. Como o movimento se dá, por hipótese, a $t \approx$ constante, temos

$$\Delta \tilde{r} \approx \int_{r_0}^{r_0+\Delta r} \sqrt{ds^2}|_{dt=d\phi=d\theta=0} = \int_{r_0}^{r_0+\Delta r_0} \frac{dr}{\sqrt{f(r)}}.$$

Uma vez que $\Delta r_0 \ll r_0$, obtemos

$$\Delta \tilde{r} \approx \frac{\Delta r}{\sqrt{f(r_0)}}. \quad (3.21)$$

Logo, a condição que temos é $|\Delta r|/\sqrt{f(r_0)} \ll \Delta l$. Usando a equação (3.20), obtemos

$$\frac{|\Delta r|}{\sqrt{f(r_0)}} = \frac{2M\sqrt{f(r_0)}}{r_0^2} T^2 \ll \Delta l, \quad (3.22)$$

donde decorre que

$$T^2 \ll \frac{r_0^2 \Delta l}{M\sqrt{f(r_0)}},$$

ou, em termos da frequência $\omega = 2\pi/T$ e usando unidades MKS,

⁵Precisamos usar a distância própria $\Delta \tilde{r}$ porque l é, por hipótese, um comprimento próprio, e não faz sentido comparar uma quantidade coordenada com uma própria.

$$\omega \gg \sqrt{\frac{GM\sqrt{f(r_0)}}{r_0^2\Delta l}}. \quad (3.23)$$

Essa é, em suma, a condição sobre a frequência de deformações do nadador para que um ciclo completo ocorra sem que o momentum p_{r_0} altere-se significativamente.

3.3.2 Distância nadada pelo tripé em Schwarzschild devido a deformações cíclicas

Consideremos o regime de altas frequências, no qual o momentum p_{r_0} conjugado a r_0 é aproximadamente conservado num período T , e suponhamos que ele seja arbitrariamente pequeno⁶. Calculando-o explicitamente em termos das coordenadas e velocidades generalizadas, obtemos

$$p_{r_0} = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_0} = -m_0 f_0^{-3/2} \dot{r}_0 - 3m_1 \left(f_1^{-3/2} \frac{\partial r_1}{\partial r_0} \dot{r}_1 + f_1^{-1/2} \frac{\partial \theta_1}{\partial r_0} r_1^2 \dot{\theta}_1 \right) \approx 0. \quad (3.24)$$

Notemos que p_{r_0} é, graças à condição de baixas velocidades, linear nas velocidades generalizadas. Segue-se da igualdade acima que

$$dr_0 \approx -3 \frac{m_1}{m_0} \left[\left(\frac{f_0}{f_1} \right)^{3/2} \frac{\partial r_1}{\partial r_0} dr_1 + \left(\frac{f_0^3}{f_1} \right)^{1/2} r_1^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial r_0} d\theta_1 \right].$$

Como r_1 e θ_1 são, pelos vínculos posicionais do nadador, funções de r_0 , l e α , podemos escrever as expressões explícitas das diferenciais dr_1 e $d\theta_1$ em termos das derivadas parciais dessas funções,

$$dr_1 = \frac{\partial r_1}{\partial r_0} dr_0 + \frac{\partial r_1}{\partial l} dl + \frac{\partial r_1}{\partial \alpha} d\alpha,$$

$$d\theta_1 = \frac{\partial \theta_1}{\partial r_0} dr_0 + \frac{\partial \theta_1}{\partial l} dl + \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha} d\alpha,$$

e substituir na equação anterior, obtendo o deslocamento infinitesimal $dr_0 = \dot{r}_0 dt$ do tripé em termos das deformações infinitesimais dl e $d\alpha$:

$$dr_0 \approx X(r_0, l, \alpha) dl + Y(r_0, l, \alpha) d\alpha, \quad (3.25)$$

onde

⁶Uma condição suficiente para isso é que o tripé esteja inicialmente em repouso.

$$X(r_0, l, \alpha) = -\frac{(\partial r_1/\partial r_0)(\partial r_1/\partial l) + f_1 r_1^2 (\partial \theta_1/\partial r_0)(\partial \theta_1/\partial l)}{(m_0/3m_1)(f_1/f_0)^{3/2} + (\partial r_1/\partial r_0)^2 + f_1 r_1^2 (\partial \theta_1/\partial r_0)^2}, \quad (3.26)$$

$$Y(r_0, l, \alpha) = -\frac{(\partial r_1/\partial r_0)(\partial r_1/\partial \alpha) + f_1 r_1^2 (\partial \theta_1/\partial r_0)(\partial \theta_1/\partial \alpha)}{(m_0/3m_1)(f_1/f_0)^{3/2} + (\partial r_1/\partial r_0)^2 + f_1 r_1^2 (\partial \theta_1/\partial r_0)^2}, \quad (3.27)$$

e podemos tratar dl e $d\alpha$ como 1-formas no espaço de formatos coberto com coordenadas $\{l, \alpha\}$.

Um ciclo de deformações particularmente simples consiste em aumentar o comprimento l de Δl , mantendo o ângulo α fixo, então aumentar α de $\Delta\alpha$, mantendo l fixo, depois retornar l ao valor original sem alterar o valor de α e, finalmente, retornar α ao valor original sem alterar l . Um tal ciclo forma uma curva orientada fechada $\partial\Pi$ no espaço de formatos (parametrizado por l e α) - nesse caso, simplesmente um retângulo - que define, por sua vez, uma região Π nesse espaço. Se o processo fosse realizado na ordem contrária, a curva descrita seria a mesma, mas com orientação oposta. O deslocamento total Δr_0 do tripé devido a esse ciclo de deformações pode ser escrito como uma integral de linha,

$$\Delta r_0 = \oint_{\partial\Pi} \Omega, \quad (3.28)$$

sobre a fronteira $\partial\Pi$ da região Π do espaço de parâmetros de deformação, (l, α) , da 1-forma

$$\Omega = Xdl + Yd\alpha. \quad (3.29)$$

Daí é fácil concluir que o sentido com que o retângulo é percorrido no espaço de formatos (isto é, a ordem em que as deformações são executadas - primeiro extensão, depois abertura das hastes, ou o contrário) determina o sinal de Δr_0 . Fisicamente, se o tripé acelera ou retarda a sua queda devido à natação.

É importante reparar que estamos usando a coordenada r_0 da partícula no vértice central para monitorar o deslocamento do tripé como um todo, o que é legítimo porque os vínculos determinam as localizações de todas as outras partículas e, por construção, após um ciclo completo, o tripé retoma seu formato original.

Usando o teorema de Stokes, a variação de r_0 pode ser reescrita como uma integral de $d\Omega$ sobre a região Π do espaço de deformações,

$$\Delta r_0 = \int_{\Pi} d\Omega. \quad (3.30)$$

Como Ω não é fechada, Δr_0 não será, em geral, zero. Vemos, então, o efeito de natação

manifestando-se em espaços-tempos curvos.

A última equação pode ser reescrita, de forma mais explícita, como

$$\Delta r_0 = \int_{\Pi} \left(\frac{\partial Y}{\partial l} - \frac{\partial X}{\partial \alpha} \right) dl \wedge d\alpha. \quad (3.31)$$

A partir daí, podemos adiantar que, para deformações Δl e $\Delta \alpha$ pequenas, Δr_0 será proporcional à área $\Delta l \Delta \alpha$ de Π , o retângulo descrito no espaço de parâmetros. Dessa forma, se a deformação é tal que define uma região de área nula no espaço de formatos (por exemplo, se o tripé estende e contrai suas hastes, mantendo o ângulo fixo, e depois abre e fecha as hastes, mantendo o comprimento fixo), não ocorrerá natação. Em suma, se as magnitudes Δl e $\Delta \alpha$ das deformações são pequenas, temos

$$\Delta r_0 = \left[\frac{\partial Y}{\partial l} - \frac{\partial X}{\partial \alpha} \right]_{(r_0, l, \alpha)} \Delta l \Delta \alpha. \quad (3.32)$$

Para calcular a expressão analítica de Δr_0 em termos dos parâmetros do nadador e da geometria do espaço-tempo, é preciso, antes, conhecer as equações de vínculo, $r_1 = g(r_0, l, \alpha)$ e $\theta_1 = h(r_0, l, \alpha)$, obter as expressões explícitas de X e Y , e calcular $\partial Y / \partial l$ e $\partial X / \partial \alpha$. Para isso, precisamos, em princípio, resolver as equações das geodésicas espaciais sobre as hipersuperfícies $t = \text{constante}$, a fim de obter as funções g e h . Esse é um problema pesado de equações diferenciais, que, no entanto, pode ser contornado, como veremos na próxima seção, no caso em que o comprimento do tripé é muito menor do que a sua distância (a rigor, do vértice central) ao centro da fonte de campo gravitacional⁷.

Equações das geodésicas das seções espaciais dos observadores estáticos

Consideremos o caso newtoniano em que o mesmo tripé deformável, sob as mesmas condições, interage com o campo gravitacional de um corpo simetricamente esférico de massa M . Na gravitação newtoniana, o espaço e o tempo não são alterados pelo campo gravitacional - o tempo é um parâmetro absoluto de evolução dos sistemas físicos, e o espaço tridimensional é euclidiano. Nesse caso, portanto, as hastes que constituem o tripé são simplesmente segmentos de reta do \mathbb{R}^3 , e os vínculos posicionais entre partículas constituintes do nadador são geometricamente triviais:

$$r_1^2 = r_0^2 + l^2 - 2r_0l \cos \alpha, \quad (3.33)$$

$$\sin \theta_1 = \frac{l}{r_1} \sin \alpha. \quad (3.34)$$

⁷Em termos práticos, essa hipótese é, obviamente, realista.

O primeiro é simplesmente uma aplicação da lei dos cossenos; o segundo, a igualdade entre os catetos opostos aos ângulos α e θ_1 nos triângulos V_0V_1P e FV_1P , respectivamente, onde V_0 denota o vértice central do tripé, V_1 denota o outro ponto extremo de uma das hastes, F denota o centro da fonte simetricamente esférica e P é o ponto de intersecção do eixo de simetria do tripé com o plano ortogonal a ele que intercepta os extremos das três hastes.

Diante disso, podemos dizer que, no caso relativístico de nosso interesse, precisamos obter os análogos das equações de vínculo acima, devidamente modificadas para as seções espaciais $t = \text{constante}$ da geometria de Schwarzschild. Mais especificamente, precisamos das geodésicas das hipersuperfícies com elemento de linha⁸

$$ds_{\perp}^2 = f^{-1}(r) dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (3.35)$$

Quando $f = 1$, obtemos as seções espaciais $t = \text{constante}$ do espaço-tempo de Minkowski, que são euclidianas. Logo, as equações de vínculo euclidianas, dadas pelas equações (3.33) e (3.34), devem ser recuperadas a partir das relativísticas quando tomarmos $f \rightarrow 1$. Esse fato será utilizado, logo mais, para ajustar apropriadamente as constantes arbitrárias advindas da integração das equações das geodésicas em Schwarzschild.

Seja h a métrica espacial associada ao elemento de linha acima. Como antes, as equações das geodésicas, com parametrização afim, podem ser obtidas da lagrangiana

$$\tilde{L} = h_{ij} \frac{dx^i}{d\zeta} \frac{dx^j}{d\zeta}, \quad (3.36)$$

onde $\{x^i\} = \{r, \theta\}$ e ζ é o parâmetro afim, por meio das equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^i} = 0, \quad (3.37)$$

onde o ponto denota a derivada com respeito a ζ . Por conveniência, vamos utilizar o comprimento próprio das geodésicas como parâmetro afim, $\zeta = l$. A forma explícita da lagrangiana é

$$\tilde{L}(l, r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = f^{-1}(r) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2. \quad (3.38)$$

É importante notar, neste ponto, que \tilde{L} não varia com l , $d\tilde{L}/dl = 0$, na medida em que não depende explicitamente dessa variável e se trata de uma lagrangiana livre⁹, isto é, sem termo de energia potencial.

⁸Notemos que $\phi = \text{constante}$ para todas as partículas do tripé.

⁹Relembrando um resultado clássico de mecânica analítica, se uma lagrangiana livre, isto é, puramente cinética, não depende explicitamente do parâmetro de evolução, então ela é uma constante de movimento.

Considerando a variação da lagrangiana em relação a θ , temos

$$\frac{d}{dl} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \theta} = 0,$$

$$\frac{d}{dl} (r^2 \dot{\theta}) = 0,$$

de modo que

$$r^2 \dot{\theta} = A, \quad (3.39)$$

onde A é independente de l , $dA/dl = 0$. Essa é a primeira equação das geodésicas, relativa à coordenada θ . Notemos que se trata de uma equação de primeira ordem, ou seja, essa é uma primeira integral¹⁰ da equação da geodésica para θ . Vamos usar essa equação e o fato de que \tilde{L} é constante para obter uma primeira integral da equação da geodésica para r :

$$\tilde{L} = f^{-1}(r) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = f^{-1}(r) \dot{r}^2 + \frac{A^2}{r^2},$$

e então

$$\dot{r}^2 = f(r) \left(\tilde{L} - \frac{A^2}{r^2} \right). \quad (3.40)$$

Essa é a segunda equação das geodésicas, relativa à coordenada r .

Podemos ver \tilde{L} e A simplesmente como constantes arbitrárias de integração. Para o nosso problema de natação, em específico, vamos ajustar \tilde{L} e A para obter os vínculos (hastes) que definem o tripé. Como já discutimos, vamos fazer isso impondo que as equações de vínculo do caso euclidiano sejam soluções das equações diferenciais (3.39) e (3.40) quando $f \rightarrow 1$.

Os vínculos euclidianos são dados pelas equações (3.33) e (3.34). Vamos, então, derivá-los em relação a l e impor que satisfaçam¹¹

$$\dot{r}_1^2 = \tilde{L} - \frac{A^2}{r_1^2}, \quad (3.41)$$

$$r_1^2 \dot{\theta}_1 = A. \quad (3.42)$$

Derivando a segunda, obtemos prontamente

¹⁰É um fato elementar de geometria diferencial que as equações da geodésica são, em geral, de segunda ordem nas coordenadas.

¹¹Aqui devemos tomar o cuidado de considerar derivadas parciais em relação a l , isto é, tratar r_0 , l e α como variáveis independentes.

$$r_1^2 \dot{\theta}_1 = r_0 \sin \alpha,$$

o que, comparando com a equação (3.42), fixa A em termos de r_0 e α ,

$$A = r_0 \sin \alpha. \quad (3.43)$$

Agora derivando a primeira, chegamos a

$$\dot{r}_1^2 = 1 - \frac{r_0^2 \sin^2 \alpha}{r_1^2},$$

e, então, quanto a \tilde{L} , fica claro que devemos ter, comparando com a equação (3.41) e usando a equação (3.43),

$$\tilde{L} = 1. \quad (3.44)$$

Portanto, as equações diferenciais que os vínculos posicionais do tripé em Schwarzschild devem satisfazer são

$$\left(\frac{\partial r_1}{\partial l} \right)^2 = f(r_1) \left(1 - \frac{r_0^2 \sin^2 \alpha}{r_1^2} \right), \quad (3.45)$$

$$r_1^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial l} = r_0 \sin \alpha, \quad (3.46)$$

obtidas substituindo-se os valores de A e \tilde{L} dados pelas equações (3.43) e (3.44) nas equações (3.39) e (3.40).

Cálculo da distância nadada

Vamos, agora, discutir o procedimento¹² que, conforme havíamos adiantado, torna desnecessário resolver completamente as equações da geodésica e determinar $r_1 = g(r_0, l, \alpha)$, $\theta_1 = h(r_0, l, \alpha)$ - somente primeiras integrais serão necessárias, integrais essas que já deduzimos na seção anterior.

Notemos que $X(r_0, l, \alpha)$ e $Y(r_0, l, \alpha)$ envolvem as derivadas parciais - $\partial r_1 / \partial r_0$, $\partial r_1 / \partial l$, $\partial r_1 / \partial \alpha$, $\partial \theta_1 / \partial r_0$, $\partial \theta_1 / \partial l$ e $\partial \theta_1 / \partial \alpha$ - das funções coordenadas vinculadas. Como consequência, ao calcularmos $\Delta r_0 = (\partial Y / \partial l - \partial X / \partial \alpha) \Delta l \Delta \alpha$, teremos, além das derivadas citadas acima, derivadas de ordem superior.

Suponhamos, agora, que o comprimento próprio l das hastes, conforme medido pelos observadores estáticos, é muito pequeno frente a alguma escala de comprimento próprio característica do problema. Como já comentamos, o espaço-tempo de Schwarzschild é esfericamente simétrico, o que quer dizer que o seu grupo de isometrias possui um

¹²O procedimento a ser utilizado foi concebido por Eduardo Guéron.

subgrupo isomorfo ao $SO(3)$. Como conseqüência, todo espaço-tempo esfericamente simétrico tem métrica invariante sob rotações, como fica claro, para Schwarzschild em especial, pelo elemento de linha dado pela equação (3.1). As órbitas desse subgrupo são esferas bidimensionais, correspondentes às seções $t = \text{constante}$, $r = \text{constante}$ do espaço-tempo de Schwarzschild, no sistema de coordenadas que estamos empregando. A métrica de cada uma dessas esferas, induzida pela métrica espaço-temporal, é completamente caracterizada pela área da superfície, e a coordenada radial r de Schwarzschild é definida como

$$r = \sqrt{\frac{A}{4\pi}}, \quad (3.47)$$

para que o elemento de linha das seções $t = \text{constante}$, $r = \text{constante}$ tenha a forma $r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$, conforme ocorre na equação (3.1). Num espaço euclidiano tridimensional, r corresponderia ao raio da esfera, mas, num espaço curvo mais geral, como temos aqui, ele *não* corresponde necessariamente a nenhuma distância física medida por algum observador - trata-se apenas de uma coordenada. Apesar disso, como r só depende da área A de cada esfera, que é uma quantidade geométrica com significado intrínseco, fisicamente mensurável, podemos escolher r_0 (a coordenada radial do vértice central do tripé) como a escala de comprimento próprio do problema a ser comparada com l . A hipótese que fazemos é, pois, $l \ll \sqrt{A/4\pi}$. Equivalentemente, podemos escrever

$$\frac{l}{r_0} \ll 1. \quad (3.48)$$

Naturalmente, qualquer outra escolha poderia ser feita sem alterar os resultados próprios que obteremos. Sob tal condição, a distância $\Delta r_0(r_0, l, \alpha)$ nadada num ciclo de deformações pode ser bem aproximada por uma série de potências de l/r_0 , truncada em alguma ordem conveniente¹³. Considerando Δr_0 como função apenas de l , para não carregar a notação, temos

$$\Delta r_0(l) = \Delta r_0(0) + \left(\frac{\partial \Delta r_0}{\partial l}\right)_{l=0} l + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Delta r_0}{\partial l^2}\right)_{l=0} l^2 + \dots \quad (3.49)$$

Os coeficientes dessa expansão envolvem, pois, derivadas adicionais de X e Y em relação a l . A grande vantagem desse procedimento é que ele exige que se conheçam as derivadas de r_1 e θ_1 em relação a r_0 , l e α apenas calculadas em $l = 0$ e, conforme veremos em seguida, é fácil obter tais valores.

Com efeito, é evidente que

¹³Como viremos a mostrar, o efeito é nulo até primeira ordem de l/r_0 , a primeira contribuição vindo do termo de segunda ordem.

$$r_1(r_0, 0, \alpha) = r_0, \quad (3.50)$$

$$\theta_1(r_0, 0, \alpha) = \theta_0, \quad (3.51)$$

ou seja, quando o comprimento da haste vai a zero, todas as partículas ocupam a mesma posição. Assim, é imediato que

$$\left(\frac{\partial r_1}{\partial r_0}\right)_{l=0} = 1,$$

$$\left(\frac{\partial \theta_1}{\partial r_0}\right)_{l=0} = 0,$$

e todas as derivadas de ordem superior de r_1 e θ_1 em relação a r_0 se anulam quando $l = 0$. Do mesmo modo, concluímos que, em $l = 0$, as derivadas de r_1 e θ_1 em relação a α se anulam,

$$\left(\frac{\partial r_1}{\partial \alpha}\right)_{l=0} = \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha}\right)_{l=0} = 0,$$

e, por conseguinte, também se anulam as derivadas de ordem superior dessas funções em relação a α , calculadas em $l = 0$.

Quanto às derivadas de r_1 e θ_1 em relação a l , para obtê-las usamos as equações da geodésica (3.45) e (3.46), deduzidas na seção anterior,

$$\left(\frac{\partial r_1}{\partial l}\right)^2 = f(r_1) \left(1 - \frac{r_0^2 \sin^2 \alpha}{r_1^2}\right),$$

$$r_1^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial l} = r_0 \sin \alpha.$$

Em primeiro lugar, vemos imediatamente que, para $l = 0$,

$$\left(\frac{\partial r_1}{\partial l}\right)_{l=0} = \pm \cos \alpha \sqrt{f(r_0)},$$

$$\left(\frac{\partial \theta_1}{\partial l}\right)_{l=0} = \frac{\sin \alpha}{r_0}.$$

Além disso, o uso dessas equações diferenciais torna possível deixar as derivadas de ordem superior dos vínculos que envolvem $\partial/\partial l$ em termos de suas derivadas em relação a r_0 e α , cujos valores em $l = 0$ já obtivemos. Por exemplo,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial l}\right) = \frac{r_0 \cos \alpha}{r_1^2} - \frac{2r_0 \sin \alpha}{r_1^3} \frac{\partial r_1}{\partial \alpha},$$

$$\left(\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \alpha \partial l}\right)_{l=0} = \frac{\cos \alpha}{r_0}.$$

Assim, podemos calcular todas as derivadas parciais de r_1 e θ_1 em $l = 0$, obtendo, dessa maneira, os coeficientes da expansão de Δr_0 em série de potências de l . Isso determina a distância coordenada Δr_0 nadada pelo tripé executando um ciclo de deformações retangular no espaço de formatos, dentro do regime de altas frequências e para $l/r_0 \ll 1$.

Em resumo, para obter a distância nadada, primeiramente calculamos Δr_0 , $\partial \Delta r_0 / \partial l$, $\partial^2 \Delta r_0 / \partial l^2$, etc., onde $\Delta r_0 = (\partial Y / \partial l - \partial X / \partial \alpha) \Delta l \Delta \alpha$, substituindo, por meio das equações das geodésicas, $\partial r_1 / \partial l$ e $\partial \theta_1 / \partial l$ por derivadas parciais em relação a r_0 e α . Em seguida, calculamos os valores de todas as derivadas em $l = 0$, fazendo $r_1 = r_0$ e $\theta_1 = \theta_0$. Por fim, substituímos $\Delta r_0(l = 0)$, $(\partial \Delta r_0 / \partial l)_{l=0}$, $(\partial^2 \Delta r_0 / \partial l^2)_{l=0}$, etc. na série de potências de l , obtendo $\Delta r_0(r_0, l, \alpha)$ até a ordem desejada de l .

Finalmente, colecionando termos de até terceira ordem em l/r_0 , obtemos por esse método,

$$\begin{aligned} \Delta r_0 = & -\frac{3m_0 m_1}{(m_0 + 3m_1)^2} \frac{GM}{c^2 r_0} \sqrt{f(r_0)} \\ & \times \left[\frac{l^2}{r_0^2} + \left(\frac{3m_1}{m_0} \sqrt{f(r_0)} + \frac{m_0 - 3m_1}{m_0 + 3m_1} \frac{GM}{c^2 r_0 \sqrt{f(r_0)}} \right) \frac{l^3}{r_0^3} \cos \alpha \right] \\ & \times \sin \alpha \Delta \alpha \Delta l + O\left(\frac{l^4}{r_0^4}\right) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Esse resultado mostra que, de fato, é possível nadar no espaço-tempo: translações espaciais podem ser alcançadas por meio de alterações cíclicas de formato, sem o auxílio de forças externas. Essa é a distância nadada em cada ciclo, de modo que, pela repetição continuada do processo de deformação, o efeito torna-se cumulativo¹⁴.

Notemos que não há natação em ordem zero (o que é natural, já que essa é a aproximação que considera o nadador como pontual e, portanto, sem estrutura para se deformar), nem em primeira ordem. O termo dominante é, pois, o de segunda ordem. Percebamos que esse termo guarda uma semelhança interessante com as soluções dos problemas de natação do capítulo anterior. Nestes, a distância nadada era proporcional ao quadrado da razão entre o tamanho do corpo e o raio de curvatura da variedade. Para a geometria de Schwarzschild, as componentes da curvatura riemanniana são proporcionais a $GM/c^2 r^3$, quantidade que pode ser vista, nesse espírito, como o inverso do quadrado de um raio efetivo de curvatura. Assim, é natural que o termo dominante da distância nadada em Schwarzschild seja proporcional a $l^2 GM/c^2 r^3$. Diante dessa

¹⁴Todavia, a distância nadada em cada ciclo não é a mesma, uma vez que r_0 muda, tanto pelo efeito de natação quanto pelo deslocamento natural do tripé sendo atraído pela fonte massiva.

semelhança, podemos especular se a proporcionalidade da distância nadada com o quadrado da razão entre o comprimento característico do nadador e o raio de curvatura do espaço ambiente seria, em ordem dominante, uma propriedade geral do fenômeno de natação. Quanto ao termo de próxima ordem, notemos que ele pode ser positivo ou negativo, dependendo das massas das partículas constituintes e da distância a que o tripé se localiza da fonte, de modo que ele pode tanto aumentar a magnitude do efeito quanto diminuí-la. Além disso, o resultado é proporcional às magnitudes Δl e $\Delta\alpha$ características da deformação do nadador, donde concluímos que, quanto mais ampla a alteração de formato, maior a distância nadada. Com relação à dependência com as massas, focando no termo dominante, vemos que, para m_0 fixada, Δr_0 é máxima quando $m_1 = m_0/3$, ou seja, quando a massa total das partículas nas pontas inferiores das hastes é igual à massa da partícula no vértice central (é fácil concluir que, nesse caso $3m_0m_1/(m_0 + 3m_1)^2 = 1/4$); ademais, novamente como nos exemplos do capítulo anterior, a dependência com as massas aparece como um fator homogêneo.

A equação (3.52) fornece a *distância coordenada* nadada. É interessante obter a *distância própria* $\Delta\chi$ correspondente, conforme medida pelos observadores estáticos. Se $\Delta r_0 \ll r_0$, ela é dada por

$$\Delta\chi \approx \text{norm}(\Pi^\mu{}_\nu q^\nu),$$

onde $u = \partial_t/\sqrt{f(r)}$ é a quadravelocidade desses observadores, $\Pi^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + u^\mu u_\nu$, $q^\mu = (T, \Delta r_0, 0, 0)$ e $\text{norm}(a^\mu) = \sqrt{|g_{\mu\nu}a^\mu a^\nu|}$, para um dado quadrivetor a . É fácil obter, então,

$$\Delta\chi \approx \frac{\Delta r_0}{\sqrt{f(r_0)}}. \quad (3.53)$$

Portanto, usando a equação (3.52), temos, considerando apenas o termo dominante (que foi o resultado obtido por Wisdom),

$$\Delta\chi \approx -\frac{3m_0m_1}{(m_0 + 3m_1)^2} \frac{GM}{c^2 r_0} \frac{l^2}{r_0^2} \sin\alpha \Delta\alpha \Delta l + O\left(\frac{l^3}{r_0^3}\right). \quad (3.54)$$

Levando em conta a igualdade (3.47) e lembrando que o raio de Schwarzschild é $r_S = 2GM/c^2$, a equação acima pode ser reescrita como

$$\Delta\chi \approx \frac{-6\pi m_0m_1}{(m_0 + 3m_1)^2} \sqrt{\frac{A_S}{A_0}} \frac{l^2}{A_0} \sin\alpha \Delta\alpha \Delta l, \quad (3.55)$$

onde A_0 é a área (conforme medida pelos observadores estáticos) da esfera definida pela seção $t = \text{constante}$, $r = r_0$ do espaço-tempo e A_S , a da seção $t = \text{constante}$, $r = r_S$. Todas as quantidades na equação acima são próprias, o que confirma o caráter escalar de $\Delta\chi$.

Consideremos, agora, $0 < \alpha < \pi/2$, de modo que $0 < \sin \alpha < 1$ e $\Delta\alpha < \pi/2$. Além disso, como já comentamos, $3m_0m_1/(m_0 + 3m_1)^2 \leq 1/4$. Por conseguinte, $3m_0m_1/(m_0 + 3m_1)^2 \times \sin \alpha \Delta\alpha \leq \pi/8 < 1$, e então

$$|\Delta\chi| < (GM/c^2r_0) (l^2/r_0^2) \Delta l. \quad (3.56)$$

Agora, na medida em que $r_0 > 2M$, temos $GM/c^2r_0 < G/2c^2 \ll 1$; além disso, por hipótese, $l \ll r_0$. Assim, assumindo que o termo de segunda ordem é efetivamente dominante¹⁵, concluímos que

$$\Delta\chi \ll \Delta l. \quad (3.57)$$

É interessante notar que, devido ao fator multiplicativo $\sqrt{f(r_0)}$, o termo dominante da distância coordenada nadada Δr_0 tende a zero quando $r_0 \rightarrow 2M$, isto é, quando o tripé se aproxima do horizonte de eventos, ao passo que a distância própria nadada $\Delta\chi$, ao contrário, aumenta nesse mesmo limite. Podemos entender que a distância *própria* nadada aumenta perto do horizonte como uma consequência do fato de que a curvatura do espaço-tempo fica maior nessa região. Vamos, agora, tentar interpretar por que a distância *coordenada* nadada, por outro lado, diminui nessa região. Perto do horizonte, o elemento de linha da seção $\theta, \phi = \text{constantes}$ de Schwarzschild pode ser aproximado por¹⁶ (veja a referência [28]) $ds^2 \approx (\rho c^2/4GM)^2 c^2 dt^2 - d\rho^2$, onde $\rho = (4GM/c^2) / \sqrt{f(r)^{-1} - 1}$, que tem curvatura nula. Assim, podemos entender que, do mesmo modo como Δr_0 se anula em espaços-tempos planos, essa quantidade será limitada nas proximidades do horizonte.

Uma questão interessante é se o tripé poderia, dentro de alguma circunstância, evitar a sua queda por natação, afastando-se da fonte. A resposta a essa pergunta é negativa, dentro das hipóteses que colocamos para estudar o fenômeno. Seja v a velocidade *própria* média dos movimentos de deformação. O período *coordenado* do movimento é T ; o período *próprio* \tilde{T} é, então, dado por

$$\tilde{T} \approx g_{\mu\nu} u^\mu q^\nu,$$

onde $u = \partial_t / \sqrt{f(r)}$ e $q^\mu = (T, \Delta r_0, 0, 0)$, como antes. Calculando explicitamente, obtemos sem dificuldade

$$\tilde{T} \approx T \sqrt{f(r_0)}. \quad (3.58)$$

Assim, se estimamos que $v \sim l/\tilde{T}$, obtemos $T \sim l/v\sqrt{f(r_0)}$. Ademais, como já mostramos, no regime de altas frequências de deformação, a distância coordenada que

¹⁵Esse pode não ser o caso. Por exemplo, se $r_0 \rightarrow 2M$, dependendo dos valores das massas, por causa do fator $1/\sqrt{f_0}$.

¹⁶Essa é uma chamada cunha de Rindler.

o tripé *rígido* cai, num período T , é $|\Delta r_0^R| \sim GMf(r_0)T^2/r_0^2$, conforme a equação (3.20). Combinando esses dois resultados, obtemos

$$|\Delta r_0^R| \sim GMl^2/v^2r_0^2,$$

e então, como necessariamente $v < c$,

$$|\Delta r_0^R| > GMl^2/c^2r_0^2. \quad (3.59)$$

Das equações (3.53) e (3.56), temos

$$|\Delta r_0| < (GM/c^2r_0) (l^2/r_0^2) \sqrt{f(r_0)}\Delta l. \quad (3.60)$$

Essas duas últimas desigualdades implicam que

$$|\Delta r_0| < |\Delta r_0^R| \sqrt{f(r_0)} \frac{\Delta l}{r_0}$$

Agora, na medida em que $\sqrt{f(r_0)} < 1$ (porque $r_0 > 2M$) e $\Delta l/r_0 \ll 1$, concluímos que

$$|\Delta r_0| \ll |\Delta r_0^R|. \quad (3.61)$$

Ou seja, a distância que o tripé cai, em cada ciclo, devido à atração gravitacional é muito maior do que a distância que ele pode subir devido à natação.

Considerando apenas a primeira ordem não-nula da distância nadada, a equação (3.52) permite estimar que, para um tripé com tamanho e deformações com magnitude da ordem de 1 metro, nadando próximo da superfície terrestre, a distância nadada num ciclo seria da ordem de 10^{-27} metros. Conseqüentemente, é de se esperar que não haja aplicabilidade prática para o efeito de natação, a despeito de possíveis melhorias da engenharia do nadador. De qualquer forma, o efeito tem bastante mérito conceitual, por mostrar que um corpo pode efetivamente se deslocar sem o auxílio de forças externas. Nas palavras do astrofísico Edmund Bertschinger do MIT: "É uma linda idéia, que abre um novo filão dentro da dinâmica de corpos rígidos em relatividade geral."

