

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA - UDESC**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA - PPGF**

Formação: Mestrado em Física

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO OBTIDA POR**  
**JOÃO CARLOS XAVIER**

**A DINÂMICA NÃO-LINEAR DE SISTEMAS CONTÍNUOS E**  
**DISCRETOS**

Apresentada em 27/02/2009 Perante a Banca Examinadora:

Dr. Paulo Cesar Rech - CCT/UDESC (Presidente)

Dr. Holokx Abreu Albuquerque - CCT/UDESC

Dr. Marcus Werner Beims - UFPR

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA - UDESC

CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA - PPGF

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Mestrando: João Carlos Xavier

Orientador: Prof. Dr. Paulo Cesar Rech - CCT/UDESC - JOINVILLE

A DINÂMICA NÃO-LINEAR DE SISTEMAS CONTÍNUOS E  
DISCRETOS

DISSERTAÇÃO APRESENTADA PARA  
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM  
FÍSICA DA UNIVERSIDADE DO ESTADO DE  
SANTA CATARINA, CENTRO DE CIÊNCIAS  
TECNOLÓGICAS - CCT, ORIENTADA PELO  
PROF. DR. PAULO CESAR RECH.

Joinville

2009



## FICHA CATALOGRÁFICA

<b>NOME:</b> XAVIER, João Carlos	
<b>DATA DA DEFESA:</b> 27/02/2009	
<b>LOCAL:</b> Joinville, CCT/UDESC	
<b>NÍVEL:</b> Mestrado	<b>Número de Ordem:</b> 03 - CCT/UDESC
<b>FORMAÇÃO:</b> Física	
<b>ÁREA DE CONCENTRAÇÃO:</b> Física	
<b>TÍTULO:</b> A Dinâmica Não-Linear de Sistemas Contínuos e Discretos.	
<b>PALAVRAS - CHAVE:</b> Dinâmica Não-Linear. Caos. Sistemas Dinâmicos.	
<b>NÚMERO DE PÁGINAS:</b> viii, 45 p.	
<b>CENTRO/UNIVERSIDADE:</b> Centro de Ciências Tecnológicas da UDESC.	
<b>PROGRAMA:</b> Pós Graduação em Física - PPGF	
<b>CADASTRO CAPES:</b> 41002016011P-4	
<b>ORIENTADOR:</b> Dr. Paulo Cesar Rech	
<b>PRESIDENTE DA BANCA:</b> Dr. Paulo Cesar Rech	
<b>MEMBROS DA BANCA:</b> Dr. Paulo Cesar Rech, Dr. Marcus Werner Beims, Dr. Holokx Abreu Albuquerque, Dr. Fábio Mallmann Zimmer.	

# Agradecimentos

Faço abaixo um agradecimento especial à algumas pessoas e entidades que tiveram participação neste trabalho

Professor Paulo Cesar Rech  
(meu orientador)

CAPES e UDESC  
(pela bolsa de estudos)

Departamento de Física da UDESC

Joani, Regina, Luiz Felipe e Débora  
(Meus tios e primos)

Em especial à Assis, Sonia e Rogério  
(Meus pais e meu irmão).

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Breve Revisão Teórica</b>	<b>4</b>
2.1	Sistemas Dinâmicos . . . . .	4
2.2	Atratores . . . . .	6
2.3	Dependência Sensível nas Condições Iniciais . . . . .	9
2.4	Diagramas de Bifurcação . . . . .	11
2.5	Espaços de Parâmetros . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Sistema Discreto</b>	<b>13</b>
3.1	O Acoplamento e os Pontos Fixos . . . . .	13
3.2	O Espaço de Parâmetros . . . . .	16
3.3	Diagrama de Bifurcação, Expoentes de Lyapunov e Espaços de Fase .	19
3.4	Bacias de Atração . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Sistema Contínuo</b>	<b>23</b>
4.1	O Sistema de Lorenz-Stenflo . . . . .	23
4.2	Simetria e Dissipação . . . . .	24
4.3	Análise de Estabilidade dos Pontos de Equilíbrio . . . . .	25
4.4	O Espaço de Parâmetros e o Espaço de Fase . . . . .	32
4.5	Diagrama de Bifurcações e o Espectro de Lyapunov . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>36</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>38</b>

# Resumo

Neste trabalho investigamos o comportamento de dois sistemas dinâmicos: (i) Um acoplamento linear simétrico de três mapas quadráticos, e (ii) as equações generalizadas de Lorenz, obtidas por Stenflo. Para o sistema discreto, representado pelo acoplamento linear dos três mapas quadráticos, estudamos a emergência de estados quase-periódicos, surgindo da bifurcação de Naimark-Sacker, a partir de uma órbita estável pertencendo a cascata  $1 \times 2^n$ , em particular órbitas de período um e período dois. Também estudamos a mudança na estrutura das bacias de atração do atrator caótico, na vizinhança da transição caos-hipercaos. Para o sistema de tempo contínuo representado pelas equações de Lorenz-Stenflo, investigamos analiticamente pelo método de Routh-Hurwitz, a estabilidade dos três pontos de equilíbrio, mas sem a solução explícita da equação de autovalores. Determinamos a localização precisa onde as bifurcações do tipo forquilha e Hopf acontecem, a partir dos pontos de equilíbrio, como uma função dos parâmetros do sistema. Expoentes de Lyapunov, diagramas no espaço de parâmetros e espaço de fase e diagramas de bifurcação foram utilizados para caracterizar numericamente os atratores periódicos e caóticos em ambos os sistemas.

**PALAVRAS CHAVE:** Dinâmica Não-Linear. Caos. Sistemas Dinâmicos.

# Abstract

In this work we investigate the dynamical behavior of two dynamical systems: (i) a symmetric linear coupling of three quadratic maps, and (ii) the generalized Lorenz equations obtained by Stenflo. For the discrete-time system represented by the coupling of three quadratic maps, we study the emergence of quasiperiodic states arising from Naimark-Sacker bifurcations of stable periodic orbits pertaining to  $1 \times 2^n$  cascade, in particular period-1 and period-2 orbits. We also study the change in the structure of the basin of attraction of the chaotic attractors, in the neighborhood of chaos-hyperchaos transition. For the continuous-time system represented by the Lorenz-Stenflo equations, we analytically investigate, by using Routh-Hurwitz Test, the stability of three fixed points, although without explicit solution of the eigenvalue equation. We determine the precise location where pitchfork and Hopf bifurcations of the fixed points occur, as a function of the parameters of the system. Lyapunov exponents, parameter-space and phase-space portraits, and bifurcation diagrams were used to numerically characterize periodic and chaotic attractors in both systems.

**KEY WORDS:** Nonlinear Dynamics. Chaos. Dynamical Systems.

# Capítulo 1

## Introdução

O estudo de equações de diferenças não-lineares, comumente chamadas de mapas, desempenha um papel importante na dinâmica não-linear discreta, devido ao fato de estas equações mostrarem vários aspectos interessantes, como por exemplo os mais variados tipos de bifurcações, e caos. Um exemplo clássico é o mapa quadrático representado pela equação

$$x_{n+1} = a - x_n^2,$$

que é uma versão mais moderna do tradicional mapa logístico [1]. Na dinâmica não-linear contínua, papel igualmente importante é desempenhado por sistemas de equações diferenciais autônomas de primeira ordem, não-lineares. O mais clássico exemplo é o sistema de Lorenz [2]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma(x - y), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Independentemente de o modelo utilizado ser discreto ou contínuo, ele pode representar o resultado da aplicação de leis físicas a um processo em particular, que considera dados obtidos em um experimento de laboratório. Este procedimento de modelagem tem aplicação nos mais variados processos, em campos tais como a física, a química, a biologia, a economia, e as engenharias, só para citar alguns. É, portanto, importante estudar a dinâmica de modelos, na tentativa de entender processos particulares que os mesmos representem, e inclusive fazer previsões de comportamentos futuros.

No Cap. 2 apresentamos uma coletânea dos principais conceitos e definições utilizados no estudo da dinâmica dos sistemas considerados neste trabalho.

No Cap. 3 fazemos o estudo de um acoplamento simétrico de três mapas quadráticos. Baseado em nossa pesquisa bibliográfica, acreditamos que o acoplamento proposto ainda não se encontra na literatura. Para este sistema discreto, mostramos que ele apresenta dois tipos de rota para o caos, uma via dobramento de período e outra via quase-periodicidade. Também determinamos os locais no espaço de parâmetros onde nascem os movimentos periódicos, quase-periódicos, caóticos e hipercaóticos para o sistema em questão.

No Cap. 4 estudamos o sistema de Lorenz-Stenflo [3], que consiste num conjunto de quatro equações diferenciais autônomas de primeira ordem, não lineares, e que é uma generalização do sistema de Lorenz. Alguns resultados envolvendo o sistema de Lorenz-Stenflo podem ser encontrados na literatura [4, 5, 6, 7, 8], onde considerou-se apenas a variação de um parâmetro, com os outros três mantidos fixos. Na Ref. [4], por exemplo, aparecem vários tipos de soluções caóticas e periódicas quando o parâmetro  $r$  é variado, com os outros três mantidos fixos. A caracterização dos estados é feita utilizando séries temporais, diagramas no espaço de fase e espectro de potências. Nas Refs. [5, 7] são apresentados resultados envolvendo as bifurcações que o sistema de Lorenz-Stenflo apresenta quando  $r$  e  $s$  são variados e  $\sigma$  e  $b$  mantidos fixos. No caso das bifurcações encontrados com a variação de  $r$ , os resultados assemelham-se com os obtidos para o sistema de Lorenz. Para a variação do parâmetro  $s$  encontram-se outros tipos de bifurcação que não estão presentes no sistema de Lorenz. Uma análise analítica e numérica detalhada como também outros comportamentos caóticos interessantes do sistema de Lorenz-Stenflo podem ser encontrados na Ref. [6], onde mostra-se que quando o parâmetro  $s$  é pequeno, o comportamento do sistema assemelha-se ao do sistema de Lorenz. Para valores de  $s$  grandes, observa-se janelas periódicas a partir de diferentes tipos de bifurcações. Na Ref. [8] alguns resultados são obtidos quando o parâmetro  $b$  é variado, com  $\sigma$ ,  $r$  e  $s$  fixos. Regiões caóticas e periódicas são caracterizadas utilizando espectro de potências, mapas de Poincaré e expoentes de Lyapunov.

Como mencionado, neste trabalho também estudamos o sistema de Lorenz-Stenflo. Determinamos analiticamente os locais no espaço de parâmetros onde ocorrem as bifurcações do tipo forquilha e Hopf, a partir dos pontos de equilíbrio do sistema. Também construímos numericamente um espaço bidimensional de parâmetros, com o objetivo de verificar os resultados analíticos, e determinar os locais onde nascem os movimentos caóticos e regulares do sistema.

Por fim, no Cap. 5 apresentamos as conclusões.

# Capítulo 2

## Breve Revisão Teórica

Neste capítulo fazemos uma coletânea das principais definições e conceitos que utilizaremos neste trabalho. Tais definições e conceitos, bem como as figuras, foram na sua grande maioria extraídos das Refs. [9] e [10].

### 2.1 Sistemas Dinâmicos

Um sistema dinâmico pode ser representado por um conjunto de equações que mostra a evolução do sistema conforme o tempo passa. O tempo pode tanto ser uma variável contínua, quanto uma variável discreta. Um exemplo de sistema dinâmico no qual o tempo é uma variável contínua, é um sistema de  $n$  equações diferenciais ordinárias, autônomas, de primeira ordem, dado por

$$\begin{aligned}\frac{dx^{(1)}}{dt} &= F_1(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}), \\ \frac{dx^{(2)}}{dt} &= F_2(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}), \\ &\vdots \\ \frac{dx^{(n)}}{dt} &= F_n(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}),\end{aligned}\tag{2.1}$$

que pode ser escrito de forma compacta, utilizando notação vetorial, como

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{F}[\vec{x}(t)],\tag{2.2}$$

onde  $\vec{x}$  é um vetor  $n$ -dimensional e  $\vec{F}$  uma função da variável  $\vec{x}$ . Este conjunto de equações representa um sistema dinâmico pois, para um estado inicial  $\vec{x}(0)$ , em

princípio podemos sempre resolver as equações e obter o estado  $\vec{x}(t)$  do sistema para qualquer  $t > 0$ . A Fig. 2.1 mostra o caminho seguido pelo sistema quando ele evolui no tempo, para o caso em que  $n = 3$ . O espaço  $(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$  da figura, gerado pelas variáveis do sistema, é chamado espaço de fase ou espaço das variáveis. O caminho seguido pelo sistema no espaço de fase, quando ele evolui no tempo, é chamado órbita ou trajetória. Para sistemas dinâmicos de tempo contínuo é comum referir-se a estas órbitas como fluxos.

