

**INTERAÇÃO DINÂMICA BARRAGEM-RESERVATÓRIO:  
MODELOS ANALÍTICOS E NUMÉRICOS**

**SELÊNIO FEIO DA SILVA**

**TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**INTERAÇÃO DINÂMICA BARRAGEM-RESERVATÓRIO:  
MODELOS ANALÍTICOS E NUMÉRICOS**

**SELÊNIO FEIO DA SILVA**

**ORIENTADOR: LINEU JOSÉ PEDROSO**

**TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL**

**PUBLICAÇÃO: E.TD - 005 A/07  
BRASÍLIA/DF: OUTUBRO – 2007**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
**FACULDADE DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**INTERAÇÃO DINÂMICA BARRAGEM-RESERVATÓRIO:**  
**MODELOS ANALÍTICOS E NUMÉRICOS.**

**SELÊNIO FEIO DA SILVA**

**TESE SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.**

**APROVADA POR:**

---

**Prof. Lineu José Pedroso, Dr.Ing. (ENC-UnB)**  
**(Orientador)**

---

**Prof. Luciano Mendes Bezerra, Ph.D. (ENC-UnB)**  
**(Examinador Interno)**

---

**Prof. Paul William Partridge, Ph.D. (ENC-UnB)**  
**(Examinador Interno)**

---

**Prof. Paulo Batista Gonçalves, D.Sc. (PUC-RJ)**  
**(Examinador Externo)**

---

**Prof. Remo Magalhães de Souza, Ph.D. (UFPa)**  
**(Examinador Externo)**

**BRASÍLIA/DF, 15 DE OUTUBRO DE 2007**

## **FICHA CATALOGRÁFICA**

SILVA, SELÊNIO FEIO DA

Interação dinâmica barragem-reservatório: modelos analíticos e numéricos [Distrito Federal] 2007.

xxii, 220p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Doutor, Estruturas e Construção Civil, 2007). Tese de Doutorado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Interação Barragem-Reservatório

2. Técnica de Separação de Variável

3. Pressão Hidrodinâmica

4. Massa Adicional

I. ENC/FT/UnB

II. Título (série)

## **REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA**

SILVA, S. F. (2007). Interação dinâmica barragem-reservatório: modelos analíticos e numéricos. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.TD-05A/07, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 220p.

## **CESSÃO DE DIREITOS**

AUTOR: Selênio Feio da Silva.

TÍTULO: Interação dinâmica barragem-reservatório: modelos analíticos e numéricos.

GRAU: Doutor

ANO: 2007

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta tese de doutorado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa tese de doutorado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Selênio Feio da Silva

SQN-211, Bloco-K, Apto. -214, Asa Norte

70.863-110, Brasília – DF – Brasil.

“Se você não encontrar razões para ser livre, invente-as. Seja criativo.”

*Clarice Lispector.*

## AGRADECIMENTOS

A minha querida e amada esposa *Vanessa* por toda a demonstração de amor através de seu companheirismo, incentivo e cumplicidade dedicados a mim.

Ao meu filho *Saulo* por me tornar completamente feliz desde a sua existência.

A minha mãe *Dona Romana* por ter me ensinado a importância da educação, da família e da religião sempre associados à razão.

Ao professor e orientador *Lineu José Pedroso* pelos ensinamentos fundamentais na minha formação de pesquisador.

A *Universidade da Amazônia (UNAMA)* e a *Fundação Instituto para o Desenvolvimento da Amazônia (FIDESA)* pela oportunidade dada à qualificação do seu corpo docente e corpo docente regional, respectivamente.

A *Universidade de Brasília (UnB)* pela infra-estrutura e a *Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)* pela bolsa de estudos.

Ao *Grupo de Dinâmica e Fluido-Estrutura (GDFE)* por todos os momentos em que estivemos reunidos e a *Centrais Elétricas do Norte do Brasil S.A. (ELETRONORTE)* por disponibilizar recursos a este grupo.

A *Deus*, pela minha vida e pela minha família.

Dedicado à minha esposa e ao meu filho.



## **RESUMO**

### **INTERAÇÃO DINÂMICA BARRAGEM-RESERVATÓRIO: MODELOS ANALÍTICOS E NUMÉRICOS**

**Autor: Selênio Feio da Silva**

**Orientador: Lineu José Pedroso**

**Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil**

**Brasília, Outubro de 2007**

No presente trabalho, o problema de interação entre a estrutura da barragem e o fluido do reservatório é estudado em uma análise dinâmica no domínio da frequência. Um tratamento analítico através da técnica de separação de variável é utilizado para solucionar as equações dos modelos matemáticos que representam o problema, resultando em formulações analíticas para o campo de pressão hidrodinâmica no plano barragem-reservatório e para a massa adicional na face da barragem.

Algumas contribuições, com certa originalidade, são apresentadas nesta tese como: uma proposta de função de aproximação analítica para a distribuição da pressão hidrodinâmica ao longo da altura e na face da barragem, também uma proposta de amortecedor para a superfície de truncamento em reservatórios com domínio infinito e com fluidos incompressíveis e compressíveis, bem como um tratamento analítico às condições de contorno dos amortecedores clássicos na literatura tratados pelo método dos elementos finitos.

No decorrer desta tese, os modelos matemáticos adotados juntamente com a condição de contorno na interface barragem-reservatório tentam representar os modelos físicos para este tipo de problema. Assim, apresenta-se modelos mais sofisticados na ordem crescente dos capítulos, considerando desde um modelo inicial que trata a barragem com um movimento de corpo rígido e o fluido do reservatório incompressível até um modelo que leva em conta a flexibilidade da barragem e os efeitos de compressibilidade do fluido.

Modelos numéricos para a abordagem do problema de interação barragem-reservatório baseados no método dos elementos de contorno e no método dos elementos finitos (via ANSYS) foram utilizados assim como as soluções clássicas da literatura com o objetivo de comparar e validar as soluções analíticas obtidas pela técnica de separação de variável que estão sendo proposta neste trabalho. Alguns exemplos relativos às análises são apresentados ao longo do texto, ilustrando a viabilidade das técnicas propostas.

## **ABSTRACT**

### **DYNAMIC INTERACTION DAM-RESERVOIR: ANALYTICAL AND NUMERICAL MODELS**

**Author: Selênio Feio da Silva**

**Supervisor: Lineu José Pedroso**

**Programa de Pós-graduação em Estrutura e Construção Civil**

**Brasília, October of 2007**

In the present work, the interaction problem between the dam structure and the fluid of the reservoir is studied in a dynamic analysis in the frequency domain. An analytical procedure through the variable separation technique is used to solve the mathematical models equations that represent the problem, resulting in analytical formulations for the field of hydrodynamic pressures on the dam-reservoir plane and for the additional mass in the face of the dam.

Some contributions, with certain originality, are presented in this thesis, such as: a proposal for a analytical function for the hydrodynamic pressure distribution along the height and at the dam face, also a proposal of damper for the truncation surface in reservoirs with infinite domain and incompressible and compressible fluids, as well as an analytical procedure to the boundary conditions of the classic shock absorbers treated in the literature by the finite element method.

In this thesis, the mathematical models adopted and the boundary condition in the dam-reservoir interface tries to represent the physical models for this kind of problem. Thus, it presents more sophisticated models in increasing order of the chapters, considering first an initial model which treats the dam with a movement of rigid body and the reservoir fluid as incompressible up to a model that takes into account the dam flexibility and the fluid compressibility effects.

For boarding the problem of dam-reservoir interaction in the boundary element method and in the finite element method (with ANSYS), numerical models were used as well as the classical solutions of the literature with the objective of comparing and validating the analytical solutions given by the variable separation technique that are being proposed in this work. Also some examples are presented with regard to the analyses illustrating the viability of the developed techniques.

# SUMÁRIO

<b>1 - INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
<b>1.1 - GENERALIDADES .....</b>	<b>1</b>
<b>1.2 - SUSCINTA REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>3</b>
<b>1.3 - OBJETIVOS DA TESE .....</b>	<b>9</b>
<b>1.4 - ABRANGÊNCIA E LIMITAÇÃO .....</b>	<b>9</b>
<b>1.5 - ORGANIZAÇÃO DOS CAPÍTULOS.....</b>	<b>10</b>
<b>2 - BARRAGEM RÍGIDA-MÓVEL NA INTERFACE DE UM FLUIDO INCOMPRESSÍVEL.....</b>	<b>14</b>
<b>2.1 - INTRODUÇÃO .....</b>	<b>14</b>
<b>2.1.1 - Idéia básica sobre massa adicional .....</b>	<b>15</b>
<b>2.2 - FORMULAÇÕES MATEMÁTICA PARA O PROBLEMA.....</b>	<b>16</b>
<b>2.2.1 - Equações fundamentais .....</b>	<b>16</b>
<b>2.2.2 - Solução exata (em séries) para a pressão hidrodinâmica e para a massa adicional.....</b>	<b>18</b>
<b>2.2.3 - Aproximação analítica proposta por Westergaard para a pressão hidrodinâmica e para a massa adicional .....</b>	<b>24</b>
<b>2.2.4 - Aproximação analítica proposta pelo autor para a pressão hidrodinâmica e para a massa adicional .....</b>	<b>27</b>
<b>2.2.5 - Aproximação numérica pelo método dos elementos de contorno (MEC) para a pressão hidrodinâmica e para a massa adicional.....</b>	<b>31</b>
<b>2.2.6 - Aplicação numérica e representação gráfica dos resultados.....</b>	<b>33</b>
<b>2.3 - FORMULAÇÃO ANALÍTICA PARA A PRESSÃO HIDRODINÂMICA UTILIZANDO SUPERFÍCIES DE TRUNCAMENTO .....</b>	<b>39</b>
<b>2.3.1 - Introdução .....</b>	<b>39</b>
<b>2.3.2 - Condições de contorno na superfície de truncamento .....</b>	<b>41</b>
2.3.2.1 - Condição de derivada nula na superfície de truncamento (DNST).....	42
2.3.2.2 - Condição de Sharan.....	45
2.3.2.3 - Condição de Küçükarslan.....	49
2.3.2.4 - Condição proposta pelo autor.....	53
2.3.2.5 - Aplicação numérica e representação gráfica dos resultados .....	57

<b>2.4 - ESTUDO DOS EFEITOS CONSERVATIVOS E DISSIPATIVOS NO SISTEMA BARRAGEM-RESERVATÓRIO CONSIDERANDO A DISSIPAÇÃO DE ONDAS DE SUPERFÍCIE LIVRE NO RESERVATÓRIO .....</b>	<b>65</b>
<b>2.4.1 - Introdução .....</b>	<b>65</b>
<b>2.4.2 - Formulação analítica para a pressão hidrodinâmica no plano complexo .....</b>	<b>66</b>
<b>2.4.3 - Análise e representação gráfica dos resultados .....</b>	<b>73</b>
2.4.3.1 - Soluções assintóticas .....	79
<b>3 - BARRAGEM FLEXÍVEL NA INTERFACE DE UM FLUIDO INCOMPRESSÍVEL.....</b>	<b>88</b>
<b>3.1 - INTRODUÇÃO .....</b>	<b>88</b>
<b>3.2 - FORMULAÇÃO MATEMÁTICA PARA O PROBLEMA.....</b>	<b>89</b>
3.2.1 - Barragem rígida-móvel: modelo de Westergaard .....	94
3.2.2 - Barragem flexível: modelo de Chopra.....	95
<b>3.3 - MODELOS NUMÉRICOS EQUIVALENTES E COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS .....</b>	<b>96</b>
3.3.1 - Barragem rígida-móvel: modelo numérico equivalente ao modelo analítico de Westergaard .....	97
3.3.2 - Barragem flexível: modelo numérico equivalente ao modelo analítico de Chopra .....	104
<b>4 - BARRAGEM RÍGIDA-MÓVEL NA INTERFACE DE UM FLUIDO COMPRESSÍVEL .....</b>	<b>113</b>
<b>4.1 - INTRODUÇÃO .....</b>	<b>113</b>
<b>4.2 - EFEITOS DE COMPRESSIBILIDADE DO FLUIDO NA INTERAÇÃO BARRAGEM-RESERVATÓRIO.....</b>	<b>113</b>
<b>4.3 - FORMULAÇÕES MATEMÁTICA PARA O PROBLEMA.....</b>	<b>117</b>
4.3.1 - Equações fundamentais .....	117
4.3.2 - Solução exata (em séries) para a pressão hidrodinâmica e para a massa adicional.....	117
4.3.2.1 - Parâmetro de Compressibilidade do Fluido (PCF) pequeno: $\left(\frac{wH}{c}\right) \ll 1$ .....	122

4.3.3 - Análise da influência do parâmetro de compressibilidade na pressão hidrodinâmica e na massa adicional .....	123
4.3.3.1 - Variação do parâmetro de compressibilidade na pressão hidrodinâmica	125
4.3.3.2 - Variação do parâmetro de compressibilidade na massa adicional .....	130
<b>5 - BARRAGEM FLEXÍVEL NA INTERFACE DE UM FLUIDO COMPRESSÍVEL</b> .....	<b>137</b>
<b>5.1 - INTRODUÇÃO</b> .....	<b>137</b>
<b>5.2 - FORMULAÇÕES MATEMÁTICA PARA O PROBLEMA</b> .....	<b>137</b>
5.2.1 - Equações fundamentais .....	137
5.2.2 - Solução exata (em séries) para a pressão hidrodinâmica e para a massa adicional.....	137
<b>5.3 - PROCEDIMENTO DE CÁLCULO PARA A PRESSÃO HIRODINÂMICA – MÉTODO DE CHOPRA</b> .....	<b>145</b>
<b>5.4 - RELAÇÃO ENTRE A FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DESENVOLVIDA E O PROCEDIMENTO DE CÁLCULO PELO MÉTODO DE CHOPRA PARA A PRESSÃO HIDRODINÂMICA</b> .....	<b>147</b>
5.4.1 - Análise gráfica da pressão hidrodinâmica e massa adicional .....	150
5.4.1.1 - Variação do parâmetro de compressibilidade na pressão hidrodinâmica	152
5.4.1.2 - Variação do parâmetro de compressibilidade na massa adicional .....	153
5.4.1.3 - Resumo dos gráficos das pressões hidrodinâmicas e da massa adicional	154
<b>5.5 - FORMULAÇÃO ANALÍTICA PARA A PRESSÃO HIDRODINÂMICA UTILIZANDO SUPERFÍCIES DE TRUNCAMENTO</b> .....	<b>157</b>
5.5.1 - Introdução .....	157
5.5.2 - Condições de contorno da radiação .....	158
5.5.3 - Condições de contorno na superfície de truncamento para análise no domínio da frequência .....	164
5.5.3.1 - Condição de radiação de Sommerfeld.....	165
5.5.3.2 - Condição de radiação de Sharan .....	169
5.5.3.3 - Condição de radiação proposta pelo autor .....	172
5.5.4 - Aplicação numérica e representação gráfica dos resultados.....	175
5.5.5 - Aplicação prática (barragem brasileira) .....	183

<b>6 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES .....</b>	<b>188</b>
<b>6.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS.....</b>	<b>188</b>
<b>6.2 - SUGESTÕES PARA DESENVOLVIMENTOS FUTUROS .....</b>	<b>190</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>192</b>

## **APÊNDICE**

<b>A - ASPECTOS SÍSMICOS EM ENGENHARIA DE BARRAGENS.....</b>	<b>204</b>
<b>A.1 - INTRODUÇÃO .....</b>	<b>204</b>
<b>A.2 - MAGNITUDE DE UM ABALO SÍSMICO .....</b>	<b>206</b>
<b>A.3 - INTENSIDADE DE UM ABALO SÍSMICO.....</b>	<b>207</b>
<b>A.4 - SISMICIDADE DO BRASIL .....</b>	<b>209</b>
<b>A.5 - SISMICIDADE INDUZIDA POR RESERVATÓRIOS.....</b>	<b>211</b>
<b>A.6 - ESPECTROS DE RESPOSTA SÍSMICA ELÁSTICA .....</b>	<b>212</b>

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1 - Modelos analisados nesta tese e suas principais particularidades.....	13
Tabela 2.1 - Pressão hidrodinâmica: solução exata (em séries), aproximação analítica (Westergaard), aproximação analítica (proposta), e aproximação numérica (MEC).....	34
Tabela 2.2 – Massa adicional: solução exata (em séries), aproximação analítica (Westergaard), aproximação analítica (proposta), e aproximação numérica (MEC).....	37
Tabela 2.3 – Pressão hidrodinâmica, na face e no fundo da barragem, obtida pelo Método dos Elementos Finitos – MEF (Küçükarslan, 2003) e pela Técnica de Separação de Variável – TSV. O valor exato para $C_0$ é 0,742454. ....	59
Tabela 2.4 - Comparação da pressão hidrodinâmica, na face e no fundo da barragem, com a solução exata (valor exato para $C_0$ é 0,742454). ....	59
Tabela 2.5 – Determinação de parâmetros envolvidos na força hidrodinâmica.....	75
Tabela 2.6 - Valores numéricos para $d$ e $b$ .....	82
Tabela 2.7 - Valores numéricos para $d$ e $b$ .....	85
Tabela 3.1 - Pressão hidrodinâmica: solução analítica (em séries) e solução numérica (MEF). ....	103
Tabela 3.2 - Pressão hidrodinâmica: solução analítica (em séries) e soluções numéricas (FERC, 2002 e ANSYS).....	110
Tabela 4.1 – Frequências para várias barragens com a inclusão de um caso de barragem brasileira (adaptado a partir de Weber, 1994). ....	116
Tabela 4.2 - Pressão hidrodinâmica para determinados valores do parâmetro de compressibilidade do fluido ao longo da altura da barragem.....	126
Tabela 4.3 - Pressão hidrodinâmica para determinados valores do parâmetro de compressibilidade do fluido ao longo da altura da barragem.....	127
Tabela 4.4 - Pressões hidrodinâmicas para alguns valores do parâmetro de compressibilidade do fluido no intervalo: $0\frac{P}{2} \leq \left(\frac{wH}{c}\right) \leq 9\frac{P}{2}$ . ....	129
Tabela 4.5 – Massa adicional para determinados valores do parâmetro de compressibilidade do fluido ao longo da altura da barragem.....	131
Tabela 4.6 – Massa adicional para determinados valores do parâmetro de compressibilidade do fluido ao longo da altura da barragem.....	132

Tabela 4.7 – Massa adicional para valores do parâmetro de compressibilidade do fluido no intervalo: $0 \frac{p}{2} \leq \left( \frac{wH}{c} \right) \leq 9 \frac{p}{2}$ .....	134
Tabela 5.1 - Expressões para o campo de pressões hidrodinâmicas. ....	144
Tabela 5.2 - Expressões para a massa adicional associada à barragem.....	144
Tabela 5.3 - Pressões hidrodinâmicas adimensional na face da barragem ao longo da altura. ....	152
Tabela 5.4 – Massa adicional adimensional na face da barragem ao longo da altura. ....	153
Tabela 5.5 – Pressão hidrodinâmica obtida pelo Método dos Elementos Finitos – MEF (Sharan, 1987) e pela Técnica de Separação de Variável – TSV (presente trabalho). ....	177
Tabela 5.6 - Comparação da pressão hidrodinâmica, obtidas pela Técnica de Separação de Variável com a utilização dos amortecedores de Sommerfeld, Sharan e Proposto.....	178
Tabela 5.7 - Distribuição da pressão hidrodinâmica na face da barragem ao longo da altura do reservatório ( $wH/c = p/50$ ). ....	179
Tabela 5.8 - Distribuição da pressão hidrodinâmica na face da barragem ao longo da altura do reservatório ( $wH/c = p/5$ ). ....	180
Tabela 5.9 - Distribuição da pressão hidrodinâmica na face da barragem ao longo da altura do reservatório ( $wH/c = 2p$ ). ....	181
Tabela 5.10 – Propriedades físicas e geométricas do perfil da barragem e do fluido do reservatório. ....	184
Tabela 5.11 – Parâmetros calculados pelo método de Chopra para a barragem. ....	184
Tabela 5.12 - Comparação das pressões hidrodinâmicas, obtidas pela Técnica de Separação de Variável com a utilização dos amortecedores de Sommerfeld, Sharan e Proposto.....	185
Tabela 5.13 - Distribuição da pressão hidrodinâmica na face da barragem ao longo da altura do reservatório. ....	186
Tabela A.1 – Principais escalas de magnitude (USGS, 2005).....	206
Tabela A.2 – Energia relacionada à magnitude dos abalos sísmicos .....	207
Tabela A.3 – Escala de Intensidade Mercalli Modificada (Assumpção e Neto, 2000). ....	208
Tabela A.4 – Sismos mais importantes do Brasil (Assumpção e Neto, 2000). ....	209
Tabela A.5 – Principais sismos induzidos por reservatórios no mundo.....	211



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Exemplos de grandes barragens: (a) UHE ITAIPU – Bacia do Rio Paraná e (b) UHE TUCURUÍ – Bacia Amazônica ( <a href="http://www.cbdb.org.br/barragem.htm">http://www.cbdb.org.br/barragem.htm</a> ). .....	1
Figura 1.2 – Exemplos de barragens: (a) UHE MACHADINHO – Rio Uruguai (SC/RS), (b) UHE BARRA GRANDE – Rio Pelotas (SC/RS), (c) UHE OURINHOS – Rio Paranapanema (SP/PR) e (d) UHE CAMPOS NOVOS – Rio Canoas (SC) ( <a href="http://www.aluminiocba.com.br/pt/usina">http://www.aluminiocba.com.br/pt/usina</a> ).....	2
Figura 2.1 - Esquema da interação barragem-reservatório com as condições de contorno.	19
Figura 2.2 - Distribuição da pressão na face da barragem por Westergaard: (a) pressão hidrodinâmica $p(0, y)$ ; (b) pressão hidrodinâmica adimensional $p(0, y)/\rho H \sqrt{g}$ . .....	24
Figura 2.3 - Pressão hidrodinâmica na face da barragem ao longo da altura $p(0, y/H)$ .....	35
Figura 2.4 - Variação da pressão hidrodinâmica em alguns planos do reservatório. ....	35
Figura 2.5 - Variação da pressão hidrodinâmica no plano do reservatório, vistas 3-D.....	36
Figura 2.6 - Massa Adicional na face da barragem ao longo da altura $M(0, y/H)$ .....	38
Figura 2.7 - Estrutura em contato com um fluido de domínio infinito.....	39
Figura 2.8 - Suposições feitas para as condições de contorno na superfície de truncamento. ....	41
Figura 2.9 - Diferentes posições para a superfície de truncamento equivalente a reservatórios finitos de comprimento L.....	57
Figura 2.10 - Pressão adimensional na face da barragem ao longo da altura do reservatório para diversas posições da superfície de truncamento – (a), (b), (c), (d), (e), (f), (g), (h), (i), (j): solução DNST presente; e (k), (l), (m), (n), (o), (p), (q), (r), (s), (t): mesma representação anterior, mas com a solução DNST ausente. ....	63
Figura 2.11 - Pressão adimensional na face e no fundo da barragem ao longo do comprimento do reservatório para diversas posições da superfície de truncamento – (a) solução DNST presente, e (b) solução DNST ausente.....	63
Figura 2.12 - Esquema da interação fluido-estrutura. ....	65
Figura 2.13 - Força hidrodinâmica adimensional exercida pelo fluido sobre a estrutura. ..	76
Figura 2.14 - Parte conservativa do efeito da força do fluido sobre a estrutura.....	76
Figura 2.15 - Parte dissipativa do efeito da força do fluido sobre a estrutura.....	77
Figura 2.16 - Parte conservativa e dissipativa do efeito da força do fluido sobre a estrutura. ....	77

Figura 2.17 - Gráfico da equação transcendental correspondente.....	79
Figura 2.18 - Gráfico da equação transcendental correspondente.....	80
Figura 2.19 - Gráfico das funções hiperbólicas envolvidas.....	81
Figura 2.20 – Curvas exatas e assintóticas ( $\Im \ll 1$ ) para parte real e imaginária. ....	82
Figura 2.21 - Curvas exatas e assintóticas ( $\Im \gg 1$ ) para parte real e imaginária.....	85
Figura 2.22 – Magnitude (a), e ângulo de fase (b) da força hidrodinâmica adimensional na face da barragem.....	86
Figura 3.1 – Esquema do problema da interação barragem-reservatório com suas condições de contorno. ....	89
Figura 3.2 - Aceleração constante, e igual à aceleração sísmica de uma fundação infinitamente rígida (Ribeiro, 2006).....	94
Figura 3.3 - Aceleração variável, de acordo com o modo fundamental de vibração da estrutura (Ribeiro, 2006).....	95
Figura 3.4 – Modelo numérico equivalente a Westergaard: MEF via ANSYS. ....	97
Figura 3.5 – Modelo numérico para a barragem: MEF via ANSYS. ....	100
Figura 3.6 – Modelo numérico para o reservatório: MEF via ANSYS.....	100
Figura 3.7 – Modelo numérico para a barragem-reservatório: MEF via ANSYS (problema acoplado). ....	101
Figura 3.8 - Pressão hidrodinâmica na face da barragem ao longo da altura: Westergaard. ....	104
Figura 3.9 – Modelo numérico equivalente a Chopra: MEF via ANSYS.....	104
Figura 3.10 – Deformada modal da barragem.....	106
Figura 3.11 – Modelo numérico para a barragem: MEF via ANSYS. ....	107
Figura 3.12 – Deformada modal da barragem.....	107
Figura 3.13 – Modelo numérico para o reservatório: MEF via ANSYS.....	108
Figura 3.14 – Modelo numérico para a barragem-reservatório: MEF via ANSYS (problema acoplado). ....	108
Figura 3.15 - Pressão hidrodinâmica na face da barragem ao longo da altura: Chopra. ...	111
Figura 3.16 - Pressão hidrodinâmica na face da barragem ao longo da altura: Westergaard e Chopra. ....	111
Figura 4.1 – Distribuição da pressão hidrodinâmica no reservatório, $f = 0,8 f_w$ : (a) fluido incompressível e (b) fluido compressível (Weber, 1994).....	114

Figura 4.2 – Distribuição da pressão hidrodinâmica no reservatório, $f = 1,5 f_w$ : (a) fluido incompressível e (b) fluido compressível (Weber, 1994).....	114
Figura 4.3 - Esquema da interação barragem-reservatório com as condições de contorno. ....	117
Figura 4.4 - Pressões hidrodinâmicas adimensional em função da variação do parâmetro de compressibilidade do fluido. (a) e (b) no plano $xy$ ; (c) e (d) na face da barragem.....	125
Figura 4.5 - Pressão hidrodinâmica adimensional na face da barragem ao longo da altura, para determinados valores do parâmetro de compressibilidade do fluido.....	126
Figura 4.6 - Pressão hidrodinâmica adimensional na face da barragem ao longo da altura. ....	128
Figura 4.7 – (a) Módulo, e (b) ângulo de fase das pressões hidrodinâmicas adimensional num ponto na face barragem e no fundo de reservatório. ....	130
Figura 4.8 – Massa adicional adimensional na face da barragem ao longo da altura, para determinados valores do parâmetro de compressibilidade do fluido. ....	131
Figura 4.9 – Massa adicional adimensional na face da barragem ao longo da altura, em função da variação nos valores do parâmetro de compressibilidade do fluido. ....	132
Figura 4.10 – Massa adicional adimensional na face da barragem ao longo da altura. ....	133
Figura 4.11 – Módulo (a), e fase (b) da massa adicional total adimensional. ....	135
Figura 5.1 - Esquema da interação barragem-reservatório com as condições de contorno. ....	138
Figura 5.2 – Gráfico para o cálculo de $R_1$ (USACE, 1995).....	146
Figura 5.3 – Modo fundamental de vibração da barragem (Chopra, 1978) .....	150
Figura 5.4 - Pressões hidrodinâmicas adimensional na face da barragem ao longo da altura. ....	152
Figura 5.5 – Massa adicional adimensional na face da barragem ao longo da altura. ....	153
Figura 5.6 - Pressões hidrodinâmicas adimensional na face da barragem ao longo da altura do reservatório de acordo com as considerações adotadas para a barragem e para o fluido do reservatório. ....	154
Figura 5.7 – Massa adicional adimensional na face da barragem ao longo da altura do reservatório de acordo com as considerações adotadas para a barragem e para o fluido do reservatório. ....	155
Figura 5.8 – Barragem Rígida e Barragem Flexível no Fluido Compressível. ....	156
Figura 5.9 - Suposições feitas para obtenção da condição de contorno da radiação. ....	159

Figura 5.10 - Diferentes posições para a superfície de truncamento.....	176
Figura 5.11 - Distribuição da pressão hidrodinâmica na face da barragem ao longo da altura do reservatório ( $wH/c = p/50$ ). .....	179
Figura 5.12 - Distribuição da pressão hidrodinâmica na face da barragem ao longo da altura do reservatório ( $wH/c = p/5$ ). .....	180
Figura 5.13 - Distribuição da pressão hidrodinâmica na face da barragem ao longo da altura do reservatório ( $wH/c = 2p$ ). .....	181
Figura 5.14 – Esquema aproximado da barragem de Tucuruí.....	183
Figura 5.15 - Distribuição da pressão hidrodinâmica na face da barragem ao longo da altura do reservatório. ....	186
Figura A.1 – Ondas sísmicas (Observatório Sismológico – UnB, 2005). ....	204
Figura A.2 – Sismicidade mundial (NASA, 2005).....	205
Figura A.3 – Movimento de placas tectônicas (Época, 2005).....	205
Figura A.4 – Sismo de João Câmara – RN em 1986.....	210
Figura A.5 – Mapa de perigo sísmico na América do Sul (Assumpção e Neto, 2000)....	210
Figura A.6 – Mecanismo de formação dos sismos induzidos por reservatório.....	212
Figura A.7 – Excitação sísmica aplicada à estrutura (Clough, 1970).....	212
Figura A.8 – Espectro de resposta de velocidade para o terremoto de El Centro .....	217
Figura A.9 – Representação gráfica “tripartite” dos espectros de resposta.....	218
Figura A.10 – Espectro de resposta do terremoto de EL Centro.....	220
Figura A.11 – Espectro de resposta normalizado para o terremoto de EL Centro .....	220

## LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIACÕES

<i>UHE</i>	- Usina Hidro Elétrica
<i>ELETRONORTE</i>	- Centrais Elétricas do Norte do Brasil S. A.
<i>FERC</i>	- Federal Energy Regulatory Commission
<i>PGA</i>	- peak ground acceleration
<i>MEC</i>	- Método dos Elementos de Contorno
<i>MEF</i>	- Método dos Elementos Finitos
<i>MDF</i>	- Método das Diferenças Finitas
<i>IFE</i>	- Interação Fluido-Estrutura
<i>IBR</i>	- Interação Barragem-Reservatório
<i>FORTTRAN</i>	- FORmula TRANslation
<i>ANSYS</i>	- ANalyses of SYStems
<i>LAPLACEDAM.FOR</i>	- programa computacional em linguagem de programação FORTRAN que soluciona a equação de Laplace
<i>DNST</i>	- condição de Derivada Nula na Superfície de Truncamento
<i>dV</i>	- elemento diferencial de volume
$B_g$ e $b_g$	- forças de corpo devidas ao campo gravitacional
$u$	- vetor de deslocamento no espaço
$M(0,y)$	- massa adicional ao longo da altura na face da barragem: solução exata (em série)
$\tilde{p}_w(0, y)$	- função de aproximação analítica proposta por Westergaard para a pressão hidrodinâmica na face da barragem
$\tilde{F}_w(0, y)$	- função de aproximação analítica proposta por Westergaard para a força hidrodinâmica na face da barragem
$\tilde{M}_w(0, y)$	- função de aproximação analítica proposta por Westergaard para a massa adicional na face da barragem
$\tilde{p}_p(0, y)$	- função de aproximação analítica proposta pelo autor para a pressão hidrodinâmica na face da barragem
$\tilde{F}_p(0, y)$	- função de aproximação analítica proposta pelo autor para a força hidrodinâmica na face da barragem
$\tilde{M}_p(0, y)$	- função de aproximação analítica proposta pelo autor para a massa adicional na face da barragem

$\tilde{p}_N(S, y)$	- função de aproximação numérica pelo MEC para a pressão hidrodinâmica no plano da barragem-reservatório
$\tilde{F}_N(0, y)$	- função de aproximação numérica pelo MEC para a força hidrodinâmica na face da barragem
$\tilde{M}_N(0, y)$	- função de aproximação numérica pelo MEC para a massa adicional na face da barragem
$\tilde{f}(y)$	- função de interpolação polinomial em $y$
$p(x, y)$	- pressão hidrodinâmica como função de duas variáveis: solução exata (em série)
$F(x)$	- função da pressão hidrodinâmica em $x$
$G(y)$	- função da pressão hidrodinâmica em $y$
$P(z)$	- pressão hidrodinâmica no plano complexo
$F(z)$	- força hidrodinâmica no plano complexo
$F0(z)$	- força hidrodinâmica adimensional ao longo da face da barragem no plano complexo
$S$	- relação entre uma distância horizontal da face da barragem e a altura do reservatório
$R$	- relação entre uma distância vertical da base da barragem e a altura do reservatório
$C_0, C_p$	- Pressão hidrodinâmica adimensional no fundo da face da barragem
$X$	- amplitude de um movimento harmônico de translação
$f$	- frequência em hertz
$f_w$	- frequência de corte em hertz
$c$	- velocidade de propagação do som no meio
$H$	- altura do reservatório
$f_d$	- frequência do primeiro modo simétrico da barragem com o reservatório vazio
$P$	- pressão total
$p$	- pressão hidrodinâmica
$p^h$	- pressão hidrostática
$V$	- Velocidade fluida em módulo
$cte$	- constante

$\ddot{p}$	- 2ª derivada temporal da pressão hidrodinâmica
$\sqrt{g}$	- amplitude da aceleração do terremoto na base da barragem
$x, y$	- coordenadas cartesianas no plano
$\infty$	- infinito
$g$	- aceleração da gravidade
$a, b, c, d$	- coeficientes adimensionais
$n$	- número de termos no somatório
$L$	- comprimento do reservatório
$xy$	- plano da barragem-reservatório
$K$	- módulo de compressão
$i$	- número complexo imaginário puro
$F_r$	- número de Froude
$U$	- velocidade característica do campo de fluxo global
$E_c$	- energia cinética
$E_p$	- energia potencial
$m$	- massa
$s$	- condensação relativa da massa
$T$	- período da onda
$C^*$	- ponto de interseção das curvas no gráfico da Figura 2.16
$E_B$	- módulo de elasticidade longitudinal da barragem
$K_B$	- rigidez da barragem
$m_B$	- massa da barragem
$ r $	- magnitude de $F_0(z)$
$c_f$	- velocidade do som no fluido
$K_{eq}$	- rigidez equivalente de mola
$N_x$	- número de divisões na direção horizontal da malha de elementos finitos
$N_y$	- número de divisões na direção vertical da malha de elementos finitos
$F$	- força que gera na barragem uma determinada aceleração
$S'$	- ordenada em “pés” no plano barragem-reservatório
$S^m$	- ordenada em “metros” no plano barragem-reservatório

$DIV$	- divergente
$GRAD$	- gradiente
$Y$	- parâmetro de compressibilidade da primeira ressonância
$Dt$	- incremento de tempo
$r$	- densidade do fluido
$\frac{\partial}{\partial t}$	- derivada parcial temporal
$m$	- coeficiente de atrito viscoso
$\nabla$	- operador Laplaciano
$\frac{\partial}{\partial x}$	- derivada parcial espacial em $x$
$\frac{\partial}{\partial y}$	- derivada parcial espacial em $y$
$l, a$	- coeficientes adimensionais
$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$	- 2ª derivada parcial espacial em $x$
$\frac{\partial^2}{\partial y^2}$	- 2ª derivada parcial espacial em $y$
$S$	- somatório
$m_n$	- número ímpar e múltiplo de $p/2$
$\oint_C$	- integral curvilínea
$e_R$	- erro relativo percentual
$w$	- frequência de um movimento harmônico de translação
$d$	- parte real de $F_0(z)$
$b$	- parte imaginária de $F_0(z)$
$\mu$	- proporcionalidade
$\acute{A}$	- inverso do número de Froude ao quadrado
$q$	- ângulo de fase de $F_0(z)$
$f_j(y/H)$	- função de deformada modal da barragem
$r_B$	- densidade da barragem
$u_B$	- coeficiente de Poisson da barragem



# 1 - INTRODUÇÃO

## 1.1 - GENERALIDADES

A conseqüência catastrófica da ruptura de uma barragem requer estudos cada vez mais completos no sentido de se considerar diversos tipos de análise de esforços nas mais variadas combinações possíveis de carregamentos envolvidos na interação barragem-reservatório. Como exemplo, cita-se o efeito dos sismos: a sismicidade natural e/ou induzida, onde se aproxima o modelo matemático (analítico ou numérico) do modelo físico real a fim de se ter um controle maior sobre os esforços que realmente surgem durante a interação sísmica entre a barragem e o reservatório.

O reservatório pode induzir esforços (pressões hidrodinâmicas) no paramento da barragem que produzem uma nova configuração de tensões e estabilidade na mesma. Além disso, o movimento da superfície livre induz um diagrama de pressões adicional na barragem e pode provocar o transbordamento da água do reservatório (galgamento) levando ao surgimento de novas forças dinâmicas sobre a barragem e suas estruturas auxiliares.



(a)

(b)

Figura 1.1 – Exemplos de grandes barragens: (a) UHE ITAIPU – Bacia do Rio Paraná e (b) UHE TUCURUÍ – Bacia Amazônica (<http://www.cbdb.org.br/barragem.htm>).

O estudo da interação barragem-reservatório se constitui um sistema de acoplamento nas interfaces dos dois domínios, via condições de contorno impostas em tais regiões, enquadrando-se nos sistemas acoplados de categoria I (Zienkiewicz & Taylor, 2002).

Segundo estes autores, nem a barragem, nem o reservatório, pode ser resolvido de forma separada um do outro e nenhum conjunto de variáveis pode ser explicitamente eliminado ao nível de equações diferenciais.

Grande parte dos enfoques para o problema da interação barragem-reservatório, presentes na literatura, apresenta simplificações consideráveis quanto à complexidade dos modelos aos quais podem ser aplicadas. Essas limitações dizem respeito ao tipo de modelização do fluido (como por exemplo, escoamentos potenciais e problemas acústicos), bem como da geometria do problema (como, por exemplo, modelos 2D e discretizações simplificadas), Moraes (2002).



(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 1.2 – Exemplos de barragens: (a) UHE MACHADINHO – Rio Uruguai (SC/RS), (b) UHE BARRA GRANDE – Rio Pelotas (SC/RS), (c) UHE OURINHOS – Rio Paranapanema (SP/PR) e (d) UHE CAMPOS NOVOS – Rio Canoas (SC) (<http://www.aluminiocba.com.br/pt/usina>).

Na análise do acoplamento barragem-reservatório é usual o fato de um dos subdomínios do sistema caracterizar-se por possuir uma das suas dimensões consideradas como sendo “infinita”. A introdução de um contorno fictício a uma distância suficientemente longe da barragem onde a resposta é esperada como sendo sem significância sob um ponto de vista prático, pode em muitos casos fornecer resultados satisfatórios para a análise estática (Soares Júnior, 2004). Todavia, considerando-se a análise dinâmica, o truncamento da malha através de um contorno fictício torna-se inapropriado (Wolf, 1985), uma vez que o contorno fictício introduzido reflete as ondas originárias da vibração da barragem de volta para a região discretizada do reservatório ao invés de propagá-las ao infinito. Algumas técnicas existem atualmente para se considerar contornos não reflexivos, como, por exemplo, as descritas no trabalho de Sharan (1987) e Silva & Pedroso (2007).

Para domínios infinitos, as soluções analíticas ou semi-analíticas dos modelos matemáticos podem ser obtidas no domínio da frequência. Estas soluções têm que satisfazer a condição de radiação no infinito, como a indicada por Sommerfeld (1949). Neste caso assume-se que a interação barragem-reservatório é um problema linear e as funções de transferência, que relacionam a resposta à excitação, podem ser assim calculadas a partir destas, usando-se a transformada de Fourier. A resposta no domínio do tempo pode ser também determinada (método indireto). Caso a barragem e/ou o reservatório se comportem não linearmente, a análise dinâmica desta interação terá que ser executada no domínio do tempo (método direto).

## **1.2 - SUSCINTA REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

Um dos primeiros estudos na modelagem de problemas em interação barragem-reservatório foi realizado por Westergaard (1933) considerando apenas os aspectos de acoplamento inercial do reservatório, traduzindo por uma massa adicional à massa da barragem. A solução sob a forma de coeficientes de massa adicional é obtida da solução da equação de Laplace, consideração de fluido incompressível, através de métodos analíticos: Westergaard (1933), Chopra (1967), Finn et al. (1977), Chwang & Housner (1978), Chwang (1978), Szczesiak & Weber (1992), Gibert (1998), Silva & Pedroso (2005a), entre outros.

Ainda considerando a incompressibilidade da água, Zangar & Haefei (1952) e Zienkiewicz & Nath (1963), determinaram experimentalmente a pressão hidrodinâmica, enquanto Zienkiewicz & Newton (1969) usaram a condição de radiação de Sommerfeld ao longo de uma superfície de truncamento. Já Sharan (1985) e Küçükarslan (2003), propondo outras condições de contorno na superfície de truncamento, determinaram também numericamente (via o método dos elementos finitos) a pressão hidrodinâmica ao longo da altura da barragem. Vale ressaltar que Silva & Pedroso (2005c) através da técnica de separação de variável, obtiveram soluções analíticas para o campo de pressões hidrodinâmicas com as mesmas condições de contorno utilizadas por Zienkiewicz & Newton, Sharan e Küçükarslan, assim como para uma condição de contorno que relaciona a pressão hidrodinâmica e que é proposta por estes autores na superfície de truncamento.

Chopra (1968) relatou que o efeito de compressibilidade da água na interação barragem-reservatório, equação da onda, é significativa para a resposta sísmica. Mais tarde Saini et al. (1978), Chopra & Chakrabarti (1981), Hall & Chopra (1982), Fenves & Chopra (1985), Fok & Chopra (1985) e Lotfi et al. (1987) estudaram o problema, considerando a compressibilidade da água, no domínio da frequência usando o método dos elementos finitos.

A interação fluido-estrutura para uma análise sísmica não linear, com o uso do princípio de superposição (análise no domínio da frequência) fica descartada (Darbre, 1998). Sharan (1987) propôs um amortecedor para a análise no domínio do tempo, por elementos finitos, num reservatório com fluido compressível. O reservatório foi assumido como bidimensional e o efeito das ondas de superfície foi negligenciado. A pressão hidrodinâmica foi considerada incógnita nodal e as equações de movimento discretizadas foram resolvidas por um esquema implícito de integração direta.

Tsai et al. (1990) também utilizaram elementos finitos em análises no domínio do tempo e Darbre (1998) introduziu um modelo denominado “*two-parameter model*”, que tem por finalidade destacar as características (fenomenologia) da interação barragem-reservatório em uma análise sísmica não linear. Kuo (1982) e Liu (1986) usaram o método aproximado da massa adicional na resposta linear e não linear da interação barragem-reservatório adicionando um número de massas à equação da barragem. Formulação deste tipo pode ser

usada para análises de problemas lineares e não lineares, mas não é apropriada para problemas de fissuras em barragens (Ghaemian & Ghobarah, 1998).

O método dos elementos de contorno é uma ferramenta numérica poderosa para a solução bem sucedida de uma variedade de problemas elastodinâmicos da engenharia (Beskos, 1987 e 1997 e Nagib, 2002). O método dos elementos de contorno foi aplicado também com sucesso à dinâmica de barragem por Humar & Jablonski (1988) e Medina & Dominguez (1989) quando implementaram as formulações no domínio da frequência e por Wept et al. (1988) e Antes & Von Estorff (1987) no domínio do tempo. As formulações diretas com elementos de contorno reduzem o número de variáveis envolvidas, mas para análises no domínio do tempo, segundo Küçükarslan & Coşkun (2003), apresenta as seguintes desvantagens: troca de passo de tempo, matrizes não simétricas, presença da integral de convolução e singularidade de pontos.

Nas últimas décadas, o acoplamento entre o método dos elementos de contorno (MEC) e o método dos elementos finitos (MEF) tem se destacado quando relacionado a problemas dinâmicos. Com relação a problemas de interação barragem-reservatório, é usual a adoção de elementos finitos para modelagem da barragem e de elementos de contorno para modelagem da água no reservatório acoplado. Tendo em vista este campo de aplicação, podem-se citar os trabalhos de Coyette et al. (1989), Rajakumar et al. (1989), Jeans & Mathews (1990), Everstine & Henderson (1990), Amini et al. (1992), entre outros, considerando a análise no domínio da frequência. Em análises no domínio do tempo o acoplamento MEC-MEF foram empregados por Von Estorff & Antes (1991), Von Estorff (1992), Koh et al. (1998), Lie et al. (2001) e Yu et al. (2002).

Análises não lineares também foram implementadas com sucesso considerando-se o acoplamento MEC-MEF em problemas de interação do tipo fluido-estrutura. Pesquisas nesta área podem ser encontradas nos trabalhos de Czygan & Von Estorff (2002), Czygan (2003) e Soares Júnior (2004) na análise dinâmica de sistemas não lineares com acoplamento do tipo solo-fluido-estrutura. É importante ressaltar que, conforme destacado por Yu et al. (2002) e Czygan (2003), problemas de instabilidade são acentuados nestes tipos de análises acopladas.

Um procedimento para a análise da interação barragem-reservatório-fundação foi introduzido pelo acoplamento MEC-MEF no trabalho de Touhei & Ohmachi (1993). O método dos elementos de contorno com reciprocidade dual (MECRD) foi introduzido por Nardini & Brebbia (1982) para problemas de elastodinâmica e estendido a problemas no domínio do tempo por Wrobel & Brebbia (1986) e a problemas de propagação de onda escalar por Daí (1992). Análises no domínio do tempo foram realizadas em estruturas bidimensionais por Leoffler & Mansur (1987 e 1989) e Agnantiaris et al. (1996), em estruturas tridimensionais por Agnantiaris et al. (1998) e em estruturas não-axisimétrica e axisimétrica por Agnantiaris et al. (2001).

Considerando as vantagens e as desvantagens dos métodos numéricos citados anteriormente (MEF e MEC) em problemas de interação barragem-reservatório-fundação, é conveniente acoplar o MECRD, usado para modelar os domínios do reservatório e da fundação, com o MEF, usado para modelar o domínio da barragem e subsequentemente resolver para as respostas da estrutura da barragem. Seguindo esta idéia cita-se o trabalho de Küçükaslan (2004).

Os efeitos de uma análise dinâmica tridimensional podem ter uma influência significativa no comportamento de uma barragem durante uma excitação transversal ou longitudinal (Darbre, 2000). Os resultados analíticos tridimensionais no domínio da frequência foram desenvolvidos inicialmente para canais (canaletas) com diferentes geometrias por Werner & Sundquist (1949), Kotsubo (1959) e Shull'man (1987) assumindo uma barragem rígida. A absorção pela fundação foi incluída para um canal de seção transversal semi-circular por Szczesiak & Weber (1992). Um reservatório em forma de cunha foi tratado por Permumalswami (1973) e também por Weber (1994).

Um modelo em elementos finitos para uma simples barragem em arco foi combinado com resultados analíticos para um reservatório em forma de cunha por Porter & Chopra (1981). Hall & Chopra (1982) generalizaram a aproximação em elementos finitos bidimensionais para o caso tridimensional (Hall e Chopra, 1983). Kuo (1982), Clough et al. (1982 e 1984) e Shiojiri & Aoyagi (1984) também estudaram o problema de interação barragem-reservatório em três dimensões.

Um estudo tridimensional para o problema usando elementos de contorno foi desenvolvido por Brebbia & Walker (1980) usando movimento de corpo rígido para obter termos singulares. Rizzo & Sippy (1986) usando uma seqüência de deslocamentos conhecidos e distribuições de tensões em estruturas obtiveram os termos singulares. Também fez uso da formulação com elementos de contorno tridimensional Jablonski & Humar (1990) modelando parte do reservatório e a barragem com elementos de contorno e a outra parte do reservatório por uma solução semi-analítica (com elementos finitos).

Análises no domínio do tempo foram propostas no campo tridimensional por O'Connor & Boot (1988), Ahmadi & Ozaka (1988), Gâmara & Oliveira (1990) e também por Tsai & Lee (1987), Dowling & Hall (1989), Fenves et al. (1992) e Mays & Roehm (1993). Estes, negligenciando a compressibilidade da água. Tsai e Lee (1990) apresentaram um método de análise no domínio do tempo que trata rigorosamente o reservatório e Weber (1994) desenvolveu uma eficiente formulação de limites transmissores no domínio do tempo para os problemas de interação entre as barragens em arco, o reservatório e a fundação, que permitem combinar a água do reservatório tratada como incompressível, com o comportamento não linear da barragem.

Fenves & Chopra (1984) investigaram os efeitos de material sedimentar depositado no fundo do reservatório empregando uma condição de contorno aproximada para simular a energia absorvida pelo sedimento, e indicaram que o sedimento pode ter um papel significativo na resposta de barragens do tipo concreto gravidade. Lotfi & Tassoulas (1986) modelaram o sedimento como um sólido linear viscoelástico, quase incompressível. A análise foi baseada no MEF e utilizaram hiper-elementos em todas as interações.

Küçükarslan & Coşkun (2003) realizaram análises transiente no domínio do tempo para a interação barragem-reservatório submetida à aceleração da fundação provocada por um terremoto. O modelo numérico para esta análise utiliza o MEF tanto para a barragem quanto para o reservatório com um eficiente processo de acoplamento (método da subestrutura) e faz uso da condição de contorno de Sommerfeld na extremidade, oposta à barragem, do reservatório de domínio infinito. Küçükarslan e Coşkun concluem que a absorção de ondas de pressão no fundo do reservatório é um fator importante que pode afetar significativamente o valor da força hidrodinâmica na barragem.

Medina et al. (1990) também considerando o sedimento como um sólido linear viscoelástico, quase incompressível e usando o MEC obteve resultados similares àqueles encontrados por Lotfi & Tassoulas (1986). Cheng (1986) investigou os efeitos de sedimentos poroelásticos na força hidrodinâmica em uma barragem rígida, sobre uma fundação plana viscoelástica. Bougacha & Tassoulas (1991) modelaram o material do sedimento como um contínuo poroelástico.

O modelo poroelástico rigoroso para o material sedimentar requer informação exata nas características das camadas, tais como o tamanho do grão do material, a porosidade, o grau de saturação e a condutividade hidráulica. Essas informações não estão prontamente disponíveis para as estruturas existentes, além disso, do ponto de vista computacional, suas considerações requerem uma grande quantidade de processamento.

Estruturas litoraneas (como por exemplo, as portuárias) também requerem a consideração do material sedimentar na análise dinâmica da interação solo-fluido-estrutura. A pressão dinâmica induzida pela onda do mar pode ser significativa em água rasa (Bang & Chen, 2002). Tópicos relacionados foram estudados por muitos pesquisadores, tais como: Putnam (1949), Prevost et al. (1975), Madsen (1978), Yamamoto et al. (1978), Mei & Foda (1981), Hsu & Jeng (1994) e Hsu et al. (1995).

As características principais nas teorias destas análises, descritas acima, incluem a permeabilidade do sedimento, a rigidez do fundo do mar, o grau de saturação, a compressibilidade da água nos poros da profundidade finita ou infinita do sedimento. Bang & Cheng (2002) utilizaram o método das diferenças finitas (MDF) para calcular as pressões hidrodinâmicas induzidas por terremoto no fundo do mar na resposta dinâmica de uma estrutura rígida usando profundidades do sedimento e porosidade variáveis.

Como visto nesta sintética revisão bibliográfica, a maioria dos trabalhos que se conhece e que se teve acesso é calcada em métodos numéricos. Em razão da lacuna de trabalhos analíticos que permitem soluções fechadas e de uso mais simples na prática da Engenharia (estudos preliminares e pré-projetos de “bureau”), é que se insere a contribuição principal do presente trabalho de pesquisa.



### **1.3 - OBJETIVOS DA TESE**

O presente trabalho tem por objetivo o estudo do problema de interação entre a barragem e o reservatório, através do tratamento de modelos analíticos, semi-analíticos e numéricos.

As soluções analíticas, para as equações diferenciais que representam os modelos matemáticos (equação de Laplace e equação da onda), são obtidas pela técnica de separação de variável, enquanto que as soluções numéricas pelo método dos elementos de contorno e pelo método dos elementos finitos (programação em FORTRAN e via ANSYS). O estudo realizado tem como foco principal a determinação da pressão hidrodinâmica na face da barragem.

Buscou-se obter algumas contribuições, com certa originalidade, neste trabalho, tais como:

- Uma proposta de função de aproximação analítica para a distribuição da pressão hidrodinâmica ao longo da altura na face da barragem.
- Uma proposta para a condição de contorno na superfície de truncamento de um reservatório de comprimento infinito com fluido incompressível.
- Uma proposta de amortecedor para a equação da onda no campo de pressões hidrodinâmicas.
- Um tratamento analítico às condições de contorno e amortecedores clássicos da literatura tratados por métodos numéricos. Abordagens clássicas sobre o problema são apresentadas de forma detalhada para que possibilite comparações e restrições entre os modelos adotados.

### **1.4 - ABRANGÊNCIA E LIMITAÇÃO**

Os modelos analíticos e numéricos analisados nesta tese, através da técnica de separação de variável permitem a determinação e o conhecimento do comportamento da pressão hidrodinâmica em problemas de interação barragem-reservatório submetidos a uma aceleração provocada por um sismo. Para a estrutura da barragem admitiu-se tanto um comportamento de corpo rígido (aceleração constante ao longo da altura da barragem) quanto sua flexibilidade (aceleração variável ao longo da altura da barragem).

O fluido do reservatório foi tratado como incompressível (equação de Laplace) e compressível (equação da onda). Foram feitas combinações entre estas considerações para a estrutura da barragem e os efeitos de compressibilidade do fluido no reservatório, originando os modelos descritos nesta tese.

Para o modelo regido pela equação de Laplace com a consideração de estrutura rígida para a barragem, foram estudadas condições de contorno ao nível da superfície de truncamento, bem como um estudo que considera a presença das ondas de superfície livre. Já para o modelo regido pela equação da onda com a consideração de estrutura flexível para a barragem, foram estudados amortecedores ao nível da superfície de truncamento.

Em todos os modelos estudados neste trabalho, considerou-se sempre a fundação do sistema barragem-reservatório como sendo rígida.

## **1.5 - ORGANIZAÇÃO DOS CAPÍTULOS**

Na evolução desta tese, os modelos matemáticos adotados juntamente com as condições de contorno cada vez mais complexas (mais próximas dos modelos reais) foram descritos em seis capítulos.

O primeiro capítulo aborda, de forma geral, a importância de uma análise rigorosa com relação à consideração das combinações possíveis de carregamento no problema de interação entre a barragem e o reservatório. Chama-se a atenção para a importância do efeito da sismicidade natural e/ou induzida a ser considerada na criação de modelos matemáticos a fim de que representem bem o problema real. Colocado o problema, ele é então enquadrado como um sistema de acoplamento de interfaces dos domínios e suas limitações com respeito ao tipo de modelagem do fluido, bem como da geometria do problema são explicitados. Comenta-se também sobre o fato usual de um dos subdomínios do modelo matemático caracterizar-se por possuir uma das suas dimensões consideradas como sendo infinita. Uma breve revisão bibliográfica é feita em seguida, mostrando como alguns autores trataram este problema e por fim, apresentam-se os objetivos do trabalho e sua forma de descrição.

No segundo capítulo são feitas hipóteses sobre o reservatório e a barragem permitindo ao campo de pressões hidrodinâmicas ser representado como função potencial na equação de Laplace. Esta, então, é resolvida analiticamente pela técnica de separação de variável e comparada às soluções analítica (disponíveis na literatura), semi-analítica (proposta pelo autor) e a uma solução numérica apresentada pelo autor (método dos elementos de contorno). Reservatórios de comprimento finito são simulados no domínio infinito de um fluido incompressível com a utilização de superfícies de truncamento e com a imposição de condições de contorno presentes na literatura e proposta pelo autor. Por fim, a solução da equação de Laplace para as pressões hidrodinâmicas com a consideração de ondas de gravidade na superfície livre é determinada analiticamente no campo dos números complexos através da técnica de separação de variável.

No terceiro capítulo também se considera a equação de Laplace para as pressões hidrodinâmicas do problema de interação entre a barragem e o reservatório. No entanto, a flexibilidade da barragem é considerada participando com o seu primeiro modo de vibração. Utilizando a técnica de separação de variável, é obtida uma expressão analítica para o campo de pressões hidrodinâmicas e que leva em conta a participação da deformada modal da barragem. Vale ressaltar que a expressão obtida no capítulo dois com movimento de corpo rígido (Westergaard, 1933) torna-se um caso particular da formulação desenvolvida no terceiro capítulo. Em seguida, modelos numéricos (método dos elementos finitos, via ANSYS) são criados com as mesmas representações para os movimentos da barragem e para os efeitos de compressibilidade da água do reservatório, equivalentes aos modelos analíticos desenvolvidos nos capítulos dois e três. Percebe-se, então, uma boa concordância entre as respostas fornecidas pelos modelos analíticos e numéricos, ao se comparar a distribuição da pressão hidrodinâmica na face da barragem, através das aplicações analisadas.

No quarto capítulo mostra-se a importância da consideração dos efeitos de compressibilidade do fluido através de sua parcela de contribuição nas formulações para o cálculo da pressão hidrodinâmica e massa adicional na barragem durante o problema de interação barragem-reservatório. Utiliza-se a equação da onda para se obter o campo de pressões hidrodinâmicas do problema, e assim como no capítulo dois o movimento da barragem é considerado inicialmente com um movimento de corpo rígido, no entanto o efeito de compressibilidade da água do reservatório é levado em conta resultando soluções

mais gerais. Utiliza-se novamente a técnica de separação de variável para a obtenção de soluções analíticas.

No quinto capítulo objetiva-se considerar também a equação da onda para representar o problema de interação entre a barragem e o reservatório, no entanto, a flexibilidade da barragem é considerada juntamente com o efeito de compressibilidade da água do reservatório. Portanto é este, o caso mais geral em relação aos casos anteriores. Através de considerações e/ou simplificações impostas, no modelo desenvolvido neste capítulo, sobre o tipo de movimento da barragem e/ou sobre a compressibilidade da água do reservatório, se cairá num dos modelos matemáticos apresentados no capítulo dois, três ou quatro. A utilização de amortecedores para a superfície de truncamento no reservatório é também aqui estudada, bem como uma proposta de amortecedor é apresentada e comparada aos amortecedores clássicos da literatura através de uma aplicação numérica (Sharan, 1987) e de uma aplicação prática (perfil típico da barragem de Tucuruí). Estes amortecedores usados na literatura de forma numérica foram desenvolvidos de forma totalmente analítica pela Técnica de Separação de Variável.

O sexto capítulo descreve as principais conclusões que se podem extrair deste trabalho, baseadas nas formulações desenvolvidas bem como na observação dos resultados obtidos nas aplicações onde se compara (através de tabelas e gráficos) as soluções analíticas e numéricas no final dos capítulos anteriores. Sugestões para futuras pesquisas correlacionadas também são apresentadas.

O apêndice A fornece algumas noções sobre o mecanismo de formação dos abalos sísmicos e define os conceitos de magnitude e intensidade de um sismo. A sismicidade brasileira e a induzida por reservatórios são sucintamente comentadas, bem como o conceito dos espectros de resposta sísmica elástica.

A Tabela 1.1 resume os modelos considerados e analisados nesta tese, através da Técnica de Separação de Variável, evidenciando suas principais particularidades, como: o esquema do modelo físico, os tipos de movimentos considerados para a estrutura da barragem, as considerações sobre os efeitos de compressibilidade do fluido no reservatório, os modelos analíticos equivalentes e as condições de contorno adotadas nas superfícies S1, S2, S3 e S4, bem como na superfície de truncamento.

Tabela 1.1 - Modelos analisados nesta tese e suas principais particularidades.

Principais Particularidades	Capítulo 2	Capítulo 3	Capítulo 4	Capítulo 5
	<b>Estrutura da Barragem</b>	Rígida	Flexível	Rígida
<b>Fluido do Reservatório</b>	Incompressível	Incompressível	Compressível	Compressível
<b>Modelo Analítico Equivalente</b>	Equação de Laplace	Equação de Laplace	Equação da onda	Equação da onda
<b>Superfície S1</b>	Aceleração Constante ao Longo da altura da Barragem	Aceleração Variável ao Longo da altura da Barragem	Aceleração Constante ao Longo da altura da Barragem	Aceleração Variável ao Longo da altura da Barragem
<b>Superfície S2</b>	Fundação Rígida	Fundação Rígida	Fundação Rígida	Fundação Rígida
<b>Superfície S3</b>	Domínio Infinito	Domínio Infinito	Domínio Infinito	Domínio Infinito
<b>Superfície S4</b>	a) Ausência de ondas de superfície livre b) Presença de ondas de superfície livre	Ausência de ondas de superfície livre	Ausência de ondas de superfície livre	Ausência de ondas de superfície livre
<b>Superfície de Truncamento (ST)</b>	Domínio Finito a) C.C. de Sommerfeld b) C.C. de Sharan c) C.C. de Küçükarslan d) C.C. Presente Tese	Sem Superfície de Truncamento (ST)	Sem Superfície de Truncamento (ST)	Domínio Finito a) C.C. de Sommerfeld b) C.C. de Sharan d) C.C. Presente Tese

C.C. = Condição de Contorno.

## **2 - BARRAGEM RÍGIDA-MÓVEL NA INTERFACE DE UM FLUIDO INCOMPRESSÍVEL**

### **2.1 - INTRODUÇÃO**

Neste capítulo resolve-se analiticamente e numericamente a equação de Laplace bidimensional para o campo de pressões hidrodinâmicas com as condições de contorno no domínio barragem-reservatório admitindo-se que um sismo provoque um movimento de corpo rígido na barragem. A partir da idéia de massa adicional, Westergaard (1933) e da propriedade de integração de linha no campo de pressão, chega-se a fórmula analítica que permite o cálculo da massa adicional ao longo da altura da barragem.

A pressão hidrodinâmica e a massa adicional são obtidas por soluções em séries, sendo consideradas soluções exatas. Elas são comparadas às soluções aproximadas proposta por Westergaard, às soluções aproximadas proposta pelo autor e às soluções numéricas obtidas através de um programa computacional, LAPLACEDAM.FOR, que utiliza o Método dos Elementos de Contorno. Comparam-se as soluções obtidas, tanto para as pressões hidrodinâmicas, quanto para a massa adicional, fato a partir do qual se permite extrair conclusões importantes sobre o fenômeno em estudo.

Em seguida é feito um estudo analítico do campo de pressões em reservatórios de domínio infinito utilizando-se “superfícies de truncamento”, que se caracterizam pela definição de condições de contorno apropriadas aplicadas nesta superfície. O reservatório infinito é analisado para diferentes posições da superfície de truncamento distante da face da barragem e cada uma fornecendo por resultado um tamanho diferente de reservatório finito equivalente. As condições de contorno utilizadas na superfície de truncamento são as usuais (correntes) na literatura e uma outra proposta neste trabalho e que conduzem a obtenção de expressões analíticas para o campo de pressões hidrodinâmicas, aspecto que permite a comparação de resultados assim como inferências, e importantes conclusões.

Por fim, a equação de Laplace é resolvida analiticamente no campo dos complexos para as pressões hidrodinâmicas, geradas pelo movimento de corpo rígido da barragem na presença de um meio fluido infinito e incompressível. A força exercida pelo fluido na face

da estrutura é então determinada através da integração da pressão hidrodinâmica (grandeza complexa) onde os efeitos conservativos (parte real desta força) traduz os aspectos inerciais da interação fluido-estrutura, e os efeitos dissipativos (parte imaginária desta força) traduz os aspectos de amortecimento no sistema fluido-estrutura. Estes aspectos são analisados em função de um parâmetro característico do fluxo de superfície livre (número de Froude). São, também, deduzidas e apresentadas soluções assintóticas para os efeitos citados.

### **2.1.1 - Idéia básica sobre massa adicional**

Os efeitos da interação fluido-estrutura são importantes, por exemplo, para o estudo sísmico ou de vibrações induzidas por fluidos em barragens. O movimento da estrutura provoca inevitavelmente um movimento do fluido, que permanece em contato com as paredes da estrutura. Como resultado, o conjunto fluido-estrutura constitui um sistema acoplado para o qual é freqüentemente impossível considerar separadamente as respostas e excitações.

Um dos primeiros passos para a modelagem de problemas em interação fluido-estrutura, é considerar apenas os aspectos de acoplamento inercial do fluido, traduzindo por uma massa adicional (Westergaard, 1933). Normalmente as hipóteses feitas para o cálculo da massa adicional é que a estrutura é rígida-móvel e o fluido incompressível. Este tratamento ignora os efeitos de compressibilidade do fluido e, em geral, conduz a resultados conservativos, e tem sido usado com freqüência e sucesso para a obtenção de resultados práticos em engenharia.

O conceito de massa adicional é um conceito clássico apresentado por vários autores, como Lamb (1945) e Méhauté (1976), assim como está presente na formulação de Morrison et al. (1950) e Pedroso (1982) para forças provocadas pela ação das ondas sobre estruturas delgadas através de uma consideração de energia cinética.

A presença do fluido em contato com a estrutura pode ser tratada a partir da determinação do campo de pressão na interface sólido-fluido, como um efetivo decréscimo da massa do corpo, com o propósito de se determinar a força total de aceleração do mesmo. A força devido à adição de massa é a reação entre o corpo e o fluido, que é igual a integral sobre a

superfície do corpo, da componente da força de pressão na direção do movimento. Seria uma espécie de força extra, presente para um corpo acelerado no vácuo, que atuando no fluido variasse a energia cinética do mesmo.

Por fim, a partir das equações gerais que governam o problema físico completo, com simplificações adequadas é possível se abordar a questão de uma forma simplificada, que consiste na solução da equação de Laplace em termos de pressões, para o domínio fluido, com condição de contorno de parede rígida-móvel, que representa o movimento sísmico da barragem. Resolvido o problema de valor de contorno assim colocado, o campo de pressões hidrodinâmicas no domínio do fluido é obtido, assim como a avaliação da massa adicional envolvida no processo (Silva & Pedroso, 2005b).

## 2.2 - FORMULAÇÕES MATEMÁTICA PARA O PROBLEMA

### 2.2.1 - Equações fundamentais

Para a análise do fluido no reservatório em um domínio tridimensional, examina-se um elemento de volume ( $dV$ ). A massa do elemento é  $\rho dV$ , onde  $\rho$  é a densidade do fluido. A força que age no elemento é  $-\nabla P dV$ , onde  $P$  é a pressão total. O fluido está sob as forças de corpo  $b_g$  devidas ao campo gravitacional, o qual é suposto ser o gradiente de um potencial independente do tempo ( $\nabla B_g$ ). Aplicando a segunda lei de Newton (Sprague & Geers, 2004):

$$(\nabla B_g) dV - (\nabla P) dV = (\rho \ddot{u}) dV$$

Levando à equação de quantidade de movimento:

$$\nabla B_g - \nabla P = \rho \ddot{u} \quad (2.1)$$

onde  $u$  é um vetor de deslocamento total do fluido em coordenadas cartesianas, e os pontos superpostos denotam derivada temporal. Devido à suposição de movimento



irrotacional para o fluido, o campo dos deslocamentos pode ser expresso em termos do gradiente de uma função escalar.

$$\nabla p = -r u \quad (2.2)$$

onde  $p = p(u, t)$  é a pressão hidrodinâmica (potencial), e o fator  $r$  é introduzido por conveniência de notação. Introduzindo a Equação (2.2) na Equação (2.1) e integrando no domínio, chega-se a:

$$-p = B_g - P + C$$

onde  $C$  é uma constante de integração. No equilíbrio estático  $p = 0$  e a pressão fluida é igual à pressão hidrostática ( $p^h$ ). Se a força de corpo for considerada somente por causa da gravidade, então ela é igual à pressão hidrostática ( $p^h$ ). Portanto, a constante de integração ( $C$ ) é igual à zero. Isto conduz à equação de movimento do fluido em termos do potencial de deslocamento.

$$p = P - p^h \quad (2.3)$$

A equação constitutiva para um fluido acústico linear é:

$$P - p^h = -K \nabla u \quad (2.4)$$

onde  $K$  corresponde ao módulo de compressão, o que caracteriza a compressibilidade do fluido. Um aumento na pressão conduz a uma diminuição no volume. O módulo de compressão ( $K$ ) pode também ser representado pela velocidade de som ( $c$ ) e a densidade para um fluido acústico sem cavitação, como:

$$K = c^2 r \quad (2.5)$$

A condensação relativa da massa é definida como:

$$s = -r \nabla u \quad (2.6)$$

Introduzindo a Equação (2.5) e a Equação (2.6) na Equação (2.4), a equação constitutiva é obtida em termos da condensação relativa da massa.

$$P - p^h = c^2 s \quad (2.7)$$

Comparando a equação constitutiva, Equação (2.7), com a equação do movimento, Equação (2.3), a seguinte relação é evidente:

$$\mathbb{R} = c^2 s \quad (2.8)$$

Introduzindo a Equação (2.6) na Equação (2.8), tem-se:

$$\mathbb{R} = c^2 (-r \nabla u) \quad (2.9)$$

Introduzindo a Equação (2.2) na Equação (2.9), chega-se à equação da onda dada em termos do campo de pressões hidrodinâmicas ( $p$ ):

$$\nabla^2 p(u, t) - \frac{1}{c^2} \mathbb{R}(u, t) = 0 \quad (2.10)$$

No caso de incompressibilidade do fluido ( $c \rightarrow \infty$ ), a Equação (2.10) se torna a equação de Laplace (Lamb, 1945):

$$\nabla^2 p(u, t) = 0 \quad (2.11)$$

### **2.2.2 - Solução exata (em séries) para a pressão hidrodinâmica e para a massa adicional**

Supondo que a barragem seja uma estrutura rígido-móvel, estará sujeita a uma aceleração equivalente à mesma aceleração horizontal do solo (rocha da base). O campo de pressões hidrodinâmicas para o caso resultará da solução da Equação (2.11), que é obtida pela técnica de separação de variável com as condições de contorno mostradas na Figura 2.1.

