

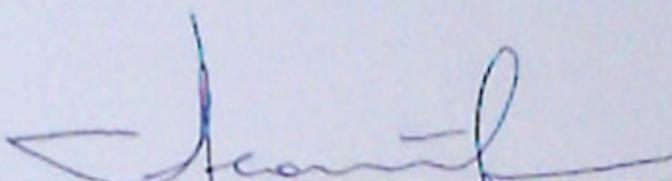
Orestes Piermatei Filho

MODELO DE INFILTRAÇÃO EM BARRAGEM
COM FUNDO SEMI-IMPERMEÁVEL

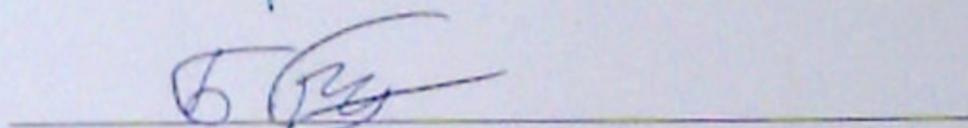
Tese submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Área de concentração: Matemática

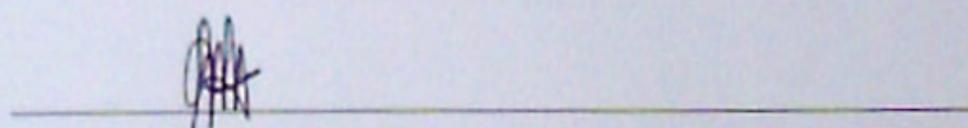
Aprovada por:



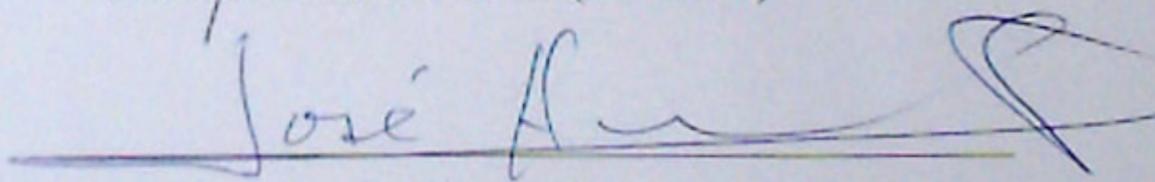
Prof. Dr. Anatoli Leontiev (IM-UFRJ) (Presidente)



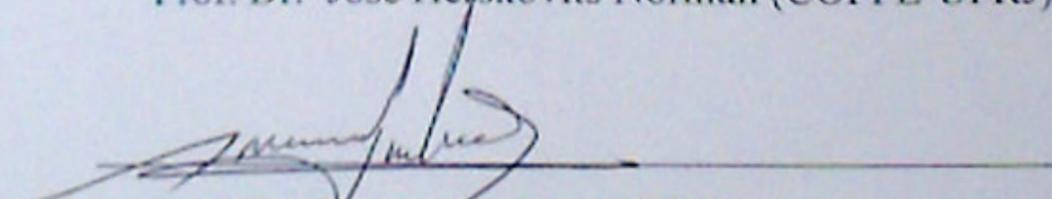
Prof. Dr. Boris Kapitonov (LNCC)



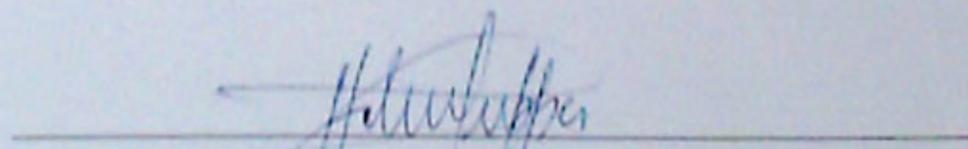
Prof. Dr. Flávio Dickstein (IM-UFRJ)



Prof. Dr. Jose Herskovits Norman (COPPE-UFRJ)



Prof. Dr. Marcus Pacheco (IPRJ)



Prof. Dr. Helvécio Rubens Crippa (IM-UFRJ)

RIO DE JANEIRO

2006

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

MODELO DE INFILTRAÇÃO EM BARRAGEM
COM FUNDO SEMI-PERMEÁVEL

por

ORESTES PIERMATEI FILHO

UFRJ

2006

Resumo

Neste trabalho, estuda-se um modelo de infiltração no fundo de uma barragem com fundo semi-permeável em um meio poroso. O modelo proposto consiste em um problema de fronteira livre com condições de complementaridade no fundo. A parte da fronteira do domínio, chamada fronteira livre, pode ser encontrada com uma parte da solução. A pressão do fluido, bem como o fluxo no fundo da barragem são desconhecidos *a priori* e são definidos por condições de complementaridade.

Para analisar este modelo, propõe-se uma transformação do tipo Baiocchi para problema. Obtém-se uma inequação quase-variacional associada ao problema de fronteira livre. Mostra-se que esta inequação é equivalente ao problema original de fronteira livre. Mostra-se também que sob condições adicionais, a solução desta inequação quase-variacional é única.

A implementação numérica do modelo é baseada em técnicas de otimização. Implementou-se uma discretização através de elementos de contorno, obtendo-se um problema de programação matemática não-linear com condições de complementaridade. Para resolvê-lo usou-se o algoritmo dos pontos interiores de Herskovits. Exemplos numéricos são apresentados.

Abstract

In this work a new model of unconfined flow through the porous dam with semi permeable bottom are studied. The proposed model consists in free boundary-value-problem with complementarities conditions on the bottom. The part of the domain boundary, called free boundary, can be found as a part of solution. The pressure of the flow as well as the flow velocity on the dam bottom are unknowns a priori and are defined by a complementarities conditions.

To analyze this model we propose a Baiocchi-like transformation of the problem variables and obtain a quasivariational inequality associated with the boundary-value problem. We prove that this inequality is equivalent to the original free-boundary-value problem. We also prove that under some additional conditions the solution of this quasivariational inequality is unique.

The numerical implementation of the model is based on the optimization approach. We perform a boundary-element discretization and get a nonlinear mathematical programming problem with complementarities conditions. To solve it we use Herskovits's interior point algorithm. Numerical examples are presented.

Aos meus pais Orestes Piermatei (in memorium) e Rita Vieira Piermatei,
aos amores da minha vida, minha esposa Siloeh e nosso filho Pedro,
ao pai Nelson e a mãe Palmira,
aos meus amigos.

Agradecimentos

Agradeço aqui ao professor Anatoli Leontiev por propor o tema desta tese de doutorado, pela sua orientação na realização da mesma, pelas críticas nas horas certas e pelo estímulo constante, permitindo que eu enxergasse mais longe, através de seus comentários profundos sobre o assunto tratado, mostrando-me uma outra forma de ver a própria matemática.

Agradeço também aos colegas Ronaldo Silva Busse e Jose Angel D. Chuquipoma, pelo encorajamento, sugestões e críticas no decorrer de todo o trabalho e que foram fundamentais para o desenvolvimento desta tese.

Quero expressar meus agradecimentos aos professores do Instituto de Matemática da UFRJ que me proporcionaram o conhecimento necessário para a minha formação e maturidade matemática.

Gostaria de agradecer ao Departamento de Matemática da UFJF que possibilitou a minha capacitação. Agradeço aos professores destes departamento que me encorajaram nesta empreitada. Em particular, ao professor José Barbosa Gomes, pelo auxílio em diversos momentos, em assuntos do meu interesse no projeto PQI da CAPES da qual fiz parte.

Por fim, mas nem por isso menos importante, gostaria de agradecer a CAPES que financiou meus estudos de doutorado através do programa PQI. Em particular, a Coordenadora do CDI/CAPES, Íris Santiago Costa e a técnica, Eliane Ferreira Souza, pelo trato gentil em todas as minhas solicitações, no que diz respeito ao projeto que fiz parte.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Problemas de Escoamento em Barragens	11
2.1	Conceitos Hidromecânicos Básicos	11
2.2	Barragem Retangular	16
2.3	O Problema Clássico de Filtração em Meio Poroso	17
2.4	Solução Analítica Para o Problema Clássico de Barragem em Meio Poroso	20
2.5	Formulação Variacional Para o Problema Clássico de Barragem em Meio Poroso	21
2.6	Problema com Fluxo Conhecido no Fundo da Barragem	26
2.7	Modelo Matemático do Impacto Florestal	28
3	Infiltração em Barragem com Fundo Semi-Permeável	34
3.1	Introdução	34
3.2	Formulação do Problema	36
4	Equivalência Entre as Formulações	58
5	Existência da Solução	70
5.1	Aproximação da Inequação Quase-Variacional	70
5.2	Resultados de Existência	84
5.3	Sobre a Unicidade da Solução	86
6	Implementação Numérica	87
6.1	Problema de Otimização de Forma e sua Formulação Integral	87
6.2	Discretização e Problema de Programação Matemática	88
6.3	Testes Numéricos	93
7	Apêndice	113
7.1	Espaços Funcionais	113
7.2	Problemas Variacionais Elípticos	114
7.3	Um Problema Variacional	116
7.4	Algoritmo do Ponto Interior	120

1 Introdução

Problemas de Fronteira Livre

Os problemas para os quais a solução de uma equação diferencial satisfaz certas condições no contorno de um domínio prescrito são conhecidos como problemas de valor de contorno. Em vários casos importantes a fronteira do domínio não é conhecida, mas precisa ser determinada como parte da solução. O termo *problema de fronteira livre* é comumente usado quando a fronteira está associado a um problema estacionário.

São necessárias duas condições na fronteira livre, uma para determinar a fronteira em si e a outra para completar a definição da solução da equação diferencial. Também deve-se fornecer condições convenientes na parte da fronteira fixa e quando conveniente, uma condição inicial também prescrita como o usual. Nestes modelos apresenta-se um problema fronteira livre e que também requer a solução de uma equação diferencial elíptica.

Neste trabalho, tipicamente um problema de fronteira livre consiste de uma equação diferencial do tipo elíptica definida em um domínio limitado juntamente com as condições de contornos necessárias. Em uma parte da fronteira do domínio, a fronteira livre é uma das variáveis do problema e deve ser determinada como parte da solução. Para tornar isso possível, adiciona-se condições específicas na fronteira livre.

O estudo de fluxo em meio poroso é uma importante fonte de problemas de fronteira livre, mas especificamente em relação a fenômenos de escoamento que ocorrem na natureza. Como exemplos, temos escoamento em barragens de terra, escoamento em canais abertos como os rios e tanques e também em sistemas de irrigação ou poços.

As aplicações práticas são as mais variadas e não aparecem apenas e exclusivamente na área de fluxos em meio poroso. Muitos outros problemas de fronteira livre aparecem nas mais variadas áreas, como por exemplo, ondas de choque em gases dinâmicos, fraturas em mecânica dos sólidos ou problema de parada ótima em teoria de decisão. O interesse prático em problemas de fronteira livre não está restrito apenas a escoamento de fluidos, mas se estende também a assuntos relacionados a plasmas físicos, semicondutores e eletroquímica.

A fronteira livre aparece também em fluxos porosos quando o meio poroso é ocupado por dois fluidos separados por fina interface, que é a fronteira livre. As interfaces água/ar são as mais comuns, mas as interfaces água/vapor d'água, óleo/água, óleo/gás e água doce/água

salgada também são importantes. A afirmação da existência de uma fina interface faz com que o fluxo poroso seja saturado, ou seja, qualquer parte particular do meio poroso é saturado por um fluido, esteja contido nele ou não, de modo que existem interface finas, a fronteira livre, entre as regiões ocupadas pelos diferentes fluidos. Por exemplo, em um fluxo saturado água/ar alguma porção do meio está seco ou molhado.

A formulação de fronteira livre em fluxo poroso pode ser reconhecido como uma aproximação de fluxos parcialmente saturados nos quais o fluido contendo parte do meio pode estar entre zero até o máximo valor correspondente a saturação. Algumas vezes a comparação entre a solução matemática de um modelo de fronteira livre com a solução para o correspondente fluxo parcialmente saturado pode indicar se a hipótese de fluxo saturado é justificável.

Segurança em Construção de Barragens

Com vista à sua boa execução, no que diz respeito a segurança de construção de barragens, os órgãos reguladores elaboraram normas relativas ao projeto, à construção, à exploração e à observação e inspeção de barragens. As normas de construção de barragens dão cumprimento, na parte que lhes cabe, disposição legal, estabelecendo os princípios gerais que devem orientar as atividades de construção de barragens que permitam realizar as obras, com base no projeto aprovado, de forma a garantir a sua qualidade e ainda as atividades de construção relativas a reforço, demolição e abandono de barragens, bem como a supervisão da mesma.

A consolidação tem por objetivo proporcionar características mecânicas adequadas ao bom comportamento estrutural do conjunto barragem-fundação. A impermeabilização é um tratamento destinado a controlar o escoamento da água na fundação. A drenagem destina-se a recolher a água escoada a fim de reduzi-la para valores convenientes a subpressão no fundo da barragem e nas superfícies de deslizamento potencial. O controle dos trabalhos de consolidação e impermeabilização da fundação devem garantir a estabilidade da barragem e o impacto ambiental.

Uma das grandes preocupações com a segurança diz respeito as conseqüências da ruptura de qualquer parte da obra. Entre elas podemos citar a infiltração, que é o movimento da água para dentro da superfície do solo. O tamanho e a disposição dos espaços porosos têm a maior influência na velocidade de infiltração de um solo. As pequenas barragens de terra

exigem inspeção regular e manutenção.

Na maioria das barragens, alguma água deverá vazar do reservatório (infiltração) através do fundo da mesma (fundação). Se a intensidade da infiltração for suficientemente grande, o solo deverá ser erodido na fundação da barragem provocando falhas estruturais na barragem. Neste caso deve-se adotar procedimentos de emergência. Desta forma deve-se realizar um controle e um monitoramento regular nos índices de infiltração no fundo da barragem para evitar falhas.

Neste trabalho estuda-se o problema de infiltração em barragens com fundo semi-permeável. O fenômeno representa a perda de fluido no fundo da barragem causado pela infiltração.

Os estudos atuais sobre o assunto são baseados em geral em métodos empíricos e estatísticos. Métodos numéricos também são utilizados como ferramenta de análise e previsão de infiltração em fundo de barragens.

Evolução dos Problemas em Meio Poroso

O objetivo deste trabalho é apresentar o modelo físico do problema de infiltração em barragens com fundo semi-permeável, bem como a modelagem matemática para o mesmo, a qual propõe uma forma de resolvê-lo através de um problema quase-variacional. Também realiza-se neste trabalho uma implementação numérica para este modelo, onde vários testes foram realizados.

A forma apresentada neste trabalho recai em um problema de fronteira livre. Assim a solução do problema é um par (φ, u) , onde φ é uma função que determina a posição da fronteira livre e u o potencial de velocidade do fluido. Neste trabalho, o método utilizado para mostrar a existência da solução, pela forma empregada, permite também localizar o intervalo de infiltração no fundo da barragem.

Os métodos utilizados para estudar a existência e unicidade de solução para problemas em meio poroso são realizados através da teoria de inequações variacionais, empregando o método da transformada de Baiocchi proposto em [1], [2], [3] e [24]. Essencialmente este método consiste em transformar um problema de fronteira livre em um problema com domínio fixo. Este novo problema, em geral, pode ser resolvido sob a forma de uma inequação variacional. A utilização do método de transformação para diversos problemas de infiltração pode ser encontrado em [2].

O primeiro problema tratado por este método de transformação, conhecido como *proble-*

ma clássico, consiste de um escoamento entre dois reservatórios de níveis diferentes separados por um meio poroso homogêneo e isotrópico. O meio poroso ocupa uma área retangular R e possui um fundo impermeável. O modelo matemático é definido pela equação de estado $\Delta u = 0$ no domínio Ω , onde condições sobre o potencial de velocidade u e o fluxo $q \equiv \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}$ são fornecidos sobre a fronteira $\partial\Omega$ de Ω e onde $\vec{\nu}$ representa a normal exterior.

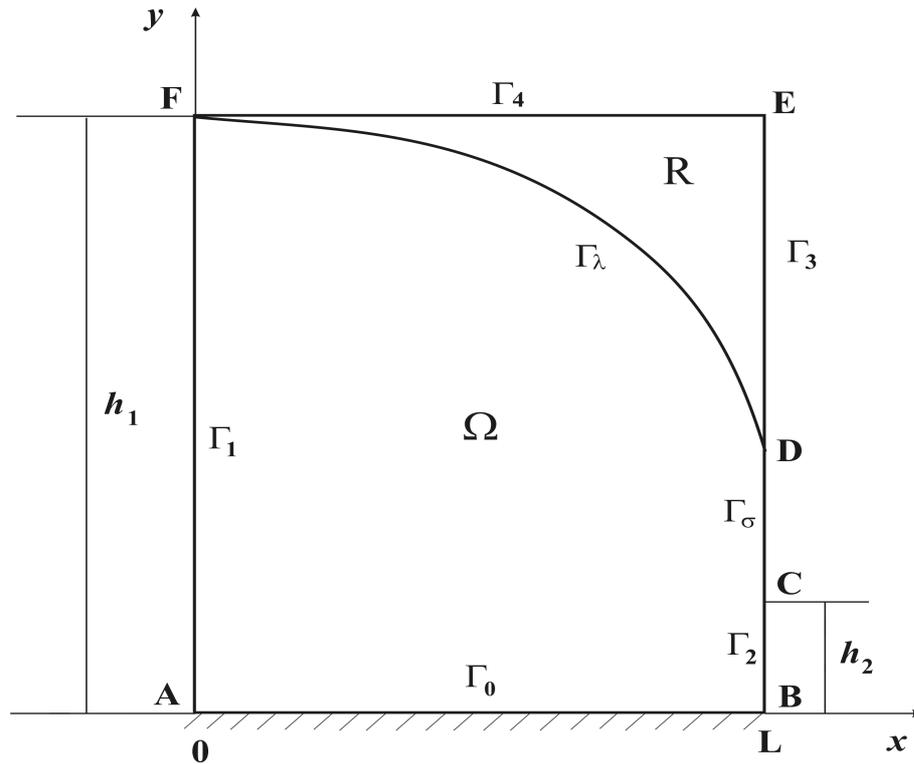


Figura 1.1: Problema Clássico em Meio Poroso

Vários outros problemas também foram tratados, entre eles podemos citar o caso onde o meio poroso é constituído por material não-homogêneo. A principal mudança no modelo aparece na equação de estado que assume a forma $\text{div}(k\nabla(u)) = 0$, onde $k = k(x, y)$ é o coeficiente de permeabilidade do meio. Também estuda-se modelos em que o material é composto de dois meios homogêneos Ω_1 e Ω_2 com diferentes coeficientes de permeabilidade, dispostos em níveis horizontais ou verticais. Desenhos destes modelos podem ser visualizados na figura 1.2 da página seguinte.

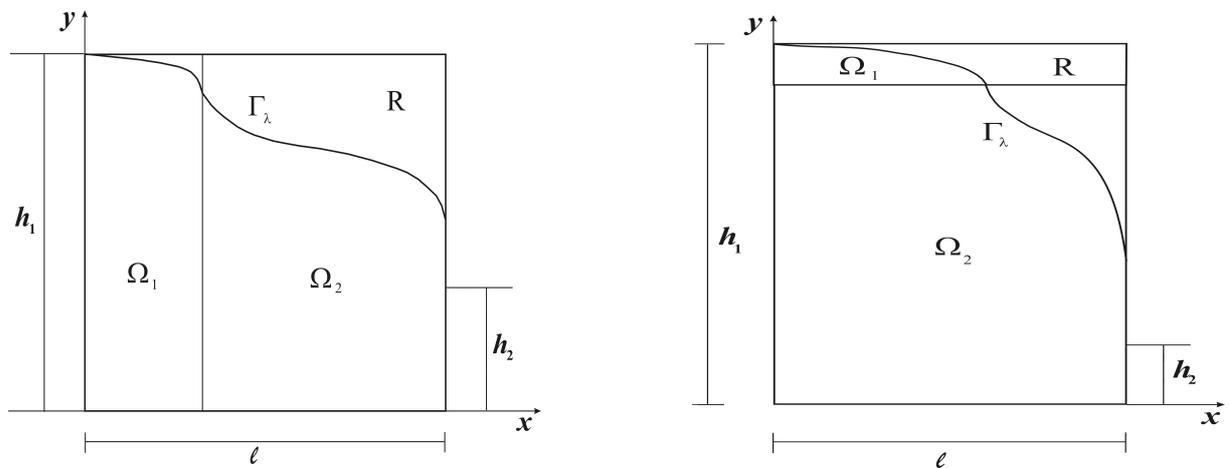


Figura 1.2: Problema em Meios Não-Homogêneos

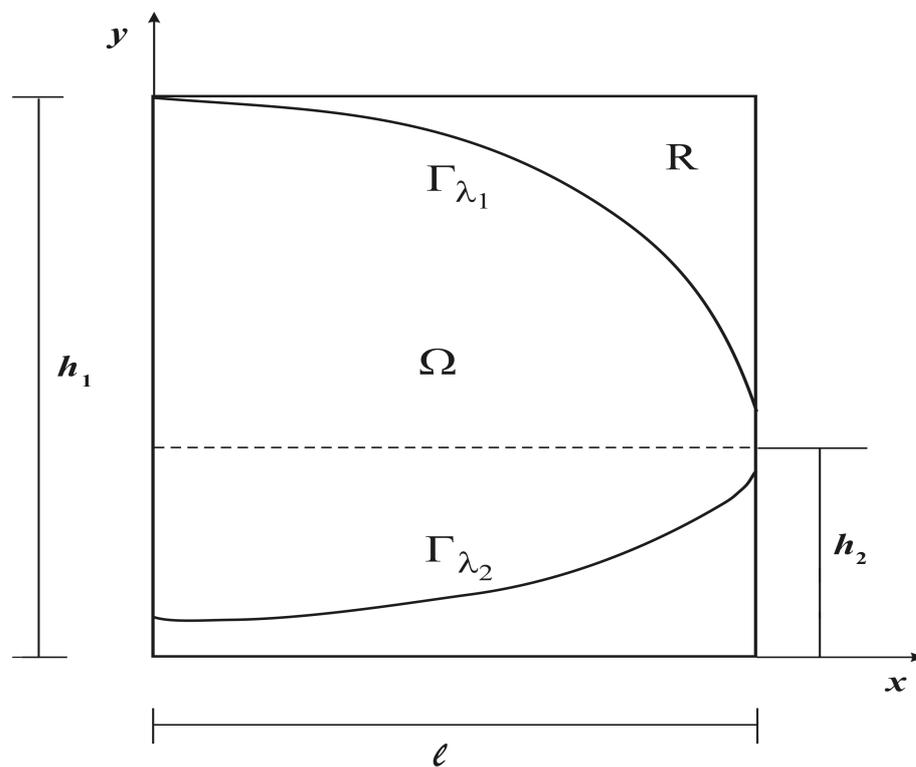


Figura 1.3: Problema Com Dois Fluidos Que Não Se Misturam

Outra forma tratada é um modelo de escoamento não-miscível de fluidos com diferentes densidades. O problema neste caso possui mais de uma fronteira livre (fronteiras livres Γ_{λ_1} e Γ_{λ_2} na fig. 1.3). Entre estes casos, podemos citar a interação entre água doce e salgada, água/óleo, entre outros.