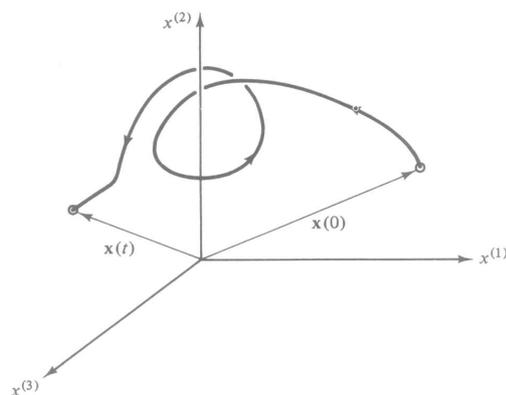


Fig. 2.1: Órbita em um espaço de fase tridimensional.

No caso de sistemas discretos, o tempo assume valores inteiros, ou seja,  $t = 1, 2, 3, \dots$ . Um exemplo de um sistema dinâmico a tempo discreto é um mapa, o qual escrevemos na forma vetorial como

$$\vec{x}_{t+1} = \vec{M}(\vec{x}_t) \quad (2.3)$$

onde  $\vec{x}_t = (x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, \dots, x_t^{(n)})$  é um vetor  $n$ -dimensional e  $\vec{M}$  uma função de  $\vec{x}_t$ . Dado um estado inicial  $\vec{x}_0$ , obtemos o estado em  $t = 1$  fazendo  $\vec{x}_1 = \vec{M}(\vec{x}_0)$ . Tendo determinado  $\vec{x}_1$ , determinamos  $\vec{x}_2$  fazendo  $\vec{x}_2 = \vec{M}(\vec{x}_1)$ , e assim sucessivamente. Assim, dada uma condição inicial  $\vec{x}_0$ , geramos a órbita (ou trajetória) seguida pelo sistema a tempo discreto:  $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots$

Um sistema dinâmico a tempo contínuo pode ser reduzido a um sistema dinâmico a tempo discreto, utilizando-se uma técnica chamada Método da Seção de Poincaré, que passamos a descrever. Sejam  $n$  equações diferenciais ordinárias, autônomas, de primeira ordem (Eq. (2.2)). O Mapa de Poincaré representa uma redução deste fluxo

no espaço  $n$ -dimensional a um mapa no espaço  $(n - 1)$ -dimensional. Para ilustrar o método, fazemos  $n = 3$ . Na Fig. 2.2 a seção de Poincaré é o plano bidimensional

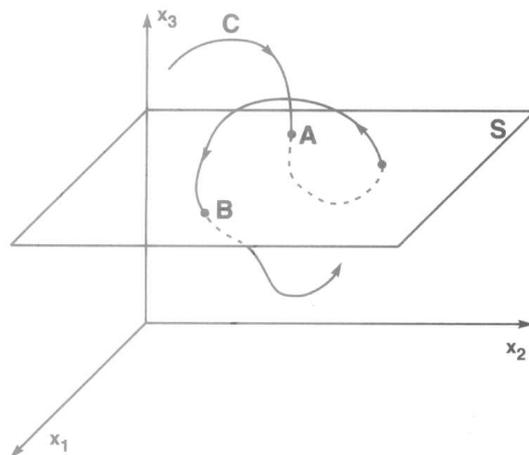


Fig. 2.2: Seção de Poincaré

$x^{(3)} = K$ . Os pontos A e B representam duas intersecções sucessivas da trajetória seguida pelo sistema com a seção. O ponto A determina a posição do ponto B, pois A pode ser usado como condição inicial na Eq. (2.2) para determinar B. Da mesma forma, B determina A se voltarmos o tempo na mesma equação, usando B como condição inicial. Assim, o mapa de Poincaré nesta ilustração é a seqüência de pontos nos quais o fluxo intercepta a seção de Poincaré, e representa um mapa bidimensional inversível que transforma as coordenadas  $(x_n^{(1)}, x_n^{(2)})$  da  $i$ -ésima perfuração da seção, nas coordenadas  $(x_{n+1}^{(1)}, x_{n+1}^{(2)})$  da perfuração  $(i + 1)$ .

## 2.2 Atratores

Em sistemas Hamiltonianos, tais como aqueles obtidos a partir das equações de Hamilton para o movimento de partículas na ausência de forças dissipativas, o volume no espaço de fase é conservado quando o sistema evolui no tempo. Tais sistemas são chamados *conservativos*. Se o fluxo não preservar o volume do espaço de fase, o sistema é dito *dissipativo*. Um conceito importante na dinâmica de sistemas dissi-

pativos, é o conceito de atrator. Um atrator é um conjunto invariante no espaço de fase, para o qual órbitas próximas convergem depois de um tempo suficientemente longo. Para exemplificar atratores, consideramos o oscilador harmônico amortecido modelado pela equação

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \nu \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0. \quad (2.4)$$

Uma trajetória típica no espaço de fase ( $x^{(1)} = y, x^{(2)} = \frac{dy}{dt}$ ) é mostrada na Fig. 2.3(a). Nela vemos que, quando o sistema evolui no tempo, a órbita espirala para a origem. Neste caso a origem  $x^{(1)} = x^{(2)} = 0$  é o atrator do sistema dinâmico. Outra trajetória típica aparece ilustrada na Fig. 2.3(b), que mostra o caso em que o atrator é um ciclo limite (linha tracejada). A condição inicial  $\alpha$ , fora do ciclo limite, gera uma órbita que com o tempo espirala para a linha tracejada, sobre a qual o sistema circula em movimento periódico no limite em que  $t \rightarrow \infty$ . Similarmente, a condição inicial

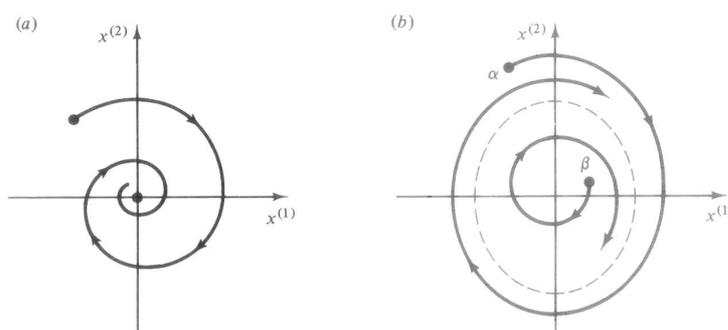


Fig. 2.3: Dois exemplos de atratores. (a) O atrator é a origem. (b) O atrator é a curva fechada tracejada.

$\beta$  dentro do ciclo limite gera uma órbita que espirala para o ciclo limite de dentro para fora, assintoticamente, aproximando-se da linha tracejada. Neste caso a curva fechada tracejada é o atrator. Um exemplo de sistema que apresenta um ciclo limite como atrator, da forma ilustrada na Fig. 2.3(b), é aquele modelado pela equação de van der Pol [9]

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (y^2 - \eta) \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0, \quad (2.5)$$

proposta em 1920 como um modelo para um circuito oscilante em um tubo de vácuo.

Os conceitos de dissipação e conservação da energia total aplicam-se também para sistemas discretos (mapas). Um mapa  $n$ -dimensional conservativo é aquele que preserva o volume no espaço de fase a cada iterada. Um mapa preserva o volume no espaço de fase se o módulo do determinante de sua matriz Jacobiana for igual a um, ou seja, se

$$|\det J(\vec{x})| \equiv \left| \det \left[ \frac{\partial \vec{M}(\vec{x})}{\partial \vec{x}} \right] \right| = 1. \quad (2.6)$$

Se  $|\det J(\vec{x})| < 1$ , dizemos que o mapa é dissipativo e, como para o caso de fluxos, ele pode apresentar atratores. Um exemplo pode ser visto na Fig. 2.4, que ilustra a seção de Poincaré para um fluxo tridimensional com um ciclo limite. Vemos que

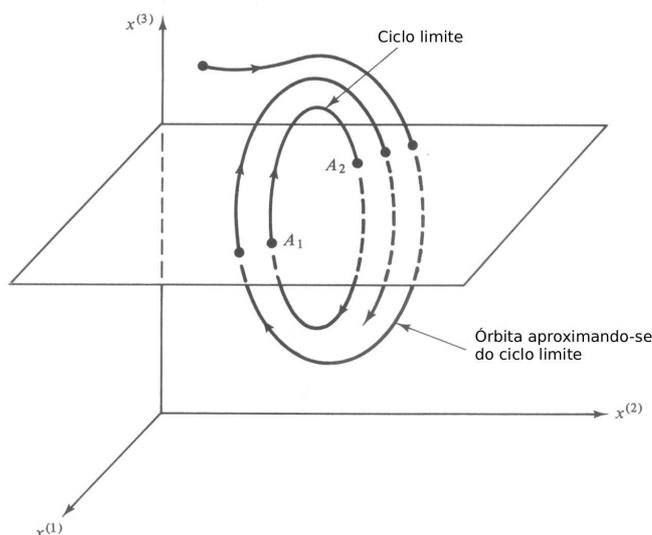


Fig. 2.4: Seção de Poincaré para um fluxo tridimensional cujo atrator é um ciclo limite.

para o mapa de Poincaré bidimensional associado ao sistema contínuo tridimensional, os pontos  $A_1$  e  $A_2$  constituem o atrator. Isto quer dizer que a órbita do mapa  $\vec{x}_{t+1} = \vec{M}(\vec{x}_t)$  da seção é a seqüência  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots$ , constituída dos dois pontos  $A_1$  e  $A_2$ .

Voltando à Fig. 2.3, lá podemos observar dois exemplos de atratores. O primeiro, mostrado na Fig. 2.3(a), no qual o atrator é um conjunto de dimensão zero (um ponto), e o segundo, mostrado na Fig. 2.3(b), no qual o conjunto de atração tem dimensão um (uma curva fechada). O atrator do mapa de Poincaré mostrado na Na Fig. 2.4 também tem dimensão zero, pois é constituído pelos dois pontos,  $A_1$

e  $A_2$ . Característica da dinâmica caótica é o fato de os atratores possuírem uma dimensão não inteira. Na terminologia de Mandelbrot, tais atratores são ditos fractais. Quando um atrator é fractal, ele é chamado de atrator estranho.

## 2.3 Dependência Sensível nas Condições Iniciais

Uma característica de sistemas que possuem atratores caóticos, é que eles apresentam dependência sensível nas condições iniciais. Consideremos duas condições iniciais próximas,  $\vec{x}_1(0)$  e  $\vec{x}_2(0) = \vec{x}_1(0) + \Delta(0)$ , e imaginemos que elas são evoluídas no tempo por um sistema de tempo contínuo, gerando órbitas  $\vec{x}_1(t)$  e  $\vec{x}_2(t)$  como mostra a Fig. 2.5. Consideremos ainda que, no tempo  $t$ , a separação entre as duas órbitas é  $\Delta(t) = \vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)$ . Se a diferença entre as órbitas,  $|\Delta(t)|$ , cresce exponencialmente com o tempo, ou seja, se  $|\Delta(t)| = |\Delta(0)|e^{\lambda t}$  com  $\lambda > 0$ , dizemos que o sistema apresenta dependência sensível nas condições iniciais, e é caótico. Esta sensibilidade

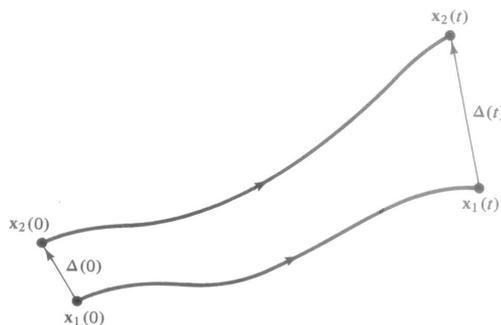


Fig. 2.5: Evolução de duas órbitas próximas no espaço de fase.

exponencial de soluções caóticas quer dizer que, quando o tempo evolui, pequenos erros nas soluções podem crescer rapidamente, exponencialmente, com o tempo. Assim, depois de algum tempo, efeitos tais como ruídos podem mudar totalmente a solução, daquela que ela deveria ser se estes efeitos não estivessem presentes.