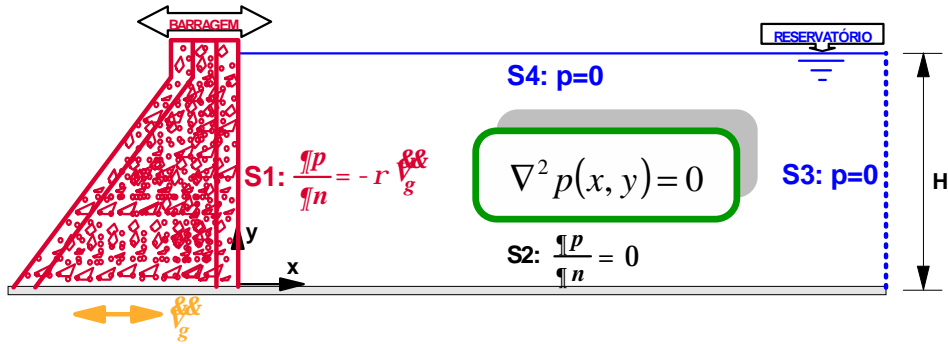


Figura 2.1 - Esquema da interação barragem-reservatório com as condições de contorno.

Seja a equação de Laplace para o domínio do fluido no plano  $x$ - $y$ :

$$\nabla^2 p(x, y) = 0 \quad (2.12)$$

As seguintes condições de contorno:

- i) Superfície S2 - Contorno Rígido ( $y = 0$ ):  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$
- ii) Superfície S4 - Superfície Livre ( $y = H$ ):  $p = 0$
- iii) Superfície S1 - Interface Fluido-Estrutura ( $x = 0$ ):  $\frac{\partial p}{\partial x} = -r \sqrt{g}$
- iv) Superfície S3 – Reservatório Infinito ( $x \rightarrow \infty$ ):  $p = 0$

$\sqrt{g}$  corresponde à amplitude da aceleração do terremoto na base da barragem, geralmente é expresso em função da gravidade ( $\sqrt{g} = a g$ ), uma fração de  $g$ ; onde  $a$  é um coeficiente real.

Seja o campo de pressões hidrodinâmicas  $p(x, y) = F(x)G(y)$ . Aplicando-se a técnica de separação de variável (Pedroso, 2003 e Chakrabarti & Chopra, 1974), tem-se:

$$p(x, y) = F(x)G(y) \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = F'(x)G(y) & ; & \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = F''(x)G(y) \\ \frac{\partial p}{\partial y} = F(x)G'(y) & ; & \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = F(x)G''(y) \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 p &= 0 \\
\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} &= 0 \\
F''G + FG'' &= 0 \quad : (FG) \\
\frac{F''}{F} + \frac{G''}{G} &= 0
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G} = K \quad \therefore \begin{cases} G'' + KG = 0 \\ F'' - KF = 0 \end{cases} \tag{2.16}$$

Condições de contorno no fundo e na superfície livre do domínio fluido:

$$i) \frac{\partial}{\partial y} p(x, y) \Big|_{y=0} = 0 \tag{2.17}$$

$$ii) p(x, y) \Big|_{y=H} = 0 \tag{2.18}$$

Direção y:

$$\text{para } K = 0 \Rightarrow G'' = 0 \Rightarrow G = ay + b \text{ (sem sentido físico)}$$

$$\text{para } K = -1 \Rightarrow -\frac{G''}{G} = -1$$

$$G'' - 1G = 0 \tag{2.19}$$

A Equação (2.19) tem como solução a função:  $G(y) = A \operatorname{sen}(\sqrt{-1} y) + B \cos(\sqrt{-1} y)$ .

Usando a condição de contorno i)  $\frac{\partial}{\partial y} p(x, y) \Big|_{y=0} = 0$ , tem-se:

$$A\sqrt{-1} \cos(\sqrt{-1} 0) - B\sqrt{-1} \operatorname{sen}(\sqrt{-1} 0) = 0 \Rightarrow A = 0.$$

Usando a condição de contorno ii)  $p(x, y) \Big|_{y=H} = 0$ , tem-se:

$$A \operatorname{sen}(\sqrt{-I} H) + B \cos(\sqrt{-I} H) = 0 \Rightarrow B \cos(\sqrt{-I} H) = 0$$

$$\cos(\sqrt{-I} H) = 0 \Rightarrow (\sqrt{-I} H) = (2n-1) \frac{p}{2} \therefore \begin{cases} \sqrt{-I_n} = (2n-1) \frac{p}{2H} \\ -I_n = (2n-1)^2 \frac{p^2}{4H^2} \end{cases}$$

onde  $n$  é um número inteiro qualquer. Logo:

$$G(y) = B_n \cos\left((2n-1) \frac{p}{2} \frac{y}{H}\right) \quad (2.20)$$

Condição de contorno na superfície S3:

$$iv) p(x, y)|_{x \rightarrow \infty} = 0 \quad (2.21)$$

Direção  $x$ :

$$\text{para } K = 0 \Rightarrow F'' = 0 \Rightarrow F = cx + d \text{ (sem sentido físico)}$$

$$\text{para } K = -1 \Rightarrow \frac{F''}{F} = -1$$

$$F'' + 1 F = 0 \quad (2.22)$$

A Equação (2.22) tem como solução a função  $F(x) = C_1 e^{\sqrt{-1} x} + C_2 e^{-\sqrt{-1} x}$ . Usando a condição de contorno  $iv) p(x, y)|_{x \rightarrow \infty} = 0$ , tem-se:

$$G(y) (C_1 e^{\sqrt{-1} \infty} + C_2 e^{-\sqrt{-1} \infty}) = 0 \Rightarrow C_1 e^{\sqrt{-1} \infty} - C_2 e^{-\sqrt{-1} \infty} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

Logo,  $F(x) = C_2 e^{-\sqrt{-1} x}$ . Então:

$$F_n(x) = C_n e^{-\left((2n-1) \frac{p}{2} \frac{x}{H}\right)} \quad (2.23)$$

Levando as equações (2.20) e (2.23) na Equação (2.13) e considerando-se o somatório das soluções possíveis, tem-se:

$$p(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n e^{-m_n \frac{x}{H}} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) ; \quad m_n = (2n-1)\frac{p}{2} \quad (2.24)$$

Condição de contorno na interface fluido-estrutura:

$$iii) \frac{\partial}{\partial x} p(x, y)|_{x=0} = -r \sqrt{\rho_g} \quad (2.25)$$

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \left[ \left(-\frac{m_n}{H}\right) e^{-m_n \frac{x}{H}} \right] \right\}_{x=0} = -r \sqrt{\rho_g} \quad (2.26)$$

$$\int_0^H \sum_{n=1}^{\infty} K_n m_n \operatorname{sen}\left(m_n \frac{y}{H}\right) dy = \int_0^H r \sqrt{\rho_g} H dy \quad \left[ \operatorname{sen}\left(m_n \frac{y}{H}\right) \right] \quad (2.27)$$

Usando a propriedade de ortogonalidade da função seno (em séries), tem-se:

$$\frac{H}{2} K_n m_n = r \sqrt{\rho_g} H \int_0^H \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) dy = r \sqrt{\rho_g} H \frac{H}{m_n} \left[ \operatorname{sen}\left(m_n \frac{y}{H}\right) \right]_0^H$$

Logo:

$$K_n = r \sqrt{\rho_g} H \frac{2(-1)^{n+1}}{m_n^2} \quad (2.28)$$

Levando a Equação (2.28) na Equação (2.24), tem-se:

$$p(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} r \sqrt{\rho_g} H \frac{2(-1)^{n+1}}{m_n^2} e^{-m_n \frac{x}{H}} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \quad (2.29)$$

$$p(x, y) = r \sqrt{\frac{g}{g}} H^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} e^{-m_n \frac{x}{H}} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right); m_n = (2n-1) \frac{P}{2} \quad (2.30)$$

A Equação (2.30) corresponde à solução exata (em séries) para o cálculo da pressões hidrodinâmicas no plano da barragem-reservatório.

$$\text{Verificação da Equação (2.30): } \nabla^2 p = 0 \quad \therefore \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 2 \sqrt{\frac{g}{g}} r H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} \left(-\frac{m_n}{H}\right) e^{-m_n \frac{x}{H}} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = +2 \sqrt{\frac{g}{g}} r H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} \left[\left(\frac{m_n}{H}\right)^2\right] e^{-m_n \frac{x}{H}} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 2 \sqrt{\frac{g}{g}} r H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} e^{-m_n \frac{x}{H}} \left(-\frac{m_n}{H}\right) \text{sen}\left(m_n \frac{y}{H}\right) \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -2 \sqrt{\frac{g}{g}} r H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} e^{-m_n \frac{x}{H}} \left[\left(\frac{m_n}{H}\right)^2\right] \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \quad (2.34)$$

As equações (2.32) e (2.34) são simétricas, ou seja:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \quad (2.35)$$

Uma vez estabelecida a expressão para o campo de pressões, Equação (2.30), encontra-se a equação para a distribuição da força ao longo da altura na face da barragem de acordo com a área tributária adotada. Dividindo esta força obtida pela aceleração da gravidade ( $g$ ) tem-se uma espécie de massa, assimilada a idéia de massa adicional de Westergaard.

$$M(0, y) = \frac{r \sqrt{\frac{g}{g}}}{g} H^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^3} \left[\text{sen}\left(m_n \frac{y}{H}\right)\right]; m_n = (2n-1) \frac{P}{2} \quad (2.36)$$

A Equação (2.36) corresponde à solução exata (em séries) para o cálculo da massa adicional, ao longo da altura na face da barragem.

### 2.2.3 - Aproximação analítica proposta por Westergaard para a pressão hidrodinâmica e para a massa adicional

Westergaard (1933), chegando à solução deduzida anteriormente, Equação (2.30), observou que na análise da barragem, a pressão hidrodinâmica significativa é a que atua na face da barragem ( $x = 0$ ), logo:

$$p(0, y) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} (1) \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) r H \sqrt{g} \ddot{x} ; \quad m_n = (2n-1) \frac{\pi}{2} \quad (2.37)$$

Tal como tem sido sugerido e apresentado na literatura (Westergaard, 1933 e Pedroso, 2003), o campo de pressões hidrodinâmicas integrado na face da barragem, Figura 2.2 (a), produz uma força na mesma, que é a força exercida pelo fluido sobre a estrutura que é por sua vez equivalente àquela que a estrutura exerce sobre o fluido. Assim, como a barragem é rígida, todos seus pontos estão submetidos à mesma aceleração de amplitude  $\sqrt{g} \ddot{x}$ .

Pela 2ª lei de Newton, tendo-se a força e a aceleração, pode-se avaliar a inércia (massa) associada a este processo, que é a idéia do cálculo da massa adicional. Como a avaliação desta massa pela Equação (2.37) é um tanto laboriosa, Westergaard sugeriu uma aproximação, muito útil na prática de Engenharia de barragens, que é dada por uma distribuição de pressão de forma parabólica, com a largura da base igual a  $\frac{7}{8}$  da altura, Figura 2.2 (b).

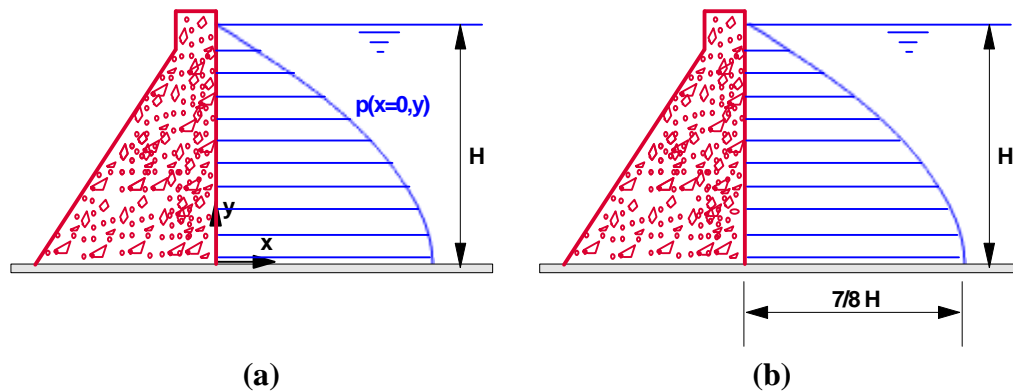


Figura 2.2 - Distribuição da pressão na face da barragem por Westergaard: (a) pressão hidrodinâmica  $p(0, y)$ ; (b) pressão hidrodinâmica adimensional  $p(0, y) / r H \sqrt{g} \ddot{x}$ .



Assim a curva parabólica de pressão terá o valor máximo (base) de  $\frac{7}{8} r H \frac{\rho g}{\gamma}$ , onde  $r$  é a densidade da água.

Curva Parabólica de Westergaard:

Seja a aproximação parabólica de Westergaard:

$$\tilde{p}_w(0, y) = \sqrt{a + b y} \quad (2.38)$$

Com as condições de que a pressão na base seja máxima e na superfície seja zero, tem-se:

$$\text{para } y = 0 \Rightarrow \tilde{p}_w(0, 0) = \sqrt{a + b \cdot 0} = \frac{7}{8} r H \frac{\rho g}{\gamma}$$

$$\sqrt{a} = \frac{7}{8} r H \frac{\rho g}{\gamma} = A \quad (2.39)$$

$$\text{para } y = H \Rightarrow \tilde{p}_w(0, H) = \sqrt{a + b H} = 0$$

$$b = -\frac{a}{H} = -\frac{A^2}{H} \quad (2.40)$$

Levando as equações (2.39) e (2.40) na Equação (2.38):

$$\tilde{p}_w(0, y) = \sqrt{A^2 - \frac{A^2}{H} y} = A \sqrt{1 - \frac{y}{H}}$$

$$\tilde{p}_w(0, y) = \frac{7}{8} r H \frac{\rho g}{\gamma} \sqrt{1 - \frac{y}{H}} \quad (2.41)$$

Então:

$$\tilde{p}_w(0, y) = \frac{7}{8} \sqrt{1 - \frac{y}{H}} r H \sqrt{g} \quad (2.42)$$

A Equação (2.42) corresponde à aproximação analítica proposta por Westergaard para o cálculo da pressão hidrodinâmica na face da barragem.

As equações (2.37) e (2.42), são respectivamente a solução exata (em série) e a solução aproximada (Westergaard) para as pressões na face da barragem, e são comparadas a seguir para um ponto no topo e um ponto na base da face da barragem, ou seja:

Pela Solução Exata (em série):

$$p(0, y) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} (1) \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) r H \sqrt{g}; \quad m_n = (2n-1) \frac{p}{2}$$

$$\text{para } y = H \Rightarrow \cos(m_n) = \cos\left((2n-1) \frac{p}{2}\right) = 0 \quad \therefore \quad p(0, H) = 0$$

$$\text{para } y = 0 \Rightarrow \cos(0) = 1 \therefore p(0, 0) = \frac{8}{p^2} \left\{ 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \mathbf{L} \right\} r H \sqrt{g} = 0,74245 r H \sqrt{g}$$

Pela Solução Analítica Aproximada (Westergaard):

$$\tilde{p}_w(0, y) = \frac{7}{8} \sqrt{1 - \frac{y}{H}} r H \sqrt{g}$$

$$\text{para } y = H \quad \therefore \quad \tilde{p}_w(0, H) = 0$$

$$\text{para } y = 0 \quad \therefore \quad \tilde{p}_w(0, 0) = \frac{7}{8} r H \sqrt{g} = 0,87500 r H \sqrt{g}$$

Observa-se que a pressão na base calculada pela fórmula aproximada proposta por Westergaard, excede em torno de 18 % o valor calculado pela solução exata. Trabalhando-se agora com a função analítica aproximada (proposta por Westergaard) para o campo de pressões na face da barragem, Equação (2.42), e utilizando os mesmos critérios adotados anteriormente para a formulação da massa adicional, encontra-se a função analítica aproximada de Westergaard para o cálculo da massa adicional ao longo da altura da face da barragem.

$$\tilde{F}_w(0, y) = \int_0^y \tilde{p}_w(0, y) dy = \int_0^y \left( \frac{7}{8} \sqrt{1 - \frac{y}{H}} r H \sqrt[3]{\frac{g}{g}} \right) dy \quad (2.43)$$

$$\tilde{M}_w(0, y) = \frac{\tilde{F}_w(0, y)}{g} = \frac{7}{12} \left[ 1 - \left( \frac{H - y}{H} \right)^{3/2} \right] \frac{r H^2}{g} \sqrt[3]{\frac{g}{g}} \quad (2.44)$$

$$\tilde{M}_w(0, y) = \frac{7}{12} \left[ 1 - \left( \frac{H - y}{H} \right)^{3/2} \right] \frac{r H^2}{g} \sqrt[3]{\frac{g}{g}} \quad (2.45)$$

A Equação (2.45) que corresponde à aproximação analítica proposta por Westergaard para o cálculo da massa adicional, ao longo da altura na face da barragem.

#### 2.2.4 - Aproximação analítica proposta pelo autor para a pressão hidrodinâmica e para a massa adicional

Através da experiência de outras pesquisas (Silva et al., 2006) com traçados de gráficos de funções e da observação do comportamento gráfico da pressão hidrodinâmica exata na face da barragem ao longo da altura, é proposta pelo autor uma função de aproximação para a pressão hidrodinâmica na face da barragem ao longo da altura, que consiste em uma função do tipo fração racional:

$$\tilde{p}_p(0, y) = \frac{a + b y}{c + d y} r H \sqrt[3]{\frac{g}{g}} \quad (2.46)$$

Relações entre os coeficientes  $(a, b, c, d)$  podem ser determinadas igualando esta função de aproximação a valores exatos conhecidos para a pressão hidrodinâmica, por exemplo: na base da barragem ( $y=0$ ), na superfície do reservatório ( $y=H$ ) e na metade da altura do reservatório ( $y=H/2$ ). Através da Equação (2.37), os valores exatos para a pressão hidrodinâmica adimensional na face da barragem  $\left( \frac{p(0, y)}{r H \sqrt[3]{\frac{g}{g}}} \right)$  nestes pontos são:

$$\begin{cases} \frac{p(0,0)}{rH\sqrt{g}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} \cos\left(m_n \frac{0}{H}\right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} \\ \frac{p(0,H)}{rH\sqrt{g}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} \cos\left(m_n \frac{H}{H}\right) = 0 \\ \frac{p(0,H/2)}{rH\sqrt{g}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} \cos\left(m_n \frac{H/2}{H}\right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} \cos\left(\frac{m_n}{2}\right) \end{cases}$$

$$\text{Para } y = 0 \Rightarrow \frac{\tilde{p}_P(0,0)}{rH\sqrt{g}} = \frac{a + b0}{c + d0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2}$$

$$\frac{a}{c} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} \quad (2.47)$$

$$\text{Para } y = H \Rightarrow \frac{\tilde{p}_P(0,H)}{rH\sqrt{g}} = \frac{a + bH}{c + dH} = 0$$

$$a = -bH \quad (2.48)$$

Substituindo a Equação (2.48) na Equação (2.47):

$$\frac{-bH}{c} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} \quad \therefore \frac{b}{c} = -\frac{1}{H} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2}$$

$$\frac{b}{c} = -\frac{1}{H} \frac{a}{c} \quad (2.49)$$

$$\text{Para } y = \frac{H}{2} \Rightarrow \frac{\tilde{p}_P(0,H/2)}{rH\sqrt{g}} = \frac{a + bH/2}{c + dH/2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} \cos\left(\frac{m_n}{2}\right)$$

$$\frac{2 + \frac{b}{a}H}{2\frac{c}{a} + \frac{d}{a}H} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} \cos\left(\frac{m_n}{2}\right) \quad (2.50)$$

Substituindo as equações (2.47) e (2.48) na Equação (2.50):

$$\frac{2 + \frac{b}{-bH}H}{2 \left( \frac{1}{2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2}} \right) + \frac{d}{a}H} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} \cos\left(\frac{m_n}{2}\right)$$

$$\frac{d}{a} = \left[ \frac{1}{2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} \cos\left(\frac{m_n}{2}\right)} - \frac{2}{2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2}} \right] \frac{1}{H} \quad (2.51)$$

A Equação (2.46) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\tilde{p}_P(0, y)}{rH\sqrt{g}} = \frac{\frac{a}{c} + \frac{b}{c}y}{1 + \frac{d}{c}y} \quad (2.52)$$

Substituindo a Equação (2.49) na Equação (2.52), pode-se escrever:

$$\frac{\tilde{p}_P(0, y)}{rH\sqrt{g}} = \frac{1 - \frac{y}{H}}{\frac{1}{a/c} + \frac{d}{a}y} \quad (2.53)$$

Substituindo os valores numéricos a que convergem as séries das equações (2.47) e (2.51), ou seja:  $a/c$  e  $\frac{d}{a}$ , tem-se:

$$\tilde{p}_P(0, y) = \left[ \frac{1 - \frac{y}{H}}{1,3469 - 1,0551 \frac{y}{H}} \right] rH\sqrt{g}$$

Em termos práticos para aplicação sugere-se a seguinte aproximação:

$$\tilde{p}_p(0, y) = \left[ \begin{array}{c} 1 - \frac{y}{H} \\ 1,3 - \frac{y}{H} \end{array} \right] r H \sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}} \quad (2.54)$$

A Equação (2.54) corresponde à aproximação analítica proposta pelo autor para o cálculo da pressão hidrodinâmica na face da barragem.

As equações (2.37) e (2.54), são respectivamente a solução exata (em série) e a solução aproximada (proposta pelo autor) para as pressões na face da barragem, e são comparadas a seguir para um ponto no topo e um ponto na base da face da barragem, ou seja:

Pela Solução Exata (em série):

$$p(0, y) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} (1) \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) r H \sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}}; \quad m_n = (2n-1) \frac{p}{2}.$$

$$\text{para } y = H \Rightarrow \cos(m_n) = \cos\left((2n-1) \frac{p}{2}\right) = 0 \quad \therefore \quad p(0, H) = 0$$

$$\text{para } y = 0 \Rightarrow \cos(0) = 1 \therefore p(0,0) = \frac{8}{p^2} \left\{ 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots \right\} r H \sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}} = 0,74245 r H \sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}}$$

Pela Solução Analítica Aproximada:

$$\tilde{p}_p(0, y) = \left[ \begin{array}{c} 1 - \frac{y}{H} \\ 1,3 - \frac{y}{H} \end{array} \right] r H \sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}}$$

$$\text{para } y = H \quad \therefore \quad \tilde{p}_p(0, H) = 0$$

$$\text{para } y = 0 \quad \therefore \quad \tilde{p}_p(0,0) = \frac{1}{1,3} r H \sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}} = 0,76923 r H \sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}}$$

Observa-se que a pressão na base calculada pela fórmula aproximada proposta pelo autor, excede em torno de 3,6 % o valor calculado pela solução exata.

Trabalhando-se agora com a função analítica aproximada para o campo de pressões na face da barragem, Equação (2.54), e utilizando os mesmos critérios adotados anteriormente para a formulação da massa adicional, encontra-se a função analítica aproximada, para o cálculo da massa adicional ao longo da altura da face da barragem:

$$\tilde{F}_p(0, y) = \int_0^y \tilde{p}_p(0, y) dy = \int_0^y \left( \frac{1 - \frac{y}{H}}{1,3 - \frac{y}{H}} r H \sqrt{g} \right) dy \quad (2.55)$$

$$\tilde{M}_p(0, y) = \frac{\tilde{F}_p(0, y)}{g} = \left[ \frac{y}{H} + 0,3 \ln(13H - 10y) - 0,3 \ln(13H) \right] \frac{r H^2}{g} \sqrt{g} \quad (2.56)$$

A Equação (2.56) corresponde à aproximação analítica para o cálculo da massa adicional, ao longo da altura na face da barragem.

### **2.2.5 - Aproximação numérica pelo método dos elementos de contorno (MEC) para a pressão hidrodinâmica e para a massa adicional**

O MEC é um método numérico baseado na equação integral de contorno e no princípio dos resíduos ponderados onde a solução fundamental é utilizada como uma função de ponderação. Este método requer apenas a discretização do contorno, aproximando-se a geometria inicial através de um conjunto de elementos onde se efetuam as integrações, pois a formulação integral de contorno transforma a equação diferencial governante em uma equação integral que relaciona somente os valores das variáveis no contorno (Brebbia et al., 1985). O MEC é uma técnica muito utilizada para a análise de problemas de engenharia e uma de suas principais vantagens é a redução considerável na preparação de dados em relação aos métodos de domínio.

A partir de um programa computacional em linguagem FORTRAN (Partridge et al., 1992), foi implementado uma versão modificada do mesmo – LAPLACEDAM.FOR, para o presente estudo (Silva & Pedroso, 2005b).

Apenas o contorno do reservatório-barragem precisa ser discretizado, e com as respectivas condições de contorno impostas o programa fornece o valor da função potencial de pressão em qualquer ponto do domínio do reservatório-barragem. A partir dos valores pontuais para a pressão hidrodinâmica, obtidos com o programa computacional LAPLACEDAM.FOR, utiliza-se interpolação polinomial em  $y$  obtendo-se então um polinômio numérico aproximado  $\tilde{f}(y)$  que multiplicado pela constante  $rH\sqrt{\frac{g}{g}}$  representa a pressão ao longo da altura de qualquer seção “S” distante da barragem. Portanto:

$$\tilde{p}_N(S, y) = \tilde{f}(y) rH\sqrt{\frac{g}{g}} \quad (2.57)$$

A Equação (2.57) corresponde à aproximação numérica pelo método dos elementos de contorno (MEC) para o cálculo das pressões hidrodinâmicas no plano da barragem-reservatório. Utilizando o mesmo processo adotado anteriormente para a formulação da massa adicional tem-se:

$$\tilde{F}_N(0, y) = \int_0^y \tilde{p}_N(0, y) dy = \int_0^y (\tilde{f}(y) rH\sqrt{\frac{g}{g}}) dy \quad (2.58)$$

$$\tilde{M}_N(0, y) = \frac{\tilde{F}_N(0, y)}{g} = \tilde{g}(y) \frac{rH^2}{g} \sqrt{\frac{g}{g}} \quad (2.59)$$

A Equação (2.59) corresponde à aproximação numérica pelo método dos elementos de contorno (MEC) para o cálculo da massa adicional, ao longo da altura na face da barragem.



## 2.2.6 - Aplicação numérica e representação gráfica dos resultados

A análise comparativa das expressões obtidas anteriormente para a pressão hidrodinâmica e para a massa adicional, toma como valores para a geometria no plano da barragem-reservatório um retângulo de 20 metros de comprimento ( $L$ ) por 1 metro de altura ( $H$ ); tal que  $L \gg H$ , simulando um reservatório de comprimento suficientemente grande.

Na análise numérica (MEC) utilizou-se uma malha de discretização de 200 elementos constantes ao longo do comprimento e 20 elementos constantes ao longo da altura, produzindo, portanto 440 elementos de contorno no total.

- a) Pressão hidrodinâmica no domínio do reservatório: São representados, a seguir, os campos de pressões ao longo da altura na face da barragem e no domínio do reservatório.

Na face da barragem ( $x=0$ ):

$$\text{Solução Exata (em séries): } p(0, y) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} (1) \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) r H \sqrt{g}$$

$$\text{Aproximação Analítica (Westergaard): } \tilde{p}_w(0, y) = \frac{7}{8} \sqrt{1 - \frac{y}{H}} r H \sqrt{g}$$

$$\text{Aproximação Analítica (proposta): } \tilde{p}_p(0, y) = \left[ \frac{1 - \frac{y}{H}}{1,3 - \frac{y}{H}} \right] r H \sqrt{g}$$

Aproximação Numérica (MEC):  $\tilde{p}_N(0, y) = \tilde{f}(y) r H \sqrt{g}$ ; a partir dos valores pontuais de pressão, obtidos com o programa computacional LAPLACEDAM.FOR, na face da barragem, foi feita uma interpolação polinomial do 24º em  $y$  (com 25 pontos conhecidos) obtendo-se então um polinômio numérico aproximado:

$$\tilde{f}(y) = \left[ \begin{array}{l} 0,31154r + 2970229,675r^{21} - 2108466,024r^{22} + 616662,9377r^{23} - \\ - 63810,10947r^{24} + 2885762,630r^{14} + 4716689,620r^{15} - 8879511,789r^{16} + \\ + 4943839,492r^{17} + 2211988,153r^{18} - 3726685,485r^{19} - 309459,6585r^{20} + \\ + 911282,9089r^7 - 2163826,163r^8 + 3308852,781r^9 - 2539277,008r^{10} - \\ - 1203948,036r^{11} + 5854443,294r^{12} - 7208762,827r^{13} + 0,795 - 27,893806r^2 + \\ + 566,799914r^3 + 51129,33867r^5 - 260949,3372r^6 - 6724,405052r^4 \end{array} \right]$$

onde:  $r = \frac{y}{H}$ .

A Tabela 2.1 compara os valores da pressão hidrodinâmica (adimensional) obtida através das formulações descritas anteriormente na face da barragem. O símbolo  $e_R$  corresponde

ao erro relativo percentual  $e_R = \frac{|(\text{valor exato} - \text{valor aproximado})|}{\text{valor exato}} \cdot 100\%$ .

Tabela 2.1 - Pressão hidrodinâmica: solução exata (em séries), aproximação analítica (Westergaard), aproximação analítica (proposta), e aproximação numérica (MEC).

$y/H$	Pressão hidrodinâmica adimensional: $p(0, y/H) / r H \sqrt{\frac{\rho}{g}}$						
	Solução Exata (em séries)	Aproximação Analítica (Westergaard)		Aproximação Analítica (proposta)		Aproximação Numérica (MEC)	
0,0	0,7425	0,8750	$e_R=17,85\%$	0,7692	$e_R=3,60\%$	0,7950	$e_R=7,07\%$
0,1	0,7374	0,8301	$e_R=12,57\%$	0,7500	$e_R=1,71\%$	0,7645	$e_R=3,68\%$
0,2	0,7223	0,7826	$e_R=8,35\%$	0,7273	$e_R=0,69\%$	0,7307	$e_R=1,16\%$
0,3	0,6966	0,7321	$e_R=5,10\%$	0,7000	$e_R=0,49\%$	0,6926	$e_R=0,57\%$
0,4	0,6596	0,6778	$e_R=2,76\%$	0,6667	$e_R=1,08\%$	0,6465	$e_R=1,99\%$
0,5	0,6103	0,6187	$e_R=1,38\%$	0,6250	$e_R=2,41\%$	0,5899	$e_R=3,34\%$
0,6	0,5467	0,5534	$e_R=1,23\%$	0,5714	$e_R=4,52\%$	0,5202	$e_R=4,85\%$
0,7	0,4659	0,4793	$e_R=2,88\%$	0,5000	$e_R=7,32\%$	0,4335	$e_R=6,95\%$
0,8	0,3627	0,3913	$e_R=7,89\%$	0,4000	$e_R=10,28\%$	0,3263	$e_R=10,04\%$
0,9	0,2256	0,2767	$e_R=22,65\%$	0,2500	$e_R=10,82\%$	0,1857	$e_R=17,69\%$
1,0	0,0000	0,0000	$e_R=0,00\%$	0,0000	$e_R=0,00\%$	0,0000	$e_R=0,00\%$

A Figura 2.3 representa o comportamento da pressão hidrodinâmica na face da barragem ao longo da altura  $y$  (em  $y=0$ , tem-se a base da barragem).

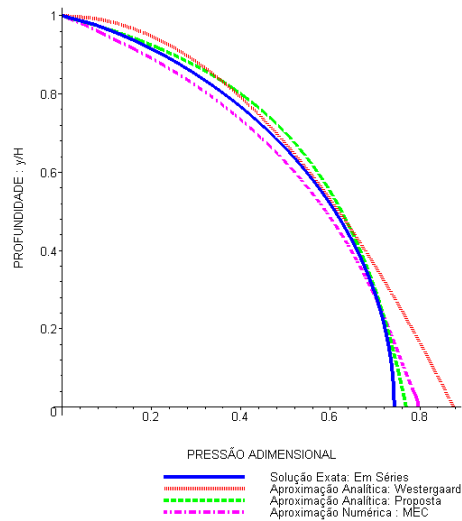


Figura 2.3 - Pressão hidrodinâmica na face da barragem ao longo da altura  $p(0, y/H)$ .

No plano do reservatório (x-y):

$$\text{Solução Exata (em série): } p(x, y) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} e^{-m_n \frac{x}{H}} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) r \sqrt{\frac{g}{H}}$$

Aproximação Numérica (MEC):  $\tilde{p}_N(S, y) = \tilde{f}(y) r H \sqrt{\frac{g}{H}}$ . O gráfico da Figura 2.4 foi plotado no plano do reservatório para valores fixados em  $x/H$  (representados por  $S$ ) que variam de  $S=0$  (face da barragem) afastando-se da face da barragem ( $S=0,25$ ,  $S=0,50$ ,  $S=0,75$  e  $S=1,00$ ). Na Figura 2.4 a linha contínua representa a solução exata e a linha tracejada a aproximação numérica.

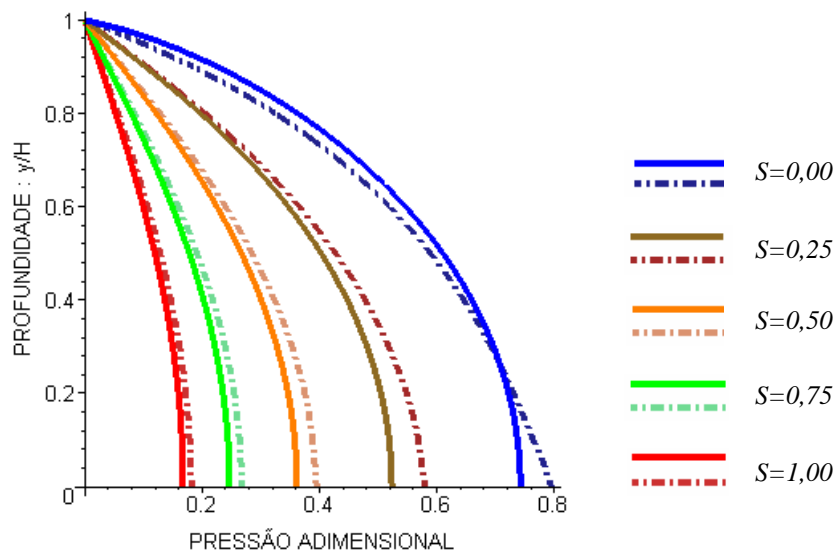


Figura 2.4 - Variação da pressão hidrodinâmica em alguns planos do reservatório.

O gráfico da Figura 2.5 foi plotado no espaço mostrando as variações ao longo do comprimento do reservatório ( $S=x/H$ ) e ao longo da altura do reservatório ( $R=y/H$ ), com  $y=0$  e  $x=0$  correspondendo ao fundo da face da barragem.

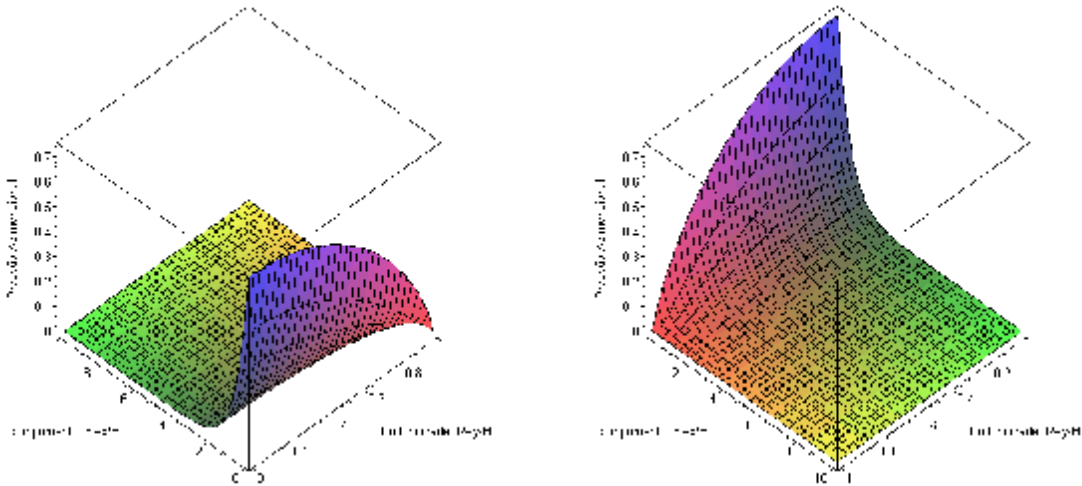


Figura 2.5 - Variação da pressão hidrodinâmica no plano do reservatório, vistas 3-D.

b) Massa adicional associada à face da barragem: É apresentada, a seguir, a massa adicional ao longo da altura na face da barragem.

$$\text{Solução Exata (em séries): } M(0, y) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^3} \left[ \text{sen} \left( m_n \frac{y}{H} \right) \right] \frac{r H^2}{g} \sqrt{\frac{g}{H}}$$

$$\text{Aproximação Analítica (Westergaard): } \tilde{M}_w(0, y) = \frac{7}{12} \left[ 1 - \left( \frac{H-y}{H} \right)^3 \right] \frac{r H^2}{g} \sqrt{\frac{g}{H}}$$

Aproximação Analítica (proposta):

$$\tilde{M}_p(0, y) = \left[ \frac{y}{H} + 0,3 \ln(13H - 10y) - 0,3 \ln(13H) \right] \frac{r H^2}{g} \sqrt{\frac{g}{H}}$$

Aproximação Numérica (MEC):  $\tilde{M}_N(0, y) = \tilde{g}(y) \frac{r H^2}{g} \sqrt{\frac{g}{H}}$ ; a partir dos valores pontuais de pressão, obtidos com o programa computacional LAPLACEDAM.FOR, na face da barragem, foi feita uma interpolação polinomial do 24º em  $y$  (com 25 pontos conhecidos)

obtendo-se então um polinômio numérico aproximado  $\tilde{f}(y)$ , e da integração deste surge um outro polinômio numérico aproximado,  $\tilde{g}(y)$ , da forma:

$$\tilde{g}(y) = \left[ \begin{aligned} &25694,28907 r^{24} - 91672,43583 r^{23} + 135010,4398 r^{22} - 14736,17421 r^{21} + \\ &+ 116420,4291 r^{19} + 274657,7496 r^{18} - 522324,2229 r^{17} + 294793,1012 r^{16} + \\ &+ 192384,1753 r^{15} - 514911,6305 r^{14} + 450341,7918 r^{13} - 100329,0030 r^{12} - \\ &- 230843,3644 r^{11} + 330885,2781 r^{10} - 240425,1292 r^9 + 113910,3636 r^8 - \\ &37278,47674 r^7 + 8521,556445 r^6 - 1344,881010 r^5 + 141,6999785 r^4 - \\ &- 9,297935333 r^3 + 0,1557700000 r^2 - 186334,2742 r^{20} - 2552,404379 r^{25} + \\ &+ 0,7950000000 r \end{aligned} \right]$$

onde:  $r = \frac{y}{H}$ .

A Tabela 2.2 compara os valores da massa adicional (adimensional) obtida através das formulações descritas anteriormente na face da barragem. O símbolo  $e_R$  corresponde ao erro relativo percentual; em  $y=0$ , tem-se a base da barragem. Observa-se que as maiores diferenças ocorrem no topo da barragem, ou seja, quando no cálculo da massa adicional entra toda a pressão associada à altura do reservatório.

Tabela 2.2 – Massa adicional: solução exata (em séries), aproximação analítica (Westergaard), aproximação analítica (proposta), e aproximação numérica (MEC).

Massa adicional adimensional: $M(0, y/H) \frac{r H^2}{g}$							
$y/H$	Solução Exata (em séries)	Aproximação Analítica (Westergaard)		Aproximação Analítica (proposta)		Aproximação Numérica (MEC)	
0,0	0,0000	0,0000	$e_R=0,00 \%$	0,0000	$e_R=0,00 \%$	0,0000	$e_R=0,00 \%$
0,1	0,0741	0,0853	$e_R=15,11 \%$	0,0760	$e_R=2,56 \%$	0,0782	$e_R=5,53 \%$
0,2	0,1472	0,1659	$e_R=12,70 \%$	0,1499	$e_R=1,83 \%$	0,1530	$e_R=3,94 \%$
0,3	0,2182	0,2417	$e_R=10,77 \%$	0,2213	$e_R=1,42 \%$	0,2242	$e_R=2,75 \%$
0,4	0,2861	0,3122	$e_R=9,12 \%$	0,2897	$e_R=1,26 \%$	0,2912	$e_R=1,78 \%$
0,5	0,3497	0,3771	$e_R=7,84 \%$	0,3543	$e_R=1,32 \%$	0,3531	$e_R=0,97 \%$
0,6	0,4077	0,4358	$e_R=6,89 \%$	0,4143	$e_R=1,62 \%$	0,4088	$e_R=0,27 \%$
0,7	0,4585	0,4875	$e_R=6,32 \%$	0,4680	$e_R=2,07 \%$	0,4566	$e_R=0,41 \%$
0,8	0,5001	0,5312	$e_R=6,22 \%$	0,5133	$e_R=2,64 \%$	0,4948	$e_R=1,06 \%$
0,9	0,5299	0,5649	$e_R=6,61 \%$	0,5464	$e_R=3,11 \%$	0,5207	$e_R=1,74 \%$
1,0	0,5428	0,5833	$e_R=7,46 \%$	0,5601	$e_R=3,19 \%$	0,5305	$e_R=2,27 \%$

A Figura 2.6 apresenta o comportamento da massa adicional na face da barragem.

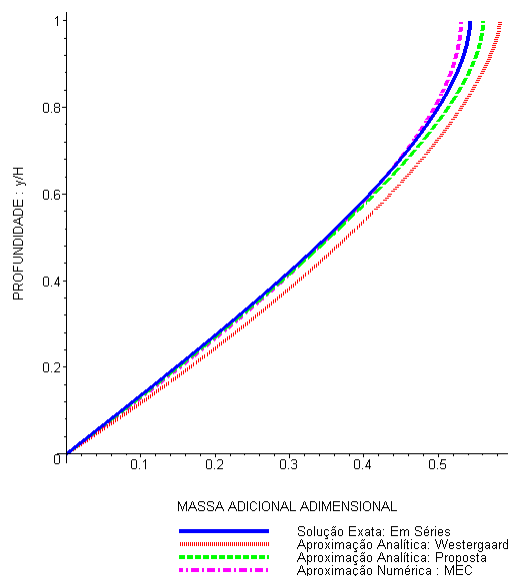


Figura 2.6 - Massa Adicional na face da barragem ao longo da altura  $M(0,y/H)$ .

A partir dos resultados obtidos nesta aplicação numérica, alguns comentários e conclusões podem ser evidenciados:

Tanto a aproximação analítica proposta por Westergaard, quanto a aproximação analítica e a aproximação numérica (método dos elementos de contorno) propostas pelo autor no presente trabalho, fornecem bons resultados, para a pressão hidrodinâmica e para a massa adicional, quando comparadas às soluções exatas em séries (Figura 2.3 e Figura 2.6).

Na base da barragem, onde a pressão hidrodinâmica é máxima, a aproximação analítica proposta pelo autor no presente trabalho, Equação (2.54), é a que mais se aproxima da solução exata (Figura 2.3).

Para as alturas entre  $y = 0$  (base) e  $y = 0,4 H$ , e em  $y = 0,9 H$ , a aproximação analítica proposta pelo autor no presente trabalho para a pressão hidrodinâmica é a que mais se aproxima da solução exata, e para alturas entre  $y = 0,5 H$  e  $y = 0,8 H$  é a aproximação analítica proposta por Westergaard que mais se aproxima da solução exata; Figura 2.3. Para alturas entre  $y = 0,1 H$  e  $y = 0,4 H$ , a aproximação analítica proposta pelo autor no presente trabalho para a massa adicional é a que mais se aproxima da solução exata, e para alturas entre  $y = 0,5 H$  e  $y = H$  é a aproximação numérica (método dos elementos de

contorno) proposta pelo autor no presente trabalho, que mais se aproxima da solução exata (Figura 2.6).

A aproximação numérica (método dos elementos de contorno) proposta pelo autor no presente trabalho fornece bons resultados, em relação à solução exata em séries, no domínio da barragem-reservatório (Figura 2.4). As curvas de pressão hidrodinâmica e massa adicional na face da barragem, obtidas pela função de aproximação analítica de Westergaard e pela função de aproximação analítica proposta pelo autor no presente trabalho, são a favor da segurança em relação à solução exata em séries. Resultados estes que qualificam suas utilizações para as finalidades práticas em projetos de engenharia (Figura 2.3 e Figura 2.6).

## 2.3 - FORMULAÇÃO ANALÍTICA PARA A PRESSÃO HIDRODINÂMICA UTILIZANDO SUPERFÍCIES DE TRUNCAMENTO

### 2.3.1 - Introdução

Na análise numérica da resposta dinâmica da interação barragem-reservatório (por exemplo, pelo método dos elementos finitos) aparecem dificuldades em consequência da grande extensão do domínio fluido a considerar (Zienkiewicz & Bettess, 1978). Em tal caso, o domínio infinito deve ser truncado em uma determinada distância da estrutura ao longo do reservatório (Figura 2.7), já que não se pode discretizar o domínio infinito.

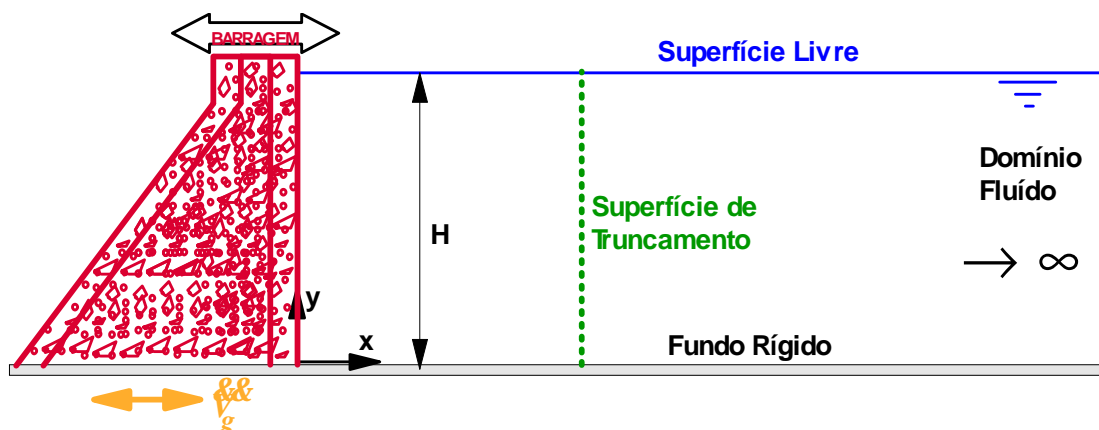


Figura 2.7 - Estrutura em contato com um fluido de domínio infinito.

A precisão nos resultados pode ser melhorada truncando-se o domínio em uma distância cada vez maior da estrutura. Entretanto, isto resulta num maior custo computacional (Sharan, 1985). Diversas técnicas foram sugeridas no passado para contornarem esta dificuldade computacional, e de maneira geral podem ser classificadas como: (a) imposição de uma condição limite ao longo da superfície do truncamento (Zienkiewicz & Newton, 1969, Humer & Roufaiel, 1983), e (b) acoplando a discretização de elemento finito com outros tipos de discretizações tais como elementos “infinitos” (Saini, Bettes & Zienkiewicz, 1978), elementos de contorno (Felippa, 1981), ou com soluções do contínuo (Hall & Chopra, 1983).

A primeira aproximação tem a vantagem distinta de ser direta na execução e pode ser realizada analiticamente na equação governante do problema (Sharan, 1985). A condição de contorno geralmente usada ao longo da superfície do truncamento é a condição de gradiente de pressão na direção normal igual a zero. Entretanto, para um fluido incompressível, esta ou outra condição de contorno adequada é transferida do limite do domínio para um contorno rígido estacionário e o comportamento do domínio do reservatório pode não ser representado corretamente.

Uma outra condição de contorno ao longo da superfície de truncamento para um domínio fluido infinito e incompressível foi desenvolvida por Sharan (1985). Embora esta condição limite seja melhor do que a condição citada anteriormente, ela não representa bem o comportamento das pressões quando a superfície de truncamento está muito próxima da face da barragem.

Por outro lado, uma condição de contorno exata ao longo da superfície de truncamento para o domínio infinito do reservatório foi desenvolvida por Küçükarslan (2003). Utilizando a solução analítica da pressão hidrodinâmica, ele obteve o gradiente de pressão na direção do comprimento do reservatório. Uma outra condição de contorno exata ao longo da superfície de truncamento de um domínio infinito do reservatório é desenvolvida neste trabalho a partir da solução analítica das pressões hidrodinâmicas obtida na direção do comprimento do reservatório.

Assim, o objetivo desta seção é mostrar o desenvolvimento analítico do campo de pressões hidrodinâmicas obtido com as condições de contorno usuais (corrente) da literatura e uma



outra condição de contorno proposta neste trabalho para a superfície de truncamento de um reservatório infinito, comparando-as em diferentes posições do domínio fluido simulando reservatórios de comprimentos finitos equivalentes.

Assinala-se ainda que o campo de pressões hidrodinâmicas obtido para todas as condições de contorno utilizadas neste trabalho foi desenvolvido analiticamente através da Técnica de Separação de Variável, aspecto não tratado nos trabalhos referidos (Sharan, 1985 e Küçükarslan, 2003), onde as condições de contorno para a superfície de truncamento, lá definidas, são apenas apresentadas, uma vez que estas foram aplicadas nas fronteiras do problema para a solução pelo Método dos Elementos Finitos. Este aspecto caracteriza também uma contribuição inovadora deste trabalho (Silva & Pedroso, 2005c).

### 2.3.2 - Condições de contorno na superfície de truncamento

As condições de contorno usuais na literatura e a condição de contorno proposta ao longo da superfície de truncamento (Figura 2.8) são baseadas nas seguintes suposições adicionais:

- O domínio do fluido se estende ao infinito numa direção e o problema é bidimensional.
- A interface fluido-estrutura é vertical.
- A estrutura em contato com o fluido é rígida; sua altura não é menor do que a lâmina de fluido; e ela vibra na direção normal da interface fluido-estrutura.
- O fundo do domínio fluido (reservatório) é rígido e horizontal.

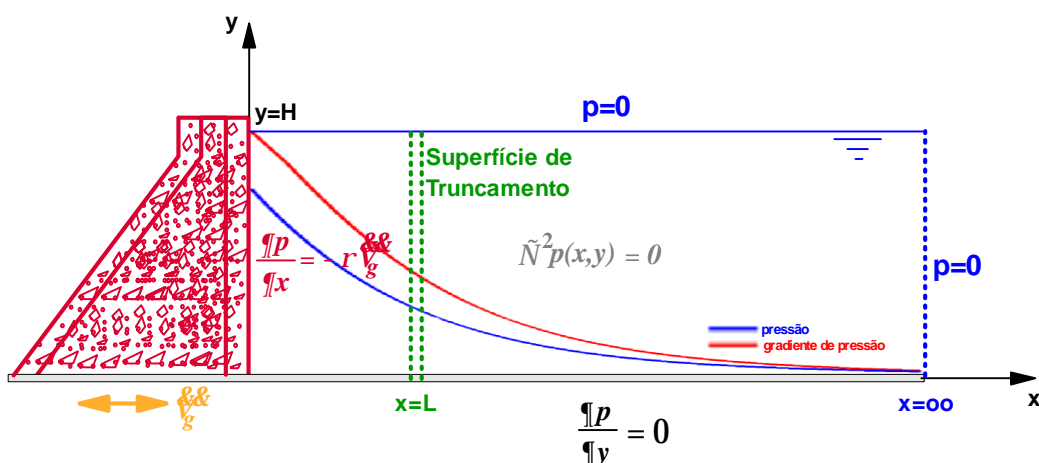


Figura 2.8 - Suposições feitas para as condições de contorno na superfície de truncamento.

### 2.3.2.1 - Condição de derivada nula na superfície de truncamento (DNST)

Supõe-se que em uma distância infinitamente grande afastada da estrutura, a pressão seja zero. Se o domínio do fluido infinito for truncado em uma distância suficientemente grande da região de interesse (barragem), pode-se admitir também que a derivada da pressão na direção normal é igual a zero (Sharan, 1985), ou seja:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p(L, y)}{\partial x} = 0 \quad (2.60)$$

Esta condição é denominada neste trabalho como “Derivada Nula na Superfície de Truncamento: DNST”. Utilizando na superfície de truncamento esta condição e aplicando a técnica de separação de variável (Pedroso, 2003, Chakrabarti & Chopra, 1974), chega-se à expressão do campo de pressão no domínio do reservatório finito limitado pela superfície de truncamento.

Seja a equação de Laplace, Equação (2.12), para o domínio do fluido no plano  $x$ - $y$ , com as seguintes condições de contorno:

- i) No Contorno Rígido ( $y = 0$ ):  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$
- ii) Na Superfície Livre ( $y = H$ ):  $p = 0$
- iii) Na Interface Fluido-Estrutura ( $x = 0$ ):  $\frac{\partial p}{\partial x} = -r \frac{\partial \phi}{\partial x}$
- iv) Na Superfície de Truncamento ( $x = L$ ):  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$  (DNST)

Aplicando-se a técnica de separação de variável e as condições de contorno no fundo e na superfície livre do domínio fluido, tem-se para a direção  $y$ :

$$G(y) = B_n \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left((2n-1)\frac{\pi y}{2H}\right) \quad (2.61)$$

Condição de contorno na superfície de truncamento: (DNST)

$$iv) \left. \frac{\partial p(x, y)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad (2.62)$$

Direção  $x$ :

$$\text{para } K = 0 \Rightarrow F'' = 0 \Rightarrow F = cx + d \text{ (sem sentido físico)}$$

$$\text{para } K = -1 \Rightarrow \frac{F''}{F} = -1$$

$$F'' + 1 F = 0 \quad (2.63)$$

A Equação (2.63) tem como solução a função  $F(x) = C_1 e^{\sqrt{-1} x} + C_2 e^{-\sqrt{-1} x}$ . Usando a

condição de contorno  $iv) \left. \frac{\partial p(x, y)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0$ , tem-se:

$$G(y) \left( C_1 \sqrt{-1} e^{\sqrt{-1} L} + C_2 (-\sqrt{-1}) e^{-\sqrt{-1} L} \right) = 0 \Rightarrow C_1 e^{\sqrt{-1} L} - C_2 e^{-\sqrt{-1} L} = 0 \quad \therefore C_1 = \frac{C_2}{e^{2\sqrt{-1} L}}$$

Logo,  $F(x) = C_2 \left( \frac{e^{\sqrt{-1} x}}{e^{\sqrt{-1} 2L}} + e^{-\sqrt{-1} x} \right)$ . Então:

$$F_n(x) = C_n \left( \frac{1 + e^{\frac{(2n-1)p(x-L)}{H}}}{e^{\frac{(2n-1)p}{2H}}} \right) \quad (2.64)$$

Levando as equações (2.61) e (2.64) na Equação (2.13), tem-se:

$$p_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n e^{-m_n \frac{x}{H}} \cos \left( m_n \frac{y}{H} \right) \left[ 1 + e^{\frac{m_n 2(x-L)}{H}} \right] ; \quad m_n = (2n-1) \frac{p}{2} \quad (2.65)$$

Condição de contorno na interface fluido-estrutura:

$$iii) \left. \frac{\partial}{\partial x} p(x, y) \right|_{x=0} = -r \sqrt{\frac{\rho}{g}} \quad (2.66)$$

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \left[ \left(-\frac{m_n}{H}\right) e^{-m_n \frac{x}{H}} \left(1 + e^{\frac{m_n 2(x-L)}{H}}\right) + e^{-m_n \frac{x}{H}} \left(\frac{2m_n}{H} e^{\frac{m_n 2(x-L)}{H}}\right) \right] \right\}_{x=0} = \quad (2.67)$$

$$= -r \sqrt{\frac{g}{g}} \quad (2.67)$$

$$\int_0^H \sum_{n=1}^{\infty} K_n m_n \left(1 - e^{-m_n \frac{2L}{H}}\right) \text{sen}\left(m_n \frac{y}{H}\right) dy = \int_0^H r \sqrt{\frac{g}{g}} H dy \left[ \text{sen}\left(m_n \frac{y}{H}\right) \right] \quad (2.68)$$

Usando a propriedade de ortogonalidade da função seno (em séries), tem-se:

$$\frac{H}{2} K_n m_n \left(1 - e^{-m_n \frac{2L}{H}}\right) = r \sqrt{\frac{g}{g}} H \int_0^H \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) dy = r \sqrt{\frac{g}{g}} H \frac{H}{m_n} \left[ \text{sen}\left(m_n \frac{y}{H}\right) \right]_0^H$$

Logo:

$$K_n = r \sqrt{\frac{g}{g}} H \frac{2(-1)^{n+1}}{m_n^2 \left(1 - e^{-m_n \frac{2L}{H}}\right)} \quad (2.69)$$

Levando a Equação (2.69) na Equação (2.65), tem-se:

$$p_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} r \sqrt{\frac{g}{g}} H \frac{2(-1)^{n+1}}{m_n^2 \left(1 - e^{-m_n \frac{2L}{H}}\right)} e^{-m_n \frac{x}{H}} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \left[1 + e^{\frac{m_n 2(x-L)}{H}}\right] \quad (2.70)$$

$$p(x, y) = r \sqrt{\frac{g}{g}} H 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} e^{-m_n \frac{x}{H}} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \left[ \frac{1 + e^{\frac{m_n 2(x-L)}{H}}}{1 - e^{-m_n \frac{2L}{H}}} \right]; m_n = (2n-1) \frac{p}{2} \quad (2.71)$$

A Equação (2.71) corresponde a expressão analítica para o campo de pressões hidrodinâmicas obtido com a condição DNST na superfície de truncamento.

### 2.3.2.2 - Condição de Sharan

Para valores suficientemente grandes de  $x/H$ , o segundo e os termos subseqüentes na série do somatório da Equação (2.30) podem ser desprezados e a pressão hidrodinâmica e seu gradiente guardam a seguinte relação:

$$p(x, y) = r \sqrt{\frac{g}{g}} H \frac{8}{p^2} e^{\left(-\frac{p x}{2H}\right)} \cos\left(\frac{p y}{2H}\right) \quad (2.72)$$

Derivando a Equação (2.72) parcialmente, em relação à variável  $x$ , tem-se:

$$\frac{\partial p(x, y)}{\partial x} = r \sqrt{\frac{g}{g}} \left(-\frac{4}{p}\right) e^{\left(-\frac{p x}{2H}\right)} \cos\left(\frac{p y}{2H}\right) \quad (2.73)$$

O uso da Equação (2.72) na Equação (2.73) conduz à seguinte relação entre a pressão e seu gradiente ao longo da direção normal à superfície do truncamento:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p(L, y)}{\partial x} = -\frac{p p(L, y)}{2H} \quad (2.74)$$

Condição esta denominada neste trabalho por “Condição de Sharan”. Utilizando na superfície de truncamento esta condição e aplicando-se a técnica de separação de variável referenciada anteriormente, chega-se à expressão do campo de pressões hidrodinâmicas no domínio do reservatório finito limitado pela superfície de truncamento.

Deve-se anotar que, se o limite do truncamento for fixado a uma distância relativamente grande afastada da estrutura, o valor de  $p(x, y)$  é aproximadamente igual a zero e a Equação (2.74) é reduzida à Equação (2.60). Entretanto, isto não é verdadeiro se o domínio fluido for truncado em uma distância relativamente curta afastada da estrutura.

Seja a equação de Laplace, Equação (2.12), para o domínio do fluido no plano  $x$ - $y$ , com as seguintes condições de contorno:

- i) No Fundo do Reservatório ( $y = 0$ ):  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$
- ii) Na Superfície Livre ( $y = H$ ):  $p = 0$
- iii) Na Interface Fluido-Estrutura ( $x = 0$ ):  $\frac{\partial p}{\partial x} = -r \frac{\rho g}{\rho g}$
- iv) Na Superfície de Truncamento ( $x = L$ ):  $\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\rho g}{2H}$  (Sharan)

Aplicando-se a técnica de separação de variável e as condições de contorno no fundo e na superfície livre do domínio fluido, tem-se para a direção  $y$ :

$$G(y) = B_n \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left((2n-1)\frac{\pi y}{2H}\right) \quad (2.75)$$

Condição de contorno na superfície de truncamento: (Sharan)

$$iv) \left. \frac{\partial p(x, y)}{\partial x} \right|_{x=L} = -\frac{\rho g}{2H} \quad (2.76)$$

Direção  $x$ :

$$\text{para } K = 0 \Rightarrow F'' = 0 \Rightarrow F = cx + d \text{ (sem sentido físico)}$$

$$\text{para } K = -1 \Rightarrow \frac{F''}{F} = -1$$

$$F'' + 1 F = 0 \quad (2.77)$$

A Equação (2.77) tem como solução a função  $F(x) = C_1 e^{\sqrt{-1}x} + C_2 e^{-\sqrt{-1}x}$ . Usando a

condição de contorno  $iv) \left. \frac{\partial p(x, y)}{\partial x} \right|_{x=L} = -\frac{\rho g}{2H}$ , tem-se:

$$\frac{G(y)(C_1 \sqrt{-1} e^{\sqrt{-1}L} + C_2 (-\sqrt{-1}) e^{-\sqrt{-1}L})}{G(y)(C_1 e^{\sqrt{-1}L} + C_2 e^{-\sqrt{-1}L})} = -\frac{\rho g}{2H}$$

$$C_1 e^{\sqrt{-1}L} \left( \sqrt{-1} + \frac{p}{2H} \right) = C_2 e^{-\sqrt{-1}L} \left( \sqrt{-1} - \frac{p}{2H} \right) \therefore C_1 = \frac{C_2}{e^{2L\sqrt{-1}}} \left( \frac{\sqrt{-1} - \frac{p}{2H}}{\sqrt{-1} + \frac{p}{2H}} \right)$$

$$\text{Logo: } F(x) = C_2 \left( \frac{e^{\sqrt{-1}x}}{e^{\sqrt{-1}2L}} \left( \frac{\sqrt{-1} - \frac{p}{2H}}{\sqrt{-1} + \frac{p}{2H}} \right) + e^{-\sqrt{-1}x} \right), \text{ então:}$$

$$F_n(x) = C_n \left( \frac{1 + b_n e^{\frac{(2n-1)p(x-L)}{H}}}{e^{\frac{(2n-1)p x}{2H}}} \right); \text{ com } b_n = \frac{\left( \sqrt{-1} - \frac{p}{2H} \right)}{\left( \sqrt{-1} + \frac{p}{2H} \right)} = \frac{(2n-1)p - p}{(2n-1)p + p} = \frac{n-1}{n} \quad (2.78)$$

Levando as equações (2.75) e (2.78) na Equação (2.13), tem-se:

$$p_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n e^{-m_n \frac{x}{H}} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \left[ 1 + b_n e^{\frac{m_n 2(x-L)}{H}} \right] \quad (2.79)$$

$$m_n = (2n-1) \frac{p}{2}; b_n = \frac{n-1}{n}$$

Condição de contorno na interface fluido-estrutura:

$$iii) \frac{\partial}{\partial x} p(x, y)|_{x=0} = -r \mathbf{v}_g \quad (2.80)$$

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \left[ \left(-\frac{m_n}{H}\right) e^{-m_n \frac{x}{H}} \left( 1 + b_n e^{\frac{m_n 2(x-L)}{H}} \right) + e^{-m_n \frac{x}{H}} \left( \frac{2m_n b_n}{H} e^{\frac{m_n 2(x-L)}{H}} \right) \right] \right\}_{x=0} = -r \mathbf{v}_g \quad (2.81)$$

$$\int_0^H \sum_{n=1}^{\infty} K_n m_n \left( 1 - b_n e^{-\frac{m_n 2L}{H}} \right) \text{sen}\left(np \frac{y}{H}\right) dy = \int_0^H r \mathbf{v}_g H dy \left[ \text{sen}\left(mp \frac{y}{H}\right) \right] \quad (2.82)$$

Usando a propriedade de ortogonalidade da função seno (em séries), tem-se:

$$\frac{H}{2} K_n m_n \left( 1 - b_n e^{-m_n \frac{2L}{H}} \right) = r \sqrt{\frac{\rho}{g}} H \int_0^H \cos \left( m_n \frac{y}{H} \right) dy = r \sqrt{\frac{\rho}{g}} H \frac{H}{m_n} \left[ \operatorname{sen} \left( m_n \frac{y}{H} \right) \right]_0^H$$

Logo:

$$K_n = r \sqrt{\frac{\rho}{g}} H \frac{2 (-1)^{n+1}}{m_n^2 \left( 1 - b_n e^{-m_n \frac{2L}{H}} \right)} \quad (2.83)$$

Levando a Equação (2.83) na Equação (2.79), tem-se:

$$p_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} r \sqrt{\frac{\rho}{g}} H \frac{2 (-1)^{n+1}}{m_n^2 \left( 1 - b_n e^{-m_n \frac{2L}{H}} \right)} e^{-m_n \frac{x}{H}} \cos \left( m_n \frac{y}{H} \right) \left[ 1 + b_n e^{\frac{m_n 2(x-L)}{H}} \right] \quad (2.84)$$

$$p(x, y) = r \sqrt{\frac{\rho}{g}} H 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} e^{-m_n \frac{x}{H}} \cos \left( m_n \frac{y}{H} \right) \left[ \frac{1 + b_n e^{\frac{m_n 2(x-L)}{H}}}{1 - b_n e^{-m_n \frac{2L}{H}}} \right] \quad (2.85)$$

$$m_n = (2n - 1) \frac{D}{2}; \quad b_n = \frac{n - 1}{n}$$

A Equação (2.85) corresponde a expressão analítica para o campo de pressões hidrodinâmicas obtido com a condição de Sharan na superfície de truncamento.



### 2.3.2.3 - Condição de Küçükarslan

A condição de contorno proposta ao longo da superfície de truncamento do reservatório é obtida da solução analítica da pressão hidrodinâmica. O gradiente de pressão avaliado na superfície de truncamento para  $x = L$  é:

$$\frac{\partial p(L, y)}{\partial x} = -2 r \sqrt{g} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n} e^{\left(-m_n \frac{L}{H}\right)} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \quad (2.86)$$

Condição esta denominada neste trabalho por “Condição de Küçükarslan”. Utilizando na superfície de truncamento esta condição e aplicando-se a técnica de separação de variável, já referenciada, chega-se à expressão do campo de pressões hidrodinâmicas no domínio do reservatório finito limitado pela superfície de truncamento.

Seja a equação de Laplace, Equação (2.12), para o domínio do fluido no plano  $x$ - $y$ , com as seguintes condições de contorno:

- i) No Fundo do Reservatório ( $y = 0$ ):  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$
- ii) Na Superfície Livre ( $y = H$ ):  $p = 0$
- iii) Na Interface Fluido-Estrutura ( $x = 0$ ):  $\frac{\partial p}{\partial x} = -r \sqrt{g}$
- iv) Na Superfície de Truncamento ( $x = L$ ): (Küçükarslan)

$$\frac{\partial p(x, y)}{\partial x} = -2 r \sqrt{g} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n} e^{\left(-m_n \frac{x}{H}\right)} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right)$$

Aplicando-se a técnica de separação de variável e as condições de contorno no fundo e na superfície livre do domínio fluido, tem-se para a direção  $y$ :

$$G(y) = B_n \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left((2n-1) \frac{y}{2H}\right) \quad (2.87)$$

Condição de contorno na superfície de truncamento: (Küçükarslan)

$$iv) \left. \frac{\partial p(x, y)}{\partial x} \right|_{x=L} = -2 r \sqrt[2]{g} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n} e^{\left(-m_n \frac{L}{H}\right)} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \quad (2.88)$$

Direção  $x$ :

$$\text{para } K = 0 \Rightarrow F'' = 0 \Rightarrow F = cx + d \text{ (sem sentido físico)}$$

$$\text{para } K = -1 \Rightarrow \frac{F''}{F} = -1$$

$$F'' + 1 F = 0 \quad (2.89)$$

A Equação (2.89) tem como solução a função  $F(x) = C_1 e^{\sqrt{-1}x} + C_2 e^{-\sqrt{-1}x}$ , usando a

$$\text{condição de contorno } iv) \left. \frac{\partial p(x, y)}{\partial x} \right|_{x=L} = -2 r \sqrt[2]{g} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n} e^{\left(-m_n \frac{L}{H}\right)} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right):$$

$$G(y) \left( C_1 \sqrt{-1} e^{\sqrt{-1}L} + C_2 (-\sqrt{-1}) e^{-\sqrt{-1}L} \right) = -2 r \sqrt[2]{g} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n} e^{\left(-m_n \frac{L}{H}\right)} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right)$$

$$G(y) \left( C_1 \sqrt{-1} e^{\sqrt{-1}L} + C_2 (-\sqrt{-1}) e^{-\sqrt{-1}L} \right) = S \quad : \sqrt{-1}$$

$$C_1 e^{\sqrt{-1}L} = C_2 e^{-\sqrt{-1}L} + \frac{S}{G(y)\sqrt{-1}} \quad \therefore C_1 = \frac{C_2}{e^{2\sqrt{-1}L}} + \frac{S}{e^{\sqrt{-1}L} G(y)\sqrt{-1}}$$

$$\text{Logo: } F(x) = C_2 \left( \frac{e^{\sqrt{-1}x}}{e^{\sqrt{-1}2L}} + e^{-\sqrt{-1}x} \right) + \frac{S}{e^{\sqrt{-1}L} G(y)\sqrt{-1}} e^{\sqrt{-1}x}, \text{ então:}$$

$$F_n(x) = C_n \left( \frac{1 + e^{\frac{(2n-1)p(x-L)}{H}}}{e^{\frac{(2n-1)p \cdot x}{2H}}} \right) + \frac{S e^{\frac{(2n-1)p(x-L)}{2H}}}{G(y)(2n-1) \frac{p}{2H}} \quad (2.90)$$

$$\text{onde: } S = -2 r \sqrt[2]{g} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n} e^{\left(-m_n \frac{L}{H}\right)} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right); m_n = (2n-1) \frac{p}{2}$$

Levando as equações (2.87) e (2.90) na Equação (2.13), tem-se:

$$p_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n e^{-m_n \frac{x}{H}} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \left[1 + e^{\frac{m_n 2(x-L)}{H}}\right] + \frac{S e^{\frac{m_n (x-L)}{H}}}{\frac{m_n}{H}}$$

$$p_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n e^{-m_n \frac{x}{H}} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \left[1 + e^{\frac{m_n 2(x-L)}{H}}\right] + \frac{H}{m_n} S e^{\frac{m_n (x-L)}{H}} \quad (2.91)$$

Condição de contorno na interface fluido-estrutura:

$$iii) \frac{\partial}{\partial x} p(x, y)|_{x=0} = -r \sqrt{\rho_g} \quad (2.92)$$

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \left[ \left(-\frac{m_n}{H}\right) e^{-m_n \frac{x}{H}} \left(1 + e^{\frac{m_n 2(x-L)}{H}}\right) + e^{-m_n \frac{x}{H}} \left(\frac{2m_n}{H} e^{\frac{m_n 2(x-L)}{H}}\right) \right] \right\}_{x=0} +$$

$$+ \left\{ \frac{H}{m_n} S \frac{m_n}{H} e^{\frac{m_n (x-L)}{H}} \right\}_{x=0} = -r \sqrt{\rho_g} \quad (2.93)$$

$$\int_0^H \sum_{n=1}^{\infty} K_n m_n \left(1 - e^{-m_n \frac{2L}{H}}\right) \text{sen}\left(n p \frac{y}{H}\right) dy +$$

$$+ \int_0^H 2 r \sqrt{\rho_g} H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n} e^{-m_n \frac{2L}{H}} \text{sen}\left(n p \frac{y}{H}\right) dy = \int_0^H r \sqrt{\rho_g} H dy \left[ \text{sen}\left(m p \frac{y}{H}\right) \right] \quad (2.94)$$

Usando a propriedade de ortogonalidade da função seno (em séries), tem-se:

$$\frac{H}{2} K_n m_n \left(1 - e^{-m_n \frac{2L}{H}}\right) + \frac{H}{2} 2 r \sqrt{\rho_g} H \frac{(-1)^{n+1}}{m_n} e^{-m_n \frac{2L}{H}} = r \sqrt{\rho_g} H \frac{H}{m_n} (-1)^{n+1}$$

Logo:

$$K_n = r \sqrt{g} H \frac{2(-1)^{n+1}}{m_n^2} \quad (2.95)$$

Levando a Equação (2.95) na Equação (2.91), tem-se:

$$p_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} r \sqrt{g} H \frac{2(-1)^{n+1}}{m_n^2} e^{-m_n \frac{x}{H}} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \left[1 + e^{\frac{m_n 2(x-L)}{H}}\right] - \quad (2.96)$$

$$- 2 r \sqrt{g} H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} e^{-m_n \frac{L}{H}} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) e^{\frac{m_n (x-L)}{H}}$$

$$p(x, y) = r \sqrt{g} H \left\{ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} e^{-m_n \frac{x}{H}} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \left[1 + e^{\frac{m_n 2(x-L)}{H}}\right] - \quad (2.97)$$

$$- 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} e^{-m_n \frac{L}{H}} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) e^{\frac{m_n (x-L)}{H}} \right\}$$

$$p(x, y) = r \sqrt{g} H \left\{ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \left[ e^{-m_n \frac{x}{H}} + e^{\frac{m_n x}{H}} e^{-2m_n \frac{L}{H}} - \quad (2.98)$$

$$- e^{\frac{m_n x}{H}} e^{-2m_n \frac{L}{H}} \right] \right\}$$

$$p(x, y) = r \sqrt{g} H 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} e^{-m_n \frac{x}{H}} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right); m_n = (2n-1) \frac{p}{2} \quad (2.99)$$

A Equação (2.99) corresponde a expressão analítica para o campo de pressões hidrodinâmicas obtido com a condição de Küçükarıslan na superfície de truncamento.

