

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

SIMULAÇÃO DA PROPAGAÇÃO DE POLUENTES UTILIZANDO TRANSFORMAÇÃO
DE BÄCKLUND – MODELO BIDIMENSIONAL

por

Leonardo Cabral Fernandez

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, dezembro de 2007

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

SIMULAÇÃO DA PROPAGAÇÃO DE POLUENTES UTILIZANDO TRANSFORMAÇÃO
DE BÄCKLUND – MODELO BIDIMENSIONAL

por

Leonardo Cabral Fernandez
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Jorge R. S. Zabadal.

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Edson Abel dos Santos Chiaramonte

Prof. Dr. Flávio Tadeu Van der Laan

Prof. Dr. Vinícius Gadis Ribeiro

Prof. Dr. Flávio José Lorini

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, dezembro de 2007

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Omar e Inez, pelo amor, pela vida e pelo exemplo de coragem, dedicação e caráter.

A minha esposa, Márcia, pelo carinho, pela devoção, pelo companheirismo e amor.

Ao meu orientador e amigo, Jorge Zabadal, por ter acreditado na minha capacidade, pelas lições humildade, pelos ensinamentos que deram respostas para questões complexas com soluções práticas e inteligíveis.

Ao meu amigo e colega Renato Garcia, pela paciência, por compartilhar seus conhecimentos, pela didática, pela solidariedade e generosidade.

A minha irmã, Cristina, pelo incentivo, pela coragem e alegria.

A Eletrosul Centrais Elétricas pela compreensão, pela flexibilidade e interesse na qualificação do empregado que me deram condições de concluir este trabalho.

RESUMO

Neste trabalho é apresentado um novo método analítico para a resolução de problemas em poluição aquática. O método utiliza duas restrições diferenciais de primeira ordem a partir das quais são encontradas transformações auto-Bäcklund para a equação advectiono-difusiva bidimensional em regime estacionário.

As transformações de Bäcklund produzem mapeamentos entre soluções de duas equações diferenciais. Se uma solução exata de uma equação diferencial, denominada equação auxiliar, é conhecida, torna-se possível transformá-la em solução de uma outra equação diferencial, denominada equação alvo, pela aplicação de operadores diferenciais. Quando a equação auxiliar e a equação alvo são idênticas, este procedimento é denominado transformação auto-Bäcklund.

No trabalho proposto, soluções exatas da equação advectiono-difusiva bidimensional em regime estacionário são obtidas pelo emprego de transformações auto-Bäcklund a fim de simular a dispersão de poluentes em corpos hídricos.

A principal característica da formulação proposta consiste no reduzido tempo de processamento necessário para a obtenção das soluções analíticas. Simulações numéricas são apresentadas.

ABSTRACT

In this work a new analytical method for solving water pollution problems is presented. The method employs a pair of first-order differential constraints from which auto-Bäcklund transformations for the steady two-dimensional advection-diffusion equation are achieved.

Bäcklund transformations perform mappings between exact solutions of two differential equations. If an exact solution of a certain differential equation (called auxiliary) is known, it becomes possible to transform it into an exact solution of another differential equation, which is called target equation, by applying some differential operators. When the auxiliary and target equation are the same, this procedure is called auto-Bäcklund transformation.

In the proposed work exact solutions of the steady two-dimensional advection-diffusion equation are obtained by means of auto-Bäcklund transformations in order to simulate pollutants dispersion in water bodies.

The main feature of the proposed formulation relies on the small time processing required to obtain the analytical solutions. Numerical simulations are reported.

ÍNDICE

	Pág.
1 INTRODUÇÃO	1
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
3 OBJETIVOS E DESCRIÇÃO DOS CENÁRIOS DE INTERESSE	9
3.1 Lago Guaíba.....	9
3.2 Situação sanitária do Lago Guaíba.....	11
3.3 Sistemas de simulação como ferramentas de controle da poluição aquática.....	13
3.4 Rio dos Sinos.....	16
4 DESCRIÇÃO DO MÉTODO	19
4.1 Resolução do sistema de equações de primeira ordem.....	25
4.2 Considerações sobre o potencial de aplicação da solução e sobre as condições de contorno utilizadas.....	27
5 RESULTADOS	30
5.1 Simulação de cenários no Lago Guaíba.....	30
5.2 Simulação de cenários no Rio dos Sinos.....	39
6 CONCLUSÕES	42
7 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	44
8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	45
APÊNDICE A	48
APÊNDICE B	50
APÊNDICE C	64

LISTA DE SÍMBOLOS

$a(x,y)$	Variável no mapeamento entre equações diferenciais	
$b(x,y)$	Variável no mapeamento entre equações diferenciais	
A	Operador diferencial	
B	Operador diferencial	
$C(x,y,t)$	Concentração de poluente	[kg/m ³]
D	Coefficiente de difusão	[m ² /s]
DBO	Demanda bioquímica de oxigênio	mg/L
DBO ₅	Demanda bioquímica de oxigênio medida após 5 dias em meio de cultura	mg/L
$f(x)$	Função que representa a margem no problema de dispersão de poluentes na água	
g	Variável no mapeamento entre equações diferenciais	
h	Variável no mapeamento entre equações diferenciais	
k	Constante de decaimento do poluente	[s ⁻¹]
K	Constante de permeabilidade da margem	[s ⁻¹]
OD	Oxigênio dissolvido	mg/L
t	Tempo decorrido desde o despejo da carga	[s]
u	Componente da velocidade na direção x	[m/s]
v	Componente da velocidade na direção y	[m/s]
x	Coordenada cartesiana	[m]
y	Coordenada cartesiana	[m]

SÍMBOLOS GREGOS

φ	Potencial velocidade
Ψ	Função corrente
ω	Vorticidade

LISTA DE SIGLAS

CEDRE	Centre de Documentation, de Recherche et d'Expérimentations sur les Pollutions Accidentelles des Eaux
DAME	Departamento Municipal de Água e Esgotos
FEPAM	Fundação Estadual de Proteção Ambiental
ITOPF	International Tanker Owners Pollution Federation Limited
NOAA	National Oceanic and Atmospheric Administration

ÍNDICE DE FIGURAS

	Pág.
2.1 Processo de modelagem.....	3
2.2 Fluxograma de aplicação de um modelo de qualidade de água.....	5
3.1 Regiões Hidrográficas do Rio Grande do Sul.....	10
3.2 Bacias da Região Hidrográfica do Guaíba.....	10
3.3 Mortandade de peixes no Rio dos Sinos (outubro de 2006).....	16
3.4 Bacia hidrográfica do Rio dos Sinos.....	17
5.1 Distribuição de concentração de coliformes na Barra do Ribeiro.....	31
5.2 Distribuição de concentrações de coliformes ao longo da praia do Lami.....	32
5.3 Distribuição de concentrações de coliformes junto ao Arroio Celupa.....	34
5.4 Distribuição de concentração de nitrogênio na Barra do Ribeiro.....	35
5.5 Distribuição de nitrogênio ao longo da praia do Lami.....	36
5.6 Distribuição de concentração de nitrogênio junto ao Arroio Celupa.....	37
A.1 Exemplos ilustrativos de costas classificados pelo - Índice de sensibilidade ambiental.....	48

ÍNDICE DE TABELAS

	Pág.
3.1 Discretização do Rio dos Sinos.....	18
5.1 Potencial velocidade nos trechos de interesse.....	39
Formulação e valores da concentração de DBO5 nos trechos de interesse	
5.2 Tabela 5.3 – Formulação e valores da concentração de OD nos trechos de interesse.....	40
5.3 Formulação e valores da concentração de OD nos trechos de interesse.....	40
5.4 Valores calculados e experimentais da concentração de OD e DBO5, em mg/L , nas seções de interesse.....	41
A.1 Índice de sensibilidade ambiental (NOAA, Environmental Sensivity Index Guidelines).....	48
A.2 Condições de contorno aplicadas a cada índice.....	48
A.3 Exemplos ilustrativos de costas classificados pelo - Índice de sensibilidade ambiental.....	49
C.1 Valores das medidas de vazão e concentrações de N total, P total e DBO efetuadas pela FEPAM.....	64
C.2 Valores das medidas de vazão e concentrações de N total, P total e DBO efetuadas pela FEPAM.....	65
C.3 Valores das medidas de vazão e concentrações de N total, P total e DBO efetuadas pela FEPAM.....	66

1. INTRODUÇÃO

Nas últimas três décadas o interesse no estudo de dispersão de contaminantes em meio aquático tem aumentado consideravelmente em consequência dos problemas ambientais causados tanto pelo aumento da população, quanto pelo desenvolvimento industrial e tecnológico. Os rios são utilizados como o destino final dos resíduos resultantes das atividades humanas, os quais, na maioria das vezes, são lançados *in natura* em suas águas, ou seja, sem qualquer tipo de tratamento.

Durante o ciclo hidrológico, a água sofre alteração na sua qualidade. Tal fato ocorre nas condições naturais, como resultado das interrelações dos recursos hídricos e o ambiente. Estes cursos d'água possuem a capacidade de autodepuração, desde que as cargas poluidoras respeitem o potencial depurador desse manancial e permitam a manutenção da vida biológica. Fora destes limites, a qualidade de suas águas encontra-se comprometida.

O comportamento de um corpo d'água seja a partir da análise dos parâmetros de qualidade da água, ou seja, das variáveis associadas ao seu escoamento, é bastante complexo; e, conseqüentemente, deve ser utilizado na sua simulação um modelo adequado às suas características. Geralmente, esta simulação é feita através de modelos matemáticos que utilizam métodos numéricos para resolver as complexas formulações resultantes do equacionamento dos processos físicos, químicos e biológicos que ocorrem no meio aquático.

A avaliação do nível de poluição de um curso d'água é, atualmente, uma atividade essencial para o controle e planejamento do uso dos recursos hídricos; bem como para a adoção de medidas de controle e tratamento de efluentes industriais e domésticos visando, em última análise, a preservação do ecossistema aquático e a melhoria da saúde e qualidade de vida da população. A verificação e medição dos parâmetros de qualidade da água é a principal ferramenta utilizada nesta avaliação, onde os principais parâmetros analisados são: oxigênio dissolvido (OD), demanda bioquímica de oxigênio (DBO), nitrogênio e fósforo e coliformes.

O nível de bactérias coliformes tem sua importância relacionada ao controle de doenças transmissíveis e à saúde pública. As concentrações de OD e DBO são parâmetros que representam o equilíbrio do ecossistema aquático e à sobrevivência de espécies animais e vegetais presentes no ambiente hídrico.

A eutrofização é o crescimento excessivo das plantas aquáticas, tanto planctônicas quanto aderidas, a níveis tais que sejam considerados como causadores de interferências com os usos desejáveis do corpo d'água (Thomann e Mueller, 1987). O principal fator de estímulo é um nível excessivo de nutrientes no corpo d'água, principalmente nitrogênio e fósforo. Este problema vem se tornando mais crítico devido à presença de tais nutrientes em elevadas concentrações em

efluentes industriais e municipais que escoam para rios e reservatórios, impactando esses sistemas.

O avanço nas tecnologias de tratamento de efluentes tornou possível a remoção de 85 a 95% da DBO carbonácea. Desta forma, emergiu um novo problema relativo à qualidade da água: nitrificação e eutrofização. Além dos parâmetros citados, poderá ser necessária a avaliação de outros parâmetros, nutrientes e substâncias, tóxicas ou não, que venham a ser importantes em um curso d'água ou em uma região específica; seja devido ao tipo de indústria ali instalada ou à presença de fontes pontuais e não-pontuais associadas às características do escoamento urbano e rural da região em estudo. Os parâmetros de qualidade e grande parte das substâncias tóxicas têm seus limites fixados em legislações específicas que determinam o nível de qualidade da água em um sistema hídrico e designam o tipo de uso da água permitido para os locais avaliados.

A análise das transformações físicas, químicas e biológicas ocorridas no meio aquático e a formulação matemática de tais processos, permitem a construção de um modelo matemático de qualidade da água que relacione a concentração de substâncias e parâmetros desejados com as características hidrológicas do sistema em estudo.

A simulação de uma situação, futura ou potencial, a partir de um modelo matemático de qualidade da água é um instrumento fundamental no planejamento e gestão de um sistema hídrico. Os resultados obtidos nestas simulações podem servir, inclusive, de subsídios para a realização de estudos de impactos ambientais. Os modelos matemáticos de transporte são ferramentas cada vez mais procuradas e utilizadas na gestão da qualidade da água, como instrumento de apoio à decisão, na medida em que são capazes de prever os impactos relativos a essas decisões, bem como de ajudar ao estabelecimento de soluções com vista à proteção ambiental.

Diversos métodos analíticos, numéricos e híbridos para resolver a equação advectiono-difusiva podem ser encontrados na literatura (Zwillinger, 1992), mas ainda não são conhecidas soluções analíticas para diversos problemas de grande interesse em engenharia ambiental.

Os métodos numéricos usualmente empregados na resolução de equações diferenciais parciais (Ortega, 1981; Reddy, 1986; Greenspan, 1988; Carnahan, 1972) (diferenças finitas, volumes finitos, elementos finitos,...) fornecem, geralmente, excelentes resultados para problemas de transporte advectiono-difusivo. Porém, em geral, demandam alto custo computacional devido à grande quantidade de memória e ao elevado tempo de processamento requerido. Simuladores que utilizam formulações explícitas em diferenças finitas (Reali, 1984) tem boa velocidade de processamento e necessitam de capacidade de memória aceitável no tratamento de problemas em domínios retangulares. Domínios mais complexos requerem a

geração de malhas com densidade variável (Dhaubadel, 1987; Hauser, 1986). Simuladores que utilizam formulações em elementos finitos possuem, em geral, geradores automáticos de malha, contornando satisfatoriamente o problema. Entretanto, para problemas bidimensionais produzem sistemas algébricos de ordem demasiadamente elevada (Maliska, 1995).

A propagação de poluentes na água é um problema típico de transporte advectivo-difusivo para o qual a utilização de métodos híbridos possui várias vantagens em relação às numéricas convencionais: a solução é expressa em forma fechada, desde que o campo de velocidades do corpo hídrico em estudo seja previamente conhecido. Os códigos-fonte baseados nestas soluções são executados em um tempo menor de processamento, uma vez que há uma redução no número de operações a serem realizadas e, em consequência disso, há uma diminuição significativa da quantidade de memória requerida para a execução das rotinas necessárias para a obtenção da solução. A alta velocidade de processamento dos sistemas baseados em métodos híbridos permite simular a dispersão de poluentes em tempo real, empregando microcomputadores de baixo desempenho. O emprego de soluções aproximadas em forma analítica facilita a obtenção de estimativas de incerteza (erro de quantização e truncamento). Isto por que os métodos analíticos não produzem erros de arredondamento elevados, uma vez que efetuam um número bastante reduzido de operações sequenciais de ponto flutuante. Assim as soluções obtidas, podem ser diretamente substituídas nas equações que lhes deram origem, a fim de verificar sua validade.

No trabalho proposto é apresentado um novo método analítico para obtenção de soluções para a equação advectivo-difusiva em coordenadas cartesianas que descreve os fenômenos de dispersão de contaminantes na água. Nesse novo método analítico, as distribuições de concentração são obtidas diretamente através da função corrente e do potencial de velocidade.

Finalmente, deve ser acentuada a importância de uma maior compreensão destes processos, obtida a partir do emprego contínuo e do aperfeiçoamento do modelo de qualidade, seja para o próprio sistema em estudo ou para a sua aplicação em sistemas semelhantes.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A complexidade do ambiente em corpos d'água naturais, especialmente em lagos, reservatórios, estuários e zonas costeiras adjacentes a bacias hidrográficas, exige a aplicação de modelos para o desenvolvimento de estudos, projetos e ferramentas de auxílio na gestão de recursos hídricos.

A escassez de dados ambientais, decorrente dos custos envolvidos no levantamento desses dados, disponibiliza apenas a obtenção de séries temporais de valores medidos em uns poucos pontos distribuídos na área de interesse. A utilização de modelos possibilita, dentre outras finalidades, a interpolação espacial e temporal de tais dados. Para tanto, a concepção do modelo deve estar fundamentada na dinâmica do processo analisado; pois, caso contrário, o modelo não permitirá integrar informações espaciais e temporalmente dispersas. (Rosman, 2001). Em síntese, modelos são ferramentas que propiciam a obtenção de informações organizadas de forma adequada, possibilitando a interpolação dos dados disponíveis e auxiliando na sua interpretação. Além disso, devem promover um melhor entendimento da dinâmica do processo e permitir a simulação de cenários futuros. O diagrama apresentado na figura 2.1 sintetiza o processo de modelagem.

O diagrama apresentado a seguir destaca o desdobramento do modelo conceitual num modelo matemático, como ocorre na grande maioria das aplicações em recursos hídricos. Tal desdobramento envolve a tradução para linguagem matemática do modelo conceitual do fenômeno de interesse, geralmente na forma de equações diferenciais.