Uma outra classe tratada tem uma significativa diferença do ponto de vista matemático. A descarga Q através de uma seção transversal ao movimento do fluido, que nos casos anteriores era uma função explícita, agora torna-se desconhecida. Três casos são considerados. O primeiro supõe-se que a fronteira correspondente ao reservatório com nível mais alto não seja vertical. Considera-se o caso em que ela é dada por um segmento inclinado (fig. 1.4). No segundo, com fundo impermeável não-horizontal (fig. 1.4). Por último, tem-se o problema que se caracteriza pela presença de um muro vertical impermeável Γ_ω de comprimento d na parte superior do reservatório de maior nível (fig. 1.5). Em todos os casos, Q é constante, porém é desconhecida.

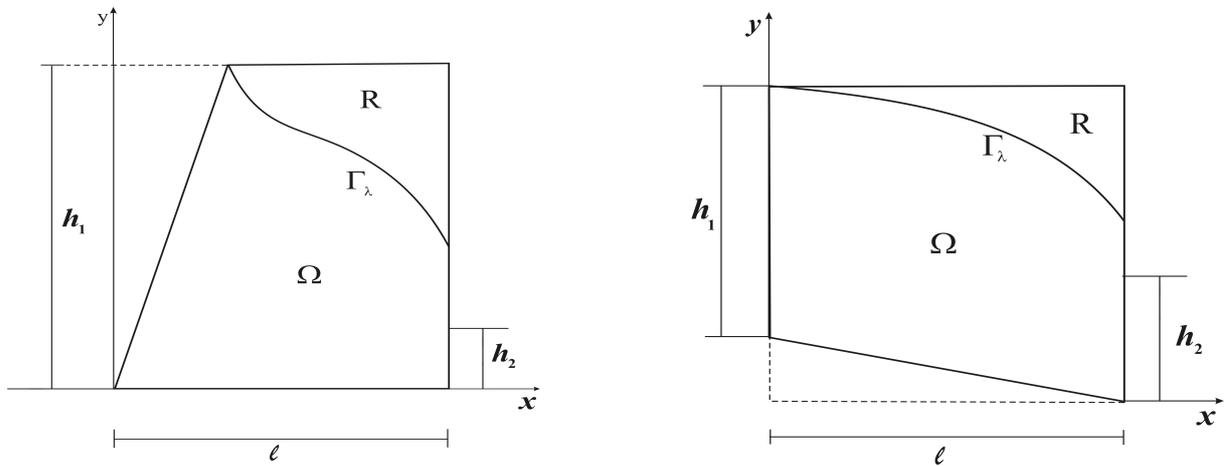


Figura 1.4: Problema com Parede e Fundo Oblíquos

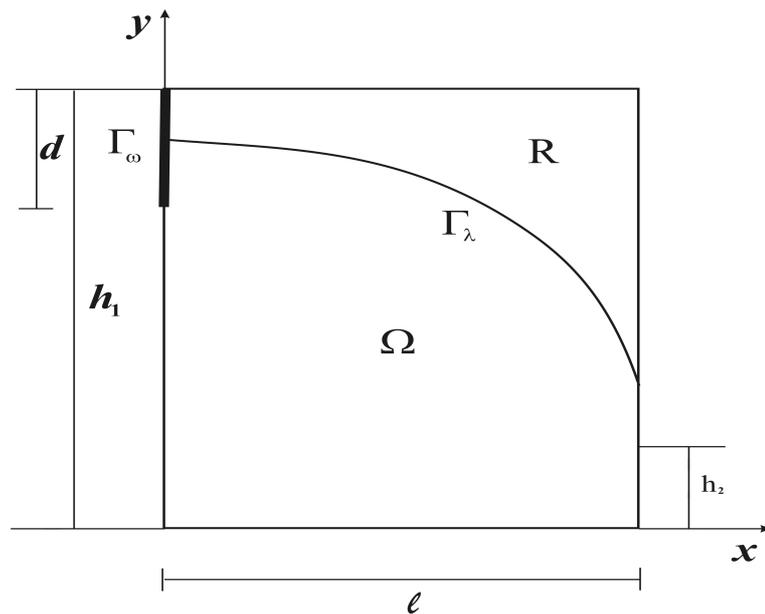


Figura 1.5: Problema com Parte Vertical Impermeável Γ_ω

Em todos esses problemas descritos, a evaporação de água através do meio poroso e a infiltração no fundo da barragem, foi desconsiderado, o que significa a imposição de uma condição de Neumann homogênea sobre a fronteira livre e de Dirichlet sobre o fundo da barragem, respectivamente. Entretanto em alguns casos isso não é apropriado. Por exemplo, em [36], estuda-se o problema em que a quantidade de água evaporada através de um arco da fronteira livre é proporcional à projeção horizontal desse arco. A condição sobre a fronteira livre assume a seguinte forma: $\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = Cx$, onde $C > 0$ é a razão de evaporação e $\vec{\nu}$ a normal exterior. Neste modelo a fronteira livre pode não ser monótona.

Em [22] considera-se o caso em que há recarga por chuva ou descarga por evaporação dada por uma constante C e também a existência de infiltração através do fundo da barragem dada por uma função $l(x)$. Assim as condições de contorno sobre o fundo assume a forma $\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}(x, 0) = l(x)$ e sobre a fronteira livre fica $\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}(x, \varphi(x)) = -c\sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}$, onde $y = \varphi(x)$ representa a fronteira livre e $\vec{\nu}$ a normal exterior. Neste modelo a inequação variacional obtida depende de C e $l(x)$.

Em [10], [11], [28] e [30] apresenta-se um modelo onde a descarga por transpiração da área florestal ocorre apenas na área de contato do lençol freático com o sistema radicular, diferentemente dos casos mencionados acima. Sendo assim, esta descarga depende da posição do lençol freático, que é desconhecido *a priori*. Nestes trabalho, o modelo recai em um problema quase-variacional, onde introduziu-se novos métodos para se obter a existência da solução.

Apresentação do Trabalho

Os problemas descritos acima, envolvendo ou não, carga ou descarga através da fronteira livre, possuem fundo da barragem impermeável ou tem uma infiltração dada através de uma função conhecida *a priori*. Neste trabalho a infiltração no fundo da barragem ocorre através de uma condição do tipo complementaridade, ou seja, faz com que o fundo da barragem possa ser interpretado como uma membrana semi-permeável que possibilita apenas a saída do fluxo do fluido e não o seu retorno para dentro do meio poroso. De qualquer forma ainda temos um problema de fronteira livre, que ainda é desconhecida e sofre alteração em sua forma, quando comparada ao modelo clássico.

Entre os métodos numéricos para o problema clássico de barragem em meio poroso, destaca-se a implementação através de método dos elementos de contorno (B.E.M.), pois

apresenta a facilidade de se trabalhar com discretização apenas na fronteira da região onde o problema está definido. A utilização do método dos elementos de contorno, juntamente com técnicas iterativas, foi apresentada por Liggett [13], menciona-se também [9]. No método iterativo para problemas em meio poroso, umas das duas condições definidas na fronteira livre é escolhida para se resolver, a cada iteração, um problema de valor de contorno direto. A partir de uma aproximação inicial, a posição da fronteira livre é ajustada, a cada iteração, fazendo com que a outra condição de contorno seja cumprida e dessa forma, o problema direto é resolvido. Em [25] realiza-se uma implementação numérica para o problema de infiltração clássico, aplicando-se técnicas de otimização de forma e programação matemática não-linear.

Este trabalho é dividido em um capítulo introdutório e mais cinco capítulos onde se desenvolve todo o trabalho, além de um apêndice. O Capítulo 2 é dividido em sete seções. Nas duas primeiras apresenta-se conceitos básicos de hidrodinâmica e o modelo básico de um barragem retangular em meio poroso. Nas seções seguintes apresenta-se de forma resumida os modelos mais significativos em meio poroso, sua formulação matemática e forma usada para resolvê-los através da transformação de Baiocchi ([3] e [24]).

No Capítulo 3 apresenta-se um modelo para infiltração em barragem com fundo semi-permeável e sua formulação matemática. O modelo é dado por um problema de valor de contorno com condições de contato no fundo da barragem, que caracteriza a infiltração no fundo e sua semi-permeabilidade. Para resolver este problema foi introduzido a transformação de Baiocchi a fim de se obter uma formulação variacional para o mesmo, que é da forma quase-variacional. Ou seja, transforma-se o problema original na variável u que é de fronteira livre em um problema de domínio fixo na variável w .

No Capítulo 4 apresenta-se vários resultados que permitiram mostrar a equivalência entre os dois problemas, ou seja, o problema transformado na variável w com o problema originalmente proposto da variável u , que é de fronteira livre. A inequação quase-variacional obtida é usada para se fazer o estudo de existência e unicidade da solução do modelo estudo.

No Capítulo 5 são obtidos resultados de existência e unicidade de solução para o modelo. A partir da inequação quase-variacional é construída uma família de inequações variacionais. Das soluções destas inequações variacionais, que existe e é única pelos resultados clássicos da teoria das inequações variacionais, é extraída uma seqüência que converge para a solução da inequação quase-variacional. Este método foi originalmente introduzido em [10], [11] e

[30].

No Capítulo 6 é apresentada uma implementação numérica para o modelo estudado. A técnica utilizada para a implementação numérica foi primeiramente apresentada em [25] e depois em [10]. Ela é baseada na teoria de otimização de forma combinada com o método de elementos de contorno. O problema de fronteira livre é transformado em um problema de otimização de forma. O funcional objetivo contém as condições sobre a fronteira livre, enquanto que a equação de estado, juntamente com as de contato no fundo da barragem e as demais condições de contorno são consideradas como restrições do problema. Procura-se pelo mínimo do funcional objetivo. Utilizando-se discretização através de elementos de contorno (B.E.M.), obtém-se um problema de programação matemática não-linear, que é resolvido pelo algoritmo do ponto interior ([18]).

No Apêndice apresenta-se alguns resultados básicos de análise funcional, EDP e otimização, a solução do problema variacional com condições de contorno mista no fundo e que surge na construção da família de inequações variacionais a partir da quase-variacional e também o algoritmo do ponto interior.

Os principais resultados deste trabalho são:

- **Modelo Matemático**

Neste trabalho é apresentado um modelo inédito com formulação matemática para o problema de infiltração em barragem de meio poroso com fundo semi-permeável. É introduzido o método de transformação de Baiocchi para transformar o problema de fronteira livre em um problema de domínio fixo. Este modelo dá origem a uma inequação quase-variacional. Mostra-se a equivalência entre estes dois problemas. Os resultados referentes a esta parte estão em:

PIERMATEI FILHO, O.; LEONTIEV, A., *Modelo de infiltração em barragem com fundo semi-permeável*. 61º Seminário Brasileiro de Análise (61º SBA), Maio, São João Del Rei - MG, Brasil, UFSJ (2005). v.1. p.5-12.

- **Método para Existência e Unicidade da Solução**

Pelo fato da formulação variacional para problema ser quase-variacional, tornou-se necessário a introdução de um método adequado para se provar a existência da mesma. Usou um

método semelhante ao usado em [10], [11] e [30]. O método utilizado, pela sua construção, também permitiu localizar o intervalo da infiltração no fundo da barragem. Mostra-se a existência para este problema. Os resultados referentes a esta parte estão em:

PIERMATEI FILHO, O.; LEONTIEV, A., *Existência e unicidade para o problema de infiltração em barragem com fundo semi-permeável*. 62º **Seminário Brasileiro de Análise (62º SBA)**, Novembro, Rio de Janeiro - RJ, Brasil, UniRio (2005).v.31. p.1-7.

- **Implementação Numérica**

Foi utilizado o método de elementos de contorno (B.E.M.), otimização e programação matemática não-linear para se obter um modelo de simulação computacional para o problema de infiltração com fundo semi-permeável. Vários exemplos foram apresentados neste trabalho no Capítulo 6.

2 Problemas de Escoamento em Barragens

2.1 Conceitos Hidromecânicos Básicos

Temos como objetivo neste capítulo, introduzir conceitos básicos referentes a hidromecânica e que são estudados de forma "clássica" em [6], [7], [8], [33] e [38]. Utilizou-se também parte do texto [10].

Foi Darcy, em 1856, um dos pioneiros nos estudos dos fenômenos de infiltração em meio poroso. Ele realizou experimentos sobre o fluxo de água em meios (ambiente) cheio de areia e estabeleceu uma lei de regularidade desse movimento, que é de natureza macroscópica. Posteriormente, outros pesquisadores realizaram experimentos similares em larga escala. Ainda no século XIX, Dupuit e Boussinesq forneceram uma embasamento teórico sobre a hidráulica do movimento de águas subterrâneas.

Apresentaremos agora alguns conceitos e propriedades hidromecânicos, nos quais as bases da teoria de infiltração devem ser fundamentadas. Tomamos como referências os seguintes textos: [6], [33] e [38].

Composição do Solo

O solo é um sistema singular, consistindo de partículas minerais e coloidais, cercadas por água contendo sais dissolvidos e elementos em estado gasoso (ar, vapor d'água). Os solos podem ser divididos em conglomerados consolidados e não-consolidados (ou fofos). Os não-consolidados são formados pela quebra de rochas densas. Elas formam solos de dois tipos básicos: o tipo arenoso (sem coesão) e do tipo argiloso (coesão).

A parte do solo que não está preenchida por material sólido constitui os poros do meio. Em geral estes poros podem conter partes de líquidos e de gases. Somente os interstícios (poros) conectados podem agir como condutores elementares dentro da formação. Estes poros quando conectados entre si formam pequenos canais, os capilares. A água preenche completamente os espaços do solo e se desloca de regiões de maior pressão para regiões de pressão muito menor.

Escoamentos em Meios Porosos

Os meios porosos são constituídos por partículas sólidas, granulares, que deixam entre si interstícios ou poros, formando pequenos canais através dos quais é possível o escoamento de fluidos. Se um meio tem os vazios totalmente preenchidos por um líquido diz-se que está saturado desse líquido. Estuda-se neste trabalho escoamentos líquidos nas zonas saturadas dos meios porosos e fora da influência das forças de capilaridade.

A zona saturada por um líquido com possibilidade de ascensão capilar, se estiver em contato com a atmosfera, pode situar-se acima da superfície em que se verifica a pressão atmosférica - superfície freática. De fato, acima da superfície freática existe a franja capilar, na qual o líquido é retido pelas forças de capilaridade. O teor líquido na franja capilar varia com a profundidade desde a saturação, no fundo, junto à superfície freática, até um valor muito baixo, no topo. Assim, a superfície de saturação e a superfície freática não coincidem. Abaixo da superfície freática, a pressão é superior à pressão atmosférica.

As formações geológicas naturais, integradas no ciclo hidrológico, denominam-se *aquíferos*. Podem ser *freáticos* ou *confinados*, dependendo do escoamento que se fizer, respectivamente, com superfície livre ou sob pressão. Os poços abertos em aquíferos confinados dizem-se *artesianos*.

Neste trabalho nos limitaremos ao estudo do escoamento de líquidos nos meios porosos que se podem considerar como incompressíveis, isto é, cuja *porosidade* não varia com a pressão a que está sujeito o líquido.

A porosidade designa a relação do volume de vazios existentes numa determinada porção do meio poroso e o volume total da mesma porção.

Alguns meios porosos não podem ser considerados incompressíveis, isto é, não pode desprezar-se a variação da sua porosidade com a pressão a que está sujeito o líquido. Tal pressão influi na tensão efetiva, que se transmite através dos contatos entre as partículas, ou seja, através da estrutura sólida do meio.

Observa-se que para o escoamento de fluidos, nem sempre está disponível a totalidade do volume de vazios correspondentes à porosidade acima definida. De fato, um meio poroso pode reter líquido contra a atração da gravidade devido às forças de atração molecular. No caso do líquido retido ser a água, deve-se distinguir entre *água higroscópica*, que só pode sofrer deslocamento no estado de vapor e a *água capilar*, que é suscetível de se mover no estado líquido.

Define-se *porosidade efetiva* relativamente à água como o quociente entre o volume de vazios disponíveis para o escoamento da água sob ação da gravidade, no meio saturado, e o volume total ocupado pelo meio.

O estudo dos escoamentos em meios porosos tem larga aplicação em engenharia civil, nas áreas da geotecnia, da hidrologia de águas subterrâneas e do saneamento.

Lei de Darcy e Permeabilidade

A diferença da altura piezométrica entre dois pontos (ou duas seções) de um meio poroso saturado de um líquido dá lugar ao escoamento deste.

Em função das reduzidas dimensões transversais dos capilares, o líquido circula neles com lentidão. Devido à baixa velocidade do escoamento através desses capilares e às reduzidas dimensões transversais dos mesmos, é de esperar que o escoamento seja laminar, como no caso de tubos cilíndricos. Assim a velocidade é proporcional à perda de carga unitária.

O emaranhado dos capilares formados pelos interstícios (poros) dos grãos de um meio poroso é tão complexo que desafia a sua descrição racional, a não ser de um ponto de vista estatístico. Assim, torna-se muito difícil analisar o movimento através dos capilares individualmente.

A forma habitual de estudar o escoamento em meios porosos consiste em considerar, não a velocidade efetiva através dos capilares, mas uma velocidade aparente no meio poroso. Esta forma macroscópica de analisar o escoamento de fluidos em meios porosos foi estabelecida por Darcy em 1856, no trabalho *Fontaines Publiques de la Ville de Dijon* e que é conhecida hoje em dia por lei de Darcy, que é dada pela expressão:

$$(2.1) \quad \mathbf{V} = -k \text{ grad} \left(y + \frac{p}{\gamma} \right),$$

onde $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y)$ é a velocidade do fluido, $p = p(x, y)$ é a pressão na área ocupada pelo fluido, γ é o peso específico do fluido ($\gamma = \rho g$, onde ρ representa a sua massa específica e g o módulo da aceleração da gravidade) e k é o coeficiente de permeabilidade do meio poroso em relação ao fluido.

Observa-se que a permeabilidade depende da porosidade efetiva, das características do meio (através das dimensões dos capilares) e a viscosidade do líquido.

A permeabilidade de um meio depende da natureza (areia, material sedimentar, etc.), da forma das partículas (esferoidal, lamelar) e das dimensões e arranjo delas. Os meios porosos

naturais são na sua maioria anisotrópicos, apresentando em geral, maior permeabilidade na direção horizontal do que na direção vertical.

Observa-se também que a lei de Darcy é válida quando o regime do escoamento nos capilares é laminar. Quando o regime do escoamento é turbulento, existe outra lei para o escoamento e que não será tratada aqui neste trabalho. A velocidade nos escoamentos em meios porosos (seja velocidade aparente ou a velocidade efetiva) é necessariamente pequena, pois a linha de energia e a linha piezométrica podem ser consideradas coincidentes. Assim, na fórmula de Darcy, o coeficiente de permeabilidade é geralmente considerado como a perda de carga piezométrica unitária, também chamada de *gradiente hidráulico*.

Um meio diz-se isotrópico em relação à permeabilidade quando o valor desta, num ponto, é independente da direção do escoamento. Se, além disso, a permeabilidade é constante em todos os pontos, o meio diz-se homogêneo e isotrópico. Em tal meio, a permeabilidade é representada apenas um único valor k .

Em um líquido em movimento (ou em repouso) num meio poroso, é possível definir superfícies com igual valor das alturas piezométricas - *superfícies isopiezométricas*.

O escoamento se dá dos pontos (ou seções) de maior altura piezométricas para os pontos (ou seções) de menor altura piezométrica. Se um meio homogêneo e isotrópico tiver duas superfícies isopiezométricas muito próximas, o percurso do escoamento será o mais curto possível, o que significa que as linhas de corrente são normais às superfícies isopiezométricas. Para os escoamentos planos podem traçar-se feixes de linhas de corrente e de linhas isopiezométricas, que são normais entre si (nos meios homogêneos e isotrópicos).