Para medir a taxa de divergência de trajetórias e, portanto, quantificar a dependência sensível nas condições iniciais, utilizam-se os chamados expoentes de Lyapunov. Por exemplo para um mapa unidimensional [11], onde a separação entre as órbitas depois de  $n$  iteradas é dada por  $|\delta_n| = |\delta_0|e^{\lambda n}$ , onde  $|\delta_0|$  é a separação antes da primeira iterada, uma maneira precisa e útil computacionalmente para

o cálculo de  $\lambda$  é obtida fazendo o logaritmo de  $|\delta_n| = |\delta_0|e^{\lambda n}$  e observando que  $\delta_n = f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)$ , o que resulta em

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right| \\ &= \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)}{\delta_0} \right| \\ &= \frac{1}{n} \ln |(f^n)'(x_0)|,\end{aligned}$$

onde fizemos o limite  $\delta_0 \rightarrow 0$  no último passo. O termo dentro do logaritmo pode ser expandido usando a regra da cadeia, resultando

$$(f^n)'(x_0) = \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i).$$

Teremos portanto o expoente de Lyapunov  $\lambda$  escrito como

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \right| \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|.\end{aligned}$$

Se esta expressão tem um limite quando  $n \rightarrow \infty$ , definimos este limite como sendo o expoente de Lyapunov para uma órbita inicializada em  $x_0$ , ou seja,

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \right\}.$$

É possível identificar o comportamento de um atrator pelo sinal dos expoentes de Lyapunov. No caso de sistemas contínuos, se representarmos um expoente de Lyapunov positivo por um sinal  $+$ , e um expoente de Lyapunov negativo por um sinal  $-$ , podemos caracterizar os estados de um sistema quadridimensional, por exemplo, baseados no espectro de Lyapunov. Quando o espectro de Lyapunov é do tipo  $(+, +, 0, -)$ , o atrator é dito ser hipercaótico [12]. Um atrator hipercaótico é tipicamente definido como um comportamento caótico com no mínimo dois expoentes de Lyapunov positivos. A noção de hipercaos foi introduzida por Rössler em 1979 [13], usando para tal um sistema de quatro equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Quando o espectro de Lyapunov é do tipo  $(+, 0, -, -)$  ou

$(+, 0, 0, -)$ , ou seja, com apenas o maior dos expoentes sendo maior do que zero, o atrator é caótico [14]. No caso de atratores periódicos, o espectro de Lyapunov é representado por:  $(0, 0, 0, -)$ ,  $(0, 0, -, -)$  ou  $(0, -, -, -)$ . Quando a situação  $(-, -, -, -)$  se faz presente, ou seja, quando os quatro expoentes de Lyapunov são menores do que zero, o sistema é atraído para um ponto de equilíbrio [12]. Para sistemas discretos, o atrator é dito periódico se o maior expoente de Lyapunov for menor do que zero, quase-periódico quando o maior expoente permanece no zero e, por fim, quando o maior expoente de Lyapunov for maior do que zero o atrator é caótico. Como acontece com sistemas contínuos, mais de um expoente de Lyapunov maior do que zero caracteriza um atrator hipercaótico.

## 2.4 Diagramas de Bifurcação

Qualquer sistema dinâmico que descreva um sistema físico real, geralmente depende de um ou mais parâmetros. São os chamados parâmetros de controle do sistema. Um sistema dinâmico pode então ser pensado como uma função desses parâmetros de controle. Com efeito, o comportamento dinâmico do sistema pode ser modificado se o valor desses parâmetros for alterado. Os diagramas de bifurcação ilustram como a dinâmica de um sistema muda quando um parâmetro de controle varia, e mostram o nascimento, a evolução e a morte dos atratores [15]. Para o caso de mapas, eles são construídos plotando o comportamento de uma variável  $x_t^{(i)}$ , em função de um parâmetro  $\mu$  do sistema. Para o caso de fluxos, diagramas de bifurcação são geralmente construídos plotando os máximos locais de uma variável  $x^i$  a cada período. Neste último caso, para cada valor do parâmetro, um único valor de  $x^i$  representa um ciclo-1, dois valores de  $x^i$  um ciclo-2, e assim sucessivamente.

## 2.5 Espaços de Parâmetros

No caso de mapas, como dissemos acima, um diagrama de bifurcação é um gráfico de  $x_t^i$  em função de um parâmetro  $\mu$ , de onde podemos tirar informações do surgimento das bifurcações com a variação de  $\mu$ . Em outras palavras, temos a periodicidade como uma função do parâmetro. Se usarmos diferentes cores para representar diferentes períodos, a informação contida no eixo  $x_t^i$  pode ser colocada em uma linha, ou seja, a informação contida em um diagrama de bifurcação bidimensional pode ser colocada

em uma única linha colorida [16]. Vimos, também acima, que o maior expoente de Lyapunov pode ser usado como uma medida para caracterizar o comportamento de um sistema. Assim, calculando o maior expoente de Lyapunov para diferentes valores dos vários parâmetros que controlam determinado sistema, e associando cores para cada faixa de valores de expoente calculado, podemos obter informações sobre o sistema em consideração. O resultado final é um mapa colorido, geralmente bidimensional, associando pontos no espaço de parâmetros aos valores do maior expoente do atrator do sistema [17].

# Capítulo 3

## Sistema Discreto

Neste capítulo fazemos um estudo da dinâmica de um acoplamento linear de três mapas quadráticos. Determinamos numericamente os locais no espaço de parâmetros onde nascem movimentos periódicos, quase-periódicos, caóticos e hipercaóticos. Adicionalmente usamos diagramas de bifurcação, espectros de expoentes de Lyapunov e diagramas do espaço de fase, para caracterização dos estados deste sistema particular.

### 3.1 O Acoplamento e os Pontos Fixos

Consideramos neste trabalho um acoplamento linear de três mapas quadráticos, mais especificamente o mapa tridimensional definido pelas equações

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= a - x_t^2 + by_t, \\y_{t+1} &= a - y_t^2 + bz_t, \\z_{t+1} &= a - z_t^2 + bx_t,\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde  $x_t$ ,  $y_t$  e  $z_t$  são variáveis dinâmicas,  $a$  é o parâmetro de controle do mapa quadrático,  $b$  é o parâmetro de acoplamento, e  $t = 1, 2, 3, \dots$  é o tempo discreto. Para calcular os pontos fixos do sistema (3.1), fazemos  $x_{t+1} = x_t = x$ ,  $y_{t+1} = y_t = y$  e  $z_{t+1} = z_t = z$ , obtendo

$$\begin{aligned}a - x^2 + by - x &= 0, \\a - y^2 + bz - y &= 0, \\a - z^2 + bx - z &= 0.\end{aligned}\tag{3.2}$$

A solução do sistema de equações (3.2) dá como resultado um mesmo polinômio de grau 8 para cada uma das variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$ , que escrevemos, para a variável  $x$ , na forma

$$Ax^8 + Bx^7 + Cx^6 + Dx^5 + Ex^4 + Fx^3 + Gx^2 + Hx + I = 0, \quad (3.3)$$

onde

$$\begin{aligned} A &= -1, \\ B &= -4, \\ C &= 4a - 2b - 6, \\ D &= -12a - 6b - 4, \\ E &= -6a^2 + (2b^2 + 6b + 12)a - b^3 - b^2 - 6b - 1, \\ F &= -12a^2 + (4b^2 + 12b + 4)a - 2b^3 - 2b^2 - 2b, \\ G &= 4a^3 - (4b^2 + 6b + 6)a^2 + b(4b^2 + 4b + 6)a - b^2(b^2 + b + 1), \\ H &= 4a^3 - b(4b + 6)a^2 + b^2(4b + 2)a + b^4(b^3 - 1), \\ I &= -a^4 + b(2b + 2)a^3 - b^2(b^2 + 3b + 1)a^2 + b^4(b^2 + b + 1)a. \end{aligned}$$

O polinômio (3.3) pode ser fatorado, resultando

$$-x^2 + (-1 + b)x + a = 0 \quad (3.4)$$

e

$$\begin{aligned} &-x^6 + (-3 - b)x^5 + (3a - 3 - 4b - b^2)x^4 + \\ &(2ba - b^3 - 5b - 3b^2 + 6a - 1)x^3 + \\ &(3b^2a - 3b^2 + 3a - 2b - 3b^3 + 6ba - b^4 - 3a^2)x^2 + \\ &(2b^3a + 4b^2a + 4ba - b^5 - 3a^2 - ba^2 - 2b^4 - 2b^3 - b^2)x \\ &-b^5 + a^3 - b^4 - b^6 + 3b^3a + b^4a - 2b^2a^2 + b^2a - 2ba^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

O polinômio de grau 2 para a variável  $x$  possui como soluções

$$x_1 = \frac{b-1}{2} + \frac{\sqrt{1-2b+b^2+4a}}{2} \quad (3.6)$$

e

$$x_2 = \frac{b-1}{2} - \frac{\sqrt{1-2b+b^2+4a}}{2}. \quad (3.7)$$

Soluções análogas são obtidas quando as variáveis  $y$  e  $z$  são consideradas. Os resultados para estas variáveis são

$$y_1 = z_1 = \frac{b-1}{2} + \frac{\sqrt{1-2b+b^2+4a}}{2}, \quad (3.8)$$

$$y_2 = z_2 = \frac{b-1}{2} - \frac{\sqrt{1-2b+b^2+4a}}{2}. \quad (3.9)$$

O polinômio (3.5), de grau 6, não possui solução algébrica, como se sabe. Na busca por algum resultado analítico exato para o problema em estudo, centramos nossa atenção a partir de agora nos pontos fixos

$$(x_f, y_f, z_f) = (x_1, y_1, z_1)$$

e

$$(x_f, y_f, z_f) = (x_2, y_2, z_2).$$

Para verificar a estabilidade de cada um dos pontos fixos, calculamos os autovalores da matriz Jacobiana associada a cada um deles. Por definição, a matriz Jacobiana  $J$  do mapa  $\vec{f}$  no ponto  $\vec{p}$  é dada por:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{p}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(\vec{p}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{p}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(\vec{p}) \end{pmatrix}.$$

Para o mapa (3.1), obtemos

$$J = \begin{pmatrix} -2x & b & 0 \\ 0 & -2y & b \\ b & 0 & -2z \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Independentemente do ponto fixo, seja ele  $(x_1, y_1, z_1)$  ou  $(x_2, y_2, z_2)$ , a equação característica para o cálculo dos autovalores, obtida fazendo  $\det(J - \lambda I) = 0$ , é dada por

$$-\lambda^3 - 3(b + \beta - 1)\lambda^2 + -6(b^2 + (\beta - 2)b - \beta + 2a + 1)\lambda - 3(b^3 + (\beta - 4)b^2 + (-2\beta + 4a + 4)b + \beta - 4a) - \beta^3 + 4 = 0, \quad (3.11)$$

onde

$$\beta^2 = 1 - 2b + b^2 + 4a.$$

Vemos, portanto, que a equação característica (3.11) é uma equação cúbica em  $\lambda$  e, sendo assim, possui solução analítica exata. No entanto, as soluções (as três raízes) são expressões muito extensas, bastante complicadas, e de difícil interpretação, o que inviabiliza o tratamento analítico pretendido. Resta então utilizarmos procedimentos numéricos para caracterizar os estados do sistema (3.1), o que passamos a fazer a partir de agora.