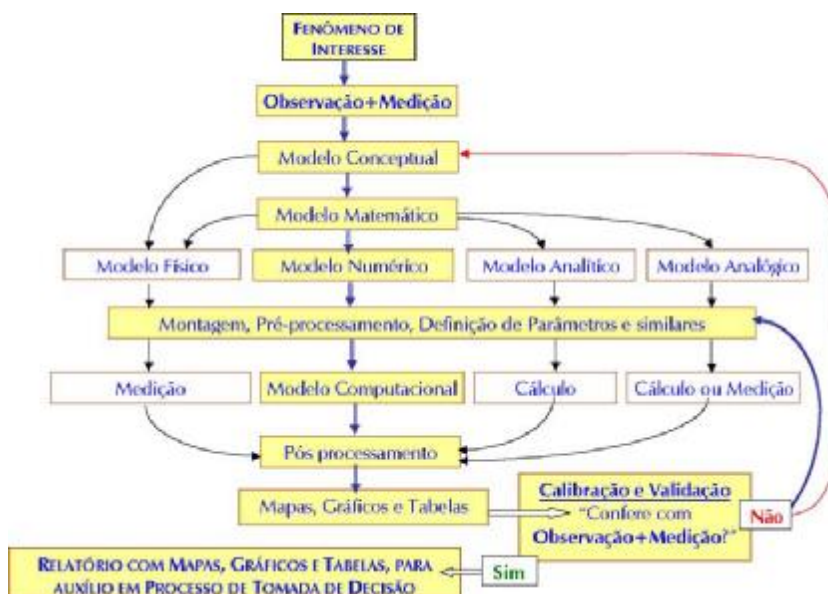


Figura 2.1 – Processo de modelagem

Os modelos de qualidade da água são baseados em equações de conservação de quantidade de movimento e da continuidade (modelo hidrodinâmico), de transporte de massa (modelo de transporte advectivo-difusivo), e dos processos das reações que ocorrem no meio aquático (modelo biogeoquímico). Esses modelos visam descrever a dinâmica do escoamento e retratar fenômenos como os do ciclo do nitrogênio e fósforo que ocorrem durante o transporte de poluentes e suas interações decorrentes de reações químicas (Romeiro, 2003).

O modelo hidrodinâmico permite obter a distribuição espacial e temporal de velocidades, no domínio definido pela geometria do corpo d'água analisado. Esse perfil de velocidades é responsável pela advecção dos diversos contaminantes presentes na água, e sua transposição na equação de transporte da massa viabiliza a solução dessa equação, representada pelo perfil concentração de uma substância conservativa. Tradicionalmente, nos modelos numéricos de qualidade da água, a equação de transporte é solucionada na mesma malha do modelo hidrodinâmico que calcula as velocidades, facilitando a transposição dos valores calculados. A figura 2.2 ilustra o fluxograma de aplicação de um modelo de qualidade de água.

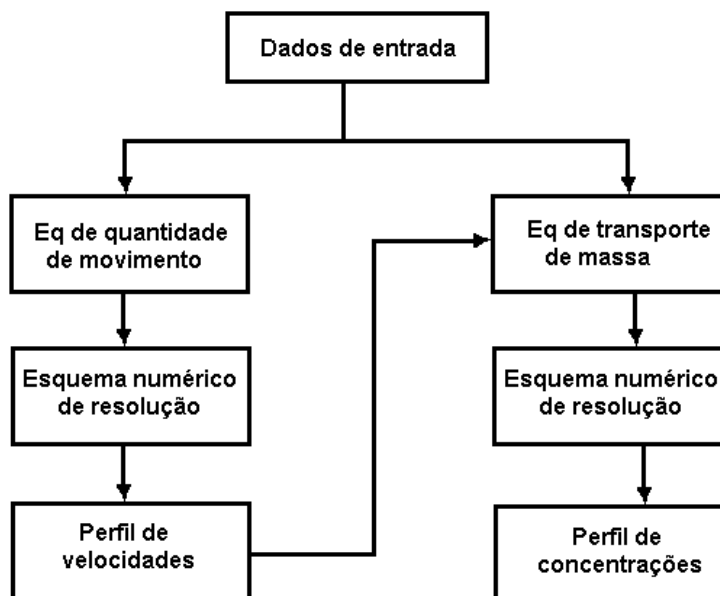


Figura 2.2 – Fluxograma de aplicação de um modelo de qualidade de água

A equação de transporte de massa, representada em sua forma vetorial, para uma substância conservativa é:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla C = D \cdot \nabla^2 C$$

Para substâncias não-conservativas, isto é, sujeitas a processos físicos ou reações químicas que alterem sua concentração no meio aquático, é acrescentado, na equação de transporte de massa, um termo que reproduz matematicamente esta alteração. Tais processos ou reações obedecem, geralmente, uma cinética de primeira ordem, resultando na expressão:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla C = D \cdot \nabla^2 C - k \cdot C$$

A geometria do domínio e as características do corpo d'água irão determinar a dimensão do modelo. Rios e canais, na grande maioria dos casos, são simulados por modelos unidimensionais (1D). Os modelos bidimensionais (2D) dividem-se em horizontais (2DH) e verticais (2DV). No primeiro caso, são admitidas variações nas direções longitudinais e transversais, como ocorre em estuários com pouca estratificação. No segundo, são admitidas variações longitudinais e verticais, como no caso de alguns lagos. Os modelos tridimensionais (3D) podem ser aplicados em qualquer corpo d'água, desde que seu emprego seja realmente necessário em decorrência da limitação dos demais modelos, face à necessidade de um maior número de dados e maior esforço computacional. A equação de transporte de massa, para uma substância não-conservativa, sujeita a um processo de decaimento de primeira ordem, num domínio tridimensional é:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial C}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial C}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial C}{\partial z} = D \cdot \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) - k \cdot C$$

Os métodos numéricos podem ser utilizados para resolver a equação advectivo-difusiva, entre eles podem ser citados, o método das diferenças finitas, o método dos elementos finitos e o método dos volumes finitos. O primeiro aproxima as derivadas parciais das equações diferenciais por quocientes de diferenças de valores das variáveis incógnitas escolhidos em pontos discretos do domínio de cálculo. Dependendo da forma como são obtidas as equações de diferenças, o esquema numérico pode ser explícito ou implícito. No esquema explícito, as variáveis incógnitas têm seus valores definidos, em cada ponto do espaço, em função dos valores conhecidos dos intervalos de tempos anteriores. Quando isto não acontece, o esquema é implícito e resultam sistemas de equações algébricas onde as variáveis incógnitas são resolvidas simultaneamente a cada intervalo de tempo, geralmente em uma linha de espaço com condições de contorno definidas. Os simuladores que utilizam formulações em diferenças finitas em problemas cujo domínio possui geometria simples possuem boa velocidade de processamento e requerem quantidade de memória aceitável para os modelos de computadores atuais. Já em domínios com geometria de maior complexidade, a geração de malhas retangulares exige a discretização em um número elevado de elementos, sendo assim, se faz necessário o uso de malhas com densidade

variável (Carnaham, 1972; Ortega et al., 1981; Böhm, 1981; Reali et al., 1984; Silveira, 2005; Greenspan et al., 1988; Casalas, 1996; Yang et al., 1998; Garcia, 1997) ou o emprego de coordenadas curvilíneas que se adaptem à geometria dos contornos (Churchill, 1975; Spiegel, 1977; Hauser et al., 1986). Rajar et al., em 1997 desenvolveram e aplicaram modelos bi e tridimensionais hidrodinâmicos, de transporte e dispersão baseados no esquema de diferenças finitas com a combinação de diferenças central e ascendente.

O método dos elementos finitos é versátil na representação de geometrias complexas, uma vez que possui geradores automáticos de malhas triangulares e hexagonais, permite a variação no tamanho dos elementos que compõem a malha e as condições de contorno podem ser facilmente implementadas (Dhaubabel et al., 1987; Silvestrini, 1989; Schettini, 1991). Mpimpas et al., em 2001, utilizaram o algoritmo bidimensional de elementos finitos associado à lógica fuzzy para obtenção de solução para a equação advectivo-difusiva que descreve as variáveis de qualidade da água.

O método dos volumes finitos usa a forma integral das equações de conservação como ponto de partida. O domínio de cálculo é dividido em um número finito de volumes de controles contínuos, e as equações de conservação são aplicadas para cada volume de controle. No centróide de cada volume de controle existe um nodo computacional no qual os valores da variável têm que ser calculados. A interpolação é usada para expressar os valores das variáveis na superfície do volume de controle em termo dos valores nodais. As integrais de volume e superfície são aproximadas usando formulação de quadratura. Como resultado obtém-se equações algébricas para cada volume de controle. O método de volumes finitos é por vezes confundido com o método das diferenças finitas pelo fato de que, em vários casos, as equações discretizadas obtidas por ambos os métodos são iguais. Entretanto, são formulados em bases distintas, pois o método de diferenças finitas utiliza aproximações de derivadas usando séries de Taylor para discretizar as derivadas presentes nas equações diferenciais, ao passo que o método a formulação do método de volumes finitos tem base física (Machado, 2006). Segundo Maliska (2004), todo método que, para obter as equações aproximadas, satisfaz a conservação da propriedade em nível de volumes elementares é um método de volumes finitos. Schreck & Schäfer, em 2000, publicaram um estudo numérico, baseado na resolução da equação de Navier-Stokes, utilizando o método dos volumes finitos, para avaliar o comportamento de um fluido escoando através de um canal de seção retangular que apresentava uma expansão repentina nesta seção.

Nas últimas duas décadas, o crescimento da tecnologia computacional possibilitou um maior emprego da modelagem numérica como ferramenta matemática para a resolução dos

modelos baseados na equação (1) e o conseqüente desenvolvimento de aplicativos (softwares), envolvendo pacotes com modelos, que simulam diversos parâmetros de qualidade da água. Dentre essas instituições e ferramentas, destacam-se os seguintes: EPA (Environmental Protection Agency), USGS (Surface-water Quality and flow Modelling Interest Group – SMIG), USACE (Army Corps of Engineers Model Archives), NWA (National Weather Service Models) e USDA (USDA model Archives), DHI (Danish Hydraulic Institute) e Delft Hydraulic. (Romeiro, 2003).

A utilização de métodos computacionais para a predição quantitativa de escoamentos recebe a denominação genérica de dinâmica dos fluidos computacional, ou CFD (Computational Fluid Dynamics). Sua aplicação, na avaliação do comportamento hidrodinâmico e a dispersão de poluentes em corpos d'água, evoluiu nos últimos anos, destacando-se algumas publicações mais recentes (Lin Ma et. al. (2002), Lane and Bates, (2000), Lane et. al. (1999), Bradbrook et al, (2000) and Wu et. al. (2000)). Contudo, o emprego dos métodos de CFD pode se mostrar inadequado quando se deseja obter um perfil detalhado da dispersão de poluentes no meio aquático. Em tais situações, são geradas malhas com milhares, ou até mesmo alguns milhões de pontos, que inviabilizam a obtenção da solução num tempo razoável. Modenesi et alli (2004) propõe um método, baseado em diferenças, que busca minimizar este problema, na avaliação da dispersão de um poluente conservativo em um rio.

Nos últimos cinco anos, algumas formulações analíticas baseadas em simetrias de Lie e “split” foram desenvolvidas com o intuito de obter soluções em forma fechada para equações advectivo-difusivas que descrevem a propagação de poluentes na água e na atmosfera. Nessas formulações são utilizados grupos de Lie, regras para a manipulação de exponenciais de operadores e mapeamento entre equações diferenciais com o objetivo de transformar soluções exatas, mas particulares, de equações advectivo-difusivas em novas soluções exatas contendo maior número de elementos arbitrários, e portanto capazes de satisfazer condições de contorno que descrevem cenários físicos típicos de problemas de propagação de poluentes em corpos hídricos com formato arbitrário (Zabadal & Poffal, 2004; Zabadal et alli, 2004; Zabadal et alli, 2005; Zabadal et alli, 2005).

3. OBJETIVOS E DESCRIÇÃO DOS CENÁRIOS DE INTERESSE

Os cenários de maior interesse em poluição aquática consistem na emissão de esgotos domésticos e no lançamento de resíduos de processos industriais em mananciais hídricos. A simulação desses cenários visa a redução de custos no que diz respeito à tomada de medidas preventivas e reparadoras para atenuar os efeitos nocivos oriundos da presença de poluentes, em particular o comprometimento de locais para banho e captação de água. Nesse sentido, os corpos hídricos de maior interesse para fins de avaliação do impacto ambiental sobre a região metropolitana de Porto Alegre são os rios Gravataí, Caí, Sinos e Jacuí, bem como o Lago Guaíba. O trabalho proposto tem como objeto de estudo o impacto ambiental provocado pela presença de esgotos domésticos ao longo do Lago Guaíba e do rio dos Sinos. As principais características desses corpos hídricos são apresentadas a seguir.

3.1 O LAGO GUAÍBA

A Região Hidrográfica do Guaíba, com 84,7 mil km², é formada por nove bacias hidrográficas e mais de 250 municípios, cuja população é superior a seis milhões de habitantes.

Uma região hidrográfica é formada por diversas bacias que escorrem para um corpo de água único: rio, lago ou laguna. Na Figura 1 estão representadas as três regiões hidrográficas - Guaíba, Uruguai e Litorânea, nas quais se subdivide o estado do Rio Grande do Sul. As águas da região do Guaíba deságuam no Lago Guaíba, as águas da região Litorânea escorrem para a Lagoa dos Patos, e as águas da região do Uruguai vão para o respectivo rio.

A Região hidrográfica do Guaíba é constituída pelas bacias hidrográficas do Alto Jacuí, Vacacaí, Baixo-Jacuí, Pardo, Taquarí, Caí, Sinos, Gravataí e do Lago Guaíba, sendo que nesta última deságuam as demais, conforme pode ser visualizado nas Figuras 3.1 e 3.2.

A bacia hidrográfica do Lago Guaíba localiza-se na porção leste do Estado do Rio Grande do Sul, entre os meridianos 50° e 52° de longitude oeste e os paralelos 30° e 31° de latitude sul, ocupando uma área de cerca de 1.700 km², nos quais estão inseridos 14 municípios, quais sejam: Barão do Triunfo, Barra do Ribeiro, Canoas, Cerro Grande do Sul, Eldorado do Sul, Guaíba, Mariana Pimentel, Nova Santa Rita, Porto Alegre, Sentinela do Sul, Sertão Santana, Tapes, Triunfo e Viamão, totalizando atualmente uma população de, aproximadamente, 2.200.000 habitantes. O município de Porto Alegre é o que contribui com a maior porção da

área da bacia (cerca de 400 km²), equivalente a 83% da área do município, enquanto que o de Guaíba tem sua área totalmente inserida na bacia.

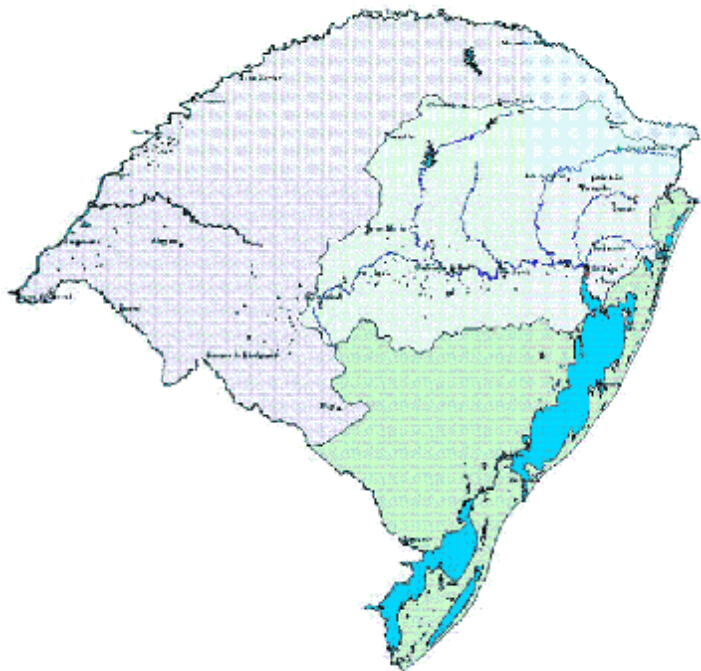


Figura 3.1 – Regiões Hidrográficas do Rio Grande do Sul

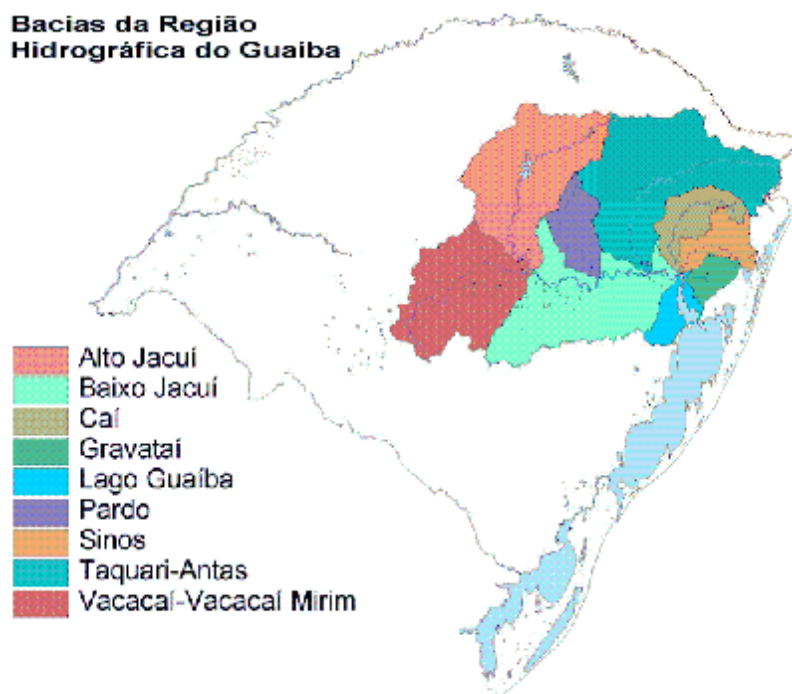


Figura 3.2 – Bacias da Região Hidrográfica do Guaíba

3.2 SITUAÇÃO SANITÁRIA DO LAGO GUAÍBA

Além de ser o exutório das bacias que compõem a Região Hidrográfica do Guaíba, o Lago Guaíba possui um comportamento hidráulico peculiar, condicionado por fatores climáticos. Esses fatores, principalmente os ventos predominantes na região, conferem ao Lago um regime hidrológico atípico. É comum a ocorrência de “vazões negativas” (o escoamento se dá no sentido inverso - de jusante para montante) com reflexos nos seus afluentes, especialmente nos rios Gravataí, Sinos e Caí, quando ocorrem períodos de estiagem intensa.