Observa-se que quando a lei de Darcy se reduz a forma $\mathbf{V} = -\text{grad}(Ky)$, o campo de velocidade aparente de um escoamento num meio homogêneo e isotrópico deriva de uma função potencial $\phi = Ky$, ou seja, $\mathbf{V} = -\text{grad}\phi$. Isto justifica o termo correntemente utilizado de superfície equipotenciais para as superfícies isopiezométricas.

Tipos de Fronteiras em Barragens

Ao tratar de problemas de escoamento de água em barragens sob estruturas hidráulicas, no corpo de barragens de terra e também em escoamento de água de canais até o subsolo, podem aparecer quatro tipos de fronteira para a região de fluxo ou alagadas:

- (a) Fronteiras Impermeáveis: são os contornos subterrâneos das estruturas hidráulicas e também a fronteira da região de fluxo com solos impermeáveis. Não há fluxo de água

através de tais fronteiras. As fronteiras impermeáveis são linhas de fluxos ao longo das quais devem assumir valor constante. Usualmente as fronteiras impermeáveis consistem de segmentos retilíneos.

- (b) Fronteiras de Reservatórios de Água: são os limites entre as região de fluxo e reservatórios de água. Para grande dimensões de reservatórios de água, pode-se considerar que a pressão da água está distribuída de acordo com a lei da hidrostática, ou seja, a pressão é dada por: $p = p_a + \rho g(h_1 - y)$, onde p_a é a pressão na superfície do reservatório e igual a pressão atmosférica, h_1 é a altura do reservatório, y é a altura medida a partir de um ponto horizontal x no reservatório.
- (c) Linha de Fronteira Livre: consiste de uma linha separando a parte seca do solo da parte molhada. Aqui pode-se considerar que a pressão é igual à pressão atmosférica, pois os poros do solo estão em contato mútuo com o ar ($p_a = 0$). Por causa da presença de capilaridade do solo, assume-se que ao longo da fronteira livre a pressão tem um valor constante, menor que a pressão atmosférica em grandeza, mas levando em consideração a altura da capilaridade calculada no solo: $p = p_a + \rho g h_k$.
- (d) Superfície de Percolação: em barragens de terra podem existir faixas onde a água flui para fora, não para o interior de um reservatório de água, mas sim diretamente para a atmosfera. Tais faixas são chamadas superfícies de percolação e podem aparecer também ao longo de paredes de poços, canais de drenagem e outros. Ao longo da superfície de percolação a pressão deve ser igual a pressão atmosférica.
- (e) Fronteira Semi-Permeável: a semi-permeabilidade é uma condição de contorno que ocorre quando uma membrana de espessura desprezível permite a passagem de fluido apenas em um dos sentidos, impedindo fluxo no sentido contrário. As condições de contorno podem ser caracterizadas como do tipo complementaridade. Neste caso, a propriedade da membrana faz com que a pressão interior em um ponto da fronteira semi-permeável seja estritamente menor que uma pressão exterior dada $p_0(x, y)$, impedindo a passagem de fluxo e quando a pressão interior em um ponto da fronteira é igual a pressão exterior $p_0(x, y)$, tem-se fluxo de fluido através da fronteira deste tipo.

As conseqüências das características de cada fronteira para a formulação matemática de problemas de infiltração serão vistas nas seções seguintes.

2.2 Barragem Retangular

Um simples caso de escoamento através de uma barragem de meio poroso, separando dois reservatórios de diferentes níveis (alturas piezométricas) pode ser considerado como o fluxo estacionário saturado de um fluido incompressível através de um meio homogêneo e isotrópico. A barragem retangular tem as paredes verticais paralelas e o fundo é horizontal, que pode ser impermeável (modelo clássico) ou permitir infiltração no fundo semi-permeável. Estes casos tem sido estudado por vários autores como modelo de problemas avaliando novos métodos de solução para problemas de fronteira livre.

Considera-se dois reservatórios com níveis h_1 e h_2 ($h_1 > h_2$), respectivamente, separados por um meio poroso ABEF com uma base AB de comprimento l . O segmento vertical CD determina a superfície de percolação e a curva DF a fronteira livre.

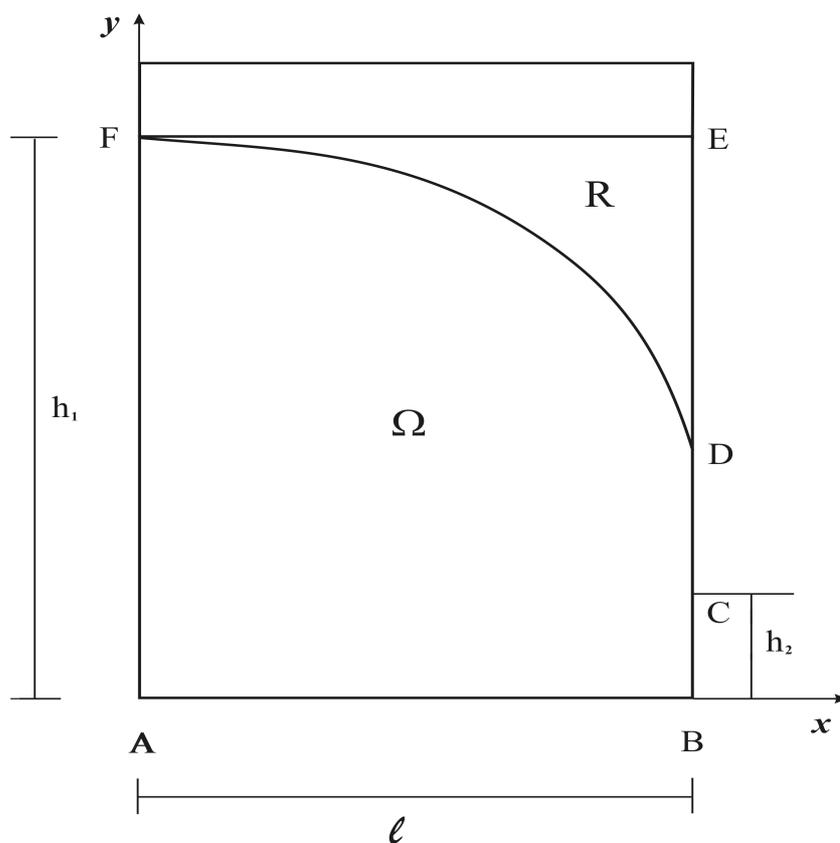


Figura 2.1: Barragem Retangular

Observa-se que o conhecimento da rede de escoamento e da permeabilidade permite determinar o caudal escoado através da barragem.

2.3 O Problema Clássico de Filtração em Meio Poroso

Modelo Físico do Problema Clássico de Barragem

Considera-se dois reservatórios com níveis h_1 e h_2 ($h_1 > h_2$), respectivamente, separados por um meio poroso ABEF, constituindo a barragem, de comprimento L e com uma base Γ_0 , que no modelo clássico, é considerada impermeável.

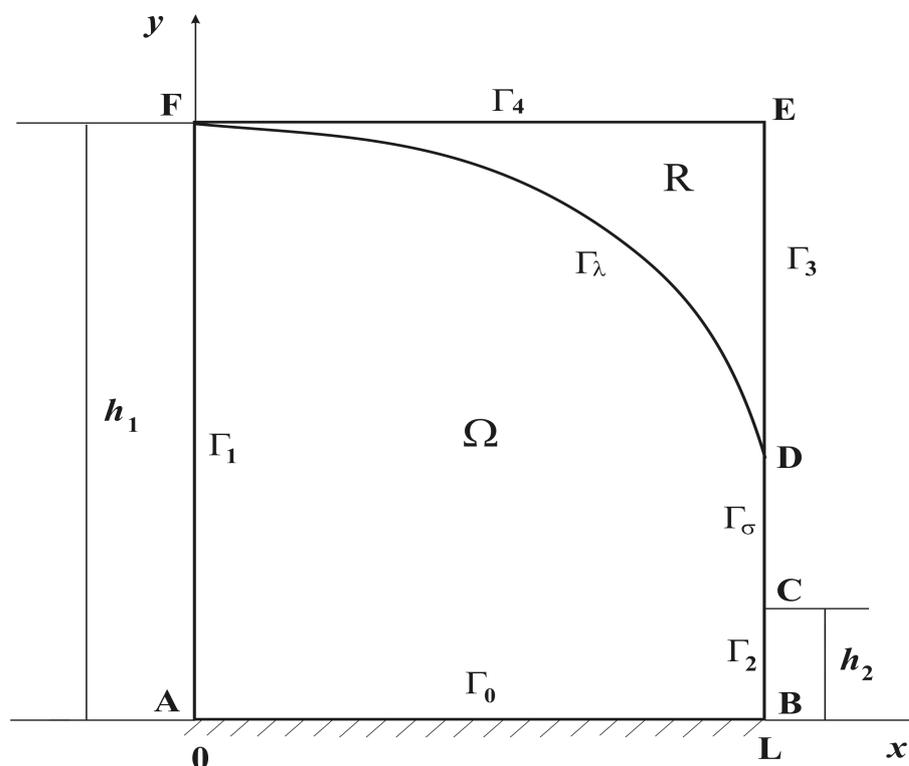


Figura 2.2: Problema clássico da barragem

A diferença entre os níveis provocará um escoamento do fluido formando uma área saturada Ω em ABEF, cuja parte da fronteira dada pela curva DF, Γ_λ , é livre. A parte Γ_σ da fronteira, segmento CD, é conhecida como superfície de percolação.

A equação de estado é obtida a partir da lei de Darcy:

$$(2.2) \quad \mathbf{V} = -k \operatorname{grad} \left(y + \frac{p}{\gamma} \right), \quad \text{em } \Omega,$$

onde $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y)$ é a velocidade do fluido em Ω , $p = p(x, y)$ é a pressão na área ocupada pelo fluido, γ é o peso específico do fluido ($\gamma = \rho g$, onde ρ representa a sua massa específica

e g o módulo da aceleração da gravidade) e k é o coeficiente de permeabilidade do meio poroso em relação ao fluido.

Foi considerado neste estudo um fluido ideal, ou seja, escoamento permanente, o meio poroso é homogêneo com coeficiente de permeabilidade constante $k = 1$. Assim, tomando

$$(2.3) \quad u = y + \frac{p}{\gamma}$$

pela lei de Darcy tem-se:

$$(2.4) \quad \mathbf{V} = -\text{grad } u, \quad \text{em } \Omega,$$

logo u é potencial de velocidade.

A equação da continuidade é dada por:

$$(2.5) \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div } \mathbf{V} = 0.$$

Da incompressibilidade do fluido, segue-se que $\text{div } \mathbf{V} = 0$, que junto com (2.4) dá a equação de estado:

$$(2.6) \quad \Delta u = 0, \quad \text{em } \Omega.$$

Para terminar a dedução do modelo, define-se as condições na fronteira de Ω :

- (a) **As fronteiras juntos ao reservatórios, Γ_1 e Γ_2 :** Considera-se Γ_1 . Desprezando a velocidade do fluido no reservatório em relação ao interior da barragem, pode-se dizer que o mesmo encontra-se em repouso e portanto, u é constante no interior do reservatório. Dessa forma, Γ_1 é uma linha equipotencial, ou seja,

$$u = \text{Const. sobre } \Gamma_1.$$

Observando que na superfície há contato do fluido com a atmosfera, tem-se $p = 0$ e assim, segue-se de (2.3) que $u = h_1$. Desta forma, tem-se

$$(2.7) \quad u = h_1 \quad \text{sobre } \Gamma_1.$$

Analogamente,

$$(2.8) \quad u = h_2 \quad \text{sobre } \Gamma_2.$$

- (b) **A superfície de percolação Γ_σ :** Como em Γ_σ há contato do fluido com a atmosfera, tem-se $p = 0$ e assim, segue de (2.3) que

$$(2.9) \quad u = y \quad \text{sobre } \Gamma_\sigma.$$

(c) **A fronteira livre, desconhecida *a priori* Γ_λ :** O caso clássico prevê a ausência de qualquer tipo de descarga ou recarga (evaporação ou infiltração). Dessa forma, tem-se:

$$(2.10) \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_\lambda,$$

onde $\vec{\nu}$ é o vetor normal exterior. Além disso, a pressão ao longo de toda a fronteira livre é igual a pressão atmosférica, que é assumida como zero. Dessa forma, obtém-se

$$(2.11) \quad u = y \quad \text{sobre } \Gamma_\lambda.$$

(d) **A base impermeável Γ_0 :** Como o fluido não pode atravessar a base impermeável, a componente normal da velocidade é igual a zero ao longo de Γ_0 , ou seja, $\mathbf{V} \cdot \vec{\nu} = 0$, onde $\vec{\nu}$ é o vetor normal à fronteira. Dessa forma, obtém-se

$$(2.12) \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_0.$$

Modelo Matemático para o Problema Clássico de Barragem

A formulação matemática para o problema pode ser dada na seguinte forma:

Problema 2.1 *Sejam $L, h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ satisfazendo $L > 0$ e $0 < h_2 < h_1$. Encontrar uma função não-crescente $y = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq L$, com*

$$\varphi(0) = h_1 \quad e \quad \varphi(L) > h_2$$

e uma função $u(x, y)$, $(x, y) \in \overline{\Omega}$, onde

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 < y < \varphi(x), 0 < x < L\},$$

satisfazendo:

$$(i) \quad \Delta u = 0 \quad \text{em } \Omega \quad e \quad u \in C^0(\overline{\Omega}),$$

$$(ii) \quad \begin{cases} u(0, y) = h_1 & \text{sobre } \Gamma_1 \quad (0 \leq y \leq h_1), \\ u(L, y) = \begin{cases} h_2 & \text{sobre } \Gamma_2 \quad (0 \leq y \leq h_2), \\ y & \text{sobre } \Gamma_\sigma \quad (h_2 \leq y \leq \varphi(L)), \end{cases} \end{cases}$$

$$(iii) \quad \begin{cases} u(x, y) = y & \text{sobre } \Gamma_\lambda \quad (y = \varphi(x), 0 < x < L), \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}(x, y) = 0 & \text{sobre } \Gamma_\lambda \quad (y = \varphi(x), 0 < x < L), \end{cases}$$

$$(iv) \quad q = \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_0,$$

onde $q = \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}$ é o fluxo normal do potencial.

Embora Γ_λ seja desconhecida, tem-se duas condições para determinar sua posição: $u = y$ e $q = 0$. Sendo φ a função que determina a altura da fronteira livre no ponto de abscissa x , então pela Proposição 7.3 (Apêndice), φ é estritamente decrescente.

Verifica-se que o Problema 2.1 possui uma única solução $\{u, \Gamma_\lambda\}$ tal que $u \in H^2(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ e Γ_λ é suave. O método utilizado para esse fim, dito de transformação ([1], [2], [3], [4] e [24]), consiste em utilizar uma mudança de variável conhecida como *transformação de Baiocchi*, para transformar o problema definido em um domínio com fronteira livre, em um outro equivalente com domínio fixo. Para o novo problema, que aparece sob a forma de uma inequação variacional, obtém-se os resultados de existência e unicidade de solução.

2.4 Solução Analítica Para o Problema Clássico de Barragem em Meio Poroso

Para regiões com geometria simples, existem fórmulas analíticas para encontrar a posição de Γ_λ , como o estudo apresentado em [33] e [6]. No caso de uma região retangular, tem-se:

$$x = L - \int_0^\tau \frac{\mathcal{K}(\sin^2 \tau) \sin \tau d\tau}{\sqrt{(1 - \alpha \sin^2 \tau)(1 - \beta \sin^2 \tau)}}, \quad 0 \leq \tau \leq \pi/2,$$

$$y = h_2 + h_0 + \int_0^\tau \frac{\mathcal{K}(\cos^2 \tau) \sin \tau d\tau}{\sqrt{(1 - \alpha \sin^2 \tau)(1 - \beta \sin^2 \tau)}}, \quad 0 \leq \tau \leq \pi/2,$$

Aqui $\mathcal{K}(\tau)$ denota a integral elíptica completa de primeiro tipo, dada por

$$\mathcal{K}(\xi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \xi \sin^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \xi^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \xi^4 + \dots \right],$$

e $\alpha, \beta \in (0, 1)$ são parâmetros que definem a geometria do problema, isto é, definem os

valores h_1, h_2 e L :

$$(2.13) \quad \begin{aligned} h_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathcal{K}(\alpha + (\beta - \alpha) \operatorname{sen}^2 \tau) d\tau}{\sqrt{\beta - \alpha + (1 - \beta) \operatorname{sen}^2 \tau}}, \\ h_2 &= \sqrt{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathcal{K}(\alpha \operatorname{sen}^2 \tau) \operatorname{sen} \tau d\tau}{\sqrt{(1 - \alpha \operatorname{sen}^2 \tau)(\beta - \alpha \operatorname{sen}^2 \tau)}}, \\ L &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathcal{K}(\alpha + (1 - \beta) \operatorname{sen}^2 \tau) d\tau}{\sqrt{1 - \alpha - (\beta - \alpha) \operatorname{sen}^2 \tau}}. \end{aligned}$$

Para o comprimento da superfície de percolação obtém-se:

$$h_0 = \int_0^{\tau} \frac{\mathcal{K}(\cos^2 \tau) \operatorname{sen} \tau \cos^2 \tau d\tau}{\sqrt{(1 - (1 - \alpha) \operatorname{sen}^2 \tau)(1 - (1 - \beta) \operatorname{sen}^2 \tau)}}.$$

2.5 Formulação Variacional Para o Problema Clássico de Barragem em Meio Poroso

Apresentamos agora, em linhas gerais, o método de transformação de C. Baiocchi introduzido em [1] e [2], bem como a formulação variacional para o Problema 2.1. Nesta seção nos basearemos no método utilizado em [24]. Outras referências são [3] e [4].

Define-se a descarga de fluido através de qualquer linha l , unindo um ponto de Γ_0 a outro de Γ_λ por:

$$Q_l = \int_l \mathbf{V} \cdot \vec{\nu} dl,$$

onde l é uma linha ligando o fundo da barragem Γ_0 e a fronteira livre Γ_λ e $\vec{\nu}$ é o vetor normal a l .

Para o caso particular em que l é uma seção vertical de Ω , temos

$$Q(x) = - \int_0^{\varphi(x)} u_x(x, t) dt,$$

onde $u_x(x, y)$ representa a derivada do campo potencial $u(x, y)$ na direção x .

Lema 2.1 (Fórmula de Dupuit) *Se u é solução do Problema 2.1, então:*

$$Q(x) = \frac{h_1^2 - h_2^2}{2L}.$$

Lema 2.2 *Se $u(x, y)$ é uma solução do Problema 2.1, então $u(x, y) > y, \forall (x, y) \in \Omega$.*

Seja agora w solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} w_y = y - u & \text{em } \Omega, \\ w(x, y) = 0 & \text{sobre } \Gamma_\lambda. \end{cases}$$

Assim,

$$(2.14) \quad w(x, y) = \int_y^{\varphi(x)} [u(x, t) - t] dt.$$

Seja $R = (0, L) \times (0, h_1)$ e considere a extensão nula de w em R , ainda denotada por w , dada por:

$$\begin{cases} w(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ 0, & (x, y) \in R \setminus \Omega. \end{cases}$$

Observamos que $w \geq 0$ em R e $w > 0, \Delta w = 1$ em Ω , que pode ser verificado em [15] e [24].

As condições nas fronteiras Γ_1, Γ_2 e Γ_σ são dadas, respectivamente, por:

$$w(0, y) = \int_y^{\varphi(0)} [u(0, t) - t] dt = \int_y^{h_1} (h_1 - t) dt = \frac{(h_1 - y)^2}{2},$$

$$w(L, y) = \int_y^{\varphi(L)} [u(L, t) - t] dt = \int_y^{h_2} (h_2 - t) dt = \frac{(h_2 - y)^2}{2},$$

$$w(L, y) = \int_y^{\varphi(L)} [u(L, t) - t] dt = \int_y^{\varphi(L)} [t - t] dt = 0.$$

Como não há uma condição para u sobre Γ_0 , torna-se necessário a utilização da fórmula de Dupuit para obter-se o valor de w em Γ_0 :

$$w_x(x, 0) = \int_0^{\varphi(x)} u_x(x, t) dt + [u(x, \varphi(x)) - \varphi(x)] \varphi'(x) = -Q(x) = \frac{h_2^2 - h_1^2}{2L},$$

e portanto,

$$w(x, 0) = \frac{h_1^2}{2} - \frac{h_1^2 - h_2^2}{2L}x.$$

Finalmente segue-se da definição de w que $w = 0$ no restante de ∂R .

Seja

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(h_1 - y)^2 + \frac{x}{2L}[(h_2 - y)^2 - (h_1 - y)^2], & 0 \leq y \leq h_2, \\ \frac{1}{2}(h_1 - y)^2 - \frac{x}{2L}(h_1 - y)^2, & h_2 \leq y \leq h_1. \end{cases}$$

Segundo a definição de $g(x, y)$, $g = w$ e $g \in H^2(R)$.

Lema 2.3 *Seja w a função dada por (2.14). Então, $\forall \xi \in C_0^\infty(R)$,*

$$\int_R (\nabla w \cdot \nabla \xi) dx dy + \int_R I_\Omega \xi dx dy = 0,$$

$\forall \xi \in C^\infty(R)$ que se anula em $x = 0$, $x = L$ e $y = 0$.