## 3.2 O Espaço de Parâmetros

O espaço de parâmetros  $(b,a)$  do sistema (3.1) é mostrado na Fig 3.1. Para sua construção utilizamos uma malha de  $350 \times 350$  pontos igualmente espaçados. Em

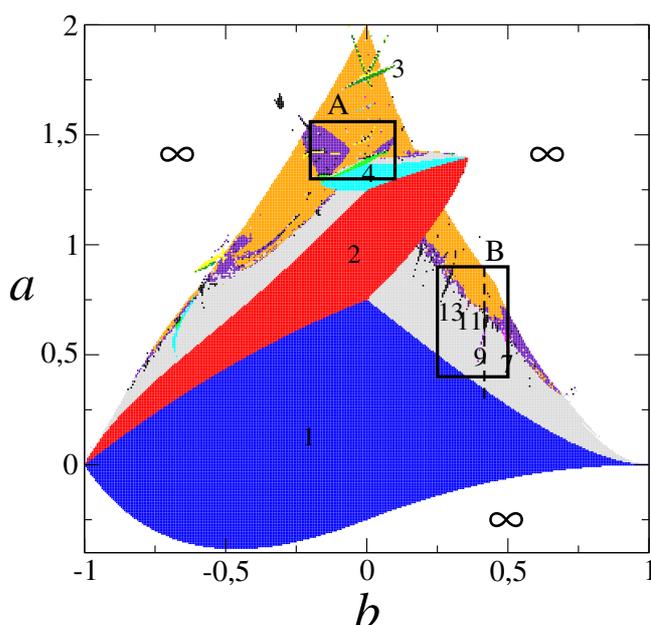


Fig. 3.1: Espaço de parâmetro para o mapa (3.1) com  $-0,4 < a < 2$  e  $-1 < b < 1$ . Nesta e nas figuras similares, regiões de diferentes períodos são identificadas por diferentes tonalidades. Os números indicam os períodos dos atratores.

outras palavras, dividimos cada um dos intervalos de  $a$  e  $b$  em 350 partes. Para cada uma das possíveis combinações de  $a$  e  $b$ , consideramos a condição inicial  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 01, 0, 005, 0, 02)$  e iteramos o mapa, descartando as 50000 primeiras iteradas para

eliminar o comportamento transiente. São guardados os últimos valores de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , que denominamos  $x_1$ ,  $y_1$  e  $z_1$ . A periodicidade foi determinada utilizando um algoritmo de duas partes. (i) Iniciando o sistema após o transiente com  $(x_1, y_1, z_1)$ , ele segue uma das duas seguintes possibilidades: se o sistema convergir para o atrator em  $-\infty$  ou  $\infty$ , tentamos 500 novas inicializações, aumentando  $x_1$ ,  $y_1$  e  $z_1$  em  $1/500$  a cada vez. Se o sistema ainda divergir após estas 500 novas tentativas de inicializações, o cálculo é considerado completo, e o ponto  $(b, a)$  é pintado com alguma cor correspondendo ao atrator no infinito (o sistema diverge). Se após um número  $N_{max}$  de iteradas o sistema não divergir, entra o segundo passo do algoritmo. (ii) Este passo determina se as trajetórias não divergentes são periódicas ou caóticas. As trajetórias são consideradas periódicas, de período  $k$ , se tivermos  $|x_1 - x_{1+k}| < \epsilon$ ,  $|y_1 - y_{1+k}| < \epsilon$  e  $|z_1 - z_{1+k}| < \epsilon$  com  $\epsilon$  sendo um número pequeno. No nosso caso  $\epsilon = 10^{-6}$ , e  $1 < k < 50$ . Se nenhuma periodicidade for detectada, passamos ao cálculo do espectro de Lyapunov, com o objetivo de caracterizar o estado do sistema como caótico, hipercaótico ou quase-periódico. Se os dois maiores expoentes resultarem maiores do que zero, o sistema é dito hipercaótico e o ponto  $(b, a)$  é pintado com uma cor representando hipercaos. Se apenas o maior expoente for maior que zero, o ponto é pintado com uma outra cor, que representa caos. Se o sistema não é caótico, nem hipercaótico, então ele é quase-periódico. A quase-periodicidade é caracterizada pela permanência do maior expoente de Lyapunov no valor zero.

No espaço de parâmetros da Fig. 3.1, branco indica valores de parâmetros para os quais o sistema diverge, cinza indica quase-periodicidade, violeta indica caos e laranja indica hipercaos. Regiões de diferentes periodicidades são indicadas pelos números inteiros, os quais indicam o período da respectiva região. Todos os períodos acima de 12 estão representados em preto.

Nos diagramas da Fig. 3.2 são apresentadas ampliações das regiões internas às caixas **A** e **B** da Fig. 3.1. Observamos da análise das Figs. 3.1 e 3.2, que o sistema (3.1) apresenta duas rotas para o caos, uma por dobramento de período e outra via quase-periodicidade. A rota para o caos via dobramento de período é do tipo  $1 \times 2^n$ , com  $n = 0, 1, 2, \dots$ , é típica do mapa quadrático, e continua existindo mesmo com o acoplamento. Este tipo de bifurcação é caracterizado por autovalores da matriz Jacobiana igual a  $-1$ . A rota para o caos via quase-periodicidade é iniciada numa bifurcação de Naimark-Sacker [18], a qual é caracterizada por autovalores da matriz Jacobiana complexo-conjugados, de módulo igual a unidade. Na Fig. 3.1

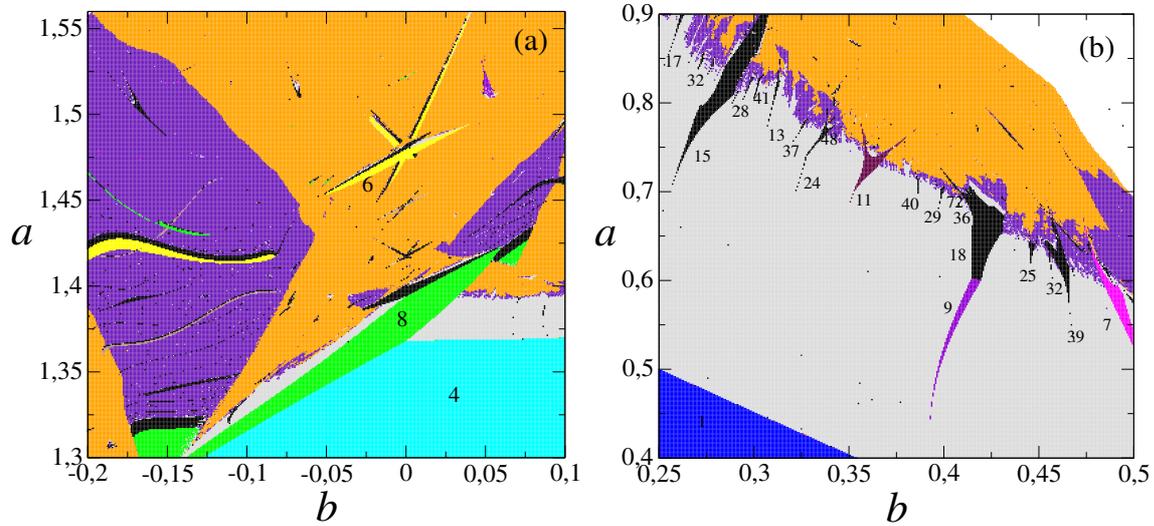


Fig. 3.2: Ampliação das regiões internas às caixas **A** e **B** da Fig. 3.1 onde (a)  $1,30 \leq a \leq 1,56$  e  $-0,2 \leq b \leq 0,1$  e (b)  $0,4 \leq a \leq 0,9$  e  $0,25 \leq b \leq 0,5$ .

podemos conferir duas dessas rotas, uma originada a partir de uma órbita de período um, e outra originada de uma órbita de período 2. O movimento quase-periódico, como se sabe, é caracterizado por curvas fechadas no espaço de fase, as quais surgem da desestabilização de órbitas periódicas estáveis.

Na ampliação da Fig. 3.2(b) podemos observar com mais clareza estruturas periódicas imersas na região de quase-periodicidade. São as chamadas línguas de Arnold, típicas do mapa do círculo [19]. Na Fig. 3.2(a) notamos ainda que o movimento quase-periódico nasce também de outros períodos, como 4, 8, sendo caracterizados respectivamente por quatro e oito curvas fechadas no espaço de fase. Se fizermos mais e mais ampliações na Fig. 3.2(a), mais e mais regiões quase-periódicas originadas de regiões de período 16, 32, ... aparecerão, caracterizadas por dezesseis, trinta e dois, ... curvas fechadas no espaço de fase.

### 3.3 Diagrama de Bifurcação, Expoentes de Lyapunov e Espaços de Fase

Nas Figs. 3.3(a) e 3.3(b) vemos diagramas de bifurcação (variável  $x$ ) juntamente com os correspondentes espectros de expoentes de Lyapunov para o mapa (3.1). A Fig. 3.3(a) foi gerada considerando  $b = 0,4165$  e  $0,3 < a < 0,9$ , que corresponde

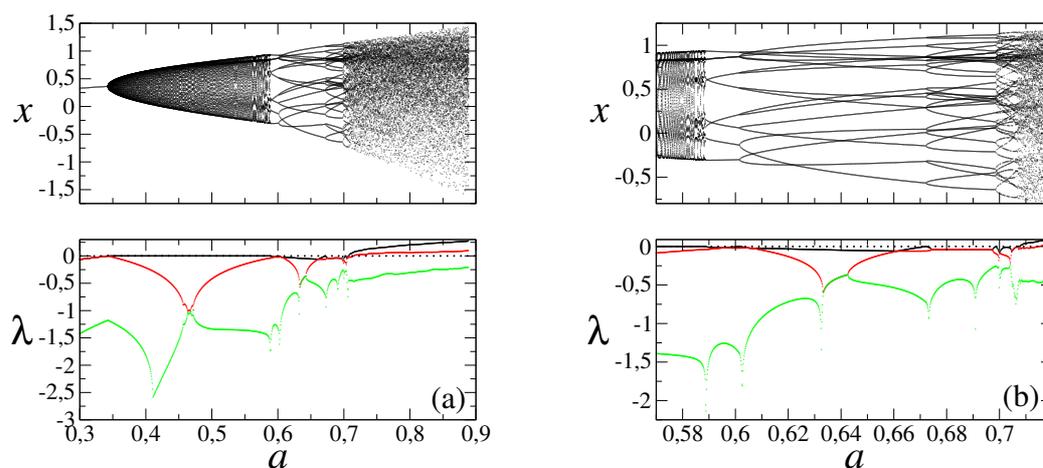


Fig. 3.3: Diagramas de bifurcação mostrando a variável  $x$  e espectros de expoentes Lyapunov para o mapa (3.1) com  $b = 0,4165$ . (a)  $0,3 < a < 0,9$ . (b) Ampliação da região  $0,57 < a < 0,72$ .

aos pontos da reta tracejada desenhada na Fig. 3.1, enquanto a Fig. 3.3(b) é uma ampliação da região  $0,57 < a < 0,72$ . Em ambos os casos utilizamos como condição inicial  $(x_0, y_0, z_0) = (0,01, 0,005, 0,02)$ , e dividimos o eixo do parâmetro  $a$  em  $10^3$  intervalos iguais. Para cada um dos diagramas de bifurcação foram plotados 60 pontos para cada valor do parâmetro  $a$ , após um transiente de  $5 \times 10^4$  iteradas. A média envolvida no cálculo dos expoentes de Lyapunov foi efetuada considerando  $10^6$  iteradas.