Existe um outro aspecto nessa forma de propulsão que a torna única: a natação é obtida pelo trabalho realizado exclusivamente pelo próprio corpo quase-rígido e, diferentemente do que ocorre em deslocamentos por ejeção de matéria, toda a energia do combustível é aproveitada para a locomoção. Além disso, existe, a princípio, a possibilidade de que o efeito tenha maior relevância prática num contexto cosmológico, por seu caráter cumulativo, assumindo-se que o movimento cíclico se repita por, possivelmente, bilhões de anos (veja o Capítulo 5).

Por fim, notemos que esse efeito é *puramente relativístico*, na medida em que $\Delta r_0 \rightarrow 0$ quando $c \rightarrow \infty$. Como observou Wisdom, isso indica a *inexistência de um*

limite newtoniano para o efeito de natação no espaço-tempo, um resultado bastante contundente. No entanto, Geoffrey Landis questionou essa afirmação de Wisdom, argumentando que o efeito já era conhecido pelos engenheiros astronáuticos, que haviam mostrado (veja a referência [17]) que corpos deformáveis podiam modificar sua órbita pela alteração do seu formato num gradiente gravitacional newtoniano, como uma consequência das forças de maré. Na próxima seção, vamos mostrar que esse efeito, embora realmente existente, é diferente da natação no espaço-tempo descoberta por Wisdom. Enquanto esta é um efeito puramente local, de fases geométricas - a distância nadada não depende da rapidez com que os ciclos de deformação são executados - e totalmente dependente da presença de curvatura intrínseca no espaço ambiente, o efeito apontado por Landis é não-local, dependente da rapidez com que as deformações são realizadas, e é suprimido no regime de altas frequências de deformações, diferentemente do efeito Wisdom, como vimos.

3.4 Estudo do movimento de corpos deformáveis num campo gravitacional newtoniano

Vamos estudar o movimento de corpos quase-rígidos deformáveis num campo gravitacional newtoniano simetricamente esférico e estático, mostrando que, de fato, eles podem alterar sua trajetória, devido a forças de maré, se as alterações de formato são não-locais, aproveitando o gradiente de campo gravitacional, que faz com que o trabalho líquido num ciclo completo de deformações seja não-nulo. Nosso objetivo é esclarecer a diferença essencial entre esse fenômeno e o efeito Wisdom. Em primeiro lugar, como uma ilustração do efeito newtoniano, vamos estudar o caso de um corpo deformável em formato de haltere, com uma partícula em cada extremidade e comprimento não-desprezível, em órbita ao redor de uma fonte massiva simetricamente esférica, mostrando que ele pode, efetivamente, alterar os parâmetros de sua órbita pela variação cíclica do seu comprimento. Em seguida, vamos estudar o comportamento, num campo gravitacional newtoniano, do mesmo tripé que evocamos para estudar o caso relativístico, e mostrar que, pelo efeito de maré, ele pode alterar sua trajetória de queda, mas que esse fenômeno é não-local e *não* tem características de fase geométrica, sendo, portanto, distinto do efeito Wisdom. Por fim, demonstramos de maneira bastante geral que o fenômeno de natação, enquanto um efeito local de fases geométricas, *não* pode se manifestar para potenciais newtonianos, e mesmo pós-newtonianos, sobre um espaço ambiente plano.

3.4.1 Alteração da órbita de um haltere ciclicamente deformável em um campo gravitacional newtoniano simetricamente esférico e estático

Consideremos um corpo em formato de haltere em órbita circular nas proximidades da superfície da Terra. O haltere consiste de duas partículas de mesma massa m conectadas por uma haste de comprimento $2L$ e massa desprezível. O corpo é equipado com dois motores suficientemente pequenos: um reponsável por aproximar e afastar as partículas ao longo do haltere (fazendo assim, com que o corpo se estenda e se contraia), e outro encarregado de rodar o corpo ao redor do seu centro de massa, a fim de controlar a sua orientação. Assumimos que o corpo está orientado radialmente com respeito à Terra, e cada uma das partículas está a distâncias $R + L$ e $R - L$ do centro gravitacional, onde R é, então, a distância entre esse ponto, que escolhemos como a origem do sistema de coordenadas, e o centro de massa do corpo. Suponhamos que a velocidade angular orbital inicial do centro de massa seja ω , com rotação no sentido anti-horário, e que o corpo gire em torno do seu centro de massa com a mesma velocidade angular inicial e no mesmo sentido, de modo a se manter sempre apontando para o centro da Terra. É possível provar que uma tal órbita circular é estável.

A idéia é, usando os motores, contrair e estender o haltere em pontos diferentes da trajetória, sem alterar a sua orientação, de modo que o trabalho realizado contra as forças de maré, advindas do gradiente de campo gravitacional, seja diferente em cada parte do processo, o que altera a energia orbital total do sistema, modificando, conseqüentemente, a sua órbita.

Dentro desse espírito, suponhamos que, usando o motor de translação, as partículas sejam simetricamente aproximadas até chegarem ao centro de massa (que não se altera no decorrer de todo o deslocamento), e que o processo seja rápido o suficiente para que o corpo não se desloque significativamente ao longo de sua órbita (ou seja, que o intervalo de tempo que a contração leva seja muito menor do que o período orbital). Além disso, assumimos que o motor de rotação é usado para manter a orientação radial do haltere durante todo o processo.

Quando cada partícula encontra-se a uma distância x do centro de massa, a força total sobre a partícula exterior é $-GMm/(R+x)^2 - T(x)$, onde $T(x)$ é a tração exercida pela haste. Essa força é igual à força centrípeta da órbita circular,

$$\frac{GMm}{(R+x)^2} + T(x) = m\omega^2(R+x). \quad (3.62)$$

Do mesmo modo, a força sobre a partícula interior é $-GMm/(R-x)^2 + T(x)$, e temos

$$\frac{GMm}{(R-x)^2} - T(x) = m\omega^2(R-x). \quad (3.63)$$

Subtraindo essas duas equações, obtemos

$$-2GMm \frac{Rx}{(R^2 - x^2)^2} + T(x) = m\omega^2 x. \quad (3.64)$$

Agora as somando, temos

$$GM \frac{R^2 + x^2}{(R^2 - x^2)^2} = \omega^2 R. \quad (3.65)$$

Isso mostra que a força total sobre o sistema, que é a soma das forças sobre as partículas individuais, deve ser igual à força centrípeta sobre o centro de massa em movimento circular. Desprezando termos da ordem de x^2/R^2 , essa última equação é reescrita como

$$\omega^2 \approx \frac{GM}{R^3}. \quad (3.66)$$

Agora, substituímos a equação (3.66) na equação (3.64), o que dá

$$T(x) = GMm \frac{x}{R^3} + 2GMm \frac{Rx}{(R^2 - x^2)^2} \quad (3.67)$$

Novamente desprezando termos da ordem de x^2/R^2 , chegamos a

$$T(x) \approx 3GMm \frac{x}{R^3}. \quad (3.68)$$

Lembremos que a força $T(x)$ é a tração aplicada pelo motor de translação sobre cada uma das partículas (naturalmente, em sentidos opostos para cada uma delas), através da haste, para levá-las até o centro do haltere, quando elas distam x do centro de massa. Notemos que, nessa equação $T(x)$ representa a magnitude da tração, sem incluir o sentido. Para a partícula mais externa, a tração é $T_e = -T(x)$; para a mais interna, é $T_i = T(x)$. Cada partícula desloca-se, nesse processo, uma distância L . Para provocar esse movimento, o motor de translação realiza, então, um trabalho total que altera a energia total do sistema, e que vamos agora calcular. Para levar a partícula mais externa de $R + L$ até R , ele realiza um trabalho

$$W_{T^e} = \int_{R+L}^R -T(r - R) dr = \frac{3GMm}{R^3} \int_R^{R+L} (r - R) dr,$$

que dá

$$W_{T^e} = \frac{3GMm}{R^3} \frac{L^2}{2}.$$

É fácil ver que o trabalho realizado para levar a partícula mais interna de $R - L$ até R tem o mesmo valor, de modo que o trabalho translacional total é

$$W_T = 3GMm \frac{L^2}{R^3}. \quad (3.69)$$

Adicionalmente, o motor de rotação deve realizar trabalho para evitar que o haltere perca a sua orientação radial à medida que as partículas são puxadas até o seu centro. Como a energia rotacional é zero quando as partículas estão no centro de massa do haltere, esse trabalho é, por conservação de energia, igual à energia cinética de rotação em torno do centro de massa na configuração inicial do sistema,

$$W_R = \frac{1}{2}I\omega^2, \quad (3.70)$$

onde $I = 2mL^2$ é o momento de inércia do haltere distendido em rotação em torno do seu centro de massa. Usando a equação (3.66), obtemos

$$W_R = GMm\frac{L^2}{R^3}. \quad (3.71)$$

Logo, o trabalho total realizado pelo sistema de motores do sistema é

$$W = W_T + W_R = 4GMm\frac{L^2}{R^3}. \quad (3.72)$$

Esse trabalho representa uma transformação de energia combustível dos motores em energia mecânica do movimento orbital¹⁷ do haltere, aumentando-a. Como consequência, a órbita também se altera, e vamos calcular, em seguida, de quanto.

É possível mostrar (veja a referência [30]) que a energia total de uma partícula de massa μ em órbita elíptica de semi-eixo maior a no campo gravitacional conservativo de uma fonte simetricamente esférica de massa M é

$$\mathcal{E} = -\frac{GM\mu}{2a}.$$

Em particular, para um movimento circular, o semi-eixo maior é igual ao raio da órbita. Para o nosso problema, então, a energia total inicial do sistema é simplesmente¹⁸

$$E_I = -\frac{GMm}{2} \left(\frac{1}{R+L} + \frac{1}{R-L} \right). \quad (3.73)$$

A menos de termos da ordem de L^2/R^2 , isso equivale a

$$E_I \approx -\frac{GMm}{R}. \quad (3.74)$$

Depois que as massas são levadas até o centro do haltere, o problema se reduz àquele de uma partícula de massa $2m$ numa órbita elíptica¹⁹ de semi-eixo maior R' . Dessa maneira, a energia mecânica final do sistema é

¹⁷Apenas orbital, porque, após esse processo de contração, como já comentamos, o corpo não está rodando - ele se reduz, por assim dizer, a única partícula de massa $2m$.

¹⁸Aqui estamos considerando apenas a energia orbital, cinética e potencial, pois a energia de rotação do haltere em torno do seu centro de massa é, dentro da precisão que nos interessa, desprezível frente a ela.

¹⁹Depois da deformação, a órbita elíptica que o corpo descreve não precisa ser circular.

$$E_F = -\frac{GM(2m)}{2R'} = -\frac{GMm}{R'}. \quad (3.75)$$

A variação de energia mecânica no processo é, portanto,

$$\Delta E = E_F - E_I = -GMm \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \right), \quad (3.76)$$

ou seja,

$$\Delta E = GMm \frac{R' - R}{R'R}. \quad (3.77)$$

Definindo

$$\delta R_1 = R' - R, \quad (3.78)$$

e considerando que $R' \approx R$, podemos escrever

$$\Delta E \approx GMm \frac{\delta R_1}{R^2}. \quad (3.79)$$

A variação de energia ΔE é igual ao trabalho W realizado pelos motores, $\Delta E = W$, de modo que, usando as equações (3.72) e (3.79), chegamos a

$$GMm \frac{\delta R_1}{R^2} = 4GMm \frac{L^2}{R^3},$$

de onde tiramos a variação do semi-eixo maior da órbita do sistema depois de as massas serem levadas ao centro do haltere:

$$\delta R_1 \approx \frac{4L^2}{R}. \quad (3.80)$$

A equação (3.80) mostra que, sendo δR_1 positivo, temos $R' = R + \delta R_1 > R$, ou seja, quando o haltere se fecha totalmente, o semi-eixo maior da nova órbita é maior do que o da antiga. É o semi-eixo menor da nova órbita elíptica que se encontra na posição da manobra e, portanto, o centro de massa move-se ligeiramente para dentro nesse processo. A velocidade inicial, completamente tangencial, adquire uma pequena componente radial, apontando para dentro. Com isso, a energia potencial gravitacional torna-se mais negativa; como a energia total aumenta, dado o trabalho positivo realizado pelos motores, concluímos que a energia cinética também tem de aumentar, e o centro de massa adquire, assim, maior velocidade. De fato, suponhamos que inicialmente temos $E_I = T_I + U_I$, onde T_I é a energia cinética inicial e U_I , a potencial. Podemos escrever, diante do fato de que a energia total aumenta e a energia potencial diminui, $E_F = E_I + \epsilon$ e $U_F = U_I - \kappa$, onde ϵ e κ são reais positivos e T_F e U_F são as energias cinética e potencial finais, respectivamente. Desse modo, no estado final, $E_I + \epsilon = U_I - \kappa + T_F$, e então $T_F = E_I - U_I + \epsilon + \kappa = T_I + (\epsilon + \kappa) > T_I$.

Precisamos ainda, porém, calcular de quanto é a variação δR_2 do semi-eixo maior quando o haltere volta a se estender até o seu comprimento original de $2L$, completando um ciclo fechado de deformações. Isso pode ser feito prontamente usando a equação (3.80) com $R' = R + \delta R_1$ no lugar de R , notando-se apenas que, no processo de abertura do haltere, o trabalho realizado é negativo, de modo que a nova variação do semi-eixo maior também o será. Por esse procedimento, obtemos

$$\delta R_2 \approx -\frac{4L^2}{R + 4L^2/R} \approx -\frac{4L^2}{R} \left(1 - \frac{4L^2}{R^2}\right), \quad (3.81)$$

ou seja,

$$\delta R_2 \approx -\frac{4L^2}{R} + \frac{16L^4}{R^3}. \quad (3.82)$$

Logo, num ciclo completo de fechamento e reabertura do haltere, a variação líquida do semi-eixo maior da órbita é

$$\delta R \approx \delta R_1 + \delta R_2 \approx \frac{16L^4}{R^3}. \quad (3.83)$$

Vemos que, quando o ciclo completo é executado, o centro de massa *não* retorna à sua órbita original: o semi-eixo maior da trajetória elíptica aumenta. Isso quer dizer que a energia total fica menos negativa, e que a excentricidade da órbita, por conseguinte, também aumenta. Mostramos, assim, que deformações de um corpo extenso num campo gravitacional newtoniano pode induzir a alteração dos parâmetros de sua órbita. A princípio, esse efeito parece ser, então, candidato a análogo newtoniano do efeito Wisdom. Como discutiremos adiante, embora esse efeito seja genuíno, é de natureza distinta da natação em espaços-tempos curvos.

Esse efeito se deve a um trabalho líquido não-nulo, obtido quando somamos as contribuições devidas à abertura (trabalho positivo) e ao fechamento (trabalho negativo) do haltere, que se dão em posições orbitais diferentes - considerando, por exemplo, a equação (3.69), vemos que, substituindo R por $R - \delta R_1$, obtemos um trabalho (negativo) levemente maior (em valor absoluto) na abertura do haltere do que aquele (positivo) realizado no seu fechamento, e esse trabalho total não-nulo altera a energia orbital, acarretando a modificação da órbita. Ocorre, dessa maneira, que o fato de a abertura e o fechamento se darem em posições orbitais diferentes é fundamental para o efeito ser não-nulo no ciclo completo. Portanto, é essencial para a manifestação do efeito a existência de um gradiente de campo gravitacional entre as regiões distintas em que se dão as diversas etapas do processo cíclico de deformação.

Para um haltere com $L \sim 1$ metro, com órbita próxima à superfície da Terra, $\delta R \sim 10^{-20}$ metros. Embora seja um resultado bastante inexpressivo para todos os fins práticos, é várias ordens de grandeza maior do que o efeito relativístico que calculamos para o caso do tripé em Schwarzschild. Apesar disso, como veremos adiante, num dado

limite, o efeito newtoniano é suprimido e o relativístico pode predominar.

Nosso cálculo foi feito com a hipótese de que as deformações são realizadas num intervalo de tempo pequeno frente ao período orbital do corpo. Deixando essa hipótese de lado, todavia, há meios muito mais eficiente de o corpo atingir um deslocamento mais expressivo: deformando-se em pontos *distantes* da órbita, ele pode absorver mais energia, pois o trabalho líquido pode, nesse caso, ser significativamente maior. Por exemplo, se o haltere tem inicialmente uma órbita elíptica com excentricidade acentuada, é conveniente realizar a manobra de fechamento no periélio, para maximizar o ganho de trabalho, de acordo com a equação (3.72), e a de abertura no afélio, onde o campo gravitacional é significativamente menor e o trabalho cedido, quase desprezível. A variação de energia orbital, nesse caso, é muito mais significativa.

Em suma, o feito de um corpo deformável de alterar os parâmetros de sua órbita num campo gravitacional newtoniano é alcançado porque o trabalho líquido de um ciclo completo de deformações é não-nulo, provocando variação da sua energia orbital, graças ao fato de haver um gradiente de campo gravitacional entre as diferentes regiões do espaço em que ocorrem as diversas etapas do processo. Trata-se, pois, de um *efeito de forças de maré*. Esse efeito é, assim, claramente *não-local*: depende do gradiente de campo. O efeito Wisdom, por outro lado, é *local*, dependendo apenas, no que tange ao espaço ambiente, da sua curvatura local. Além disso, esse não é um fenômeno de fases geométricas, ao contrário do efeito Wisdom²⁰, na medida em que depende da rapidez com que as deformações são executadas: se o haltere se abre e fecha muito rapidamente, o trabalho total tende a zero e o efeito é, assim, suprimido. Para otimizar o efeito, como já comentamos, cada etapa do ciclo de deformações deve ser realizado em pontos específicos (em geral, distantes) da trajetória, de forma muito parecida com o que ocorre com um indivíduo brincando num balanço de parques de recreação, que modifica a amplitude da oscilação contraindo e estendendo suas pernas em pontos particulares da trajetória, sincronizadamente. Se ele aumenta ou diminui a frequência do movimento de suas pernas, saindo de sincronia, o efeito de aumento da amplitude é minimizado, podendo inclusive ser suprimido, como efetivamente ocorre quando a frequência é muito alta. O efeito newtoniano é, pois, um *efeito de ressonância*, já que depende do ajuste entre a frequência orbital do corpo e a sua frequência de deformações; o efeito Wisdom, por sua vez, é de *fases geométricas*, completamente independente de quão rapidamente as deformações são realizadas (importa apenas a seqüência de formatos assumidos, ou seja, o circuito descrito no espaço de formatos).

²⁰Pode parecer, num primeiro momento, que a natação em Schwarzschild depende da rapidez com que são realizadas as deformações, uma vez que tomamos o limite de altas frequências. No entanto, fizemos essa escolha apenas para simplificar os cálculos, pois ela fornece uma lei de conservação aproximada, e ela não é essencial para que haja natação. De fato, no Capítulo 4, vamos ver que a natação em espaços-tempos com seção espacial totalmente simétrica, onde as leis de conservação se associam às isometrias da métrica espacial, *não* depende da rapidez com que se realizam as variações de formato.

Para marcar a diferença entre esses dois efeitos - quais sejam, o de translação em espaços ambientes curvos por deformações cíclicas e o de alteração da órbita por deformações não-locais num campo gravitacional newtoniano não-uniforme -, vamos chamar, doravante, o primeiro de *efeito de natação*, ou *efeito Wisdom*, e o segundo de *efeito de balanço*²¹, a exemplo do que fizeram Eduardo Guéron, Clóvis Maia e George Matsas (referência [19]).

Por fim, notemos que o efeito de natação depende de uma área não-nula associada ao interior da curva fechada descrita pelas deformações do corpo no espaço de formatos. Em particular, se a área é nula - por exemplo, se há apenas um parâmetro de deformação, ou seja, se o espaço de formatos é unidimensional - o efeito de natação não se manifesta. O efeito de balanço, por outro lado, pode se manifestar mesmo quando essa área é zero, como verificamos no caso do haltere estudado, cujo único parâmetro de deformação era o seu comprimento. Essa diferença entre os dois efeitos é ilustrada na Figura 3.2.

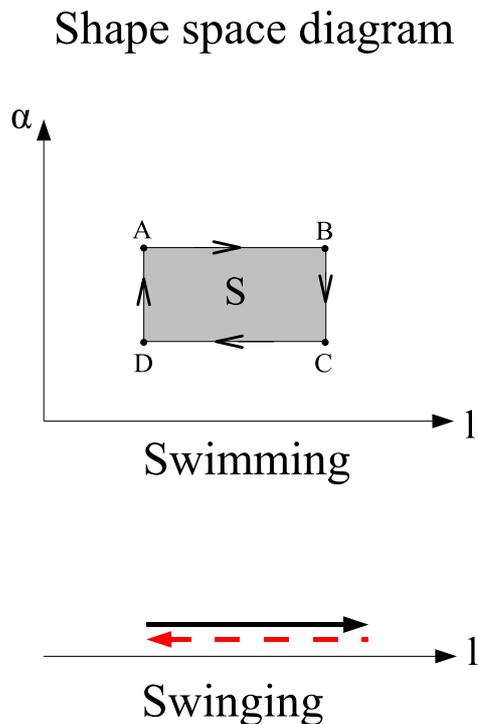


Figura 3.2: No gráfico superior, vemos um diagrama típico do espaço de formatos de um corpo deformável capaz de nadar no espaço-tempo: a área do interior da curva descrita por um ciclo fechado de deformações é não-nula. Se o corpo se deformasse segundo apenas um parâmetro, como no gráfico inferior, o efeito Wisdom não se manifestaria; o efeito de balanço, todavia, poderia ainda assim estar presente.

Para liquidar essa discussão, vamos, na próxima seção, estudar o movimento do

²¹Esse nome é motivado tanto pela analogia com os balanços de parques de recreação quanto pelo fato de esse efeito depende de um balanço de trabalho não-nulo num ciclo completo.

mesmo tripé que adotamos para o estudo da natação em Schwarzschild, mas agora inserido no espaço euclidiano com um campo gravitacional newtoniano simetricamente esférico e estático. Teremos, assim, como comparar os casos relativístico e newtoniano em situações perfeitamente correspondentes.

3.4.2 Efeito de balanço de um tripé num campo gravitacional newtoniano: estudo comparativo com o efeito de natação relativístico de Wisdom

Consideremos um corpo simetricamente esférico e estático de massa M no espaço euclidiano. Ele é fonte de um campo gravitacional que pode ser descrito pelo potencial

$$U(r) = -\frac{GM}{r}, \quad (3.84)$$

em coordenadas polares esféricas com origem no centro do corpo.

Consideremos como corpo quase-rígido deformável o mesmo tripé que adotamos quando estudamos a natação relativística. Revisando, trata-se de uma partícula de massa m_0 posicionada num vértice central do qual se estendem três hastes *retas* de mesmo comprimento l e com igual espaçamento angular azimutal $2\pi/3$; na extremidade de cada uma dessas hastes estão conectadas partículas de mesma massa m_1 . O tripé é orientado radialmente com o corpo fonte, isto é, de modo que as três hastes, voltadas para baixo, formem um mesmo ângulo α com o raio vetor que liga a origem do sistema de coordenadas ao vértice central do tripé. Ademais, o tripé é projetado para contrair e estender as suas hastes, $l = l(t)$, assim como abri-las e fechá-las, $\alpha = \alpha(t)$, de Δl e $\Delta\alpha$, respectivamente, retomando o seu formato original a cada intervalo de tempo T , que é, pois, o período de cada ciclo completo de deformações. Notemos uma diferença crucial entre esse caso e o relativístico: enquanto neste último as hastes eram construídas como geodésicas das seções espaciais *curvas* dos observadores estáticos de Schwarzschild, aqui elas são tomadas simplesmente como segmentos de reta, que são geodésicas do espaço euclidiano. Como já discutimos, os vínculos posicionais que definem o tripé, e que permitem escrever as coordenadas das partículas nas extremidades das hastes em termos das coordenadas da partícula central, são dados, considerado coordenadas $\{r_a, \theta_a, \phi_a\}$, com $a = 0, 1, 2, 3$, para as partículas, onde $a = 0$ discrimina a partícula central das demais, pelas equações (3.33) e (3.34),

$$r_1^2 = r_0^2 + l^2 - 2r_0l \cos \alpha,$$

$$\sin \theta_1 = \frac{l}{r_1} \sin \alpha,$$

com $r_1 = r_2 = r_3$ e $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$. Além disso, pela simetria do problema, sabemos que

$\dot{\theta}_0 = \dot{\phi}_a = 0$, para $a = 0, 1, 2, 3$, onde os pontos denotam derivadas temporais totais.

A lagrangiana do tripé é dada pela soma das lagrangianas individuais de cada partícula constituinte,

$$L = \sum_{a=0}^3 \frac{GMm_a}{r_a} + \sum_{a=0}^3 \frac{1}{2} m_a \left(\dot{r}_a^2 + r_a^2 \dot{\theta}_a^2 + r_a^2 \sin^2 \theta_a \dot{\phi}_a^2 \right). \quad (3.85)$$

Dados os vínculos, podemos considerar r_0 e $p_{r_0} = \partial L / \partial \dot{r}_0$ como as únicas variáveis dinâmicas independentes. Integrando numericamente as equações de Euler-Lagrange correspondentes a r_0 , com os vínculos devidamente implementados, Guéron, Maia e Matsas obtiveram a evolução $r_0 = r_0(t)$ completa do sistema para o ciclo de deformações retratado na Figura 3.3.

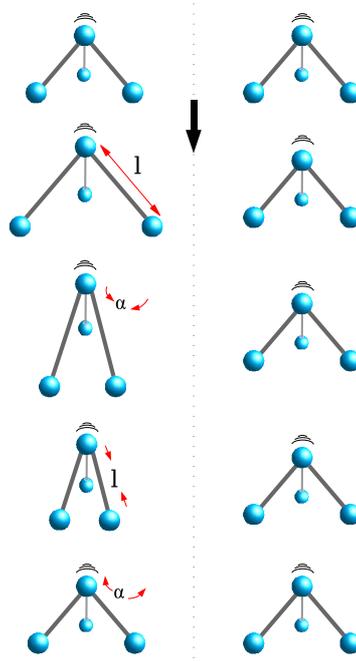


Figura 3.3: Um ciclo completo de deformações do tripé em queda usado na integração numérica das equações de movimento de natação, ao lado de um tripé idêntico, mas rígido, com mesmas condições iniciais. A idéia é comparar o movimento de ambos num período T do ciclo de deformações, determinando a diferença entre os seus deslocamentos, o que dá a distância nadada via efeito Wisdom. Podemos ver que o ciclo de deformações considerado consiste em estender a haste de Δl , mantendo α fixado; fechar as hastes de $\Delta\alpha$, mantendo l fixado; contrair até reobter o comprimento original das hastes, sem alterar o ângulo; e, finalmente, abrir as hastes até chegar ao ângulo original, sem alterar o comprimento. Na simulação assumiu-se que cada uma dessas quatro etapas leva $1/4$ do período total.

A quantidade que interessa determinar é a diferença

$$\Delta r_0 = \left| r_0^{\text{quase-rigido}} - r_0^{\text{rigido}} \right|, \quad (3.86)$$

entre o deslocamento do tripé que se deforma ciclicamente e o deslocamento de um tripé idêntico, com mesmas condições iniciais, mas rígido, num intervalo de tempo T - ou seja, o quanto o tripé deformável falha em seguir sua trajetória natural num período

de ciclo completo. Essa é a distância nadada devido ao efeito Wisdom.

O resultado, $\Delta^C r_0$, onde o índice C destaca que se trata do caso clássico (newtoniano), para valores fixados dos parâmetros do problema ($M, r_0, m_0, m_1, l, \alpha, \Delta l$ e $\Delta\alpha$), é exibido na Figura 3.4, em linha cheia, como função da frequência ω do movimento periódico de deformações. Vemos claramente que, quanto mais rapidamente são realizadas as alterações de formato, menor é o deslocamento Δr_0 obtido; reciprocamente, o efeito aumenta à medida que a frequência de deformações diminui. Isso está de acordo com o fato de que esse é um efeito não-local que depende de forças de maré significativas entre os pontos da órbita em que cada parte do ciclo é efetuada, conforme já discutimos. Na mesma figura, em linha tracejada, temos o resultado para o mesmo problema tratado relativisticamente, $\Delta^R r_0$, isto é, considerando o tripé no espaço-tempo de Schwarzschild, conforme estudamos no início deste capítulo. Esse resultado pode, pois, ser obtido diretamente usando-se a equação (3.52), para o regime de altas frequências, no qual $\Delta^R r_0$ não depende de ω . Vemos que, para frequências suficientemente altas²², o efeito de natação pode predominar sobre o de balanço - que é suprimido, nesse limite, como consequência de sua não-localidade - por várias ordens de magnitude. Naturalmente, esperamos que uma simulação numérica completa no contexto de relatividade geral aproxime-se suavemente dos resultados de balanço e de natação para baixas e altas frequências, respectivamente.

O fato de que $\Delta^C r_0 \rightarrow 0$ no limite de altas frequências indica, não apenas que o efeito de balanço é suprimido nesse regime, como também que o efeito de natação *não* se manifesta no espaço euclidiano com um campo gravitacional. De fato, se $\Delta^C r_0$ incluísse ambos os efeitos, eles deveriam aparecer na simulação numérica completa efetuada e, quando a contribuição de balanço evanescesse, restaria ainda o de natação. O resultado obtido mostra que esse não é o caso. Isso confirma que o efeito de natação, conforme esperávamos, *não* tem um limite newtoniano.

Para entender melhor o regime de altas frequências do tripé no campo gravitacional newtoniano, vamos fazer, na próxima seção, um estudo analítico desse caso, seguindo a mesma estratégia empregada no caso relativístico.

Limite de altas frequências do tripé no campo gravitacional newtoniano

Por regime de altas frequências entendemos, como no caso relativístico, aquele em que as deformações são realizadas rápido o suficiente para que o tripé, no período T de um ciclo completo, não caia significativamente em relação a Δl . O tripé livre cai, num tal intervalo de tempo, de aproximadamente

$$\Delta r \approx \frac{1}{2} \frac{GM}{r_0^2} T^2. \quad (3.87)$$

²²É importante mencionar que, nas simulações realizadas, tomou-se o cuidado de manter sempre velocidades estritamente menores do que a da luz.

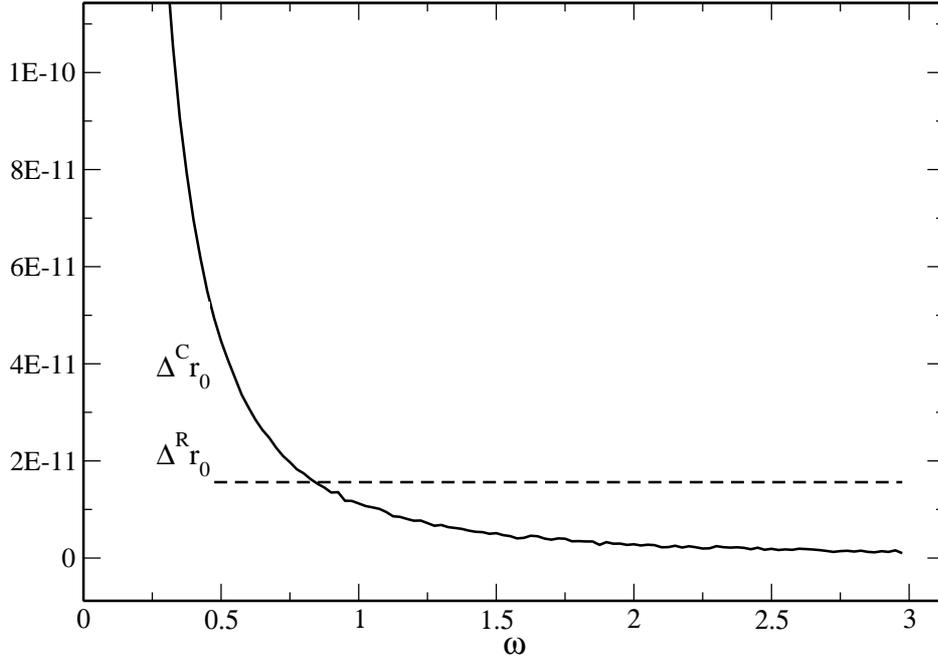


Figura 3.4: As linhas cheia e pontilhada mostram, respectivamente, $\Delta^C r_0 \doteq (r_0^{quase-rigido} - r_0^{rigido})_{newton}$ e $\Delta^R r_0 \doteq (r_0^{quase-rigido} - r_0^{rigido})_{rel}$, isto é, de quanto o tripé deformável em queda livre falha em seguir um tripé rígido (ou seja, de formato fixo) do mesmo tipo depois de um ciclo completo de deformações, nos casos newtoniano (campo gravitacional central do tipo $-1/r$) e relativístico (espaço-tempo de Schwarzschild), como função da frequência ω (aqui, em particular, estamos usando $\omega \doteq 1/T$) de cada ciclo. Para essa simulação, consideraram-se deformações conforme retratadas na Figura 3.3, uma massa fonte de $GM = 1$, massas $Gm_a = 0.1$, com $a = 0, 1, 2, 3$, para as partículas constituintes, e se assumiu que os tripés são soltos do repouso de $r_0 = 100$; inicialmente, temos $l = 1$ e $\alpha = 1$, e as variações de parâmetros são de $\Delta l = 0.01$ e $\Delta \alpha = -0.01$ (o sinal negativo indica que a haste se fecha). Também se assumiu que cada quarto do ciclo leva um intervalo de tempo $T/4$, e se tomou $c = 1$.