Agora definindo o conjunto convexo K por

$$(2.15) \quad K = \{v \in H^2(R) \mid v \geq 0 \text{ em } R, v = g \text{ sobre } \partial R\},$$

tem-se que $w \in K$ e usando o Lema 2.3, a fórmula de Green, a equação de estado para w em Ω e as condições no contorno ∂R , chega-se à seguinte inequação variacional para a função w :

$$(2.16) \quad w \in K, \quad \int_R [\nabla w \cdot \nabla (v - w)] dx dy \geq - \int_R (v - w) dx dy, \quad \forall v \in K.$$

Segue-se assim o seguinte teorema:

Teorema 2.1 *Seja $\{u, \varphi\}$ uma solução do Problema 2.1, com $\varphi(x)$ suave e $u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Considere-se w dada por (2.14) e*

$$w(x, y) = \begin{cases} w(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ 0, & (x, y) \in R \setminus \Omega. \end{cases}$$

Então, w satisfaz

$$w \in K, \quad \int_R [\nabla w \cdot \nabla (v - w)] dx dy \geq - \int_R (v - w) dx dy, \quad \forall v \in K,$$

onde K é definido em (2.15).

Uma consequência do Teorema 2.1 é

Corolário 1 *Se $\{u, \varphi\}$ é uma solução do Problema 2.1, com $\varphi(x)$ suave e $u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, então a solução do Problema 2.1 é única.*

Mostraremos a seguir de forma resumida que a inequação variacional (2.16) é equivalente ao Problema 2.1 que por consequência possui uma única solução.

Pelo Teorema 7.1 (Apêndice), a inequação variacional (2.16) possui uma única solução $w(x, y)$. Além disso, segue-se das Proposições 7.1 e 7.2 que $w \in W^{2,p}(R) \cap C^{1,\lambda}(\overline{R})$, para $1 \leq p < \infty$, $0 < \lambda < 1$.

Seja Ω o aberto definido por

$$\Omega = \{(x, y) \in R \mid w(x, y) > 0\},$$

e observa-se que

$$\Delta w = 1 \text{ em } \Omega \text{ e } w = w_x = w_y = 0 \text{ em } R \setminus \Omega.$$

A fim de se definir φ e estudar o seu comportamento, são dados quatro lemas.

Lema 2.4 *A função w satisfaz $w_x \leq 0$ e $w_y \leq 0$ em R .*

Lema 2.5 *Seja $P_0 = (x_0, y_0) \in R$ e considere os conjuntos dados por*

$$Q^+(P_0) = \{(x, y) \in \overline{R} \mid x > x_0, y > y_0\}$$

e

$$Q^-(P_0) = \{(x, y) \in \overline{R} \mid x < x_0, y < y_0\}$$

Se $P_0 \in R \setminus \Omega$, então $Q^+(P_0) \subset \overline{R} \setminus \overline{\Omega}$ e se $P_0 \in R \cap \partial\Omega$, então $Q^-(P_0) \subset \Omega$.

Lema 2.6 *Sejam Γ_4 a parte da fronteira de R definida por*

$$\Gamma_4 = \{(x, h_1) \mid 0 < x < L\}.$$

A função w satisfaz $w_y = 0$ sobre Γ_4 . Além disso, $\partial\Omega \cap \Gamma_4 = \emptyset$ e $\partial\Omega \cap R \neq \emptyset$.

Define-se agora a função $\varphi(x)$ da seguinte maneira:

$$\varphi(x) = \inf\{y \mid (x, y) \in R \setminus \Omega\} \text{ para } 0 < x < L,$$

(2.17)

$$\varphi(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x), \quad \varphi(L) = \lim_{x \rightarrow L^-} \varphi(x).$$

De acordo com o Lema 2.5, a função $\varphi(x)$ é não-crescente. Em particular, $\varphi(x)$ é não-crescente em uma vizinhança de $x = 0$ e $x = L$ e portanto, os limites acima existem.

Lema 2.7 *O conjunto $\partial\Omega \cap R$ não contém segmentos paralelos aos eixos x ou y . Logo $\varphi(x)$ é contínua e estritamente decrescente.*

Definindo a função $u := y - w_y$, verifica-se que u satisfaz a equação de estado e as condições de contorno do Problema 2.1. Assim, tem-se o seguinte resultado:

Teorema 2.2 *O Problema 2.1 admite uma única solução $\{u, \varphi\}$. Em particular, sendo w uma solução da inequação variacional (2.16) e definindo*

$$u = y - w_y,$$

e ainda sendo φ como em (2.17), então o par $\{u, \varphi\}$ é a solução do Problema 2.1.

A formulação 2.16 possui uma interpretação mecânica, Figura 2.3. A função $w(x, y)$ define o deslocamento de uma membrana sobre um obstáculo rígido. A membrana ocupa uma área cuja projeção no plano (x, y) é igual a R e suas extremidades estão situadas a altura definida pela função $g(x, y)$, $(x, y) \in \partial R$. A força externa aplicada sobre a membrana é igual a $f = -1$ e o obstáculo coincide com o plano Oxy .

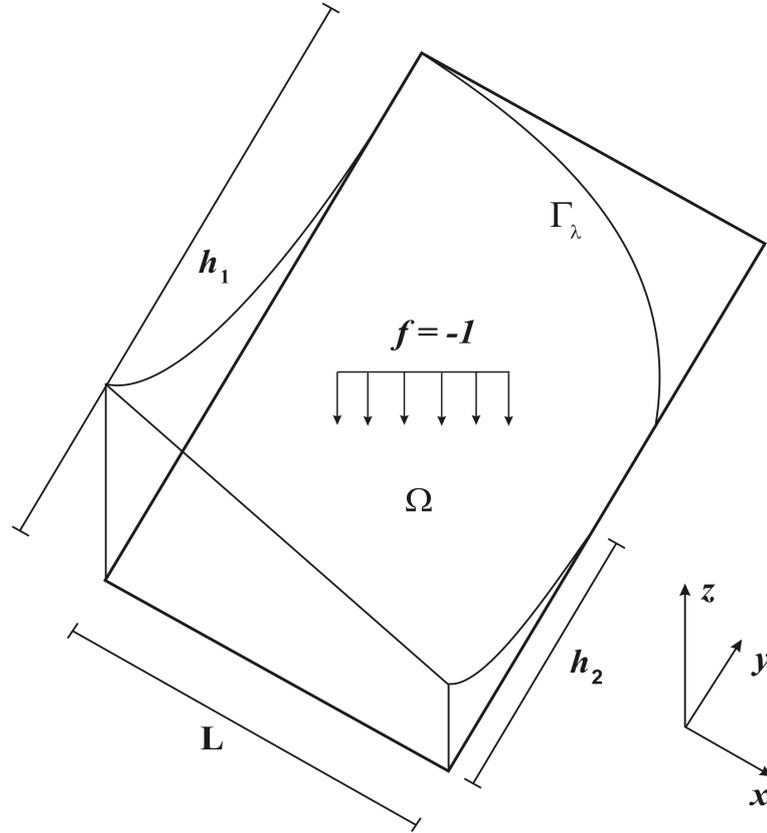


Figura 2.3: Interpretação da Formulação Variacional do Problema Clássico de Barragem em Meio Poroso

A formulação variacional é usada para provar a existência e a unicidade da solução do Problema 2.1 e pode servir também para modelagem numérica aplicando-se métodos para resolução dos problemas de contato ([3]).

2.6 Problema com Fluxo Conhecido no Fundo da Barragem

Os trabalhos [15], [16], [22] e [23] do final da década de 70 e início dos anos 80, introduziram modelos de problemas em meio poroso e de fronteira livre envolvendo infiltração no fundo da barragem. Em todos os casos eles usaram o método da transformada de Baiocchi para obter um problema equivalente e usaram os resultados clássicos de inequações variacionais para mostrar a existência e a unicidade da solução. Nestes trabalhos, os autores se mostraram mais interessados em estudar, entre outras coisas, o comportamento da fronteira livre quanto existência ou não da monotonicidade da mesma.

Problema 2.2 Sejam $L, h_0, h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ satisfazendo $L > 0$, $0 < h_0 < h_1$ e $0 < h_2 < h_1$. Estudar o comportamento de uma função $y = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq L$, com

$$\varphi(0) = h_1 \quad e \quad \varphi(L) > h_2$$

e uma função $u(x, y)$, $(x, y) \in \overline{\Omega}$, onde

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 < y < \varphi(x), 0 < x < L\},$$

satisfazendo:

$$(i) \quad \Delta u = 0 \text{ em } \Omega \quad e \quad u \in C^0(\overline{\Omega}),$$

$$(ii) \quad \begin{cases} u(0, y) = h_1 & \text{sobre } \Gamma_1, \\ u(L, y) = \begin{cases} h_1 & \text{sobre } \Gamma_2, \\ y & \text{sobre } \Gamma_\sigma, \end{cases} \end{cases}$$

$$(iii) \quad \begin{cases} u(x, y) = y & \text{sobre } \Gamma_\sigma \cup \Gamma_\lambda, \\ q = l(x) & \text{sobre } \Gamma_0, \end{cases}$$

$$(iv) \quad q = -C [1 + (\varphi'(x))^2]^{1/2} \text{ sobre } \Gamma_\lambda,$$

onde $q = \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}$ e $\vec{\nu}$ é o vetor normal exterior a $\Gamma_0 \cup \Gamma_\lambda$, $C > -1$ é constante, $l(x)$ é uma função conhecida e que é Hölder contínua em $[0, L]$, satisfazendo $l(0) = l(L) = 0$. Quando $l(x) > 0$ temos fluido movendo para baixo de Γ_0 e quando $l(x) < 0$, temos fluido movendo para cima através de Γ_0 . O termo $-C [1 + (\varphi'(x))^2]^{1/2}$ seria responsável pela evaporação da água através da fronteira livre.

Observe que este problema, também de fronteira livre, tem uma infiltração no fundo da barragem que é conhecida *a priori*. Este problema é transformado, via método de Baiocchi, em um problema de fronteira fixa e que ainda é de natureza variacional. Não aparece muita coisa nova no que diz respeito a existência e unicidade da solução. Embora seja um problema que generaliza o problema clássico proposto por Baiocchi, não apresenta novidades do ponto de vista do estudo da solução. Nestes trabalhos o que aparece de significativo é o estudo do comportamento da fronteira livre (fig. 2.4).

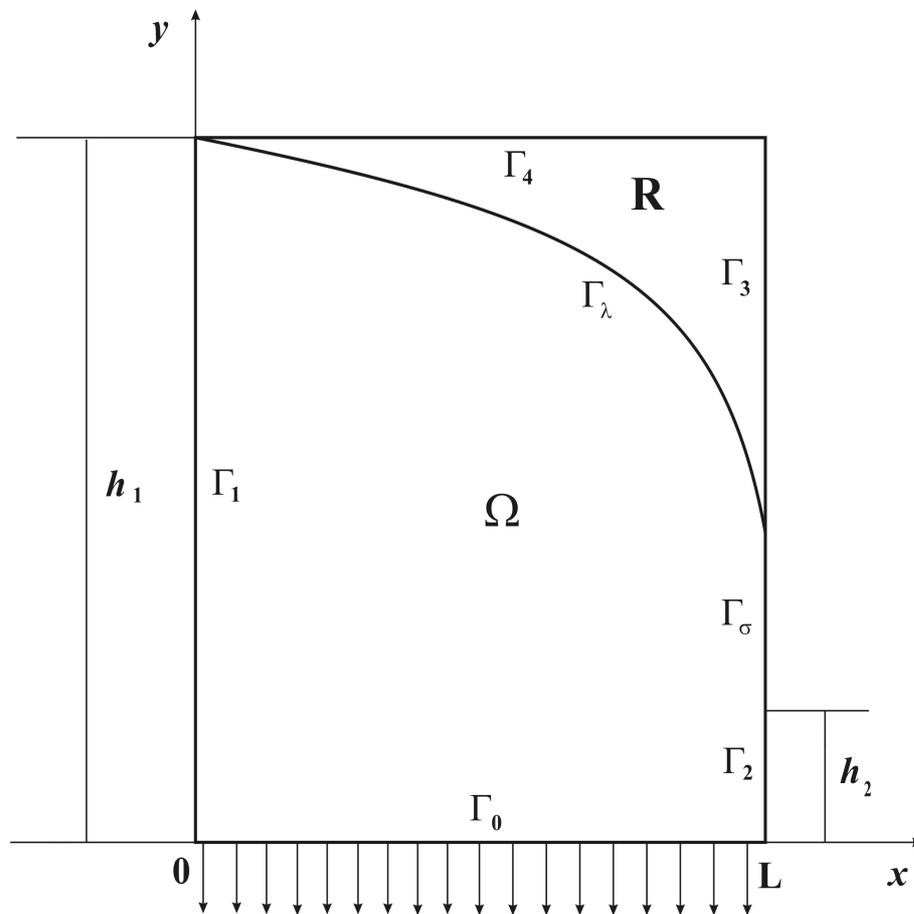


Figura 2.4: Modelo com Fluxo Conhecido no Fundo da Barragem

2.7 Modelo Matemático do Impacto Florestal

Em [10], apresentou um modelo de problema de natureza quase-variacional. Foram vários trabalhos apresentados e que deram origem a esta tese, entre eles, podemos citar [11], [25], [26], [27], [28], [29] e [30]. Neste modelo existe a possibilidade de ocorrer um fluxo de fluido através do lençol freático, o que acontece quando o aquífero entra em contato com o sistema radicular (fig. 2.5).

A formulação matemática para o Problema do Impacto Florestal pode ser dada na seguinte forma:

Problema 2.3 *Sejam $L, h_0, h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ satisfazendo $L > 0$, $0 < h_0 < h_1$ e $0 < h_2 < h_1$. Encontrar uma função não-crescente $y = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq L$, com*

$$\varphi(0) = h_1 \quad e \quad \varphi(L) > h_2$$

e uma função $u(x, y)$, $(x, y) \in \overline{\Omega}$, onde

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 < y < \varphi(x), 0 < x < L\},$$

satisfazendo:

$$(i) \quad \Delta u = 0 \text{ em } \Omega \quad e \quad u \in C^0(\overline{\Omega}),$$

$$(ii) \quad \begin{cases} u(0, y) = h_1 & \text{sobre } \Gamma_1, \\ u(L, y) = \begin{cases} h_1 & \text{sobre } \Gamma_2, \\ y & \text{sobre } \Gamma_\sigma, \end{cases} \end{cases}$$

$$(iii) \quad \begin{cases} u(x, y) = y & \text{sobre } \Gamma_\sigma \cup (\Gamma_\lambda \setminus S_0), \\ q = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \cup (\Gamma_\lambda \setminus S_0), \end{cases}$$

$$(iv) \quad q = -\epsilon(x) \text{ sobre } \Gamma_\lambda \cap S_0,$$

onde $q = \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}(x, y)$. $\vec{\nu}$ é o vetor normal exterior a $\Gamma_0 \cup \Gamma_\lambda$ e $\epsilon(x) \geq 0$ é uma função diferenciável.

Observe que este problema também tem fronteira livre. O método introduzido para resolver este problema é semelhante ao usado no modelo clássico.

Introduz-se uma transformada *do tipo Baiocchi* com o objetivo de obter um novo problema em domínio de fronteira fixa:

$$(2.18) \quad w(x, y) = \int_y^{\varphi(x)} [u(x, t) - t] dt + w_0(x), \quad \text{em } \Omega.$$

onde

$$(2.19) \quad \begin{cases} w_0 \in C^1[0, L], \quad w_0(0) = d^2/2, \quad w_0(L) = 0, \\ w_0''(x) = -\epsilon(x), \quad x \in [0, l_0] \quad e \quad w_0''(x) = 0, \quad x \in (l_0, L]. \end{cases}$$

Mostra-se que as condições de contorno satisfeitas por $w(x, y)$ sobre a fronteira ∂R de R são as mesmas obtidas no modelo clássico. Obtém-se também:

$$w_x(x, 0) = -Q(x) + w'_0(x),$$

de onde se obtém sobre Γ_0 :

$$w(x, 0) = \frac{h_1^2}{2} - \frac{h_1^2 - h_2^2}{2L}x.$$

Seguindo as idéias originais mostra-se o seguinte resultado:

Teorema 2.3 *Seja $\{\varphi, u\}$ uma solução do Problema 2.3, $\varphi(x)$ uma função suave e $u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Considere w dada por (2.18), $w_0(x)$ definida pelas condições (2.20), $w^0(x, y) \equiv w_0(x)$ para $(x, y) \in R$ e*

$$w(x, y) = \begin{cases} w(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ w^0(x, y), & (x, y) \in R \setminus \Omega. \end{cases}$$

Então w satisfaz

$$(2.20) \quad w \in K_0, \quad \int_R \nabla w \cdot \nabla(v - w) dx dy \geq - \int_R (v - w) dx dy, \quad \forall v \in K_0,$$

onde

$$(2.21) \quad K_0 = \{v \in H^1(R) \mid v \geq w^0 \text{ em } R \text{ e } v = G \text{ sobre } \partial R\}$$

e $G \in C^1(\overline{R})$ uma função que coincide com os valores de w sobre ∂R e $G \in C^2(\overline{U})$, para algum aberto $U \subset R$ com $(\partial R \setminus S_0) \subset \partial U$.

Observação 2.1 *Pela definição da função w^0 , o conjunto K_0 depende implicitamente do ponto l_0 e portanto, do fluxo através da área de contato de Γ_λ . Tal área é desconhecida a priori e é definida pela função w . Desta forma temos que (2.20)-(2.21) se caracteriza como uma inequação quase-variacional.*

Usando técnicas semelhantes introduzidas no modelos clássico, obtém-se vários resultados análogos ao mesmo e que permitem conduzir ao seguinte resultado que mostra a equivalência entre os problemas:

Teorema 2.4 *Seja $w \in W^{2,p}(R) \cap C^{1,\lambda}(\overline{R})$, com $1 \leq p < \infty$ e $0 < \lambda < 1$, uma solução da inequação quase-variacional (2.20)-(2.21). Sejam Ω o conjunto definido por $\{(x, y) \in$*

$R \mid w(x, y) > w^0(x, y)\}$ e $u := y - w_y$ em Ω . Assuma que $\epsilon(x) \geq 0$, diferenciável, satisfaça a condição

$$\int_0^L \epsilon(x) \leq \frac{h_0^2 - h_2^2}{2L}$$

e $\epsilon'(x) \geq 0$. Defina $\varphi(x)$ por

$$\varphi(x) = \inf\{y \mid (x, y) \in R \setminus \Omega\}, \quad \text{para } l_0 < x < L,$$

$$\varphi(l_0) = \lim_{x \rightarrow l_0^+} \varphi(x), \quad \varphi(L) = \lim_{x \rightarrow L^-} \varphi(x).$$

Então o par $\{u, \varphi\}$ é solução do Problema 2.3.

Observamos que a hipótese $\epsilon'(x) \geq 0$ garante que $w_x \leq w_x^0$ em Ω , o que significa que o fluxo é sempre não-negativo, ou seja, o fluido sempre escoar do lado esquerdo para o lado direito e nunca na direção oposta.

Para mostrar a existência e unicidade da solução do problema, foi introduzido um método inédito, que consiste em construir uma família de *inequações variacionais* e em seguida obter uma seqüência formada pelas suas soluções que converge para a solução da *inequação quase-variacional* (2.20)-(2.21).

O problema variacional aproximado pode ser construído segundo as idéias expostas a seguir. Para cada $l \in [0, L]$ fixo, denota-se por $w_l^0(x, y)$ a respectiva função definida a partir das condições impostas sobre $w(x, y)$. Assim, obtém-se uma inequação variacional dependente do parâmetro l :

$$(2.22) \quad w \in K_l, \quad \int_R \nabla w \cdot \nabla(v - w) dx dy \geq - \int_R (v - w) dx dy, \quad \forall v \in K_l,$$

onde

$$(2.23) \quad K_l = \{v \in H^1(R) \mid v \geq w^0 \text{ em } R \text{ e } v = G_l \text{ sobre } \partial R\}$$

e G é definida a partir dos valores de w sobre ∂R , substituindo-se $w^0(x, y)$ por $w_l^0(x, y)$.

A inequação variacional (2.22)-(5.2) possui solução única, denotada por $w_l(x, y)$, pelo Teorema 7.1 (Apêndice). Além disso, $w \in W^{2,p}(R) \cap C^{1,\lambda}(\bar{R})$ para $1 \geq p < \infty$, $0 < \lambda < 1$, pelas Proposições 7.1 e 7.2 (Apêndice).

Seja o seguinte aberto $\Omega_l \{(x, y) \in R \mid w_l(x, y) > w_l^0(x, y)\}$. Assim, segue-se do Teorema 7.2 (Apêndice) que:

$$(2.24) \quad \Delta w_l = 1 \text{ em } \Omega_l \quad \text{e} \quad \Delta w_l \leq 1 \text{ em } R.$$

Defina agora o conjunto

$$X_l = \{x \in [0, L] \mid w_l(x, y) > w_l^0(x, y), \quad \forall y \in (0, h_0)\}$$

e seja

$$(2.25) \quad l^* = \max X_l.$$

Definido desta maneira, tem-se que l^* representa o ponto que determina o extremo direito da área de contato entre o lençol freático e o sistema radicular.

