



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E HUMANAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ESCOAMENTO POTENCIAL EM RELATIVIDADE
GERAL: SOLUÇÕES PARA O CASO
REISSNER-NORDSTRÖM COM CONSTANTE
COSMOLÓGICA

Gustavo Cipolat Colvero

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Orientador: Maximiliano Ujevic Tonino

Santo André, SP, Brasil
2009

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

ESCOAMENTO POTENCIAL EM RELATIVIDADE
GERAL: SOLUÇÕES PARA O CASO REISSNER-NORDSTRÖM
COM CONSTANTE COSMOLÓGICA

por

Gustavo Cipolat Colvero

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado do Programa de
Pós-graduação em Física da Universidade Federal do ABC , como requisito
parcial para a obtenção do grau de
Mestre.

Orientador: Maximiliano Ujevic Tonino

Santo André, SP, Brasil
2009

Ficha catalográfica produzida na Biblioteca da Universidade Federal do ABC

COLVERO, Gustavo Cipolat

Escoamento potencial em relatividade geral: soluções para o caso
Reissner – Nordström com constante cosmológica / Gustavo Cipolat
Colvero. – Santo Andre: Universidade Federal do ABC, 2009.
IV, 64 f.: il; 31 cm.

Orientador: Maximiliano Ujevic Tonino

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do ABC, Centro de
Ciências Naturais e Humanas, Programa de Pós-graduação em Física,
2009.

Referencias Bibliográficas: f. 63-64

1. Escoamento Potencial – Física. 2. Soluções numéricas-Física
3.Soluções analíticas – Fisica 4. Relatividade Geral-Tese I. Tonino,
Maximiliano Ujevic. II. Universidade Federal do ABC, Centro de Ciências
Naturais e Humanas, Programa de Pós-graduação em Física. III. Título.

CDD 530.11

Aos meus pais e minha irmã.

E ao amigo Orvandil Freitas que nos deixou.

Agradecimentos

Inicialmente, agradeço à minha família: meus pais e minha irmã - cujo apoio e confiança incondicionais me motivam enormemente para a realização de qualquer trabalho - aos meus novos irmãos: Ceará (Ronaldo) e Louise (Japa), e ao meu já amigo e irmão de longa data, Fernando, por se fazer sempre presente.

Agradeço também aos meus tios, à tia Cleci e às famílias Freitas e Potrich todo o apoio durante toda esta jornada, principalmente em seu início.

Aos meus amigos Montanha, Roseline e Arlene agradeço o ombro amigo nos primeiros momentos em São Paulo. Além de vínculos com minha terra natal, estes sempre me foram caros irmãos.

Agradeço a todos os amigos que tive o privilégio de conhecer e que continuam me acompanhando nesta caminhada. Agradeço em especial ao Goiano (Guilherme) a sensação de paz que sempre nos transmite e a amizade; à Mitzi por ter me emprestado o livro da dieta do Dr. Atkins, com certeza um dos livros mais úteis que li. Agradeço ao Jeverson (pós-doc) todos os conselhos e dicas a respeito da vida acadêmica e teoria da programação. À Aline, as dicas sobre Gnuplot e \LaTeX e aos meus colegas de apartamento, Ceará, Luis, Milton e Moisés, por termos constituído uma verdadeira família.

Agradeço a todos os professores que tive na UFABC. Todos, com absoluta certeza, contribuíram para o incremento que obtive em minha formação neste tempo.

Agradeço ao meu orientador, Maximiliano Ujevic, a paciência e a ótima orientação durante estes dois anos. A este não poderia também deixar de agradecer enormemente pela oportunidade dada.

Por fim, agradeço à UFABC e à CAPES o suporte financeiro.

Espero estar à altura de retribuir a todos.

*E o pescador, ó rei, tomou o rumo da cidade,
espantado com o que se passara entre ele e o
"ifrit", e também com os peixes coloridos. Entrou
no palácio do rei e mostrou-os a ele, que os
observou... E a aurora alcançou Šahrāzād, que
parou de falar.*

Livro das Mil e Uma Noites. Volume 1 - ramo sírio.
Traduzido do árabe por Mamede Mustafa Jarouche - 3 ed.
São Paulo: Globo, 2006

Sumário

Resumo	5
Abstract	6
Introdução	7
1 Introdução à dinâmica de fluidos relativísticos	10
1.1 O fluido ideal relativístico	10
1.2 Equações de movimento para o fluido ideal	14
1.3 Escoamento Potencial Relativístico	16
2 Tratamento numérico de equações diferenciais parciais (EDP's)	20
2.1 Diferenciação numérica: equações de diferenças finitas	21
2.2 Discretização e aplicação das condições de contorno	25
2.3 O sistema algébrico: método de Stone	28
3 Os espaços-tempos de Reissner-Nordström-de Sitter e Anti-de Sitter	30
3.1 Obtenção da métrica	30

3.2	Regiões de interesse na métrica de RN(A)dS	34
4	Soluções exatas	38
4.1	Buraco negro de Reissner-Nordström	40
4.2	Esfera rígida de Reissner-Nordström	43
4.3	Análise qualitativa do efeito da carga elétrica sobre as linhas de corrente, densidade e taxa de acreção	44
5	Resultados numéricos	50
6	Considerações finais	61

Lista de Figuras

2.1	Discretização de um domínio	24
2.2	Ordenação da malha numérica e notação de bússola	25
2.3	Matrizes esparsas	28
3.1	Função $f(r)$ da métrica RNdS	35
3.2	Coefficiente g_{tt} da métrica RNAdS	36
4.1	Buraco negro RN: linhas de corrente	46
4.2	Esfera rígida de RN: linhas de corrente	47
4.3	Buraco negro RN: acreção	48
4.4	Perfil angular dos contornos de isodensidade	48
4.5	Efeito da carga elétrica sobre a densidade: esferas rígidas	49
4.6	Efeito da carga elétrica sobre a densidade: buracos negros	49
5.1	Efeito de Λ sobre a densidade: buracos negros	54
5.2	Influência de Λ sobre a taxa de acreção.	54
5.3	Buracos negros RN(A)dS: linhas de corrente	55

5.4	Efeito de Λ sobre a densidade: esferas rígidas	57
5.5	Esferas rígidas RN(A)dS: linhas de corrente	58
5.6	Q versus Λ positiva: buracos negros	59
5.7	Q versus Λ negativa: buracos negros	59
5.8	Q versus Λ positiva: esferas rígidas	60
5.9	Q versus Λ negativa: esferas rígidas	60

Resumo

Apresentamos neste trabalho soluções analíticas e numéricas para o escoamento potencial relativístico de fluidos ideais satisfazendo uma equação de estado barotrópica do tipo $p = \rho$ através de uma esfera rígida e um buraco negro. Como pano de fundo, utilizamos as métricas de Reissner-Nordström-de Sitter e Anti-de Sitter. Para constante cosmológica nula, apresentamos soluções analíticas. Quando a constante cosmológica é diferente de zero, é necessário o uso de técnicas numéricas para a obtenção do potencial de quadri-velocidades. Em ambos os casos, verificamos que o padrão do escoamento, quando analisado via suas linhas de corrente, difere muito pouco com a variação da carga elétrica ou da constante cosmológica, sendo a influência destes parâmetros melhor analisada em termos dos contornos de isodensidades e da taxa de acreção (no caso do escoamento através de buracos negros).

Abstract

Analytical and numerical solutions for the steady-state relativistic potential flow of an ideal fluid satisfying a barotropic equation of state of the form $p = \rho$ orbiting a hard sphere and a blackhole are presented. As the background metric, we use the Reissner-Nordström-de Sitter and Anti-de Sitter spacetimes. For null cosmological constant, analytical solutions are presented. When the cosmological constant is present, it is necessary to use numerical techniques for the obtention of the four-velocity potential. In both cases, we verify that the flow pattern, when analysed by means of its streamlines, differs very little with the variation of the electric charge or the cosmological constant, being the influence of these parameters better analysed by means of the density isocontours and accretion rate (in the case of a black hole).

Introdução

Inúmeras são as situações astrofísicas nas quais se faz necessária a análise e compreensão do escoamento de fluidos. Em particular, pode-se citar a acreção de matéria em sistemas binários ou buracos negros, o movimento de fluidos em velocidades relativísticas através de objetos compactos como estrelas de nêutrons, o movimento de fluidos através de objetos astrofísicos rotantes [1, 2, 3] ou ainda na modelagem de situações mais complexas como supernovas, se interpretadas como um sistema composto de um caroço duro e uma casca de matéria [4, 5]. Apesar de toda a possível motivação, são escassos os estudos referentes à dinâmica de fluidos sob influência de campo gravitacional intenso, o que exige que tais fluidos sejam considerados como relativísticos e o escoamento seja tratado com relatividade geral.

Com a presente dissertação pretendemos contribuir com o estudo do caso do escoamento de fluidos ideais relativísticos no campo gravitacional de objetos compactos esfericamente simétricos, dotados de carga elétrica e estáticos inseridos em um universo com constante cosmológica. Tais objetos podem ser estrelas compactas duras (como o são as estrelas de nêutrons) ou buracos negros.

Para tal estudo, utilizamos a técnica do escoamento potencial. Neste tipo de situação, o fluido escoar sempre sem qualquer convecção ou turbulência. Exclui-se então a existência de dissipação de energia, campos eletromagnéticos ou quaisquer outros tipos de interação além da puramente gravitacional, restringindo assim o estudo aos fluidos ideais. Satisfeitas tais hipóteses, resulta então que o campo de quadrivelocidades do fluido pode ser obtido a partir de um potencial escalar, chamado potencial de velocidades.

Devido ao fato de o escoamento potencial ter-se mostrado, em sua versão newtoniana, particularmente pertinente ao estudo do escoamento de

fluidos através de objetos com superfícies curvas e lisas, como aerofólios [6], esperamos que sua versão relativística seja igualmente eficaz no estudo do escoamento de fluidos através de objetos astrofísicos.

Um conceito útil que utilizaremos em nosso estudo é o da linha de corrente, definida de forma que a tangente à uma linha de corrente em qualquer ponto indica a direção da velocidade do fluido em tal ponto. Se ocorrer ainda de o escoamento ser estacionário - como assumiremos em nosso estudo - as linhas de corrente, por não variarem com o tempo, indicam ainda a trajetória das partículas de fluido em cada instante de tempo. O mapeamento de tais linhas é, portanto, uma boa forma de se avaliar o padrão de escoamento e uma ferramenta útil para se verificar a influência de parâmetros diversos sobre este.

Com relação aos aspectos termodinâmicos dos fluidos, estes são descritos utilizando-se sempre termodinâmica clássica. As abordagens de casos relativísticos de escoamento de fluidos seguem geralmente as propostas de Eckart [7] ou Landau [6].

Considerando-se ainda que nos sistemas de interesse a massa do objeto astrofísico pelo qual o fluido escoar é muitas vezes maior que a massa do fluido em si, assumimos por hipótese que a geometria do espaço-tempo na região de interesse é determinada unicamente por parâmetros relacionados ao objeto astrofísico, sendo o fluido tratado como um fluido de teste. Tal hipótese é razoável quando se considera, por exemplo, sistemas binários compostos de uma estrela gigante que emite na forma de vento solar uma quantidade de matéria equivalente a cerca de 10^{-7} massas solares por ano em direção a sua companheira compacta cuja massa se equivale à do sol [8].

No que diz respeito a consideração de uma constante cosmológica, fazemos isto principalmente, embora não unicamente, a título de generalidade. Observações recentes indicam limites superiores para tal constante pequenos demais para que esta se manifeste de maneira significativa na escala de distâncias em que se considera o escoamento [9]. Entretanto, a expectativa de que presença de uma constante cosmológica na métrica do espaço-tempo possa mudar de alguma forma o padrão do escoamento é motivo suficiente para sua manutenção na presente investigação.

Outro ganho que uma abordagem relativística nos dá é a análise da

influência puramente gravitacional da presença de carga elétrica no objeto astrofísico através do qual o fluido escoar. Tal fenômeno surge como previsão da relatividade geral de que toda forma de energia e momento interage gravitacionalmente e não possui contraparte newtoniana.

A presente dissertação se encontra organizada da seguinte forma: no primeiro capítulo apresentamos uma revisão geral da dinâmica de fluidos relativísticos, culminando com a derivação da versão relativística da equação de Euler para escoamento potencial. Dadas as dificuldades na pesquisa por soluções analíticas para tal equação, precisamos de uma metodologia para seu trato numérico. O segundo capítulo trata então da apresentação de um esquema completo para abordar computacionalmente equações diferenciais parciais, a saber: o método das diferenças finitas. No terceiro capítulo, apresentamos a solução de Reissner-Nordström com constante cosmológica, que representa o espaço tempo escolhido para a investigação. Neste capítulo apresentamos alguns aspectos gerais da métrica, bem como os passos para sua obtenção à partir das equações de Einstein. Nos capítulos finais apresentamos então os resultados obtidos para o estudo dos casos de escoamento potencial através de esferas rígidas e buracos negros. No quarto capítulo, apresentamos soluções analíticas para o caso de constante cosmológica nula e no quinto capítulo então apresentamos resultados numéricos com a presença de constante cosmológica. Neste caso, consideramos valores tanto negativos quanto positivos para a constante cosmológica. Finalizamos então com a análise e discussão dos resultados.

Capítulo 1

Introdução à dinâmica de fluidos relativísticos

Neste capítulo, fazemos uma breve revisão sobre o tratamento de fluidos relativísticos. Começamos, no contexto da relatividade especial, por uma introdução ao fluido ideal, definido por meio de seu tensor de energia-momento. Tal tensor nos é de interesse tanto por conter toda a informação sobre as propriedades mecânicas da matéria-energia, quanto por ser identificado como representativo das fontes do campo gravitacional, no contexto da relatividade geral. Em seguida, obtemos as equações que descrevem a dinâmica de tais fluidos, que são, em síntese, as leis de conservação de energia-momento, adicionadas de uma equação de continuidade; definimos na seqüência a situação de escoamento potencial e a classe de equações de estado tipo politrópica, que assumiremos para a termodinâmica do fluido. Finalizamos então com a passagem do problema para o contexto da relatividade geral.

1.1 O fluido ideal relativístico

Seguindo a abordagem contida nas referências [6, 10, 11, 12], definimos de forma geral o tensor de energia-momento de um meio contínuo material por meio de suas componentes em relação à tetrada ortonormal constituída de seus quatro autovetores reais. Designamos tais autovetores por $\xi_{(\sigma)}^\mu$, em que os índices indicam a μ -ésima componente do vetor $\xi_{(\sigma)}$, e estes constituem um

conjunto de três vetores tipo-espaco e um vetor tipo-tempo, associados aos quais temos quatro autovalores reais $\lambda_{(\sigma)}$. Temos assim

$$T_{\mu\nu}\xi_{(\sigma)}^\nu = \lambda_{(\sigma)}\xi_{(\sigma)\mu}, \quad (1.1)$$

sendo que as componentes covariantes e contravariantes se relacionam por meio da métrica $\eta_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} \xi_{(\sigma)\mu} &= \eta_{\mu\nu}\xi_{(\sigma)}^\nu; \\ T_{\mu}^{\nu} &= \eta_{\mu\alpha}T^{\alpha\nu}; \\ T_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}T^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Definimos então a quadri-velocidade U^μ do meio como sendo o autovetor tipo-tempo de $T_{\mu\nu}$, associado ao qual temos a densidade própria de energia, ρ , como autovalor:

$$T_{\mu\nu}U^\nu = -\rho U_\mu, \quad (1.2)$$

devendo-se o sinal negativo ao fato de que o quadri-momento das partículas materiais apontarem para o futuro, do que resulta-nos também $U^\mu U_\mu = -1$.

Diferentes tipos de fluidos relativísticos são determinados por meio do *tensor de tensões*, $S_{\mu\nu}$, definido através de

$$T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu - S_{\mu\nu}. \quad (1.3)$$

Podemos verificar que $S_{\mu\nu}$ possui apenas seis componentes independentes, dado que, de acordo com a equação (1.2), temos

$$S_{\mu\nu}U^\nu = 0. \quad (1.4)$$

O fluido mais simples que podemos conceber desta forma é aquele em que $S_{\mu\nu} \equiv 0$. Tal fluido é constituído de matéria incoerente não interagente, ou, simplesmente, poeira. Neste caso, sua dinâmica é descrita completamente pela quadri-velocidade e um campo de densidade própria de matéria-energia, ρ , e as linhas de escoamento são simplesmente geodésicas.

