

# Análise dos efeitos da temperatura nos acoplamentos de modelos escalares $O(N) \times O(N)$

AUTORA<sup>1</sup>:

JÚLIA ESTEVES PARREIRA

ORIENTADOR:

MARCUS E. BENGHI PINTO

*Dissertação apresentada à Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.*

**UFSC - Florianópolis**

**Março de 2005**

---

<sup>1</sup> Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

# Análise dos efeitos da temperatura nos acoplamentos de modelos escalares $O(N) \times O(N)$

Júlia Esteves Parreira

Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de **Mestre em Física**, na área de concentração em Física Matemática, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação.

---

Prof. Dr. Marcelo Henrique Romano Tragtenberg  
(**Coordenador do Curso**)

## BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Marcus Emmanuel Benghi Pinto  
Departamento de Física, UFSC  
Orientador

---

Prof. Dr. Rudnei de Oliveira Ramos  
Departamento de Física Teórica, UERJ

---

Prof. Dr. José Carlos Brunelli  
Departamento de Física, UFSC

---

Prof. Dr. Wagner Figueiredo  
Departamento de Física, UFSC

---

Prof. Dr. Roberto Cid Fernandes Jr.  
Departamento de Física, UFSC  
(Suplente)

# Agradecimentos

Marcus, por me ensinar tanta Física, me ensinar a trabalhar em Física e a comunicar o trabalho feito, muito obrigada.

Muito obrigada minha família, papai, mamãe, Juana e Joãozinho, porque o único chão firme que eu conheço é ao lado de vocês.

Muito obrigada mestres Sidney e Kuhnen, pelos belos ensinamentos e exemplos. A minha perseverança nessa profissão tem tudo a ver com a convivência com pessoas como vocês, que trabalham com a beleza de artistas que são.

Muito obrigada ao Décio, pois a rotina da Física me fez esquecer que minha alma é de filósofa, e agora eu me lembro.

Muito obrigada amigos companheiros da UFSC, juntos na alegria e na tristeza, nos churrascos e nas listas.

Muito obrigada aos indiretamente, mas intimamente, envolvidos nesse projeto: David, Oboé, Detlev, Jesus, Isa, Paula e Bebeto.

# SUMÁRIO

<i>Resumo</i> . . . . .	vi
<i>Abstract</i> . . . . .	vii
1. <i>Introdução</i> . . . . .	9
1.1 Teoria Quântica de Campos . . . . .	11
1.1.1 Teoria escalar $\lambda\phi^4$ . . . . .	12
1.1.2 Teoria Quântica de Campos em temperaturas finitas . . . . .	14
1.2 Grupos $U(1)$ e $O(2)$ . . . . .	15
1.3 Simetrias . . . . .	16
1.3.1 Simetrias em Cosmologia e Matéria Condensada . . . . .	17
1.3.2 Quebra e restauração de simetrias . . . . .	18
1.3.3 Quebra inversa de simetria e não-restauração de simetria . . . . .	19
2. <i>Modelos escalares <math>O(N) \times O(N)</math> relativísticos e não-relativísticos</i> . . . . .	22
2.1 Limite não-relativístico da densidade Lagrangiana para o modelo escalar . . . . .	22
2.1.1 Motivação: obtenção da equação de Schrödinger a partir da equação de Klein-Gordon . . . . .	22
2.1.2 Densidade Lagrangiana não-relativística . . . . .	23
2.2 Condições de estabilidade . . . . .	25
2.2.1 Máximos e mínimos de uma função de duas variáveis . . . . .	25
2.2.2 Limite inferior do potencial . . . . .	25
3. <i>Efeitos térmicos para as autoenergias: modelos escalares <math>O(N)</math></i> . . . . .	28
3.1 Função de Green de dois pontos . . . . .	28
3.2 Modelo escalar $O(2)$ relativístico . . . . .	30
3.2.1 Simetria do potencial em relação ao estado fundamental . . . . .	32
3.2.2 Diagramas de fase . . . . .	33
3.3 Modelo escalar $O(2)$ não-relativístico . . . . .	33
3.3.1 Simetrias do potencial . . . . .	35
3.3.2 Conclusões . . . . .	35

4.	<i>Efeitos térmicos para as autoenergias: modelos escalares <math>O(N_\Phi) \times O(N_\Psi)</math></i>	37
4.1	Modelo escalar $O(N_\Phi) \times O(N_\Psi)$ relativístico	37
4.1.1	Autoenergias térmicas	38
4.1.2	Análise das simetrias da teoria	39
4.2	Modelo escalar $O(N_\Phi) \times O(N_\Psi)$ não-relativístico	43
4.2.1	Autoenergias térmicas	44
4.2.2	Análise das simetrias da teoria	45
4.2.3	Conclusões	46
5.	<i>Correções térmicas para os acoplamentos</i>	47
5.1	Interações entre os diferentes campos	47
5.2	Função de Green de 4-pontos	48
5.3	Cálculo das correções térmicas	48
5.3.1	O caso relativístico	48
5.3.2	O caso não-relativístico	50
5.3.3	Conclusões	53
6.	<i>Transições de fase</i>	55
6.1	Resumo dos principais resultados	55
6.1.1	Autoenergias em altas temperaturas	55
6.1.2	Acoplamentos em altas temperaturas	56
6.2	Refinamento do cálculo das autoenergias	56
6.2.1	Relativístico	56
6.2.2	Não-relativístico	57
7.	<i>Conclusões</i>	64
8.	<i>Apêndices</i>	66
8.1	Apêndice I: Parametrização de Feynman	66
8.2	Apêndice II: Soma sobre as frequências bosônicas de Matsubara	67
8.3	Apêndice III: Regras de Feynman	67
8.3.1	Modelo escalar relativístico	67
8.3.2	Modelo escalar não-relativístico	68
8.4	Apêndice IV: Fatores de simetria	69
8.4.1	Diagramas de 2-pontos e 1-loop	69
8.4.2	Diagramas de 4-pontos e 1-loop	71
8.5	Apêndice V: Detalhes dos cálculos dos diagramas de Feynman	73
8.5.1	Cálculo do diagrama de 2-pontos com 1-loop	73
8.5.2	Cálculo do diagrama de 4-pontos com 1-loop	77
8.5.3	Expressões para o acoplamento em função da temperatura	83

# Resumo

O objetivo deste trabalho é analisar como os fenômenos contra-intuitivos conhecidos como *Não Restauração de Simetria* e *Quebra Inversa de Simetria* se manifestam em teorias de campos multi-escalares com simetria  $O(N) \times O(N)$ . Tanto a versão relativística como a não-relativística de tais modelos são aqui investigadas. Para o caso relativístico, que é relevante para Cosmologia, é revisado como tais fenômenos persistem em altas temperaturas mesmo quando os efeitos térmicos nos acoplamentos são considerados. A parte original do presente trabalho diz respeito ao caso não-relativístico, que é relevante para a Física da Matéria Condensada. Em particular, será mostrado que, ao contrário de seus análogos relativísticos, esses modelos não apresentam *Quebra Inversa de Simetria* e/ou *Não Restauração de Simetria* quando a importante dependência térmica dos acoplamentos é considerada.

# Abstract

The aim of this work is to analyse how the counter intuitive phenomena known as *Symmetry Non Restoration* and *Inverse Symmetry Breaking* manifest themselves within multi scalar field theories displaying  $O(N) \times O(N)$  symmetry. Both, the relativistic as well as the non relativistic versions of such models are investigated here. For the relativistic case, which is important for Cosmology, we review how those phenomena persist at high temperatures even when thermal effects on the couplings are considered. The original part of the work regards the study of the non relativistic case, which is relevant for Condensed Matter Physics. In particular, we show, that contrary to their relativistic counter parts, those models cannot display ISB and/or SNR when the important thermal dependence of the couplings is considered.

# Capítulo 1

## Introdução

Na maioria das áreas da Física Moderna, fenômenos interessantes decorrem das transições de fase sofridas pelos sistemas como consequência da variação de parâmetros externos tais como a temperatura. O ferromagneto de Heisenberg, por exemplo, encontra-se numa fase simétrica (invariante frente a rotações) em altas temperaturas. Contudo, essa simetria é perdida em baixas temperaturas. Já na teoria fundamental das interações fortes (Cromodinâmica Quântica, QCD), os quarks (livres em altas temperaturas) possuem massa nula, e, nessa situação, a teoria apresenta uma fase simétrica (frente às transformações quirais). Como no caso do ferromagneto, a simetria quiral é perdida em temperaturas mais baixas, quando os quarks passam para a fase confinada em que formam os hádrons (por exemplo, prótons, nêutrons e mésons). O estudo dessa transição de fase é de importância capital para a Cosmologia, já que a mesma deve ter ocorrido no Universo Primordial. Para a QCD, a determinação teórica do valor exato da temperatura crítica e o tipo da transição são problemas em aberto. Ao mesmo tempo, esta transição de fase está sendo estudada experimentalmente no RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider).

Tanto no caso do ferromagneto como no caso dos quarks, a análise das transições de fase se dá em conjunto com o estudo da quebra/restauração de simetrias. Devido a essas similaridades, a Física Moderna tem observado um crescente intercâmbio de técnicas e/ou modelos entre a Física de Partículas, Cosmologia e Matéria Condensada, com a conseqüente criação de uma linguagem comum. O Grupo de Renormalização de Wilson, a Expansão- $\epsilon$  e teorias de campos escalares com simetria  $O(N)$  são bons exemplos desse interesse mútuo.

Ao mesmo tempo, teorias de campos escalares (que representam partículas com spin 0) com simetrias do tipo  $O(N)$  são de grande importância em várias áreas da Física. Esses campos podem representar, por exemplo, ínflatons em Cosmologia, partículas de Kibble-Higgs no Modelo Padrão das partículas elementares, pares de Cooper na supercondutividade e átomos bosônicos em condensados de Bose-Einstein.

Sob o ponto de vista das transições de fase, um resultado quase geral previsto para a maioria desses modelos, é o de que as simetrias que foram quebradas em baixas temperaturas serão invariavelmente restauradas em altas temperaturas. Contudo, podem ocorrer exceções como a observada por Weinberg em um dos trabalhos pioneiros de teorias de campos em temperaturas finitas [1]. Em seu estudo, ele analisou uma extensão dos modelos escalares *relativísticos* com grupo de simetria  $O(N_\Phi) \times O(N_\Psi)$ , onde  $\Phi$  e  $\Psi$  representam diferentes campos que interagem de três diferentes maneiras entre si. Como veremos em detalhes, estes diferentes acoplamentos possibilitam o aparecimento de transições de fase mais exóticas que caracterizam a passagem de estados mais simétricos para estados menos simétricos com o *aumento* de temperatura. Intuitivamente esperar-se-ia que o sistema retornasse para a fase simétrica em altíssimas temperaturas. No entanto, os resultados obtidos por Weinberg, através do uso de teoria de perturbação, mostram a possibilidade de que o sistema relativístico permaneça indefinidamente na fase menos simétrica.

A passagem de uma fase mais simétrica para uma menos simétrica com o aumento de temperatura chama-se Quebra Inversa de Simetria (ISB) e ocorre em sistemas não relativísticos tais como o sal de Rochelle. Entretanto, como esperado, e ao contrário dos resultados obtidos em [1] para o caso relativístico, o sal de Rochelle retorna à fase mais simétrica em temperaturas mais altas.

Suspeitou-se então que os resultados de Weinberg fossem um produto da aproximação perturbativa por ele utilizada, e que a consideração da dependência térmica das interações pudesse reverter a situação. Contudo, trabalhos recentes que utilizam poderosos métodos não-perturbativos, como o Grupo de Renormalização de Wilson [2] e a Expansão  $\delta$ -Linear [3], corroboram os resultados de Weinberg.

Esses trabalhos também confirmam a possibilidade da Não Restauração de Simetria (SNR) ocorrer em modelos escalares relativísticos com simetria  $O(N_\Phi) \times O(N_\Psi)$ . Este segundo fenômeno tem como característica marcante o fato de que um sistema com simetria quebrada em temperatura nula permanece nessa mesma em altas temperaturas.

Recentemente, os fenômenos associados com o aparecimento de ISB e SNR em modelos relativísticos encontraram aplicações na Cosmologia em conexão, por exemplo, com o problema do monopolo magnético. Teorias de grand unificação em escalas de temperatura relevantes para o Universo Primordial podem ser descritas por modelos com simetria  $SU(5)$ . Já o Modelo Padrão das interações fundamentais (forte e eletrofraca) é descrito pelo grupo  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ . Teorias atuais prevêem a passagem (quebra) do grupo de simetria  $SU(5)$  para  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ , e o mecanismo de Kibble prevê então o aparecimento de defeitos topológicos tais como monopolos magnéticos e cordas cósmicas. Contudo, os astrofísicos não observam a presença de monopo-

los magnéticos que dificilmente escapariam à detecção (problema do monopolo magnético). O fenômeno da SNR foi então empregado para explicar a ausência de monopolos [3, 4].

Aqui, nosso objetivo é analisar como os fenômenos de ISB e SNR se manifestam em versões *não-relativísticas* dos modelos escalares  $O(N_\Phi) \times O(N_\Psi)$ . Inicialmente, será mostrado que a aplicação ingênua de teoria de perturbação também aponta para a possibilidade de que esses fenômenos se manifestem indefinidamente em altas temperaturas. Em seguida, serão considerados os efeitos da temperatura nos diferentes acoplamentos, mostrando então que, ao contrário do caso relativístico, ISB e SNR não resistem ao aumento da temperatura. Isto é altamente satisfatório, visto que a versão não-relativística pode eventualmente modelar sistemas físicos relevantes para a Física da Matéria Condensada, tais como gases de Bose-Einstein acoplados.

Este capítulo introdutório tem por objetivo contextualizar o trabalho que virá na seqüência, explanando superficialmente sobre as teorias que servem de base para esta dissertação. No capítulo 2, são especificadas as teorias que serão estudadas, bem como as condições de estabilidade das mesmas. No capítulo 3, são calculadas as correções térmicas às autoenergias das teorias com simetria  $O(N)$ . No capítulo seguinte, são calculadas as correções térmicas às autoenergias das teorias com simetria  $O(N_\Phi) \times O(N_\Psi)$ . Já no capítulo 5, são calculadas as correções térmicas aos acoplamentos das teorias  $O(N_\Phi) \times O(N_\Psi)$ . Em seguida, no capítulo 6, são investigadas as transições de fase caracterizadas por quebras e restaurações de simetria a partir dos cálculos dos capítulos 3, 4 e 5. Finalmente, apresentamos nossas conclusões no capítulo 7. São também apresentados, no capítulo 8, apêndices, contendo os detalhes dos cálculos.

O presente capítulo é dividido em três seções independentes, sendo a primeira sobre a Teoria Quântica de Campos especificamente utilizada na dissertação, enquanto a segunda trata da Teoria de Grupos e a terceira dos conceitos de quebra e restauração de simetrias.

## 1.1 Teoria Quântica de Campos

A Teoria Quântica de Campos (TQC) é essencialmente uma teoria quântica para sistemas com infinitos graus de liberdade. Em sua formulação relativística, essa teoria abriga possibilidades que a equação de Schrödinger não engloba, como os fenômenos de criação e aniquilação de partículas.

A TQC tem tradicionalmente duas formas distintas de construção. O formalismo canônico assemelha-se à forma mais tradicional de abordagem da Mecânica Quântica, através da im-

posição de relações de comutação entre operadores de coordenadas e os respectivos operadores de momentos canonicamente conjugados. No caso da TQC, ao invés de operadores de coordenadas como as variáveis principais, usam-se operadores de campos. Outra forma de construção mais poderosa é o formalismo de Integração de Trajetória [5], comumente utilizado em Cromodinâmica Quântica, que será utilizado neste trabalho e discutido com mais detalhes na seqüência.

### 1.1.1 Teoria escalar $\lambda\phi^4$

Em TQC, um sistema é dito modelado pela teoria escalar  $\lambda\phi^4$  relativística se a seguinte densidade Lagrangiana lhe é atribuída:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4, \quad (1.1)$$

onde  $\mu = 0, 1, 2, 3$ .

O primeiro termo é o termo cinético, relacionado à propagação das partículas (campos escalares de spin 0), o segundo diz respeito à massa, enquanto que o último pode ser interpretado como um termo de interações quárticas. No caso de o campo  $\phi$  ter apenas uma componente, a densidade Lagrangiana (1.1) tem uma simetria discreta de reflexão, sendo invariante frente à transformação  $O(1)$  (ou  $Z_2$ ):

$$\phi \rightarrow -\phi. \quad (1.2)$$

No Modelo Padrão, a teoria escalar  $\lambda\phi^4$  modela o setor de Higgs. Em Matéria Condensada, costuma-se utilizar uma versão não-relativística, que modela, por exemplo, um gás bosônico, homogêneo, diluído e fracamente interagente, a baixa densidade e temperatura, com interações binárias do tipo ‘ $\delta$  de Dirac’ [6]. Além disso, essa teoria ainda se assemelha ao modelo de Ising e é utilizada para estudá-lo.

### Diagramas de Feynman na teoria escalar $\lambda\phi^4$

Os diagramas de Feynman, ferramentas de central importância na TQC, são derivados da utilização da aproximação perturbativa em uma dada teoria. A partir de uma densidade Lagrangiana deve-se calcular a amplitude de probabilidade de um sistema que esteja originalmente ( $t \rightarrow -\infty$ ) em seu estado fundamental (também chamado estado de vácuo) encontrar-se no mesmo estado quando  $t \rightarrow +\infty$ , estando sob a influência de um agente externo denominado fonte. Esse termo,  $J(x)$ , introduzido por Schwinger, presta-se à criação e aniquilação de

partículas. Essa amplitude de probabilidade é denominada amplitude de transição vácuo-vácuo, sendo também a geradora funcional de qualquer função de Green:

$$Z[J(x)] = \langle 0, t = \infty | 0, t = -\infty \rangle_J \equiv \langle 0^+ | 0^- \rangle_J = \int \mathbb{D}\varphi e^{-\frac{i}{\hbar} \int d^4x (\mathcal{L} + J\varphi)}. \quad (1.3)$$

A função de Green de  $n$ -pontos é obtida a partir de  $Z[J(x)]$  derivando-o (funcionalmente)  $n$  vezes em relação a  $J(x)$  e fazendo, posteriormente,  $J(x) = 0$ .

O gerador funcional das funções de Green conectadas,  $W[J(x)]$ , é definido por [7]:

$$e^{iW[J(x)]} = \langle 0^+ | 0^- \rangle_J. \quad (1.4)$$

Por outro lado, o gerador funcional das funções de Green conectadas irreduzíveis,  $\Gamma[\phi_c]$ , é chamado ação efetiva e é obtido da forma descrita a seguir. Primeiro define-se o campo clássico:

$$\phi_c(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \frac{\langle 0^+ | \phi_{0p}(x) | 0^- \rangle_J}{\langle 0^+ | 0^- \rangle_J}, \quad (1.5)$$

e o valor esperado do vácuo:

$$\langle \phi \rangle = \lim_{J \rightarrow 0} \phi_c. \quad (1.6)$$

A ação efetiva é a transformada de Legendre de  $W[J]$ :

$$\begin{aligned} \Gamma[\phi_c] &= W[J] - \int dx J(x) \phi_c(x), \\ \text{de forma que } \frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c} &= -J(x). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Quando  $J(x) \rightarrow 0$ ,  $\phi_c(x) \rightarrow \langle \phi \rangle$ , então  $\langle \phi \rangle$  é uma solução da equação:

$$\left. \frac{d\Gamma[\phi_c]}{d\phi_c} \right|_{\langle \phi \rangle} = 0. \quad (1.8)$$

A expansão usual de  $\Gamma[\phi_c]$ , em potências de  $\phi_c$ , é:

$$\Gamma[\phi_c] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \phi_c(x_1) \dots \phi_c(x_n), \quad (1.9)$$

ou, equivalentemente, por transformada de Fourier:

$$\Gamma[\phi_c] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dp_1 \dots dp_n \delta^4(p_1 + \dots + p_n) \Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \tilde{\phi}_c(p_1) \dots \tilde{\phi}_c(p_n). \quad (1.10)$$

Uma expansão alternativa é em termos de  $\phi_c$  e suas derivadas:

$$\Gamma[\phi_c] = \int dx \left[ -U(\phi_c(x)) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_c)^2 Z(\phi_c(x)) + \dots \right]. \quad (1.11)$$

A função  $U(\phi_c)$  é chamada potencial efetivo e contém correções quânticas ao potencial clássico  $V(\phi_c)$ , onde, para a Eq. (1.1):

$$V(\phi_c) = \frac{1}{2} m^2 \phi_c^2 + \frac{1}{4!} \phi_c^4 = \text{---}\times\text{---} + \text{---}\times\text{---} \quad (1.12)$$

No caso em que  $\phi_c(x) = \langle \phi \rangle = a$ , uma constante, todos os termos da expansão (1.11) se anulam com exceção do primeiro, de forma que:

$$\Gamma[\phi_c] = -\Omega U(\phi_c), \quad (1.13)$$

onde  $\Omega$  é o volume total do espaço-tempo. Assim, temos que o potencial efetivo

$$U(\phi_c) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi_c^n \Gamma^{(n)}(p_i = 0) = \quad (1.14)$$

$$\text{---}\times\text{---} + \text{---}\times\text{---} + \text{---}\bigcirc\text{---} + \text{---}\times\text{---} + \dots$$

é função geradora das funções de Green irreduzíveis conectadas com momento externo nulo.

### 1.1.2 Teoria Quântica de Campos em temperaturas finitas

Existe uma grande semelhança estrutural entre o gerador funcional das funções de Green e a função de partição. Explorando essa semelhança, é possível obter-se propriedades termodinâmicas de um sistema partindo de cálculos sobre o gerador funcional em TQC e fazendo analogia à função de partição da Mecânica Estatística.

Segundo a Mecânica Estatística, um sistema no limite termodinâmico, à temperatura  $T$ , com Hamiltoniano  $H(q_i, p_i)$ , tem a função de partição dada por<sup>1</sup> [7]:

<sup>1</sup> Serão adotadas, ao longo de todo o texto, unidades naturais, caracterizadas por  $c = k_B = \hbar = 1$ .

$$Z = \text{Tr} \exp(-\beta H) = \sum_q \langle q | \exp(-\beta H) | q \rangle, \quad (1.15)$$

onde  $\beta = 1/T$ , e  $T$  representa a temperatura.

Na formulação de integrais de trajetória da mecânica quântica, a (amplitude de) probabilidade de transição de um estado  $q_i(t_i)$  para  $q_f(t_f)$  é:

$$\langle q_{t_f}^f | q_{t_i}^i \rangle = \langle q^f | \exp[-i(t_f - t_i)H] | q^i \rangle = \int \mathbb{D}q \int \mathbb{D}p \exp \left\{ i \int_{t_i}^{t_f} dt [p \cdot \dot{q} - H(p, q)] \right\}. \quad (1.16)$$

Comparando as expressões (1.15) e (1.16), da primeira pode-se obter a segunda considerando:

- $t_i = 0$  e  $it_f = \beta$ ,
- $q_i = q_f \rightarrow q(\beta) = q(0)$  e integrar sobre um certo subspaço das funções periódicas determinado de acordo com a natureza bosônica ou fermiônica das partículas.

A função de partição da mecânica estatística pode então, utilizando-se o formalismo de integrais de trajetória da TQC, ser escrita como [8]:

$$Z = \text{Tr} \exp(-\beta H) = \int_{\text{funcoesperiodicas}} \mathbb{D}q \int \mathbb{D}p \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \left[ ip \frac{dp}{d\tau} - H \right] \right\}. \quad (1.17)$$

A tabela 1.1 expõe um paralelo entre a Teoria Quântica de Campos e a Mecânica Estatística.

Teoria de Campos	Mecânica Estatística
$Z = e^{iW}$	$Z = e^{-iF/NkT}$
$W[J] = \Gamma[\phi] + \int J\phi$	$F(T) = U(S) - TS$

Tab. 1.1: Analogias entre Teoria de Campos e Mecânica Estatística.

## 1.2 Grupos $U(1)$ e $O(2)$

Um grupo é um conjunto de operações de simetria. A representação de um grupo é o mapeamento de cada elemento dele em uma matriz [9, 10].