### 2.3.2.4 - Condição proposta pelo autor

A condição de contorno proposta pelo autor ao longo da superfície de truncamento do reservatório é obtida da solução analítica da pressão hidrodinâmica, Equação (2.12), com o reservatório limitado em  $x = L$ , ou seja:

$$p(L, y) = r \sqrt{g} H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} e^{\left(-m_n \frac{L}{H}\right)} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \quad (2.100)$$

Condição esta denominada neste trabalho por “Condição Proposta”. Utilizando na superfície de truncamento esta condição e aplicando-se a técnica de separação de variável, já referenciada, chega-se à expressão do campo de pressões hidrodinâmicas no domínio do reservatório finito limitado pela superfície de truncamento.

Seja a equação de Laplace, Equação (2.12), para o domínio do fluido no plano  $x$ - $y$ , com as seguintes condições de contorno:

- i) No Fundo do Reservatório ( $y = 0$ ):  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$
- ii) Na Superfície Livre ( $y = H$ ):  $p = 0$
- iii) Na Interface Fluido-Estrutura ( $x = 0$ ):  $\frac{\partial p}{\partial x} = -r \sqrt{g}$
- iv) Na Superfície de Truncamento ( $x = L$ ): (proposta)

$$p(x, y) = r \sqrt{g} H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} e^{\left(-m_n \frac{x}{H}\right)} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right)$$

Aplicando-se a técnica de separação de variável e as condições de contorno no fundo e na superfície livre do domínio fluido, tem-se para a direção  $y$ :

$$G(y) = B_n \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left((2n-1) \frac{y}{2H}\right) \quad (2.101)$$

Condição de contorno na superfície de truncamento: (proposta)

$$iv) p(x, y)|_{x=L} = r \sqrt{g} H 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} e^{\left(-m_n \frac{L}{H}\right)} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \quad (2.102)$$

Direção  $x$ :

$$\text{para } K = 0 \Rightarrow F'' = 0 \Rightarrow F = cx + d \text{ (sem sentido físico)}$$

$$\text{para } K = -1 \Rightarrow \frac{F''}{F} = -1$$

$$F'' + 1 F = 0 \quad (2.103)$$

A Equação (2.103) tem como solução a função  $F(x) = C_1 e^{\sqrt{-1}x} + C_2 e^{-\sqrt{-1}x}$ . Usando a

condição de contorno  $iv) p(x, y)|_{x=L} = r \sqrt{g} H 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} e^{\left(-m_n \frac{L}{H}\right)} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right)$ , tem-se:

$$G(y)(C_1 e^{\sqrt{-1}L} + C_2 e^{-\sqrt{-1}L}) = r \sqrt{g} H 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} e^{\left(-m_n \frac{L}{H}\right)} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right)$$

$$G(y)(C_1 e^{\sqrt{-1}L} + C_2 e^{-\sqrt{-1}L}) = S$$

$$C_1 e^{\sqrt{-1}L} = -C_2 e^{-\sqrt{-1}L} + \frac{S}{G(y)} \quad \therefore C_1 = \frac{-C_2}{e^{2\sqrt{-1}L}} + \frac{S}{e^{\sqrt{-1}L} G(y)}$$

Logo:  $F(x) = C_2 \left( \frac{-e^{\sqrt{-1}x}}{e^{\sqrt{-1}2L}} + e^{-\sqrt{-1}x} \right) + \frac{S}{e^{\sqrt{-1}L} G(y)} e^{\sqrt{-1}x}$ , então:

$$F_n(x) = C_n \left( \frac{1 - e^{\frac{(2n-1)p(x-L)}{H}}}{e^{\frac{(2n-1)p \cdot x}{2H}}} \right) + \frac{S e^{\frac{(2n-1)p(x-L)}{2H}}}{G(y)} \quad (2.104)$$

onde:  $S = r \sqrt{g} H 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} e^{\left(-m_n \frac{L}{H}\right)} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right)$ ,  $m_n = (2n-1) \frac{p}{2}$

Levando as equações (2.101) e (2.104) na Equação (2.13), tem-se:

$$\begin{aligned}
 p_n(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} K_n e^{-m_n \frac{x}{H}} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \left[1 - e^{m_n \frac{2(x-L)}{H}}\right] + S e^{m_n \frac{(x-L)}{H}} \\
 p_n(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} K_n e^{-m_n \frac{x}{H}} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \left[1 - e^{m_n \frac{2(x-L)}{H}}\right] + \\
 &+ r \sqrt{\frac{\rho}{g}} H 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} e^{\left(-m_n \frac{L}{H}\right)} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) e^{m_n \frac{(x-L)}{H}}
 \end{aligned} \tag{2.105}$$

Condição de contorno na interface fluido-estrutura:

$$\text{iii) } \frac{\partial}{\partial x} p(x, y)|_{x=0} = -r \sqrt{\frac{\rho}{g}} \tag{2.106}$$

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \left[ \left(-\frac{m_n}{H}\right) e^{-m_n \frac{x}{H}} \left(1 - e^{m_n \frac{2(x-L)}{H}}\right) + e^{-m_n \frac{x}{H}} \left(-\frac{2m_n}{H} e^{m_n \frac{2(x-L)}{H}}\right) \right] \right\}_{x=0} + \\
 &+ \left\{ S \frac{m_n}{H} e^{m_n \frac{(x-L)}{H}} \right\}_{x=0} = -r \sqrt{\frac{\rho}{g}}
 \end{aligned} \tag{2.107}$$

$$\begin{aligned}
 &\int_0^H \sum_{n=1}^{\infty} K_n m_n \left(1 + e^{-m_n \frac{2L}{H}}\right) \text{sen}\left(m_n \frac{y}{H}\right) dy - \\
 &+ \int_0^H 2r \sqrt{\frac{\rho}{g}} H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n} e^{\left(-m_n \frac{2L}{H}\right)} \text{sen}\left(m_n \frac{y}{H}\right) dy = \int_0^H r \sqrt{\frac{\rho}{g}} H dy \left[ \text{sen}\left(m_n \frac{y}{H}\right) \right]
 \end{aligned} \tag{2.108}$$

Usando a propriedade de ortogonalidade da função seno (em séries), tem-se:

$$\frac{H}{2} K_n m_n \left(1 + e^{-m_n \frac{2L}{H}}\right) - \frac{H}{2} 2r \sqrt{\frac{\rho}{g}} H \frac{(-1)^{n+1}}{m_n} e^{-m_n \frac{2L}{H}} = r \sqrt{\frac{\rho}{g}} H \frac{H}{m_n} (-1)^{n+1}$$

Logo:

$$K_n = r \sqrt{g} H \frac{2(-1)^{n+1}}{m_n^2} \quad (2.109)$$

Levando a Equação (2.109) na Equação (2.105), tem-se:

$$p_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} r \sqrt{g} H \frac{2(-1)^{n+1}}{m_n^2} e^{-m_n \frac{x}{H}} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \left[1 - e^{\frac{m_n 2(x-L)}{H}}\right] + 2 r \sqrt{g} H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} e^{-m_n \frac{L}{H}} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) e^{\frac{m_n (x-L)}{H}} \quad (2.110)$$

$$p(x, y) = r \sqrt{g} H \left\{ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} e^{-m_n \frac{x}{H}} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \left[1 - e^{\frac{m_n 2(x-L)}{H}}\right] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} e^{-m_n \frac{L}{H}} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) e^{\frac{m_n (x-L)}{H}} \right\} \quad (2.111)$$

$$p(x, y) = r \sqrt{g} H \left\{ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \left[ e^{-m_n \frac{x}{H}} - e^{\frac{m_n x}{H}} e^{-2m_n \frac{L}{H}} + e^{\frac{m_n x}{H}} e^{-2m_n \frac{L}{H}} \right] \right\} \quad (2.112)$$

$$p(x, y) = r \sqrt{g} H 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} e^{-m_n \frac{x}{H}} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right); m_n = (2n-1) \frac{p}{2} \quad (2.113)$$

A Equação (2.113) corresponde a expressão analítica para o campo de pressões hidrodinâmicas obtido com a condição proposta pelo autor na superfície de truncamento.



### 2.3.2.5 - Aplicação numérica e representação gráfica dos resultados

As prévias condições de contorno aplicadas à superfície de truncamento levam às expressões analíticas para o campo de pressões hidrodinâmicas no domínio fluido. A fim de testar a precisão, a convergência e a eficiência das soluções apresentadas, é desenvolvido o caso a seguir. Este exemplo analisa a distribuição das pressões hidrodinâmicas num perfil típico 2-D de barragem, sujeito a uma aceleração uniforme de amplitude  $\frac{g}{g}$  sob as condições e simplificações adotadas anteriormente.

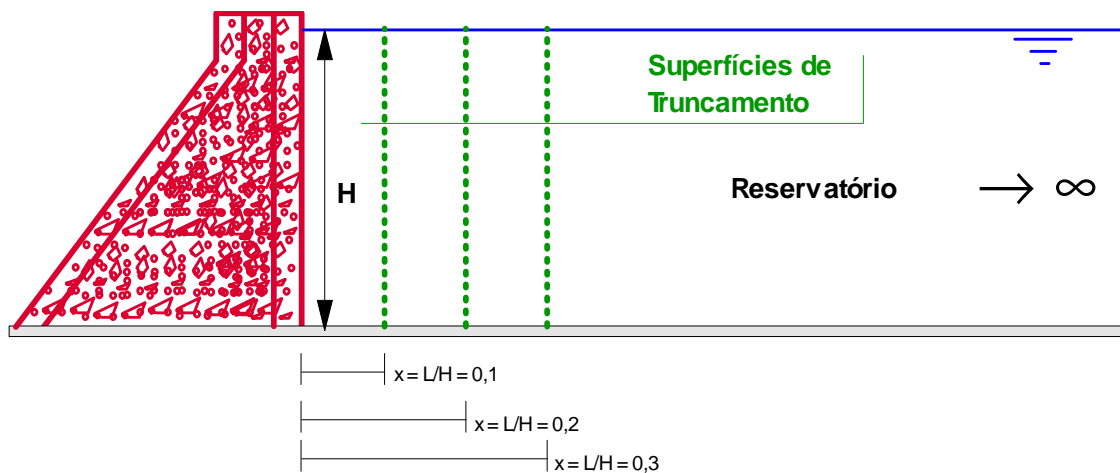


Figura 2.9 - Diferentes posições para a superfície de truncamento equivalente a reservatórios finitos de comprimento  $L$ .

O reservatório infinito foi analisado para dez posições diferentes da superfície de truncamento, cada uma tendo por resultado um tamanho diferente de  $L$  (abscissa da superfície de truncamento) de um reservatório finito equivalente. Os resultados para a distribuição da pressão foram obtidos para quatro tipos de condição de contorno ao longo da superfície do truncamento, a saber:

$$(a) \left. \frac{\partial p(x, y)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \text{ (DNST),}$$

$$(b) \left. \frac{\partial p(x, y)}{\partial x} \right|_{x=L} = -\frac{P}{2H} \text{ (Sharan),}$$

$$(c) \left. \frac{\partial p(x, y)}{\partial x} \right|_{x=L} = -2 r \sqrt{g} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n} e^{\left(-m_n \frac{L}{H}\right)} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \text{ (Küçükarslan),}$$

$$(d) p(x, y)|_{x=L} = 2 r \sqrt{g} H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} e^{\left(-m_n \frac{L}{H}\right)} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \text{ (proposta).}$$

A Figura 2.9 ilustra o problema. Os resultados para a distribuição das pressões hidrodinâmicas, na face e no fundo da barragem, foram obtidos usando as condições de contorno (a), (b), (c), e (d), e resumidos na Tabela 2.4 (com  $e_R$  correspondendo ao erro relativo percentual) onde são comparados com o valor exato para a pressão adimensional

$$C_0 = \frac{p(0,0)}{r H \sqrt{g}} \text{ no fundo da face da barragem (Westergaard, 1931).}$$

A possibilidade de deslocamento da superfície de truncamento o mais próximo da face da barragem é o interesse deste estudo, porque a uma distância relativamente longe da face da barragem os resultados para a pressão hidrodinâmica serão bons para todas as condições de contorno citadas, na superfície de truncamento, conforme fica evidenciado na Tabela 2.3, na Tabela 2.4, na Figura 2.10 e na Figura 2.11.

Assinala-se que todos estes resultados foram obtidos de forma analítica com as condições de contorno na superfície de truncamento, denominadas convenientemente, em função dos autores que as propuseram. Os resultados da literatura (referenciada) obtidos pelo Método dos Elementos Finitos, estão em boa concordância com os resultados analíticos, ver Tabela 2.3.

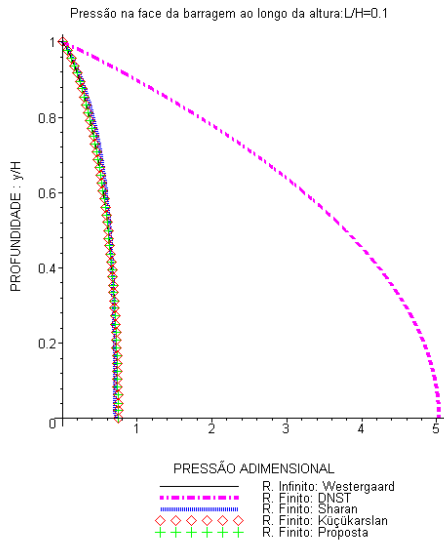
Os gráficos a seguir (Figura 2.10), comparam a distribuição da pressão na face da barragem de acordo com as condições de contorno adotadas nas diversas posições para as superfícies de truncamento. No entanto, na Figura 2.10: (k), (l), (m), (n), (o), (p), (q), (r), (s) e (t) e na Figura 2.11: (b) a solução a partir das condições de contorno DNST não é apresentada (produz grande discrepância nos valores quando plotados no mesmo gráfico).

Tabela 2.3 – Pressão hidrodinâmica, na face e no fundo da barragem, obtida pelo Método dos Elementos Finitos – MEF (Küçükarslan, 2003) e pela Técnica de Separação de Variável – TSV. O valor exato para  $C_0$  é 0,742454.

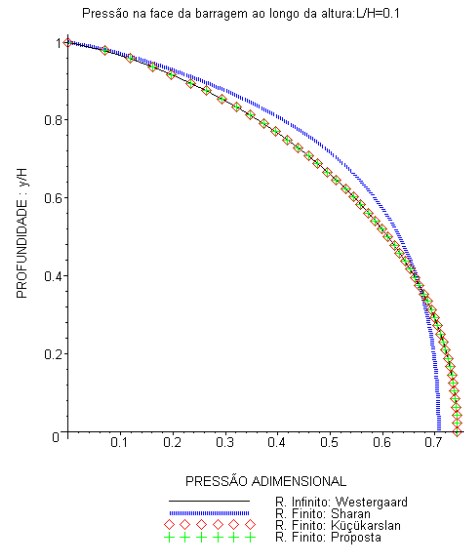
$\frac{L}{H}$	Tamanho da Malha	Método Numérico – Via MEF			Método Analítico – Via TSV		
		Condição de DNST	Condição de Sharan	Condição de Küçükarslan	Condição de DNST	Condição de Sharan	Condição de Küçükarslan
		$C_0$	$C_0$	$C_0$	$C_0$	$C_0$	$C_0$
0,1	10 x 1	5,0184	0,5255	0,7408	5,033333	0,707031	0,742454
	20 x 2	5,0273	0,7072	0,7417			
0,2	10 x 2	2,5615	0,7303	0,7414	2,566667	0,729318	0,742454
	20 x 4	2,5647	0,7295	0,7402			
0,5	10 x 5	1,1646	0,7420	0,7419	1,166288	0,741657	0,742454
	20 x 10	1,1658	0,7417	0,7423			
1,0	10 x 10	0,8152	0,7424	0,7423	0,742446	0,742446	0,742454
	20 x 20	0,8155	0,7424	0,7424			
$\infty$	----	----	----	----	0,742454	0,742454	0,742454

Tabela 2.4 - Comparação da pressão hidrodinâmica, na face e no fundo da barragem, com a solução exata (valor exato para  $C_0$  é 0,742454).

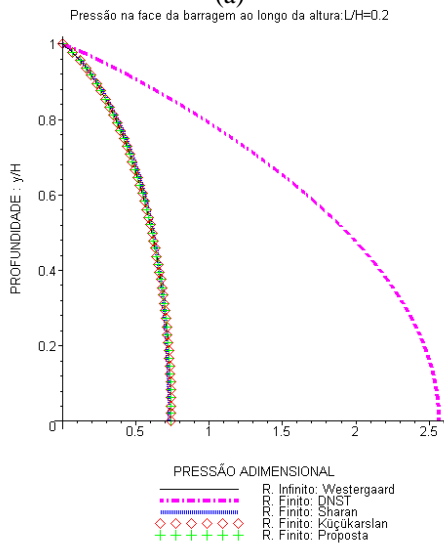
Superfície de Truncamento: $x$	Método Analítico – Via TSV			
	Condição de DNST	Condição de Sharan	Condição de Küçükarslan	Condição Proposta
$x = \frac{L}{H} = 0,1$	5,033333 $e_R = 578 \%$	0,707031 $e_R = 5 \%$	0,742454 $e_R = 0,00 \%$	0,742454 $e_R = 0,00 \%$
$x = \frac{L}{H} = 0,2$	2,566667 $e_R = 246 \%$	0,729318 $e_R = 2 \%$	0,742454 $e_R = 0,00 \%$	0,742454 $e_R = 0,00 \%$
$x = \frac{L}{H} = 0,3$	1,766663 $e_R = 138 \%$	0,737323 $e_R = 0,69 \%$	0,742454 $e_R = 0,00 \%$	0,742454 $e_R = 0,00 \%$
$x = \frac{L}{H} = 0,4$	1,383270 $e_R = 86 \%$	0,740430 $e_R = 0,27 \%$	0,742454 $e_R = 0,00 \%$	0,742454 $e_R = 0,00 \%$
$x = \frac{L}{H} = 0,5$	1,166288 $e_R = 57 \%$	0,741657 $e_R = 0,11 \%$	0,742454 $e_R = 0,00 \%$	0,742454 $e_R = 0,00 \%$
$x = \frac{L}{H} = 0,6$	1,032038 $e_R = 39 \%$	0,742141 $e_R = 0,04 \%$	0,742454 $e_R = 0,00 \%$	0,742454 $e_R = 0,00 \%$
$x = \frac{L}{H} = 0,7$	0,944421 $e_R = 27 \%$	0,742332 $e_R = 0,02 \%$	0,742454 $e_R = 0,00 \%$	0,742454 $e_R = 0,00 \%$
$x = \frac{L}{H} = 0,8$	0,885249 $e_R = 19 \%$	0,742406 $e_R = 0,01 \%$	0,742454 $e_R = 0,00 \%$	0,742454 $e_R = 0,00 \%$
$x = \frac{L}{H} = 0,9$	0,844362 $e_R = 14 \%$	0,742435 $e_R = 0,00 \%$	0,742454 $e_R = 0,00 \%$	0,742454 $e_R = 0,00 \%$
$x = \frac{L}{H} = 1,0$	0,815659 $e_R = 10 \%$	0,742446 $e_R = 0,00 \%$	0,742454 $e_R = 0,00 \%$	0,742454 $e_R = 0,00 \%$



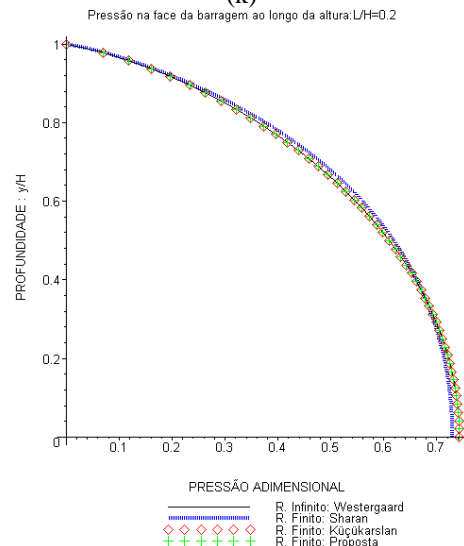
(a)



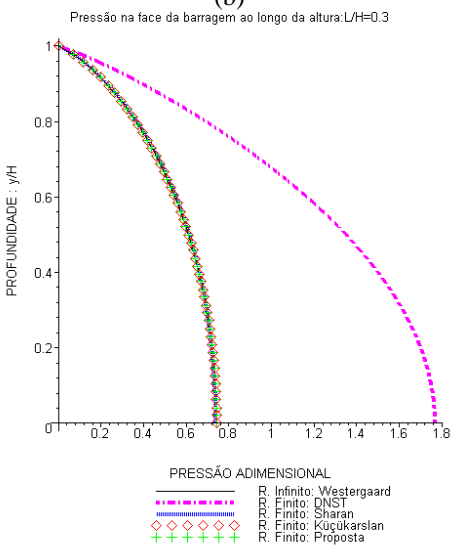
(k)



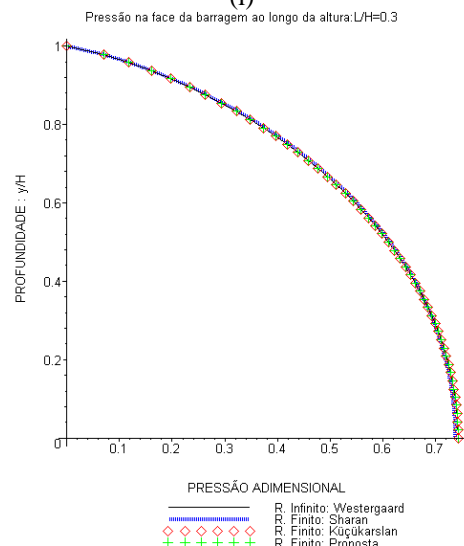
(b)



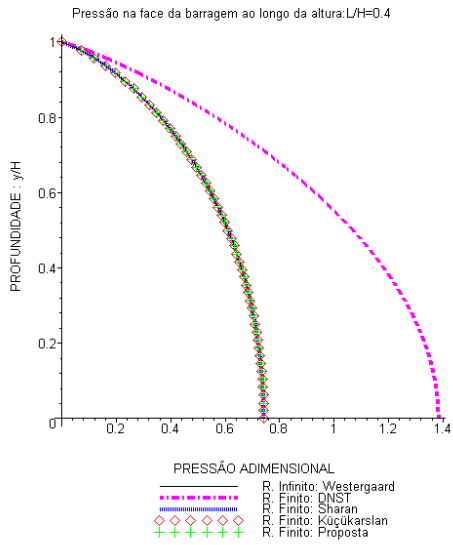
(l)



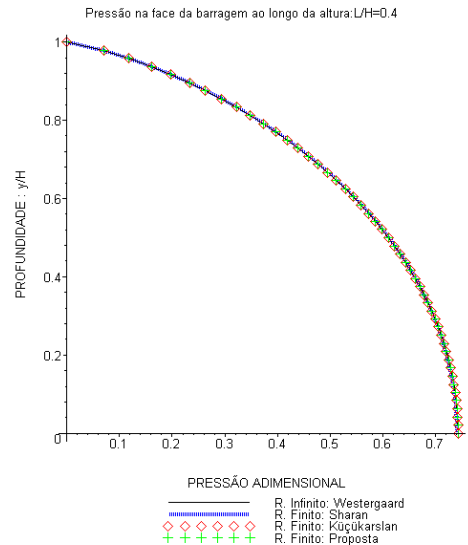
(c)



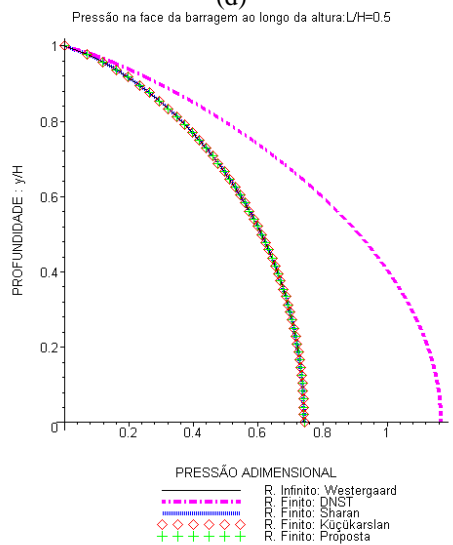
(m)



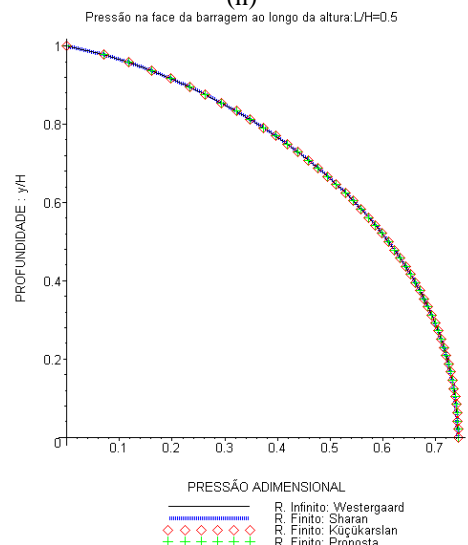
(d)



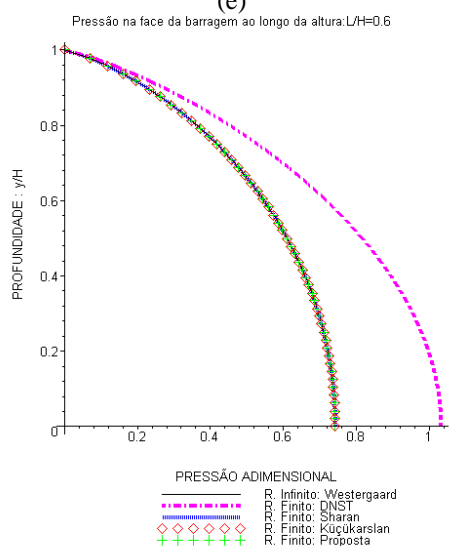
(n)



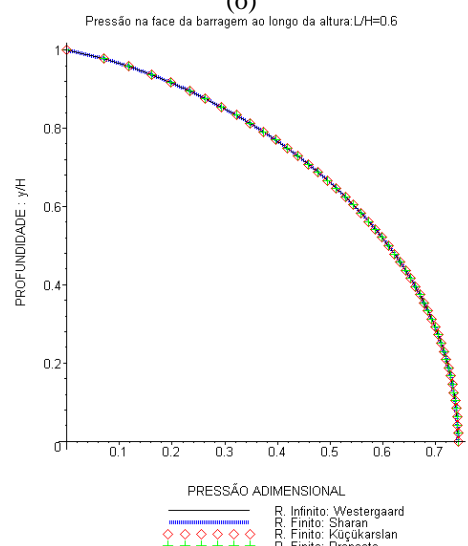
(e)



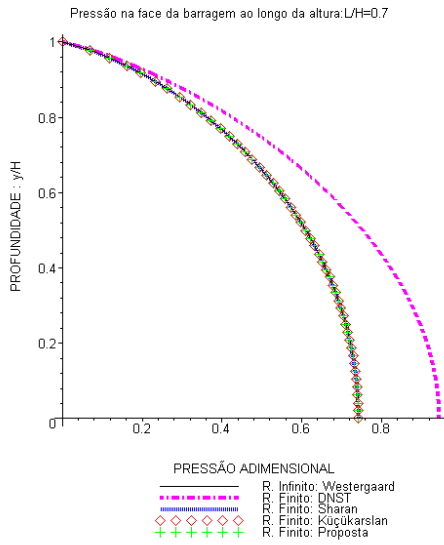
(o)



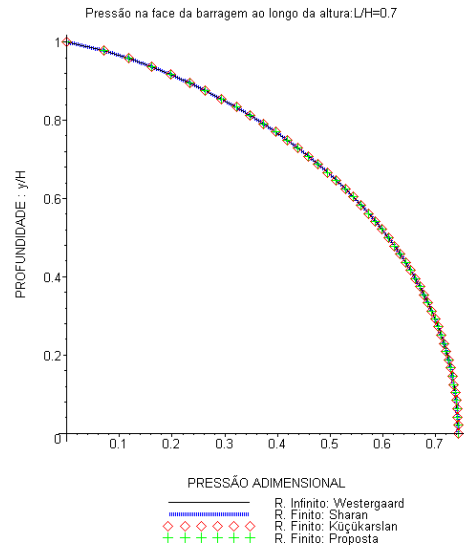
(f)



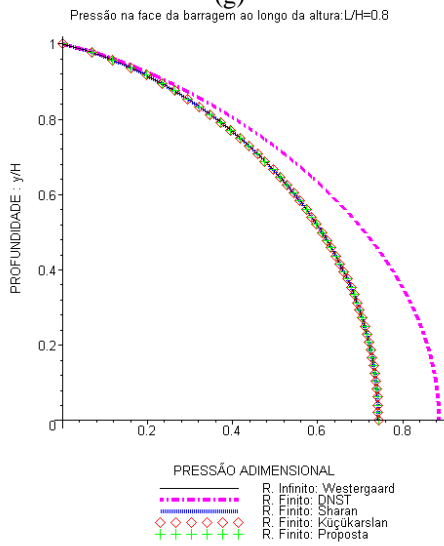
(p)



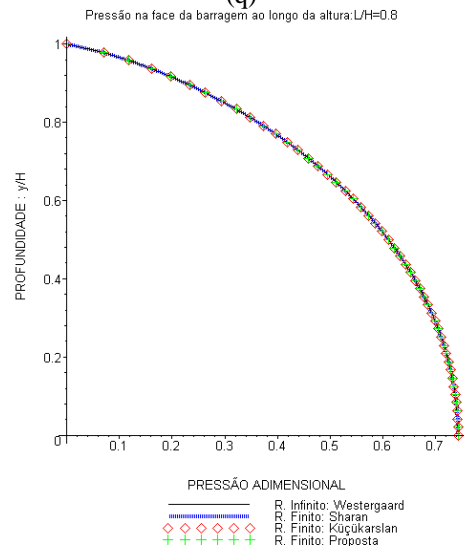
(g)



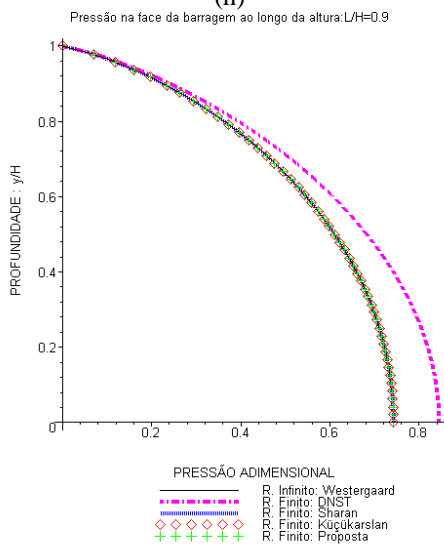
(q)



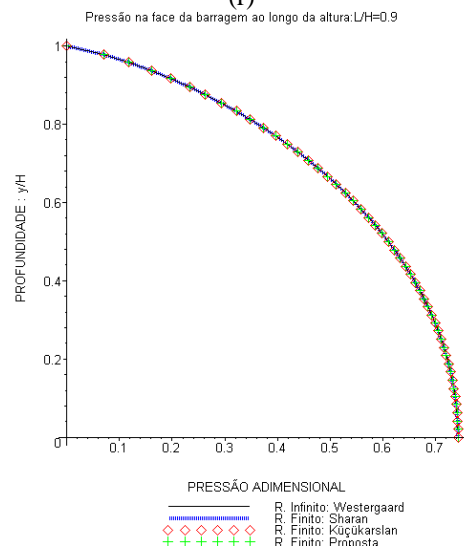
(h)



(r)



(i)



(s)

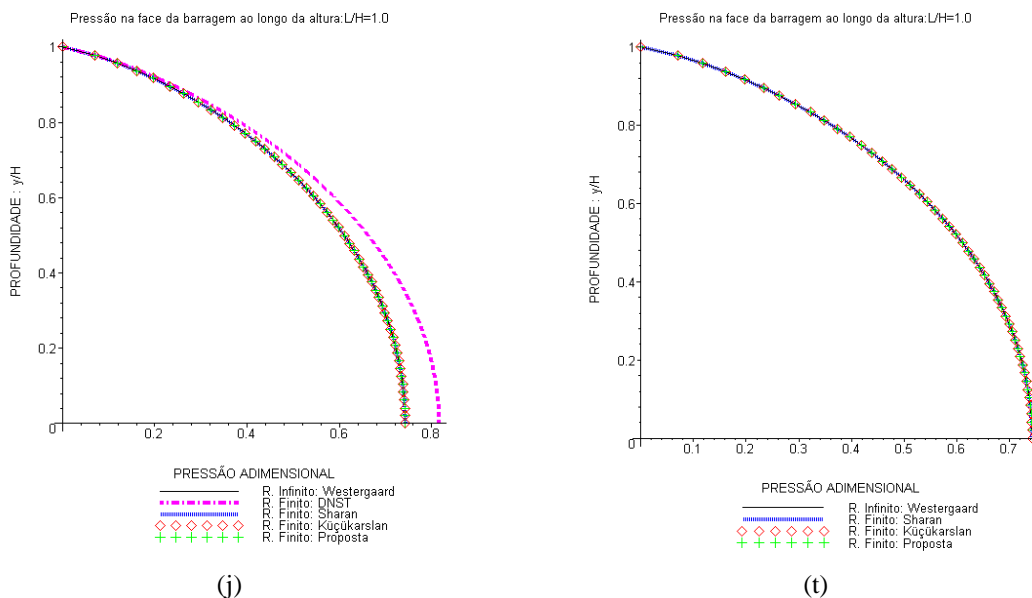


Figura 2.10 - Pressão adimensional na face da barragem ao longo da altura do reservatório para diversas posições da superfície de truncamento – (a), (b), (c), (d), (e), (f), (g), (h), (i), (j): solução DNST presente; e (k), (l), (m), (n), (o), (p), (q), (r), (s), (t): mesma representação anterior, mas com a solução DNST ausente.

Os gráficos a seguir (Figura 2.11), comparam a distribuição da pressão no fundo do reservatório de acordo com as condições de contorno adotadas nas superfícies de truncamento.

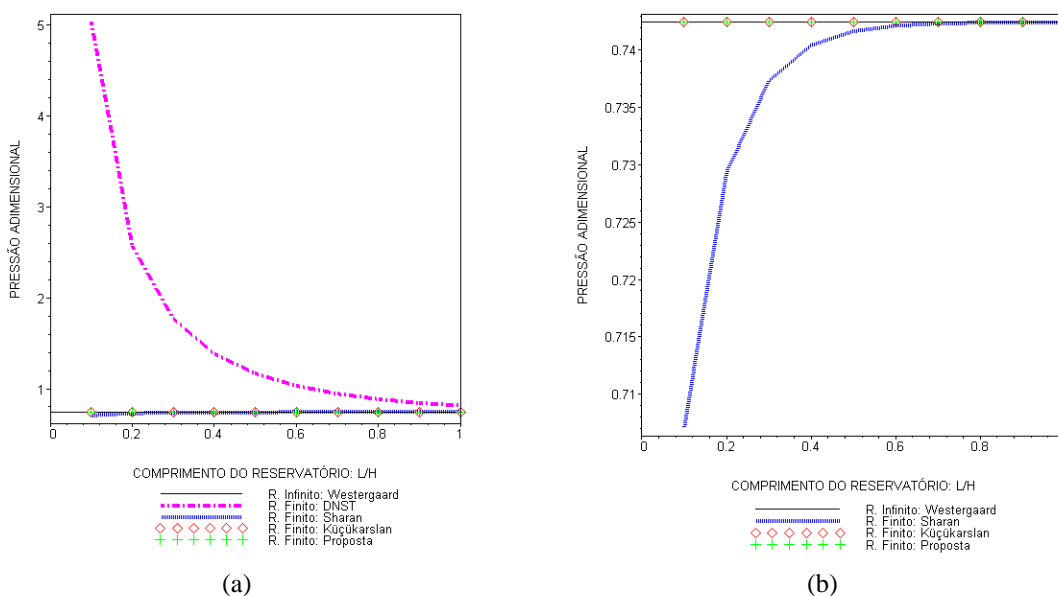


Figura 2.11 - Pressão adimensional na face e no fundo da barragem ao longo do comprimento do reservatório para diversas posições da superfície de truncamento – (a) solução DNST presente, e (b) solução DNST ausente.

A partir dos resultados obtidos nesta aplicação numérica, alguns comentários e conclusões podem ser evidenciados:

A técnica de separação de variável aplicada à equação de Laplace para a análise das pressões hidrodinâmicas gerada pelo movimento de uma estrutura num domínio fluido infinito e incompressível, com as condições de contorno estudadas no nível da superfície de truncamento, resulta em expressões analíticas importantes para a avaliação do campo de pressões hidrodinâmicas; Equação (2.71), Equação (2.85), Equação (2.99) e Equação (2.113).

As condições de contorno na superfície de truncamento representam condições limites aplicadas de forma apropriada numa seção finita do reservatório de modo a reproduzir com precisão o campo de pressões hidrodinâmicas no domínio de interesse do fluido, que se teria se o domínio total (infinito) fosse considerado; ou seja, a superfície de truncamento representa o comprimento limite ( $L$ ) de um reservatório finito equivalente ao reservatório infinito na região de interesse (Figura 2.9).

A qualidade dos resultados obtidos pelas condições de contorno da literatura e pela condição de contorno proposta pelo autor ficou evidenciada ao analisarem-se as pressões hidrodinâmicas numa barragem rígida de interface vertical com o fluido. Encontrou-se que os resultados com a condição de contorno DNST e com a condição de Sharan, convergiram à solução exata à medida que o comprimento dos reservatórios finitos equivalentes foi aumentado (Tabela 2.4, Figura 2.10 e Figura 2.11), todavia a condição DNST foi de convergência muito mais lenta e para altos valores de  $L/H$ .

Entre as quatro condições de contorno (DNST, Sharan, Küçükarslan e a Proposta) para as superfícies de truncamento bem próximas da estrutura, apenas a condição de contorno DNST não forneceu bons resultados, quando comparadas às demais; Tabela 2.4, Figura 2.10 e Figura 2.11.

A condição de contorno de Küçükarslan e a condição de contorno proposta correspondem às condições de contorno exatas na superfície de truncamento no domínio infinito de um fluido incompressível, e fornecem concomitantemente à solução exata do campo de pressões hidrodinâmicas no domínio truncado (ver: Tabela 2.4, Figura 2.10 e Figura 2.11).



Para uma relação  $L/H = 1$ , praticamente todas as soluções fornecem resultados de precisão suficiente para os problemas de Engenharia.

## 2.4 - ESTUDO DOS EFEITOS CONSERVATIVOS E DISSIPATIVOS NO SISTEMA BARRAGEM-RESERVATÓRIO CONSIDERANDO A DISSIPAÇÃO DE ONDAS DE SUPERFÍCIE LIVRE NO RESERVATÓRIO

### 2.4.1 - Introdução

Westergaard em 1933, não considerando o efeito das ondas de superfície livre, desenvolveu uma solução analítica exata em séries para a equação de Laplace que representa o problema (Figura 2.12). Ainda sem considerar os efeitos das ondas de superfície livre, os trabalhos realizados por Sharan em 1985 e Kuçükarşlan em 2003, através do Método dos Elementos Finitos, e Silva & Pedroso em 2005c, pela Técnica de Separação de Variável, apresentam soluções para a equação de Laplace utilizando uma superfície de truncamento a uma certa distância da estrutura no domínio infinito do fluido incompressível.

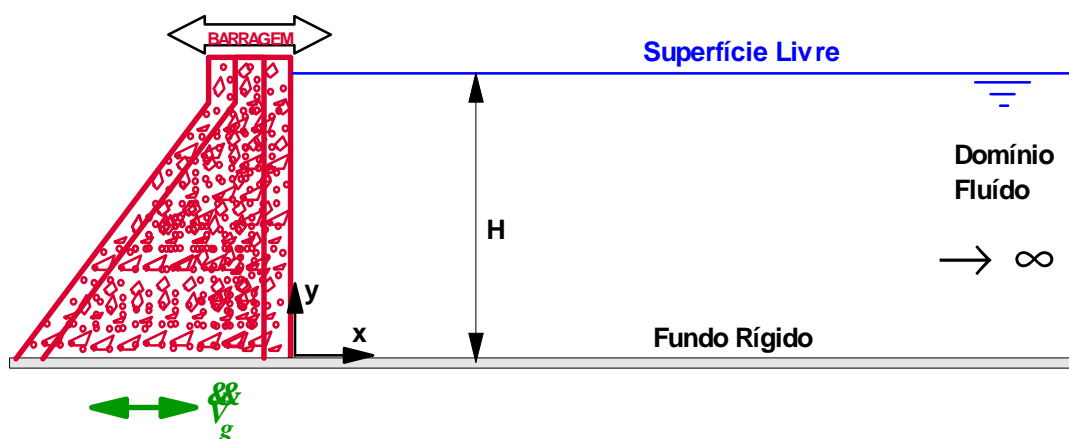


Figura 2.12 - Esquema da interação fluido-estrutura.

Azevedo em 1991 utilizou o Método dos Elementos de Contorno para estudar a propagação de ondas de superfície. Trindade em 2003 deu continuação ao trabalho de Azevedo acrescentando um módulo de geração e propagação de ondas em canais experimentais por meio de batedores do tipo pistão ou por meio de batedores do tipo “flap”.

Esta seção apresenta um estudo analítico da equação de Laplace, no campo dos números complexos. Através da linearização da condição de contorno de superfície livre com ondas de gravidade, determina-se o campo de pressões hidrodinâmicas, na forma complexa, gerado pelo movimento de corpo rígido da barragem. São determinados também os efeitos conservativos e dissipativos da força que atua na face da estrutura em função da dissipação de ondas de superfície livre considerando sua não reflexão no infinito.

#### 2.4.2 - Formulação analítica para a pressão hidrodinâmica no plano complexo

Considerando o fluido incompressível e não viscoso, a pressão hidrodinâmica  $p(x,y)$  no reservatório que resulta do movimento de uma estrutura submersa satisfaz a equação de Laplace (Lamb, 1945):

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \quad (2.114)$$

As condições de contorno são baseadas nas seguintes suposições adicionais:

- a) O domínio do fluido se estende até o infinito e seu movimento é bidimensional.
- b) A interface fluido-estrutura é vertical.
- c) A estrutura submersa é rígida; sua altura não é menor do que a profundidade do fluido; e ela vibra na direção normal da interface fluido-estrutura.
- d) O fundo do domínio fluido é rígido e horizontal.

Considerando-se ainda os efeitos das ondas de superfície, e sua não reflexão no infinito, têm-se as seguintes condições de contorno:

No fundo do reservatório ( $y = 0$ ):  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ ;

Na superfície livre ( $y = H$ ):  $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{w^2}{g} p$ ; linearizada e no domínio da frequência.

Na interface fluido-estrutura ( $x = 0$ ):  $\frac{\partial p}{\partial x} = -r_f \frac{w^2}{g} X = r_f w^2 X$ ; pressão linear.

Reservatório de domínio infinito ( $x \rightarrow \infty$ ):  $p = 0$ ; não reflexão no infinito das ondas de superfície livre.

$\frac{g}{g}$  corresponde à amplitude da aceleração do terremoto na base da barragem que é animada de um movimento harmônico de translação com amplitude  $X$  e frequência  $w$ . O movimento do fluido é suposto acontecer no plano  $xy$ , e  $g$  corresponde à aceleração da gravidade.

Seja a expressão para o campo de pressões hidrodinâmicas  $p(x, y)$  procurado. Aplicando-se a técnica de separação de variável, tem-se:

$$p(x, y) = F(x)G(y) \quad (2.115)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = F'(x)G(y) & ; & \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = F''(x)G(y) \\ \frac{\partial p}{\partial y} = F(x)G'(y) & ; & \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = F(x)G''(y) \end{cases} \quad (2.116)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 p &= 0 \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} &= 0 \quad \therefore \frac{F''}{F} + \frac{G''}{G} = 0 \end{aligned} \quad (2.117)$$

$$\frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G} = K \quad \therefore \begin{cases} G'' + KG = 0 \\ F'' - KF = 0 \end{cases} \quad (2.118)$$

Para a equação  $G'' + K^2 G = 0 \quad \therefore \quad \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + K^2 G = 0$ :

Se  $K$  é real, encontra-se na direção  $y$ :

$$G(y) = A \operatorname{sen}(k_n y) + B \cos(k_n y)$$

Usando a condição de contorno  $i) \frac{\partial}{\partial y} p(x, y)|_{y=0} = 0$ , tem-se:

$$F(x) [A k_n \cos(k_n 0) - B k_n \operatorname{sen}(k_n 0)] = 0 \Rightarrow A = 0$$

Logo:

$$G_n(y) = B_n \cos(k_n y) \quad (2.119)$$

Usando a condição de contorno ii)  $\frac{\partial}{\partial y} p(x, y)|_{y=H} = \frac{w^2}{g} p$ , tem-se:

$$F(x) [-B_n k_n \sin(k_n H)] = \frac{w^2}{g} F(x) [B_n \cos(k_n H)]$$

Assim:

$$-(k_n H) \operatorname{tg}(k_n H) = \frac{w^2 H}{g} \quad (2.120)$$

Se  $K$  é imaginário, encontra-se para a solução  $i k_0$  (com  $k_0$  real):

$$\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} - K_0^2 G = 0$$

$$G(y) = A \operatorname{senh}(k_0 y) + B \operatorname{cosh}(k_0 y)$$

Usando a condição de contorno i)  $\frac{\partial}{\partial y} p(x, y)|_{y=0} = 0$ , tem-se:

$$F(x) [A k_0 \operatorname{cosh}(k_0 0) + B k_0 \operatorname{sinh}(k_0 0)] = 0 \Rightarrow A = 0$$

Logo:

$$G_0(y) = B_0 \operatorname{cosh}(k_0 y) \quad (2.121)$$

Usando a condição de contorno ii)  $\frac{\partial}{\partial y} p(x, y)|_{y=H} = \frac{w^2}{g} p$ , tem-se:

$$F(x) [B_0 k_0 \operatorname{sinh}(k_0 H)] = \frac{w^2}{g} F(x) [B_0 \operatorname{cosh}(k_0 H)]$$

Assim:

$$(k_0 H) \operatorname{tgh}(k_0 H) = \frac{w^2 H}{g} \quad (2.122)$$

Para a equação  $F'' - K^2 F = 0 \quad \therefore \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - K^2 F = 0$ :

Se  $K$  é real, encontra-se na direção  $x$ :

$$F(x) = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}$$

Usando a condição de contorno *iv*)  $p(x, y)|_{x=\infty} = 0$ , tem-se:

$$G(y)[C_1 e^{k\infty} + C_2 e^{-k\infty}] = 0 \Rightarrow C_1 = 0, \text{ logo: } F_n(x) = C_n e^{-k_n x}.$$

Usando a condição de contorno *iii*)  $\frac{\partial}{\partial x} p(x, y)|_{x=0} = -r_f \frac{w}{g}$ , em  $P_n(x, y) = G_n(y) F_n(x)$ ,

tem-se:

$$G_n(y)[C_n (-k_n) e^{-k_n \cdot 0}] = -r_f \frac{w}{g}$$

$$\int_0^H G_n^2(y) C_n k_n = \int_0^H r_f \frac{w}{g} G_n(y)$$

$$C_n = r_f \frac{w}{g} \frac{1}{k_n} \frac{\int_0^H G_n(y) dy}{\int_0^H G_n^2(y) dy}$$

Portanto:

$$F_n(x) = r_f \frac{w}{g} \frac{a_n}{k_n} e^{-k_n x}; \text{ com } a_n = \frac{\int_0^H G_n(y) dy}{\int_0^H G_n^2(y) dy} \quad (2.123)$$

Se  $K$  é imaginário, encontra-se para a solução  $ik_0$  (com  $k_0$  real):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + K_0^2 F = 0$$

$$F(x) = C_1 e^{ik_0 x} + C_2 e^{-ik_0 x}$$

Usando a condição de contorno *iv*)  $p(x, y)|_{x=\infty} = 0$ :

$$G(y) [C_1 e^{ik_0 \infty} + C_2 e^{-ik_0 \infty}] = 0 \Rightarrow C_1 = 0, \text{ logo: } F_0(x) = C_0 e^{-ik_0 x}.$$

Usando a condição de contorno *iii*)  $\frac{\partial}{\partial x} p(x, y)|_{x=0} = -r_f \frac{r_g}{g}$ , em  $P_0(x, y) = G_0(y) F_0(x)$ :

$$G_0(y) [C_0 (-i) k_0 e^{-ik_0 \cdot 0}] = -r_f \frac{r_g}{g}$$

$$\int_0^H G_0^2(y) C_0 i k_0 = \int_0^H r_f \frac{r_g}{g} G_0(y)$$

$$C_0 = r_f \frac{r_g}{g} \frac{1}{i k_0} \frac{\int_0^H G_0(y) dy}{\int_0^H G_0^2(y) dy}$$

Portanto:

$$F_0(x) = -i r_f \frac{r_g}{g} \frac{a_0}{k_0} e^{-ik_0 x}; \text{ com } a_0 = \frac{\int_0^H G_0(y) dy}{\int_0^H G_0^2(y) dy} \quad (2.124)$$

Com as equações (2.119) e (2.123) obtidas, obtém-se a Equação (2.125):

$$P_n(x, y) = G_n(y) F_n(x)$$

$$P_n(x, y) = B_n \cos(k_n y) r_f \frac{r_g}{g} \frac{a_n}{k_n} e^{-k_n x}$$

$$P_n(x, y) = r_f \sqrt[2g]{\frac{B_n a_n}{k_n}} e^{-k_n x} \cos(k_n y) \quad (2.125)$$

Com as equações (2.121) e (2.124) obtidas, obtém-se a Equação (2.126):

$$P_0(x, y) = G_0(y) F_0(x)$$

$$P_0(x, y) = B_0 \cosh(k_0 y) (-i) r_f \sqrt[2g]{\frac{a_0}{k_0}} e^{-ik_0 x}$$

$$P_0(x, y) = -i r_f \sqrt[2g]{\frac{B_0 a_0}{k_0}} e^{-ik_0 x} \cosh(k_0 y) \quad (2.126)$$

Em uma representação de forma geral no plano complexo:

$$p(z) = r_f \sqrt[2g]{\left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n a_n}{k_n} e^{-k_n x} \cos(k_n y) - i \frac{B_0 a_0}{k_0} e^{-ik_0 x} \cosh(k_0 y) \right]} \quad (2.127)$$

A Equação (2.127) corresponde à expressão analítica para o cálculo da pressão hidrodinâmica no plano complexo.

Verificação da solução encontrada, Equação (2.127):

$$\nabla^2 p = 0 \quad \therefore \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \quad (2.128)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = r_f \sqrt[2g]{\left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n a_n}{k_n} (-k_n e^{-k_n x}) \cos(k_n y) - i \frac{B_0 a_0}{k_0} (-ik_0 e^{-ik_0 x}) \cosh(k_0 y) \right]} \quad (2.129)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = r_f \sqrt[2g]{\left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n a_n}{k_n} (k_n^2 e^{-k_n x}) \cos(k_n y) - i \frac{B_0 a_0}{k_0} (-k_0^2 e^{-ik_0 x}) \cosh(k_0 y) \right]} \quad (2.130)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = r_f \sqrt{\frac{\rho}{g}} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n a_n}{k_n} e^{-k_n x} (-k_n \operatorname{sen}(k_n y)) - i \frac{B_0 a_0}{k_0} e^{-ik_0 x} (k_0 \operatorname{senh}(k_0 y)) \right] \quad (2.131)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = r_f \sqrt{\frac{\rho}{g}} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n a_n}{k_n} e^{-k_n x} (-k_n^2 \cos(k_n y)) - i \frac{B_0 a_0}{k_0} e^{-ik_0 x} (k_0^2 \cosh(k_0 y)) \right] \quad (2.132)$$

As equações (2.130) e (2.132) são simétricas, ou seja:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \quad (2.133)$$

Satisfazendo, portanto, a equação de Laplace para fluido (incompressível) no plano complexo.

Uma vez estabelecida a expressão para o campo de pressões hidrodinâmicas no plano complexo, Equação (2.127), a força exercida pelo fluido na face da estrutura é:

$$F(z) = - \int_0^H P(0, y) dy$$

$$p(0, y) = r_f \sqrt{\frac{\rho}{g}} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n a_n}{k_n} e^{-k_n 0} \cos(k_n y) - i \frac{B_0 a_0}{k_0} e^{-ik_0 0} \cosh(k_0 y) \right]$$

onde:

$$\frac{B_n a_n}{k_n} = \frac{B_n \int_0^H G_n(y) dy}{k_n \int_0^H G_n^2(y) dy} = \frac{B_n \int_0^H B_n \cos(k_n y) dy}{k_n \int_0^H B_n^2 \cos^2(k_n y) dy} = \frac{1}{k_n} \frac{2 \operatorname{sen}(k_n H)}{\cos(k_n H) \operatorname{sen}(k_n H) + k_n H}$$

$$\frac{B_0 a_0}{k_0} = \frac{B_0 \int_0^H G_0(y) dy}{k_0 \int_0^H G_0^2(y) dy} = \frac{B_0 \int_0^H B_0 \cosh(k_0 y) dy}{k_0 \int_0^H B_0^2 \cosh^2(k_0 y) dy} = \frac{1}{k_0} \frac{2 \operatorname{senh}(k_0 H)}{\cosh(k_0 H) \operatorname{senh}(k_0 H) + k_0 H}$$



Portanto:

$$\begin{aligned}
 p(0, y) &= r_f \sqrt{\frac{g}{g}} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n} \frac{2 \operatorname{sen}(k_n H)}{\cos(k_n H) \operatorname{sen}(k_n H) + k_n H} (1) \cos(k_n y) - \right. \\
 &\quad \left. - i \frac{1}{k_0} \frac{2 \operatorname{senh}(k_0 H)}{\cosh(k_0 H) \operatorname{senh}(k_0 H) + k_0 H} (1) \cosh(k_0 y) \right] \\
 F(z) &= - r_f \sqrt{\frac{g}{g}} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{sen}^2(k_n H)}{k_n^2 (\cos(k_n H) \operatorname{sen}(k_n H) + k_n H)} - i \frac{2 \operatorname{senh}^2(k_0 H)}{k_0^2 (\cosh(k_0 H) \operatorname{senh}(k_0 H) + k_0 H)} \right] \left( \frac{H^2}{H^2} \right) \\
 F(z) &= - r_f \sqrt{\frac{g}{g}} H^2 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{sen}^2(k_n H)}{(k_n H)^3 \left( \frac{\cos(k_n H) \operatorname{sen}(k_n H)}{k_n H} + 1 \right)} - i \frac{2 \operatorname{senh}^2(k_0 H)}{(k_0 H)^3 \left( \frac{\cosh(k_0 H) \operatorname{senh}(k_0 H)}{k_0 H} + 1 \right)} \right] \\
 F(z) &= - r_f \sqrt{\frac{g}{g}} H^2 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{sen}^2(k_n H)}{(k_n H)^3 \left( 1 + \frac{\operatorname{sen}(2k_n H)}{2k_n H} \right)} - i \frac{2 \operatorname{senh}^2(k_0 H)}{(k_0 H)^3 \left( 1 + \frac{\operatorname{senh}(2k_0 H)}{2k_0 H} \right)} \right] \\
 F_0(z) &= \frac{F(z)}{- r_f \sqrt{\frac{g}{g}} H^2} = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{sen}^2(k_n H)}{(k_n H)^3 \left( 1 + \frac{\operatorname{sen}(2k_n H)}{2k_n H} \right)} - i \frac{2 \operatorname{senh}^2(k_0 H)}{(k_0 H)^3 \left( 1 + \frac{\operatorname{senh}(2k_0 H)}{2k_0 H} \right)} \right] \quad (2.134)
 \end{aligned}$$

A Equação (2.134) corresponde à expressão analítica da força hidrodinâmica adimensional ao longo da face da barragem no plano complexo.

### 2.4.3 - Análise e representação gráfica dos resultados

A parte real do coeficiente  $F_0(z)$  apresentado na Equação (2.134), será representada por  $d$ , e a parte imaginária deste mesmo coeficiente será representada por  $b$ , e correspondem, respectivamente, à parte conservativa e à parte dissipativa do efeito do fluido sobre a estrutura (Gibert, 1988). Os termos  $d$  e  $b$  são funções do parâmetro  $\frac{w^2 H}{g}$  de acordo com as equações transcendentais (2.120) e (2.122), respectivamente.

O parâmetro  $\frac{w^2 H}{g}$  envolvido nas equações transcendentais é conhecido como “número de Froude”, e exprime a importância das forças de gravidade em relação às forças de inércia do fluido (Sancho, 2002):  $F_r = \frac{\text{Forças}_{inércia}}{\text{Forças}_{gravidade}} \propto \frac{r L^2 U^2}{r g L^3} \Rightarrow F_r = \frac{U}{\sqrt{g L}}$ , onde  $U$  é uma velocidade característica do campo de fluxo global,  $g$  é a aceleração devido à gravidade, e  $L$  é um comprimento característico da estrutura exposta ao fluido.

O número de Froude também pode ser considerado como a relação de velocidade fluida e velocidade de ondas de superfície, com celeridade de propagação de pequenas perturbações ( $c = \sqrt{g H}$ ), onde  $H$  é a profundidade do reservatório. O termo “número de Froude” homenageia o engenheiro inglês William Froude (1810-1879), que apresentou este parâmetro realizando testes na investigação da resistência de cascos de navio com o uso de modelos (Pedroso, 1982):  $F_r = \frac{U}{c} \Rightarrow F_r = \frac{U}{\sqrt{g H}}$ .

Pode-se determinar ainda o número de Froude por uma relação entre as energias cinética

( $E_C$ ) e potencial ( $E_P$ ) (Hutchinson, 2003):  $F_r = \sqrt{\frac{E_C}{E_P}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} m U^2}{\frac{1}{2} m g H}} \Rightarrow F_r = \frac{U}{\sqrt{g H}}$ .

Segundo Sancho (2002), o número de Froude pode classificar o regime do escoamento em:

$F_r < 1 \Rightarrow$  regime lento: perturbações propagam-se para montante e jusante;

$F_r > 1 \Rightarrow$  regime rápido: perturbações propagam-se para jusante.

No caso em estudo, para o movimento harmônico da onda tem-se  $U = \frac{2p}{T} H = w H$ , com

$T$  e  $w$  correspondendo ao período e a frequência da onda, respectivamente. O número de Froude pode então ser apresentado da seguinte forma:

$$F_r = \frac{U}{\sqrt{g H}} = \frac{w H}{\sqrt{g H}} \Rightarrow F_r^2 = \frac{w^2 H^2}{g H} \therefore F_r^2 = \frac{w^2 H}{g}, \text{ (Gibert, 1988).}$$

Através da utilização das equações (2.120), (2.122) e (2.134) a Tabela 2.5 pode ser formada.

Tabela 2.5 – Determinação de parâmetros envolvidos na força hidrodinâmica.

Número de Froude ao quadrado $F_r^2 = \frac{w^2 H}{g}$	Argumento da parte real $(k_n H)$	Argumento da parte imaginária $(k_0 H)$	Parte conservativa $d$	Parte dissipativa $b$
$10^{-1} \equiv 0,1$	3,1094	0,3216	0,0001	3,1087
0,2	3,0767	0,4627	0,0003	2,1591
0,3	3,0433	0,5767	0,0007	1,7300
0,4	3,0095	0,6778	0,0013	1,4690
0,5	2,9751	0,7717	0,0022	1,2868
0,6	2,9403	0,8611	0,0034	1,1490
0,7	2,9051	0,9476	0,0049	1,0395
0,8	2,8697	1,0324	0,0067	0,9488
0,9	2,8341	1,1163	0,0090	0,8717
$10^0 \equiv 1,0$	2,7984	1,1997	0,0117	0,8048
2	2,4587	2,0653	0,0669	0,4008
3	2,2045	3,0145	0,1547	0,2129
4	2,0430	4,0027	0,2320	0,1241
5	1,9411	5,0005	0,2876	0,0799
6	1,8734	6,0001	0,3268	0,0555
7	1,8260	7,0000	0,3551	0,0408
8	1,7910	8,0000	0,3763	0,0312
9	1,7644	9,0000	0,3927	0,0247
$10^1 \equiv 10$	1,7434	10,0000	0,4057	0,0200
* 3,3	2,1478	3,3088	0,18	0,18

\* ponto de interseção do gráfico da parte real com o gráfico da parte imaginária, ver Figura 2.16.

A Figura 2.13 ilustra a relação gráfica entre a parte real e a parte imaginária da força hidrodinâmica adimensional exercida pelo fluido sobre a estrutura:  $F_0(z) = d - i b$ .

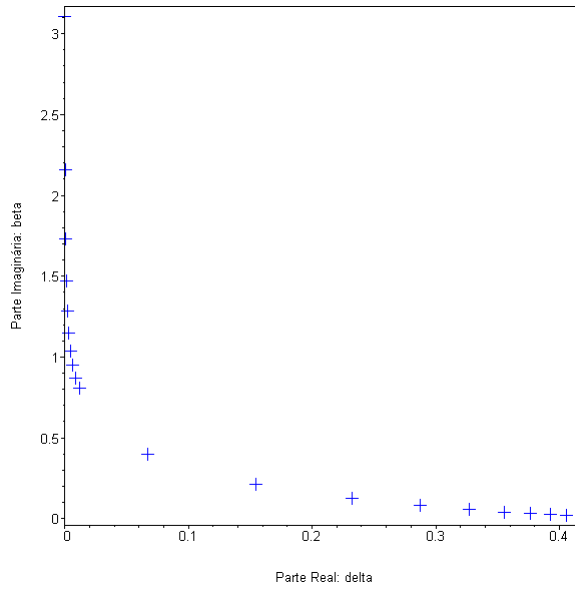
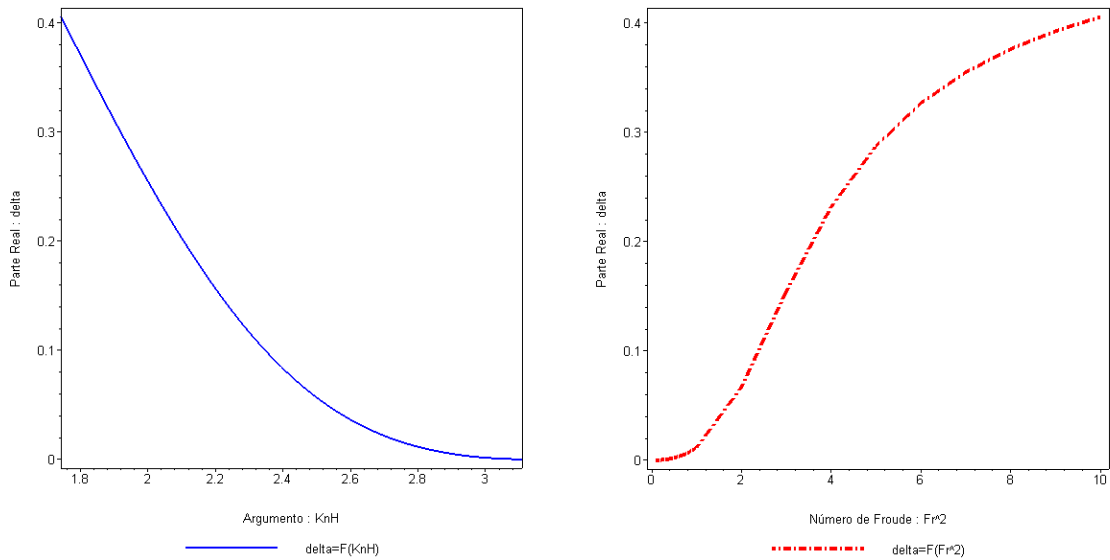


Figura 2.13 - Força hidrodinâmica adimensional exercida pelo fluido sobre a estrutura.

Os gráficos da Figura 2.14 mostram a evolução da parte real ( $d$ ) em função de seu argumento e em função do quadrado do número de Froude, (a) e (b), respectivamente.

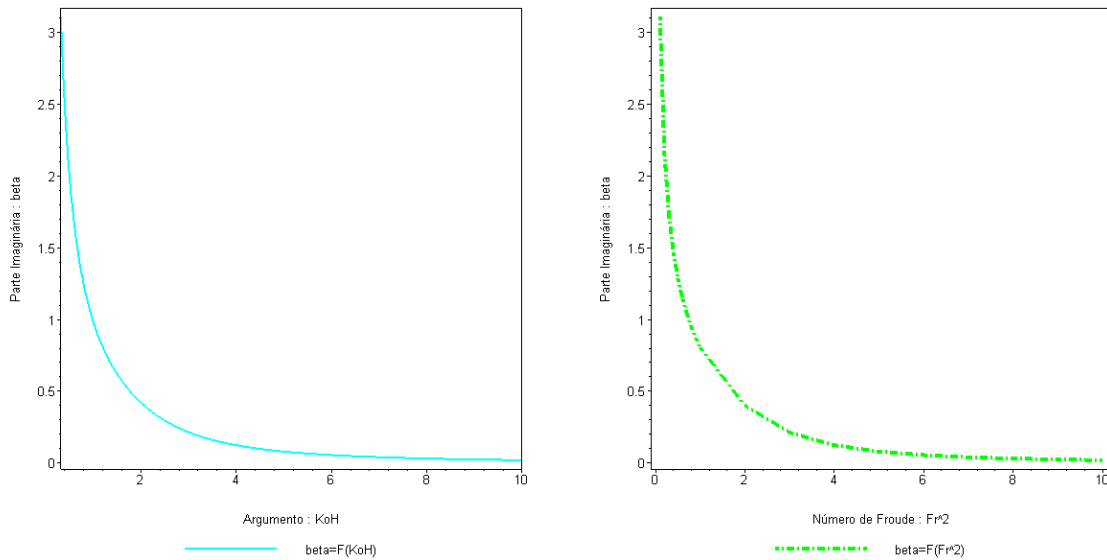


(a) em função do argumento

(b) em função do número de Froude

Figura 2.14 - Parte conservativa do efeito da força do fluido sobre a estrutura.

Os gráficos da Figura 2.15 mostram a evolução da parte imaginária ( $b$ ) em função de seu argumento e em função do quadrado do número de Froude, (a) e (b), respectivamente.



(a) em função do argumento

(b) em função do número de Froude

Figura 2.15 - Parte dissipativa do efeito da força do fluido sobre a estrutura.

O gráfico da Figura 2.16 mostra a evolução da parte real ( $d$ ) e da parte imaginária ( $b$ ) em função do quadrado do número de Froude.

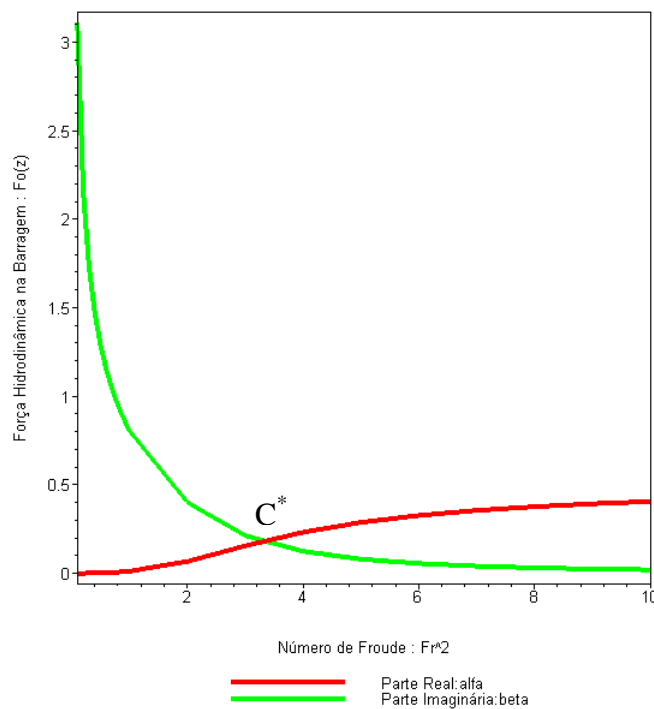


Figura 2.16 - Parte conservativa e dissipativa do efeito da força do fluido sobre a estrutura.