Impondo $\Delta r \ll \Delta l$, obtemos então

$$\omega \gg \sqrt{\frac{GM}{r_0^2 \Delta l}}. \quad (3.88)$$

Para um tripé realizando deformações da ordem de 1 metro nas proximidades da superfície da Terra, isso significa $\omega \gg 3 s^{-1}$. Considerando que cada etapa do ciclo completo leva um quarto do período total, temos uma velocidade média $v = 4\Delta l/T = 2\omega\Delta l/\pi$ de movimento das partículas. Portanto, precisamos ter apenas $v \gg 2 m/s$, o que significa que o regime de altas frequências pode ser facilmente obtido sem que as partículas precisem ter velocidades próximas à da luz. Notemos que a equação (3.23), que quantifica a idéia de altas frequências no caso relativístico, se reduz à equação (3.88) quando $f(r_0) \rightarrow 1$, conforme o esperado.

Novamente, consideremos que, nesse regime, o momentum p_{r_0} seja aproximadamente conservado num período T e, supondo que o tripé esteja inicialmente em repouso, que ele seja arbitrariamente pequeno. Temos, então,

$$p_{r_0} = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_0} \approx 0. \quad (3.89)$$

A lagrangiana dada pela equação (3.85) pode ser escrita de forma mais explícita, incorporando-se as simetrias do sistema, como

$$L = \frac{1}{2} m_0 \dot{r}_0^2 + \frac{GMm_0}{r_0} + 3 \left[\frac{1}{2} m_1 \left(\dot{r}_1^2 + r_1^2 \dot{\theta}_1^2 \right) + \frac{GMm_1}{r_1} \right]. \quad (3.90)$$

Usando essa lagrangiana, obtemos

$$p_{r_0} = m_0 \dot{r}_0 + 3m_1 \left(\dot{r}_1 \frac{\partial r_1}{\partial r_0} + r_1^2 \dot{\theta}_1^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial r_0} \right) \approx 0, \quad (3.91)$$

e então

$$dr_0 \approx -3 \frac{m_1}{m_0} \left(\frac{\partial r_1}{\partial r_0} dr_1 + r_1^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial r_0} d\theta_1 \right).$$

Como, pelas equações de vínculo, r_1 e θ_1 são funções de r_0 , l e α , então podemos usar a regra da cadeia para reescrever as diferenciais totais dr_1 e $d\theta_1$ em termos de dr_0 , dl e $d\alpha$, exatamente como fizemos no caso relativístico. Isso nos leva a

$$dr_0 \approx U(r_0, l, \alpha) dl + V(r_0, l, \alpha) d\alpha, \quad (3.92)$$

onde

$$U(r_0, l, \alpha) = - \frac{(\partial r_1 / \partial r_0) (\partial r_1 / \partial l) + r_1^2 (\partial \theta_1 / \partial r_0) (\partial \theta_1 / \partial l)}{(m_0 / 3m_1) + (\partial r_1 / \partial r_0)^2 + r_1^2 (\partial \theta_1 / \partial r_0)^2}, \quad (3.93)$$

$$V(r_0, l, \alpha) = - \frac{(\partial r_1 / \partial r_0) (\partial r_1 / \partial \alpha) + r_1^2 (\partial \theta_1 / \partial r_0) (\partial \theta_1 / \partial \alpha)}{(m_0 / 3m_1) + (\partial r_1 / \partial r_0)^2 + r_1^2 (\partial \theta_1 / \partial r_0)^2}. \quad (3.94)$$

É interessante notar que as equações (3.92) e (3.25), que dão dr_0 nos tratamentos newtoniano e relativístico, respectivamente, têm exatamente a mesma forma, e que as equações (3.26) e (3.27) reduzem-se exatamente às equações (3.93) e (3.94), respectivamente, quando $f \rightarrow 1$.

Considerando um ciclo de deformações que descreva um retângulo Π no espaço de formatos coberto com coordenadas $\{l, \alpha\}$ (isto é, variando um dos parâmetros enquanto se mantém o outro fixo, depois variando este sem alterar o primeiro, e por fim retornando ao ponto inicial a começar pelo primeiro, sempre mantendo o outro fixado), podemos escrever, para variações suficientemente pequenas de l e α , a distância percorrida exclusivamente devido às deformações como

$$\Delta r_0 = \int_{\Pi} \left(\frac{\partial V}{\partial l} - \frac{\partial U}{\partial \alpha} \right) dl \wedge d\alpha, \quad (3.95)$$

pelas mesmas considerações que fizemos no caso relativístico. O grande diferencial, aqui, é dispormos de antemão das equações de vínculos, (3.33) e (3.34), enquanto precisávamos integrar as equações da geodésica para obtê-las, quando fazíamos o estudo da natação em Schwarzschild. Assim sendo, usamos as equações (3.33) e (3.34) para calcular explicitamente $\partial r_1/\partial r_0$, $\partial r_1/\partial l$, $\partial r_1/\partial \alpha$, $\partial \theta_1/\partial r_0$, $\partial \theta_1/\partial l$ e $\partial \theta_1/\partial \alpha$, e dessa maneira obtemos as formas explícitas de U e V ,

$$U(r_0, l, \alpha) = \frac{-\cos \alpha}{(m_0/3m_1) + 1}, \quad (3.96)$$

$$V(r_0, l, \alpha) = \frac{l \sin \alpha}{(m_0/3m_1) + 1}. \quad (3.97)$$

É fácil verificar, de posse dessas duas equações, que

$$\frac{\partial V}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial \alpha} = \frac{\sin \alpha}{(m_0/3m_1) + 1}, \quad (3.98)$$

e então o integrando da equação (3.95) anula-se, resultando imediatamente em

$$\Delta r_0 \approx 0. \quad (3.99)$$

Isso quer dizer que, no caso newtoniano, dentro do limite de altas frequências, qualquer deslocamento provocado por deformações é suprimido, conforme antecipado pela simulação numérica efetuada. Deslocamentos ligados ao efeito de balanço não ocorrem nesse regime porque os trabalhos (de sinais contrários) realizados contra as forças gravitacionais de maré durante a expansão e a contração do tripé, nesse caso, são aproximadamente iguais, porque todo o ciclo se dá praticamente no mesmo ponto da trajetória, e assim se anulam. Agora, nosso estudo analítico nos permite ir além e entender por que deslocamentos do tipo natação (efeito Wisdom) também são suprimidos. De acordo com a equação (3.92), o desvio infinitesimal da trajetória rígida natural do tripé é uma 1-forma, $\Psi = U(r_0, l, \alpha) dl + V(r_0, l, \alpha) d\alpha$, e o desvio total num ciclo é dado pela integral

$$\Delta r_0 = \oint_{\partial \Pi} \Psi = \int_{\Pi} d\Psi, \quad (3.100)$$

onde usamos o teorema de Stokes para passar da integral de linha (sobre a curva fechada descrita pelas deformações do corpo no espaço de formatos) de Ψ para a integral de superfície (sobre o interior dessa mesma região) da diferencial exterior $d\Psi$. Para o efeito de natação ser não-nulo, então, é uma *condição necessária* que a 1-forma Ψ (que dá dr_0 em termos das 1-formas de deformação dl e $d\alpha$) *não* seja fechada. Essa é uma característica geral do efeito de natação. Ocorre, porém, que ela *é* fechada no caso newtoniano, como mostra a equação (3.98). Nesta seção, demonstramos esse fato para

um caso bastante particular, de um dado tripé num potencial gravitacional do tipo $1/r$; mais adiante, contudo, vamos fornecer uma demonstração geral de que *não* existe efeito Wisdom newtoniano, mostrando que essa 1-forma é fechada em todos os casos.

Antes, porém, vamos tentar estimar a dependência com a frequência da distância nadada por efeito de balanço. Para isso, usaremos um modelo simples: um corpo de massa m em queda livre no campo gravitacional newtoniano de uma fonte esfericamente simétrica de massa M , considerando que ele se deforma na direção do gradiente do campo gravitacional. Suponhamos que o corpo tem comprimento l e densidade de massa uniforme. Assim, se o seu centro de massa localiza-se a uma distância r_0 do centro de forças, a força gravitacional sobre o extremo inferior do corpo será

$$\vec{F}_1 = -\frac{GMm}{(r_0 - l/2)^2} \hat{r}. \quad (3.101)$$

Considerando $l \ll r_0$, temos aproximadamente

$$\vec{F}_1 \approx -\frac{GMm}{r_0^2} \left(1 + \frac{l}{r_0}\right) \hat{r}. \quad (3.102)$$

De forma inteira similar, podemos mostrar que a força gravitacional sobre o extremo superior do corpo é

$$\vec{F}_2 \approx -\frac{GMm}{r_0^2} \left(1 - \frac{l}{r_0}\right) \hat{r}. \quad (3.103)$$

Comparando as equações (3.102) e (3.103), constatamos que, conforme o esperado, a magnitude da força gravitacional sobre o extremo superior do corpo é menor do que aquela sobre o extremo inferior, o que é natural pelo fato de a intensidade da interação gravitacional diminuir com a distância. A força diferencial resultante é o que chamamos de força de maré. Temos, assim, sobre o corpo uma tensão \vec{F}_I que podemos estimar tomando a diferença entre \vec{F}_2 e \vec{F}_1 ,

$$\vec{F}_I \approx \vec{F}_1 - \vec{F}_2 \approx -2\frac{GMm}{r_0^2} \frac{l}{r_0} \hat{r}. \quad (3.104)$$

Supondo, agora, que o corpo deforma-se de Δl na direção radial, podemos aproximar o trabalho realizado por essa força diferencial por

$$W_I = |\vec{F}_I| \Delta l, \quad (3.105)$$

positivo porque a tensão \vec{F} é favorável à deformação. Isso dá, usando a equação (3.104),

$$W_I \approx 2\frac{GMm}{r_0^3} l \Delta l. \quad (3.106)$$

Suponhamos que esse estiramento ocorra num intervalo de tempo $T/2$. Nesse ínterim, o corpo cai de aproximadamente $(1/2)(GM/r_0^2)(T^2/4)$. Assim, imediatamente

após essa deformação, a força diferencial de maré torna-se

$$\vec{F}_{II} \approx -2 \frac{GMml}{\left[r_0 - \frac{1}{2} \frac{GM}{r_0^2} \frac{T^2}{4}\right]^3} \hat{r}, \quad (3.107)$$

supondo $\Delta l \ll l$. Podemos aproximar a expressão acima por

$$\vec{F}_{II} \approx -2 \frac{GMm}{r_0^2} \frac{l}{r_0} \left(1 + \frac{3}{8} \frac{GM}{r_0^3} T^2\right). \quad (3.108)$$

Considerando que, num intervalo de tempo igual ao anterior, o corpo agora se estende na direção radial até atingir o tamanho original, o trabalho realizado por \vec{F}_{II} é

$$W_{II} \approx -2 \frac{GMm}{r_0^3} l \Delta l \left(1 + \frac{3}{8} \frac{GM}{r_0^3} T^2\right), \quad (3.109)$$

negativo porque, desta vez, a deformação se dá no sentido contrário àquele induzido pela força diferencial. Vemos que W_{II} é, em valor absoluto, ligeiramente maior do que W_I , isso porque a segunda deformação ocorre numa região de campo gravitacional mais intenso, dada a maior proximidade da fonte.

O trabalho total das forças de maré, num ciclo completo, é então

$$W = W_I + W_{II} \approx -\frac{3}{4} \left(\frac{GM}{r_0^3}\right)^2 m l \Delta l T^2. \quad (3.110)$$

Se a variação de energia causada pelo trabalho W provoca um deslocamento Δr_0 sobre a trajetória de queda que o corpo teria se permanecesse rígido, podemos associar esse trabalho àquele realizado pela força gravitacional sobre o centro de massa do corpo quando ele se desloca de Δr_0 ,

$$W = -\left(-\frac{GMm}{r_0 + \Delta r_0} + \frac{GMm}{r_0}\right),$$

daí

$$W \approx -\frac{GMm}{r_0^2} \Delta r_0, \quad (3.111)$$

supondo $\Delta r_0 \ll r_0$. Igualando as equações (3.110) e (3.111), obtemos

$$\Delta r_0 \approx \frac{3}{4} \frac{GM}{r_0^4} l \Delta l T^2, \quad (3.112)$$

e concluimos que $\Delta r_0 > 0$, ou seja, que o corpo atrasa sua queda devido a esse processo de deformação contra as forças de maré gravitacionais. Além disso, vemos que esse deslocamento é proporcional ao quadrado do período de um ciclo completo, o que confirma mais uma vez a não-localidade do efeito de balanço.

Podemos abstrair esse resultado particular e escrever, para o efeito de balanço sobre

um corpo deformável em queda num potencial gravitacional do tipo $1/r$,

$$\Delta r_0 \approx a \frac{GM}{r_0^4} \frac{l \Delta l}{\omega^2}, \quad (3.113)$$

onde ω é a frequência angular das deformações e a é uma constante que depende da geometria detalhada do corpo.

3.4.3 Demonstração da inexistência do efeito de natação em espaços euclidianos com potenciais newtonianos e pós-newtonianos

Consideremos, dentro do contexto de mecânica newtoniana, um corpo quase-rígido deformável no espaço euclidiano tridimensional, formado por $N+1$ partículas de massas m_a e com posições \vec{x}_a , para $a = 0, \dots, N$, e definido por $3N$ equações de vínculo que permitam escrever as posições das partículas de massas m_1, \dots, m_N em termos da posição da partícula de massa m_0 ,

$$x_a^i = x_0^i + F_a^i(\alpha_1, \dots, \alpha_n); \quad a = 1, \dots, N; \quad (3.114)$$

onde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são parâmetros, funções dadas do tempo, que determinam a estrutura do corpo e as suas deformações. Suponhamos, também, a presença de um potencial newtoniano de interação arbitrário, $V(\vec{x})$, relativo a uma força externa que atua sobre as partículas constituintes do nadador. Nosso objetivo é verificar se um tal corpo pode nadar, isto é, se um ciclo fechado de deformações realizadas *localmente*²³ pode levar a um deslocamento do corpo quase-rígido.

A lagrangiana que descreve a dinâmica do sistema pode ser genericamente escrita como

$$L = \frac{1}{2} m_0 \vec{v}_0^2 - V(\vec{x}_0) + \sum_{a=1}^N \left[\frac{1}{2} m_a \vec{v}_a^2 - V(\vec{x}_a) \right], \quad (3.115)$$

onde $\vec{v}_a = \dot{\vec{x}}_a$, para $a = 0, \dots, N$. O momentum canônico p_0^i conjugado à i -ésima coordenada da partícula de referência, x_0^i , é então

$$p_0^i = \frac{\partial L}{\partial v_0^i} = m_0 v_0^i + \sum_{a=1}^N m_a \frac{\partial}{\partial v_0^i} \left[\sum_{j=1}^3 (v_a^j)^2 \right],$$

onde devemos notar que v_a^j depende de v_0^i , devido aos vínculos entre as coordenadas. Temos então

²³É importante que as deformações sejam locais para isolar o efeito Wisdom do efeito de balanço, que é suprimido nesse caso.

$$p_0^i = m_0 v_0^i + \sum_{a=1}^N m_a \sum_{j=1}^3 v_a^j \frac{\partial v_a^j}{\partial v_0^i}.$$

Agora notemos que $\partial v_a^j / \partial v_0^i = \partial x_a^j / \partial x_0^i = \delta_{ij}$, onde a última igualdade segue-se da equação (3.114). Logo,

$$p_0^i = m_0 v_0^i + \sum_{a=1}^N m_a v_a^i. \quad (3.116)$$

Da equação (3.114) vem a relação entre as velocidades generalizadas,

$$v_a^i = v_0^i + \sum_{l=1}^n \frac{\partial F_a^i}{\partial \alpha_l} \frac{d\alpha_l}{dt}; \quad a = 1, \dots, N. \quad (3.117)$$

Substituindo a equação (3.117) na (3.116), obtemos

$$p_0^i = m_0 v_0^i + \sum_{a=1}^N m_a \left(v_0^i + \sum_{l=1}^n \frac{\partial F_a^i}{\partial \alpha_l} \frac{d\alpha_l}{dt} \right).$$

Se M é a massa total do corpo quase-rígido, essa equação pode ser reescrita como

$$p_0^i = M v_0^i + \sum_{a=1}^N m_a \sum_{l=1}^n \frac{\partial F_a^i}{\partial \alpha_l} \frac{d\alpha_l}{dt}. \quad (3.118)$$

Estamos considerando deformações locais, isto é, suficientemente rápidas para que, no período T de um ciclo completo, o corpo praticamente não se desloque. Assim, podemos considerar que o momentum p_0^i é aproximadamente conservado nesse intervalo de tempo. Se o corpo está inicialmente em repouso, temos

$$p_0^i \approx 0, \quad (3.119)$$

donde se segue que

$$M v_0^i + \sum_{a=1}^N m_a \sum_{l=1}^n \frac{\partial F_a^i}{\partial \alpha_l} \frac{d\alpha_l}{dt} \approx 0.$$

Podemos eliminar a parametrização temporal e escrever, para variações infinitesimais das coordenadas e dos parâmetros $\alpha_1, \dots, \alpha_n$,

$$dx_0^i \approx - \sum_{a=1}^N \frac{m_a}{M} \sum_{l=1}^n \frac{\partial F_a^i}{\partial \alpha_l} d\alpha_l. \quad (3.120)$$

É fácil ver que o membro direito pode ser escrito como uma diferencial exata,

$$dx_0^i \approx d \left[- \sum_{a=1}^N \frac{m_a}{M} F_a^i (\alpha_1, \dots, \alpha_l) \right] = d\Phi, \quad (3.121)$$

onde Φ é uma 0-forma, a função entre colchetes na equação. Para um ciclo de deformações no espaço de parâmetros $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$, o deslocamento total Δx_0^i na direção \hat{e}_i pode ser escrito, assim como nos casos que estudamos anteriormente, como a integral

$$\Delta x_0^i \approx \oint_{\partial\Pi} d\Phi = \int_{\Pi} d^2\Phi \equiv 0, \quad (3.122)$$

pois $d^2 \equiv 0$. Portanto, não há deslocamento líquido nessa direção. Como ela é arbitrária, concluímos que não há efetivamente natação. Visto que a única hipótese que fizemos sobre o potencial é que ele dependa apenas da posição, demonstramos, assim, que não há efeito Wisdom para corpos quase-rígidos newtonianos mesmo se agregamos termos extras ao potencial gravitacional para simular, localmente, efeitos de relatividade geral.

Capítulo 4

Natação de corpos deformáveis não-relativísticos em espaços-tempos estáticos e espacialmente homogêneos e isotrópicos

No capítulo anterior, estudamos um exemplo, dentro de um contexto de relatividade geral, de um corpo deformável desviando-se de sua trajetória de queda sem o auxílio de forças externas nem ejeção de matéria, por meio de mudanças periódicas do seu formato, atingidas exclusivamente pela aplicação de forças internas. É um caso do que chamamos de efeito Wisdom ou de natação. Em particular, analisamos um tripé livre num espaço-tempo de Schwarzschild, programado para abrir/fechar e estender/contrair simetricamente (em relação à coordenada radial) seus braços, e mostramos como ele pode retardar ou acelerar a sua queda, dependendo da ordem de realização dessas deformações, mas independentemente da velocidade com que elas são realizadas¹ - uma característica de efeitos de fase geométrica.

Agora, vamos estudar com bastante generalidade o caso de corpos deformáveis não-relativísticos em espaços-tempos estáticos e com seções espaciais maximalmente simétricas (veja a referência [21]). Vamos mostrar que o efeito Wisdom manifesta-se e, considerando nadadores suficientemente pequenos, determinar a distância nadada em cada ciclo de deformações em termos de propriedades intrínsecas do corpo, da sua engenharia de deformações e de propriedades geométricas do espaço ambiente.

¹Vale lembrar que o método que utilizamos para resolver analiticamente o problema exigiu a restrição ao regime de altas frequências de deformação. No entanto, desde que o movimento seja suficientemente rápido, o quão veloz ele é realizado não altera o resultado.

4.1 Considerações sobre o espaço ambiente, sobre o sistema e definição de movimento rígido

Vamos considerar *espaços-tempos estáticos e espacialmente homogêneos e isotrópicos*. Isso quer dizer, em termos menos técnicos, que a curvatura do espaço não se altera com o passar do tempo e que todos os seus pontos e direções são equivalentes (como ocorre, por exemplo, em geometrias esféricas e hiperbólicas). Além disso, restringimo-nos a *nadadores não-relativísticos*, isto é, a baixas velocidades. Como conseqüência, o sistema de partículas obedece, com boa aproximação, às leis dinâmicas da mecânica newtoniana. Por definição, o sistema que constitui o nadador será tal que suas partículas formem um corpo extenso articulado que realiza movimentos cíclicos, alterando o seu formato, devido exclusivamente a forças internas². O que nos propomos a analisar são as conseqüências desse movimento interno sobre o movimento global do sistema. Além disso, vamos precisar assumir que *o corpo deformável é pequeno*, onde a escala de comprimento própria do problema é dada pela curvatura do espaço ambiente. Essa hipótese é importante para que a definição de movimento global do sistema que usaremos faça sentido, como ficará claro adiante.

A primeira questão relevante é como definir precisamente o que entendemos por *movimento global* do nadador. No efeito Wisdom, depois de um ciclo completo de deformações, o corpo retoma seu formato original, mas encontra-se numa configuração diferente da inicial, isto é, rodado ou transladado *rigidamente*. Nosso objetivo é formalizar essa noção de deslocamento rígido. No Capítulo 3, monitoramos o movimento do tripé por meio da posição da partícula no vértice central do tripé, mas, num sistema geral, pode não haver uma partícula a ser destacada para cumprir esse papel.

A noção de deslocamento rígido - isto é, do corpo como um todo - é bem formalizada, quando o espaço físico é euclidiano, como ocorre nas aplicações usuais da mecânica newtoniana, pelo conceito de *centro de massa*. De fato, como comentamos no Capítulo 1, há um teorema bem conhecido, válido para esse caso, que associa a alteração do estado de movimento do sistema, representado pela posição do centro de massa, à resultante das forças externas nele aplicadas. Daí vem que forças exclusivamente internas não podem gerar movimentos rígidos. Num contexto mais amplo, em que o espaço físico é modelado por variedades e métricas mais gerais, porém, não se conhece uma forma natural de se generalizar o conceito de centro de massa. Forçando uma generalização imediata do caso euclidiano, por exemplo, é impossível mesmo garantir a sua unicidade até em casos simples como o de uma esfera S^2 onde se localizam duas partículas de mesma massa. Essa proposta de generalização consistiria em considerar, por exemplo, que o centro de massa de um sistema de duas partículas de mesma massa fosse definido como

²Aqui, consideraremos que tais forças são aplicadas por um potencial de interação entre as partículas, mas, em termos mais práticos, podem ser aplicadas, por exemplo, por um motor e um mecanismo de máquina, como consideramos nos capítulos anteriores

o ponto que equidista de ambas e está localizado sobre a geodésica que as conecta. Considerando, por exemplo, que as duas partículas estão em pontos diametralmente opostos da esfera, é fácil ver que existem, sobre o grande círculo³ que passa por elas, *dois* pontos equidistantes de ambas. Portanto, essa generalização direta não se mostra, pela carência de unicidade, aplicável mesmo para esse problema simples.

Vamos contornar essa dificuldade definindo movimento rígido sem fazer menção ao conceito de centro de massa, mas mantendo o conteúdo físico que ele encerra. Um deslocamento será dito rígido se, após um ciclo completo de deformações, não deixar nenhum ponto do nadador fixo, apesar de o formato original ser retomado. Vejamos como formalizar essa idéia.

Uma noção natural de deslocamento rígido de um sistema de partículas está associada a campos de Killing que se reduzam a deslocamentos euclidianos em um dado ponto do nadador, que chamaremos de ponto fiducial. Isso porque o espaço euclidiano constitui o modelo mais simples do espaço físico real e, nele, os tipos básicos de movimento rígido - translações e rotações - são gerados por campos de Killing. Num espaço mais geral, se o corpo é pequeno o suficiente, relativamente à escala de comprimento dada pela curvatura do espaço ambiente, os campos de Killing associados a tais translações⁴ não se anulam em nenhum ponto do nadador (colocando em termos mais precisos, o campo não será nulo no ponto fiducial e numa vizinhança dele na qual o sistema estará contido). Isso quer dizer que nenhum ponto do sistema permanece fixo sob o deslocamento gerado por tais campos de Killing, que é exatamente o requerido pela nossa definição de movimento rígido. Dessa forma, vamos assumir, no nosso tratamento, que um deslocamento rígido do sistema é gerado pelas isometrias do espaço. Fica clara, dessa forma, a necessidade de os corpos deformáveis serem pequenos⁵. Quantificando o significado de pequenez, se R é a curvatura do espaço ambiente e L é a maior distância entre partículas constituintes do corpo, o que precisamos ter é $RL^2 \ll 1$.

Resumindo, enfim, nosso cenário consiste de um espaço-tempo (curvo, em geral) estático e totalmente simétrico espacialmente, sobre o qual se encontram corpos ciclicamente deformáveis, não-relativísticos e pequenos, sendo os deslocamentos rígidos gerados pelas isometrias do espaço ambiente.

³As geodésicas de S^2 são grandes círculos, isto é, curvas formadas pela intersecção de planos com a esfera, interceptando necessariamente o centro desta.

⁴Isto é, que se reduzem a um campo de Killing euclidiano num dado ponto do nadador.

⁵Para adiantar a importância que essa hipótese terá para o formalismo que vamos desenvolver, notamos que, além de ser imprescindível para dar sentido à nossa definição de movimento rígido, ela nos permitirá usar referenciais localmente euclidianos, nos quais as relações da geometria euclidiana valem até $O(Rx^2)$.

4.2 Leis de conservação oriundas das isometrias espaciais

Seja (\mathcal{M}, g) o espaço-tempo em que está imerso o nadador, onde \mathcal{M} é a variedade diferenciável quadridimensional de base e g é a métrica lorentziana dada. Nossas suposições de simetria impõem restrições relevantes sobre g .

Supor que o espaço-tempo é *estático* quer dizer que existe nele um campo vetorial de Killing ξ tipo-tempo global, e que ele pode ser foliado em hipersuperfícies a um parâmetro Σ_t tipo-espaço ortogonais às órbitas dessas isometrias. Nesse caso, sempre é possível encontrar um sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$ tal que $\partial_t g_{\mu\nu} = 0$ e $g_{ti} = 0$ em todos os pontos do espaço-tempo, se escolhermos a base coordenada $\{\partial_\mu\}$ do espaço tangente a cada ponto da variedade tal que $\partial_t = \xi$ (ou seja, se as curvas coordenadas $x^i = \text{constante}$ forem as órbitas de ξ). Colocando em palavras, num tal sistema de coordenadas, as componentes métricas são independentes da coordenada temporal e não há termos proporcionais a $dt dx^i$ no elemento de linha ds^2 . As hipersuperfícies Σ_t representam a seção espacial dos observadores estáticos nesse sistema de coordenadas, isto é, cujas linhas de mundo são as curvas integrais de ξ .

Também supomos que as seções espaciais segundo esses observadores, isto é, as hipersuperfícies Σ_t , são *homogêneas*⁶ e *isotrópicas*⁷ em todo ponto. Devemos observar que apenas os observadores seguindo as isometrias temporais vêem o espaço como isotrópico, pois, em todo ponto, qualquer observador com velocidade relativa a eles necessariamente vê uma distribuição de velocidades anisotrópica para a matéria presente no espaço (se houver alguma).

Pelas considerações efetuadas, podemos sintetizar que os observadores que seguem as isometrias tipo-tempo, cujas seções ortogonais foliam o espaço-tempo, experimentam um espaço ambiente maximalmente simétrico que não se altera com o tempo. No sistema de coordenadas em que eles são estáticos, o elemento de linha assume, a princípio, a forma

$$ds^2 = -f^2(x^k) dt^2 + h_{ij}(x^k) dx^i dx^j, \quad (4.1)$$

onde $f^2(x^k) \doteq -g(\xi, \xi)$.

Como os observadores isotrópicos (aqueles que seguem as isometrias temporais, isto é, as curvas integrais de ξ) têm linha de mundo ortogonal às hipersuperfícies espaciais

⁶Formalmente, homogeneidade espacial quer dizer que, para quaisquer pontos $p, q \in \Sigma_t$, para todo instante t , existe uma isometria da métrica g que leva p a q . Por conseguinte, é impossível distinguir geometricamente qualquer ponto de Σ_t .

⁷Em termos técnicos, isotropia espacial significa que, para todo instante t , dados arbitrariamente um ponto $p \in \Sigma_t$ e dois vetores unitários $s_1, s_2 \in T_p\mathcal{M}$ ortogonais a ξ , onde $T_p\mathcal{M}$ é o espaço tangente de p , existe uma isometria da métrica g que deixa p e $\xi(p)$ fixos, mas roda s_1 em s_2 . Desse modo, é impossível construir um vetor tangente ortogonal a ξ - ou seja, espacial - que seja geometricamente privilegiado.

homogêneas Σ_t , podemos expressar a métrica g , na base natural de $T_p\mathcal{M}$ associada a esse sistema de coordenadas, como

$$g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu, \quad (4.2)$$

onde u é a quadrivelocidade dos observadores isotrópicos,

$$u = \frac{\xi}{\sqrt{-g(\xi, \xi)}} = \frac{\partial_t}{\sqrt{f^2(x^k)}}, \quad (4.3)$$

e h é a métrica riemanniana induzida por h em cada seção Σ_t . Vemos que $h^\mu{}_\nu$ é justamente o projetor sobre Σ_t . Ou seja, é o operador $P_{\Sigma(t)} : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M}$ idempotente tal que $P^\mu{}_\nu u^\nu = 0$ e $P^\mu{}_\nu v^\nu = v^\nu$ se, e somente se, $g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu = 0$, para todo $v \in T_p\mathcal{M}$.

As partículas que constituem o nadador, naturalmente, não seguem as isometrias temporais⁸ e, portanto, não experimentam seções espaciais homogêneas e isotrópicas. No entanto, como elas estão a baixas velocidades, suas quadrivelocidades são aproximadamente iguais às dos observadores isotrópicos. Por conta disso, com boa aproximação, podemos considerar que suas seções espaciais também são as hipersuperfícies Σ_t , totalmente simétricas.

Vamos desenvolver formalmente esse argumento. Suponhamos que a l -ésima partícula constituinte do nadador tenha linha de mundo (não-inercial) $(t, x_{(l)}^i(t))$ e que seu tempo próprio seja $\tau_{(l)}$. Sua quadrivelocidade, então, tem componentes

$$v_{(l)}{}^\mu = \left(\frac{d}{d\tau_{(l)}} \right)^\mu = \frac{dx_{(l)}{}^\mu}{d\tau_{(l)}} = \frac{dt}{d\tau_{(l)}} \left(1, \frac{dx_{(l)}^i}{dt} \right), \quad (4.4)$$

ou ainda, equivalentemente,

$$v_{(l)}{}^\mu = \frac{d\tau}{d\tau_{(l)}} \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx_{(l)}^i}{d\tau} \right), \quad (4.5)$$

onde τ é o tempo próprio dos observadores isotrópicos (isto é, $u = d/d\tau$). Impondo $g_{\mu\nu} v_{(l)}{}^\mu v_{(l)}{}^\nu = -1$, obtemos

$$\frac{d\tau_{(l)}}{dt} = \sqrt{f^2(x_{(l)}^k) - h_{ij}(x_{(l)}^k) \frac{dx_{(l)}^i}{dt} \frac{dx_{(l)}^j}{dt}}, \quad (4.6)$$

que é equivalente, por sua vez, a

$$\frac{d\tau_{(l)}}{d\tau} = \sqrt{1 - h_{ij}(x_{(l)}^k) \frac{dx_{(l)}^i}{d\tau} \frac{dx_{(l)}^j}{d\tau}}. \quad (4.7)$$

Por *baixas velocidades*, vamos entender, quantitativamente, que

⁸Porque são desviadas de suas trajetórias geodésicas pelas tensões internas, responsáveis pela deformação, e, adicionalmente, pela própria natação que daí pode decorrer.

$$h_{ij}(x_{(l)}^k) \frac{dx_{(l)}^i}{d\tau} \frac{dx_{(l)}^j}{d\tau} \ll 1 \quad \text{e} \quad \frac{dx_{(l)}^i}{d\tau} \ll 1, \quad (4.8)$$

o que significa que a trivelocidade das partículas, conforme medida pelos observadores isotrópicos, é muito menor do que a velocidade da luz. Daí vem que

$$\frac{d\tau_{(l)}}{d\tau} \approx 1 \quad \text{e} \quad \frac{dx_{(l)}^i}{d\tau} \approx 0. \quad (4.9)$$

Logo, da equação (4.5),

$$v_{(l)}^\mu \approx \frac{dt}{d\tau} (1, 0) = \frac{1}{\sqrt{f^2(x_{(l)}^k)}} (1, 0),$$

$$v_{(l)} \approx u, \quad (4.10)$$

que é o resultado que esperávamos. Dentro desse espírito, podemos entender o tempo coordenado t como um parâmetro universal que parametriza a evolução dos sistemas físicos.