O grupo chamado  $O(N)$  é aquele cujo mapeamento se dá em matrizes reais ortogonais, sendo  $N$  representativo da dimensão das matrizes correspondentes. Como toda rotação pode ser

representada por uma matriz ortogonal, um grupo representante de rotações em  $N$  dimensões é um grupo  $O(N)$ . Por exemplo, o grupo  $O(2)$  representa rotações em um plano, sendo que o comprimento de um segmento é invariante sob essas rotações. Um ponto  $(x, y)$  em um plano é levado a outro ponto  $(x', y')$  por uma rotação de um ângulo  $\theta$ . Isso pode ser representado como:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$O(\theta) \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Se na Eq. (1.1)  $\phi$  for um campo com uma única componente, então a densidade Lagrangiana é invariante frente as transformações de seu campo por elementos do grupo  $O(1)$ , que tem apenas os elementos  $I$  e  $-I$ . Considerando agora a Eq. (1.1) com duas componentes,  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , obtemos a densidade Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_2)^2 - \frac{m^2}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{\lambda}{4!} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2, \quad (1.18)$$

que é invariante frente ao grupo  $O(2)$ .

A Eq. (1.18) pode ser reescrita em termos de um campo complexo,  $\phi = \varphi_1 + i\varphi_2$ , como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi^*) (\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2} \phi^* \phi - \frac{\lambda}{4!} (\phi^* \phi)^2, \quad (1.19)$$

que é invariante frente a transformações  $U(1)$  do tipo  $\phi \rightarrow e^{i\theta} \phi$ . Essa é uma simetria contínua, ao contrário da simetria da densidade Lagrangiana (1.1), que é discreta. Os grupos  $U(1)$  e  $O(2)$  são ditos isomorfos. A simetria discreta é um caso especial da contínua, com  $\theta = \pi$ . Quando  $\theta = \theta(x)$ , a simetria é dita local, e quando  $\theta$  não depende de  $x$ , a simetria é global.

O campo  $\phi$  da Eq. (1.1) pode ter  $M$  componentes reais, nesse caso a densidade Lagrangiana será invariante frente ao grupo  $O(M)$ .

### 1.3 Simetrias

O termo *simetria* é muito vago, mas não há dúvidas de que ele está relacionado a harmonia, beleza e unidade, e não é desvinculada desses atributos que na ciência a simetria ocupa seu lugar. Segundo Platão: ‘The most beautiful of all links is that which makes, of itself and of the things it connects, the greatest unity possible; and it is the proportion (summetria) which

realizes it in the most beautiful way.’<sup>2</sup> (Platão, Timeu, 31c) [11].

Atualmente, na Física, simetria tem um conceito bem definido: é a invariância de algum objeto, concreto como uma maçã ou abstrato como uma equação, submetido a alguma transformação. Mais especificamente, uma certa simetria é uma invariância sobre um grupo específico de transformações. Nesse contexto se inserem os teoremas de Noether, de 1918, que associam simetria e leis de conservação.

Dois tipos de simetria devem ser distinguidos: simetrias externas, que são relacionadas às dimensões espaciais, e simetrias internas, relacionadas a propriedades não espaciais de um sistema, como spin e isospin.

### 1.3.1 Simetrias em Cosmologia e Matéria Condensada

Sistemas quânticos de matéria condensada, como o He líquido, condensados de Bose-Einstein, supercondutores e superfluidos, são normalmente estudados via *teoria efetiva*, pois, no estado fundamental, seus átomos ou elementos básicos apresentam fenômenos coletivos, dificultando uma investigação do comportamento da estrutura microscópica. Desta forma, o estudo das simetrias do estado fundamental é muito importante para a investigação desses sistemas [12].

Ao mesmo tempo, a Teoria Quântica de Campos (TQC) é uma ferramenta teórica muito utilizada para estudar o Universo Primordial. Por outro lado, a investigação experimental da Cosmologia é delicada. Sendo assim, uma ponte entre a Cosmologia e a Matéria Condensada pode auxiliar na compreensão de fenômenos cosmológicos relacionados com transições de fase, pois, muitas vezes, o mesmo tipo de TQC que é utilizada em Cosmologia é também utilizada em Matéria Condensada. Como essa última é exaustivamente explorada em laboratório, sistemas físicos relevantes e suas contrapartes teóricas podem ser diretamente confrontados. A partir daí, por analogia, os resultados obtidos pela TQC em Cosmologia ganham alguma interpretação [13].

Teorias Cosmológicas sugerem que o Universo Primordial passou por uma seqüência de transições de fase associadas com quebras de simetria, gerando defeitos topológicos que resultaram na estrutura atual do Universo. Transições com características comuns às do Universo Primordial são encontradas em sistemas de matéria condensada a baixa temperatura. Em 1985, Zurek sugeriu que a formação de defeitos em sistemas de matéria condensada através de transições de fase de quebras de simetria servissem de analogia para estudar o mecanismo de Kibble. Na década de 90 foram feitos experimentos com  $He^3$ ,  $He^4$  e cristais líquidos com resultados que confirmaram as previsões de Kibble-Zurek. Inspirada nesses bons resultados, a ESF (‘European Science Foundation’) coordena desde 2001 o projeto COSLAB - ‘Cosmology in the

---

<sup>2</sup> ‘A mais bela de todas as relações é aquela que faz, consigo mesma e com coisas que conecta, a máxima unidade possível; e é a proporção (simetria) que realiza isso da forma mais bonita.’

Laboratory’, um programa mundial de pesquisa que agrega cientistas de Física de Partículas, Cosmologia e Matéria Condensada. O objetivo é utilizar a Matéria Condensada como um laboratório para simulações e investigações em Cosmologia.

### 1.3.2 Quebra e restauração de simetrias

O termo *quebra espontânea de simetria* se refere a sistemas com alguma simetria do Hamiltoniano que não é compartilhada por algum(ns) de seus autoestados [14].

Um exemplo que ilustra bem a quebra espontânea de simetria é o ferromagneto de Heisenberg. A interação spin-spin dos átomos pode ser descrita por um Hamiltoniano do tipo:

$$H = - \sum_{i,j} J_{ij} (\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j), \quad (1.20)$$

o qual é invariante frente a rotações.

O estado fundamental desse ferromagneto consiste em seus spins estarem todos alinhados na mesma direção. Em uma temperatura relativamente alta, os spins ficam direcionados aleatoriamente e descorrelacionados em virtude da agitação térmica. O material nessa situação é desmagnetizado. Desprezando-se efeitos de borda, o sistema tem simetria esférica, sendo invariante por qualquer rotação. Se a temperatura é progressivamente baixada, a agitação térmica vai diminuindo e a interação entre os spins passa a ser relevante. Devido a essa interação, eles vão se alinhando na mesma direção; tal direção é idealmente arbitrária. A figura (1.1) é um diagrama de fase para o ferromagneto de Heisenberg, onde o parâmetro de ordem é a magnetização  $M$  [15].

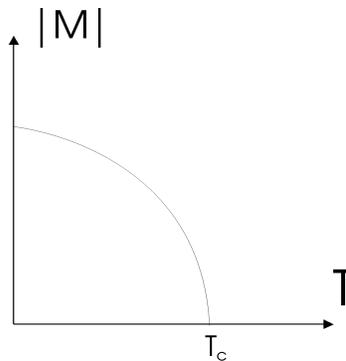


Fig. 1.1: Magnetização do ferromagneto de Heisenberg. Abaixo da temperatura crítica há uma magnetização espontânea  $\pm M(T)$ .

As infinitas direções possíveis de magnetização caracterizam estados degenerados do sistema. Um estado é levado a outro por uma rotação. O sistema, nesse novo estado, não é mais invariante

frente a rotações; a simetria anterior foi quebrada, e agora o sistema tem uma magnetização que torna as direções distintas. Se houvesse um ser inteligente morando nesse material, em temperatura relativamente baixa, seria difícil para ele supor que o espaço é isotrópico. Da mesma forma, pode haver características de simetria em nosso mundo que nos são camufladas.

### 1.3.3 Quebra inversa de simetria e não-restauração de simetria

A exemplo do ferromagneto de Heisenberg, há uma tendência de os sistemas físicos apresentarem menor simetria em temperaturas mais baixas, ao passo que os mesmos se tornam mais simétricos à medida em que a temperatura aumenta.

Contrariando essa tendência, alguns sistemas físicos diminuem sua simetria com o aumento da temperatura. Conforme já mencionado, essa atípica transição de fase ganha o nome de *quebra inversa de simetria* (ISB, ‘inverse symmetry breaking’). O aumento da temperatura deve ser acompanhado por um aumento de entropia, então alguma outra mudança no sistema deve ocorrer de forma que a variação de entropia, quando ocorre uma ISB, esteja de acordo com os postulados da termodinâmica.

#### *Exemplos de ISB em Matéria Condensada*

Os isótopos  $He^3$  e  $He^4$  sofrem uma transição de primeira ordem indo de uma fase líquida para uma fase cristalina com o aumento de temperatura, em uma pressão entre 25 e 30bar e temperatura abaixo de 1K. Essa transição é uma ISB estrutural, o  $He^3$  passa de uma fase fluida para uma fase cristalina bcc, o aumento de entropia está relacionado a graus de liberdade do spin nuclear; a transição do  $He^4$  é de uma fase superfluida para uma fase cristalina hcp, o ganho de entropia envolve fônons longitudinais [4, 16, 17].

O sal Rochelle (Tartarato Duplo de Sódio e Potássio,  $KNa(C_4H_4O_6).4H_2O$ ) tem célula unitária monoclinica entre 255K e 297K, fora dessa faixa de temperaturas tem célula unitária ortorrômbica; aos 348K derrete. Aos 255K há uma ISB estrutural, pois a estrutura ortorrômbica é mais simétrica que a monoclinica.

A teoria de materiais poliamorfos prevê uma transição para água de uma fase amorfa para uma fase líquida por volta de uma temperatura de 220K e pressão 100MPa ao ser resfriada. Essa situação é hipotética porque não são parâmetros de temperatura e pressão obtidos em laboratório, mas é interessante por ser uma ISB do líquido mais abundante e importante da Terra.

*Transições de fase em Cosmologia*

Teorias cosmológicas modernas prevêem que o resfriamento do Universo gerou as transições [13]:

- escala de Planck:  $k_B T \sim 10^{19} \text{GeV}$  ( $\sim 10^{-44} \text{s}$  após o Big-Bang);
- transições GUT:  $k_B T \sim 10^{15} \text{GeV}$  ( $\sim 10^{-35} \text{s}$ );
- quebra de supersimetria:  $k_B T \sim 10^3 \text{GeV}$  ( $\sim 10^{-12} \text{s}$ );
- transição eletrofraca:  $k_B T \sim 10^2 \text{GeV}$  ( $\sim 10^{-10} \text{s}$ );
- transição Quark-Hadron:  $k_B T \sim 10^2 \text{MeV}$  ( $\sim 10^{-1} \text{s}$ ).

Contudo, relacionados com essas transições, surgem alguns problemas tais como ([2, 4, 16]):

- *o problema do monopolo* (o setor de Kibble-Higgs de uma GUT  $SU(5)$  pode ser estudado através de uma teoria  $O(90) \times O(24)$ , e esta utilizada para investigar o problema do monopolo [6]);
- *o problema do domínio de parede* (pode ser explorado a partir de uma teoria  $O(1) \times O(1)$ );
- *bariogênese e matéria escura*;
- *violação CP*,

que ainda estão em aberto, os fenômenos de SNR e ISB estão sendo utilizados para explicá-los.

*SNR/ISB em TQC relativística*

Motivado pela quebra de simetria para o estado fundamental de um ferromagneto a temperaturas baixas e a restauração de tal simetria com o aumento da temperatura, Weinberg, em [1], questionou se as simetrias quebradas em sistemas de partículas elementares seriam restauradas pelo aquecimento do sistema em temperaturas suficientemente altas.

Ele então explorou um modelo relativístico invariante  $O(N_\Phi) \times O(N_\Psi)$  com dois campos escalares ( $\Phi$  e  $\Psi$ ) e diferentes tipos de auto-interações e interações cruzadas. Usando a aproximação perturbativa de 1-loop, ele mostrou a possibilidade de haver ISB e SNR para certos valores de parâmetros. Em um argumento que poderia colocar em xeque essas conclusões sobre SNR/ISB, poder-se-ia supor que as mesmas são resultados anômalos gerados pela teoria de perturbação e poderiam desaparecer ao considerar-se termos de ordens mais altas. Porém,

mais tarde foram utilizados outros métodos não-perturbativos que confirmaram os resultados para ISB/SNR da referência [1]. Na referência [2], utilizou-se o Grupo de Renormalização de Wilson (WRG), enquanto na referência [3], utilizou-se a Expansão  $\delta$ -Linear até 2 loops. Esses dois trabalhos consideram efeitos de temperatura nas constantes de acoplamento, ao contrário do trabalho pioneiro de Weinberg. Porém, o resultado qualitativo mais importante é o mesmo: SNR e ISB podem manifestar-se em teorias relativísticas mesmo em altas temperaturas.

### *SNR/ISB em TQC não-relativística*

Neste trabalho serão utilizadas versões *não-relativísticas* do mesmo modelo estudado por Weinberg. Em princípio, se essa teoria realmente modela sistemas reais, espera-se um resultado qualitativo diferente do caso relativístico, ou seja: a restauração das simetrias em altas temperaturas. Não parece existir na literatura um estudo similar para o problema.

Mostraremos que a aplicação ingênua de teoria de perturbação leva também, como no caso relativístico, ao aparecimento de ISB/SNR, que resiste às altas temperaturas. Em seguida, incorporaremos os efeitos da temperatura nas constantes de acoplamento para mostrar que, ao contrário do caso relativístico, estes fenômenos não mais resistem ao aumento da temperatura.

## Capítulo 2

# Modelos escalares $O(N) \times O(N)$ relativísticos e não-relativísticos

Este capítulo visa apresentar os modelos que serão estudados, estando dividido em duas seções. Na primeira, são determinadas as densidades Lagrangianas das teorias escalares  $O(N) \times O(N)$  em suas versões relativística e não-relativística. Na segunda seção são calculadas as faixas de valores possíveis para os parâmetros da teoria que garantam que ela seja estável. Além disso, as teorias serão modeladas para que possam, em eventuais extensões, servirem ao estudo de condensação de Bose-Einstein.

### 2.1 Limite não-relativístico da densidade Lagrangiana para o modelo escalar

#### 2.1.1 Motivação: obtenção da equação de Schrödinger a partir da equação de Klein-Gordon

A equação de Klein-Gordon é uma equação quantum-relativística para um campo escalar livre  $\Phi$  [18]:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Phi = 0. \quad (2.1)$$

A fim de obter uma versão não-relativística desta equação, pode-se tomar convenientemente um campo do tipo:

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2m}} e^{-imt} \varphi(\vec{x}, t), \quad (2.2)$$

onde o campo  $\varphi$  oscila no tempo muito mais lentamente que  $e^{-imt}$ .

Substituindo  $\Phi$  de (2.2) na equação de Klein-Gordon, obtém-se:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + m^2 \right) \frac{1}{\sqrt{2m}} e^{-imt} \varphi(\vec{x}, t) &= 0 \\ \Rightarrow -2im \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Como está sendo suposto que  $\varphi$  oscila muito mais lentamente que  $e^{-imt}$  no tempo, o termo  $(\partial^2/\partial t^2)\varphi$  é pequeno se comparado com  $-2im(\partial\varphi/\partial t)$  e será desprezado. Portanto, a expressão se reduz a:

$$\boxed{i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla}^2 \varphi}{2m}}. \quad (2.4)$$

Note que a equação acima é simplesmente a equação de Schrödinger com potencial nulo.

### 2.1.2 Densidade Lagrangiana não-relativística

Com o intuito de obter a densidade Lagrangiana não-relativística para dois campos escalares com auto-interações e interação cruzada, pode-se partir da densidade Lagrangiana relativística e utilizar o mesmo campo e as mesmas aproximações com os quais foi obtida a equação de Schrödinger a partir da equação de Klein-Gordon na seção anterior.

A aproximação consiste em considerar termos do tipo  $\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t}$  pequenos se comparados a termos do tipo  $-im_\Psi \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \psi$ . A densidade Lagrangiana relativística com simetria  $U(1) \times U(1)$  e os campos não-relativísticos de partida são respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (\partial_\mu \Phi^\dagger)(\partial^\mu \Phi) - m_\Phi^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{\lambda_\Phi}{3!} (\Phi^\dagger \Phi)^2 + (\partial_\mu \Psi^\dagger)(\partial^\mu \Psi) - m_\Psi^2 \Psi^\dagger \Psi - \frac{\lambda_\Psi}{3!} (\Psi^\dagger \Psi)^2 \\ &\quad - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)(\Psi^\dagger \Psi) \end{aligned} \quad (2.5)$$

e

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2m_\Phi}} e^{-im_\Phi t} \varphi(\vec{x}, t), \\ \Psi(\vec{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2m_\Psi}} e^{-im_\Psi t} \psi(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (2.6)$$

É importante salientar que os campos  $\varphi$  e  $\psi$  têm que ser complexos, pois nesse limite não-

relativístico deve haver conservação do número de partículas, quantidade proporcional a  $\varphi^\dagger\varphi$ .

A densidade Lagrangiana não-relativística obtida para dois campos escalares interagentes é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i\varphi^\dagger \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\varphi^\dagger \nabla^2 \varphi}{2m_\Phi} - \frac{\lambda_\Phi}{4! m_\Phi^2} (\varphi^\dagger \varphi)^2 + i\psi^\dagger \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\psi^\dagger \nabla^2 \psi}{2m_\Psi} - \frac{\lambda_\Psi}{4! m_\Psi^2} (\psi^\dagger \psi)^2 \\ & - \frac{\lambda}{4 m_\Phi m_\Psi} (\varphi^\dagger \varphi)(\psi^\dagger \psi). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Note como esta equação não-relativística, por ser menos simétrica (no sentido de invariância de Lorentz), é menos elegante que sua análoga relativística, Eq. (2.5).

Os acoplamentos  $\lambda$  podem ‘absorver’ convenientemente as massas que estão em seus quocientes simplificando a equação. Para tanto, podemos definir:  $\lambda_\Phi/4m_\Phi^2 \equiv u_\Phi$ ,  $\lambda_\Psi/4m_\Psi^2 \equiv u_\Psi$  e  $\lambda/4m_\Phi m_\Psi \equiv u$ . Note que, como os acoplamentos originais são adimensionais, os acoplamentos  $u_\Phi$ ,  $u_\Psi$  e  $u$  têm dimensão de [energia]<sup>-2</sup>.

Para ter em mãos uma teoria ainda mais geral, serão adicionados à densidade Lagrangiana termos de um corpo. Esses termos estão presentes também na expressão relativística, mas desaparecem ao ser tomado o limite não-relativístico. Parametrizados por  $\kappa$ , esses termos poderão, eventualmente, representar quantidades tais como o potencial químico, que é relevante no caso de gases de Bose-Einstein.

Finalmente, podemos escrever a densidade Lagrangiana não-relativística com simetria  $U(1) \times U(1)$  (que é o grupo relevante para o caso da condensação de Bose-Einstein) como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i\varphi^\dagger \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\varphi^\dagger \nabla^2 \varphi}{2m_\Phi} - \kappa_\Phi \varphi^\dagger \varphi - \frac{u_\Phi}{3!} (\varphi^\dagger \varphi)^2 + i\psi^\dagger \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\psi^\dagger \nabla^2 \psi}{2m_\Psi} - \kappa_\Psi \psi^\dagger \psi - \frac{u_\Psi}{3!} (\psi^\dagger \psi)^2 \\ & - u (\varphi^\dagger \varphi)(\psi^\dagger \psi). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Do ponto de vista fenomenológico relevante para a condensação de Bose-Einstein, os acoplamentos  $u_i$  ( $i = \Phi, \Psi$ ) estão relacionados com as massas atômicas ( $m_i$ ) e com os comprimentos de espalhamento de ondas-s ( $a_i$ ) através da relação [19]:

$$u_i = \frac{12\pi a_i}{m_i}. \quad (2.9)$$

A possibilidade de o valor de  $a_i$  poder ser ajustado no laboratório através de campos magnéticos via o fenômeno da ressonância de Feshbach torna a investigação teórica desses modelos ainda mais interessante.

## 2.2 Condições de estabilidade

Para que uma densidade Lagrangiana seja modeladora de uma situação real, ela deve ter o potencial  $V(\Phi, \Psi)$  inferiormente limitado.

A seguir serão determinados os possíveis valores dos parâmetros da densidade Lagrangiana tratada neste trabalho.

### 2.2.1 Máximos e mínimos de uma função de duas variáveis

Seja  $f(x, y)$  uma função  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com derivadas parciais de primeira ordem contínuas no ponto  $(a, b)$ . O par  $(a, b)$  é chamado *ponto crítico* de  $f$  se:

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{a, b} = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{a, b} = 0. \quad (2.10)$$

É denominado *discriminante*  $D$  de  $f$ :

$$D(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} - \left[ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} \right]^2. \quad (2.11)$$

Um par  $(a, b)$  que seja um ponto crítico e no qual haja derivadas parciais de segunda ordem contínuas pode ser um *ponto de sela*, *de máximo* ou *de mínimo* da função. Um estudo de sinais das derivadas distingue essas diferentes possibilidades:

- Se  $D(a, b) < 0$ , então  $(a, b)$  é um ponto de sela.
- Se  $D(a, b) > 0$ , ainda restam duas possibilidades:
  - $\left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \right|_{a, b} < 0$  e  $\left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right|_{a, b} < 0$ , então o ponto é máximo.
  - $\left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \right|_{a, b} > 0$  e  $\left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right|_{a, b} > 0$ , então o ponto é mínimo.

### 2.2.2 Limite inferior do potencial

A densidade Lagrangiana (2.5), invariante frente a  $U(1) \times U(1)$ , pode ser reescrita em termos das componentes reais dos campos  $\Phi$  e  $\Psi$  como uma densidade Lagrangiana invariante  $O(2) \times O(2)$ , com o potencial:

$$V(\phi, \psi) = \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 + \frac{\lambda_\phi}{4!} \phi^4 + \frac{1}{2} m_\psi^2 \psi^2 + \frac{\lambda_\psi}{4!} \psi^4 + \lambda \phi^2 \psi^2, \quad (2.12)$$

sendo que cada um dos campos  $\phi$  e  $\psi$  tem duas componentes.

Para que o potencial seja inferiormente limitado nas direções  $\phi$  e  $\psi$ , as derivadas segundas parciais devem obedecer:

$$\lim_{\phi \rightarrow \infty} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right) > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\psi \rightarrow \infty} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} \right) > 0. \quad (2.13)$$

Que leva às condições:

$$\lambda_\phi > 0 \quad \text{e} \quad \lambda_\psi > 0. \quad (2.14)$$

Resta verificar as condições para que o potencial seja inferiormente limitado nas outras direções, que não  $\phi$  e  $\psi$ . Os pontos críticos fora dos eixos  $\phi$  e  $\psi$  são:

$$(\phi_c, \psi_c) = \left( \pm \sqrt{\frac{6(m_\phi \lambda_\psi - 3m_\psi \lambda)}{9\lambda^2 - \lambda_\psi \lambda_\phi}}, \pm \sqrt{\frac{6(m_\psi \lambda_\phi - 3m_\phi \lambda)}{9\lambda^2 - \lambda_\psi \lambda_\phi}} \right). \quad (2.15)$$

Dois casos devem ser analisados. O primeiro é quando esses pontos críticos (2.15) não são reais, então o ponto de mínimo em todas as direções tem que ser  $(0, 0)$ . O segundo caso é quando os pontos críticos (2.15) são reais, então eles têm que ser mínimos.

Os valores dos parâmetros para os quais os pontos críticos (2.15) não são reais, são:

$$\frac{m_\phi \lambda_\psi - 3m_\psi \lambda}{9\lambda^2 - \lambda_\psi \lambda_\phi} < 0 \quad \text{e/ou} \quad \frac{m_\psi \lambda_\phi - 3m_\phi \lambda}{9\lambda^2 - \lambda_\psi \lambda_\phi} < 0. \quad (2.16)$$

A condição para que o ponto  $(0, 0)$  seja mínimo é  $m_\phi > 0$  e  $m_\psi > 0$  (condição obtida pelas restrições ao discriminante e às derivadas segundas parciais).