O ponto de interseção das curvas no gráfico da Figura 2.16, será denominado por  $C^*$ . Este ponto não pode ser determinado analiticamente pelo processo convencional de um sistema de duas equações.

A primeira equação vem do fato de que neste ponto a parte conservativa é igual à parte dissipativa e a segunda equação é fornecida pela igualdade do número de Froude ao quadrado ( $C^*$ ) nas equações transcendentais (2.120) e (2.122), assim:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{sen}^2(k_n H)}{(k_n H)^3 \left(1 + \frac{\operatorname{sen}(2k_n H)}{2k_n H}\right)} = \frac{2 \operatorname{senh}^2(k_0 H)}{(k_0 H)^3 \left(1 + \frac{\operatorname{senh}(2k_0 H)}{2k_0 H}\right)} \\ -(k_n H) \operatorname{tg}(k_n H) = (k_0 H) \operatorname{tgh}(k_0 H) \end{array} \right.$$

Este sistema envolvido não possui solução analítica nas variáveis  $(k_n H)$  e  $(k_0 H)$ .

A idéia para se obter o ponto de interseção  $C^*$  é a seguinte: da Figura 2.16 observa-se que  $C^*$  pertence ao intervalo  $[3,4]$ ; percorre-se este intervalo buscando um número que leve a um valor para o argumento  $(k_n \cdot H)$  e para o argumento  $(k_0 \cdot H)$ , através das equações transcendentais (2.120) e (2.122), respectivamente, e, por conseguinte a valores para a parte real  $d$  e para a parte imaginária  $b$  de tal forma que sejam iguais. Assim, para  $C^* = 3,3$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} -(k_n H) \operatorname{tg}(k_n H) = C^* \Rightarrow (k_n H) = 2,1478 \\ (k_0 H) \operatorname{tgh}(k_0 H) = C^* \Rightarrow (k_0 H) = 3,3088 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{sen}^2(k_n H)}{(k_n H)^3 \left(1 + \frac{\operatorname{sen}(2k_n H)}{2k_n H}\right)} \cong \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{sen}^2(2,1478)}{(2,1478)^3 \left(1 + \frac{\operatorname{sen}(2 \times 2,1478)}{2 \times 2,1478}\right)} \cong 0,18 \\ b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{sen}^2(k_0 H)}{(k_0 H)^3 \left(1 + \frac{\operatorname{sen}(2k_0 H)}{2k_0 H}\right)} \cong \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{senh}^2(3,3088)}{(3,3088)^3 \left(1 + \frac{\operatorname{senh}(2 \times 3,3088)}{2 \times 3,3088}\right)} \cong 0,18 \end{array} \right.$$

Portanto, o ponto de interseção é  $C^* = 3,3$ , que corresponde ao  $\operatorname{arc tg}(b/d) = p/4$ .

### 2.4.3.1 - Soluções assintóticas

Para a análise de situações extremas (limites) do número de Froude ( $F_r^2 = \frac{w^2 H}{g}$ ) nas equações transcendentais (2.120) e (2.122), define-se um novo parâmetro ( $\mathfrak{S}$ ) como:

$\mathfrak{S} = \frac{1}{F_r^2}$ . Observa-se em especial que:

Para  $\mathfrak{S} \ll 1$ :

a) Equação transcendental (2.120):  $-(k_n H) \operatorname{tg}(k_n H) = \frac{w^2 H}{g} = \frac{1}{\mathfrak{S}}$

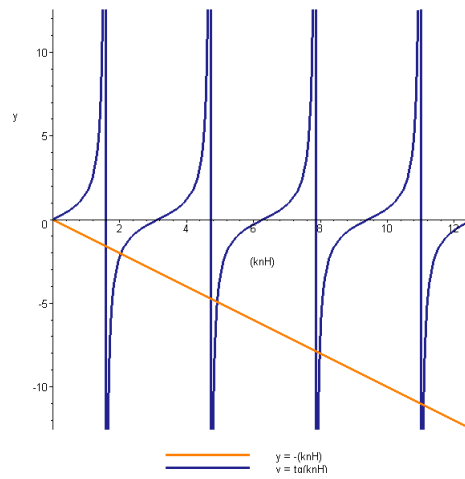


Figura 2.17 - Gráfico da equação transcendental correspondente.

Dos gráficos da Figura 2.17:

$\mathfrak{S} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{\mathfrak{S}} \rightarrow \infty \Rightarrow k_n H \cong (2n-1)\frac{p}{2}$ , substituindo este argumento na parte real da

Equação (2.134), tem-se:

$$d = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{sen}^2(k_n H)}{(k_n H)^3 \left(1 + \frac{\operatorname{sen}(2k_n H)}{2k_n H}\right)} \cong \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{sen}^2\left[(2n-1)\frac{p}{2}\right]}{\left[(2n-1)\frac{p}{2}\right]^3 \left(1 + \frac{\operatorname{sen}[(2n-1)p]}{[(2n-1)p]}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\pm 1)^2}{\left[(2n-1)\frac{p}{2}\right]^3 (1+0)}$$

$$d \cong \frac{16}{p^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \quad \therefore d \cong 0,5428$$

A parte conservativa ( $d$ ) corresponde a um efeito de massa adicional (Gibert, 1988) que pode ser calculado impondo pressão nula na superfície livre como condição de contorno.

Portanto, impondo na superfície livre  $p(x, y)|_{y=H} = 0$ :

$$F(x)G(H) = 0 \Rightarrow G(H) = 0$$

$$B_n \cos(k_n H) = 0 \Rightarrow k_n H = (2n-1)\frac{\pi}{2}$$

b) Equação transcendental (2.122):  $(k_0 H) \operatorname{tgh}(k_0 H) = \frac{w^2 H}{g} = \frac{1}{\mathfrak{S}}$

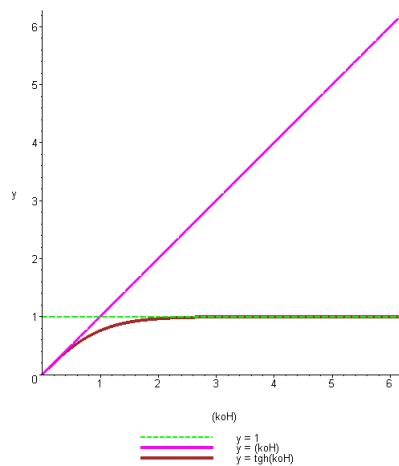


Figura 2.18 - Gráfico da equação transcendental correspondente.

Esta equação transcendental pode ser escrita da seguinte forma:  $(k_0 H)\mathfrak{S} = \frac{1}{\operatorname{tgh}(k_0 H)}$ ;  $\mathfrak{S}$  é inversamente proporcional a  $\operatorname{tgh}(k_0 H)$ , portanto para um  $\mathfrak{S}$  mínimo a  $\operatorname{tgh}(k_0 H)$  terá seu valor máximo, que é igual a um  $(\operatorname{tgh}(k_0 H))|_{máx} = 1$ , ver Figura 2.18, resultando em  $(k_0 H) \cong \frac{1}{\mathfrak{S}}$ . A parte imaginária da Equação (2.134) pode ser apresentada da seguinte forma:

$$b = \frac{2 \operatorname{senh}^2(k_0 H)}{(k_0 H)^3 \left(1 + \frac{\operatorname{senh}(2k_0 H)}{2k_0 H}\right)} = \frac{2 \operatorname{senh}^2(k_0 H)}{(k_0 H)^3 \left(\frac{2k_0 H + \operatorname{senh}(2k_0 H)}{2k_0 H}\right)}$$

$$b = \frac{2}{(k_0 H)^2} \frac{\operatorname{tgh}^2(k_0 H)}{\left(\frac{2k_0 H + 2 \operatorname{senh}(k_0 H) \cosh(k_0 H)}{2 \cosh^2(k_0 H)}\right)} = \frac{2}{(k_0 H)^2} \frac{\operatorname{tgh}^2(k_0 H)}{\left((k_0 H) \sec^2(k_0 H) + \operatorname{tgh}(k_0 H)\right)}$$



$$b = \frac{2}{(k_0 H)^2} \frac{\operatorname{tgh}^2(k_0 H)}{\left( \frac{2k_0 H + 2 \operatorname{senh}(k_0 H) \cosh(k_0 H)}{2 \cosh^2(k_0 H)} \right)} = \frac{2}{(k_0 H)^2} \frac{\operatorname{tgh}^2(k_0 H)}{\left( (k_0 H) \operatorname{sech}^2(k_0 H) + \operatorname{tgh}(k_0 H) \right)}$$

Como:

$$\left\{ (k_0 H) \cong \frac{1}{\mathfrak{S}} \Leftrightarrow \mathfrak{S} \text{ sendo m\u00ednimo} \Rightarrow (k_0 H) \text{ ser\u00e1 m\u00e1ximo}; \text{ logo: } \begin{cases} \operatorname{tgh}(k_0 H) \cong 1 \\ \operatorname{sech}(k_0 H) \cong 0 \end{cases}; \text{ ver}$$

gr\u00e1ficos da Figura 2.19:

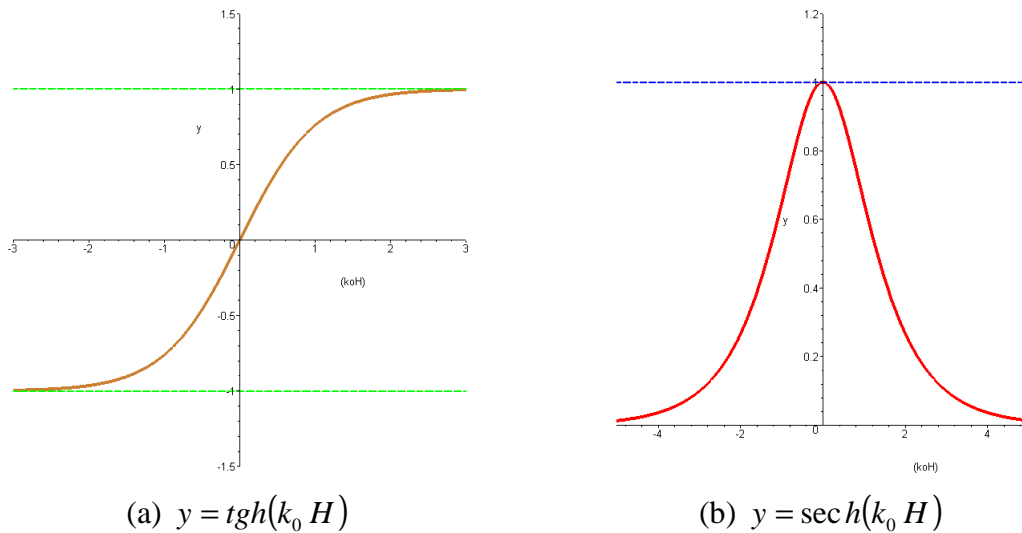


Figura 2.19 - Gr\u00e1fico das fun\u00e7\u00f5es hiperb\u00f3licas envolvidas.

Substituindo estes resultados assint\u00f3ticos da tangente hiperb\u00f3lica e da secante hiperb\u00f3lica em  $b$ , encontra-se:

$$b \cong \frac{2}{\left(\frac{1}{\mathfrak{S}}\right)^2} \frac{(1)^2}{\left(\left(\frac{1}{\mathfrak{S}}\right)0^2 + 1\right)} = \frac{2}{\left(\frac{1}{\mathfrak{S}}\right)^2} 1 \quad \therefore b \cong 2\mathfrak{S}^2, \text{ indicando que, neste caso, a parte}$$

dissipativa ( $b$ ) \u00e9 pequena.

Em resumo, para  $\mathfrak{S} \ll 1$ : regime r\u00e1pido

$$\begin{cases} k_n H \cong (2n-1)\frac{P}{2} \\ (k_0 H) \cong \frac{1}{\mathfrak{S}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \cong 0,5428 \\ b \cong 2\mathfrak{S}^2 \end{cases}; \text{ a fim de se verificar estes resultados s\u00e3o}$$

apresentados na Tabela 2.6 valores num\u00e9ricos para  $d$  e  $b$ , calculados tanto pelas express\u00f5es exatas quanto pelas express\u00f5es assint\u00f3ticas.

Tabela 2.6 - Valores numéricos para  $d$  e  $b$ .

$F_r^2 = \frac{w^2 H}{g}$	$\mathfrak{S} = \frac{1}{F_r^2}$	$d$			$b$		
		Exatos	Assintóticos	Erro Relativo	Exatos	Assintóticos	Erro Relativo
1	1	0,0117	0,5428	4539 %	0,8048	2,0000	147 %
5	0,2	0,2876	0,5428	89 %	0,0799	0,0800	0,13 %
10	0,1	0,4057	0,5428	33 %	0,0200	0,0200	0,00 %

Observa-se que com o aumento do número de Froude o erro relativo percentual diminui, ou seja: as soluções assintóticas aproximam-se das soluções exatas. Os gráficos da Figura 2.20 ilustram estas convergências.

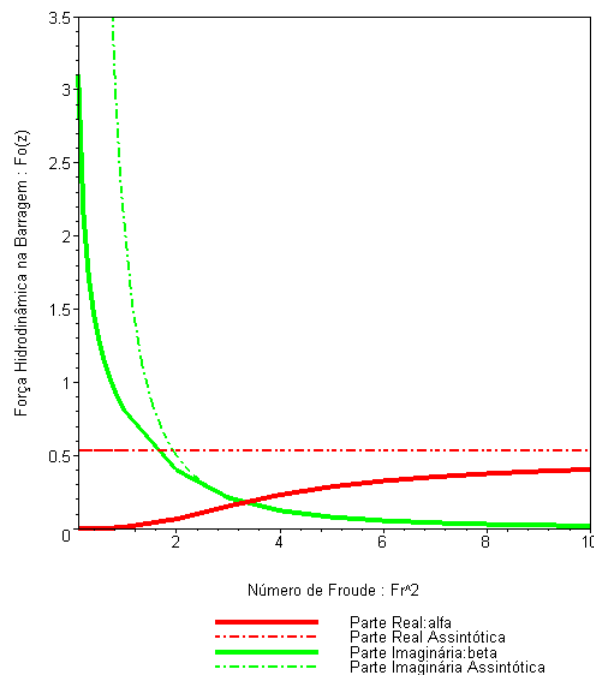


Figura 2.20 – Curvas exatas e assintóticas ( $\mathfrak{S} \ll 1$ ) para parte real e imaginária.

Para  $\mathfrak{S} \gg 1$ :

a) Equação transcendental (2.120):  $-(k_n H) \operatorname{tg}(k_n H) = \frac{w^2 H}{g} = \frac{1}{\mathfrak{S}}$

Dos gráficos da Figura 2.17:

$$\mathfrak{S} \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{\mathfrak{S}} \rightarrow 0 \Rightarrow k_n H \cong n\pi - \frac{1}{\mathfrak{S} n\pi}$$

Substituindo este argumento na parte real da Equação (2.134), apresentada na forma:

$$d = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{sen}^2(k_n H)}{(k_n H)^3 \left(1 + \frac{\operatorname{sen}(2k_n H)}{2k_n H}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \operatorname{sen}^2(k_n H)}{(k_n H)^2 (2k_n H + \operatorname{sen}(2k_n H))}, \text{ resulta em:}$$

$$d \cong \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \operatorname{sen}^2 \left[ np - \frac{1}{\mathfrak{I} np} \right]}{\left( np - \frac{1}{\mathfrak{I} np} \right)^2 \left\{ 2 \left( np - \frac{1}{\mathfrak{I} np} \right) + \operatorname{sen} \left[ 2 \left( np - \frac{1}{\mathfrak{I} np} \right) \right] \right\}}, \text{ usando as propriedades de}$$

adição de arcos da trigonometria:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(knH) = \operatorname{sen} \left( np - \frac{1}{\mathfrak{I} np} \right) = \operatorname{sen}(np) \cos \left( \frac{1}{\mathfrak{I} np} \right) - \cos(np) \operatorname{sen} \left( \frac{1}{\mathfrak{I} np} \right) = \pm \operatorname{sen} \left( \frac{1}{\mathfrak{I} np} \right) \\ \operatorname{sen}(2knH) = \operatorname{sen} \left( 2np - \frac{2}{\mathfrak{I} np} \right) = \operatorname{sen}(2np) \cos \left( \frac{2}{\mathfrak{I} np} \right) - \cos(2np) \operatorname{sen} \left( \frac{2}{\mathfrak{I} np} \right) = -\operatorname{sen} \left( \frac{2}{\mathfrak{I} np} \right) \end{cases}$$

$$\text{Então } d \cong \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \left[ \pm \operatorname{sen} \left( \frac{1}{\mathfrak{I} np} \right) \right]^2}{\left( np - \frac{1}{\mathfrak{I} np} \right)^2 \left[ 2 \left( np - \frac{1}{\mathfrak{I} np} \right) - \operatorname{sen} \left( \frac{2}{\mathfrak{I} np} \right) \right]}. \text{ Como o argumento } \frac{1}{\mathfrak{I} np} \text{ é}$$

pequeno, têm-se as seguintes aproximações:

$$d \cong \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \left[ \pm \frac{1}{\mathfrak{I} np} \right]^2}{\left( np - \frac{1}{\mathfrak{I} np} \right)^2 \left[ 2 \left( np - \frac{1}{\mathfrak{I} np} \right) - \left( \frac{2}{\mathfrak{I} np} \right) \right]} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4/\mathfrak{I}^2 n^2 p^2}{\left( n^2 p^2 - \frac{2}{\mathfrak{I}} + \frac{1}{\mathfrak{I}^2 n^2 p^2} \right) \left( 2np - \frac{4}{\mathfrak{I} np} \right)}$$

$$d \cong \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4/\mathfrak{I}^2 n^2 p^2}{\left( 2n^3 p^3 - \frac{8np}{\mathfrak{I}} + \frac{10}{\mathfrak{I}^2 np} - \frac{4}{\mathfrak{I}^3 n^3 p^3} \right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4/\mathfrak{I}^2 n^2 p^2}{2\mathfrak{I}^3 n^6 p^6 \left( 1 - \frac{4}{\mathfrak{I} n^2 p^2} + \frac{5}{\mathfrak{I}^2 n^4 p^4} - \frac{2}{\mathfrak{I}^3 n^6 p^6} \right)}$$

$$d \cong \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\mathfrak{I}^2 n^2 p^2} \frac{\mathfrak{I}^3 n^3 p^3}{2\mathfrak{I}^3 n^6 p^6 \left( 1 - \frac{4}{\mathfrak{I} n^2 p^2} + \frac{5}{\mathfrak{I}^2 n^4 p^4} - \frac{2}{\mathfrak{I}^3 n^6 p^6} \right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1} \frac{1}{\mathfrak{I}^2 n^5 p^5 (1 - 0 + 0 - 0)}$$

$$d \cong \frac{1}{\mathfrak{I}^2} \frac{2}{p^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \therefore d \cong 0,0068 \frac{1}{\mathfrak{I}^2}$$

b) Equação transcendental (2.122):  $(k_0 \cdot H) \operatorname{tgh}(k_0 H) = \frac{w^2 H}{g} = \frac{1}{\mathfrak{S}}$

Esta equação transcendental pode ser escrita da seguinte forma:  $(k_0 H) \mathfrak{S} = \frac{1}{\operatorname{tgh}(k_0 H)}$ ;  $\mathfrak{S}$  é inversamente proporcional a  $\operatorname{tgh}(k_0 H)$ , portanto para um  $\mathfrak{S}$  máximo a  $\operatorname{tgh}(k_0 H)$  terá um valor pequeno e aproximadamente igual a seu próprio argumento ( $\operatorname{tgh}(k_0 H) \cong (k_0 H)$ ), ver Figura 2.18, resultando então:  $(k_0 H) \cong \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{S}}}$ .

A parte imaginária da Equação (2.134) pode ser apresentada da seguinte forma:

$$b = \frac{2 \operatorname{senh}^2(k_0 H)}{(k_0 H)^3 \left(1 + \frac{\operatorname{senh}(2k_0 H)}{2k_0 H}\right)} = \frac{2 \operatorname{senh}^2(k_0 H)}{(k_0 H)^3 \left(\frac{2k_0 H + \operatorname{senh}(2k_0 H)}{2k_0 H}\right)}$$

$$b = \frac{2}{(k_0 H)^2} \frac{\operatorname{tgh}^2(k_0 H)}{\left(\frac{2k_0 H + 2 \operatorname{senh}(k_0 H) \cosh(k_0 H)}{2 \cosh^2(k_0 H)}\right)} = \frac{2}{(k_0 H)^2} \frac{\operatorname{tgh}^2(k_0 H)}{\left((k_0 H) \operatorname{sec}^2(k_0 H) + \operatorname{tgh}(k_0 H)\right)}$$

$$b = \frac{2}{(k_0 H)^2} \frac{\operatorname{tgh}^2(k_0 H)}{\left(\frac{2k_0 H + 2 \operatorname{senh}(k_0 H) \cosh(k_0 H)}{2 \cosh^2(k_0 H)}\right)} = \frac{2}{(k_0 H)^2} \frac{\operatorname{tgh}^2(k_0 H)}{\left((k_0 H) \operatorname{sec}^2(k_0 H) + \operatorname{tgh}(k_0 H)\right)}$$

Como:

$$\left\{ (k_0 H) \cong \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{S}}} \Leftrightarrow \mathfrak{S} \text{ sendo máximo} \Rightarrow (k_0 H) \text{ será mínimo} ; \text{ logo: } \begin{cases} \operatorname{tgh}(k_0 H) \cong (k_0 H) \\ \operatorname{sec}^2(k_0 H) \cong 1 \end{cases} \right.$$

ver gráfico da Figura 2.19. Substituindo estes resultados assintóticos da tangente hiperbólica e da secante hiperbólica em  $b$ , encontra-se:

$$b \cong \frac{2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{S}}}\right)^2 \left(\left(\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{S}}}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{S}}}\right)} = \frac{2}{\left(\frac{2}{\sqrt{\mathfrak{S}}}\right)} \therefore b \cong \sqrt{\mathfrak{S}}$$

Neste caso, o comportamento é singular porque a condição de superfície livre para  $\mathfrak{S} \gg 1$  é próxima daquela de um nodo de vazão, o fluido encontra-se então confinado entre duas superfícies horizontais quase fixas (Gibert, 1988).

Em resumo, para  $\mathfrak{S} \gg 1$ : regime lento

$$\begin{cases} k_n H \cong np - \frac{1}{\mathfrak{S} np} \\ (k_0 H) \cong \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{S}}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \cong 0,0068 \frac{1}{\mathfrak{S}^2} \\ b \cong \sqrt{\mathfrak{S}} \end{cases} ; \text{ a fim de se verificar estes resultados são}$$

apresentados na Tabela 2.7 valores numéricos para  $d$  e  $b$ , calculados tanto pelas expressões exatas quanto pelas expressões assintóticas.

Tabela 2.7 - Valores numéricos para  $d$  e  $b$ .

$F_r^2 = \frac{w^2 H}{g}$	$\mathfrak{S} = \frac{1}{F_r^2}$	$d$			$b$		
		Exatos	Assintóticos	Erro Relativo	Exatos	Assintóticos	Erro Relativo
1	1	0,0117	0,0068	42 %	0,8048	1,0000	24 %
0,2	5	0,0003	0,0003	0 %	2,1591	2,2361	3,57 %
0,1	10	0,0001	0,0001	0 %	3,1087	3,1623	1,72 %

Observa-se que com a diminuição do número de Froude o erro relativo percentual diminui, ou seja, as soluções assintóticas aproximam-se das soluções exatas. Os gráficos da Figura 2.21 ilustram estas convergências.

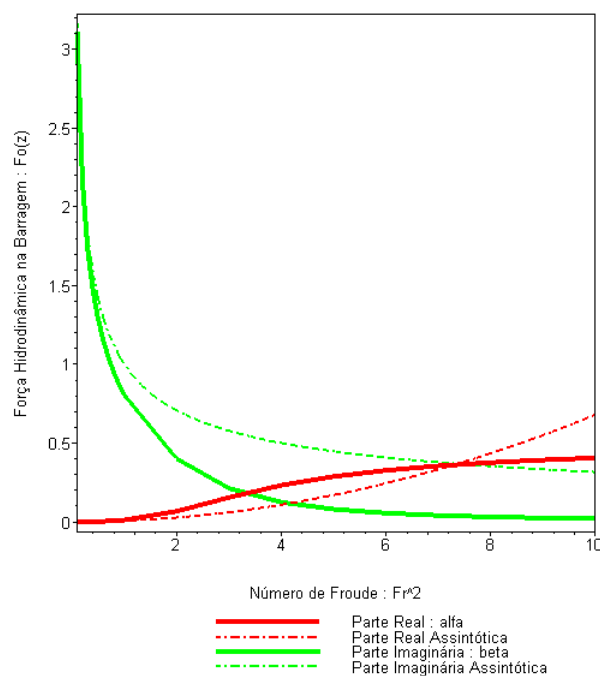


Figura 2.21 - Curvas exatas e assintóticas ( $\mathfrak{S} \gg 1$ ) para parte real e imaginária.

São apresentados, a seguir, gráficos da magnitude e do ângulo de fase da força hidrodinâmica adimensional na face da barragem em função do número de Froude (Figura 2.22). A magnitude e o ângulo de fase de uma função complexa, definidos a seguir, dependem da parte real e da parte imaginária da mesma. Conforme já visto anteriormente, se têm para estes parâmetros os seguintes resultados:

$$\text{Solução Exata: } (d, b) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{sen}^2(k_n H)}{(k_n H)^3 \left(1 + \frac{\operatorname{sen}(2k_n H)}{2k_n H}\right)}, \frac{2 \operatorname{senh}^2(k_0 H)}{(k_0 H)^3 \left(1 + \frac{\operatorname{senh}(2k_0 H)}{2k_0 H}\right)} \right)$$

Soluções Assintóticas:

a) para número de Froude pequenos:  $(d, b) \cong \left( 0,0068 F_r^2, \frac{1}{\sqrt{F_r}} \right)$

b) para número de Froude grandes:  $(d, b) \cong \left( 0,54, \frac{2}{F_r^2} \right)$

A magnitude e o ângulo de fase de uma função complexa são definidos, respectivamente, como:  $|r| = \sqrt{d^2 + b^2}$  e  $q = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{b}{d} \right)$ . Trabalhando-se com a solução exata e com as soluções assintóticas, os seguintes gráficos são gerados:

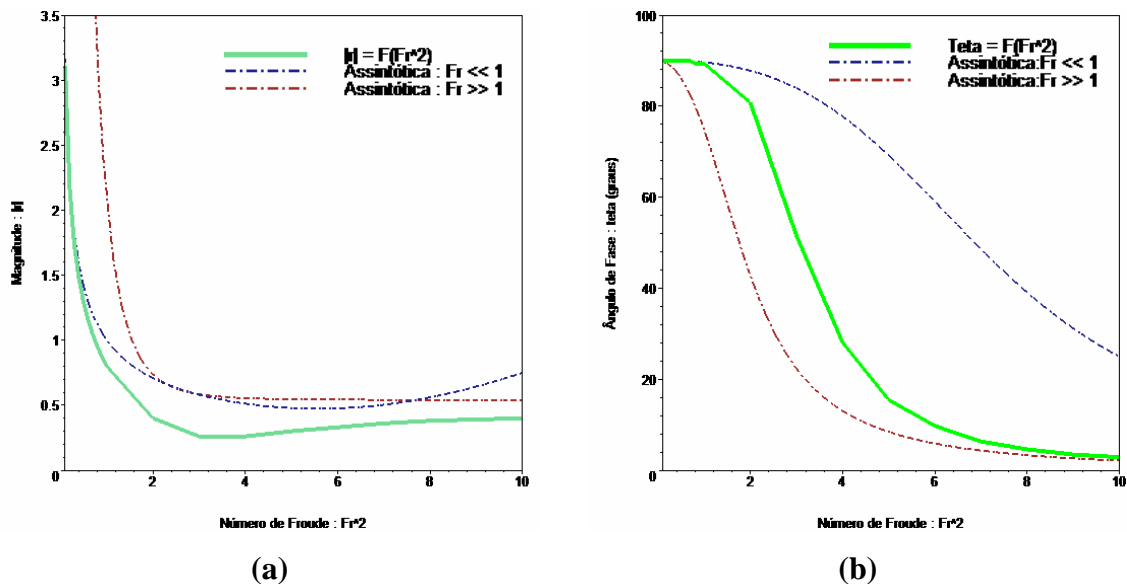


Figura 2.22 – Magnitude (a), e ângulo de fase (b) da força hidrodinâmica adimensional na face da barragem.

A partir dos resultados obtidos neste estudo, alguns comentários e conclusões podem ser evidenciados:

A técnica de separação de variável, para a solução analítica da equação de Laplace proposta para a análise da pressão hidrodinâmica no campo dos números complexos e gerada devido à vibração da barragem na interface de um reservatório de domínio fluido semi-infinito, resulta em uma expressão exata para o campo de pressões hidrodinâmicas; Equação (2.127).

Através da pressão hidrodinâmica complexa, encontrou-se a força exercida pelo fluido na face da barragem, obtendo-se os efeitos conservativos que traduzem os aspectos inerciais da interação barragem-reservatório, e os efeitos dissipativos que traduzem os aspectos de amortecimento (ondas de superfície livre) na interação barragem-reservatório; Equação (2.134).

Os efeitos conservativos e dissipativos do reservatório sobre a barragem, aumentam e diminuem respectivamente, com o crescimento do número de Froude; Tabela 2.5 e Figura 2.16.

O ponto de interseção das curvas no gráfico da Figura 2.16, corresponde ao número de Froude que torna a parte real (efeitos conservativos) igual à parte imaginária (efeitos dissipativos); Tabela 2.5.

Para valores extremos do número de Froude, as soluções assintóticas podem ser facilmente empregadas para a determinação de parâmetros característicos que evidenciam os aspectos inerciais e de amortecimento do sistema reservatório-barragem; Tabela 2.6, Figura 2.20 e Tabela 2.7, Figura 2.21.

A não reflexão no infinito das ondas de superfície livre, num meio fluido semi-infinito, incompressível e não viscoso, é responsável pela dissipação da energia do sistema, se a estrutura vibrante encontra-se “na vizinhança” da superfície livre.

## **3 - BARRAGEM FLEXÍVEL NA INTERFACE DE UM FLUIDO INCOMPRESSÍVEL**

### **3.1 - INTRODUÇÃO**

Neste capítulo resolve-se analiticamente, pela técnica de separação de variável, a equação de Laplace bidimensional para o campo de pressões hidrodinâmicas com as condições de contorno barragem-reservatório admitindo-se que um sismo atue em uma barragem flexível. A partir da consideração da flexibilidade da barragem chega-se a fórmula analítica que permite o cálculo da pressão hidrodinâmica e da massa adicional ao longo da altura na face da barragem e que leva em conta a sua deformada modal.

A expressão analítica das pressões hidrodinâmicas obtida por soluções em séries através da técnica de separação de variável, será considerada a solução exata (de referência). Ela é comparada às soluções numéricas proposta por FERC (2002) e as soluções numéricas obtidas através de modelos numéricos equivalentes criados no software ANSYS (baseado no Método dos Elementos Finitos). As soluções obtidas em termos da pressão hidrodinâmica são comparadas entre si, fato que permite se extrair conclusões importantes sobre o fenômeno em estudo.

A consideração da elasticidade da barragem foi tratada inicialmente por Chopra (1978) em um cálculo manual alternativo (método pseudo-dinâmico) em relação a procedimentos mais gerais, que requerem a utilização do computador. Nesta análise há a simplificação introduzida pelo uso do espectro de resposta, que determina a resposta da estrutura no modo fundamental de vibração para um movimento horizontal do solo (FERC, 2002).

Chopra (1978) observou que a resposta de estruturas de curto período de vibração, tais como as barragens de concreto, submetidas a solicitações sísmicas, é em grande parte influenciada somente pelo modo fundamental de vibração. Em suas análises, Chopra também concluiu que as componentes verticais de aceleração do solo, exercem pouca influência na resposta da estrutura. Em suma, a pressão hidrodinâmica e a massa adicional no problema de interação barragem-reservatório passam a depender do modo fundamental de vibração da barragem.



### 3.2 - FORMULAÇÃO MATEMÁTICA PARA O PROBLEMA

Considerando o fluido incompressível e não viscoso, a pressão hidrodinâmica  $p(x,y)$  que resulta do movimento de uma estrutura submersa satisfaz a equação de Laplace, Equação (3.1), (Lamb, 1945):

A barragem sendo uma estrutura flexível está sujeita a uma aceleração de amplitude ( $a_B$ ) que relacionada à aceleração horizontal do solo de amplitude ( $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ ) pela função de deformada modal da barragem  $f_j(y/H)$ . Tal como no modelo anterior, o campo de pressões hidrodinâmicas dado pela solução da Equação (3.1), é obtido pela técnica de separação de variável com as condições de contorno mostradas na Figura 3.1:

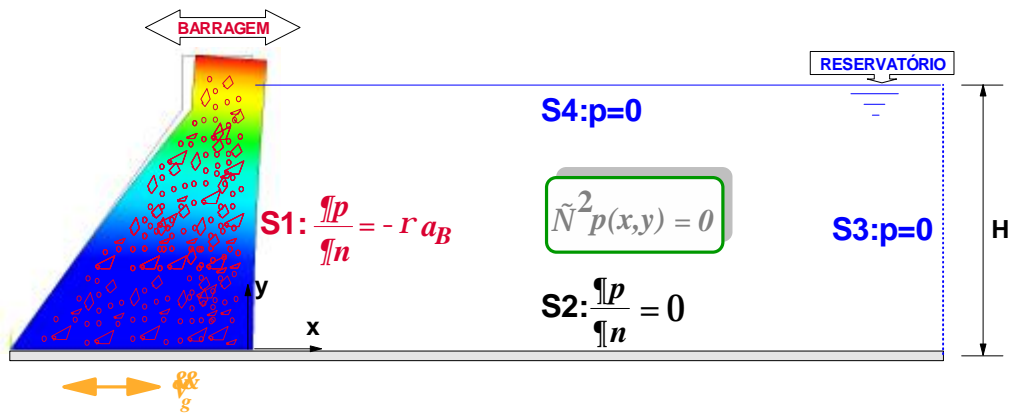


Figura 3.1 – Esquema do problema da interação barragem-reservatório com suas condições de contorno.

Seja, portanto a equação de Laplace para o domínio do fluido no plano  $x$ - $y$ :

$$\nabla^2 p(x, y) = 0 \quad (3.1)$$

As seguintes condições de contorno:

- i) Superfície S2 - Fundo Rígido ( $y = 0$ ):  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$
- ii) Superfície S4 - Superfície Livre ( $y = H$ ):  $p = 0$
- iii) Superfície S1 - Interface Fluido-Estrutura ( $x = 0$ ):  $\frac{\partial p}{\partial x} = -r \left[ \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} f_j(y/H) \right]$

iv) Superfície S3 – Reservatório Infinito ( $x \rightarrow \infty$ ):  $p = 0$

$\frac{v_g}{g}$  corresponde à amplitude da aceleração do terremoto na base da barragem, geralmente é expresso em função de uma fração da gravidade ( $\frac{v_g}{g} = a g$ ).

Seja o campo de pressões hidrodinâmicas  $p(x, y)$ . Aplicando-se a técnica de separação de variável (Pedroso, 2003 e Chakrabarti & Chopra, 1974), tem-se:

$$p(x, y) = F(x)G(y) \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = F'(x)G(y) & ; & \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = F''(x)G(y) \\ \frac{\partial p}{\partial y} = F(x)G'(y) & ; & \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = F(x)G''(y) \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \quad \therefore \frac{F''}{F} + \frac{G''}{G} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G} = K \quad \therefore \begin{cases} G'' + KG = 0 \\ F'' - KF = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Condições de contorno no fundo e na superfície livre do domínio fluido:

$$i) \frac{\partial}{\partial y} p(x, y) \Big|_{y=0} = 0 \quad (3.6)$$

$$ii) p(x, y) \Big|_{y=H} = 0 \quad (3.7)$$

Direção y:

$$\text{para } K = 0 \Rightarrow G'' = 0 \Rightarrow G = a y + b \text{ (sem sentido físico)}$$

$$\text{para } K = -1 \Rightarrow -\frac{G''}{G} = -1$$

$$G'' - 1 G = 0 \quad (3.8)$$

A Equação (3.8) tem como solução a função:  $G(y) = A \operatorname{sen}(\sqrt{-I} y) + B \cos(\sqrt{-I} y)$ .

Usando a condição de contorno i)  $\frac{\partial}{\partial y} p(x, y)|_{y=0} = 0$ , tem-se:

$$A \sqrt{-I} \cos(\sqrt{-I} 0) - B \sqrt{-I} \operatorname{sen}(\sqrt{-I} 0) = 0 \Rightarrow A = 0.$$

Usando a condição de contorno ii)  $p(x, y)|_{y=H} = 0$ , tem-se:

$$\begin{aligned} A \operatorname{sen}(\sqrt{-I} H) + B \cos(\sqrt{-I} H) = 0 &\Rightarrow B \cos(\sqrt{-I} H) = 0 \\ \cos(\sqrt{-I} H) = 0 &\Rightarrow (\sqrt{-I} H) = (2n-1) \frac{P}{2} \therefore \begin{cases} \sqrt{-I} = (2n-1) \frac{P}{2H} \\ -I = (2n-1)^2 \frac{P^2}{4H^2} \end{cases} \end{aligned}$$

Logo:

$$G_n(y) = B_n \cos\left((2n-1) \frac{P}{2H} y\right) \quad (3.9)$$

Condição de contorno na superfície S3:

$$iv) p(x, y)|_{x \rightarrow \infty} = 0 \quad (3.10)$$

Direção  $x$ :

$$\text{para } K = 0 \Rightarrow F'' = 0 \Rightarrow F = cx + d \text{ (sem sentido físico)}$$

$$\text{para } K = -1 \Rightarrow \frac{F''}{F} = -1$$

$$F'' + 1 F = 0 \quad (3.11)$$

A Equação (3.11) tem como solução a função:  $F(x) = C_1 e^{\sqrt{-1} x} + C_2 e^{-\sqrt{-1} x}$ . Usando a condição de contorno iv)  $p(x, y)|_{x \rightarrow \infty} = 0$ , tem-se:

$$G(y)(C_1 e^{\sqrt{-1}\infty} + C_2 e^{-\sqrt{-1}\infty}) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{C_2}{e^{2\sqrt{-1}\infty}} \Rightarrow C_1 = 0$$

Logo,  $F(x) = C_2 e^{-\sqrt{-1}x}$ . Então:

$$F_n(x) = C_n e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2H}x\right)} \quad (3.12)$$

Levando as equações (3.9) e (3.12) na Equação (3.2), tem-se:

$$p(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n e^{-m_n \frac{x}{H}} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) ; \quad m_n = (2n-1)\frac{\pi}{2} \quad (3.13)$$

Condição de contorno na interface fluido-estrutura:

$$iii) \frac{\partial}{\partial x} p(x, y)|_{x=0} = -r \left[ \mathbb{V}_g^{\otimes} f_j(y/H) \right] \quad (3.14)$$

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \left[ \left(-\frac{m_n}{H}\right) e^{-m_n \frac{x}{H}} \right] \right\}_{x=0} = -r \mathbb{V}_g^{\otimes} f_j(y/H) \quad (3.15)$$

$$\int_0^H \sum_{n=1}^{\infty} K_n m_n \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{y}{H}\right) dy = \int_0^H r H \mathbb{V}_g^{\otimes} f_j(y/H) dy \quad \left[ \operatorname{sen}\left(m\pi \cdot \frac{y}{H}\right) \right] \quad (3.16)$$

Usando a propriedade de ortogonalidade da função seno (em séries), tem-se:

$$\frac{H}{2} K_n m_n = r H \mathbb{V}_g^{\otimes} \int_0^H f_j(y/H) \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) dy$$

Logo:

$$K_{n,j} = r \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{1}{m_n} \int_0^H f_j(y/H) \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) dy \quad (3.17)$$

Levando a Equação (3.17) na Equação (3.13), tem-se:

$$p_j(x, y) = r \sqrt{\frac{2}{g}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{j,n}}{m_n} e^{-m_n \frac{x}{H}} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \quad (3.18)$$

$$; m_n = (2n-1) \frac{\pi}{2} \quad ; I_{j,n} = \int_0^H f_j(y/H) \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) dy$$

A Equação (3.18) corresponde à solução exata (em séries) para o cálculo da pressão hidrodinâmica no plano da barragem-reservatório e que considera a participação da deformada modal da barragem através da função  $f_j(y/H)$ .

Uma vez estabelecida a expressão para o campo de pressões, Equação (3.18), encontra-se a equação para a distribuição da força ao longo da altura na face da barragem de acordo com a área tributária adotada,  $F_j(0, y) = \int_0^y p_j(0, y) dy$ . Dividindo esta força obtida pela

aceleração da gravidade ( $g$ ) tem-se a massa adicional associada à face da barragem:

$$M_j(0, y) = \frac{F_j(0, y)}{g}. \text{ Assim:}$$

$$F_j(0, y) = \int_0^y p_j(0, y) dy = \int_0^y \left( r \sqrt{\frac{2}{g}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n} \left[ \int_0^H f_j(y/H) \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) dy \right] \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \right) dy$$

$$F_j(0, y) = r \sqrt{\frac{2}{g}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{j,n}}{m_n} \frac{H}{m_n} \operatorname{sen}\left(m_n \frac{y}{H}\right)$$

$$M_j(0, y) = \frac{F_j(0, y)}{g} = \frac{1}{g} r H \sqrt{\frac{2}{g}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{j,n}}{m_n^2} \operatorname{sen}\left(m_n \frac{y}{H}\right)$$

$$M_j(0, y) = \frac{r \rho g}{g} H 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{j,n}}{m_n^2} \operatorname{sen} \left( m_n \frac{y}{H} \right) \quad (3.19)$$

$$m_n = (2n-1) \frac{P}{2} \quad ; \quad I_{j,n} = \int_0^H f_j(y/H) \cos \left( m_n \frac{y}{H} \right) dy$$

A Equação (3.19) corresponde à solução exata (em séries) da massa adicional, ao longo da altura na face da barragem e que considera a participação da deformada modal da barragem através da função  $f_j(y/H)$ .

### 3.2.1 - Barragem rígida-móvel: modelo de Westergaard

A formulação matemática analítica desenvolvida pela técnica de separação de variável que resulta na Equação (3.18), pode representar também as pressões para o modelo de deformada de corpo rígido para a barragem de Westergaard (1933). Neste modelo, um deslocamento constante e uniforme para a primeira deformada modal,  $f_1(y/H)=1$ , correspondente à mesma aceleração do solo ao longo da altura da barragem conforme ilustra a Figura 3.2:

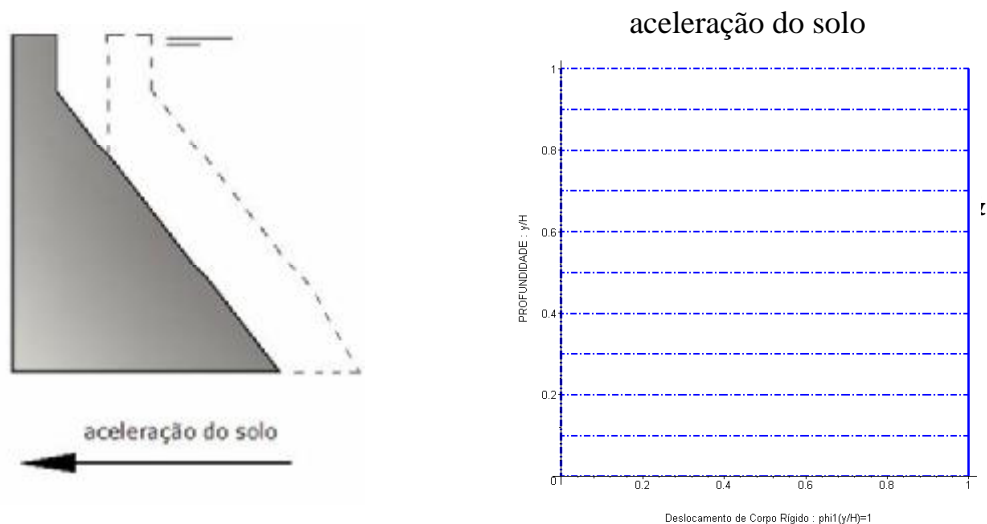


Figura 3.2 - Aceleração constante, e igual à aceleração sísmica de uma fundação infinitamente rígida (Ribeiro, 2006).

Neste caso a integral  $I_{1,n}$ , presente na Equação (3.18), resulta em:

$$I_{1,n} = \int_0^H f_1(y/H) \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) dy = \int_0^H (1) \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) dy = \frac{H}{m_n} \text{sen}\left(m_n \frac{y}{H}\right) \Big|_0^H \quad \therefore I_{1,n} = \frac{H}{m_n} (-1)^{n+1}$$

Substituindo este valor da integral  $I_{1,n}$  dentro do somatório na Equação (3.18), tem-se:

$$p_1(x, y) = r H \sqrt{\frac{2}{g}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} e^{-m_n \frac{x}{H}} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right); \quad m_n = (2n-1) \frac{\pi}{2} \quad (3.20)$$

A Equação (3.20) é a mesma encontrada no capítulo anterior, Equação (2.24), comprovando que a partir desta formulação pode-se encontrar a formulação desenvolvida por Westergaard (1933), ou seja, tem-se aqui uma formulação mais geral que a de Westergaard, que agora passa a ser um caso particular desta formulação.

### 3.2.2 - Barragem flexível: modelo de Chopra

A barragem, que antes foi suposta rígida, tem agora uma resposta de acordo com o modo fundamental de vibração da estrutura (Chopra, 1970), conforme a Figura 3.3. Neste caso torna-se necessário saber que função adotar para representar a primeira deformada modal da estrutura,  $f_1(y/H)$ .

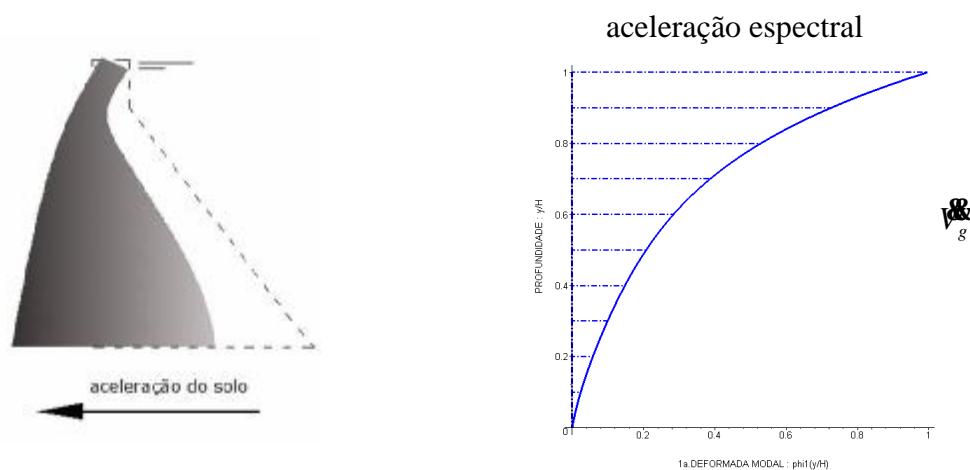


Figura 3.3 - Aceleração variável, de acordo com o modo fundamental de vibração da estrutura (Ribeiro, 2006).

Baseado em resultados experimentais de barragens de concreto com determinada geometria para a seção transversal, Chopra (1978), encontrou-se por interpolação

polinomial nos valores pontuais de deslocamentos na face vertical da barragem a seguinte função de deformada modal (FERC, 2002):

$$f_1(y/H) = 0,35821(y/H) - 0,53236(y/H)^2 + 1,17415(y/H)^3 \quad (3.21)$$

Neste caso a integral  $I_{1,n}$ , presente na Equação (3.18), resulta em:

$$I_{1,n} = \int_0^H f_1(y/H) \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) dy$$

$$I_{1,n} = \int_0^H [0,35821(y/H) - 0,53236(y/H)^2 + 1,17415(y/H)^3] \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) dy$$

$$I_{1,n} = \frac{H}{m_n} \left[ \frac{(-1)^{n+1} (m_n^3 - 5,98018 m_n) - 0,35821 m_n^2 + 7,04490}{m_n^3} \right]$$

Substituindo este valor da integral  $I_{1,n}$  dentro do somatório na Equação (3.18), tem-se:

$$p_1(x, y) = r H \sqrt{\frac{g}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^2} \left[ \frac{(-1)^{n+1} (m_n^3 - 5,98018 m_n) - 0,35821 m_n^2 + 7,04490}{m_n^3} \right] \cdot e^{-m_n \frac{x}{H}} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \quad (3.22)$$

A Equação (3.22) corresponde a expressão analítica para cálculo das pressões hidrodinâmicas no plano barragem-reservatório e que leva em consideração a participação do primeiro modo de vibração da barragem.

### 3.3 - MODELOS NUMÉRICOS EQUIVALENTES E COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS

A formulação numérica utilizada para os problemas de interação fluido-estrutura via método dos elementos finitos resulta em um sistema de equações que usa graus de liberdade em variáveis de deslocamento para a estrutura (barragem), e graus de liberdade em variáveis de pressão para o fluido (reservatório).



### 3.3.1 - Barragem rígida-móvel: modelo numérico equivalente ao modelo analítico de Westergaard

Para se ter uma comparação adequada com o modelo analítico de Westergaard, é criado um modelo numérico equivalente (MEF via ANSYS) para a interação barragem-reservatório, que permite o movimento da barragem na direção horizontal (base da barragem apoiada sobre apoios do 1º gênero), ao mesmo tempo em que se conecta a uma mola de rigidez equivalente a estrutura em questão, distribuída ao longo da altura da barragem. O conjunto se transforma num sistema massa-mola de um grau de liberdade, de acordo com a Figura 3.4.

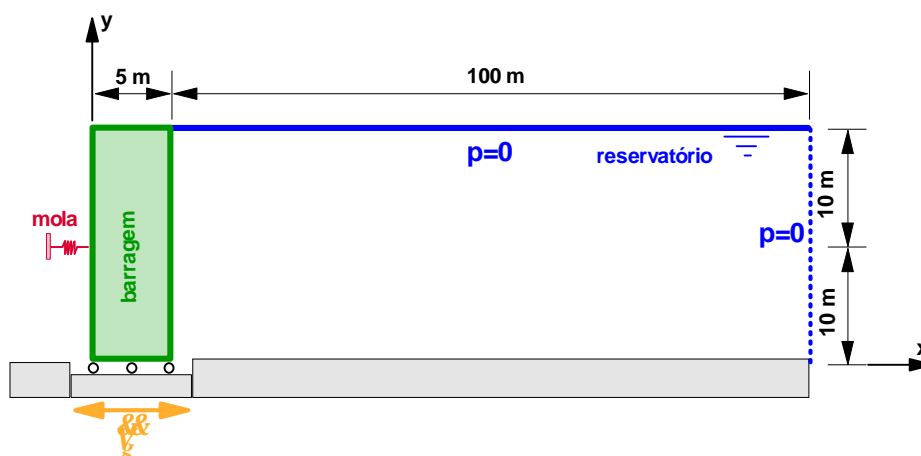


Figura 3.4 – Modelo numérico equivalente a Westergaard: MEF via ANSYS.

Os parâmetros físicos dos materiais envolvidos neste problema são os seguintes:

Barragem:

módulo de elasticidade:  $E_B = 2,1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$

rigidez:  $K_B = 80\,000 \text{ N/m}$

densidade:  $r_B = 7\,800 \text{ kg/m}^3$

coeficiente de Poisson:  $u_B = 0,3$

massa:  $m_B = r_B \text{ vol} = 7\,800(5 \times 20 \times 1) = 780\,000 \text{ kg}$

Reservatório:

densidade:  $r_f = 1\,000 \text{ kg/m}^3$

velocidade do som:  $c_f = 1\,500 \text{ m/s}$

Mola:

rigidez:  $K_{eq} = K_B = 80\,000\text{ N/m}$

A rigidez da mola foi escolhida de forma que a relação de rigidez ( $a$ ) fique na faixa incompressível e o modelo numérico (via ANSYS) que considera a compressibilidade do fluido possa se aproximar mais do modelo analítico considerado, que é governado pela equação de Laplace (fluido incompressível).

Relação de rigidez:

$$a = \frac{\text{rigidez da estrutura}}{\text{rigidez do fluido}} = \frac{K_B}{r_f c^2 S_l / L}$$

onde os parâmetros ( $c, S_l, L$ ) correspondem à velocidade do som no fluido, área de interface fluido-estrutura e comprimento do reservatório, respectivamente.

$$a = \frac{80000}{1000 \times 1500^2 \times (1 \times 20) / 100} = 1,77 \times 10^{-4} .$$

Quando à rigidez da estrutura é desprezível se comparada à rigidez do fluido ( $a \ll 1$ ), observa-se um comportamento típico de fluido-estrutura com a presença do modo de massa adicional, Moraes (2000), caracterizado pela incompressibilidade do fluido.

Na discretização dos domínios sólido e fluido, as seguintes malhas de elementos finitos se mostraram suficientes para a convergência da solução:

Barragem:

elemento finito: *PLANE 42*

número de divisões na horizontal:  $N_x = 6$

número de divisões na vertical:  $N_y = 30$

Reservatório:

elemento finito: *FLUID 79*

número de divisões na horizontal:  $N_x = 60$ ; com grau 4 de refinamento

número de divisões na vertical:  $N_y = 30$

Mola:

elemento finito: *COMBIN 14*

número de divisões na horizontal:  $N_x = 1$

Para melhor compreensão do comportamento dinâmico do problema, que é um caso transiente, algumas verificações preliminares em vibrações livres são realizadas. Tais verificações justificam o uso das malhas de elementos finitos que são validadas com resultados analíticos (desacopladas e acopladas) no domínio da frequência.

I- Análise em Vibração Livre: verificações preliminares

a) problema desacoplado

a.1- solução analítica

Barragem: sistema massa-mola

$$f_1 = \frac{1}{2p} \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_B}} = \frac{1}{2p} \sqrt{\frac{80000}{780000}} = 0,05097 \text{ Hz}$$

Reservatório: cavidade acústica fechada-aberta em ambas as direções

$$f_{m,n} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{2m+1}{2L_x}\right)^2 + \left(\frac{2n+1}{2L_y}\right)^2}$$

$$f_{0,0} = 19,12 \text{ Hz} \quad f_{1,0} = 21,87 \text{ Hz} \quad f_{2,0} = 26,52 \text{ Hz} \quad f_{3,0} = 32,26 \text{ Hz} \quad f_{4,0} = 38,61 \text{ Hz}$$

$$f_{5,0} = 45,31 \text{ Hz} \quad f_{6,0} = 52,23 \text{ Hz} \quad f_{0,1} = 56,37 \text{ Hz} \quad f_{1,1} = 57,36 \text{ Hz}$$

a.2- solução numérica: MEF via ANSYS

Barragem: A Figura 3.5 ilustra o modelo numérico utilizado com os resultados obtidos para as cinco primeiras frequências.

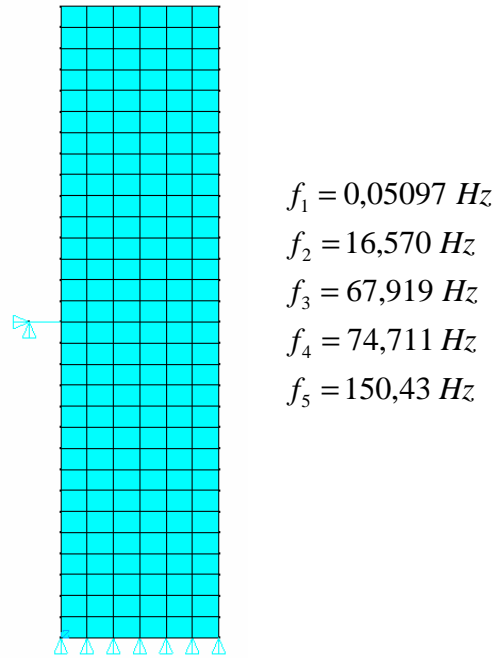


Figura 3.5 – Modelo numérico para a barragem: MEF via ANSYS.

Reservatório: A Figura 3.6 ilustra o modelo numérico utilizado com os resultados obtidos para as dez primeiras frequências.

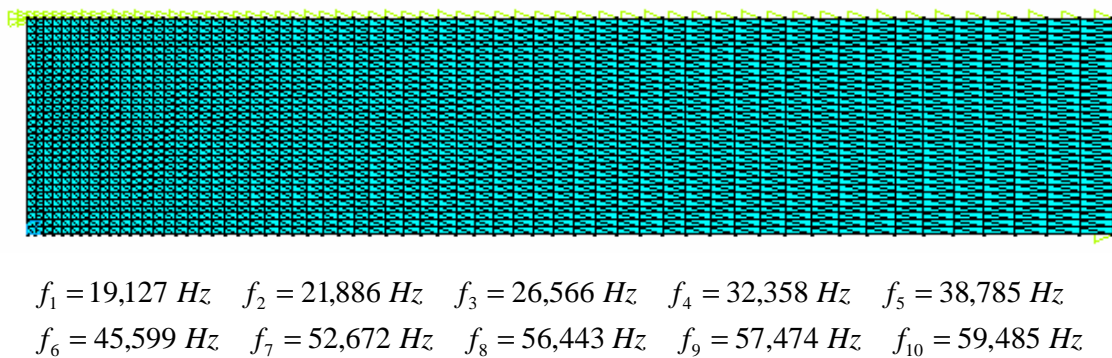


Figura 3.6 – Modelo numérico para o reservatório: MEF via ANSYS.

Percebe-se a boa concordância entre as soluções analítica e numérica em vibração livre para o caso desacoplado dos dois meios.

b) problema acoplado

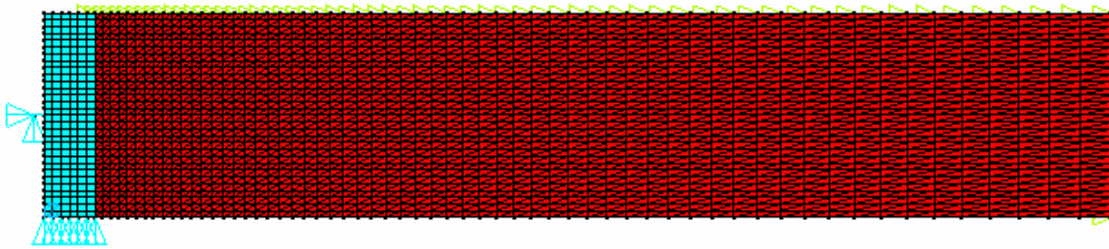
b.1- solução analítica

A massa adicional de fluido associada à face da barragem pode ser encontrada através da Equação (3.19), admitindo-se  $\rho_g = 1 \text{ g}$ , encontra-se um coeficiente de massa adicional:

$$M_1(0, y/H) = \frac{r H^2 \rho_g}{g} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^3} \quad \therefore \quad \frac{M(0, y/H)}{r_f H_f^2 \cdot 1m} = 0,5428$$

b.2- solução numérica: MEF via ANSYS

A Figura 3.7 ilustra o modelo numérico utilizado com os resultados obtidos para as dez primeiras freqüências acopladas.



$$f_1 = 0,045091 \text{ Hz} \quad f_2 = 15,566 \text{ Hz} \quad f_3 = 19,690 \text{ Hz} \quad f_4 = 22,547 \text{ Hz} \quad f_5 = 27,117 \text{ Hz}$$

$$f_6 = 32,805 \text{ Hz} \quad f_7 = 39,154 \text{ Hz} \quad f_8 = 45,909 \text{ Hz} \quad f_9 = 52,939 \text{ Hz} \quad f_{10} = 56,421 \text{ Hz}$$

Figura 3.7 – Modelo numérico para a barragem-reservatório: MEF via ANSYS (problema acoplado).

O sistema massa-mola equivalente para este sistema acoplado, admitindo-se que o efeito da compressibilidade não seja importante para baixas freqüências, é do tipo:

$$[K_{eq} - w_{eq}^2 (m_B + M(0, y/H))] = 0$$

$$M(0, y/H) = \frac{K_{eq}}{(f_1 \cdot 2\pi)^2} - m_B = \frac{80000}{(0,045091 \times 2\pi)^2} - 780000 = 216668 \text{ kg} .$$

Portanto, o coeficiente de massa adicional é:  $\frac{M(0, y/H)}{r_f H_f^2 \cdot 1m} = \frac{216668}{1000 \times 20^2 \times 1m} = 0,5417 .$

Percebe-se a boa concordância entre os coeficientes de massa adicional, calculados pela solução analítica e pela solução numérica, para o problema acoplado.

## II- Análise Transiente: modelo de Westergaard

### a) solução analítica

Através da utilização da Equação (3.20), obtêm-se os valores analíticos para a pressão hidrodinâmica adimensional ao longo da altura na face da barragem, da seguinte forma:

$$P_0(0, y/H) = \frac{p_1(0, y/H)}{r_f H_f \sqrt{g}}. \text{ Os resultados são representados na Tabela 3.1.}$$

### b) solução numérica

Uma vez que as malhas mostradas anteriormente para barragem e para o reservatório forneceram ótimos resultados para o problema desacoplado e acoplados, utiliza-se então as mesmas malhas para os problemas transientes. A aceleração é transformada em uma força através da 2ª. Lei de Newton e aplicada em qualquer ponto da barragem do modelo numérico.  $F = m a \quad \therefore F_B = m_B a_B = m_B (0,1 g) = 780000 \times 0,1 \times 10 \Rightarrow F_B = 780000 N$ , força que gera na barragem uma aceleração  $a_B = 0,1 g = 1 m/s^2$ .

Assume-se que a aceleração máxima do solo (PGA) é de  $0,1g$  para um espectro da frequência de pico em  $f = 1 \text{ hertz}$  em  $10$  passos de tempo. Vale ressaltar que os critérios apresentados no próximo capítulo para verificar a suscetibilidade desta barragem aos efeitos de compressibilidade, não são significativos (ver seção 4.2 desta tese), como mostra os resultados a seguir:

$$f_w = \frac{c}{4H} = \frac{1500}{4 \times 20} = 18,75 \text{ Hz}$$

$f < f_w \Leftrightarrow$  O efeito de compressibilidade não é significativo, ou seja:  $\frac{wH}{c} \ll 1$ .

$$f_d = \frac{1}{2p} \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_B}} = \frac{1}{2p} \sqrt{\frac{80000}{780000}} = 0,05097 \text{ Hz}$$

$\frac{f_d}{f_w} = 0,003 < 0,7 \Leftrightarrow$  O efeito de compressibilidade não é significativo, ou seja:  $\frac{wH}{c} \ll 1$ .

Portanto, para esta faixa de frequência associada a excitação sísmica, a compressibilidade do fluido não tem um papel significativo.

Através do método dos elementos finitos (via ANSYS) com a aplicação da força  $F_B$  no modelo numérico mostrado na Figura 3.7, obtêm-se os valores numéricos para a pressão hidrodinâmica adimensional ao longo da altura na face da barragem, da seguinte forma:

$$P_0(0, S) = \frac{p(0, S)}{r_f H_f \sqrt{g}}, \text{ com } \sqrt{g} = a_B. \text{ Os resultados são representados na Tabela 3.1.}$$

c) comparação entre as soluções

A Tabela 3.1 compara as soluções analítica (Técnica de Separação de Variável) e numérica (MEF via ANSYS) expostas anteriormente. Vale ressaltar que na solução analítica a origem do sistema  $xOy$  encontra-se na base da barragem, o eixo  $y$  se direciona na vertical no sentido para cima, ver Figura 3.1, enquanto que na solução numérica a origem do eixo vertical  $S$  encontra-se no topo da barragem, no sentido para baixo (convenção do ANSYS).

O símbolo  $e_R$  corresponde ao erro relativo percentual, definido da seguinte forma:

$$e_R = \frac{|(\text{solução analítica} - \text{solução numérica})|}{\text{solução analítica}} 100\% .$$

Tabela 3.1 - Pressão hidrodinâmica: solução analítica (em séries) e solução numérica (MEF).

Eixos verticais		Pressão hidrodinâmica adimensional: modelo de Westergaard		
$y/H$	S (m)	Técnica de Separação de Variável	ANSYS	Erro
1,0	0	0,0000	0,0000	$e_R=0,00\%$
0,9	2	0,2256	0,2200	$e_R=2,48\%$
0,8	4	0,3627	0,3554	$e_R=2,01\%$
0,7	6	0,4659	0,4570	$e_R=1,91\%$
0,6	8	0,5467	0,5365	$e_R=1,87\%$
0,5	10	0,6103	0,5991	$e_R=1,84\%$
0,4	12	0,6596	0,6476	$e_R=1,82\%$
0,3	14	0,6966	0,6840	$e_R=1,81\%$
0,2	16	0,7223	0,7092	$e_R=1,81\%$
0,1	18	0,7374	0,7241	$e_R=1,80\%$
0,0	20	0,7425	0,7290	$e_R=1,82\%$

A Figura 3.8 representa o comportamento da pressão hidrodinâmica na face da barragem ao longo de sua altura com as duas soluções apresentadas anteriormente (em  $y=0$ , tem-se a base da barragem).

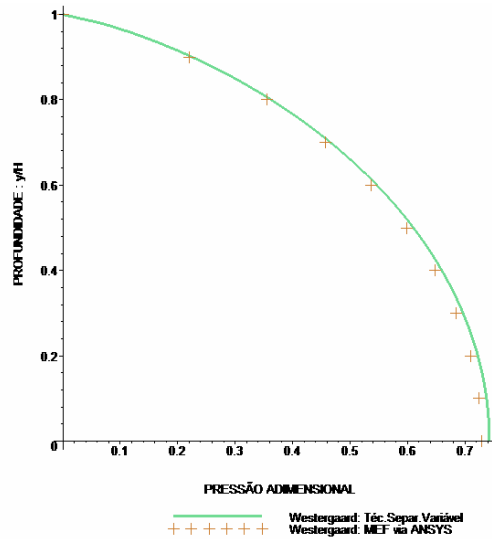


Figura 3.8 - Pressão hidrodinâmica na face da barragem ao longo da altura: Westergaard.

Observa-se através da Tabela 3.1 e da Figura 3.8 a boa concordância entre os modelos analítico e numérico, para a “barragem de Westergaard”.

### 3.3.2 - Barragem flexível: modelo numérico equivalente ao modelo analítico de Chopra

Para se fazer uma comparação adequada com a solução analítica desenvolvida, que usa a deformada modal proposta por Chopra, é criado um modelo numérico (MEF via ANSYS) para a interação barragem-reservatório, onde a barragem é modelada como uma viga profunda engastada na base e livre na extremidade, (FERC, 2002), de acordo com a Figura 3.9.

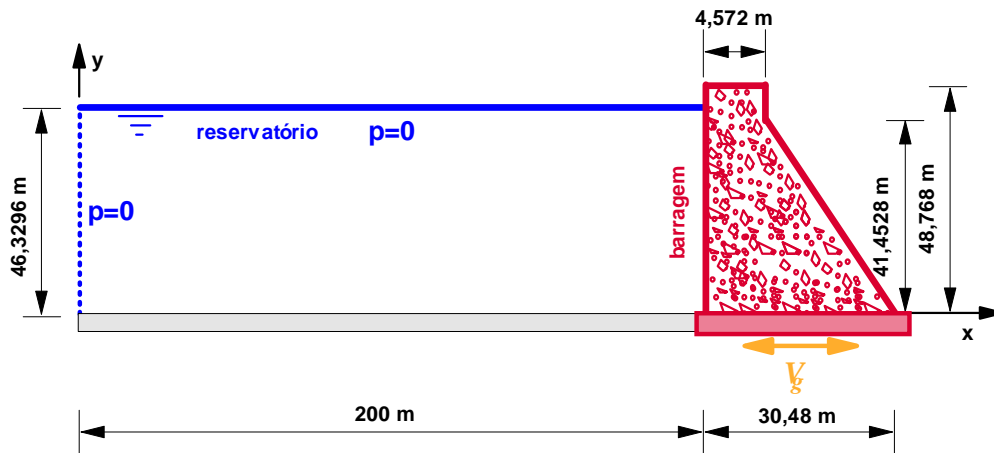


Figura 3.9 – Modelo numérico equivalente a Chopra: MEF via ANSYS.



Os parâmetros físicos dos materiais envolvidos neste problema são os seguintes:

Barragem:

módulo de elasticidade:  $E_B = 2,415 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$

densidade:  $r_B = 2\,477 \text{ kg/m}^3$

coeficiente de Poisson:  $u_B = 0,17$

massa:  $m_B = r_B \cdot vol = 1\,882\,396 \text{ kg}$

Reservatório:

densidade:  $r_f = 1\,000 \text{ kg/m}^3$

velocidade do som:  $c_f = 1\,500 \text{ m/s}$

Na discretização dos “meios”, as seguintes malhas em elementos finitos se mostraram suficientes para a convergência da solução:

Barragem:

elemento finito: *PLANE 42*

número de divisões na horizontal:  $N_x = 6$

número de divisões na vertical:  $N_y = 14$

Reservatório:

elemento finito: *FLUID 79*

número de divisões na horizontal:  $N_x = 100$ ; com grau 4 de refinamento.

número de divisões na vertical:  $N_y = 12$

Para melhor compreensão do comportamento dinâmico do problema, que é um caso transiente, algumas verificações preliminares em vibrações livres são feitas. Tais verificações justificam o uso das malhas de elementos finitos que são validadas com resultados fornecidos pela FERC (2002) e com resultados analíticos (desacopladas e acopladas) no domínio da frequência.

## I- Análise em Vibração Livre: verificações preliminares

a) problema desacoplado

a.1- soluções referenciais:

Barragem: FERC, 2002

freqüência natural:  $f_1 = 7,0 \text{ Hz}$

deformada modal:

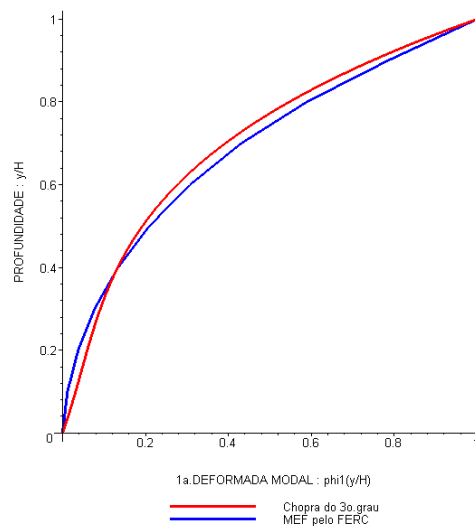


Figura 3.10 – Deformada modal da barragem.