Caminhando ao longo da linha tracejada  $b = 0,4165$ , desenhada na Fig. 3.1, no sentido do crescimento de  $a$ , vemos que inicialmente o sistema tem período um, com um atrator representativo aparecendo na Fig. 3.4(a). Nesta região do ponto fixo, os três expoentes de Lyapunov são menores que zero. Em  $a = 0,342$  ocorre uma bifurcação de Naimark-Sacker, o maior expoente vai a zero, lá permanecendo

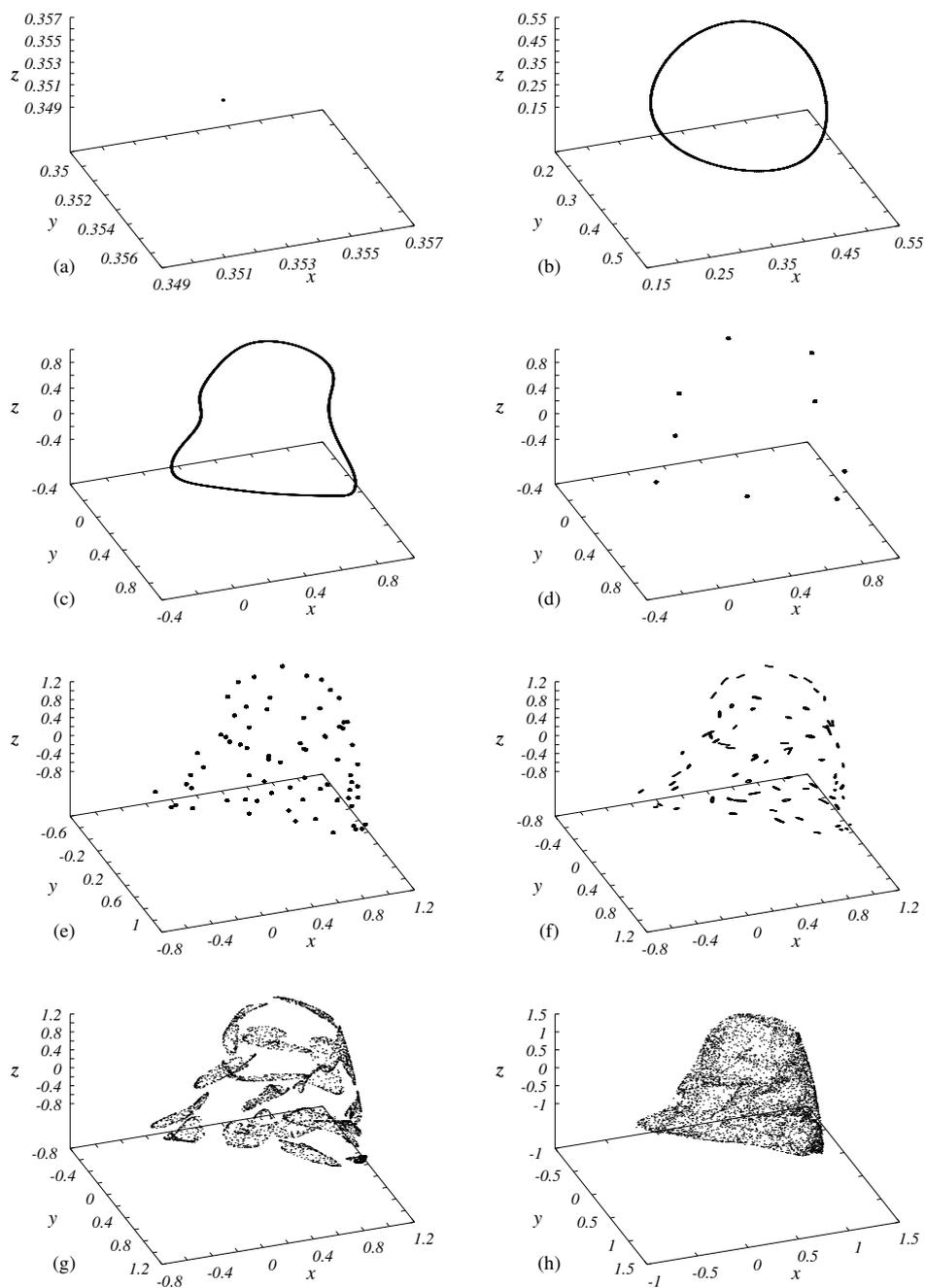


Fig. 3.4: Oito trajetórias no espaço de fase tridimensional, para  $b = 0,4165$ . (a) Ponto fixo, para  $a = 0,33$ . (b) Quase-periodicidade, para  $a = 0,36$ . (c) Quase-periodicidade, para  $a = 0,57$ . (d) Período 9, para  $a = 0,70$ . (e) Período 72, para  $a = 0,706$ . (f) Quase-periodicidade para  $a = 0,707$ . (g) Caos, para  $a = 0,71$ . (h) Hipercaos, para  $a = 0,73$ .

até  $a = 0,576$ . Como consequência, uma curva fechada invariante aparece no espaço de fase, exemplos da qual podem ser vistos nas Figs. 3.4(b) e 3.4(c). Aumentando mais ainda o valor do parâmetro  $a$ , encontramos novamente uma região periódica, agora de período 9. Os expoentes de Lyapunov voltam todos a ser menores do que zero. Esta região corresponde a língua de período 9, cujo atrator aparece na Fig. 3.4(d), e que pode ser conferida nas Figs. 3.1 e 3.2(b), e que é seguida por regiões de períodos 18, 36 e 72. Um atrator correspondendo a esta última região é mostrado na Fig. 3.4(e). Depois desta pequena cascata finita de bifurcações, ocorre novamente uma bifurcação de Naimark-Sacker, agora a partir de uma órbita de período 72. Como consequência, 72 curvas fechadas aparecem no espaço de fase. O atrator correspondente é mostrado na Fig. 3.4(f), e o maior expoente de Lyapunov volta ao zero. Aumentando mais o parâmetro  $a$ , encontramos caos e hipercaos, em  $a = 0,708$  e  $a = 0,715$ , respectivamente. Durante o estado de movimento caótico, somente o maior expoente de Lyapunov é maior do que zero, enquanto no hipercaos, o maior e o segundo maior são maiores que zero. As Figs. 3.4(g) e 3.4(h) mostram um atrator caótico e um hipercaótico, respectivamente. Para o atrator caótico o maior e o segundo maior expoentes de Lyapunov valem 0,04 e -0,02, respectivamente. Para o atrator hipercaótico os valores correspondentes são 0,11 e 0,02.

### 3.4 Bacias de Atração

O conjunto de todas as possíveis condições iniciais que convergem para um mesmo atrator, é chamado bacia de atração daquele atrator. A partir de agora, vamos verificar alterações que eventualmente possam ocorrer na bacia de atração, quando o sistema (3.1) passa de um estado caótico para um hipercaótico. Para um sistema tridimensional, a consideração de um conjunto de condições iniciais  $(x_0, y_0, z_0)$  gera um cubo de condições iniciais. É mais conveniente estudar seções bidimensionais deste cubo, o que fazemos aqui. Nas Figs. 3.5(a)-3.5(d) são mostradas, por exemplo, seções de bacias de atração para estados caótico e hipercaótico, para pontos próximo da fronteira onde ocorre a transição caos-hipercaos, para  $b = 0,43$ . Nas Figs. 3.5(a) e 3.5(b), as condições iniciais que levam ao atrator caótico (hipercaótico) são representadas em branco, enquanto as condições iniciais que levam ao infinito são pintadas na cor cinza. A Fig. 3.5(a) mostra uma seção da bacia de atração para  $z_0 = 1,25$  e  $a = 0,707$ , ou seja, para um ponto do espaço de parâmetros  $(b, a)$  dentro da região

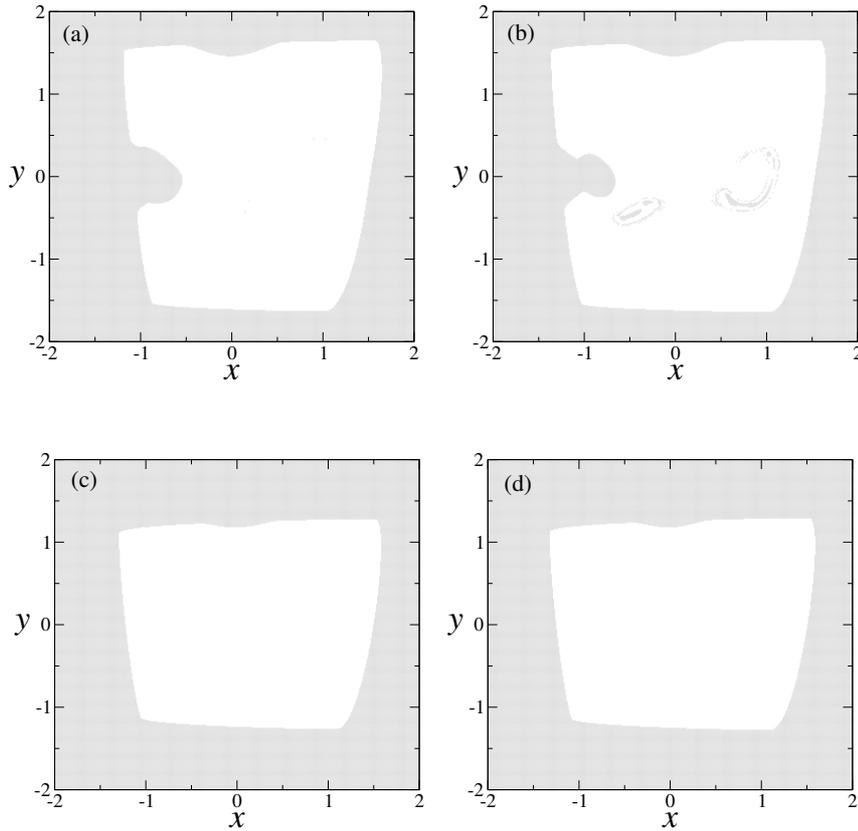


Fig. 3.5: Seções de bacias de atração para atratores caótico e hipercaótico. (a) Caos, para  $a = 0,707$  e  $z_0 = 1,25$ . (b) Hipercaos, para  $a = 0,722$  e  $z_0 = 1,25$ . (c) Caos, para  $a = 0,707$  e  $z_0 = -1,25$ . (d) Hipercaos, para  $a = 0,722$  e  $z_0 = -1,25$ . A cor branca corresponde a caos ou hipercaos, enquanto a cor cinza corresponde a divergência. Transiente igual a  $5 \times 10^4$  e  $b = 0,43$ .

caótica. A Fig. 3.5(b) por sua vez, mostra uma seção da bacia de atração para  $z_0 = 1,25$  e  $a = 0,722$ , agora para um ponto  $(b,a)$  dentro da região hipercaótica. Uma análise cuidadosa de ambas as figuras permite concluir que o número de pontos da bacia de atração do atrator hipercaótico é maior que o número de pontos da bacia do atrator caótico, ou seja, a seção da bacia de atração aumenta quando o sistema bifurca, passando de um estado caótico para outro, hipercaótico. Conclusão idêntica é possível, quando tomamos por base as Figs. 3.5(c) e 3.5(d), para as quais  $z_0 = -1,25$ . É importante notar, no entanto, que este resultado não pode ser generalizado, uma vez que se considerou apenas um único valor para o parâmetro  $b$ .

# Capítulo 4

## Sistema Contínuo

Neste capítulo fazemos um estudo da dinâmica de um sistema contínuo quadridimensional, a saber o sistema de Lorenz-Stenflo [3]. Há alguns resultados disponíveis na literatura [4, 5, 6, 7, 8], envolvendo o sistema de Lorenz-Stenflo, todos eles considerando a variação de apenas um parâmetro, mantendo outros três fixos. Aqui determinamos analiticamente os locais num espaço de parâmetros quadridimensional onde ocorrem as bifurcações do tipo forquilha e Hopf, a partir dos pontos de equilíbrio. Fixando dois dos parâmetros, construímos numericamente um espaço de parâmetros bidimensional, com o objetivo de verificar os resultados analíticos, e determinar os locais onde nascem os movimentos caóticos e regulares do sistema. Diagramas de bifurcação, espectros de expoentes de Lyapunov, e projeções tridimensionais de espaços de fase são também utilizados para corroborar os resultados.