Se os pontos críticos (2.15) forem reais, ou seja,

$$\frac{m_\phi \lambda_\psi - 3m_\psi \lambda}{9\lambda^2 - \lambda_\psi \lambda_\phi} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{m_\psi \lambda_\phi - 3m_\phi \lambda}{9\lambda^2 - \lambda_\psi \lambda_\phi} > 0, \quad (2.17)$$

eles devem ser mínimos, para tanto devem satisfazer:

$$D(\phi_c, \psi_c) > 0, \quad \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right|_{\phi_c, \psi_c} > 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} \right|_{\phi_c, \psi_c} > 0. \quad (2.18)$$

Os discriminantes para os quatro pontos críticos são iguais:

$$D(\phi_c, \psi_c) = -\frac{4(m_\psi \lambda_\phi - 3m_\phi \lambda)(m_\phi \lambda_\psi - 3m_\psi \lambda)}{9\lambda^2 - \lambda_\phi \lambda_\psi}, \quad (2.19)$$

exigindo que ele seja positivo e utilizando a restrição (2.17), temos a condição:

$$9\lambda^2 - \lambda_\phi \lambda_\psi < 0, \quad (2.20)$$

A condição complementar de que as derivadas segundas parciais sejam positivas é automaticamente satisfeita.

Resumidamente, as condições suficientes para que o potencial seja limitado inferiormente e, portanto, a teoria seja estável são:

$$\boxed{\lambda^2 < \frac{\lambda_\Phi \lambda_\Psi}{9}, \quad \lambda_\Phi > 0, \quad \lambda_\Psi > 0.} \quad (2.21)$$

O fato de que  $\lambda$  pode assumir valores negativos e a teoria continuar estável possibilita, para certos valores de parâmetros, um aumento no efeito de quebra de simetria em altas temperaturas. De fato, a possibilidade de termos  $\lambda < 0$  ou  $\lambda > 0$  é de central importância no estudo de SNR e ISB.

Note que quando  $\lambda = 0$ , os campos  $\Phi$  e  $\Psi$  se desacoplam e tem-se duas teorias  $O(N)$  independentes.

## Capítulo 3

# Efeitos térmicos para as autoenergias: modelos escalares $O(N)$

Na primeira seção deste capítulo, discutiremos o que vem a ser e como obter a autoenergia renormalizada. Na segunda e na terceira parte, obteremos as mesmas quantidades para os casos  $O(N)$  relativístico e não-relativístico, respectivamente, em função da temperatura.

Como veremos, as autoenergias são de importância fundamental em nosso estudo, já que representam correções aos parâmetros que sinalizam a ocorrência ou não de transições de fase associadas com quebra/restauração de simetrias.

### 3.1 Função de Green de dois pontos

A função de Green de dois pontos na teoria escalar  $O(N)$  do tipo  $\lambda\phi^4$  pode ser representada diagramaticamente como:

$$\begin{aligned}
 (3.1) \quad \mathbf{G}^{(2)} &= \text{---} + \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \circ \bigcirc \text{---} + \text{---} \circ \circ \text{---} + \text{---} \bigcirc \circ \text{---} + \dots \\
 &= \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \dots
 \end{aligned}$$

Cada círculo hachurado na ilustração acima representa a soma de todos os diagramas conectados de dois pontos com ‘pernas amputadas’:

$$\text{---} \text{---} \text{---} = \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \circ \bigcirc \text{---} + \text{---} \circ \circ \text{---} + \dots \quad (3.2)$$

A partir desse objeto define-se a *autoenergia*<sup>1</sup>,  $\Sigma$ :

$$-\Sigma \equiv \text{Diagrama de uma esfera com uma grade de pontos} \quad (3.3)$$

Cada linha nos diagramas do lado direito da Eq. (3.2) representa um *propagador de Feynman*, também simbolizado por  $\Delta$ . Em termos de  $\Sigma$ 's e  $\Delta$ 's, reescreve-se a função de Green de dois pontos:

$$\begin{aligned} G^{(2)} &= \Delta + \Delta(-\Sigma)\Delta + \Delta(-\Sigma)\Delta(-\Sigma)\Delta + \Delta(-\Sigma)\Delta(-\Sigma)\Delta(-\Sigma)\Delta + (\dots) \\ &= \Delta [1 + (-\Sigma)\Delta + (-\Sigma)\Delta(-\Sigma)\Delta + (-\Sigma)\Delta(-\Sigma)\Delta(-\Sigma)\Delta + (\dots)] \\ &= \Delta \sum_{n=0}^{\infty} [(-\Sigma)\Delta]^n \end{aligned} \quad (3.4)$$

ou

$$G^{(2)} = \Delta \sum_{n=0}^{\infty} [(-\Sigma)\Delta]^n = \frac{\Delta}{1 + \Delta\Sigma}. \quad (3.5)$$

Para o caso da teoria escalar  $\lambda\phi^4$ , seguem a expressão da função de Green de dois pontos relativística na teoria livre (que é o propagador livre de Feynman) e da função de Green de dois pontos considerando a interação (de acordo com a Eq. (3.5)):

$$G_0^{(2)} = \Delta = \frac{1}{p^2 + M^2}, \quad (3.6)$$

$$G^{(2)} = \frac{1}{(p^2 + M^2)} \frac{1}{\left(1 + \frac{\Sigma}{p^2 + M^2}\right)} = \frac{1}{p^2 + M^2 + \Sigma}. \quad (3.7)$$

Note que, no espaço de Minkowski, o propagador livre pode ser expresso como:

$$\tilde{G}_{0,M}^{(2)} = \Delta_M = \frac{1}{(p_M^2 - M^2)}, \quad (3.8)$$

e a massa é definida como o pólo do propagador, satisfazendo a equação relativística  $p_M^2 = M^2$ .

Observando as últimas expressões, pode-se compreender porque a autoenergia é interpretada

<sup>1</sup> Tanto a autoenergia quanto as regras de Feynman serão tratadas no espaço Euclidiano ao invés de no espaço de Minkowski.

como uma renormalização à massa. No lugar de  $M^2$  no propagador da teoria livre, aparece  $M^2 + \Sigma$  no propagador da teoria com interação, por isso essa última quantidade é interpretada como a massa renormalizada:

$$\begin{aligned} M_R^2 &= M^2 + \Sigma, \\ G^{(2)} &= \frac{1}{p^2 + M_R^2}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Além disso, cada vértice nos diagramas de Feynman é proporcional ao acoplamento  $\lambda$ . De forma que tanto a função de Green de 2-pontos,  $G^{(2)}$ , quanto a autoenergia,  $\Sigma$ , podem ser vistas como séries de potências de  $\lambda$  em suas expressões (3.1) e (3.2). No caso de  $\lambda \ll 1$ , a autoenergia pode ser calculada de maneira aproximada considerando-se apenas o diagrama de um único loop. Essa aproximação perturbativa de 1-loop será utilizada aqui.

Nas próximas seções, serão consideradas funções de Green conectadas de dois pontos com um único loop (diagrama de Feynman chamado ‘tadpole’) com o intuito de estudar-se a renormalização da massa. Diagramaticamente, esta quantidade é dada por:

$$-\Sigma = \text{diagrama de loop} \simeq \text{diagrama de tadpole} \quad (3.10)$$

A teoria escalar estudada neste trabalho aparecerá em quatro situações: invariante sob transformações de um grupo  $O(N)$ , relativística e não-relativística, e também a mesma teoria invariante sob um grupo  $O(N_\Phi) \times O(N_\Psi)$ , relativística e não-relativística. Além disso, nos limitaremos ao caso  $N_\Phi = N_\Psi = 2$ , que poderá, eventualmente, ser utilizado no estudo da condensação de Bose-Einstein. No caso não-relativístico, a grandeza que será renormalizada de forma análoga à descrita acima é o parâmetro  $\kappa$ ,  $\kappa_R = \kappa + \Sigma$ . As densidades Lagrangianas com invariância  $O(2)$  e  $O(2) \times O(2)$  serão construídas a partir de modelos invariantes  $U(1)$  e  $U(1) \times U(1)$ , que são isomorfos aos primeiros. Com o intuito de apresentar as técnicas calculacionais, discutiremos agora o caso  $O(2)$ , deixando o caso  $O(2) \times O(2)$  para o próximo capítulo.

### 3.2 Modelo escalar $O(2)$ relativístico

Com o objetivo de estudar o modelo escalar  $O(2)$ , será feita uma breve análise do caso  $U(1)^2$ .

<sup>2</sup> Alguns cálculos relevantes para o  $O(N)$  foram feitos para o  $O(N_\Phi) \times O(N_\Psi)$ , como a obtenção da teoria não-relativística a partir da relativística, os resultados podem ser utilizados para  $O(N)$  também, basta fazer  $\lambda = \lambda_\Psi = m_\Psi = \kappa_\Psi = 0$  e  $\lambda_\Phi \rightarrow \lambda$  (e o mesmo para os outros parâmetros de  $\Phi$ ).

Consideremos uma densidade Lagrangiana com invariância  $U(1)$ :

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi^\dagger)(\partial^\mu \Phi) - \frac{M^2}{2} \Phi^\dagger \Phi - \frac{\lambda}{4!} (\Phi^\dagger \Phi)^2. \quad (3.11)$$

O campo complexo  $\Phi$  pode ser decomposto em dois campos reais:  $\Phi = \phi_a + i\phi_b$ . A densidade Lagrangiana em termos dessas subcomponetes fica:

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_a)(\partial^\mu \phi_a) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_b)(\partial^\mu \phi_b) - \frac{M^2}{2} (\phi_a^2 + \phi_b^2) - \frac{\lambda}{4!} (\phi_a^4 + 2\phi_a \phi_b + \phi_b^4), \quad (3.12)$$

que é invariante frente ao grupo  $O(2)$ . Por simplicidade, e uma vez convencionado o número de componentes, essa densidade Lagrangiana pode ser escrita sem explicitar as duas componetes do campo:

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{M^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4. \quad (3.13)$$

A massa térmica é obtida com o uso da aproximação perturbativa até 1 loop, na qual a autoenergia pode ser representada pelo diagrama de Feynman:

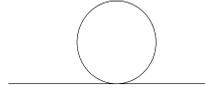


Fig. 3.1: Tadpole.

Assim,

$$M_R^2(T) = M^2(0) + \Sigma^T, \quad (3.14)$$

sendo

$$\Sigma^T = f_s \lambda \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + M^2(0)}, \quad (3.15)$$

onde  $f_s = \left(\frac{N+2}{6}\right)$  representa o fator de simetria (veja Apêndice).

No domínio das temperaturas finitas, essa equação pode ser reescrita em termos das frequências de Matsubara ( $\omega_n$ ). Nesse caso, conforme discutido no Apêndice, usamos as substituições:

$$\int \frac{dp_0}{(2\pi)} \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_n, \quad \text{onde } \beta = \frac{1}{T} \text{ e } p_0 \rightarrow \omega_n, \quad (3.16)$$

e temos:

$$\Sigma^T = \left( \frac{N+2}{6} \right) \lambda \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_n^2 + \vec{p}^2 + M^2(0)}. \quad (3.17)$$

Após somar sobre as frequências de Matsubara e integrar sobre as componentes espaciais dos momentos, obtemos, em altas temperaturas ( $M(0) \ll T$ ):

$$\boxed{M_R^2(T) = M^2(0) + \frac{(N+2)\lambda T^2}{6 \cdot 12}}. \quad (3.18)$$

### 3.2.1 Simetria do potencial em relação ao estado fundamental

Portanto, numa primeira aproximação, o potencial efetivo da teoria que está sendo estudada é:

$$U(\phi_c) = \frac{M^2(T)}{2} \phi_c^2 + \frac{\lambda \phi_c^4}{4!}, \quad (3.19)$$

onde:

$$M^2(T) = M^2(0) + \frac{(N+2)\lambda T^2}{6 \cdot 12}. \quad (3.20)$$

$M^2(T)$  e  $\lambda$  são quantidades reais. Note que  $\lambda$  deve ser positivo para que  $U$  seja limitado inferiormente, enquanto o sinal de  $M^2(T)$  caracteriza qualitativamente  $U$ . Além disso, o potencial clássico  $V(\phi_c)$  é obtido pela substituição  $M^2(T) \rightarrow M^2(0)$  na Eq. (3.19).

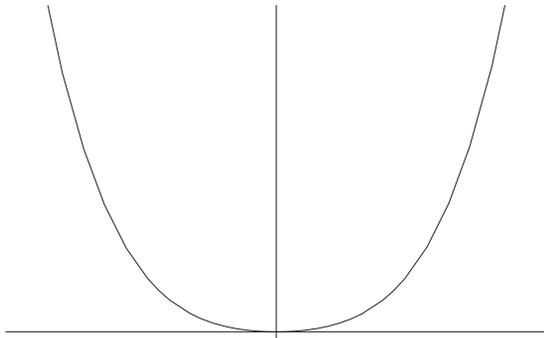


Fig. 3.2: (a)

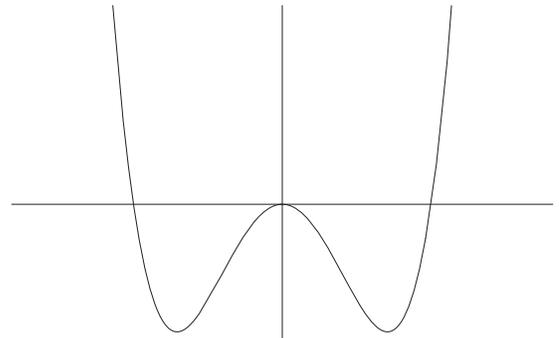


Fig. 3.3: (b)

Fig. 3.4: Potencial  $U(\phi_c)$  em função do campo para  $N = 1$ . (a):  $M^2(T) > 0$ . (b):  $M^2(T) < 0$ .

Como se pode observar nos gráficos da figura (3.4), onde  $N = 1$ , quando  $M^2(T) > 0$ , o potencial é invariante frente a  $\phi \rightarrow -\phi$ , ou seja, é simétrico em relação a seu mínimo. Já quando  $M^2(T) < 0$ , o potencial não é mais simétrico a partir dos mínimos, fixando a origem do sistema de coordenadas em um dos mínimos, a simetria  $\phi \rightarrow -\phi$  não existe mais. É interessante notar que, neste último caso, o Lagrangiano tem uma simetria ( $\phi \rightarrow -\phi$ ) que o estado fundamental não tem. Conforme descrito pela Eq. (3.20),  $M^2(T)$  pode mudar de sinal com a variação de  $T$ , e o valor de  $T$  no qual esse fato ocorre é chamado de *temperatura crítica*,  $M^2(T_c) = 0$ . Enquanto  $M^2(T) < 0$  é associado a uma *fase de simetria quebrada*,  $O(N-1)$ ,  $M^2(T) > 0$  é associado a uma *fase simétrica*,  $O(N)$  [14].

### 3.2.2 Diagramas de fase

Os diagramas de fase podem ser obtidos considerando-se as Eqs. (3.20) e (3.19). Enquanto a primeira gera a figura 3.4, a segunda gera a figura 3.5. Esta equação mostra que se  $M^2(0) > 0$ , então  $M^2(T)$  será sempre positivo. Se  $M^2(0) < 0$ , então  $M^2(T)$  é negativo (simetria quebrada) desde  $T = 0$  até a temperatura crítica  $T_c$ , onde há uma restauração de simetria, daí em diante segue sempre positivo, o valor da temperatura crítica é:

$$T_c = \sqrt{-\frac{72M^2(0)}{(N+2)\lambda}}. \quad (3.21)$$

As duas situações estão ilustradas nas figuras (3.4), (3.5) e (3.6).

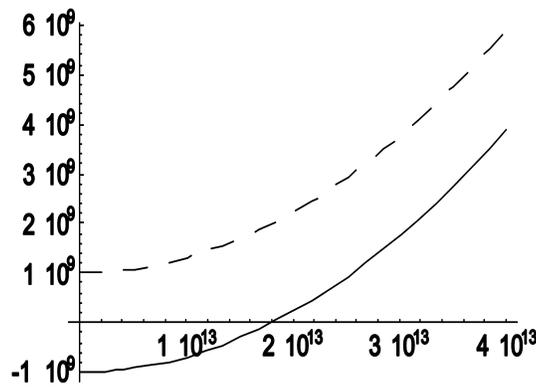


Fig. 3.5: Variação de  $M^2(T)$  do modelo  $O(2)$  com a temperatura. Para a construção deste gráfico, foram utilizados os valores  $\lambda = 5.5 \times 10^{-17} \text{eV}^{-2}$ ,  $M^2(0) = 10^9 \text{eV}$  para o gráfico de linha tracejada e  $M^2(0) = -10^9 \text{eV}$  para o gráfico de linha cheia.

### 3.3 Modelo escalar $O(2)$ não-relativístico

A densidade Lagrangiana para a teoria escalar  $\lambda\phi^4$  não-relativística invariante  $U(1)$  é:

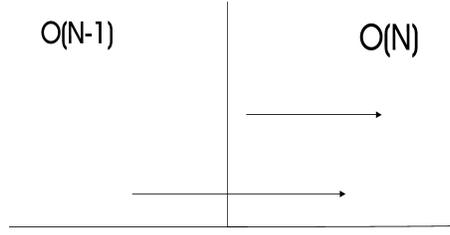


Fig. 3.6: Possíveis evoluções de fase a partir das condições iniciais. Quando a simetria é inicialmente  $O(N)$ , não há nenhuma transição de fase. Quando a simetria é inicialmente quebrada,  $O(N-1)$ , em alguma temperatura ela é restaurada para  $O(N)$ .

$$\mathcal{L} = i\phi^\dagger \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\phi^\dagger \nabla^2 \phi}{2m} - \frac{\kappa}{2} \phi^\dagger \phi - \frac{u}{4!} (\phi^\dagger \phi)^2, \quad (3.22)$$

onde, como em (3.12), ao decompor o campo  $\phi = \phi_1 + i\phi_2$  obtém-se o caso invariante  $O(2)$ .

Usando-se a aproximação perturbativa de 1 loop (veja Apêndice), de acordo com a figura (3.1), obtemos a correção térmica para o parâmetro  $\kappa$ <sup>3</sup>:

$$\kappa_R(T) = \kappa(0) + \Sigma^T, \quad (3.23)$$

sendo

$$\Sigma^T = f_s u \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_0 + \omega}, \quad (3.24)$$

onde  $f_s = \left(\frac{N+2}{6}\right)$  representa o fator de simetria (veja Apêndice) e  $\omega = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \kappa(0)$ .

No domínio das temperaturas finitas, podemos reescrever essa equação em termos das frequências de Matsubara:

$$\Sigma^T = \left(\frac{N+2}{6}\right) u \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{-i\omega_n + \omega}. \quad (3.25)$$

Após somar nas frequências de Matsubara e integrar nos momentos, obtemos:

$$\boxed{\kappa(T) = \kappa(0) + u \frac{(N+2)}{6} \left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{3/2} Li_{3/2} [e^{-\kappa(0)/T}],} \quad (3.26)$$

onde  $Li_{3/2}$  é a função polilogarítmica.

Em altas temperaturas ( $\kappa(0) \ll T$ ), o último resultado pode ainda ser aproximado como:

<sup>3</sup> Doravante  $R$  subscripto a  $\kappa$  será suprimido.

$$\kappa(T) = \kappa(0) + u \frac{(N+2)}{6} \left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{3/2} \zeta(3/2), \quad (3.27)$$

onde  $\zeta(3/2)$  é a função Zeta de Riemann.

### 3.3.1 Simetrias do potencial

O potencial dessa teoria é:

$$U(|\phi_c|) = \frac{\kappa(T)}{2} |\phi_c|^2 + \frac{u_\phi}{4!} |\phi_c|^4. \quad (3.28)$$

A situação é parecida à encontrada para o caso relativístico, no sentido de que, quando  $\kappa(0) > 0$ ,  $\kappa(T)$  será sempre positivo, só há a fase simétrica, e quando  $\kappa(0) < 0$ , a simetria é quebrada de  $T = 0$  até a temperatura crítica:

$$T_c = \left[ -\frac{\kappa(0)}{u \zeta(3/2)} \frac{6}{(N+2)} \right]^{2/3} \frac{2\pi}{m}. \quad (3.29)$$

Em  $T_c$  a simetria é restaurada e assim permanece para todos os outros valores de  $T$ . A dependência térmica do parâmetro  $\kappa(T)$  é representada no gráfico (3.7).

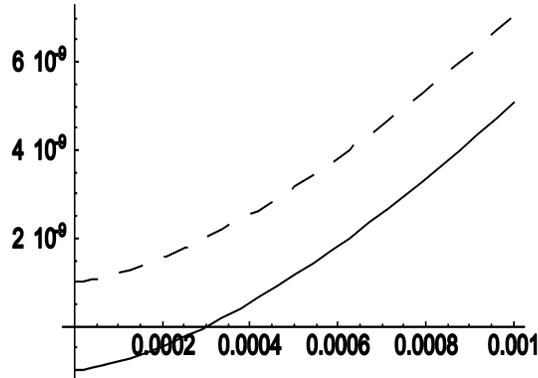


Fig. 3.7: Dependência térmica do parâmetro  $\kappa(T)$ . Os valores dos parâmetros constantes utilizados foram:  $N = 2$ ,  $u = 5.5 \times 10^{-17} \text{eV}^{-2}$  e  $m = 10^9 \text{eV}$ ,  $\kappa(0) = 10^{-9}$  no gráfico de linha tracejada e  $\kappa(0) = -10^{-9}$  no gráfico de linha cheia.

### 3.3.2 Conclusões

Portanto, a conclusão mais importante dessa análise é a seguinte: para modelos escalares  $O(N)$  (relativísticos e não-relativísticos), simetrias quebradas em  $T = 0$  são *sempre* restauradas em altas temperaturas, através de transições de segunda ordem. Os valores críticos (dentro da

---

aproximação perturbativa de 1 loop) para as temperaturas são dados pelas Eqs. (3.21) e (3.29) para cada um dos casos quebrados.

## Capítulo 4

# Efeitos térmicos para as autoenergias: modelos escalares

$$O(N_\Phi) \times O(N_\Psi)$$

Na primeira seção deste capítulo é calculada a correção térmica à autoenergia do modelo escalar  $O(N_\Phi) \times O(N_\Psi)$  relativístico, e na segunda, a mesma quantidade é calculada para a versão não-relativística do modelo. Conforme discutido no capítulo anterior, a autoenergia térmica é uma quantidade fundamental no estudo das transições de fase. Veremos aqui como os fenômenos de ISB e SNR, que não ocorrem para o caso  $O(N)$ , aparecem devido à possibilidade da interação ( $\lambda$ ) entre os campos  $\Phi$  e  $\Psi$  ser atrativa ( $\lambda < 0$ ).

### 4.1 Modelo escalar $O(N_\Phi) \times O(N_\Psi)$ relativístico

A densidade Lagrangiana relativística invariante sob transformações do grupo  $U(1) \times U(1)$  é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi^\dagger)(\partial^\mu \Phi) - \frac{M_\Phi^2}{2}\Phi^\dagger \Phi - \frac{\lambda_\Phi}{4!}(\Phi^\dagger \Phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \Psi^\dagger)(\partial^\mu \Psi) - \frac{M_\Psi^2}{2}\Psi^\dagger \Psi - \frac{\lambda_\Psi}{4!}(\Psi^\dagger \Psi)^2 \\ & - \frac{\lambda}{4}(\Phi^\dagger \Phi)(\Psi^\dagger \Psi). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Note que essa densidade Lagrangiana é uma generalização do caso  $U(1)$  já discutido. Assim, consideraremos as regras de Feynman por ela geradas (veja Apêndice) para o cálculo das autoenergias.

### 4.1.1 Autoenergias térmicas

Como no capítulo anterior, a correção térmica às massas é feita através do cálculo das autoenergias,

$$\begin{aligned} M_\Phi^2(T) &= M_\Phi^2(0) + \Sigma_\Phi^T, \\ M_\Psi^2(T) &= M_\Psi^2(0) + \Sigma_\Psi^T. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Onde, na aproximação perturbativa até 1 loop, temos:

$$-\Sigma_\Phi^T = \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} \quad (4.3)$$

$$-\Sigma_\Psi^T = \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} \quad (4.4)$$

O cálculo dos diagramas correspondentes à  $\Sigma_\Phi^T$  e  $\Sigma_\Psi^T$  segue o já efetuado para o caso  $U(1)$  e pode ser feito com as técnicas descritas no Apêndice. Definindo:

$$\Delta_i \equiv \frac{(N_i + 2)}{6} \lambda_i + \frac{N_j}{2} \lambda, \quad (4.5)$$

as massas térmicas renormalizadas são dadas, em altas temperaturas, por:

$$\boxed{M_i^2(T) = M_i^2(0) + \frac{T^2}{12} \Delta_i \quad i, j = \Phi \text{ ou } \Psi.} \quad (4.6)$$

A temperatura crítica na qual a massa térmica  $M_i^2(T)$  muda de sinal é:

$$T_{c,i} = \sqrt{-\frac{12 M_i^2(0)}{\Delta_i}}. \quad (4.7)$$

A diferença entre essa expressão para a temperatura crítica da teoria com dois campos e a expressão (3.21), que é a temperatura crítica da teoria com um campo, é essencialmente a presença do acoplamento misto,  $\lambda$ , no denominador. Quando  $\lambda$  é negativo, há a possibilidade de  $\Delta_i$  ser negativo mantendo-se a estabilidade da teoria. Nesse caso, se  $M_i^2(0) < 0$ ,  $M_i^2(T)$  será sempre negativo, caracterizando uma SNR, se  $M_i^2(0) > 0$ ,  $M_i^2(T)$  passará a ser negativo na temperatura crítica (4.7) e não voltará a ser positivo, caracterizando ISB, fenômeno que, como SNR, não é observado no modelo  $O(N)$ . Além disso, é interessante notar que, quando  $\lambda > 0$  e  $M_i^2(0) < 0$ , a  $T_c$  é sempre menor do que no caso  $O(N)$ .