O segundo tipo de fluido que podemos pensar em escala de complexidade é aquele que designamos por fluido ideal. Para a completa caracterização de tal fluido é necessário e suficiente um campo extra em relação à poeira,

a saber, um campo de pressão escalar p . Neste caso, excluimos fluxos de momento-energia não-puramente mecânicos, de forma que não há viscosidade e, portanto, nenhuma troca de energia na forma de calor entre diferentes partes do fluido nem entre o fluido e o meio que o cerca. Pragmaticamente, exigimos que $T_{\mu\nu}$ possua três autovalores iguais, correspondendo aos seus autovetores tipo-espaço. Feitas estas considerações, concluimos que, no referencial co-móvel associado a um dado elemento de fluido, o tensor de energia-momento lê

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}.$$

Para determinar a forma de $T^{\mu\nu}$ para qualquer outro volume elementar de fluido que se move com velocidade \mathbf{v} arbitrária, lembremos que, devido ao seu caráter tensorial, $T^{\mu\nu}$ deve se transformar como

$$T^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha(\mathbf{v})\Lambda^\nu_\beta(\mathbf{v})\tilde{T}^{\alpha\beta}, \quad (1.5)$$

em que os Λ^μ_ν representam o “*boost*” de Lorentz

$$\Lambda^0_0 = \gamma \quad (1.6)$$

$$\Lambda^i_0 = \Lambda^0_i = \gamma v_i \quad (1.7)$$

$$\Lambda^i_j = \delta_{ij} + v_i v_j \frac{(\gamma - 1)}{\mathbf{v}^2} \quad (1.8)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} \quad (1.9)$$

Nas definições (1.6) a (1.9) fazemos uso da escolha de unidades que será adotada durante o resto do texto, nas quais $c = 1$. Resulta-nos assim:

$$T^{00} = \frac{\rho + p\mathbf{v}^2}{1 - \mathbf{v}^2}; \quad (1.10)$$

$$T^{i0} = \frac{(\rho + p)}{1 - \mathbf{v}^2} v_i; \quad (1.11)$$

$$T^{ij} = p\delta_{ij} + \frac{(\rho + p)}{(1 - \mathbf{v}^2)} v_i v_j \quad (1.12)$$

em que

$$U^0 = \frac{dt}{d\tau} = \gamma; \quad (1.13)$$

$$U^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \gamma v^i; \quad (1.14)$$

sendo que usamos a definição de tempo-próprio $d\tau = dt/\gamma$. Podemos assim escrever o tensor de energia-momento do fluido ideal relativístico como

$$T^{\mu\nu} = p\eta^{\mu\nu} + (\rho + p)U^\mu U^\nu. \quad (1.15)$$

Se então em um referencial co-móvel a um elemento de fluido, a densidade do número de partículas é n , definimos, neste mesmo referencial, a *quadri-corrente* de partículas N^μ , de componentes

$$\begin{aligned} \tilde{N}^0 &= n, \\ \tilde{N}^i &= 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

em que n é a densidade do número N . Em qualquer outro referencial que se relacione com esse por um "boost" de Lorentz, temos que

$$\begin{aligned} N^0 &= \Lambda^0_\nu \tilde{N}^\nu = \gamma n, \\ N^i &= \Lambda^i_\nu \tilde{N}^\nu = \gamma n v^i. \end{aligned} \quad (1.17)$$

A almejada equação de continuidade pode então ser escrita como

$$\begin{aligned} \partial_\mu N^\mu &= 0, \\ N^\mu &= nU^\mu. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Vale ainda notar o seguinte a respeito de n . Por definição, quantidades do tipo $x = X/V$ são dependentes de referencial, dado que V , devido à contração de Lorentz, é dependente de referencial. Entretanto, a densidade n é definida como sendo a densidade do número de partículas no referencial do centro de momento de um elemento de fluido e, podemos facilmente verificar que

$$N^\mu N_\mu = -n^2, \quad (1.19)$$

é escalar. Devemos então, de forma mais precisa, nos referir a n como

densidade de repouso, ou ainda, *densidade própria* do número de partículas.

1.2 Equações de movimento para o fluido ideal

Vimos que uma das equações que descrevem a dinâmica de um fluido perfeito é necessariamente a equação de continuidade (1.18). As demais são sintetizadas na forma das leis de conservação de energia e momento

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (1.20)$$

Substituindo-se o tensor de energia-momento do fluido ideal (1.15) na equação anterior, ficamos com

$$\partial_\nu [p\eta^{\mu\nu} + (\rho + p)U^\mu U^\nu] = 0. \quad (1.21)$$

Podemos separar esta equação em suas partes se observarmos que se definem duas classes de direções em relação ao tensor $T^{\mu\nu}$: a direção tipo-tempo definida por U^μ e as direções tipo-espaco, dadas pela projeção sobre a hipersuperfície perpendicular, obtida pela ação do tensor de projeção $P^{\mu\nu}$ tal que

$$P^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + U^\mu U^\nu, \quad (1.22)$$

ou seja, $P^{\mu\nu}U_\nu = 0$. Contraindo-se a equação (1.21) com U_μ obtemos

$$U_\mu \partial_\nu [p\eta^{\mu\nu} + (\rho + p)U^\mu U^\nu] = U^\nu \partial_\nu p - \partial_\nu [(\rho + p)U^\nu] = 0, \quad (1.23)$$

em que utilizamos a identidade $U_\mu \partial_\nu U^\mu = 0$. Substituindo-se então a definição da quadri-corrente de partículas, $N^\mu = nU^\mu$ e a equação da continuidade (1.18), resulta-nos

$$nU^\nu \left[p\partial_\nu \left(\frac{1}{n} \right) + \partial_\nu \left(\frac{\rho}{n} \right) \right] = 0. \quad (1.24)$$

Comparando-se esta última equação com a primeira lei da termodinâmica

$$Td\sigma = d\left(\frac{\rho}{n}\right) + pd\left(\frac{1}{n}\right), \quad (1.25)$$

em que σ denota a entropia molar ($\sigma = S/N$), podemos escrever

$$(nT) U^\nu \partial_\nu \sigma = 0. \quad (1.26)$$

Se observarmos que a expressão $U^\nu \partial_\nu \equiv d/d\tau$ é a derivada ao longo da linha mundo (*worldline*) do elemento de fluido, temos:

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = 0, \quad (1.27)$$

ou seja, a entropia permanece constante sobre qualquer ponto que se mova juntamente com o fluido.

Podemos ainda definir a *quadri-corrente de entropia* específica, sU^ν , de maneira que a equação (1.23) pode ser reescrita como

$$\partial_\nu (sU^\nu) = 0. \quad (1.28)$$

As equações (1.27) e (1.28) não devem constituir nenhuma novidade. Na forma como definimos o tensor de energia-momento (1.15), consideramos que em um fluido ideal não há trocas de calor. As exigências simultâneas de equilíbrio termodinâmico e ausência de trocas de calor implica automaticamente na conservação da entropia.

Vamos agora contrair a equação (1.21) com o tensor de projeção $P_{\alpha\mu}$ definido na equação (1.22). Dado que $P_{\alpha\mu}U^\mu = 0$ e utilizando-se novamente a identidade $U_\mu \partial_\nu U^\mu = 0$, temos

$$P_{\alpha\mu} \partial_\nu T^{\mu\nu} = P_\alpha{}^\nu \partial_\nu p + (\rho + p) U^\nu \partial_\nu U_\alpha \quad (1.29)$$

Desta forma, o equivalente relativístico da *equação de Euler* pode ser escrito como

$$(\rho + p) U^\nu \partial_\nu U^\mu = -\partial^\mu p - U^\mu U^\nu \partial_\nu p. \quad (1.30)$$

Para melhor compararmos esta equação com sua equivalente não-relativística, reescrevemo-na considerando-se $\mu = i \in \{1, 2, 3\}$ e substituímos na equação resultante o que obtemos quando consideramos $\mu = 0$. Observando-

se ainda que $U^i = v^i U^0$, obtemos

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \partial) \mathbf{v} = -\frac{(1-v^2)}{(\rho+p)} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \mathbf{v} + \partial p \right). \quad (1.31)$$

Uma observação que podemos fazer com relação à equação (1.30) é que a presença de termos no seu lado direito representando gradientes de pressão indicam que as linhas mundo dos elementos de fluido desviam-se das geodésicas, curvas estas as quais seguiriam caso tal equação lê-se $U^\nu \partial_\nu U^\mu = 0$.

1.3 Escoamento Potencial Relativístico

Para processos isentrópicos a equação (1.25) implica em

$$\partial_\mu p = n \partial_\mu h, \quad (1.32)$$

em que $h = (\rho + p)/n$ é a entalpia por partícula.

Levando-se este fato em conta, podemos reescrever a equação relativística de Euler (1.30) como

$$U^\nu \omega_{\mu\nu} = 0, \quad (1.33)$$

em que

$$\omega_{\mu\nu} \equiv \partial_\nu (hU_\mu) - \partial_\mu (hU_\nu). \quad (1.34)$$

O tensor de componentes $\omega_{\mu\nu}$ é o equivalente relativístico da vorticidade, de modo que o escoamento potencial relativístico é dado por

$$\omega_{\mu\nu} = 0, \quad (1.35)$$

tendo assim, a equação (1.33) soluções da forma

$$hU_\mu = \partial_\mu \Phi. \quad (1.36)$$

Observando-se a equação de continuidade (1.18), podemos escrever a equação (1.36) como

$$\partial_\mu \left(\frac{n}{h} \partial^\mu \Phi \right) = 0. \quad (1.37)$$

Temos assim uma equação diferencial de segunda ordem para o potencial de velocidades Φ . Dado que ρ , p e n se relacionam por uma dada equação de estado, podemos esperar que, em geral, a equação (1.37) seja não linear.

Consideremos então uma equação de estado do tipo politrópica, ou seja

$$p = Kn^\Gamma. \quad (1.38)$$

De acordo com a primeira lei da termodinâmica dada na forma da equação (1.25), temos ainda que $\rho = \rho(n)$; sua integração com $d\sigma = 0$, dado que o escoamento é isentrópico, resulta em

$$\rho = \rho_0 + K \frac{n^\Gamma}{\Gamma - 1} \quad (1.39)$$

em que K é constante. Como era de se esperar, a densidade total de massa-energia é composta de uma densidade de repouso de massa-energia, ρ_0 e de uma densidade de energia interna, $Kn^\Gamma(\Gamma - 1)^{-1}$. Considerando-se que o escoamento é essencialmente relativístico, podemos desprezar a primeira parcela em relação a segunda. Resulta-nos assim uma equação de estado na forma barotrópica:

$$p = (\Gamma - 1)\rho. \quad (1.40)$$

A densidade de número n pode então ser dada em termos da entalpia por

$$n = \kappa h^{1/(\Gamma-1)}, \quad (1.41)$$

em que $\kappa = \left(\frac{\Gamma-1}{\Gamma K}\right)^{1/(\Gamma-1)}$. A entalpia, por sua vez, é calculada em qualquer evento por meios de sua relação com o potencial de velocidades Φ , possibilitada pela condição de normalização $U^\mu U_\mu = -1$:

$$h = \sqrt{-\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi}. \quad (1.42)$$

Contextualizando o problema em termos de relatividade geral, substituímos a métrica do espaço-tempo plano de Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$, por uma métrica $g_{\mu\nu}$, designando um espaço-tempo curvo e substituímos as derivadas parciais ∂ por derivadas covariantes ∇ . Os princípios de equivalência, covariância e acoplamento mínimo nos garantem que tal procedimento é tudo que precisamos fazer para realizarmos a passagem da relatividade especial para

relatividade geral, uma vez que temos todas as equações em forma tensorial.

Substituindo-se (1.41) em (1.37), podemos então obter

$$\square\Phi + \left(\frac{2-\Gamma}{\Gamma-1}\right) \partial_\mu (\ln h) \partial^\mu\Phi = 0, \quad (1.43)$$

em que definimos o operador \square como

$$\square\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi). \quad (1.44)$$

Percebemos aqui que a situação mais simples se dá quando $\Gamma = 2$. Neste caso, a equação (1.43) se reduz a $\square\Phi = 0$, sendo, portanto, linear. Tais fluidos para os quais $\Gamma = 2$ são ditos duros, dado que a velocidade do som nestes, definida por

$$u^2 = \frac{dp}{d\rho}, \quad (1.45)$$

passa a ser igual à unidade, o que em nossas unidades implica nesta ser igual à velocidade da luz. Para $1 < \Gamma < 2$, a equação (1.43) é não-linear. Observemos ainda que a equação (1.43) não se aplica à situação $\Gamma = 1$, que corresponde a fluido sem pressão, também conhecido como poeira.

Para resolvermos a equação (1.43), precisamos ainda determinar $g_{\mu\nu}$. Em resumo, isto implica em resolvermos as equações de Einstein,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}, \quad (1.46)$$

tendo o tensor de energia-momento do fluido em questão contribuindo em seu lado direito. Ao invés disso, entretanto, assumiremos a hipótese simplificadora de que o fluido não auto-gravita, ou seja, a métrica $g_{\mu\nu}$ é dada *a priori*. Tal hipótese de um *fluido de teste* é entendida como sendo representativa de uma primeira aproximação para a solução do problema completo.

Nosso problema pode então ser sumarizado da seguinte forma: dado um espaço-tempo representado por $g_{\mu\nu}$, vamos resolver a equação (1.43) com condições de contorno apropriadas e um determinado valor de Γ . Em nosso estudo escolhemos o valor $\Gamma = 2$, com a finalidade de tratarmos da equação (1.43) em uma forma linear.

Tal tarefa já apresenta certa dificuldade *per si*. Uma equação como a dada em (1.43) é, em geral, de difícil solução. Como veremos, podemos obter algumas soluções analíticas quando $\Lambda = 0$. Com constante cosmológica não-nula, entretanto, precisamos utilizar técnicas numéricas. No capítulo que segue veremos um roteiro de como abordar computacionalmente equações diferenciais parciais como a equação (1.43).

Capítulo 2

Tratamento numérico de equações diferenciais parciais (EDP's)

Vimos no capítulo anterior que a equação de nosso interesse, a equação relativística de Euler aplicada à escoamento potencial é, em geral, de difícil solução, o que praticamente nos obriga a tratá-la numericamente. A abordagem computacional deste tipo de equação é o alvo do presente capítulo.

Uma equação diferencial parcial de segunda ordem como a equação (1.43) pode ser escrita genericamente na forma¹

$$A\Phi_{xx} + B\Phi_{xy} + C\Phi_{yy} + D\Phi_x + E\Phi_y + F\Phi = G, \quad (2.1)$$

em que os coeficientes A, B, C, D, E e F , bem como Φ e G podem depender de x e y . Esta nos servirá, portanto, como protótipo de uma EDP linear de segunda ordem. Vejamos então a seguir um dos possíveis procedimentos para se tratar numericamente equações deste tipo.

¹Somente neste capítulo utilizaremos a notação comum nos livros de equações diferenciais, nos quais as derivadas são representadas por subíndices, como em $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \equiv \Phi_{xy}$.

2.1 Diferenciação numérica: equações de diferenças finitas

Resolver numericamente uma EDP como a da equação (2.1) demanda aproximá-la por uma equivalente que se possa definir em um domínio numérico discreto. Um dos possíveis procedimentos que podemos adotar é o de converter uma equação de tal tipo em uma *equação de diferenças finitas*, de forma que as diferenciais são numericamente aproximadas, a partir da definição de derivada, por expressões do tipo

$$\Phi_x \simeq \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x}, \quad (2.2)$$

em que Δx se aproxime de zero tanto quanto desejarmos e pode, ou não, ser constante sobre todo o domínio de solução. Tal abordagem recebe a denominação de *método das diferenças finitas*.

Se designarmos por erro de truncamento a diferença numérica entre as equações diferencial parcial e de diferenças finitas, a exigência mais básica que se pode fazer com respeito ao método das diferenças finitas, é a de que, quanto mais próximo de zero for Δx , menor será o erro de truncamento e mais a solução numérica deve se aproximar da solução analítica. Como a solução analítica é incógnita, esperamos que este critério seja satisfeito pela hipótese a equação de diferenças finitas tenda a equação diferencial parcial no limite em que Δx tenda a zero. Temos assim estabelecido um *critério de consistência*.

Diferenciais finitas da forma (2.2) podem ser obtidas por meio de procedimentos diversos, como, por exemplo, ajuste polinomial. Todavia, a verificação do critério de consistência pode se tornar difícil em alguns casos. A metodologia de obtenção das “diferenciais finitas” na qual mais facilmente se verifica a satisfação de tal critério consiste no truncamento da série de Taylor até a ordem de potência desejada.

Designemos por Φ_i o valor de Φ no ponto de coordenada $x = x_i$, de modo que² $\Phi_{i\pm 1} = \Phi(x_i \pm \Delta x_i) = \Phi(x_{i\pm 1})$. Seja então a expansão de Φ_{i+1} nas vizinhanças de x_i :

$$\Phi_{i+1} = \Phi_i + (x_{i+1} - x_i)(\Phi_x)_i + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2}(\Phi_{xx})_i + \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{3!}(\Phi_{xxx})_i + \dots \quad (2.3)$$

²Lembremos que neste ponto ainda não decidimos se Δx_i é função de x ou se é constante.

Da mesma forma podemos expandir Φ_{i-1} nas vizinhanças de x_i :

$$\Phi_{i-1} = \Phi_i + (x_i - x_{i-1})(\Phi_x)_i + \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2}(\Phi_{xx})_i + \frac{(x_i - x_{i-1})^3}{3!}(\Phi_{xxx})_i + \dots \quad (2.4)$$

Das equações (2.2), (2.3) e (2.4), podemos inferir que

$$\Phi_x|_i = \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{(x_{i+1} - x_i)} + \mathcal{O}(\Delta x_i) \quad \text{EDF} \quad (2.5)$$

$$\Phi_x|_i = \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{(x_i - x_{i-1})} + \mathcal{O}(\Delta x_i) \quad \text{EDT} \quad (2.6)$$

$$\Phi_x|_i = \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{(x_{i+1} - x_{i-1})} + \mathcal{O}(\Delta x_i^2) \quad \text{EDC} \quad (2.7)$$

em que as siglas EDF, EDT e EDC designam, respectivamente, esquema de diferenciação para frente, para trás e centrado. A notação do \mathcal{O} maiúsculo, (\mathcal{O}) indica a potência de Δx equivalente à qual o erro de truncamento tende a zero. Fica evidente então que o esquema de diferenciação centrado tem precisão uma ordem de grandeza maior que os esquemas "direcionais".