Tomando-se l arbitrariamente, tem-se que o valor encontrado para l^* pode ser, em geral, diferente de l . Assim, utilizando a transformação e a técnica sugerida anteriormente, verifica-se que a inequação variacional (2.22)-(5.2) é equivalente a um problema de escoamento semi-confinado. Em ambos os casos tem-se a condição sobre Γ_λ

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = -\epsilon(x)\nu_y, & x \in [0, l], \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = 0, & x \in (l, L]. \end{cases}$$

Observa-se que no caso em que $l = l^*$, a função w_l é uma solução da inequação quase-variacional (2.20)-(2.21). Obtém-se vários resultados técnicos, com interpretação geométricas nos mesmos, a fim de mostrar que $l = l^*$ existe e é único e que implica na existência e unicidade da solução de (2.20)-(2.21). Apresentaremos aqui apenas os dois resultados mais significativos.

Lema 2.8 *Se $\{l_n\}$ é uma seqüência decrescente em $[0, L]$ tal que $l_n \rightarrow l$, então $l_n^* \rightarrow l^*$.*

Teorema 2.5 *Existe um única solução w de classe $W^{2,p} \cap C^{1,\lambda}(\bar{R})$, $1 \leq p < \infty$ e $0 < \lambda < 1$ da inequação quase-variacional (2.20)-(2.21).*

3 Infiltração em Barragem com Fundo Semi-Permeável

3.1 Introdução

Analisaremos agora duas situações físicas de fluidos através de membranas. As idéias apresentadas aqui foram baseadas em [14] e que serviram de motivação para o problema proposto e estudado neste trabalho.

(a) Membrana de Espessura Desprezível:

Supomos que a fronteira Γ de Ω seja uma membrana de espessura desprezível e semi-permeável, isto é, que deixa passar livremente o fluido que entra em Ω , mas ao contrário impede a saída o fluido.

Aplica-se sobre a parte exterior da fronteira Γ de Ω uma pressão dada por $h(x, y)$, $(x, y) \in \Gamma$. Duas situações são possíveis nos pontos (x, y) da fronteira:

$$(i) \quad u(x, y) > h(x, y) :$$

a pressão exterior $h(x, y)$ é inferior a pressão interior $u(x, y)$ nos mesmos pontos $(x, y) \in \Gamma$. O fluido portanto tende a sair de Ω , mas a membrana semi-permeável a impede e por conseguinte, o fluxo através da membrana é nulo nestes pontos, de onde segue-se que $\mathbf{q} \cdot \vec{\nu} = 0$, onde $\vec{\nu}$ é a normal exterior. Como $\mathbf{q} = -k \text{grad } u$, temos:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = 0.$$

$$(ii) \quad u(x, y) \leq h(x, y) :$$

a pressão exterior $h(x, y)$ é superior a pressão interior $u(x, y)$ nos mesmos pontos $(x, y) \in \Gamma$. Portanto o fluido tende a entrar em Ω , pois isto é permitido pelo fato da membrana ser semi-permeável. Segue-se daí que:

$$\mathbf{q} \cdot \vec{\nu} \leq 0.$$

Mas $\mathbf{q} \cdot \vec{\nu} = -k \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}$ deve ser finito, isto faz com que $u(x, y)$ seja contínua sobre a normal $\vec{\nu}$ em uma vizinhança de (x, y) e portanto como a membrana é de espessura desprezível, temos que $h(x, y) = u(x, y)$.

A propriedade da membrana faz com que a pressão interior $u(x, y)$ em um ponto da fronteira seja estritamente menor que a pressão exterior $h(x, y)$.

Resumindo o problema fica assim:

Problema 3.1 *Encontrar $u(x, y)$ que satisfaça:*

$$-\Delta u = g, \quad \text{em } \Omega,$$

com as condições seguintes sobre Γ :

$$\begin{cases} u(x, y) > h(x, y) & \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = 0, \\ u(x, y) = h(x, y) & \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \geq 0, \end{cases}$$

(b) Membrana de Espessura Finita:

Como no caso anterior, a membrana deixa somente entrar o fluido, que é devido a uma pressão de fluido exterior $h(x, y)$. Duas situações são possíveis:

(i) $u(x, y) > h(x, y)$:

o fluido interior a Ω tende a sair de Ω , mas a membrana semi-permeável a impede, de onde segue-se que o fluxo é nulo neste ponto de Γ , isto é,

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = 0.$$

(ii) $u(x, y) \leq h(x, y)$:

o fluido tende a entrar em Ω , atravessando a membrana de espessura finita. Então é razoável admitir que o fluxo que atravessa a membrana é proporcional a diferença de pressão, ou seja,

$$-\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = k(u - h),$$

onde $k > 0$ é uma medida da condutividade da membrana. Se a condutividade da membrana k é nula o fluido não pode entrar e nem sair.

Resumindo o problema fica assim:

Problema 3.2 *Encontrar $u(x, y)$ em um reservatório satisfazendo:*

$$-\Delta u = g, \quad \text{em } \Omega,$$

com as condições sobre a fronteira Γ :

$$\begin{cases} u(x, y) > h(x, y) & \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = 0, \\ u(x, y) \leq h(x, y) & \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = -k(u - h). \end{cases}$$

3.2 Formulação do Problema

No problema clássico, [1] e [2], temos nenhuma possibilidade de fluxo no fundo da barragem. Nos modelos estudados em [22], [23], [16] e [17] é proposto uma infiltração no fundo da barragem que é dada através de uma função conhecida *a priori*. Este problema se torna, de certa forma, um pouco artificial, pois neste modelo já se conhece a infiltração no fundo da barragem e seu comportamento, por isto os autores se preocuparam mais em estudar o comportamento da fronteira livre. Em todos estes modelos, a idéia é transformar o problema de fronteira livre em um problema de fronteira fixa usando a transformação de Baiocchi, o qual pode ser reescrito através de uma inequação variacional e que pode ser analisada pelos métodos clássicos.

No *problema de infiltração em barragem com fundo semi-permeável*, que estamos estudando neste trabalho, o que o torna diferente em relação aos modelos citados, é que não sabemos qual é a infiltração no fundo da barragem, isto é, apenas sabemos que existe uma possibilidade de ocorrer um fluxo de fluido através do fundo da barragem Γ_0 e que esta possível infiltração no fundo da barragem está relacionada com uma pressão externa (sobre Γ_0) conhecida $p_0(x)$ e que pode facilmente ser aferida. Assim, através da medição da pressão pode-se fazer uma análise de possibilidade de infiltração no fundo da barragem. Este modelo proposto generaliza os casos anteriores e conduz a uma inequação quase-variacional.

Seja R a região ocupado pelo meio poroso. Supõe-se que no fundo da barragem existe uma condição do tipo complementaridade, dada pela condição (iv) do Problema 3.3 abaixo, onde pode ocorrer infiltração. A fronteira livre Γ_λ e o potencial de velocidade u em Ω são desconhecidos. Supomos ainda que a função $\varphi(x)$ que define a fronteira livre Γ_λ seja decrescente.

Define-se para o *problema de infiltração em barragem com fundo semi-permeável* os valores sobre Γ_1, Γ_2 e Γ_σ da mesma forma do que no problema clássico, Problema 2.1.

A presença de uma condição de complementaridade no fundo da barragem, que indica a presença de uma infiltração no fundo da barragem, altera as condições na fronteira livre (fig. 3.1).

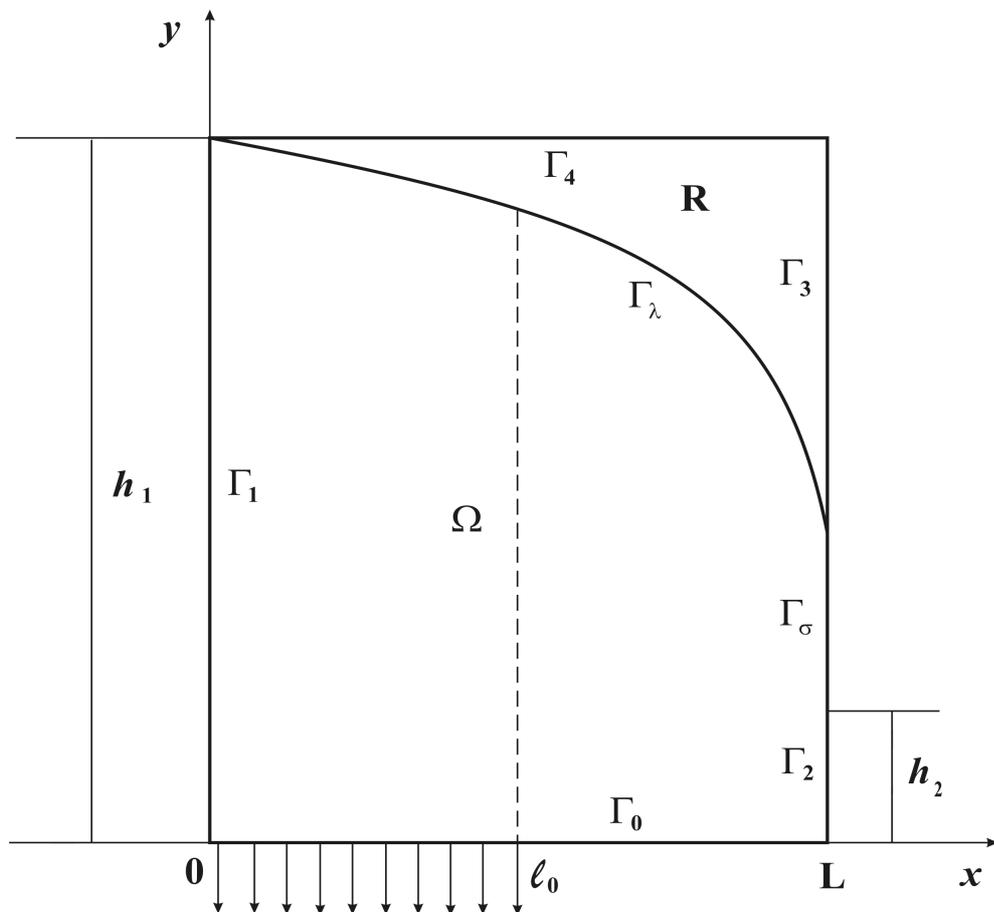


Figura 3.1: Problema de infiltração em barragem com fundo semi-permeável

O modelo matemático para este problema pode ser escrito da seguinte forma:

Problema 3.3 *Sejam $L, h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ satisfazendo $L > 0$ e $0 < h_2 < h_1$. Encontrar uma função não-crescente $y = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq L$, com*

$$\varphi(0) = h_1 \quad e \quad \varphi(L) > h_2$$

e uma função $u(x, y)$, $(x, y) \in \overline{\Omega}$, onde

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 < y < \varphi(x), 0 < x < L\},$$

satisfazendo:

(i) $\Delta u = 0$ em Ω e $u \in C^0(\overline{\Omega})$,

(ii)
$$\begin{cases} u(0, y) = h_1 & \text{sobre } \Gamma_1 \quad (0 \leq y \leq h_1), \\ u(L, y) = \begin{cases} h_2 & \text{sobre } \Gamma_2 \quad (0 \leq y \leq h_2), \\ y & \text{sobre } \Gamma_\sigma \quad (h_2 \leq y \leq \varphi(L)), \end{cases} \end{cases}$$

$$(iii) \quad \begin{cases} u(x, y) = y & \text{sobre } \Gamma_\lambda \quad (y = \varphi(x), 0 < x < L), \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}(x, y) = 0 & \text{sobre } \Gamma_\lambda \quad (y = \varphi(x), 0 < x < L), \end{cases}$$

$$(iv) \quad \begin{cases} u(x, 0) \leq p_0(x) & \text{sobre } \Gamma_0 \quad ((x, 0), 0 < x < L), \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \leq 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \quad ((x, 0), 0 < x < L), \\ (u - p_0) \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \quad ((x, 0), 0 < x < L), \end{cases}$$

onde $p_0(x)$ é uma função que representa a pressão dada no fundo da barragem e $\vec{\nu}$ é a normal exterior.

Observação 3.1 da segunda desigualdade em (iv), temos:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = \nabla u \cdot \vec{\nu} = (u_x, u_y) \cdot (0, -1) = -u_y \leq 0 \quad (\text{ou } u_y \geq 0)$$

Quando $u_y = 0$ não tem infiltração no fundo da barragem e quando $u_y > 0$ tem infiltração no fundo.

Usando a primeira e segunda partes de (iv) na terceira, temos:

$$(u - p_0) \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = (u - p_0)(-u_y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u = p_0, & \text{se } u_y \geq 0, \\ u < p_0, & \text{se } u_y = 0. \end{cases}$$

Esta condição pode ser resumida da seguinte maneira:

- tem-se possibilidade de infiltração no fundo da barragem (apenas saindo através de Γ_0 e não entrando, pois o fundo é semi-permeável) nos pontos $x \in \Gamma_0$ nos quais $u(x, 0) = p_0(x)$,
- tem-se infiltração no fundo da barragem nos pontos $x \in \Gamma_0$ nos quais $u(x, 0) = p_0(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}(x, 0) < 0$ simultaneamente,
- nenhuma infiltração no fundo da barragem nos pontos de $x \in \Gamma_0$ tais que $u(x, 0) < p_0(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = 0$.

A idéia para resolver este problema de fronteira livre consiste em transformá-lo em um problema de fronteira fixa através de uma transformação conveniente. Em seguida, mostra-se que este problema de fronteira fixa é equivalente ao Problema 3.3. Depois procura-se uma solução para o problema de fronteira fixa e através de uma relação que associa os dois problemas, mostra-se a existência para o problema original.

No restante deste capítulo, iremos procurar por tal transformação e também por condições que nos permita obter um problema de fronteira fixa, ou seja, obter uma nova equação e novas condições de contorno para este novo problema. Para isso, iremos supor inicialmente que o Problema 3.3 tem solução, apenas com a intenção de formalizar as contas e transformá-lo em outro problema.

A equivalência entre os problemas será estudada no Capítulo 4 e a existência de solução para o novo problema de fronteira fixa, será estudado no Capítulo 5.

Lema 3.1 *A solução do Problema 3.3 satisfaz:*

$$\int_{\Omega} (u_x \xi_x + u_y \xi_y) dx dy = \int_{\Gamma_0|_{\{u=p_0\}}} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \xi,$$

$\forall \xi \in C^1(\overline{\Omega})$ tal que $\xi = 0$ em uma vizinhança dos segmentos $\partial\Omega \cap \{x = 0\}$ e $\partial\Omega \cap \{x = L\}$.

Demonstração: Pela fórmula de Green, temos:

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_{\Omega} \Delta u \xi = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \xi - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \xi \\ &\Rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \xi = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \xi \\ &= \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \xi + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \xi + \int_{\Gamma_\sigma} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \xi + \int_{\Gamma_\lambda} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \xi + \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \xi \\ &= \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \xi + \int_{\Gamma_0|_{\{u=p_0\}}} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \xi + \int_{\Gamma_0|_{\{u < p_0\}}} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \xi. \end{aligned}$$

Na segunda integral temos que $\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = -u_y = 0$, pela Observação 3.1. Assim,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \xi = \int_{\Gamma_0|_{\{u=p_0\}}} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \xi,$$

que é o que queríamos demonstrar. ■

Mostraremos agora que a pressão é não-negativa em Ω .

Lema 3.2 *Seja $u \in H^1(\Omega)$ uma solução do Problema 3.3. Então,*

$$u(x, y) \geq y \text{ em } \Omega.$$

Demonstração: Inicialmente temos que:

$$u(0, y) = h_1 \geq y; \quad u(L, y) = \begin{cases} h_2, & 0 \leq y \leq h_2, \\ y, & h_2 \leq y \leq \varphi(L). \end{cases} \Rightarrow u(L, y) \geq y.$$

Temos também que $u(x, y) = y$ sobre Γ_λ . ■

Agora considere a seguinte função:

$$\xi = \min\{u - y, 0\} = \begin{cases} 0, & \text{se } u \geq y, \\ u - y, & \text{se } u \leq y. \end{cases}$$

que é não-positiva, pois $u - y = \frac{1}{\gamma} p(x, y)$ e que se anula em $x = 0$ e $x = L$. Podemos descrever ξ como uma função que é nula nos pontos onde a pressão é não-negativa e "igual" a pressão, onde a mesma for não positiva.

Temos também que:

$$\xi_x = \begin{cases} 0, & \text{se } u \geq y, \\ u_x, & \text{se } u \leq y. \end{cases} \quad e \quad \xi_y = \begin{cases} 0, & \text{se } u \geq y, \\ u_y - 1, & \text{se } u \leq y. \end{cases}$$

Aplicando o Lema 3.1 e o fato que $\xi = 0$ em Γ_λ ($u = y$ em Γ_λ), temos:

$$\int_{\Gamma_0|_{\{u=p_0\}}} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \xi = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \xi = \int_{\{u \leq y\}} \nabla u \cdot \nabla \xi + \int_{\{u \geq y\}} \nabla u \cdot \nabla \xi = \int_{\{u \leq y\}} \nabla u \cdot \nabla \xi$$

Assim,

$$\int_{\{u \leq y\}} \nabla u \cdot \nabla \xi = \int_{\Gamma_0|_{\{u=p_0\}}} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \xi.$$

Porém pela Observação 3.1, temos que os pontos de Γ_0 para os quais $u(x) = p_0(x)$, são aqueles em que temos infiltração no fundo da barragem ($u_y(x, 0) \neq 0$), ou seja, $u(x) \geq p_0(x)$, assim a pressão é não-negativa. Pela definição de ξ temos que $\xi = 0$ em $\Gamma_0|_{\{u=p_0\}}$. Assim a integral do segundo membro acima é igual a zero, ou seja,

$$\int_{\{u \leq y\}} \nabla u \cdot \nabla \xi = 0.$$

Substituindo os valores de ξ_x e ξ_y na igualdade acima, obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\{u \leq y\}} (u_x \xi_x + u_y \xi_y) = \int_{\{u \leq y\}} [\xi_x \xi_x + (\xi_y + 1)\xi_y] \\ &= \int_{\{u \leq y\}} (\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_y) = \int_{\{u \leq y\}} (\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_y) + \int_{\{u \geq y\}} 0 \\ &= \int_{\Omega} (\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_y) = \int_{\Omega} (\xi_x^2 + \xi_y^2) dx dy + \int_{\Omega} \xi_y dx dy \\ &= \int_{\Omega} (\xi_x^2 + \xi_y^2) dx dy + \int_0^L \int_0^{\varphi(x)} \xi_y(x, y) dy dx \\ &= \int_{\Omega} (\xi_x^2 + \xi_y^2) + \int_0^L [\xi(x, \varphi(x)) - \xi(x, 0)] dx \\ &= \int_{\Omega} (\xi_x^2 + \xi_y^2) - \int_0^L \xi(x, 0) dx \geq \int_{\Omega} (\xi_x^2 + \xi_y^2) = \int_{\Omega} |\nabla \xi|^2, \end{aligned}$$

pois $\left(-\int_0^L \xi(x, 0) dx\right) \geq 0$ devido ao fato de $\xi \leq 0$ (não-positiva). Assim temos que ξ é constante e portanto $\xi = 0$ para $u \geq y$ em Ω . Segue-se daí que $u \geq y$ em Ω . ■

Para o problema clássico da barragem $\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = 0 \text{ sobre } \Gamma_0\right)$ temos o seguinte resultado:

Proposição 3.1 *Seja u uma solução para problema clássico da barragem, isto é, Problema 3.3 no qual $\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = 0$ sobre Γ_0 . Então,*

$$Q(x) = - \int_0^{\varphi(x)} u_x(x, t) dt = \frac{1}{2L}(h_1^2 - h_2^2) \quad \text{para } 0 < x < L.$$

Demonstração: Tomando $\xi = \xi(x)$, uma função apenas de x que se anula em $x = 0$ e $x = L$ e usando o Lema 3.1 temos:

$$\int_0^L \int_0^{\varphi(x)} u_x(x, y) \xi'(x) dy dx = \int_{\Gamma_0 \setminus \{u=p_0\}} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \xi = 0.$$

Assim,

$$0 = \int_0^L \left[\int_0^{\varphi(x)} u_x(x, t) dt \right] \xi'(x) dx = \left[\int_0^{\varphi(x)} u_x(x, t) dt \right] \xi(x) \Big|_0^L - \int_0^L \left[\int_0^{\varphi(x)} u_x(x, t) dt \right]' \xi(x) dx.$$

como $\xi(0) = \xi(L) = 0$, temos:

$$\int_0^L \left[\int_0^{\varphi(x)} u_x(x, t) dt \right]' \xi(x) dx = 0, \quad \forall \xi(x) \text{ com suporte compacto em } [0, L].$$

Assim temos que:

$$\left[\int_0^{\varphi(x)} u_x(x, t) dt \right]' = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\varphi(x)} u_x(x, t) dt = k = \text{Const.}$$

Mas

$$k = \frac{1}{L} \int_0^L \int_0^{\varphi(x)} u_x(x, t) dt dx = \frac{1}{L} \int_{\partial \Omega} u(x, t) dt = \frac{1}{2L}(h_2^2 - h_1^2).$$

No nosso modelo não temos o fato de que $\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = 0$ sobre todo Γ_0 . Assim não temos como obter o fato de que $Q(x) = - \int_0^{\varphi(x)} u_x(x, t) dt = \text{constante}$.

Como temos infiltração em alguns pontos do fundo da barragem, temos que partir do fato de que a descarga $Q(x)$ é variável em nosso modelo.

Nosso próximo passo é transformar o Problema 3.3 de fronteira livre em um outro problema que possui fronteira fixa e que esperamos que seja "mais fácil" para ser analisado. Para isto faremos uma mudança de variáveis através de uma transformação do tipo Baiocchi.