### 4.1.2 Análise das simetrias da teoria

Uma maneira complementar de analisar-se as simetrias é através do estudo do potencial da teoria. O potencial clássico da teoria que está sendo estudada é:

$$V(\Phi, \Psi) = \frac{M_\Phi^2}{2} \Phi^2 + \frac{M_\Psi^2}{2} \Psi^2 + \frac{\lambda_\Phi}{4!} \Phi^4 + \frac{\lambda_\Psi}{4!} \Psi^4 + \frac{\lambda}{4} \Phi^2 \Psi^2. \quad (4.8)$$

E o potencial efetivo é, em ordem mais baixa:

$$U(\Phi_c, \Psi_c) = \frac{M_\Phi^2(T)}{2} \Phi_c^2 + \frac{M_\Psi^2(T)}{2} \Psi_c^2 + \frac{\lambda_\Phi}{4!} \Phi_c^4 + \frac{\lambda_\Psi}{4!} \Psi_c^4 + \frac{\lambda}{4} \Phi_c^2 \Psi_c^2, \quad (4.9)$$

sendo:

$$\begin{aligned} M_\Phi^2(T) &= M_\Phi^2(0) + \frac{T^2}{12} \Delta_\Phi, \\ M_\Psi^2(T) &= M_\Psi^2(0) + \frac{T^2}{12} \Delta_\Psi. \end{aligned} \quad (4.10)$$

### **Pontos críticos**

Os pontos críticos, que podem ser máximos, mínimos ou inflexões na superfície  $U(\phi_c, \psi_c)$ , têm as derivadas parciais primeiras nulas. As derivadas parciais primeiras são:

$$\frac{\partial U}{\partial \Phi} = M_\Phi^2(T) \Phi + \frac{\lambda_\Phi}{3!} \Phi^3 + \frac{\lambda}{2} \Phi \Psi^2, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Psi} = M_\Psi^2(T) \Psi + \frac{\lambda_\Psi}{3!} \Psi^3 + \frac{\lambda}{2} \Psi \Phi^2. \quad (4.12)$$

Os pontos críticos  $(\Phi_c, \Psi_c)$  são:

$$(0, 0), \quad (4.13)$$

$$\left( 0, -i\sqrt{\frac{6 M_\Psi^2(T)}{\lambda_\Psi}} \right), \quad \left( 0, i\sqrt{\frac{6 M_\Psi^2(T)}{\lambda_\Psi}} \right), \quad (4.14)$$

$$\left( -i\sqrt{\frac{6 M_\Phi^2(T)}{\lambda_\Phi}}, 0 \right), \quad \left( i\sqrt{\frac{6 M_\Phi^2(T)}{\lambda_\Phi}}, 0 \right), \quad (4.15)$$

$$\left( -\sqrt{\frac{-18 \lambda M_\Psi^2(T) + 6 \lambda_\Psi M_\Phi^2(T)}{9 \lambda^2 - \lambda_\Phi \lambda_\Psi}}, -\sqrt{\frac{-18 \lambda M_\Phi^2(T) + 6 \lambda_\Phi M_\Psi^2(T)}{9 \lambda^2 - \lambda_\Phi \lambda_\Psi}} \right) \quad (4.16)$$

e todas as outras 3 combinações possíveis dos sinais fora das raízes para o último par.

### Fases possíveis

Será feita uma análise qualitativa do potencial  $U(\Phi_c, \Psi_c)$ . É importante lembrar que  $\lambda_\Phi > 0$ ,  $\lambda_\Psi > 0$  e  $\lambda_\Phi \lambda_\Psi > 9 \lambda^2$ . O caso que interessa é  $\lambda < 0$ , assim será considerado.

- **A** Quando  $M_\Phi^2(T) > 0$  e  $M_\Psi^2(T) > 0$ , só há um ponto de mínimo no potencial, que é em  $\Phi_c = \Psi_c = 0$ , a simetria é  $O(N_\Phi) \times O(N_\Psi)$ .

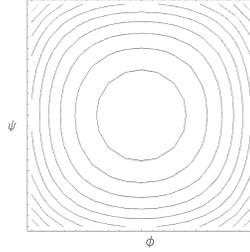


Fig. 4.1: Curvas de nível do potencial com simetria  $O(N_\Phi) \times O(N_\Psi)$ , fase **A**.

- **B** Quando  $0 > M_\Psi^2(T) > -\frac{\lambda_\Psi M_\Phi^2(T)}{3|\lambda|}$  e  $M_\Phi^2(T) > 0$ , os mínimos do potencial são em  $\Phi_c = 0$  e  $\Psi_c \neq 0$ , a simetria é  $O(N_\Phi) \times O(N_\Psi - 1)$ .

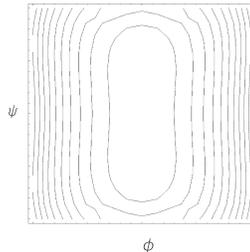


Fig. 4.2: Curvas de nível do potencial da simetria  $O(N_\Phi) \times O(N_\Psi - 1)$ , fase **B**.

- **C** Quando  $0 > M_\Phi^2(T) > -\frac{\lambda_\Phi M_\Psi^2(T)}{3|\lambda|}$  e  $M_\Psi^2(T) > 0$ , os pontos de mínimo são  $\Phi_c \neq 0$  e  $\Psi_c = 0$ , a simetria é  $O(N_\Phi - 1) \times O(N_\Psi)$ .

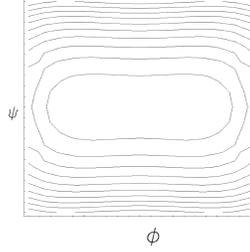


Fig. 4.3: Curvas de nível do potencial da simetria  $O(N_\Phi - 1) \times O(N_\Psi)$ , fase **C**.

- **D** Os valores fora das faixas especificadas em **A**, **B** e **C**, satisfazem os pontos com  $\Phi_c \neq 0$  e  $\Psi_c \neq 0$ , a simetria é  $O(N_\Phi - 1) \times O(N_\Psi - 1)$ .

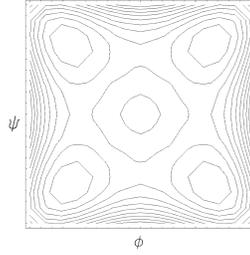


Fig. 4.4: Curvas de nível do potencial da simetria  $O(N_\Phi - 1) \times O(N_\Psi - 1)$ , fase **D**.

### **Análise das transições de fase para cada condição inicial**

Para mostrar a possibilidade de SNR e ISB, será considerada uma situação mais restrita do que aquela que vem sendo tratada. A situação que será analisada aqui é  $N_\Phi = N_\Psi \equiv N$  e  $\frac{N+2}{6}\lambda_\Phi > \frac{N}{2}|\lambda| > \frac{N+2}{6}\lambda_\Psi$ , ou seja,  $\Delta_\Phi > 0$  e  $\Delta_\Psi < 0$ . Com essa escolha <sup>1</sup>, a simetria sempre será  $O(N_\Phi) \times O(N_\Psi - 1)$  no limite  $T \rightarrow \infty$ . Para a construção dos gráficos foram utilizados os valores  $N_\Phi = N_\Psi = 2$ ,  $\lambda_\Phi = 8 \times 10^{-16}$ ,  $\lambda_\Psi = 7 \times 10^{-17}$ , e  $\lambda = -5.5 \times 10^{-17}$ . Em todas as situações usamos valores pequenos para  $\lambda(0)$ , estando de acordo com a teoria de perturbação.

- (1)  $M_\Phi^2(0) > 0$  e  $M_\Psi^2(0) > 0$ : **A**→**B**, ISB.

A dependência das massas térmicas com a temperatura, na faixa de parâmetros escolhida, está esboçada no gráfico (4.5), os valores utilizados para as massas a temperatura zero foram  $M_\Phi^2(0) = M_\Psi^2(0) = 1\text{GeV}$ .

<sup>1</sup> Quando  $\Delta_\Psi < 0$ , a condição de estabilidade exclui a possibilidade de  $\Delta_\Phi < 0$ .

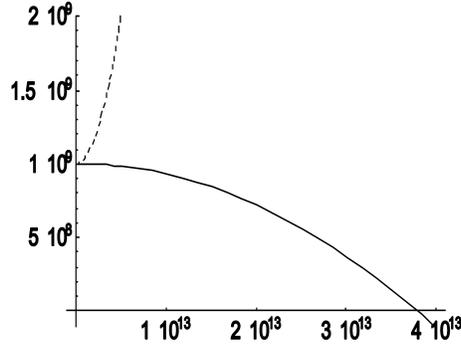


Fig. 4.5: Variação com a temperatura de:  $M_\Phi^2(T)$ , linha tracejada;  $M_\Psi^2(T)$ , linha cheia, caracterizando ISB.

$$(2) \quad M_\Phi^2(0) > 0 \text{ e } 0 > M_\Psi^2(0) > -\frac{\lambda_\Psi M_\Phi^2(0)}{3|\lambda|}: \mathbf{B}, \text{ SNR.}$$

Para esboçar a dependência das massas térmicas com a temperatura, no gráfico (4.6), foram utilizados os valores  $M_\Phi^2(0) = 1\text{GeV}$  e  $M_\Psi^2(0) = -1\text{GeV}$ .

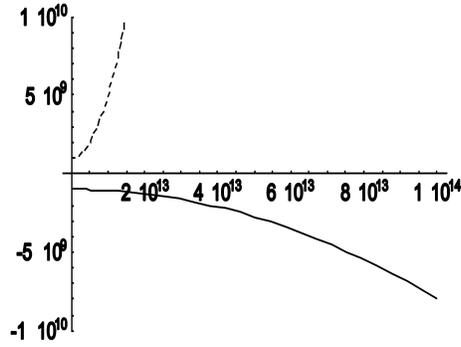


Fig. 4.6: Variação com a temperatura de:  $M_\Phi^2(T)$ , linha tracejada;  $M_\Psi^2(T)$ , linha cheia, SNR.

$$(3) \quad M_\Psi^2(0) > 0 \text{ e } 0 > M_\Phi^2(0) > -\frac{\lambda_\Phi M_\Psi^2(0)}{3|\lambda|}: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}, \text{ ISB.}$$

Para esboçar o gráfico (4.7), foram utilizados os valores  $M_\Phi^2(0) = -1\text{GeV}$  e  $M_\Psi^2(0) = 0.2\text{GeV}$ .

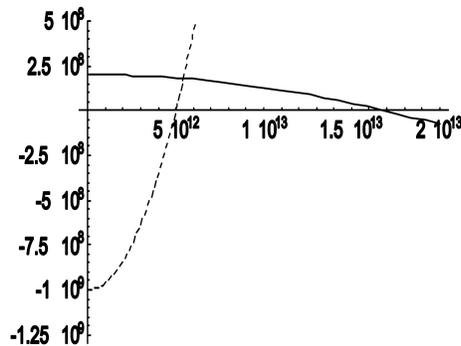


Fig. 4.7: Variação com a temperatura de:  $M_\Phi^2(T)$ , linha tracejada, SR;  $M_\Psi^2(T)$ , linha cheia, ISB.

(4) Para outros valores de  $M_\Psi^2(0)$  e  $M_\Phi^2(0)$  que não os especificados em (1), (2), (3), e em (5) mais a frente:  $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}$ , SNR.

Para construir o gráfico (4.8) foram utilizados os valores  $M_\Phi^2(0) = -1\text{GeV}$  e  $M_\Psi^2(0) = -0.2\text{GeV}$ .

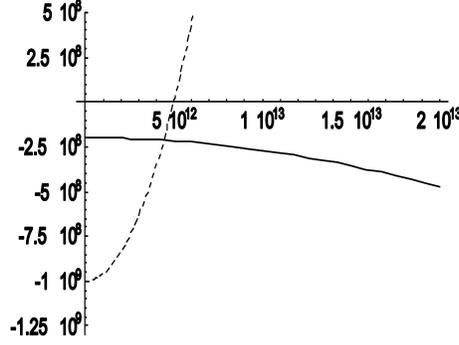


Fig. 4.8: Variação com a temperatura de:  $M_\Phi^2(T)$ , linha tracejada, SR;  $M_\Psi^2(T)$ , linha cheia, SNR.

As transições de fase (1), (2), (3) e (4) também podem ser entendidas a partir da análise de sinais das massas térmicas, como é observado nos gráficos (4.5)-(4.8).  $M_\Phi(T) > 0$  implica simetria  $O(N_\Phi)$  relativa ao campo  $\Phi$ , e  $M_\Phi(T) < 0$  implica simetria  $O(N_\Phi - 1)$ .  $M_\Psi(T) > 0$  implica simetria  $O(N_\Psi)$  relativa ao campo  $\Psi$ , e  $M_\Psi(T) < 0$  implica simetria  $O(N_\Psi - 1)$ . Há uma transição que não é observada pela análise de sinais das massas térmicas, mas apenas pela análise da simetria do potencial em relação aos campos:

(5)  $M_\Psi^2(0) > 0$  e  $-\frac{\lambda_\Phi M_\Psi^2(0)}{3|\lambda|} > M_\Phi^2(0) > \frac{\Delta_\Phi}{\Delta_\Psi} M_\Psi^2(0)$ :  $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ , SNR.

A figura (4.9) ilustra as transições de fase.

#### 4.2 Modelo escalar $O(N_\Phi) \times O(N_\Psi)$ não-relativístico

A densidade Lagrangiana não-relativística invariante sob transformações do grupo  $U(1) \times U(1)$  pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i \Phi^\dagger \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\Phi^\dagger \nabla^2 \Phi}{2 m_\Phi} - \frac{\kappa_\Phi}{2} \Phi^\dagger \Phi - \frac{u_\Phi}{4!} (\Phi^\dagger \Phi)^2 + i \Psi^\dagger \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\Psi^\dagger \nabla^2 \Psi}{2 m_\Psi} - \frac{\kappa_\Psi}{2} \Psi^\dagger \Psi - \frac{u_\Psi}{4!} (\Psi^\dagger \Psi)^2 \\ & - \frac{u}{4} (\Phi^\dagger \Phi)(\Psi^\dagger \Psi). \end{aligned} \quad (4.17)$$

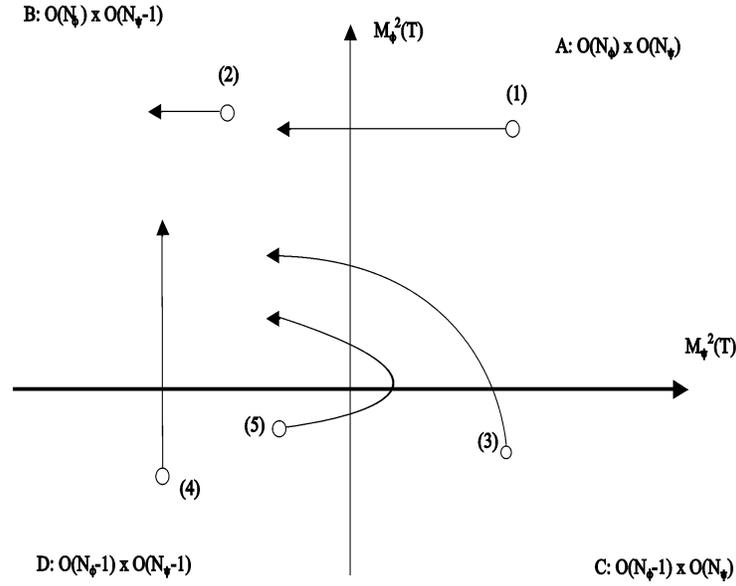


Fig. 4.9: Transições de fase do modelo  $O(N) \times O(N)$  relativístico. Cada quadrante é uma fase. Os pequenos círculos numerados representam as simetrias em  $T = 0$  e as setas que saem deles indicam a evolução na temperatura, o local em que as setas atravessam os eixos representa transições de fase.

#### 4.2.1 Autoenergias térmicas

A correção térmica para o parâmetro  $\kappa$  é feita como no caso relativístico, através da soma da autoenergia à massa nua:

$$\begin{aligned}\kappa_\Phi(T) &= \kappa_\Phi(0) + \Sigma_\Phi^T, \\ \kappa_\Psi(T) &= \kappa_\Psi(0) + \Sigma_\Psi^T.\end{aligned}\tag{4.18}$$

Onde, até 1 loop, temos:

$$-\Sigma_\Phi^T = \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2}\tag{4.19}$$

$$-\Sigma_\Psi^T = \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2}\tag{4.20}$$

Utilizando, mais uma vez, as técnicas descritas no Apêndice, obtemos:

$$\kappa_i(T) = \kappa_i(0) + \Sigma_i^T, \quad (4.20)$$

$$\kappa_i(T) = \kappa_i(0) + u_i \frac{(N_i+2)}{6} \left( \frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} Li_{3/2} [e^{-\kappa_i(0)/T}] + u \frac{N_j}{2} \left( \frac{m_j T}{2\pi} \right)^{3/2} Li_{3/2} [e^{-\kappa_j(0)/T}]. \quad (4.21)$$

#### 4.2.2 Análise das simetrias da teoria

Tomando o limite de altas temperaturas,  $\kappa_i(0) \ll T \ll m$ , e  $N_\Phi = N_\Psi = 2$ , os parâmetros  $\kappa_i(T)$  se reduzem à expressão:

$$\kappa_i(T) = \kappa_i(0) + \left( \frac{T}{2\pi} \right)^{3/2} \zeta(3/2) \Delta_i^{NR}, \quad (4.22)$$

onde

$$\Delta_i^{NR} = \frac{2}{3} u_i m_i^{3/2} + u m_j^{3/2}. \quad (4.23)$$

Como no caso relativístico, a análise das simetrias da teoria será feita pelo estudo de sinais dos parâmetros  $\kappa_i(T)$ . Assim,  $\kappa_\Phi(T) > 0$  é relacionado à fase simétrica vinculada ao campo  $\Phi$ , e  $\kappa_\Phi(T) < 0$  é relacionado a fase de simetria quebrada (ídem para o campo  $\Psi$ ).

As temperaturas críticas nas quais os parâmetros  $\kappa(T)$  mudam de sinal (representando uma transição de fase) são:

$$T_{c,i}^{NR} = 2\pi \left[ -\frac{\kappa_i(0)}{\zeta(3/2) \Delta_i^{NR}} \right]^{2/3}. \quad (4.24)$$

Como no caso anterior, o fato de termos o acoplamento misto no denominador e ele poder ser negativo possibilita fenômenos não observados na teoria com apenas um campo. Comparando as temperaturas críticas das teorias com um e com dois campos escalares, (3.29) e (4.24), note que esta pode ser real mesmo no caso de  $\kappa_i(0) > 0$ , ao contrário daquela, basta que  $\Delta_i^{NR}$  seja negativo, caracterizando uma ISB. Outro fenômeno que não se observa na teoria com apenas um campo é não haver temperatura crítica real quando  $\kappa_i(0) < 0$ , caracterizando SNR, nesse caso  $\Delta_i^{NR} < 0$ . Além disso, quando  $u > 0$ ,  $T_{c,i}^{NR}$  é sempre menor do que no caso  $U(1)$ .

A variação de  $\kappa(T)$  com  $T$  é esboçada para algumas situações nos gráficos (4.10) a (4.13), nos quais foram utilizados os seguintes valores:  $N_\Phi = N_\Psi = 2$ ,  $u_\Phi(0) = 8 \times 10^{-16} \text{eV}^{-2}$ ,  $u_\Psi(0) = 7 \times 10^{-17} \text{eV}^{-2}$ ,  $u(0) = -5.5 \times 10^{-17} \text{eV}^{-2}$  e  $m_\Phi = m_\Psi = 1 \text{GeV}$ , a diferença entre os gráficos são os valores atribuídos a  $\kappa_\Phi(0)$  e  $\kappa_\Psi(0)$ . O valor da massa utilizado é da ordem da massa do Hidrogênio e, considerando também os valores estipulados para  $u_i$ ,  $a_i \sim 10^{-9} \text{eV}^{-1} \simeq (4 \times$

$10^{-15}m)$  ( $u_i = \frac{12\pi a_i}{m_i}$ ).

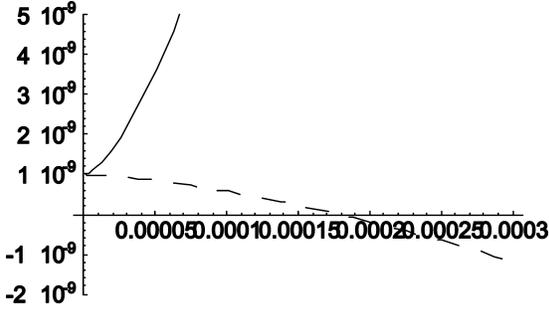


Fig. 4.10: Variação de  $\kappa_\Phi(T)$  (linha cheia) e  $\kappa_\Psi(T)$  (linha tracejada, ISB) com a temperatura, para  $\kappa_\Phi(0) = \kappa_\Psi(0) = 1\text{neV}$ .

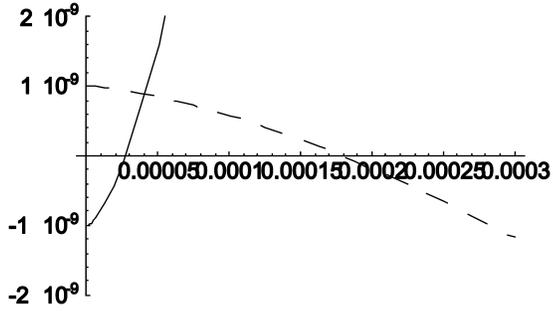


Fig. 4.11: Variação de  $\kappa_\Phi(T)$  (linha cheia, SR, restauração de simetria) e  $\kappa_\Psi(T)$  (linha tracejada, ISB) com a temperatura, para  $\kappa_\Phi(0) = -1\text{neV}$  e  $\kappa_\Psi(0) = 1\text{neV}$ .

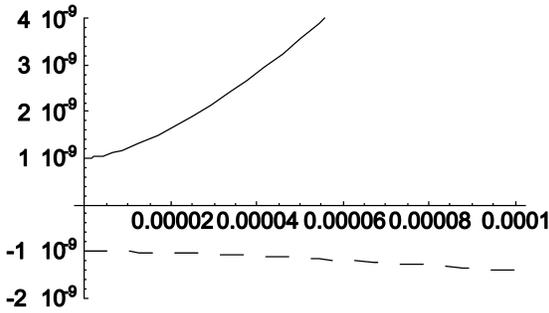


Fig. 4.12: Variação de  $\kappa_\Phi(T)$  (linha cheia) e  $\kappa_\Psi(T)$  (linha tracejada, SNR) com a temperatura, para  $\kappa_\Phi(0) = 1\text{neV}$  e  $\kappa_\Psi(0) = -1\text{neV}$ .

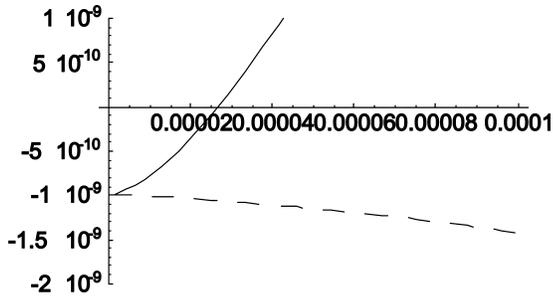


Fig. 4.13: Variação de  $\kappa_\Phi(T)$  (linha cheia, SR) e  $\kappa_\Psi(T)$  (linha tracejada, SNR) com a temperatura, para  $\kappa_\Phi(0) = -1\text{neV}$  e  $\kappa_\Psi(0) = -1\text{neV}$ .