Reservatório: cavidade acústica fechada-aberta em ambas as direções

$$f_{m,n} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{2m+1}{2L_x}\right)^2 + \left(\frac{2n+1}{2L_y}\right)^2}$$

$$\begin{aligned} f_{0,0} &= 8,3085 \text{ Hz} & f_{5,0} &= 22,1564 \text{ Hz} & f_{1,0} &= 9,8568 \text{ Hz} & f_{0,1} &= 24,3548 \text{ Hz} \\ f_{2,0} &= 12,3857 \text{ Hz} & f_{1,1} &= 24,9255 \text{ Hz} & f_{3,0} &= 15,4202 \text{ Hz} & f_{6,0} &= 25,6838 \text{ Hz} \\ f_{4,0} &= 18,7158 \text{ Hz} & f_{2,1} &= 26,0294 \text{ Hz} & & & & \end{aligned}$$

a.2- solução numérica: MEF via ANSYS

Barragem: A Figura 3.12 ilustra o modelo numérico utilizado.

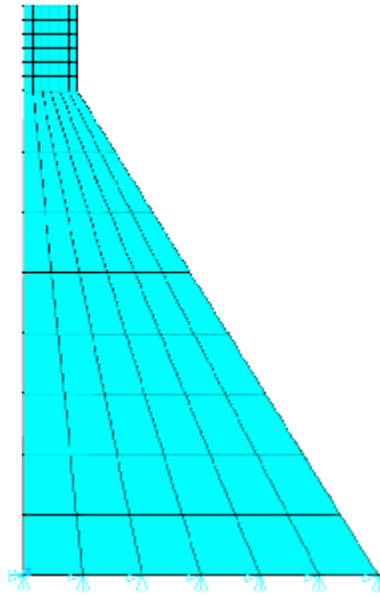


Figura 3.11 – Modelo numérico para a barragem: MEF via ANSYS.

freqüência natural:  $f_1 = 6,7896 \text{ Hz}$

deformada modal:

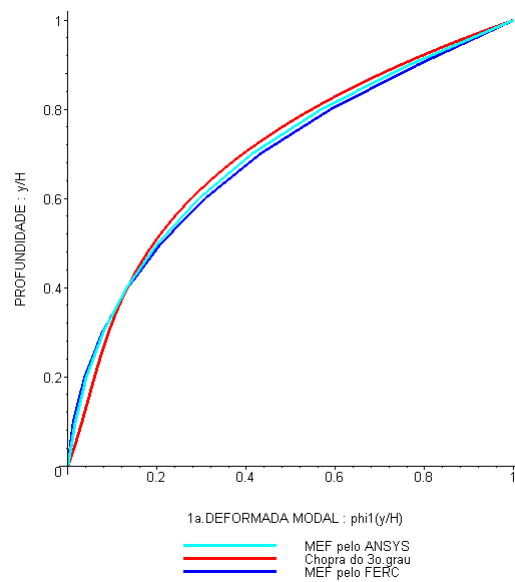
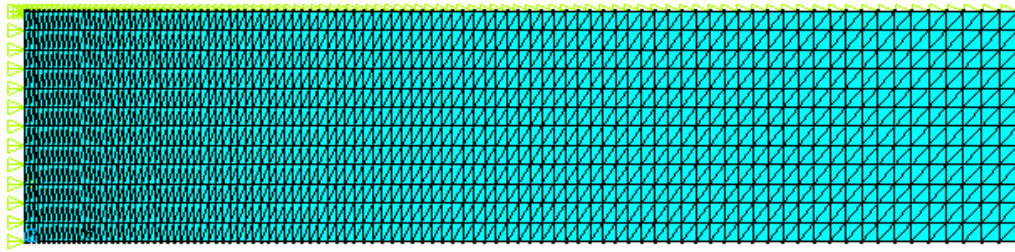


Figura 3.12 – Deformada modal da barragem.

Reservatório: A Figura 3.13 ilustra o modelo numérico utilizado com os resultados obtidos para as dez primeiras frequências desacopladas.



$$f_1 = 8,3156 \text{ Hz} \quad f_2 = 9,8691 \text{ Hz} \quad f_3 = 12,4070 \text{ Hz} \quad f_4 = 15,4550 \text{ Hz} \quad f_5 = 18,7690 \text{ Hz}$$

$$f_6 = 22,2340 \text{ Hz} \quad f_7 = 24,5150 \text{ Hz} \quad f_8 = 25,1020 \text{ Hz} \quad f_9 = 25,7930 \text{ Hz} \quad f_{10} = 26,2390 \text{ Hz}$$

Figura 3.13 – Modelo numérico para o reservatório: MEF via ANSYS.

Percebe-se uma boa concordância entre as soluções fornecidas pelo FERC, analítica e numérica para o problema desacoplado.

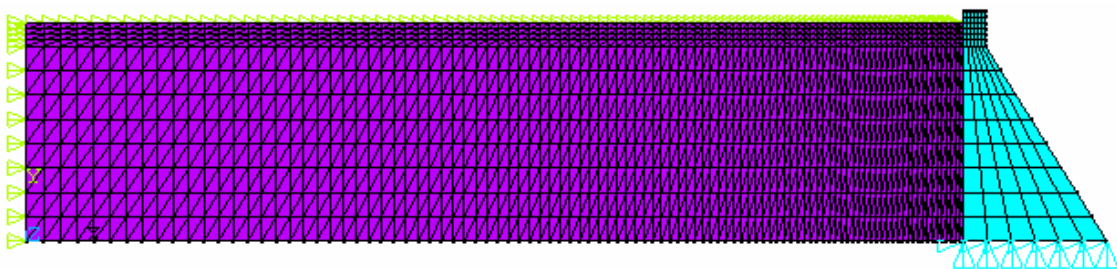
b) problema acoplado

b.1- solução referencial: FERC, 2002

$$f_1 = 5,94 \text{ Hz}$$

b.2- solução numérica: MEF via ANSYS

A Figura 3.14 ilustra o modelo numérico utilizado com os resultados obtidos para as dez primeiras frequências acopladas.



$$f_1 = 5,388 \text{ Hz} \quad f_2 = 15,349 \text{ Hz} \quad f_3 = 22,189 \text{ Hz} \quad f_4 = 26,807 \text{ Hz} \quad f_5 = 30,736 \text{ Hz}$$

$$f_6 = 42,368 \text{ Hz} \quad f_7 = 48,874 \text{ Hz} \quad f_8 = 56,520 \text{ Hz} \quad f_9 = 63,763 \text{ Hz} \quad f_{10} = 71,881 \text{ Hz}$$

Figura 3.14 – Modelo numérico para a barragem-reservatório: MEF via ANSYS (problema acoplado).

Percebe-se uma boa aproximação numérica para a primeira frequência fundamental da solução de referência (FERC, 2002).

## II- Análise Transiente: modelo de Chopra

### a) solução analítica

Através da utilização da Equação (3.22), obtém-se os valores analíticos para a pressão hidrodinâmica adimensional ao longo da altura na face da barragem, da seguinte forma:

$$P_0(0, y/H) = \frac{p_1(0, y/H)}{r_f H_f \sqrt{g}}. \text{ Os resultados são representados na Tabela 3.2.}$$

### b) solução numérica

Uma vez que as malhas mostradas anteriormente para barragem e para o reservatório forneceram ótimos resultados para o problema desacoplado e acoplados, utiliza-se então as mesmas malhas para os problemas transientes. A aceleração é transformada em uma força através da 2ª. Lei de Newton e aplicada no topo da barragem do modelo numérico. Para efeitos comparativos considera-se a mesma barragem tratada pela FERC (2002) onde se admite que a aceleração varie de  $1g$  no topo da barragem até zero na base para um espectro da frequência de pico em  $f = 5$  hertz em 5 passos de tempo:

$F = m a \quad \therefore F_B = m_B a_B = m_B 1g = 1\,882\,396 \times 1 \times 9,8 \Rightarrow F_B = 18\,447\,480,8 \text{ N}$ , força que gera no topo da barragem uma aceleração  $a_B = 1g$ . Portanto este modelo numérico possui uma aceleração “g vezes” a do modelo analítico. Vale ressaltar que os critérios apresentados no próximo capítulo (seção 4.2) não concordam entre si com relação à suscetibilidade desta barragem aos efeitos de compressibilidade, como mostrados a seguir:

$$f_w = \frac{c}{4H} = \frac{1500}{4 \times 46,3296} = 8,09 \text{ Hz}$$

$f < f_w \Leftrightarrow$  O efeito de compressibilidade não é significativo (no limite), ou seja:  $\frac{wH}{c} \approx 1$ .

$$f_d = 7 \text{ Hz} \quad (\text{FERC}, 2002)$$

$\frac{f_d}{f_w} = 0,87 > 0,7 \Leftrightarrow$  O efeito de compressibilidade é significativo,  $\frac{wH}{c} > 1$ .

A forma modal torna-se significativa na pressão hidrodinâmica quando a resposta estrutural amplifica sua aceleração em relação à aceleração do solo por um fator  $a$  (FERC, 2002). Através do método dos elementos finitos (ANSYS) com a aplicação da força  $F_B$  no modelo numérico mostrado na Figura 3.14, obtém-se os valores para a pressão hidrodinâmica adimensional ao longo da altura na face da barragem, da seguinte forma:

$$P_0(0, S) = \frac{p(0, S)}{r_f H_f \sqrt{\frac{g}{g}}}, \text{ com } \frac{a_B}{g} = a. \text{ Os resultados são representados na Tabela 3.2.}$$

c) comparação entre as soluções

A Tabela 3.2 compara as soluções analíticas (Técnica de Separação de Variável), numérica (FERC, 2002) e numérica (ANSYS) expostas anteriormente. Vale ressaltar que na solução analítica a origem do sistema  $xy$  encontra-se na base da barragem, o eixo  $y$  se direciona na vertical no sentido para cima, ver Figura 3.1, enquanto que nas soluções numéricas a origem dos eixos verticais,  $S'$  (em pés) e  $S^m$  (em metros), encontram-se no topo da barragem, no sentido para baixo. O símbolo  $e_R$  corresponde ao erro relativo percentual, definido anteriormente.

Tabela 3.2 - Pressão hidrodinâmica: solução analítica (em séries) e soluções numéricas (FERC, 2002 e ANSYS).

Eixos verticais			Pressão hidrodinâmica adimensional: modelo de Chopra				
$y/H$	$S'$ (pés)	$S^m$ (m)	Técnica de Separação de Variável	FERC	Erro	ANSYS	Erro
1,0	0	0,0000	0,0000	0,0000	$e_R=0,00\%$	0,0000	$e_R=0,00\%$
0,9	16	4,6330	0,1053	0,1053	$e_R=0,00\%$	0,1384	$e_R=31,43\%$
0,8	32	9,2659	0,1303	0,1230	$e_R=5,60\%$	0,1577	$e_R=21,03\%$
0,7	48	13,8990	0,1334	0,1340	$e_R=0,45\%$	0,1540	$e_R=15,44\%$
0,6	64	18,5320	0,1275	0,1300	$e_R=1,96\%$	0,1416	$e_R=11,06\%$
0,5	80	23,1650	0,1185	0,1210	$e_R=2,11\%$	0,1272	$e_R=7,34\%$
0,4	96	27,7980	0,1091	0,1110	$e_R=1,74\%$	0,1136	$e_R=4,12\%$
0,3	112	32,4310	0,1006	0,1020	$e_R=1,39\%$	0,1021	$e_R=1,49\%$
0,2	128	37,0640	0,0934	0,0940	$e_R=0,64\%$	0,0933	$e_R=0,11\%$
0,1	144	41,6970	0,0880	0,0880	$e_R=0,00\%$	0,0878	$e_R=0,23\%$
0,0	160	46,3300	0,0852	0,0850	$e_R=0,23\%$	0,0855	$e_R=0,35\%$

A Figura 3.15 representa o comportamento da pressão hidrodinâmica na face da barragem ao longo da altura da barragem para as três soluções apresentadas anteriormente (em  $y=0$ , tem-se a base da barragem).

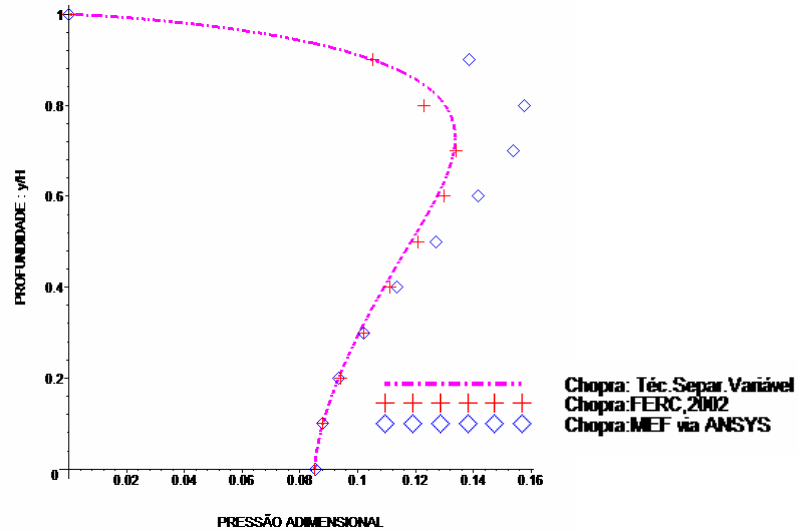


Figura 3.15 - Pressão hidrodinâmica na face da barragem ao longo da altura: Chopra.

A Figura 3.16 apresenta um resumo das curvas para a pressão hidrodinâmica na face da barragem através das considerações feitas por Westergaard (barragem rígida-móvel) e Chopra (barragem flexível) para a interação barragem-reservatório tratada pelo método analítico (Técnica de Separação de Variável) e pelo método numérico (Elementos Finitos – FERC, 2002 e ANSYS).

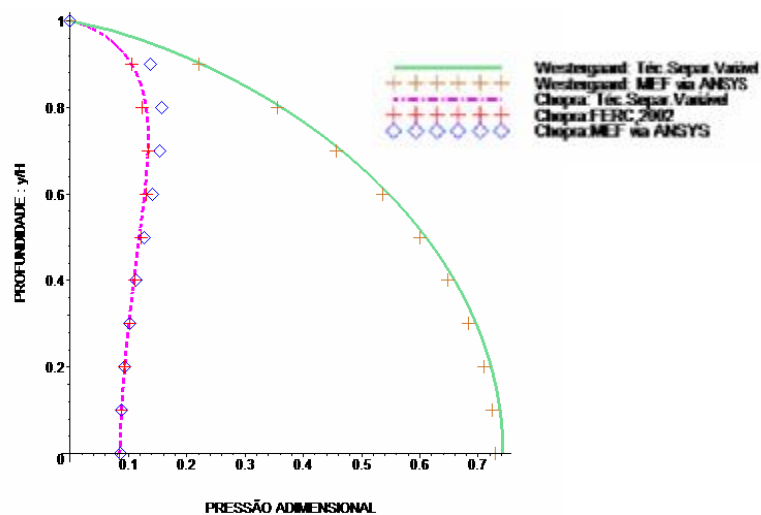


Figura 3.16 - Pressão hidrodinâmica na face da barragem ao longo da altura: Westergaard e Chopra.

A partir dos resultados obtidos nesta seção, alguns comentários e conclusões podem ser evidenciados:

Através da Técnica de Separação de Variável chega-se à expressão analítica da pressão hidrodinâmica tanto para a consideração de movimento de corpo rígido da barragem quanto à consideração de flexibilidade da mesma. Estas situações foram idealizadas respectivamente por Westergaard (1933) e Chopra (1978).

A teoria desenvolvida neste capítulo pela Técnica de Separação de Variável correspondeu efetivamente aos resultados obtidos com o modelo numérico utilizado (ANSYS); para o movimento de corpo rígido da barragem (Tabela 3.1 e Figura 3.8).

Para a barragem flexível, a teoria desenvolvida está de acordo com o modelo numérico (elementos finitos) tratado pelo método pseudo-dinâmico (FERC, 2002), bem como pelo modelo numérico usado no método dos elementos finitos (ANSYS). Estes modelos consideram a primeira deformada modal da barragem (Tabela 3.2 e Figura 3.15).

Ao se comparar os resultados obtidos para os modelos idealizados por Westergaard e por Chopra, tratados de forma analítica e numérica percebem-se diferenças na pressão hidrodinâmica ao longo da altura na face da barragem. Quando se considera a flexibilidade da barragem, a pressão é menor do que quando se considera o deslocamento de corpo rígido (Figura 3.16).



## **4 - BARRAGEM RÍGIDA-MÓVEL NA INTERFACE DE UM FLUIDO COMPRESSÍVEL**

### **4.1 - INTRODUÇÃO**

Neste capítulo resolve-se analiticamente, pela técnica de separação de variável, a equação da onda para o campo de pressões hidrodinâmicas com as condições de contorno no domínio barragem-reservatório admitindo-se que um sismo provoque um movimento de corpo rígido na barragem. A partir da idéia de massa adicional, Westergaard (1933) e da propriedade de integração de linha no campo de pressões hidrodinâmicas, chega-se a uma formulação analítica que permite o cálculo da massa adicional ao longo da altura da barragem e que considera os efeitos de compressibilidade do fluido.

### **4.2 - EFEITOS DE COMPRESSIBILIDADE DO FLUIDO NA INTERAÇÃO BARRAGEM-RESERVATÓRIO**

O problema de interação barragem-reservatório envolve o estudo de vibrações de estruturas na presença de um fluido. A consideração adequada da presença da água se torna importante à medida que o comportamento estrutural da barragem é significativamente alterado pela presença do fluido, Bathe (1987). Os modelos matemáticos que tentam representar este problema estão diretamente ligados à consideração do efeito de compressibilidade do fluido (equação da onda) ou não (equação de Laplace). Portanto, uma simples abordagem sobre o questionamento da compressibilidade do fluido ser ou não incluída na análise é feita nesta seção.

Para se ter uma idéia inicial dos efeitos de compressibilidade do fluido, considera-se um modelo bidimensional de um reservatório com uma barragem rígida. A análise completa deste problema pode ser encontrada no trabalho de Weber (1994). Se a barragem for movida horizontalmente, uma pressão hidrodinâmica surge no reservatório se superpondo a pressão hidrostática. A distribuição da pressão hidrodinâmica devido a uma excitação senoidal com uma frequência  $f = 0,8 f_w$  é mostrada na Figura 4.1. A frequência  $f_w$  denota a frequência fundamental do reservatório  $f_w = c/4H$ .

Os parâmetros envolvidos são: a altura do reservatório ( $H$ ) e a velocidade do som na água ( $c = 1440 \text{ m/s}$ ). Para uma altura típica de  $100 \text{ m}$ , a frequência fundamental é  $f_w = 1440 / (4 \times 100) = 3,6 \text{ Hz}$ . Note que a frequência de excitação está abaixo desta frequência ( $f = 0,8 \times 3,6 = 2,88 \text{ Hz} < f_w$ ).

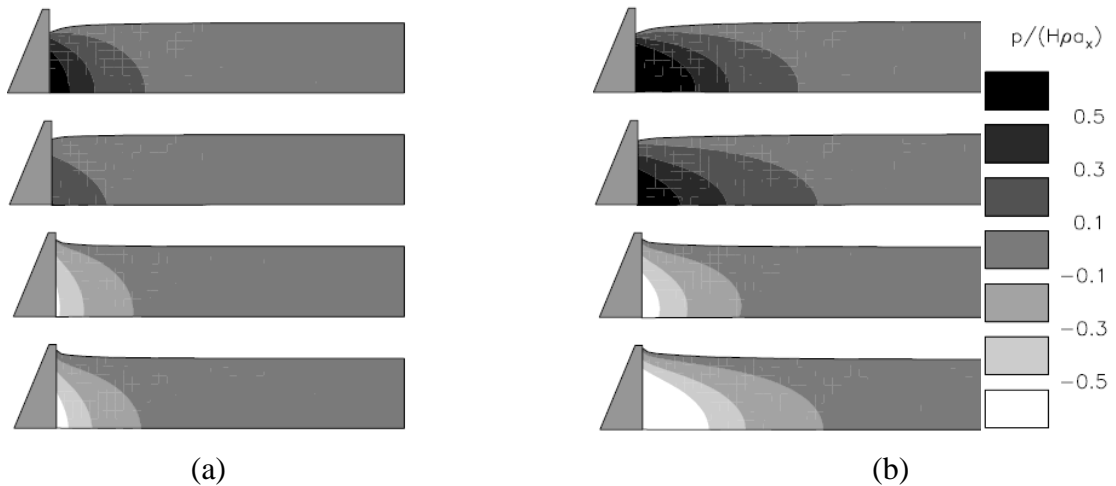


Figura 4.1 – Distribuição da pressão hidrodinâmica no reservatório,  $f = 0,8 f_w$ : (a) fluido incompressível e (b) fluido compressível (Weber, 1994).

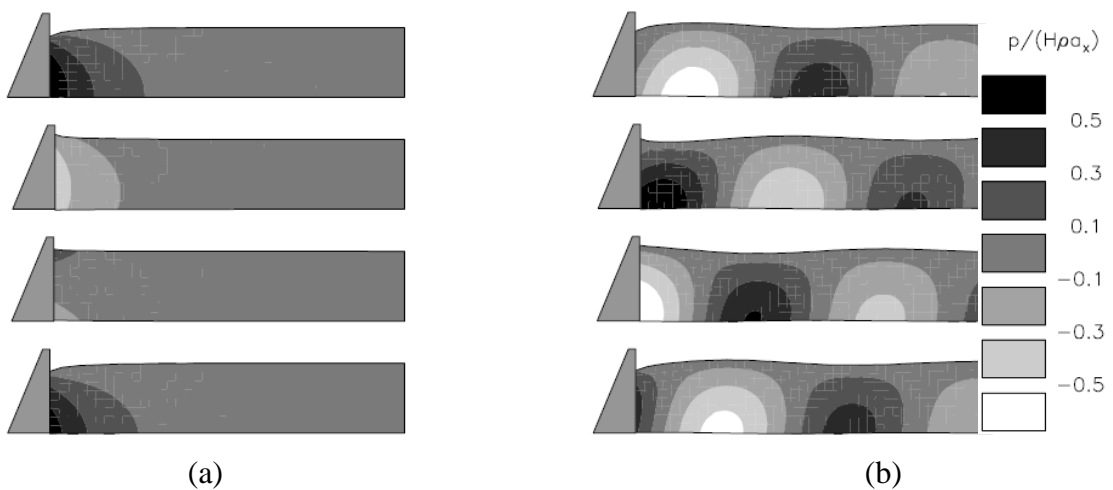


Figura 4.2 – Distribuição da pressão hidrodinâmica no reservatório,  $f = 1,5 f_w$ : (a) fluido incompressível e (b) fluido compressível (Weber, 1994).

Na Figura 4.1, mostra-se o caso incompressível (a) e o caso compressível (b). Os dois casos são similares qualitativamente. A pressão hidrodinâmica está em fase com a barragem e está confinada em uma região perto da barragem (o que não é evidente na

Figura 4.1). Se o contorno artificial (superfície de truncamento) for colocado fora desta região, ele não será afetado pela transmissão das ondas de pressão. Resultado este que será melhor evidenciado no próximo capítulo (seção 5.5), após o estudo dos amortecedores para as superfícies de truncamento.

Uma imagem diferente aparece na Figura 4.2, onde a frequência de excitação é escolhida acima da frequência fundamental, neste exemplo  $f = 1,5 f_w$ . O modelo incompressível, Figura 4.2 (a), mostra um padrão similar ao exemplo anterior cuja frequência de excitação era mais baixa. De fato o modelo incompressível é independente da frequência e a diferença é somente devido ao sincronismo dos quadros (Figura 4.1 (a) e Figura 4.2 (a)). Já o modelo compressível, Figura 4.2 (b), mostra um comportamento completamente diferente. A pressão hidrodinâmica está difusa e consiste em pacotes de ondas que se propagam da barragem para a direita. As ondas de pressão decaem lentamente, neste caso, somente devido a absorção pela fundação e o reservatório é perturbado mesmo a uma distância afastada da barragem, fato não ocorrido no caso anterior. Portanto, a gama de frequências de excitação influi enormemente no processo em questão.

Para um problema tridimensional com uma barragem flexível, a distribuição da pressão hidrodinâmica ao longo do reservatório é mais complicada, entretanto, o comportamento básico é o mesmo que para o caso simples, mostrado segundo Weber (1994). Os efeitos de compressibilidade podem ser negligenciados se a frequência fundamental do sistema barragem-reservatório ( $f_{acop}$ ) estiver bem abaixo da frequência fundamental do reservatório ( $f_w$ ). Todavia este critério não é útil para finalidades práticas, porque uma análise com a consideração de compressibilidade da água é necessária para a determinação da frequência fundamental do sistema barragem-reservatório.

Hall (1988) segue uma maneira mais prática que é comparar a frequência do primeiro modo simétrico da barragem com o reservatório vazio,  $f_d$ , com a frequência fundamental do reservatório,  $f_w$ . O modo simétrico da barragem tem que ser obtido porque os modos não simétricos não são tão afetados pela compressibilidade do fluido, Hall (1988). De acordo com Hall, o efeito de compressibilidade pode não ser considerado importante para uma relação  $f_d/f_w$  abaixo de 0,7. Para dar uma idéia real de escala deste parâmetro, os valores para algumas barragens são mostrados na Tabela 4.2.

Tabela 4.1 – Frequências para várias barragens com a inclusão de um caso de barragem brasileira (adaptado a partir de Weber, 1994).

BARRAGEM	ALTURA [m]	COMPRI-MENTO [m]	$f_d$ [Hz]	$f_w$ [Hz]	$f_d/f_w$	$wH/c$
MAUVOISIN	250	560	2,0 [num.]	2,1 [H = 190 m]	0,9	1,4
KÖLNBREIN	197	626	1,7 [exp.]	2,3 [H = 172 m]	0,7	1,1
EMOSSON	180	424	2,2 [exp.]	2,4 [H = 160 m]	0,9	1,4
MORROW POINT	142	219	3,7 [num.]	3,0	1,2	1,9
PACOIMA	113	180	5,1 [exp.]	4,4 [H = 90 m]	1,2	1,9
TALVACCHIA	77	226	4,5 [num.]	5,8	0,8	1,3
TUCURUÍ	71	350	3,9 [num.]	5,4 [num.]	0,7	1,1

Os números para o parâmetro  $f_d$  são resultados de algum experimento (denominado “[exp.]”) listado no trabalho de Hall (1988) ou de análises numéricas (denominado “[num.]”) apresentado na literatura: Weber (1994), Kniffka (1993) e ISMES (1993). Os valores para o parâmetro  $f_w$  são estimados para algumas geometrias idealizadas (denominada “[H = ... m]”) ou calculada de um problema numérico de autovalor. As geometrias idealizadas são o canal semi-circular com  $f_w = c/(3,41H)$  e o canal retangular ou barragem, com  $f_w = c/(4H)$ . Os números na Tabela 4.1 correspondem a valores médios para estas duas geometrias citadas, usando uma altura equivalente como indicado. Os números dependem das várias suposições e devem ser considerados como estimativa somente, não como valores absolutos.

De acordo com o critério apresentado por Hall, todas as barragens listadas na Tabela 4.1 são suscetíveis aos efeitos de compressibilidade, embora algumas menos do que outras. No entanto, a pergunta se a compressibilidade tem que ser incluída ou não na análise do problema de interação barragem-reservatório, não pode ser respondida com base em um único parâmetro. Dependendo dos dados característicos de cada terremoto, mesmo uma barragem que não seja suscetível à compressibilidade, de acordo com a Tabela 4.1, pode necessitar ser analisada com um modelo que considere o fluido compressível, Weber (1994). Este alerta, assim como alguns trabalhos realizados pelo grupo de dinâmica e fluido-estrutura (GDFE) da Universidade de Brasília – UnB, Pedroso et al. (2000, 2002 e 2005), corroboram no sentido de ressaltar a importância dos efeitos da compressibilidade do fluido nos problemas de interação entre a barragem e o reservatório.

## 4.3 - FORMULAÇÕES MATEMÁTICA PARA O PROBLEMA

### 4.3.1 - Equações fundamentais

A partir das equações fundamentais já apresentadas na seção 2.2 (capítulo 2), após algumas manipulações algébricas, chega-se a equação da onda dada em termos das pressões ( $p$ ):

$$\nabla^2 p(x, y, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(x, y, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4.1)$$

### 4.3.2 - Solução exata (em séries) para a pressão hidrodinâmica e para a massa adicional

Supondo que a barragem seja uma estrutura rígido-móvel, estará sujeita a uma aceleração equivalente à mesma aceleração horizontal do solo (rocha da base). O campo de pressões hidrodinâmicas para um fluido não viscoso e compressível resultará da solução da Equação (4.1), esta solução é obtida pela técnica de separação de variável com as condições de contorno mostradas na Figura 4.3:

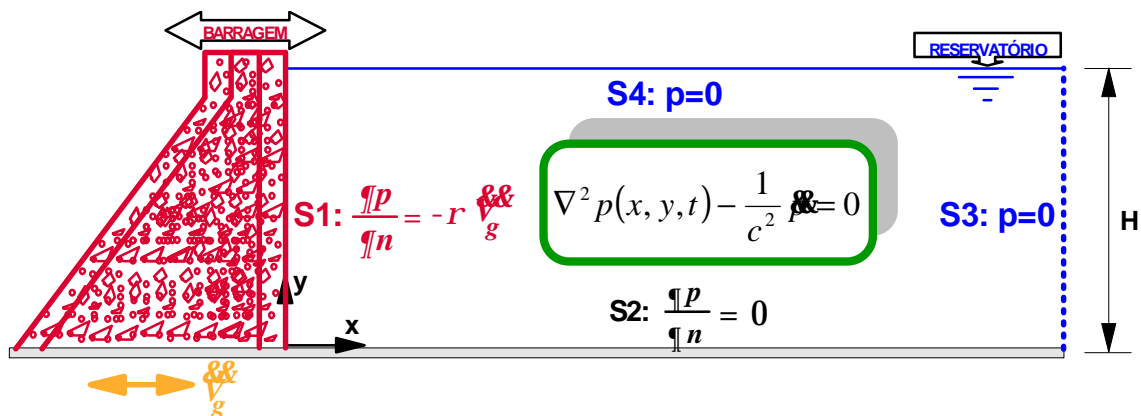


Figura 4.3 - Esquema da interação barragem-reservatório com as condições de contorno.

Seja a equação da onda, Equação (4.1), para o domínio do fluido no plano  $x$ - $y$ , com as seguintes condições de contorno:

- i) Superfície S2 - Contorno Rígido:  $\left. \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0$
- ii) Superfície S4 - Superfície Livre:  $p(x, y, t)|_{y=H} = 0$

iii) Superfície S3 – Reservatório Infinito:  $p(x, y, t)|_{x \rightarrow \infty} = 0$

iv) Superfície S1 - Interface Fluido-Estrutura:  $\frac{\partial}{\partial x} p(x, y, t)|_{x=0} = -\rho \ddot{v}_g$

$\ddot{v}_g$  corresponde à amplitude da aceleração do terremoto na base da barragem, sendo geralmente expresso em função da gravidade ( $\ddot{v}_g = a g$ ).

Aplicando-se a técnica de separação de variável (Pedroso, 2003 e Chakrabarti & Chopra, 1974), tem-se:

$$p(x, y, t) = F(x)G(y)T(t) \quad (4.2)$$

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \ddot{p} = 0$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) [F(x)G(y)T(t)] - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) [F(x)G(y)T(t)] = 0$$

$$\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} G(y)T(t) + F(x) \frac{\partial^2 G(y)}{\partial y^2} T(t) - \frac{1}{c^2} F(x)G(y) \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4.3)$$

Dividindo a Equação (4.3) por  $p(x, y, t)$ :

$$\frac{F''}{F} + \frac{G''}{G} - \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{T}}{T} = 0 \quad (4.4)$$

Portanto:

$$-\frac{G''}{G} = \frac{F''}{F} - \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{T}}{T} = I^2 \quad \therefore \begin{cases} G'' + I^2 G = 0 \\ F'' - \left( I^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{T}}{T} \right) F = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

$$(4.6)$$

Supõe-se que a função  $T(t)$  seja harmônica no tempo (periódica), ou seja:

$$T'(t) = -w^2 T(t) \quad (4.7)$$

Substituindo a Equação (4.7) na Equação (4.6), tem-se:

$$F'' + h F = 0; \text{ com } -h = \left( l^2 - \frac{w^2}{c^2} \right) \quad (4.8)$$

A Equação (4.5) tem como solução a função:  $G(y) = A \cos(l \cdot y) + B \operatorname{sen}(l \cdot y)$ . Usando as condições de contorno da direção  $y$ , tem-se:

$$i) \left. \frac{\partial}{\partial y} p(x, y, t) \right|_{y=0} = 0$$

$$F(x)T(t)[-A l \operatorname{sen}(l y) + B l \cos(l y)]|_{y=0} = 0$$

$$B l = 0 \quad \therefore B = 0$$

$$ii) p(x, y, t)|_{y=H} = 0$$

$$F(x)T(t)[A \cos(l y) + B \operatorname{sen}(l y)]|_{y=H} = 0$$

$$A \cos(l H) = 0$$

$$A \neq 0 \Rightarrow \cos(l H) = 0$$

$$l H = (2n - 1) \frac{p}{2} \quad \therefore l_n = (2n - 1) \frac{p}{2H}; n = 1, 2, 3, \dots$$

Portanto:

$$G_n(y) = A_n \cos \left[ (2n - 1) \frac{p}{2H} y \right] \quad (4.9)$$

A Equação (4.8) tem como solução a função:  $F(x) = C_1 e^{\sqrt{-h}x} + C_2 e^{-\sqrt{-h}x}$ . Usando as condições de contorno da direção  $x$ , tem-se:

$$iii) p(x, y, t)|_{x=\infty} = 0$$

$$G(y)T(t)\left[C_1 e^{\sqrt{-h}x} + C_2 e^{-\sqrt{-h}x}\right]\Big|_{x=\infty} = 0$$

$$C_1 e^{\sqrt{-h}\infty} + C_2 e^{-\sqrt{-h}\infty} = 0$$

$$C_1 = -C_2 \frac{1}{e^{2(\sqrt{-h}\infty)}} \quad \therefore C_1 = 0$$

Portanto:

$$F_n(x) = C_n e^{-\sqrt{I_n^2 - \frac{w^2}{c^2}}x}$$

$$F_n(x) = C_n e^{-\sqrt{\left(\left((2n-1)\frac{p}{2H}\right)^2 - \frac{w^2}{c^2}\right)}x} \quad (4.10)$$

Considerando o problema no domínio da frequência, tem-se:

$$p_n(x, y, w) = F_n(x)G_n(y)$$

$$p(x, y, w) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n e^{-\sqrt{I_n^2 - \frac{w^2}{c^2}}x} \cos(I_n y) \quad ; \quad I_n = (2n-1)\frac{p}{2H} \quad (4.11)$$

$$iv) \frac{\partial}{\partial x} p(x, y, w) \Big|_{x=0} = -r \sqrt{\frac{g}{g}}$$

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cos(I_n y) \left[ (-\sqrt{-h}) e^{-\sqrt{-h}x} \right] \right\} \Big|_{x=0} = -r \sqrt{\frac{g}{g}}$$

$$\int_0^H \sum_{n=1}^{\infty} K_n \operatorname{sen}\left(np \frac{y}{H}\right) \sqrt{-h} dy = \int_0^H r \sqrt{\frac{g}{g}} dy \left[ \operatorname{sen}\left(mp \cdot \frac{y}{H}\right) \right]$$

Usando a propriedade de ortogonalidade da função seno (em séries), tem-se:

$$\frac{H}{2} K_n \sqrt{-h} = r \sqrt{\frac{g}{g}} \int_0^H \cos(I_n y) dy = r \sqrt{\frac{g}{g}} \frac{1}{I_n} [\operatorname{sen}(I_n y)]_0^H$$



Logo:

$$K_n = \frac{r \sqrt{g}}{H \sqrt{-h}} \frac{2(-1)^{n+1}}{I_n}$$

Portanto:

$$p(x, y, w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r \sqrt{g}}{H \sqrt{-h}} \frac{2(-1)^{n+1}}{I_n} e^{-\sqrt{I_n^2 - \frac{w^2}{c^2}} x} \cos(I_n y) \quad ; \quad I_n = (2n-1) \frac{P}{2H}$$

ou ainda em termos do parâmetro  $m_n = I_n H$  :

$$p(x, y, w) = r \sqrt{g} H 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n \sqrt{m_n^2 - \left(\frac{wH}{c}\right)^2}} e^{-\sqrt{m_n^2 - \left(\frac{wH}{c}\right)^2} \frac{x}{H}} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \quad (4.12)$$

$$m_n = (2n-1) \frac{P}{2}$$

A Equação (4.12) corresponde à solução exata (em séries) para o cálculo da pressão hidrodinâmica no plano da barragem-reservatório e que leva em conta o efeito de compressibilidade do fluido através do parâmetro  $\left(\frac{wH}{c}\right)$ , onde  $w$  é a frequência circular do fenômeno (rad/s),  $H$  é a altura do reservatório e  $c$  é a velocidade do som na água. Obtém-se assim resultado semelhante àquele obtido anteriormente por Sousa Jr. (2006).

O parâmetro de compressibilidade do fluido  $\left(\frac{wH}{c}\right)$ , mostrado na Equação (4.12) guarda uma relação com o cociente de frequência  $\left(\frac{f}{f_w}\right)$  utilizado por Weber (1994) e mostrado na seção 4.2 deste capítulo. Ou seja:

$$w \frac{H}{c} = 2p f \frac{H}{c} = p \frac{f}{\frac{c}{2H}} = \frac{p}{2} \frac{f}{\frac{c}{4H}} = \frac{p}{2} \frac{f}{f_w}$$

$$\frac{wH}{c} = \frac{p}{2} \frac{f}{f_w} \quad (4.13)$$

onde  $f_w$  é a frequência fundamental do reservatório.

Portanto os parâmetros  $\left(\frac{wH}{c}\right)$  e  $\left(\frac{f}{f_w}\right)$  são formas diferentes de se mostrar a contribuição dos efeitos de compressibilidade do fluido no estudo do problema de interação barragem-reservatório.

4.3.2.1 - Parâmetro de Compressibilidade do Fluido (PCF) pequeno:  $\left(\frac{wH}{c}\right) \ll 1$

Caso o parâmetro de compressibilidade seja pequeno, menor que um, o resultado deste parâmetro ao quadrado será menor ainda, desprezando tal parâmetro na Equação (4.12), obtém-se:

$$p(x, y) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} e^{-m_n \frac{x}{H}} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) r H \sqrt{\frac{g}{c}} \quad ; \quad m_n = (2n-1) \frac{p}{2} \quad (4.14)$$

A Equação (4.14) é a mesma já encontrada no capítulo 2, Equação (2.30), para o fluido incompressível. Este fato mostra que o caso da incompressibilidade do fluido (equação de Laplace) é um caso particular do corrente caso (equação da onda).

Uma vez estabelecida a expressão para o campo de pressões, Equação (4.12), encontra-se a equação para a distribuição da força ao longo da altura na face da barragem de acordo com

a área tributária adotada,  $F(0, y, w) = \int_0^y p(0, y, w) dy$ . Dividindo esta força obtida pela

aceleração da gravidade ( $g$ ) tem-se a massa adicional associada à face da barragem:

$$M(0, y, w) = \frac{F(0, y, w)}{g}. \text{ Assim:}$$

$$\begin{aligned}
F(0, y, w) &= \int_0^y p(0, y, w) dy = \int_0^y \left( r H \frac{w}{g} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n \sqrt{m_n^2 - \left(\frac{wH}{c}\right)^2}} (1) \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \right) dy \\
F(0, y, w) &= r H \frac{w}{g} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n \sqrt{m_n^2 - \left(\frac{wH}{c}\right)^2}} \frac{H}{m_n} \text{sen}\left(m_n \frac{y}{H}\right) \\
M(0, y, w) &= \frac{F(0, y, w)}{g} = \frac{1}{g} r H^2 \frac{w}{g} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2 \sqrt{m_n^2 - \left(\frac{wH}{c}\right)^2}} \text{sen}\left(m_n \frac{y}{H}\right) \\
M(0, y, w) &= \frac{r}{g} H^2 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2 \sqrt{m_n^2 - \left(\frac{wH}{c}\right)^2}} \text{sen}\left(m_n \frac{y}{H}\right); m_n = (2n-1)\frac{p}{2} \quad (4.15)
\end{aligned}$$

A Equação (4.15) corresponde à solução exata (em séries) para o cálculo da massa adicional, ao longo da altura na face da barragem e que leva em conta o efeito de compressibilidade do fluido através do parâmetro  $\left(\frac{wH}{c}\right)$ . Para parâmetros de compressibilidades muito menores que um e conseqüentemente a não consideração destes na Equação (4.15) resulta na mesma equação encontrada no capítulo 2, Equação (2.39) pelas mesmas razões já comentadas há pouco para as pressões hidrodinâmicas.

### 4.3.3 - Análise da influência do parâmetro de compressibilidade na pressão hidrodinâmica e na massa adicional

Considera-se um modelo bidimensional de um reservatório com uma barragem rígida-móvel. A influência dos efeitos de compressibilidade é estudado para a distribuição das pressões hidrodinâmicas e da massa adicional ao longo da altura na face da barragem devido a uma excitação senoidal com uma frequência  $f$ . Têm-se agora dois meios (a barragem e o reservatório) em que a propagação da onda é possível. Para uma barragem

rígida, a amplificação dinâmica da pressão do reservatório ocorre para uma excitação do reservatório no seu período fundamental (frequência natural).

Observa-se nas equações (4.12) e (4.15) que o parâmetro de compressibilidade do fluido  $\left(\frac{wH}{c}\right)$  ocupa uma operação de subtração no denominador, uma vez que nesta análise ele se torna variável, ocorre situações em que os denominadores nas funções das equações citadas vão a zero e conseqüentemente os valores destas funções saltam ao infinito (ressonância). Para a situação de ressonância denotam-se como referência os parâmetros de compressibilidade  $\Psi_n = \frac{w_n H}{c}$ , onde  $w_n$  representa as frequências fundamentais do reservatório definida por  $w_n = 2pn \frac{c}{4H}$ ;  $n = 1, 3, 5, \mathbf{K}$ . Os outros parâmetros envolvidos são: a altura do reservatório ( $H$ ) e a velocidade da onda na água ( $c$ ).

Portanto  $\Psi_n = \frac{w_n H}{c} = 2pn \frac{c}{4H} \frac{H}{c}$ , que resulta em:  $\Psi_n = \frac{np}{2}$ ;  $n = 1, 3, 5, \mathbf{L}$ , onde se conclui que para estes valores se têm ressonâncias. Uma outra maneira para se determinar os parâmetros de compressibilidade que levam a ressonância, é igualar a zero os denominadores das funções, e determinar a frequência de ressonância, ou seja:

$$m_n^2 \sqrt{m_n^2 - \left(\frac{wH}{c}\right)^2} = 0, \text{ onde } m_n, \text{ como já definido anteriormente, corresponde a um}$$

número ímpar e múltiplo de  $\frac{p}{2}$ . Logo:  $w_n = m_n \frac{c}{H}$ . O parâmetro de compressibilidade de ressonância é então determinado a partir desta frequência, ou seja:

$$\Psi_n = m_n \frac{c}{H} \frac{H}{c} = m_n \quad \therefore \Psi_n = (2n - 1) \frac{p}{2}; n = 1, 2, 3, \mathbf{L}.$$

Pode-se concluir que, atribuindo valores para o parâmetro de compressibilidade do fluido menores que o parâmetro de compressibilidade da primeira ressonância (também chamada de parâmetro de compressibilidade para a primeira frequência ou frequência de corte), a raiz quadrada no denominador das equações (4.12) e (4.15) levará a valores no campo dos números reais para a pressão hidrodinâmica e para a massa adicional, ver Tabela 4.2, Tabela 4.5, Figura 4.5, Figura 4.4, Figura 4.8 e Figura 4.9.

Todavia, atribuindo-se valores para o parâmetro de compressibilidade do fluido maiores que o parâmetro de compressibilidade de corte, a raiz quadrada no denominador das funções levará a valores no campo dos números complexos para a pressão hidrodinâmica e para a massa adicional, ver Tabela 4.3, Tabela 4.6, Figura 4.6 e Figura 4.10.

Atribuindo-se um número ímpar e múltiplo de  $\frac{p}{2}$  para o parâmetro de compressibilidade do fluido este levará o sistema à ressonância, ver Tabela 4.4, Tabela 4.7, Figura 4.7 e Figura 4.11.

#### 4.3.3.1 - Variação do parâmetro de compressibilidade na pressão hidrodinâmica

A Figura 4.4 ilustra uma vista 3-D, que permite se observar o comportamento das pressões hidrodinâmicas quando se varia o parâmetro de compressibilidade do fluido.

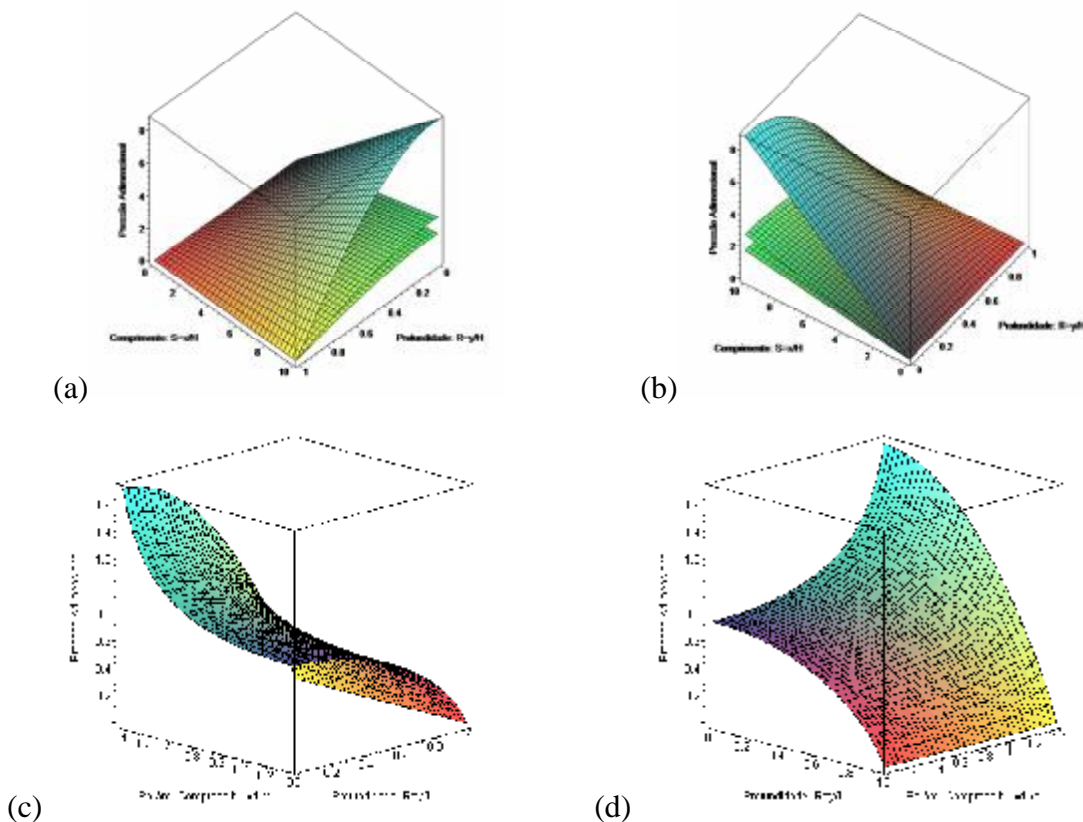


Figura 4.4 - Pressões hidrodinâmicas adimensional em função da variação do parâmetro de compressibilidade do fluido. (a) e (b) no plano xy; (c) e (d) na face da barragem.

A Tabela 4.2 indica os valores da pressão hidrodinâmica (adimensional) obtidos através da Equação (4.12) na face da barragem, variando-se o parâmetro de compressibilidade do fluido no intervalo:  $0,00 \leq \left(\frac{wH}{c}\right) < \Psi_1$ , ao longo da altura da barragem, em função da relação  $(y/H)$ . Em  $y=0$ , tem-se a base da barragem. A Figura 4.5 representa o comportamento das pressões hidrodinâmicas na face da barragem ao longo da altura  $(y)$  para determinados valores do parâmetro de compressibilidade do fluido.

Tabela 4.2 - Pressão hidrodinâmica para determinados valores do parâmetro de compressibilidade do fluido ao longo da altura da barragem.

Pressão hidrodinâmica adimensional: $p(0, y, w)/r H \sqrt{g}$								
$y/H$	$\frac{wH}{c} = 0,00$ **	$\frac{wH}{c} = 0,20$	$\frac{wH}{c} = 0,40$	$\frac{wH}{c} = 0,60$	$\frac{wH}{c} = 0,80$	$\frac{wH}{c} = 1,00$	$\frac{wH}{c} = 1,20$	$\frac{wH}{c} = 1,40$
0,00	0,7425	0,7490	0,7698	0,8083	0,8726	0,9811	1,1853	1,7155
0,10	0,7374	0,7439	0,7645	0,8025	0,8661	0,9733	1,1750	1,6988
0,20	0,7223	0,7286	0,7484	0,7851	0,8464	0,9498	1,1443	1,6489
0,30	0,6966	0,7025	0,7211	0,7557	0,8133	0,9104	1,0929	1,5661
0,40	0,6596	0,6650	0,6820	0,7136	0,7661	0,8546	1,0207	1,4508
0,50	0,6103	0,6150	0,6300	0,6577	0,7039	0,7816	0,9272	1,3036
0,60	0,5467	0,5506	0,5632	0,5864	0,6251	0,6900	0,8114	1,1248
0,70	0,4659	0,4690	0,4788	0,4968	0,5269	0,5773	0,6714	0,9139
0,80	0,3626	0,3648	0,3715	0,3839	0,4045	0,4390	0,5033	0,6686
0,90	0,2256	0,2267	0,2301	0,2364	0,2469	0,2644	0,2971	0,3809
1,00	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

\*\* fluido incompressível  $\equiv$  Westergaard.

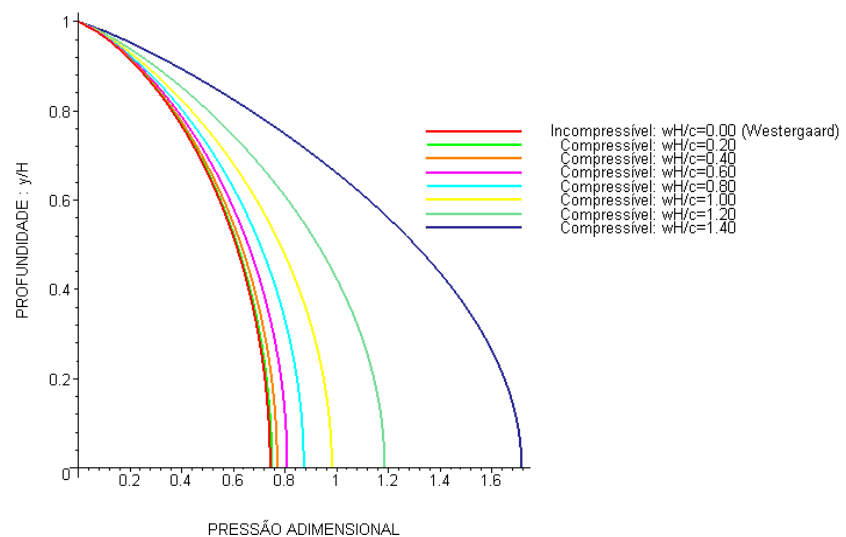


Figura 4.5 - Pressão hidrodinâmica adimensional na face da barragem ao longo da altura, para determinados valores do parâmetro de compressibilidade do fluido.

A Tabela 4.3 mostra os valores das pressões hidrodinâmicas adimensional obtidos através da Equação (4.12) na face da barragem, variando-se o parâmetro de compressibilidade do fluido no intervalo:  $\Psi_1 < \left(\frac{wH}{c}\right) < \Psi_2$ , ao longo da altura da barragem em função da relação  $(y/H)$ . Em  $y=0$ , tem-se a base da barragem.

Tabela 4.3 - Pressão hidrodinâmica para determinados valores do parâmetro de compressibilidade do fluido ao longo da altura da barragem.

Pressão hidrodinâmica adimensional: $p(0, y, w)/r H \frac{w}{g}$								
$y/H$	$\frac{wH}{c} = 1,60$	$\frac{wH}{c} = 1,80$	$\frac{wH}{c} = 2,00$	$\frac{wH}{c} = 2,20$	$\frac{wH}{c} = 2,40$	$\frac{wH}{c} = 2,60$	$\frac{wH}{c} = 2,80$	$\frac{wH}{c} = 3,00$
0,00	-0,0732 - -4,1841i	-0,0748 - -1,4485i	-0,0766 - -1,0285i	-0,0788 - -0,8266i	-0,0814 - -0,7017i	-0,0845 - -0,6145i	-0,0882 - -0,5493i	-0,0927 - -0,4982i
0,10	-0,0678 - -4,1326i	-0,0692 - -1,4307i	-0,0709 - -1,0158i	-0,0752 - -0,6930i	-0,0752 - -0,6930i	-0,0779 - -0,6070i	-0,0813 - -0,5425i	-0,0853 - -0,4920i
0,20	-0,0519 - -3,9794i	-0,0529 - -1,3777i	-0,0540 - -0,9781i	-0,0554 - -0,7861i	-0,0570 - -0,6673i	-0,0590 - -0,5845i	-0,0613 - -0,5224i	-0,0641 - -0,4738i
0,30	-0,0269 - -3,7281i	-0,0272 - -1,2907i	-0,0277 - -0,9164i	-0,0282 - -0,7365i	-0,0287 - -0,6252i	-0,0294 - -0,5476i	-0,0302 - -0,4894i	-0,0312 - -0,4439i
0,40	0,0050 - -3,3850i	0,0054 - -1,1719i	0,0058 - -0,8321i	0,0063 - -0,6687i	0,0069 - -0,5677i	0,0077 - -0,4972i	0,0086 - -0,4444i	0,0098 - -0,4030i
0,50	0,0406 - -2,9586i	0,0416 - -1,0243i	0,0429 - -0,7272i	0,0443 - -0,5845i	0,0461 - -0,4962i	0,0482 - -0,4345i	0,0508 - -0,3884i	0,0538 - -0,3522i
0,60	0,0754 - -2,4594i	0,0770 - -0,8514i	0,0789 - -0,6045i	0,0811 - -0,4859i	0,0837 - -0,4124i	0,0868 - -0,3612i	0,0905 - -0,3229i	0,0950 - -0,2928i
0,70	0,1039 - -1,8996i	0,1057 - -0,6576i	0,1078 - -0,4669i	0,1103 - -0,3753i	0,1132 - -0,3186i	0,1167 - -0,2790i	0,1208 - -0,2494i	0,1258 - -0,2262i
0,80	0,1176 - -1,2930i	0,1192 - -0,4476i	0,1211 - -0,3178i	0,1233 - -0,2554i	0,1259 - -0,2168i	0,1290 - -0,1899i	0,1326 - -0,1697i	0,1369 - -0,1539i
0,90	0,1021 - -0,6545i	0,1031 - -0,2266i	0,1042 - -0,1609i	0,1056 - -0,1293i	0,1072 - -0,1098i	0,1090 - -0,0961i	0,1112 - -0,0859i	0,1138 - -0,0779i
1,00	0,0000 - -0,0000i	0,0000 - -0,0000i	0,0000 - -0,0000i	0,0000 - -0,0000i	0,0000 - -0,0000i	0,0000 - -0,0000i	0,0000 - -0,0000i	0,0000 - -0,0000i

Na Figura 4.6, plotam-se os valores obtidos na Tabela 4.3. Por se ter agora a pressão como um número complexo, representa-se no eixo horizontal a parte real da pressão hidrodinâmica na face da barragem e no eixo vertical a parte imaginária correspondente, para determinados valores do parâmetro de compressibilidade do fluido. A escala de profundidade  $(y/H)$  que aparece nesta figura é válida para a curva de parâmetro de compressibilidade do fluido igual a 1,60. Em  $y=0$ , tem-se a base da barragem.

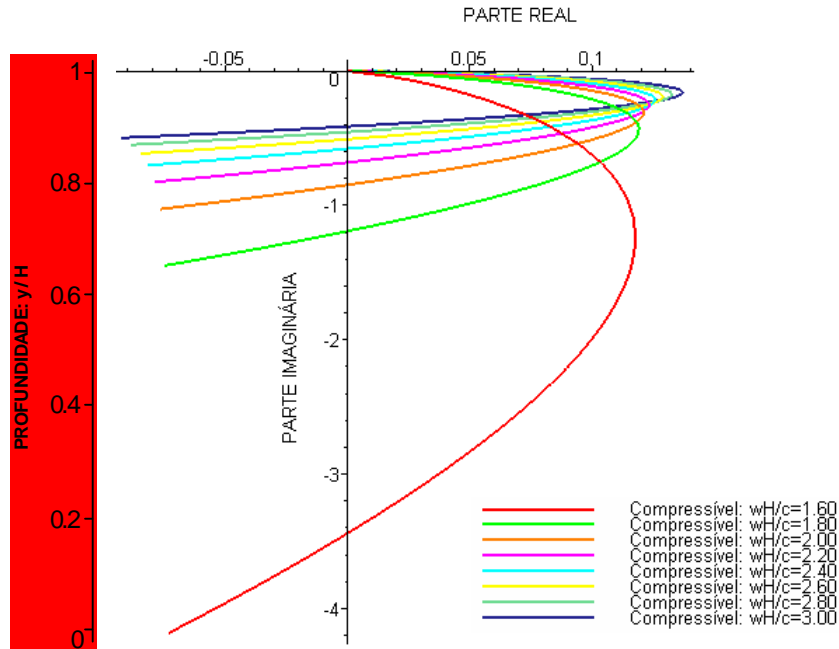


Figura 4.6 - Pressão hidrodinâmica adimensional na face da barragem ao longo da altura.

A Tabela 4.4 indica os valores das pressões hidrodinâmicas adimensionais obtidos através da Equação (4.12) na face e no fundo da barragem, variando-se o parâmetro de compressibilidade do fluido no intervalo:  $0 \leq \left( \frac{wH}{c} \right) \leq \Psi_5$ , esta tabela permite que se perceba o comportamento desta função com o aumento do parâmetro de compressibilidade do fluido, bem como os pontos de ressonância que amplificam as pressões hidrodinâmicas.

Denota-se por  $P_0$  a pressão hidrodinâmica adimensional num ponto na face da barragem ( $x=0$ ) e no fundo do reservatório ( $y=0$ ) dividida pelo fator  $r H \sqrt{g}$ . Assim:  $P_0 = \frac{p(0,0,w)}{r H \sqrt{g}}$ .

A Figura 4.7 representa o comportamento das pressões hidrodinâmicas adimensional na face da barragem ( $x=0$ ) e no fundo do reservatório ( $y=0$ ), através de sua magnitude (módulo) e de seu ângulo de fase, para vários valores do parâmetro de compressibilidade do fluido dentro do intervalo indicado. A Figura 4.6 ilustra de certa forma a Tabela 4.4.



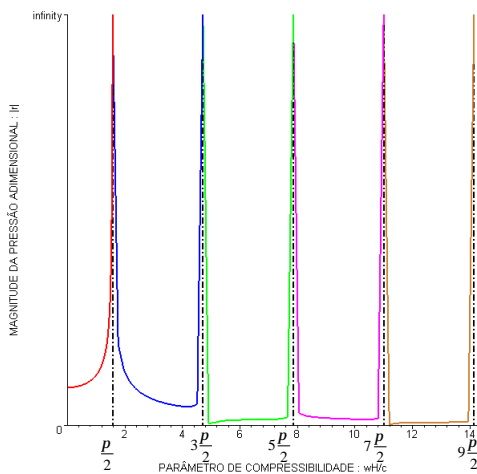
Tabela 4.4 - Pressões hidrodinâmicas para alguns valores do parâmetro de

compressibilidade do fluido no intervalo:  $0 \frac{p}{2} \leq \left( \frac{wH}{c} \right) \leq 9 \frac{p}{2}$ .

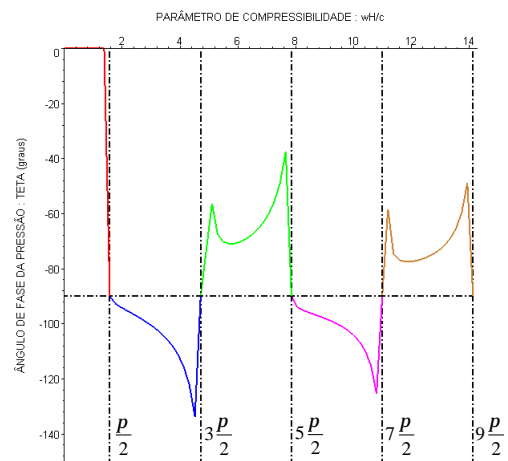
Parâmetro de compressibilidade $\frac{wH}{c}$	Parte real de $P_0$ $d$	Parte imaginária de $P_0$ $b$	Magnitude de $P_0$ $ r $	Ângulo de fase de $P_0$ $q$
0	0,7425	0,0000	0,7425	0,0000
$p/8$	0,7688	0,0000	0,7688	0,0000
$p/4$	0,8667	0,0000	0,8667	0,0000
$3p/8$	1,1547	0,0000	1,1547	0,0000
$p/2$	ressonância		$\infty$	$\frac{p}{2}$
$5p/8$	-0,0763	-1,0808	1,0835	-1,6413
$3p/4$	-0,0808	-0,7250	0,7295	-1,6818
$7p/8$	-0,0872	-0,5644	0,5711	-1,7241
$p$	-0,0965	-0,4680	0,4778	-1,7741
$9p/8$	-0,1110	-0,4022	0,4172	-1,8401
$5p/4$	-0,1368	-0,3538	0,3793	-1,9397
$11p/8$	-0,1981	-0,3164	0,3733	-2,1302
$3p/2$	ressonância		$\infty$	$-\frac{p}{2}$
$13p/8$	0,0306	-0,0460	0,0552	-0,9838
$7p/4$	0,0330	-0,0918	0,0976	-1,2257
$15p/8$	0,0362	-0,1042	0,1103	-1,2364
$2p$	0,0408	-0,1072	0,1147	-1,2071
$17p/8$	0,0478	-0,1065	0,1167	-1,1489
$9p/4$	0,0600	-0,1042	0,1202	-1,0483
$19p/8$	0,0887	-0,1012	0,1346	-0,8511
$5p/2$	ressonância		$\infty$	$-\frac{p}{2}$
$21p/8$	-0,0173	-0,1958	0,1966	-1,6589
$11p/4$	-0,0188	-0,1620	0,1631	-1,6863
$23p/8$	-0,0207	-0,1452	0,1467	-1,7124
$3p$	-0,0235	-0,1339	0,1359	-1,7445
$25p/8$	-0,0278	-0,1253	0,1283	-1,7891
$13p/4$	-0,0352	-0,1184	0,1235	-1,8598
$27p/8$	-0,0525	-0,1125	0,1241	-2,0074
$7p/2$	ressonância		$\infty$	$-\frac{p}{2}$

Continua...

$29p/8$	0,0114	-0,0415	0,0430	-1,3027
$15p/4$	0,0124	-0,0557	0,0571	-1,3517
$31p/8$	0,0138	-0,0602	0,0618	-1,3455
$4p$	0,0157	-0,0618	0,0638	-1,3220
$33p/8$	0,0186	-0,0620	0,0647	-1,2793
$17p/4$	0,0237	-0,0616	0,0660	-1,2035
$35p/8$	0,0356	-0,0609	0,0705	-1,0418
$9p/2$	ressonância		$\infty$	$-\frac{p}{2}$



(a)



(b)

Figura 4.7 – (a) Módulo, e (b) ângulo de fase das pressões hidrodinâmicas adimensional num ponto na face barragem e no fundo de reservatório.

#### 4.3.3.2 - Variação do parâmetro de compressibilidade na massa adicional

A Tabela 4.5 indica os valores da massa adicional (adimensional) obtidos através da Equação (4.15), variando-se o parâmetro de compressibilidade do fluido no intervalo:

$0,00 \leq \left( \frac{wH}{c} \right) < \Psi_1$ , em função da relação  $(y/H)$ . Em  $y=0$ , tem-se a base da barragem.

Tabela 4.5 – Massa adicional para determinados valores do parâmetro de compressibilidade do fluido ao longo da altura da barragem.

Massa adicional adimensional: $M(0, y, w) / \frac{r H^2}{g}$								
$y/H$	$\frac{wH}{c} = 0,00$ **	$\frac{wH}{c} = 0,20$	$\frac{wH}{c} = 0,40$	$\frac{wH}{c} = 0,60$	$\frac{wH}{c} = 0,80$	$\frac{wH}{c} = 1,00$	$\frac{wH}{c} = 1,20$	$\frac{wH}{c} = 1,40$
0,00	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,10	0,0708	0,0747	0,0768	0,0806	0,0870	0,0978	0,1182	0,1710
0,20	0,1472	0,1484	0,1525	0,1601	0,1728	0,1941	0,2343	0,3387
0,30	0,2182	0,2201	0,2261	0,2373	0,2559	0,2873	0,3464	0,4997
0,40	0,2861	0,2886	0,2964	0,3108	0,3350	0,3757	0,4522	0,6508
0,50	0,3497	0,3527	0,3621	0,3795	0,4086	0,4576	0,5498	0,7888
0,60	0,4077	0,4111	0,4219	0,4419	0,4752	0,5314	0,6369	0,9105
0,70	0,4585	0,4622	0,4741	0,4962	0,5330	0,5949	0,7113	1,0127
0,80	0,5001	0,5041	0,5169	0,5405	0,5798	0,6460	0,7703	1,0921
0,90	0,5299	0,5341	0,5473	0,5718	0,6127	0,6815	0,8107	1,1450
1,00	0,5428	0,5470	0,5604	0,5853	0,6267	0,6964	0,8271	1,1656

\*\* fluido incompressível  $\equiv$  Westergaard.

A Figura 4.8 representa o comportamento da massa adicional na face da barragem ao longo da altura  $y$  para determinados valores do parâmetro de compressibilidade do fluido.

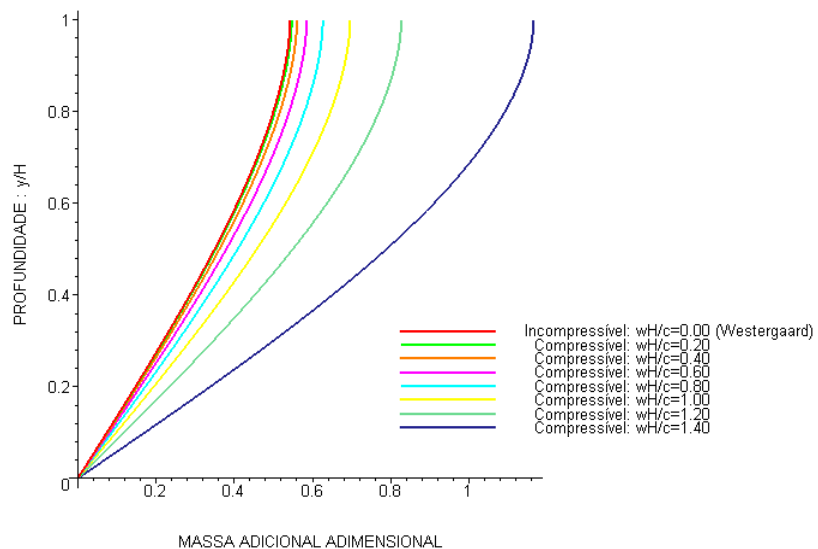


Figura 4.8 – Massa adicional adimensional na face da barragem ao longo da altura, para determinados valores do parâmetro de compressibilidade do fluido.

A Figura 4.9 ilustra uma vista 3-D, que permite se observar o comportamento da massa adicional adimensional ao mesmo tempo em que se varia a altura na barragem e o parâmetro de compressibilidade do fluido.

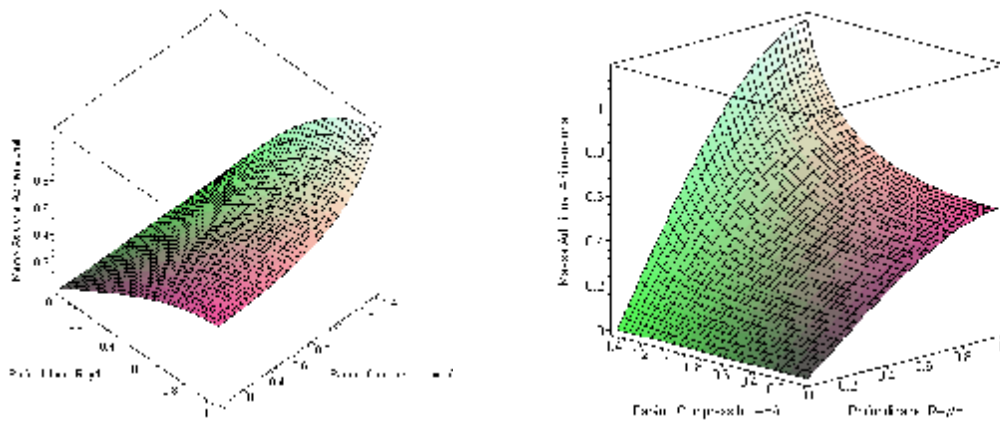


Figura 4.9 – Massa adicional adimensional na face da barragem ao longo da altura, em função da variação nos valores do parâmetro de compressibilidade do fluido.

A Tabela 4.6 indica os valores da massa adicional (adimensional) obtidos através da Equação (4.15), variando-se o parâmetro de compressibilidade do fluido pertencentes ao intervalo:  $\Psi_1 < \left(\frac{wH}{c}\right) < \Psi_2$ , em função da relação  $(y/H)$ . Em  $y=0$ , tem-se a base da barragem.

Tabela 4.6 – Massa adicional para determinados valores do parâmetro de compressibilidade do fluido ao longo da altura da barragem.