Seja $R = \{0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq h_1\}$. Inicialmente estendemos u continuamente a \overline{R} , fazendo:

$$\overline{u}(x, y) = \begin{cases} u(x, y), & \text{em } \overline{\Omega}, \\ y, & \text{em } \overline{R} \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Agora introduzimos a transformada w :

$$(3.1) \quad w(x, y) = \int_y^{h_1} [\overline{u}(x, t) - t] dt.$$

A seguir investigaremos algumas propriedades de $w(x, y)$.

(I) Na fronteira livre Γ_λ e em $\overline{R} \setminus \overline{\Omega}$ temos $w = 0$. Assim, w é contínua em \overline{R} , pois (3.1) implica em:

$$(3.1a) \quad w(x, y) = \int_y^{\varphi(x)} [u(x, t) - t] dt \quad \text{em } \overline{\Omega}.$$

(II) $w(x, y) > 0$ em Ω . De fato, a substituição de $\overline{u}(x, y) = y + \frac{1}{\gamma} p(x, y)$ em (3.1) nos dá:

$$w(x, y) = \int_y^{\varphi(x)} \frac{1}{\gamma} p(x, t) dt,$$

como, pelo Lema 3.2, $p(x, y)$ e γ são quantidades positivas em Ω , temos que $w > 0$ em Ω .

(III) Cálculo das derivadas de $w(x, y)$ em R . Diferenciando (3.1a) com relação à x e usando a fórmula de Leibnitz, temos que:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} w_x(x, y) &= \varphi_x(x) [\overline{u}(x, \varphi(x)) - \varphi(x)] + \int_y^{\varphi(x)} u_x(x, t) dt \\ &= \int_y^{\varphi(x)} u_x(x, t) dt, \end{aligned}$$

pois $\varphi(x) = y$ em Γ_λ e $u(x, \varphi(x)) = \varphi(x)$.

De modo análogo, podemos mostrar:

$$(3.3) \quad w_y(x, y) = y - u(x, y) \quad (\leq 0 \text{ em } \Omega \text{ pelo Lema 3.2}).$$

Assim, $w_x = w_y = 0$ sobre $y = \varphi(x)$ e também em $\overline{R} \setminus \overline{\Omega}$. Além disso, as derivadas primeiras de w são contínuas em R .

Nosso próximo passo é determinar uma equação satisfeita por w em R . Inicialmente temos uma informação obtida a partir da fórmula de Green: para toda $\xi \in C^\infty(R)$ que se anula numa vizinhança de $x = 0$, $x = L$ e $y = 0$, tem-se

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \int_R \nabla w \cdot \nabla \xi &= \int_{\partial R} \frac{\partial w}{\partial \vec{\nu}} \xi - \int_R \Delta w \xi \\ &= \int_{\Gamma_0} \frac{\partial w}{\partial \vec{\nu}} \xi + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial w}{\partial \vec{\nu}} \xi + \int_{\{y=h_1\}} \frac{\partial w}{\partial \vec{\nu}} \xi + \int_{\{x=L\}} \frac{\partial w}{\partial \vec{\nu}} \xi - \int_R \Delta w \xi \\ &\Rightarrow \int_R \nabla w \cdot \nabla \xi = - \int_R \Delta w \xi. \end{aligned}$$

Aqui foi usado o fato mencionado acima, ou seja, que $w_x = w_y = 0$ sobre $y = \varphi(x)$ e também em $\overline{R} \setminus \overline{\Omega}$.

O próximo resultado juntamente com (3.4) permite obter uma equação satisfeita por w em R .

Lema 3.3 *Seja w definida por (3.1). Então, com I_Ω denotando a função característica de Ω , temos que:*

$$\int_R [w_x \xi_x + w_y \xi_y] dx dy + \int_R I_\Omega \xi dx dy = 0,$$

$\forall \xi \in C^\infty(R)$ que se anula numa vizinhança de $x = 0$, $x = L$ e $y = 0$.

Demonstração: A fim de mostrar o resultado desejado, introduz-se uma nova função $\psi(x, y)$ definida por:

$$(3.5) \quad \psi(x, y) = \int_0^y \xi(x, t) dt,$$

isto é,

$$(3.6) \quad \xi(x, y) = \psi_y(x, y).$$

Desta forma podemos obter uma nova expressão para $\int_R \nabla w \cdot \nabla \xi$, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \int_R \nabla w \cdot \nabla \xi &= \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \xi + \int_{R \setminus \Omega} \nabla w \cdot \nabla \xi = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \xi \\ &= \int_{\Omega} (w_x \xi_x + w_y \xi_y) = \int_{\Omega} (w_x \psi_{xy} + w_y \psi_{yy}) \\ (3.7) \quad \int_R \nabla w \cdot \nabla \xi &= \int_{\Omega} w_x \psi_{xy} + \int_{\Omega} w_y \psi_{yy}. \end{aligned}$$

Integrando por partes em relação a y na primeira integral do segundo membro, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w_x \psi_{xy} &= \int_{\partial\Omega} w_x \psi_x \vec{\nu}_y - \int_{\Omega} w_{xy} \psi_x \\ &= \int_{\Gamma_0} w_x \psi_x \vec{\nu}_y + \int_{\Gamma_1} w_x \psi_x \vec{\nu}_y + \int_{\Gamma_{\lambda}} w_x \psi_x \vec{\nu}_y + \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_{\sigma}} w_x \psi_x \vec{\nu}_y - \int_{\Omega} w_{xy} \psi_x \\ &= - \int_{\Omega} w_{xy} \psi_x. \end{aligned}$$

Integrando por partes mais uma vez, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w_x \psi_{xy} &= - \int_{\Omega} w_{xy} \psi_x = \int_{\Omega} w_y \psi_{xx} - \int_{\partial\Omega} w_y \psi_x \vec{\nu}_x \\ &= \int_{\Omega} w_y \psi_{xx} - \int_{\Gamma_0} w_y \psi_x \vec{\nu}_x - \int_{\Gamma_1} w_y \psi_x \vec{\nu}_x - \int_{\Gamma_{\lambda}} w_y \psi_x \vec{\nu}_x - \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_{\sigma}} w_y \psi_x \vec{\nu}_x \\ (3.8) \quad \int_{\Omega} w_x \psi_{xy} &= \int_{\Omega} w_y \psi_{xx}. \end{aligned}$$

Substituindo (3.8) em (3.7), obtemos:

$$\int_R \nabla w \cdot \nabla \xi = \int_{\Omega} w_y \psi_{xx} + \int_{\Omega} w_y \psi_{yy} = \int_{\Omega} w_y (\psi_{xx} + \psi_{yy}),$$

$$(3.9) \quad \int_R \nabla w \cdot \nabla \xi = \int_{\Omega} w_y \Delta \psi.$$

Agora iremos substituir

$$\xi(x, y) = \psi_y(x, y), \quad w_y = y - u(x, y) \quad \text{e} \quad \bar{u}(x, y) = \begin{cases} u(x, y), & \text{em } \bar{\Omega}, \\ y, & \text{em } \bar{R} \setminus \bar{\Omega}, \end{cases}$$

em (3.9), para obter:

$$\begin{aligned} \int_R \nabla w \cdot \nabla \xi &= \int_{\Omega} w_y \Delta \psi = - \int_{\Omega} (u - y) \Delta \psi \\ &= \int_{\Omega} \nabla(u - y) \cdot \nabla \psi - \int_{\partial \Omega} (u - y) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\nu}} \\ &= \int_{\Omega} \nabla(u - y) \cdot \nabla \psi - \int_{\Gamma_{\lambda}} (u - y) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\nu}} - \int_{\partial \Omega \setminus \Gamma_{\lambda}} (u - y) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\nu}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_R \nabla w \cdot \nabla \xi &= \int_{\Omega} \nabla(u - y) \cdot \nabla \psi = \int_{\Omega} [(u_x, u_y - 1) \cdot (\psi_x, \psi_y)] \\ &= \int_{\Omega} (u_x \psi_x + u_y \psi_y - \psi_y) = \int_{\Omega} (u_x \psi_x + u_y \psi_y) - \int_{\Omega} \psi_y \\ &= \int_{\Omega} (u_x \psi_x + u_y \psi_y) - \int_{\Omega} \xi. \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.1

$$\int_{\Omega} (u_x \psi_x + u_y \psi_y) = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}} \psi,$$

pois ψ se anula em uma vizinhança de $\Omega \cap \{x = 0\}$ e $\Omega \cap \{x = L\}$. Porém temos também que ψ se anula em $y = 0$ (pela própria definição de ψ). Assim,

$$\int_{\Omega} (u_x \psi_x + u_y \psi_y) = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \psi = 0.$$

Deste modo, temos que:

$$\int_R \nabla w \cdot \nabla \xi = \int_{\Omega} -\xi = \int_R -\xi I_{\Omega},$$

ou seja,

$$(3.10) \quad \int_R \nabla w \cdot \nabla \xi + \int_R I_{\Omega} \xi = 0.$$

■

Agora vamos usar (3.4) e o resultado do Lema 3.3 para escrever:

$$\begin{aligned} \int_R \nabla w \cdot \nabla \xi &= - \int_R \Delta w \xi \quad \text{e} \quad \int_R \nabla w \cdot \nabla \xi = - \int_R I_{\Omega} \xi \\ \Rightarrow \int_R \Delta w \xi &= \int_R I_{\Omega} \xi, \end{aligned}$$

$\forall \xi \in C^{\infty}(R)$ que se anula numa vizinhança de $x = 0$, $x = L$ e $y = 0$.

Assim, $\Delta w = I_{\Omega}$ no sentido das distribuições, ou seja,

$$(3.11) \quad \Delta w = \begin{cases} 1, & \text{em } \Omega \ (w > 0), \\ 0, & \text{em } R \setminus \Omega \ (w = 0). \end{cases}$$

Para completar a formulação do novo problema, precisamos estabelecer as condições satisfeitas por $w(x, y)$ na fronteira de R . Assim,

(I) Em Γ_1 ($x = 0$ em $\bar{u} = (0, y) = u(0, y) = h_1$):

$$w(0, y) = \int_y^{h_1} [\bar{u}(0, t) - t] dt = \int_y^{h_1} [h_1 - t] dt = \frac{1}{2}(h_1 - y)^2.$$

(II) Em Γ_2 ($x = L$ em $\bar{u} = (L, y) = u(L, y) = h_2$):

$$w(L, y) = \int_y^{h_1} [\bar{u}(L, t) - t] dt = \int_y^{h_1} [h_2 - t] dt = \frac{1}{2}(h_2 - y)^2.$$

(III) Em Γ_σ ($x = L$ em $\bar{u} = (L, y) = u(L, y) = y$):

$$w(L, y) = \int_y^{h_1} [\bar{u}(L, t) - t] dt = \int_y^{h_1} [t - t] dt = 0.$$

(IV) Em $x = L$ e $h_2 \leq y \leq h_1$, $\bar{u}(L, y) = y$ ($\bar{R} \setminus \bar{\Omega}$):

$$w(L, y) = \int_y^{h_1} [\bar{u}(L, t) - t] dt = \int_y^{h_1} [t - t] dt = 0.$$

(V) Em $0 \leq x \leq L$ e $y = h_1$, $\bar{u}(x, y_1) = y$ ($\bar{R} \setminus \bar{\Omega}$):

$$w(x, h_1) = \int_{h_1}^{h_1} [\bar{u}(x, t) - t] dt = 0.$$

(VI) Em Γ_0 ($0 \leq x \leq L$ e $y = 0$):

Encontrar as condições satisfeitas por $w(x, y)$ sobre Γ_0 é bem mais delicado do que no modelo clássico, pois temos uma condição de complementaridade satisfeita por u nesta parte da fronteira e não um valor da derivada normal explicitamente em Γ_0 .

A partir deste ponto investigaremos algumas propriedades satisfeitas por w_y sobre Γ_0 .

(i) como $w_y(x, y) = y - u(x, y)$, temos em particular que $w_y(x, 0) = -u(x, 0)$. Assim,

$$w_y(x, 0) + p_0(x) = -u(x, 0) + p_0(x) = -[u(x, 0) - p_0(x)] \geq 0,$$

pois $u(x, 0) - p_0(x) \leq 0$ por hipótese sobre Γ_0 .

(ii) Também temos que:

$$w_{xx}(x, y) = 1 - w_{yy}(x, y) = [y - w_y(x, y)]_y = u_y(x, y)$$

$$w_{xx}(x, 0) = u_y(x, 0) = (-u_x(x, 0), -u_y(x, 0)) \cdot (0, -1) = -\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}(x, 0) \geq 0,$$

pois $\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}(x, 0) \leq 0$ por hipótese sobre Γ_0 .

(iii) Por fim, temos que

$$[w_y(x, 0) + p_0(x)]w_{xx}(x, 0) = [-u(x, 0) + p_0(x)]w_{xx}(x, 0) = [u(x, 0) - p_0(x)]\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}(x, 0) = 0,$$

com a última igualdade obtida também por hipótese sobre Γ_0 .

Podemos reescrever todas estas condições sobre Γ_0 da seguinte forma:

$$(3.12) \quad \begin{cases} w_y + p_0 \geq 0, \\ w_{xx} \geq 0, \\ (w_y + p_0)w_{xx} = 0. \end{cases}$$

Observe que estas últimas condições podem ser resumidas da seguinte maneira: sobre Γ_0 temos $w_y(x, 0) = -p_0(x)$ ou $w_{xx}(x, 0) = 0$.

Após todas estas informações, temos um novo problema para ser resolvido.

Problema 3.4 *Sejam $L, h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ satisfazendo $L > 0$ e $0 < h_2 < h_1$. Considere também $R = [0, L] \times [h_1, h_2]$ e $\Omega = \{(x, y) \mid w(x, y) > 0\}$. Encontrar uma função $w(x, y)$ satisfazendo as seguintes condições:*

$$(i) \quad \Delta w = \begin{cases} 1, & \text{em } \Omega \quad (w > 0), \\ 0, & \text{em } R \setminus \Omega \quad (w = 0). \end{cases}$$

$$(ii) \quad \begin{cases} w(0, y) = \frac{1}{2}(h_1 - y)^2, & \text{sobre } \Gamma_1 \quad (x = 0, 0 \leq y \leq h_1), \\ w(L, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(h_2 - y)^2, & \text{sobre } \Gamma_2 \quad (x = L, 0 \leq y \leq h_2), \\ 0, & \text{sobre } \Gamma_3 \quad (x = L, h_2 \leq y \leq h_1), \end{cases} \\ w(x, h_1) = 0 & \text{sobre } \Gamma_4 \quad (y = h_1, 0 < x < L). \end{cases}$$

(iii) Sobre Γ_0 temos as condições:

$$\begin{cases} w_y + p_0 \geq 0, \\ w_{xx} \geq 0, \\ (w_y + p_0)w_{xx} = 0. \end{cases}$$

Observação 3.2 A condição (iii) do problema acima pode ser reescrita da seguinte forma: $\frac{\partial w}{\partial \vec{\nu}}(x, 0) = -w_y(x, 0) = p_0(x)$ (quando houver infiltração na base) ou $w_{xx}(x, 0) = 0$ (quando não houver infiltração). Observe também que o problema acima não tem fronteira livre.

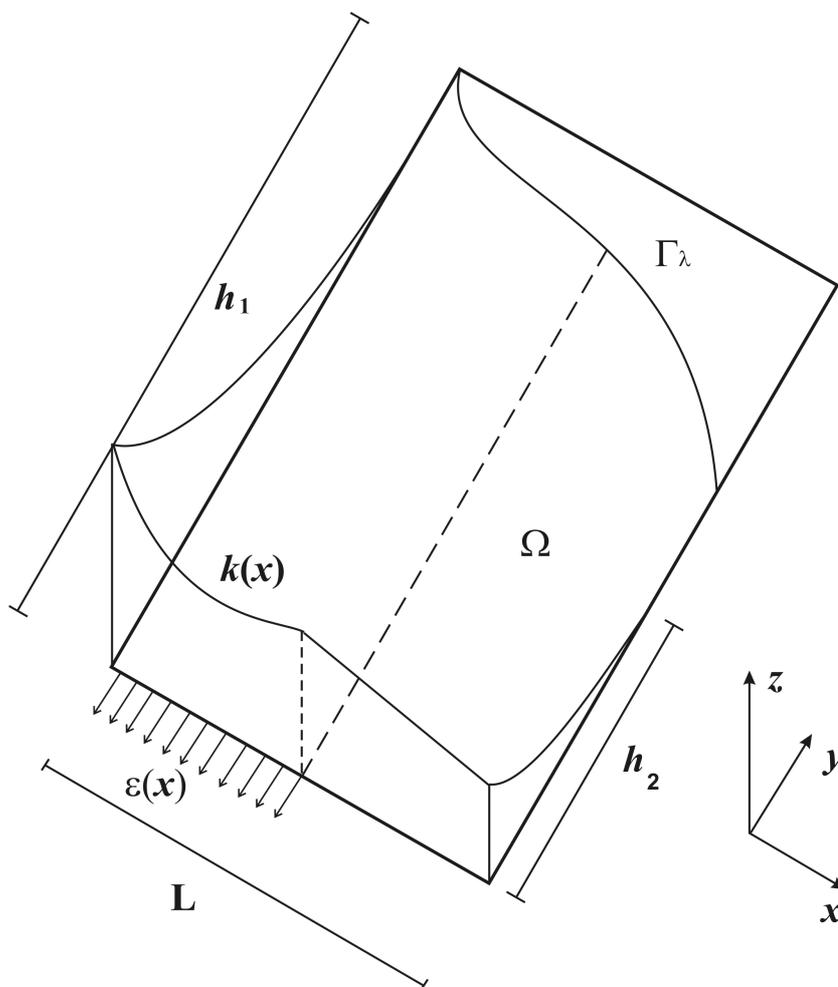


Figura 3.2: Interpretação da Formulação Variacional do Problema de Infiltração com Fundo Semi-Permeável

O problema acima ainda fica difícil de ser estudado na forma que está colocado. Para tentar melhorar a sua forma, vamos re-interpretar estas condições sobre Γ_0 . A idéia para determinar $w(x, 0)$ em $0 \leq x \leq L$ é seguir inicialmente os passos do modelo clássico. Sabemos que

$$w_x(x, y) = \int_y^{\varphi(x)} u_x(x, t) dt.$$

Daí temos que:

$$w_x(x, 0) = \int_0^{\varphi(x)} u_x(x, t) dt = -Q(x).$$

Da definição de Q , ou seja,

$$Q(x) = - \int_0^{\varphi(x)} u_x(x, t) dt,$$

temos que a mesma é integrável. Assim, integramos em relação à x para obter:

$$w(x, 0) = - \int Q(x) dx + C, \quad 0 \leq x \leq L.$$

No caso clássico conhecemos a descarga do fluxo $Q(x)$, que em particular é constante e isto nos permite determinar facilmente $w(x, y)$ sobre Γ_0 . No nosso caso o fluxo não é constante (e nem é conhecido *a priori*), pois temos uma infiltração no fundo da barragem. Como a descarga do fluxo é variável, podemos supor inicialmente que ela seja uma função de x . Assim $w(x, 0)$ é uma nova função de x , digamos:

$$(3.13) \quad w(x, 0) = k(x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

Veremos agora as condições que $k(x)$ deve satisfazer:

$$(3.14) \quad (i) \quad k'(x) = w_x(x, 0) = -Q(x).$$

Levando em consideração que a descarga $Q(x)$ é uma função não-negativa (caso contrário, não teríamos fluido algum do lado direito da barragem), temos que $k'(x) \leq 0$.

$$(3.15) \quad (ii) \quad k''(x) = -Q'(x).$$

Como a descarga $Q(x)$ é uma função não-crescente, temos que $Q'(x) \leq 0$ o que implica em $k''(x) \geq 0$.

Observação 3.3 $Q'(x)$ nos dá a taxa de variação da descarga do fluxo em Ω . Podemos supor que a "quantidade" de infiltração no fundo da barragem é igual a taxa de variação da descarga de fluxo em Ω , isto é,

$$Q'(x) = l(x).$$

onde $Q(x)$ é a descarga de fluxo em cada seção vertical de Ω e $l(x)$ a infiltração no fundo da barragem Γ_0 .

Segue-se da Observação 3.3 e de (3.14) que:

$$l(x) = Q'(x) \quad \text{e} \quad k''(x) = -Q'(x),$$

$$\Rightarrow \quad k''(x) = -l(x).$$

Por outro lado, tomando $l(x) = \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \Big|_{\Gamma_0}$, isto é,

$$l(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0),$$

temos

$$(3.16) \quad k''(x) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0).$$

Continuando, temos por (I) que

$$w(0, y) = \frac{1}{2}(h_1 - y)^2,$$

o que nos dá

$$(3.17) \quad w(0, 0) = \frac{h_1^2}{2}.$$

E por (II), temos que:

$$w(L, y) = \frac{1}{2}(h_2 - y)^2 \quad \Rightarrow \quad w(L, 0) = \frac{h_2^2}{2}.$$

Como $k(x) = w(x, 0)$, $0 \leq x \leq L$, temos

$$k(0) = \frac{h_1^2}{2} \quad \text{e} \quad k(L) = \frac{h_2^2}{2}.$$

Além disso, $k''(x) = -l(x) = u_y(x, 0)$. Assim,

$$(3.18) \quad \begin{cases} k''(x) = u_y(x, 0), \\ k(0) = \frac{h_1^2}{2}, \\ k(L) = \frac{h_2^2}{2}. \end{cases}$$

A solução deste último problema é dada por:

$$(3.19) \quad k(x) = \frac{1}{2}h_1^2 - \frac{x}{L} \left(\frac{h_1^2 - h_2^2}{2} + \int_0^L (L-t)u_y(t,0)dt \right) + \int_0^x (x-t)u_y(t,0)dt.$$

Hipóteses adicionais:

- (i) $u_y(x,0)$ é Hölder contínua, $u_y(0,0) = 0$ e $u_y(L,0) = 0$,
- (ii) $k(x) > 0$; $0 \leq k''(x) \leq 1$, se $0 < x < L$.