Para obtermos expressões equivalentes para a derivada segunda, aplicamos sucessivamente alguma das expressões para a derivada primeira. Obtemos assim expressões como:

$$\Phi_{xx}|_i = \frac{(\Phi_x)|_{i+1} - (\Phi_x)|_{i-1}}{(x_{i+1} - x_{i-1})} + \mathcal{O}(\Delta x_i^2).$$

utilizando-se EDC, ou equivalentes utilizando-se EDF ou EDT. Podemos, entretanto, obter melhores aproximações se tomarmos as derivadas "internas" em pontos localizados no intermédio de x_i e $x_{i\pm 1}$. Desta forma, obtemos o equivalente EDC para a derivada segunda:

$$\frac{1}{2}\Phi_{xx}|_i = \frac{(x_i - x_{i-1})\Phi_{i+1} + (x_{i+1} - x_i)\Phi_{i-1} - (x_{i+1} - x_{i-1})\Phi_i}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})} + \mathcal{O}(\Delta x_i^2) \quad \text{EDC} \quad (2.8)$$

As derivadas mistas da forma $\partial_x(\Xi\partial_x\Phi)$ podem ser aproximadas de maneira semelhante, com as derivadas internas aproximadas na distância intermediária entre x_i e $x_{i\pm 1}$:

$$\frac{1}{2}\partial_x(\Xi\Phi_x)|_i = \frac{\Xi_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\Phi_{i+1}-\Phi_i}{x_{i+1}-x_i}\right) - \Xi_{i-\frac{1}{2}}\left(\frac{\Phi_i-\Phi_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right)}{x_{i+1} - x_{i-1}}. \quad (2.9)$$

No caso específico em que as coordenadas x_i são igualmente espaçadas, temos

que

$$x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} = 2(x_{i+1} - x_{i-1}) = h,$$

donde resulta a simplificação

$$\Phi_x|_i = \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{h} + \mathcal{O}(h) \quad \text{EDF (2.10)}$$

$$\Phi_x|_i = \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{h} + \mathcal{O}(h) \quad \text{EDT (2.11)}$$

$$\Phi_x|_i = \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad \text{EDC (2.12)}$$

$$\Phi_{xx}|_i = \frac{\Phi_{i+1} + \Phi_{i-1} - 2\Phi_i}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad \text{EDC (2.13)}$$

$$\partial_x (\Xi \Phi_x)|_i = \frac{\Xi_{i+\frac{1}{2}} (\Phi_{i+1} - \Phi_i) - \Xi_{i-\frac{1}{2}} (\Phi_i - \Phi_{i-1})}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad \text{EDC ponto médio (2.14)}$$

Definamos agora um domínio discreto D , a que denominamos *malha numérica* (ou ainda, grade numérica), como sendo a coletividade dos pontos P_{ij} que marcam a intersecção das linhas dadas por $x = \text{constante}$ e $y = \text{constante}$, sendo (x_i, y_j) suas coordenadas. Definamos ainda o intervalo de variação das coordenadas x e y como

$$x_0 \leq x_i \leq X,$$

$$y_0 \leq y_j \leq Y,$$

em que x_i e y_j satisfazem as relações de ordenamento

$$x_i = x_0 + (i - 1)\Delta x, \quad 1 \leq i \leq N_i$$

$$y_j = y_0 + (j - 1)\Delta y, \quad 1 \leq j \leq N_j$$

de forma que o contorno B de D seja definido pelas linhas $x = x_0$, $x = X$, $y = y_0$ e $y = Y$. Conforme vemos ilustrado na figura (2.1).

A aplicação do EDC sobre uma equação como a equação (2.1), resulta, para cada ponto $P_{i,j}$ do domínio D , em uma aproximação finitamente diferenciada na forma

$$A_{i-1,j}\Phi_{i-1,j} + A_{i,j-1}\Phi_{i,j-1} + A_{i,j}\Phi_{i,j} + A_{i,j+1}\Phi_{i,j+1} + A_{i+1,j}\Phi_{i+1,j} = Q_{i,j}, \quad (2.15)$$

de modo que toda a informação sobre a geometria da discretização encontra-se nos coeficientes A e as quantidades $Q_{i,j}$ contêm apenas termos presumidamente conhecidos, ou seja, que não são funções dos Φ .

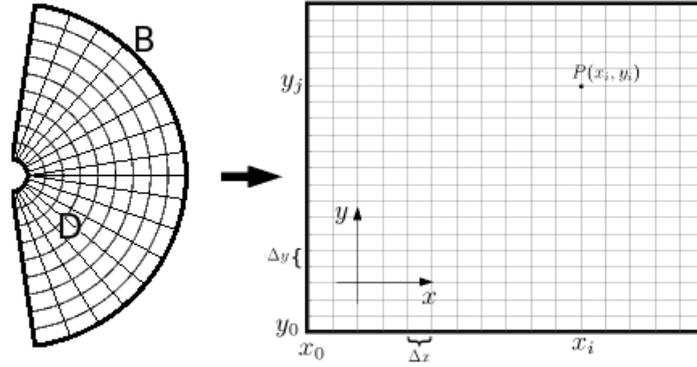


Figura 2.1: Discretização de um domínio via coordenadas retangulares.

A equação (2.15) está para ser posta na forma explícita de uma equação algébrica matricial. Para tanto, as incógnitas $\Phi_{i,j}$ precisam ser as componentes de um vetor coluna. O fato de Φ ser representado em cada nó da malha numérica por dois índices nos passa, entretanto, a impressão de que estes formam algum tipo de matriz. Esta dificuldade pode ser eliminada se enumerarmos com apenas um índice cada valor $\Phi_{i,j}$ de acordo com sua posição da malha seguindo o mapa

$$\Phi_{i,j} \mapsto \Phi_l \quad l = (i-1)N_j + j. \quad (2.16)$$

Os demais vizinhos de $\Phi_{i,j}$ pertinentes à discretização podem então ser referidos via *notação de bússola*, de acordo com as relações:

$$\Phi_{i+1,j} = \Phi_E \quad E = l + N_j \quad (2.17)$$

$$\Phi_{i,j+1} = \Phi_N \quad N = l + 1 \quad (2.18)$$

$$\Phi_{i-1,j} = \Phi_W \quad W = l - N_j \quad (2.19)$$

$$\Phi_{i,j-1} = \Phi_S \quad S = l - 1 \quad (2.20)$$

conforme podemos ver na figura (2.2).

Utilizando-se a notação de bússola, a equação (2.15) pode então ser reescrita como

$$A_W\Phi_W + A_S\Phi_S + A_P\Phi_P + A_N\Phi_N + A_E\Phi_E = Q_P. \quad (2.21)$$

Vale observar que, devido ao fato de a aplicação de EDC resultar no envolvimento de $\Phi_{i,j}$ e seus quatro vizinhos, $\Phi_{i+1,j}$, $\Phi_{i-1,j}$, $\Phi_{i,j+1}$ e $\Phi_{i,j-1}$ em cada

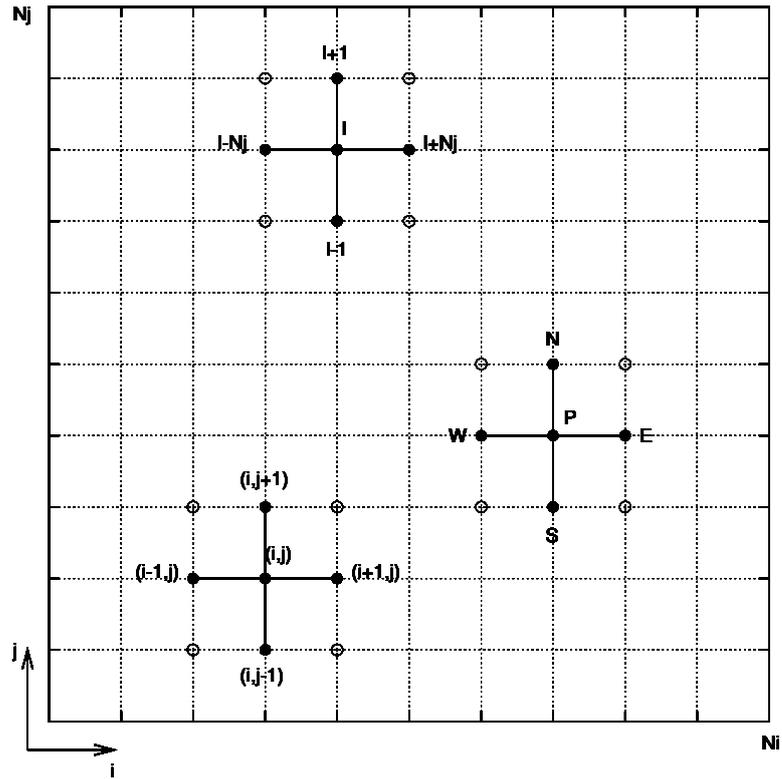


Figura 2.2: Ordenação da malha numérica e exemplificação da notação de bússola. Ao ponto P e seus vizinhos inclusos no esquema de diferenciação denominamos *molécula computacional*.

uma destas equações, rende a este procedimento a nomenclatura adicional de *esquema de cinco pontos*. Ao conjunto de $\Phi_{i,j}$ e seus vizinhos envolvidos na discretização denominamos *molécula computacional*.

2.2 Discretização e aplicação das condições de contorno

A aplicação das diversas condições de contorno se manifesta na equação de diferenças finitas na forma de relações entre os coeficientes que acompanham as incógnitas. Uma boa prática é então reescrevermos a equação (2.21) em termos de coeficientes C_l

$$C_W\Phi_W + C_S\Phi_S + C_P\Phi_P + C_N\Phi_N + C_E\Phi_E = Q_P, \quad (2.22)$$

que se relacionam com os coeficientes A_l via determinada condição de contorno.

Suponhamos então que a equação (2.21) seja acompanhada de uma condição de contorno de Dirichlet sobre a linha dada por $i = 1$, como, por exemplo, $\Phi_{i=1,j} = \alpha$. Isto quer dizer que o valor de Φ é conhecido sobre esta linha e, portanto, esta é excluída do domínio da equação geral (2.21). A aplicação da condição de Dirichlet se dá então pela substituição de Φ_W por α na equação correspondente à $i = 2$ e, todo o termo $C_W\Phi_W$, que não possui incógnitas, passa para o lado direito, i.e.

$$C_S\Phi_S + C_P\Phi_P + C_N\Phi_N + C_E\Phi_E = -\alpha C_W \quad i = 2. \quad (2.23)$$

Comparando-se as equações (2.23) e (2.21), concluímos que as equações algébricas com $i = 2$ são da forma

$$\begin{aligned} A_S\Phi_S + A_P\Phi_P + A_N\Phi_N + A_E\Phi_E &= Q_P \\ A_S &= C_S \\ A_P &= C_P \\ A_N &= C_N \quad i = 2 \\ A_E &= C_E \\ A_W &= 0 \\ Q_P &= -\alpha C_W \end{aligned} \quad (2.24)$$

Suponhamos, por outro lado, que sobre a linha $i = N_i$ a derivada normal de Φ com relação a x seja dada. Por exemplo, seja

$$\Phi_x = \beta \quad i = N_i. \quad (2.25)$$

Como a condição de Von Neumann especifica a derivada normal de Φ , mas não atribui um valor a este, temos que o domínio da equação (2.21) inclui a linha $i = N_i$. Discretizando-se a condição (2.25) via EDC, obtemos

$$\frac{\Phi_E - \Phi_W}{2h} = \beta, \quad (2.26)$$

entretanto, $\Phi_E = \Phi_{i+1,j}$ constitui um ponto fora da malha numérica.

Uma maneira de resolver este impasse é considerar a existência de *nós fantasmas* de índices $i = N_i + 1$ na malha numérica. A justificativa para tal procedimento é a de que a informação sobre Φ nestes pontos se dá via a própria condição sobre a derivada. Desta forma, nas equações para os pontos

com $i = N_i$, substituímos Φ_E por $2h\beta + \Phi_W$, do que resulta

$$\begin{aligned}
A_W\Phi_W + A_S\Phi_S + A_P\Phi_P + A_N\Phi_N &= Q_P \\
A_W &= C_W + C_E \\
A_S &= C_S \\
A_P &= C_P \\
A_N &= C_N \\
A_E &= C_E \\
Q_P &= -2h\beta C_E
\end{aligned}
\tag{2.27}$$

Pode ocorrer entretanto, de a aplicação da condição de Von Neumann via método dos nós fantasmas acarretar em um erro grande caso a discretização (2.26) não seja satisfatória ou caso Φ não exiba simetria com relação à linha $i = N_i$ [13].

Uma alternativa para a técnica dos nós fantasmas é considerar que o contorno físico sobre o qual se aplica a condição (2.25) encontra-se, na verdade, à uma distância h da linha $i = N_i$ da malha numérica. Discretizamos então a condição (2.25) via EDF

$$\frac{\Phi_E - \Phi_P}{h} = \beta,
\tag{2.28}$$

de modo que as equações algébricas com $i = N_i$ tornam-se agora

$$\begin{aligned}
A_W\Phi_W + A_S\Phi_S + A_P\Phi_P + A_N\Phi_N &= Q_P \\
A_W &= C_W \\
A_S &= C_S \\
A_P &= C_P + C_E \\
A_N &= C_N \\
A_E &= 0 \\
Q_P &= -h\beta C_E
\end{aligned}
\tag{2.29}$$

2.3 O sistema algébrico: método de Stone

Vimos que a aplicação do método de diferenças finitas resulta na substituição de uma equação diferencial parcial por um sistema de equações algébricas, sendo cada equação associada a um ponto da malha numérica onde o valor de Φ é incógnito. Observando-se que a regra de multiplicação matricial é da forma "linha-por-coluna", concluímos que a matriz de coeficientes A do sistema de equações algébricas

$$A\Phi = Q, \quad (2.30)$$

que obtemos tem dimensões $N_i \times N_j$, sendo, em geral, não-nulos apenas cinco elementos por linha, a saber: A_W , A_S , A_P , A_N e A_E . A figura (2.3) ilustra esta situação.

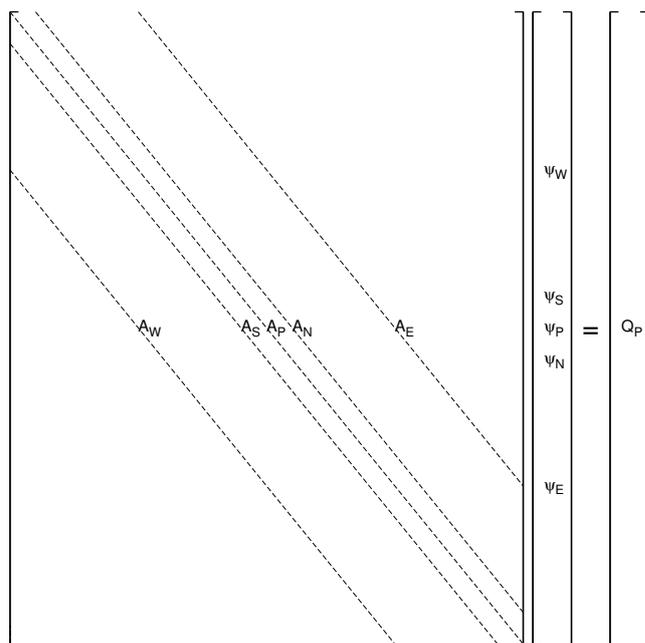


Figura 2.3: Sistemas de equações algébricas resultantes do esquema de cinco pontos têm a estrutura altamente "esparsa", às vezes referida como *pentadiagonal* ou *tridiagonal com franjas* [14].

Para resolver sistemas de equações algébricas como o dado em (2.30), dispomos de duas classes de métodos. Na primeira, temos os *métodos diretos* convencionais, como eliminação Gauss-Jordan e eliminação gaussiana com retro-substituição. A outra classe consiste dos *métodos iterativos* ou de *relaxação*, baseados em uma aproximação inicial da solução e subsequente

eliminação de um certo resíduo. Nesta última classe temos, por exemplo, os métodos de Jacobi e de sobre-relaxações sucessivas (no inglês, SOR: successive over-relaxation) e o *procedimento vetorizado fortemente implícito* de Stone, o qual utilizamos no presente trabalho.

A principal distinção entre estas duas classes de métodos de solução pode ser considerado o balanço entre (tempo de processamento computacional) *versus* (precisão). Os métodos diretos demandam por natureza maior tempo computacional e o erro por arredondamento (intrínseco ao cálculo computacional) pode tornar-se demasiado em sistemas maiores. Os métodos iterativos, por sua vez, são mais rápidos e os erros por arredondamento tendem a ser corrigidos a cada passo iterativo sendo, portanto, uma preocupação a menos. Tais métodos, entretanto, são de natureza aproximativa, como já dito. O estabelecimento de critérios de convergência é, desta forma, a principal preocupação quando se trata da aplicação de métodos iterativos, sendo, em geral, dificultosa e dependente do tipo de equação discretizada.

Um ponto a ser notado na escolha do método é o fato de o erro cometido por truncamento durante o processo de discretização ser geralmente muitas vezes maior que os erros cometidos por arredondamento durante a aritmética computacional. A implementação de métodos diretos de solução pode, como na maioria dos casos, constituir a busca por soluções com precisão maior que a fornecida pela discretização [15].

O método que adotamos no presente estudo é, como mencionamos anteriormente, o procedimento de Stone. Dentre as vantagens de tal método, podemos destacar duas: devido ao caráter vetorial do método, este utiliza em suas operações somente os elementos das diagonais não-nulas da matriz dos coeficientes - que vemos esquematizadas na figura 2.3. Isto reduz consideravelmente o tempo computacional, tornando o método mais eficiente. Outro fator decisivo na escolha do método foi sua fácil implementação em FORTRAN 90, linguagem de programação adotada para a realização dos cálculos.

De posse então do ferramental computacional para abordar numericamente a equação (1.43), nos resta somente a definição da métrica $g_{\mu\nu}$ a ser empregada. No capítulo que segue, falaremos das soluções de Reissner-Nordström com constante cosmológica, que representam os espaços-tempos escolhidos para a análise do escoamento potencial.

Capítulo 3

Os espaços-tempos de Reissner-Nordström-de Sitter e Anti-de Sitter

Vimos no primeiro capítulo que o escoamento potencial relativístico é governado pela equação relativística de Euler (1.30), que assume a forma (1.43) na ausência de vorticidade. Esclarecemos ainda, na seção (1.4), que em nossa abordagem consideramos o fluido como sendo um fluido de teste que escoar em um espaço-tempo que atua como plano de fundo, sem contribuir para a curvatura de tal espaço-tempo.