Consideremos, agora, que o nadador é formado por N partículas de massas m_l e coordenadas espaciais $\{x_{(l)}^i\}$, com $l = 1, \dots, N$ e $i = 1, \dots, 3$. Tais coordenadas, como funções do tempo coordenado t , dão as trajetórias das partes constituintes do corpo deformável. Seja $L(t, x, \dot{x})$, onde o ponto sobre a função denota a sua derivada com respeito ao tempo coordenado t , a lagrangiana não-relativística⁹ que descreve a dinâmica do sistema. Na medida em que a seção espacial é tridimensional, o fato de ela ser maximalmente simétrica significa que existem necessariamente $K \doteq 3(3+1)/2 = 6$ isometrias da métrica espacial h . Sejam $\xi_{(\beta)}$, com $\beta = 1, \dots, K$ os elementos de um conjunto maximal de campos de Killing linearmente independentes que geram essas isometrias, e que podemos escrever como

$$\xi_{(\beta)} = \xi_{(\beta)}^i(x^k) \partial_i, \quad (4.11)$$

o que é equivalente a dizer que os campos $\xi_{(\beta)}$ são ortogonais ao campo de Killing tipo-tempo ξ , ou seja, são espaciais.

A lagrangiana do sistema admite, então, uma simetria associada a cada campo de Killing $\xi_{(\beta)}$, no sentido de que ela é invariante sob as translações

$$x_{(l)}^i \mapsto x'_{(l)}{}^i = x_{(l)}^i + \epsilon \xi_{(\beta)}^i(x_{(l)}); \quad \beta = 1, \dots, K; \quad i = 1, \dots, n; \quad (4.12)$$

onde $\epsilon \in \mathbb{R}$ é uma constante. Isso quer dizer que, se movermos cada partícula constituinte ao longo das isometrias espaciais, vamos obter um estado físico equivalente. Isso

⁹Podemos usar uma lagrangiana não-relativística pelo fato de as partículas estarem a baixas velocidades.

faz todo sentido, já que, ao longo dessas curvas, a métrica espacial h é invariante e, por conseguinte, as propriedades do espaço ambiente se mantêm.

Pelo teorema de Noether, essa simetria contínua da lagrangiana implica a existência de K momenta conservados dados por

$$P_\beta(t) = \sum_{l=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{(l)}^i} \xi_{(\beta)}^i(x_{(l)}); \quad \beta = 1, \dots, K; \quad (4.13)$$

onde índices repetidos devem ser somados no sentido de contração com as componentes métricas, $a^i b_i = a_i b^i = h_{ij} a^i b^j$. De fato, se $L'(t, x', \dot{x}') = L(t, x + \epsilon \xi, \dot{x} + \epsilon \dot{\xi})$ é a lagrangiana obtida sob essa transformação, então

$$\frac{\partial L'}{\partial \epsilon} = \sum_{l=1}^N \left[\frac{\partial L'}{\partial x_{(l)}^i} \frac{\partial x_{(l)}^i}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_{(l)}^i} \frac{\partial \dot{x}_{(l)}^i}{\partial \epsilon} \right] = 0,$$

pois L' não depende explicitamente de ϵ , mas apenas por meio de $x_{(l)}^i$ e de $\dot{x}_{(l)}^i$. Assim,

$$\sum_{l=1}^N \left[\frac{\partial L'}{\partial x_{(l)}^i} \xi_{(\beta)}^i(x_{(l)}) + \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_{(l)}^i} \dot{\xi}_{(\beta)}^i(x_{(l)}) \right] = 0.$$

Usando as equações de Euler-Lagrange, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_{(l)}^i} \right) \xi_{(\beta)}^i(x_{(l)}) + \frac{\partial L'}{\partial x_{(l)}^i} \dot{\xi}_{(\beta)}^i(x_{(l)}) \right] &= 0, \\ \sum_{l=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_{(l)}^i} \xi_{(\beta)}^i(x_{(l)}) \right) \right] &= 0, \\ \frac{d}{dt} \sum_{l=1}^N \left[\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_{(l)}^i} \xi_{(\beta)}^i(x_{(l)}) \right] &= \frac{d}{dt} \sum_{l=1}^N \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{(l)}^i} \xi_{(\beta)}^i(x_{(l)}) \right] = 0, \end{aligned}$$

pois

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}.$$

Logo,

$$\frac{dP_\beta}{dt} = 0, \quad (4.14)$$

conforme quisemos demonstrar.

A lagrangiana não-relativística tem a forma explícita

$$L(t, x, \dot{x}) = \sum_{l=1}^N \frac{1}{2} m_l [h_{ij}(x_{(l)}) \dot{x}_{(l)}^i \dot{x}_{(l)}^j] - \sum_{\text{pares}} V_{kl}(t, \text{dist}(x_{(k)}, x_{(l)})), \quad (4.15)$$

que é a diferença entre a energia cinética newtoniana (sobre um espaço curvo, isto é, com o produto interno entre as 3-velocidades dado segundo a métrica h das seções espaciais homogêneas) e a energia potencial, possivelmente dependente do tempo, de uma interação instantânea entre os pares de partículas. A distância entre a k -ésima e a l -ésima partículas sobre uma superfície de simultaneidade Σ_t é

$$\begin{aligned} \text{dist}(x_{(k)}, x_{(l)})(t) &= \int_{x_k(t)}^{x_l(t)} \sqrt{ds^2}|_{t=\text{const}} = \\ &= \int_{x_k(t)}^{x_l(t)} \sqrt{h_{ij} \frac{dx_{(k)}^i(t)}{d\lambda} \frac{dx_{(l)}^j(t)}{d\lambda}} d\lambda. \end{aligned} \quad (4.16)$$

De posse da forma explícita da lagrangiana, dada pela equação (4.15), podemos calcular o momentum conservado P_β associado ao campo de Killing $\xi_{(\beta)}$, usando a equação (4.13):

$$\begin{aligned} P_\beta &= \sum_{l=1}^N \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{(l)}^i} \left[\sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k (h_{rs} \dot{x}_{(k)}^r \dot{x}_{(k)}^s) \right] \xi_{(\beta)}^i(x_{(l)}) \\ &\quad - \sum_{l=1}^N \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{(l)}^i} \left[\sum_{\text{pares}} V_{pq}(t, \text{dist}(x_{(p)}, x_{(q)})) \right] \xi_{(\beta)}^i(x_{(l)}), \end{aligned}$$

de maneira que

$$P_\beta = \sum_{l=1}^N m_l h_{ij}(x_{(l)}) \dot{x}_{(l)}^i \xi_{(\beta)}^j(x_{(l)}); \quad \beta = 1, \dots, K. \quad (4.17)$$

Vemos, imediatamente, que nenhum dos momenta P_β depende da energia potencial do sistema.

Vamos assumir, agora, que todas as partículas constituintes do corpo estejam inicialmente em repouso, isto é, que

$$\dot{x}_{(l)}(0) = 0; \quad l = 1, \dots, N. \quad (4.18)$$

Por conseguinte, em todos os instantes de tempo t , devemos ter

$$P_\beta = \sum_{l=1}^N m_l h_{ij}(x_{(l)}) \dot{x}_{(l)}^i \xi_{(\beta)}^j(x_{(l)}) = 0; \quad \beta = 1, \dots, K. \quad (4.19)$$

Além disso, suponhamos, que o corpo possa controlar o seu formato por meio da interação representada pela sua energia potencial, de modo a realizar as deformações cíclicas que nos interessam. O movimento rígido que possivelmente resulta disso tem de satisfazer os vínculos impostos pelas leis de conservação, isto é, pela equação (4.19).

Podemos escrever esses vínculos de conservação como

$$\sum_{l=1}^N m_l h_{ij}(x_{(l)}) \xi_{(\beta)}^i(x_{(l)}) dx_{(l)}^j = 0; \quad \beta = 1, \dots, K. \quad (4.20)$$

Aqui, $dx_{(l)}$ deve ser entendido como um deslocamento infinitesimal da l -ésima partícula, $dx_{(l)} = x_{(l)}(t + dt) - x_{(l)}(t)$. Nesse ponto, já fica claro que a natação é *geométrica*, no sentido de que a parametrização temporal da trajetória das partículas desapareceu. Isso quer dizer que o movimento rígido obtido a partir da deformação do corpo não depende da velocidade com que elas são efetuadas, uma característica típica de efeitos de fase geométrica.

4.3 Deformações e movimentos rígidos

Vamos descrever o movimento do corpo como uma combinação de *deformações* e *deslocamentos rígidos*. Como já definimos, movimentos rígidos são aqueles que deixam o formato do nadador inalterado, mas alteram as posições de todas as partículas constituintes. Conforme também já discutimos, vamos considerar que esse tipo de movimento é gerado por campos de Killing que se reduzam a um deslocamento euclidiano num dado ponto do nadador. Qualquer outro tipo de movimento das partículas será considerado uma deformação, já que altera o formato do corpo. No nosso problema, porém, este último tipo de movimento é controlado, por meio do potencial de interação, para que as deformações sejam periódicas, e vamos considerá-las como geradas por L campos vetoriais $\eta_{(b)}$,

$$\eta_{(b)} = \eta_{(b)}^i(x^k) \partial_i \quad (4.21)$$

linearmente independentes que necessariamente *não* sejam campos de Killing das hiper-superfícies espaciais (Σ_t, h) . Chamá-los-emos *campos vetoriais de deformação*. Todo campo vetorial de Σ_t que *não* satisfaça a equação de Killing para h pode ser um campo de deformação de um nadador. Uma consequência imediata dessa definição é que campos de deformação e campos de Killing de (Σ_t, h) são linearmente independentes (pois, se não o fossem, poderíamos escrever campos de deformação como combinações lineares de campos de Killing, as quais também são campos de Killing, o que contrariaria a definição de campo de deformação). Enquanto os campos de Killing são determinados pela geometria do espaço, os de deformação são determinados pela constituição do nadador. Por exemplo, se ele for um robô, eles representam o conjunto de movimentos que a sua engenharia permite-lhe executar.

Dentro desse espírito, vamos adotar coordenadas que descrevam dissociadamente os movimentos rígidos e as deformações, e definimos um *espaço de localizações rígidas* K -dimensional (porque há K campos de Killing independentes gerando esse tipo de

movimento), coberto com coordenadas $\kappa \in \mathbb{R}^K$, e um *espaço de formatos* L -dimensional (pelo fato de haver L campos de deformações linearmente independentes), coberto com coordenadas $\sigma \in \mathbb{R}^L$. Chamamos, assim, κ de *coordenadas de localização* do nadador e σ de *coordenadas de formato* do nadador. Um dado formato do corpo é, desse modo, representado por um ponto de \mathbb{R}^L , e uma deformação (variação de formato) é representada por uma curva nesse espaço; em particular, uma deformação cíclica corresponde a uma curva fechada. Como estamos considerando as deformações como pré-determinadas, também podemos pensar no espaço de formatos como um *espaço de controle* do nadador, no sentido de que a curva descrita em \mathbb{R}^L é alterada se o corpo está programado para realizar deformações diferentes, e vice-versa.

Consideremos que a localização inicial do corpo corresponde a $\kappa = 0$. Realizado um deslocamento rígido puro (isto é, desacompanhado de deformação) infinitesimal $\delta\kappa$ (onde o δ significa que, *a princípio*, não se trata de uma diferencial exata - essa questão será respondida mais à frente¹⁰), o deslocamento infinitesimal correspondente da l -ésima partícula constituinte no espaço-tempo será dada por

$$dx_{(l)}^j = \sum_{\beta=1}^K \xi_{(\beta)}^j (x_{(l)}(0)) \delta\kappa^{(\beta)} = \xi_{(\beta)}^j (x_{(l)}(0)) \delta\kappa^{(\beta)}; \quad j = 1, 2, 3. \quad (4.22)$$

Como a notação da equação acima indica, índices repetidos que não estão associados a componentes espaço-temporais são somados trivialmente. A equação (4.22) deve ser entendida, em última instância, como a definição das coordenadas κ em termos dos campos de Killing e dos deslocamentos infinitesimais nas coordenadas das partículas sob o movimento gerado por esses campos. Essa equação quer dizer que o deslocamento das partículas, no caso de um movimento rígido infinitesimal, se dá ao longo das isometrias espaciais geradas pelos campos de Killing $\xi_{(\beta)}$. Para ver isso, consideremos, por simplicidade, o caso em que o movimento rígido infinitesimal é gerado por um único campo de Killing da família $\{\xi_{(\beta)}\}_{\beta=1}^K$, que denotaremos por $\xi_{(\alpha)}$. Isso significa, na linguagem da equação acima, que $\delta\kappa^{(\beta)} = 0$ se $\beta \neq \alpha$ e $\delta\kappa^{(\alpha)} = \delta\kappa$. Nesse caso, o deslocamento da l -ésima partícula é

$$dx_{(l)}^j = \xi_{(\alpha)}^j (x_{(l)}(0)) \delta\kappa; \quad j = 1, 2, 3. \quad (4.23)$$

Nessa equação, vemos claramente que $dx_{(l)}$ tem a direção de $\xi_{(\alpha)}$.

De forma análoga, consideremos que o formato inicial do nadador corresponde a $\sigma = 0$, e que a uma deformação infinitesimal pura (isto é, desacompanhada de movimento rígido) $d\sigma$ do corpo corresponde um deslocamento infinitesimal da l -ésima partícula dado por

¹⁰Mais precisamente, vamos determinar apenas se essa forma é *fechada* ou não.

$$dx_{(l)}^j = \sum_{b=1}^L \eta_{(b)}^j(x_{(l)}(0)) d\sigma^{(b)} = \eta_{(b)}^j(x_{(l)}(0)) d\sigma^{(b)}; \quad j = 1, 2, 3. \quad (4.24)$$

Assim como no caso de deslocamentos rígidos, essa equação deve ser entendida como definindo as coordenadas de formato σ . Lembremo-nos que os campos $\eta_{(b)}$ são dados de entrada do problema, definidos de acordo com a deformação cíclica cujo deslocamento rígido resultante queremos calcular. Mais uma vez de forma inteiramente análoga ao caso anterior, essa equação significa que as partículas constituintes do nadador, no caso de uma deformação infinitesimal, seguem as órbitas dos campos de deformação $\eta_{(b)}$.

Por fim, notemos que estamos assumindo que uma deformação infinitesimal $d\sigma$ é uma diferencial exata. No nosso problema, \mathbb{R}^L (coberto com coordenadas $\{\sigma^1, \dots, \sigma^L\}$) define o *espaço de parâmetros* do sistema, no qual a sua evolução é descrita como uma curva contínua. Se a localização rígida $\kappa \in \mathbb{R}^K$ entre dois pontos nesse espaço *não* depende do caminho percorrido entre eles, dizemos que o sistema é *holonômico*, e a 1-forma $\delta\kappa$ (definida num subconjunto desse espaço que assumimos simplesmente conexo) é, então, exata; caso contrário, dizemos que ele é *não-holonômico* e, correspondentemente, $\delta\kappa$ *não* é exata. Como estamos interessados em deformações $\sigma(t)$ que levam o corpo de volta ao seu formato original, a curva em \mathbb{R}^L é fechada e, assim, o fato de $\delta\kappa$ ser ou não uma forma diferencial exata determina que o fenômeno de natação não pode ou pode ocorrer, respectivamente, como veremos adiante.

Assim como fizemos acima, vamos sempre assumir que a configuração inicial do nadador corresponde a coordenadas de localização $\kappa = 0$ e de formato $\sigma = 0$.

Fizemos referência, na nossa exposição, a *deslocamentos rígidos puros* e a *deformações puras*, isto é, isolados um do outro. O efeito Wisdom mostra justamente que, dependendo das propriedades geométricas do espaço ambiente e das características do nadador (a saber, seu formato e sua maneira de se deformar), esses dois tipos de movimentos estão acoplados, no sentido de que deformações (promovidas exclusivamente por tensões internas) podem gerar espontaneamente movimentos rígidos. Assim, a menção a deformações puras pode parecer artificial. No entanto, é possível isolar esses dois tipos de movimento pela aplicação de forças externas, o que dá sentido à nossa formulação. Para ocorrer apenas uma deformação do corpo, mesmo quando o espaço ambiente permite o fenômeno de natação, basta haver uma força externa atuando sobre as partículas constituintes de modo a deixar as posições de todas elas inalteradas após um ciclo completo de deformações (essa idéia é de fácil apreensão se pensamos, por exemplo, num nadador restrito a uma localização fixa por meio de uma força de vínculo, como a que seria exercida por um cabo incompressível, inextensível e incapaz de rodar). Já um deslocamento rígido exclusivo ocorre, prosaicamente, quando o corpo é tal que suas forças de coesão não permitem que se deforme (em sintonia com a noção

ordinária de corpo rígido), mas atua sobre ele uma força externa que promove a alteração de sua localização, ou, ainda, ele se move por inércia. Naturalmente, nenhum desses dois casos corresponde efetivamente ao problema que estamos estudando, no qual *não* há forças externas e, como vamos mostrar, os movimentos internos podem gerar um deslocamento rígido líquido.

Temos, pois, de considerar concomitantemente movimentos gerados por campos de deformação e de Killing. Se, num instante t , a l -ésima partícula constituinte tem coordenadas $x_{(l)}(t)$ e o corpo realiza uma deformação infinitesimal $d\sigma$ e um deslocamento rígido infinitesimal $\delta\kappa$, num intervalo de tempo infinitesimal dt , as novas coordenadas dessa partícula serão $x_{(l)}(t+dt) = x_{(l)}(t) + dx_{(l)}$, onde a j -ésima componente de $dx_{(l)}$ será, pela combinação das equações (4.22) e (4.24),

$$dx_{(l)}^j = \xi_{(\beta)}^j(x_{(l)}(t)) \delta\kappa^{(\beta)} + \eta_{(b)}^j(x_{(l)}(t)) d\sigma^{(b)}. \quad (4.25)$$

Substituindo essa expressão na equação (4.20), o vínculo que retrata a conservação dos momenta, obtemos

$$\sum_{l=1}^N m_l h_{ij}(x_{(l)}) \xi_{(\alpha)}^i(x_{(l)}) \times [\xi_{(\beta)}^j(x_{(l)}) \delta\kappa^{(\beta)} + \eta_{(b)}^j(x_{(l)}) d\sigma^{(b)}] = 0; \quad \alpha = 1, \dots, K. \quad (4.26)$$

Estas são K relações lineares entre $\delta\kappa$ e $d\sigma$, em termos das componentes h_{ij} da métrica espacial, dos campos $\xi_{(\beta)}$ e $\eta_{(b)}$, calculados sobre as posições das partículas constituintes, e da distribuição de massa do corpo. Chamamo-las *equações de natação*. Mais adiante, voltaremos a trabalhar essas equações, simplificando-as com base na *liberdade de gauge* dos campos de deformação, que vamos deduzir, e as utilizando para calcular a distância nadada $\Delta\kappa$ quando ocorre um ciclo infinitesimal de deformações.

4.3.1 Expansão, shear e twist

Os campos $\xi_{(\beta)}$ são geradores de simetrias da métrica g do espaço-tempo (\mathcal{M}, g) , isto é, de difeomorfismos da variedade de base nela mesma que deixam a métrica invariante sob as aplicações do tipo *pull back* induzidas. Uma condição necessária e suficiente para que uma transformação gerada por um campo ξ seja uma isometria de g é que a derivada de Lie dessa métrica de com respeito a tal campo seja identicamente nula,

$$\mathcal{L}_\xi g = 0. \quad (4.27)$$

Em termos de componentes numa base coordenada $\{\partial_\mu\}$, essa equação se escreve como

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0. \quad (4.28)$$

Esta é a chamada *equação de Killing*. Ela garante que esses campos geram movimentos que mantêm o formato do corpo inalterado, como requeremos. Vamos estudar com mais detalhes esse fato, demonstrando-o.

Uma *congruência de curvas* num aberto $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ é definida como uma família de curvas tal que por cada $p \in \mathcal{U}$ passa uma e apenas uma curva dessa família. Os vetores tangentes à congruência definem um campo vetorial sobre \mathcal{U} , assim como todo campo vetorial contínuo em \mathcal{U} gera uma congruência de curvas nesse aberto. Dizemos que a congruência é suave se, e somente se, o campo vetorial correspondente é suave. Consideremos uma congruência suave de geodésicas tipo-tempo parametrizadas pelo tempo próprio τ , de modo que o campo de vetores tangentes v é normalizado, $g(v, v) = v_\mu v^\mu = -1$. Assim, o campo tensorial B definido, por meio de suas componentes numa base, como

$$B_{\mu\nu} = \nabla_\nu v_\mu, \quad (4.29)$$

é puramente espacial, ou seja, é ortogonal às quadrivelocidades v ,

$$B_{\mu\nu} v^\nu = B_{\mu\nu} v^\mu = 0. \quad (4.30)$$

A primeira igualdade segue-se simplesmente da equação da geodésica,

$$B^\mu{}_\nu v^\nu = v^\nu \nabla_\nu v^\mu = 0,$$

enquanto a segunda pode ser deduzida sem dificuldade. De fato,

$$v^\lambda B_{\alpha\beta} = v^\lambda \nabla_\beta v_\alpha = \nabla_\beta (v^\lambda v_\alpha) - v_\alpha \nabla_\beta v^\lambda.$$

Contraindo com $g^\alpha{}_\lambda$ e lembrando que $\nabla_\mu g_{\nu\lambda} = \nabla_\mu g^{\nu\lambda} = \nabla_\mu g^\nu{}_\lambda = 0$, obtemos

$$g^\alpha{}_\lambda v^\lambda \nabla_\beta v_\alpha = \nabla_\beta (g^\alpha{}_\lambda v^\lambda v_\alpha) - v_\alpha \nabla_\beta (g^\alpha{}_\lambda v^\lambda),$$

$$v^\alpha \nabla_\beta v_\alpha = \partial_\beta (-1) - v_\alpha \nabla_\beta v^\alpha = -g^{\alpha\sigma} v_\alpha \nabla_\beta v_\sigma,$$

$$v^\alpha \nabla_\beta v_\alpha = -v^\sigma \nabla_\beta v_\sigma,$$

e, portanto,

$$v^\alpha \nabla_\beta v_\alpha = v^\alpha B_{\alpha\beta} = 0,$$

como pretendíamos demonstrar.

Vamos agora interpretar fisicamente o significado do tensor puramente espacial B . Consideremos uma subfamília suave a um parâmetro, $\gamma_s(\tau)$, com $s \in \mathbb{R}$, de geodésicas da congruência. Nessa notação, o tempo próprio τ é o parâmetro afim das curvas sobre \mathcal{M} , enquanto o parâmetro s especifica cada curva da subcongruência densa considerada. Se \mathcal{S} é a subvariedade bidimensional de \mathcal{M} gerada pelas curvas $\gamma_s(\tau)$, podemos escolher coordenadas $\{\tau, s\}$ sobre \mathcal{S} . O campo vetorial $v = \partial/\partial\tau$ de quadri-velocidades é tangente à família de geodésicas, ao passo que o campo vetorial $\iota \doteq \partial/\partial s$ representa o deslocamento entre duas geodésicas infinitamente próximas, sendo por isso chamado de *vetor desvio*. É possível provar que sempre se pode escolher ι ortogonal a v , por um reescalamamento de s . Nesse caso, ι representa o desvio espacial infinitesimal dessa família a partir de $\gamma_0(\tau)$, isto é, quantifica a tendência dessas curvas de se desviarem ou se aproximarem umas das outras.

É fácil provar que $v = d/d\tau$ e ι comutam. De fato, usando o sistema de coordenadas em que $\{\tau, s\}$ cobrem \mathcal{S} , temos

$$[v, \iota]^\mu = v^\nu \partial_\nu \iota^\mu - \iota^\nu \partial_\nu v^\mu = v^\tau \partial_\tau \iota^\mu - \iota^s \partial_s v^\mu,$$

$$[v, \iota]^\mu = 0,$$

pois v e ι são constantes nesse sistema de coordenadas. Como essa expressão é covariante, vale em qualquer sistema de coordenadas, e concluimos que

$$[v, \iota] = \mathcal{L}_v \iota = 0. \quad (4.31)$$

Daí decorre que

$$v^\beta \nabla_\beta \iota^\alpha = \iota^\beta \nabla_\beta v^\alpha,$$

isto é,

$$v^\beta \nabla_\beta \iota^\alpha = B^\alpha{}_\beta \iota^\beta. \quad (4.32)$$

Isso quer dizer que B mede o quanto ι falha em ser transportado paralelamente ao longo das geodésicas $\gamma_s(\tau)$. Um observador com linha de mundo $\gamma_0(\tau)$ veria, de acordo com o valor de B , as geodésicas próximas se afastando ou se aproximando, se distorcendo e rodando.

A métrica da seção espacial segundo os observadores que seguem as geodésicas $\gamma_s(\tau)$ é $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + v_\mu v_\nu$. Definimos a *expansão* θ , o *shear* $\sigma_{\mu\nu}$ e o *twist* $\omega_{\mu\nu}$ da congruência de geodésicas pelas expressões

$$\theta = h_{\mu\nu}B^{\mu\nu}, \quad (4.33)$$

$$\sigma_{\mu\nu} = B_{(\mu\nu)} - \frac{1}{3}\theta h_{\mu\nu}, \quad (4.34)$$

$$\omega_{\mu\nu} = B_{[\mu\nu]}, \quad (4.35)$$

onde os índices entre parêntesis indicam que o tensor está simetrizado e, entre colchetes, anti-simetrizados. Assim, $B_{\mu\nu}$ pode ser decomposto como

$$B_{\mu\nu} = \frac{1}{3}\theta h_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}. \quad (4.36)$$

Vamos dar significado físico a cada uma dessas três quantidades, o que justificará os nomes dados a elas. Em primeiro lugar, notemos que, em virtude de $v^\beta B_{\alpha\beta} = v^\alpha B_{\alpha\beta} = 0$, $\sigma_{\mu\nu}$ e $\omega_{\mu\nu}$ também são puramente espaciais,

$$v^\beta \sigma_{\alpha\beta} = v^\alpha \sigma_{\alpha\beta} = 0, \quad (4.37)$$

$$v^\beta \omega_{\alpha\beta} = v^\alpha \omega_{\alpha\beta} = 0. \quad (4.38)$$

De $u^\beta \nabla_\beta l^\alpha = B^\alpha{}_\beta l^\beta$, vemos que, (i) para cada geodésica da congruência, θ efetivamente mede a expansão média das geodésicas infinitesimalmente distantes ao seu redor; (ii) $\omega_{\mu\nu}$ mede a sua rotação média, por ser a parte anti-simétrica de $B_{\mu\nu}$; e (iii) $\sigma_{\mu\nu}$ mede a tendência de a congruência sofrer uma deformação do tipo *shear*¹¹.

Se essas geodésicas representam as linhas de mundo de partículas que constituem um corpo, θ , $\omega_{\mu\nu}$ e $\sigma_{\mu\nu}$ dão, portanto, como ele se expande, roda e deforma. A *condição de corpo rígido* em relatividade geral pode, pois, ser escrita como

$$\sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\theta h_{\mu\nu} = 0, \quad (4.39)$$

pois nesse caso não há expansão nem deformação, mas apenas rotação, que não altera o formato do corpo. Essa equação garante que as distâncias próprias entre os pontos constituintes do corpo permanecem inalteradas.

Passemos agora ao caso que nos interessa, que é o das partículas constituintes do nadador não-relativístico que realiza movimentos cíclicos num espaço-tempo estático com seção espacial maximalmente simétrica. Vamos verificar que os movimentos gerados pelos campos de Killing são de fato rígidos, isto é, preservam o formato do corpo. Como já discutimos, a quadrivelocidade da l -ésima partícula, nesse caso, tem compo-

¹¹É possível mostrar que uma esfera no espaço tangente que é transportada paralelamente, segundo a derivada de Lie, ao longo de v , é distorcida num elipsóide com eixos principais dados pelos autovetores de $\sigma^\mu{}_\nu$ e taxa de expansão dada pelos autovalores desse operador.

mentes

$$v_{(l)}{}^\mu = \frac{dt}{d\tau_{(l)}} \left(1, \frac{dx_{(l)}^i}{dt} \right),$$

onde $\tau_{(l)}$ é o tempo próprio dessa partícula. Consideremos, por simplicidade, que o movimento rígido infinitesimal $\delta\kappa$ é gerado por um único campo de Killing tipo-espaço $\xi_{(\alpha)}$. Então, a quadrivelocidade $v_{(l)}{}^\mu$ assume, de acordo com a equação (4.22) a forma¹²

$$v_{(l)}{}^\mu = \frac{dt}{d\tau_{(l)}} \left(1, \xi_{(\alpha)}^i(x_{(l)}(0)) \frac{\delta\kappa}{dt} \right).$$

Para um deslocamento infinitesimal, podemos levar em consideração a aproximação linear $\tau_{(l)}(t) \approx \tau_{(l)}(0) + \tau'_{(l)}(0) t$, e, dessa maneira,

$$\frac{dt}{d\tau_{(l)}} \approx \frac{1}{\tau'_{(l)}(0)} \doteq a.$$

Além disso, podemos considerar que a velocidade no espaço de deformações não varia apreciavelmente nesse intervalo, ou seja, que

$$\frac{\delta\kappa}{dt} = \text{constante} \doteq b.$$

Logo, $v_{(l)}{}^\mu$ se torna

$$v_{(l)}{}^\mu = a (1, b \xi_{(\alpha)}^i). \quad (4.40)$$

Agora, é fácil ver que, se $\xi_{(\alpha)} = \xi_{(\alpha)}^i \partial_i$ é um campo de Killing, $v_{(l)}{}^\mu$ conforme dada na expressão anterior também o é. De fato, a equação de Killing para $\xi_{(\alpha)}$ é

$$\left(\mathcal{L}_{\xi_{(\alpha)}} g \right)_{\mu\nu} = \xi^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu} + g_{\nu\alpha} \partial_\mu \xi^\alpha + g_{\mu\alpha} \partial_\nu \xi^\alpha = 0, \quad (4.41)$$

que pode ser reescrita, nesse caso, como

$$\xi^i \partial_i g_{\mu\nu} + g_{\nu i} \partial_\mu \xi^i + g_{\mu i} \partial_\nu \xi^i = 0. \quad (4.42)$$

Calculando a derivada de Lie de g com respeito a $v_{(l)}$, obtemos

$$\left(\mathcal{L}_{v_{(l)}} g \right)_{\mu\nu} = v_{(l)}{}^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu} + g_{\nu\alpha} \partial_\mu v_{(l)}{}^\alpha + g_{\mu\alpha} \partial_\nu v_{(l)}{}^\alpha,$$

o que leva a

$$\left(\mathcal{L}_{v_{(l)}} g \right)_{\mu\nu} = a \left[\partial_t g_{\mu\nu} + b (\xi^i \partial_i g_{\mu\nu} + g_{\nu i} \partial_\mu \xi^i + g_{\mu i} \partial_\nu \xi^i) \right].$$

¹²Aqui vamos tomar a liberdade de escrever $\frac{\delta\kappa}{dt}$, que não deve ser visto como a derivada de uma função, mas como a razão de duas variações infinitesimais.

Como as componentes métricas são independentes do tempo, concluímos que

$$\left(\mathcal{L}_{v_{(l)}}g\right)_{\mu\nu} = ab \left(\xi^i \partial_i g_{\mu\nu} + g_{\nu i} \partial_\mu \xi^i + g_{\mu i} \partial_\nu \xi^i\right).$$

Mas o termo entre parêntesis é nulo, pela equação de Killing para $\xi_{(\alpha)}$, de modo que

$$\left(\mathcal{L}_{v_{(l)}}g\right)_{\mu\nu} = \nabla_\mu v_{(l)\nu} + \nabla_\nu v_{(l)\mu} = 0, \quad (4.43)$$

e, portanto, $v_{(l)}$ realmente é, nessa aproximação, um campo de Killing.

Lembremo-nos também de que, a baixas velocidades, $v_{(l)} \approx u$, de forma que as partículas constituintes são aproximadamente geodésicas.

Podemos, enfim, calcular a expansão θ , o *shear* $\sigma_{\alpha\beta}$ e o *twist* $\omega_{\alpha\beta}$ associados ao movimento infinitesimal gerado por $\xi_{(\alpha)}$. As expressões calculadas valem apenas aproximadamente, de acordo com as hipóteses colocadas, mas vamos tomar a liberdade de usar o símbolo de igualdade para simplificar a notação. Começamos por θ :

$$\begin{aligned} \theta &= B^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = \nabla^\beta v_{(l)}^\alpha (g_{\alpha\beta} + v_{(l)\alpha} v_{(l)\beta}) \\ &= g_{\alpha\beta} \nabla^\beta v_{(l)}^\alpha + (B_{\alpha\beta} v_{(l)}^\beta) v_{(l)}^\alpha. \end{aligned}$$

Lembrando que $B_{\alpha\beta} v_{(l)}^\beta = 0$ e usando a simetria da métrica, obtemos

$$\begin{aligned} \theta &= g_{\alpha\beta} \nabla^\beta v_{(l)}^\alpha = \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta} \nabla^\beta v_{(l)}^\alpha + g_{\beta\alpha} \nabla^\beta v_{(l)}^\alpha) \\ &= \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (\nabla^\beta v_{(l)}^\alpha + \nabla^\alpha v_{(l)}^\beta). \end{aligned}$$

Logo,

$$\theta = 0, \quad (4.44)$$

em virtude da equação de Killing. Agora passamos a $\sigma_{\alpha\beta}$:

$$\sigma_{\alpha\beta} = B_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{3} \theta B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\nabla_\beta v_{(l)\alpha} + \nabla_\alpha v_{(l)\beta}),$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = 0, \quad (4.45)$$

novamente como consequência da equação de Killing. Por fim, calculamos $\omega_{\alpha\beta}$:

$$\omega_{\alpha\beta} = B_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2} (\nabla_\beta v_{(l)\alpha} - \nabla_\alpha v_{(l)\beta}).$$

Dada a equação de Killing, temos $\nabla_\beta v_{(l)\alpha} = -\nabla_\alpha v_{(l)\beta}$, e assim

$$\omega_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} = \nabla_{\beta}v_{(l)\alpha}, \quad (4.46)$$

ou seja, ω não é identicamente nulo.