O comportamento lacustre desse corpo receptor favorece o aumento do tempo de residência dos poluentes que a ele aportam. A característica de ser receptor das águas drenadas pelas bacias a montante faz com que a qualidade das águas do Lago Guaíba seja dependente, não somente das ações existentes no seu entorno, mas também daquelas havidas nas bacias dos rios que a ele afluem. O aporte de carga dos rios formadores, principalmente dos rios Gravataí e Sinos, bem como o contínuo lançamento de efluentes doméstico e industrial provoca um progressivo decréscimo da qualidade das suas águas, associados a situações de conflito, provocando problemas de disponibilidade hídrica, nas regiões agrícolas que integram a bacia hidrográfica do Lago Guaíba.

Atualmente, o maior problema do Guaíba não é a poluição de origem industrial (apenas em função de acidentes), mas os esgotos domésticos, porque existem 51 cargas de esgotos, distribuídas ao longo das margens deste corpo hídrico, correspondentes às emissões de esgoto cloacal de todo o perímetro urbano de Porto Alegre e parte do município de Canoas. Essas cargas totalizam cerca de 800 toneladas de matéria orgânica lançadas diariamente neste corpo hídrico. Em função da predominância da carga de esgoto, o principal parâmetro a ser analisado é o coliforme fecal. Isto ocorre não porque o coliforme é patogênico, mas devido ao fato de que sua presença em um rio ou lago indica que outras bactérias potencialmente nocivas à saúde também ali estejam presentes. Na verdade, a maior preocupação com a propagação de bactérias oriundas de esgotos cloacais é relativa à presença de salmonelas, entretanto a correlação entre a concentração de coliformes e salmonelas é tão forte que o primeiro parâmetro pode ser utilizado como uma medida confiável do segundo, isto é, a concentração de coliformes é diretamente proporcional à concentração de salmonelas. Este argumento é válido para diversas espécies de bactérias, de modo que o parâmetro coliforme fecal pode ser utilizado isoladamente como principal de contaminação microbiológica de mananciais hídricos cuja principal fonte poluidora são os esgotos domésticos. Além disso, a variabilidade deste parâmetro é muito mais ampla do que a de qualquer outra variável utilizada na avaliação de impacto ambiental; por exemplo, a concentração de coliformes fecais ao longo do Lago Guaíba varia entre 0 e 10^8 organismos por

100 mililitros de água, de modo que quaisquer desvios em relação a valores representativos de dados de coletas resultam relativamente baixos em relação ao próprio intervalo de variação do parâmetro.

O Departamento Municipal de Águas e Esgotos (DMAE), através de sua Divisão de Pesquisa (DVP), vem monitorando, ao longo dos últimos trinta anos, o Guaíba e cursos d'água afluentes ao delta do Jacuí, especialmente junto aos pontos de captação, arroios que receberam lançamentos de esgotos e balneários.

Conforme mencionado anteriormente, a característica de ser corpo receptor das águas integrantes da Região Hidrográfica do Guaíba, bem como o fato de que nela se concentra a maior parte da população e da atividade industrial do nosso Estado, implica que fatores como crescimento econômico, explosão demográfica, êxodo rural, aumento da população marginal e do parque industrial, determinam um acréscimo de cargas no Lago Guaíba, afetando a qualidade de suas águas acima de sua capacidade de autodepuração. Isto vem sendo comprovado pelo monitoramento da qualidade das águas superficiais, ao longo do tempo.

Os dados do monitoramento coletados pela DVP foram utilizados como ponto de partida para proceder ao levantamento e localização das principais cargas de esgotos domésticos afluentes às margens do Guaíba e ao Delta do Jacuí. Para representar as concentrações destes pontos de lançamento de cargas foi adotado o valor de coliformes fecais não superado em 80% das amostras. No caso de haver observações recentes, foram desprezados aqueles dados anteriores aos últimos dezessete anos. Paralelamente, foram efetuados estudos hidrológicos para determinar suas vazões e qualificar efetivamente as cargas poluidoras.

Foram desconsideradas, na avaliação dos cenários, as cargas de valor insignificante, como no caso das ilhas situadas no Delta, com contribuições muito pequenas, principalmente se comparadas com as provenientes dos rios. Ademais, não havia medição das vazões e das concentrações nestes locais.

Os locais definidos para o lançamento das cargas seguiram o critério da bacia hidrográfica, delimitadas a partir do divisor de águas topográfico. Este critério pressupõe que todo esgoto gerado na bacia será nela escoado. Foram desprezadas as pequenas transposições, impostas pelas características locais de desenvolvimento e organização do espaço urbano. Somente foram consideradas, neste estudo, as transposições de cargas de maior volume e concentração, como aquelas lançadas na bacia do Dilúvio, originárias da bacia do Almirante Tamandaré, que deságuam no emissário subfluivial da Ponta da Cadeia. Para determinar a carga de coliformes fecais lançada no rio, foi necessário estimar vazão e monitorar a respectiva concentração. O produto entre os valores de concentração e vazão resulta na carga total lançada

pelo manancial, por unidade de tempo. Para a maioria das bacias hidrográficas afluentes ao Guaíba, não possuidoras de rede de esgoto separadora, foi considerado para local de despejo dos esgotos a foz do respectivo curso d'água, sendo a respectiva vazão estimada via estudos hidrológicos.

Já nas bacias servidas por rede e esgotos, os pontos de descarga foram determinados pelo sistema de tubulação existente, e a vazão foi a medida pela Divisão de Esgotos. Este foi o caso dos sistemas Navegantes, Ponta da Cadeia e vilas Nova Brasília e Santa Rosa. Para as bacias não possuidoras de sistema separador de esgotos, mas cujas características de urbanização impuseram a execução de obras de bombeamento que desviaram água do talvegue principal, a vazão estimada pela hidrologia foi rateada, por média aritmética, entre os pontos de descarga. Este critério foi adotado por não haver medição de vazão nestes locais.

3.3 SISTEMAS DE SIMULAÇÃO COMO FERRAMENTAS DE CONTROLE DA POLUIÇÃO AQUÁTICA

A fim de proceder à elaboração de estratégias para a redução do impacto ambiental causado pela presença de cargas de esgoto doméstico no município de Porto Alegre, torna-se necessário definir cenários de tratamento dos esgotos (localização das Estações de Tratamento de Esgotos (ETEs), métodos e níveis de tratamento e destino dos efluentes líquidos nas estações), executar simulações visando estimar o impacto ambiental associado a cada uma das alternativas propostas e proceder a análise dos resultados obtidos.

Para tanto, torna-se conveniente elaborar um sistema que estime a distribuição de concentração de poluentes ao longo de corpos hídricos, a fim de possibilitar o planejamento de obras de saneamento básico, tendo em vista os resultados obtidos a partir das simulações efetuadas. O emprego de sistemas de simulação na tomada de decisões relativas ao planejamento de obras de saneamento básico visa três objetivos fundamentais:

- i) redução de custos de implantação e operação de estações de tratamento de esgotos;
- ii) melhor aproveitamento da capacidade de auto-depuração do corpo hídrico;
- iii) viabilizar a balneabilidade de determinadas regiões de maior interesse turístico.

Esses objetivos são alcançados, via de regra, através dos seguintes procedimentos:

- a) realocação das cargas de esgotos para pontos a montante ou para canais de navegação que se encontrem eventualmente próximos ao ponto de emissão original da carga;
- b) tratamento parcial de esgotos em perímetro urbano, em estações que incluam operações de gradeamento, floculação ou até mesmo outras de maior custos, como radiação UV, cuja área ocupada seja pequena e cujo grau de eficiência na redução da concentração da carga de esgoto seja elevado.

Em síntese, pode-se dizer que um sistema com tais características permite adequar a distribuição de cargas e o respectivo perfil de concentrações, de modo a minimizar o custo de implantação de obras de saneamento básico para um determinado grau de impacto ambiental desejado.

Dentro desse enfoque, foi desenvolvida uma ferramenta de trabalho, a saber, um sistema de simulação capaz de subsidiar o planejamento adequado das obras de saneamento, através da verificação da viabilidade de alternativas de tratamento de esgotos em vários níveis e seus respectivos custos, bem como checar a possibilidade de realocação das captações de água bruta.

A principal dificuldade na elaboração de sistemas dessa natureza consiste em resolver equações diferenciais parciais advectivo-difusivas com coeficientes variáveis em um domínio cuja geometria é complexa, devido às irregularidades representadas pelo contorno das margens do corpo hídrico.

Tais problemas demandam, em geral, altos tempos de processamento, quando são utilizados métodos numéricos em sua resolução. A fim de contornar estas dificuldades podem ser elaboradas formulações analíticas visando:

1. adaptar o sistema de coordenadas à geometria do corpo hídrico, por meio do emprego de mudança de variáveis que resultem na criação de um sistema de coordenadas auxiliares;
2. resolver o problema em coordenadas cartesianas, produzindo soluções contendo funções arbitrárias de argumentos nos quais figuram constantes arbitrárias.

Soluções contendo funções arbitrárias facilitam a aplicação das condições de contorno para corpos hídricos com qualquer geometria concebível, sem que se faça necessário criar coordenadas curvilíneas que se adaptem ao formato de seus contornos.

Uma das principais vantagens dessa formulação reside no fato de não se tornar necessário alterar a estrutura das equações diferenciais ao redefinir o sistema de coordenadas a utilizar. Esta vantagem advém do fato de ser possível construir uma forma fatorada de primeira ordem para equações advectivo-difusivas cuja resolução é imediata (ver capítulo 3).

Com o objetivo de verificar a viabilidade do emprego de formulações analíticas com as características mencionadas, foi desenvolvido, junto ao DMAE/DVP, um sistema de simulação denominado DMAEMAP, um ambiente no qual novas formulações podem ser testadas, e eventualmente implementadas de forma definitiva. O emprego desse sistema como plataforma de testes para novas formulações analíticas tem facilitado consideravelmente o desenvolvimento de novos métodos de resolução para problemas de interesse em Engenharia Ambiental. O sistema DMAEMAP é uma ferramenta dinâmica e está sempre sendo aprimorado frente ao rápido avanço tecnológico na área da informática. A metodologia de desenvolvimento do sistema permite uma melhor interação software/usuário, utilizando mapas temáticos conjugados com programas de geoprocessamento (GIS), matemática aplicada, programação visual e sistemas de gerenciamento de banco de dados (SGBD). A interface assim criada possibilita o acesso para usuários de diversos níveis, facilitando a divulgação e a compreensão do tema tanto para um público leigo quanto técnico. O corpo técnico da DVP acompanha permanentemente sua atualização, buscando garantir a confiabilidade do sistema e implementar melhorias no que diz respeito à performance computacional.

Até o momento, o sistema de simulação já foi aplicado no Plano Diretor de Esgotos do município de Porto Alegre, subsidiando o estudo de alternativas de tratamento e localização para os sistemas Ponta da Cadeia, Ipanema e Belém Novo. Através da facilidade em criar cenários futuros de qualidade de água, esta ferramenta propicia a definição de melhor opção de tratamento e localização das estações de tratamento de esgotos.

Este programa também já foi aplicado no estudo da Bacia do Arroio Cavalhada, integrante do projeto da III Perimetral, através de simulação de cenários específicos para avaliação do impacto de chuvas localizadas na bacia hidrográfica em questão sobre o Guaíba, bem como a redução deste impacto frente à implantação da rede coletora de esgotos.

No trabalho proposto, um novo método analítico, formulado com a finalidade de obter soluções exatas para problemas de poluição aquática, é apresentado. Esse método, incorporado ao sistema DMAEMAP, é baseado no emprego de transformações auto-Bäcklund (Polyanin, 2004), produz soluções em forma fechada para equações advectivo-difusivas sujeitas a condições de contorno de primeira espécie. Essa formulação é particularmente vantajosa na simulação de cenários de propagação de poluentes em corpos hídricos que apresentam litoral arenoso no qual quebram pequenas ondas.

A formulação analítica empregada na simulação de cenários de propagação de poluentes ao longo do Lago Guaíba também é adotada para a simulação de cenários de dispersão no rio dos Sinos. Embora, no rio dos Sinos, a poluição devido à atividade industrial seja preponderante

frente a de origem doméstica, a formulação citada apresenta uma vantagem adicional, relativa à performance computacional, quando da resolução de problemas unidimensionais. Cabe destacar que o rio dos Sinos, como a grande maioria dos cursos de água, possui largura muito inferior ao seu comprimento, o que permite adotar uma concentração uniforme ao longo de sua seção transversal, implicando num escoamento unidimensional.

Devido à origem industrial da maioria dos despejos lançados ao longo do rio dos Sinos, foram utilizados os parâmetros OD e DBO para fins de avaliação da qualidade da água desse manancial. Uma breve descrição das características do rio dos Sinos, no que diz respeito aos seus aspectos geográficos é apresentado na seção a seguir.

3.4 O RIO DOS SINOS

A Bacia Hidrográfica do Rio dos Sinos situa-se a nordeste do Estado do Rio Grande do Sul, entre os paralelos 29 e 30 graus Sul. O Rio dos Sinos deságua no Delta do Rio Jacuí, um complexo sistema de braços, confluências e ilhas fluviais de pequeno porte, em frente à cidade de Porto Alegre. Contribui com 3,4 a 5,24 % da vazão média global de 1050 m³/s do Delta do Jacuí. A bacia tem aproximadamente 3700 km², com um comprimento máximo de talvegue de 190 km. A bacia do rio dos Sinos está delimitada ao norte e a oeste pela bacia do rio Caí; ao sul, parcialmente, pela bacia do rio Gravataí e pelas encostas da serra geral, que serve de divisor de águas para as bacias inseridas na planície costeira. A leste, a delimitação também é definida pelas encostas da serra geral. A Figura 3.5 detalha a hidrografia da bacia e sua localização no Estado.



Figura 3.3 – Mortandade de peixes no Rio dos Sinos (outubro de 2006)

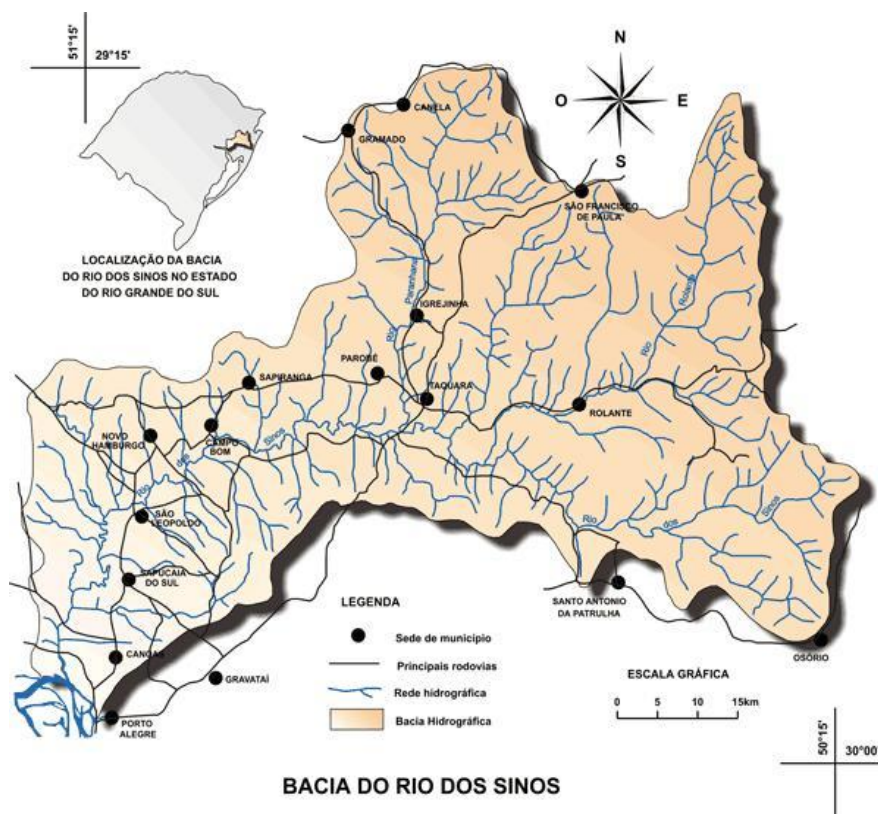


Figura 3.4 – Bacia hidrográfica do Rio dos Sinos

As nascentes do rio dos Sinos situam-se no município de Santo Antônio da Patrulha, a cerca de 900 m de altitude, tendo sua foz no delta do Jacuí, em altitude da ordem de 10 m, em meio a zonas alagadiças e depósitos fluviais. Seus afluentes principais são os rios da Ilha, Rolante e Paranhana. Além desses formadores principais existem diversos arroios afluentes de menor porte, muitos dos quais drenam vilas, povoados, cidades, indústrias e lixões, os quais também têm importância tanto no regime hidráulico quanto de qualidade do Rio dos Sinos. Os arroios formadores são utilizados como canais de transporte de esgoto doméstico, lixívia de lixos, drenagem pluvial e de efluentes industriais tratados ou não. Uma série de arroios na parte mais baixa da bacia do Sinos possui condições anaeróbias, principalmente os Arroios Luiz Rau, J. Joaquim, João Correia, do Portão e outros menores.