### 4.2.3 Conclusões

Portanto, deste capítulo concluímos que, contrariamente ao caso  $O(N)$ , os modelos com simetria  $O(N) \times O(N)$  podem apresentar fenômenos mais exóticos quando os acoplamentos binários  $\lambda$  (relativístico) e  $u$  (não-relativístico) são negativos (atrativos). A permanência dos sistemas na fase menos simétrica em altas temperaturas sugere o emprego de técnicas de cálculo mais rigorosas. Conforme discutido na introdução, os resultados qualitativos aqui revisados para o caso relativístico permanecem inalterados mesmo quando os efeitos da temperatura nas constantes de acoplamento são considerados de maneira não-perturbativa [2, 3]. De fato,  $\lambda_\Phi$ ,  $\lambda_\Psi$  e  $\lambda$  variam de maneira a inibir a restauração das simetrias em altas temperaturas. A pergunta a ser respondida no próximo capítulo é: ‘como os acoplamentos não-relativísticos ( $u_\Phi$ ,  $u_\Psi$  e  $u$ ) variam com  $T$ ?’

## Capítulo 5

# Correções térmicas para os acoplamentos

Neste capítulo, serão obtidas expressões dos acoplamentos em função da temperatura. Na primeira seção são delimitadas as possíveis contribuições para as correções térmicas dos acoplamentos em questão. Na segunda seção, é discutido como efetuar o cálculo propriamente dito, enquanto que na terceira, os mesmos são efetuados.

Para o caso relativístico, repetiremos os cálculos realizados na referência [2]. O caso não-relativístico representa nossa contribuição original. A estratégia é obter todos os acoplamentos como função da temperatura. Em seguida, estas quantidades serão inseridas nas equações para  $M_i^2(T)$ , Eqs. (4.10), e para  $\kappa_i(T)$ , Eq. (4.21).

### 5.1 Interações entre os diferentes campos

O problema que está sendo estudado envolve dois campos com interações quárticas. Em certas aplicações a sistemas físicos, essas interações podem ser interpretadas como ‘colisões’ de duas partículas. Segue um paralelo entre as ‘colisões’ possíveis no caso relativístico e no caso não-relativístico.

.	Relativístico	Não-relativístico
I	$\Phi + \Phi \rightarrow \Phi + \Phi$	$\Phi + \Phi \rightarrow \Phi + \Phi$
I'	$\Psi + \Psi \rightarrow \Psi + \Psi$	$\Psi + \Psi \rightarrow \Psi + \Psi$
II	$\Phi + \Psi \rightarrow \Phi + \Psi$	$\Phi + \Psi \rightarrow \Phi + \Psi$
III	$\Phi + \Phi \rightarrow \Psi + \Psi$	-
III'	$\Psi + \Psi \rightarrow \Phi + \Phi$	-

Tab. 5.1: Possíveis espalhamentos para os casos relativístico e não-relativístico.

Para a montagem da tabela, levou-se em consideração: as possíveis interações quárticas, a impossibilidade de aniquilação e criação de partículas (choques inelásticos) no caso não-relativístico, e tal possibilidade no caso relativístico.

## 5.2 Função de Green de 4-pontos

A função de Green de 4-pontos, com apenas um campo, pode ser diagramaticamente representada como:

$$\mathbf{G}^{(4)} = \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} + \dots \quad (5.1)$$

$G^{(4)}$  contém as correções ao vértice que representa o acoplamento. Da forma como foi representada acima, a função de Green de 4-pontos é visivelmente uma série de potências do acoplamento nu,  $\lambda$ . Se o acoplamento é pequeno ( $\lambda \ll 1$ ), uma primeira aproximação para o cálculo da função de Green de 4-pontos consiste em considerar apenas os termos até segunda potência deste, ou seja, apenas o vértice nu e os diagramas de 4-pontos com 1 loop. Essa será a aproximação perturbativa aqui utilizada, pois, neste trabalho, estamos nos limitando à regiões perturbativas. Portanto, para avaliar as correções aos acoplamentos, o primeiro passo será calcular o diagrama de Feynman com 1 loop e 2 vértices (segundo diagrama do lado direito da Eq. (5.1)).

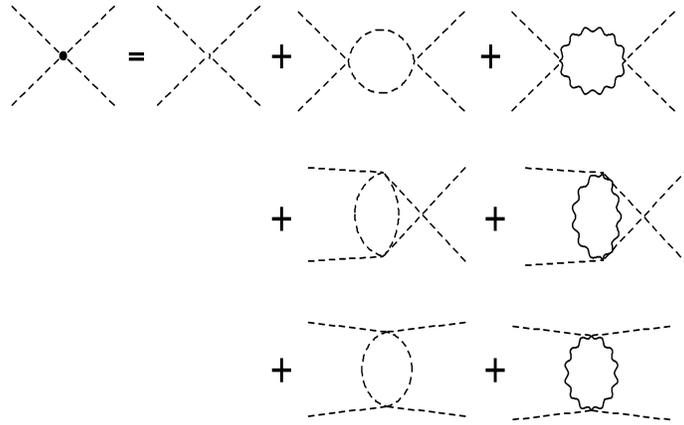
## 5.3 Cálculo das correções térmicas

A partir das expressões dos diagramas de 4-pontos e 1-loop e dos fatores de simetria<sup>1</sup>, serão calculados os acoplamentos renormalizados.

### 5.3.1 O caso relativístico

O cálculo dos acoplamentos térmicos relativísticos foi feito somando o acoplamento de ordem  $\lambda$  às correções de ordem  $\lambda^2$ , que são os diagramas de Feynman de 4-pontos e 1-loop. A seguir há uma representação diagramática e os resultados obtidos seguindo o esquema da tabela (5.1).

Para o caso relativístico, a aproximação de altas temperaturas produz os seguintes resultados:



I:  $\Phi + \Phi \rightarrow \Phi + \Phi$

$$\boxed{-\lambda_\Phi(T) = -\lambda_\Phi(0) - \ln\left(\frac{T}{\mu}\right) \frac{3}{8\pi^2} \left[ \lambda_\Phi^2(0) \frac{(N_\Phi+8)}{18} + \lambda^2(0) \frac{N_\Psi}{2} \right]}, \quad (5.2)$$

onde  $\mu$  é uma constante com dimensão de massa, originada na integração feita através de regularização dimensional, conforme discutido no Apêndice.

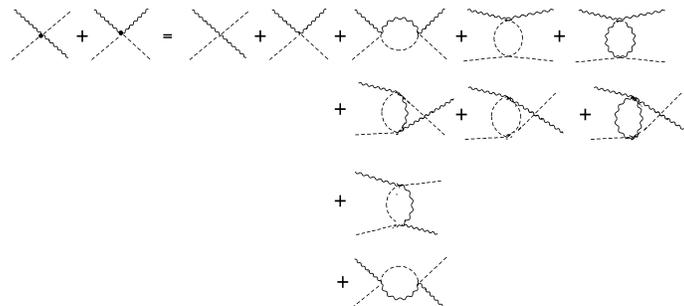
I':  $\Psi + \Psi \rightarrow \Psi + \Psi$

Completamente análogo ao caso anterior ( $\Phi + \Phi \rightarrow \Phi + \Phi$ ).

$$\boxed{-\lambda_\Psi(T) = -\lambda_\Psi(0) - \ln\left(\frac{T}{\mu}\right) \frac{3}{8\pi^2} \left[ \lambda_\Psi^2(0) \frac{N_\Psi+8}{18} + \lambda^2(0) \frac{N_\Phi}{2} \right]}. \quad (5.3)$$

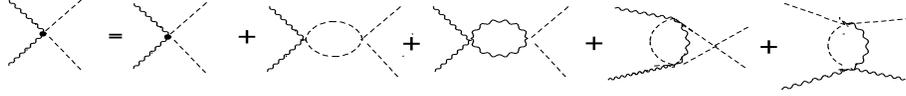
As contribuições térmicas para  $\lambda$  estão contidas em II, III e III':

II:  $\Phi + \Psi \rightarrow \Phi + \Psi$

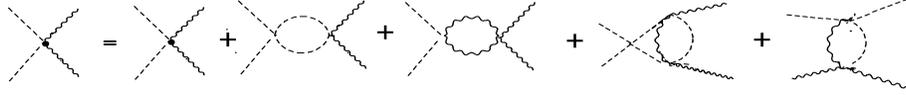


<sup>1</sup> Detalhes são encontrados no Apêndice.

III:  $\Phi + \Phi \rightarrow \Psi + \Psi$



III':  $\Psi + \Psi \rightarrow \Phi + \Phi$



Somando todas as correções, obtemos:

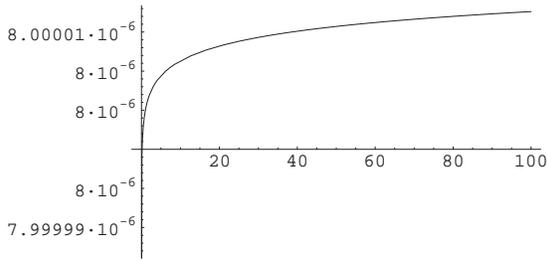
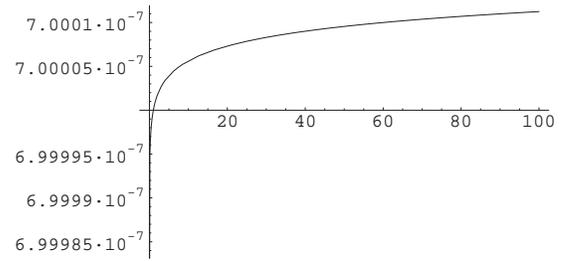
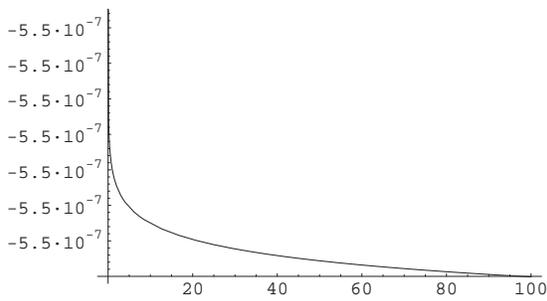
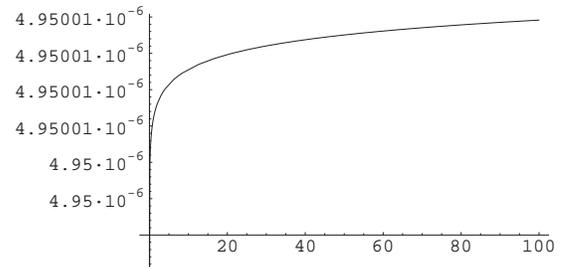
$$\begin{aligned}
 -4\lambda(T) &= \text{Correção(II)} + \text{Correção(III)} + \text{Correção(III')} \\
 &= -2\lambda(0) - \frac{1}{8\pi^2} \ln\left(\frac{T}{\mu}\right) \left[ 4\lambda(0) + 2\lambda_\Phi(0) \frac{(N_\Phi + 2)}{6} + 2\lambda_\Psi(0) \frac{(N_\Psi + 2)}{6} \right] \lambda(0) \\
 &\quad - \lambda(0) - \frac{1}{8\pi^2} \ln\left(\frac{T}{\mu}\right) \left[ \lambda_\Phi(0) \frac{(N_\Phi + 2)}{6} + \lambda_\Psi(0) \frac{(N_\Psi + 2)}{6} + 2\lambda(0) \right] \lambda(0) \\
 &\quad - \lambda(0) - \frac{1}{8\pi^2} \ln\left(\frac{T}{\mu}\right) \left[ \lambda_\Phi(0) \frac{(N_\Phi + 2)}{6} + \lambda_\Psi(0) \frac{(N_\Psi + 2)}{6} + 2\lambda(0) \right] \lambda(0). \quad (5.4)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{-\lambda(T) = -\lambda(0) - \frac{1}{8\pi^2} \ln\left(\frac{T}{\mu}\right) \left[ \lambda_\Phi(0) \frac{(N_\Phi + 2)}{6} + \lambda_\Psi(0) \frac{(N_\Psi + 2)}{6} + 2\lambda(0) \right] \lambda(0).} \quad (5.5)$$

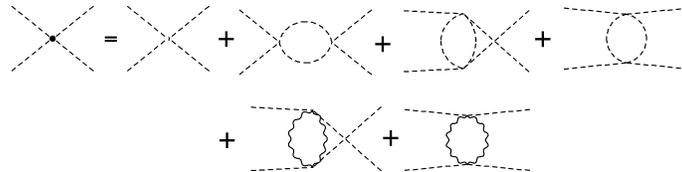
Os gráficos (5.1) a (5.3) representam  $\lambda_\Phi(T)$ ,  $\lambda_\Psi(T)$  e  $\lambda(T)$  em função da quantidade adimensional  $t = T/\mu$ , aos valores constantes foram atribuídos os valores  $\lambda_\Phi(0) = 8 \times 10^{-6}$ ,  $\lambda_\Psi(0) = 7 \times 10^{-7}$  e  $\lambda(0) = -5.5 \times 10^{-7}$ , e o gráfico (5.4) representa  $\lambda_\Phi(T)\lambda_\Psi(T) - 9\lambda^2(T)$ . Lembrando que a estabilidade da teoria é vinculada às condições  $\lambda_\Phi(T) > 0$ ,  $\lambda_\Psi(T) > 0$  e  $\lambda_\Phi(T)\lambda_\Psi(T) > 9\lambda^2(T)$ , vê-se, com os gráficos (5.1), (5.2) e (5.4), que a teoria não sai de seus limites de validade em nenhuma temperatura.

### 5.3.2 O caso não-relativístico

No caso não-relativístico, é mais complicado conhecer-se quais os diagramas efetivamente contribuem e quais os valores numéricos de seus fatores de simetria. Uma alternativa é recorrer-se ao potencial efetivo, que pode ser calculado, de maneira exata, até 1 loop, como mostrado na referência [20]. Deve ser notado que, além das diferenças entre os respectivos propagadores, todos os vértices não-relativísticos conservam o número de partículas.


 Fig. 5.1:  $\lambda_\Phi(T)$ 

 Fig. 5.2:  $\lambda_\Psi(T)$ 

 Fig. 5.3:  $\lambda(T)$ 

 Fig. 5.4: Variação de  $\lambda_\Phi(T)\lambda_\Psi(T) - 9\lambda^2(T)$  com a temperatura.

I:  $\Phi + \Phi \rightarrow \Phi + \Phi$



A partir dos gráficos temos:

$$\begin{aligned}
 u_\Phi(T) = & u_\Phi(0) - u_\Phi(0)^2 \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} [f_1 D_\Phi(\omega_n, \mathbf{p}) D_\Phi(-\omega_n, \mathbf{p}) + f_2 D_\Phi^2(\omega_n, \mathbf{p})] \\
 & - u(0)^2 \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} f_3 D_\Psi^2(\omega_n, \mathbf{p}), \quad (5.6)
 \end{aligned}$$

onde  $D_i(\omega_n, \mathbf{q}) = \frac{1}{-i\omega_n + \omega_i(\mathbf{p})}$  e os fatores de simetria são  $f_1 = 1/3$ ,  $f_2 = 4/3$  e  $f_3 = 3$  para  $N_\Phi = N_\Psi = 2$  [6].

Seguindo os detalhes do Apêndice, na aproximação de altas temperaturas ( $\kappa_i \ll T \ll m_i$ ), temos:

$$u_{\Phi}(T) = u_{\Phi}(0) - \frac{u_{\Phi}^2(0)m}{6\pi} \sqrt{\frac{\kappa m}{2}} - \frac{mT}{12\pi} \sqrt{\frac{2m}{\kappa}} (5u_{\Phi}^2(0) + 9u^2(0)). \quad (5.7)$$

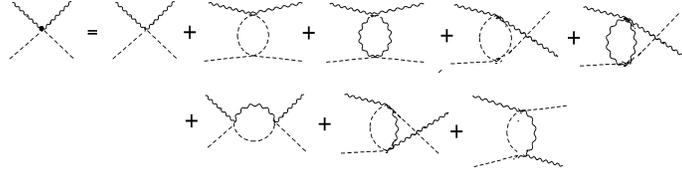
I:  $\Psi + \Psi \rightarrow \Psi + \Psi$

De forma análoga a ( $\Phi + \Phi \rightarrow \Phi + \Phi$ ):

$$\begin{aligned} u_{\Psi}(T) &= u_{\Psi}(0) - u_{\Psi}(0)^2 \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} [f_1 D_{\Psi}(\omega_n, \mathbf{p}) D_{\Psi}(-\omega_n, \mathbf{p}) + f_2 D_{\Psi}^2(\omega_n, \mathbf{p})] \\ &- 3u(0)^2 \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f_3 D_{\Phi}^2(\omega_n, \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$u_{\Psi}(T) = u_{\Psi}(0) - \frac{u_{\Psi}^2(0)m}{6\pi} \sqrt{\frac{\kappa m}{2}} - \frac{mT}{12\pi} \sqrt{\frac{2m}{\kappa}} (5u_{\Psi}^2(0) + 9u^2(0)). \quad (5.9)$$

II:  $\Phi + \Psi \rightarrow \Phi + \Psi$



Para o acoplamento misto, dos diagramas temos:

$$\begin{aligned} u(T) &= u(0) - u(0) \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} [u_{\Phi}(0) f_1 D_{\Phi}^2(\omega_n, \mathbf{q}) + u_{\Psi}(0) f_2 D_{\Psi}^2(\omega_n, \mathbf{q})] \\ &- u(0)^2 \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} [f_3 D_{\Phi}(\omega_n, \mathbf{q}) D_{\Psi}(\omega_n, \mathbf{q}) \\ &+ f_4 D_{\Phi}(\omega_n, \mathbf{q}) D_{\Psi}(-\omega_n, \mathbf{q}) + f_5 D_{\Phi}(-\omega_n, \mathbf{q}) D_{\Psi}(\omega_n, \mathbf{q})]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

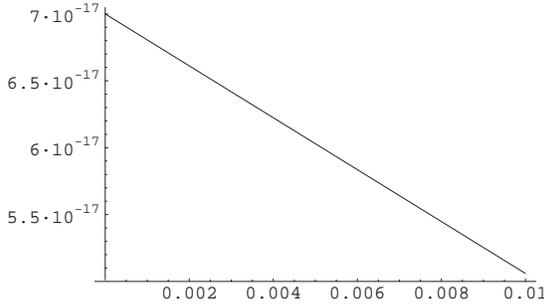
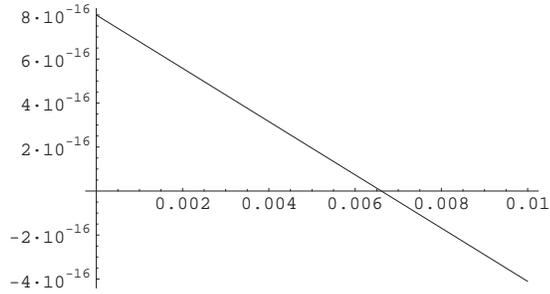
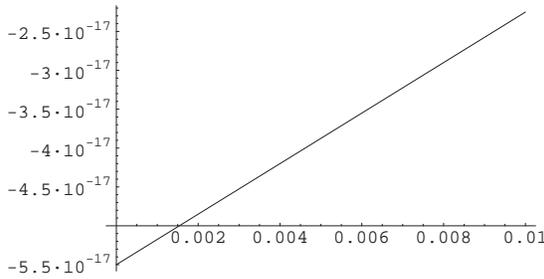
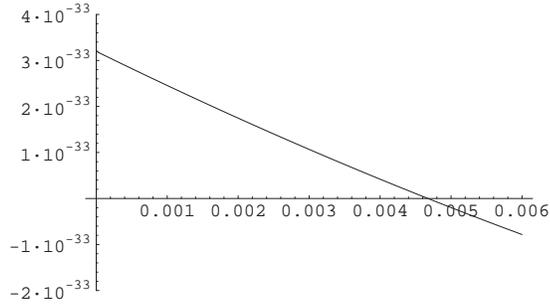
onde, para  $N_{\Phi} = N_{\Psi} = 2$ , os fatores de simetria são  $f_1 = f_2 = 1/3$ ,  $f_3 = 1$  e  $f_4 = f_5 = 1/2$  [6].

Na aproximação de altas temperaturas:

$$u(T) = u(0) - \frac{mT}{4\pi} \sqrt{\frac{2m}{\kappa}} u(0) \left( u(0) + \frac{2u_{\Phi}(0)}{3} + \frac{2u_{\Psi}(0)}{3} \right). \quad (5.11)$$

Os gráficos (5.5), (5.6) e (5.7) representam  $u_{\Phi}(T)$ ,  $u_{\Psi}(T)$  e  $u(T)$  para os seguintes valores de parâmetros:

$$\begin{aligned}
 u_\Phi(0) &= 8 \times 10^{-16} \text{eV}^{-2}, \quad u_\Psi(0) = 7 \times 10^{-17} \text{eV}^{-2}, \quad u(0) = -5.5 \times 10^{-17} \text{eV}^{-2}, \\
 m_\Phi &= m_\Psi = 10^9 \text{eV} \quad \text{e} \quad \kappa_\Phi(0) = \kappa_\Psi(0) = 10^{-9} \text{eV}.
 \end{aligned}
 \tag{5.12}$$


 Fig. 5.5: Variação de  $u_\Phi(T)$  com a temperatura.

 Fig. 5.6: Variação de  $u_\Psi(T)$  com a temperatura.

 Fig. 5.7: Variação de  $u(T)$  com a temperatura.

 Fig. 5.8: Variação de  $\left[ u^2(T) - \frac{u_\Phi(T)u_\Psi(T)}{9} \right]$  com a temperatura.

Para esses valores de parâmetros, a teoria é estável até  $T \sim 0.0046 \text{eV}$  (54K), temperatura acima da qual  $[u^2(T) - u_\Phi(T)u_\Psi(T)/9]$  passa a ser negativo, como pode ser visto no gráfico (5.8), nesta faixa de temperaturas  $u_\Phi(T)$  e  $u_\Psi(T)$  mantêm-se positivas.

### 5.3.3 Conclusões

A aproximação perturbativa para a teoria não-relativística sai de seu limite de validade à  $T \simeq 54\text{K}$ , ao contrário da teoria relativística, que se mantém estável em todos os valores de temperaturas. Os acoplamentos efetivos na teoria não-relativística têm uma dependência linear com a temperatura, muito mais forte que a dependência dos acoplamentos da teoria relativística, que dependem de  $\ln(T)$ . Sendo assim, o caso não-relativístico é mais sensível ao uso da teoria de perturbação mesmo para valores pequenos (em  $T = 0$ ) das constantes de acoplamento.

Portanto, no próximo capítulo, estudaremos as transições de fase para o caso não-relativístico de duas maneiras: a primeira dentro do limite de validade da teoria de perturbação ( $T < 0.0046\text{eV}$ ), e a segunda somando, com o auxílio de uma aproximação não-perturbativa, as correções térmicas para  $u(T)$ ,  $u_\Phi(T)$  e  $u_\Psi(T)$ .

# Capítulo 6

## Transições de fase

Neste capítulo, vamos considerar qual o efeito produzido nas transições de fase através da consideração das correções térmicas nos acoplamentos. Na primeira seção, são resumidos os principais resultados já encontrados. Na segunda seção, as expressões das autoenergias são aprimoradas através da consideração da dependência térmica dos acoplamentos, incluindo efeitos não-perturbativos.