### 4.1 O Sistema de Lorenz-Stenflo

O sistema de Lorenz [2] é um dos mais tradicionais no estudo de fenômenos não lineares. Ele foi um dos primeiros modelos a apresentar caos, tendo sido utilizado na descrição de efeitos atmosféricos, simulado pelo experimento no qual um fluido é confinado entre duas placas mantidas a temperaturas diferentes. O sistema de Lorenz consiste num conjunto de três equações diferenciais autônomas de primeira

ordem, dado por

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= -\sigma(X - Y), \\
\dot{Y} &= rX - Y - XZ, \\
\dot{Z} &= XY - bZ,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

onde  $X(t)$  é proporcional a intensidade da convecção atmosférica,  $Y(t)$  é proporcional à diferença de temperatura entre as correntes ascendente e descendente,  $Z(t)$  é proporcional a distorção do perfil de temperatura vertical, relativamente a um perfil linear,  $b = 4/(1 + a^2)$ , onde  $a$  é o quociente entre a distância entre as placas e a largura do rolo de convecção,  $\sigma = \mu/\kappa$ , onde  $\mu$  é a viscosidade e  $\kappa$  é a condutividade térmica, e  $r = R/R_c$  é o número de Rayleigh relativo, onde  $R = g\alpha H^3 \Delta T/\mu\kappa$ ,  $\alpha$  sendo o coeficiente de expansão térmica,  $g$  a aceleração da gravidade,  $H$  a separação entre as placas, e  $\Delta T$  a diferença de temperatura entre elas. Lorenz chegou ao resultado (4.1) resolvendo as equações da hidrodinâmica que descrevem o comportamento do fluido.

Stenflo [3] considerou o efeito da rotação no mesmo problema estudado por Lorenz, obtendo um conjunto de quatro equações diferenciais dado por

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= -\sigma(X - Y) + sV, \\
\dot{Y} &= rX - Y - XZ, \\
\dot{Z} &= XY - bZ, \\
\dot{V} &= -X - \sigma V,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

onde  $V(t)$  e  $s$  são a nova variável e o novo parâmetro, introduzidos para representar os efeitos rotacionais. O parâmetro  $s$  é chamado número de rotação e a variável  $V(t)$  descreve a rotação do fluxo. O sistema (4.2) descreve perturbações acústicas gravitacionais de baixa frequência e curto comprimento de onda na atmosfera, considerando o efeito de rotação da terra.

## 4.2 Simetria e Dissipação

É fácil ver que o sistema (4.2) apresenta simetria em relação ao eixo  $z$ . Para isto, basta fazermos a transformação de coordenadas

$$(x, y, z, v) \rightarrow (-x, -y, z, -v), \tag{4.3}$$

que obtemos novamente o sistema (4.2).

Como vimos no Cap. 2, sistemas dinâmicos dissipativos levam naturalmente ao conceito de atrator. O termo dissipativo quer dizer que, um arbitrário elemento de volume  $V$  limitado por alguma superfície fechada  $S$  no espaço de fase, contrai quando o sistema evolui no tempo. Definindo um campo vetorial  $F = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{v})$ , a dissipação do sistema pode ser calculada pela divergência do campo vetorial  $F$ , dada por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial v}. \quad (4.4)$$

Para o sistema (4.2),

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = -1 - b - 2\sigma < 0, \quad (4.5)$$

pois  $b$  e  $\sigma$  são maiores que zero. Desta forma, concluímos que o sistema (4.2) é dissipativo, pois  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} < 0$ . Isto implica no fato de as trajetórias do sistema convergirem sempre para um atrator.

### 4.3 Análise de Estabilidade dos Pontos de Equilíbrio

Para obter os pontos de equilíbrio do sistema (4.2) fazemos

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\sigma(X - Y) + sV = 0, \\ \dot{Y} &= rX - Y - XZ = 0, \\ \dot{Z} &= XY - bZ = 0, \\ \dot{V} &= -X - \sigma V = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Resolvendo o sistema (4.6), obtemos  $P_0 = (0, 0, 0, 0)$ , o chamado ponto trivial, e os pontos  $P_1 = (X_+, Y_+, Z^*, V_+)$  e  $P_2 = (X_-, Y_-, Z^*, V_-)$ , onde

$$\begin{aligned} X_{\pm} &= \pm \sqrt{\frac{bZ^*}{\left(\frac{s}{\sigma^2} + 1\right)}}, \\ Y_{\pm} &= \pm \sqrt{bZ^* \left(1 + \frac{s}{\sigma^2}\right)}, \\ Z^* &= r - 1 - \frac{s}{\sigma^2}, \\ V_{\pm} &= -\frac{X_{\pm}}{\sigma}. \end{aligned}$$

A matriz Jacobiana para o sistema (4.2) é dada por

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 & s \\ r - Z & -1 & -X & 0 \\ Y & X & -b & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\sigma \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Conseqüentemente, a equação característica, encontrada fazendo  $\det(J - \lambda I) = 0$ , onde  $I$  é a matriz identidade, é dada por:

$$\lambda^4 + A\lambda^3 + B\lambda^2 + C\lambda + D = 0, \quad (4.8)$$

onde

$$\begin{aligned} A &= 2\sigma + b + 1, \\ B &= b + X^2 + \sigma^2 + 2b\sigma + \sigma Z + s - \sigma r + 2\sigma, \\ C &= 2b\sigma + 2X^2\sigma + \sigma^2 + Y\sigma X + s - rb\sigma + sb + \sigma^2 b + bZ\sigma - \sigma^2 r + \sigma^2 Z, \\ D &= \sigma^2 bZ + sb + \sigma^2 b + Y\sigma^2 X + \sigma^2 X^2 + sX^2 - \sigma^2 br. \end{aligned}$$

Algumas conclusões a respeito da estabilidade dos pontos de equilíbrio podem ser tiradas dos coeficientes do polinômio (4.8). Fazemos este estudo usando o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz [18]. O critério de Routh-Hurwitz é um método que serve para determinar se um sistema é estável, ou não, apenas examinando os coeficientes da equação característica do sistema, calculada em cada um dos pontos de equilíbrio. É importante salientar que o método não envolve o cálculo explícito das raízes.

Seja a equação característica

$$D(s) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (4.9)$$

Para determinar se o sistema é estável ou não, checamos duas condições:

1. Duas condições necessárias, mas não suficientes, para todas as raízes possuírem parte real negativa são:

- (a) Todos os coeficientes do polinômio devem ter o mesmo sinal.
- (b) Todos os coeficientes do polinômio devem ser diferentes de zero.

Se a condição (1) for satisfeita, então calculamos a série de Routh-Hurwitz como segue:

$$\begin{array}{c|cccc}
\lambda^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
\lambda^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
\lambda^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
\lambda^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
\lambda^{n-4} & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\vdots & & & & \\
\lambda^1 & & & & \\
\lambda^0 & & & & 
\end{array}$$

onde os  $a'_i$ s são os coeficientes polinomiais e os coeficientes no restante da tabela são calculados usando os seguintes modelos:

$$b_1 = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} = \frac{-1}{a_{n-1}} (a_n a_{n-3} - a_{n-2} a_{n-1}),$$

$$b_2 = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} = \frac{-1}{a_{n-1}} (a_n a_{n-5} - a_{n-4} a_{n-1}),$$

$$b_3 = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix} = \frac{-1}{a_{n-1}} (a_n a_{n-7} - a_{n-6} a_{n-1}),$$

$$c_1 = \frac{-1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \frac{-1}{b_1} (b_2 a_{n-1} - a_{n-3} b_1),$$

$$c_2 = \frac{-1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = \frac{-1}{b_1} (b_3 a_{n-1} - a_{n-5} b_1).$$

2. A condição necessária para todas as raízes possuírem parte real negativa, é que todos os elementos da primeira coluna da série devem possuir o mesmo sinal. O número de mudanças de sinal é igual ao número de raízes com parte real positiva.

O critério de Routh-Hurwitz possui ainda um caso especial [20], que contempla a situação na qual todos os elementos de uma mesma linha são zeros. Neste caso o polinômio possui um par de raízes puramente imaginárias. A linha nula sempre ocorrerá associada com uma potência ímpar de  $\lambda$ .

Para o ponto  $P_0 = (0, 0, 0, 0)$ , a Eq. (4.8) fatorada transforma-se para

$$(\lambda^3 + (1 + 2\sigma)\lambda^2 + (-\sigma r + \sigma^2 + 2\sigma + s)\lambda + \sigma^2(1 - r) + s)(\lambda + b) = 0. \quad (4.10)$$

Logo,  $\lambda = -b$  é um autovalor para o ponto  $P_0$ . Para encontrar os outros autovalores precisamos resolver a equação

$$\lambda^3 + (1 + 2\sigma)\lambda^2 + (-\sigma r + \sigma^2 + 2\sigma + s)\lambda + \sigma^2(1 - r) + s = 0, \quad (4.11)$$

que pode ser reescrita como

$$a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} a_3 &= 1, \\ a_2 &= 1 + 2\sigma, \\ a_1 &= 2\sigma + s - \sigma r + \sigma^2, \\ a_0 &= -\sigma^2 r + s + \sigma^2. \end{aligned}$$

As três raízes são expressões complicadas envolvendo os parâmetros  $r$ ,  $\sigma$  e  $s$ , a partir das quais conclusões são difíceis de se tirar. Preferimos aqui, de maneira alternativa, aplicar o Método de Routh-Hurwitz. Para a condição 1. (a) ser satisfeita,  $2\sigma + s - \sigma r + \sigma^2 > 0$  e  $-\sigma^2 r + s + \sigma^2 > 0$ , que resolvidas para  $r$  fornecem

$$r < 1 + \frac{s}{\sigma^2} \quad (4.12)$$

e

$$r < 2 + \sigma + \frac{s}{\sigma}. \quad (4.13)$$

Para o caso presente, a condição 1. (a) sendo satisfeita, a condição 1. (b) é automaticamente satisfeita. Uma vez satisfeita a condição 1., calculamos os demais termos da série de Routh-Hurwitz,

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{\sigma^2 r - 4\sigma^2 + \sigma r - 2\sigma^3 - 2\sigma - 2s\sigma}{1 + 2\sigma}, \\ b_2 &= 0, \\ c_1 &= -\sigma^2 r + \sigma^2 + s, \\ c_2 &= 0, \end{aligned}$$

que pode então ser construída, resultando

$$\begin{array}{l|ll} \lambda^3 & 1 & 2\sigma + s - \sigma r + \sigma^2 \\ \lambda^2 & 1 + 2\sigma & -\sigma^2 r + s + \sigma^2 \\ \lambda^1 & 2\sigma^3 + -(r - 4)\sigma^2 - (-2 - 2s + r)\sigma / 1 + 2\sigma & 0 \\ \lambda^0 & -\sigma^2 r + \sigma^2 + s & 0. \end{array}$$

Aplicando a condição 2. do critério de Routh-Hurwitz, encontramos uma nova condição para o parâmetro  $r$  que, juntamente com as Eqs. (4.12) e (4.13) dão as condições de estabilidade da origem, em termos de  $b$ ,  $\sigma$ ,  $s$  e  $r$ , as quais são dadas por

$$r < 1 + \frac{s}{\sigma^2} \quad , \quad r < 2 + \sigma + \frac{s}{\sigma} \quad \text{e} \quad r < 2\left(\sigma + 1 + \frac{s}{\sigma + 1}\right).$$

Quando  $r$  passa do valor crítico dado por  $r = 1 + \frac{s}{\sigma^2}$ , a origem deixa de ser estável, em virtude de uma bifurcação do tipo forquilha. Em decorrência desta bifurcação, os novos pontos de equilíbrio  $P_1$  e  $P_2$  surgem.