Neste capítulo veremos os principais aspectos da geometria de Reissner-Nordström com constante cosmológica que sejam pertinentes à presente investigação. Veremos também um breve roteiro de como obter tal solução para as equações de Einstein.

3.1 Obtenção da métrica

As equações de Einstein com constante cosmológica Λ podem ser escritas como

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}^{EM}, \quad (3.1)$$

em que o tensor $T_{\mu\nu}^{EM}$ representa campos eletromagnéticos.

Os espaços-tempos de Reissner-Nordström-(A)dS são soluções para as equações (3.1) tendo como fonte o tensor de energia-momento do campo elétrico de uma carga puntiforme.

Devido a simetria esférica tanto da distribuição de matéria quanto de carga elétrica, a solução $g_{\mu\nu}$ pode ser escrita em termos de coordenadas estáticas semelhantes às de Schwarzschild

$$ds^2 = -e^\nu dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.2)$$

em que ν e λ dependem somente de r e t . Para esta métrica, as componentes não-nulas do tensor de Einstein são

$$G_{tt} = e^{\nu-\lambda} (-1 + e^\lambda + r\lambda') / r^2 \quad (3.3)$$

$$G_{tr} = \frac{\dot{\lambda}}{2r} \quad (3.4)$$

$$G_{rr} = (1 - e^\lambda + r\nu') / r^2 \quad (3.5)$$

$$G_{\theta\theta} = r^2 e^{-\lambda} [2\nu'' + (\nu')^2 + 2(\nu' - \lambda')/r - \nu'\lambda'] / 4 - r^2 e^{-\nu} [2\ddot{\lambda} + (\dot{\lambda})^2 - \dot{\lambda}\dot{\nu}] / 4 \quad (3.6)$$

$$G_{\phi\phi} = G_{\theta\theta} \quad (3.7)$$

em que a linha (') denota diferenciação em relação a coordenada r e o ponto sobreposto ($\dot{}$), diferenciação em relação a coordenada t .

O quadri-potencial eletromagnético \mathbf{A} , dada sua simetria esférica, pode depender somente das coordenadas t e r . Podemos ainda utilizar a liberdade que temos sobre escolha de calibres da forma $\tilde{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi(t, r)$ em que χ é uma função qualquer das coordenadas t e r . Fazendo-se então $\tilde{A}_r = 0 = A_r + \partial_r \chi$, resta somente não-nula a componente t do quadri-potencial, que denotamos por ϕ :

$$A_\mu = (\phi, 0, 0, 0). \quad (3.8)$$

O tensor eletromagnético $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ tem então somente uma componente independente não-nula

$$F_{01} = -\phi'. \quad (3.9)$$

Dado que $F^{\alpha\beta} = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\mu\nu}$, as equações de Maxwell para o vácuo, $\nabla_\nu F^{\mu\nu} = 0$,

resultam em

$$\phi' = \frac{Q}{r^2} e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}, \quad (3.10)$$

sendo Q uma constante de integração. Com as componentes do tensor eletromagnético, calculamos às do tensor de energia-momento

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\delta} F_{\nu}^{\delta} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta} \right), \quad (3.11)$$

para as quais, encontramos

$$T_{\mu\nu} = \frac{Q^2}{8\pi r^4} \text{diag}(e^{\nu}, -e^{\lambda}, r^2, r^2 \sin^2 \theta). \quad (3.12)$$

Das equações (3.1), resultam então

$$e^{\nu-\lambda} (-1 + e^{\lambda} + r\lambda') / r^2 - \Lambda e^{\nu} = (Q^2/r^4) e^{\nu} \quad (3.13)$$

$$(1 - e^{\lambda} + r\nu') / r^2 + \Lambda e^{\lambda} = -(Q^2/r^4) e^{\lambda} \quad (3.14)$$

$$\dot{\lambda} = 0, \quad (3.15)$$

sendo a equação associada à componente $G_{\theta\theta}$ (e, portanto, a associada à $G_{\phi\phi}$) automaticamente implicada por estas três. Somando-se as equações (3.13) e (3.14), resulta-nos

$$\nu' + \lambda' = 0, \quad (3.16)$$

o que implica em

$$\nu + \lambda = f(t). \quad (3.17)$$

Podemos aplicar à métrica (3.2) uma transformação de coordenadas envolvendo somente a coordenada temporal, do tipo $t = h(t')$, que resulta em redefinirmos a coordenada t , mantendo inalterada a forma da métrica [16]. Para tal transformação, vale a relação entre coeficientes $g'_{00} = \dot{h}^2 g_{00}$, em que $\dot{h} \equiv dx_0/dx'_0$. Caso

$$\dot{h} = e^{-f(t)/2}, \quad (3.18)$$

temos que

$$g'_{00} = e^{-f} g_{00} = e^{\nu-f}. \quad (3.19)$$

Interpretamos assim a transformação como sendo simplesmente adicionar à ν uma função arbitrária do tempo, $f(t)$. De acordo com a equação (3.19), podemos escolher a função h de forma que $\nu + \lambda = 0$ nas novas coordenadas. A equação (3.15), por sua vez, indica que, neste caso, ambos ν e λ são

independentes do tempo. Tomando-se então

$$\nu + \lambda = 0, \quad (3.20)$$

sobra apenas uma equação independente à ser resolvida. Reescrevendo-se a equação (3.14) na forma

$$(re^\nu)' - 1 + \frac{Q^2}{r^2} + \Lambda r^2 = 0, \quad (3.21)$$

obtemos via sua integração direta

$$e^\nu = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2, \quad (3.22)$$

sendo $-2M$ uma constante de integração.

Aplicando-se a condição (3.20) sobre a equação (3.10), esta resulta em

$$\phi' = \frac{Q}{r^2}, \quad (3.23)$$

que interpretamos como sendo a Lei de Coulomb da eletrostática. Disso segue nossa interpretação de ϕ' como sendo o campo elétrico associado a carga Q localizada na origem das coordenadas. O parâmetro M tem sua interpretação como na solução de Schwarzschild de ser a massa da fonte.

Explicitamente, obtivemos então a solução

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2, \quad (3.24)$$

em que

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2. \quad (3.25)$$

Para $\Lambda = 0$, a métrica (3.24) se reduz à solução de Reissner-Nordström. Com $\Lambda \neq 0$, esta tem a forma assintótica

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) dt^2 + \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2, \quad (3.26)$$

que é a solução de de Sitter para espaços vazios com curvatura constante. Devido a isto, este tipo de métrica recebe a designação “*de Sitter*” caso $\Lambda > 0$ ou “*Anti-de Sitter*”, caso $\Lambda < 0$.

3.2 Regiões de interesse na métrica de RN(A)dS

Podemos interpretar a métrica (3.24) como sendo a solução para o exterior de um objeto esférico eletricamente carregado ou como sendo a solução completa para uma carga puntiforme localizada em $r = 0$.

Para valores positivos de Λ , a métrica (3.24) pode possuir três horizontes, dados pelas raízes reais positivas da equação $r^2 f(r) = 0$. Sendo esta uma equação algébrica de quarto grau, podemos, via análise de seu discriminante [17], concluir que esta terá quatro raízes reais caso

$$M_- < M < M_+, \quad (3.27)$$

em que

$$M_{\pm} = \Gamma_{\pm} \left(1 - \frac{2\Lambda}{3} \Gamma_{\pm}^2 \right); \quad (3.28)$$

$$2\Lambda \Gamma_{\pm}^2 = 1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2\Lambda}. \quad (3.29)$$

Suas raízes positivas, que designamos por R_i , R_H e R_c , de modo que $0 < R_i < R_H < R_c$, localizam então os três horizontes possíveis: um horizonte interno, o horizonte de eventos do buraco negro e um horizonte cosmológico, respectivamente.

O horizonte cosmológico em $r = R_c$, implica em os observadores na região $r < R_c$ terem acesso somente a eventos ocorrendo em $r \leq R_c$, de forma similar ao que ocorre com o horizonte de eventos do buraco negro [18, 19]. Já o horizonte interno, localizado em $r = R_i$ não se trata de um horizonte de eventos. Uma partícula que entra no buraco negro pode atingir a superfície $r = R_i$ em um tempo finito, cruzá-la e voltar para a região $R_i < r < R_H$. Isto marca uma peculiar diferença entre o buraco negro RN em relação ao de Schwarzschild: partículas neutras são repelidas pela singularidade localizada em $r = 0$ [20, 21, 12].

Para valores negativos de Λ , a quártica tem sempre duas raízes reais positivas representando, respectivamente, os horizontes interno e de eventos. Não há neste caso, portanto, um horizonte cosmológico.

Existem ainda situações extremas associadas à métrica (3.24), incluindo

a possibilidade de singularidades nuas [22]. Neste trabalho consideramos valores de Λ tanto positivos quanto negativos sendo que para $\Lambda > 0$, nos limitamos às situações em que os parâmetros da métrica satisfazem a relação (3.27).

Nas figuras (3.1) e (3.2) podemos ver o comportamento da função $f(r)$ com constantes cosmológicas positivas e negativas, respectivamente. Fica evidente que a magnitude de Λ define o comportamento de $f(r)$ para grandes valores da coordenada r , enquanto que para pequenos valores de r o comportamento de $f(r)$ é dominado pela magnitude de da carga elétrica, dede que $|Q|/M \sim 10^{-1}$. Em ambos os casos, consideramos uma região dada por $r \sim 300M$, a qual delimita o domínio de nosso estudo. Podemos ainda observar que, nesta região, o efeito de Λ fica mais acentuado quando $\Lambda M^2 \sim 10^{-5}$. Como

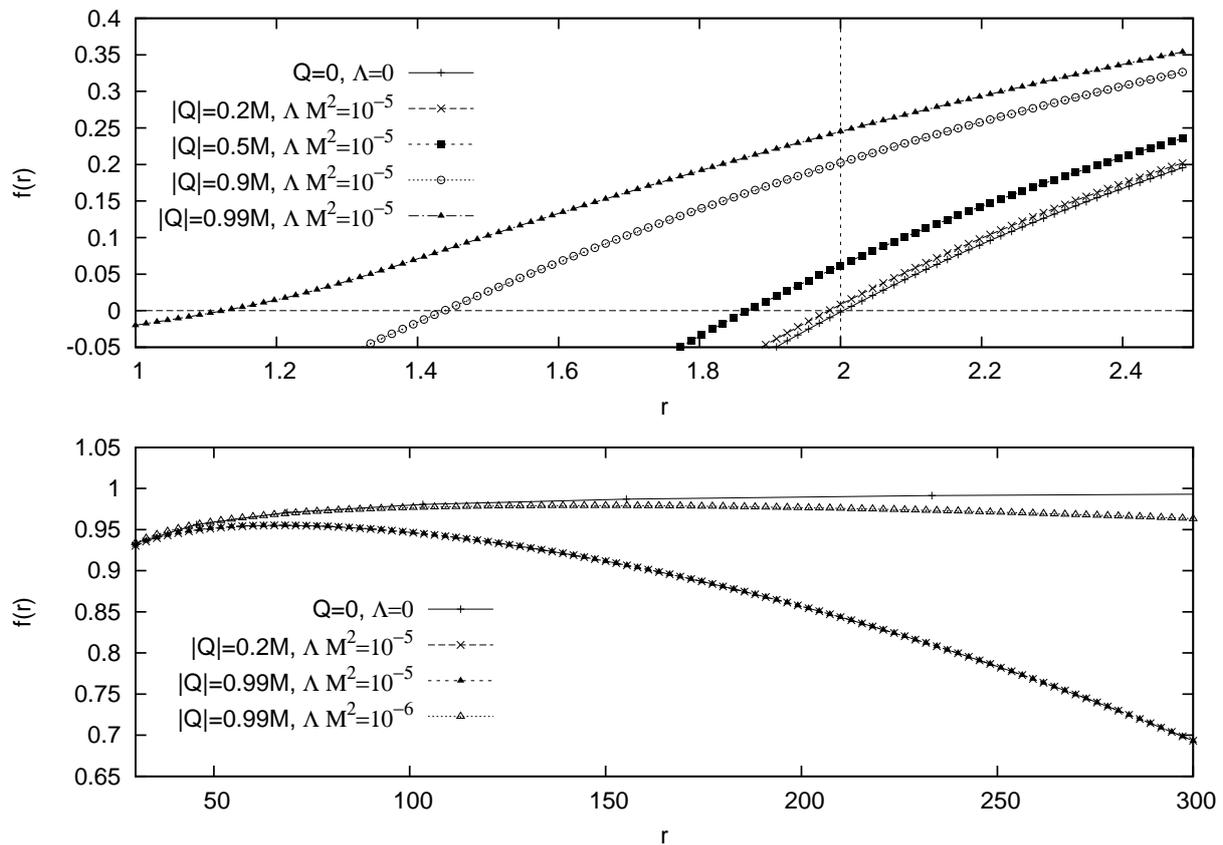


Figura 3.1: Comportamento da função $f(r)$ para diversos valores de Q . O efeito da constante cosmológica se acentua para valores da ordem de $\Lambda M^2 \sim 10^{-5}$. A linha vertical marca o raio de Schwarzschild e a linha horizontal marca o zero.

podemos ver nos gráficos das figuras (3.1) e (3.2), a distinção entre os casos de Sitter e Anti-de Sitter se dá para grandes valores de r . No caso AdS, não temos a presença do horizonte cosmológico, de forma que a função $f(r)$ cresce ilimitadamente.

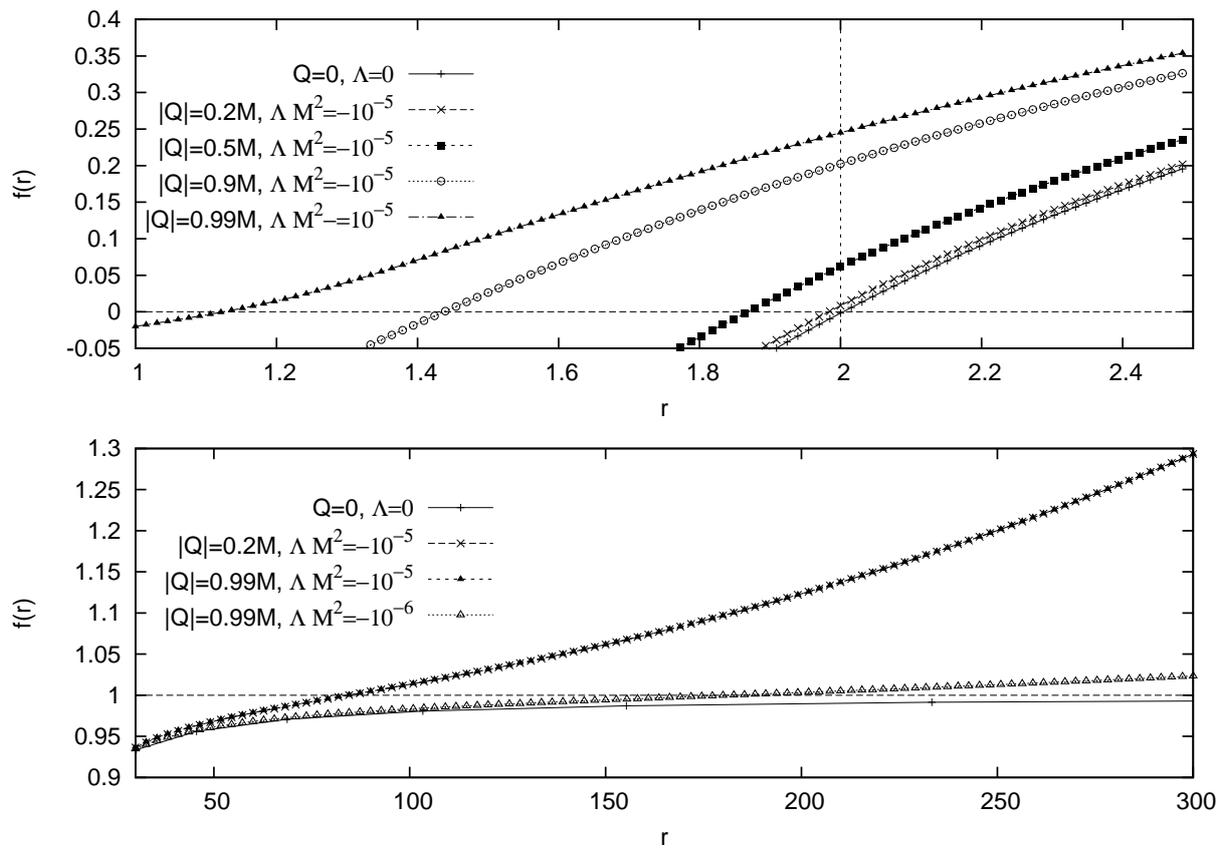


Figura 3.2: Comportamento da função $f(r)$ para diversos valores de Q . A distinção entre os casos dS e AdS se define para grandes valores da coordenada r . A linha vertical marca o raio de Schwarzschild e a linha horizontal marca o zero.

No capítulo que segue apresentamos os resultados obtidos para o escoamento potencial através de esferas rígidas e buracos negros representados pela métrica (3.24).

Capítulo 4

Soluções exatas

Neste capítulo apresentamos duas soluções exatas para a equação (1.43) com $\Gamma = 2$ (ou seja, $p = \rho$) e métrica (3.24) com $\Lambda = 0$. Com estas condições, a equação (1.43) pode ser expandida como

$$-\frac{1}{g(r)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 g(r) \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0, \quad (4.1)$$

em que

$$g(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}. \quad (4.2)$$

Vamos então resolver a equação (4.1) para dois casos. Primeiramente consideramos um fluido escoando através de uma esfera rígida. No segundo caso, consideramos o escoamento através de um buraco negro. Estes dois casos diferem um do outro basicamente pela condição sobre o contorno que representa a superfície do objeto astrofísico.

A ambos os casos, entretanto aplicamos a condição de que o escoamento é estacionário. Isto quer dizer que os gradientes de Φ não dependem do tempo, dado que estes se relacionam diretamente com as componentes da quadri-velocidade do fluido.