Massa adicional adimensional: $M(0, y, w) / \frac{r H^2}{g} \sqrt{\frac{g}{g}}$								
$y/H$	$\frac{wH}{c} = 1,60$	$\frac{wH}{c} = 1,80$	$\frac{wH}{c} = 2,00$	$\frac{wH}{c} = 2,20$	$\frac{wH}{c} = 2,40$	$\frac{wH}{c} = 2,60$	$\frac{wH}{c} = 2,80$	$\frac{wH}{c} = 3,00$
0,00	0,0000 - -0,0000i	0,0000 - -0,0000i	0,0000 - -0,0000i	0,0000 - -0,0000i	0,0000 - -0,0000i	0,0000 - -0,0000i	0,0000 - -0,0000i	0,0000 - -0,0000i
0,10	-0,0071 - -0,4167i	-0,0073 - -0,1443i	-0,0075 - -0,1024i	-0,0079 - -0,0699i	-0,0079 - -0,0699i	-0,0082 - -0,0612i	-0,0086 - -0,0547i	-0,0090 - -0,0496i
0,20	-0,0132 - -0,8231i	-0,0135 - -0,2850i	-0,0138 - -0,2023i	-0,0142 - -0,1626i	-0,0146 - -0,1380i	-0,0152 - -0,1209i	-0,0158 - -0,1081i	-0,0166 - -0,0980i
0,30	-0,0172 - -1,2093i	-0,0176 - -0,4187i	-0,0180 - -0,2973i	-0,0184 - -0,2389i	-0,0190 - -0,2028i	-0,0197 - -0,1776i	-0,0205 - -0,1588i	-0,0214 - -0,1440i
0,40	-0,0184 - -1,5657i	-0,0187 - -0,5420i	-0,0191 - -0,3849i	-0,0196 - -0,3093i	-0,0201 - -0,2626i	-0,0208 - -0,2300i	-0,0216 - -0,2055i	-0,0226 - -0,1864i
0,50	-0,0161 - -1,8835i	-0,0164 - -0,6521i	-0,0167 - -0,4630i	-0,0171 - -0,3721i	-0,0175 - -0,3159i	-0,0180 - -0,2766i	-0,0186 - -0,2473i	-0,0194 - -0,2242i

Continua...

0,60	-0,0103 - -2,1550i	-0,0104 - -0,7461i	-0,0106 - -0,5297i	-0,0107 - -0,4257i	-0,0110 - -0,3614i	-0,0112 - -0,3165i	-0,0115 - -0,2829i	-0,0119 - -0,2566i
0,70	-0,0012 - -2,3734i	-0,0012 - -0,8217i	-0,0011 - -0,5834i	-0,0011 - -0,4689i	-0,0010 - -0,3980i	-0,0009 - -0,3486i	-0,0009 - -0,3116i	-0,0007 - -0,2826i
0,80	0,0100 - -2,5333i	0,0102 - -0,8770i	0,9105 - -0,6227i	0,0108 - -0,5005i	0,0111 - -0,4248i	0,0115 - -0,3721i	0,0120 - -0,3326i	0,0126 - -0,3016i
0,90	0,0214 - -2,6309i	0,0217 - -0,9108i	0,0221 - -0,6467i	0,0226 - -0,5198i	0,0231 - -0,4412i	0,0238 - -0,3864i	0,0246 - -0,3454i	0,0255 - -0,3132i
1,00	0,0280 - -2,6637i	0,0284 - -0,9222i	0,0289 - -0,6548i	0,0294 - -0,5262i	0,0301 - -0,4467i	0,0308 - -0,3912i	0,0317 - -0,3497i	0,0328 - -0,3171i

Na Figura 4.10, plotam-se os valores obtidos na Tabela 4.6. Representa-se no eixo horizontal a parte real da massa adicional na face da barragem e no eixo vertical a parte imaginária correspondente, para determinados valores do parâmetro de compressibilidade do fluido. A escala de profundidade ( $y/H$ ) que aparece nesta figura é válida para a curva de parâmetro de compressibilidade do fluido igual a 1,60. Em  $y=0$ , tem-se a base da barragem.

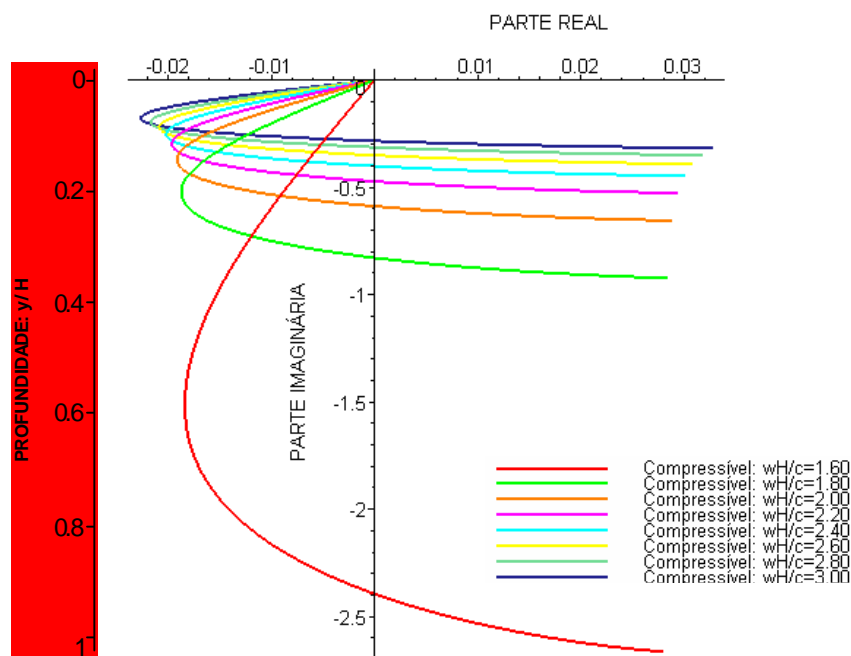


Figura 4.10 – Massa adicional adimensional na face da barragem ao longo da altura.

A Tabela 4.7 indica os valores da massa adicional (adimensional) obtidos através da Equação (4.15) no topo da barragem, variando-se o parâmetro de compressibilidade do

fluido no intervalo:  $0 \leq \left( \frac{wH}{c} \right) \leq \Psi_5$ . Esta tabela permite que se perceba o comportamento

desta função com o aumento do parâmetro de compressibilidade do fluido, bem como os pontos de ressonância que amplificam a massa adicional do sistema barragem-reservatório.

Denota-se por  $M_0$  a massa total adicional adimensional (no topo do reservatório ( $y=H$ ))

dividida pelo fator  $\frac{r H^2}{g}$ . Assim:  $M_0 = \frac{M(0, H, w)}{\frac{r H^2}{g}}$ .

Tabela 4.7 – Massa adicional para valores do parâmetro de compressibilidade do fluido no

$$\text{intervalo: } 0 \frac{p}{2} \leq \left( \frac{wH}{c} \right) \leq 9 \frac{p}{2}.$$

Parâmetro de compressibilidade $\frac{wH}{c}$	Parte real de $M_0$ $d$	Parte imaginária de $M_0$ $b$	Magnitude de $M_0$ $ r $	Ângulo de fase de $M_0$ $q$
0	0,5428	0,0000	0,5428	0,0000
$p/8$	0,5598	0,0000	0,5598	0,0000
$p/4$	0,6229	0,0000	0,6229	0,0000
$3p/8$	0,8076	0,0000	0,8076	0,0000
$p/2$	ressonância		$\infty$	$\frac{p}{2}$
$5p/8$	0,0763	-0,6880	0,6886	-1,5290
$3p/4$	0,0299	-0,4615	0,4625	-1,5061
$7p/8$	0,0315	-0,3593	0,3607	-1,4833
$p$	0,0337	-0,2979	0,2998	-1,4582
$9p/8$	0,0371	-0,2560	0,2587	-1,4269
$5p/4$	0,0430	-0,2252	0,2293	-1,3821
$11p/8$	0,0564	-0,2014	0,2091	-1,2978
$3p/2$	ressonância		$\infty$	$-\frac{p}{2}$
$13p/8$	0,0092	-0,2127	0,2129	-1,5276
$7p/4$	0,0096	-0,1856	0,1858	-1,5191
$15p/8$	0,0101	-0,1683	0,1686	-1,5109
$2p$	0,0108	-0,1549	0,1553	-1,5012
$17p/8$	0,0119	-0,1440	0,1445	-1,4883
$9p/4$	0,0136	-0,1347	0,1354	-1,4702
$19p/8$	0,0175	-0,1267	0,1279	-1,4335
$5p/2$	ressonância		$\infty$	$-\frac{p}{2}$

Continua...

$21p/8$	0,0045	-0,1263	0,1264	-1,5352
$11p/4$	0,0047	-0,1169	0,1170	-1,5306
$23p/8$	0,0050	-0,1101	0,1102	-1,5254
$3p$	0,0053	-0,1045	0,1046	-1,5201
$25p/8$	0,0058	-0,0996	0,0998	-1,5126
$13p/4$	0,0065	-0,0953	0,0955	-1,5027
$27p/8$	0,0082	-0,0913	0,0917	-1,4812
$7p/2$	ressonância		$\infty$	$-\frac{p}{2}$
$29p/8$	0,0027	-0,0901	0,0901	-1,5408
$15p/4$	0,0028	-0,0854	0,0854	-1,5380
$31p/8$	0,0029	-0,0818	0,0819	-1,5354
$4p$	0,0031	-0,0788	0,0789	-1,5315
$33p/8$	0,0034	-0,0760	0,0761	-1,5261
$17p/4$	0,0038	-0,0735	0,0736	-1,5191
$35p/8$	0,0047	-0,0712	0,0714	-1,5049
$9p/2$	ressonância		$\infty$	$-\frac{p}{2}$

A Figura 4.11 representa o comportamento da massa adicional adimensional total no reservatório ( $y=H$ ), através de sua magnitude (módulo) e de seu ângulo de fase, para valores do parâmetro da primeira ressonância de compressibilidade entre zero e o quinto parâmetro de compressibilidade.

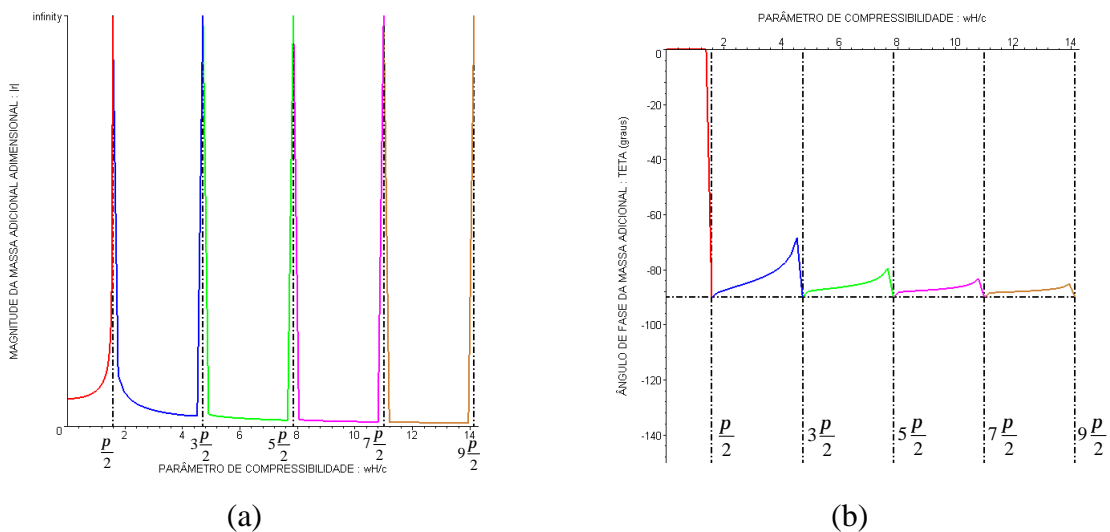


Figura 4.11 – Módulo (a), e fase (b) da massa adicional total adimensional.

A partir dos resultados obtidos neste estudo, alguns comentários e conclusões podem ser evidenciados:

Com a Técnica de Separação de Variável se soluciona a equação da onda com fronteira rígida, e representa a solução do campo das pressões hidrodinâmicas para o fluido compressível. A partir desta solução mais geral e desprezando o parâmetro de compressibilidade do fluido ( $PCF \rightarrow 0$ ) chega-se a mesma solução encontrada para a equação de Laplace. Portanto a solução anterior (fluido incompressível) é um caso particular desta.

As pressões hidrodinâmicas e a massa adicional aumentam com o crescimento do parâmetro de compressibilidade do fluido no intervalo  $[0, p/2]$ , onde neste intervalo ela resulta no campo dos números reais (Tabela 4.2, Figura 4.5, Figura 4.4 e Tabela 4.4) e (Tabela 4.5, Figura 4.8, e Tabela 4.7), respectivamente.

Para valores do parâmetro de compressibilidade do fluido nos intervalos:  $(p/2, 3p/2)$ ,  $(3p/2, 5p/2)$ ,  $(5p/2, 7p/2)$ , e assim sucessivamente, as pressões hidrodinâmicas e a massa adicional situam-se num campo dos números complexos (Tabela 4.3, Figura 4.6 e Tabela 4.4) e (Tabela 4.6, Figura 4.10 e Tabela 4.7), respectivamente.

Quando o parâmetro de compressibilidade do fluido assume valores múltiplos ímpares de  $(p/2)$ , as pressões hidrodinâmicas e a massa adicional vão a ressonância (Tabela 4.4 e Tabela 4.7).

De forma geral observou-se que as pressões hidrodinâmicas e a massa adicional aumentam com o crescimento do parâmetro de compressibilidade do fluido, podendo atingir valores várias vezes superáveis àqueles esperados em problemas correlatos, e outros tão altos que são desprovidos de sentido físico (por exemplo, na ressonância).



## 5 - BARRAGEM FLEXÍVEL NA INTERFACE DE UM FLUIDO COMPRESSÍVEL

### 5.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo considera-se a solução da equação da onda para representar o problema de interação barragem-reservatório, levando em conta a flexibilidade da barragem e os efeitos de compressibilidade da água do reservatório. Trata-se, portanto de um caso mais geral do que os anteriores, ou seja, através de simplificações no modelo desenvolvido neste capítulo (movimento da barragem e/ou efeitos de compressibilidade da água), se cairá nos modelos matemáticos desenvolvidos nos capítulos anteriores deste trabalho (capítulo 2, 3 ou 4).

### 5.2 - FORMULAÇÕES MATEMÁTICA PARA O PROBLEMA

#### 5.2.1 - Equações fundamentais

Como já visto anteriormente no capítulo 4, o modelo matemático é representado pela equação da onda dada em termos do campo de pressões hidrodinâmicas ( $p$ ):

$$\nabla^2 p(x, y, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(x, y, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (5.1)$$

#### 5.2.2 - Solução exata (em séries) para a pressão hidrodinâmica e para a massa adicional

Sendo a barragem uma estrutura flexível, ela está sujeita a uma aceleração de amplitude ( $a_B$ ) relacionada à aceleração horizontal do solo de amplitude ( $\frac{v_g}{g}$ ) através de sua deformada modal  $f_j(y/H)$ . O campo de pressões hidrodinâmicas resultará da solução da Equação (5.1), que será também obtida pela técnica de separação de variável com as condições de contorno mostradas na Figura 5.1:

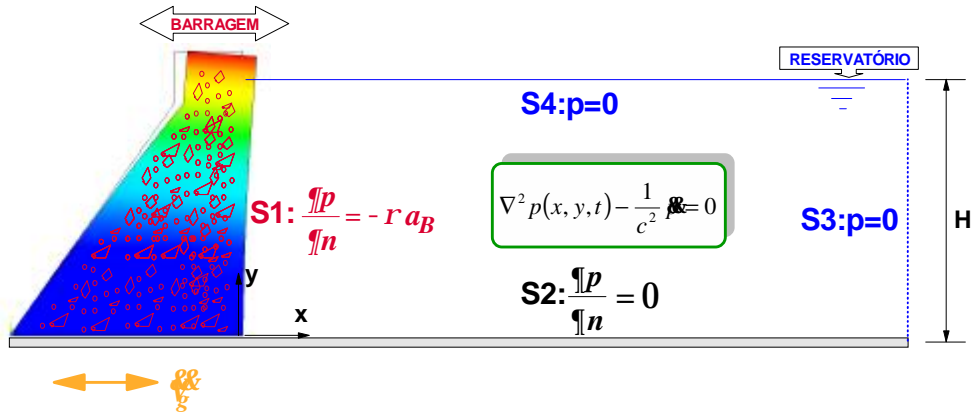


Figura 5.1 - Esquema da interação barragem-reservatório com as condições de contorno.

Seja a Equação (5.1) para o domínio do fluido no plano  $x$ - $y$ , com as seguintes condições de contorno:

- i) Superfície S2 - Contorno Rígido:  $\left. \frac{\partial}{\partial y} p(x, y, t) \right|_{y=0} = 0$
- ii) Superfície S4 - Superfície Livre:  $p(x, y, t)|_{y=H} = 0$
- iii) Superfície S3 – Reservatório Infinito:  $p(x, y, t)|_{x \rightarrow \infty} = 0$
- iv) Superfície S1 - Interface Fluido-Estrutura:  $\left. \frac{\partial}{\partial x} p(x, y, t) \right|_{x=0} = -r \left[ \sqrt{a_g} f_j(y/H) \right]$

$\sqrt{a_g}$  corresponde à amplitude da aceleração do terremoto na base da barragem, geralmente é expresso em função da gravidade ( $\sqrt{a_g} = a g$ ).

Aplicando-se a técnica de separação de variável (Pedroso, 2003 e Chakrabarti & Chopra, 1974), tem-se:

$$p(x, y, t) = F(x)G(y)T(t) \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \ddot{p} &= 0 \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) [F(x)G(y)T(t)] - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) [F(x)G(y)T(t)] &= 0 \\ \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} G(y)T(t) + F(x) \frac{\partial^2 G(y)}{\partial y^2} T(t) - \frac{1}{c^2} F(x)G(y) \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Dividindo a Equação (5.3) por  $p(x, y, t)$ :

$$\frac{F''}{F} + \frac{G''}{G} - \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{F}}{T} = 0 \quad (5.4)$$

Portanto:

$$-\frac{G''}{G} = \frac{F''}{F} - \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{F}}{T} = I^2 \quad \therefore \begin{cases} G'' + I^2 G = 0 \\ F'' - \left( I^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{F}}{T} \right) F = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

$$(5.6)$$

Supondo que a função  $T(t)$  seja harmônica no tempo (periódica), ou seja:

$$\ddot{F}(t) = -w^2 T(t) \quad (5.7)$$

Substituindo a Equação (5.7) na Equação (5.6), tem-se:

$$F'' + h F = 0; \text{ com } h = -\left( I^2 - \frac{w^2}{c^2} \right) \quad (5.8)$$

A Equação (5.5) tem como solução a função:  $G(y) = A \cos(I y) + B \sin(I y)$ . Usando as condições de contorno da direção  $y$ , encontra-se:

$$G_n(y) = A_n \cos \left[ (2n-1) \frac{P}{2H} y \right] \quad (5.9)$$

A Equação (5.8) tem como solução a função:  $F(x) = C_1 e^{\sqrt{-h} x} + C_2 e^{-\sqrt{-h} x}$ . Usando as condições de contorno da direção  $x$ , tem-se:

$$iii) p(x, y, t) \Big|_{x=\infty} = 0$$

$$G(y)T(t) \left[ C_1 e^{\sqrt{-h} x} + C_2 e^{-\sqrt{-h} x} \right] \Big|_{x=\infty} = 0$$

$$C_1 e^{\sqrt{-h}\infty} + C_2 e^{-\sqrt{-h}\infty} = 0$$

$$C_1 = -C_2 \frac{1}{e^{2(\sqrt{-h}\infty)}} \quad \therefore C_1 = 0$$

Portanto:

$$F_n(x) = C_n e^{-\sqrt{I_n^2 - \frac{w^2}{c^2}} x}$$

$$F_n(x) = C_n e^{-\sqrt{\left(\left(\frac{(2n-1)p}{2H}\right)^2 - \frac{w^2}{c^2}\right)} x} \quad (5.10)$$

Dando-se a pressão no domínio da frequência, vem:

$$p_n(x, y, w) = F_n(x) G_n(y)$$

$$p(x, y, w) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n e^{-\sqrt{-h}x} \cos(I_n y); \quad I_n = (2n-1) \frac{p}{2H}; \quad h = -\left(I^2 - \frac{w^2}{c^2}\right) \quad (5.11)$$

$$iv) \left. \frac{\partial}{\partial x} p(x, y, w) \right|_{x=0} = -r \left[ \mathfrak{V}_g^{\mathfrak{W}} f_j(y/H) \right]$$

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cos(I_n y) \left[ (-\sqrt{-h}) e^{-\sqrt{-h}x} \right] \right\} \Big|_{x=0} = -r \left[ \mathfrak{V}_g^{\mathfrak{W}} f_j(y/H) \right]$$

$$\int_0^H \left\{ \left[ \sum_{n=1}^{\infty} K_n \operatorname{sen}\left(np \frac{y}{H}\right) \sqrt{-h} = r \mathfrak{V}_g^{\mathfrak{W}} f_j(y/H) \right] \operatorname{sen}\left(mp \frac{y}{H}\right) \right\} dy$$

Usando a propriedade de ortogonalidade da função seno (em séries), tem-se:

$$\frac{H}{2} K_n \sqrt{-h} = r \mathfrak{V}_g^{\mathfrak{W}} \int_0^H f_j(y/H) \cos(I_n y) dy$$

$$K_{j,n} = \frac{2r\sqrt{g}}{H\sqrt{-h}} \int_0^H f_j(y/H) \cos(I_n y) dy$$

Portanto:

$$p_j(x, y, w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2r\sqrt{g}}{H\sqrt{-h}} \int_0^H f_j(y/H) \cos(I_n y) dy e^{-\sqrt{-h}x} \cos(I_n y)$$

$$p_j(x, y, w) = \frac{2r\sqrt{g}}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{j,n}}{\sqrt{-h}} e^{-\sqrt{-h}x} \cos(I_n y)$$

ou ainda, em termos do parâmetro  $m_n = I_n H$ , tem-se:

$$p_j(x, y, w) = r\sqrt{g} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{j,n}}{\sqrt{m_n^2 - \left(\frac{wH}{c}\right)^2}} e^{-\sqrt{m_n^2 - \left(\frac{wH}{c}\right)^2} \frac{x}{H}} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \quad (5.12)$$

$$; I_{j,n} = \int_0^H f_j(y/H) \cos(m_n y/H) dy ; \quad m_n = (2n-1) \frac{P}{2}$$

A Equação (5.12) corresponde à solução exata (em séries) para o cálculo das pressões hidrodinâmicas no plano da barragem-reservatório levando em conta o efeito de compressibilidade do fluido através do parâmetro  $\left(\frac{wH}{c}\right)$ , bem como a participação da deformada modal da barragem através da função  $f_j(y/H)$ . Os parâmetros envolvidos  $(r, \sqrt{g}, H)$  são respectivamente: a densidade do fluido, a aceleração na base da barragem e a altura do reservatório.

Uma vez estabelecida a expressão para o campo de pressões, Equação (5.12), encontra-se a equação para a distribuição da força ao longo da altura na face da barragem de acordo com a área tributária adotada,  $F_j(0, y, w) = \int_0^y p_j(0, y, w) dy$ . Dividindo esta força obtida pela

aceleração da gravidade ( $g$ ) tem-se a massa adicional associada à face da barragem:

$$M_j(0, y, w) = \frac{F_j(0, y, w)}{g}. \text{ Assim:}$$

$$F_j(0, y, w) = \int_0^y p_j(0, y, w) dy = \int_0^y \left( r \sqrt{\frac{g}{g}} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{j,n}}{\sqrt{m_n^2 - \left(\frac{wH}{c}\right)^2}} (1) \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \right) dy$$

$$M(0, y, w) = \frac{F(0, y, w)}{g} = \frac{1}{g} r \sqrt{\frac{g}{g}} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{j,n}}{\sqrt{m_n^2 - \left(\frac{wH}{c}\right)^2}} \frac{H}{m_n} \text{sen}\left(m_n \frac{y}{H}\right)$$

$$M(0, y, w) = \frac{r \sqrt{\frac{g}{g}}}{g} H 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{j,n}}{m_n \sqrt{m_n^2 - \left(\frac{wH}{c}\right)^2}} \text{sen}\left(m_n \frac{y}{H}\right) \quad (5.13)$$

$$I_{j,n} = \int_0^H f_j(y/H) \cos(m_n y/H) dy; \quad m_n = (2n-1) \frac{p}{2}$$

A Equação (5.13) corresponde à solução exata (em séries) para o cálculo da massa adicional, ao longo da altura na face da barragem e que leva em conta o efeito de compressibilidade do fluido através do parâmetro  $\left(\frac{wH}{c}\right)$ , bem como a participação da deformada modal da barragem através da função  $f_j(y/H)$ .

A Equação (5.12) e a Equação (5.13) representam as expressões mais gerais para o cálculo das pressões hidrodinâmicas e massa adicional, respectivamente, realizadas até o momento no presente trabalho. Significa dizer que, a partir destas formulações obtidas, as equações demonstradas nos capítulos anteriores passam a ser casos particulares destas. Em outras palavras, através de simplificações nas expressões mais gerais é possível se obter as mesmas expressões anteriores dos outros modelos analíticos.

Para o caso particular da barragem com movimento de corpo rígido tem-se a primeira deformada modal constante,  $f_1(y/H) = 1$ , acompanhando a aceleração do solo ao longo da altura da barragem, ver Figura 3.2. Logo:

$$I_{1,n} = \int_0^H f_1(y/H) \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) dy = \int_0^H (1) \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) dy = \frac{H}{m_n} \text{sen}\left(m_n \frac{y}{H}\right) \Big|_0^H \quad \therefore I_{1,n} = \frac{H}{m_n} (-1)^{n+1}$$

Para o caso particular de consideração do reservatório com fluido incompressível, o parâmetro de compressibilidade do fluido  $\left(\frac{wH}{c}\right)$  torna-se um termo muito menor que um quando elevado ao quadrado, tornando-se desprezível (igual à zero) nas equações que o contém. Portanto:

$$c \rightarrow \infty \Rightarrow \left(\frac{wH}{c}\right)^2 \rightarrow 0$$

Em resumo:

a) Consideração de barragem com movimento de corpo rígido:

$$f_1(y/H) = 1 \Rightarrow I_{1,n} = \frac{H}{m_n} (-1)^{n+1} \quad (5.14)$$

b) Consideração de reservatório com fluido incompressível:

$$c \rightarrow \infty \Rightarrow \left(\frac{wH}{c}\right)^2 \rightarrow 0 \quad (5.15)$$

A Tabela 5.1 e a Tabela 5.2 ilustram, respectivamente, as expressões para as pressões hidrodinâmicas e massa adicional de acordo com a combinação das considerações feitas anteriormente, equações (5.14) e (5.15). Quando estas simplificações são substituídas nas equações (5.12) e (5.13) obtém-se equivalências com as equações dos modelos analíticos simplificados considerados nos capítulos anteriores.

Tabela 5.1 - Expressões para o campo de pressões hidrodinâmicas.

Obtidas a partir do modelo analítico mais geral (Equação da onda com fronteira flexível)	Modelo analítico simplificado
<p>_ Barragem rígida e fluido incompressível, (5.14) e (5.15) em (5.12):</p> $p(x, y) = r \sqrt{\frac{g}{g}} H 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} e^{-m_n \frac{x}{H}} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right)$	<p>_ Equação de Laplace com fronteira rígida</p> <p>Equação (2.30)</p>
<p>_ Barragem flexível e fluido incompressível, (5.15) em (5.12):</p> $p_j(x, y) = r \sqrt{\frac{g}{g}} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{j,n}}{m_n} e^{-m_n \frac{x}{H}} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right)$	<p>_ Equação de Laplace com fronteira flexível</p> <p>Equação (3.18)</p>
<p>_ Barragem rígida e fluido compressível, (5.14) em (5.12):</p> $p(x, y, w) = r \sqrt{\frac{g}{g}} H 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n \sqrt{m_n^2 - \left(\frac{wH}{c}\right)^2}} e^{-\sqrt{m_n^2 - \left(\frac{wH}{c}\right)^2} \frac{x}{H}} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right)$	<p>_ Equação da onda com fronteira rígida</p> <p>Equação (4.12)</p>
<p>_ Barragem flexível e fluido compressível:</p> $p_j(x, y, w) = r \sqrt{\frac{g}{g}} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{j,n}}{\sqrt{m_n^2 - \left(\frac{wH}{c}\right)^2}} e^{-\sqrt{m_n^2 - \left(\frac{wH}{c}\right)^2} \frac{x}{H}} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right)$	<p>_ Equação da onda com fronteira flexível</p> <p>Equação (5.12)</p>

Tabela 5.2 - Expressões para a massa adicional associada à barragem.

Obtidas a partir do modelo analítico mais geral (Equação da onda com fronteira flexível)	Modelo analítico simplificado
<p>_ Barragem rígida e fluido incompressível, (5.14) e (5.15) em (5.13):</p> $M(0, y) = \frac{r \sqrt{\frac{g}{g}}}{g} H^2 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^3} \text{sen}\left(m_n \frac{y}{H}\right)$	<p>_ Equação de Laplace com fronteira rígida</p> <p>Equação (2.36)</p>
<p>_ Barragem flexível e fluido incompressível, (5.15) em (5.13):</p> $M_j(0, y) = \frac{r \sqrt{\frac{g}{g}}}{g} H 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{j,n}}{m_n^2} \text{sen}\left(m_n \frac{y}{H}\right)$	<p>_ Equação de Laplace com fronteira flexível</p> <p>Equação (3.19)</p>
<p>_ Barragem rígida e fluido compressível, (5.14) em (5.13):</p> $M(0, y, w) = \frac{r \sqrt{\frac{g}{g}}}{g} H^2 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2 \sqrt{m_n^2 - \left(\frac{wH}{c}\right)^2}} \text{sen}\left(m_n \frac{y}{H}\right)$	<p>_ Equação da onda com fronteira rígida</p> <p>Equação (4.15)</p>
<p>_ Barragem flexível e fluido compressível:</p> $M(0, y, w) = \frac{r \sqrt{\frac{g}{g}}}{g} H 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{j,n}}{m_n \sqrt{m_n^2 - \left(\frac{wH}{c}\right)^2}} \text{sen}\left(m_n \frac{y}{H}\right)$	<p>_ Equação da onda com fronteira flexível</p> <p>Equação (5.13)</p>

onde:  $I_{j,n} = \int_0^H f_j(y/H) \cos(m_n y/H) dy$ ;  $m_n = (2n-1) \frac{p}{2}$



### 5.3 - PROCEDIMENTO DE CÁLCULO PARA A PRESSÃO HIRODINÂMICA – MÉTODO DE CHOPRA

Os maiores efeitos produzidos por um sismo horizontal podem ser representados por um carregamento distribuído equivalente (carregamento sísmico), que deve ser considerado atuante na direção de montante ou jusante, separadamente. O carregamento sísmico pode ser determinado da seguinte forma (Chopra, 1978):

- Método de Chopra:

1. Cálculo de  $T_s$ , o período fundamental de vibração da barragem, em segundos, sem considerar a influência do reservatório, a partir da Equação (5.16).

$$T_s = 0,01206 \frac{H_s}{\sqrt{E}} \quad (5.16)$$

onde:

$H_s$  corresponde a altura da barragem, em metros (m);

$E$  corresponde ao módulo de elasticidade do concreto, em giga pascal (GPa).

A Equação (5.16) é uma expressão aproximada obtida em Chopra que permite determinar o período fundamental de vibração de perfis típicos de barragens, sem a influência do reservatório, para critérios preliminares de projeto. Este resultado provém de modelos numéricos e experimentais.

2. Cálculo de  $\tilde{T}_s$ , o período fundamental de vibração da barragem em segundos, incluindo a influência do reservatório, a partir da Equação (5.17).

$$\tilde{T}_s = R_1 T_s \quad (5.17)$$

onde:

$R_1$  corresponde ao valor obtido na Figura 5.2 para os valores de  $H/H_s$  e  $E$ ;

$H$  corresponde a profundidade do reservatório, em metros (m).

O gráfico da Figura 5.2 é resultado de diversas análises conduzidas por Chopra para uma barragem de geometria padrão. Desta forma, o período fundamental de vibração incluindo a influência do reservatório pode ser facilmente determinado, a partir do período natural da barragem no ar.

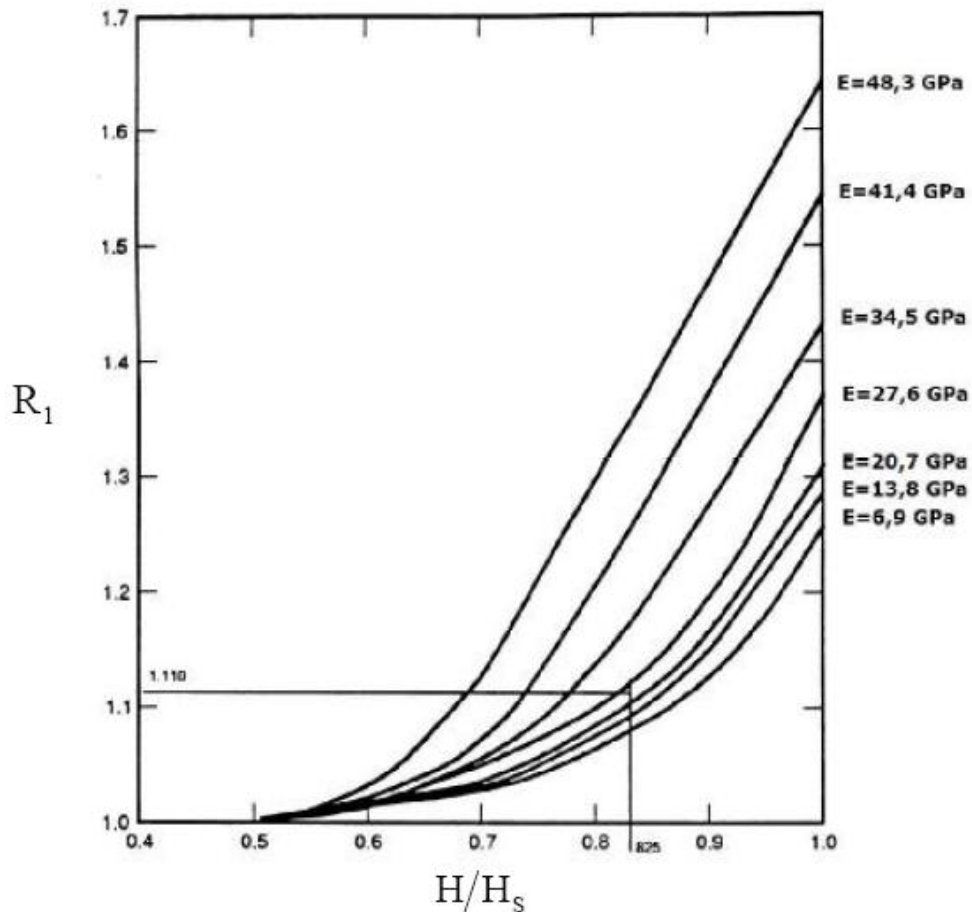


Figura 5.2 – Gráfico para o cálculo de  $R_1$  (USACE, 1995)

3. Cálculo de  $R_2$ , a partir da Equação (5.18).

$$R_2 = \frac{1}{\tilde{T}_s} \frac{4H}{c} \quad (5.18)$$

onde:

$c$  corresponde a velocidade do som na água, em metros por segundo ( $c = 1\,438,656$  m/s);

$\tilde{T}_s$  corresponde ao período fundamental de vibração na água calculado no Item 2.

A expressão que fornece as pressões hidrodinâmicas é dada pela Equação (5.19), dada por Chopra (1978).

$$\frac{g}{gH} \tilde{p}_1(\hat{y}, R_2) = \frac{4}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \frac{\hat{I}_{1n}}{\sqrt{1 - \frac{1}{(2n-1)^2} (R_2)^2}} \cos\left[\frac{(2n-1)p}{2} \hat{y}\right] \quad (5.19)$$

$$\hat{I}_{1n} = \int_0^1 y(\hat{y}) \cos\left[\frac{(2n-1)p}{2} \hat{y}\right] d\hat{y}; \quad \hat{y} = \frac{y}{H}$$

#### 5.4 - RELAÇÃO ENTRE A FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DESENVOLVIDA E O PROCEDIMENTO DE CÁLCULO PELO MÉTODO DE CHOPRA PARA A PRESSÃO HIDRODINÂMICA

Seja a Equação (5.19) reescrita sob a seguinte forma:

$$\tilde{p}_1(\hat{y}, R_2) = \frac{gH}{g} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \frac{p}{2}} \frac{\hat{I}_{1n}}{\sqrt{1 - \left[\frac{1}{(2n-1)}\right]^2 (R_2)^2}} \cos\left[(2n-1) \frac{p}{2} \hat{y}\right] \quad (5.20)$$

$$; \hat{I}_{1n} = \int_0^1 y(\hat{y}) \cos\left[(2n-1) \frac{p}{2} \hat{y}\right] d\hat{y}; \quad \hat{y} = \frac{y}{H}$$

Pretende-se mostrar neste tópico o quanto estão relacionadas às equações (5.12) e (5.19). Para isto foram feitas algumas manipulações algébricas na Equação (5.20) a fim de ressaltar-se a equivalência com a Equação (5.12). Sendo assim alguns parâmetros são trabalhados em relação a sua forma original, a saber:

a) Parâmetro  $\frac{gH}{g}$ :

O peso específico pode ser escrito como  $g = r g$ , assim:

$$\frac{gH}{g} = \frac{r g}{g} H = r H \quad (5.21)$$

b) Parâmetro  $R_2$ , definido na Equação (5.18):

$$R_2 = \frac{1}{\tilde{T}_s} \frac{4H}{c} = \frac{f}{c/4H} = \frac{f}{f_w} \quad (5.22)$$

onde  $f_w$  é a frequência fundamental do reservatório e  $f$  corresponde a frequência fundamental de vibração da barragem em hertz (Hz), incluindo a influência do reservatório (massa adicional)  $f = \frac{1}{\tilde{T}_s}$ .

Através da Equação (4.13) dada no capítulo 4, pode-se escrever:

$$\frac{f}{f_w} = \frac{2}{p} \frac{wH}{c} \quad (5.23)$$

Portanto, substituindo a Equação (5.23) na Equação (5.22) tem-se:

$$R_2 = \frac{2}{p} \frac{wH}{c} \quad (5.24)$$

onde  $R_2$  não é nada mais do que a relação de frequências entre a frequência da barragem na água e a frequência do reservatório.

c) Parâmetro  $\hat{I}_{1n}$ , definido na Equação (5.20):

$$\hat{I}_{1n} = \int_0^1 y(\hat{y}) \cos \left[ (2n-1) \frac{p}{2} \hat{y} \right] d\hat{y}; \quad \hat{y} = \frac{y}{H} \quad (5.25)$$

A variável normalizada  $\hat{y}$  tem como elemento diferencial  $d\hat{y}$ , que pode ser encontrado:

$$\hat{y} = \frac{y}{H} \Leftrightarrow \frac{d\hat{y}}{dy} = \frac{1}{H} \Rightarrow d\hat{y} = \frac{1}{H} dy \quad (5.26)$$

Escrevendo a Equação (5.25) em termos da variável  $y$ , resulta em:

$$\hat{I}_{1n} = \frac{1}{H} \int_0^H y \left( \frac{y}{H} \right) \cos \left[ (2n-1) \frac{p}{2} \frac{y}{H} \right] dy \quad (5.27)$$

Levando as equações (5.21), (5.24), (5.26) e (5.27) na Equação (5.20), pode-se escrever:

$$\tilde{p}_1(y, w) = r H 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \frac{p}{2}} \frac{\frac{1}{H} \int_0^H y \left( \frac{y}{H} \right) \cos \left[ (2n-1) \frac{p}{2} \frac{y}{H} \right] dy}{\sqrt{1 - \left[ \frac{1}{(2n-1)} \right]^2 \left( \frac{2}{p} \frac{wH}{c} \right)^2}} \cos \left[ (2n-1) \frac{p}{2} \frac{y}{H} \right] \quad (5.28)$$

ou ainda:

$$\tilde{p}_1(y, w) = r 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{1n}}{\sqrt{m_n^2 - \left( \frac{wH}{c} \right)^2}} \cos \left( m_n \frac{y}{H} \right) \quad (5.29)$$

$$I_{1n} = \int_0^H y \left( \frac{y}{H} \right) \cos \left( m_n \frac{y}{H} \right) dy; \quad m_n = (2n-1) \frac{p}{2}$$

Através da Equação (5.29) observa-se que a menos da constante multiplicadora  $\sqrt{\frac{g}{g}}$  (amplitude da aceleração do terremoto na base da barragem) a Equação (5.19) é equivalente a Equação (5.12), ou seja: a equação proposta por Chopra está determinada para um valor unitário de amplitude de aceleração da barragem ( $\sqrt{\frac{g}{g}} = 1$ ), fato este que é compensado nos passos seguintes de seu procedimento dentro do Método Pseudo-Dinâmico para o cálculo das tensões em barragens. Portanto, a relação entre as soluções para a pressão hidrodinâmica na face da barragem e ao longo de sua altura proposta por Chopra,  $\tilde{p}_1(y, w)$  e a proposta no presente trabalho,  $p_1(0, y, w)$  é a seguinte:

$$p_1(0, y, w) = \sqrt{\frac{g}{g}} \tilde{p}_1(y, w) \quad (5.30)$$

### 5.4.1 - Análise gráfica da pressão hidrodinâmica e massa adicional

Para análise das equações (5.12) e (5.13) torna-se necessário saber que função adotar para representar a primeira deformada modal da estrutura. A deforma fundamental da Figura 5.3 corresponde ao resultado de diversas análises conduzidas por Chopra, via Método dos Elementos Finitos, para diferentes perfis de barragens usuais, mas guardando certo padrão de tipicidade.

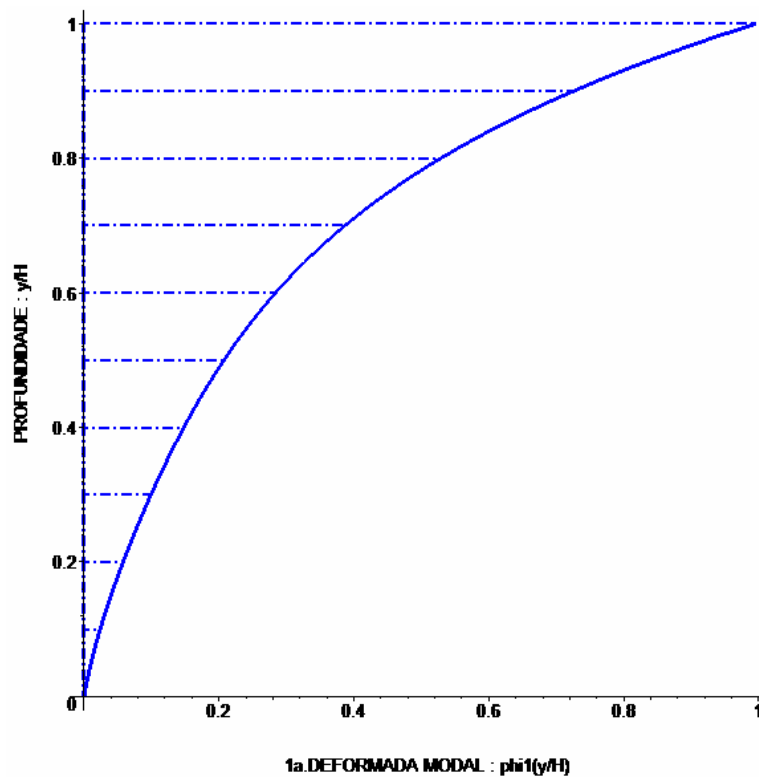


Figura 5.3 – Modo fundamental de vibração da barragem (Chopra, 1978)

Retirando-se pontos do gráfico, pode-se encontrar por interpolação polinomial de valores pontuais de deslocamentos na face vertical da barragem a seguinte função para esta deformada fundamental (Ribeiro, 2006):

$$f_1(y/H) = 0,1718(y/H) + 0,7914(y/H)^2 - 1,2551(y/H)^3 + 1,2877(y/H)^4 \quad (5.31)$$

Neste caso a integral  $I_{1,n}$ , resulta em:

$$I_{1,n} = \int_0^H f_1(y/H) \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) dy$$

$$I_{1,n} = \int_0^H \left[0,1718(y/H) + 0,7914(y/H)^2 - 1,2551(y/H)^3 + 1,2877(y/H)^4\right] \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) dy$$

$$I_{1,n} = \frac{H}{m_n} \left[ \frac{(-1)^{n+1} (0,9958 m_n^4 - 9,5046 m_n^2 + 30,9048) - 0,1718 m_n^3 - 7,5306 m_n}{m_n^4} \right]$$

Substituindo este valor da integral  $I_{1,n}$  dentro do somatório nas equações (5.12) e (5.13), a pressão hidrodinâmica na face da barragem e a massa adicional associada resultam, respectivamente, em:

$$p_1(0, y, w) = r H \frac{w}{g} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{n+1} (0,9958 m_n^4 - 9,5046 m_n^2 + 30,9048) - 0,1718 m_n^3 - 7,5306 m_n}{m_n^4} \right] \cdot \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) ; m_n = (2n-1) \frac{p}{2} \cdot m_n \sqrt{m_n^2 - \left(\frac{wH}{c}\right)^2} \quad (5.32)$$

$$M(0, y, w) = \frac{r}{g} \frac{w}{g} H^2 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{n+1} (0,9958 m_n^4 - 9,5046 m_n^2 + 30,9048) - 0,1718 m_n^3 - 7,5306 m_n}{m_n^4} \right] \cdot \text{sen}\left(m_n \frac{y}{H}\right) ; m_n = (2n-1) \frac{p}{2} \cdot m_n^2 \sqrt{m_n^2 - \left(\frac{wH}{c}\right)^2} \quad (5.33)$$

A equações (5.32) e (5.33) correspondem as expressões analíticas para cálculo da pressão hidrodinâmica e massa adicional na face da barragem, e que levam em consideração a participação do primeiro modo de vibração da barragem, bem como os efeitos de compressibilidade do fluido.

### 5.4.1.1 - Variação do parâmetro de compressibilidade na pressão hidrodinâmica

A Tabela 5.3 e a Figura 5.4 indicam os valores das pressões hidrodinâmicas (adimensional) obtidos através da Equação (5.32), variando-se o parâmetro de compressibilidade do fluido, em função da relação  $\left(\frac{y}{H}\right)$ . Em  $y=0$ , tem-se a base da barragem.

Tabela 5.3 - Pressões hidrodinâmicas adimensional na face da barragem ao longo da altura.

Pressão hidrodinâmica adimensional: $p_1(0, y, w) / r H \sqrt{\frac{g}{g}}$								
$y/H$	$\frac{wH}{c} = 0,00$ **	$\frac{wH}{c} = 0,20$	$\frac{wH}{c} = 0,40$	$\frac{wH}{c} = 0,60$	$\frac{wH}{c} = 0,80$	$\frac{wH}{c} = 1,00$	$\frac{wH}{c} = 1,20$	$\frac{wH}{c} = 1,40$
0,00	0,0855	0,0865	0,0899	0,0961	0,1066	0,1244	0,1581	0,2464
0,10	0,0882	0,0892	0,0925	0,0987	0,1091	0,1267	0,1601	0,2474
0,20	0,0944	0,0954	0,0987	0,1047	0,1148	0,1319	0,1642	0,2484
0,30	0,1027	0,1037	0,1068	0,1125	0,1221	0,1383	0,1688	0,2480
0,40	0,1119	0,1129	0,1157	0,1211	0,1299	0,1449	0,1728	0,2451
0,50	0,1211	0,1219	0,1245	0,1293	0,1372	0,1505	0,1753	0,2388
0,60	0,1288	0,1296	0,1318	0,1359	0,1427	0,1540	0,1748	0,2280
0,70	0,1329	0,1335	0,1352	0,1385	0,1439	0,1528	0,1692	0,2106
0,80	0,1283	0,1287	0,1300	0,1323	0,1361	0,1423	0,1536	0,1820
0,90	0,1032	0,1034	0,1041	0,1053	0,1072	0,1105	0,1163	0,1307
1,00	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

\*\* fluido incompressível.

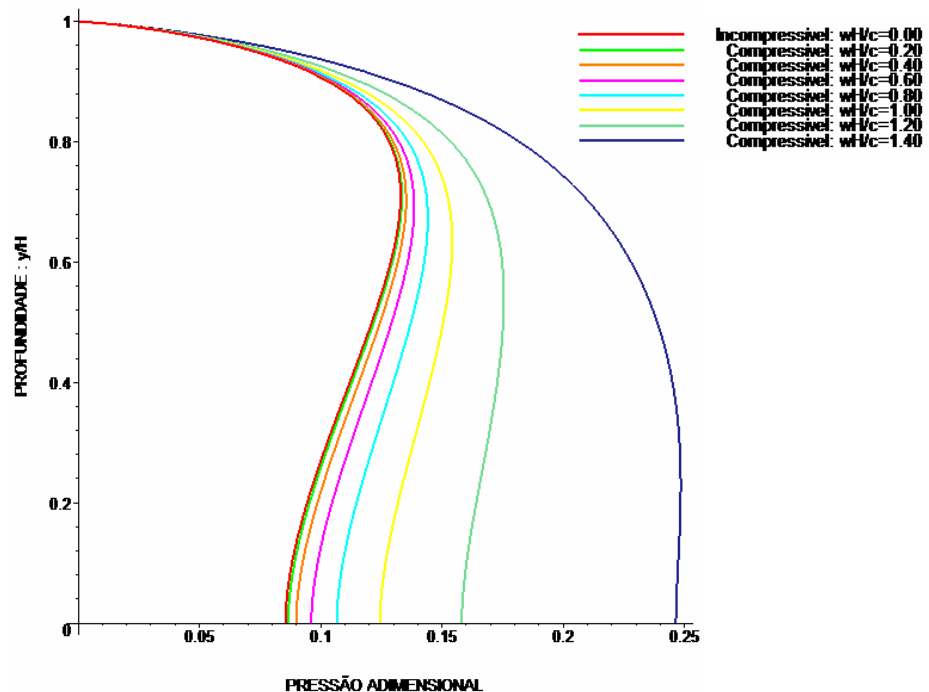


Figura 5.4 - Pressões hidrodinâmicas adimensional na face da barragem ao longo da altura.



### 5.4.1.2 - Variação do parâmetro de compressibilidade na massa adicional

A Tabela 5.4 e a Figura 5.5 indicam os valores da massa adicional (adimensional) obtidos através da Equação (5.33), variando-se o parâmetro de compressibilidade do fluido, em função da relação  $\left(\frac{y}{H}\right)$ . Em  $y=0$ , tem-se a base da barragem.

Tabela 5.4 – Massa adicional adimensional na face da barragem ao longo da altura.

Massa adicional adimensional: $M(0, y, w) / \frac{r H^2}{g} \frac{\rho_f}{\rho_s}$								
$y/H$	$\frac{wH}{c} = 0,00^{**}$	$\frac{wH}{c} = 0,20$	$\frac{wH}{c} = 0,40$	$\frac{wH}{c} = 0,60$	$\frac{wH}{c} = 0,80$	$\frac{wH}{c} = 1,00$	$\frac{wH}{c} = 1,20$	$\frac{wH}{c} = 1,40$
0,00	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,10	0,0086	0,0087	0,0091	0,0097	0,0108	0,0125	0,0159	0,0247
0,20	0,0178	0,0180	0,0186	0,0199	0,0219	0,0254	0,0321	0,0495
0,30	0,0276	0,0279	0,0289	0,0307	0,0338	0,0389	0,0487	0,0743
0,40	0,0383	0,0387	0,0400	0,0424	0,0464	0,0531	0,0658	0,0990
0,50	0,0500	0,0505	0,0520	0,0549	0,0597	0,0679	0,0832	0,1232
0,60	0,0625	0,0631	0,0649	0,0682	0,0738	0,0831	0,1008	0,1466
0,70	0,0756	0,0763	0,0783	0,0820	0,0881	0,0985	0,1180	0,1686
0,80	0,0888	0,0895	0,0916	0,0956	0,1022	0,1134	0,1343	0,1883
0,90	0,1006	0,1013	0,1036	0,1078	0,1147	0,1263	0,1481	0,2043
1,00	0,1073	0,1080	0,1103	0,1145	0,1216	0,1334	0,1554	0,2123

\*\* fluido incompressível.

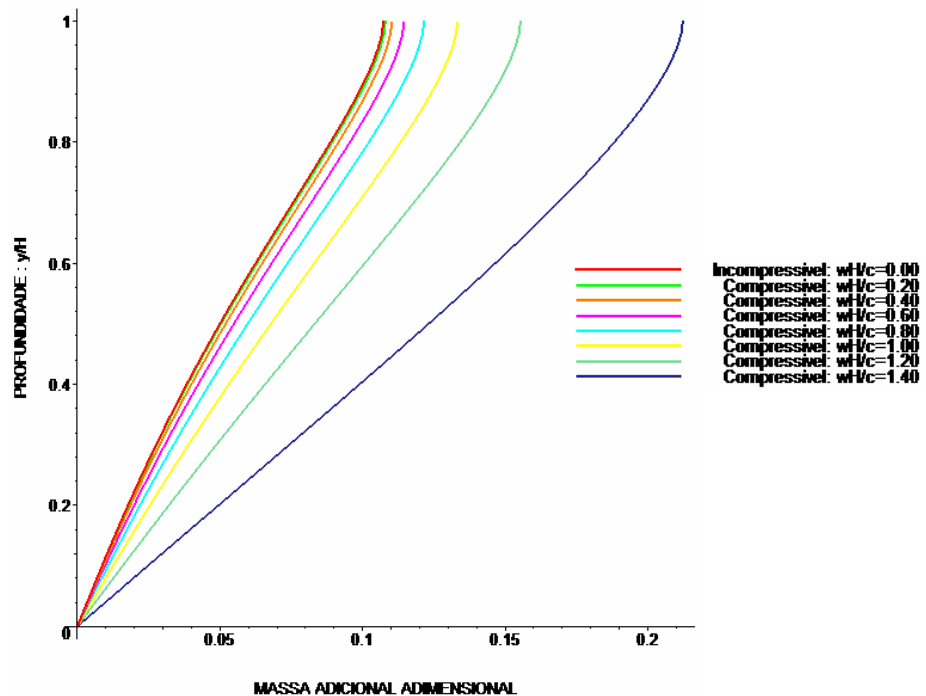


Figura 5.5 – Massa adicional adimensional na face da barragem ao longo da altura.

### 5.4.1.3 - Resumo dos gráficos das pressões hidrodinâmicas e da massa adicional

A Figura 5.6 ilustra de forma gráfica as pressões hidrodinâmicas de acordo com as considerações adotadas para a barragem e para o fluido do reservatório, nos modelos analíticos.

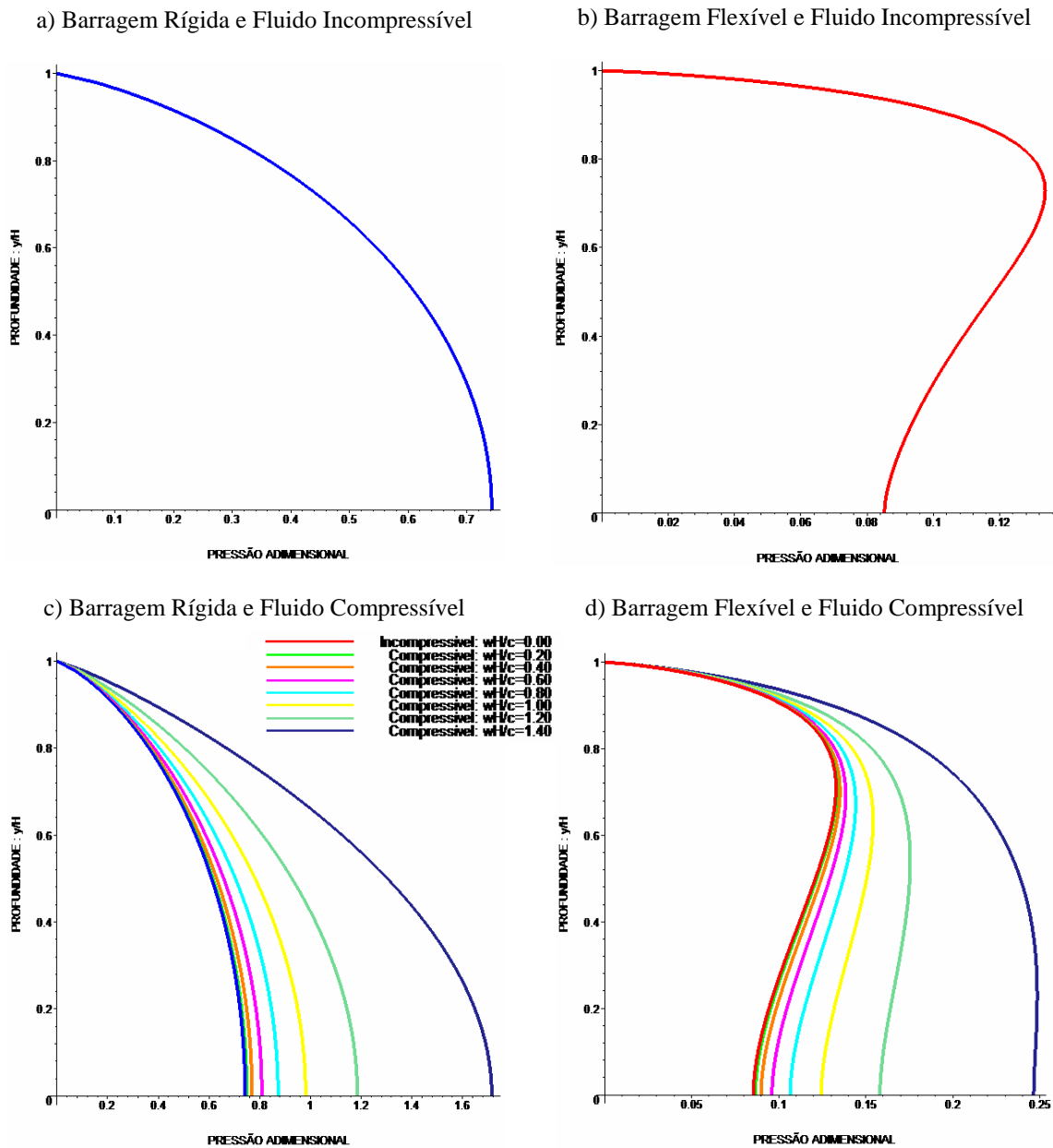


Figura 5.6 - Pressões hidrodinâmicas adimensional na face da barragem ao longo da altura do reservatório de acordo com as considerações adotadas para a barragem e para o fluido do reservatório.

A Figura 5.7 ilustra de forma gráfica a massa adicional de acordo com as considerações adotadas para a barragem e para o fluido do reservatório, em função dos modelos analíticos.

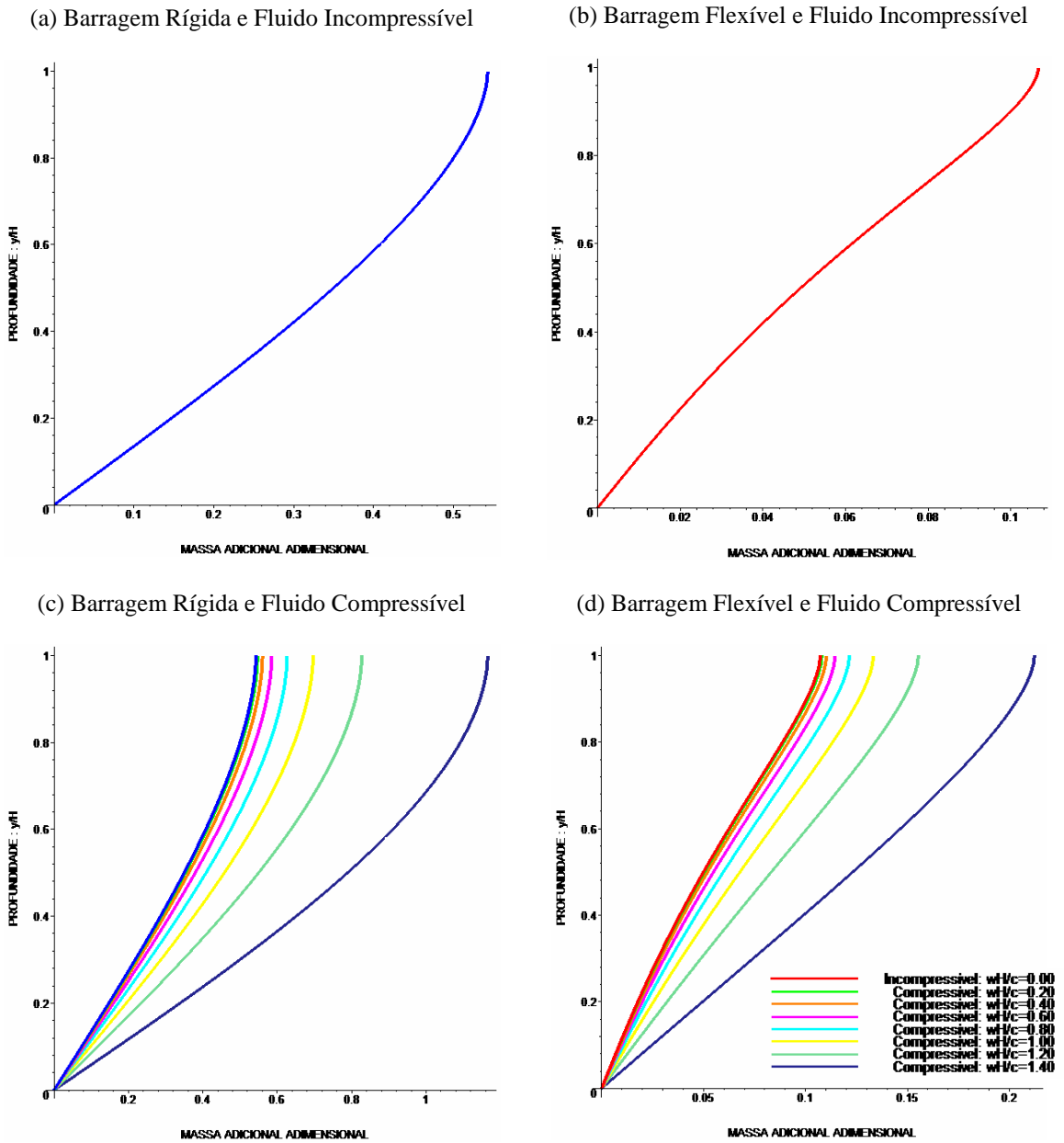


Figura 5.7 – Massa adicional adimensional na face da barragem ao longo da altura do reservatório de acordo com as considerações adotadas para a barragem e para o fluido do reservatório.

A Figura 5.8 representa no mesmo gráfico a consideração de barragem rígida (linha tracejada) e barragem flexível (linha contínua) em um fluido compressível com o objetivo de ilustrar a contribuição dos efeitos de compressibilidade e flexibilidade nas pressões hidrodinâmicas (a) e massa adicional (b).

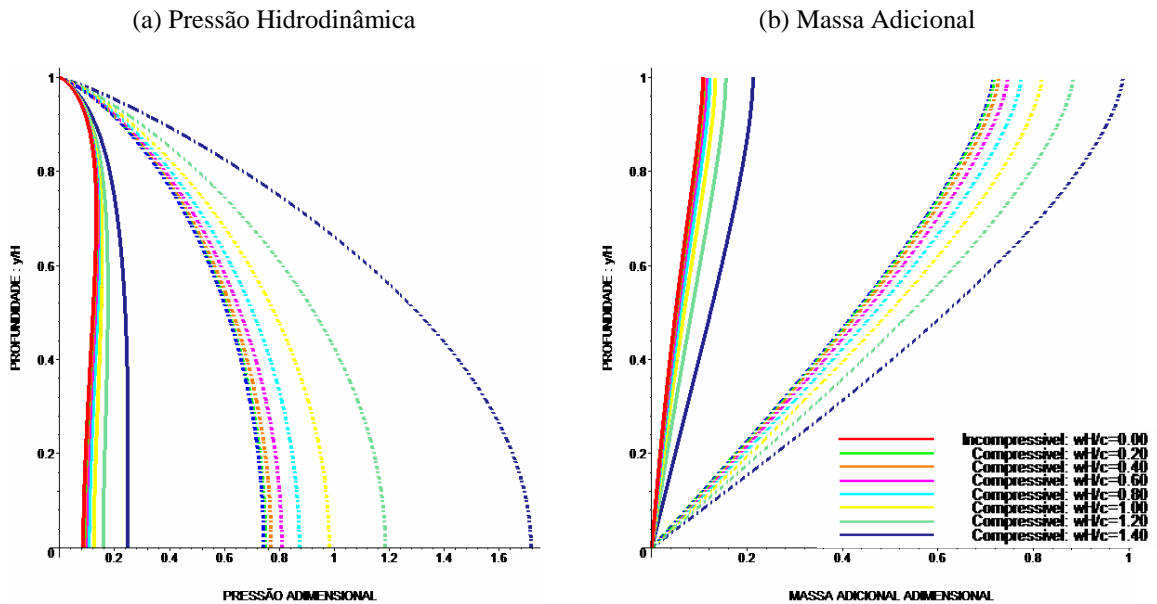


Figura 5.8 – Barragem Rígida e Barragem Flexível no Fluido Compressível.

A partir dos resultados obtidos neste estudo, alguns comentários e conclusões podem ser evidenciados:

Com a Técnica de Separação de Variável utilizada solucionou-se a Equação da onda com fronteira flexível que fornece o campo de pressões hidrodinâmicas para o fluido compressível - equações (5.12) e (5.13). Através de simplificações nestas equações é possível obter as mesmas equações encontradas anteriormente: Equação de Laplace com e sem a consideração de fronteira flexível; Tabela 5.1 e Tabela 5.2.

A expressão para o campo de pressões hidrodinâmicas desenvolvido neste capítulo é equivalente à expressão proposta por Chopra, 1978 para o Método Pseudo-Dinâmico; Equação (5.12) e Equação (5.19).

As pressões hidrodinâmicas e a massa adicional diminuem com a consideração de barragem flexível; Figura 5.6: (a) e (b), em razão neste último caso haver menos massa adicional arrastada pela barragem. Ou seja, já que nos dois casos a deformada máxima é a

mesma, o movimento de parede rígido-móvel produz um maior deslocamento de massa d'água do que no caso da barragem flexível (forma modal evoluindo de zero ao valor máximo).

A pressão hidrodinâmica e a massa adicional aumentam com o crescimento do parâmetro de compressibilidade do fluido ( $wH/c$ ); Figura 5.6: (d).

Os efeitos sob as pressões hidrodinâmicas e a massa adicional para a consideração de barragem flexível são dominantes frente aos efeitos de compressibilidade do fluido no reservatório; Figura 5.8: (a) e (b).

## **5.5 - FORMULAÇÃO ANALÍTICA PARA A PRESSÃO HIDRODINÂMICA UTILIZANDO SUPERFÍCIES DE TRUNCAMENTO**

### **5.5.1 - Introdução**

Para a análise dinâmica de estruturas submersas, tais como barragens e estruturas *offshore*, o carregamento fluido resultante da vibração estrutural é computado geralmente considerando o domínio fluido discretizado por uma composição de elementos finitos, Zienkiewicz & Newton (1969) e Sharan (1985a). A fim de se incluir os efeitos da interação fluido-estrutura uma análise inicial pode ser realizada no domínio da frequência, Silva & Pedroso (2006a) e Silva & Pedroso (2006b). Já a inclusão, por exemplo, de efeitos do comportamento não linear da estrutura, faz com que a análise tenha que ser conduzida no domínio do tempo (Sharan and Gladwell, 1977, e Chang et al., 1978). Para muitas situações, o domínio fluido tem uma extensão infinita. Na representação finita de tais domínios, uma condição de contorno apropriada deve ser imposta na superfície de truncamento para representar os efeitos de amortecimento da radiação, Sharan (1985a) e Sharan (1986). Para determinados casos, o efeito de compressibilidade do fluido não pode ser negligenciado (Zienkiewicz & Bettess (1978), Saini et al. (1978) e Chopra (1967)). Sob estas condições, uma forma modificada da condição unidimensional da radiação de Sommerfeld (1949), derivada por Zienkiewicz & Newton (1969), corresponde a um tipo de amortecedor apresentado (Sharan, 1984), a ser colocado na superfície de truncamento.

Alguns autores (Saini et al. (1978), Humar & Roufaiel (1983) e Sharan (1985a)), baseados na análise no domínio da frequência em reservatórios infinitos bidimensionais, indicam que o amortecedor de Sommerfeld não representa verdadeiramente os efeitos de amortecimento por radiação, particularmente quando a frequência de excitação é menor do que a segunda frequência natural do reservatório. Tal soma de frequências de excitação é de grande importância prática, por exemplo, na análise das estruturas submetidas aos carregamentos sísmicos, à explosões, ondas, etc.. O uso do amortecedor de Sommerfeld requer conseqüentemente uma extensão relativamente grande do domínio fluido a ser considerado na análise (Sharan and Gladwell (1977), Saini et al. (1978), Humar & Roufaiel (1983) e Sharan (1985a)). E isto pode resultar em um custo alto da computação para a análise de sistemas de fluido-estrutura, em razão da extensão de sua discretização.

O objetivo desta seção é propor um amortecedor para a análise no domínio da frequência de um reservatório com fluido compressível. O domínio é suposto bidimensional e os efeitos das ondas de superfície são negligenciados. A equação da onda para o campo de pressões hidrodinâmicas é transformada em duas equações diferenciais nas direções  $x$  e  $y$ . A eficácia e a precisão da técnica proposta são demonstradas num exemplo numérico.

### 5.5.2 - Condições de contorno da radiação

Tal como já foi apresentado, para um domínio fluido não viscoso, submetido a um movimento de pequena amplitude, as pressões hidrodinâmicas são dadas pela solução da equação da onda.

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (5.34)$$

onde  $p$  é a pressão se superpondo a pressão hidrostática,  $\nabla^2$  é o operador Laplaciano,  $c$  é a velocidade das ondas de compressão, e os pontos denotam derivadas em relação ao tempo.