O trecho simulado em nosso trabalho está compreendido entre a estação fluviométrica de Campo Bom e a Foz do rio dos Sinos. Este trecho apresenta 67,5 Km de extensão e foi dividido em 20 intervalos com 21 seções transversais, identificadas na coluna “SEÇÕES DO MODELO” da tabela 3.1, apresentada a seguir.

Tabela 3.1 – Discretização do Rio dos Sinos

SEÇÕES DA FEPAM	PONTOS DE AMOSTRAGEM	SEÇÕES DO MODELO	DESCRIÇÃO	DISTANCIA DA FOZ
SI-7	R	S1	Captação Sapiranga/Campo Bom posto fluviometrico do DNAEE	675000
		S2*		63867
		S3*		60233
SI-5	T	S4*	Captação Novo Hamburgo	56600
		S5*		53476
		S6*		50351
		S7*		47226
SI-4	U	S8	Captação São Leopoldo: posto fluviometrico do DNAEE	44100
		S9		40600
SI-3	V	S10	Jusante de tracho com alta concentração industrial	37000
		S11		34600
		S12		31400
		S13		29000
		S14		25800
		S15		23600
		S16		19800
SI-2	X	S17	Captação Esteio	16400
		S18		13100
		S19		10000
SI-1	Y	S20	Ponte da BR-386	7100
		S21		3500
	Z		Foz	0

4. DESCRIÇÃO DO METODO

Os problemas de maior interesse em poluição aquática são divididos em dois conjuntos de cenários típicos de dispersão de poluentes. O primeiro conjunto de cenários descreve problemas de deriva de mancha, isto é, cenários transientes nos quais um despejo instantâneo é efetuado em um determinado local do corpo hídrico, produzindo um mancha que é transportada pela correnteza, sofrendo simultaneamente difusão e eventualmente degradação, evaporação ou precipitação.

O segundo conjunto de cenários é descrito por problemas tipicamente estacionários nos quais dutos de esgoto e de transporte de substâncias químicas efetuam o lançamento de carga contínua num determinado local do corpo hídrico produzindo uma pluma.

Em ambos os casos faz-se necessário que as soluções da equação advectivo-difusiva contenham apenas uma função arbitrária de um argumento específico. Isto ocorre por que nestes cenários a equação advectivo-difusiva está sujeita a duas condições de contorno, sendo que apenas uma delas realmente especifica a função arbitrária.

A primeira condição de contorno, de primeira espécie, descreve a conformação aproximada de um despejo instantâneo, no caso de cenários envolvendo acidentes com cargas tóxicas, ou a conformação da seção transversal da pluma que descreve um lançamento contínuo em regime estacionário. Essa condição de contorno particulariza a função arbitrária presente na solução.

A segunda condição de contorno especifica o mecanismo de propagação do poluente junto as margens do corpo hídrico, e correspondem a condições de segunda ou terceira espécie, conforme o tipo de interface água-solo considerado. Essa condição de contorno especifica apenas constantes arbitrárias que eventualmente figurem na solução obtida. O apêndice A apresenta uma tabela contendo parâmetros que caracterizam diferentes tipos de margem e a forma das respectivas condições de contorno associadas. Esse apêndice contém uma tabela que define o chamado Índice de Sensibilidade Ambiental, a norma mais comumente utilizada pelos organismos internacionais (Ex. CEDRE, NOAA, ITOPI) para a classificação de acordo com a sensibilidade ao derramamento de óleo - mas que pode ser aplicada também a outras substâncias nocivas.

A equação advectivo-difusiva bidimensional em regime transiente para poluentes não conservativos é dada, em coordenadas cartesianas, por

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} - D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) + kC = 0 \quad (1)$$

Para o caso no qual o campo de velocidades não varia significativamente com o tempo, o único efeito transiente sobre a distribuição de concentrações se deve a cinética de degradação, evaporação, sedimentação ou a redissolução do componente. Deste modo a equação pode ser reescrita como um sistema de duas equações diferenciais que regem respectivamente, a cinética e o transporte advectivo-difusivo:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + kC = 0 \quad (2)$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} - D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (3)$$

A primeira equação do sistema pode ser resolvida via separação de variáveis e integração direta, enquanto a segunda sofrerá um processo de redução de ordem baseado em gênese e transformação auto-Bäcklund.

Para resolver a primeira equação do sistema basta efetuar uma separação de variáveis,

$$\frac{\partial C}{C} = -k \partial t \quad (4)$$

Integrando ambos os membros, resulta

$$\ln C = -kt + \ln g(x, y) \quad (5)$$

onde $g(x,y)$ é uma função arbitrária . Exponenciando ambos os membros, temos

$$C = g(x, y)e^{-kt} \quad (6)$$

A função $g(x,y)$ por sua vez é solução exata da segunda equação do sistema. De fato, substituindo 6 em 3, resulta

$$\left[u \frac{\partial g}{\partial x} + v \frac{\partial g}{\partial y} - D \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) \right] e^{-kt} = 0 \quad (7)$$

Uma vez que a exponencial presente na equação 7 não pode ser nula, o conteúdo entre colchetes deve ser igual a zero:

$$u \frac{\partial g}{\partial x} + v \frac{\partial g}{\partial y} - D \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) = 0 \quad . \quad (8)$$

Resta, portanto, encontrar soluções exatas para a respectiva equação em regime estacionário, dada por

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} - D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) = 0 \quad , \quad (9)$$

uma vez que as equações 8 e 3 são idênticas.

O método proposto baseia-se na fatoração da equação advectivo-difusiva estacionária em forma matricial, resultando na obtenção de duas restrições diferenciais de primeira ordem que induzem uma transformação auto-Bäcklund sobre equações advectivo-difusivas em regime estacionário. O primeiro passo na obtenção da forma fatorada consiste em uma dupla gênese dada por

$$D \frac{\partial C}{\partial x} = g(x, y, u, v, C) \quad (10)$$

$$D \frac{\partial C}{\partial y} = h(x, y, u, v, C) \quad (11)$$

Derivando a equação 10 em relação a x, e utilizando a regra da cadeia, resulta

$$D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = g_x + g_c \frac{\partial C}{\partial x} + g_u \frac{\partial u}{\partial x} + g_v \frac{\partial v}{\partial x} \quad (12)$$

Derivando a equação 11 em relação a y resulta

$$D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = h_y + h_c \frac{\partial C}{\partial y} + h_u \frac{\partial u}{\partial y} + h_v \frac{\partial v}{\partial y} \quad (13)$$

As equações 12 e 13 utilizam diferentes notações para as derivadas parciais de C, g e h a fim de facilitar a identificação dos coeficientes da equação alvo via comparação direta.

Somando as equações resultantes obtém-se

$$D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) = g_x + g_c \frac{\partial C}{\partial x} + g_u \frac{\partial u}{\partial x} + g_v \frac{\partial v}{\partial x} + h_y + h_c \frac{\partial C}{\partial y} + h_u \frac{\partial u}{\partial y} + h_v \frac{\partial v}{\partial y} \quad (14)$$

Comparando o resultado obtido com a equação alvo (1), obtém-se

$$g_c = u \quad (15)$$

$$g_u = C \quad (16)$$

$$h_c = v \quad (17)$$

$$h_v = C \quad (18)$$

Os termos restantes devem se anular mutuamente, de modo que

$$g_x + h_y = 0 \quad (19)$$

$$h_u \frac{\partial u}{\partial y} + g_v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (20)$$

As últimas duas equações são identicamente satisfeitas quando as respectivas derivadas parciais se anulam individualmente. Assim a equação advectivo-difusiva é obtida a partir de uma dupla gênese para a qual as funções g e h são dadas por

$$g = uC + a(x, y) \quad (21)$$

$$h = vC + b(x, y), \quad (22)$$

e portanto,

$$DC_x = uC + a(x, y) \quad (23)$$

$$DC_y = vC + b(x, y) \quad (24)$$

Resta agora verificar se as formas fatoradas particularizam o espaço de soluções em algum sentido, a fim de identificar eventuais limitações resultantes do sistema formado pelas equações 2 e 3. Derivando agora a equação 23 em y, resulta

$$C_{xy} = u_y C + uC_y + A_y \quad (25)$$

Derivando a equação 24 em relação a x, resulta

$$C_{xy} = u_x C + uC_x + B_x \quad (26)$$

Subtraindo as equações resultantes, obtém-se

$$u_y C + uC_y + a_y - v_x C - vC_x - b = 0 \quad (27)$$

Reagrupando termos, vem

$$(u_y - v_x)C + uC_y - vC_x + a_y + b_x = 0 \quad (28)$$

Fazendo as substituições

$$C_x = \frac{uC + a(x, y)}{D} \quad (29)$$

e

$$C_y = \frac{vC + b(x, y)}{D} \quad (30)$$

obtém-se

$$(u_y - v_x)C + u \frac{(vC + b)}{D} - v \frac{(uC + a)}{D} + a_y + b_x = 0 \quad (31)$$

Cancelando termos comuns e escolhendo

$$a = Df_y \quad (32)$$

e

$$b = -Df_x \quad (33)$$

resulta na própria equação alvo, expressa em termos da função f , acrescida de um termo extra:

$$uf_x + vf_y + D(f_{xx} + f_{yy}) + (u_y - v_x)C = 0 \quad (34)$$

A fim de obter a mesma equação alvo para a função f , os termos que multiplicam C na equação 34 devem se anular mutuamente:

$$v_x - u_y = 0 \quad (35)$$

Esta condição restritiva implica no fato do escoamento resultar invíscido, uma vez que

$$w = v_x - u_y = 0 \quad (36)$$

Nessa equação, ω é a componente z do vetor vorticidade. Esta condição, entretanto, não constitui uma restrição severa para a grande maioria das aplicações práticas, uma vez que a dimensão característica do domínio em estudo (rios, lagos e corpos hídricos em geral) é várias ordens de grandeza superior a dimensão característica da respectiva camada limite hidrodinâmica. Em outras palavras, os efeitos viscosos decorrentes tanto do desenvolvimento quanto do

descolamento da camada limite hidrodinâmica não são detectáveis na escala de observação característica do problema proposto.

4.1 Resolução do sistema de equações de primeira ordem.

Como mencionado anteriormente, as equações 2 e 3 constituem um par de restrições diferenciais que operam uma transformação auto-Bäcklund para a equação advectivo-difusiva dada por 1:

$$DC_x = uC + Df_y \quad (37)$$

$$DC_y = vC - Df_x \quad (38)$$

Desta forma, uma vez obtida a função f , ou seja, ao menos uma solução particular da equação (1) torna-se possível resolver o sistema formado pelas equações 37 e 38, encontrando a função $C(x,y)$. Como as equações auxiliar e alvo são as mesmas, o processo iterativo característico das transformações de Bäcklund pode ser evitado lembrando que a função $C(x,y)$ pode ser substituída no lugar da função f no sistema formado pelas equações 37 e 38. Assim as restrições diferenciais podem ser reescritas como

$$DC_x = uC + DC_y \quad (39)$$

$$DC_y = vC - DC_x \quad (40)$$

O processo de resolução deste sistema é imediato. Isolando DC_y na equação 39 obtém-se:

$$DC_y = DC_x - uC \quad (41)$$

Substituindo o resultado obtido na equação 40, as derivadas em relação a y são eliminadas:

$$2DC_x - (u + v)C = 0 \quad (42)$$

Esta equação pode ser resolvida por integração direta, resultando

$$C = g(y) e^{\frac{1}{2D} \int (u+v) dx} \quad (43)$$

Onde $g(y)$ é uma função arbitrária. A distribuição de concentrações assim obtida pode ser expressa em termos da função corrente e do potencial velocidade, a fim de evitar o cálculo da integral presente na equação 43. Lembrando que

$$u = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (44)$$

e

$$v = -\frac{\partial y}{\partial x} \quad (45)$$

A solução dada pela equação 43 pode ser expressa da forma

$$C = g(y) e^{\frac{f-y}{2D}} \quad (46)$$

Assim a distribuição de concentrações pode ser obtida diretamente através de grandezas que definem o escoamento do corpo hídrico, tomado com potencial na escala geográfica de observação.

De forma análoga ao procedimento descrito para obter a solução dada pela equação 46, uma solução contendo uma função arbitrária de x pode ser produzida caso seja eliminada a derivada em relação a x no sistema formado pelas equações 39 e 40. Isolando DC_x em 39 e substituindo em 40, obtém-se:

$$DC_y = vC - uC - DC_y \quad (47)$$

ou

$$2DC_y = (v-u)C \quad (48)$$

A exemplo de 42, esta equação também pode ser resolvida por integração direta, resultando

$$C = h(x)e^{\frac{1}{2D}\int(v-u)dy} \quad , \quad (49)$$

onde $h(x)$ é uma função arbitrária. Novamente, a distribuição de concentrações pode ser expressa em termos da função corrente e do potencial velocidade, a fim de evitar o cálculo da integral que figura em 49. Utilizando outra vez as equações 44 e 45, vem

$$C = h(x)e^{\frac{f-y}{2D}} \quad (50)$$

Uma vez que a equação advectivo-difusiva é linear, a distribuição de concentrações pode ser expressa como uma combinação linear entre as soluções dadas por 46 e 50:

$$C = [g(y) + h(x)]e^{\frac{f-y}{2D}} \quad . \quad (51)$$

4.2 Considerações sobre o potencial de aplicação da solução e sobre as condições de contorno utilizadas

É importante observar que a solução dada por 51 pode representar distribuições produzidas por despejos efetuados em pontos arbitrários do corpo hídrico em estudo, enquanto as distribuições de concentrações dadas por (46) e (50) isoladamente são válidas para lançamentos à montante do domínio de interesse, ou para cargas distribuídas que percolam através do solo, atingindo as margens através de difusão em meio poroso. Embora esses dois tipos de despejo possam parecer, a princípio, casos bastante restritos de emissão de poluentes, na verdade são as cargas de ocorrência mais freqüente, tanto em perímetros urbanos quanto em zonas rurais. No primeiro caso, essas emissões representam os despejos de fossas sépticas, cujo respectivo sumidouro verte a carga de esgoto em forma líquida para o terreno adjacente, a qual difunde através do solo produzindo a carga distribuída mencionada anteriormente. No segundo caso, as emissões representam terminais de tubulação de esgoto cloacal, que se localizam, via de regra, junto às margens, devido ao alto custo de implantação dos chamados emissários. Emissários são

extensões de tubulação que avançam até o interior do corpo hídrico, a fim de minimizar o impacto causado pela emissão do esgoto *in natura*. Sua implantação visa para atingir um canal cuja velocidade de escoamento é maior, provocando uma remoção mais eficiente da carga, ou simplesmente lançar seu conteúdo em um local distante das margens. Essas medidas tem como objetivo final preservar a balneabilidade das regiões próximas às margens e explorar o potencial de auto-depuração do manancial em relação à digestão da matéria orgânica pelos microorganismos presentes no ecossistema aquático.

A solução dada por 51 foi concebida para resolver problemas de dispersão de poluentes em corpos hídricos que apresentam duas características bastante comuns na região nordeste do Rio Grande do Sul:

- i) litoral arenoso no qual quebram pequenas ondas;
- ii) elevado número de cargas, sejam elas concentradas ou distribuídas.

A primeira condição permite considerar que as margens são totalmente absorvedoras, isto é, que os poluentes lançados ao longo do corpo hídrico são completamente removidos do seu interior, uma vez que tenham atingido o litoral. Isto ocorre porque quando pequenas ondas quebram, transportando o poluente para as margens, a lâmina d'água que avança sobre o terreno é absorvida, sofrendo uma filtração parcial, e depositando o poluente no leito arenoso da margem. Para poluentes relativamente pouco solúveis em água, ou cujo diâmetro médio de partícula permita a retenção do poluente no terreno poroso, como no caso de diversos microorganismos, a margem pode ser considerada um absorvedor perfeito, de modo que a interface terra-água pode ser completamente ignorada, permitindo tratar o meio como infinito, ou aplicar condições de contorno de primeira espécie em interfaces artificialmente definidas com o objetivo de delimitar a região de interesse. A segunda alternativa oferece uma grande vantagem do ponto de vista da performance computacional do código fonte produzido a partir de soluções contendo duas funções arbitrárias. Basta aplicar condições de contorno de primeira espécie sobre interfaces horizontais e verticais traçadas no interior do corpo hídrico, a fim de especificar as funções arbitrárias presentes na solução definida pela equação 51. Essas condições, impostas sobre interfaces do tipo $x = \text{cte}$ e $y = \text{cte}$, substituem com vantagem a obtenção de soluções nas quais as cargas originais de poluentes presentes ao longo do manancial figuram como fontes na equação advectivo-difusiva, dispensando o cálculo das integrais que definem a solução particular do problema não-homogêneo associado. Entretanto, esse procedimento exige que sejam

efetuados ajustes de curvas para prescrever a distribuição de concentrações nas interfaces traçadas, definindo as funções $g(y)$ e $h(x)$ na equação 51.