### 6.1 Resumo dos principais resultados

#### 6.1.1 Autoenergias em altas temperaturas

*Relativístico*

$$M^2(T) = M^2(0) + \Sigma_i^T, \text{ onde } \Sigma_i^T = \frac{T^2}{24} \left[ \frac{(N_i + 2)}{6} \lambda_i + \frac{N_j}{2} \lambda \right]. \quad (6.1)$$

*Não-relativístico*

$$\begin{aligned} \kappa_i(T) &= \kappa_i(0) + \Sigma_i^T, \\ \text{onde } \Sigma_i^T &= u_i \frac{N_i + 2}{6} \left( \frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \zeta(3/2) + u \frac{N_j}{2} \left( \frac{m_j T}{2\pi} \right)^{3/2} \zeta(3/2). \end{aligned} \quad (6.2)$$

## 6.1.2 Acoplamentos em altas temperaturas

*Relativístico*

$$\begin{aligned}
\lambda_{\Phi}(T) &= \lambda_{\Phi}(0) + \ln\left(\frac{T}{\mu}\right) \frac{3}{8\pi^2} \left( \lambda_{\Phi}^2(0) \frac{N_{\Phi} + 8}{18} + \lambda^2(0) \frac{N_{\Psi}}{2} \right), \\
\lambda_{\Psi}(T) &= \lambda_{\Psi}(0) + \ln\left(\frac{T}{\mu}\right) \frac{3}{8\pi^2} \left( \lambda_{\Psi}^2(0) \frac{N_{\Psi} + 8}{18} + \lambda^2(0) \frac{N_{\Phi}}{2} \right), \\
\lambda(T) &= \lambda(0) + \frac{\lambda(0)}{8\pi^2} \ln\left(\frac{T}{\mu}\right) \left[ \lambda_{\Phi}(0) \frac{N_{\Phi} + 2}{6} + \lambda_{\Psi}(0) \frac{N_{\Psi} + 2}{6} + 2\lambda(0) \right]. \quad (6.3)
\end{aligned}$$

*Não-relativístico*

$$\begin{aligned}
u_{\Phi}(T) &= u_{\Phi}(0) - \frac{u_{\Phi}^2(0) m}{6\pi} \sqrt{\frac{\kappa m}{2}} - \frac{mT}{12\pi} \sqrt{\frac{2m}{\kappa}} (5u_{\Phi}^2(0) + 9u^2(0)), \\
u_{\Psi}(T) &= u_{\Psi}(0) - \frac{u_{\Psi}^2(0) m}{6\pi} \sqrt{\frac{\kappa m}{2}} - \frac{mT}{12\pi} \sqrt{\frac{2m}{\kappa}} (5u_{\Psi}^2(0) + 9u^2(0)), \\
u(T) &= u(0) - \frac{mT}{4\pi} \sqrt{\frac{2m}{\kappa}} u(0) \left( u(0) + \frac{2u_{\Phi}(0)}{3} + \frac{2u_{\Psi}(0)}{3} \right). \quad (6.4)
\end{aligned}$$

## 6.2 Refinamento do cálculo das autoenergias

As autoenergias térmicas foram calculados no capítulo 3. Ambas são funções dos respectivos acoplamentos  $\lambda$ 's e  $u$ 's. Porém, no capítulo 4 foram calculadas correções aos acoplamentos, o que será feito agora é inserir naquelas expressões do capítulo 3 os acoplamentos como funções da temperatura,  $\lambda \rightarrow \lambda(T)$  e  $u \rightarrow u(T)$ .

6.2.1 *Relativístico*

A expressão (6.1) é a primeira correção térmica à autoenergia relativística, considerando os acoplamentos desta correção como dependentes da temperatura, expressões (6.3), tem-se:

$$M_i^2(T) = M_i^2(0) + \frac{T^2}{12} \Delta_i(T), \quad i, j = \Phi \text{ ou } \Psi, \quad (6.5)$$

onde

$$\begin{aligned}
\Delta_i(T) &= \lambda_i(T) \frac{(N_i + 2)}{6} + \lambda(T) \frac{N_j}{2} \\
&= \lambda_i(0) \frac{(N_i + 2)}{6} + \lambda(0) \frac{N_j}{2} + \lambda_i(0)^2 \frac{(N_i + 8)(N_i + 2)}{288\pi^2} \ln\left(\frac{T}{\mu}\right) \\
&\quad + \lambda(0) N_j \frac{(N_i + 2)\lambda_i(0) + (N_j + 2)\lambda_j(0)}{96\pi^2} \ln\left(\frac{T}{\mu}\right) + \lambda(0)^2 \frac{N_j(N_i + 6)}{32\pi^2} \ln\left(\frac{T}{\mu}\right) \quad (6.6)
\end{aligned}$$

O gráfico (6.1) mostra a variação de  $\lambda_\Phi(T)\lambda_\Psi(T)/(3\lambda(T))^2$  para os valores dos parâmetros constantes:  $N_\Phi = N_\Psi = 2$ ,  $\lambda_\Psi(0) = 7 \times 10^{-5}$ ,  $\lambda_\Phi(0) = 5 \times 10^{-4}$  e  $\lambda(0) = -6 \times 10^{-5}$  da quantidade adimensional  $t = T\mu$ , o comportamento do gráfico garante que a teoria continua estável ao considerar-se a dependência térmica dos acoplamentos.

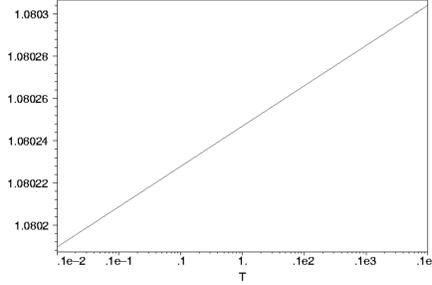
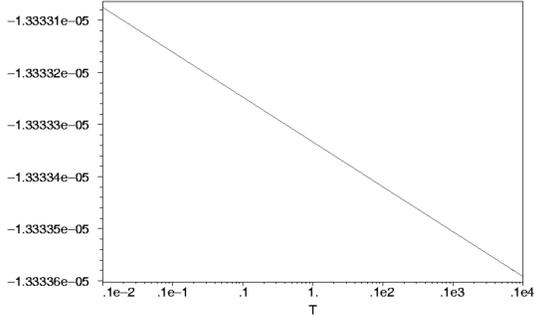
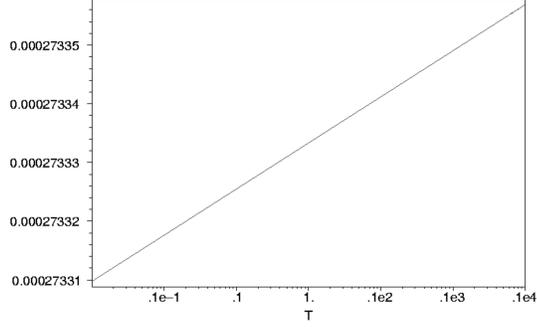


Fig. 6.1: Variação de  $\lambda_\Phi(T)\lambda_\Psi(T)/(3\lambda(T))^2$  com a temperatura (em unidades da escala  $\mu$ ), para os valores dos parâmetros constantes:  $N_\Phi = N_\Psi = 2$ ,  $\lambda_\Phi(0) = 7 \times 10^{-5}$ ,  $\lambda_\Psi(0) = 5 \times 10^{-4}$  e  $\lambda(0) = -6 \times 10^{-5}$ .

O gráfico (6.2) mostra o comportamento de  $\Delta_\Psi(T)$  com a variação da temperatura para os mesmos valores de parâmetros da figura (6.1). Com o aumento da temperatura,  $\Delta_\Psi(T)$  permanece negativo, portanto, a simetria quebrada relacionada ao campo  $\Psi$  não é restaurada ao ser considerada a dependência térmica dos acoplamentos, ocorre ISB/SNR assim como antes de considerar as correções térmicas aos acoplamentos. O gráfico (6.3) mostra a variação de  $\Delta_\Phi(T)$  com a temperatura, que continua positivo, a fase na direção de  $\Phi$  é sempre simétrica. Além disso, os trabalhos das referências [2, 3], como já discutido, mostram que a situação não muda do ponto de vista qualitativo mesmo quando emprega-se técnicas não-perturbativas para obter-se a dependência térmica dos acoplamentos.

### 6.2.2 Não-relativístico

O refinamento ao cálculo dos parâmetros  $\kappa(T)$  será feito de duas maneiras. A primeira será a aproximação perturbativa de 1-loop, a segunda será através da *soma da cadeia* que é uma técnica não-perturbativa.

Fig. 6.2: Variação de  $\Delta_\Psi(T)$  com a temperatura.Fig. 6.3: Variação de  $\Delta_\Phi(T)$  com a temperatura.

### Perturbativo

O cálculo da renormalização da massa da teoria não-relativística com campos  $O(N_\Phi) \times O(N_\Psi)$  resultou na expressão (4.21):

$$\kappa_i(T) = \kappa_i(0) + u_i \frac{N_i + 2}{6} \left( \frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} Li_{3/2} \left[ e^{-\kappa_i(0)/T} \right] + u \frac{N_j}{2} \left( \frac{m_j T}{2\pi} \right)^{3/2} Li_{3/2} \left[ e^{-\kappa_j(0)/T} \right]. \quad (6.7)$$

Para  $N_\Phi = N_\Psi = 2$ , no limite de altas temperaturas, tem-se:

$$\kappa_i(T) = \kappa_i(0) + \left( \frac{T}{2\pi} \right)^{3/2} \zeta(3/2) \Delta_i^{NR}. \quad (6.8)$$

O cálculo perturbativo de 1-loop dos acoplamentos térmicos, também em altas temperaturas, considerando  $m_\Phi \simeq m_\Psi \equiv m$  e  $\kappa_\Phi \simeq \kappa_\Psi \equiv \kappa$ , resultou nas expressões:

$$u_\Phi(T) = u_\Phi(0) - \frac{u_\Phi^2(0) m}{6\pi} \sqrt{\frac{\kappa m}{2}} - \frac{mT}{12\pi} \sqrt{\frac{2m}{\kappa}} (5 u_\Phi^2(0) + 9 u^2(0)), \quad (6.9)$$

$$u_\Psi(T) = u_\Psi(0) - \frac{u_\Psi^2(0) m}{6\pi} \sqrt{\frac{\kappa m}{2}} - \frac{mT}{12\pi} \sqrt{\frac{2m}{\kappa}} (5 u_\Psi^2(0) + 9 u^2(0)), \quad (6.10)$$

$$u(T) = u(0) - \frac{mT}{4\pi} \sqrt{\frac{2m}{\kappa}} u(0) \left( u(0) + \frac{2 u_\Phi(0)}{3} + \frac{2 u_\Psi(0)}{3} \right). \quad (6.11)$$

Substituindo os  $u$ 's da equação (6.8) pelos  $u(T)$ 's das duas últimas equações,  $u \rightarrow u(T)$ , temos:

$$\begin{aligned} \kappa_{\Phi}(T) &= \kappa_{\Phi}(0) + \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{3/2} \zeta(3/2) \frac{2}{3} \left[ u_{\Phi}(0) - \frac{u_{\Phi}^2(0) m}{6\pi} \sqrt{\frac{\kappa(0) m}{2}} - \frac{mT}{12\pi} \sqrt{\frac{2m}{\kappa(0)}} (5 u_{\Phi}^2(0) + 9 u^2(0)) \right] m^{3/2} \\ &+ \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{3/2} \zeta(3/2) \left[ u(0) - \frac{mT}{4\pi} \sqrt{\frac{2m}{\kappa(0)}} u(0) \left( u(0) + \frac{2u_{\Phi}(0)}{3} + \frac{2u_{\Psi}(0)}{3} \right) \right] m^{3/2}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

e

$$\begin{aligned} \kappa_{\Psi}(T) &= \kappa_{\Psi}(0) + \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{3/2} \zeta(3/2) \frac{2}{3} \left[ u_{\Psi}(0) - \frac{u_{\Psi}^2(0) m}{6\pi} \sqrt{\frac{\kappa(0) m}{2}} - \frac{mT}{12\pi} \sqrt{\frac{2m}{\kappa(0)}} (5 u_{\Psi}^2(0) + 9 u^2(0)) \right] m^{3/2} \\ &+ \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{3/2} \zeta(3/2) \left[ u(0) - \frac{mT}{4\pi} \sqrt{\frac{2m}{\kappa(0)}} u(0) \left( u(0) + \frac{2u_{\Psi}(0)}{3} + \frac{2u_{\Phi}(0)}{3} \right) \right] m^{3/2}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Os gráficos (6.4) e (6.6) representam as quantidades  $\Delta_{\Psi}^{NR}(T)$  e  $\Delta_{\Phi}^{NR}(T)$  em função da temperatura, obtidas utilizando-se os acoplamentos *térmicos* ao invés dos acoplamentos nus, são utilizados os parâmetros citados na expressão (5.12). Os gráficos (6.5) e (6.7) representam os parâmetros  $\kappa(T)$  em função da temperatura.

$\Delta_{\Psi}^{NR}(T)$  fica positivo dentro do limite de validade da aproximação perturbativa ( $T = 0.0046\text{eV}$ , veja figura 5.8), conforme pode ser nitidamente observado no diagrama de fase representado pela figura 6.5. Essa transição mostra o aparecimento de uma fase reentrante.

$\Delta_{\Phi}^{NR}(T)$  diminui com a temperatura, ficando mesmo negativo. Contudo, essa inversão de sinal acontece fora do limite de estabilidade da teoria, onde a aproximação perturbativa não é mais justificável.

Em resumo, considerando as correções térmicas aos acoplamentos,  $\kappa_{\Phi}(T)$  é sempre positivo nos valores de temperatura nos quais a teoria é estável para os parâmetros escolhidos, de forma que a simetria do potencial na direção  $\Phi$  nunca é quebrada. Já  $\kappa_{\Psi}(T)$  é positivo em  $T = 0$ , passa a negativo em  $T \sim 0.00095\text{eV}$  (11K) em uma ISB, e volta a ser positivo em  $T \sim 0.0038\text{eV}$  (44.5K), restaurando a simetria através de uma fase reentrante.

### Não-perturbativo

A fim de refinar um pouco mais e testar a validade dos resultados qualitativos obtidos, serão consideradas correções térmicas aos vértices além das de 1-loop, em um cálculo não-perturbativo conhecido como *soma da corrente*. Vamos ainda desconsiderar, neste caso, a aproximação de altas temperaturas. A soma da corrente consiste em resolver de maneira auto-consistente o

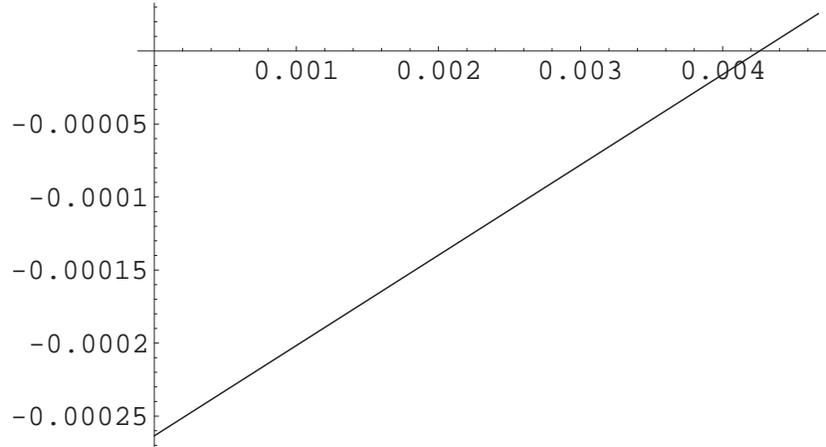


Fig. 6.4: Variação de  $\Delta_{\Psi}^{NR}(T)$  com a temperatura.

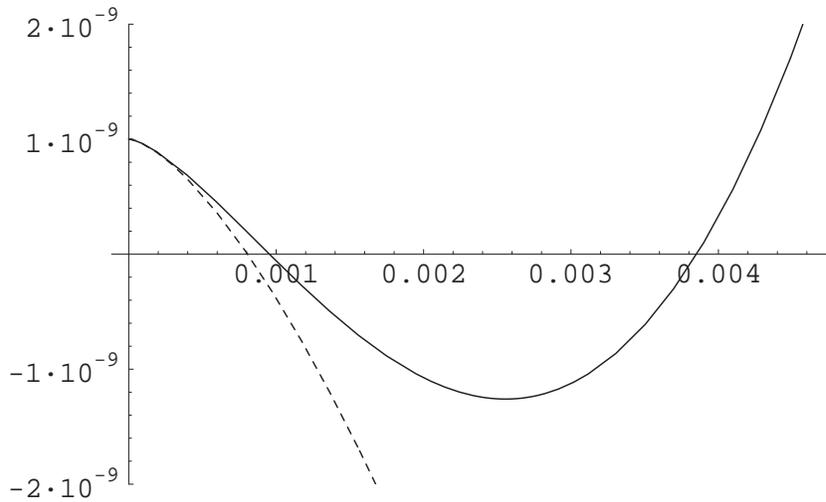


Fig. 6.5: Variação de  $\kappa_{\Psi}(T)$  com a temperatura. A linha cheia representa  $\kappa_{\Psi}(T)$  considerando a correção térmica aos acoplamentos, e a linha tracejada representa  $\kappa_{\Psi}(T)$  sem conderar a correção térmica aos acoplamentos.

seguinte conjunto de equações lineares e homogêneas para  $u_{\Phi}$ ,  $u_{\Psi}$  e  $u$ :

$$\begin{aligned}
 u_{\Phi}(T) &= u_{\Phi}(0) - u_{\Phi}(T) \frac{u_{\Phi}(0)}{3} I_1(\beta\kappa_{\Phi}) - 3u(T) u(0) I_2(\beta\kappa_{\Psi}) \\
 u_{\Psi}(T) &= u_{\Psi}(0) - u_{\Psi}(T) \frac{u_{\Psi}(0)}{3} I_1(\beta\kappa_{\Psi}) - 3u(T) u I_2(\beta\kappa_{\Phi}) \\
 u(T) &= u(0) - u(T) \frac{2u_{\Phi}(0)}{6} I_2(\beta\kappa_{\Phi}) - u(T) \frac{2u_{\Psi}(0)}{6} I_2(\beta\kappa_{\Psi}) - u_{\Phi}(T) \frac{2u(0)}{6} I_2(\beta\kappa_{\Phi}) - u_{\Psi}(T) \frac{2u(0)}{6} I_2(\beta\kappa_{\Psi}) \\
 &\quad - u(T) u(0) I_3(\beta\kappa_{\Phi}, \beta\kappa_{\Psi}), \tag{6.14}
 \end{aligned}$$

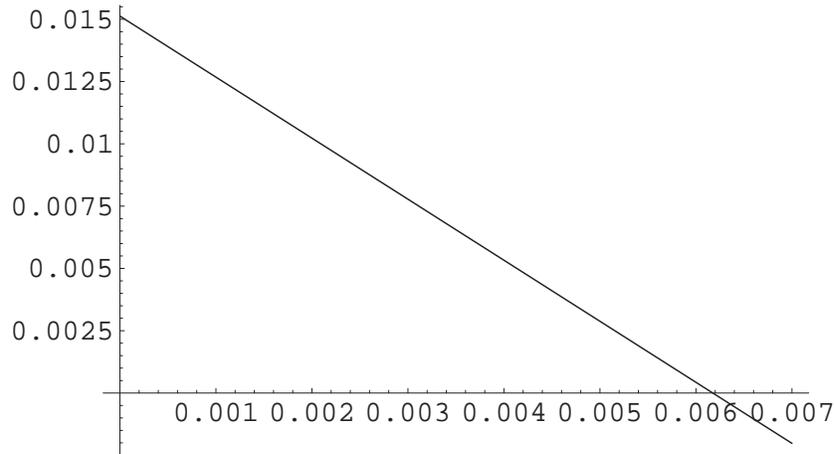


Fig. 6.6: Variação de  $\Delta_{\Phi}^{NR}(T)$  com a temperatura.

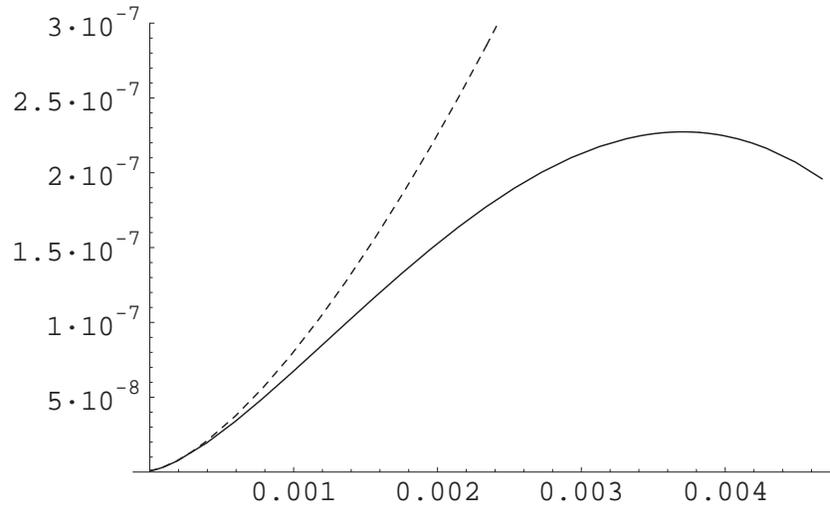


Fig. 6.7: Variação de  $\kappa_{\Phi}(T)$  com a temperatura. A linha cheia representa  $\kappa_{\Phi}(T)$  considerando a correção térmica aos acoplamentos, e a linha tracejada representa  $\kappa_{\Phi}(T)$  sem conderar a correção térmica aos acoplamentos.

onde foram definidas as funções (veja Apêndice):

$$\begin{aligned}
 I_1(\beta\kappa_i) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_i(\mathbf{p})} \{1 + 2n(\omega_i) + 8\beta\omega_i n(\omega_i) [1 + n(\omega_i)]\} , \\
 I_2(\beta\kappa_i) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \beta n(\omega_i) [1 + n(\omega_i)] , \\
 I_3(\beta\kappa_i, \beta\kappa_j) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{\omega_j}{\omega_j^2 - \omega_i^2} [1 + 2n(\omega_i)] - \frac{\omega_i}{\omega_j^2 - \omega_i^2} [1 + 2n(\omega_j)] \right\} . \quad (6.15)
 \end{aligned}$$

O gráfico 6.8 mostra a dependência dos acoplamentos com a temperatura. Note que o gráfico 6.9 expõe a variação de  $u_\Phi(T)u_\Psi(T) - 9u^2(T)$  com a temperatura, como esse gráfico se mantém sempre positivo bem como  $u_\Phi(T)$  e  $u_\Psi(T)$ , a teoria é estável mesmo em altas temperaturas, ao contrário do caso perturbativo.

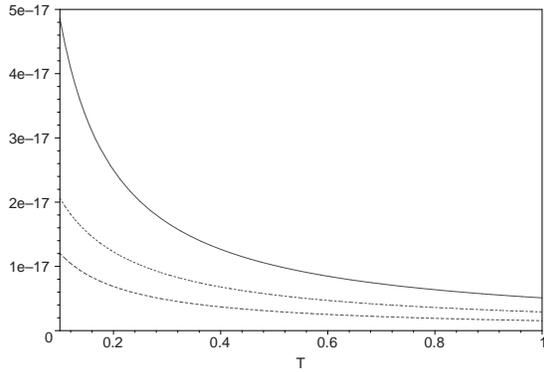


Fig. 6.8: De cima para baixo:  $u_\Phi(T)$ ,  $u_\Psi(T)$  e  $-u(T)$ .

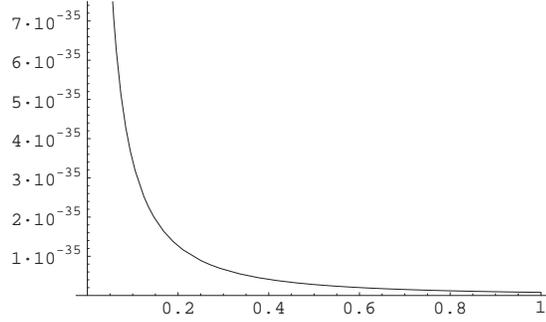


Fig. 6.9:  $u_\Phi(T)u_\Psi(T) - 9u^2(T)$  em função da temperatura. A teoria se mantém estável para valores positivos da ordenada.

Utilizando os mesmos valores de parâmetros escolhidos para estudar o cálculo perturbativo, na expressão (5.12), os  $\Delta_i^{NR}(T)$  são representados nos gráficos (6.10) e (6.11).

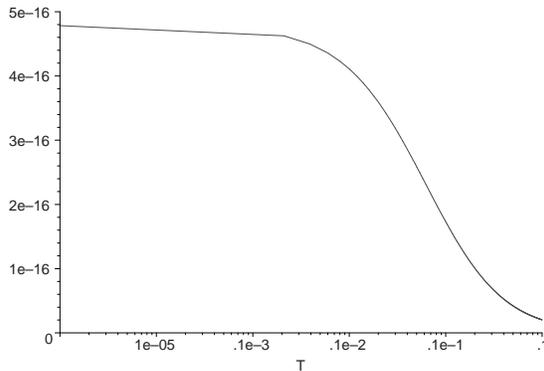


Fig. 6.10: Variação de  $\Delta_\Phi^{NR}(T)$  com a temperatura.