Concluimos, portanto, que os movimentos gerados pelos campos de Killing tipo-espaço sobre as hipersuperfícies Σ_t não induzem deformação do nadador, já que a expansão θ e o *shear* $\sigma_{\alpha\beta}$ são nulos, acarretando $\sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\theta h_{\alpha\beta} = 0$, que é a condição de corpo rígido em relatividade geral, isto é, que garante que as distâncias próprias entre as partículas constituintes sejam mantidas. Os campos de Killing podem apenas provocar rotações, na medida em que $\omega_{\alpha\beta}$ não é identicamente nulo, e translações rígidas do corpo. Vemos claramente que essa propriedade se deve ao fato de as quadrivelocidades dos constituintes obedecerem, num deslocamento infinitesimal, a equação de Killing. Como os campos de deformação $\eta_{(b)}$ não satisfazem, por definição, essa propriedade, os movimentos gerados por eles deformam o corpo, conforme desejamos que o façam. Essa deformação pode ser mensurada, conseguintemente, por quanto os campos $\eta_{(b)}$ falham em satisfazer a equação de Killing,

$$dU_{ij} = (\nabla_i\eta^{(b)}_j + \nabla_j\eta^{(b)}_i) d\sigma_{(b)}. \quad (4.47)$$

Chamaremos a quantidade acima de *tensor de deformação* (em contraste com os *vetores de deformação* $\eta_{(b)}$).

4.3.2 Liberdade de gauge dos campos de deformação

As equações de natação podem ser escritas de forma sugestiva se introduzirmos um produto interno entre campos vetoriais para corpos extensos. Dados dois campos vetoriais T e S , definimo-lo como

$$\langle T|S \rangle = \frac{1}{M} \sum_{l=1}^N m_l h_{ij}(x_{(l)}) T^i(x_{(l)}) S^j(x_{(l)}), \quad (4.48)$$

onde

$$M = \sum_{l=1}^N m_l \quad (4.49)$$

é a massa total do corpo. É fácil ver que essa operação efetivamente define um produto interno (real) entre T e S : é simétrica ($\langle T|S \rangle = \langle S|T \rangle$), linear ($\langle T + W|S \rangle = \langle T|S \rangle + \langle W|S \rangle$ e $\langle \lambda T|S \rangle = \lambda \langle T|S \rangle$) e positiva definida ($\langle T|T \rangle \geq 0$ e $\langle T|T \rangle = 0$ se, e somente se, $T = 0$). Notemos ainda que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ é uma *função do tempo*, pois depende de t por meio das trajetórias das partículas, $x_{(l)}(t)$, sobre as quais as componentes da métrica e dos campos são calculadas.

Podemos, diante disso, reescrever as equações de natção (4.26) de forma mais concisa,

$$\langle \xi_{(\alpha)} | \xi_{(\beta)} \rangle \delta \kappa^{(\beta)} + \langle \xi_{(\alpha)} | \eta_{(b)} \rangle d\sigma^{(b)} = 0; \quad \alpha = 1, \dots, K. \quad (4.50)$$

Como o produto interno definido só depende do tempo, podemos usar o processo de Gram-Schmidt para tomar os campos de Killing mutuamente ortogonais segundo essa operação, na medida em que combinações lineares de campos de Killing com funções dependentes apenas do tempo também são campos de Killing de cada hipersuperfície espacial (Σ_t, h) . De fato, a equação de Killing em qualquer uma dessas seções escreve-se como

$$(\mathcal{L}_\zeta h)_{ij} = \zeta^k \partial_k h_{ij} + h_{ik} \partial_j \zeta^k + h_{jk} \partial_i \zeta^k = 0. \quad (4.51)$$

Seja $\{\xi_{(\alpha)}\}_{\alpha=1}^K$ uma base do espaço de soluções da equação de Killing de (Σ_t, h) . É fácil verificar que

$$\chi = \sum_{\alpha=1}^K f^{(\alpha)}(t) \xi_{(\alpha)} = f^{(\alpha)}(t) \xi_{(\alpha)} \quad (4.52)$$

também é um campo de Killing:

$$(\mathcal{L}_\chi h)_{ij} = f^{(\alpha)}(t) \xi_{(\alpha)}^k \partial_k h_{ij} + h_{ik} \partial_j [f^{(\alpha)}(t) \xi_{(\alpha)}^k] + h_{jk} \partial_i [f^{(\alpha)}(t) \xi_{(\alpha)}^k],$$

e então

$$(\mathcal{L}_\chi h)_{ij} = f^{(\alpha)}(t) (\xi_{(\alpha)}^k \partial_k h_{ij} + h_{ik} \partial_j \xi_{(\alpha)}^k + h_{jk} \partial_i \xi_{(\alpha)}^k) = 0, \quad (4.53)$$

pois a quantidade entre parêntesis é nula, já que $\xi_{(\alpha)}$ é, por hipótese, um campo de Killing. Agora, se tomarmos

$$\xi'_{(1)} = \frac{\xi_{(1)}}{\|\xi_{(1)}\|}, \quad (4.54)$$

$$\xi'_{(2)} = \frac{\xi_{(2)} - \langle \xi_{(2)} | \xi'_{(1)} \rangle \xi'_{(1)}}{\|\xi_{(2)} - \langle \xi_{(2)} | \xi'_{(1)} \rangle \xi'_{(1)}\|}, \quad (4.55)$$

e assim por diante, isto é, para $\alpha = 3, \dots, K$, devemos ter

$$\xi'_{(\alpha)} = \frac{\xi_{(\alpha)} - \langle \xi_{(\alpha)} | \xi'_{(1)} \rangle \xi'_{(1)} - \dots - \langle \xi_{(\alpha)} | \xi'_{(\alpha-1)} \rangle \xi'_{(\alpha-1)}}{\|\xi_{(\alpha)} - \langle \xi_{(\alpha)} | \xi'_{(1)} \rangle \xi'_{(1)} - \dots - \langle \xi_{(\alpha)} | \xi'_{(\alpha-1)} \rangle \xi'_{(\alpha-1)}\|}; \quad (4.56)$$

então o conjunto $\left\{ \xi'_{(\alpha)} \right\}_{\alpha=1}^K$ de campos de Killing é ortonormal. Podemos, então, tomar desde o princípio $\left\{ \xi_{(\alpha)} \right\}_{\alpha=1}^K$ ortonormal,

$$\langle \xi_{(\alpha)} | \xi_{(\beta)} \rangle = \delta_{\alpha\beta}. \quad (4.57)$$

Vamos agora argumentar a favor do fato de que os campos de deformação $\eta_{(b)}$ também podem ser escolhidos de forma a serem ortogonais aos campos de Killing $\xi_{(\alpha)}$, sem que isso, porém, imponha qualquer restrição sobre as deformações físicas executadas pelo nadador. Para isso, por um lado, é importante notar que a quantidade que tem correspondência direta com uma dada deformação física é o tensor de deformação $U = U_{ij} dx^i \otimes dx^j$, dado pela integração da equação (4.47),

$$dU_{ij} = (\nabla_i \eta^{(b)}_j + \nabla_j \eta^{(b)}_i) d\sigma_{(b)},$$

ao longo de um dado caminho no espaço de formatos. Essa quantidade mede, conforme já observamos, o quanto as partículas constituintes falham em seguir órbitas de isometrias do espaço-tempo, que não induzem deformação do corpo, como já demonstramos. Por outro lado, *não* há um modo canônico de integrar essa equação para estabelecer uma relação biunívoca entre um campo tensorial de deformação U e um conjunto $\left\{ \eta_{(b)} \right\}_{b=1}^L$ de campos vetoriais de deformação linearmente independentes (fixados um conjunto $\left\{ \eta_{(b)} \right\}_{b=1}^L$ e um caminho no espaço de formatos, é claro que a equação (4.47) determina univocamente a deformação U do nadador, mas, dada uma deformação U , não existe um único conjunto $\left\{ \eta_{(b)} \right\}_{b=1}^L$ que a induza, pela equação (4.47), ao longo de um dado caminho no espaço de formatos). Em suma, um nadador pode controlar as suas forças internas e, como consequência, a sua deformação física, mas isso *não* determina os campos vetoriais de deformação.

Para fixar um único conjunto $\left\{ \eta_{(b)} \right\}_{b=1}^L$, é preciso colocar condições adicionais sobre esses campos, mas essa adição só faz sentido se a deformação física dada pelo tensor de deformação U não for alterada por elas. Em outras palavras, é preciso que exista uma *liberdade de gauge* de U com respeito aos campos vetoriais de deformação $\eta_{(b)}$. E, com efeito, ela existe. Se fizermos a transformação

$$\eta_{(b)} \mapsto \eta'_{(b)} = \eta_{(b)} + \chi_{(b)}; \quad b = 1, \dots, L; \quad (4.58)$$

onde $\chi_{(b)}$ é um campo de Killing arbitrário da seção espacial, não alteramos a deformação física induzida. Calculando explicitamente, temos

$$\begin{aligned} dU'_{ij} &= (\nabla_i \eta'^{(b)}_j + \nabla_j \eta'^{(b)}_i) d\sigma_{(b)} \\ &= [\nabla_i \eta^{(b)}_j + \nabla_j \eta^{(b)}_i + (\nabla_i \chi^{(b)}_j + \nabla_j \chi^{(b)}_i)] d\sigma_{(b)}, \end{aligned}$$

onde o termo entre parêntesis se anula, pelo fato de χ ser um campo de Killing, de modo que

$$dU'_{ij} = dU_{ij} = (\nabla_i \eta^{(b)}_j + \nabla_j \eta^{(b)}_i) d\sigma_{(b)}. \quad (4.59)$$

Logo, a equação (4.58) define uma *transformação de gauge* sobre os campos vetoriais $\eta^{(b)}$. Essa liberdade nos permite escolher $\eta'_{(b)}$, com $b = 1, \dots, L$, ortogonal a cada campo de Killing do conjunto $\{\xi_{(\alpha)}\}_{\alpha=1}^K$,

$$\langle \eta'_{(b)} | \xi_{(\alpha)} \rangle = 0; \quad \alpha = 1, \dots, K. \quad (4.60)$$

Essa condição, pela equação (4.58), é equivalente a

$$\langle \eta_{(b)} | \xi_{(\alpha)} \rangle = -\langle \chi_{(b)} | \xi_{(\alpha)} \rangle; \quad \alpha = 1, \dots, K. \quad (4.61)$$

Basta, portanto, somar a cada $\eta_{(b)}$ um campo de Killing $\chi_{(b)}$ que satisfaça a equação (4.61). Vamos verificar que tal equação *sempre* tem solução. Como $\chi_{(b)}$ é um campo de Killing, pode ser escrito como uma combinação linear dos campos do conjunto $\{\xi_{(\alpha)}\}_{\alpha=1}^K$, que é uma base do espaço de soluções da equação de Killing da seção espacial. Temos, assim,

$$\chi_{(b)} = \sum_{\gamma=1}^K b^\gamma \xi_{(\gamma)} = b^\gamma \xi_{(\gamma)}. \quad (4.62)$$

Podemos, então, reescrever a equação (4.61) como

$$\langle \eta_{(b)} | \xi_{(\alpha)} \rangle = -b^\gamma \langle \xi_{(\gamma)} | \xi_{(\alpha)} \rangle; \quad \alpha = 1, \dots, K.$$

Como escolhemos os elementos do conjunto $\{\xi_{(\beta)}\}_{\beta=1}^K$ ortogonais, concluímos que

$$\langle \eta_{(b)} | \xi_{(\alpha)} \rangle = -b^\gamma \delta_{\gamma\alpha}; \quad \alpha = 1, \dots, K;$$

$$b_\alpha = -\langle \eta_{(b)} | \xi_{(\alpha)} \rangle; \quad \alpha = 1, \dots, K. \quad (4.63)$$

Conseqüentemente, basta escolhermos

$$\chi_{(b)} = -\langle \eta_{(b)} | \xi_{(\gamma)} \rangle \xi^{(\gamma)} \quad (4.64)$$

para que a equação (4.58) defina um conjunto de campos de deformação $\{\eta'_{(b)}\}_{b=1}^L$, a partir de um outro conjunto $\{\eta_{(b)}\}_{b=1}^L$ dado, que gere as mesmas deformações físicas e, adicionalmente, seja ortogonal a cada elemento de $\{\xi_{(\alpha)}\}_{\alpha=1}^K$ (notemos que, mais do que isso, cada $\eta'_{(b)}$ é ortogonal a *qualquer* campo de Killing da seção espacial, uma vez que eles são gerados pelos campos $\xi_{(\alpha)}$).

Podemos, pois, tomar os campos vetoriais $\eta_{(b)}$ ortogonais a cada campo de Killing $\xi_{(\alpha)}$,

$$\langle \eta_{(b)} | \xi_{(\alpha)} \rangle = 0; \quad b = 1, \dots, L; \quad \alpha = 1, \dots, K. \quad (4.65)$$

Essa escolha fixa o gauge e determina um único conjunto $\{\eta_{(b)}\}_{b=1}^L$ de campos vetoriais de deformação. Além disso, essa escolha em particular nos ajudará a obter equações mais simples para o fenômeno de natação.

Como uma última observação desta seção, notemos que essa escolha de gauge vem a realçar o significado dos campos vetoriais de deformação. Definimo-los como campos vetoriais de Σ_t que *não* são tangentes a famílias de isometrias dessas subvariedades do espaço-tempo, ou seja, não são campos de Killing, e, como conseqüência, são linearmente independentes dos campos de Killing de (Σ_t, h) . Pois bem, a condição de gauge dada pela equação (4.65) torna esse último fato explícito, uma vez que ortogonalidade implica independência linear.

4.4 Descrição da evolução do sistema sob deformações e deslocamentos rígidos dados

Vamos, nesta seção, estudar como evoluem temporalmente as *coordenadas* das partículas constituintes do nadador quando ele executa um dado deslocamento rígido $\kappa \in \mathbb{R}^K$ e uma dada deformação $\sigma \in \mathbb{R}^L$.

Suponhamos que, no instante inicial, $t = 0$, no qual a l -ésima partícula constituinte tem coordenadas $x_{(l)}^j(0)$, com $j = 1, 2, 3$, a configuração do sistema seja representada pela origem das coordenadas de localização rígida, $\kappa = 0$, e de formatos, $\sigma = 0$, e que, num intervalo de tempo t , o sistema realize exclusivamente um dado movimento rígido κ . Podemos, então, escrever o mapeamento entre as coordenadas iniciais e finais das partículas constituintes, nesse processo, como uma série de Taylor:

$$x_{(l)}^j(0) \xrightarrow{\kappa} x_{(l)}^j(t) = \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ \frac{[\kappa^{(\alpha)} \xi_{(\alpha)}(p_{(l)})]^q}{q!} x_{(l)}^j \right\}_{t=0}, \quad (4.66)$$

onde $p_{(l)}$ é o ponto da variedade em que se localiza a l -ésima partícula (assim, $\xi_{(\alpha)}(p_{(l)}) = \xi_{(\alpha)}^i(x_{(l)}) \partial_i$). Desenvolvendo explicitamente o somatório, obtemos

$$\begin{aligned} x_{(l)}^j(t) &= x_{(l)}^j(0) + \kappa^{(\alpha)} [\xi_{(\alpha)}(p_{(l)}) x_{(l)}^j]_{t=0} \\ &+ \frac{1}{2} \kappa^{(\alpha)} \kappa^{(\beta)} [\xi_{(\alpha)}(p_{(l)}) \xi_{(\beta)}(p_{(l)}) x_{(l)}^j]_{t=0} + \dots, \end{aligned}$$

$$x_{(l)}^j(t) = x_{(l)}^j(0) + \kappa^{(\alpha)} \xi_{(\alpha)}^i(x_{(l)}(0)) \partial_i x_{(l)}^j + \frac{1}{2} \kappa^{(\alpha)} \kappa^{(\beta)} \xi_{(\alpha)}^i(x_{(l)}(0)) \partial_i [\xi_{(\beta)}^k(x_{(l)}) \partial_k x_{(l)}^j]_{t=0} + \dots,$$

$$x_{(l)}^j(t) = x_{(l)}^j(0) + \kappa^{(\alpha)} \xi_{(\alpha)}^i(x_{(l)}(0)) \delta_i^j + \frac{1}{2} \kappa^{(\alpha)} \kappa^{(\beta)} \xi_{(\alpha)}^i(x_{(l)}(0)) \partial_i [\xi_{(\beta)}^k(x_{(l)}) \delta_k^j]_{t=0} + \dots.$$

Portanto,

$$x_{(l)}^j(t) = x_{(l)}^j(0) + \kappa^{(\alpha)} \xi_{(\alpha)}^j(x_{(l)}(0)) + \frac{1}{2} \kappa^{(\alpha)} \kappa^{(\beta)} \xi_{(\alpha)}^i(x_{(l)}(0)) \partial_i \xi_{(\beta)}^j(x_{(l)}(0)) + \dots. \quad (4.67)$$

Podemos fazer um raciocínio análogo no caso em que, sob condições iniciais idênticas, ocorre exclusivamente uma deformação σ num intervalo de tempo t , obtendo

$$x_{(l)}^j(0) \xrightarrow{\sigma} x_{(l)}^j(t) = \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ \frac{[\sigma^{(b)} \eta_{(b)}(p_{(l)})]^q}{q!} x_{(l)}^j \right\}_{t=0}. \quad (4.68)$$

Colecionando os primeiros termos da série, obtemos, de forma inteiramente similar à do caso anterior,

$$x_{(l)}^j(t) = x_{(l)}^j(0) + \sigma^{(b)} \eta_{(b)}^j(x_{(l)}(0)) + \frac{1}{2} \sigma^{(b)} \sigma^{(c)} \eta_{(b)}^i(x_{(l)}(0)) \partial_i \eta_{(c)}^j(x_{(l)}(0)) + \dots. \quad (4.69)$$

Assim, com respeito às equações (4.66) e (4.68), ou (4.67) e (4.69), equivalentemente, obtivemos as coordenadas das partículas como funções de um deslocamento rígido e de uma deformação, quando considerados separadamente.

Notemos que as equações (4.66) e (4.68) são simplesmente as séries de Taylor das funções $\tilde{x}_{(l)}^j(\kappa)$ e $\bar{x}_{(l)}^j(\sigma)$, em termos da derivada direcional, para um incremento no argumento. Evocando um caso mais usual, o de uma função $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, escrevemos

$$F(\vec{r}) \xrightarrow{\vec{a}} F(\vec{r} + \vec{a}) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(\vec{a} \cdot \vec{\nabla})^q}{q!} F(\vec{r}) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(a^i \partial_i)^q}{q!} F(\vec{r}). \quad (4.70)$$

Essa equação tem a mesma forma que as equações (4.66) e (4.68) (com a diferença

de que, nestas duas últimas, o incremento se dá a partir da origem), só que que os operadores diferenciais, por assim dizer, naturalmente associados aos espaços de localizações rígidas e de formatos¹³ são, respectivamente, os campos vetoriais $\xi_{(\alpha)}$ e $\eta_{(\beta)}$, que são os geradores dos translações nesses espaços, assim como ∂_i é o gerador de translações no espaço euclidiano.

Ressaltamos também que, quando o deslocamento rígido κ e a deformação σ são infinitesimais, no sentido de $|\kappa|, |\sigma| \ll 1$, podemos truncar as séries dadas pelas equações (4.67) e (4.69) até uma dada ordem conveniente e obter restos de ordem inferior. Esse procedimento será evocado posteriormente, quando formos calcular a distância nadada quando o corpo realiza uma deformação cíclica infinitesimal.

É interessante reescrever as equações (4.66) e (4.68) de forma mais sucinta, o que pode ser feito notando-se que

$$e^{\kappa^{(\alpha)}\xi_{(\alpha)}} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(\kappa^{(\alpha)}\xi_{(\alpha)})^q}{q!} = 1 + \kappa^{(\alpha)}\xi_{(\alpha)} + \frac{1}{2}\kappa^{(\alpha)}\kappa^{(\beta)}\xi_{(\alpha)}\xi_{(\beta)} + \cdots,$$

$$e^{\sigma^{(b)}\eta_{(b)}} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(\sigma^{(b)}\eta_{(b)})^q}{q!} = 1 + \sigma^{(b)}\eta_{(b)} + \frac{1}{2}\sigma^{(b)}\sigma^{(c)}\eta_{(b)}\eta_{(c)} + \cdots,$$

de maneira que

$$x_{(l)}^j(0) \xrightarrow{\kappa} x_{(l)}^j(t) = e^{\kappa^{(\alpha)}\xi_{(\alpha)}} x_{(l)}^j|_{t=0}, \quad (4.71)$$

$$x_{(l)}^j(0) \xrightarrow{\sigma} x_{(l)}^j(t) = e^{\sigma^{(b)}\eta_{(b)}} x_{(l)}^j|_{t=0}. \quad (4.72)$$

O formato e a localização do nadador são parametrizados por um par $(\sigma, \kappa) \in \mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^K$. É claro, por outro lado, que a configuração do sistema pode ser descrita pelas coordenadas $x_{(l)}^j$ das partículas constituintes. Conforme já comentamos, as equações (4.66) e (4.68), ou, equivalentemente, as equações (4.71) e (4.72), dão a evolução das coordenadas das partículas constituintes no caso em que o nadador realiza exclusivamente um dado deslocamento rígido κ ou uma dada deformação σ , respectivamente. Temos, dessa maneira, mapeamentos entre os espaços de localização rígida e de formatos e o espaço de coordenadas das partículas. Podemos pensar em $e^{\kappa^{(\alpha)}\xi_{(\alpha)}}$ como o operador de evolução temporal do sistema quando há apenas um deslocamento rígido κ , e o mesmo para $e^{\sigma^{(b)}\eta_{(b)}}$ no caso em que há apenas uma deformação σ . No entanto, nenhum dos dois corresponde, na realidade, à evolução física do sistema, que deve incluir, concomitantemente, uma deformação dada e um movimento rígido obtido como consequência dela (e das propriedades geométricas do espaço ambiente). Em outras palavras, precisamos de um operador de evolução para as coordenadas das partículas

¹³Notemos que, no nosso caso, temos funções de σ e κ , ou seja, são esses os espaços em que as funções consideradas estão definidas.

que leve em conta o par (σ, κ) no caso em que ambas as componentes dele são não-nulas ao mesmo tempo, que é o caso realista no fenômeno de natação.

Todavia, na medida em que $e^{\kappa^{(\alpha)}\xi_{(\alpha)}}$ e $e^{\sigma^{(b)}\eta_{(b)}}$ não comutam, encontramos uma séria dificuldade em combinar esses dois operadores para obter a evolução das coordenadas das partículas quando há simultaneamente variações de formato e de localização rígida do nadador (se eles comutassem, bastaria aplicar um deles e, em seguida, o outro, em qualquer ordem). Uma escolha natural de ordem, no sentido de que incorpora a interpretação de que, no efeito Wisdom, o movimento rígido é consequência da deformação, é

$$x_{(l)}^j(0) \xrightarrow{\sigma, \kappa} x_{(l)}^j(t) = e^{\kappa^{(\alpha)}\xi_{(\alpha)}} e^{\sigma^{(b)}\eta_{(b)}} x_{(l)}^j|_{t=0}. \quad (4.73)$$

Nessa equação, $e^{\sigma^{(b)}\eta_{(b)}}$ leva o sistema da sua configuração inicial ao novo formato, sem alterar a sua localização, enquanto $e^{\kappa^{(\alpha)}\xi_{(\alpha)}}$ o leva, em seguida, à localização física correta, sem provocar nova alteração de formato. Estamos, portanto, adotando $e^{\kappa^{(\alpha)}\xi_{(\alpha)}} e^{\sigma^{(b)}\eta_{(b)}}$ como o operador de evolução temporal completa do nosso problema. Claramente, ele não é uma função explícita do tempo, mas sim de κ e σ , que correspondem à configuração do sistema no instante t .

Apesar da interpretação natural de que a deformação do corpo é a causa do seu deslocamento rígido, na medida em que, na ausência de deformação, o efeito não ocorre e o corpo permanece em repouso na sua localização inicial, é claro que os dois tipos de movimentos acontecem ao mesmo tempo e, por conseguinte, a forma $e^{\kappa^{(\alpha)}\xi_{(\alpha)}} e^{\sigma^{(b)}\eta_{(b)}}$ que escolhemos para o operador de evolução temporal *não* é estritamente correta. Todavia, ela será útil para o nosso propósito principal, que é o de calcular a distância (infinitesimal) nadada como decorrência de um dado ciclo *infinitesimal* de deformações, e, nesse caso, como provaremos adiante, a equação (4.73) mostra-se correta, pois $e^{\kappa^{(\alpha)}\xi_{(\alpha)}}$ e $e^{\sigma^{(b)}\eta_{(b)}}$ comutam até a menor ordem que contribui para o efeito.

Para calcular qualquer função das trajetórias das partículas constituintes no instante t em que a configuração do nadador é (σ, κ) , basta aplicar o operador de evolução temporal sobre ela, calculando o resultado em $t = 0$, em completa semelhança com a equação (4.73). Com esse procedimento, obtemos o valor da função em t em termos de σ e κ , assim como o fizemos para as coordenadas das partículas com a equação (4.73). Por exemplo, a j -ésima componente do campo de Killing $\xi_{(\beta)}$, calculada sobre a trajetória da l -ésima partícula, no instante t , é dada por

$$\xi_{(\beta)}^j(x_{(l)}(0)) \xrightarrow{\sigma, \kappa} \xi_{(\beta)}^j(x_{(l)}(t)) = \left[e^{\kappa^{(\alpha)}\xi_{(\alpha)}} e^{\sigma^{(b)}\eta_{(b)}} \xi_{(\beta)}^j(x_{(l)}) \right]_{t=0}. \quad (4.74)$$

Um fato interessante é que o mapeamento que obtivemos para realizar a evolução do sistema sob deformações puras acaba por ser uma ferramenta que permite ver os campos vetoriais de deformação sob um ângulo diferente, auxiliando a esclarecer o

seu significado. Consideremos que a deformação σ realizada no intervalo de tempo t é infinitesimal, isto é, $|\sigma| \ll 1$, e tomemos a aproximação linear do mapeamento $\bar{x}_{(l)}^j(0) \xrightarrow{\sigma} \bar{x}_{(l)}^j(\sigma)$ dado pela equação (4.71),

$$\bar{x}_{(l)}^j(\sigma) = \bar{x}_{(l)}^j(0) + \sigma^{(b)} \eta_{(b)}^j(x_{(l)}(0)) + O(\sigma^2). \quad (4.75)$$

Essa expressão nos incita a pensar que $\eta_{(b)}^j$ corresponde à componente $j - b$ da matriz jacobiana da transformação $\sigma \mapsto x = \bar{x}(\sigma)$. Se $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função diferenciável que associa a cada n -upla (u_1, \dots, u_n) uma m -upla (v_1, \dots, v_m) , então a aproximação linear tem a forma

$$F(x) = F(0) + J_F(0)u + O(u^2),$$

onde $J_F(u)$ é a matriz jacobiana da transformação, dada por

$$(J_F)^i_j = \frac{\partial v^i}{\partial u^j}.$$

Assim, em termos de componentes,

$$v^i(u) = v^i(0) + \left(\frac{\partial v^i}{\partial u^j} \right)_{t=0} u^j + O(u^2).$$

Uma comparação imediata entre esta última equação e a (4.75) sugere que

$$\eta_{(b)}^j = \frac{\partial \bar{x}_{(l)}^j}{\partial \sigma^{(b)}}, \quad (4.76)$$

ou seja, que $\eta_{(b)}^j = (J_{\bar{x}})^j_{(b)}$, como havíamos antecipado. Sendo assim, podemos escrever

$$d\bar{x}_{(l)}^j = \frac{\partial \bar{x}_{(l)}^j}{\partial \sigma^{(b)}} d\sigma^{(b)} = \eta_{(b)}^j d\sigma^{(b)}, \quad (4.77)$$

que é a diferencial da função $\bar{x}_{(l)}^j(\sigma)$. Essa última equação guarda estreita semelhança com a equação (4.24).

Por fim, é esclarecedor explicitar que o deslocamento rígido κ que aparece nas equações de evolução do sistema é uma *incógnita* do problema, a ser calculada como função da deformação σ dada. Portanto, apesar de κ aparecer no argumento das coordenadas das partículas e de suas funções, essa quantidade ainda não está determinada e, mais do que isso, é uma função de σ . Na verdade, κ é justamente a quantidade que queremos calcular, pois tem ligação direta com a distância nadada no efeito Wisdom. Para fazer isso, grosso modo, nossa estratégia será usar as equações de vínculo oriundas das leis de conservação, equação (4.20), em combinação com as equações de evolução das coordenadas das partículas, equações (4.67) e (4.69), para isolar κ em termos de σ e demais quantidades características do problema, a saber, a distribuição de massa do nadador e as propriedades geométricas do espaço ambiente.

4.4.1 Equações de natação para ciclos infinitesimais de deformações

Nesta seção, vamos calcular o deslocamento rígido $\Delta\kappa$ do nadador associado a um ciclo infinitesimal fechado $\sigma(t)$ de deformações nas proximidades da origem do espaço de formatos. Lembrem-nos de que $\sigma = 0$ representa o formato original do corpo. Assim, estamos considerando pequenas variações do formato original do corpo que, depois de um intervalo de tempo fixado, o período T de um ciclo, levam de volta a ele.

A aplicação de forças internas faz com que as partículas constituintes do corpo movam-se ao longo de trajetórias $x_{(l)}(t)$, com $l = 1, \dots, N$, de modo a ser descrito um *loop* infinitesimal $\sigma(t)$ no espaço de formatos, com $\sigma(T) = \sigma(0) = 0$. Esse ciclo de deformações resulta num movimento rígido $\kappa(t)$ que, no caso de o efeito Wisdom manifestar-se, é não-nulo no término de um ciclo, $\Delta\kappa = \kappa(T) - \kappa(0) = \kappa(T) \neq 0$. Vamos usar as equações de vínculo dadas pelas leis de conservação associadas às isometrias espaciais para relacionar esse deslocamento rígido com o ciclo de deformações dado, ou seja, a equação (4.20),

$$\sum_{l=1}^N m_l h_{ij}(x_{(l)}) \xi_{(\beta)}^i(x_{(l)}) dx_{(l)}^j = 0; \quad \beta = 1, \dots, K.$$

Queremos calcular explicitamente essa equação para deformações infinitesimais.