Na prática, ignorar a interface terra água acarreta erros grosseiros apenas em cenários nos quais o corpo hídrico é localmente estagnado e o respectivo litoral é rochoso, situação na qual a condição de contorno de segunda espécie (derivada normal nula), que implica em reflexão total do poluente, produz distribuições de concentração bastante realistas. Entretanto, o simples fato da corrente advectiva transportar o poluente na direção tangencial às margens reduz consideravelmente o erro decorrente do fato de haver sido negligenciada a existência do litoral, e portanto, a própria geometria do corpo hídrico em estudo.

Em grande parte dos cenários típicos de propagação de poluentes em meio aquático, a hipótese que costuma produzir erros relativamente grosseiros nas distribuições de concentração, consiste em considerar a difusão molecular como o único mecanismo responsável pela propagação na direção transversal às isolinhas de função corrente, transportando o poluente em direção à margem. No entanto, a quebra de pequenas ondas junto ao litoral constitui um mecanismo consideravelmente mais eficiente de propagação transversal ao fluxo principal, que contudo atua apenas localmente na remoção do poluente. A combinação do emprego de métodos numéricos utilizando discretização em malha grossa e condições de contorno de segunda espécie, aplicadas a corpos hídricos que apresentam litorais arenosos juntos aos quais ocorre quebra de pequenas ondas, produz valores superestimados para a concentração de poluentes em praticamente toda a extensão do domínio considerado, pois além de ignorar o mecanismo de remoção do poluente, o algoritmo empregado produz, em geral, distribuições excessivamente difusas.

5. RESULTADOS

O método proposto foi empregado na simulação de cenários de dispersão de poluentes em três regiões do Lago Guaíba e ao longo do Rio dos Sinos. Os resultados numéricos obtidos para os valores de concentração de parâmetros de qualidade de água foram confrontados com dados experimentais obtidos em campanhas de coleta realizadas pelo Departamento Municipal de Água e Esgotos (DMAE) e pela Fundação Estadual de Proteção Ambiental (FEPAM). Os resultados apresentaram discrepâncias aceitáveis em relação aos dados de campo, da ordem do desvio verificado entre os próprios dados experimentais. Os cenários simulados e os resultados obtidos são apresentados a seguir.

5.1 Simulações de cenários no Lago Guaíba

A Figura 5.1 mostra a distribuição de coliformes fecais ao longo da região da Barra do Ribeiro, cuja localização no mapa do Lago se encontra indicada na Figura 3.3.

Nessa região existe uma carga puntual lançada nas imediações de um arroio e uma carga distribuída ao longo da margem, razão pela qual surgem duas regiões desconexas nas quais a concentração de coliformes fecais é mensurável, apesar de possuírem magnitude insignificante para afetar a balneabilidade local. O critério de balneabilidade do CONAMA prescreve uma concentração inferior a 1000 organismos por 100ml de água para a liberação do litoral como região própria para banho.

A Figura 5.2 mostra a distribuição de coliformes fecais na praia do Lami, na zona sul de Porto Alegre, região na qual existe basicamente uma carga puntual de vazão e concentração apreciáveis, lançada também em um arroio.

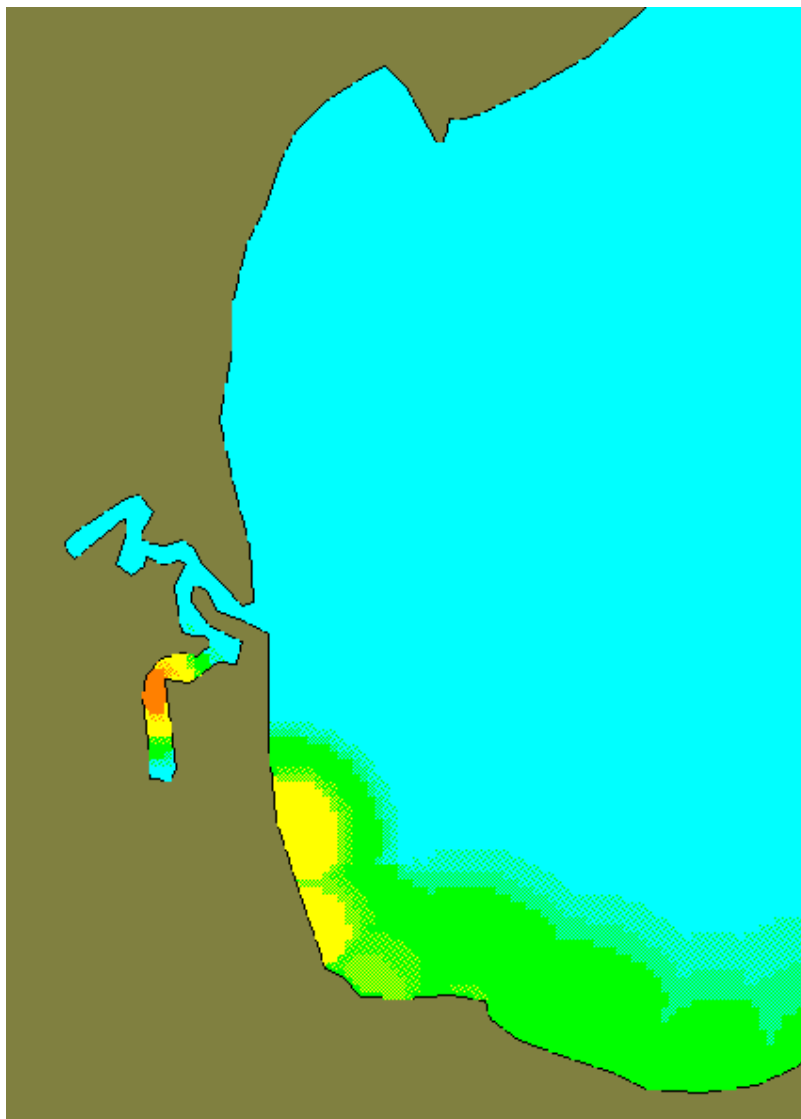
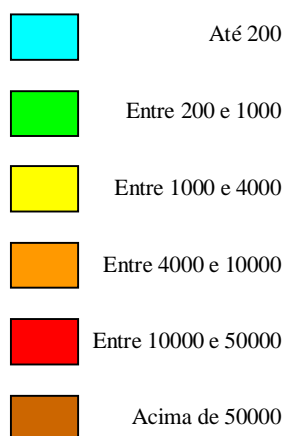


Figura 5.1 – Distribuição de concentração de coliformes na Barra do Ribeiro

Legenda: Coliforme (organismos/100ml)



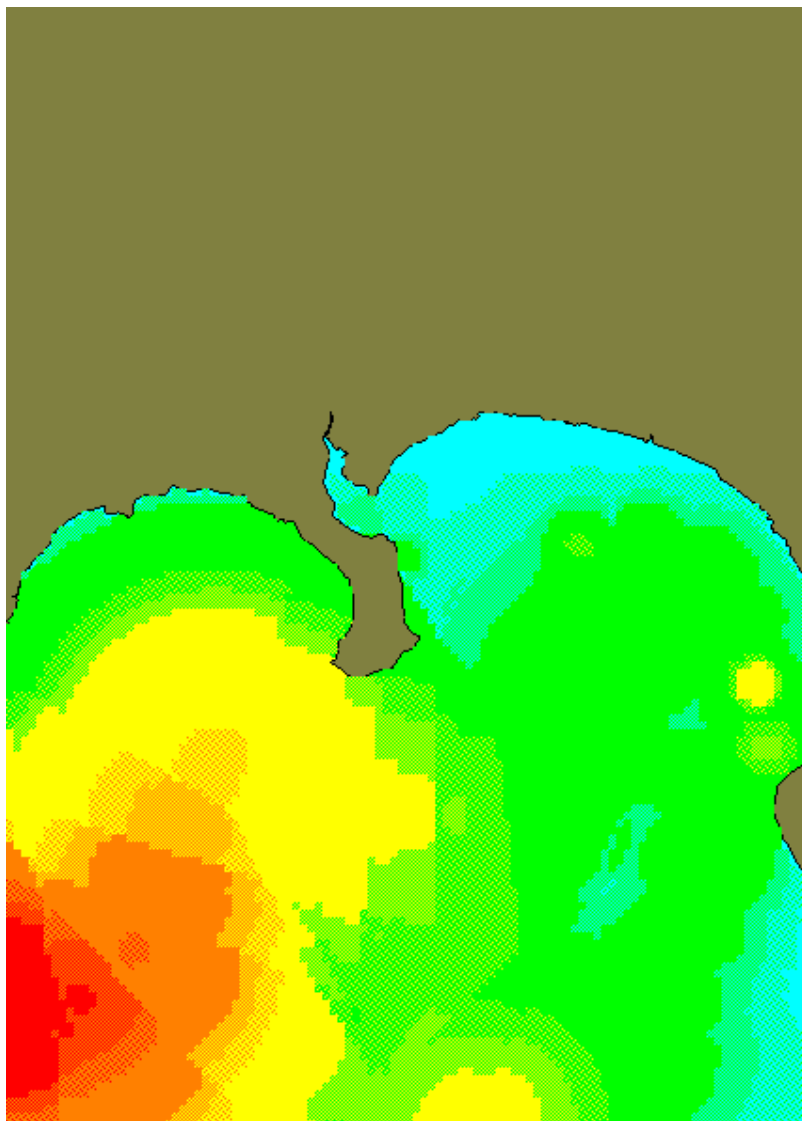
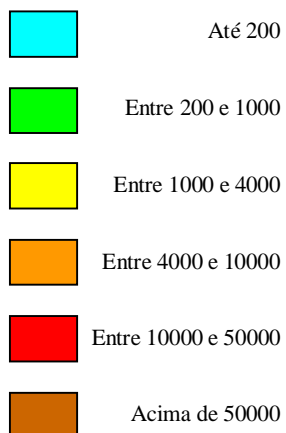


Figura 5.2 – Distribuição de concentrações de coliformes ao longo da praia do Lami

Legenda: Coliforme (organismos/100ml)



A Figura 5.3 mostra a região do Arroio Celupa, localizada nas proximidades do município de Guaíba. Nessa região existem diversas cargas à montante, que são consideradas em conjunto como uma única restrição, imposta na forma de condição de contorno de primeira espécie. Essa característica confere alta velocidade de pós-processamento às soluções obtidas a partir do método proposto. Isso ocorre porque o método dispensa o emprego de termos de fonte na equação advectivo-difusiva, além de impor uma única condição de contorno de primeira espécie à montante, e eventualmente uma condição adicional em uma interface adjacente, independente da localização específica das cargas. Essa condição pode ser imposta sempre que as cargas poluentes não estejam localizadas à jusante da região de interesse.

A vantagem do emprego de condições de contorno à montante sobre as soluções de uma equação advectivo-difusiva homogênea se torna ainda mais evidente quando são simulados cenários de dispersão de substâncias cujo número de cargas distribuídas é elevado. Exemplos típicos de substâncias que apresentam essa peculiaridade são os compostos nitrogenados e fosforados, que além de serem lançados ao corpo hídrico através da rede de esgotos, que consistem em cargas pontuais, e do sistema de fossas sépticas, cargas distribuídas ao longo das margens, surgem também como cargas difusas adicionais em regiões agrícolas, nas quais é bastante comum o uso de fertilizantes do tipo NPK (Nitrogênio – Fósforo – Potássio). Esses compostos possuem alta solubilidade em água, e por ocasião das chuvas percolam através do solo, atingindo lençóis subterrâneos que alimentam os mananciais hídricos. Além disso, uma parte do adubo utilizado forma depósitos no fundo dos corpos hídricos, cuja taxa de redissolução depende essencialmente do campo local de velocidades. Dessa forma, as cargas de compostos nitrogenados e fosforados produzem distribuições de concentração consideravelmente mais difusas do que as cargas de coliformes fecais.

A Figura 5.4 mostra a distribuição de concentração de “nitrogênio total”, que consiste na soma das concentrações de compostos amoniacais, nitritos e nitratos, calculada na Barra do Ribeiro..

As Figuras 5.5 e 5.6 mostram as distribuições de concentração de “nitrogênio total” na praia do Lami e nas proximidades do arroio Celupa.

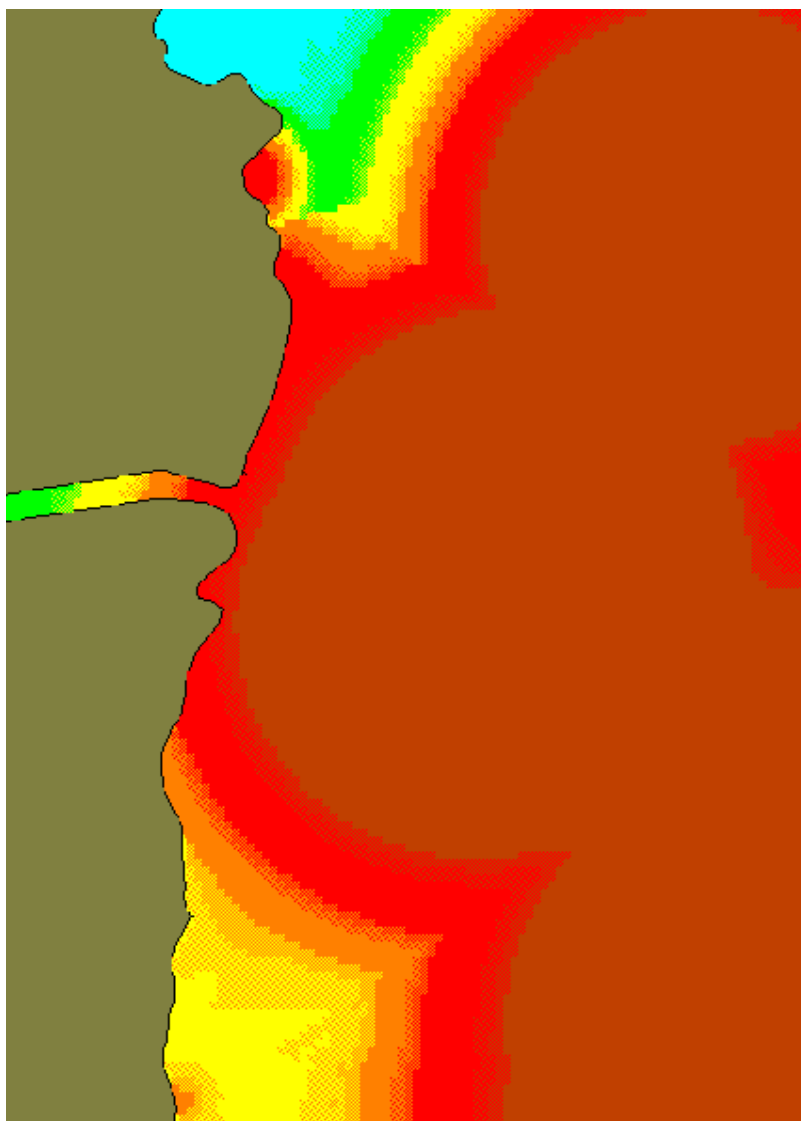
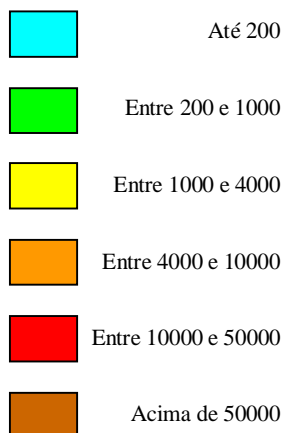


Figura 5.3 – Distribuição de concentrações de coliformes junto ao Arroio Celupa

Legenda: Coliforme (organismos/100ml)