Para resolver a Equação (5.34), uma geometria simplificada (Figura 5.9) do domínio fluido é considerada com certas condições de contorno:

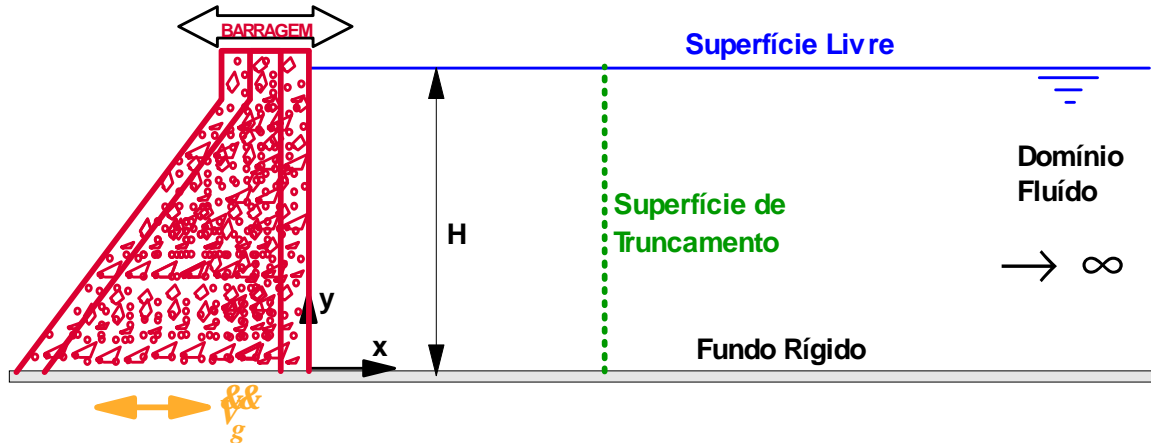


Figura 5.9 - Suposições feitas para obtenção da condição de contorno da radiação.

$$\frac{\partial p}{\partial n}(0, y, t) = -r \ddot{x}_g e^{i\omega t} \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n}(x, 0, t) = 0 \quad (5.36)$$

$$p(x, H, t) = 0 \quad (5.37)$$

$$p(\infty, y, t) = 0 \quad (5.38)$$

onde  $x$  e  $y$  são as coordenadas cartesianas (Figura 5.9),  $t$  é o tempo variável,  $\partial n$  é uma direção normal externa à superfície,  $r$  é a densidade do fluido,  $\ddot{x}_g$  é a amplitude de aceleração na interface fluido-estrutura na direção  $x$ ,  $\omega$  é a frequência circular de excitação,  $H$  é a altura do domínio fluido e  $i = \sqrt{-1}$ .

Para o limite do truncamento que é situado em uma distância relativamente grande ( $x = L$ ) da estrutura, uma expressão aproximada para  $p$  é obtida como (Sharan, 1985a):

$$p = \frac{4r \ddot{x}_g H}{p} \frac{e^{\left\{ \frac{-x}{H} \sqrt{\left[ \left( \frac{p}{2} \right)^2 - \left( \frac{wH}{c} \right)^2} \right] \right\}}}{\sqrt{\left[ \left( \frac{p}{2} \right)^2 - \left( \frac{wH}{c} \right)^2 \right]}} \cos\left( \frac{p y}{2H} \right) e^{i\omega t} \quad (5.39)$$

A aproximação envolvida na Equação (5.39) é válida para  $w < 3pc/(2H)$ , as quais se incluem numa gama larga para as frequências de interesse.

Fazendo a segunda derivada da Equação (5.39) em relação à  $y$ , a seguinte expressão pode ser encontrada:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{4r\sqrt{g}H}{p} \frac{e^{\left\{\frac{-x}{H}\sqrt{\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{wH}{c}\right)^2}\right]\right\}}}{\sqrt{\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{wH}{c}\right)^2}\right]} e^{iwt} \left[ -\frac{p}{2H} \operatorname{sen}\left(\frac{py}{2H}\right) \right] \quad (5.40)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{4r\sqrt{g}H}{p} \frac{e^{\left\{\frac{-x}{H}\sqrt{\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{wH}{c}\right)^2}\right]\right\}}}{\sqrt{\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{wH}{c}\right)^2}\right]} e^{iwt} \left[ -\left(\frac{p}{2H}\right)^2 \cos\left(\frac{py}{2H}\right) \right] \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -\left(\frac{p}{2H}\right)^2 p \quad (5.42)$$

A substituição da Equação (5.42) na Equação (5.34) resulta em uma equação unidimensional para a superfície de truncamento:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \left(\frac{p}{2H}\right)^2 p - \frac{1}{c^2} p = 0 \quad (5.43)$$

Percebe-se que as equações (5.42) e (5.43) não dependem da frequência da vibração.

Usando a transformada de Laplace e a condição de que o sistema está inicialmente em repouso, as equações (5.43) e (5.38) podem ser atendidas assumindo a seguinte forma:

$$p = \frac{1}{2pi} \int f(s) e^{-\Omega x + st} ds \quad (5.44)$$



onde:

$$\Omega = \sqrt{\left[\left(\frac{p}{2H}\right)^2 + \left(\frac{s}{c}\right)^2\right]} \quad (5.45)$$

Nas equações (5.44) e (5.45),  $s$  é uma variável complexa e  $f(s)$  é uma função desconhecida de  $s$ . Os seguintes gradientes para a Equação (5.44) podem ser determinados:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{2pi} \int f(s)(-\Omega)e^{-\Omega x + st} ds \quad (5.46)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2pi} \int f(s)(s)e^{-\Omega x + st} ds \quad (5.47)$$

Não parece possível obter uma condição simplificada de amortecimento para a radiação a menos que uma das seguintes aproximações seja feita para o parâmetro  $\Omega$ .

1. Se o fluido for supostamente incompressível,  $c = \infty$ , então:

$$\Omega = \frac{p}{2H} \quad (5.48)$$

Substituindo a Equação (5.48) na Equação (5.46), resulta em:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{p}{2H} p \quad (5.49)$$

A Equação (5.49) é idêntica aquela da condição de amortecimento da radiação encontrada no capítulo 2 do presente trabalho, Equação (2.84), como também no trabalho de Sharan (1985).

2. Se a altura do domínio fluido for suposta ser infinita,  $H = \infty$ , então:

$$\Omega = \frac{s}{c} \quad (5.50)$$

Substituindo a Equação (5.50) nas equações (5.46) e (5.47), resulta a seguinte relação:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{c} \mathcal{L} \quad (5.51)$$

A Equação (5.51) é a condição de amortecimento encontrada em Zienkiewicz & Newton (1969) para o caso de onda plana.

É interessante notar que para o caso harmônico ( $p = \bar{p} e^{-i\omega t}$ ), têm-se:

$$\mathcal{L} = -i \omega p \quad (5.52)$$

Levando a Equação (5.52) na Equação (5.51), tem-se:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{i \omega p}{c} \quad (5.53)$$

Logo a Equação (5.51) é uma forma modificada da condição de radiação de Sommerfeld para problema unidimensional expressa como (Sommerfeld, 1949):

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left( \frac{\partial p}{\partial |x|} - \frac{i \omega p}{c} \right) = 0 \quad (5.54)$$

Em muitos casos, esta condição de radiação não é eficaz como um amortecedor para problemas bidimensionais de domínio finito (Sharan, 1985a e Silva & Pedroso, 2007).

3. Para um domínio compressível de fluido com uma altura finita, nenhuma das aproximações mencionadas anteriormente é justificada. Em tal caso, pode-se supor que um dos dois termos sob o sinal da raiz na Equação (5.45) é relativamente pequeno em comparação ao outro. A Equação (5.45) pode então ser aproximada por:

$$\Omega = \frac{p}{2H} + \frac{s}{c} \quad (5.55)$$

Seguindo o mesmo procedimento utilizado para encontrar a Equação (5.51), ou seja, substituindo a Equação (5.55) nas equações (5.46) e (5.47), a relação resultante para  $\partial p/\partial x$  é:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{p}{2H} - \frac{1}{c} p \quad (5.56)$$

A Equação (5.56) é a condição de radiação de Sharan, (1987).

Embora a Equação (5.56) não represente a condição de amortecimento exato, é uma aproximação melhor em comparação à Equação (5.49) ou (5.51). Para  $c = \infty$  ou  $H = \infty$ , a Equação (5.56) reduz-se à Equação (5.49) ou (5.51), respectivamente.

Para valores finitos de  $c$  e de  $H$ , a eficácia do amortecedor proposto depende do período de excitação  $T$  ( $= 2p/w$ ). Quando o valor de  $T$  se localiza perto do período natural de vibração do domínio fluido, isto é, quando  $Tc/H \rightarrow 4$  (ou  $wH/c \rightarrow p/2$ ), os valores de  $p$  e de  $\partial p/\partial t$  tornam-se infinitamente grandes, como indicado pela Equação (5.39). Para este caso, a condição de contorno aproximada para a superfície de truncamento pode ser obtida pelo uso direto da Equação (5.39) e é dada por (Sharan, 1987):

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (5.57)$$

Conseqüentemente, para tal caso, nem o amortecedor de Sommerfeld nem o amortecedor de Sharan são eficazes.

Para  $Tc/H \ll 4$  (ou:  $wH/c \gg p/2$ ), os valores de  $pc/H$  tornam-se pequenos comparados àqueles de  $\partial p/\partial t$ . Para o caso limite  $p \rightarrow 0$  quando  $T \rightarrow 0$  (Chopra, 1967 e Silva & Pedroso, 2006a). Por outro lado, para  $Tc/H \gg 4$  (ou:  $wH/c \ll p/2$ ), os valores de  $\partial p/\partial t$  são muito menores do que aqueles de  $pc/H$ . Para o caso limite,  $\partial p/\partial t \rightarrow 0$  quando  $T \rightarrow \infty$ . Conseqüentemente, em ambos estes casos, um dos termos no lado direito da Equação (5.56) será pequeno quando comparado ao outro e a suposição feita para obter a Equação (5.55) é válida. O amortecedor de Sharan será assim eficaz para uma gama mais larga e mais prática do período de excitação em comparação àquele para o amortecedor de Sommerfeld.

### **5.5.3 - Condições de contorno na superfície de truncamento para análise no domínio da frequência**

Na análise numérica da resposta dinâmica da interação barragem-reservatório (por exemplo, pelo método dos elementos finitos) dificuldades aparecem em consequência da grande extensão do domínio fluido a considerar (Zienkiewicz & Bettess, 1978). Em tal caso, o domínio infinito deve ser truncado em uma determinada distância da estrutura ao longo do reservatório (Figura 5.1). A precisão nos resultados pode ser melhorada truncando-se o domínio a uma distância cada vez maior da estrutura. Entretanto, isto resulta num maior custo computacional (Sharan, 1985), que se quer evitar.

Assim, o objetivo desta seção é mostrar um desenvolvimento analítico para se obter o campo de pressões hidrodinâmicas com as condições de radiação de: Sommerfeld, Equação (5.51), Sharan, Equação (5.56), e a proposta neste trabalho para a superfície de truncamento num reservatório infinito. As soluções são comparadas em diferentes posições do domínio fluido simulando reservatórios de comprimentos finitos equivalentes.

Por outro lado, convém se assinalar que o campo de pressões hidrodinâmicas obtido para as condições de radiação utilizadas neste trabalho e transformadas para o domínio da frequência através da idéia de uma função harmônica no tempo para a função  $T(t)$ , foi desenvolvido analiticamente, aspecto não tratado no referido trabalho (Sharan, 1987). Nele as condições de radiação para a superfície de truncamento, são apenas apresentadas, uma vez que estas foram aplicadas diretamente nas fronteiras do problema para a solução pelo

Método dos Elementos Finitos. Este aspecto caracteriza também uma contribuição inovadora deste trabalho.

### 5.5.3.1 - Condição de radiação de Sommerfeld

A condição de radiação de Sommerfeld conforme mostrado anteriormente na obtenção da Equação (5.53), pode ser escrita na superfície de truncamento ( $x = L$ ) sob a seguinte forma:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p(L, y, w)}{\partial x} = \frac{i w}{c} p(L, y, w) \quad (5.58)$$

Portanto, seja a Equação (5.34), para o domínio do reservatório no plano  $x$ - $y$ , com as seguintes condições de contorno:

- a) No Contorno Rígido:  $\left. \frac{\partial p(x, 0, w)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0$
- b) Na Superfície Livre:  $p(x, H, w)|_{y=H} = 0$
- c) Na Superfície de Truncamento:  $\left. \frac{\partial p(L, y, w)}{\partial x} \right|_{x=L} = \frac{i w}{c} p(L, y, w)$  (Sommerfeld)
- d) Na Interface Fluido-Estrutura:  $\left. \frac{\partial p(0, y, w)}{\partial x} \right|_{x=0} = -r \left[ \frac{g}{v} f_j(y/H) \right]$

Aplicando-se a técnica de separação de variável (Pedroso, 2003 e Chakrabarti & Chopra, 1974), tem-se:

$$p(x, y, t) = F(x)G(y)T(t) \quad (5.59)$$

Levando a Equação (5.59) na Equação (5.34), tem-se:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) [F(x)G(y)T(t)] - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) [F(x)G(y)T(t)] = 0 \quad (5.60)$$

$$\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} G(y)T(t) + F(x) \frac{\partial^2 G(y)}{\partial y^2} T(t) - \frac{1}{c^2} F(x)G(y) \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = 0$$

Dividindo a Equação (5.60) por  $p(x, y, t)$ :

$$\frac{F''}{F} + \frac{G''}{G} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = 0 \quad (5.61)$$

Portanto:

$$-\frac{G''}{G} = \frac{F''}{F} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = I^2 \quad (5.62)$$

Assim:

$$G'' + I^2 G = 0 \quad (5.63)$$

$$F'' - \left( I^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right) F = 0 \quad (5.64)$$

Supondo que a função  $T(t)$  seja harmônica no tempo (periódica), ou seja:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -w^2 T(t) \quad (5.65)$$

Substituindo a Equação (5.65) na Equação (5.64), tem-se:

$$F'' + h F = 0; \text{ com } -h = \left( I^2 - \frac{w^2}{c^2} \right) \quad (5.66)$$

A Equação (5.63) tem como solução a função:  $G(y) = A \cos(I y) + B \operatorname{sen}(I y)$ . Usando as condições de contorno da direção  $y$ , tem-se:

$$G_n(y) = A_n \cos \left[ (2n-1) \frac{p}{2H} y \right] \quad (5.67)$$

A Equação (5.66) tem como solução a função:  $F(x)=C_1 e^{\sqrt{-h}x} + C_2 e^{-\sqrt{-h}x}$ . Usando as condições de contorno da direção  $x$ , tem-se:

$$c) \left. \frac{\partial p(L, y, w)}{\partial x} \right|_{x=L} = \frac{i w}{c} p(L, y, w)$$

$$\left. \frac{\frac{\partial p(L, y, w)}{\partial x}}{p(L, y, w)} \right|_{x=L} = \frac{i w}{c}$$

$$C_1 e^{\sqrt{-h}L} \left( \sqrt{-h} - \frac{i w}{c} \right) = C_2 e^{-\sqrt{-h}L} \left( \sqrt{-h} + \frac{i w}{c} \right) \quad \therefore C_1 = \frac{C_2}{e^{2L\sqrt{-h}}} \frac{\sqrt{-h} + \frac{i w}{c}}{\sqrt{-h} - \frac{i w}{c}}$$

Portanto:

$$F_n(x) = C_n \left( \frac{1 + b_n e^{\sqrt{-h}2(x-L)}}{e^{\sqrt{-h}x}} \right) \quad (5.68)$$

onde:

$$b_n = \frac{\sqrt{-h} + \frac{i w}{c}}{\sqrt{-h} - \frac{i w}{c}} \quad ; \quad \sqrt{-h} = \frac{1}{H} \sqrt{m_n^2 - \left( \frac{wH}{c} \right)^2} \quad (5.69)$$

Fornecendo a pressão no domínio da frequência, tem-se:

$$p_n(x, y, w) = F_n(x) G_n(y) T_n(0)$$

$$p(x, y, w) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n e^{-\sqrt{-h}x} \left( 1 + b_n e^{\sqrt{-h}2(x-L)} \right) \cos \left( m_n \frac{y}{H} \right) \quad ; \quad m_n = (2n-1) \frac{p}{2} \quad (5.70)$$

$$d) \left. \frac{\partial p(0, y, w)}{\partial x} \right|_{x=0} = -r \left[ \sqrt{\frac{g}{c}} f_j(y/H) \right]$$

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \left( (-\sqrt{-h}) e^{-\sqrt{-h} \cdot x} (1 + b_n e^{\sqrt{-h} 2(x-L)}) + e^{-\sqrt{-h} x} (0 + 2\sqrt{-h} b_n e^{\sqrt{-h} 2(x-L)}) \right) \right\} \Big|_{x=0} = -r \sqrt{\frac{g}{c}} f_j(y/H)$$

$$\int_0^H \sum_{n=1}^{\infty} K_n (\sqrt{-h}) (1 - b_n e^{-\sqrt{-h} 2L}) \operatorname{sen}\left(n p \frac{y}{H}\right) dy = \int_0^H r \sqrt{\frac{g}{c}} f_j(y/H) dy \left[ \operatorname{sen}\left(m p \frac{y}{H}\right) \right]$$

Usando a propriedade de ortogonalidade da função seno (em séries), tem-se:

$$\frac{H}{2} K_n \sqrt{-h} (1 - b_n e^{-\sqrt{-h} 2L}) = r \sqrt{\frac{g}{c}} \int_0^H f_j(y/H) \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) dy$$

Logo:

$$K_n = r \sqrt{\frac{g}{c}} \frac{2}{H \sqrt{-h} (1 - b_n e^{-\sqrt{-h} 2L})} \int_0^H f_j(y/H) \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) dy$$

Portanto:

$$p(x, y, w) = r \sqrt{\frac{g}{c}} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{j,n}}{H \sqrt{-h}} e^{-\sqrt{-h} x} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \left[ \frac{(1 + b_n e^{\sqrt{-h} 2(x-L)})}{(1 - b_n e^{-\sqrt{-h} 2L})} \right]$$

$$I_{j,n} = \int_0^H f_j(y/H) \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) dy; \sqrt{-h} = \frac{1}{H} \sqrt{m_n^2 - \left(\frac{wH}{c}\right)^2} \quad (5.71)$$

$$m_n = (2n-1) \frac{p}{2}; b_n = \frac{\sqrt{-h} + \frac{iw}{c}}{\sqrt{-h} - \frac{iw}{c}}$$

A Equação (5.71) fornece o campo de pressões hidrodinâmicas obtido com a condição de radiação de Sommerfeld na superfície de truncamento.



### 5.5.3.2 - Condição de radiação de Sharan

A condição de radiação de Sharan para a análise no domínio da frequência vem da substituição da Equação (5.52) na Equação (5.56), assim pode ser escrita na superfície de truncamento ( $x = L$ ) sob a seguinte forma:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p(L, y, w)}{\partial x} = \left( \frac{i w}{c} - \frac{p}{2H} \right) p(L, y, w) \quad (5.72)$$

Seja, então, a Equação (5.34), para o domínio do reservatório no plano  $x$ - $y$ , com as seguintes condições de contorno:

- No Contorno Rígido:  $\left. \frac{\partial p(x, 0, w)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0$
- Na Superfície Livre:  $p(x, H, w)|_{y=H} = 0$
- Na Superfície de Truncamento:  $\left. \frac{\partial p(L, y, w)}{\partial x} \right|_{x=L} = \left( \frac{i w}{c} - \frac{p}{2H} \right) p(L, y, w)$  (Sharan)
- Na Interface Fluido-Estrutura:  $\left. \frac{\partial p(0, y, w)}{\partial x} \right|_{x=0} = -r \left[ \frac{g}{g_s} f_j(y/H) \right]$

Após a aplicação da técnica de separação de variável e das condições de contorno na direção  $y$ , da mesma forma como foi feito anteriormente para a condição de radiação de Sommerfeld, encontra-se:

$$G_n(y) = A_n \cos \left[ (2n-1) \frac{p}{2H} y \right] \quad (5.73)$$

Na direção  $x$ , a equação diferencial resultante tem como solução a função:

$F(x) = C_1 e^{\sqrt{-h}x} + C_2 e^{-\sqrt{-h}x}$ . Usando as condições de contorno da direção  $x$ , tem-se:

$$c) \left. \frac{\partial p(L, y, w)}{\partial x} \right|_{x=L} = \left( \frac{i w}{c} - \frac{p}{2H} \right) p(L, y, w)$$

$$\left. \frac{\partial p(L, y, w)}{\partial x} \right|_{x=L} = \left( \frac{i w}{c} - \frac{p}{2H} \right)$$

$$C_1 e^{\sqrt{-h} \cdot L} \left( \sqrt{-h} - \left( \frac{i w}{c} - \frac{p}{2H} \right) \right) = C_2 e^{-\sqrt{-h} \cdot L} \left( \sqrt{-h} + \left( \frac{i w}{c} - \frac{p}{2H} \right) \right)$$

$$C_1 = \frac{C_2}{e^{2L\sqrt{-h}}} \frac{\sqrt{-h} + \left( \frac{i w}{c} - \frac{p}{2H} \right)}{\sqrt{-h} - \left( \frac{i w}{c} - \frac{p}{2H} \right)}$$

Portanto:

$$F_n(x) = C_n \left( \frac{1 + b_n e^{\sqrt{-h} 2(x-L)}}{e^{\sqrt{-h} x}} \right) \quad (5.74)$$

onde:

$$b_n = \frac{\sqrt{-h} + \left( \frac{i w}{c} - \frac{p}{2H} \right)}{\sqrt{-h} - \left( \frac{i w}{c} - \frac{p}{2H} \right)} ; \quad \sqrt{-h} = \frac{1}{H} \sqrt{m_n^2 - \left( \frac{wH}{c} \right)^2} \quad (5.75)$$

Dando a pressão no domínio da frequência, tem-se:

$$p_n(x, y, w) = F_n(x) G_n(y) T_n(0)$$

$$p(x, y, w) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n e^{-\sqrt{-h} x} \left( 1 + b_n e^{\sqrt{-h} 2(x-L)} \right) \cos \left( m_n \frac{y}{H} \right) ; \quad m_n = (2n-1) \frac{p}{2} \quad (5.76)$$

$$d) \left. \frac{\partial p(0, y, w)}{\partial x} \right|_{x=0} = -r \left[ \frac{w}{g} f_j(y/H) \right]$$

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \left( (-\sqrt{-h}) e^{-\sqrt{-h}x} (1 + b_n e^{\sqrt{-h}2(x-L)}) + e^{-\sqrt{-h}x} (0 + 2\sqrt{-h} b_n e^{\sqrt{-h}2(x-L)}) \right) \right\}_{x=0} = -r \mathbb{V}_g^{\mathbb{R}} f_j(y/H)$$

$$\int_0^H \sum_{n=1}^{\infty} K_n (\sqrt{-h}) (1 - b_n e^{-\sqrt{-h}2L}) \text{sen}\left(np \frac{y}{H}\right) dy = \int_0^H r \mathbb{V}_g^{\mathbb{R}} f_j(y/H) dy \left[ \text{sen}\left(mp \frac{y}{H}\right) \right]$$

Usando a propriedade de ortogonalidade da função seno (em séries), tem-se:

$$\frac{H}{2} K_n \sqrt{-h} (1 - b_n e^{-\sqrt{-h}2L}) = r \mathbb{V}_g^{\mathbb{R}} \int_0^H f_j(y/H) \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) dy$$

Logo:

$$K_n = r \mathbb{V}_g^{\mathbb{R}} \frac{2}{H \sqrt{-h} (1 - b_n e^{-\sqrt{-h}2L})} \int_0^H f_j(y/H) \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) dy$$

Portanto:

$$p(x, y, w) = r \mathbb{V}_g^{\mathbb{R}} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{j,n}}{H \sqrt{-h}} e^{-\sqrt{-h}x} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \left[ \frac{(1 + b_n e^{\sqrt{-h}2(x-L)})}{(1 - b_n e^{-\sqrt{-h}2L})} \right]$$

$$I_{j,n} = \int_0^H f_j(y/H) \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) dy; \sqrt{-h} = \frac{1}{H} \sqrt{m_n^2 - \left(\frac{wH}{c}\right)^2} \quad (5.77)$$

$$m_n = (2n-1) \frac{p}{2}; b_n = \frac{\sqrt{-h} + \left(\frac{iw}{c} - \frac{p}{2H}\right)}{\sqrt{-h} - \left(\frac{iw}{c} - \frac{p}{2H}\right)}$$

A Equação (5.77) corresponde ao campo de pressões hidrodinâmicas obtido com a condição de radiação de Sharan na superfície de truncamento.

### 5.5.3.3 - Condição de radiação proposta pelo autor

A condição de radiação proposta pelo autor ao longo da superfície de truncamento do reservatório surge da observação da relação entre as soluções exatas no domínio fluido infinito para a pressão hidrodinâmica e seu gradiente, agora estendido ao caso de reservatório limitado em  $x = L$ , ou seja:

$$\left. \frac{\frac{\partial p(L, y, w)}{\partial x}}{p(L, y, w)} \right|_{x=L} = \frac{-2 r \sqrt{g} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n} e^{\left(-m_n \frac{L}{H}\right)} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right)}{2 r \sqrt{g} H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} e^{\left(-m_n \frac{L}{H}\right)} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right)} = -\frac{1}{H} \frac{S1}{S2} \quad (5.78)$$

$$S1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n} e^{\left(-m_n \frac{L}{H}\right)} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right); S2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} e^{\left(-m_n \frac{L}{H}\right)} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right)$$

É interessante perceber que a relação entre as séries  $S1$  e  $S2$ , quando truncadas no primeiro termo ( $n = 1$ ) resultam em:

$$\left. \frac{S1}{S2} \right|_{n=1} = \frac{\frac{2}{p} e^{\left(-\frac{p}{2} \frac{L}{H}\right)} \cos\left(\frac{p}{2} \frac{y}{H}\right)}{\left(\frac{2}{p}\right)^2 e^{\left(-\frac{p}{2} \frac{L}{H}\right)} \cos\left(\frac{p}{2} \frac{y}{H}\right)} = \frac{p}{2}$$

Levando este resultado, limitada a expansão ao primeiro termo do somatório, na Equação (5.78), resulta em uma expressão que aparece no segundo termo da condição de radiação de Sharan, Equação (5.72); portanto o autor sugere que a condição de radiação possa ser escrita na superfície de truncamento ( $x = L$ ) sob a seguinte forma:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p(L, y, w)}{\partial x} = \left( \frac{i w}{c} - \frac{S1}{S2 H} \right) p(L, y, w) \quad (5.79)$$

$$S1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n} e^{\left(-m_n \frac{L}{H}\right)} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right); S2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} e^{\left(-m_n \frac{L}{H}\right)} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right)$$

Seja a Equação (5.34), para o domínio do reservatório no plano  $x$ - $y$ , com as seguintes condições de contorno:

- a) No Contorno Rígido:  $\left. \frac{\partial p(x, 0, w)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0$
- b) Na Superfície Livre:  $p(x, H, w)|_{y=H} = 0$
- c) Na Superfície de Truncamento:  $\left. \frac{\partial p(L, y, w)}{\partial x} \right|_{x=L} = \left( \frac{i w}{c} - \frac{S1}{S2 H} \right) p(L, y, w)$  (Proposta)
- d) Na Interface Fluido-Estrutura:  $\left. \frac{\partial p(0, y, w)}{\partial x} \right|_{x=0} = -r \left[ \frac{g}{g} f_j(y/H) \right]$

Após a aplicação da técnica de separação de variável e das condições de contorno na direção  $y$ , da mesma forma como foi feito anteriormente para a condição de radiação de Sommerfeld, encontra-se:

$$G_n(y) = A_n \cos \left[ (2n - 1) \frac{P}{2H} y \right] \quad (5.80)$$

Na direção  $x$ , a equação diferencial resultante tem como solução a função:

$F(x) = C_1 e^{\sqrt{-h} x} + C_2 e^{-\sqrt{-h} x}$ . Usando as condições de contorno da direção  $x$ , tem-se:

$$c) \left. \frac{\partial p(L, y, w)}{\partial x} \right|_{x=L} = \left( \frac{i w}{c} - \frac{S1}{S2 H} \right) p(L, y, w)$$

$$\left. \frac{\frac{\partial p(L, y, w)}{\partial x}}{p(L, y, w)} \right|_{x=L} = \left( \frac{i w}{c} - \frac{S1}{S2 H} \right)$$

$$C_1 e^{\sqrt{-h} \cdot L} \left( \sqrt{-h} - \left( \frac{i w}{c} - \frac{S1}{S2 H} \right) \right) = C_2 e^{-\sqrt{-h} \cdot L} \left( \sqrt{-h} + \left( \frac{i w}{c} - \frac{S1}{S2 H} \right) \right)$$

$$C_1 = \frac{C_2}{e^{2L\sqrt{-h}}} \frac{\sqrt{-h} + \left( \frac{i w}{c} - \frac{S1}{S2 H} \right)}{\sqrt{-h} - \left( \frac{i w}{c} - \frac{S1}{S2 H} \right)}$$

Portanto:

$$F_n(x) = C_n \left( \frac{1 + b_n e^{\sqrt{-h}2(x-L)}}{e^{\sqrt{-h}x}} \right) \quad (5.81)$$

onde:

$$b_n = \frac{\sqrt{-h} + \left( \frac{i w}{c} - \frac{S1}{S2 H} \right)}{\sqrt{-h} - \left( \frac{i w}{c} - \frac{S1}{S2 H} \right)} ; \quad \sqrt{-h} = \frac{1}{H} \sqrt{m_n^2 - \left( \frac{w H}{c} \right)^2} \quad (5.82)$$

Fornecendo-se as pressões no domínio da frequência, tem-se:

$$p_n(x, y, w) = F_n(x) G_n(y) T_n(0)$$

$$p(x, y, w) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n e^{-\sqrt{-h}x} \left( 1 + b_n e^{\sqrt{-h}2(x-L)} \right) \cos \left( m_n \frac{y}{H} \right) ; \quad m_n = (2n-1) \frac{p}{2} \quad (5.83)$$

$$d) \left. \frac{\partial p(0, y, w)}{\partial x} \right|_{x=0} = -r \left[ \mathbb{V}_g^{\otimes} f_j(y/H) \right]$$

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cos \left( m_n \frac{y}{H} \right) \left( (-\sqrt{-h}) e^{-\sqrt{-h}x} \left( 1 + b_n e^{\sqrt{-h}2(x-L)} \right) + e^{-\sqrt{-h}x} \left( 0 + 2\sqrt{-h} b_n e^{\sqrt{-h}2(x-L)} \right) \right) \right\} \Big|_{x=0} = -r \mathbb{V}_g^{\otimes} f_j(y/H)$$

$$\int_0^H \sum_{n=1}^{\infty} K_n \left( \sqrt{-h} \right) \left( 1 - b_n e^{-\sqrt{-h}2L} \right) \text{sen} \left( n p \frac{y}{H} \right) dy = \int_0^H r \mathbb{V}_g^{\otimes} f_j(y/H) dy \left[ \text{sen} \left( m p \frac{y}{H} \right) \right]$$

Usando a propriedade de ortogonalidade da função seno (em séries), tem-se:

$$\frac{H}{2} K_n \sqrt{-h} \left( 1 - b_n e^{-\sqrt{-h}2L} \right) = r \mathbb{V}_g^{\otimes} \int_0^H f_j(y/H) \cos \left( m_n \frac{y}{H} \right) dy$$

Logo:

$$K_n = r \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{2}{H \sqrt{-h} (1 - b_n e^{-\sqrt{-h} 2L})} \int_0^H f_j(y/H) \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) dy$$

Portanto:

$$p(x, y, w) = r \sqrt{\frac{g}{h}} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{j,n}}{H \sqrt{-h}} e^{-\sqrt{-h} x} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) \left[ \frac{(1 + b_n e^{\sqrt{-h} 2(x-L)})}{(1 - b_n e^{-\sqrt{-h} 2L})} \right]$$

$$I_{j,n} = \int_0^H f_j(y/H) \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right) dy; \sqrt{-h} = \frac{1}{H} \sqrt{m_n^2 - \left(\frac{wH}{c}\right)^2}$$

$$m_n = (2n-1) \frac{p}{2}; b_n = \frac{\sqrt{-h} + \left(\frac{iw}{c} - \frac{S1}{S2H}\right)}{\sqrt{-h} - \left(\frac{iw}{c} - \frac{S1}{S2H}\right)} \quad (5.84)$$

$$S1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n} e^{\left(-m_n \frac{L}{H}\right)} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right); S2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m_n^2} e^{\left(-m_n \frac{L}{H}\right)} \cos\left(m_n \frac{y}{H}\right)$$

A Equação (5.84) corresponde ao campo de pressões hidrodinâmicas obtido com a condição de radiação proposta pelo autor na superfície de truncamento.

#### 5.5.4 - Aplicação numérica e representação gráfica dos resultados

As condições de radiação para a superfície de truncamento presentes na literatura, assim como a condição de radiação proposta, levam à expressões para o campo de pressões hidrodinâmicas no domínio do reservatório, equações (5.71), (5.77) e (5.84). A fim de testar a precisão, a convergência e a eficiência dessas soluções apresentadas com a utilização dos amortecedores (Sommerfeld, Sharan e Proposto), é desenvolvido o exemplo a seguir. Para se compararem os resultados do presente trabalho com aqueles obtidos por um método numérico, algumas suposições foram feitas no modelo em estudo para que se tenha uma comparação adequada, como por exemplo: barragem rígida com excitação da aceleração de amplitude igual à aceleração gravitacional. Outras informações sobre o modelo numérico utilizado podem ser encontradas no trabalho de Sharan, (1987).

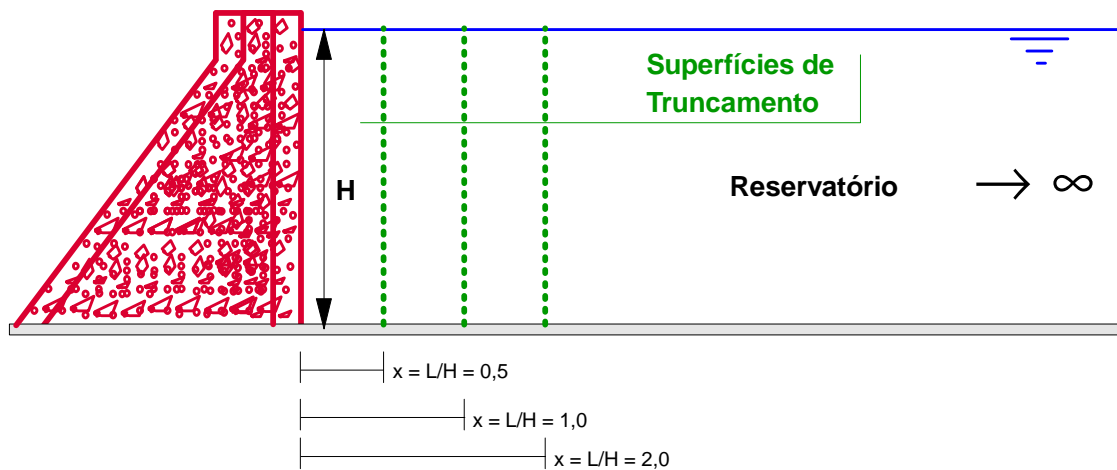


Figura 5.10 - Diferentes posições para a superfície de truncamento.

O reservatório infinito foi analisado para três posições diferentes da superfície de truncamento, e três parâmetros diferentes de compressibilidade ( $wH/c$ ), ou equivalente inverso do parâmetro de compressibilidade do fluido ( $Tc/H$ ), cada uma tendo por resultado um tamanho diferente  $L$  (abscissa da superfície de truncamento) de um reservatório finito equivalente. Os resultados para a distribuição da pressão hidrodinâmica foram obtidos com a utilização de três tipos de amortecedores distintos, colocado um de cada vez ao longo da superfície do truncamento, a saber:

$$1) \left. \frac{\partial p(L, y, w)}{\partial x} \right|_{x=L} = \frac{i w}{c} p(L, y, w) \text{ (Sommerfeld),}$$

$$2) \left. \frac{\partial p(L, y, w)}{\partial x} \right|_{x=L} = \left( \frac{i w}{c} - \frac{p}{2H} \right) p(L, y, w) \text{ (Sharan),}$$

$$3) \left. \frac{\partial p(L, y, w)}{\partial x} \right|_{x=L} = \left( \frac{i w}{c} - \frac{S1}{S2H} \right) p(L, y, w) \text{ (Proposto).}$$

Na Tabela 5.5 os testes da convergência para o modelo numérico foram conduzidos dobrando-se os números das subdivisões  $N_v$  e  $N_h$  da malha ao longo dos sentidos verticais e horizontais, respectivamente, e o número  $N_t$  das etapas do tempo pelo ciclo da excitação.

Os resultados pelo método numérico aproximaram-se cada vez mais da solução clássica, para maiores refinamentos das malhas e as etapas do tempo foram subdivididas enquanto



que o comprimento do reservatório finito foi aumentado de  $L = 0,5H$  a  $L = H$  e  $2H$  (Sharan, 1987).

Tabela 5.5 – Pressão hidrodinâmica obtida pelo Método dos Elementos Finitos – MEF (Sharan, 1987) e pela Técnica de Separação de Variável – TSV (presente trabalho).

$\frac{T_c}{H}$	$\frac{L}{H}$	Tamanho da Malha $N_v \times N_h$	$N_t$	Método Numérico – Via MEF, no Domínio do Tempo				Método Analítico – Via TSV, no Domínio da Freqüência			
				Amortecedor de Sommerfeld		Amortecedor de Sharan		Amortecedor de Sommerfeld		Amortecedor de Sharan	
				$C_p$	*Erro em $C_p$	$C_p$	*Erro em $C_p$	$C_p$	*Erro em $C_p$	$C_p$	*Erro em $C_p$
1	0,5	16 x 8	32	0,2229	1,2 %	0,2002	9,1 %	0,2384	8,3 %	0,2004	9,0 %
	1,0	16 x 16	32	0,2202	0,0 %	0,2184	0,8 %	0,2245	2,0 %	0,2279	3,5 %
	2,0	16 x 32	32	0,2188	0,6 %	0,2188	0,6 %	0,2441	10,9 %	0,1978	10,2 %
	$\infty$	-----	---	-----	-----	-----	-----	0,2244	1,9 %	0,2244	1,9 %
10	0,5	8 x 4	16	1,0648	30,6 %	0,7778	4,6 %				
		16 x 8	32	1,0661	30,7 %	0,7779	4,6 %	1,1461	40,5 %	0,7808	4,3 %
	1,0	8 x 8	16	0,8773	7,6 %	0,7963	2,4 %				
		16 x 16	32	0,8802	7,9 %	0,8006	1,8 %	0,8859	8,6 %	0,8073	1,0 %
	2,0	8 x 16	16	0,8169	0,2 %	0,8129	0,3 %				
16 x 32		32	0,8167	0,1 %	0,8137	0,2 %	0,8194	0,5 %	0,8151	0,1 %	
$\infty$	-----	---	-----	-----	-----	-----	0,8156	0,0 %	0,8156	0,0 %	
100	0,5	16 x 8	32	1,1646	56,7 %	0,7418	0,2 %	1,1661	56,9 %	0,7420	0,1 %
	1,0	16 x 16	32	0,8158	9,8 %	0,7425	0,1 %	0,8163	9,9 %	0,7430	0,0 %
	2,0	16 x 32	32	0,7456	0,3 %	0,7424	0,1 %	0,7461	0,4 %	0,7431	0,0 %
	$\infty$	-----	---	-----	-----	-----	-----	0,7431	0,0 %	0,7431	0,0 %

\* Erro percentual comparado com os valores clássicos de  $C_p$  (0,2202; 0,8156 e 0,7431)

para  $T_c/H = 1; 10$  e  $100$  (ou  $wH/c = 2p, p/5$  e  $p/50$ ), respectivamente.

Os resultados para  $C_p$  apresentados correspondem ao valor absoluto de  $C_p = \frac{p(0,0,w)}{rH\sqrt{g}}$

para os parâmetros de compressibilidade do fluido, entretanto, os resultados para  $C_p$

apresentados na Tabela 5.5 correspondem ao valor absoluto de  $C_p = \frac{p(0,0,5,w)}{rH\sqrt{g}}$  para

$wH/c = 2p$ , e  $C_p = \frac{p(0,0,w)}{rH\sqrt{g}}$  para  $wH/c = p/5$  e  $p/50$ .

Apresenta-se na Tabela 5.6 somente os resultados analíticos para as condições de radiação dos amortecedores de Sommerfeld, Sharan e o Proposto, na superfície de truncamento.

Observa-se que os resultados da literatura (referenciada) obtidos pelo Método dos Elementos Finitos estão em concordância com os resultados analíticos aqui apresentados.

Tabela 5.6 - Comparação da pressão hidrodinâmica, obtidas pela Técnica de Separação de Variável com a utilização dos amortecedores de Sommerfeld, Sharan e Proposto.

		Método Analítico – Via TSV, no Domínio da Frequência					
		Amortecedor de Sommerfeld		Amortecedor de Sharan		Amortecedor Proposto	
$\frac{wH}{c}$	$\frac{L}{H}$	Cp	* Erro	Cp	* Erro	Cp	* Erro
2p	0,5	0,1183	3,1 %	0,1604	39,8 %	0,1591	38,7 %
	1,0	0,0897	21,8 %	0,0435	62,1 %	0,0438	61,8 %
	2,0	0,1123	2,1 %	0,1328	15,8 %	0,1328	15,8 %
	$\infty$	0,1147	0,0 %	0,1147	0,0 %	0,1147	0,0 %
p/5	0,5	1,1461	40,5 %	0,7808	4,3 %	0,7882	3,4 %
	1,0	0,8859	8,6 %	0,8073	1,0 %	0,8077	1,0 %
	2,0	0,8194	0,5 %	0,8151	0,1 %	0,8151	0,1 %
	$\infty$	0,8156	0,0 %	0,8156	0,0 %	0,8156	0,0 %
p/50	0,5	1,1661	56,9 %	0,7420	0,1 %	0,7491	0,8 %
	1,0	0,8163	9,9 %	0,7430	0,0 %	0,7434	0,0 %
	2,0	0,7461	0,4 %	0,7431	0,0 %	0,7431	0,0 %
	$\infty$	0,7431	0,0 %	0,7431	0,0 %	0,7431	0,0 %

\* Erro percentual comparado com os valores clássicos de Cp (0,1147; 0,8156 e 0,7431)

para  $wH/c = 2p, p/5$  e  $p/50$ , respectivamente.

Para  $Tc/H = 1$ , ou  $wH/c = 2p$ , que representa uma frequência de excitação relativamente alta, os erros que resultam pelo uso dos amortecedores de Sharan e o Proposto estão maiores do que aqueles produzidos pelo uso do amortecedor de Sommerfeld. A razão principal para tal discrepância, para este caso, é que a pressão não se aproxima de zero enquanto  $x$  tende ao infinito. Os amortecedores de Sharan e o Proposto são baseados na condição real de que a pressão hidrodinâmica é zero no infinito. Além disso, para os valores mais elevados da frequência da excitação, as pressões hidrodinâmicas são muito baixas (Silva & Pedroso, 2006a), e conseqüentemente os erros resultantes são praticamente insignificantes.

A possibilidade de deslocamento da superfície de truncamento o mais próximo da face da barragem é o interesse deste estudo, porque a uma distância relativamente longe da face da barragem os resultados para a pressão hidrodinâmica serão bons, com a utilização de qualquer um dos três amortecedores citados, na superfície de truncamento, conforme fica evidente na Tabela 5.5, Tabela 5.6. As Tabelas a seguir (Tabela 5.7, Tabela 5.8 e Tabela 5.9), assim como os respectivos gráficos (Figura 5.11, Figura 5.12 e Figura 5.13), comparam a distribuição da pressão hidrodinâmica na face da barragem ao longo da altura,  $C_p = p(0, y, w)/rH\sqrt{g}$ , de acordo com as condições de radiação dos amortecedores

utilizados na superfície de truncamento localizada a uma distância  $x = L/H = 0,5$  para determinados parâmetros de compressibilidade do fluido. Em  $y/H = 0$  tem-se a base da barragem.

Para uma frequência de excitação bem menor que a segunda frequência fundamental do reservatório, é o amortecedor de Sharan que fornece os melhores resultados.

Tabela 5.7 - Distribuição da pressão hidrodinâmica na face da barragem ao longo da altura do reservatório ( $wH/c = p/50$ ).

Método Analítico – Via TSV, no Domínio da Frequência				
$\frac{y}{H}$	Solução Clássica ( $L = \infty$ )	Amortecedor de Sommerfeld	Amortecedor de Sharan	Amortecedor Proposto
	$C_p$	$C_p$	$C_p$	$C_p$
1,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,9	0,2257	0,2928	0,2260	0,2272
0,8	0,3629	0,4954	0,3634	0,3657
0,7	0,4662	0,6605	0,4669	0,4701
0,6	0,5471	0,7981	0,5477	0,5519
0,5	0,6107	0,9121	0,6111	0,6161
0,4	0,6602	1,0041	0,6602	0,6659
0,3	0,6972	1,0752	0,6968	0,7031
0,2	0,7229	1,1258	0,7222	0,7289
0,1	0,7381	1,1560	0,7371	0,7441
0,0	0,7431	1,1661	0,7420	0,7491

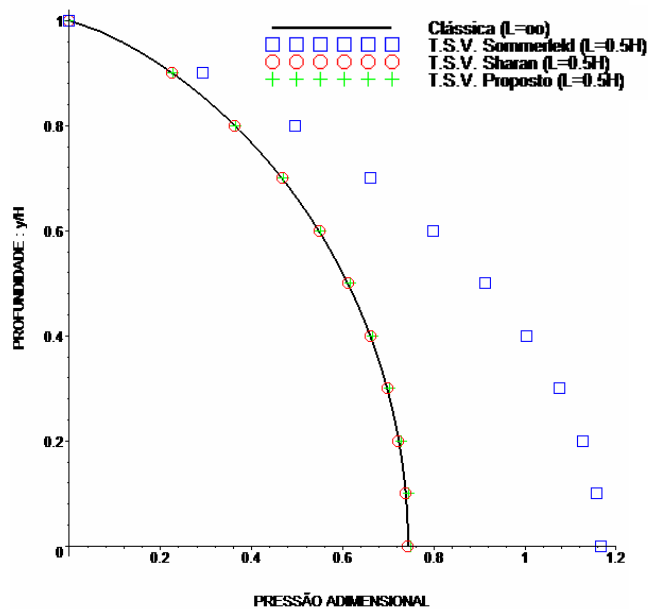


Figura 5.11 - Distribuição da pressão hidrodinâmica na face da barragem ao longo da altura do reservatório ( $wH/c = p/50$ ).

Para uma frequência de excitação dez vezes maior que a anterior, porém ainda menor que a segunda frequência fundamental do reservatório, é o amortecedor Proposto que fornece os melhores resultados.

Tabela 5.8 - Distribuição da pressão hidrodinâmica na face da barragem ao longo da altura do reservatório ( $wH/c = p/5$ ).

Método Analítico – Via TSV, no Domínio da Frequência				
$\frac{y}{H}$	Solução Clássica ( $L = \infty$ )	Amortecedor de Sommerfeld	Amortecedor de Sharan	Amortecedor Proposto
	Cp	Cp	Cp	Cp
1,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,9	0,2376	0,2856	0,2324	0,2336
0,8	0,3862	0,4836	0,3760	0,3783
0,7	0,5003	0,6456	0,4852	0,4886
0,6	0,5908	0,7811	0,5712	0,5756
0,5	0,6630	0,8937	0,6392	0,6444
0,4	0,7195	0,9849	0,6920	0,6981
0,3	0,7622	1,0556	0,7316	0,7383
0,2	0,7920	1,1059	0,7592	0,7662
0,1	0,8097	1,1361	0,7754	0,7828
0,0	0,8156	1,1461	0,7808	0,7882

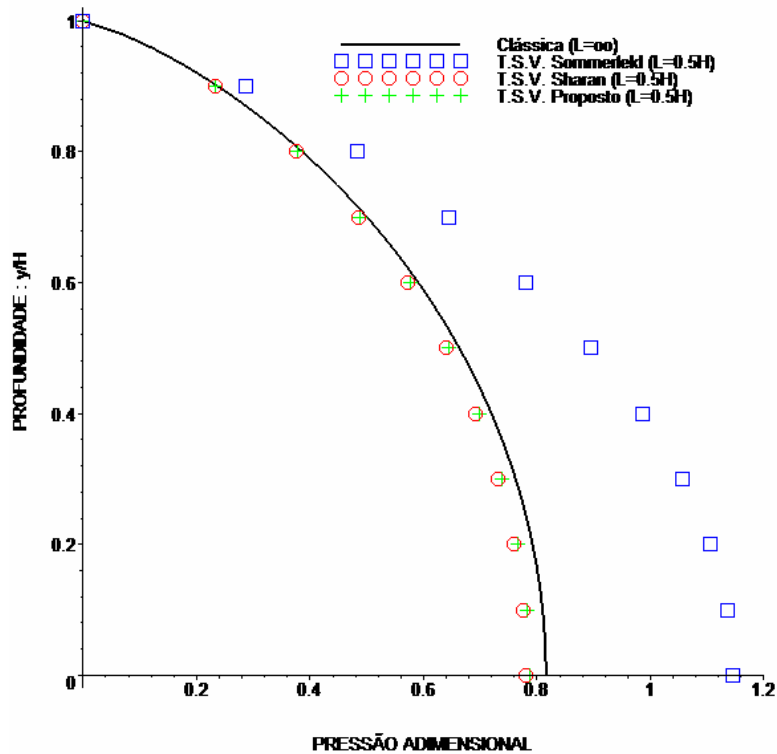


Figura 5.12 - Distribuição da pressão hidrodinâmica na face da barragem ao longo da altura do reservatório ( $wH/c = p/5$ ).

Para uma frequência de excitação maior que a segunda frequência fundamental do reservatório, é o amortecedor de Sommerfeld que fornece os melhores resultados.

Tabela 5.9 - Distribuição da pressão hidrodinâmica na face da barragem ao longo da altura do reservatório ( $wH/c = 2p$ ).

$\frac{y}{H}$	Método Analítico – Via TSV, no Domínio da Frequência			
	Solução Clássica ( $L = \infty$ )	Amortecedor de Sommerfeld	Amortecedor de Sharan	Amortecedor Proposto
	$C_p$	$C_p$	$C_p$	$C_p$
1,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,9	0,1113	0,1042	0,0947	0,0951
0,8	0,1605	0,1619	0,1374	0,1384
0,7	0,1971	0,2107	0,1756	0,1770
0,6	0,2209	0,2396	0,2003	0,2019
0,5	0,2244	0,2384	0,2004	0,2020
0,4	0,2056	0,2079	0,1776	0,1789
0,3	0,1722	0,1625	0,1493	0,1500
0,2	0,1391	0,1267	0,1408	0,1404
0,1	0,1198	0,1169	0,1525	0,1514
0,0	0,1147	0,1183	0,1604	0,1591

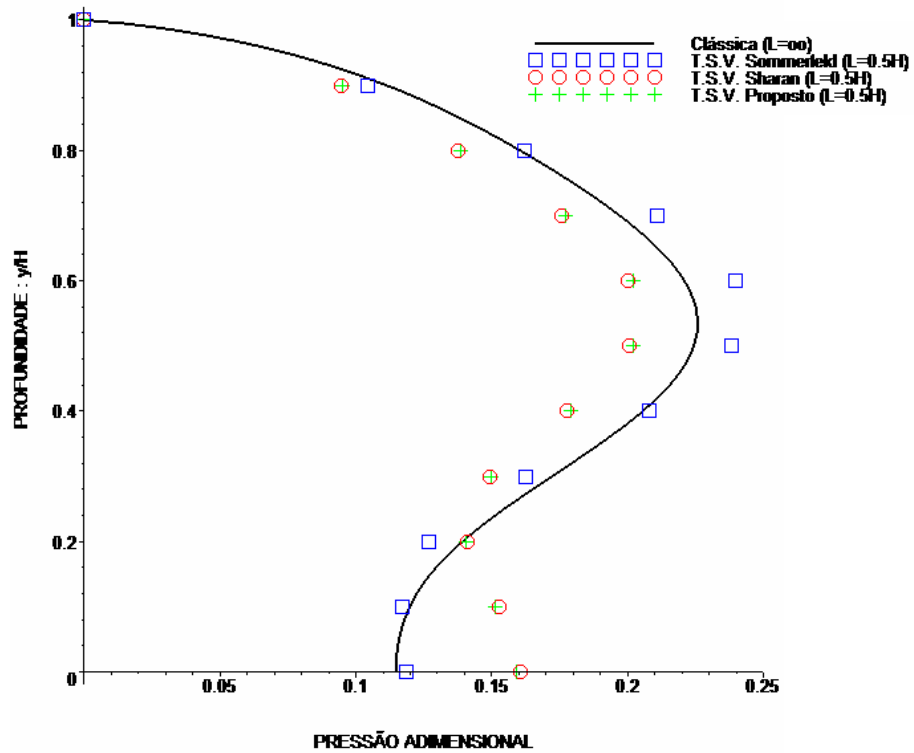


Figura 5.13 - Distribuição da pressão hidrodinâmica na face da barragem ao longo da altura do reservatório ( $wH/c = 2p$ ).

A partir dos resultados obtidos nesta aplicação numérica, alguns comentários e conclusões podem ser evidenciados:

A técnica de separação de variável aplicada à equação da onda para a análise da pressão hidrodinâmica gerada pelo movimento de uma estrutura submersa em um domínio fluido infinito e compressível, com as condições de radiação dos amortecedores estudados ao nível da superfície de truncamento, fornece importantes expressões analíticas para o campo de pressões hidrodinâmicas; Equação (5.71), Equação (5.77) e Equação (5.84).

As condições de radiação dos amortecedores na superfície de truncamento representam condições limites aplicadas de forma apropriada numa seção finita do reservatório de modo a reproduzir com precisão o campo de pressões hidrodinâmicas no domínio de interesse do fluido, que se teria se o domínio total (infinito) fosse considerado, ou seja, a superfície de truncamento representa o comprimento finito ( $L$ ) de um reservatório finito equivalente ao reservatório infinito na região de interesse; Figura 5.10.

Para análise da pressão hidrodinâmica o amortecedor de Sommerfeld quando utilizado na superfície de truncamento em uma análise no domínio do tempo através do método dos elementos finitos apresentou melhores resultados do que em uma análise no domínio da frequência através da técnica de separação de variável; Tabela 5.5.

Para análise da pressão hidrodinâmica o amortecedor de Sharan quando utilizado na superfície de truncamento em uma análise no domínio da frequência através da técnica de separação de variável apresentou melhores resultados do que em uma análise no domínio do tempo através do método dos elementos finitos; Tabela 5.5.

A qualidade dos resultados obtidos com o uso dos amortecedores usuais dados na literatura e com o amortecedor proposto pelo autor ficou evidenciada analisando-se a pressão hidrodinâmica numa barragem rígida de interface vertical com o fluido. Verificou-se também que os resultados convergiram à solução exata à medida que o comprimento dos reservatórios finitos equivalentes foi aumentado; Tabela 5.5 e Tabela 5.6.

O desempenho dos amortecedores utilizados na superfície de truncamento é função do parâmetro de compressibilidade do fluido, assim o amortecedor de Sommerfeld se mostrou mais eficiente para  $wH/c = 2p$ , enquanto que o amortecedor de Sharan foi mais eficiente para  $wH/c = p/50$ , já o amortecedor Proposto foi mais eficiente para  $wH/c = p/5$  (Tabela 5.7, Tabela 5.8, Tabela 5.9, Figura 5.11, Figura 5.12 e Figura 5.13), o que está de acordo com as definições e limitações concebidas para estes amortecedores. Entretanto, o amortecedor Proposto será ainda eficaz para uma faixa mais ampla e mais prática de frequências de excitação em comparação ao amortecedor de Sommerfeld e Sharan.

### 5.5.5 - Aplicação prática (barragem brasileira)

Esta seção visa aplicar as formulações desenvolvidas, através da técnica de separação de variável com a utilização de superfície de truncamento, equações (5.71), (5.77) e (5.84), à uma barragem típica brasileira, por exemplo, assemelhada a barragem de Tucuruí – Pará. O perfil da barragem estudado é mostrado na Figura 5.14; possui altura de  $86,86\text{ m}$  e largura da base de  $71,42\text{ m}$ , tendo, portanto uma relação base altura de  $82\%$ , com uma crista de  $20,85\text{ m}$  de largura. A barragem é de concreto gravidade. Essas dimensões aproximam-se do perfil típico de uma seção genérica do paramento da barragem da usina hidrelétrica de Tucuruí.

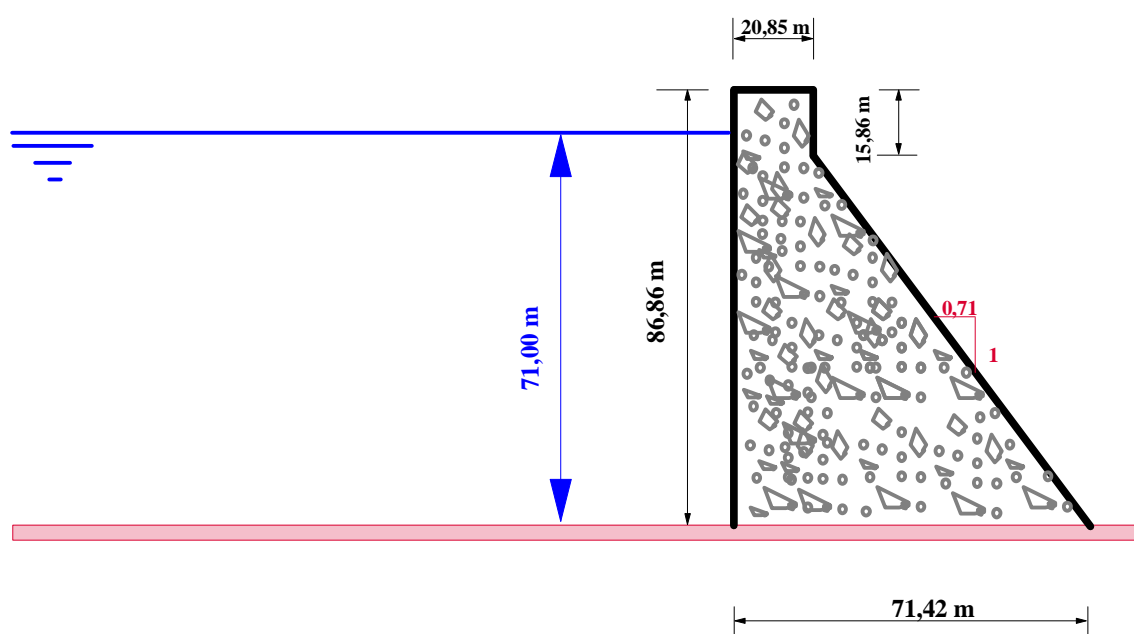


Figura 5.14 – Esquema aproximado da barragem de Tucuruí.

As propriedades físicas e geométricas do material da barragem, como: altura ( $H_S$ ), módulo de elasticidade ( $E$ ), massa específica ( $r_s$ ) e coeficiente de poisson ( $n$ ); como também do fluido do reservatório: altura ( $H$ ), velocidade de propagação da onda no meio ( $c$ ), massa específica ( $r$ ) e aceleração da gravidade ( $g$ ) são indicadas na Tabela 5.10 para os cálculos necessários.

Tabela 5.10 – Propriedades físicas e geométricas do perfil da barragem e do fluido do reservatório.

Barragem:	$H_S = 86,86$ m	$E = 20$ GPa	$r_s = 2\,500$ kg/m <sup>3</sup>	$n = 0,25$
Fluido:	$H = 71,00$ m	$c = 1\,500$ m/s	$r = 1\,000$ kg/m <sup>3</sup>	$g = 9,81$ m/s <sup>2</sup>

O parâmetro  $R_2$  é calculado a partir do método de Chopra, descrito na seção 5.3 deste trabalho. Os parâmetros envolvidos neste cálculo são mostrados na Tabela 5.12. Assim:

Tabela 5.11 – Parâmetros calculados pelo método de Chopra para a barragem.

$T_s$	$R_1$	$\tilde{T}_s$	$R_2$
0,23 s	1,06	0,25 s	0,76

O parâmetro de compressibilidade do fluido ( $wH/c$ ), no problema acoplado barragem-reservatório para o caso, pode ser determinado através da Equação (5.24) escrita sob a seguinte forma:  $\frac{wH}{c} = \frac{p}{2} R_2$ . Portanto:

$$\frac{wH}{c} = \frac{p}{2} R_2 = \frac{p}{2} 0,76 \quad \therefore \quad \boxed{\frac{wH}{c} = 1,2}$$

O reservatório desta barragem foi analisado para quatro posições diferentes da superfície de truncamento. Os resultados para a distribuição da pressão hidrodinâmica foram obtidos com a utilização de três tipos de amortecedores distintos, colocado um de cada vez ao longo da superfície do truncamento, a saber:

$$1) \left. \frac{\partial p(L, y, w)}{\partial x} \right|_{x=L} = \frac{i w}{c} p(L, y, w) \text{ (Sommerfeld),}$$



$$2) \left. \frac{\partial p(L, y, w)}{\partial x} \right|_{x=L} = \left( \frac{i w}{c} - \frac{p}{2H} \right) p(L, y, w) \text{ (Sharan),}$$

$$3) \left. \frac{\partial p(L, y, w)}{\partial x} \right|_{x=L} = \left( \frac{i w}{c} - \frac{S1}{S2H} \right) p(L, y, w) \text{ (Proposto).}$$

Apresenta-se a seguir na Tabela 5.12 os resultados que foram obtidos de forma analítica com as condições de radiação dos amortecedores de Sommerfeld e Sharan, bem como um amortecedor proposto, na superfície de truncamento. Os resultados para  $C_p$  apresentados correspondem ao valor absoluto de  $C_p = \frac{p(0, 0, w)}{\sqrt{\frac{2}{g}}}$ .

Tabela 5.12 - Comparação das pressões hidrodinâmicas, obtidas pela Técnica de Separação de Variável com a utilização dos amortecedores de Sommerfeld, Sharan e Proposto.

		Método Analítico – Via TSV, no Domínio da Frequência					
		Amortecedor de Sommerfeld		Amortecedor de Sharan		Amortecedor Proposto	
$\frac{wH}{c}$	$L$ (m)	$C_p$	* Erro	$C_p$	* Erro	$C_p$	* Erro
1,2	35,5	10 728,1	3,6 %	7 909,4	28,9 %	8 413,5	24,4 %
	71,0	10 706,8	3,8 %	9 847,7	11,5 %	9 890,3	11,1 %
	142,0	11 047,6	0,7 %	10 948,2	1,6 %	10 948,2	1,6 %
	213,0	11 111,5	0,1 %	11 097,3	0,3 %	11 097,3	0,3 %
	$\infty$	11 125,7	0,0 %	11 125,7	0,0 %	11 125,7	0,0 %

\* Erro percentual comparado com o reservatório de comprimento infinito ( $L = \infty$ ).

A possibilidade de deslocamento da superfície de truncamento para uma posição mais próxima da face da barragem é o interesse deste estudo, porque a uma distância relativamente longe da face da barragem os resultados para a pressão hidrodinâmica serão bons, com a utilização de qualquer um dos três amortecedores citados, na superfície de truncamento, conforme fica evidente na Tabela 5.12.

A Tabela 5.13 e a Figura 5.15, comparam a distribuição da pressão hidrodinâmica na face da barragem ao longo da altura,  $C_p = p(0, y, w)/\sqrt{\frac{2}{g}}$ , de acordo com as condições de radiação dos amortecedores utilizados na superfície de truncamento localizada a uma distância  $x = 35,5$  m. Em  $y = 0$  tem-se a base da barragem.

Tabela 5.13 - Distribuição da pressão hidrodinâmica na face da barragem ao longo da altura do reservatório.

Método Analítico – Via TSV, no Domínio da Frequência				
y (m)	Solução Clássica ( $L = \infty$ )	Amortecedor de Sommerfeld	Amortecedor de Sharan	Amortecedor Proposto
	Cp	Cp	Cp	Cp
71,00	0,00	0,00	0,00	0,00
63,90	8 236,00	7 703,50	7 710,60	7 767,40
56,80	10 870,10	9 940,00	9 840,60	9 961,30
49,70	11 963,50	10 770,70	10 451,20	10 635,80
42,60	12 346,90	11 047,60	10 401,50	10 650,00
35,50	12 368,20	11 090,20	10 039,40	10 344,70
28,40	12 183,60	11 040,50	9 528,20	9 897,40
21,30	11 885,40	10 955,30	8 981,50	9 400,40
14,20	11 558,80	10 863,00	8 477,40	8 938,90
7,10	11 267,70	10 777,80	8 079,80	8 576,80
0,00	11 125,70	10 728,10	7 709,40	8 413,50

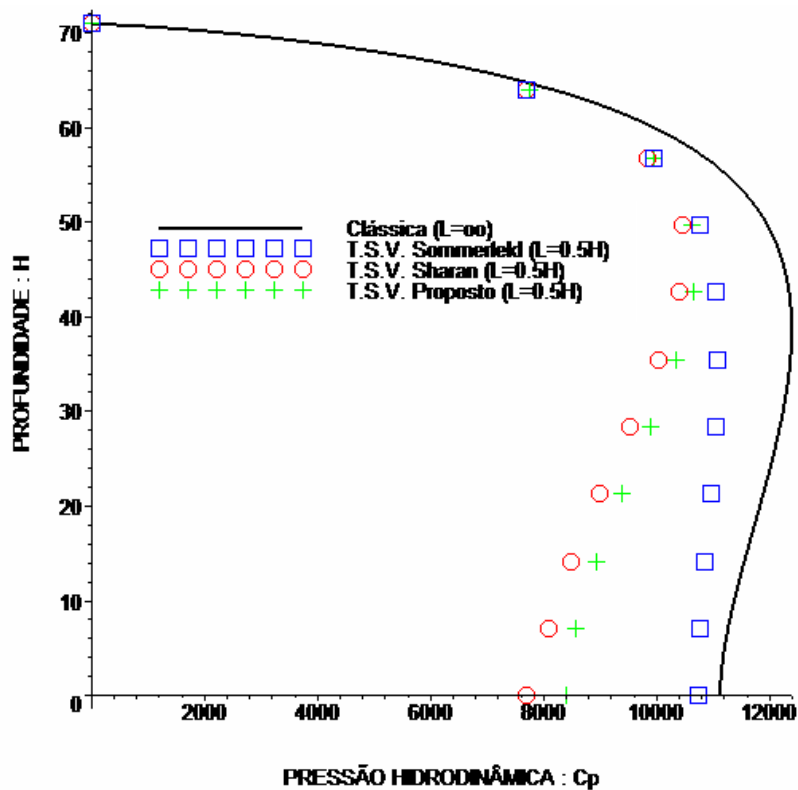


Figura 5.15 - Distribuição da pressão hidrodinâmica na face da barragem ao longo da altura do reservatório.

A partir dos resultados obtidos nesta aplicação prática, alguns comentários e conclusões podem ser evidenciados:

A qualidade dos resultados obtidos com o uso dos três amortecedores (Sommerfeld, Sharan e Proposto) ficou evidenciada analisando-se a pressão hidrodinâmica num perfil típico de barragem assemelhado a Tucuruí. Encontrou-se que os resultados convergiram à mesma solução à medida que a superfície de truncamento foi afastada da face da barragem; Tabela 5.12.

O desempenho dos amortecedores utilizados na superfície de truncamento é função do parâmetro de compressibilidade do fluido e da deformada modal da barragem, assim o amortecedor de Sommerfeld se mostrou mais eficiente nesta aplicação prática (Tabela 5.13 e Figura 5.15).

O coeficiente de pressão hidrodinâmica ( $C_p$ ) utilizado nesta aplicação está em função da amplitude da aceleração ( $\frac{v}{g}$ ), ou seja, a pressão hidrodinâmica final para o problema em estudo pode ser determinada a partir dos resultados apresentados quando multiplicados pela respectiva amplitude da aceleração do solo na base da barragem.

Na prática, a Tabela 5.12 poderá ser utilizada em uma análise numérica deste problema, por exemplo, pelos métodos das diferenças finitas, elementos finitos ou elementos de contorno. Basta informar que a malha do reservatório poderá ter um comprimento de 35,5 metros na direção perpendicular à face da barragem e que nesta extremidade (superfície de truncamento), assumindo-se, por exemplo, a condição de contorno de Sommerfeld se terá um erro relativo para a pressão hidrodinâmica máxima de 3,6%, o que seria mais do razoável em termos de projeto.

## 6 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

### 6.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS

O presente trabalho teve como temática a interação dinâmica entre barragem e reservatório. Considerou-se modelos analíticos tratados pela técnica de separação de variável e modelagem numérica por intermédio de elementos finitos e de contorno parcial. Neste tipo de problema, os carregamentos sísmicos induzem movimentos vibratórios tanto na estrutura da barragem quanto no fluido do reservatório.

Combinações entre as considerações sobre a elasticidade da barragem e a compressibilidade do fluido deram origem aos capítulos desta tese, com a idéia de se ter um modelo matemático mais representativo aos modelos físicos. Algumas soluções significativas foram apresentadas ao longo do texto junto com análises paramétricas, bem como exemplos numéricos ilustrando a viabilidade das soluções propostas. Uma boa precisão foi obtida em todos os estudos paramétricos e exemplos abordados, tendo se destacado o estudo sobre as técnicas de atenuadores (amortecedores) para se considerar contornos não reflexivos nas superfícies de truncamento.

A técnica de separação de variável se mostrou eficiente na solução das equações diferenciais que representaram os modelos analíticos que consideram a incompressibilidade (Equação de Laplace) e compressibilidade do fluido (Equação da onda), tanto para o caso da barragem rígida-móvel quanto flexível (limitada a sua deformada fundamental). Mesmo se trabalhando no campo dos números complexos a técnica de separação de variável resultou em uma expressão exata para o campo de pressões hidrodinâmicas, Equação (2.131). A parte real e imaginária desta equação está relacionada respectivamente aos efeitos conservativos e dissipativos do fluido no sistema, sendo que estes efeitos aumentam e diminuem respectivamente, com o crescimento do número de Froude, conforme mostrado na Tabela 2.4 e Figura (2.16).

Observou-se que a função de aproximação analítica, proposta no capítulo 2, para o cálculo da pressão hidrodinâmica, Equação (2.57), foi a que mais se aproximou da solução exata na base da barragem (onde o valor é máximo), Figura 2.3. Enquanto que a aproximação

numérica (método dos elementos de contorno) também proposta pelo autor forneceu bons resultados, em relação à solução exata em séries, no domínio da barragem-reservatório, Figura 2.4. Vale dizer que as curvas de pressão hidrodinâmica e massa adicional na face da barragem, obtidas pela função de aproximação analítica de Westergaard e pela função de aproximação analítica proposta pelo autor, ficaram a favor da segurança em relação à solução exata em séries. Resultados estes que qualificaram também estas aproximações para as finalidades práticas em projetos de engenharia (Figura 2.3 e Figura 2.6).

Ainda no capítulo 2, estudos sobre as condições de contorno na superfície de truncamento no domínio infinito de um fluido incompressível mostraram que a condição de contorno de Kuçükarslan e a condição de contorno proposta pelo autor corresponderam à condição de contorno exata na superfície de truncamento, e que levaram concomitantemente à solução exata para o campo de pressões hidrodinâmicas no domínio truncado, Tabela 2.3, Figura (2.10) e Figura (2.11).