Passamos agora a analisar a estabilidade desses dois novos pontos. A equação característica para qualquer dos pontos  $P_1$  e  $P_2$  é dada por

$$a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0,$$

onde agora

$$\begin{aligned} a_4 &= 1, \\ a_3 &= b + 2\sigma + 1, \\ a_2 &= \sigma^5 + (1 + 2b)\sigma^4 + (2s + br)\sigma^3 + 2b\sigma^2s + s^2\sigma - s^2/\sigma(s + \sigma^2), \\ a_1 &= b\sigma^5 + b(3r - 2)\sigma^4 + 2sb\sigma^3 + b(r - 4)s\sigma^2 + bs^2\sigma - 2bs^2/\sigma(s + \sigma^2), \\ a_0 &= 2b(-s + (r - 1)\sigma^2). \end{aligned}$$

Aplicando a condição 1. do critério de Routh-Hurwitz, obtemos

$$\begin{aligned} r &> -(s + \sigma^2)(\sigma s - s + \sigma^3 + 2\sigma^2b + \sigma^2)/b\sigma^3, \\ r &> -(\sigma - 2)(s + \sigma^2)^2/\sigma^2(s + 3\sigma^2), \\ r &> s/\sigma^2 + 1. \end{aligned}$$

Calculando os coeficientes da série de Routh-Hurwitz, ganhamos

$$\begin{aligned}
b_1 &= (2\sigma^6 + (4b + 3)\sigma^5 + (5b - br + 1 + 2b^2 + 4s)\sigma^4 + (br + 4bs + 2s + b^2r)\sigma^3 + \\
&\quad (2s - rb + 2b^2 + 6b)s\sigma^2 - s^2\sigma + s^2(b - 1))/\sigma(s + \sigma^2)(2\sigma + b + 1), \\
b_2 &= 2b(-s + \sigma^2(r - 1)), \\
b_3 &= 0, \\
c_1 &= b(2\sigma^{11} + (-2r + 4b + 7)\sigma^{10} + ((1 + 3b)r + 5b + 3 + 8s + 2b^2)\sigma^9 + \\
&\quad (-3br^2 + (-2s + 14b + 1 + 5b^2)r - 2b^2 + 12bs + 16s - 6b)\sigma^8 + \\
&\quad ((3b^2 + 3b)r^2 + (-3bs - 2b^2 - 7s - 2b)r + 10s + 6b^2s + 16bs + 12s^2)\sigma^7 + \\
&\quad (-4r^2sb + (6b^2s + 23bs - 3s + 2s^2)r - 20bs + 6s^2 + 2s + 12bs^2 - 6b^2s)\sigma^6 + \\
&\quad ((b^2s + bs)r^2 + (-4b^2s - 4bs - 7bs^2 - 9s^2)r + (6b^2 + 18b + 8s + 12)s^2)\sigma^5 + \\
&\quad (-r^2s^2b + (2s^3 - 5s^2 + 12bs^2 + s^2b^2)r + (4sb - 6b^2 - 8s + 6 - 24b)s^2)\sigma^4 + \\
&\quad ((-2bs^2 - s^3b - s^3 - 2s^2b^2)r + 2s^3b^2 + 8s^3b + 6s^3 + 2s^4)\sigma^3 + \\
&\quad ((-s^3 + 3s^3b)r - 2s^3b^2 - 12s^3b + 6s^3 - 5s^4)\sigma^2 + (s^4 + s^4b)\sigma + 2s^4 - 2s^4b)/ \\
&\quad \sigma(s + \sigma^2)(2\sigma^6 + (4b + 3)\sigma^5 + (-br + 5b + 1 + 2b^2 + 4s)\sigma^4 + \\
&\quad (br + 4bs + 2s + b^2r)\sigma^3 + (2s^2 - rbs + 2b^2s + 6bs)\sigma^2 - s^2\sigma - s^2 + bs^2), \\
c_2 &= 0, \\
c_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Em consequência, a série para o caso é

$$\begin{array}{c|ccc}
\lambda^4 & a_4 & a_2 & a_0 \\
\lambda^3 & a_3 & a_1 & 0 \\
\lambda^2 & b_1 & b_2 & 0 \\
\lambda^1 & c_1 & 0 & 0 \\
\lambda^0 & b_2 & 0 & 0.
\end{array}$$

Como a condição para o aparecimento de  $P_1$  e  $P_2$  é que  $r > s/\sigma^2 + 1$ , concluimos que  $b_2 \neq 0$ . Assim, quando  $c_1 = 0$ , temos o caso especial do Critério de Routh-Hurwitz, que contempla uma linha nula na série. A equação característica tem então um par de autovalores complexo-conjugados puramente imaginários, que caracteriza a ocorrência de uma bifurcação do tipo Hopf [10]. Fazendo  $c_1 = 0$ , e escrevendo em termos de potências de  $r$  temos

$$\alpha r^2 + \beta r + \gamma = 0, \tag{4.14}$$

onde

$$\begin{aligned}\alpha &= b\sigma^4(s + 3\sigma^2)(-s - \sigma^2 + \sigma(b + 1)), \\ \beta &= \sigma^2(s + \sigma^2)(-2\sigma^6 + (3b + 1)\sigma^5 + (1 + 14b + 5b^2)\sigma^4 + \\ &\quad ((-6b - 8)s - 2b(1 + b))\sigma^3 + (2s^2 + (b^2 + 9b - 4)s)\sigma^2 + \\ &\quad (-(1 + b)s^2 - 2sb(b - 1))\sigma + (3b - 1)s^2), \\ \gamma &= (s + \sigma^2)^3(2\sigma^5 + (4b + 7)\sigma^4 + (2s + 2b^2 + 3 + 5b)\sigma^3 + \\ &\quad (-6b - 5s - 2b^2)\sigma^2 + (1 + b)s\sigma - 2s(b - 1)).\end{aligned}$$

A solução da Eq. (4.14) é

$$r = \left( -\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} \right) / 2\alpha,$$

que é a superfície  $r = r(s, b, \sigma)$  no espaço de parâmetros onde ocorre a bifurcação de Hopf.

Seguindo a tradição [2] adotamos  $b = 8/3$  e  $\sigma = 10$ , para obter a curvas no espaço de parâmetros  $s - r$ , onde ocorrem as bifurcações do tipo forquilha e Hopf,

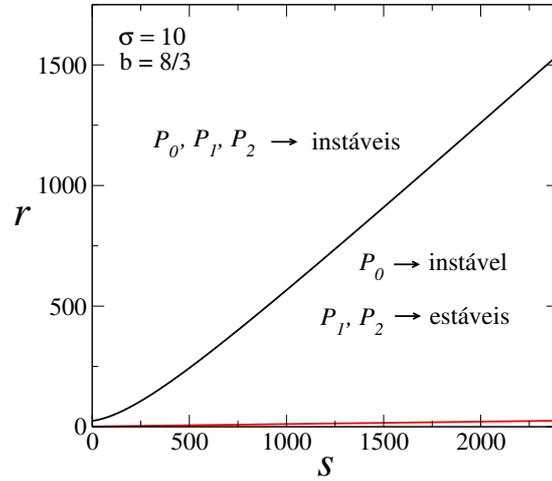


Fig. 4.1: Espaço de parâmetros obtido analiticamente para o sistema de Lorenz-Stenflo com  $b = 8/3$ ,  $\sigma = 10$ ,  $0 < s < 2400$  e  $0 < r < 1750$ . A linha vermelha representa o local onde acontecem as bifurcações do tipo forquilha. A linha preta é a das bifurcações tipo Hopf.

as quais são mostradas na Fig. 4.1. Antes da bifurcação do tipo forquilha (linha

vermelha da Fig. 4.1), temos apenas um ponto de equilíbrio, a origem  $P_0$ , que é estável. Quando esta bifurcação ocorre, os pontos estáveis  $P_1$  e  $P_2$  surgem e a origem perde sua estabilidade. Após a bifurcação de Hopf (linha preta da Fig. 4.1), os três pontos,  $P_0$ ,  $P_1$  e  $P_2$  são instáveis.

## 4.4 O Espaço de Parâmetros e o Espaço de Fase

Continuamos seguindo a tradição, ou seja, considerando  $b = 8/3$  e  $\sigma = 10$ . O objetivo nesta seção é investigar numericamente o impacto da modificação nos parâmetros  $r$  e  $s$ , sobre a dinâmica do sistema (4.2). Para isto usamos o espaço de parâmetros, que é mostrado nos diagramas da Fig. 4.2, tendo sido cada um deles obtido por meio do

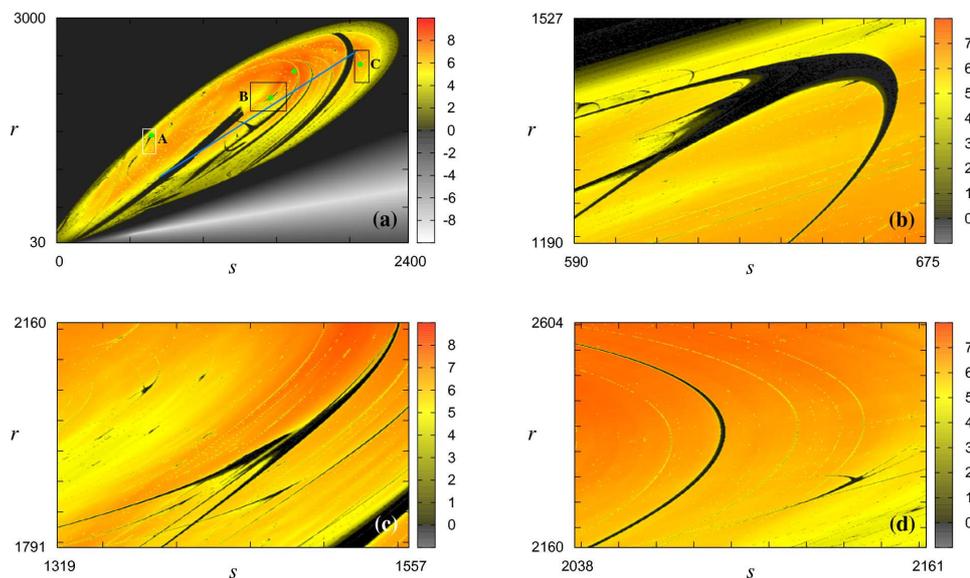


Fig. 4.2: (a) Espaço de parâmetro para o sistema (4.2) com  $\sigma = 10$  e  $b = 8/3$  e  $0 < s < 2400$  e  $30 < r < 3000$ . (b) Ampliação da região interna à caixa **A** com  $590 < s < 675$  e  $1190 < r < 1527$ . (c) Ampliação da região interna à caixa **B** com  $1319 < s < 1557$  e  $1791 < r < 2160$ . (d) Ampliação da região interna à caixa **C** com  $2038 < s < 2161$  e  $2160 < r < 2604$ .

cálculo do maior expoente de Lyapunov, em uma malha de  $500 \times 500$  pontos  $(s, r)$ . O sistema (4.2) foi integrado utilizando um integrador Runge-Kutta de quarta ordem com um passo fixo igual a  $10^{-3}$ , e considerando  $5 \times 10^5$  passos para calcular cada um dos expoentes. Em cada um dos diagramas da Fig. 4.2, as cores estão associadas à magnitude do maior expoente de Lyapunov: branco para expoentes mais negativos,

preto para expoentes nulos, e vermelho para expoentes mais positivos. Como se sabe, maior expoente de Lyapunov negativo indica ponto de equilíbrio, zero indica atrator periódico, com atrator caótico tendo maior expoente de Lyapunov maior do que zero.

Na Fig. 4.2(a) é mostrada uma visão geral do espaço de parâmetros. Nela, a região com maior expoente de Lyapunov menor do que zero, cuja tonalidade vai do branco ao cinza, indica valores de parâmetros que levam o sistema para algum ponto de equilíbrio. Nesta região o sistema é atraído para um dos pontos,  $P_1$  ou  $P_2$ . O local onde acaba a região cinza, e inicia a região preta, é o da linha onde ocorre a bifurcação de Hopf. Esta é a linha anteriormente obtida analiticamente, e plotada na Fig. 4.1. Ainda na Fig. 4.2(a) observamos, imersas na região caótica, cuja tonalidade vai do amarelo ao vermelho, algumas regiões periódicas. Três delas são mostradas nas Figs. 4.2(b), 4.2(c) e 4.2(d), e correspondem a ampliações das regiões internas às caixas **A**, **B** e **C** na Fig. 4.2(a). Tais regiões periódicas, no entanto, aparentemente não estão organizadas em cascatas de bifurcações cujos períodos subsequentes diferem de um valor fixo, como acontece com alguns sistemas tridimensionais recentemente relatados [21, 22, 23, 24].