Assumimos ainda que a grandes distâncias o fluido tem movimento homogêneo e uniforme. Observando-se que as componentes da quadri-

velocidade U^μ são tais que $U_\infty^\mu = (U_\infty^0, \mathbf{U}_\infty) = \gamma(1, \mathbf{v}_\infty)$, temos¹

$$\Phi = x_\mu U^\mu = -U_\infty^0 t + \mathbf{U}_\infty \cdot \mathbf{x} \quad r \rightarrow \infty. \quad (4.3)$$

Considerando-se ainda, sem perda de generalidade, que a tri-velocidade assintótica do fluido aponta na direção do pólo norte das coordenadas esféricas, temos

$$\Phi = -U_\infty^0 t + U_\infty r \cos \theta \quad r \rightarrow \infty \quad (4.4)$$

Seguindo o procedimento de separação de variáveis, como proposto por Petrich *et al* [1], concluimos que as soluções para a equação (4.1) são da forma

$$\Phi = -U_\infty^0 t + \sum_{l,m} A_{lm} R_l(r) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (4.5)$$

em que Y_{lm} denota os harmônicos esféricos e a parte radial deve satisfazer a equação

$$\frac{d}{dr} \left[r^2 g(r) \frac{dR}{dr} \right] - l(l+1)R = 0. \quad (4.6)$$

Efetuando-se a mudança de variáveis

$$r \rightarrow \xi = \frac{r - M}{r_H - M}, \quad (4.7)$$

em que r_H designa a raiz $M + \sqrt{M^2 - Q^2}$ da quártica $r^2 g(r) = 0$, e, portanto, o horizonte de eventos; percebemos que a equação (4.6) é uma equação de Legendre para a variável ξ . Suas soluções são então da forma

$$R_l(\xi) = AP_l(\xi) + BQ_l(\xi), \quad (4.8)$$

em que A e B são coeficientes a serem determinados pelas condições de contorno e P_l e Q_l são, respectivamente, os polinômios de Legendre e as funções de Legendre de segunda espécie. A solução geral para a equação (4.1) em caso estacionário é então

$$\Phi = -U_\infty^0 t + \sum_{l,m} [A_{lm} P_l(\xi) + B_{lm} Q_l(\xi)] Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (4.9)$$

¹Lembremos aqui que no primeiro capítulo escalamos a entalpia em relação ao seu valor assintótico, vide equação (1.36).

Desta forma, obtemos para as componentes da quadri-velocidade

$$hU_t = -U_\infty^0; \quad (4.10)$$

$$hU_r = \frac{1}{r_H - M} \sum_{l,m} \left[A_{lm} \frac{dP_l(\xi)}{d\xi} + B_{lm} \frac{dQ_l(\xi)}{d\xi} \right] Y_{lm}(\theta, \phi); \quad (4.11)$$

$$hU_\theta = \sum_{l,m} [A_{lm} P_l(\xi) + B_{lm} Q_l(\xi)] \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \phi)}{\partial \theta}; \quad (4.12)$$

$$hU_\phi = \sum_{l,m} [A_{lm} P_l(\xi) + B_{lm} Q_l(\xi)] \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \phi)}{\partial \phi}; \quad (4.13)$$

Observemos neste ponto que a manutenção do símbolo h se dá por comodidade, dado que, de acordo com a equação (1.41), temos que $h \sim n$ para o caso em que $\Gamma = 2$, ou seja, neste caso, h representa a densidade do número de partículas. A partir da equação (1.42) obtemos

$$h^2 = \frac{1}{g(r)} (U_\infty^0)^2 - g(r) (hU_r)^2 - \frac{1}{r^2} (hU_\theta)^2 - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} (hU_\phi)^2. \quad (4.14)$$

Vamos agora obter soluções específicas para o escoamento através de esferas duras e buracos negros.

4.1 Buraco negro de Reissner-Nordström

A condição de contorno que indica que fluido escoar através de um buraco negro deve, necessariamente, estar associada ao fato de que a quantidade de fluido que entra no buraco negro não mais sai deste. Uma forma eficaz de expressar tal condição segue do argumento que encontramos na referência [1] e que reproduziremos aqui.

Dado que o fluido tem caminho livre para entrar no buraco negro sem, entretanto, sair deste não há porque esperarmos um acúmulo de fluido na região próxima ao horizonte de eventos. Entretanto, de acordo com a equação (4.14), o comportamento da entalpia é divergente conforme $r \rightarrow r_H$, ou, de forma equivalente, $\xi \rightarrow 1$. Verificamos isto observando o comportamento assintótico das funções $Q_l(\xi)$ e suas derivadas. Considerando-se apenas o

termo dominante, resta-nos

$$h^2 \rightarrow \frac{1}{g(r)} \left\{ (U_\infty^0)^2 - \left[\frac{(r_H - M)}{r_H^2} \sum_{l,m} B_{lm} Y_{lm} \right]^2 \right\} \quad r \rightarrow r_H, \quad (4.15)$$

Vemos que para cancelar a divergência da equação (4.15), todos os coeficientes B_{lm} , com exceção de B_{00} devem ser nulos, de forma que

$$B_{00} Y_{00}(\theta\phi) = \frac{r_H^2}{(r_H - M)} U_\infty^0. \quad (4.16)$$

A solução (4.9) assume então a forma

$$\Phi = -U_\infty^0 t + \frac{r_H^2 U_\infty^0}{2(r_H - M)} \ln \left(\frac{\xi + 1}{\xi - 1} \right) + \sum_{l,m} A_{lm} P_l(\xi) Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (4.17)$$

Os coeficientes A_{lm} são definidos pela condição que Φ satisfaz assintoticamente, dada pela equação (4.4). Para grandes valores de ξ , a contribuição logarítmica da solução dada pela equação (4.17) se anula, de forma que, assintoticamente

$$\sum_{l,m} A_{lm} P_l(\xi) Y_{lm}(\theta, \phi) \rightarrow U_\infty \cos \theta. \quad (4.18)$$

Como o limite dado pela equação (4.18) não apresenta dependência em ϕ , temos que todos os A_{lm} são nulos exceto, possivelmente, A_{00} e A_{10} . Além disso, dado que Y_{00} não apresenta dependência em θ , sobra somente o coeficiente A_{10} , a ser então determinado pelo limite

$$A_{10} P_1(\xi) Y_{10}(\theta, \phi) \rightarrow U_\infty \cos \theta, \quad (4.19)$$

de onde concluímos que $A_{10} = \sqrt{4\pi/3}(r_H - M)U_\infty$.

Obtemos então a solução

$$\Phi = -U_\infty^0 t + \frac{r_H^2}{2(r_H - M)} U_\infty^0 \ln \left(\frac{\xi + 1}{\xi - 1} \right) + (r_H - M) U_\infty \xi \cos \theta, \quad (4.20)$$

ou, em termos da coordenada radial

$$\Phi = -U_\infty^0 t + \frac{r_H^2 U_\infty^0}{2(r_H - M)} \ln \left(\frac{r - r_i}{r - r_H} \right) + U_\infty (r - M) \cos \theta, \quad (4.21)$$

em que r_i designa a raiz $M - \sqrt{M^2 - Q^2}$ da equação $r^2 g(r) = 0$.

A partir da solução (4.21) calculamos então as componentes da quadri-velocidade do fluido

$$hU_t = -U_\infty^0 \quad (4.22)$$

$$hU_r = -\frac{r_H^2 U_\infty^0}{r^2 g(r)} + U_\infty \cos \theta \quad (4\text{-velocidade}) \quad (4.23)$$

$$hU_\theta = -U_\infty (r - M) \sin \theta \quad (4.24)$$

$$hU_\phi = 0 \quad (4.25)$$

Percebe-se ainda que há a presença do ponto de estagnação, no qual o fluido apresenta velocidade radial nula em relação ao buraco negro. Da equação (4.23) vemos que tal ponto se encontra na posição angular $\theta = 0$ e coordenada radial dada pela solução da equação

$$r_S^2 g(r) - \frac{r_H^2}{v_\infty} = 0, \quad (4.26)$$

em que $U_\infty/U_\infty^0 = v_\infty$. Obtemos então

$$r_S = M \left[1 + \sqrt{1 - \frac{1}{M^2} \left(Q^2 - \frac{r_H^2}{v_\infty} \right)} \right] \quad (\text{Ponto de estagnação}). \quad (4.27)$$

Uma coisa que podemos perguntar com relação à posição do ponto de estagnação é se, em alguma circunstância, a equação (4.27) prevê para este um valor extremo como, por exemplo, interno ao buraco negro. Observando-se que $r_H = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$, podemos reescrever a solução (4.27) na forma

$$r_S = r_H + \sqrt{(M^2 - Q^2) + \frac{r_H^2}{v_\infty}} - \sqrt{(M^2 - Q^2)}, \quad (4.28)$$

de onde concluímos que o ponto de estagnação encontra-se sempre fora do buraco negro.

Para finalizar, calculamos a taxa de acreção de fluido para dentro do buraco negro. Integrando-se a equação de continuidade (1.18) sobre um volume V encerrado por uma superfície S e aplicando-se o teorema de Gauss sobre a parcela espacial, obtemos

$$\partial_t \int nU^0 \sqrt{-g} d^3x = - \int_S nU^i \sqrt{-g} dS_i, \quad (4.29)$$

ou ainda

$$\dot{N} = - \int_S nU^i \sqrt{-g} dS_i. \quad (4.30)$$

Observando-se que, de acordo com as equações (1.41) e (1.36), temos que $nU_\mu = \kappa h^{\frac{2-\Gamma}{\Gamma-1}} \partial_\mu \Phi$. Se ainda a superfície S for a esfera bidimensional que encerra o buraco negro, então a taxa de acreção de fluido para dentro deste é simplesmente, para $\Gamma = 2$

$$\begin{aligned} \dot{N} &= - \int_S g^{rr} (nU_r) \sqrt{-g} d\Omega \\ &= -\kappa \int_S g^{rr} \partial_r \Phi \sqrt{-g} d\Omega. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Integrando-se diretamente, obtemos

$$\dot{N} = 4\pi\kappa U_\infty^0 r_H^2 \quad (\text{Taxa de acreção}). \quad (4.32)$$

Estes resultados, embora derivados de forma independente, conferem com resultados recentes da literatura [23].

4.2 Esfera rígida de Reissner-Nordström

A condição de contorno sobre a superfície de uma esfera rígida é dada pela exigência de que o fluido não entre na esfera. Matematicamente, impomos sobre a componente radial da quadri-velocidade a condição

$$U^r = g^{rr} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad r = R, \quad (4.33)$$

em que $r = R$ indica a superfície da esfera.

Aplicando-se esta condição sobre a equação (4.9), concluímos que os coeficientes A_{lm} e B_{lm} se relacionam por

$$B_{lm} = -A_{lm} \frac{P'_l(\xi_R)}{Q'_l(\xi_R)}, \quad (4.34)$$

em que $\xi_R = (R - M)/(r_H - M)$ e a linha (') denota diferenciação em relação a coordenada ξ . A condição assintótica, já analisada no caso do buraco negro, implica em todos os coeficientes A_{lm} serem nulos, com exceção de A_{10} , que é determinado pela equação (4.19). Desta forma, a solução da equação (4.9) para escoamento através de uma esfera rígida é

$$\Phi = -U_\infty^0 t + U_\infty (r_H - M) \cos \theta \left[\xi - \frac{Q_1(\xi)}{Q'_1(\xi_R)} \right], \quad (4.35)$$

sendo $Q_1(\xi)$ dado pela expressão usual

$$Q_1(\xi) = \frac{\xi}{2} \ln \left(\frac{\xi + 1}{\xi - 1} \right) - 1. \quad (4.36)$$

Para as componentes da quadri-velocidade, obtemos então

$$hU_t = -U_\infty^0 \quad (4.37)$$

$$hU_r = U_\infty \cos \theta \left[1 - \frac{Q'_1(\xi)}{Q'_1(\xi_R)} \right] \quad (4\text{-velocidade}) \quad (4.38)$$

$$hU_\theta = -U_\infty (r_H - M) \sin \theta \left[\xi - \frac{Q_1(\xi)}{Q'_1(\xi_R)} \right] \quad (4.39)$$

$$hU_\phi = 0. \quad (4.40)$$

4.3 Análise qualitativa do efeito da carga elétrica sobre as linhas de corrente, densidade e taxa de acreção

Como mencionamos anteriormente, uma das formas adotadas para a análise do escoamento é por meio das suas linhas de corrente. Definimos então tais linhas como sendo as curvas $r(\theta)$ que satisfazem a equação

$$\frac{dr}{U^r} = \frac{d\theta}{U^\theta} \quad (4.41)$$

Na figura (4.1) temos a representação do escoamento para dois valores de Q/M em comparação com o caso Schwarzschild. Podemos ver que o padrão do escoamento é sempre o mesmo. A principal diferença, entretanto, se dá em relação aos contornos de isodensidades.

Na figura (4.3) encontramos a razão entre as taxas de acreção para o caso Reissner-Nordström em relação ao caso Schwarzschild para diversos valores de $|Q|/M$. Vemos que as taxas de acreção são basicamente iguais a menos que Q seja comparado a M na razão $|Q|/M \sim 10^{-1}$.

Como no caso do escoamento através de buraco negro, o efeito da carga elétrica no escoamento potencial de fluido duro através de uma esfera rígida de Reissner-Nordström se manifesta de forma mais expressiva nos contornos de isodensidade. Como se pode ver na figura (4.2), o aumento da densidade na região mais próxima ao objeto varia significativamente conforme $|Q|$ se equipara à M .

Comparando-se as figuras (4.1) e (4.2) podemos perceber que o comportamento angular da densidade não segue o mesmo padrão para esferas rígidas e buracos negros. Na figura (4.4) temos um perfil angular da densidade na região mais próxima ao objeto astrofísico, no qual podemos ver explicitamente que, no caso do buraco negro, esta não é simétrica em relação à $\theta = \pi/2$. Esta assimetria implica em os contornos de isodensidade se apresentarem deslocados em relação ao centro do buraco negro, como vemos nos gráficos da figura (4.1). Pelo fato de a variação angular ser muito pequena, da ordem de 2% em relação à $\theta = \pi/2$, os contornos de isodensidade parecem circunferências.

Nas figuras (4.5) e (4.6) temos gráficos onde se pode ver que, no caso do escoamento através de esferas rígidas o efeito da carga elétrica é o de diminuir a densidade do número de partículas na região mais próxima ao redor do objeto astrofísico. Já no caso do buraco negro, vemos que o efeito da carga é o de aumentar a densidade em sua proximidade. Podemos associar este efeito ao fato de que o aumento de carga elétrica diminui o horizonte de eventos, causando um maior acúmulo de fluido que acreta.

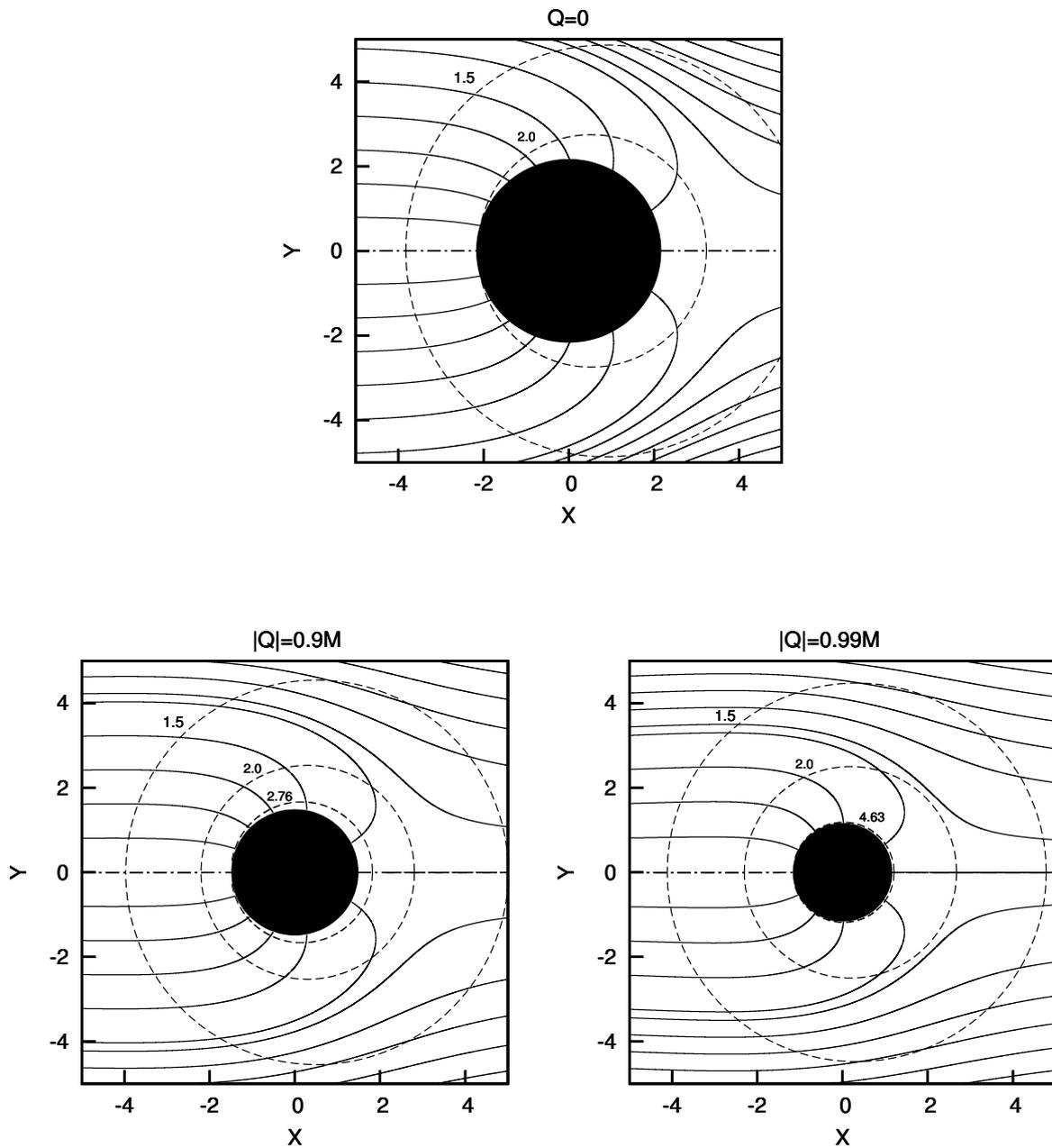


Figura 4.1: Escoamento potencial através de um buraco negro de Reissner-Nordström com velocidade assintótica $v_\infty = 0.6$. Os contornos tracejados indicam isodensidades. Em todos os casos o escoamento se dá da esquerda para a direita. As coordenadas retangulares X e Y se definem por $X = r \cos \theta$ e $Y = r \sin \theta$, sendo r dado em unidades de M .