O problema agora é que não temos informações explícitas a respeito de $u_y(x,0)$, ou seja, do fluxo $\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}$ sobre Γ_0 . Porém sabemos que existe uma infiltração no fundo da barragem. Neste caso podemos dizer que existe uma função $\epsilon(x) \geq 0$ satisfazendo:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = -\epsilon(x), \quad \text{sobre } \Gamma_0.$$

Os pontos em que $\epsilon(x) > 0$ representam a infiltração sobre Γ_0 e os pontos em que $\epsilon(x) = 0$ representam a parte impermeável.

Assim podemos reescrever a função $k(x)$ da seguinte forma:

$$(3.20) \quad k(x) = \frac{1}{2}h_1^2 - \frac{x}{L} \left(\frac{h_1^2 - h_2^2}{2} + \int_0^L (L-t)\epsilon(t)dt \right) + \int_0^x (x-t)\epsilon(t)dt.$$

Problema 3.5 *Sejam $L, h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ satisfazendo $L > 0$ e $0 < h_2 < h_1$. Considere também $R = [0, L] \times [h_1, h_2]$ e $\Omega = \{(x, y) \mid w(x, y) > 0\}$. Encontrar uma função $w(x, y)$ satisfazendo as seguintes condições:*

$$(i) \quad \Delta w = \begin{cases} 1, & \text{em } \Omega, \quad (w > 0), \\ 0, & \text{em } R \setminus \Omega, \quad (w = 0). \end{cases}$$

$$(ii) \quad \begin{cases} w(0, y) = \frac{1}{2}(h_1 - y)^2, & \text{sobre } \Gamma_1 \quad (x = 0, 0 \leq y \leq h_1), \\ w(L, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(h_2 - y)^2, & \text{sobre } \Gamma_2 \quad (x = L, 0 \leq y \leq h_2), \\ 0, & \text{sobre } \Gamma_3 \quad (x = L, h_2 \leq y \leq h_1), \end{cases} \\ w(x, h_1) = 0, & \text{sobre } \Gamma_4 \quad (y = h_1, 0 < x < L). \end{cases}$$

(iii) Sobre Γ_0 temos a condição:

$$w(x, 0) = k(x),$$

além das condições:
$$\begin{cases} w_y + p_0 \geq 0, \\ (w_y + p_0)w_{xx} = 0. \end{cases}$$

Agora iremos iniciar o processo que permitirá escrever o Problema 3.5 para w em uma única desigualdade. Para isto, sendo $h_1 > 0$ a altura do dique, faça

$$R = \{(x, y) \mid 0 < x < L, 0 < y < h_1\}.$$

Defina uma função $g(x, y)$ sobre ∂R por:

$$(3.21) \quad \begin{cases} g(0, y) = \frac{1}{2}(h_1 - y)^2, & \text{se } 0 < y < h_1, \\ g(L, y) = \frac{1}{2}(h_2 - y)^2, & \text{se } 0 < y < h_2, \\ g(x, 0) = k(x), & \text{se } 0 \leq x \leq L, \\ g = 0, & \text{no resto de } \partial R. \end{cases}$$

Observe que $g(x, y)$ é uma função definida a partir dos valores de contorno de $w(x, y)$ em Ω .

Agora vamos estender $g(x, y)$ a uma função de $W^{2,\infty}(R)$, que será denotada por $G(x, y)$, fazendo:

$$(3.22) \quad G(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(h_1 - y)^2 + \frac{[k(x) - k(0)]}{2[k(L) - k(0)]} [(h_2 - y)^2 - (h_1 - y)^2], & 0 \leq y \leq h_2, \\ \frac{1}{2}(h_1 - y)^2 - \frac{[k(x) - k(0)]}{2[k(L) - k(0)]} (h_1 - y)^2, & h_2 \leq y \leq h_1. \end{cases}$$

Note que $G(x, y)$ é uma função cujos valores na fronteira ∂R de R , coincide com $w(x, y)$.

Problema 3.6 *O Problema 3.5 pode ser reescrito da seguinte forma mais geral:*

$$\begin{cases} -\Delta w = f, & \text{em } R, \\ w = G, & \text{sobre } \partial R. \end{cases}$$

onde $f = -I_\Omega$ e $G \in H^1(R)$ é a função $G(x, y)$ dada em (3.22).

Considere também o conjunto K , subconjunto de $H^1(R)$, não-vazio, definido por:

$$(3.23) \quad K = \{v \in H^1(R) \mid v \geq 0 \text{ em } R, v = G \text{ sobre } \partial R \\ \text{e } v_y + p_0 \geq 0, (v_y + p_0)v_{xx} = 0 \text{ sobre } \Gamma_0\},$$

com $G(x, y)$ dada em (3.22).

Observação 3.4 *Observamos que o conjunto K dado por (3.23) acima não é necessariamente convexo, o que pode ser verificado através das condições "extras" adicionadas Γ_0 ao mesmo, ou seja, $v_y + p_0 \geq 0$ e $(v_y + p_0)v_{xx} = 0$.*

Faça

$$\bar{w}(x, y) = \begin{cases} w(x, y), & \text{em } (x, y) \in \Omega, \\ 0, & \text{em } (x, y) \in R \setminus \Omega. \end{cases}$$

Seja $G(x, y)$ dada por (3.22), tem-se que $G \in K$. De fato,

- (i) $G \in H^1(R)$,
- (ii) $G \geq 0$ em R ,
- (iii) $G_y + p_0 \geq 0$ e $(G_y + p_0)G_{xx} = 0$ sobre Γ_0 . O que pode ser verificado diretamente a partir dos valores de $G(x, y)$.

Por densidade, qualquer que seja $v \in K$, a função $v - \bar{w}$ pode ser aproximada por funções ξ satisfazendo as hipóteses do Lema 3.3. Assim,

$$\int_R \nabla \bar{w} \cdot \nabla (v - \bar{w}) = \int_{\partial R} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{\nu}} (v - \bar{w}) - \int_R \Delta \bar{w} (v - \bar{w})$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{R \setminus \Omega} 0(v - \bar{w}) - \int_{\Omega} 1(v - \bar{w}) = - \int_{\Omega} (v - \bar{w}) \\
&= - \int_R (v - \bar{w}) + \int_{R \setminus \Omega} (v - \bar{w}) \\
&= - \int_R (v - \bar{w}) + \int_{R \setminus \Omega} v \\
&\geq - \int_R (v - \bar{w}).
\end{aligned}$$

Mostramos assim, o seguinte resultado:

Teorema 3.1 *Seja $\{\varphi, x\}$ solução do Problema 3.3 com $u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ e φ suave. Seja w a solução do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} w_y = y - u, & \text{em } \Omega, \\ w = 0, & \text{sobre } \Gamma : y = \varphi(x), 0 < x < L. \end{cases}$$

e defina

$$\bar{w} = \begin{cases} w, & \text{em } \Omega, \\ 0, & \text{em } R \setminus \Omega. \end{cases}$$

Então, $\bar{w} \in K$ satisfaz a inequação quase-variacional

$$(3.24) \quad \int_R \nabla \bar{w} \cdot \nabla (v - \bar{w}) \geq - \int_R (v - \bar{w}), \quad \forall v \in K,$$

onde K é definido por (3.23). Além disso,

$$\Omega = \{(x, y) \mid w(x, y) > 0\}.$$

Observação 3.5 *Pela definição da função $G(x, y)$, temos que ela coincide com a função $k(x)$ sobre Γ_0 ($0 \leq x \leq L$ e $y = 0$). Porém a função $k(x)$ depende de $u_y(x, 0)$ ($\frac{\partial u}{\partial \nu} =$*

$-\epsilon(x)$ sobre Γ_0) e nós não conhecemos a priori o seu valor. Para determinar $\epsilon(x)$ precisamos conhecer a solução u . Assim temos que $k(x)$ depende implicitamente de u e portanto G depende de u , conseqüentemente temos que o "obstáculo" depende da solução u . Desta forma, temos que a inequação obtida, sendo válida em K , se caracteriza como quase-variacional, diferentemente do modelo clássico no qual é obtida uma inequação variacional.

4 Equivalência Entre as Formulações

No Capítulo 3 mostrou-se que era possível transformar o problema de fronteira livre (na variável u) em um problema de fronteira fixa (na variável w) através da transformada de Baiocchi. Para isso, supõe-se que o problema de fronteira livre tinha solução conhecida.

Neste capítulo, será realizado o processo inverso, ou seja, vamos supor conhecida a solução do problema de fronteira fixa (na variável w) e mostrar que este problema se transforma no problema de fronteira livre (na variável u), para o qual procura-se a solução.

O método usado para mostrar que o problema de fronteira fixa tem de fato uma solução, será realizado no Capítulo 5.

Tem-se como objetivo encontrar uma solução para o Problema 3.3 estudando a inequação quase-variacional (3.24). Isto será feito mostrando que $u = y - w_y$ e o conjunto $\Gamma = \partial\Omega \cap R$, $\Omega = \{(x, y) \mid w(x, y) > 0\}$, constituem uma solução para o Problema 3.3 e onde $w(x, y)$ é solução da inequação quase-variacional (3.24). Também será feito aqui um estudo da forma e da suavidade da fronteira livre Γ . Não será mostrado nesta seção a existência e unicidade da inequação quase-variacional. Assume-se a existência e a unicidade em um espaço "suficientemente bom".

Inicialmente procura-se a suavidade para a solução w . Para aplicar resultado da teoria de regularidade ([24]), deve-se mostrar que uma solução do problema de Dirichlet:

$$(4.1) \quad \begin{cases} -\Delta v = f, & \text{em } R, \\ v = h, & \text{sobre } \partial R. \end{cases}$$

satisfaz $v \in W^{2,p}(R)$ quando $f \in L^p(R)$ e $h \in W^{2,p}(R)$, para $2 \leq p < \infty$. Este resultado não é imediato em uma vizinhança de um vértice de R , pois ∂R deixa de ser suave aí.

Este problema admite uma única solução $v \in H^1(R)$ ([24], pág. 24). Substituindo v por $v - h$, pode-se tomar $v = 0$.

Estenda v a região $R^* = \{(x, y) \mid 0 < x < a, -h_1 < y < 0\}$ fazendo:

$$\bar{v}(x, y) = \begin{cases} v(x, y), & (x, y) \in R, \\ -v(x, -y), & (x, y) \in R^*. \end{cases}$$

Com $\Gamma_0 = \{(x, 0) \mid 0 < x < a\}$ sendo a base do dique, tem-se que $-v(x, y) \in H^1(R \cup \Gamma_0 \cup R^*)$ ([24], pág. 55).

Além disso, para qualquer x_0 , $0 < x_0 < L$, temos

$$\bar{v} \in H^2(R \cap B_\epsilon(x_0, 0)) \cap H^2(R^* \cap B_\epsilon(x_0, 0)),$$

para ϵ suficientemente pequeno, pela teoria de regularidade.

Observe que

$$(4.2) \quad -\Delta \bar{v} = \bar{f}, \quad \text{q. s. em } R \cup R^*,$$

onde

$$\bar{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in R, \\ -f(x, -y), & (x, y) \in R^*. \end{cases}$$

Deseja-se que (4.2) seja válido no sentido das distribuições. Para verificar isto, escolha $\xi \in C_0^\infty(B_\epsilon(x_0, 0))$, $0 < x_0 < L$ e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Faça $B_\epsilon^+ = R \cap B_\epsilon(x_0, 0)$, $B_\epsilon^- = R^* \cap B_\epsilon(x_0, 0)$.

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{B_\epsilon} \nabla \bar{v} \cdot \nabla \xi &= \int_{B_\epsilon^+} \nabla \bar{v} \cdot \nabla \xi + \int_{B_\epsilon^-} \nabla \bar{v} \cdot \nabla \xi \\ &= \left(\int_{\partial B_\epsilon^+} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{\nu}} \xi - \int_{B_\epsilon^+} \Delta \bar{v} \xi \right) + \left(\int_{\partial B_\epsilon^-} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{\nu}} \xi - \int_{B_\epsilon^-} \Delta \bar{v} \xi \right) \\ &= \left(\int_{\partial B_\epsilon^+} \frac{\partial v}{\partial \bar{\nu}} \xi + \int_{B_\epsilon^+} f \xi \right) + \left(\int_{\partial B_\epsilon^-} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{\nu}} (-v(x, -y)) \right] \xi(x, y) + \int_{B_\epsilon^-} -f(x, -y) \xi(x, y) \right) \\ &= \left(\int_{B_\epsilon^+} f \xi + \int_{\partial B_\epsilon^{++}} \frac{\partial v}{\partial \bar{\nu}} \xi + \int_{|x-x_0| < \epsilon} \frac{\partial v}{\partial \bar{\nu}} \xi \right) + \left(\int_{B_\epsilon^-} -f(x, -y) \xi(x, y) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\partial B_\epsilon^{--}} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{\nu}} (-v(x, -y)) \right] \xi(x, y) + \int_{|x-x_0| < \epsilon} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{\nu}} (-v(x, -y)) \right] \xi(x, y) \right), \end{aligned}$$

onde $\partial B_\epsilon^{++} = \partial B_\epsilon^+ \setminus \{|x - x_0| < \epsilon\}$ e $\partial B_\epsilon^{--} = \partial B_\epsilon^- \setminus \{|x - x_0| < \epsilon\}$.

Deste modo, como $\xi = 0$ em ∂B_ϵ^{++} e ∂B_ϵ^{--} ($\xi \in C_0^\infty(B_\epsilon(x_0, 0))$):

$$\int_{B_\epsilon} \nabla \bar{v} \cdot \nabla \xi = \int_{B_\epsilon^+} f \xi + \int_{|x-x_0| < \epsilon} [(v_x(x, 0), v_y(x, 0)) \cdot (0, -1)] \xi(x, 0) dx + \int_{B_\epsilon^-} -f(x, -y) \xi(x, y)$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{|x-x_0|<\epsilon} [(-v_x(x,0), v_y(x,0)) \cdot (0,1)] \xi(x,0) dx \\
\int_{B_\epsilon} \nabla \bar{v} \cdot \nabla \xi &= \int_{B_\epsilon^+} f \xi - \int_{|x-x_0|<\epsilon} v_y(x,0) \xi(x,0) dx \\
& + \int_{B_\epsilon^-} -f(x,-y) \xi(x,y) + \int_{|x-x_0|<\epsilon} v_y(x,0) \xi(x,0) dx \\
&= \int_{B_\epsilon^+} f \xi + \int_{B_\epsilon^-} -f(x,-y) \xi(x,y) = \int_{B_\epsilon} \bar{f} \xi.
\end{aligned}$$

Aqui foi usado o fato de que os traços de v_y sobre $\Gamma_0 \cap B_\epsilon(x_0, 0)$ estão bem definidos desde que $v \in H^2(B_\epsilon \cap R) \cap H^2(B_\epsilon \cap R^*)$.

Portanto (4.2) é válido no sentido das distribuições, assim \bar{v} é uma solução de

$$\begin{cases} -\Delta \bar{v} = \bar{f} & \text{em } R \cup R^*, \\ \bar{v} = 0 & \text{sobre } x = 0. \end{cases}$$

Agora $x = 0$ é uma superfície suave, assim a teoria de regularidade diz que $\bar{v} \in H^{2,p}[B_\epsilon(0,0) \cap (R \cup R^*)]$. Logo nosso critério está estabelecido em $(x, y) = (0, 0)$. O tratamento para os demais vértices é feito da mesma forma. Isto assegura que a solução w da inequação quase-variacional satisfaz

$$(4.3) \quad w \in W^{2,p}(R) \cap C^{1,\lambda}(\bar{R}), \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Agora defina

$$(4.4) \quad \Omega = \{(x, y) \in R \mid w(x, y) > 0\}.$$

e observe que:

$$\Delta w = 1 \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad w = w_x = w_y = 0 \quad \text{em } R \setminus \Omega.$$

Para facilitar a descrição de Ω , considere a seguinte notação:

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &= \{(x, 0) \mid 0 < x < L\}, & \Gamma_1 &= \{(0, y) \mid 0 < y < h_1\}, \\
\Gamma_2 &= \{(L, y) \mid 0 < y < h_2\}, & \Gamma_3 &= \{(L, y) \mid h_2 < y < h_1\}, \\
\Gamma_4 &= \{(x, h_1) \mid 0 < x < L\}.
\end{aligned}$$

Lema 4.1 *Com a notação acima, temos:*

$$w_x \leq 0 \text{ sobre } \Gamma_3, \quad w_y \leq 0 \text{ sobre } \Gamma_4,$$

$$w_x = 0 \text{ sobre } \Gamma_4, \quad w_x \leq 0 \text{ sobre } \Gamma_0,$$

$$w_y = 0 \text{ sobre } \Gamma_3, \quad w_y \leq 0 \text{ sobre } \Gamma_2,$$

e $w_y \leq 0$ sobre Γ_1 , onde w denota a solução da inequação quase-variacional (3.24).

Demonstração:

- Sobre Γ_1 , temos:

$$w(0, y) = \frac{1}{2}(h_1 - y)^2 \quad \Rightarrow \quad w_y = -(h_1 - y) \leq 0, \quad \text{pois } 0 < y < h_1.$$

- Sobre Γ_2 , temos:

$$w(L, y) = \frac{1}{2}(h_2 - y)^2 \quad \Rightarrow \quad w_y = -(h_2 - y) \leq 0, \quad \text{pois } 0 < y < h_2.$$

- Sobre Γ_0 , temos:

$$w(x, 0) = k(x), \quad 0 < x < L \quad \Rightarrow \quad w_x(x, 0) = k'(x) = -Q(x) \leq 0.$$

- Sobre Γ_3 , temos:

$$G(x, y) = \frac{1}{2}(h_1 - y)^2 - \frac{[k(x) - k(0)]}{2[k(L) - k(0)]}(h_1 - y)^2, \quad h_2 < y < h_1.$$

$$w(L, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad w_y(L, y) = 0.$$

- Sobre Γ_4 , temos:

$$G(x, y) = \frac{1}{2}(h_1 - y)^2 - \frac{[k(x) - k(0)]}{2[k(L) - k(0)]}(h_1 - y)^2$$

$$G_x(x, y) = -\frac{k'(x)}{2[k(L) - k(0)]}(h_1 - y)^2$$

$$G_x(x, h_1) = -\frac{k'(x)}{2[k(L) - k(0)]}(h_1 - h_1)^2 \quad \Rightarrow \quad G_x(x, h_1) = 0.$$

Resta mostrar que $w_x \leq 0$ sobre Γ_3 e $w_y \leq 0$ sobre Γ_4 .

Para isto usaremos um argumento baseado no princípio do máximo. Entre outras propriedades para w , temos que

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & \text{sobre } R \setminus \Omega, \\ w \geq 0 & \text{em } \bar{R}, \\ w = 0 & \text{em } \partial(R \setminus \Omega). \end{cases}$$

em particular $w = 0$ em $\Gamma_3 \cup \Gamma_4$. Pelo princípio do máximo (mínimo), temos que o mínimo de w é atingido sobre ∂R . Como $w \geq 0$ em ∂R e $w = 0$ sobre $\Gamma_3 \cup \Gamma_4$, em particular, temos que o mínimo é atingido também sobre $\Gamma_3 \cup \Gamma_4$. Segue-se daí que a derivada de w em relação a x é não-positiva sobre Γ_3 e que a derivada de w em relação a y é não-positiva sobre Γ_4 , isto é,

$$w_x \leq 0 \text{ sobre } \Gamma_3 \quad \text{e} \quad w_y \leq 0 \text{ sobre } \Gamma_4.$$

■

Lema 4.2 *A solução w da inequação quase-variacional (3.24) é contínua juntamente com suas derivadas segundas em uma vizinhança de $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ em R e*

$$(4.5) \quad w_{xx} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \quad \text{e} \quad w_{yy} = 1 - k''(x) \text{ sobre } \Gamma_0.$$

Demonstração: Pela continuidade de w e a positividade de G sobre $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, existe uma vizinhança em Ω de $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Lembrando que $\Delta w = 1$ em Ω e que $G \in C^{2,\lambda}(\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2)$, a teoria de regularidade permite concluir que existe uma bola $B_\epsilon(x_0, y_0)$, ϵ suficientemente pequeno, para cada $(x_0, y_0) \in (\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2)$, tal que:

$$w \in C^{2,\lambda}(B_\epsilon(x_0, y_0) \cap \Omega), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Portanto, $w_{xx} = 1 - w_{yy} = 1 - G_{yy} = 1 - 1 = 0$ sobre $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Além disso,

$$w_{yy} = 1 - w_{xx} = 1 - G_{xx} = 1 - k''(x) \text{ sobre } \Gamma_0.$$

Cálculo de G_{xx} e G_{yy} :

- Sobre Γ_0 :

$$G(x, y) = \frac{1}{2}(h_1 - y)^2 + \frac{[k(x) - k(0)]}{2[k(L) - k(0)]}[(h_2 - y)^2 - (h_1 - y)^2], \quad 0 \leq y \leq h_2,$$

$$G_x(x, y) = \frac{k'(x)}{2[k(L) - k(0)]} [(h_2 - y)^2 - (h_1 - y)^2],$$

$$G_{xx}(x, y) = \frac{k''(x)}{2[k(L) - k(0)]} [(h_2 - y)^2 - (h_1 - y)^2].$$

Sobre Γ_0 , temos pontos $(x, 0)$:

$$G_{xx}(x, 0) = \frac{k''(x)}{2[k(L) - k(0)]} (h_2^2 - h_1^2) = k''(x),$$

pois $k(L) = h_2^2/2$ e $k(0) = h_1^2/2$.