Consideremos, então, a equação de evolução das trajetórias das partículas constituintes quando o nadador realiza, num intervalo de tempo t , começando de $t = 0$, uma deformação σ e um deslocamento rígido κ , a partir de seu formato e de sua localização originais, equação (4.73),

$$x_{(l)}^j(0) \xrightarrow{\sigma, \kappa} x_{(l)}^j(t) = e^{\kappa^{(\alpha)} \xi_{(\alpha)}} e^{\sigma^{(b)} \eta_{(b)}} x_{(l)}^j \Big|_{t=0}.$$

Como estamos tomando σ infinitesimal, é natural supor que κ também o seja, e então podemos escrever a equação anterior, em primeira ordem de σ , como

$$x_{(l)}^j(t) = [1 + \kappa^{(\alpha)} \xi_{(\alpha)} + O(\kappa^2)] [1 + \sigma^{(b)} \eta_{(b)} + O(\sigma^2)] x_{(l)}^j \Big|_{t=0},$$

isto é,

$$x_{(l)}^j(t) = x_{(l)}^j(0) + \kappa^{(\alpha)} \xi_{(\alpha)}^j(x_{(l)}(0)) + \sigma^{(b)} \eta_{(b)}^j(x_{(l)}(0)) + O(\sigma^2). \quad (4.78)$$

Notemos que, em primeira ordem, $e^{\kappa^{(\alpha)} \xi_{(\alpha)}}$ e $e^{\sigma^{(b)} \eta_{(b)}}$ comutam, de modo que não temos, até este ponto, nenhum problema oriundo da ordenação que escolhermos para formar o operador completo de evolução. Daí obtemos

$$dx_{(l)}^j = \delta\kappa^{(\alpha)}\xi_{(\alpha)}^j(x_{(l)}(0)) + d\sigma^{(b)}\eta_{(b)}^j(x_{(l)}(0)) + O(\sigma d\sigma). \quad (4.79)$$

A evolução dos campos de Killing, $\xi_{(\beta)}(x_{(l)}(0)) \xrightarrow{\sigma, \kappa} \xi_{(\beta)}(x_{(l)}(t))$, é obtida da mesma maneira. No entanto, como $dx_{(l)}$ dado pela equação (4.79) já é da ordem de σ , e é nessa ordem que queremos escrever a lei de conservação, podemos tomar $\xi_{(\beta)}(x_{(l)}(t))$ em ordem zero,

$$\xi_{(\beta)}^i(x_{(l)}(t)) = \xi_{(\beta)}^i(x_{(l)}(0)) + O(\sigma). \quad (4.80)$$

O mesmo vale para as componentes da métrica h . Substituindo as equações (4.79) e (4.80) na equação (4.20), obtemos

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^N m_l h_{ij}(x_{(l)}(0)) \xi_{(\beta)}^i(x_{(l)}(0)) \\ & \times [\delta\kappa^{(\alpha)}\xi_{(\alpha)}^j(x_{(l)}(0)) + d\sigma^{(b)}\eta_{(b)}^j(x_{(l)}(0))] = O(\sigma d\sigma). \end{aligned}$$

Usando a notação de produto interno para corpos extensos que definimos, podemos reescrever essa equação como

$$\langle \xi_{(\beta)} | \xi_{(\alpha)} \rangle_{t=0} \delta\kappa^{(\alpha)} + \langle \xi_{(\beta)} | \eta_{(b)} \rangle_{t=0} d\sigma^{(b)} = O(\sigma d\sigma).$$

Agora, pela nossa escolha de gauge, expressa pela equação (4.65), o segundo termo da equação acima se anula. Se, além disso, os campos de Killing da família $\{\xi_{(\beta)}\}_{\beta=1}^K$ são ortonormais, conforme já provamos que eles sempre podem ser tomados, concluímos que

$$\delta\kappa = O(\sigma d\sigma), \quad (4.81)$$

ou seja,

$$\kappa = O(\sigma^2). \quad (4.82)$$

Portanto, dado um deslocamento infinitesimal da ordem de σ , o deslocamento rígido associado será necessariamente, pelas leis de conservação, da ordem de σ^2 .

Passemos, agora, ao cálculo da equação (4.20) considerando termos da ordem de σ^2 . Colecionando termos dessa ordem, a equação (4.73) dá

$$x_{(l)}^j(t) = (1 + \kappa^{(\alpha)}\xi_{(\alpha)}) \left(1 + \sigma^{(b)}\eta_{(b)} + \frac{1}{2}\sigma^{(b)}\sigma^{(c)}\eta_{(b)}\eta_{(c)} \right) x_{(l)}^j|_{t=0},$$

$$x_{(l)}^j(t) = x_{(l)}^j(0) + \kappa^{(\alpha)} \xi_{(\alpha)}^j(x_{(l)}(0)) + \sigma^{(b)} \eta_{(b)}^j(x_{(l)}(0)) \\ + \frac{1}{2} \sigma^{(b)} \sigma^{(c)} \eta_{(b)}^i(x_{(l)}(0)) \partial_i \eta_{(c)}^j(x_{(l)}(0)).$$

Daí obtemos

$$dx_{(l)}^j = \delta \kappa^{(\alpha)} \xi_{(\alpha)}^j(x_{(l)}(0)) + d\sigma^{(b)} \eta_{(b)}^j(x_{(l)}(0)) \\ + \frac{1}{2} \eta_{(b)}^i(x_{(l)}(0)) \partial_i \eta_{(c)}^j(x_{(l)}(0)) d(\sigma^{(b)} \sigma^{(c)}) + O(\sigma^2 d\sigma). \quad (4.83)$$

Quanto aos campos de Killing, precisamos calculá-los até ordem de σ . Temos, assim,

$$\xi_{(\beta)}^j(x_{(l)}(t)) = (1 + \sigma^{(b)} \eta_{(b)}) \xi_{(\beta)}^j(x_{(l)})|_{t=0},$$

ou seja,

$$\xi_{(\beta)}^j(x_{(l)}(t)) = \xi_{(\beta)}^j(x_{(l)}(0)) \\ + \sigma^{(b)} \eta_{(b)}^i(x_{(l)}(0)) \partial_i \xi_{(\beta)}^j(x_{(l)}(0)) + O(\sigma^2). \quad (4.84)$$

Pela substituição das equações (4.83) e (4.84) na equação (4.20), e usando a equação (4.81), obtemos

$$\sum_{l=1}^N m_l h_{ij}(x_{(l)}(0)) [\xi_{(\beta)}^i + \sigma^{(c)} \eta_{(c)}^k \partial_k \xi_{(\beta)}^i]_{x_{(l)}(0)} \\ \times \left[\delta \kappa^{(\alpha)} \xi_{(\alpha)}^j + d\sigma^{(b)} \eta_{(b)}^j + \frac{1}{2} \eta_{(b)}^a \partial_a \eta_{(c)}^j d(\sigma^{(b)} \sigma^{(c)}) \right]_{x_{(l)}(0)} = \\ = O(\sigma^2 d\sigma).$$

Novamente usando a condição de gauge escolhida e a notação de produto interno, obtemos prontamente

$$\langle \xi_{(\beta)} | \xi_{(\alpha)} \rangle_{t=0} \delta \kappa^{(\alpha)} + \langle \partial_k \xi_{(\beta)} | \eta_{(c)}^k \eta_{(b)} \rangle_{t=0} \sigma^{(c)} d\sigma^{(b)} \\ + \frac{1}{2} \langle \xi_{(\beta)} | \eta_{(b)}^k \partial_k \eta_{(c)} \rangle_{t=0} d(\sigma^{(b)} \sigma^{(c)}) = O(\sigma^2 d\sigma); \quad \beta = 1, \dots, K. \quad (4.85)$$

Notemos que, nesta equação, todos os produtos internos são calculados no estado inicial e, portanto, são constantes, independentes de σ e de κ .

Aplicando o operador d de diferenciação exterior na equação acima, o termo proporcional a $d(\sigma^{(b)}\sigma^{(c)})$ se anula, uma vez que esta é uma forma fechada. Já $\delta\kappa^{(\alpha)}$ não se anula necessariamente. No caso em que $d(\delta\kappa^{(\alpha)}) \neq 0$, dizemos que $\delta\kappa^{(\alpha)}$ é uma *anolonomia*; caso contrário, dizemos que é uma *holonomia*¹⁴. Temos, então,

$$\langle \xi_{(\beta)} | \xi_{(\alpha)} \rangle_{t=0} \Delta\kappa^{(\alpha)} + \langle \partial_k \xi_{(\beta)} | \eta_{(c)}^k \eta_{(b)} \rangle_{t=0} d\sigma^{(c)} \wedge d\sigma^{(b)} = 0; \quad \beta = 1, \dots, K. \quad (4.86)$$

onde definimos

$$\Delta\kappa^{(\alpha)} \doteq d(\delta\kappa^{(\alpha)}). \quad (4.87)$$

Vemos, assim, que $\delta\kappa^{(\alpha)}$ será holonômica ou anolonômica dependendo, respectivamente, de $\langle \partial_k \xi_{(\beta)} | \eta_{(c)}^k \eta_{(b)} \rangle_{t=0}$ anular-se ou não. Caso ela seja anolonômica, o efeito de natação manifesta-se, ou seja, um deslocamento rígido do corpo livre ocorre como consequência da sua deformação. A quantidade $\Delta\kappa^{(\alpha)}$ é o deslocamento rígido, medido no espaço de localizações rígidas, associado à deformação infinitesimal $d\sigma$; ela é determinada resolvendo-se o sistema de equações lineares dado por (4.86).

O segundo termo da equação (4.86) pode ser reescrito de forma sugestiva. Usando a anti-simetria do produto exterior e permutando os índices mudos j e k , podemos escrever

$$\mathcal{K} \doteq \langle \partial_k \xi_{(\beta)j} | \eta_{(c)}^k \eta_{(b)}^j \rangle d\sigma^{(c)} \wedge d\sigma^{(b)} = - \langle \partial_j \xi_{(\beta)k} | \eta_{(c)}^j \eta_{(b)}^k \rangle d\sigma^{(b)} \wedge d\sigma^{(c)},$$

onde fica subentendido, para economia de notação, que os produtos internos são calculados em $t = 0$. Agora trocando os índices mudos b e c , obtemos

$$\mathcal{K} = - \langle \partial_j \xi_{(\beta)k} | \eta_{(b)}^j \eta_{(c)}^k \rangle d\sigma^{(c)} \wedge d\sigma^{(b)}.$$

Dando continuidade, separamos o segundo membro na forma $a = a/2 + a/2$ e usamos novamente, no segundo termo dessa soma, a anti-simetria do produto exterior e a liberdade de renomear os índices b e c , obtendo

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= -\frac{1}{2} \langle \partial_j \xi_{(\beta)k} | \eta_{(b)}^j \eta_{(c)}^k \rangle d\sigma^{(c)} \wedge d\sigma^{(b)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle \partial_j \xi_{(\beta)k} | \eta_{(c)}^j \eta_{(b)}^k \rangle d\sigma^{(c)} \wedge d\sigma^{(b)}. \end{aligned} \quad (4.88)$$

¹⁴Anolonomia é a propriedade de uma forma que *não* é a diferencial de nenhuma outra quantidade. Uma condição suficiente para que uma forma seja holônoma é que a sua derivada exterior seja nula, uma vez que formas fechadas são localmente exatas.

Trabalhando no segundo termo da equação (4.88), cambiamos os índices j e k , e então podemos escrever

$$\mathcal{K} = \left\langle \partial_{[k} (\xi_{(\beta)})_{j]} |\eta_{(c)}{}^k \eta_{(b)}{}^j \right\rangle d\sigma^{(c)} \wedge d\sigma^{(b)}.$$

Agora notemos que, se $A = A_i dx^i$ é uma 1-forma, então $dA = \partial_{[i} A_{j]} dx^i \wedge dx^j$. Logo, podemos reescrever a última equação como

$$\mathcal{K} = \left\langle (d\xi_{(\beta)})_{kj} |\eta_{(c)}{}^k \eta_{(b)}{}^j \right\rangle d\sigma^{(c)} \wedge d\sigma^{(b)},$$

onde $d\xi_{(\beta)}$ é a derivada exterior da 1-forma de Killing $\xi_{(\beta)} = (\xi_{(\beta)})_i dx^i$. Chamaremos essa quantidade de *2-forma de Killing*. Dessa forma, podemos reescrever a equação (4.86) de natação como

$$\langle \xi_{(\beta)} | \xi_{(\alpha)} \rangle_{t=0} \Delta\kappa^{(\alpha)} + \langle d\xi_{(\beta)} | \eta_{(b)}, \eta_{(c)} \rangle_{t=0} d\sigma^{(b)} \wedge d\sigma^{(c)} = 0; \quad \beta = 1, \dots, K. \quad (4.89)$$

4.5 A 2-forma de Killing

Seja $\xi_{(\alpha)}$ o campo de Killing associado a um certo movimento rígido, como uma translação ou rotação. A questão de ser ou não possível, para o corpo deformável, nadar nessa direção depende apenas, como vamos verificar, das propriedades geométricas do ambiente, a saber, das suas isometrias. A resposta fica especialmente simples quando escolhemos os campos de Killing mutuamente ortonormais,

$$\langle \xi_{(\alpha)} | \xi_{(\beta)} \rangle = \delta_{\alpha\beta}. \quad (4.90)$$

Nessas condições, as equações (4.89) de natação tornam-se

$$\Delta\kappa^{(\beta)} = - \langle d\xi^{(\beta)} | \eta_{(b)} \eta_{(c)} \rangle d\sigma^{(b)} \wedge d\sigma^{(c)}; \quad \beta = 1, \dots, K. \quad (4.91)$$

Dessa equação, vemos prontamente que um movimento rígido $\Delta\kappa^{(\alpha)}$ gerado por $\xi_{(\alpha)}$ é possível apenas se a 2-forma $d\xi^{(\alpha)}$ correspondente *não* for identicamente nula no espaço de formatos (em outras palavras, é uma condição necessária para que $\xi_{(\alpha)}$ engendre natação que a 1-forma correspondente a ele *não* seja fechada).

Vamos, agora, fazer uso desse resultado para estudar o caso simples de um corpo deformável no espaço euclidiano, recuperando, de maneira elegante, alguns resultados clássicos da mecânica newtoniana.

4.5.1 Campos de Killing em espaços euclidianos

Consideremos como ambiente o espaço euclidiano $\mathbb{E}^3 = (\mathbb{R}^3, \delta)$ coberto globalmente com coordenadas cartesianas. O gerador de translações na k -ésima direção nesse espaço é o vetor tangente ∂_k , que é um campo de Killing da métrica δ . Escrevemos, então,

$$\xi_{(k)} = \partial_k, \quad (4.92)$$

e a 1-forma correspondente é o seu dual algébrico, o covetor

$$\xi_{(k)}^* = dx^k. \quad (4.93)$$

As coordenadas x^k são 0-formas, funções da variedade, o \mathbb{R}^3 , em \mathbb{R} . Logo, dx^k é uma forma diferencial exata, e a 2-forma de Killing $d\xi_{(k)}^*$ é fechada,

$$d\xi_{(k)}^* = d(dx^k) = 0. \quad (4.94)$$

Consideremos, agora, rotações no plano $j - k$, em torno da origem. O campo de Killing que gera esse movimento é

$$\xi_{(jk)} = \epsilon_{il}^m x^l \partial_m, \quad (4.95)$$

onde ϵ_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita e i é a direção ortogonal ao plano $j - k$. (É importante ressaltar, neste ponto, que índices entre parêntesis *não* são índices de tensores do espaço-tempo; eles apenas rotulam e especificam os elementos de famílias de objetos com certas propriedades.) Assim, por exemplo, para um rotação em torno da origem no plano $x - y$, temos

$$\xi_{(xy)} = \epsilon_{3l}^m x^l \partial_m = \delta^{ms} \epsilon_{3ls} x^l \partial_m,$$

$$\xi_{(xy)} = \delta^{m2} \epsilon_{312} x^1 \partial_m + \delta^{m1} \epsilon_{321} x^2 \partial_m = \epsilon_{312} x^1 \partial_2 + \epsilon_{321} x^2 \partial_1.$$

Logo,

$$\xi_{(xy)} = x \partial_y - y \partial_x. \quad (4.96)$$

Vamos obter a 1-forma (covetor) associada a esse campo vetorial. A m -ésima componente do campo vetorial $\xi_{(jk)}$, na base coordenada, é $\xi_{(jk)}^m = \epsilon_{il}^m x^l$. Como a métrica δ define um mapeamento bijetor entre o espaço tangente e o espaço cotangente de cada ponto do espaço, por meio de $T_p \mathbb{E}^3 \ni v \mapsto v^* = \delta(\cdot, v) \in T_p^* \mathbb{E}^3$, para todo $p \in \mathbb{E}^3$, a m -ésima componente da 1-forma correspondente a esse campo vetorial de Killing é, na base dual natural,

$$\xi_{(jk)m} = \delta_{mn} \xi_{(jk)}^n = \delta_{mn} \epsilon_{il}^n x^l = \epsilon_{ilm} x^l. \quad (4.97)$$

Podemos, dessa forma, escrever a 1-forma de Killing como

$$\xi_{(jk)}^* = \epsilon_{ilm} x^l dx^m. \quad (4.98)$$

Agora, podemos calcular, prontamente, a 2-forma de Killing associada, pela aplicação da diferencial exterior,

$$d\xi_{(jk)}^* = d\xi_{(jk)}^*{}_{pq} dx^p \wedge dx^q, \quad (4.99)$$

onde

$$\begin{aligned} d\xi_{(jk)}^*{}_{pq} &= \frac{1}{2} (\partial_p \xi_{(jk)}^*{}_{q} - \partial_q \xi_{(jk)}^*{}_{p}) \\ &= \frac{1}{2} (\epsilon_{ilq} \partial_p x^l - \epsilon_{ilp} \partial_q x^l) = \frac{1}{2} (\epsilon_{ipq} - \epsilon_{iqp}), \end{aligned}$$

ou seja,

$$d\xi_{(jk)}^*{}_{pq} = \epsilon_{ipq}. \quad (4.100)$$

Portanto, a 2-forma de Killing associada a rotações no plano $j-k$, em torno da origem, é

$$d\xi_{(jk)}^* = \epsilon_{ipq} dx^p \wedge dx^q, \quad (4.101)$$

que *não* é identicamente nula.

Vamos, agora, interpretar esses dois resultados usando a equação (4.89). Essa equação só é válida quando os campos de Killing estão ortonormalizados (segundo o produto interno para corpos extensos que definimos). Vamos começar mostrando que os campos de Killing associados a translações em direções perpendiculares, no espaço euclidiano, são ortogonais segundo o produto interno para corpos rígidos que definimos. De fato, calculando-o explicitamente, temos

$$\begin{aligned} \langle \xi_{(i)} | \xi_{(j)} \rangle &= \frac{1}{M} \sum_{l=1}^N m_l \delta_{ab} \xi_{(i)}^a(x_{(l)}) \xi_{(j)}^b(x_{(l)}), \\ \langle \xi_{(i)} | \xi_{(j)} \rangle &= \delta_{ab} \delta_i^a \delta_j^b, \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que $\xi_{(i)}^a = \delta_i^a$. Logo,

$$\langle \xi_{(i)} | \xi_{(j)} \rangle = \delta_{ij}, \quad (4.102)$$

conforme quisemos demonstrar. Agora vamos provar que translações são ortogonais a rotações, desde que estas sejam realizadas em torno do centro de massa, isto é, se

$$\xi_{(jk)} = \epsilon_{ip}{}^q (x^p - X^p) \partial_q, \quad (4.103)$$

onde $\{X^i\}_{i=1}^3$ são as coordenadas do centro de massa (que fica perfeitamente bem definido no espaço euclidiano, como já comentamos), dadas por

$$X^p = \frac{1}{M} \sum_{l=1}^N m_l x_{(l)}^p. \quad (4.104)$$

Temos, assim,

$$\langle \xi_{(jk)} | \xi_{(q)} \rangle = \frac{1}{M} \sum_{l=1}^N m_l \delta_{ab} \xi_{(jk)}{}^a(x_{(l)}) \xi_{(q)}{}^b(x_{(l)}),$$

$$\langle \xi_{(jk)} | \xi_{(q)} \rangle = \frac{1}{M} \sum_{l=1}^N m_l \delta_{ab} \epsilon_{ip}{}^a (x_{(l)}^p - X^p) \delta_q{}^b = \frac{1}{M} \sum_{l=1}^N m_l \epsilon_{ipq} (x_{(l)}^p - X^p),$$

$$\langle \xi_{(jk)} | \xi_{(q)} \rangle = \epsilon_{ipq} \left(\frac{1}{M} \sum_{l=1}^N m_l x_{(l)}^p - X^p \frac{1}{M} \sum_{l=1}^N m_l \right) = \epsilon_{ipq} (X^p - X^p),$$

e então

$$\langle \xi_{(jk)} | \xi_{(q)} \rangle = 0. \quad (4.105)$$

Por fim, vamos demonstrar que, se as rotações se dão em torno dos eixos principais do corpo (que passam sempre pelo centro de massa e são ortogonais entre si), então elas são ortogonais. Suponhamos, sem perda de generalidade, com o fim de simplificar os cálculos, que escolhemos o centro de massa do nadador como origem do sistema de coordenadas e os eixos cartesianos coincidindo com os eixos principais do sistema. Por definição, no sistema de coordenadas retangulares que coincide com os eixos principais, o tensor de inércia do corpo, definido (no caso em que a origem do sistema de coordenadas coincide com o centro de massa) como

$$I^{ij} = \sum_{l=1}^N m_l (\vec{x}_{(l)}^2 \delta^{ij} - x_{(l)}^i x_{(l)}^j), \quad (4.106)$$

é diagonal, ou seja, $I^{ij} = 0$ se $i \neq j$. Dessa propriedade e da definição, obtemos

$$\sum_{l=1}^N m_l x_{(l)}^i x_{(l)}^j = 0, \quad i \neq j. \quad (4.107)$$

Calculando explicitamente o produto interno entre os campos de Killing associados a rotações em torno dos eixos principais, e usando esse último resultado, temos

$$\begin{aligned} \langle \xi_{(jk)} | \xi_{(qr)} \rangle &= \frac{1}{M} \sum_{l=1}^N m_l \delta_{ab} \xi_{(jk)}^a(x_{(l)}) \xi_{(qr)}^b(x_{(l)}) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{l=1}^N m_l \delta_{ab} \epsilon_{im}^a x_{(l)}^m \epsilon_{pn}^b x_{(l)}^n \\ &= \frac{1}{M} \sum_{l=1}^N m_l \epsilon_{imb} \epsilon_{pn}^b x_{(l)}^m x_{(l)}^n \\ &= \frac{1}{M} \sum_{l=1}^N m_l (\delta_{ip} \delta_{mn} - \delta_{in} \delta_{mp}) x_{(l)}^m x_{(l)}^n \\ &= \frac{1}{M} \sum_{l=1}^N m_l (\delta_{ip} \vec{x}_{(l)}^2 - x_{(l)i} x_{(l)p}) = \frac{I_{ip}}{M} = 0, \quad i \neq p, \end{aligned} \quad (4.108)$$

pela diagonalidade do tensor de inércia nesse sistema de coordenadas. Nas equações acima, denotamos por i o eixo principal ortogonal ao plano $j-k$, e por p o eixo principal ortogonal ao plano $q-r$. Desse modo, podemos escrever

$$\langle \xi_{(jk)} | \xi_{(qr)} \rangle = 0, \quad (jk) \neq (qr). \quad (4.109)$$

Provamos, assim, que campos de Killing geradores de translações em direções perpendiculares e de rotações em torno dos eixos principais do corpo são todos mutuamente ortogonais, de modo que vale a equação (4.89). Como a 2-forma de Killing para translações é nula, conforme demonstramos, reobtemos, pela equação (4.91), um resultado clássico da mecânica analítica de espaços planos: sistemas de partículas não podem se transladar somente pela aplicação de forças internas. Por outro lado, como a 2-forma de Killing associada a rotações *não* é identicamente nula, concluimos que, mesmo em espaços euclidianos, que são planos, sistemas de partículas podem girar (em torno dos seus eixos principais) sem a aplicação de forças externas. Com efeito, é bem conhecido o caso de gatos que, soltos em repouso, a uma certa altura do solo, com as costas viradas para baixo, conseguem girar sem auxílio externo e cair sobre as suas patas. Esse processo está plenamente de acordo com as leis de conservação, que utilizamos para obter a equação (4.89); em particular, não há violação da conservação de momentum angular, como poderia parecer sob um primeiro olhar.

4.6 Translações em espaços curvos

A natação em espaços curvos é possível porque, como vamos demonstrar, os campos de covetores de Killing correspondentes a translações *não* são fechados, $d\xi_{(k)} \neq 0$. Nesta seção, vamos definir o que vêm a ser campos de Killing translacionais em espaços curvos e calcular, em ordem dominante, a 2-forma associada. Para isso, precisamos antes introduzir a noção de referencial localmente euclidiano, que será largamente utilizada no que se segue.

4.6.1 Referenciais localmente euclidianos

Chamamos de *referencial localmente inercial* centrado num ponto $p \in \mathcal{M}$ um sistema de coordenadas $\{x^\mu\}_{\mu=0}^3$ tal que, na base coordenada $\{\partial_\mu\}_{\mu=0}^3$ associada, as componentes métricas, calculadas em x_p^μ (coordenadas do ponto p) são iguais às de Minkowski num sistema de coordenadas cartesianas, e as suas primeiras derivadas, calculadas nesse mesmo ponto, se anulam,

$$g_{\mu\nu}(x_p^\alpha) = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1), \quad (4.110)$$

$$\partial_\mu g_{\nu\lambda}(x_p^\alpha) = 0. \quad (4.111)$$

Do fato de que as derivadas primeiras da métrica são nulas em x_p^μ , concluímos imediatamente que os símbolos de Christoffel também se anulam nesse ponto,

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}(x_p^\alpha) = 0. \quad (4.112)$$

Por conseguinte, as equações da geodésica em x_p^μ assumem a mesma forma que as de uma partícula livre em Minkowski. Numa vizinhança suficientemente pequena de \mathcal{M} em torno de p , as propriedades geométricas do espaço-tempo, expressas nesse sistema de coordenadas particular, são descritas por equações que têm aproximadamente a mesma forma daquelas de um espaço-tempo plano. Esse é um sentido em que a relatividade geral incorpora o *princípio de equivalência* (experimentos insensíveis à curvatura intrínseca realizados dentro de um espaço e num intervalo de tempo suficientemente pequenos, num laboratório em queda livre, fornecem resultados indistinguíveis daqueles obtidos para os mesmos experimentos realizados num referencial inercial na ausência de gravidade).

É possível provar que sempre existe um tal sistema de coordenadas (uma prescrição simples para obtê-lo faz uso das chamadas *coordenadas riemannianas normais*), embora ele não seja único (é fácil verificar que transformações ortogonais, $x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, com $\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda^\nu{}_\lambda = \delta^\mu{}_\lambda$, e transformações da forma $x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + O(x^3)$ são tais que $g'_{\mu\nu}(x_p'^\alpha) = g_{\mu\nu}(x_p^\alpha)$ e $\partial'_\rho g'_{\mu\nu}(x_p'^\alpha) = \partial_\rho g_{\mu\nu}(x_p^\alpha)$).

No nosso problema, em particular, pensando especificamente nas seções espaciais homogêneas (Σ_t, h) , um referencial localmente inercial será tal que

$$g_{ij}(0) = \delta_{ij} = \text{diag}(1, 1, 1), \quad (4.113)$$

$$\partial_k g_{ij}(0) = 0 \Rightarrow \Gamma^i_{jk}(0) = 0, \quad (4.114)$$

se escolhermos $x_p = 0$, como de fato faremos doravante.

Como, dada a nossa hipótese de baixas velocidades, temos uma noção de tempo aproximadamente universal, que atua apenas como um parâmetro das equações de movimento (a exemplo do que ocorre em mecânica newtoniana), podemos ignorar o caráter quadridimensional do espaço-tempo e pensar apenas em coordenadas $\{x^i\}_{i=1}^3$ sobre as seções espaciais. Chamamos de *referencial localmente euclidiano* um sistema de coordenadas $\{x^i\}_{i=1}^3$ de Σ_t com as duas propriedades acima, isto é, tal que as equações (4.113) e (4.114) sejam satisfeitas. A razão de tal nome é evidente: numa vizinhança suficientemente pequena em torno da origem de um tal sistema de coordenadas, as equações que expressam as propriedades geométricas do espaço são aproximadamente iguais às correspondentes euclidianas. Colocando mais precisamente, é possível provar que relações da geometria euclidiana, nesse sistema de coordenadas, levarão correções da ordem de Rx^2 , onde R é o escalar de curvatura do espaço e x é a escala de comprimento do problema. A adoção de um tal referencial nos permite, assim, estender para a seção espacial curva de nosso interesse noções aproximadas de centro de massa e de translações.

4.6.2 A 2-forma de Killing para translações em espaços curvos

Seja $\{x^i\}_{i=1}^3$ um sistema de coordenadas sobre Σ_t , localmente euclidiano em torno da origem. Um campo de Killing ξ_i , numa vizinhança da origem, é unicamente determinado (veja a referência [14]) por seu valor nesse ponto, $\xi_i(0)$, e pelo valor da sua derivada covariante (que é necessariamente anti-simétrica, pela equação de Killing) nesse mesmo ponto, $\nabla_i \xi_j(0) = \nabla_{[i} \xi_{j]}(0)$. Fixados esses dados iniciais, os valores de ξ_i numa vizinhança da origem são determinados, em ordem dominante, pela curvatura riemanniana, por meio da equação

$$\nabla_i \nabla_j \xi_l = -R_{jli}{}^h \xi_h, \quad (4.115)$$

que, se pode demonstrar, é satisfeita por todo campo de Killing.

Para inferir os valores assumidos na origem pelos campos de Killing geradores de translações em espaços curvos, assim como os de suas derivadas, basta tomar os valores das quantidades euclidianas correspondentes, pois, em se tratando de um sistema de co-

ordenadas localmente euclidiano, elas devem coincidir nesse ponto; em seguida, usamos a equação (4.115) para obter o seu comportamento em ordem dominante nas redondezas desse ponto. Como já discutimos, o campo de Killing que gera translações na direção k do espaço euclidiano é ∂_k . Esse campo satisfaz $(\partial_k)^i = \delta^i_k$ e $\nabla_i (\partial_k)^j = \partial_i \delta^j_k = 0$ em todos os pontos (em particular, na origem). É natural, diante disso, impor que, na origem do referencial localmente euclidiano, onde essas propriedades devem ser recuperadas, o campo de Killing $\xi^{(k)}$, gerador de translações na direção k em espaços curvos, satisfaça

$$\xi^{(k)}_{,i}(0) = \delta^k_i, \quad (4.116)$$

$$\nabla_{[i} \xi^{(k)}_{,j]}(0) = 0. \quad (4.117)$$

Tomemos, agora, a equação (4.115), para $\xi = \xi^{(k)}$, calculada na origem,

$$\nabla_i \nabla_j \xi^{(k)}_{,l}(0) = -R_{jli}{}^h(0) \xi^{(k)}_{,h}(0).$$

Na medida em que $\xi^{(k)}_{,i}(0) = \delta^k_i$, obtemos

$$\nabla_i \nabla_j \xi^{(k)}_{,l}(0) = -R_{jli}{}^k(0).$$

Como $\Gamma^i_{jk}(0) = 0$, segue-se que, na origem, $\nabla_i = \partial_i$, de modo que podemos reescrever a equação acima como

$$\partial_i \nabla_j \xi^{(k)}_{,l}(0) = -R_{jli}{}^k(0).$$

Mas notemos que, para $x \ll 1$,

$$\partial_i \nabla_j \xi^{(k)}_{,l}(x) = \partial_i \nabla_j \xi^{(k)}_{,l}(0) + O(x),$$

então, como consequência, para x pequeno o suficiente, temos

$$\partial_i \nabla_j \xi^{(k)}_{,l}(x) = -R_{jli}{}^k(0) + O(x).$$

Integrando essa última equação,

$$\int_0^{x^i} \frac{\partial}{\partial x^{i'}} (\nabla_j \xi^{(k)}_{,l}) dx^{i'} = -R_{jli}{}^k(0) \int_0^{x^i} dx^{i'} + O(x^2),$$

e usando o fato de que $\nabla_{[i} \xi^{(k)}_{,j]}(0) = 0$, finalmente obtemos

$$\nabla_j \xi^{(k)}_{,l}(x) = -x^i R_{jli}{}^k(0) + O(x^2). \quad (4.118)$$

Notemos que, devido à propriedade de anti-simetria das componentes do tensor de

curvatura de Riemann nos dois primeiros índices, a equação de Killing é satisfeita em ordem dominante, $\nabla_i \xi_{(k)j} + \nabla_j \xi_{(k)i} = O(x^2)$.

Agora, devido à anti-simetria de $\nabla_i \xi_{(k)j}$, que é uma consequência das equações de Killing, temos

$$\nabla_i \xi_j = -\nabla_j \xi_i,$$

$$2\nabla_i \xi_j = \nabla_i \xi_j - \nabla_j \xi_i,$$

$$\nabla_i \xi_j = \frac{1}{2} (\nabla_i \xi_j - \nabla_j \xi_i) = \frac{1}{2} (\partial_i \xi_j - \partial_j \xi_i).$$

Lembrando que, dada uma 1-forma $A = A_i dx^i$, temos $dA = (dA)_{ij} dx^i \wedge dx^j$, com $(dA)_{ij} = (1/2) (\partial_i A_j - \partial_j A_i)$, concluímos da equação acima que

$$(d\xi_{(k)})_{ij} = \nabla_i \xi_{(k)j}. \quad (4.119)$$

À luz desse resultado, podemos afirmar, portanto, que a equação (4.118) dá as componentes da 2-forma de Killing associada à translação na direção k em ordem dominante,

$$(d\xi_{(k)})_{ij} = \nabla_i \xi_{(k)j} = -x^l R_{ijkl}(0) + O(x^2), \quad (4.120)$$

ou, equivalentemente,

$$d\xi_{(k)} = [-x^l R_{ijkl}(0) + O(x^2)] dx^i \wedge dx^j. \quad (4.121)$$

Com esse resultado, e de posse da equação de natação, podemos finalmente calcular a distância nadada por um corpo deformável pequeno num espaço-tempo estático e espacialmente homogêneo e isotrópico.

4.6.3 Translação de nadadores pequenos em espaços curvos

Suponhamos que o corpo deformável seja pequeno, no sentido de que $RL^2 \ll 1$, onde R é o escalar de curvatura do espaço ambiente e L é a maior distância entre as suas partículas constituintes, e consideremos um sistema de coordenadas localmente euclidiano $\{x^i\}_{i=1}^3$ com origem no centro de massa aproximado do nadador. Dessa forma, a geometria espacial pode ser considerada aproximadamente euclidiana em toda a região que abarca o nadador e, em particular, a noção de campo de Killing translacional da seção anterior é aplicável.