Nas Figs. 4.3(a)-4.3(d) vemos projeções tridimensionais de alguns atratores,

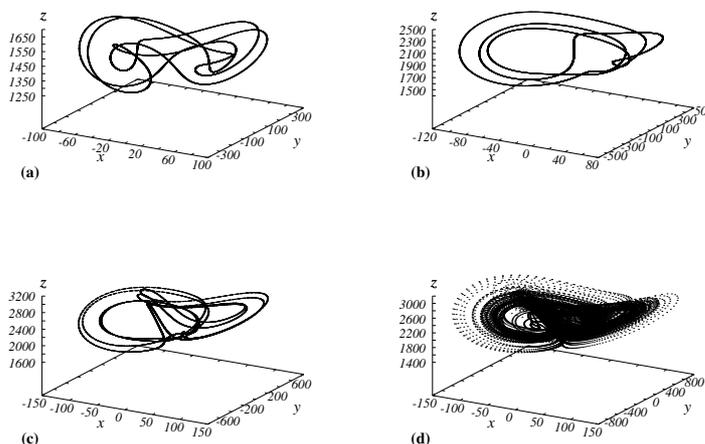


Fig. 4.3: Projeções tridimensionais de atratores do sistema (4.2) para quatro regiões da Fig. 4.2(a), para  $\sigma = 10$  e  $b = 8/3$ . (a) Região periódica,  $r = 1452, 25$ ,  $s = 649, 88$ . (b) Região periódica,  $r = 1952, 56$ ,  $s = 1459, 85$ . (c) Região periódica,  $r = 2385, 71$ ,  $s = 2078, 08$ . (d) Região caótica,  $r = 2288, 89$ ,  $s = 1619, 11$ .

num espaço de fase tridimensional do sistema (4.2). Tais atratores correspondem aos três pontos em verde, desenhados dentro de cada uma das caixas **A**, **B** e **C** na Fig. 4.2(a), e ao quarto ponto, também em verde, situado na região caótica vermelha da mesma figura. Para a construção de cada um dos atratores periódicos foram plotados  $10^4$  pontos, enquanto para o atrator caótico  $3 \times 10^4$  pontos foram considerados.

## 4.5 Diagrama de Bifurcações e o Espectro de Lyapunov

Na Fig. 4.4 são mostrados o diagrama de bifurcação e o espectro de Lyapunov

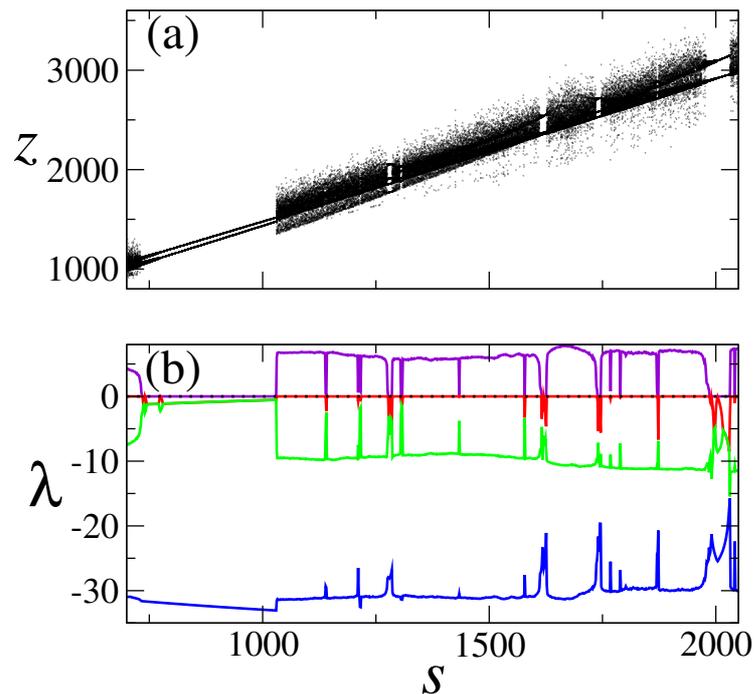


Fig. 4.4: (a) Diagrama de bifurcações, mostrando os máximos locais da coordenada  $z$  em um período. (b) Espectro de Lyapunov. Para ambos os gráficos, o eixo  $s$  foi dividido em  $1 \times 10^3$  pontos.

para o sistema (4.2), ambos calculados para pontos localizados sobre a linha azul

$r = 1,2375s + 30$  desenhada na Fig. 4.2(a), onde  $700 < s < 2050$ . O diagrama de bifurcações da Fig. 4.4(a) foi construído seguindo os máximos da variável  $z$  em um período, como uma função dos parâmetros  $r$  e  $s$ , sempre com  $\sigma = 10$  e  $b = 8/3$ . Desta forma, para cada par  $(s, r)$ , um único valor de  $z$  significa ciclo-1, dois valores distintos de  $z$  significa ciclo-2, e assim sucessivamente. Linhas verticais de pontos indicam soluções caóticas. É claro da Fig 4.4(a), que temos cinco janelas periódicas, alternadas com regimes caóticos. As duas janelas mais destacadas estão relacionadas com as regiões pretas que mais se destacam dentro da região caótica na Fig. 4.2(a). É também claro, que nestas duas janelas ocorrem somente bifurcações inversas, quando  $s$  e  $r$  são aumentados. Lembramos que estas bifurcações inversas são típicas do sistema de Lorenz [2]. Como é bem sabido, regiões periódicas são caracterizadas pelo maior expoente de Lyapunov igual a zero, enquanto regiões caóticas tem maior expoente de Lyapunov maior do que zero, fatos que podem ser conferidos na Fig 4.4(b). É importante destacar aqui que o número de máximos em um período depende da variável considerada e que, independentemente da escolha feita, o comportamento qualitativo do sistema não é mudado.

# Capítulo 5

## Conclusões

Neste trabalho fizemos a caracterização dos estados de um sistema dinâmico a tempo discreto e de um sistema dinâmico a tempo contínuo. O sistema discreto considerado foi um sistema tridimensional com uma não-linearidade quadrática e que consiste de um acoplamento linear simétrico de três mapas quadráticos, Eq. (3.1). O sistema contínuo tratou-se de um sistema quadridimensional obtido por Stenflo [3] e que se considera uma generalização do sistema de Lorenz, Eq. (4.2).

Observamos que o sistema discreto (3.1) apresenta dois tipos de rota para o caos, uma por dobramento de período e outra via quase-periodicidade. A rota para o caos via dobramento de período é do tipo  $1 \times 2^n$ , típica do mapa quadrático e que continua aparecendo apesar do acoplamento. Mostramos que o sistema exibe várias rotas para o caos via quase-periodicidade, devido a bifurcações de Naimark-Sacker das órbitas periódicas estáveis da cascata  $1 \times 2^n$ . Também detectamos uma bifurcação de Naimark-Sacker a partir de uma órbita de período 72, apesar do fato de órbitas estáveis de períodos altos geralmente possuírem bacias de atração pequenas e, sendo assim, de difícil detecção. Construímos também um espaço de parâmetros bidimensional (Fig. 3.1) que diferencia utilizando cores, regiões caóticas, hipercaóticas e quase-periódicas.

Para o sistema contínuo (4.2) encontramos as expressões analíticas para as superfícies, no espaço de parâmetros quadridimensional, onde as bifurcações do tipo forquilha e Hopf acontecem. Mostramos numericamente que quando dois parâmetros são mantidos fixos enquanto os outros dois são variados, que o espaço de parâmetros bidimensional apresenta regiões periódicas imersas na região caótica. Como um resultado de nossa investigação numérica, concluímos ainda que o sistema de Lorenz-

Stenflo não apresenta solução hipercaótica para  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  e uma grande faixa de parâmetros  $r$  e  $s$  considerada. Contudo, até onde sabemos, a não existência de mais de um expoente de Lyapunov maior do que zero para este sistema ainda não foi provada.

# Bibliografia

- [1] R. M. May, *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, Nature **261**, 459, 1976.
- [2] E. N. Lorenz, *Deterministic Nonperiodic Flow*, Journal of the Atmospheric Sciences **20**, 130, 1963.
- [3] L. Stenflo, *Generalized Lorenz Equations for Acoustic-Gravity Waves in the Atmosphere*, Physica Scripta **53**, 84, 1996.
- [4] M. Y. Yu, B. Yang, *Periodic and Chaotic Solutions of the Generalized Lorenz Equations*, Physica Scripta **54**, 140, 1996.
- [5] M. Y. Yu, C. T. Zhou, C. H. Lai, *The Bifurcation Characteristics of the Generalized Lorenz Equations*, Physica Scripta **54**, 321, 1996.
- [6] C. Zhou, C. H. Lai, M. Y. Yu, *Bifurcation behavior of the generalized Lorenz equations at large rotation numbers*, Journal of Mathematical Physics **38**, 5225, 1997.
- [7] M. Y. Yu, *Some Chaotic Aspects of the Lorenz-Stenflo Equations*, Physica Scripta **T82**, 10, 1999.
- [8] S. Banerjee, P. Saha, A. R. Chowdhury, *Chaotic Scenario in the Stenflo Equations*, Physica Scripta **63**, 177, 2001.
- [9] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge University Press, New York, 2000.
- [10] N. F. Ferrara, C. P. C. Prado, *Caos: Uma Introdução*, Editora Edgar Blücher Ltda, São Paulo, 1995.

- [11] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Westview Press, Cambridge, 2000.
- [12] W. Wu, Z. Chen, Z. Yuan, *The evolution of a novel four-dimensional autonomous system: Among 3-torus, limit cycle, 2-torus, chaos and hyperchaos*, *Chaos, Solitons & Fractals*, doi10.1016/j.chaos.2007.07.016, 2007.
- [13] O. E. RöSSLer, *An equation for hyperchaos*, *Physics Letters A* **71**, 155, 1979.
- [14] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, J. A. Vastano, *Determining Lyapunov Exponents from a time series*, *Physica D* **16**, 285, 1985.
- [15] K. T. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke, *Chaos An Introduction to Dynamical Systems*, Springer, New York, 1996.
- [16] J. A. C. Gallas, *Structure of the Parameter Space of the Hénon Map*, *Physical Review Letters* **70**, 2714, 1993.
- [17] M. Monti, W. B. Pardo, J. A. Walkenstein, E. Rosa Jr., C. Grebogi, *Color Map of Lyapunov Exponents of Invariant Sets*, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **9**, 1459, 1999.
- [18] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, New York, Springer-Verlag, 2003.
- [19] H. G. Schuster, *Deterministic chaos. An introduction*, VCH, Weinheim, 2005.
- [20] F. R. Gantmacher, *Theory of Matrices*, vol. 1, Chelsea, New York, 1989.
- [21] C. Bonatto, J. C. Garreau, J. A. C. Gallas, *Self-Similarities in the Frequency-Amplitude Space of a Loss-Modulated CO<sub>2</sub> Laser*, *Physical Review Letters* **95**, 143905, 2005.
- [22] C. Bonatto, J. A. C. Gallas, *Accumulation horizons and period adding in optically injected semiconductor lasers*, *Physical Review E* **75**, 055204, 2007.
- [23] H. A. Albuquerque, R. M. Rubinger, P. C. Rech, *Self-similar structures in a 2D parameter-space of an inductorless Chua's circuit*, *Physics Letters A* **372**, 4793, 2008.

- [24] H. A. Albuquerque, P. C. Rech, *A Parameter-Space of a Chua System with a smooth nonlinearity*, International Journal of Bifurcation and Chaos, accepted, 2008.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)