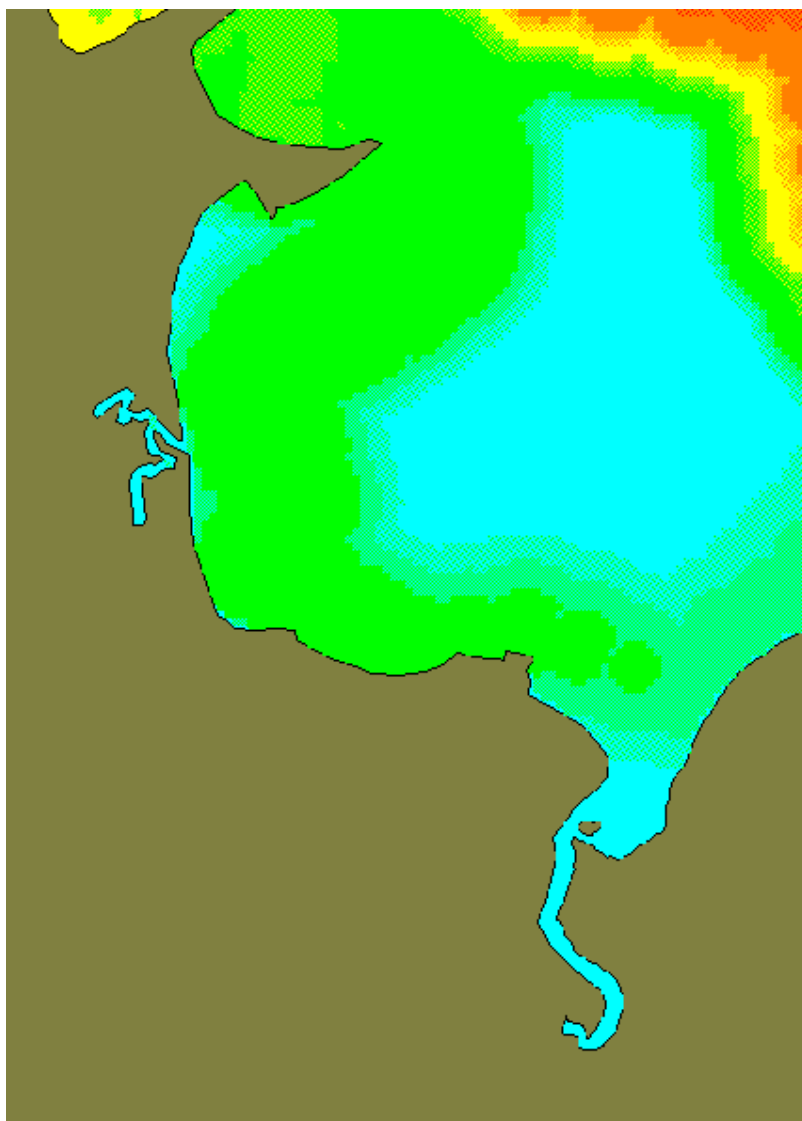



Figura 5.4 - Distribuição de concentração de nitrogênio na Barra do Ribeiro

Legenda nitrogênio (mg/l)

	Até 0,2
	Entre 0,2 e 1
	Entre 1 e 5
	Entre 5 e 10
	Entre 10 e 15
	Acima de 15

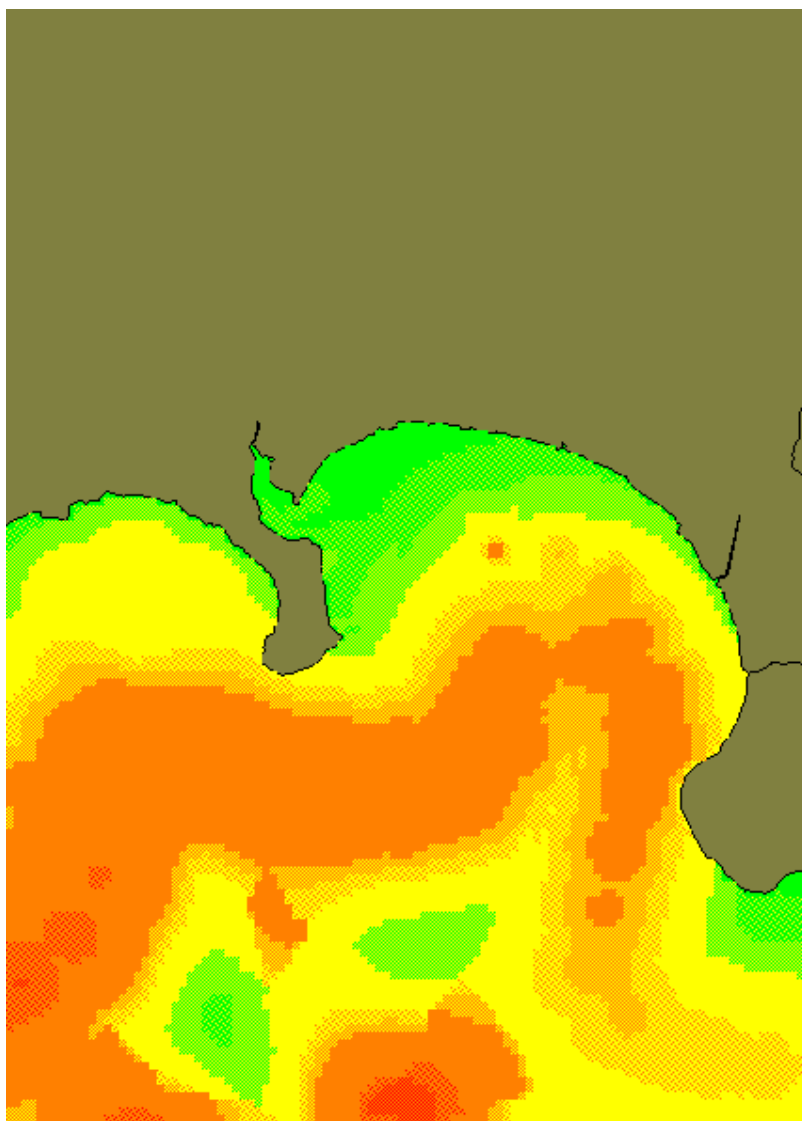
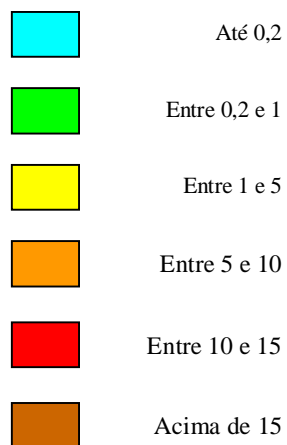


Figura 5.5 – Distribuição de nitrogênio ao longo da praia do Lami

Legenda nitrogênio (mg/l)



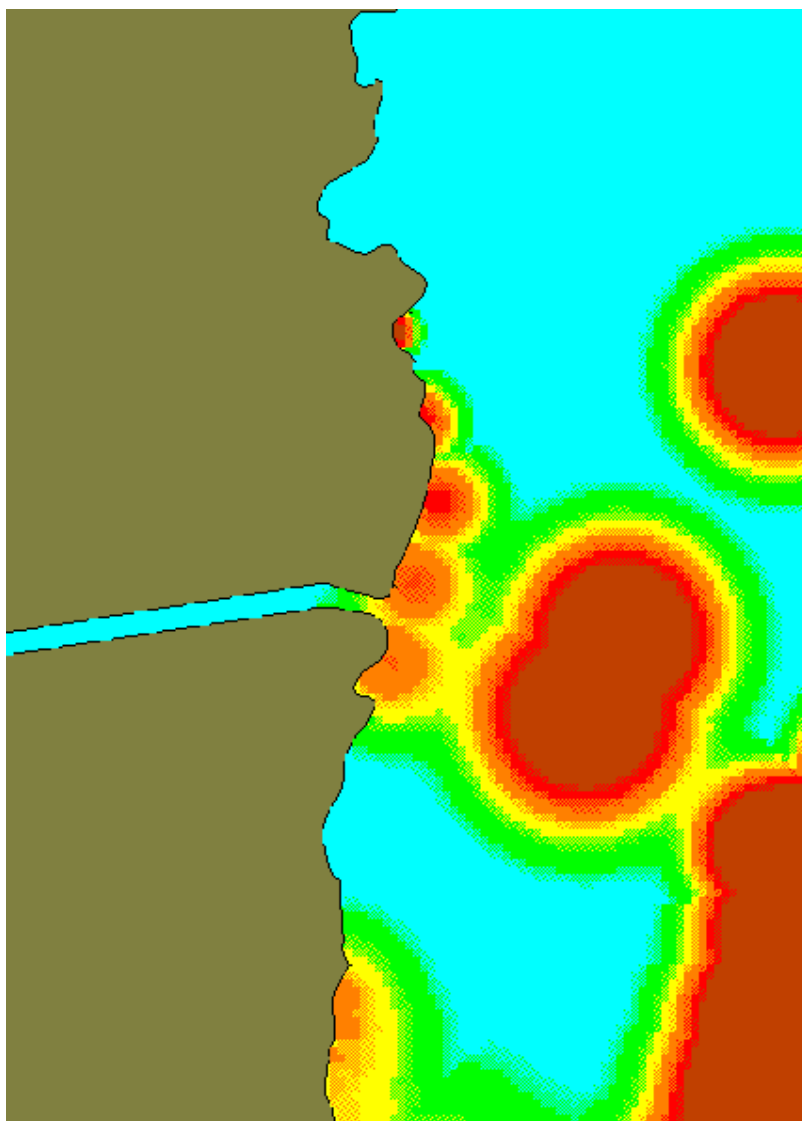
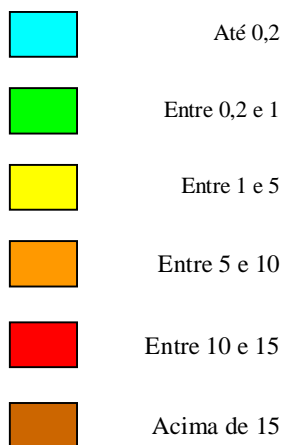


Figura 5.6 – Distribuição de concentração de nitrogênio junto ao Arroio Celupa

Legenda nitrogênio (mg/l)



Em todos os casos, o desvio verificado entre os dados experimentais (considerados sigilosos pelo Departamento Municipal de Água e Esgotos) e os respectivos valores calculados para o parâmetro “nitrogênio total” são da própria ordem de grandeza do desvio padrão relativo à função distribuição de probabilidades obtida a partir dos dados brutos (cerca de 17%). Assim, parece razoável supor que o método proposto produz resultados consistentes com os dados de campo disponíveis.

Com relação ao parâmetro coliforme, que possui maior variabilidade, o autor supõe que o fato de haver uma discrepância maior (~23%) entre os dados experimentais e os respectivos valores estimados se deva basicamente a três causas:

i) O fato do cenário simulado ser tipicamente bidimensional provoca o surgimento de desvios devido a discrepâncias locais entre os campos de velocidade calculado e real, de modo que a trajetória da linha central de propagação da carga passe por pontos ligeiramente distintos dos amostrados originalmente para fins de comparação. Assim um deslocamento na direção transversal a linha de fluxo pode eventualmente minimizar o desvio entre os valores estimado e experimental. Como exemplo, nas proximidades do canal de navegação, local onde os desvio relativo entre o dado experimental e o valor calculado pode chegar a 100%, um pequeno deslocamento da solução obtida na direção transversal a linha de fluxo pode reduzir esse erro relativo a cerca de 5%. O desvio causado por discrepâncias locais entre campos de velocidade é frequentemente verificado também na margem leste do estuário do Guaíba, onde existem muitas cargas pontuais de alta vazão e concentração que não difundem significativamente ao longo do percurso.

ii) Diferenças entre os modelos de evolução populacional de coliformes para condições de laboratório e ao longo do corpo hídrico - estas diferenças se devem ao fato do modelo de evolução populacional utilizado ser obtido através de um ajuste de dados originados em meio de cultura nos quais as condições de reprodução dos microorganismos são rigorosamente controladas.

iii) Dificuldades na estimação das concentrações da carga bruta junto aos pontos de emissão de esgoto cloacal ao longo do corpo hídrico - atualmente as estimativas de concentração de despejos são baseadas em dados populacionais, havendo poucos pontos de monitoramento situados precisamente junto às saídas de esgoto. A origem desta causa de erro está relacionada ao fato de não ser levada em conta a extensão do trajeto percorrido pelo esgoto bruto até atingir o Lago

Guaíba. Isto implica na obtenção de valores superestimados para a concentração de algumas cargas brutas, por não haver sido computado o tempo de residência do poluente nos dutos que conduzem ao corpo hídrico, e conseqüentemente, a redução de concentração devido ao decaimento previsto pelo modelo de evolução populacional mencionado no item ii.

5.2 Simulações de cenários no Rio dos Sinos

A propagação de poluentes ao longo do Rio dos Sinos pode ser descrita por um problema essencialmente unidimensional, uma vez que a distância entre as margens, da ordem de 60m, é desprezível em relação ao comprimento do corpo hídrico, em torno de 65 Km, não havendo portanto estratificação considerável dos valores de concentração na direção transversal ao escoamento principal. Nesse caso, a concentração é considerada dependente apenas do potencial velocidade, uma vez fixado um valor constante para a função corrente. Considera-se, portanto, que a propagação do poluente se processa ao longo de uma única linha de corrente, que corresponde à linha média entre as margens do rio.

Desta forma, inicialmente o potencial velocidade foi calculado para cada uma das cinco subdivisões em que foi particionado o trecho simulado, tendo como seções transversais limítrofes as seções denominadas S1, S4, S8, S10, S17 e S20 (ver Tabela 3.1), nas quais constam registros de dados de nível, vazão, OD, DBO₅, N total e P total, conforme apresentado no Apêndice C . Segue abaixo a tabela 5.1, com as expressões matemáticas do potencial velocidade para as subdivisões adotadas:

Tabela 5.1 – Potencial velocidade nos trechos de interesse

Trecho	Potencial velocidade
S1 – S4	$f(x) = 0,21.x$
S4 – S8	$f(x) = 1,07.x + 2289$
S8 – S10	$f(x) = 0,22.x + 15664$
S10 – S17	$f(x) = 0,5.x + 19954$
S17 – S20	$f(x) = 0,3.x + 22714$

A partir das expressões matemáticas do potencial velocidade, foram estabelecidas as formulações correspondentes às concentrações de OD e DBO₅ (Demanda Bioquímica de Oxigênio medida após 5 dias em meio de cultura) em cada um dos cinco trechos relacionados

anteriormente, e calculados os valores destes parâmetros considerando uma vazão correspondente à média dos registros tabulados em cada uma dessas seções.

Nas tabelas 5.2 e 5.3 são apresentadas as formulações que descrevem as concentrações dos referidos parâmetros de qualidade de água, bem como os valores calculados e os valores experimentais correspondentes.

Tabela 5.2 – Formulação e valores da concentração de DBO₅ nos trechos de interesse

Trecho	Concentração de DBO ₅
S1 – S4	$C(x) = \exp(0,0000265.x + 0,47)$
S4 – S8	$C(x) = \exp(0,0000193.x + 0,49)$
S8 – S10	$C(x) = \exp(0,0000644.x - 0,22)$
S10 – S17	$C(x) = \exp(0,0000681.x - 0,29)$
S17 – S20	$C(x) = \exp(-0,000164.x + 4,98)$

Tabela 5.3 – Formulação e valores da concentração de OD nos trechos de interesse

Trecho	Concentração de OD
S1 – S4	$C(x) = \exp(-0,0000369.x + 2,0)$
S4 – S8	$C(x) = \exp(-0,00000234.x + 1,88)$
S8 – S10	$C(x) = \exp(-0,000046.x + 2,62)$
S10 – S17	$C(x) = \exp(-0,0000902.x + 3,57)$
S17 – S20	$C(x) = \exp(0,0000145.x + 1,13)$

Tabela 5.4 – Valores calculados e experimentais da concentração de OD e DBO₅, em mg/L , nas seções de interesse

Seção	DBO ₅ calculado	DBO ₅ experimental	OD calculado	OD experimental
S1	1,6	1,5	7,4	7,2
S4	1,7	1,9	6,5	6,8
S8	2,2	2,4	6,7	6,3
S10	2,9	2,8	5,9	5,5
S17	3,5	3,3	4,3	4,6
S20	2,7	2,8	4,4	4,4

Os resultados obtidos para ambos os parâmetros apresentam concordância com os dados experimentais fornecidos pela FEPAM (Fundação Estadual de Proteção Ambiental), apresentando desvios da ordem 10%.

6. CONCLUSÕES

Este capítulo sumariza a análise dos resultados obtidos no capítulo 5, havendo sido dada atenção especial à seção 5.1, por descrever a propagação de poluentes de maior interesse em questões de saúde pública.

Em todos os cenários de dispersão de poluentes apresentados no trabalho proposto, os desvios verificados entre os valores médios dos dados experimentais e os respectivos valores calculados são da mesma ordem de grandeza dos próprios desvios quadráticos médios dos dados de campo. Conforme mencionado na seção 5.1, os valores calculados para o parâmetro “nitrogênio total” são da própria ordem de grandeza do desvio padrão relativo à função distribuição de probabilidades obtida a partir dos dados brutos (cerca de 17%). Com relação ao parâmetro coliforme, o fato de haver uma discrepância maior (~23%) entre as médias dos dados experimentais e os respectivos valores estimados se deve, possivelmente, às seguintes causas:

- a trajetória da linha central de propagação da carga passa por pontos ligeiramente distintos dos amostrados originalmente para fins de comparação;

- a existência de diferenças entre os modelos de evolução populacional de coliformes para condições de laboratório e ao longo do corpo hídrico;

- dificuldades na estimação das concentrações da carga bruta junto aos pontos de emissão de esgoto cloacal ao longo do corpo hídrico.

Esses fatos induzem a inferir, a princípio, que não se faz necessário implementar refinamentos de qualquer natureza no modelo de dispersão de poluentes utilizado, uma vez que os próprios dados de entrada possuem incerteza relativamente elevada. Entretanto, ao longo da análise dos resultados, foram identificadas duas causas de erros cuja eliminação pode eventualmente proporcionar um refinamento adicional aos resultados obtidos através do modelo.

A primeira causa de erro tem origem nas discrepâncias existentes entre o campo de velocidade real e as funções $u(x,y)$ e $v(x,y)$ empregadas como dados de entradas no modelo de dispersão proposto. Esse tópico foi discutido em maior detalhe no item “i” da seção 5.1.