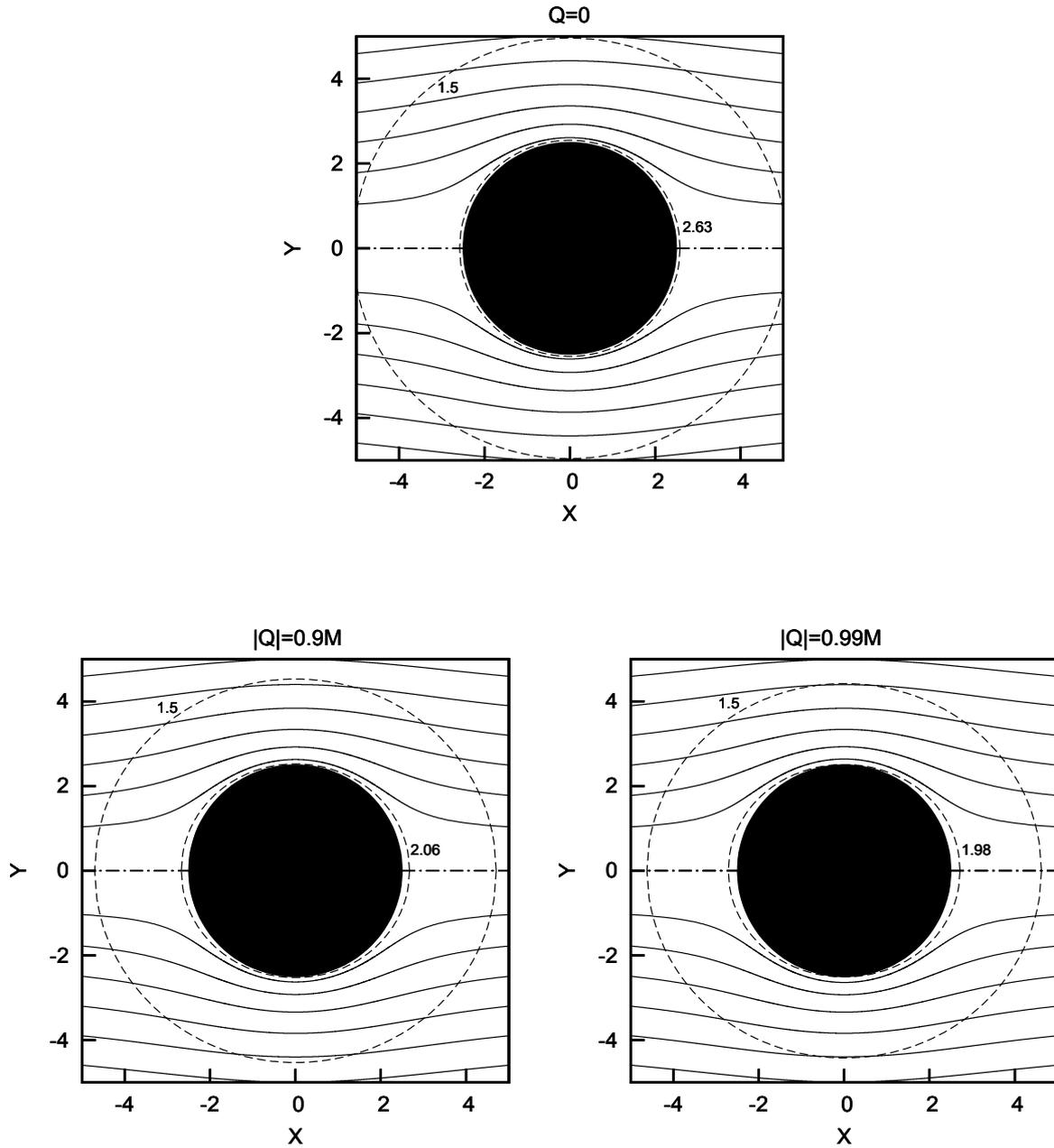


Figura 4.2: Escoamento potencial através de uma esfera rígida de Reissner-Nordström com raio $R = 2.5M$. A velocidade assintótica do fluido é $v_\infty = 0.6$. Os contornos tracejados indicam isodensidades. Em todos os casos o escoamento se dá da esquerda para a direita. As coordenadas retangulares X e Y se definem como na figura (4.1).

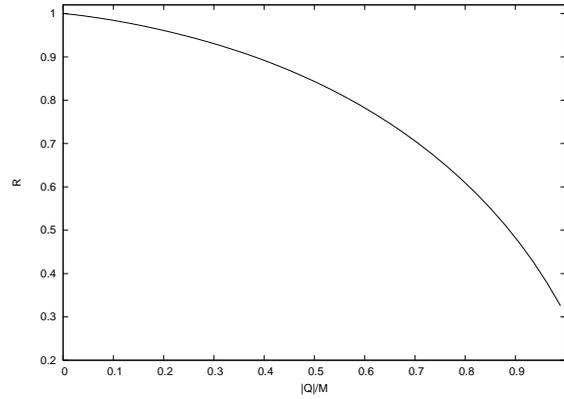


Figura 4.3: Taxa de acreção de fluido para dentro de um buraco negro de Reissner-Nordström em relação ao caso Schwarzschild: $R = \dot{N}_{RN}/\dot{N}_S$. Velocidade assintótica $v_\infty = 0.6$.

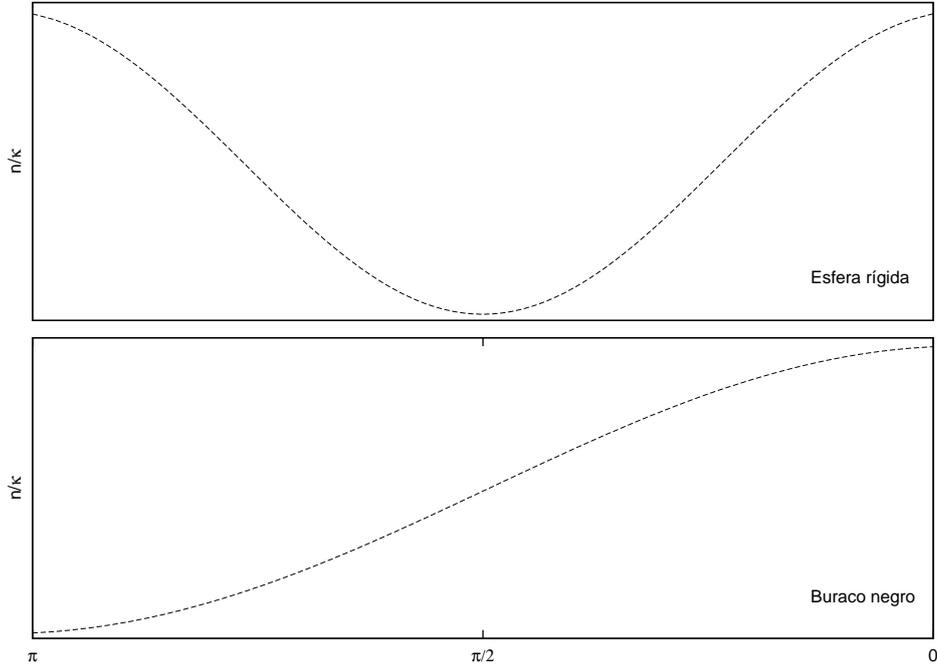


Figura 4.4: Comparação entre os perfis angulares da densidade na região mais próxima ao objeto ($r = R$ para a esfera rígida e $r \sim r_H$ para o buraco negro) para os casos de escoamento potencial através de uma esfera rígida e um buraco negro de Reissner-Nordström respectivamente. A densidade não é simétrica em relação à $\theta = \pi/2$ para buracos negros.

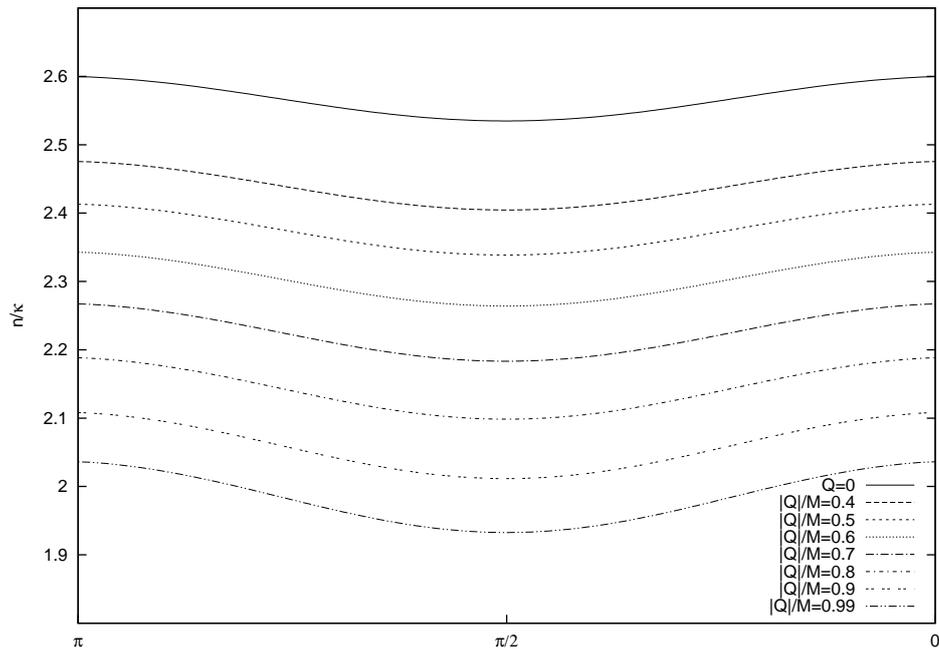


Figura 4.5: Influência da carga elétrica sobre a densidade na região mais próxima ao redor de esferas rígidas ($r = R$). O aumento de carga diminui a densidade de fluido nas vizinhanças da esfera.

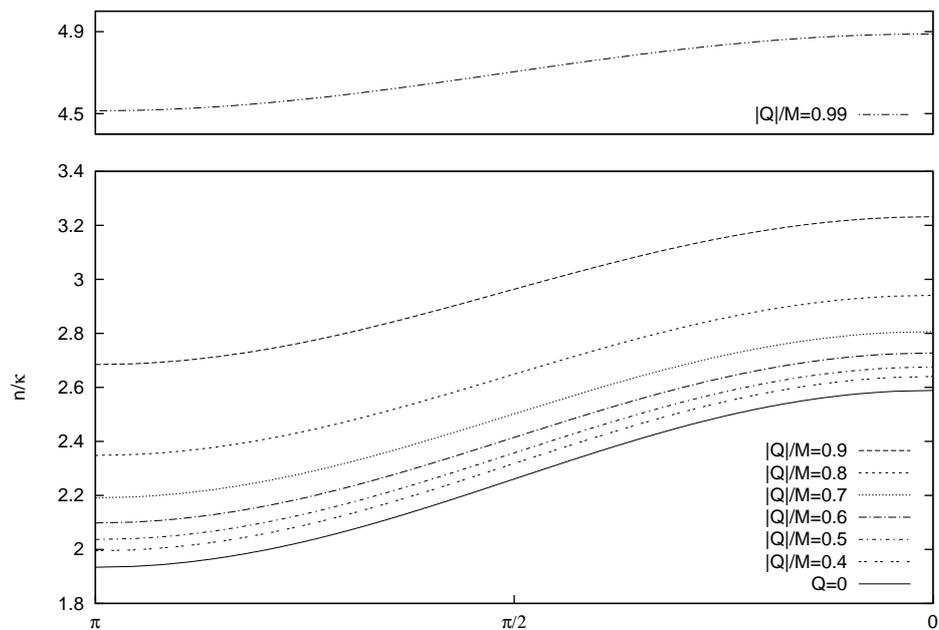


Figura 4.6: Influência da carga elétrica sobre a densidade na região mais próxima ao redor de buracos negros ($r \sim r_H$). Neste caso, o aumento de carga aumenta a densidade sem, no entanto, influenciar no perfil angular desta.

Capítulo 5

Resultados numéricos

Como discutimos no primeiro e segundo capítulos, nossa metodologia para obtenção de soluções para a equação (1.43) é uma abordagem numérica; cuja descrição geral encontra-se no segundo capítulo. Inicialmente, efetuamos a transformação de variáveis

$$r \rightarrow \xi = \frac{r - M}{r_H - M} \qquad \theta \rightarrow \mu = \cos \theta, \qquad (5.1)$$

de forma que as novas variáveis definam um sistema retangular. Podemos assim expandir a equação (1.43) com a métrica dada na equação (3.24) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} & \partial_\xi [r^2 f(r) \partial_\xi \Psi] + (r_H - M)^2 \partial_\mu [(1 - \mu^2) \partial_\mu \Psi] + \\ & + r^2 f(r) \left(\frac{2 - \Gamma}{\Gamma - 1} \right) \partial_\xi \Psi \partial_\xi \ln h + (r_H - M)^2 (1 - \mu^2) \left(\frac{2 - \Gamma}{\Gamma - 1} \right) \partial_\mu \Psi \partial_\mu \ln h = 0, \end{aligned} \qquad (5.2)$$

sendo que aqui já consideramos as condições de estacionariedade e simetria esférica do problema e, por comodidade, mantemos na equação $r = r(\xi)$, definido implicitamente pelas transformações (5.1).

A parte linear da equação (5.2), dada em sua primeira linha e à qual esta se resume quando $\Gamma = 2$ e que é portanto, o alvo de nosso estudo, pode então ser discretizada seguindo-se o procedimento apresentado no segundo capítulo. Associando-se então à variável ξ o índice i e à variável μ o índice j , obtemos as equações de diferenças finitas, válidas para pontos internos ao domínio

$$C_W \Phi_W + C_S \Phi_S + C_P \Phi_P + C_N \Phi_N + C_E \Phi_E = Q_P, \qquad (5.3)$$

com os coeficientes dados por

$$C_W = \frac{[r^2 f(r)]_{i-1/2,j}}{(\Delta\xi)^2} \quad (5.4)$$

$$C_E = \frac{[r^2 f(r)]_{i+1/2,j}}{(\Delta\xi)^2} \quad (5.5)$$

$$C_S = (r_H - M)^2 \frac{(1 - \mu^2)_{i,j-1/2}}{(\Delta\mu)^2} \quad (5.6)$$

$$C_N = (r_H - M)^2 \frac{(1 - \mu^2)_{i,j+1/2}}{(\Delta\mu)^2} \quad (5.7)$$

$$C_P = -(C_W + C_S + C_N + C_E). \quad (5.8)$$

A discretização da condição de escoamento sobre uma esfera rígida, dada neste caso por $\partial_\xi \Phi = 0$, é facilmente implementada via EDT e dispensa mais comentários. Por outro lado, a aplicação da condição de escoamento sobre buraco negro requer mais detalhes, como segue.

Como no caso analítico, a condição para escoamento sobre buraco negro é dada pelo cancelamento da divergência da entalpia sobre o horizonte de eventos, ocasionada pela presença do termo $f^{-1}(r)(U_\infty^0)^2$ na equação (4.14). Explicitamente

$$h^2 = f^{-1}(r)(U_\infty^0)^2 - f(r) \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right)^2. \quad (5.9)$$

Para isso, generalizamos para o presente caso o o desenvolvimento proposto por Abrahams e Shapiro [3]. Inicialmente observamos que, caso a quártica $r^2 f(r)$ tenha $r = r_H$ como raiz, o que de fato consideramos como verdade para nosso estudo (vide terceiro capítulo), então $f(r)$ pode ser expressa na forma

$$f(r) = -\frac{\Lambda}{3r^2} (r - r_H) \prod_k (r - r_k), \quad (5.10)$$

em que r_k denota as demais raízes. Isto quer dizer então que a divergência da entalpia pode ser anulada se $f(r)\partial_r\Phi$ puder ser expandido para $r \rightarrow r_H$ suavemente na forma

$$f(r) \frac{\partial\Phi}{\partial r} = -U_\infty^0 + a_1(r - r_H) + a_2(r - r_H)^2 + \dots \quad (r \rightarrow r_H) \quad (5.11)$$

em que a_1, a_2, \dots são coeficientes que podem ser tratados como constantes

para nosso propósito. Desconsiderando-se termos de ordem quadrática e superiores, podemos então finalmente obter uma forma tratável para a condição de contorno sobre o horizonte de eventos

$$f(r) \frac{\partial a_1}{\partial r} = f(r) \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{f(r) \partial_r \Phi + U_\infty^0}{(r - r_H)} \right] = 0. \quad (5.12)$$

A discretização da condição (5.12) em termos da variável ξ resulta então em uma equação algébrica da forma

$$C_W \Phi_W + C_P \Phi_P + C_E \Phi_E = Q_P, \quad (5.13)$$

a ser resolvida para C_W sobre o horizonte de eventos e com coeficientes

$$C_W = \left[\frac{f(r)}{(r - r_H)} \right]_{i-1/2,j} \quad (5.14)$$

$$C_E = \left[\frac{f(r)}{(r - r_H)} \right]_{i+1/2,j} \quad (5.15)$$

$$C_P = -(C_W + C_E) \quad (5.16)$$

$$Q_P = (\Delta\xi)^2 \left(\frac{r_H - M}{r - r_H} \right)_{i,j}^2 U_\infty^0. \quad (5.17)$$

Em relação aos casos já estudados de escoamento potencial de fluidos duros através de objetos dados pelas métricas de Schwarzschild e Reissner-Nordström, obtemos com esta abordagem computacional informações novas, a respeito do efeito da presença de constante cosmológica. Como no caso das soluções exatas, as ferramentas de análise que utilizamos são o comportamento das linhas de corrente e da densidade, além da taxa de acreção no caso do escoamento através de um buraco negro.