Além disso, o fato de que a origem do sistema de coordenadas localmente euclidiano é escolhida de modo a coincidir com o centro de massa aproximado do sistema garante que, em ordem dominante de RL^2 , os campos de Killing associados a rotações e

translações são mutuamente ortogonais (do mesmo modo como ocorre no caso euclidiano, que já estudamos), de forma que podemos estudar translações independentemente de rotações. Em especial, nesse caso, o fato de que a 2-forma de Killing translacional, dada pela equação (4.121), *não* é identicamente nula permite que ocorra o efeito Wisdom, isto é, que o nadador possa se transladar no espaço sem o auxílio de forças externas.

Seja $\{\eta_{(b)}\}_{b=1}^L$ um conjunto de campos vetoriais de deformação linearmente independentes e satisfazendo a condição de gauge, dada pela equação (4.65), ou seja, ortogonais a qualquer campo de Killing da seção espacial. Um ciclo infinitesimal de deformações com área $d\sigma^{(b)} \wedge d\sigma^{(c)}$ no espaço de formatos levará a uma distância nadada $\Delta\kappa^{(\beta)}$ dada pela equação de natação (4.86),

$$\langle \xi^{(\beta)} | \xi_{(\alpha)} \rangle \Delta\kappa^{(\alpha)} = -\frac{1}{M} \sum_{l=1}^N m_l [\nabla_i \xi^{(\beta)}_j \eta_{(b)}^i \eta_{(c)}^j]_{x_{(l)}(0)} d\sigma^{(b)} \wedge d\sigma^{(c)}.$$

Se tomamos $\xi^{(\beta)}$ como o campo de Killing associado a translações na k -ésima direção, que denotamos por $\xi^{(k)}$, levando em conta a ortogonalidade já mencionada entre campos de Killing de translações em direções perpendiculares e rotações em torno dos eixos principais, obtemos

$$\Delta\kappa^{(k)} = -\frac{1}{M} \sum_{l=1}^N m_l [\nabla_i \xi^{(k)}_j \eta_{(b)}^i \eta_{(c)}^j]_{x_{(l)}(0)} d\sigma^{(b)} \wedge d\sigma^{(c)}.$$

Usando a equação (4.118), podemos substituir a derivada covariante de $\xi^{(k)}_j$ por um fator proporcional à curvatura riemanniana calculada na origem,

$$\Delta\kappa^{(k)} = \frac{1}{M} R_{ijh}{}^k(0) \sum_{l=1}^N m_l [x_{(l)}^h \eta_{(b)}^i \eta_{(c)}^j]_{x_{(l)}(0)} d\sigma^{(b)} \wedge d\sigma^{(c)}. \quad (4.122)$$

Nessa equação, $\Delta\kappa^{(k)}$ é a distância nadada ao longo da curva integral de $\xi^{(k)}$, campo de Killing que gera translações ao longo do eixo k , para uma vizinhança suficientemente pequena ao redor da origem do sistema de coordenadas localmente euclidiano. Portanto, nessa vizinhança, $\Delta\kappa^{(k)}$ será simplesmente a variação da coordenada x^k de cada partícula do corpo (essa variação é aproximadamente a mesma para todas as partículas, uma vez que, completado o ciclo de deformações, o corpo reassume o seu formato original, ou seja, as distâncias de cada par de partículas retomam seu valor inicial), e podemos escrever

$$\Delta\kappa^{(k)} = \Delta x^k. \quad (4.123)$$

Logo, a equação (4.122) pode ser reescrita como

$$M\Delta x^k = R_{ijh}{}^k(0) \left[\sum_{l=1}^N m_l x_{(l)}{}^h \eta_{(b)}{}^i \eta_{(c)}{}^j \right]_{x_{(l)}(0)} d\sigma^{(b)} \wedge d\sigma^{(c)}. \quad (4.124)$$

Essa é, resumindo, a distância nadada por um corpo pequeno, não-relativístico, ao longo do eixo x^k , quando ele realiza um ciclo de deformações infinitesimais, de área $d\sigma^{(b)} \wedge d\sigma^{(c)}$ no espaço de formatos, geradas por um conjunto de campos vetoriais de deformação $\{\eta_{(b)}\}_{b=1}^L$, num espaço-tempo estático e espacialmente homogêneo e isotrópico. Trata-se do resultado principal deste capítulo.

Notemos que a distância transladada depende apenas do tensor de Riemann, uma propriedade geométrica do espaço ambiente, de uma quantidade característica do nadador (entre colchetes na equação), relativa à sua distribuição de massa e às suas deformações, e da amplitude das deformações (representada pela área $d\sigma^{(b)} \wedge d\sigma^{(c)}$ no espaço de formatos).

Capítulo 5

Natação de corpos quase-rígidos deformáveis no espaço-tempo cosmológico de Friedmann-Robertson-Walker

Muito embora o trabalho original de Wisdom sobre o fenômeno de natação no espaço-tempo tenha inegável importância, tanto por abrir um novo filão no estudo de corpos extensos em relatividade geral, revelando um mecanismo de auto-propulsão para corpos deformáveis, quanto pelos méritos inerentes ao efeito (como seu aspecto de fases geométricas), o caso particular por ele abordado, que considera a geometria de Schwarzschild, resulta num efeito pequeno demais para ser (i) verificado experimentalmente, (ii) utilizado em aplicações tecnológicas (como o projeto de satélites capazes de alterar a sua órbita por variações de formato¹) ou (iii) explicar fenômenos observados em astronomia e astrofísica². Diante disso, é natural, como próximo passo no estudo do efeito de natação, procurar um contexto em que a sua ordem de grandeza seja mais expressiva.

A possibilidade mais promissora, numa primeira análise, é considerar espaços-tempos cosmológicos, isto é, soluções das equações de Einstein com seções espaciais homogêneas e isotrópicas, em conformidade com as observações astronômicas de larga escala do universo. Isso porque, nesse caso, em tese, não há um tempo limite para o desenvolvimento fenômeno, que pode então acumular o seu efeito continuado (somando-se os deslocamentos atingidos em cada ciclo de deformação) até torna-se possivelmente mensurável ou, num caso otimista, mesmo importante para explicar a evolução de es-

¹O efeito newtoniano de balanço seria mais proveitoso para esse fim, por poder ser várias ordens de grandeza maior, como vimos no Capítulo 3.

²Os fenômenos de astrofísica e astronomia fornecem o cenário físico no qual a solução de Schwarzschild pode ser relevante para descrever a interação gravitacional

truturas de grande porte, como talvez galáxias ou aglomerados delas. Apesar de esse contexto ser motivamente, aventamos *a priori* que, mesmo nele, o efeito deva ainda ser muito pequeno, na medida em que a distância nadada deve ser escalada por $l^2 R$, onde l é a dimensão linear característica do corpo e R é alguma medida da curvatura espaço-temporal³, e, sendo curvatura observada no universo atual muito próxima de zero, esperamos ter $R \approx 0$. Como alternativa, por outro lado, podemos nos perguntar se uma natação mais eficiente pode ter sido possível em alguma fase passada da evolução do universo. De qualquer forma, deve ser possível, a princípio, construir em laboratório situações análogas às da natação em Friedmann-Robertson-Walker, envolvendo, por exemplo, corpos deformáveis sobre superfícies homogêneas e isotrópicas. Todas essas possibilidades amplificam o interesse de se estudar o efeito Wisdom no caso da geometria de Friedmann-Robertson-Walker, tarefa a que nos propomos neste capítulo.

5.1 Solução de Friedmann-Robertson-Walker das equações de Einstein

Os chamados universos de Friedmann-Robertson-Walker (que abreviaremos por FRW, doravante) são as soluções espacialmente homogêneas e isotrópicas das equações de Einstein, fornecendo os espaços-tempos que respeitam o *princípio cosmológico*, segundo o qual, em larga escala, o espaço possui essas duas propriedades de simetria. Tal princípio é confirmado por observações experimentais e, por isso, as soluções de FRW são amplamente utilizadas como modelos cosmológicos. Antes de estudar a natação de corpos deformáveis em tais espaços-tempos, vamos fazer um breve resumo de suas características.

Demos, no Capítulo 4, as definições formais de homogeneidade e isotropia espaciais. Revisando, esses conceitos, tomados simultaneamente, querem dizer que, segundo uma dada congruência de observadores, todos os pontos e todas as direções do espaço (isto é, das hipersuperfícies ortogonais às quadrivelocidades de tais observadores) são geometricamente equivalentes. Os observadores dessa congruência, que deve preencher todo o espaço-tempo, são chamados de *observadores isotrópicos*, e as suas seções espaciais, que devem foliar todo o espaço-tempo, de *hipersuperfícies de homogeneidade*. Por conveniência, cobrimos o espaço-tempo com um sistema de coordenadas tal que o tempo coordenado coincida com o tempo próprio τ dos observadores isotrópicos. Isso garante que as hipersuperfícies de homogeneidade sejam *seções de simultaneidade* para tais observadores, e nos permite rotulá-las com esse parâmetro. Quanto às coordenadas espaciais $\{x^i\}$, escolhemo-las tais que os observadores isotrópicos sejam estáticos, isto

³No caso da natação em Schwarzschild, por exemplo, vimos que essa quantidade é $GM/c^2 r^3$, que é um fator ao qual as componentes da curvatura riemanniana são proporcionais.

é, tais que $dx^i/d\tau \equiv 0$. Por conseguinte, $u \doteq d/d\tau = \partial/\partial\tau$.

Também vimos no Capítulo 4 que, se (\mathcal{M}, g) for um tal espaço-tempo e u for a quadrivelocidade dos seus observadores isotrópicos, então g induz sobre cada hipersuperfície de homogeneidade, que denotaremos por Σ_τ , uma métrica riemanniana $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$, que nada mais é que a restrição de g a Σ_τ (isto é, dados $p \in \Sigma_\tau$ e $X, Y \in T_p\mathcal{M}$, vale $g(X, Y) = h(X, Y)$). É fácil verificar que, no sistema de coordenadas que adotamos, temos $g_{00} = -1$, $g_{0i} = 0$ e $g_{ij} = h_{ij}$, de modo que o elemento de linha pode ser escrito (em unidades naturais) simplesmente como $ds^2 = -d\tau^2 + dl^2$, onde $dl^2 = h_{ij}dx^i dx^j$ é o elemento de linha da seção espacial dos observadores isotrópicos. Agora, impondo sobre a métrica as propriedades de simetria das seções espaciais, obtemos restrições ainda mais drásticas sobre a sua forma. A hipótese de isotropia implica que o tensor de Riemann ${}^{(3)}R_{\mu\nu\kappa}{}^\sigma$ das hipersuperfícies de homogeneidade munidas da métrica h induzida - isto é, o tensor de Riemann calculado com a métrica h - deve ser um múltiplo da identidade, ou seja, que ${}^{(3)}R_{\mu\nu\lambda\sigma} = K h_{\lambda[\mu} h_{\nu]\sigma}$, para evitar a distinção puramente geométrica de vetores tangentes nas hipersuperfícies de homogeneidade. A hipótese de homogeneidade, por sua vez, implica que K deve ser uma constante, do contrário poderíamos distinguir pontos dessas hipersuperfícies. Calculando o escalar de curvatura ${}^{(3)}R = {}^{(3)}R^\mu{}_\mu = {}^{(3)}R^\mu{}_\lambda{}^\lambda{}_\mu$ relativo a (Σ_τ, h) , obtemos então

$${}^{(3)}R = 6K, \quad (5.1)$$

ou seja, as hipersuperfícies de homogeneidade têm curvatura constante⁴. Agora, é possível demonstrar que, dados dois espaços com mesma dimensão e munidos de métricas com mesma assinatura, se eles possuem curvatura constante e de mesmo valor, então eles são *localmente isométricos*⁵. No caso de (Σ_t, h) , temos um espaço tridimensional com métrica riemanniana. Logo, a tarefa de determinar a geometria das hipersuperfícies de homogeneidade é completada enumerando-se os espaços tridimensionais riemannianos com todos os possíveis valores de curvatura constante. Acontece, porém, que temos apenas três casos, relativos a $K = 0$, $K > 0$ e $K < 0$.

Quando a curvatura de (Σ_t, h) é estritamente positiva, ele é localmente isométrico a uma 3-esfera, e o elemento de linha do espaço-tempo torna-se

$$ds^2 = -d\tau^2 + a(\tau)^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (5.2)$$

onde $0 \leq \chi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Quando a sua curvatura é estritamente

⁴É importante ter em mente que são os observadores isotrópicos - e, em geral, somente eles - que experimentam uma seção espacial de curvatura constante. O conceito de espaço é dependente de observador e, na relatividade geral, corresponde à seção tridimensional tipo-espaço ortogonal à quadrivelocidade do observador em cada ponto da sua linha de mundo. Assim, observadores em movimento relativo aos isotrópicos, em princípio, observam seções espaciais com curvatura espacial variável, do mesmo modo como não observam isotropia.

⁵Esse é um importante teorema de geometria riemanniana.

negativa, (Σ_t, h) é localmente isométrico a um hiperbolóide tridimensional, de modo que o elemento de linha espaço-temporal tem a forma

$$ds^2 = -d\tau^2 + a(\tau)^2 [d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (5.3)$$

com $0 \leq \chi \leq \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Por fim, quando a sua curvatura é nula, a seção espacial dos observadores isotrópicos é localmente isométrica a do espaço plano tridimensional, e então

$$ds^2 = -d\tau^2 + a(\tau)^2 [d\chi^2 + \chi^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (5.4)$$

onde usamos coordenadas polares esféricas, $0 \leq \chi \leq \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$, para manter a semelhança com as equações (5.2) e (5.3).

O fator $a(\tau)$ que aparece nos três possíveis elementos de linha é chamado *fator de escala*. No caso de curvatura⁶ positiva, temos um universo fechado (embora sem fronteira), e $a(\tau)$ pode ser visto como o raio da 3-esfera que representa a seção espacial. De modo mais geral, o fator de escala é responsável por mensurar a taxa de movimento relativo dos observadores isotrópicos, isto é, o quanto eles se afastam, se aproximam, ou se as distâncias próprias entre eles se mantêm com o tempo. É importante notar que estamos utilizando *coordenadas comóveis*, que mantêm as posições coordenadas dos observadores isotrópicos fixas, mas isso *não* implica que as distâncias próprias entre eles se mantenham. Suponhamos dois observadores isotrópicos com coordenadas espaciais $(\chi_1, \theta_1, \phi_1)$ e $(\chi_2, \theta_2, \phi_2)$. Num dado instante τ , isto é, sobre uma dada hipersuperfície Σ_τ , a distância própria entre eles será

$$R_{12} = \int_1^2 \sqrt{ds^2}|_{\tau=\text{const}} = a(\tau) \int_1^2 \sqrt{d\chi^2 + f(\chi)^2 d\Omega^2}, \quad (5.5)$$

onde $f(\chi) = \sin \chi$, $\sinh \chi$ ou χ para $K > 0$, $K < 0$ ou $K = 0$, respectivamente, e $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$. Vemos que toda a dependência temporal da distância está no fator de escala, e podemos escrever $R_{12} = a(\tau) D(x_1^i, x_2^j)$, onde $D(x_1^i, x_2^j)$ é uma função exclusiva das coordenadas espaciais (fixas) dos dois observadores. Vemos, assim, que $dR_{12}/da = R_{12}/a$, e a velocidade própria relativa dos dois observadores pode, então, ser escrita como

$$v_{12} \doteq \frac{dR_{12}}{d\tau} = H(\tau) R_{12}(\tau), \quad (5.6)$$

onde

$$H(\tau) \doteq \frac{\dot{a}}{a}, \quad (5.7)$$

⁶Quando usarmos o termo "curvatura", estaremos sempre fazendo referência à curvatura das seções espaciais dos observadores isotrópicos, salvo menção em contrário.

é o chamado *parâmetro de Hubble*⁷, e o ponto denota a derivada em relação ao tempo próprio. É fácil ver que, se $\dot{a} > 0$, os dois observadores estão se afastando; se $\dot{a} < 0$, estão se aproximando; e, se $\dot{a} = 0$, a distância própria entre eles se mantém. Esses dois observadores isotrópicos são completamente arbitrários e, portanto, essa análise vale para qualquer par de tais observadores. Vemos, dessa maneira, que a geometria de FRW pode descrever tanto um universo se contraindo, quanto um universo em expansão ou estático. A equação (5.7) é a chamada *lei de Hubble*, e diz que a taxa de aproximação ou afastamento das galáxias distantes é proporcional à sua distância, no caso de um universo não-estático.

Em resumo, as hipóteses de isotropia e homogeneidade determinam, sozinhas, a métrica dos espaços-tempos de FRW a menos de três possibilidades para a geometria espacial e de uma função positiva $a(\tau)^2$. Para fixar uma dessas três geometrias espaciais e determinar essa função, é preciso, finalmente, recorrer às equações de Einstein. Antes, porém, notemos que é possível reescrever esses três elementos de linha distintos, dados pelas equações (5.2), (5.3) e (5.4), de forma unificada, por meio de mudanças de coordenadas apropriadas. Para $K > 0$, fazemos $\chi \mapsto r = \sin \chi$; para $K < 0$, fazemos $\chi \mapsto r = \sinh \chi$; e para $K = 0$, usamos uma transformação identidade, $\chi \mapsto r = \chi$. Sob tais transformações, obtemos

$$ds^2 = -d\tau^2 + a(\tau)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (5.8)$$

com $k = 1$ para o caso de curvatura positiva, $k = -1$ para o de curvatura negativa e $k = 0$ para o universo plano.

5.1.1 A dinâmica do modelo de FRW

Para resolver as equações de Einstein para a geometria de FRW e obter soluções que possam descrever realisticamente o universo, precisamos introduzir o seu conteúdo de energia e matéria, representado pelo tensor de energia-momentum $T_{\mu\nu}$. É claro que ele deve ser consistente com as simetrias que impusemos ao espaço-tempo. Para evitar a discriminação de uma direção privilegiada sobre Σ_τ , o que levaria à violação da hipótese de isotropia, devemos ter $T^\mu{}_\nu u^\nu \propto u^\mu$, ou seja, qualquer projeção de $T^\mu{}_\nu u^\nu$ sobre as seções de homogeneidade deve ser nula. É possível provar que o tensor energia-momentum mais geral que goza essa propriedade é o de um fluido perfeito,

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + P h_{\mu\nu}, \quad (5.9)$$

onde ρ e P são, respectivamente, a densidade de matéria e energia e a pressão (numa direção qualquer) segundo medidas pelos observadores isotrópicos (comóveis com o

⁷Comumente chamado de *constante de Hubble* na literatura, por razões históricas.

fluido perfeito), e só podem depender de τ , para respeitar a hipótese de homogeneidade das seções Σ_τ . É possível mostrar que as componentes $(i, 0)$ e $(i, j \neq i)$ das equações de Einstein são automaticamente satisfeitas, enquanto as componentes $(0, 0)$ e (i, i) levam, respectivamente, a

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi\rho - 3\frac{k}{a^2}, \quad (5.10)$$

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi(\rho + 3P). \quad (5.11)$$

que são as chamadas *equações de Friedmann*. Para resolvê-las e determinar o fato de escala $a(\tau)$, precisamos de ρ e P como dados de entrada, os quais, em geral, estão relacionados por uma *equação de estado*, dependendo da natureza do tipo de matéria considerada. Existem três possibilidades básicas: (i) se a densidade de energia é dominada pela matéria ordinária, concentrada nas galáxias homogeneamente distribuídas no espaço e com velocidades aleatórias, podemos desprezar a pressão, $P = 0$; (ii) se é a radiação que domina, da teoria eletromagnética temos $P = \rho/3$; se a energia do vácuo, representada pela constante cosmológica⁸ Λ é dominante, temos $P = -\rho = -\Lambda/8\pi$.

Uma condição necessária para o universo ser estático, $\dot{a}(\tau) \equiv 0$, é que $\ddot{a}(\tau) \equiv 0$. Da equação (5.11) vemos que isso ocorre se, e só se, $\rho \equiv -3P$. É preciso haver, pois, um ajuste finíssimo entre a densidade de energia e a pressão do universo, incluindo sinais diferentes para essas quantidades. Isso só ocorreria se não houvesse qualquer densidade de energia no universo. Para o caso em que os conteúdos de matéria e energia dominam a dinâmica da evolução do universo, temos necessariamente $\ddot{a} < 0$. O que se observa empiricamente é que o universo está, atualmente, em expansão acelerada, isto é, $\ddot{a} > 0$, o que indica uma constante cosmológica positiva⁹, $\Lambda > 0$, e dominante¹⁰, com uma pressão resultante negativa.

Uma questão fundamental é determinar a geometria das hipersuperfícies de homogeneidade, isto é, o valor de k na equação (5.8). Usando a equação (5.7), podemos reescrever a (5.10) como

$$k = \frac{8\pi a^2}{3}(\rho - \rho_{crit}), \quad (5.12)$$

onde

⁸É comum considerar a constante cosmológica por meio de um termo adicional nas equações de Einstein. Aqui, mantemos a forma reduzida dessas equações e incluímos a constante cosmológica, quando necessário, no tensor energia-momentum.

⁹Existem outras alternativas para explicar a expansão acelerada do universo observada, como a quintessência, mas a constante cosmológica parece ser a mais econômica e, por isso, é que tem maior crédito junto à comunidade científica no momento.

¹⁰Os dados observacionais indicam, presentemente, que a contribuição do vácuo corresponde a 3/4 do conteúdo total de energia do universo.

$$\rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi} \geq 0 \quad (5.13)$$

é a chamada *densidade crítica de energia*. Vemos a seção espacial dos observadores isotrópicos é plana se $\rho = \rho_{crit}$; é localmente isométrica a uma 3-esfera se $\rho > \rho_{crit}$, e a um 3-hiperbolóide se $\rho < \rho_{crit}$. Os melhores dados observacionais disponíveis atualmente indicam que o universo é *aproximadamente* plano, mas não são conclusivos o suficiente para concluirmos o sinal da sua curvatura e, por conseguinte, qual é a geometria do universo.

As equações de Friedmann também permitem obter uma equação diferencial para a evolução da densidade de energia do universo. Multiplicando a equação (5.10) por a^2 , em seguida derivando-a em relação a τ e, por fim, usando a equação (5.11), obtemos

$$\dot{\rho} + 3(\rho + P)H = 0. \quad (5.14)$$

Essa equação nos permite, dada uma equação de estado, relacionar a densidade de energia com o fator de escala. Para o caso de universo preenchido com matéria, $P = 0$ implica $\rho a^3 = \text{constante}$; para o caso de radiação, $P = \rho/3$ leva a $\rho a^4 = \text{constante}$; para o caso de constante cosmológica, $P = -\rho$ conduz imediatamente a $\rho = \text{constante}$. Num caso geral, conhecendo-se $\rho = \tilde{\rho}(a)$, o trabalho de determinar a evolução dinâmica do universo reduz-se a resolver a equação (5.10) na forma

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi}{3} a^2 \tilde{\rho}(a) - k, \quad (5.15)$$

com as condições iniciais apropriadas. Evidências como a expansão do universo e a isotropia da radiação cósmica de fundo indicam que o universo já esteve num estado singular, chamado de *big bang*, em que toda a matéria estava infinitamente próxima, $a = 0$, com densidade de energia e curvatura espaço-temporal infinitas.

5.2 Natação no universo de FRW

De forma similar àquela empregada por Wisdom para estudar natação no espaço-tempo de Schwarzschild, consideraremos como nadador um corpo quase-rígido deformável que se constitui de partículas massivas ligadas por hastes de massa desprezível, construídas como geodésicas de *comprimento coordenado* $l(\tau)$ dado das hipersuperfícies de homogeneidade. Como antes, as hastes têm de ser constantemente monitoradas para garantir que os vínculos posicionais se mantenham, e o modo como isso é feito é inteiramente semelhante àquele empregado por Wisdom: usando-se dispositivos distribuídos ao longo da extensão da haste, cada um respondendo por uma fração suficientemente pequena da sua totalidade, responsáveis pela aplicação das tensões internas necessárias, seguindo uma programação previamente estabelecida. Em particular, eles devem garantir que

$l(\tau + T) = l(\tau)$, onde T é o período próprio (medido pelos observadores isotrópicos) de cada ciclo completo de deformações, isto é, que os comprimentos coordenados das hastes sejam iguais em partes correspondentes de cada ciclo.

Nosso interesse consiste em tomar um nadador análogo àquele utilizado por Wisdom para analisar a natação em Schwarzschild e inseri-lo num espaço-tempo genérico de FRW, a fim de podermos comparar o efeito nos dois casos. Temos, assim, uma partícula de massa m_0 no vértice central do tripé, do qual se estendem três hastes, de comprimento coordenado $l(\tau)$ e igualmente espaçadas angularmente em torno do vértice central. Além disso, cada uma das hastes forma um *ângulo coordenado* $\alpha(\tau)$ com o eixo de simetria do tripé. A Figura 1 do Capítulo 3 ilustra essa nossa descrição. Uma diferença importante, contudo, é que, devido à isotropia das seções espaciais de homogeneidade, nenhuma orientação particular do tripé é privilegiada. Apesar disso, para simplificar os cálculos, aproveitando a simetria do tripé, e manter a semelhança com o caso resolvido por Wisdom, vamos assumir que o tripé esteja, fixado o sistema de coordenadas, posicionado de modo que o seu eixo de simetria coincida com uma curva $\theta = \text{constante}$, $\phi = \text{constante}$. Isso deve garantir alguma semelhança entre as lagrangianas e as equações de movimento, mas, sem dúvida, a distância nadada em FRW não poderá depender da distância r_0 a que o vértice central se localiza da origem do sistema de coordenadas, ao contrário do que ocorria em Schwarzschild, em cujo caso o centro da fonte simetricamente esférica constituía um ponto geometricamente privilegiado do espaço-tempo (a saber, era o ponto ao redor do qual as seções espaciais dos observadores estáticos em relação à fonte eram simetricamente esféricas). No nosso problema, r_0 depende apenas da escolha totalmente arbitrária da origem do sistema de coordenadas, e nenhuma delas é mais vantajosa em nenhum sentido.

Os parâmetros de deformação são $\{l, \alpha\}$ e, como já mencionamos, dispositivos locais sobre o nadador garantem a sincronia e a periodicidade do movimento, conforme medidos pelos observadores isotrópicos, $l(\tau + T) = l(t)$ e $\alpha(\tau + T) = \alpha(t)$. Assim, após um ciclo completo, o corpo assume exatamente o seu formato original, mas deve estar localizado numa região diferente do espaço-tempo devido ao efeito de natação. Assumimos que as deformações são descritas por curvas retangulares fechadas no espaço de formatos, coberto com os parâmetros $\{l, \alpha\}$, isto é, enquanto um dos parâmetros varia, o outro sempre permanece fixo, e a deformação seguinte sempre é realizada sobre o parâmetro que antes estivera fixado. As magnitudes de variação de cada um desses parâmetros é de Δl e $\Delta \alpha$.

Num espaço homogêneo e isotrópico coberto com coordenadas comóveis, partículas livres inicialmente estáticas permanecem estáticas. Assim, após um ciclo completo de deformações, num período próprio T , quando o corpo retoma o seu formato original, queremos medir o deslocamento Δr_0 da partícula no vértice central do tripé ao longo da direção do seu eixo de simetria, a única em que ele pode nadar, dada a simetria

do tripé e das deformações que ele executa. O deslocamento das demais partículas é determinado automaticamente pelos vínculos posicionais que definem o tripé. Vamos usar as coordenadas comóveis $\{\tau, r, \theta, \phi\}$ que permitem escrever o elemento das três geometrias espaciais de forma unificada, segundo a equação (5.8),

$$ds^2 = -d\tau^2 + a(\tau)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right),$$

onde $k = 1$ corresponde ao caso de curvatura espacial positiva, $k = -1$ ao de curvatura espacial negativa e $k = 0$ ao espaço plano. Como antes, tomamos por hipótese que o sistema segue trajetórias de ação estacionária. A lagrangiana que encerra a dinâmica de uma partícula livre em FRW é, pelo mesmo raciocínio que empregamos no Capítulo 3, mas usando agora o elemento de linha acima,

$$L = m \sqrt{1 - a(\tau)^2 \left[F(r) \dot{r}^2 + r^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) \right]}, \quad (5.16)$$

em unidades naturais, onde o ponto denota a derivada total em relação a τ e

$$F(r) = 1 / (1 - kr^2). \quad (5.17)$$

Notemos que essa $n\tilde{a}o$ é uma lagrangiana autônoma, na medida em que depende explicitamente do tempo e, conseqüentemente, os observadores isotrópicos não observarão conservação da energia para o tripé. Esse é um resultado natural em FRW, espaço-tempo que não admite um campo de Killing tipo-tempo, ao qual a conservação de energia está associada em relatividade geral. Conforme efetuamos no Capítulo 3, a lagrangiana do nadador será tomada como a soma das lagrangianas livres de cada uma de suas partículas constituintes, eliminando-se as variáveis redundantes pelos vínculos (por ora, apenas por meio de funções implícitas, na medida em que ainda não resolvemos as equações das geodésicas sobre as hipersuperfícies de homogeneidade). Temos, pois,

$$L = \sum_{a=0}^3 m_a c \sqrt{c^2 - a(\tau)^2 \left[F(r_a) \dot{r}_a^2 + r_a^2 \left(\dot{\theta}_a^2 + \sin^2 \theta_a \dot{\phi}_a^2 \right) \right]}. \quad (5.18)$$

Nessa equação, $a = 0$ rotula a partícula no vértice central, e as demais são rotuladas por $a = 1, 2, 3$. Nessa lagrangiana, as únicas variáveis dinâmicas independentes são r_0 e \dot{r}_0 , as outras coordenadas e velocidades sendo obtidas a partir dessas pelas equações de vínculo, obtidas resolvendo-se as equações das geodésicas nas hipersuperfícies Σ_τ . Vamos resolver as equações de Euler-Lagrange correspondentes a essa lagrangiana, e esperamos que um ciclo de deformações $n\tilde{a}o$ leve a nenhuma natação no caso $k = 0$ e a deslocamentos em sentidos contrários para $k = 1$ e $k = -1$, de acordo com a conjectura de que, no efeito Wisdom, a distância nadada deve ser proporcional a alguma

medida da curvatura espacial, como vimos ocorrer nos casos estudados nos capítulos anteriores. Pelas simetrias do problema, sabemos de antemão que $\dot{\theta}_0 = 0$, $\dot{\phi}_a = 0$, para $a = 0, 1, 2, 3$, e $\theta_i = \theta_1$, $r_i = r_1$, para $i = 2, 3$. Além disso, pelos vínculos posicionais que definem o corpo quase-rígido, temos $r_1 = f(r_0, l, \alpha)$ e $\theta_1 = g(r_0, l, \alpha)$. Essas características do nadador que tomamos em FRW são idênticas às do nadador que Wisdom escolheu em Schwarzschild, as únicas diferenças sendo as funções g e h que dão os vínculos, dependentes de equações das geodésicas de seções de espaços-tempos diferentes. Diante de tais considerações, a lagrangiana acima se reduz a

$$L = m_0 c^2 \sqrt{1 - a(\tau)^2 F(r_0) \left(\frac{\dot{r}_0}{c}\right)^2} + 3m_1 c^2 \sqrt{1 - a(\tau)^2 \left[F(r_1) \left(\frac{\dot{r}_1}{c}\right)^2 + \left(\frac{r_1 \dot{\theta}_1}{c}\right)^2 \right]}. \quad (5.19)$$

Supondo que as velocidades das partículas constituintes, em todo o movimento, sejam muito menores do que a da luz, podemos expandir essa equação em série de potências até ordem de $(v/c)^2$, tornando-a aproximadamente quadrática nas velocidades,

$$L \approx m_0 c^2 \left[1 - \frac{1}{2} a(\tau)^2 F(r_0) \left(\frac{\dot{r}_0}{c}\right)^2 \right] + 3m_1 c^2 \left\{ 1 - \frac{1}{2} a(\tau)^2 \left[F(r_1) \left(\frac{\dot{r}_1}{c}\right)^2 - \left(\frac{r_1 \dot{\theta}_1}{c}\right)^2 \right] \right\}. \quad (5.20)$$

Agora, para que o momentum $p_{r_0} = \partial L / \partial \dot{r}_0$ conjugado à coordenada r_0 seja aproximadamente conservado num período próprio T , suponhamos, como fizemos no caso do espaço-tempo de Schwarzschild, que as deformações se dêem no *regime de altas frequências*, isto é, que cada ciclo completo de deformações ocorra sobre uma hipersuperfície $\tau \approx$ constante. Na próxima seção, obtemos uma expressão que quantifica o significado de altas frequências para o tripé em FRW.

Regime de altas frequências do tripé em FRW

Vamos, nesta seção, obter uma expressão que dê um significado quantitativo para o regime de deformações a altas frequências. Por *altas frequências de deformação* queremos dizer que um ciclo completo se dá a $\tau \approx$ constante. Isso é equivalente a dizer

que, se o ciclo se inicia num instante τ_0 e termina num instante $\tau_0 + T$, temos¹¹

$$T \ll \tau_0. \quad (5.21)$$

Vamos mostrar que essa condição implica que a expansão do espaço-tempo no período T de um ciclo completo tem de ser desprezível frente à magnitude própria ΔL (conforme medida pelos observadores isotrópicos) de deformação do tripé.