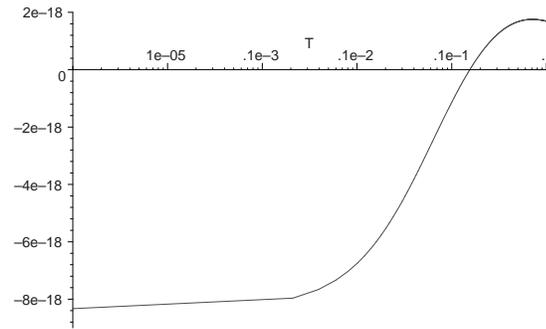


Fig. 6.11: Variação de  $\Delta_\Psi^{NR}(T)$  com a temperatura.

A figura 6.11 mostra que  $\Delta_\Psi^{NR}(T)$  realmente passa a ser positivo e assim permanece, conforme ilustrado pelo diagrama de fase da figura 6.12. Na direção de  $\Psi$ , em  $T = 0$  a teoria é simétrica, em  $T_{c,1} \simeq 10^{-3}\text{eV}$  (11.6K) há uma ISB, e em  $T \simeq 1.5 \times 10^{-2}\text{eV}$  (175K) a simetria é restaurada através de fase reentrante.

Por outro lado,  $\Delta_{Phi}^{NR}(T)$  (figura 6.10) é sempre positivo, e portanto a simetria nunca é quebrada na direção  $\Phi$ .

Assim chegamos ao resultado mais importante deste trabalho, mostrando que, para o caso não-relativístico, ISB/SNR não podem ocorrer, em altas temperaturas, quando os efeitos térmicos

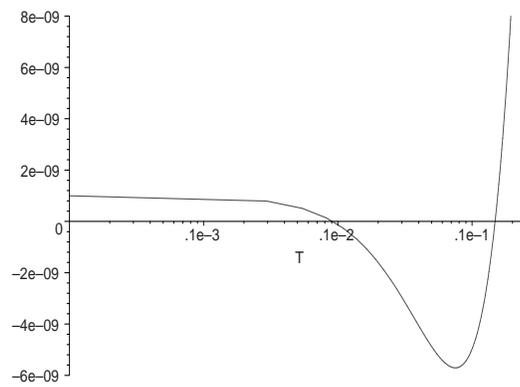


Fig. 6.12: Variação de  $\kappa_\psi(T)$  com a temperatura.

nos acoplamentos são considerados

# Capítulo 7

## Conclusões

O modelo escalar com simetria  $O(2) \times O(2)$  relativístico foi revisado em termos das quebras e restaurações de simetrias ocorridas ao variar-se a temperatura. Na aproximação perturbativa de 1-loop, foi verificada a possibilidade de Quebra Inversa de Simetria (ISB) e Não Restauração de Simetria (SNR). Os resultados de ISB/SNR não são decorrentes da limitação da aproximação utilizada, como pode ser verificado nas referências [2, 3]. Esse modelo pode representar o setor de Higgs de teorias de grand unificação, sendo relevante para a Cosmologia.

As quebras e restaurações de simetrias de um modelo não-relativístico análogo àquele foram então estudadas através da análise das correções térmicas aos parâmetros  $\kappa$ . Esse modelo é relevante para sistemas de Matéria Condensada, pode representar sistemas como um gás bosônico de esferas duras, com dois tipos de bósons, ou pares de Cooper. Tais correções foram calculadas em três níveis de aproximação, sendo cada uma um aprimoramento em relação à anterior.

O primeiro método para obter correções térmicas aos parâmetros  $\kappa(T)$  foi através do cálculo da autoenergia em uma aproximação perturbativa de 1 loop. Os fenômenos de Quebra Inversa de Simetria e Não Restauração de Simetria foram observados para valores negativos da interação entre campos distintos. Os resultados assim obtidos são análogos aos do caso relativístico, mostrando que estes fenômenos persistem em altas temperaturas.

O segundo método para o cálculo dos parâmetros  $\kappa(T)$  foi calcular as correções térmicas aos acoplamentos, na aproximação perturbativa de 1 loop, e utilizar tais correções para o cálculo das autoenergias. A Quebra Inversa de Simetria que já havia sido observada no cálculo anterior foi também observada, porém tal simetria foi restaurada através de uma fase reentrante, ao contrário do cálculo anterior onde havia uma Não Restauração de Simetria. Em altas temperaturas, a fase observada é  $O(N_\Phi) \times O(N_\Psi)$ , simétrica na direção de ambos os campos. Esse era o resultado esperado, pois esse modelo não-relativístico é relevante para sistemas da Matéria Condensada, nos quais se espera que simetrias quebradas em temperaturas relativamente baixas

sejam restauradas com o aumento da temperatura. Contudo os acoplamentos não-relativísticos mostraram depender da temperatura de maneira mais intensa do que seus análogos relativísticos onde o modelo tornou-se estável.

Para melhor investigar tal situação, consideramos um terceiro método realizando um cálculo não-perturbativo. Com esse cálculo, a teoria se mantém estável em uma faixa maior de temperatura que no cálculo perturbativo de 1-loop. Os resultados qualitativos foram os mesmos do cálculo anterior, ou seja, simetrias quebradas em baixas temperaturas foram restauradas em temperaturas mais altas, não é observado Não Restauração de Simetria.

Concluimos então que, ao contrário do caso relativístico, a persistência dos fenômenos de ISB e SNR em altas temperaturas parece ser um produto da aproximação perturbativa de primeira ordem. Os acoplamentos não-relativísticos são mais sensíveis a variações da temperatura, de maneira que para esses modelos simetrias quebradas em baixas temperaturas serão sempre restauradas em altas temperaturas.

# Capítulo 8

## Apêndices

### 8.1 Apêndice I: Parametrização de Feynman

A fração  $\frac{1}{y^2+z^2} \frac{1}{y^2+(z-x)^2}$  pode ser reexpressa convenientemente seguindo os passos seguintes:

Sejam  $a$  e  $b$  dois números, segue:

$$\frac{1}{a \cdot b} = \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{dr}{r^2}, \quad (8.1)$$

$$\begin{aligned} r &\doteq a \cdot \alpha + b(1-\alpha) \Rightarrow \alpha = \frac{r-b}{a-b}, \\ dr &= (a-b)d\alpha, \end{aligned} \quad (8.2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a \cdot b} = \int_0^1 \frac{d\alpha}{[a \cdot \alpha + b(1-\alpha)]^2}. \quad (8.3)$$

$$\begin{aligned} a &\rightarrow y^2 + z^2, \\ b &\rightarrow y^2 + (z-x)^2, \end{aligned} \quad (8.4)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^2 + z^2} \frac{1}{y^2 + (z - x)^2} = \int_0^1 \frac{d\alpha}{\{(y^2 + z^2)\alpha + [y^2 + (z - x)^2](1 - \alpha)\}^2} = \int_0^1 \frac{d\alpha}{\{z^2 + y^2 - 2 \cdot z \cdot x(1 - \alpha) + x^2(1 - \alpha)^2\}^2}. \quad (8.5)$$

$$z' \doteq z - x(1 - \alpha),$$

$$\text{obs.: } dz' = dz, \quad (8.6)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^2 + z^2} \frac{1}{y^2 + (z - x)^2} = \int_0^1 \frac{d\alpha}{\{z'^2 + y^2 + x^2 \cdot \alpha(1 - \alpha)\}^2}. \quad (8.7)$$

No uso desta expressão,  $z$  será uma variável de integração com o mesmo elemento de volume de  $z'$ , posso substituir  $z$  por  $z'$  e continuar chamando de  $z$ :

$$\Rightarrow \frac{1}{y^2 + z^2} \frac{1}{y^2 + (z - x)^2} = \int_0^1 \frac{d\alpha}{\{z^2 + y^2 + x^2 \cdot \alpha(1 - \alpha)\}^2}. \quad (8.8)$$

## 8.2 Apêndice II: Soma sobre as frequências bosônicas de Matsubara

As somas sobre as frequências de Matsubara relevantes para este trabalho são [21]:

$$\sum_n \frac{1}{iw_n - x} = -\frac{\beta}{e^{\beta x} - 1}. \quad (8.9)$$

$$\sum_n \frac{x}{\omega_n^2 + x^2} = \frac{\beta}{2} \frac{e^{\beta x} + 1}{e^{\beta x} - 1}. \quad (8.10)$$

## 8.3 Apêndice III: Regras de Feynman

As regras de Feynman para a teoria escalar com dois campos a temperatura finita no espaço Euclidiano podem ser expressas como [21]:

### 8.3.1 Modelo escalar relativístico

$$\begin{array}{c} \text{-----} \\ \\ \end{array} = \frac{1}{p_\Phi^2 + M_\Phi^2} \tag{8.11}$$

$$\begin{array}{c} \text{~~~~~} \\ \\ \end{array} = \frac{1}{p_\Psi^2 + M_\Psi^2} \tag{8.12}$$

$$\begin{array}{c} \text{X} \\ \\ \end{array} = -\lambda_\Phi \tag{8.13}$$

$$\begin{array}{c} \text{X} \\ \\ \end{array} = -\lambda_\Psi \tag{8.14}$$

$$\begin{array}{c} \text{X} \\ \\ \end{array} = -\lambda \tag{8.15}$$

$$\begin{array}{l} \text{loop: } \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \\ \text{Fator de simetria}^1 : f_s \end{array} \tag{8.16}$$

As regras acima não são para  $T = 0$ . A fim de obter a dependência térmica nos diagramas de Feynman, devem ser feitas as seguintes modificações:

$$\begin{array}{l} p^2 \rightarrow \omega_n^2 + \vec{p}^2, \quad \text{sendo } \omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}, \\ \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}. \end{array} \tag{8.17}$$

### 8.3.2 Modelo escalar não-relativístico

$$\begin{array}{c} \text{-----} \\ \\ \end{array} = \frac{1}{p_{0\Phi} + \omega_\Phi}, \quad \text{sendo } \omega_\Phi = \frac{\vec{p}_\Phi^2}{2m_\Phi} + \kappa_\Phi \tag{8.18}$$



$$= \frac{1}{p_{0\Psi} + \omega_\Psi}, \text{ sendo } \omega_\Psi = \frac{\vec{p}_\Psi^2}{2m_\Psi} + \kappa_\Psi \quad (8.19)$$



$$= -u_\Phi \quad (8.20)$$



$$= -u_\Psi \quad (8.21)$$



$$= -u \quad (8.22)$$

$$loop : \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \quad (8.23)$$

$$\text{Fatores de simetria : } f_s \quad (8.24)$$

As regras acima não são para a teoria térmica. A fim de obter a dependência térmica nos diagramas de Feynman, devem ser feitas as seguintes modificações:

$$p_0 \rightarrow -i\omega_n, \text{ sendo } \omega_n = \frac{2\pi n}{\beta},$$

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}. \quad (8.25)$$

#### 8.4 Apêndice IV: Fatores de simetria

O fator de simetria de um diagrama é o número de maneiras topologicamente distintas como ele pode ser desenhado.

##### 8.4.1 Diagramas de 2-pontos e 1-loop

O fator de simetria para os diagramas de 2-pontos é único para a teoria relativística e para a teoria não-relativística.

*Diagramas de 2-pontos com um campo*

Será feita a contagem do fator de simetria relacionado ao diagrama de dois pontos e 1-loop com um campo. Para tanto pode-se supor que as pernas externas sejam da componente  $\phi_1$  de um campo com  $N$  componentes  $\Phi$  [8]. Havendo então duas possibilidades que devem ter suas contribuições somadas:

- ou o loop é da mesma componente da perna externa,  $\phi_1$ . Neste caso há 4 formas de fixar a primeira perna externa, 3 de fixar a segunda e uma de fechar o loop. Na expansão do gerador funcional este diagrama tem peso  $1/4!$ :

$$f_{s1} = \frac{1}{4!} 4 \cdot 3; \quad (8.26)$$

- ou o loop é de uma das outras  $(N - 1)$  componentes,  $\phi_2, \phi_3 \cdots \phi_N$ . Neste caso há 2 formas de fixar a primeira perna externa, 1 de fixar a segunda e  $(N - 1)$  possibilidades para fechar o loop. Da densidade Lagrangiana (3.12) escrita para um campo com duas componentes, se vê que vértices de componentes distintas têm um fator multiplicativo 2. Na expansão do gerador funcional este diagrama tem peso  $1/4!$ . O fator de simetria é:

$$f_{s2} = \frac{1}{4!} 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (N - 1). \quad (8.27)$$

Somando as duas contribuições obtém-se o fator de simetria de 2-pontos e 1-loop com um campo:

$$f_s = f_{s1} + f_{s2} = \frac{12}{24} + \frac{4(N - 1)}{24} = \frac{N + 2}{6}. \quad (8.28)$$

*Diagramas de 2-pontos e 1 loop com campos distintos*

Segue o cálculo do fator de simetria relacionado ao diagrama ‘tadpole’ com dois tipos de campos.

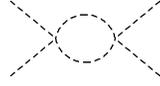
Supondo que as pernas externas do diagrama de 2-pontos e 1-loop sejam da componente  $\phi_1$  do campo  $\Phi$ , que tem  $N_\Phi$  componentes, o loop é do  $\Psi$ .

Há duas formas de fixar a primeira perna externa, 1 de fixar a segunda e  $N_\Psi$  possibilidades para o loop. Na expansão do gerador funcional este diagrama tem peso  $1/4$ . O fator de simetria é:

$$f_{s2} = 2 \frac{1}{4} N_\Psi = \frac{1}{2} N_\Psi. \quad (8.29)$$

8.4.2 Diagramas de 4-pontos e 1-loop

**Relativístico**



- Esse diagrama é formado a partir de dois vértices iguais, supondo que as pernas externas sejam da componente  $N_1$  de um campo com  $N$  componentes. Há duas possibilidades que devem ter suas contribuições somadas:

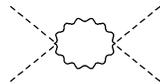
- todas as componentes dos vértices são da componente  $N$ . Então há 4 formas de se fixar a primeira perna externa de cada vértice, 3 de fixar a segunda e 2 de fechar o loop. Na expansão do gerador funcional esse diagrama tem o peso  $(1/4!)^2$ :

$$f_{s1} = \left(\frac{1}{4!}\right)^2 (4 \cdot 3)^2 \cdot 2 = \frac{1}{2}; \quad (8.30)$$

- o loop é composto de uma das outras  $(N - 1)$  componentes do campo que não a das pernas externas  $N_1$ . Então há 2 formas de se fixar a primeira perna externa de cada vértice, 1 de fixar as segundas e  $2(N - 1)$  de fechar o loop. Como pode ser visto na densidade Lagrangiana expandida para um campo com 2 componentes, os vértices de componentes mistas do mesmo campo ganham um peso 2. Na expansão do gerador funcional esse diagrama tem o peso  $(1/4!)^2$ :

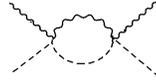
$$f_{s2} = \left(\frac{1}{4!}\right)^2 (2 \cdot 2)^2 \cdot 2(N - 1) = \frac{N - 1}{18}. \quad (8.31)$$

$$\boxed{f_s = f_{s1} + f_{s2} = \frac{1}{2} + \frac{N-1}{18} = \frac{N+8}{18}.} \quad (8.32)$$



- Esse diagrama é formado a partir de dois vértices mistos, supondo que os campos externos sejam  $\Phi$  e os internos  $\Psi$ , há 2 formas de fixar a primeira perna externa de cada vértice, 1 de fixar a segunda e  $2N_\Psi$  formas de fechar o loop. Na expansão do gerador funcional esse diagrama tem peso  $(\frac{1}{4})^2$ :

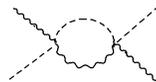
$$\boxed{f_s = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 2^2 \cdot 2N_\Psi = \frac{N_\Psi}{2}.} \quad (8.33)$$



- Esse diagrama é formado a partir de dois vértices mistos. Há 2 formas de fixar a primeira perna externa de cada um e 2 formas de fixar a segunda perna externa, há 1 forma de fechar o loop. Na expansão do gerador funcional este diagrama tem peso  $(1/4)^2$ :

$$f_s = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 1.$$

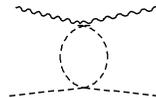
(8.34)



- Esse diagrama tem a contagem idêntica à do anterior, portanto seu fator de simetria é:

$$f_s = 1.$$

(8.35)



- Esse diagrama é composto por um vértice misto e outro vértice com um único campo. Supondo que o vértice puro seja do campo  $\Phi$  que tem  $N_\Phi$  componentes e que a componente da perna externa dele seja  $N_1$ , há duas possibilidades que devem ter suas contribuições somadas:

- o loop é constituído pela mesma componente das pernas externas. Então há 4 possibilidades de fixar a primeira perna externa do vértice de um único campo, 3 de fixar a segunda e 2 de fechar o loop. Para o outro vértice há 2 possibilidades de fixar a primeira perna externa e 1 de fixar a segunda. Esse diagrama tem peso  $1/(4 \cdot 4!)$  na expansão do gerador funcional:

$$f_{s1} = \frac{1}{4 \cdot 4!} 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = \frac{1}{2};$$

- o loop é constituído por alguma das  $(N_\Phi - 1)$  componentes do campo  $\Phi$  que não  $N_1$ . Então há 2 possibilidades de fixar a primeira perna externa do vértice de um único

campo, 1 de fixar a segunda e  $2(N_\Phi - 1)$  de fechar o loop. Para o outro vértice há 2 possibilidades de fixar a primeira perna externa e 1 de fixar a segunda. Da expansão da densidade Lagrangiana em termos das 2 componentes no caso de  $N = 2$ , observa-se que o vértice de um único campo com componentes diferentes tem um peso 2. Esse diagrama tem peso  $1/(4 \cdot 4!)$  na expansão do gerador funcional:

$$f_{s2} = \frac{1}{4 \cdot 4!} 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 (N_\Phi - 1) = \frac{(N_\Phi - 1)}{6}. \quad (8.37)$$

$$\boxed{f_s = f_{s1} + f_{s2} = \frac{1}{2} + \frac{(N_\Phi - 1)}{6} = \frac{(N_\Phi + 2)}{6}}. \quad (8.38)$$

### ***Não-relativístico***

A contagem dos fatores de simetria não-relativísticos necessita mais cuidado que os relativísticos. Um dos detalhes é que os vértices dos diagramas de Feynman não-relativísticos devem conservar o número de partículas, pois não há criação e aniquilação de partículas, ao contrário dos relativísticos. Para evitar algum equívoco, os fatores de simetria do diagrama de 4-pontos e 1-loop não-relativístico serão retirados da referência [6]. Nessa referência os fatores de simetria foram obtidos a partir do potencial efetivo com aproximação de 1-loop, já que ele é gerador de todas as funções de Green conectadas e irreduzíveis.

## 8.5 Apêndice V: Detalhes dos cálculos dos diagramas de Feynman

A seguir serão feitos os cálculos dos diagramas de 2-pontos e 1-loop e de 4-pontos e 1-loop, relativos às teorias escalares  $\lambda\phi^4$  relativística e não-relativística invariantes  $O(N)$ . Os valores dos momentos externos dos diagramas de Feynman não são relevantes para os estudos das transições de fase deste trabalho, por isso serão considerados nulos.

### 8.5.1 Cálculo do diagrama de 2-pontos com 1-loop

*Relativístico*

$$\begin{aligned} -\Sigma &= \text{---} \bigcirc \text{---} \\ &= -f_s \lambda \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + M^2}. \end{aligned} \quad (8.39)$$

Incluindo os fatores térmicos das regras de Feynman, somando sobre as frequências de Matsubara e utilizando a abreviação  $E^2 = \vec{p}^2 + M^2$ , tem-se:

$$\begin{aligned} -\Sigma &= -f_s \lambda \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_n^2 + \vec{p}^2 + M^2} \\ &= -f_s \left[ \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E} + \lambda \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E(e^{\beta E} - 1)} \right] \\ &\equiv -f_s (A + B). \end{aligned} \quad (8.40)$$

Na última passagem cada uma das duas integrais foi definida como  $A$  e como  $B$ , a fim de que sejam calculadas separadamente na seqüência.

$$A = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}}. \quad (8.41)$$

A integral acima diverge. Será utilizada a técnica de regularização dimensional para expressar o resultado da integral como uma soma de um termo divergente e um termo finito. Isso pode ser feito integrando em  $2\omega$  dimensões ao invés de 3, posteriormente toma-se o limite de  $2\omega D \rightarrow 3D$  e utilizando a equação B.16 da referência [8] (Eq. 8.43 a seguir):

$$\begin{aligned} 3D &\rightarrow 2\omega D \\ \omega &= \frac{3}{2} - \epsilon \\ \epsilon &\text{ será levado a zero para recuperar } 3D \\ \lambda &\rightarrow \lambda(\mu^2)^{\frac{3}{2}-\omega}, \quad \mu \text{ é um parâmetro com unidade de massa} \\ &\text{que será determinado no processo de renormalização.} \end{aligned} \quad (8.42)$$

$$\int \frac{d^{2\omega} l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(l^2 + M^2 + 2lx)^a} = \frac{\Gamma(a - \omega)}{(4\pi)^\omega \Gamma(a)} \frac{1}{(M^2 - x^2)^{a-\omega}}. \quad (8.43)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &= \frac{\lambda(\mu^2)^{\frac{3}{2}-\omega}}{2} \int \frac{d^{2\omega} p}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(\vec{p}^2 + M^2)^{1/2}} \\ &= \frac{\lambda M^2}{16\pi^2} \left[ -\frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{M^2}{4\pi\mu^2} + \gamma_E - 1 + \mathcal{O}(\epsilon) \right]^2. \end{aligned} \quad (8.44)$$

$$B = \lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E(e^{\beta E} - 1)}. \quad (8.45)$$

Em coordenadas polares:

$$B = \frac{\lambda 4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{(p^2 + M^2)^{1/2} \left[ e^{\frac{\sqrt{p^2 + M^2}}{T}} - 1 \right]}. \quad (8.46)$$

Fazendo a mudança de variáveis:  $\frac{M}{T} \equiv y$  e  $\frac{p}{T} \equiv x$ , e considerando a função:

$$h(y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2 + y^2) \left( e^{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 \right)}, \quad (8.47)$$

$B$  pode ser reescrito como:

$$B = 2\lambda T^2 h(y). \quad (8.48)$$

Juntando  $A$ ,  $B$  e desprezando em  $A$  termos de ordem  $\epsilon$  ou superiores, a autoenergia fica:

$$\Sigma = 2f_s \left\{ \frac{\lambda M^2}{32\pi^2} \left[ -\frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{M^2}{4\pi\mu^2} + \gamma_E - 1 \right] + \lambda T^2 h(y) \right\}. \quad (8.49)$$

Através de regularização dimensional, a autoenergia foi expressa como a soma de um termo divergente e outro finito. O termo divergente será removido pela adição de um contra-termo à densidade Lagrangiana no esquema de renormalização  $MS$ , o que resulta é denominado densidade Lagrangiana renormalizada:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_R &= \mathfrak{L} + \mathfrak{L}_{CT} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{M^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \mathfrak{L}_{CT}, \\ \mathfrak{L}_{CT} &= \mathfrak{A} \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \mathfrak{B} \frac{M^2}{2}\phi^2 - \mathfrak{C} \frac{\lambda}{4!}\phi^4. \end{aligned} \quad (8.50)$$

A quantidade a ser removida na autoenergia é o termo divergente:

$$\Sigma_{div} = -2f_s \frac{\lambda M^2}{32\pi^2} \frac{1}{\epsilon}. \quad (8.51)$$

O seguinte contra-termo removerá a divergência:

$$\Sigma_{CT} = \mathfrak{B}M^2 = 2f_s \frac{\lambda}{32\pi^2} \frac{1}{\epsilon}. \quad (8.52)$$

A massa renormalizada calculada a partir de  $\mathfrak{L}_R$  fica:

$$\Sigma_R = 2f_s \left\{ \frac{\lambda M^2}{32\pi^2} \left[ \ln \frac{M^2}{4\pi\mu^2} + \gamma_E - 1 \right] + \lambda T^2 h(y) \right\}. \quad (8.53)$$

Será considerada uma aproximação de altas temperaturas, com alta temperatura quer-se dizer temperatura maior que qualquer parâmetro com dimensão de massa da densidade Lagrangiana<sup>3</sup>,  $M \ll T$ :

$$\boxed{\Sigma_R \simeq f_s \frac{\lambda T^2}{12}}. \quad (8.55)$$

*Não-relativístico*

$$\begin{aligned} -\Sigma &= \text{---} \bigcirc \text{---} \\ &= -f_s u \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_0 + \omega} \\ &= -f_s u \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{-i\omega_n + \omega}. \end{aligned} \quad (8.56)$$