Um fato que não mencionamos até o momento é que a equação para obtenção das linhas de corrente (4.41) é resolvida através de integração numérica. O método de nossa escolha é o de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4), próprio para resolver problemas de valor inicial da forma

$$\begin{aligned} dy/dx &= f(y, x) \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned}$$

Tratando de soluções exatas sabemos analiticamente $f(x, y)$, mais especificamente $(g^{rr}U_r)/(g^{\theta\theta}U_\theta)$. No caso das soluções numéricas, entretanto, sabemos

o valor de Φ e, portanto, os de suas derivadas, somente nos nós da malha numérica. Isto requer então a etapa adicional constituída de um processo de interpolação para se avaliar estes valores para quaisquer coordenadas. Para tal tarefa escolhemos o algoritmo de interpolação bilinear [14].

Para calcularmos a taxa de acreção, resolvemos na malha numérica a equação $\dot{N} = - \int g^{rr}(nU_r)\sqrt{-g}d\Omega$, que neste caso assume a forma

$$\dot{N} = -2\pi\kappa(r_H - M) \int_{-1}^1 h^{\frac{2-\Gamma}{\Gamma-1}}(\xi_R, \mu) r^2(\xi_R) g^{\xi\xi}(\xi_R) \partial_\xi \Phi|_{\xi=\xi_R} d\mu, \quad (5.18)$$

sendo o fator multiplicativo 2π devido ao fato de termos usado a simetria axial da acreção, ξ_R designa uma superfície que encontra-se o mais próximo possível do horizonte de eventos e o fator $(r_H - M)$ surge de $\sqrt{-g} = r^2(\xi)(r_H - M)$. Para $\Gamma = 2$, o termo contendo h desaparece do integrando, de forma que a equação (5.18) resume-se neste caso a

$$\dot{N} = -2\pi\kappa(r_H - M) \int_{-1}^1 r^2(\xi_R) g^{\xi\xi}(\xi_R) \partial_\xi \Phi|_{\xi=\xi_R} d\mu. \quad (5.19)$$

Como havíamos previsto no terceiro capítulo, a influência de constante cosmológica passa a ser mais evidente quando esta é tão grande quanto $\Lambda M^2 \sim 10^{-5}$. No que diz respeito às linhas de corrente, os efeitos de Λ não são visíveis graficamente na região de interesse.

No gráfico da figura (5.1) podemos ver que o efeito de uma constante cosmológica positiva é o de aumentar a densidade do número de partículas do fluido na região de incidência deste sobre o buraco negro e diminuir a densidade na região oposta, sendo que, para valores negativos da constante cosmológica ocorre exatamente o oposto. Podemos concluir disso que os contornos de isodensidade em gráficos como os da figura (5.3) deslocam-se para a esquerda no caso de uma constante cosmológica positiva expressiva e para a direita, caso tenhamos uma constante cosmológica negativa. Qualquer que seja o sinal de Λ , esta tende a influenciar muito pouco sobre a taxa de acreção, como podemos ver na figura (5.2). O resultado que surge, todavia, é o de que uma constante cosmológica positiva tende a aumentar a taxa de acreção, enquanto que uma constante cosmológica negativa atua no sentido de diminuir a taxa de acreção de fluido para dentro de buracos negros.

Já o efeito da presença de constante cosmológica positiva no escoamento

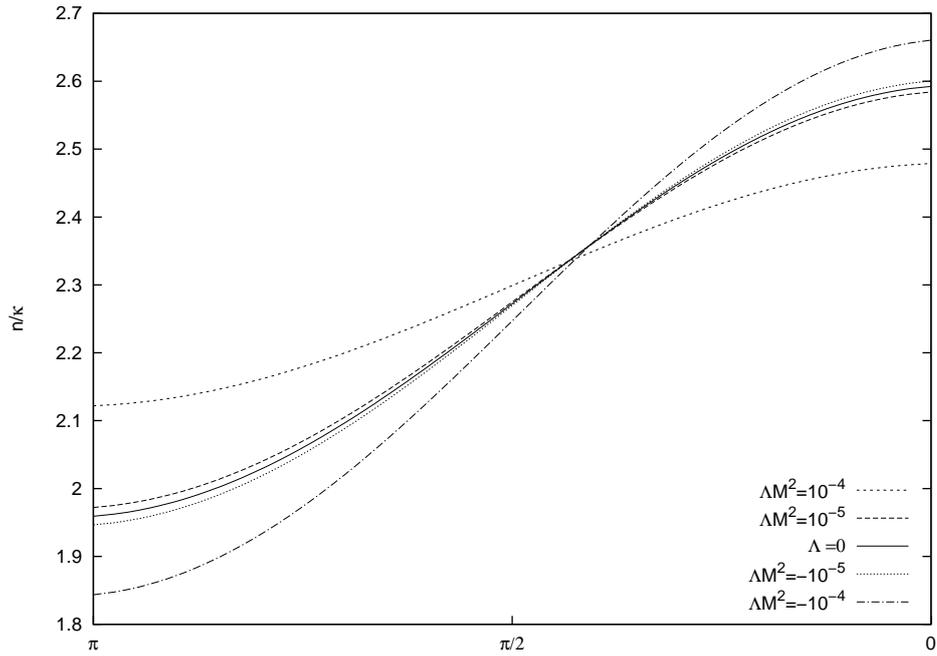


Figura 5.1: Influência da constante cosmológica sobre a densidade na região mais próxima ao redor de buracos negros ($r \sim r_H$).

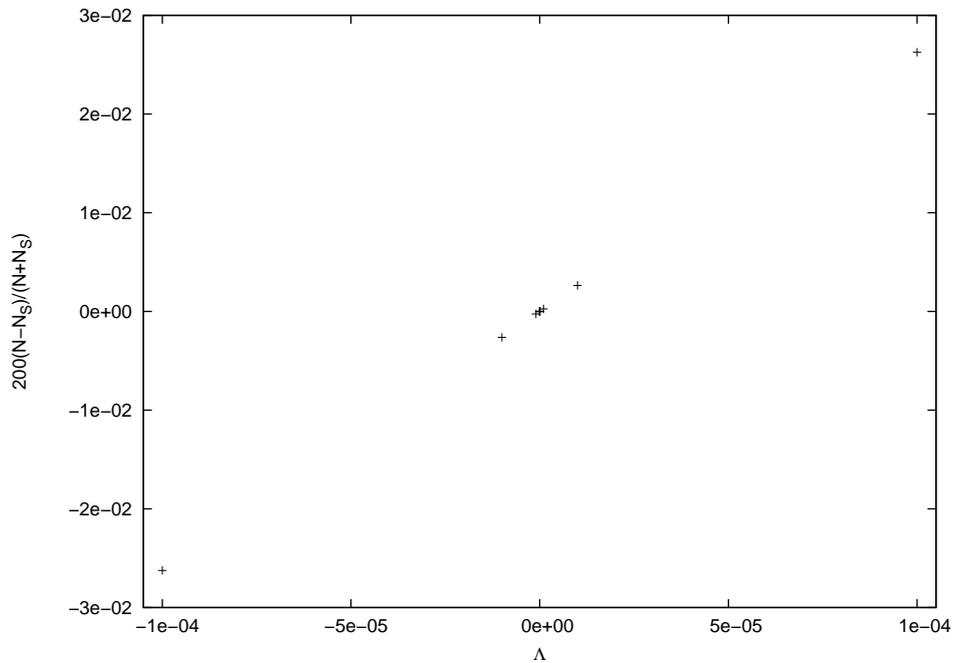


Figura 5.2: Influência da constante cosmológica Λ sobre a taxa de acreção de fluido para dentro do buraco negro. Os valores são medidos fracionalmente em relação ao caso Schwarzschild.

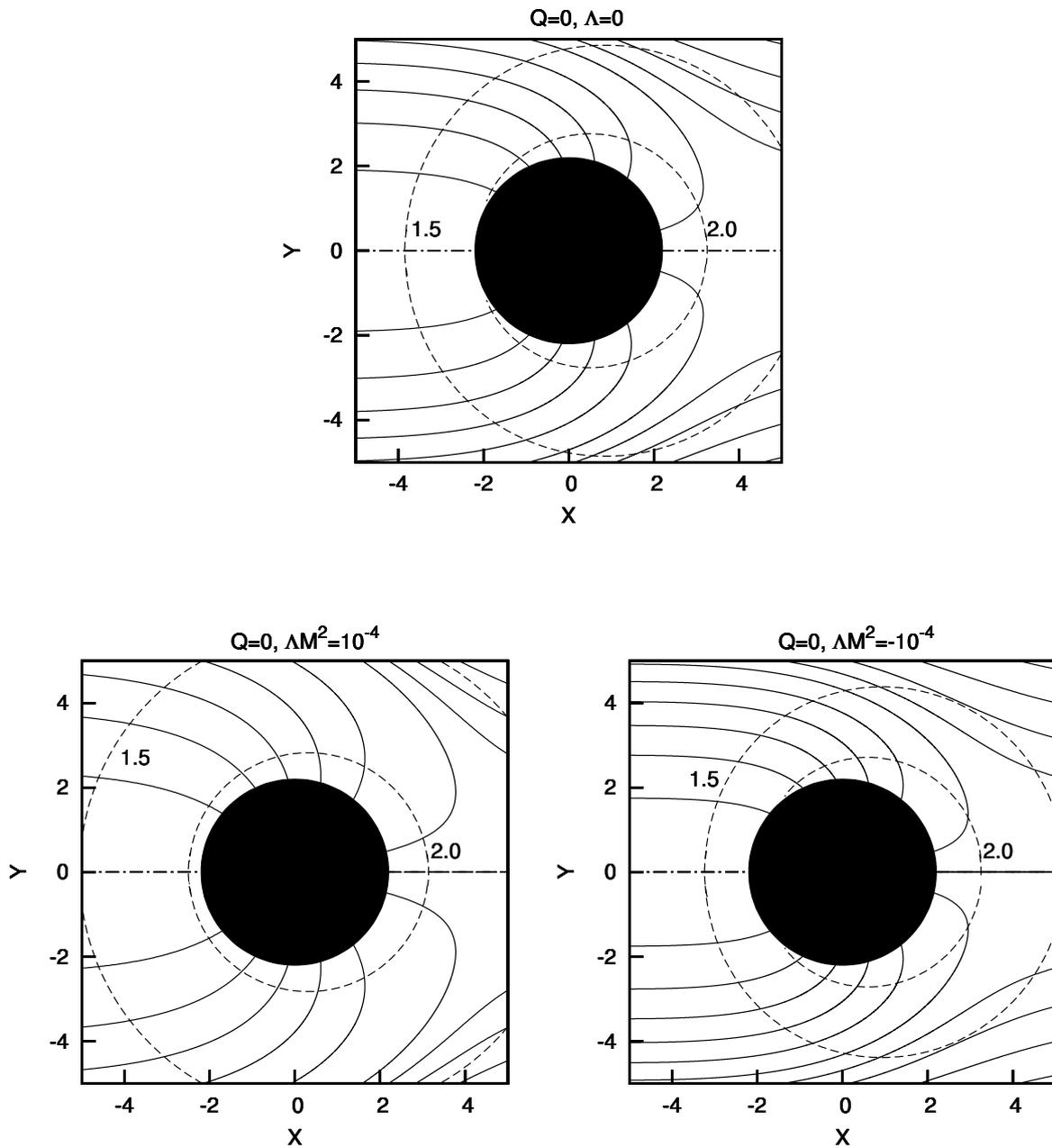


Figura 5.3: Escoamento potencial através buracos negros de Reissner-Nordström com constante cosmológica e velocidade assintótica $v_\infty = 0.6$. Os contornos tracejados indicam isodensidades. Em todos os casos o escoamento se dá da esquerda para a direita. As coordenadas retangulares X e Y se definem como na figura (4.1).

através de esferas rígidas é o de aumentar a densidade do número de partículas na região mais próxima ao redor do objeto, sendo o efeito de constante cosmológica negativa neste caso o de diminuir a densidade. Para quaisquer valor de Λ , o efeito é mais acentuado na região $\theta = \pi/2$, como podemos ver na figura (5.4). Este padrão indica que os contornos de densidade tornam-se mais ou menos oblatos, caso Λ seja pronunciadamente positiva ou negativa, respectivamente. Em gráficos como os da figura (5.5), entretanto, constatamos que visualmente o efeito é principalmente o de causar expansão ou contração nos contornos de isodensidades.

Por fim, podemos visualizar nos gráficos das figuras (5.6) a (5.9) como se dá a concorrência entre a carga elétrica e a constante cosmológica na influência sobre o padrão angular da densidade do número de partículas ao redor de buracos negros e esferas rígidas. Se considerarmos o caso Schwarzschild como marco padrão, podemos concluir que, para o caso de buraco negro, se Λ for negativamente pronunciada é preciso uma maior quantidade de carga elétrica para que a densidade aumente como um todo com relação aos casos em que a constante cosmológica é positiva. No caso do escoamento através de esferas rígidas, podemos ainda verificar que o aumento de carga elétrica em contraste com o aumento da magnitude de uma constante cosmológica positiva ocasiona, inicialmente, uma diminuição na densidade do número de partículas que se acentua nas regiões $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, dado que Λ , neste caso, tende a aumentar a densidade sobretudo na região $\theta = \pi/2$. No caso em que contrastamos um aumento de carga elétrica com um aumento na magnitude de uma constante cosmológica negativa, percebemos que ambos os parâmetros atuam no mesmo sentido, o de diminuir a densidade. Vemos ainda, contrastando-se as figuras (5.8), (5.9) e (4.5) que a alteração provocada por Λ sobre o padrão se mantém mesmo para valores maiores da carga elétrica.

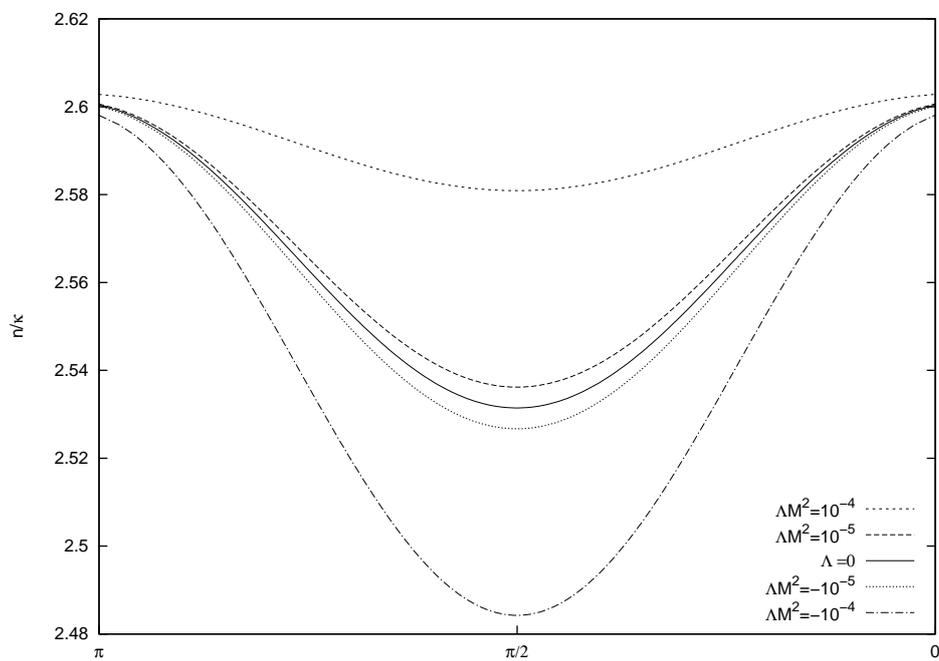


Figura 5.4: Influência da constante cosmológica sobre a densidade na região mais próxima ao redor de esferas rígidas ($r = R$).