A segunda causa de erro se refere ao valor numérico do coeficiente de difusão utilizado no modelo proposto. Esse valor não leva em consideração a presença de ondas de gravidade ao longo do corpo hídrico (Landau, 1959). A incidência de ventos sobre a superfície do corpo

hídrico produz zonas alternadas de alta e baixa pressão, que provocam o surgimento de oscilações superficiais. Essas oscilações aumentam significativamente o coeficiente de difusão em relação ao respectivo valor clássico, que leva em conta apenas o movimento browniano. Isso ocorre porque quando uma protuberância produzida sobre a superfície da água se transforma em uma depressão, um determinado volume de água é transferido de forma aproximadamente isotrópica para suas vizinhanças, caracterizando um processo advectivo que, quando analisado em escala geográfica, pode ser interpretado como um incremento no coeficiente de difusão. Assim, a partir de um modelo de ondulação de superfície, tal como a equação de Kortweg-DeVries (Witham, 1974), poderia ser estimada a quantidade de água transferida isotropicamente para as vizinhanças, em cada ponto considerado no interior do domínio, com o objetivo de estimar um coeficiente de difusão em escala geográfica. Neste ponto, o leitor poderia questionar essa abordagem uma vez que o fenômeno descrito é de natureza advectiva, e sugerir que ao invés de corrigir o coeficiente de difusão deveria ser utilizado um modelo tridimensional, no qual a componente de velocidade na direção z oscilasse de maneira sincronizada ao longo do corpo hídrico. A inclusão da componente advectiva na direção z produziria as protuberâncias e depressões mencionadas, tornando possível verificar seu efeito sobre a distribuição de concentrações de poluentes. Essa questão deu origem a um estudo comparativo desenvolvido por Garcia, no qual soluções exatas para a versão tridimensional do problema proposto são obtidas também através do uso de transformações de Bäcklund, e confrontadas com soluções do problema bidimensional nas quais o coeficiente de difusão é corrigido a partir de um modelo de ondas de gravidade baseado na equação de Korteweg-de-Vries. Esse estudo fornecerá indícios sobre a real necessidade de empregar modelos tridimensionais em problemas de dispersão de poluentes em meio aquático.

7. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Embora o modelo advectivo-difusivo e o respectivo método proposto tenham sido aplicados com relativo sucesso na simulação de cenários de propagação de poluentes em meio aquático, algumas modificações podem ser introduzidas com a finalidade de refinar os resultados obtidos, bem como ampliar o número de cenários para os quais a solução desenvolvida no trabalho proposto possa vir a ser aplicada:

- i) obtenção da solução tridimensional correspondente;
- ii) cálculo do coeficiente de difusão devido à ondulação superficial, através da resolução de um modelo dispersivo não-linear, tal como a equação de Korteweg-De-Vries;
- iii) implementação de um modelo de decaimento bacteriano compatível com a evolução populacional dos coliformes fecais, em substituição ao modelo de cinética de primeira ordem atualmente utilizado;
- iv) implementação de um sistema automático de ajuste, utilizado por ocasião da prescrição das condições de primeira espécie, na qual a função a ajustar passe a ser construída de acordo com simetrias do conjunto original de dados experimentais, ao invés de ser definida pelo usuário;
- v) inclusão de efeitos transientes, tais como ondas de seiche, a fim de considerar o fenômeno da inversão parcial do fluxo.
- vi) Adaptação da solução obtida para simular cenários de propagação nos quais o litoral é rochoso.
- vii) Fazer medidas de campos com uso de traçadores radioativos líquidos de curta e meia vida.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Böhm, L. (1981). “**Modelo matemático de dispersão de bactérias**”, Departamento Municipal de Água e Esgotos, Porto Alegre.

Bluman, G. (1989). “**Symmetries and differential equations**”, Springer, New York.

Carnahan, J., 1972 “**Applied numerical methods**”, McGraw-Hill, New York.

Casalas, A., 1996. “**Aplicativo para modelação de estuários e lagos: manual de uso**”, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Pesquisas Hidráulicas, Porto Alegre.

Dhaubadel, M.; Leddy, J.; Tellions, D., 1987. “**Finite-element analysis of fluid flow and heat transfer for staggered bundlers of cylinders in cross flow**”, International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 7, pp. 1325-1342.

Garcia, R., 1997. “**Simulação da qualidade da água em regime não-permanente no Rio dos Sinos**”, dissertação (Mestrado), Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Greenspan, D. ; Casuli, V.,1988. “**Numerical Analysis for Applied Mathematics, Science and Engineering**”, CRC Press, Florida.

Hauser, J.; Paap, H; Eppel, D., 1986. “**Boundary Conformed Coordinate System for Fluid Flow Problems**”, Pineridge Press, Swansea.

Hantush, M. ; Shoemaker, L.; Dai, T.; Koenig, J., 2005. “**TMDL Model Evaluation and Research Needs**”. Land Remediation and Pollution Control Division, National Risk Management Research Laboratory, Cincinnati, Ohio.

Maliska, C. 1995. “**Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**”, LTC Editora, Rio de Janeiro.

Landau, L. D. Lifshitz, E. M., 1987, **“Fluid mechanics”**, 2 ed., Pergamon, New York.

Mpimpas, H.; Anagostopoulos, P., Ganoulis, J., 2001. **“Modelling of Water Pollution in Thermaikos Gulf with Fuzzy Parameters”**, Ecological Modelling, vol 142, pp. 91-104.

Olver, P., 1993. **“Applications of Lie Groups to Differential Equations”**, Springer, New York.

Ortega, J.; Poole, W., 1981. **“Numerical Methods for Differential Equations”**. Pitman Publishing, Marshfield.

Rajar, R., Matjaz, C., 1997. **“Hydrodynamic and Water Quality Modeling: na Experience”**, Ecological Modeling, vol 101, pp. 195-207.

Reddy, J., 1986. **“Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering”**, McGraw-Hill, New York.

Schettini, E. 1991. **“Modelo Matemático Bidimensional de Transporte de Massa em Elementos Finitos com Ênfase em Estuários”**, dissertação (mestrado), Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Silvestrini, J., Shcettini, E., Rosauero, N., 1989. **“EFAD: Código Numérico para Resolver problemas de tipo advecção-difusão pelo método dos elementos Finitos”**, trabalho apresentado no 6º Encuentro Nacional de Investigadores y Usuarios Del Métodos de Elementos Finitos, San Carlos de Bariloche.

Thomann R. V., Mueller J. A. (1987) **“Principles of Surface Water Quality Modeling and Control”**, Harper Collins, USA.

Yang, Y., Wilson, L., Makela, M., Marcheti, M., 1998. **“Accuracy of Numerical Methods for Solving the Advection-diffusion Equation as Applied to Spore and Insect Dispersal”**, Ecological Modeling, vol. 109, pp. 1-24.

Zabadal, J., Poffal, C. (2004). **“Solução da equação de difusão multidimensional utilizando simetrias de Lie: Simulação da dispersão de poluentes na atmosfera”**, Encontro Nacional de Ciências Térmicas (ENCIT, Rio de Janeiro, 2004).

Zabadal, J., Poffal, C., Vilhena, M. (2004). **“Solução analítica da equação advectivo-difusiva cartesiana bidimensional utilizando simetrias de Lie”**, XXVII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC, Porto Alegre, 2004).

Zabadal, J., Vilhena, M., Bogado, S., Poffal, C. (2005). **“Solving Unsteady Problems in Water Pollution Using Lie Symmetries”** – Ecological Modeling, v. 186, pp. 271-279.

Zabadal, J., Poffal, C., Bogado, S. (2005). **“Closed form solutions for Water Pollution Problems”**, XXV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE, Recife, 2005).

Zwillinger, D., 1997. **“Handbook of Differential Equations”**, Academic Press, San Diego.

APÊNDICE A

Tabela A.1- Índice de sensibilidade ambiental (NOAA, Environmental Sensivity Index Guidelines).

ÍNDICE DE SENSIBILIDADE AMBIENTAL (ESI)	GRAU DE EXPOSIÇÃO A ONDAS	FAIXA INTERMARÉS		SUBSTRATO			TRAFEGABILIDADE	BIOTA	TIPO DE LITORAL
		INCLINAÇÃO	LARGURA	TIPO	MOBILIDADE	PENETRAÇÃO DO ÓLEO			
1	Alto	>30°	Estreita	Costão rochoso	Fixo	Impermeável	Não	Aclimatada a altos impactos hidráulicos e pressão	Costões rochosos expostos, estruturas artificiais impermeáveis
2	Alto	<30°	Larga	Leito rochoso	Fixo	Impermeável	Não	Aclimatada a altos impactos hidráulicos e pressão	Plataformas erodidas pela ação das ondas
3	-	<5°	Larga	Areia fina a média (0,06 a 1 mm)	Baixa	Semimpermeável (<10cm)	Permite tráfego de veículos	Baixa densidade	Praias de areia fina ou média
4	-	5°-15°	Larga	Areia grossa/granulo (2-4 mm)	Alta	Permeável (≤25 cm)	Baixa trafegabilidade de veículos	Baixa densidade	Praias de areia e cascalho
5	-	8°-15°	-	Areia e cascalho	Muito alta durante tempestades	≤ 50 cm	Baixa trafegabilidade de veículos	Muitos baixa	Praias de areia e cascalho
6	-	10°-20°	-	Cascalho	Baixa	Altamente permeável (≤ 100 cm)	Muito baixa trafegabilidade	Infauna e epifauna muito baixas	Praias de cascalho e enrocamentos
7	Variável de alto a baixo	<3°	Estreita a muito larga	Areia	-	Penetração limitada	Baixa	Muito baixa	Áreas intermarés planas expostas
8	Baixo	>15°	Estreita	Leito rochoso (algum sedimento)	-	-	Baixa	Coberto de algas e outros organismos	Costões rochosos abrigados
9	Baixo	<3°	Estreita a muito larga	Lamoso	-	Baixa permeabilidade	Muito baixa	Alta densidade de infauna	Áreas intermarés planas abrigadas
10	Médio a baixo	<10°	Variável	Areia lamosa	Baixa	Baixa permeabilidade	Muito baixa	Vegetação associada com alta diversidade	Marismas, manguezais

Tabela A.2- Condições de contorno aplicadas a cada índice.

ESI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Condição de contorno aplicada	$\frac{\partial C}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial C}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial C}{\partial n} = KC$	$\frac{\partial C}{\partial n} = KC$	$\frac{\partial C}{\partial n} = KC$	$\frac{\partial C}{\partial n} = KC$	$\frac{\partial C}{\partial n} = KC$	$\frac{\partial C}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial C}{\partial n} = KC$	$\frac{\partial C}{\partial n} = KC$



ESI 1



ESI 2



ESI 2



ESI 3



ESI 4



ESI 5



ESI 6



ESI 7



ESI 8



ESI 8



ESI 9



ESI 9



ESI 9



ESI 9



ESI 9



ESI 10

Tabela A.3- Exemplos ilustrativos de costas classificados pelo - Índice de sensibilidade ambiental

APÊNDICE B

Este apêndice apresenta o conceito de transformações de Bäcklund, exemplificado através do mapeamento de soluções de equações diferenciais parciais lineares em novas soluções exatas de equações não-lineares. O texto a seguir foi extraído de Sperotto (Sperotto, 2007).

B.1 TRANSFORMAÇÕES DE BÄCKLUND

O sistema de equações diferenciais,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = af \tag{B.1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = bf \tag{B.2}$$

no qual a e b são funções de x , y e t , pode ser utilizado para produzir, a partir da equação do calor em coordenadas retangulares,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right), \tag{B.3}$$

alguma equação diferencial alvo, expressa em termos de $a(x,y,t)$ e $b(x,y,t)$. As equações (B.1) e (B.2) são denominadas *Transformações de Bäcklund*, quando a equação diferencial auxiliar (B.3) é diferente da equação alvo produzida, e são denominadas *Transformações auto-Bäcklund*, quando (B.3) for idêntica à equação alvo. A fim de simplificar as notações de derivadas parciais, serão eventualmente adotadas as definições a seguir:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = f_t, \quad \frac{\partial a}{\partial x} = a_x, \quad \frac{\partial b}{\partial y} = b_y. \tag{B.4}$$

O processo de obtenção da equação alvo inicia com a substituição de (B.1) e (B.2) na equação (B.3):

$$f_t = a \left(a_x f + a f_x + b_y f + b f_y \right), \quad (\text{B.5})$$

substituindo agora (B.1) e (B.2) em (B.5),

$$f_t = a \left(a_x f + a^2 f + b_y f + b^2 f \right), \quad (\text{B.6})$$

reagrupando termos, resulta

$$f_t = a \left(a_x + b_y + a^2 + b^2 \right) f. \quad (\text{B.7})$$

As derivadas cruzadas com respeito às variáveis espaciais devem ser idênticas, de modo que

$$f_{yx} = \frac{\partial(af)}{\partial y} = \frac{\partial(bf)}{\partial x}. \quad (\text{B.8})$$

Calculando as derivadas em (B.8), tem-se

$$f_{yx} = a_y f + a f_y = b_x f + b f_x \quad (\text{B.9})$$

substituindo (B.1) e (B.2) na equação (B.9), resulta

$$a_y f + a b f = b_x f + b a f, \quad (\text{B.10})$$

a qual é facilmente simplificada, produzindo

$$a_y f = b_x f \Rightarrow a_y = b_x. \quad (\text{B.11})$$

Para que a equação (B.11) seja identicamente satisfeita, basta que

$$\begin{aligned} a &= f_x \\ b &= f_y \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Onde f representa, a princípio, uma função arbitrária de x , y e t . Portanto, a consistência entre as expressões que definem a derivada cruzada é automaticamente garantida, uma vez que

$$a_y = b_x \Rightarrow f_{xy} = f_{yx}. \quad (\text{B.13})$$

De posse das igualdades (B.12), substituímos a e b na equação (B.7), resultando em

$$f_t = a \left(f_{xx} + f_{yy} + f_x^2 + f_y^2 \right) f \quad (\text{B.14})$$

Utilizando as notações

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}, \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

a equação (B.14), pode ser reescrita como

$$\frac{f_t}{f} = a \left(\nabla^2 f + \nabla f \cdot \nabla f \right). \quad (\text{B.16})$$

Mas lembrando que $f_x = af$ e $f_y = bf$,

$$a = f_x = \frac{f_x}{f}, \quad (\text{B.17})$$

e

$$b = f_y = \frac{f_y}{f}, \quad (\text{B.18})$$

conclui-se que

$$f = \ln f + c_0. \quad (\text{B.19})$$

Nessa equação a constante arbitrária c_0 pode ser considerada nula sem perda de generalidade, de modo que a equação (B.16) torna-se

$$f_t = a (\nabla^2 f + \nabla f \cdot \nabla f). \quad (\text{B.20})$$

Esta é a equação alvo produzida a partir de (B.3). Dessa forma, a mudança de variáveis definida por (B.19) transforma soluções exatas de (B.3) em soluções também exatas de (B.20). Em outras palavras, para resolver (B.20) basta resolver a equação de condução do calor na forma $f_t = a \nabla^2 f$ e extrair o logaritmo natural da solução obtida.

Cabe observar que a consistência entre as derivadas cruzadas envolvendo a variável t está também automaticamente garantida, uma vez que todas as equações do sistema foram indiretamente utilizadas. Além disso, para problemas em três dimensões essa transformação permanece válida. A forma tridimensional da equação alvo constitui uma equação de evolução para o potencial de campo autoconsistente, obtida originalmente a partir da equação de Schrödinger dependente do tempo, que é utilizada para estimar mecanismos e produtos de reações químicas.

A transformação que produz soluções exatas para a equação alvo a partir de soluções exatas da equação auxiliar não necessariamente se reduz à aplicação de uma função sobre a solução obtida. Em geral, essa transformação consiste na aplicação de um operador não-linear sobre a solução da equação auxiliar, como será exemplificado a seguir.