No capítulo 3 utilizou-se a técnica de separação de variável considerando-se a flexibilidade da barragem através de sua primeira deformada modal e observou-se que houve uma diminuição da pressão hidrodinâmica e da massa adicional, em relação ao caso de um movimento de corpo rígido para a barragem. Explica-se o fato pela avaliação da integral (área) relacionada a formulação flexível que é menor numericamente do que aquele relativo ao caso do movimento de corpo rígido. A modelagem numérica através do método dos elementos finitos via ANSYS, permitiu a verificação das soluções analíticas obtidas.

No capítulo 4 formulou-se o problema de interação barragem-reservatório de modo que os efeitos de compressibilidade do fluido (*PCF*) fossem considerados e observou-se que com o aumento do parâmetro de compressibilidade do fluido até um valor próximo de  $p/2$  também aumentaram o valor da pressão hidrodinâmica e da massa adicional no campo dos números reais. A partir deste valor, a pressão hidrodinâmica e a massa adicional resultaram em números complexos. Atribuindo-se valores ímpares e múltiplos de  $p/2$ , para o *PCF* tem-se a ressonância das respostas do sistema.

Um modelo matemático que considera tanto os efeitos de flexibilidade da barragem quanto os efeitos de compressibilidade do fluido foi desenvolvido no capítulo 5. Observou-se que

para o campo de pressões hidrodinâmicas e para a massa adicional os efeitos da consideração de barragem flexível são dominantes frente aos efeitos de compressibilidade do fluido no reservatório. Também neste capítulo mostrou-se que o desempenho dos amortecedores utilizados na superfície de truncamento é função do parâmetro de compressibilidade do fluido, de acordo com as definições e limitações concebidas para estes amortecedores. Entretanto, O amortecedor Proposto foi eficaz para uma faixa mais larga e mais prática das freqüências de excitação, em comparação aos demais amortecedores (amortecedor de Sommerfeld e amortecedor de Sharan).

## **6.2 - SUGESTÕES PARA DESENVOLVIMENTOS FUTUROS**

Além do vasto campo de análises relativo ao estudo de problemas de acoplamento barragem-reservatório, alguns tópicos, mais específicos, são aqui propostos como sugestão para desenvolvimentos futuros, a saber:

- 1- Fazer uma análise com as formulações obtidas pela técnica de separação de variável levando em consideração modos mais altos de deformadas modais para o problema de interação barragem-reservatório;
- 2- Utilizar a técnica de separação de variável para solucionar as equações de Laplace e da onda na forma tridimensional, para o campo de pressões hidrodinâmicas, incluindo assim o estudo de barragens em arco;
- 3- Estudar o problema de interação barragem-reservatório-fundação, utilizando condições de contorno especiais na superfície livre e no fundo do reservatório e que leve em consideração as ações dos detritos (truncos de madeira, embarcações, etc.) contra as barragens;
- 4- Considerar não linearidades no problema de interação barragem-reservatório, admitindo-se grandes deslocamentos para a barragem e para a superfície livre do fluido no reservatório;

5- Considerar a não linearidade dos materiais (leis constitutivas, fissuração, etc.) admitindo-se o acoplamento da pressão hidrodinâmica na fissura da barragem durante um movimento causado, por sismos;

6- Formular e implementar um modelo numérico (MEF, MEC, MDF) que leve em consideração a cavitação na interface barragem-reservatório devido a um movimento brusco da parede na interface;

7- Usar elementos finitos especiais, como por exemplo: elementos infinitos e elementos absorventes. Assim como utilizar o método dos elementos compostos (processo de enriquecimento do método dos elementos finitos por meio de soluções analíticas da teoria clássica).

Outras atividades para possíveis pesquisas futuras podem ser originadas tomando-se como base alguns dos aspectos iniciais sugeridos nestes itens. Este trabalho contribuiu também no sentido de se ter uma sistematização dos modelos matemáticos possíveis e representados pelas equações diferenciais envolvidas (Equação de Laplace e Equação da onda), fornecendo uma metodologia para o tratamento do problema e servindo como base para o entendimento de outros tipos de problemas, assim como para o aprimoramento das soluções desenvolvidas ao longo deste trabalho.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Agnantiaris, J.P., Polyzos e Beskos, D.E. (1996). “Some studies on dual reciprocity BEM for elastodynamic analysis.” In: *Comput. Mech.*, 17: 270–277.
- Agnantiaris, J.P., Polyzos e Beskos, D.E. (1998). “Three dimensional structural vibration analysis by the dual reciprocity BEM.” In: *Comput. Mech.*, 21: 372–381.
- Agnantiaris, J.P., Polyzos e Beskos, D.E. (2001). “Free vibration analysis of non-axisymmetric and axisymmetric structures by the dual reciprocity BEM.” In: *Eng. Anal.*, 25: 713–723.
- Ahmadi, M.T. e Ozaka, Y. (1988). “A simple method for the full-scale 3-D dynamic analysis of arch dams.” In: *Proceedings of the Ninth World Conference on Earthquake Engineering*, volume VI, pages 373-378, Tokyo.
- Amini, S., Harris, P.J. e Wilton, D.T. (1992). “*Coupled boundary and finite element methods for the solution of the dynamic fluid-structure interaction problem*”. Berlin, Springer-Verlag.
- ANSYS, versão 5.4 (1996). “*Método dos Elementos Finitos*”, 1 CD-ROM.
- Antes, H. e Von Estorff, O. (1987). “Analysis of absorption effects on the dynamic response of dam reservoir systems by boundary element methods.” In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 15, 1023-1036.
- Assumpção, M.S. e Neto, C.M.D. (2000). “Sismicidade e estrutura interna da terra”. In: Teixeira, W.; Toledo, M.C.M.; Fairchild, T. R.; Taioli, F. *Decifrando a Terra*. 1. ed. São Paulo: Oficina de textos.
- Azevedo, J.P.S. (1991). *Application of the boundary element method to two dimensional nonlinear gravity wave problems*, Ph.D Thesis, Computational Mechanics Institute, Southampton, England.
- Bathe, K.J. (1987). “*Finite Element Procedures*”, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Beskos, D.E. (1987). “Boundary element methods in dynamic analysis.” In: *Appl. Mech. Rev.*, 40: 1-23.
- Beskos, D.E. (1997). “Boundary element methods in dynamic analysis, Part II.” In: *Appl. Mech. Rev.*, 50: 149–197.
- Bougacha, S., Tassoulas, J.L. (1991). “Seismic analysis of gravity dams. I: Modeling of sediments.” In: *Journal Engnr. Mech.*, 117, 1826-1837.



- Brebbia, C.A., Telles, J.C.F. and Wrobel, L.C. (1984). “*Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering*”. Springer – Verlag, Berlin.
- Brebbia, C.A. e Walker, S. (1980). “Boundary Element Techniques in Engineering.” In: *Newnes-Butterworth*, London.
- Chakrabarti, P. and Chopra, A.K. (1974). *Hydrodynamic effects in earthquake response of gravity dams*. A.S.C.E., J. Struct. Div., 100, 1211-1224.
- Chang, C.T., Hinton, E. and Zienkiewicz, O.C. (1978). *Non-linear response of structure-fluid-foundation systems to earthquake excitation*. Chapter 11 of *Numerical Methods in Offshore Engineering* (O.C. Zienkiewicz, R.W. Lewis and K.G. Stagg, Eds.), Wiley, Chichester, U.K.
- Bang, C.F. & Cheng, B.F. (2002). “Hydrodynamic forces on concrete sea wall and breakwater during earthquakes: effects of bottom sediment layers and back-fill soil.” In: *Ocean Engineering*, 29, 783–814, ([www.elsevier.com/locate/oceaneng](http://www.elsevier.com/locate/oceaneng)).
- Cheng, A. (1986). “Effect of sediment on earthquake induced reservoir hydrodynamic response.” In: *Journal Engnr. Mech.*, 112, 654-664.
- Chopra, A.K. (1967). “Hydrodynamic pressures on dams during earthquakes.” In: *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 93, pp. 205-223.
- Chopra, A.K. (1968). “Earthquake behavior of dam-reservoir systems.” In: *Journal Engnr. Mech.*, ASCE, 94, 1475-1499.
- Chopra, A.K. (1970). “Earthquake response of concrete gravity dams.” In: *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 96, pp. 443-454.
- Chopra, A.K. (1978). “Earthquake resistant design of concrete gravity dams.” In: *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 104, pp. 953-971.
- Chopra, A.K. e Chakrabarti, P. (1981). “Earthquake analysis of concrete gravity dams including dam-fluid-foundation rock interaction.” In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 9, 363-383.
- Chwang, A.T. (1978). “Hydrodynamic pressures on sloping dams during earthquakes, Part 2. Exact Theory.” In: *Journal Fluid Mech.*, 87(2), 343-348.
- Chwang, A.T. e Housner, G.W. (1978). “Hydrodynamic pressures on sloping dams during earthquakes, Part 1. Momentum method.” In: *Journal Fluid Mech.*, 87(2), 335-341.
- Clough, R.W. (1970). “Earthquake response of structures”. In: Wiegel, R. L. *Earthquake Engineering*. Englewood cliffs: Prentice Hall, New Jersey.
- Clough, R.W. e Penzien, J. (1993). “*Dynamics of Structures*”. 2ed., McGraw-Hill, Inc., New York.

- Clough, R.W., Stephen R.M. e Kuo, J.S.H. (1982). “Dynamic response analysis of Techidam.” In: *Report No. EERC 82-9*, Earthquake Engineering Research Center, U. C. Berkeley, California.
- Clough, R.W., Chang, K.T., Stephen, R.M., Chen, H.Q. e Lu, G.P. (1984). “Vibration behavior of Xiang Hong Dian dam.” In: *Proc. Eighth World Conf. on Earthquake Engineering*, San Francisco, California, U.S.A., Vol. V, pp. 71-78.
- Coyette, J.P., Dejehet, E., Guisset, P. e Fyfe, K. (1989). “Numerical analysis of acoustic and elasto-acoustic problems using combined finite element and boundary element methods.” In: *Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference*, Las Vegas, NV.
- Czygan, O. (2003). *Fluid/struktur-kopplung bei ebenen und rotationssymmetrischen systemen unter berücksichtigung nichtlinearen strukturverhaltens*, Ph.D Thesis, Technische Universität Hamburg-Harburg, Hamburg, German.
- Czygan, O. e Von Estorff, O. (2002). “Fluid-structure interaction by coupling BEM and nonlinear FEM.” In: *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 26, pp. 773-779.
- Dai, D.N. (1992). “An improved boundary element formulation for wave propagation problems.” In: *Eng. Anal.*, 10: 277–281.
- Darbre, G.R. (1998). “Phenomenological two-parameter model for dynamic dam-reservoir interaction.” In: *Journal of Earthquake Engineering*, Vol. 2, No. 4, 513-524.
- Darbre, G.R. (2000). “State of practice in earthquake analysis of dams.” In: *ETH Zürich und Volkshochschule im Schwarzwald*, 15.
- Davidovici, V. (1999). “*La construction en zone sismique*”. Editeurs : Le Moniteur, Collection : Moniteur Référence Technique, France.
- Dowling, M.J. e Hall, J.F. (1989). “Nonlinear seismic analysis of arch dams.” In: *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 115(4):768-789.
- Everstine, G.C. e Henderson, F.M. (1990). “Coupled finite element/boundary element approach for fluid-structure interaction.” In: *Journal Acoust. Soc. Am.*, 87, pp. 1938-1947.
- Felippa, C.A. (1981). “Interfacing finite element and boundary element discretizations.” In: *Appl. Math. Modell.*, 5, 383-386.
- Fenves, G. e Chopra, A.K. (1984). “Earthquake analysis of concrete gravity dams including bottom absorption damwater-foundation rock interaction.” In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 12: 663-683.
- Fenves, G. e Chopra, A.K. (1985). “Effects of reservoir bottom absorption and dam-water-foundation rock interaction on frequency response functions for concrete gravity dams.” In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 13, 13-31.

- Fenves, G., Mojtahedi, S. e Reimer, R.B. (1992). "Effect of contraction joints on earthquake response of an arch dam." In: *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 118(4):1039-1055.
- FERC (Federal Energy Regulatory Commission) (2002). "*Chapter III Gravity Dams*". Federal Energy Regulatory Commission, Office of Hydropower Licensing, Engineering guidelines for evaluation of hydropower projects, Washington.
- Finn, W.D.L., Varoglu, E. e Charry, S. (1977). "Seismic Water Pressures Against Concrete Dams." In: *Structural & Geotechnical Mechanics*, a volume honoring N. M. Newmark, W. J. Hall ed., Prentice Hall, pp.420-442.
- Fok, K.L. e Chopra, A.K. (1985). "Earthquake analysis and response of concrete arch dams." In: *Report UBC/EERC-85/07*, Earthquake Eng. Research Center, Univ. of California, Berkeley.
- Gâmara, R.J.C. e Oliveira, S.B.M. (1990). "Non-linear dynamic analysis of arch dams." In: *Proceedings of the Ninth European Conference on Earthquake Engineering*, volume 7-B, pages 143-152, Moscow.
- Ghaemian, M. e Ghobarah, A. (1998). "Staggered solution schemes for dam-reservoir interaction." In: *J. Fluid and Str.*, 12, 933-948.
- Gibert, R.J. (1988). "*Vibrations des Structures: interactions avec les fluides sources d'excitation aléatoires*". Paris: Eyrolles.
- Hall, J.F. (1988). "The dynamic and earthquake behaviour of concrete dams: Review of experimental behaviour and observational evidence." In: *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 7(2):57-121.
- Hall, J.F. e Chopra, A.K. (1982). "Two dimensional dynamic analysis of concrete gravity and embankment dams including hydrodynamic effects." In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 10, 305-332.
- Hall, J.F. e Chopra, A.K. (1983). "Dynamic analysis of arch dams including hydrodynamic effects." In: *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 109(1):149-167.
- Hsu, J.R.C. e Jeng, D.S. (1994). "Wave induced soil response in an unsaturated anisotropic seabed of finite thickness." In: *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 18, 785-807.
- Hsu, J.R.C., Jeng, D.S. e Lee, C.P. (1995). "Oscillatory soil response and liquefaction in an unsaturated layered seabed." In: *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 19, 825-849.
- Humar, J.L. e Jablonski, A.M. (1988). "Boundary element reservoir model for seismic analysis of gravity dams." In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 16, 1129-1156.

- Humer, J. e Roufaiel, M. (1983). "Finite element analysis of reservoir vibration." In: *Proc. ASCE*, 109 (EM1), 215-230.
- Hutchinson, J. (2003). "Instituto Ciência Hoje." In: *Notícias-Zoologia*, (<http://cienciahoje.uol.com.br/controlPanel/materia/view/3823>).
- ISMES, (1993). "*Second Benchmark Workshop on Numerical Analysis of Dams*", Bergamo, Italy.
- Jablonski, A.M. e Humar, J.L. (1990). "Three-dimensional boundary element reservoir model for seismic analysis of arch and gravity dams." In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 19:359-376.
- Jeans, R.A. e Mathews, I.C. (1990). "Solution of fluid-structure interaction problems using a coupled finite element and variational boundary element technique." In: *Journal Acoust. Soc. Am.*, 88, pp. 2459-2466.
- Kniffka, K.V. (1993). "Investigation of the Mauvoisin concrete arch dam subjected to maximum credible earthquake." In: *Computers & Structures*, 47(4/5):787-800, And additional oral communication.
- Koh, H.M., Kim, J.K. e Park, J.H. (1998). "Fluid-structure interaction analysis of 3-D rectangular tanks by a variationally coupled BEM-FEM and comparison with test results." In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 27, pp. 109-124.
- Kotsubo, S. (1959). "Dynamic water pressure on dams due to irregular earthquakes." In: *Memoirs of the Faculty of Enineering, Kyushu University*, 18(4):119-129.
- Küçükarslan, S. (2003). "Dam-Reservoir Interaction for Incompressible-Unbounded Fluid Domains Using an Exact Truncation Boundary Condition." In: *16th ASCE Engineering Mechanics Conference*, July 16-18, University of Washington, Seattle.
- Küçükarslan, S. (2004). "Dynamic analysis of dam-reservoir-foundation interaction in time domain." In: *Computational Mechanics*, 33, 274-281.
- Küçükarslan, S. e Coşkun, S.B. (2003). "Dam-reservoir interaction including the reservoir bottom effects under earthquake ground motion." In: *Fifth National Conference on Earthquake Engineering*, 26-30 May, Istanbul, Turkey Paper No: AE-028.
- Kuo, J.S.H. (1982). "Fluid-structure interactions: Added mass computation for incompressible fluid." In: *Report No. EERC 82/09*, Earthquake Engineering Research Center, U. C. Berkeley, California.
- Lamb, H. (1945). "*Hydrodynamics-6th Ed.*", Dover, New York.

- Lie, S.T., Yu, G. e Zhao, Z. (2001). “Coupling of BEM/FEM for time domain structural-acoustic interaction problems.” In: *Computer Modeling in Engineering Sciences*, 2, pp. 171-181.
- Liu, P.L.F. (1986). “Hydrodynamic pressures on rigid dams during earthquakes.” In: *J. Fluid Mech.*, 165,131-145.
- Leoffler, C.F. e Mansur, W.J. (1987). “Analysis of time integration schemes for boundary element applications to transient wave propagation problems.” In: *Comput. Mech. Publ.*, 105–122.
- Leoffler, C.F. e Mansur, W.J. (1989). “Dual reciprocity boundary element formulation for transient elastic wave propagation analysis in infinite domains.” In: *Adv. Bound. Elem.*, 2: 231–240.
- Lotfi, V., Tassoulas, J.L. (1986). “Analysis of the response of dams to earthquakes.” In: *Report GR86-2*, The University of Texas, Austin.
- Lotfi, V., Roesset, J.M. e Tassoulas, J.L. (1987). “A technique for the analysis of the response of dams to earthquakes.” In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 115:463-490.
- Madsen, O.S. (1978). “Wave-induced pore pressures and effective stresses in a porous bed.” In: *Geotechnique*, 28, 377–393.
- Mays, J.R. e Roehm, L.H. (1993). “Effect of vertical contraction joints in concrete arch dams.” In: *Computers & Structures*, 47(4/5):615-627.
- Medina, F. e Dominguez, J. (1989). “Boundary elements for the analysis of the seismic response of dams including dam-water-foundation interaction effects.” In: *Engineering Analysis*, 6, 152-157.
- Medina, F., Dominguez, J. e Tassoulas, J.L. (1990). “On the response of dams to earthquakes including the effects of sediments.” In: *Journal Struct. Engng.*, 116, 3108-3121.
- Méhauté, B. (1976). “*An Introduction to Hydrodynamics and Water Waves*”, Springer Verlag, New York.
- Mei, C.C. e Foda, M.A. (1981). “Wave-induced responses in a fluid-filled poro-elastic solid with a free surface—a boundary layer theory.” In: *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 66, 597–631.
- Molina, E.C. (2002). “Terremotos no Brasil”. In: *Revista Ciência On-line*, Ano II nº 05: 4 pp. ([http://www.cienciaonline.org/revista/02\\_05/geologia/index.html](http://www.cienciaonline.org/revista/02_05/geologia/index.html)).

- Morais, M.V.G. (2000). *Modelização numérica pelo método dos elementos finitos de problemas em interação fluido-estrutura*, Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, 157p.
- Morrison, J.R., O'Brien, M.P., Johnson, J.W. e Shaaf, S.A. (1950). "The force exerted by surface waves on piles petroleum." In: *Transactions AIME*, 189, 149-154.
- Najib, B. (2002). *Étude de l'effet d'un couvert de glacé sur le comportement dynamique des barrages-poids*, Thèse de Doctorat ès sciences appliquées, Spécialité : génie civil, Université de Sherbrooke, Faculté de génie, Département de génie civil, Québec, Canada, 159p.
- Nardini, D. e Brebbia, C.A. (1982). "A New Approach to Free Vibration Analysis using Boundary Elements". Springer Verlag.
- NASA – National Aeronautics and Space Administration. (<http://www.nasa.gov/>).
- O'Connor, J.P.F. e Boot, J.C. (1988). "A solution procedure for the earthquake analysis of arch dam-reservoir systems with compressible water." In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 16:757-773.
- Oliveira, F. F. e Pedroso, L. J. (2002). "Avaliação de Tensões em Barragens de Concreto pelo Método de Gravidade." In: *VII Congresso Panamericano de Mecânica Aplicada-PACAM VII*, Temuco, Chile.
- Partridge, P.W., Brebbia, C.A. and Wrobel, L.C. (1992). "The Dual Reciprocity Boundary Element Method". Elsevier.
- Pedroso, L.J. (1982). *Alguns aspectos da interação fluido-estrutura em estruturas off-shore*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 338P.
- Pedroso, L.J. (2000). "Fluid-Structure Interaction and Earthquake Analysis In Concrete Dams." In: *Relatório de Estudos de Pós-Doutorado*, University of Montreal, École Polytechnique, Civil Engineering Department, Structural Division.
- Pedroso, L.J. (2003). *Interação fluido-estrutura*. Notas de Curso e Apostila Didática. UnB-FT/ENC, Vs.3, Brasília.
- Pedroso, L.J. e Moraes, M.V.G. (2002). "Compressibility Effects in Water-Dam Interaction." In: *VII Congresso Panamericano de Mecânica Aplicada-PACAM VII*, Temuco, Chile.
- Pedroso, L.J. e Sousa Jr., L.C. (2005). "Aspectos Relevantes na Análise Dinâmica Acoplada Barragem-Reservatório." In: *XXVI Seminário Nacional de Grandes Barragens*, Goiânia-GO.
- Perumalswami, P.R. (1973). "Earthquake hydrodynamic forces on arch dams." In: *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 99(EM5):965-977.

- Porter, C.S. e Chopra, A.K. (1981). “Dynamic analysis of simple arch dams including hydrodynamic interaction.” In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 9:573-597.
- Prevost, J.H., Eide, O. e Anderson, K.H. (1975). “Discussion of wave induced pressures in permeable seabed.” In: *J. Waterways Harbors Coastal Eng. Div., ASCE*, 101, 464–465.
- Putnam, J.A. (1949). “Loss of wave energy due to percolation in a permeable sea bottom.” In: *Trans. Am. Geophys. Union* 30, 662–666.
- Rajakumar, C., Ali, A. e Yunus, S.M. (1989). “A BE-FE coupled acoustic element for fluid-structure interaction problems.” In: *Proceedings of the ISBEM Conference*, Hartford, CN.
- Revista Época – “Saiba mais sobre os terremotos, as escalas de medição e as piores tragédias causadas por eles”. In: *Revista Época On-line*. (<http://revistaepoca.globo.com/Epoca/0,6993,EPT1053693-1655,00.html>).
- Ribeiro, P.M. (2006). *Uma metodologia analítica para a avaliação do campo de tensões em barragens de concreto durante terremotos*, Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, 139p.
- Rizzo, F.J. e Shiply D.J. (1986). “A Bound Element Method for Axsymmetric Elastic Bodies.” In: P.K. Banerjee and J.O. Watson, *Developments in Boundary Element Methods-4*, (eds), Elsevier Applied Science, U.K. Barking.
- Saini, S.S., Bettess, P. e Zienkiewicz, O.C. (1978). “Coupled hydrodynamic response of concrete dams using finite and infinite elements.” In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 6, 363-374.
- Sancho, F.E.P. (2002). “Texto de Apoio de Hidráulica Fluvial e Marítima.” In: *III-Hidráulica dos Escoamentos em Canais de Leito Fixo (HFM acetatos 3.pdf)*, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Ciência e Tecnologia, Universidade de Coimbra.
- Sharan, S.K. (1984). *Discussion of “Finite element analysis of reservoir vibration”, J. L. Humar and M. Roufaiel*. Proc. A.S.C.E., 110, (EM4), 663-669.
- Sharan, S.K. (1985). “Finite element analysis of unbounded and incompressible fluid domains.” In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 21, 1659-1669.
- Sharan, S.K. (1985a). *Finite element modeling of infinite reservoirs*. Proc. A.S.C.E., 111 (EMI2), 1457-1469.
- Sharan, S.K. (1986). *Modelling of radiation damping in fluids by finite elements*. *Int. j. numer. methods eng.*, 23,945-957.

- Sharan, S.K. (1987). "Time domain analysis of infinite fluid vibration." In: *Int. J. Numer. Meth. In Engnr*, 24, 945-958.
- Sharan, S.K. and Gladwell, G.M.L. (1977). *A method of analyzing dam-reservoir-foundation interaction problems*. Proc. Symp. on Application of Computer Methods in Engineering, University of Southern California, Los Angeles.
- Shiojiri, H. e Aoyagi, S. (1984). "Earthquake response of concrete gravity dams and arch dam." In: *Proc. Eighth World Conf. on Earthquake Engineering*, San Francisco, California, U.S.A., Vol. V, pp. 87-94.
- Shull'man, S.G. (1987). "Seismic Pressure of Water on Hydrolic Structures." In: *Translation, originally published 1970*, A.A. Balkema, Rotterdam.
- Silva, S.F. & Pedroso, L.J. (2005a). "Avaliação Preliminar da Segurança Sísmica de um Perfil Típico em Barragem de Concreto Gravidade." In: *XXVI Seminário Nacional de Grandes Barragens*, Goiânia-GO.
- Silva, S.F. & Pedroso, L.J. (2005b). "Estudo Analítico-Numérico do Campo de Pressões e da Massa Adicional em Barragens Durante Terremotos." In: *Relatório Técnico de Pesquisa, RTP-SFS02*, UnB-FT/ENC, Brasília.
- Silva, S.F. & Pedroso, L.J. (2005c). "Interação Barragem-Reservatório no Domínio Infinito de Fluido Incompressível." In: *Relatório Técnico de Pesquisa, RTP-SFS04*, UnB-FT/ENC, Brasília.
- Silva, S.F. & Pedroso, L.J. (2006a). "Barragem Rígida-Móvel na Interface de um Fluido Compressível: Análise Paramétrica." In: *Relatório Técnico de Pesquisa, RTP-SFS08*, UnB-FT/ENC, Brasília.
- Silva, S.F. & Pedroso, L.J. (2006b). "Barragem Flexível na Interface de um Fluido Compressível: Análise Paramétrica." In: *Relatório Técnico de Pesquisa, RTP-SFS10*, UnB-FT/ENC, Brasília.
- Silva, S.F. & Pedroso, L.J. (2007). "Determinação da Pressão Hidrodinâmica em Problemas de Interação Barragem-Reservatório Utilizando Superfícies de Truncamento." In: *Relatório Técnico de Pesquisa, RTP-SFS12*, UnB-FT/ENC, Brasília.
- Silva, S.F., de Souza, E. & Pedroso, L.J. (2006). "Aproximação Analítica Proposta para a Pressão Hidrodinâmica em Barragens Durante Terremotos." In: *Relatório Técnico de Pesquisa, NTP-SFS01*, UnB-FT/ENC, Brasília.
- Soares JR, D. (2004). *Análise dinâmica de sistemas não lineares com acoplamento do tipo solo-fluido-estrutura por intermédio do método dos elementos finitos e do método dos elementos de contorno*, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 235p.



- Sommerfeld, A. (1949). *“Partial Differential Equations in Physics”*, Academic Press, New York.
- Sousa Jr., L.C. (2006). *Aplicação dos métodos dos elementos finitos e diferenças finitas à interação acústico-mecânica*, Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, 192p.
- Sprague, M.A. and Geers, T.L. (2004). “A spectral-element method for modeling cavitation in transient fluid-structure interaction.” In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60:2467–2499.
- Szczesiak, T. e Weber, B. (1992). “Hydrodynamic effects in a reservoir with semi-circular cross-section and absorptive bottom.” In: *Soil Dyn. Earthq. Eng.*, 11, 203-212.
- Touhei, T. e Ohmachi, T. (1993). “A FE–BE method for dynamic analysis of dam-foundation-reservoir systems in time domain.” In: *Earthquake Eng. Struct. Dynamics*, 22: 195–209.
- Trindade, P.I.C. (2003). *Simulação da propagação de ondas em canais pelo método dos elementos de contorno*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 84P.
- Tsai, C.S. e Lee, G.C. (1987). “Arch dam-fluid interactions: By FEM-BEM and substructure concept.” In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:2367-2388.
- Tsai, C.S. e Lee, G.C. (1990). “Method for transient analysis of threedimensional dam-reservoir interactions.” In: *Journal of Engineering Mechanics*, 116(10):2151-2172.
- Tsai, C.S., Lee, G.C. e Ketter, R.L. (1990). “A semi-analytical method for time domain analyses for dam reservoir interactions.” In: *Int. J. Numer. Meth. In Engnr*, 29, 913-933.
- USGS – Unites States Geological Survey. (<http://www.usgs.gov/>).
- Von Estorff, O. (1992). “Coupling of BEM and FEM in the time domain: some remarks on its applicability and efficiency.” In: *Computers & Structures*, 44, pp. 325-337.
- Von Estorff, O. e Antes, H. (1991). “On FEM-BEM coupling for fluid-structure interaction analysis in the time domain.” In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31, pp. 1151-1168.
- Weber, B. (1994). “Rational Transmitting Boundaries for Time-Domain Analysis of Dam-Reservoir Interaction.” In: *Report IBK-ETH, Zurich 205*, Birkhäuser Verlag, Basel.
- Wepf, D.H., Wolf, J.P. e Bachmann, H. (1988). “Hydrodynamic-stiffness matrix based on boundary elements for time-domain dam-reservoir-soil analysis.” In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 16, 417-432.
- Werner, P.W. e Sundquist, K.J. (1949). “On hydrodynamic earthquake effects.” In: *Transactions of the American Geophysical Union*, 30(5):636-657.

- Westergaard, H.M. (1933). "Water pressures on dams during earthquakes." In: *Transactions ASCE*, 59(8), Part 3, pp. 418-472.
- Wolf, J.P. (1985). "*Dynamic Soil-Structure Interaction*", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Wrobel, L.C. & Brebbia, C.A. (1986). "*The Dual Reciprocity Boundary Element Formulation for Transient Heat Conduction*". Springer Verlag.
- Yamamoto, T., Koning, H.L., Sellmeier, H. e van Hijum, E.V. (1978). "On the response of a poro-elastic bed to water waves." In: *J. Fluid Mech*, 87 (1), 193–206.
- Yu, G.Y., Lie, S.T. e Fan, S.C. (2002). "Stable boundary element method/finite element method procedure for dynamic fluid structure interactions." In: *Journal of Engineering Mechanics*, v.128, n.9, pp. 909-915.
- Zangar, C.N. e Haefei, R.J. (1952). "Electric analog indicates effects of horizontal earthquake shock on dams." In: *Civil Engnr.*, 54-55.
- Zienkiewicz, O.C. e Bettess, P. (1978). "Dynamic Fluid-Structure Interaction. Numerical Modeling of the Coupled Problem." In: *Chapter 5 of Numerical Methods in Offshore Engineering* (O.C. Zienkiewicz, R.W. Lewis and K.G. Stagg, Eds.), Wiley, Chichester, U.K..
- Zienkiewicz, O.C. e Nath, B. (1963). "Earthquake hydrodynamic pressures on arch dams an electric analog solution." In: *Proc. Inst. Civ. Engnr.*, 25, 165-176.
- Zienkiewicz, O.C. e Newton, R.E. (1969). "Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid." In: *Int. Symp. On Finite Element Techniques*, Stuttgart.
- Zienkiewicz, O.C. e Taylor, R.L. (2002). "*The Finite Element Method*", vols. 1 and 2, 5 ed. reprinted. Oxford, Butterworth-Heinemann.
- Zienkiewicz, O.C., Bettess, P. and Kelly, D.W. (1978). "The finite element method for determining fluid loadings on rigid structures: two and three-dimensional formulations." In: *Chapter 4 of Numerical Methods in Offshore Engineering* (O.C. Zienkiewicz, R.W. Lewis and K. G. Stagg, Eds.), Wiley, Chichester, U. K.

## **APÊNDICE**

## APÊNDICE A - ASPECTOS SÍSMICOS EM ENGENHARIA DE BARRAGENS

Neste apêndice, são fornecidas algumas noções sobre o mecanismo de formação dos abalos sísmicos e a definição dos conceitos de magnitude e intensidade de um sismo. A sismicidade brasileira e a induzida por reservatórios são comentadas, bem como o conceito dos espectros de resposta sísmica elástica. Importantes informações, contidas neste apêndice, foram extraídas dos trabalhos de Assumpção e Neto (2000) e de Ribeiro (2006).

### A.1 - INTRODUÇÃO

Um abalo sísmico (Figura A.1) é um movimento brusco e repentino do terreno, normalmente resultante de uma falha nas camadas superficiais da Terra, que causa a liberação de uma grande quantidade de energia quase instantaneamente, gerando ondas elásticas que se propagam pela Terra em todas as direções. Quando a quantidade de energia envolvida no processo é muito grande, o abalo sísmico é chamado de terremoto (Molina, 2002).

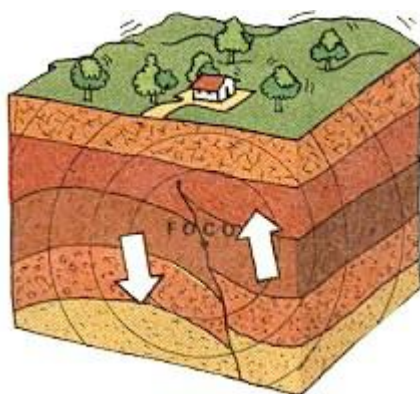


Figura A.1 – Ondas sísmicas (Observatório Sismológico – UnB, 2005).

A grande maioria dos terremotos ocorre ao longo de estreitas faixas que dividem a casca rígida da Terra (litosfera) em aproximadamente 12 grandes regiões, as chamadas placas tectônicas (Molina, 2002). O registro de milhares de terremotos em todo o mundo define e emoldura as várias placas que formam a litosfera (Assumpção e Neto, 2000). Estes autores explicam que os terremotos podem ocorrer no contato entre duas placas litosféricas (caso

mais freqüente) ou no interior de uma delas. A Figura A.2 ilustra o registro da sismicidade mundial (pontos amarelos) definindo os limites das placas tectônicas.

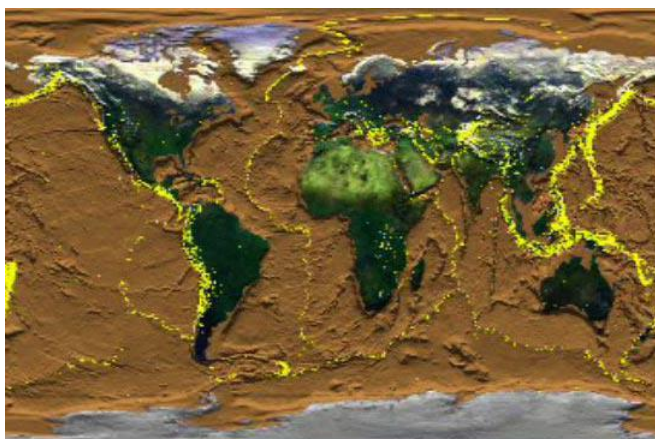


Figura A.2 – Sismicidade mundial (NASA, 2005).

As placas tectônicas se movimentam continuamente sobre uma camada de rochas parcialmente derretidas (Figura A.3). Quando ocorre acúmulo de pressão, as placas podem sofrer movimentos bruscos de três tipos: convergente (quando há choque), divergente (quando se movem em direções contrárias) e transformante (quando as placas se separam e se deslocam lateralmente).

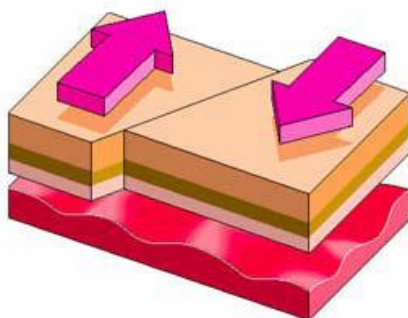


Figura A.3 – Movimento de placas tectônicas (Época, 2005).

No interior das placas tectônicas também ocorrem sismos, chamados “sismos intraplaca”, em decorrência da propagação das tensões geradas em suas bordas (Assumpção e Neto, 2000). Estes autores explicam que esta sismicidade é relativamente pequena, com sismos de magnitudes baixas a moderadas, quando comparadas à sismicidade interplaca. Entretanto, eles ressaltam que existem registros de sismos altamente destrutivos no interior de placas (como o de Nova Madrid - EUA, em 1812, com magnitude  $M_s=8,8$ ) indicando

que, apesar de remota, a possibilidade de ocorrência de um grande terremoto intraplaca não é nula.

O ponto onde ocorre a liberação da energia acumulada causadora do abalo sísmico é denominado hipocentro ou foco. Sua projeção na superfície é denominada epicentro, e a distância do foco à superfície é chamada de profundidade focal.

## A.2 - MAGNITUDE DE UM ABALO SÍSMICO

A magnitude de um abalo sísmico é a medida da quantidade de energia liberada durante este fenômeno. Esta medida é baseada na amplitude das ondas registradas em estações sismográficas.

Em 1935, Charles Richter desenvolveu uma escala logarítmica para medida da magnitude de um abalo sísmico. Esta escala de magnitude refere-se à ML, onde L significa local. Nesta escala o aumento de um ponto implica em um aumento de dez vezes na amplitude da onda sísmica. As ondas sísmicas de um sismo de magnitude igual a três possuem, por exemplo, uma amplitude dez vezes maior que a de um sismo de magnitude igual a dois na escala Richter. No entanto, em termos de energia liberada, um sismo de magnitude igual a três é aproximadamente trinta vezes maior que um sismo de magnitude igual a dois. Não existe limite inferior ou superior nesta escala. Entretanto, a mecânica das rochas parece criar limites naturais para magnitudes abaixo de -1 e acima de 9,5 (USGS, 2005).

Tabela A.1 – Principais escalas de magnitude (USGS, 2005).

<b>Sigla</b>	<b>Nome da escala de magnitude</b>
Mw	Momento sísmico
Me	Energia sísmica
Ms	Ondas de superfície
Mb	Ondas de compressão de corpo (P-wave)
mbLg	Ondas de corpo usando ondas Lg
ML	Local (Richter)
m <sub>R</sub>	Regional (Brasil) – Equivalente a escala mb

À medida que o número de estações sismográficas aumentava no mundo, ficou evidente que o método proposto por Richter era válido apenas para determinadas frequências e distâncias. Com o objetivo de aproveitar o número crescente de estações sismográficas

distribuídas ao longo da Terra, novas escalas foram desenvolvidas (Tabela A.1), como uma extensão da idéia original de Richter. Cada uma dessas escalas é válida para uma frequência particular e um tipo de sinal sísmico específico. Nos seus limites de validade cada uma é equivalente à escala Richter (USGS, 2005).

De acordo com Assumpção e Neto (2000), uma das escalas mais utilizadas para terremotos registrados a grandes distâncias é a magnitude  $M_s$ . Os autores explicam que esta escala só é aplicada para sismos com profundidades menores que 50 km, já que sismos mais profundos geram relativamente poucas ondas superficiais.

Para sismos pequenos e moderados no Brasil a escala  $M_s$  torna-se inadequada. Nestes casos, usa-se uma escala de magnitude regional,  $m_R$ , elaborada para as condições de atenuação das ondas sísmicas na litosfera brasileira (Assumpção e Neto, 2000).

A Tabela A.2 mostra a relação entre magnitude ( $M_s$ ), amplitude máxima do movimento do solo ( $A$ ), tamanho da fratura ( $L$ ), deslocamento médio na fratura ( $D$ ) e energia liberada ( $E$ ) e ainda compara ao tempo necessário que a UHE de Itaipu, operando com sua potência de 12 000 MW, precisaria para gerar uma energia equivalente a energia liberada pelos sismos.

Tabela A.2 – Energia relacionada à magnitude dos abalos sísmicos  
(Assumpção e Neto, 2000).

<b>Magnitude <math>M_s</math></b>	<b>Amplitude a 50 km <math>A</math></b>	<b>Comprimento da ruptura <math>L</math></b>	<b>Deslocamento na falha <math>D</math></b>	<b>Energia liberada <math>E</math></b>	<b>Tempo para Itaipu gerar energia equivalente</b>
9	1 m	400 km	10 m	$1,6 \times 10^{18}$ J	4,5 anos
7	1 cm	30 km	1 m	$2,1 \times 10^{15}$ J	2 dias
5	0,1 mm	5 km	1 cm	$2,8 \times 10^{12}$ J	4 minutos
3	0,1 mm	1 km	1 mm	$3,6 \times 10^9$ J	0,3 segundos

### **A.3 - INTENSIDADE DE UM ABALO SÍSMICO**

A intensidade de um abalo sísmico é uma medida qualitativa dos efeitos produzidos pelo sismo em construções, pessoas, objetos e no meio ambiente. Não existe uma relação direta entre intensidade e magnitude. Um sismo de pequena magnitude pode causar efeitos devastadores em locais onde as construções são de má qualidade. Molina (2002) explica

que, “fatores como a profundidade do foco, a distância epicentral do evento, a geologia da área e a qualidade das construções civis são parâmetros que acabam por determinar o grau de severidade do sismo”. De maneira geral, quanto maior for a distância ao epicentro, menor será a intensidade provocada. A Tabela A.3 mostra uma descrição detalhada da Escala Mercalli Modificada, a mais usada atualmente, juntamente com valores aproximados das acelerações do movimento do solo para cada nível de intensidade.

Tabela A.3 – Escala de Intensidade Mercalli Modificada (Assumpção e Neto, 2000).

<b>Grau</b>	<b>Descrição dos efeitos</b>	<b>Aceleração (g)</b>
I	Não sentido. Leves efeitos de período longo de terremotos grandes e distantes.	
II	Sentido por poucas pessoas paradas, em andares superiores ou locais favoráveis.	< 0,003
III	Sentido dentro de casa. Alguns objetos pendurados oscilam. Vibração parecida à da passagem de um caminhão leve. Duração estimada*. Pode não ser reconhecido como um abalo sísmico	0,004 – 0,008
IV	Objetos suspensos oscilam. Vibração parecida à da passagem de um caminhão pesado. Janelas, louças, portas fazem barulho. Paredes e estruturas de madeira rangem.	0,008 – 0,015
V	Sentido fora de casa; direção estimada*. Pessoas acordam. Líquido em recipiente é perturbado. Objetos pequenos e instáveis são deslocados. Portas oscilam, fecham, abrem.	0,015 – 0,04
VI	Sentido por todos. Muitos se assustam e saem às ruas. Pessoas andam sem firmeza. Janelas, louças quebradas. Objetos e livros caem de prateleiras. Reboco fraco e construção de má qualidade racham.	0,04 – 0,08
VII	Difícil manter-se em pé. Objetos suspensos vibram. Móveis quebram. Danos em construção de má qualidade, algumas trincas em construção normal. Queda de reboco, ladrilhos ou tijolos mal assentados, telhas. Ondas em piscinas. Pequenos escorregamentos de barrancos arenosos.	0,08 – 0,15
VIII	Danos em construções normais com colapso parcial. Algum dano em construções reforçadas. Queda de estuque e alguns muros de alvenaria. Queda de chaminés, monumentos, torres e caixas d’água. Galhos quebram-se das árvores. Trincas no chão.	0,15 – 0,30
IX	Pânico geral. Construções comuns bastante danificadas, às vezes colapso total. Danos em construções reforçadas. Tubulação subterrânea quebrada. Rachaduras visíveis no solo.	0,30 – 0,60
X	Maioria das construções destruídas até nas fundações. Danos sérios a barragens e diques. Grandes escorregamentos de terra. Água jogada nas margens de rios e canais. Trilhos levemente entortados.	0,60 – 1,0
XI	Trilhos bastante entortados. Tubulações subterrâneas completamente destruídas	~ 1 – 2
XII	Destruição quase total. Grandes blocos de rocha deslocados. Linhas de visada e níveis alterados. Objetos atirados ao ar.	~ 2

\* Pode-se ter noção da duração ou da direção do abalo sísmico.



De acordo com Assumpção e Neto (2000), “a Intensidade Sísmica é uma classificação dos efeitos que as ondas sísmicas provocam em determinado lugar”. Os autores explicam que esta não é uma medida direta, feita com uso de instrumentos, mas simplesmente uma maneira de descrever os efeitos em pessoas (como as pessoas sentiram), objetos, construções (barulho e queda de objetos, trincas ou rachaduras em casas, etc.) e na natureza (movimento de água, escorregamentos, liquefação de solos arenosos, mudanças na topografia, etc.).

#### **A.4 - SISMICIDADE DO BRASIL**

Ocupando grande parte da estável Plataforma Sul-Americana, o Brasil era considerado assísmico até pouco tempo atrás, por não se conhecer a ocorrência de sismos destrutivos (Assumpção e Neto, 2000). Mas ao contrário do imaginário popular, a idéia de que o Brasil é um país assísmico não é verdadeira. Estações sismológicas distribuídas ao longo do território nacional registram diariamente abalos sísmicos de pequena a média magnitude. Sismos importantes (Tabela A.4) como o de Pacajus, no Ceará, e o de João Câmara, no Rio Grande do Norte, provocaram o desabamento parcial de algumas casas modestas (Figura A.4). O maior sismo já registrado em território nacional foi o de Porto dos Gaúchos, no Mato Grosso, que atingiu 6,2 na escala de magnitude mb.

Tabela A.4 – Sismos mais importantes do Brasil (Assumpção e Neto, 2000).

<b>Ano</b>	<b>Magnitude (m<sub>b</sub>)</b>	<b>Intensidade máxima (MM)</b>	<b>Localidade</b>
1955	6,2		Porto dos Gaúchos - MT
1955	6,1		Litoral de Vitória - ES
1939	5,5	> VI	Tubarão - SC
1983	5,5	VII	Cadajás - AM
1964	5,4		NW de Mato Grosso do Sul
1990	5,2		Plataforma - RS
1980	5,2	VII	Pacajus - CE
1922	5,1	VI	Mogi-Guaçu - SP
1963	5,1		Manaus - AM
1986	5,1	VII	João Câmara - RN
1998	5,0	VI	Porto dos Gaúchos - MT



Figura A.4 – Sismo de João Câmara – RN em 1986  
(Observatório Sismológico – UnB, 2005).

É importante notar que, apesar da baixa frequência, sismos com magnitudes importantes podem ocorrer no Brasil. Richter observou que o número de sismos em uma determinada região diminui aproximadamente dez vezes para cada incremento de magnitude. No Brasil ocorrem anualmente 20 sismos com magnitudes maiores que 3. Pode-se extrapolar então, que sismos com magnitudes acima de 7 devem ocorrer no Brasil uma vez a cada 500 anos. Em regiões de alta atividade sísmica, como o Chile, por exemplo, sismos desta magnitude ocorrem, em média, uma vez a cada três anos (Assumpção e Neto, 2000).

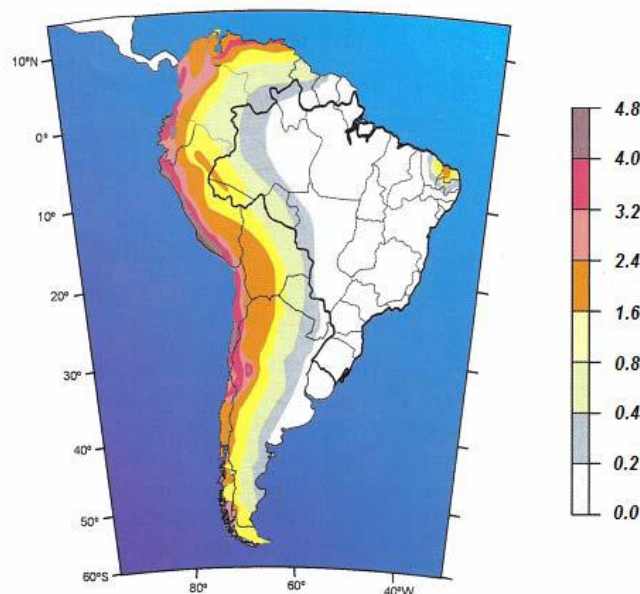


Figura A.5 – Mapa de perigo sísmico na América do Sul (Assumpção e Neto, 2000).

A Figura A.5 ilustra o mapa de perigo sísmico na América do Sul, mostrando a aceleração máxima do terreno, em  $m/s^2$ , com a probabilidade de 90% de não ser excedida em um

período de 50 anos. Estes níveis de vibração referem-se à rocha sã exposta. Locais de sedimentos inconsolidados podem amplificar bastante estes valores.

### A.5 - SISMICIDADE INDUZIDA POR RESERVATÓRIOS

A interferência do homem na natureza pode provocar abalos sísmicos através de explosões nucleares, da injeção de água e gás sob pressão no subsolo, da extração de fluidos no subsolo, do alívio de cargas em minas a céu aberto e do enchimento de reservatórios artificiais ligados a barragens hidroelétricas (Assumpção e Neto, 2000). De acordo com estes autores, com exceção das barragens, os sismos decorrentes de outros casos têm sido muito pequenos e de efeito estritamente local, não havendo registros de danos consideráveis.

Os sismos induzidos por reservatórios (Tabela A.5), apesar de normalmente pequenos, podem alcançar magnitudes moderadas, como o que ocorreu em 1967 no reservatório de Koyna, na Índia, com magnitude 6,3, tendo provocado 200 mortes e sérios danos à estrutura da barragem (Assumpção e Neto, 2000).

Tabela A.5 – Principais sismos induzidos por reservatórios no mundo  
(Assumpção e Neto, 2000).

<b>Barragem e País</b>	<b>Altura (m)</b>	<b>Ano</b>	<b>Magnitude (M<sub>s</sub>)</b>	<b>Sismicidade Regional</b>
Koyna, Índia	103	1967	6,3	baixa
Kariba, Zâmbia	128	1963	6,2	baixa
Kremasta, Grécia	160	1966	6,2	alta
Xinfengkiang, China	105	1962	6,1	média
Oroville, EUA	236	1975	5,7	alta
Marathon, Grécia	67	1938	5,7	alta
Aswan, Egito	111	1981	5,6	baixa

A sobrecarga causada pela massa de água do reservatório gera pequenos esforços no maciço rochoso, normalmente insuficientes para provocar sismos. Desta forma, o efeito da sobrecarga e o aumento da pressão hidrostática nos poros e fraturas da rocha, causado pela variação do nível do reservatório, acabam favorecendo a diminuição da resistência ao cisalhamento dos materiais e atuando como disparadores na liberação de esforços pré-existentes (Figura A.6) nas proximidades da barragem (Assumpção e Neto, 2000).

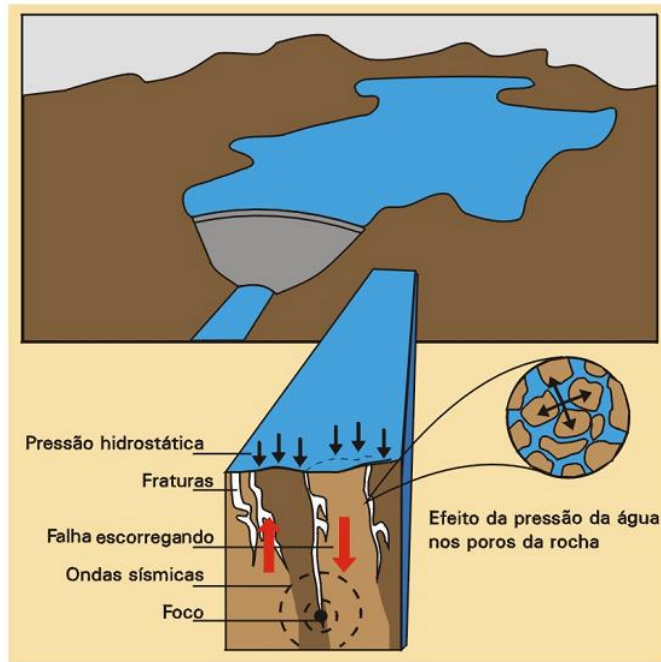


Figura A.6 – Mecanismo de formação dos sismos induzidos por reservatório (Observatório Sismológico – UnB, 2005).

## A.6 - ESPECTROS DE RESPOSTA SÍSMICA ELÁSTICA

Embora os danos às estruturas possam resultar de diferentes efeitos de um terremoto – tsunamis, perda de resistência do solo por liquefação, etc. – o principal mecanismo de carregamento reconhecido pelas normas sísmicas de projeto é a resposta a movimentos do solo produzidos pelo terremoto, aplicados à base da estrutura (Clough, 1970). A Figura A.7 ilustra este problema.

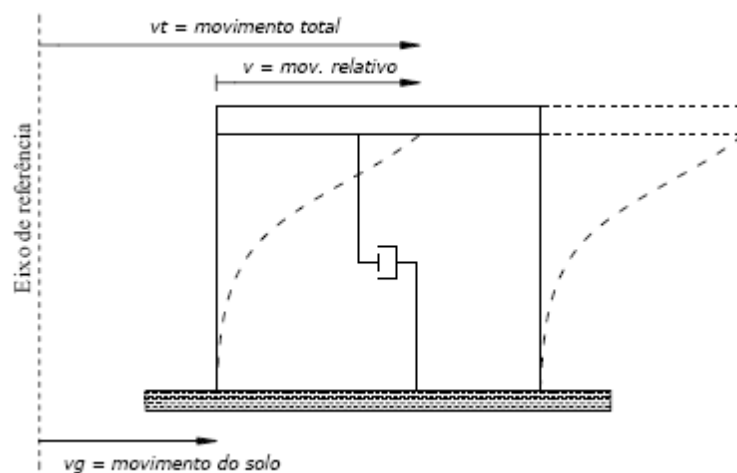


Figura A.7 – Excitação sísmica aplicada à estrutura (Clough, 1970).

A Equação (A.1) fornece o equilíbrio dinâmico de um problema típico:

$$F_I + F_D + F_S = P(t) \quad (\text{A.1})$$

onde as forças resistentes ao movimento são proporcionais à aceleração, velocidade e deslocamento da estrutura, conforme mostra a equação da força de inércia (A.2), força de amortecimento (A.3) e força elástica (A.4).

$$F_I = M \ddot{v} \quad (\text{A.2})$$

$$F_D = C \dot{v} \quad (\text{A.3})$$

$$F_S = K v \quad (\text{A.4})$$

onde  $M$ ,  $C$  e  $K$  referem-se respectivamente a massa, a constante de amortecimento e a constante de rigidez da estrutura. Os pontos nestas equações referem-se às derivadas do deslocamento ( $v$ ) com relação ao tempo ( $t$ ).

Introduzindo as equações (A.2), (A.3) e (A.4) na equação (A.1), obtém-se:

$$M \ddot{v} + C \dot{v} + K v = P(t) \quad (\text{A.5})$$

A Equação (A.5) representa um problema dinâmico típico. No problema de excitação sísmica da estrutura, o carregamento é introduzido através do movimento de sua base ( $v_g$ ). Não existem forças externas aplicadas à estrutura ( $P(t)=0$ ). Portanto, a Equação (A.1) passa a assumir a seguinte forma:

$$F_I + F_D + F_S = 0 \quad (\text{A.6})$$

A força de inércia ( $F_I$ ) depende da aceleração total da massa ( $\ddot{v}$ ), que inclui uma parcela relativa à aceleração da base ( $\ddot{v}_g$ ) mais uma parcela relativa à aceleração em relação à base ( $\ddot{v}$ ).

Portanto:

$$\ddot{x}_T = \ddot{x}_g + \ddot{x} \quad (\text{A.7})$$

A força de inércia ( $F_I$ ) passa a assumir a seguinte forma:

$$F_I = M \ddot{x}_T = M \ddot{x}_g + M \ddot{x} \quad (\text{A.8})$$

As forças de amortecimento ( $F_D$ ) e elástica ( $F_S$ ) não sofrem alterações, pois ao contrário da força de inércia ( $F_I$ ), dependem apenas do movimento relativo da estrutura. Introduzindo as equações (A.8), (A.3) e (A.4) em (A.6), obtém-se:

$$M \ddot{x} + M \ddot{x}_g + C \dot{x} + K v = 0 \quad (\text{A.9})$$

Transferindo o primeiro termo da Equação (A.9) para o lado direito, obtém-se:

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + K v = P_{ef}(t) \quad (\text{A.10})$$

A expressão (A.10) representa a equação sísmica de movimento da estrutura, onde:

$$P_{ef}(t) = -M \ddot{x}_g \quad (\text{A.11})$$

Isto significa que o problema de excitação sísmica pode ser tratado como um problema dinâmico típico, submetido a um carregamento externo fornecido pela Equação (A.11). Dada a natureza arbitrária desta excitação, a resposta da estrutura pode ser obtida através da integral de Duhamel (Equação (A.12)):

$$v(t) = \int_0^t \frac{P(t)}{M w_D} e^{-x w(t-t)} \text{sen}[w_D (t-t)] dt \quad (\text{A.12})$$

onde:

$v(t)$  = deslocamento relativo da estrutura ao longo do tempo;

$P(t)$  = carregamento arbitrário no tempo  $\tau$ ;

$M$  = massa da estrutura;

$w_D$  = frequência amortecida da estrutura;

$w$  = frequência natural da estrutura;

$x$  = taxa de amortecimento da estrutura;

$t$  = tempo.

Substituindo a Equação (A.11) em (A.12), obtém-se:

$$v(t) = \frac{1}{M w_D} \int_0^t -M \ddot{g}_g(t) e^{-x w(t-t)} \text{sen}[w_D(t-t)] dt \quad (\text{A.13})$$

Para valores da taxa de amortecimento usuais em estruturas ( $\zeta < 20\%$ ), a diferença entre as frequências natural e amortecida passa a ser desprezível (Clough, 1993). Pode-se notar também, que o sinal negativo da Equação (A.13) não possui significado real, uma vez que o sentido de excitação da base é suposto arbitrário durante o sismo. Portanto, a Equação (A.13) pode ser reduzida a seguinte forma:

$$v(t) = \frac{1}{w} \int_0^t \ddot{g}_g(t) e^{-x w(t-t)} \text{sen}[w(t-t)] dt \quad (\text{A.14})$$

Referenciando a integral da Equação (A.14) por  $V(t)$  obtém-se:

$$v(t) = \frac{1}{w} V(t) \quad (\text{A.15})$$

A resposta da estrutura em qualquer intervalo de tempo ( $t$ ) de um sistema de um grau de liberdade é definida pela Equação (A.15). Entretanto, obter o histórico de deslocamentos durante uma excitação sísmica é um trabalho que exige grande esforço computacional (Clough, 1970). Na maioria das situações práticas, apenas a resposta máxima é necessária. Examinando a Equação (A.15) observa-se que o máximo deslocamento pode ser obtido através da substituição do valor máximo da função  $V(t)$  nesta equação.

O valor máximo desta função recebe o nome de velocidade espectral (ou, de forma mais precisa, velocidade pseudo-espectral, pois não é exatamente igual à máxima velocidade), representada por  $S_v$ . Então:

$$S_v \equiv V_{m\acute{a}x.} \equiv \left[ \int_0^t \ddot{u}_g(t) e^{-\xi w(t-t)} \text{sen}[w(t-t)] dt \right]_{m\acute{a}x.} \quad (\text{A.16})$$

Substituindo a Equação (A.16) em (A.15), obtém-se o valor do deslocamento relativo máximo, chamado de deslocamento espectral ( $S_d$ ). Assim:

$$S_d = \frac{S_v}{w} \quad (\text{A.17})$$

Adicionalmente, a aceleração espectral (ou, de forma mais precisa, aceleração pseudo-espectral, pois não é exatamente igual à máxima aceleração em um sistema amortecido), é definida por:

$$S_a = w S_v = w^2 S_d \quad (\text{A.18})$$

A Equação (A.17) fornece o valor exato do deslocamento relativo máximo da estrutura, enquanto que as equações (A.16) e (A.18) fornecem apenas valores aproximados para a máxima velocidade relativa e aceleração total, respectivamente.

A análise da Equação (A.16) indica que a velocidade espectral depende de três parâmetros: (1) características do movimento do solo ( $\ddot{u}_g(t)$ ), (2) taxa de amortecimento da estrutura ( $\xi$ ) e (3) frequência natural da estrutura ( $\omega$ ). Portanto, para qualquer registro sísmico, e para uma taxa de amortecimento específica, é possível determinar a velocidade espectral como uma função da frequência ou período natural da estrutura (Clough, 1970).

O resultado de uma análise deste tipo é apresentado na Figura A.8. As curvas deste gráfico foram obtidas através dos registros das acelerações do terremoto de El Centro – Califórnia, considerando as taxas de amortecimento indicadas, para uma sucessão de valores de período de vibração da estrutura ( $T = 2p/w$ ).



Os picos e vales da Figura A.8 ocorrem devido às ressonâncias locais durante o registro do movimento do terreno. Essas irregularidades não são importantes, e podem ser suavizadas através de uma média de inúmeros registros sísmicos normalizados para uma intensidade padrão (Clough, 1970).

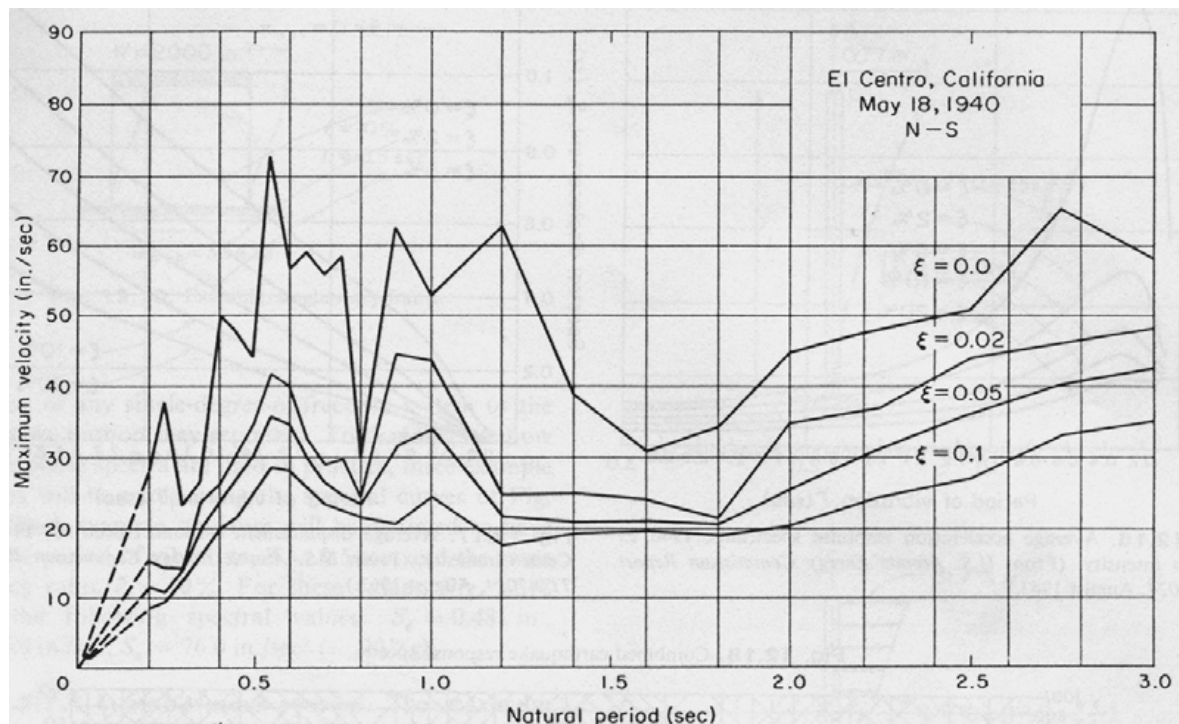


Figura A.8 – Espectro de resposta de velocidade para o terremoto de El Centro (Clough, 1970).

As relações existentes entre o deslocamento ( $S_d$ ), a velocidade ( $S_v$ ) e a aceleração espectral ( $S_a$ ), representadas pelas igualdades da Equação (A.18), permitem combinar estes valores em um único gráfico, plotado com escalas logarítmicas ao longo de cada um dos eixos. Chama-se representação gráfica “tripartite”, como mostra a Figura A.9.

A vantagem da representação gráfica “tripartite” é que ela pode conter sobre uma mesma curva as seguintes informações:

- o espectro de deslocamento relativo exato;
- o pseudo-espectro de velocidade relativa;
- o pseudo-espectro de aceleração absoluta.

Para compreender o funcionamento da representação gráfica “tripartite”, considera-se a variação do  $\log_{10} S_v$  em função do  $\log_{10} T$  para valores constantes de  $S_a$  ou  $S_d$ .

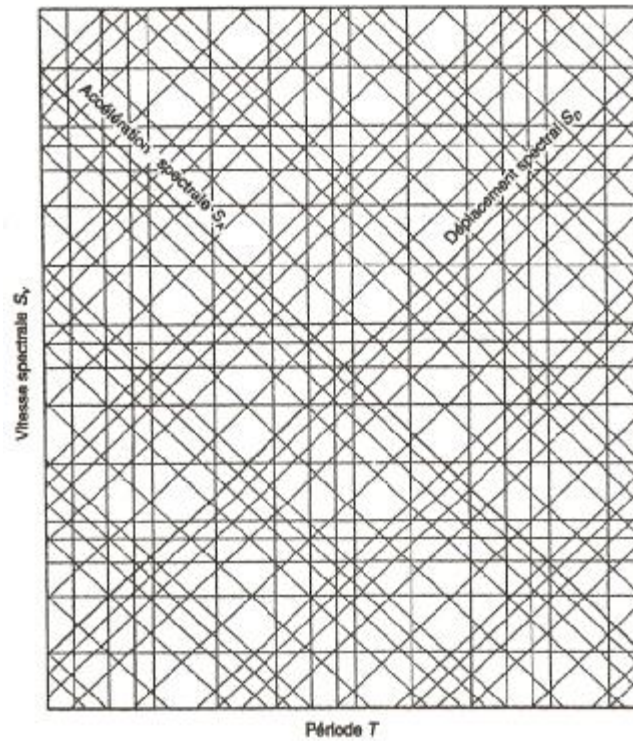


Figura A.9 – Representação gráfica “tripartite” dos espectros de resposta (Davidovici, 1999).

a)  $S_a = \text{constante} = C_1$

Se o pseudo-espectro de aceleração é igual a uma constante,  $C_1$ , pode-se escrever:

$$S_a = C_1 = w^2 S_d = w(w S_d) = \frac{2p}{T} S_v \quad (\text{A.19})$$

Tomando o  $\log_{10}$  da Equação (A.19), obtém-se:

$$\log_{10} C_1 = \log_{10} 2p - \log_{10} T + \log_{10} S_v \quad (\text{A.20})$$

ou ainda:

$$\log_{10} S_v = \log_{10} T + [\log_{10} C_1 - \log_{10} 2p] \quad (\text{A.21})$$

Então:

$$\frac{d(\log_{10} S_v)}{d(\log_{10} T)} = +1 \quad (\text{A.22})$$

Este resultado indica que a aceleração espectral  $S_a$ , constante, deverá estar a  $+45^\circ$  na representação gráfica “tripartite”.

b)  $S_d = \text{constante} = C_2$

Se o espectro de deslocamento relativo é igual a uma constante,  $C_2$ , pode-se escrever:

$$S_d = C_2 = \frac{S_v}{w} = \frac{T}{2p} S_v \quad (\text{A.23})$$

Tomando o  $\log_{10}$  da Equação (A.23), obtém-se:

$$\log_{10} C_2 = \log_{10} T - \log_{10} 2p + \log_{10} S_v \quad (\text{A.24})$$

ou ainda:

$$\log_{10} S_v = -\log_{10} T + [\log_{10} C_2 + \log_{10} 2p] \quad (\text{A.25})$$

Então:

$$\frac{d(\log_{10} S_v)}{d(\log_{10} T)} = -1 \quad (\text{A.26})$$

Este resultado indica que o deslocamento espectral  $S_d$ , constante, deverá estar a  $-45^\circ$  na representação gráfica “tripartite”.

A Figura A.10 ilustra diferentes valores de amortecimento do espectro de resposta do terremoto de EL Centro (1940-05-18, comp. S.00E.). A Figura A.11 apresenta o mesmo espectro sob forma normalizada. Sobre esta representação gráfica, dividiram-se todas as

escalas (deslocamento, velocidade e aceleração) pelas componentes máximas do solo. Pode-se ver que o espectro de resposta de um sismo é muito irregular. Entretanto, o espectro tem a forma geral de um trapézio. Esta forma é característica dos espectros de resposta sísmica e explica-se fisicamente assim:

- para baixas frequências naturais, o deslocamento relativo máximo é igual ao deslocamento máximo do solo enquanto que a aceleração absoluta tende para zero;
- para frequências naturais intermediárias, o deslocamento relativo, a velocidade relativa e a aceleração absoluta são amplificados;
- para elevadas frequências naturais, a aceleração absoluta máxima é igual à aceleração máxima do solo enquanto que o deslocamento relativo tende para zero.

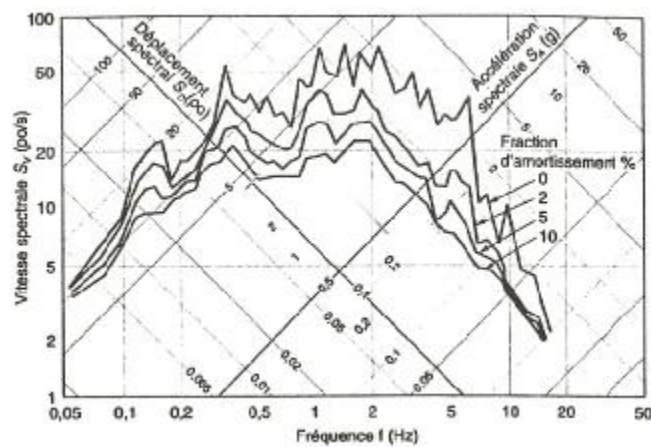


Figura A.10 – Espectro de resposta do terremoto de EL Centro (Davidovici, 1999).

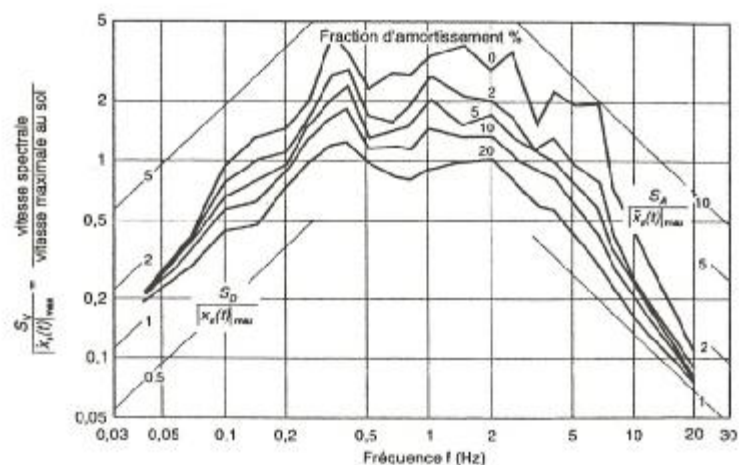


Figura A.11 – Espectro de resposta normalizado para o terremoto de EL Centro (Davidovici, 1999).

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)