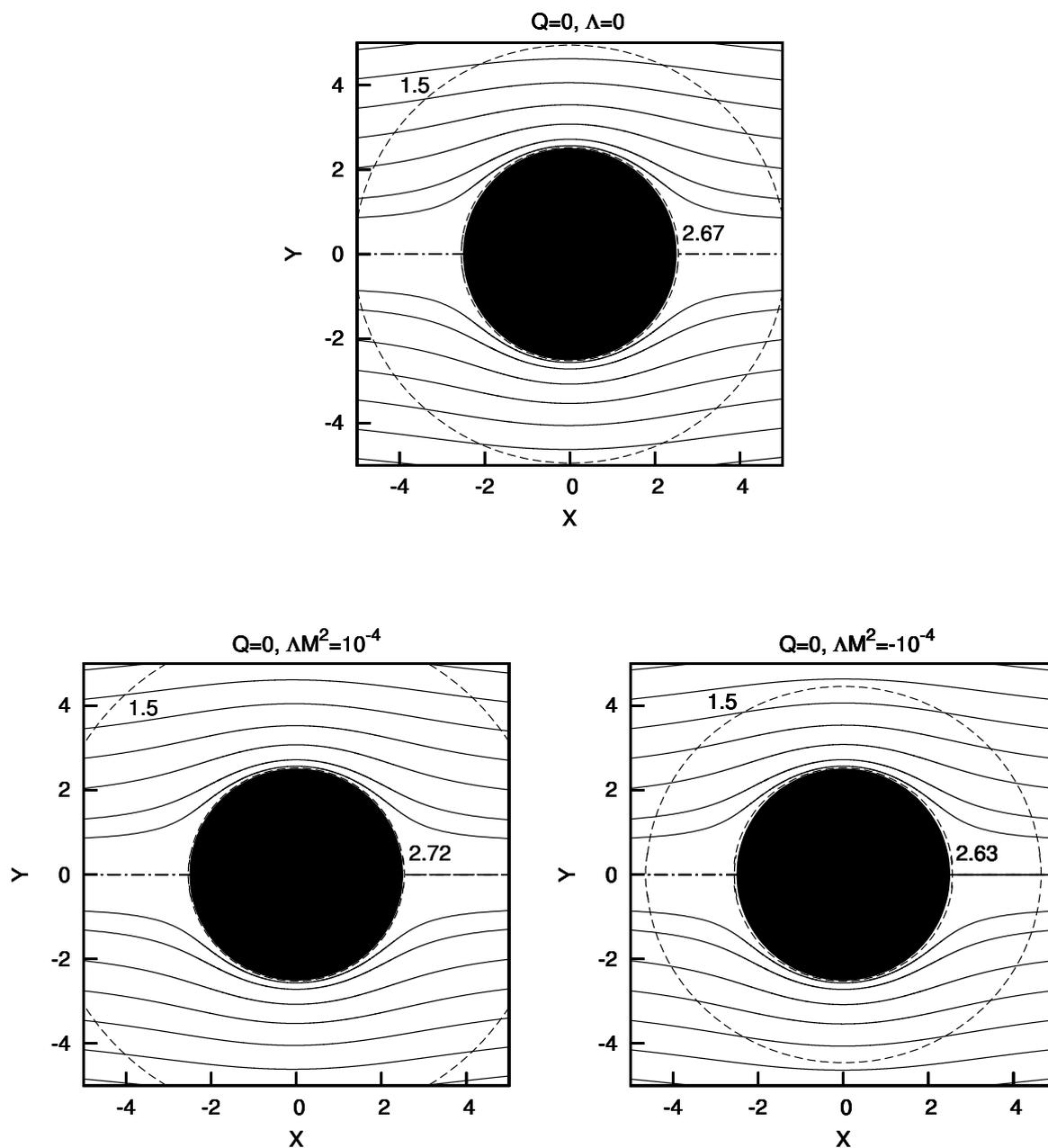


Figura 5.5: Escoamento potencial através de esferas rígidas de Reissner-Nordström com constante cosmológica e raio $R = 2.5M$. A velocidade assintótica do fluido é $v_\infty = 0.6$. Os contornos tracejados indicam isodensidades. Em todos os casos o escoamento se dá da esquerda para a direita. As coordenadas retangulares X e Y se definem como na figura (4.1).

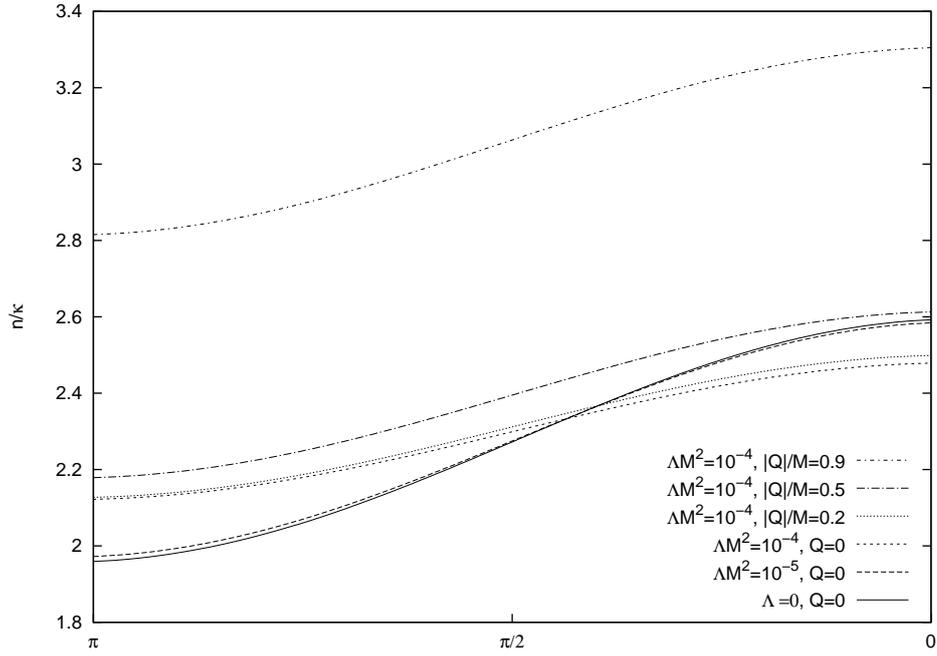


Figura 5.6: Concorrência entre carga elétrica e constante cosmológica positiva na influência sobre o padrão da densidade do número de partículas ao redor de buracos negros ($r \sim r_H$).

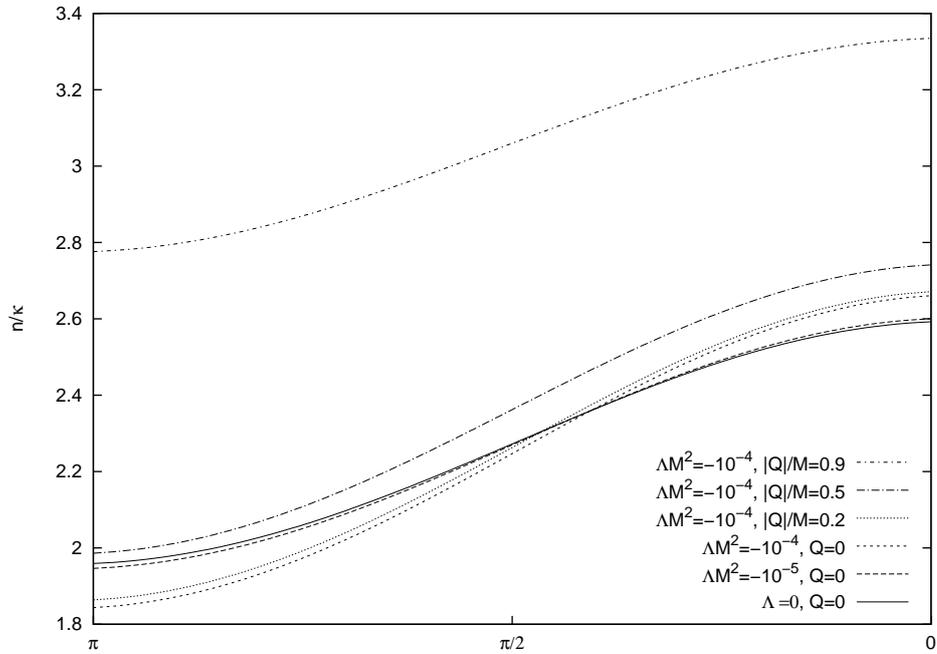


Figura 5.7: Concorrência entre carga elétrica e constante cosmológica negativa na influência sobre o padrão da densidade do número de partículas ao redor de buracos negros ($r \sim r_H$).

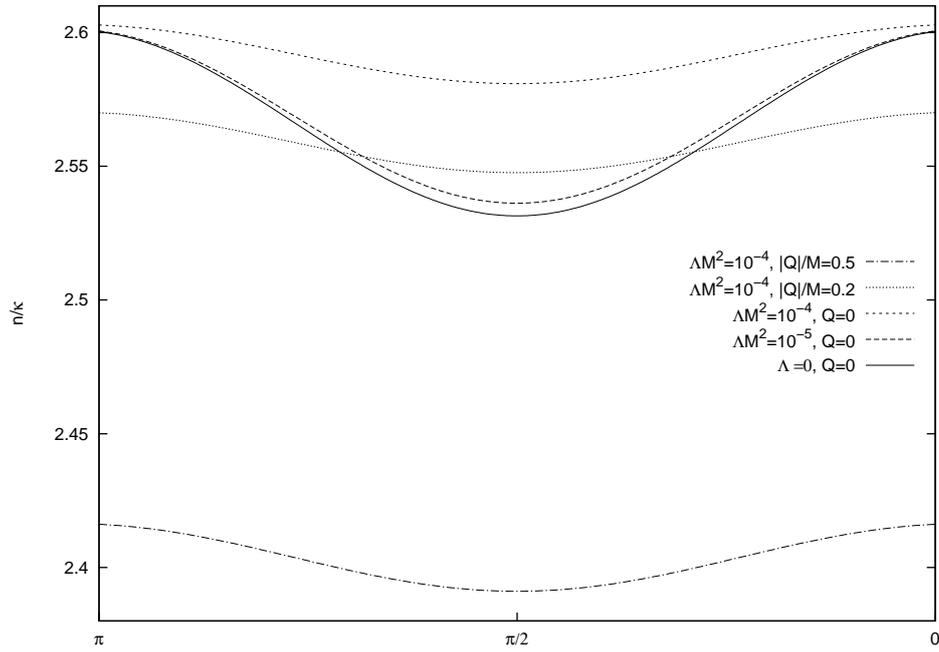


Figura 5.8: Concorrência entre carga elétrica e constante cosmológica positiva na influência sobre o padrão da densidade do número de partículas ao redor de esferas rígidas ($r = R$).

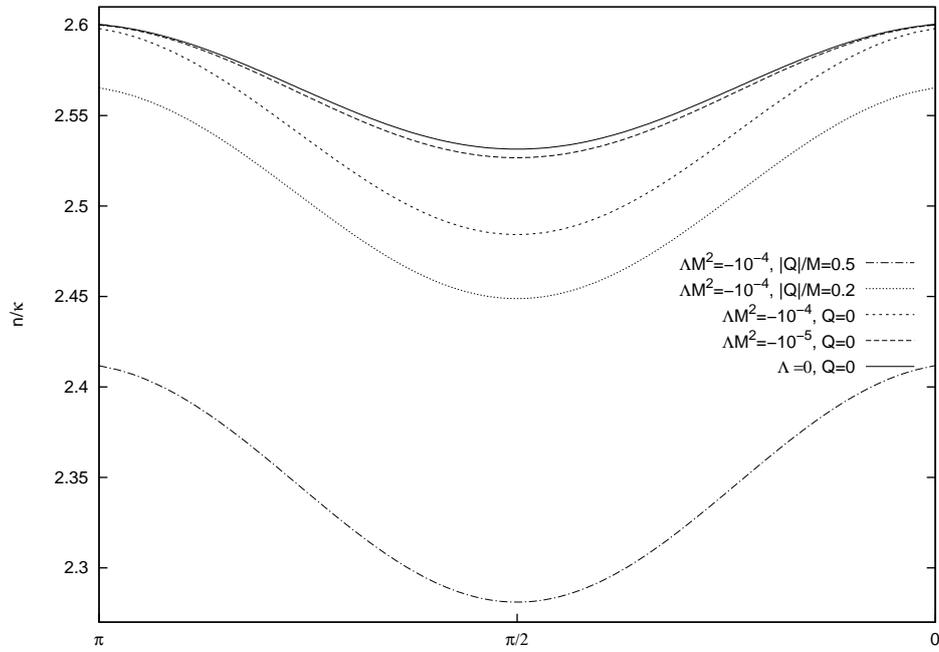


Figura 5.9: Concorrência entre carga elétrica e constante cosmológica negativa na influência sobre o padrão da densidade do número de partículas ao redor de esferas rígidas ($r = R$).

Capítulo 6

Considerações finais

Apresentamos neste trabalho soluções para o escoamento potencial relativístico de fluidos ideais satisfazendo uma equação de estado barotrópica do tipo $p = \rho$ nos espaços tempos de Reissner-Nordström com ou sem constante cosmológica. No caso de constante cosmológica nula, apresentamos soluções analíticas que, embora derivadas de maneira independente, conferem com resultados agora conhecidos na literatura [23]. No caso onde a constante cosmológica se faz presente, consideramos tanto valores positivos quanto negativos para esta. Neste caso, entretanto, faz-se necessária uma análise numérica para a obtenção do potencial de quadri-velocidades, bem como das linhas de corrente, dos contornos de isodensidades e da taxa de acreção. Em qualquer caso, verificamos que o padrão do escoamento, quando analisado via suas linhas de corrente, difere muito pouco com a variação da carga elétrica ou da constante cosmológica, sendo a influência destes parâmetros melhor analisada em termos dos contornos de isodensidades e da taxa de acreção (no caso do escoamento através de buracos negros). Concluimos em nossa análise que a influência da carga elétrica manifesta-se de forma mais significativa quando $Q/M \gtrsim 0.1$, sendo a influência da constante cosmológica mais sutil e perceptível somente quando esta for, pelo menos, tão grande quando $|\Lambda| \gtrsim 10^{-6} M^{-2}$ em uma região limitada por $R \sim 150M$.

De nossa análise dos efeitos da carga elétrica sobre o escoamento potencial, pudemos concluir que esta, no caso das esferas rígidas, atua no sentido de contrair os contornos de isodensidade, ou seja, o de diminuir a densidade de fluido nas vizinhanças da esfera. No caso do escoamento através de buracos negros, notamos uma expansão dos contornos de isodensidade, o que implica

em um aumento na densidade de fluido na sua vizinhança. Vemos ainda que a taxa de acreção diminui conforme a carga elétrica aumenta. Podemos associar isto ao fato de um aumento em carga elétrica implicar em uma diminuição no horizonte de eventos.

No que diz respeito à constante cosmológica, o fato de termos considerado para esta valores tanto positivos quanto negativos dá-se a título de completeza. Resultados recentes do estudo da cosmologia apontam com cerca de 99% de confiança para $\Lambda > 0$ [24], sendo mais recorrente valores da ordem de¹ $\Lambda \sim 10^{-52}/m^2$ [24, 25, 26]. Pressupondo-se então valores desta magnitude para a constante cosmológica, temos que uma relação entre massa e constante cosmológica tal que $\Lambda M^2 \sim 10^{-7}$ implica em $M \sim 10^{22}$ massas solares. Se considerarmos ainda que os buracos negros supermassivos que se acredita existir no centro das galáxias possuem massa da ordem de até 10^9 massas solares [27], podemos concluir que a influência da constante cosmológica sobre o escoamento potencial de fluidos é de difícil detecção em uma escala de distâncias que podemos chamar de *local*. De qualquer forma, podemos concluir a partir de nossa investigação que o efeito de uma constante cosmológica positiva sobre o escoamento através de buracos negros é o de aumentar a densidade de fluido na região de incidência e diminuir esta na região oposta, resultando disto um deslocamento dos contornos de isodensidade para a direção em que o fluido incide. No caso de constante cosmológica negativa, observamos o contrário. No caso do escoamento através de esferas rígidas, por outro lado, a influência da constante cosmológica é observada essencialmente pela expansão ou contração dos contornos de isodensidade caso esta seja positiva ou negativa, respectivamente.

¹A este valor de Λ associa-se o “parâmetro de densidade” $\Omega_\Lambda = 0.7$ [9].

Referências Bibliográficas

- [1] L. I. Petrich, S. L. Shapiro, and S. A. Teukolsky, *Physical Review Letters* **60**, 1781 (1988).
- [2] S. L. Shapiro, *Physical Review D* **39**, 2839 (1989).
- [3] A. M. Abrahams and S. L. Shapiro, *Physical Review D* **41**, 327 (1990).
- [4] M. Ujevic and P. S. Letelier, *Classical and Quantum Gravity* **18**, 2917 (2001).
- [5] M. Ujevic and P. S. Letelier, *Classical and Quantum Gravity* **19** (2002).
- [6] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Course of Theoretical Physics Vol. 6, 2 ed. (Pergamon Press, Oxford, 1987).
- [7] C. Eckart, *The Physical Review* **58**, 919 (1940).
- [8] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky, *Black holes, white dwarfs and neutron stars. The physics of compact objects*. (John Wiley & Sons, New York, 1991).
- [9] S. M. Carroll, *Living Reviews in Relativity* **4** (2001).
- [10] J. L. Synge, *Relativity: The General Theory* Series in Physics (North-Holland, Amsterdam, 1960).
- [11] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity* (John Wiley & Sons, New York, 1972).
- [12] R. D’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity* (Oxford University Press, Oxford, 1992).
- [13] T. J. Chung, *Computational fluid dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).

- [14] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical recipes in C. The art of scientific computing*, 2 ed. (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).
- [15] J. H. Ferziger and M. Peric, *Computational methods for fluid dynamics*, 3 ed. (Springer, Berlin, 2002).
- [16] M. Carmeli, *Classical fields: General Relativity and Gauge Theory* (John Wiley & Sons, New York, 1982).
- [17] L. E. Dickson, *Elementary Theory of Equations* (John Wiley & Sons, New York, 1914).
- [18] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
- [19] K. Lake and R. C. Roeder, *Physical Review D* (1976).
- [20] S. Chandrasekhar and J. B. Hartle, *Proceedings of the Royal Society of London A* , 301 (1982).
- [21] A. Bonanno, S. Droz, W. Israel, and S. Morsink, *Proceedings of the Royal Society of London A* (1995).
- [22] D. R. Brill and S. A. Hayward, *Classical and Quantum Gravity* (1994).
- [23] E. Babichev, S. Chernov, V. Dokuchaev, and Y. Eroshenko, *Physical Review D* (2008).
- [24] S. Perlmutter *et al.*, *The Astrophysical Journal* **517**, 565 (1999).
- [25] S. Perlmutter *et al.*, *The Astrophysical Journal* **483**, 565 (1997).
- [26] M. Carmeli and T. Kuzmenko, *AIP Conference Proceedings* **586**, 316 (2001).
- [27] M. J. Reid, *ArXiv e-prints* (2008), 0808.2624.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)