B.2 TRANSFORMAÇÕES BASEADAS NA APLICAÇÃO DE OPERADORES NÃO-LINEARES

Considerem-se as transformações de Bäcklund

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = a(x,t)f(x,t) + a(x,t)^2 \quad (\text{B.21})$$

e

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = a(x,t)^2 f(x,t) \quad (\text{B.22})$$

Suponha-se que a equação auxiliar seja dada por $f_{xx} = f_t$. Para verificar a consistência entre as expressões que definem a derivada cruzada f_{xt} , deriva-se a equação (B.21) em relação a t e a equação (B.22) em relação a x . Subtraindo as expressões resultantes, obtém-se

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial a(x,t)}{\partial t} \right) f(x,t) + a(x,t)^3 f(x,t) + 2a(x,t) \left(\frac{\partial a(x,t)}{\partial t} \right) - \\ & 2a(x,t) f(x,t) \left(\frac{\partial a(x,t)}{\partial x} \right) - a(x,t)^2 \left(a(x,t) f(x,t) + a(x,t)^2 \right), \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

isolando $f(x,t)$ na equação (B.23), resulta

$$f(x,t) = \frac{-2a(x,t) \left(\frac{\partial a(x,t)}{\partial t} \right) + a(x,t)^4}{\left(\frac{\partial a(x,t)}{\partial t} \right) - 2a(x,t) \left(\frac{\partial a(x,t)}{\partial x} \right)}. \quad (\text{B.24})$$

A fim de impor a equação auxiliar como restrição adicional, basta derivar a equação (B.21) em relação a x e subtrair de (B.22):

$$\left(\frac{\partial a(x,t)}{\partial x}\right) f(x,t) + a(x,t) \left(a(x,t) f(x,t) + a(x,t)^2\right) + 2a(x,t) \left(\frac{\partial a(x,t)}{\partial x}\right) - a(x,t)^2 f(x,t). \quad (\text{B.25})$$

Uma vez que a equação alvo deve surgir desacoplada da equação auxiliar, o objetivo da manipulação das expressões consiste em eliminar $f(x,t)$ das equações produzidas. Isolando $f(x,t)$ da equação (B.25), resulta

$$f(x,t) = \frac{-2a(x,t) \left(\frac{\partial a(x,t)}{\partial x}\right) - a(x,t)^3}{\left(\frac{\partial a(x,t)}{\partial x}\right)} \quad (\text{B.26})$$

Portanto, subtraindo (B.26) de (B.24), obtém-se uma equação que contém apenas $a(x,t)$ e suas derivadas, que constitui uma forma de primeira ordem para a equação alvo:

$$-a(x,t) \left(4 \left(\frac{\partial a(x,t)}{\partial x}\right)^2 - a(x,t) \left(\frac{\partial a(x,t)}{\partial t}\right) + a(x,t)^2 \left(\frac{\partial a(x,t)}{\partial x}\right) \right) = 0 \quad (\text{B.27})$$

ou

$$4 \left(\frac{\partial a(x,t)}{\partial x}\right)^2 - a(x,t) \left(\frac{\partial a(x,t)}{\partial t}\right) + a(x,t)^2 \left(\frac{\partial a(x,t)}{\partial x}\right) = 0, \quad (\text{B.28})$$

uma vez que $a(x,t)$ não pode ser nula. Essa equação pode ser derivada novamente, produzindo novas equações diferenciais parciais não-lineares cujas soluções exatas são obtidas diretamente a partir de soluções exatas da equação $f_{xx} = f_t$. Neste caso, entretanto, a mudança de variáveis que produz a função $a(x,t)$ a partir da função $f(x,t)$ é obtida isolando $a(x,t)$ de (B.21) ou de (B.22). Isolando $a(x,t)$ a partir de (B.22),

$$a(x,t) = \pm \sqrt{\frac{1}{f} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}} = \pm \sqrt{\frac{\partial \ln f(x,t)}{\partial t}}, \quad (\text{B.29})$$

assim, para obter soluções de (B.27) basta resolver a equação auxiliar $f_{xx} = f_t$, encontrando $f(x,t)$. Uma vez determinada $f(x,t)$, basta tomar seu logaritmo natural, derivar o resultado em relação ao tempo e extrair a raiz quadrada da expressão resultante. Por essa razão foi mencionado na seção anterior o fato de que a transformação de soluções exatas da equação auxiliar em soluções exatas da equação alvo consiste, em geral, na aplicação de um operador não-linear sobre a solução da equação auxiliar

Havendo sido utilizadas formas particulares de transformações de Bäcklund que produzem soluções para equações não lineares, surge naturalmente a questão relativa ao problema inverso. O problema inverso consiste em produzir uma equação alvo específica de maior interesse, ao invés de prosseguir em um estudo meramente exploratório, no qual eventualmente venham a ser produzidas equações de interesse através de um processo de tentativa e erro. Essa generalização do processo, que possibilita a resolução do problema inverso, é efetuado através de um processo denominado *gênese de equações diferenciais*, descrito na próxima seção.

B.3 GENERALIZAÇÃO DO MÉTODO – COMBINAÇÃO DE GÊNESE E TRANSFORMAÇÕES DE BÄCKLUND

As transformações de Bäcklund serão agora utilizadas para resolver a equação advectivo-difusiva não-linear, dada por $a_{xx} - a_y + a^2_x = 0$, a partir de soluções da equação $f_{xx} = f_y$. Portanto, o membro direito de uma das equações do sistema de primeira ordem passa a ser uma função a determinar:

$$f_x = g(x, y, f, a). \quad (\text{B.30})$$

A fim de impor a equação auxiliar como restrição, basta que a segunda equação do sistema seja dada por

$$f_y = D_x g(x, y, f, a), \quad (\text{B.31})$$

onde o operador D_x representa a derivada material em relação a x , definida como

$$D_x = \frac{dg}{dx} + \frac{dg}{df} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) + \frac{dg}{da} \left(\frac{\partial a(x, y)}{\partial x} \right) \quad (\text{B.32})$$

O emprego da derivada material torna-se necessário pelo fato de que os dois últimos argumentos da função g dependem da variável x . A segunda equação do sistema se torna, portanto,

$$f_y = \frac{\partial g(x, y, f, a)}{\partial x} + \frac{\partial g(x, y, f, a)}{\partial f} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) + \frac{\partial g(x, y, f, a)}{\partial a} \left(\frac{\partial a(x, y)}{\partial x} \right). \quad (\text{B.33})$$

Lembrando que $f_x = g(x, y, f, a)$, a equação pode ser expressa como

$$f_y = \frac{\partial g(x, y, f, a)}{\partial x} + \frac{\partial g(x, y, f, a)}{\partial f} g(x, y, f, a) + \frac{\partial g(x, y, f, a)}{\partial a} \left(\frac{\partial a(x, y)}{\partial x} \right). \quad (\text{B.34})$$

Essa equação garante a imposição de $f_{xx} = f_y$ como equação auxiliar. Basta, portanto, impor a consistência entre as definições da derivada cruzada:

$$D_x f_y = D_y f_x, \quad (\text{B.35})$$

nesta equação foi utilizado também o operador derivada material em relação a y , definido de forma análoga:

$$D_y = \frac{dg}{dy} + \frac{dg}{df} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) + \frac{dg}{da} \left(\frac{\partial a(x, y)}{\partial y} \right). \quad (\text{B.36})$$

Após a aplicação dos operadores e a substituição das derivadas de f por suas respectivas definições, dadas pelas equações que compõem o sistema de primeira ordem, a equação (B.29) toma a forma

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial g(x, y, f, a)}{\partial y} + \frac{\partial g(x, y, f, a)}{\partial f} \left(\frac{\partial g(x, y, f, a)}{\partial x} + \left(\frac{\partial g(x, y, f, a)}{\partial f} \right) g(x, y, f, a) + \right. \\
& \left. \frac{\partial g(x, y, f, a)}{\partial a} \left(\frac{\partial a(x, y)}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial g(x, y, f, a)}{\partial a} \left(\frac{\partial a(x, y)}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2 g(x, y, f, a)}{\partial^2 x} - \\
& \frac{\partial^2 g(x, y, f, a)}{\partial x \partial f} g(x, y, f, a) - \frac{\partial g(x, y, f, a)}{\partial f} \left(\frac{\partial g(x, y, f, a)}{\partial x} \right) - \\
& \frac{\partial^2 g(x, y, f, a)}{\partial x \partial a} \left(\frac{\partial a(x, y)}{\partial x} \right) - \frac{\partial g(x, y, f, a)}{\partial a} \left(\frac{\partial^2 a(x, y)}{\partial x^2} \right) - \\
& \left(\frac{\partial^2 g(x, y, f, a)}{\partial x \partial f} + \frac{\partial^2 g(x, y, f, a)}{\partial f^2} g(x, y, f, a) + \left(\frac{\partial g(x, y, f, a)}{\partial x} \right)^2 + \right. \\
& \left. \frac{\partial^2 g(x, y, f, a)}{\partial x \partial a} \left(\frac{\partial a(x, y)}{\partial x} \right) \right) g(x, y, f, a) - \left(\frac{\partial^2 g(x, y, f, a)}{\partial x \partial a} + \right. \\
& \left. \frac{\partial^2 g(x, y, f, a)}{\partial f \partial a} g(x, y, f, a) + \frac{\partial g(x, y, f, a)}{\partial f} \left(\frac{\partial g(x, y, f, a)}{\partial a} \right) + \right. \\
& \left. \frac{\partial^2 g(x, y, f, a)}{\partial a^2} \left(\frac{\partial a(x, y)}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial a(x, y)}{\partial x} \tag{B.37}
\end{aligned}$$

utilizando a notação compacta para as derivadas da função $a(x, y)$, isto é, fazendo

$$\frac{\partial a(x, y)}{\partial x} = a_x, \quad \frac{\partial a(x, y)}{\partial y} = a_y, \quad \frac{\partial^2 a(x, y)}{\partial x^2} = a_{xx}, \tag{B.38}$$

colocando essas derivadas em evidência e dividindo todos os termos pela derivada parcial de g em relação a $a(x, y)$, a equação alvo pode ser identificada de forma mais clara:

$$\begin{aligned}
a_{xx} - a_y + \left[\frac{2 \left(\frac{\partial^2 g(x, y, f, a)}{\partial x \partial a} \right)}{\frac{\partial g(x, y, f, a)}{\partial a}} + \frac{2g(x, y, f, a) \left(\frac{\partial^2 g(x, y, f, a)}{\partial f \partial a} \right)}{\frac{\partial g(x, y, f, a)}{\partial a}} \right] a_x + \frac{\left(\frac{\partial^2 g(x, y, f, a)}{\partial a^2} \right)}{\frac{\partial g(x, y, f, a)}{\partial a}} a_x^2 - \\
\frac{\frac{\partial g(x, y, f, a)}{\partial y}}{\frac{\partial g(x, y, f, a)}{\partial a}} + \frac{\frac{\partial^2 g(x, y, f, a)}{\partial x^2}}{\frac{\partial g(x, y, f, a)}{\partial a}} + \frac{2 \frac{\partial^2 g(x, y, f, a)}{\partial x \partial f} g(x, y, f, a)}{\frac{\partial g(x, y, f, a)}{\partial a}} + \\
\frac{\left(\frac{\partial^2 g(x, y, f, a)}{\partial f^2} \right) g(x, y, f, a)}{\frac{\partial g(x, y, f, a)}{\partial a}} = 0.
\end{aligned} \tag{B.39}$$

A fim de impor a equação alvo como restrição adicional, basta especificar os coeficientes das derivadas de $a(x,y)$ na equação (B.34). Para a equação alvo do exemplo apresentado, dada por $a_{xx} - a_y + a_x^2 = 0$, pode-se iniciar o cálculo da função $g(x,y,f,a)$ impondo que o coeficiente de a_x^2 seja igual a 1:

$$\frac{\frac{\partial^2 g(x, y, f, a)}{\partial a^2}}{\frac{\partial g(x, y, f, a)}{\partial a}} = 1, \tag{B.40}$$

resolvendo essa equação, a forma inicial da função $g(x,y,f,a)$ será:

$$g(x, y, f, a) = r(x, y, f) + s(x, y, f)e^a. \tag{B.41}$$

Nessa equação as funções $r(x,y,f)$ e $s(x,y,f)$ são, a princípio, arbitrárias. A forma dessas funções é determinada ao resolver as demais equações do sistema que define os coeficientes da equação alvo. Substituindo (B.39) na equação que define o coeficiente de a_x como sendo nulo, dada por

$$\frac{2 \frac{\partial^2 g(x, y, f, a)}{\partial x \partial a}}{\frac{\partial g(x, y, f, a)}{\partial a}} + \frac{2g(x, y, f, a) \frac{\partial^2 g(x, y, f, a)}{\partial f \partial a}}{\frac{\partial g(x, y, f, a)}{\partial a}} = 0 \tag{B.42}$$

obtem-se

$$2\frac{\partial s(x, y, f)}{\partial x} + 2\frac{\partial s(x, y, f)}{\partial f}r(x, y, f) + 2s(x, y, f)\left(\frac{\partial s(x, y, f)}{\partial x}\right)e^a - s(x, y, f)e^a = 0. \quad (\text{B.43})$$

Como as funções $r(x, y, f)$ e $s(x, y, f)$ não dependem de a , os coeficientes da exponencial e os termos independentes de a devem se anular individualmente, de modo que essa equação é convertida em um sistema:

$$2s(x, y, f)\left(\frac{\partial s(x, y, f)}{\partial x}\right) - s(x, y, f) = 0 \quad (\text{B.44})$$

e

$$2\frac{\partial s(x, y, f)}{\partial x} + 2\frac{\partial s(x, y, f)}{\partial f}r(x, y, f) = 0. \quad (\text{B.45})$$

A solução da primeira equação do sistema é imediata:

$$s(x, y, f) = \frac{f}{2} + \mathcal{S}(x, y) \quad (\text{B.46})$$

onde $\mathcal{S}(x, y)$ representa uma função, a princípio, arbitrária. Substituindo o resultado na segunda equação do sistema,

$$2\frac{\partial \mathcal{S}(x, y)}{\partial x} + r(x, y, f) = 0. \quad (\text{B.47})$$

Assim, a função $r(x, y, f)$ perde a dependência no argumento f :

$$r(x, y, f) = -2 \frac{\partial \mathcal{S}(x, y)}{\partial x}. \quad (\text{B.48})$$

A função $g(x, y, f, a)$ se reduz, assim, à forma

$$g(x, y, f, a) = -2 \frac{\partial \mathcal{S}(x, y)}{\partial x} + \left(\frac{f}{2} + \mathcal{S}(x, y) \right) e^a. \quad (\text{B.49})$$

Resta então impor a nulidade do termo independente, isto é, da parcela que não figura como coeficiente de qualquer das derivadas de $a(x, y)$:

$$\begin{aligned} & -\frac{\frac{\partial g(x, y, f, a)}{\partial y}}{\frac{\partial g(x, y, f, a)}{\partial a}} + \frac{\frac{\partial^2 g(x, y, f, a)}{\partial x^2}}{\frac{\partial g(x, y, f, a)}{\partial a}} + \frac{2 \left(\frac{\partial^2 g(x, y, f, a)}{\partial x \partial f} \right) g(x, y, f, a)}{\frac{\partial g(x, y, f, a)}{\partial a}} + \\ & \frac{\left(\frac{\partial^2 g(x, y, f, a)}{\partial f^2} \right) g(x, y, f, a)^2}{\frac{\partial g(x, y, f, a)}{\partial a}} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

Substituindo a nova definição da função $g(x, y, f, a)$ em (B.37), resulta

$$2 \frac{\partial^2 \mathcal{S}(x, y)}{\partial y \partial x} - \left(\frac{\partial \mathcal{S}(x, y)}{\partial y} \right) e^a - 2 \frac{\partial^3 \mathcal{S}(x, y)}{\partial x^3} + \left(\frac{\partial^2 \mathcal{S}(x, y)}{\partial x^2} \right) e^a = 0. \quad (\text{B.51})$$

Uma vez que a função $\mathcal{S}(x, y)$ não depende de a , essa equação também é decomposta em um sistema. Neste caso, entretanto, uma das equações do sistema requer que $\mathcal{S}(x, y)$ obedeça à própria equação auxiliar, a saber, $\mathcal{S}_{xx} = \mathcal{S}_y$. A segunda equação é redundante, por constituir a derivada em relação a x da própria equação auxiliar. Desse modo, a função \mathcal{S} pode ser substituída pela própria função f na definição de $g(x, y, f, a)$:

$$g(x, y, f, a) = -2 \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{3f}{2} e^a. \quad (\text{B.52})$$

Uma vez determinada a função $g(x, y, f, a)$, o sistema de equações de primeira ordem que define as transformações de Bäcklund resulta

$$f_x = \frac{f}{2} e^a \quad (\text{B.53})$$

e

$$f_y = -2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial a}{\partial x} \right) e^a. \quad (\text{B.54})$$

Essa equação pode ser simplificada, utilizando a equação auxiliar e a própria definição de f_x :

$$f_y = -2 f_y + \frac{3}{2} \left(\frac{f}{2} e^a + f \frac{\partial a}{\partial x} \right) e^a, \quad (\text{B.55})$$

reagrupando termos, resulta

$$f_y = \frac{f}{4} \left(e^a + 2 \frac{\partial a}{\partial x} \right) e^a. \quad (\text{B.56})$$

Note-se que não seria obrigatória a obtenção dessa última equação, uma vez que a função $a(x, y)$ pode ser obtida a partir da equação (B.53). Assim, para obter soluções exatas da equação alvo, basta resolver a equação auxiliar, obtendo $f(x, y)$, e isolar $a(x, y)$ na equação (B.53):

$$a(x, y) = \ln \left(\frac{2}{f} \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \ln \left(2 \frac{\partial \ln f}{\partial x} \right). \quad (\text{B.57})$$

É importante observar que a ausência das variáveis independentes na transformação que mapeia $f(x, y)$ em $a(x, y)$ permite generalizar a aplicação do método não apenas em relação ao número de dimensões, mas também em relação ao sistema de coordenadas utilizado. Por esse motivo não houve preocupação em resolver uma versão multidimensional da equação alvo, ou

mesmo trabalhar em coordenadas curvilíneas. Sempre que a transformação obtida puder ser expressa utilizando operadores vetoriais, tal como na extensão da equação (B.57), dada por

$$a(x, y) = \ln\left(\frac{2}{f}\nabla f\right) = \ln(2\nabla f) \quad (\text{B.58})$$

a aplicação das transformações de Bäcklund é automaticamente válida para as versões multidimensionais da equação alvo, tomando como ponto de partida as respectivas versões multidimensionais da equação auxiliar.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)