Suponhamos que, num instante próprio τ_0 o comprimento próprio do tripé, sobre a seção Σ_{τ_0} , seja $L + \Delta L$, e que cada uma das quatro partes de um ciclo completo de deformações leve aproximadamente $1/4$ do período total T . Considerando a congruência de observadores isotrópicos que preenche o espaço-tempo de FRW, sejam o_1 e o_2 dois observadores dessa congruência que, em τ_0 , têm entre si uma distância própria de ΔL . Após um intervalo de tempo próprio $\Delta\tau = T/4$, a distância própria entre eles será, devido à expansão do universo,

$$D_{12}(\tau_0 + \Delta\tau) = \frac{D_{12}(\tau_0)}{a(\tau_0)} a(\tau_0 + \Delta\tau) = \frac{\Delta L}{a(\tau_0)} a(\tau_0 + T/4). \quad (5.22)$$

Como, por hipótese, $\Delta\tau \ll \tau_0$, podemos usar a aproximação linear para $a(\tau_0 + \Delta\tau)$, o que nos leva a

$$D_{12}(\tau_0 + T/4) = \frac{\Delta L}{a(\tau_0)} \left[a(\tau_0) + \frac{T}{4} \dot{a}(\tau_0) \right],$$

ou seja,

$$D_{12}(\tau_0 + T/4) = D_{12}(\tau_0) + \frac{T \Delta L}{4} H(\tau_0). \quad (5.23)$$

O afastamento próprio de o_1 e o_2 nesse intervalo de tempo é, pois,

$$\Delta\lambda \doteq D_{12}(\tau_0 + T/4) - D_{12}(\tau_0) = \frac{T \Delta L}{4} H(\tau_0). \quad (5.24)$$

Agora, assumindo que $\tau_0 \sim 1/H(\tau_0)$, podemos reescrever essa equação como

$$\Delta\lambda \sim \frac{T \Delta L}{\tau_0}, \quad (5.25)$$

e, na medida em que $T \ll \tau_0$, concluímos que

$$\Delta\lambda \ll \Delta L. \quad (5.26)$$

Portanto, chegamos à conclusão de que a condição para o regime de altas frequências

¹¹Aqui, não podemos assumir que τ_0 seja tão pequeno quanto se queira, na medida em que exigimos que $T \ll \tau_0$. Isso quer dizer que o universo não pode ser tomado infinitamente jovem no nosso tratamento. Essa restrição, porém, não é fisicamente significativa, uma vez que, numa tal fase, o universo não admitia formação de estrutura, ou seja, não podia haver nadadores.

em FRW pode ser reescrita da mesma forma que a condição para altas frequências em Schwarzschild: que cada ciclo seja rápido o suficiente para que o corpo não sofra um deslocamento natural - isto é, não provocado por natação - significativo nesse intervalo de tempo. Em Schwarzschild, recordando, isso significa que o deslocamento livre $\Delta\tilde{r}$ de *queda* do tripé é desprezível frente à deformação Δl no intervalo de tempo de $1/4$ de um período. Aqui, é o deslocamento $\Delta\lambda$ devido à *expansão* do espaço-tempo, que ocorreria entre as partículas constituintes se não houvesse as tensões internas do tripé mantendo a sua coesão, que deve ser desprezível comparado à deformação ΔL no intervalo de tempo cosmológico $T/4$. Em termos práticos, isso quer dizer que a seção espacial dos observadores isotrópicos modifica-se muito pouco num período próprio T de deformações.

O que estamos fazendo, em outras palavras, é desprezando a *curvatura espaço-temporal*, mas supondo que o nadador seja ainda sensível à *curvatura espacial* das seções (Σ_{τ_0}, h) .

Distância nadada num ciclo de deformações

Restringindo-nos ao regime de altas frequências de deformações, no qual o momentum p_{r_0} é, no período próprio T de um ciclo completo, aproximadamente conservado, supondo que o tripé esteja inicialmente em repouso - donde se segue que, nesse intervalo de tempo, ele permanece arbitrariamente pequeno - e usando a lagrangiana dada pela equação (5.20), obtemos

$$p_{r_0} = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_0} = -m_0 a(\tau)^2 F(r_0) \dot{r}_0 - 3m_1 a(\tau)^2 \left[F(r_1) \frac{\partial r_1}{\partial r_0} \dot{r}_1 + r_1^2 \dot{\theta}_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial r_0} \right] \approx 0. \quad (5.27)$$

Daí vem que

$$dr_0 \approx -\frac{3m_1}{m_0 F(r_0)} \left[F(r_1) \frac{\partial r_1}{\partial r_0} dr_1 + r_1^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial r_0} d\theta_1 \right]. \quad (5.28)$$

Como $r_1 = f(r_0, l, \alpha)$ e $\theta_1 = g(r_0, l, \alpha)$, podemos reescrever as diferenciais totais dr_1 e $d\theta_1$ em termos das derivadas parciais de f e g e das diferenciais totais dos parâmetros de deformação dl e $d\alpha$, de modo que obtemos, enfim,

$$dr_0 \approx A(r_0, l, \alpha) dl + B(r_0, l, \alpha) d\alpha, \quad (5.29)$$

onde

$$A(r_0, l, \alpha) = -\frac{F(r_1) (\partial r_1 / \partial r_0) (\partial r_1 / \partial l) + r_1^2 (\partial \theta_1 / \partial r_0) (\partial \theta_1 / \partial l)}{(m_0/3m_1) F(r_0) + F(r_1) (\partial r_1 / \partial r_0)^2 + r_1^2 (\partial \theta_1 / \partial r_0)^2}, \quad (5.30)$$

$$B(r_0, l, \alpha) = -\frac{F(r_1) (\partial r_1 / \partial r_0) (\partial r_1 / \partial \alpha) + r_1^2 (\partial \theta_1 / \partial r_0) (\partial \theta_1 / \partial \alpha)}{(m_0/3m_1) F(r_0) + F(r_1) (\partial r_1 / \partial r_0)^2 + r_1^2 (\partial \theta_1 / \partial r_0)^2}. \quad (5.31)$$

Como antes, podemos ver dl e $d\alpha$ como 1-formas no espaço de formatos, coberto com coordenadas $\{l, \alpha\}$. Assim, dr_0 é uma 1-forma com componentes A e B , dados pelas equações (5.30) e (5.31). O deslocamento total do vértice central do tripé por natação é dado pela integral

$$\Delta r_0 = \oint_{\partial\Pi} Adl + Bd\alpha, \quad (5.32)$$

onde $\partial\Pi$ é a curva orientada descrita pela deformação do corpo no espaço gerado por $\{l, \alpha\}$, curva esta que supomos retangular e fechada. Como já discutimos no Capítulo 3, a orientação da curva determina o sentido em que se dá a natação, ou, em outras palavras, o sinal de Δr_0 . Usando o teorema de Stokes, podemos passar da integral de $Adl + Bd\alpha$ sobre $\partial\Pi$ para a integral da diferencial exterior dessa 1-forma sobre a região Π interior a essa curva. Como, em geral, $Adl + Bd\alpha$ não é fechada, a natação é possível em FRW. Explicitamente, temos,

$$\Delta r_0 = \int_{\Pi} \left(\frac{\partial B}{\partial l} - \frac{\partial A}{\partial \alpha} \right) dl \wedge d\alpha. \quad (5.33)$$

Para deformações Δl e $\Delta\alpha$ suficientemente pequenas, a equação (5.33) implica que Δr_0 será proporcional à área $\Delta l \Delta\alpha$ do retângulo Π que descreve um ciclo de deformações no espaço de parâmetros,

$$\Delta r_0 = \left[\frac{\partial B}{\partial l} - \frac{\partial A}{\partial \alpha} \right]_{(r_0, l, \alpha)} \Delta l \Delta\alpha. \quad (5.34)$$

Nessa expressão, A e B , dados pelas equações (5.30) e (5.31), respectivamente, dependem das derivadas parciais das funções de vínculo, $r_1 = f(r_0, l, \alpha)$ e $\theta_1 = g(r_0, l, \alpha)$. Estas expressam o formato do tripé e suas variações - isto é, a orientação e comprimento das hastes, e suas deformações - e são funções do tempo próprio τ dos observadores isotrópicos, uma vez que $l = l(\tau)$ e $\alpha = \alpha(\tau)$. Como já comentamos, as hastes são construídas como geodésicas das hipersuperfícies de homogeneidade do espaço-tempo de FRW. No entanto, empregando o método engendrado por Eduardo Guéron, conforme explicado no Capítulo 3, não precisamos resolver completamente essas equações diferenciais, mas apenas obter primeiras integrais. Dedicamo-nos a essa tarefa antes

de calcular a distância nadada.

Equações das geodésicas nas hipersuperfícies de homogeneidade do espaço-tempo de FRW

Conforme estudamos no Capítulo 3, num espaço tridimensional euclidiano, considerando o tempo apenas como um parâmetro universal para a evolução das trajetórias dos sistemas físicos¹², os vínculos posicionais que definem o tripé são dados por

$$r_1^2 = r_0^2 + l^2 - 2r_0l \cos \alpha, \quad (5.35)$$

$$\sin \theta_1 = \frac{l}{r_1} \sin \alpha. \quad (5.36)$$

As equações de vínculo do problema de natação do tripé em FRW consistem nos análogos dessas equações para as hipersuperfícies de homogeneidade Σ_τ munidas da métrica h induzida nelas pela métrica espaço-temporal g . No entanto, como já observamos, precisamos apenas de primeiras integrais das equações das geodésicas da seção espaço-temporal com elemento de linha dado, em coordenadas comóveis, por

$$ds_\perp^2 = a(\tau_0)^2 [F(r) dr^2 + r^2 d\theta^2], \quad (5.37)$$

ou seja, para¹³ $d\tau = d\phi = 0$. Se \tilde{h} é a métrica associada ao elemento de linha expresso na equação (5.37), as equações da geodésica podem ser obtidas pela extremização da ação associada à lagrangiana

$$\tilde{L} = \tilde{h}_{ij} \frac{dx^i}{dl} \frac{dx^j}{dl}, \quad (5.38)$$

onde tomamos o comprimento *coordenado* l das geodésicas sobre (Σ_t, h) como parâmetro afim. Em outras palavras, as equações das geodésicas são derivadas das equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dl} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^i} = 0, \quad (5.39)$$

onde $\{x^i\} = \{r, \theta\}$ e o ponto denota a derivada com respeito a l . A lagrangiana \tilde{L} é dada explicitamente por

$$\tilde{L} = a(\tau_0)^2 [F(r) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2]. \quad (5.40)$$

¹²É dessa forma que a mecânica newtoniana retrata o que entendemos como espaço e tempo.

¹³Podemos nos restringir a uma seção $\phi = \text{constante}$ porque $\dot{\phi} = 0$ para todas as partículas. O valor $\phi = \text{constante}$ assumido é completamente arbitrário, pois, como podemos ver na equação (5.37), ele não aparece no elemento de linha.

Da equação de Euler-Lagrange relativa a θ , obtemos

$$\frac{d}{dl} (r^2 \dot{\theta}) = 0,$$

e portanto,

$$r^2 \dot{\theta} = c_1, \quad (5.41)$$

onde c_1 é independente de l . Essa é uma primeira integral da equação da geodésica para θ . Substituindo a equação (5.41) na equação (5.40), aproveitamos o fato de que \tilde{L} também não depende de l para obter uma primeira integral da equação da geodésica para r ,

$$\tilde{L} = a(\tau_0)^2 \left[F(r) \dot{r}^2 + \frac{c_1^2}{r^2} \right],$$

ou seja, essa primeira integral é

$$F(r) \dot{r}^2 = c_2 - \frac{c_1^2}{r^2}, \quad (5.42)$$

onde $c_2 = \tilde{L}/a(\tau_0)^2$ é independente de l .

As constantes c_1 e c_2 são determinadas impondo-se que as equações de vínculo do tripé no espaço euclidiano, dadas pelas equações (5.35) e (5.36), sejam soluções das equações das geodésicas (5.41) e (5.42) no limite em que elas se reduzem a equações das geodésicas euclidianas. Isso garante que escolhemos, dentro todas as geodésicas sobre a seção $d\phi = 0$ de (Σ_t, h) , aquelas que efetivamente conectam as partículas que constituem o tripé. Analisando a equação (5.37), vemos que isso ocorre quando $F(r) \rightarrow 1$, ou seja, quando $k = 0$, o que não representa nenhuma novidade. Assim, as funções definidas pelas equações (5.35) e (5.36) devem satisfazer

$$r_1^2 \dot{\theta}_1 = c_1, \quad (5.43)$$

$$\dot{r}_1^2 = c_2 - \frac{c_1^2}{r_1^2}, \quad (5.44)$$

obtidas de (5.41) e (5.42) para $F \rightarrow 1$. Temos, pois, exatamente as mesmas funções e equações diferenciais que obtivemos no Capítulo 3, quando resolvemos o problema correspondente em Schwarzschild. Devemos ter, assim sendo,

$$c_1 = r_0 \sin \alpha, \quad (5.45)$$

$$c_2 = 1. \quad (5.46)$$

Usando esses valores nas equações (5.42) e (5.41), concluimos que as funções de vínculo do tripé devem satisfazer, em FRW,

$$\left(\frac{\partial r_1}{\partial l}\right)^2 = F(r_1)^{-1} \left(1 - \frac{r_0^2 \sin^2 \alpha}{r_1^2}\right), \quad (5.47)$$

$$r_1^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial l} = r_0 \sin \alpha. \quad (5.48)$$

Distância transladada

Para calcular a distância de que o tripé se translada no espaço-tempo de FRW num ciclo completo de deformações, considerando o regime de altas frequências, vamos adotar a mesma estratégia empregada no caso do estudo da natação em Schwarzschild. Supondo que o comprimento próprio das hastes seja muito pequeno frente à curvatura espacial - por exemplo, ao fator de escala $a(\tau)$ -, podemos expandir $\Delta r_0(r_0, l, \alpha)$, dado pela equação (5.34), numa série de potências truncada na ordem desejada. Escrevendo Δr_0 como função apenas de l , para simplificar a notação, temos

$$\Delta r_0(l) = \Delta r_0(0) + \left(\frac{\partial \Delta r_0}{\partial l}\right)_{l=0} l + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Delta r_0}{\partial l^2}\right)_{l=0} l^2 + O(l^3). \quad (5.49)$$

Os coeficientes dessa expansão dependem de derivadas de Δr_0 com respeito a l ; Δr_0 , por sua vez, depende de derivadas de A e B em relação a α e l , respectivamente, onde A e B são definidos - pelas equações (5.30) e (5.31), respectivamente - em termos das derivadas parciais das funções de vínculos $r_1 = f(r_0, l, \alpha)$ e $\theta_1 = g(r_0, l, \alpha)$. Os coeficientes são calculados em $l = 0$. Portanto, no final, o que temos de saber são os valores de derivadas parciais de várias ordens de r_1 e θ_1 , em relação a r_0 , l e α , todas calculadas em $l = 0$.

É claro que $r_1(r_0, 0, \alpha) = r_0$ e $\theta_1(r_0, 0, \alpha) = \theta_0$, o que quer dizer, simplesmente, que todas as partículas constituintes concentram-se no vértice central quando o comprimento do tripé é zero. Daí podemos inferir todas as derivadas de r_1 e θ_1 em relação a l e α calculadas em $l = 0$. No que se refere às derivadas com respeito a l , basta usarmos as primeiras integrais das equações da geodésicas, equações (5.47) e (5.48), a exemplo do que fizemos no Capítulo 3, para reescrevê-las em termos de derivadas em relação a l e α , cujos valores em $l = 0$ já teremos obtido.

Adotando esse procedimento, é possível calcular os coeficientes da equação (5.49). Em ordem dominante, obtemos

$$\Delta r_0 \approx 6k \frac{m_0 m_1}{(3m_1 + m_0)^2} \sqrt{1 - kr_0^2} l^2 \sin \alpha \Delta l \Delta \alpha. \quad (5.50)$$

Essa é translação *coordenada* do tripé. Para entender o efeito, precisamos, porém, reescrever a resposta em termos de *observáveis físicos*, isto é, obter a *distância própria*,

conforme medida pelos observadores isotrópicos de FRW, de que o tripé se translada.

Como as seções (Σ_τ, h) são homogêneas e estamos usando um sistema de coordenadas que são curvas integrais de vetores tangentes a essas hipersuperfícies, podemos escolher arbitrariamente a origem de $\{x^i\} = \{r, \theta, \phi\}$. Para facilitar o cálculo da distância própria nadada, colocamo-la, então, sobre o vértice central do tripé, ou seja, escolhemos $(r_0, \theta_0) = (0, 0)$ e, ademais, orientamos o tripé de modo que $(r_1, \theta_1) = (l, \alpha)$, onde α é o ângulo de abertura do tripé não-deformado. Assim, o comprimento próprio L do tripé, segundo os observadores isotrópicos, é dado por

$$L = \int_0^l \sqrt{ds^2}|_{d\tau=d\theta=d\phi=0} = a(\tau_0) \int_0^l \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}.$$

Para l pequeno, isso leva a

$$L = a(\tau_0) l + O(l^3). \quad (5.51)$$

De forma similar, a distensão própria do tripé, se realizada rapidamente, isto é, sobre a hipersuperfície $\tau \approx \tau_0$, será

$$\Delta L = \int_l^{l+\Delta l} \sqrt{ds^2}|_{d\theta=d\phi=0 \approx d\tau} \approx a(\tau_0) \int_l^{l+\Delta l} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}.$$

Da mesma maneira, então, se Δl for suficientemente pequeno, obtemos

$$\Delta L = a(\tau_0) \Delta l + O(\Delta l^3). \quad (5.52)$$

Agora, vamos mostrar que o ângulo α é efetivamente o ângulo próprio medido pelos observadores isotrópicos. O ângulo entre dois segmentos com um vértice comum é aproximadamente igual à razão entre o comprimento do arco circular entre eles e o seu próprio comprimento. Como a variação do ângulo característico do tripé se dá a $dr = d\phi = 0$, o ângulo próprio que caracteriza a deformação de abertura do tripé será $\Delta S/L$, onde ΔS é o comprimento do arco descrito pela extremidade do tripé quando α varia até $\alpha + \Delta\alpha$,

$$\Delta S \approx \int_{\theta_0}^{\theta_0+\Delta\alpha} \sqrt{ds^2}|_{dr=d\phi=0 \approx d\tau} = a(\tau_0) l \Delta\alpha.$$

Recorrendo novamente à equação (5.51), obtemos

$$\Delta\alpha \approx \frac{\Delta S}{L}, \quad (5.53)$$

e, portanto, $\Delta\alpha$ é efetivamente um observável.

Combinando esses resultados, podemos reescrever a equação (5.50), em termos de observáveis, como

$$\Delta r_0 \approx 6k \frac{m_0 m_1}{(3m_1 + m_0)^2} \frac{L^2}{a(\tau_0)^2} \sin \alpha \frac{\Delta L}{a(\tau_0)} \Delta \alpha, \quad (5.54)$$

onde o fator $\sqrt{1 - kr_0^2} \rightarrow 1$ pela nossa escolha conveniente da origem do sistema de coordenadas, na qual tomamos $r_0 = 0$.

Com o mesmo raciocínio que empregamos para deduzir a equação (5.51), podemos mostrar que a distância *própria* ΔR_0 nadada pelo tripé se relaciona com a distância *coordenada* Δr_0 por meio de

$$\Delta R_0 \approx a(\tau_0) \Delta r_0. \quad (5.55)$$

Desse modo, a distância própria nadada pelo tripé, no regime de altas frequências num espaço-tempo de FRW, num ciclo completo de deformações, é

$$\Delta R_0 \approx 6k \frac{m_0 m_1}{(3m_1 + m_0)^2} \frac{L^2}{a(\tau_0)^2} \sin \alpha \Delta L \Delta \alpha + O\left(\frac{L^3}{a(\tau_0)^3}\right). \quad (5.56)$$

Essa equação deixa claro que a escala de comprimento em relação à qual o tamanho do tripé deve ser pequeno para o nosso resultado fazer sentido é o fator de escala $a(\tau_0)$.

Alternativamente, é possível reescrever a equação (5.56) em termos do escalar de curvatura das hipersuperfícies (Σ_τ, h) , notando-se que

$${}^{(3)}R(\tau) = \frac{k}{a(\tau)^2}. \quad (5.57)$$

Logo,

$$\Delta R_0 \approx \frac{6m_0 m_1}{(3m_1 + m_0)^2} ({}^{(3)}RL^2) \sin \alpha \Delta L \Delta \alpha. \quad (5.58)$$

Algumas características da equação (5.56) mostram-se bastante interessantes. Note-mos, em primeiro lugar, que a distância própria nadada é proporcional a k , o que mostra que a natação *não* acontece em espaços homogêneos e isotrópicos planos, conforme o esperado; mais do que isso, mostra que o sentido em que se dá a translação do tripé é, para o mesmo ciclo de deformações, diferente para um universo com curvatura negativa ou positiva. Também podemos ver que, em ordem dominante, a magnitude nadada, para o caso $k \neq 0$, *não* depende do sinal da curvatura espacial, ou seja, de o universo ser fechado ou aberto. A dependência com a massa das partículas constituintes é exatamente a mesma do caso em Schwarzschild, assim como a dependência com o ângulo α , o que é uma conseqüência de termos empregado o mesmo nadador em ambos os espaços-tempos. Por fim, notemos que a distância própria transladada não depende da distância a nenhum ponto do espaço-tempo nem da direção considerada, como esperado para um espaço-tempo espacialmente homogêneo e isotrópico¹⁴.

¹⁴No caso de Schwarzschild, ela dependia da distância do tripé ao buraco negro e era radial.

Por fim, vamos comparar o nosso resultado com aquele obtido por Wisdom (referência [11]) para um bipé realizando deformações simétricas sobre uma esfera bidimensional imersa no espaço euclidiano tridimensional, derivado utilizando-se apenas as leis de conservação da mecânica newtoniana. Os dois casos guardam semelhanças fundamentais: tratam da natação de n -pés em espaços totalmente simétricos n -dimensionais. O resultado para o bipé sobre a esfera, que deduzimos no Capítulo 2, é

$$\Delta\psi_0 \approx -\frac{4m_0m_1}{(m_0 + 2m_1)^2} \sin^2 e \sin \alpha \Delta e \Delta \alpha, \quad (5.59)$$

onde $e = l/R$, sendo l o comprimento das hastes geodésicas e R o raio da esfera ambiente. Se $l \ll R$, a distância transladada pelo bipé sobre a esfera ambiente pode ser aproximada por

$$R \Delta\psi_0 \approx -\frac{4m_0m_1}{(m_0 + 2m_1)^2} \left(\frac{l}{R}\right)^2 \sin \alpha \Delta l \Delta \alpha. \quad (5.60)$$

A comparação entre esta equação e a (5.56) mostra que os resultados guardam estreita semelhança, conforme esperávamos (notemos que a equação (5.56), para $k = 1$, descreve a natação do tripé sobre seções espaciais que são, localmente, 3-esferas de raio $a(\tau_0)$). Isso vem ao encontro da confirmação da natação em espaços-tempos curvos, e dá solidez ao nosso resultado para a natação em FRW.

Capítulo 6

Conclusões e considerações finais

Um teorema bem conhecido de mecânica newtoniana garante que sistemas de partículas em espaços euclidianos não são capazes de se mover rigidamente, isto é, de deslocar o seu centro de massa, na ausência de forças externas. Por outro lado, eles são capazes de realizar rotações em torno de seus eixos principais, mesmo sem torque externo, pela realização de alterações de formato, promovidas exclusivamente por forças internas. Um exemplo cotidiano é o de gatos que, abandonados com as costas voltadas para o solo, são capazes de girar e cair sobre suas patas. No Capítulo 2, estudamos um formalismo geral, desenvolvido por A. Shapere e F. Wilczek, para esse fenômeno. Nesse mesmo capítulo, vimos que, conforme mostrou J. Wisdom, em espaços curvos, sistemas de partículas conectadas podem não apenas girar, mas mesmo transladar-se rigidamente, se realizarem deformações cíclicas. Esse é um efeito de fases geométricas, independente da rapidez com que as alterações de formato são realizadas; ele depende apenas da geometria de formatos assumidos e da curvatura do espaço ambiente. Damos a esse fenômeno o nome de *efeito de natação*, em analogia ao movimento de microorganismo em fluidos com baixo número de Reynolds. Em especial, verificamos que corpos quase-rígidos *não* são capazes de nadar em espaços planos.

Esse cenário leva naturalmente à questão de o efeito de natação poder manifestar-se em espaços-tempos curvos, conforme descritos pela relatividade geral. No Capítulo 3, revisamos o trabalho pioneiro de Wisdom em que ele estuda um corpo quase-rígido ciclicamente deformável no espaço-tempo de Schwarzschild e mostra que ele pode alterar a sua trajetória de queda, ou seja, pode nadar no espaço-tempo. Em seguida, abordamos um efeito de gravitação newtoniana que inicialmente causou controvérsia na comunidade científica, sendo confundido com a natação no espaço-tempo. Segundo esse efeito, um corpo deformável num campo gravitacional newtoniano pode alterar a sua órbita a partir da realização de deformações não-locais. Seguindo um trabalho de E. Guéron, C. Maia e G. Matsas, mostramos que esse efeito é essencialmente diferente daquele estudado Wisdom. Ele ocorre porque cada parte do ciclo de deformações é realizado em regiões suficientemente distantes do espaço, e o gradiente de campo gravi-

tacional, então, faz com que o trabalho total realizado pelo sistema contra as forças de maré seja não-nulo, o que altera a sua energia total e engendra, naturalmente, uma variação da órbita inicial. Como ilustração, estudamos o caso de um haltere deformável em movimento circular em torno de uma fonte massiva simetricamente esférica, e mostramos que ele pode alterar seus parâmetros de órbita (excentricidade e semi-eixo maior) se contrair e distender os seus extremos. Como discutimos, esse efeito não é geométrico nem local, dependendo da taxa com que as deformações são realizadas, e não está associado à curvatura do espaço ambiente. Mostramos que, embora ele seja dominante para baixas frequências de alteração de formato, é suprimido no regime de altas frequências, tornando-se desprezível frente ao efeito Wisdom. Uma simulação numérica completa de relatividade geral deve, pois, incluir ambas as contribuições, ajustando-se a cada um desses efeitos distintos nos limites apropriados.

No Capítulo 4, revisamos um trabalho de J. Avron e O. Kenneth em que os autores realizam um estudo bastante elegante de nadadores não-relativísticos em espaços-tempos espacialmente homogêneos e isotrópicos. Algumas propriedades do efeito Wisdom aparecem de maneira bastante limpa nesse trabalho. Destacamos o fato de que foi obtida uma condição necessária para que haja natação numa dada direção (seja de translação, seja de rotação em torno de um eixo): a 1-forma associada ao campo vetorial de Killing que atua como gerador desse movimento *não* pode ser fechada. Esse resultado vai ao encontro da interpretação usual de fases geométricas em mecânica clássica, que a associa a anolonomais da variável de ação do sistema hamiltoniano descrito por variáveis de ângulo e ação. Além disso, verificamos que o efeito é efetivamente geométrico, independente da parametrização temporal, e que a magnitude da natação é proporcional ao tensor de Riemann associado à métrica da variedade ambiente.

Por fim, no Capítulo 5, estudamos a natação em soluções cosmológicas de Friedmann-Robertson-Walker (FRW). Consideramos o mesmo nadador que Wisdom tomou no espaço-tempo de Schwarzschild e mostramos que não ocorre natação no caso de as seções espaciais dos observadores isotrópicos serem planas, conforme o esperado, e que, para um mesmo caminho de deformações no espaço de formatos, ela se dá em sentidos contrários para universos abertos ou fechados (isto é, localmente isométricos a 3-hiperbolóides ou 3-esferas, respectivamente), mas tem mesma magnitude. A dependência com as massas e com o formato original do corpo é a mesma que aquela obtida por Wisdom para Schwarzschild, enfatizando a parte do efeito que depende apenas do nadador. Além disso, nosso resultado, como o dele, escala o tamanho do corpo com a curvatura do espaço ambiente, fortalecendo a idéia de que essa é uma propriedade geral do efeito. Também comparamos o resultado do tripé em FRW com um resultado de Wisdom para um bipé numa superfície esférica imersa no espaço euclidiano tridimensional, que abordamos no Capítulo 2, e encontramos completa simetria entre eles.

O fenômeno de natação insere a relatividade geral na classe de teorias físicas com efeitos de fase geométrica, além de abrir um novo filão para o estudo de corpos rígidos em espaços-tempos curvos, fornecendo um mecanismo de auto-propulsão que não envolve ejeção de matéria ou de radiação. Mais do que isso, ele chama a atenção especialmente pelo fato de *não* exibir um *limite newtoniano*, já que se anula quando a velocidade da luz tende a infinito. Isso nos permite aventar se o limite de campos fracos da relatividade geral, um tema tão central à teoria, é de fato completamente entendido na atualidade.

Novos estudos do efeito de natação podem apontar em diversas direções:

1. Desenvolver a engenharia dos nadadores, estudando como o efeito pode ser alterado para corpos com formatos diferentes e realizando deformações diferentes - em especial, deformações não-simétricas.
2. O próprio caso de nadadores em Schwarzschild pode ser mais bem explorado. Um estudo interessante é o do caso em que o sistema está em órbita circular, e a natação pode ser usada para alterar a excentricidade e o semi-eixo maior da sua órbita, a exemplo dos estudos já realizados para corpos deformáveis em campos gravitacionais simetricamente esféricos newtonianos.
3. Realizar simulações numéricas completas de relatividade geral, o que possibilitaria entender melhor o regime de baixas frequências de deformação, quando o efeito de natação se interpola com o efeito de balanço, e, como consequência, talvez alcançar melhor entendimento sobre o limite newtoniano da relatividade geral.
4. Promover um estudo mais aprofundado da natação em espaços-tempos cosmológicos, de viés fenomenológico, considerando os dados observacionais disponíveis e modelos específicos, a fim de verificar se o efeito pode ter sido mais significativo, em termos de ordem de grandeza relativa da distância nadada com o deslocamento livre do corpo, em alguma fase do desenvolvimento do universo (pesquisa em andamento).
5. Procurar na natureza por sistemas físicos para cujo movimento o efeito de natação possa dar uma contribuição significativa.

É instigante que uma teoria com quase um século de existência como a relatividade geral ainda possa apresentar efeitos novos. Enquanto se observa na comunidade científica uma tendência crescente de focar no estudo de novas teorias, altamente especulativas e sem nenhum respaldo experimental, a descoberta do efeito Wisdom pode indicar que as antigas teorias físicas, bem estudadas e confirmadas, ainda têm surpresas a oferecer e merecem maior atenção por parte dos cientistas.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Shapere and F. Wilczek (Eds.), *Geometric Phases in Physics* (World Scientific, London, 1989).
- [2] J. Anandan, J. Christian and K. Wanelik, *Am. J. Phys.* **65**, 180 (1997); J. Anandan, J. Christian and K. Wanelik, *Am. J. Phys.* **67**, 645 (1999).
- [3] M. V. Berry, *Proc. R. Soc. Lond. A* **392**, 45 (1984).
- [4] Y. Aharonov and D. Bohm, *Phys. Rev.* **115**, 485 (1959).
- [5] Y. Aharonov and D. Bohm, *Phys. Rev.* **123**, 1511 (1961).
- [6] J. H. Hannay, *J. Phys. A: Math. Gen.* **18**, 221 (1985).
- [7] E. M. Purcell, *Am. J. Phys.* **45**, 3 (1977).
- [8] A. Shapere and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2051 (1987).
- [9] A. Shapere and F. Wilczek, *J. Fluid. Mech.* **198**, 557 (1989).
- [10] A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Theoretical Mechanics of Particles and Continua* (McGraw-Hill, New York, 1980).
- [11] J. Wisdom, *Science* **299**, 1865 (2003).
- [12] S. K. Blau, *Physics Today* **56**, 21 (2003).
- [13] C. Seife, *Science* **299**, 1295 (2003).
- [14] R. M. Wald, *General Relativity* (University of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [15] G. A. Landis, *Physics Today* **56**, 12 (2003); J. Wisdom, *Physics Today* **56**, 12 (2003).
- [16] M. J. Longo, *Am. J. Phys.* **72**, 1312 (2004).
- [17] G. A. Landis, *Acta Astronaut.* **26**, 307 (1992).
- [18] A. Shapere and F. Wilczek, *Am. J. Phys.* **57**, 514 (1989).

- [19] E. Guéron, C. A. S. Maia and G. E. A. Matsas, *Phys. Rev. D* **73**, 024020 (2006).
- [20] J. Walker, *Sci. Am.* **260**, 86 (1989).
- [21] J. E. Avron and O. Kenneth, *New J. Phys.* **8**, 68 (2006).
- [22] R. G. Littlejohn and M. Reinsch, *Rev. Mod. Phys.* **69**, 213 (1997).
- [23] R. Montgomery, *Fields Inst. Commun.* **1**, 193 (1993).
- [24] W. G. Dixon, *Nuovo Cimento* **34**, 317 (1964).
- [25] W. G. Dixon, *Proc. R. Soc. Lond. A* **314**, 499 (1970).
- [26] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
- [27] P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993).
- [28] W. Rindler, *Am. J. Phys.* **34**, 1174 (1966).
- [29] G. J. Sussman and J. Wisdom, *Structure and Interpretation of Classical Mechanics* (MIT Press, Cambridge, MA, 2001).
- [30] K. R. Symon, *Mechanics* (Addison Wesley, Reading, 1971).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)