Convertendo a integral para coordenadas esféricas e efetuando a integração angular e a soma sobre as frequências de Matsubara, tem-se:

$$\Sigma = f_s u \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta \frac{p^2}{2m} + \kappa} - 1} \right] p^2 dp \quad (8.57)$$

A integral no primeiro termo da última expressão é divergente, essa divergência será removida acrescentando-se à densidade Lagrangiana um contra-termo (de forma semelhante a uma passagem feita anteriormente, tal passagem não é relevante, pois o interesse é sobre termos finitos, e não será explicitada aqui), por isso o termo infinito será suprido e o que resta será chamado

<sup>3</sup> A expansão de  $h(y)$  em torno de  $y = 0$  é:

$$h(y) = \frac{1}{24} - \frac{1}{8\pi} y - \frac{1}{16\pi^2} y^2 \ln \frac{y}{4\pi} + \gamma_E - \frac{1}{2} + \mathcal{O}(y^3). \quad (8.54)$$

Detalhes podem ser vistos no Apêndice 2 em [22].

de autoenergia renormalizada:

$$\begin{aligned}
\Sigma_R &= f_s u \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^{\beta \frac{x^2}{2m} + \kappa} - 1} \\
&= f_s u \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2} \sum_{j=1}^\infty e^{-j\beta\kappa} \int_0^\infty x^2 e^{-jx^2} dx \\
&= f_s u \left(\frac{m}{2\pi\beta}\right)^{3/2} Li_{3/2}(e^{-\beta\kappa}),
\end{aligned} \tag{8.58}$$

onde foi utilizada a definição da função polilogarítmica:

$$Li_\alpha(z) = \sum_{j=1}^\infty \frac{z^j}{j^\alpha}. \tag{8.59}$$

Em altas temperaturas, a função polilogarítmica pode ser expandida como:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow Li_{3/2}(e^{-\kappa/T}) &= \zeta(3/2) - 2\sqrt{\frac{\pi\kappa}{T}} + \mathcal{O}(\kappa/T), \\
Li_{1/2}(e^{-\kappa/T}) &= -\zeta(1/2) + \sqrt{\frac{\pi T}{\kappa}} + \mathcal{O}(\kappa/T).
\end{aligned} \tag{8.60}$$

De forma que a autoenergia em questão, em uma aproximação de altas temperaturas, pode ser expressa como:

$$\boxed{\Sigma_R = f_s u \left(\frac{Tm}{2\pi}\right)^{3/2} \zeta(3/2)}. \tag{8.61}$$

### 8.5.2 Cálculo do diagrama de 4-pontos com 1-loop

#### Relativístico

$$\tag{8.62}$$

$$-B = f_s \lambda^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2 + m^2]} \frac{1}{[(l-p)^2 + m^2]}. \tag{8.63}$$

A integral pode ser adequadamente modificada por meio de uma parametrização de Feynman<sup>4</sup>:

$$-B = f_s \lambda^2 \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2 + m^2 + p^2 \alpha(1 - \alpha)]^2}. \quad (8.64)$$

Abreviando a notação:

$$\Omega^2(m, p, \alpha) = m^2 + p^2 \alpha(1 - \alpha), \quad (8.65)$$

$$\Rightarrow -B = f_s \lambda^2 \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2 + \Omega^2]^2}. \quad (8.66)$$

$$\begin{aligned} -B &= f_s \lambda^2 \int_0^1 d\alpha \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \frac{1}{[\omega_n^2 + E^2]^2} \\ &= f_s \lambda^2 \int_0^1 d\alpha \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \left( -\frac{1}{2E} \right) \frac{d}{dE} \frac{1}{(\omega_n^2 + E^2)} \\ &= -f_s \lambda^2 \frac{1}{4} \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \frac{1}{E} \frac{d}{dE} \left( \frac{1}{E} \right) - f_s \lambda^2 \frac{1}{2} \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \frac{1}{E} \frac{d}{dE} \left( \frac{1}{E} \frac{1}{e^{\beta E} - 1} \right). \end{aligned} \quad (8.67)$$

O primeiro termo da última expressão não depende da temperatura e o outro termo é o dependente da temperatura, eles serão tratados separadamente:

$$\begin{aligned} -B_0 &\equiv -f_s \lambda^2 \frac{1}{4} \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \frac{1}{E} \frac{d}{dE} \left( \frac{1}{E} \right), \\ -B_T &\equiv -f_s \lambda^2 \frac{1}{2} \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \frac{1}{E} \frac{d}{dE} \left( \frac{1}{E} \frac{1}{e^{\beta E} - 1} \right). \end{aligned} \quad (8.68)$$

*Termo independente da temperatura*

$$-B_0 = f_s \lambda^2 \frac{1}{4} \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^3 \vec{l}}{(2\pi)^3} \frac{1}{[l^2 + \Omega^2]^{3/2}}. \quad (8.69)$$

Será feita uma regularização dimensional redefinindo o acoplamento (mas não será modificado seu nome) e a dimensão de integração (fórmula B16 do [8]):

<sup>4</sup> Detalhado no Apêndice I.

$$\begin{aligned}
 3D &\rightarrow 2\omega = 3 - 2\epsilon, \quad \lambda \rightarrow \lambda'(\mu)^{3-2\omega} \\
 \Rightarrow -B_0 &= f_s \frac{\lambda^2(\mu)^{3-2\omega}}{4} \int_0^1 d\alpha \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - \omega)}{(4\pi)^\omega \Gamma(\frac{3}{2})} \frac{1}{(\Omega^2)^{\frac{3}{2}-\omega}} \\
 &= f_s \frac{\lambda^2}{4} \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^1 d\alpha \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \Gamma(\epsilon) \left[ \frac{4\pi\mu^2}{m^2 + p^2\alpha(1-\alpha)} \right]^\epsilon. \tag{8.70}
 \end{aligned}$$

Fazendo uma expansão das funções  $\Gamma(\epsilon)$  e  $A^\epsilon$  e desconsiderando termos de ordem  $O(\epsilon)$  e superiores, tem-se:

$$\Rightarrow -B_0 = f_s \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \int_0^1 d\alpha \left\{ \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \ln \left[ \frac{4\pi\mu^2}{m^2 + p^2\alpha(1-\alpha)} \right] \right\}. \tag{8.71}$$

O termo  $1/\epsilon$  é divergente e será removido por renormalização no esquema *MS*.  $B_0$  renormalizado fica:

$$\boxed{-B_{0R} = f_s \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \int_0^1 d\alpha \left\{ -\gamma_E + \ln \left[ \frac{4\pi\mu^2}{m^2 + p^2\alpha(1-\alpha)} \right] \right\}}. \tag{8.72}$$

*Termo dependente da temperatura*

$$-B_T = -f_s \frac{\lambda^2}{2} \int_0^1 d\alpha \int_0^\infty \frac{4\pi l^2 dl}{(2\pi)^3} \left[ \frac{1 - e^{E\beta} (1 + E\beta)}{(-1 + e^{E\beta})^2 E^3} \right]. \tag{8.73}$$

Fazendo uma substituição de variáveis  $\frac{l^2}{T^2} \rightarrow x^2$ ,  $\frac{\tilde{\Omega}^2}{T^2} \rightarrow y^2$ , segue:

$$-B_T = -f_s \lambda^2 \int_0^1 d\alpha \frac{1}{y} \frac{d}{dy} h(y), \tag{8.74}$$

sendo:

$$h(y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2 + y^2) (e^{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1)}. \tag{8.75}$$

A função  $h(y)$  tem a seguinte expansão [22]:

$$h(y) = \frac{1}{24} - \frac{1}{8\pi} y - \frac{1}{16\pi^2} y^2 \left[ \ln \left( \frac{y}{4\pi} \right) + \gamma_E - \frac{1}{2} \right] + \mathcal{O}(y^3). \tag{8.76}$$

Partindo do pressuposto de que os termos de ordem igual e superior a  $y^3$  são polinomiais, segue:

$$\boxed{-B_T = -\frac{f_s \lambda^2}{8\pi^2} \int_0^1 d\alpha \left[ -\frac{T\pi}{\Omega} - \ln\left(\frac{\Omega}{4\pi T}\right) - \gamma_E + \mathcal{O}\left(\frac{\Omega}{T}\right) \right]} \quad (8.77)$$

Somando os termos de temperatura finita e dependente da temperatura:

$$-B = -B_{R0} - B_T = -\frac{f_s \lambda^2}{8\pi^2} \left\{ \ln\left(\frac{2\sqrt{\pi}T}{\mu}\right) - \frac{\gamma_E}{2} + \int_0^1 d\alpha \left[ \frac{T\pi}{\Omega} + \mathcal{O}\left(\frac{\Omega}{T}\right) \right] \right\}. \quad (8.78)$$

*Aproximação de altas temperaturas*

Será feita uma aproximação de altas temperaturas, ou seja,  $m \ll T$ . Nessa aproximação o momento externo  $p$  é da ordem de  $T$ , então  $p/T$  pode ser considerado como uma constante, chamarei  $p/T \equiv \sigma$ :

$$\begin{aligned} B &= \frac{f_s \lambda^2}{8\pi^2} \left\{ \ln\left(\frac{T}{\mu}\right) + \ln(2\sqrt{\pi}) - \frac{\gamma_E}{2} - \int_0^1 d\alpha \left[ \frac{T\pi}{[m^2 + p^2\alpha(1-\alpha)]^{1/2}} + \mathcal{O}\left(\frac{[m^2 + p^2\alpha(1-\alpha)]^{1/2}}{T}\right) \right] \right\} \\ &= \frac{f_s \lambda^2}{8\pi^2} \left\{ \ln\left(\frac{T}{\mu}\right) + \ln(2\sqrt{\pi}) - \frac{\gamma_E}{2} - \frac{\pi^2}{\sigma} + \int_0^1 d\alpha \mathcal{O}[\sigma^2\alpha(1-\alpha)]^{1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (8.79)$$

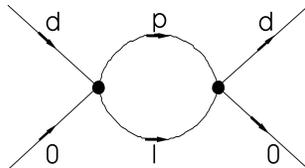
$$\boxed{B = \frac{f_s \lambda^2}{8\pi^2} \ln\left(\frac{T}{\mu}\right) + C_{\text{independente de } T}} \quad (8.80)$$

**Não-relativístico**

*Montagem dos diagramas*

O diagrama de 4-pontos e 1-loop pode ser do canal  $s$ ,  $t$  ou  $u$ . Na teoria relativística, os três canais têm contribuições idênticas para o cálculo do acoplamento térmico. Na teoria não-relativística, o canal  $s$  tem uma contribuição e os canais  $t$  e  $u$  têm outra contribuição distinta.

**Canal  $s$**



$$(8.81)$$

A conservação de momento nos vértices exige que  $l = d - p$ .

$$S = f_s (-u)^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left(p_0 + \frac{\vec{p}^2}{2m} + \kappa\right)} \frac{1}{\left[(d_0 - p_0) - \frac{(d + \vec{p})^2}{2m} + \kappa\right]}.$$
(8.82)

Os propagadores externos estão sendo tomados como nulos.

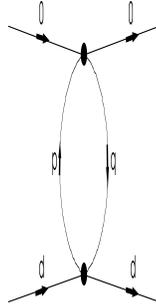
$$S = f_s u^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left(p_0 + \frac{\vec{p}^2}{2m} + \kappa\right)} \frac{1}{\left(-p_0 + \frac{\vec{p}^2}{2m} + \kappa\right)}.$$
(8.83)

Tomando a parte térmica das regras de Feynman tem-se:

$$S = f_s u^2 \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(-i\omega_n + \omega)} \frac{1}{(i\omega_n + \omega)} =$$

$$f_s u^2 \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega^2 + \omega_n^2}.$$
(8.84)

### Canais $t$ e $u$



$$(8.85)$$

A conservação do momento nos vértices garante que  $p = q$ .

$$UT = f_s (-u)^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_0 + \omega)^2}$$
(8.86)

Tomando a parte térmica das regras de Feynman, tem-se:

$$UT = f_s u^2 \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(-i\omega_n + \omega)^2} \quad (8.87)$$

*Regularização de um termo divergente dos acoplamentos*

Os primeiros termos nas integrais de  $g_\Phi(T)$  e  $g_\Psi(T)$  são independentes da temperatura e claramente divergentes, serão calculados por regularização dimensional e as divergências eliminadas por renormalização:

$$\begin{aligned} A_\Phi &= -\frac{u_\Phi^2(0)}{3} \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_\Phi(\mathbf{q})} = \\ &= -\frac{u_\Phi^2(0)}{6} \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\frac{\mathbf{q}^2}{2m} + \kappa(T)}. \end{aligned} \quad (8.88)$$

Procedendo à regularização dimensional:  $3D \rightarrow 2\delta$ , utiliza-se B.16 da referência [8] e posteriormente  $\delta \rightarrow 3/2$ :

$$\begin{aligned} A_\Phi &= -\frac{u_\Phi^2(0) 2m}{6} \int \frac{d^{2\delta} \mathbf{q}}{(2\pi)^{2\delta}} \frac{1}{\mathbf{q}^2 + 2m\kappa(T)} = \\ &= -\frac{u_\Phi^2(0) 2m}{6} \frac{\Gamma(1-\delta)}{(4\pi)^\delta \Gamma(1)} \frac{1}{[2m\kappa(T)]^{1-\delta}} = \\ &= -\frac{u_\Phi^2(0) m}{6\pi} \sqrt{\frac{\kappa m}{2}} \end{aligned} \quad (8.89)$$

*Integrais de Bose:*

A seguir são mostradas algumas integrais que são utilizadas para calcular os diagramas de 4-pontos e 1-loop não-relativísticos.

$n(\omega)$  é a distribuição de Bose-Einstein:

$$n(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}, \quad \omega = \frac{p^2}{2m} + \kappa. \quad (8.90)$$

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} n(\omega) = \left( \frac{m}{2\pi\beta} \right)^{3/2} Li_{3/2}(e^{-\beta\kappa}). \quad (8.91)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} n(\omega)[1+n(\omega)] &= \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{2\pi^2} \frac{e^{\beta\omega}}{(e^{\beta\omega}-1)^2} = \\ -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \kappa} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{2\pi^2} \frac{1}{e^{\beta\omega}-1} &= \left(\frac{m}{2\pi\beta}\right)^{3/2} Li_{1/2}(e^{-\beta\kappa}). \end{aligned} \quad (8.92)$$

Outra integral da qual dependem os acoplamentos é:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{n(\omega)}{\omega}. \quad (8.93)$$

Na aproximação de altas temperaturas para a teoria não-relativística, os parâmetros respeitam  $\kappa_i \ll T \ll m_i$ . Atribuindo valores dentro dessas faixas e integrando numericamente, verifica-se que, com precisão muito boa:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{n(\omega)}{\omega} \sim \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \beta n(\omega)[1+n(\omega)]. \quad (8.94)$$

### 8.5.3 Expressões para o acoplamento em função da temperatura

A expressão para o acoplamento térmico  $u_\Phi(T)$  obtida a partir dos diagramas (ilustrados no texto) é:

$$\begin{aligned} u_\Phi(T) &= u_\Phi(0) - u_\Phi(0)^2 \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} [f_1 D_\Phi(\omega_n, \mathbf{p}) D_\Phi(-\omega_n, \mathbf{p}) + f_2 D_\Phi^2(\omega_n, \mathbf{p})] \\ &\quad - u(0)^2 \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f_3 D_\Psi^2(\omega_n, \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (8.95)$$

onde  $D_i(\omega_n, \mathbf{q}) = \frac{1}{-i\omega_n + \omega_i(\mathbf{p})}$  e os fatores de simetria são  $f_1 = 1/3$ ,  $f_2 = 4/3$  e  $f_3 = 3$  para  $N_\Phi = N_\Psi = 2$  [6].

Portanto, temos:

$$\begin{aligned} u_\Phi(T) &= u_\Phi(0) - u_\Phi^2(0) \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ \frac{1}{3} \frac{1}{\omega_n^2 + \omega_\Phi^2} + \frac{4}{3} \frac{1}{(-i\omega_n + \omega_\Phi)^2} \right] \\ &\quad - 3 u^2(0) \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(-i\omega_n + \omega_\Psi)^2}. \end{aligned} \quad (8.96)$$

Definindo:

$$n(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}, \quad (8.97)$$

ao somar sobre as frequências de Matsubara, tem-se:

$$\begin{aligned} u_{\Phi}(T) = u_{\Phi}(0) - \frac{u_{\Phi}^2(0)}{3} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\Phi}} \{1 + 2n(\omega_{\Phi}) + 8\beta\omega_{\Phi}n(\omega_{\Phi})[1 + n(\omega_{\Phi})]\} \\ - 3u^2(0) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \beta n(\omega_{\Psi})[1 + n(\omega_{\Psi})] \end{aligned} \quad (8.98)$$

Tomando a aproximação da integral de  $n(\omega)/\omega$  discutida anteriormente:

$$\begin{aligned} u_{\Phi}(T) = u_{\Phi}(0) - \frac{u_{\Phi}^2(0)}{3} \left\{ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\Phi}} + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} 5\beta\omega_{\Phi}n(\omega_{\Phi})[1 + n(\omega_{\Phi})] \right\} \\ - 3u^2(0) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \beta n(\omega_{\Psi})[1 + n(\omega_{\Psi})] = \\ u_{\Phi}(0) - \frac{u_{\Phi}^2(0)}{3} \left\{ \frac{m_{\Phi}}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa_{\Phi}m_{\Phi}}{2}} + 5\beta \left( \frac{m_{\Phi}}{2\pi\beta} \right)^{3/2} Li_{1/2}[e^{-\kappa_{\Phi}\beta}] \right\} \\ - 3u^2(0)\beta \left( \frac{m_{\Psi}}{2\pi\beta} \right)^{3/2} Li_{1/2}[e^{-\kappa_{\Psi}\beta}] = \end{aligned} \quad (8.99)$$

Sendo que:

$$Li_{1/2}(e^{-\kappa\beta}) = \sqrt{\frac{\pi T}{\kappa}} - \zeta(1/2) + \mathcal{O}(\kappa/T). \quad (8.100)$$

Tomando a aproximação de altas temperaturas, a aproximação da integral  $n(\omega)/\omega$  discutida anteriormente, e ainda  $m_{\Phi} \simeq m_{\Psi} = m$  e  $\kappa_{\Phi} \simeq \kappa_{\Psi} = \kappa$ :

$$\boxed{u_{\Phi}(T) = u_{\Phi}(0) - \frac{u_{\Phi}^2(0)m}{6\pi} \sqrt{\frac{\kappa m}{2}} - \frac{mT}{12\pi} \sqrt{\frac{2m}{\kappa}} (5u_{\Phi}^2(0) + 9u^2(0))}. \quad (8.101)}$$

A expressão para o acoplamento misto obtida dos diagramas de Feynman (ilustrados ao longo do texto) é:

$$\begin{aligned}
u(T) = & u(0) - u(0) \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} [u_\Phi(0) f_1 D_\Phi^2(\omega_n, \mathbf{q}) + u_\Psi(0) f_2 D_\Psi^2(\omega_n, \mathbf{q})] \\
& - u(0)^2 \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} [f_3 D_\Phi(\omega_n, \mathbf{q}) D_\Psi(\omega_n, \mathbf{q}) \\
& + f_4 D_\Phi(\omega_n, \mathbf{q}) D_\Psi(-\omega_n, \mathbf{q}) + f_5 D_\Phi(-\omega_n, \mathbf{q}) D_\Psi(\omega_n, \mathbf{q})] . \tag{8.102}
\end{aligned}$$

onde, para  $N_\Phi = N_\Psi = 2$ , os fatores de simetria são  $f_1 = f_2 = 1/3$ ,  $f_3 = 1$  e  $f_4 = f_5 = 1/2$  [6].

$$\begin{aligned}
\Rightarrow u_\Psi(T) = u_\Psi(0) & + \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left\{ u_\Psi(0)^2 \frac{1}{\omega_n^2 + \omega_\Psi^2(\mathbf{p})} - \frac{8}{3} u_\Psi^2(0) \frac{\omega_\Psi^2(\mathbf{p})}{[\omega_n^2 + \omega_\Psi^2(\mathbf{p})]^2} \right. \\
& \left. + 3u^2(0) \frac{1}{\omega_n^2 + \omega_\Phi^2(\mathbf{p})} - 6u^2(0) \frac{\omega_\Phi^2(\mathbf{p})}{[\omega_n^2 + \omega_\Phi^2(\mathbf{p})]^2} \right\} , \tag{8.103}
\end{aligned}$$

Somando sobre as frequências de Matsubara, temos:

$$\begin{aligned}
u(T) = u(0) & - \frac{2u(0)}{3} \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \beta \{ u_\Phi(0) n(\omega_\Phi) [1 + n(\omega_\Phi)] + u_\Psi(0) n(\omega_\Psi) [1 + n(\omega_\Psi)] \} \\
& - u^2(0) \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{\omega_\Psi}{\omega_\Psi^2 - \omega_\Phi^2} [1 + 2n(\omega_\Phi)] - \frac{\omega_\Phi}{\omega_\Psi^2 - \omega_\Phi^2} [1 + 2n(\omega_\Psi)] \right\} . \tag{8.104}
\end{aligned}$$

Tomando a aproximação de altas temperaturas, a aproximação da integral  $n(\omega)/\omega$  discutida anteriormente, e ainda  $m_\Phi \simeq m_\Psi = m$  e  $\kappa_\Phi \simeq \kappa_\Psi = \kappa$ :

$$u(T) = u(0) - \frac{mT}{4\pi} \sqrt{\frac{2m}{\kappa}} u(0) \left( u(0) + \frac{2u_\Phi(0)}{3} + \frac{2u_\Psi(0)}{3} \right) . \tag{8.105}$$

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Steven Weinberg, *Gauge and global symmetries at high temperature*, Phys. Rev. **D9**, 3357 (1974).
- [2] Thomas G. Roos, *Wilson renormalization group study of inverse symmetry breaking*, Phys. Rev. **D54**, 2944, (1996).
- [3] Marcus B. Pinto e Rudnei O. Ramos, *Nonperturbative study of inverse symmetry breaking at high temperatures*, Phys. Rev. **D61**, 125061 (2000).
- [4] Borut Bajc, *High temperature symmetry nonrestoration*, hep-ph/0002187.
- [5] R. P. Feynman e A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics ant Path Integrals*, McGraw-Hill Book Company, 1965.
- [6] Marcus Benghi Pinto, Rudnei O. Ramos e Júlia E. Parreira, *Phase transitions patterns in relativistic and non-relativistic multi-scalar field*, em andamento.
- [7] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Grã-Bretanha, 1987.
- [8] Pierre Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, Frontiers in Physics, Addison-Wesley Publishing Company, 2<sup>a</sup> edição, 1989.
- [9] Jones, H. F. *Groups, Representations and Physics*, Institute of Physics Publishing, Londres.
- [10] Halzen F. e Martin, A. D., *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*, John Wiley & Sons, Inc., 1984.
- [11] Katherine Brading e Elena Castellani, *Symmetry and Symmetry Breaking*, <http://plato.stanford.edu/entries/symmetry-breaking>.
- [12] Svenje Mehlert e Marie Clifford-Gruber, *Cosmology in the Laboratory (COSLAB): An ESF scientific programme*, <http://www.esf.org/publication/120/COSLAB.pdf>.

- 
- [13] Ray J. Rivers, *Patterns of Symmetry Breaking in Cosmology and the Laboratory*, cond-mat/0412404, 2004.
- [14] Sidney Coleman, *Aspects of Symmetry*, Cambridge University Press, 1988.
- [15] J. M. Yeomans, *Statistical Mechanics of Phase Transitions*, Oxford University Press, 1992.
- [16] Goran Senjanović, *Rochelle salt: a prototype of particle physics*, hep-ph/9805361.
- [17] Nurith Schupper e Nadav M. Shnerb, *Inverse melting and inverse freezing: a spin model*, cond-mat/0502033.
- [18] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton University Press, 2003.
- [19] Gordon Baym, Jean-Paul Blaizot, Markus Holzmann, Franck Laloë e Dominique Vautherin, *The Transition Temperature of the Dilute Interacting Bose Gas*, Phys. Rev. Lett. 83, 1703 (1999).
- [20] Marcus B. Pinto, Rudnei O. Ramos e Frederico F. de Souza Cruz, *Symmetry Non Restoration in Hot Scalar Field Theories for Cosmology and Condensed Matter*, Nuclear Physics Proc. Supp. **B121** (2003) 226-229.
- [21] David Bailin e Alexander Love, *Introduction to Gauge Field Theory*, University of Sussex Press, 1986.
- [22] Joseph I. Kapusta, *Finite-temperature field theory*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1989.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)