- Sobre $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$:

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(h_1 - y)^2 + \frac{[k(x) - k(0)]}{2[k(L) - k(0)]} [(h_2 - y)^2 - (h_1 - y)^2], & 0 \leq y \leq h_2, \\ \frac{1}{2}(h_1 - y)^2 - \frac{[k(x) - k(0)]}{2[k(L) - k(0)]} (h_1 - y)^2, & h_2 \leq y \leq h_1. \end{cases}$$

· Para $0 \leq y \leq h_2$:

$$G_y(x, y) = (y - h_1) + \left[\frac{k(x) - k(0)}{k(L) - k(0)} \right] [(y - h_2) - (y - h_1)],$$

$$G_{yy}(x, y) = 1 + \left[\frac{k(x) - k(0)}{k(L) - k(0)} \right] (1 - 1) = 1,$$

$$\Rightarrow G_{yy} = 1, \text{ para } 0 \leq y \leq h_2; \quad x = 0 \quad \text{e} \quad x = L.$$

· Para $h_2 \leq y \leq h_1$:

$$G_y(x, y) = (y - h_1) - \left[\frac{k(x) - k(0)}{k(L) - k(0)} \right] (y - h_1),$$

$$G_{yy}(x, y) = 1 - \left[\frac{k(x) - k(0)}{k(L) - k(0)} \right],$$

$$G_{yy}(0, y) = 1 - \left[\frac{k(0) - k(0)}{k(L) - k(0)} \right] = 1,$$

$$\Rightarrow G_{yy} = 1, \text{ para } h_2 \leq y \leq h_1 \quad x = 0.$$

Resta mostrar para $y = h_2$. Como estamos assumindo regularidade C^2 para G , temos pelo fato de $G_{xx} = 1$ numa vizinhança de $y = h_2$, que $G_{xx} = 1$ quando $y = h_2$. ■

Lema 4.3 *A solução w da inequação quase-variacional (3.24) satisfaz:*

$$(4.6) \quad w_x \leq 0 \quad e \quad w_y \leq 0 \quad em \quad R.$$

Demonstração: Como $w \in C^{1,\lambda}(\bar{R})$, $0 < \lambda < 1$, temos que as funções w_x e w_y são contínuas em \bar{R} . Além disso, temos que $w_x = w_y = 0$ em $R \setminus \Omega$. Como $\Delta w_x = \Delta w_y = 0$ em Ω , temos pelo princípio do máximo, que:

$$w_x \leq \sup_{\partial\Omega} w_x \quad e \quad w_y \leq \sup_{\partial\Omega} w_y.$$

Pelo Lema 4.2, temos que $w_{xx} = 0$ sobre $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Assim,

- Sobre Γ_1 : $\frac{\partial w_x}{\partial \vec{\nu}} = \nabla w_x \cdot \vec{\nu} = (w_{xx}, w_{xy}) \cdot (-1, 0) = -w_{xx} = 0$.
- Sobre Γ_2 : $\frac{\partial w_x}{\partial \vec{\nu}} = \nabla w_x \cdot \vec{\nu} = (w_{xx}, w_{yy}) \cdot (1, 0) = w_{xx} = 0$.

Deste modo, pelo princípio do máximo de Hopf (Apêndice), temos que w_x não atinge seu máximo sobre $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Portanto,

$$w_x \leq \sup_{\Gamma \cup \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_3}, \quad \Gamma = \partial\Omega - (\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4).$$

Como $w_x = 0$ em $R \setminus \Omega$, por continuidade de w_x , temos que $w_x = 0$ sobre Γ . Pelo Lema 4.1, temos que:

$$w_x \leq 0 \quad \text{sobre} \quad \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_3 \cup \bar{\Gamma}_4.$$

Portanto, temos $w_x \leq 0$ em Ω . Consideraremos agora w_y . Pelo Lema 4.2, temos que $w_{yy} = 1 - k''(x)$ sobre Γ_0 . Assim, sobre Γ_0 , temos:

$$\frac{\partial w_y}{\partial \vec{\nu}} = \nabla w_y \cdot \vec{\nu} = (w_{yx}, w_{yy}) \cdot (0, -1) = -w_{yy} = -(1 - k''(x)) = k''(x) - 1.$$

Se tomarmos como hipótese que $0 < k''(x) < 1$, temos que:

$$\frac{\partial w_y}{\partial \vec{\nu}} < 0.$$

Usando o princípio do máximo de Hopf, temos que o máximo de w_y não é atingido sobre Γ_0 . Assim,

$$w_y \leq \sup_{\partial\Omega \setminus \Gamma_0} w_y.$$

Pelo Lema 4.1, temos que $w_y \leq 0$ sobre $\partial\Omega \setminus \Gamma_0$, donde se conclui que $w_y \leq 0$ em Ω . ■

Notação: Para qualquer ponto $P_0 = (x_0, y_0) \in R$, faça

$$\Lambda^+(P_0) = \{(x, y) \in \overline{R} \mid x > x_0, y > y_0\}$$

e

$$\Lambda^-(P_0) = \{(x, y) \in \overline{R} \mid x < x_0, y < y_0\}.$$

Lema 4.4 *Se $P_0 \in R \setminus \Omega$, então $\Lambda^+(P_0) \subset \overline{R} \setminus \overline{\Omega}$ e se $P_0 \in R \cap \partial\Omega$, então $\Lambda^-(P_0) \subset \Omega$.*

Demonstração: Se $P_0 = (x_0, y_0) \in R \setminus \Omega$, então $w(x_0, y_0) = 0$. Pelo Lema 4.3, temos que $w_x \leq 0$ e $w_y \leq 0$ em R . Então temos que $w(x, y) \leq 0$, para (x, y) próximos de (x_0, y_0) e tais que $x \geq x_0$ e $y \geq y_0$. Como $w \geq 0$ em R , segue-se que $w(x, y) = 0$ para $x \geq x_0$ e $y \geq y_0$, ou seja,

$$\Lambda^+(P_0) \subset \overline{R} \setminus \overline{\Omega}.$$

Suponha agora que $P_0 \in R \cap \partial\Omega$ e $\Lambda^-(P_0)$ não esteja contido em Ω . Então deve existir um ponto $P_0 \in \Lambda^-(P_0)$ tal que $w(x_0, y_0) = 0$. Pelo caso anterior segue-se que $\Lambda^+(P_0) \subset \overline{R} \setminus \overline{\Omega}$. Logo, $\Lambda^+(P_0)$ é disjunto de $R \cap \partial\Omega$, o que é uma contradição, pois $P_0 \in \Lambda^+(P_0)$ e $P_0 \in R \cap \partial\Omega$. Portanto, $\Lambda^-(P_0) \subset \Omega$. ■

Lema 4.5 *A solução w da inequação quase-variacional (3.24) satisfaz:*

$$w_y = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_4.$$

Além disso, $\partial\Omega \cap \Gamma_4 = \emptyset$ e $\partial\Omega \cap R \neq \emptyset$.

Demonstração: Seja $0 < x_0 < L$ e escolha λ suficientemente pequeno de modo que $0 < x_0 < x_0 + \lambda < L$. Assim,

$$\begin{aligned}
w_y(x_0 + \lambda, h_1) - w_y(x_0, h_1) &= - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \left\{ \left[w(x_0 + \lambda, h_1 - t) - w(x_0 + \lambda, h_1) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[w(x_0, h_1 - t) - w(x_0, h_1) \right] \right\} \\
&= - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \left\{ \left[w(x_0 + \lambda, h_1 - t) - G(x_0 + \lambda, h_1) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[w(x_0, h_1 - t) - G(x_0, h_1) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Substituindo estes pontos em $G(x, y)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
w_y(x_0 + \lambda, h_1) - w_y(x_0, h_1) &= - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} [w(x_0 + \lambda, h_1 - t) - w(x_0, h_1 - t)] \\
&= -\lambda \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} w_x(x_0 + \theta\lambda, h_1 - t) \geq 0,
\end{aligned}$$

pois $w_x \leq 0$ em \overline{R} . Portanto $w_y(x, h_1)$ é uma função não-decrescente de x . Como ela se anula em $x = 0$ e $x = L$, necessariamente temos $w_y(x, h_1) = 0$ para $0 < x < L$. Se $(x_0, h_1) \in \partial\Omega$, então necessariamente o intervalo

$$I = \{(x, h_1) \mid 0 < x < x_0\} \subset \partial\Omega,$$

caso contrário $(x_0, h_1) \in \Lambda^+(P)$ para algum $P \in R \cap \partial\Omega$. Para $(x_0, h_1) \in I$, $\Delta w_y = 0$ próximo de (x_1, h_1) e w_y assume seu valor mínimo 0 em (x_1, h_1) . Logo $w_{xy}(x_1, h_1) < 0$. Mas da primeira afirmação deste Lema, $w_{xy}(x_1, h_1) = w_{yx}(x_1, h_1) = 0$. Deste modo, $\partial\Omega \cap \Gamma_4 = \emptyset$ enquanto $\partial\Omega \cap R \neq \emptyset$. ■

Definição 4.1 *Define-se agora a função $\varphi(x)$ da seguinte maneira:*

$$(4.7) \quad \varphi(x) = \inf\{y \mid (x, y) \in R \setminus \Omega\}, \quad \text{para } 0 < x < L,$$

$$\varphi(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) \quad e \quad \varphi(L) = \lim_{x \rightarrow L^-} \varphi(x).$$

O ponto $(x, \varphi(x)) \in \partial\Omega$, $0 < x < L$. Do Lema 4.4, $\partial\Omega \cap \Lambda^+(P) = \emptyset$ para $P = (x, \varphi(x)) \in R \setminus \Omega$, assim φ é uma função não-crescente. Em particular, os limites acima existem.

Finalmente,

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 < y < \varphi(x), 0 < x < L\},$$

onde recordamos que Ω é definido por (4.4), porque $w_y \leq 0$.

Lema 4.6 *O conjunto $\partial\Omega \cap R$ não contém segmentos paralelos aos eixos x e y . Portanto φ é contínua e estritamente decrescente.*

Demonstração: A demonstração é feita por contradição. Suponha que exista um segmento Σ paralelo ao eixo y em $\partial\Omega \cap R$. Então, como $w \equiv 0$ em $\partial\Omega \cap R$, existe uma vizinhança aberta $U \subset \Omega$ com $\Sigma \subset U$ tal que $w \in C^\infty(U \cup \Sigma)$ e

$$\begin{cases} \Delta w_y = 0 & \text{em } U, \\ w_y \leq 0 & \text{em } U, \\ w = w_y = w_x = 0; & \text{sobre } \Sigma, \end{cases}$$

pelo Lema 4.2. Conseqüentemente a função harmônica não-positiva w_y atinge seu máximo sobre Σ e portanto segue-se do princípio do máximo de Hopf que $w_{yx} < 0$ sobre Σ . Entretanto $(w_y)_x = w_{yx} = w_{xy} = 0$ sobre σ pelas condições acima e pela suavidade de w . Analogamente, não existem segmentos paralelos ao eixo x em $\partial\Omega \cap R$. ■

Teorema 4.1 *Seja $w \in W^{2,p}(R) \cap C^{1,\lambda}(\bar{R})$ com $1 \leq p \leq \infty$ e $0 \leq \lambda < 1$, uma solução da inequação quase-variacional (3.24). Sejam Ω o conjunto definido por $\{(x, y) \in R \mid w(x, y) > 0\}$ e $u := y - w_y$ em Ω . Defina $\varphi(x)$ pela fórmula (4.7). Então o par $\{u, \varphi\}$ é solução do Problema 3.3.*

Demonstração: Considerando a função $u := y - w_y$ em Ω , verifica-se a partir das propriedades de w que u satisfaz a equação de estado $\Delta u = 0$ em Ω . De fato, $\Delta u = \Delta(y - w_y) = -\Delta w_y = 0$.

As condições de contorno do Problema 3.3 sobre Γ_1 , Γ_2 e Γ_σ podem ser verificadas do seguinte modo:

- Sobre Γ_1 :

$$u(0, y) = y - w_y(0, y) = y - \left[\frac{1}{2}(h_1 - y)^2\right]_y = y - (y - h_1) = h_1.$$

- Sobre Γ_2 :

$$u(L, y) = y - w_y(L, y) = y - \left[\frac{1}{2}(h_2 - y)^2\right]_y \quad (0 \leq y \leq h_2),$$

$$\Rightarrow u(L, y) = y - (y - h_2) = h_2.$$

- Sobre Γ_σ :

$$u(L, y) = y - w_y(L, y) = y - 0 = y, \quad (h_2 \leq y \leq h_1),$$

Sobre Γ_λ , tem-se $u = y$, pois $w_y = 0$. Para mostrar que $\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = 0$ sobre Γ_λ , considere inicialmente uma função $\xi \in C_0^\infty(R)$. Segue-se da definição de u e do fato de que $\Delta w_y = 0$ em Ω que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \xi &= \int_{\Omega} (u_x \xi_x + u_y \xi_y) dx dy = \int_{\Omega} [-w_{xy} \xi_x + (1 - w_{yy}) \xi_y] dx dy = \int_R [-w_{xy} \xi_x + (1 - w_{yy}) \xi_y] dx dy \\ &= \int_R (-w_{xy} \xi_x + w_{yy} \xi_y) dx dy + \int_R \xi_y dx dy = - \int_R (\nabla w_y) \cdot \nabla \xi dx dy + \int_R \xi_y dx dy \\ &= \int_R (\Delta w_y) \xi - \int_{\partial R} \frac{\partial w_y}{\partial \vec{\nu}} \xi + \int_0^L \int_0^{h_1} \xi_y(x, y) dy dx. \\ (4.8) \quad &\Rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \xi = \int_0^L [\xi(x, h_1) - \xi(x, 0)] dx = 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, usando a fórmula de Green e o fato de que $\Delta u = 0$ em Ω (já mostrado), tem-se:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \xi &= \int_{\Omega} \Delta u \xi - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \xi = - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \xi \\ &= - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \xi - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \xi - \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_\sigma} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \xi - \int_{\Gamma_\lambda} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \xi \\ (4.9) \quad &\Rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \xi = \int_{\Gamma_\lambda} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \xi. \end{aligned}$$

De (4.8) e (4.9), temos que:

$$\int_{\Gamma_\lambda} \frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}} \xi = 0, \quad \forall \xi \in C_0^\infty(R).$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_\lambda,$$

pois $\xi \in C_0^\infty(R)$ é arbitrária.

Além disso, pelas condições (iii) do Problema 3.5 satisfeitas por w sobre Γ_0 , temos que:

$$u(x, 0) - p_0(x) = -w_y(x, 0) - p_0(x) \leq 0.$$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}}(x, 0) = -u_y(x, 0) = w_{yy}(x, 0) - 1 = -w_{xx}(x, 0) = -k''(x) \leq 0.$$

$$(u(x, 0) - p_0(x)) \frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}}(x, 0) = (w_y(x, 0) + p_0(x)) w_{xx}(x, 0) = 0.$$

■

5 Existência da Solução

5.1 Aproximação da Inequação Quase-Variacional

Neste capítulo mostraremos a existência de solução para o problema de fronteira fixa usando um método que consiste basicamente em construir uma família de *inequações variacionais* e em seguida obter uma seqüência formada pelas suas soluções que converge para a solução da *inequação quase-variacional* estudada.

Para mostrar a equivalência entre os problemas, nós assumimos que a pressão no fundo da barragem, Γ_0 , poderia ser variável no intervalo $[0, L]$, ou seja $p_0 = p_0(x)$. Para mostrar a existência da solução, iremos supor que $p_0 = \text{constante}$ sobre Γ_0 . Isto não influencia a natureza prática do problema e nem o torna artificial. Em geral, em construção de barragens, o fundo da mesma é feita de material (poroso) conhecido e que, em geral, pode ser considerado homogêneo, mesmo sendo feito de material diferente do que constitui a barragem. A pressão no fundo (base) da barragem pode ser facilmente aferido e pela natureza homogênea do meio, a mesma apresentará pouca variação, de forma que podemos tomá-la constante.

Considere agora para cada $l \in [0, L]$ fixo, o seguinte problema aproximado, que é de fronteira fixa:

Problema 5.1 *Sejam $L, h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ satisfazendo $L > 0$ e $0 < h_2 < h_1$ e $l \in [0, L]$ um ponto conhecido. Considere também $R = [0, L] \times [h_1, h_2]$ e $\Omega_l = \{(x, y) \mid w_l(x, y) > 0\}$. Encontrar uma função $w_l(x, y)$ satisfazendo as seguintes condições:*

$$(i) \quad \Delta w_l = \begin{cases} 1, & \text{em } \Omega \quad (w_l > 0), \\ 0, & \text{em } R \setminus \Omega \quad (w_l = 0). \end{cases}$$

$$(ii) \quad \begin{cases} w_l(0, y) = \frac{1}{2}(h_1 - y)^2, & \text{sobre } \Gamma_1 \quad (x = 0, 0 \leq y \leq h_1), \\ w_l(L, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(h_2 - y)^2, & \text{sobre } \Gamma_2 \quad (x = L, 0 \leq y \leq h_2), \\ 0, & \text{sobre } \Gamma_3 \quad (x = L, h_2 \leq y \leq h_1), \end{cases} \\ w_l(x, h_1) = 0, & \text{sobre } \Gamma_4 \quad (y = h_1, 0 < x < L). \end{cases}$$

(iii) Sobre Γ_0 temos as condições:

$$\begin{cases} (w_l)_y(x, 0) + p_0 = 0, & 0 \leq x \leq l, \\ (w_l)_{xx}(x, 0) = 0, & l < x \leq L. \end{cases}$$

Agora iremos dar uma formulação variacional para este problema de fronteira fixa, isto é, iremos iniciar o processo que permitirá escrever o Problema 5.1 para w em uma única desigualdade.

Observando que as condições sobre Γ_0 para o problema aproximado são

$$\begin{cases} (w_l)_y(x, 0) + p_0 = 0, & 0 \leq x \leq l, \\ (w_l)_{xx}(x, 0) = 0, & l < x \leq L, \end{cases}$$

temos que w_l está definida por uma função k_l , de modo que $w_l(x, 0) = k_l(x)$, onde a função k_l satisfaz: $k_l(x) \geq 0$, $k'_l(x) \leq 0$ e $0 \leq k''_l(x) \leq 1$, para todo $x \in [0, L]$, além de $k_l(0) = \frac{h_1^2}{2}$ e $k_l(L) = \frac{h_2^2}{2}$, $\forall l \in [0, L]$, ou seja, com as mesmas propriedades satisfeitas por k definida em (3.18).

Denote por Γ_{p_0} o subconjunto de Γ_0 onde $(w_l)_y(x, 0) + p_0 = 0$. Para cada $l \in [0, L]$ fixo, introduza uma função $G_l \in C^2(\overline{R})$, tal que $G_l \geq 0$, dada por:

$$(5.1) \quad G_l(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(h_1 - y)^2, & x = 0, \quad 0 \leq y \leq h_1, \\ \frac{1}{2}(h_2 - y)^2, & x = L, \quad 0 \leq y \leq h_2, \\ \frac{2(L-l)}{h_2^2 - k_l(l)}x + \left[\frac{h_2^2}{2} - \frac{2L(L-l)}{h_2^2 - k_l(l)} \right], & y = 0, \quad l \leq x \leq L, \\ 0, & \text{no resto de } \partial R \setminus \Gamma_{p_0}. \end{cases}$$

Observamos ainda que a expressão $(w_l)_{xx}(x, 0) = 0$ para $l < x \leq L$ significa que a função $w_l(x, y)$ tem a forma de um segmento de reta decrescente no intervalo $[l, L]$, o qual faz parte da definição da função $G_l(x, y)$, pois esta coincide com os valores de w_l sobre $\partial R \setminus \Gamma_{p_0}$.

Agora podemos reescrever o Problema 5.1. Para isso, considere $l \in [0, L]$ fixo.

Problema 5.2 *O Problema 5.1 pode ser reescrito da seguinte forma mais geral:*

$$\begin{cases} -\Delta w_l = f, & \text{em } R, \\ w_l = G_l, & \text{sobre } \partial R \setminus \Gamma_{p_0}, \\ (w_l)_y(x, 0) + p_0 = 0, & \text{em } 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

onde $f = -I_\Omega$, $p_0 = \text{constante}$ e $G_l \in H^1(R)$ é a função $G_l(x, y)$ dada acima em (5.1).

Considera-se que $\partial R \setminus \Gamma_{p_0}$ seja "suficientemente grande", no sentido que a forma de Dirichlet seja coersiva para as funções que se anulam sobre $\partial R \setminus \Gamma_{p_0}$, isto é,

$$\|\xi\|_{H^1(R)} \leq c \|\nabla \xi\|_{L^2(R)}, \quad \text{sobre } \partial R \setminus \Gamma_0,$$

$\xi \in H^1(R)$, para uma constante $c > 0$ e independente de ξ .

Considere agora os seguintes subconjuntos de $H^1(R)$:

$$(5.2) \quad K_l = \{v \in H^1(R) \mid v \geq 0 \text{ em } R \text{ e } v = G_l \text{ sobre } \partial R \setminus \Gamma_{p_0}\}$$

e

$$K_0 = \{v \in H^1(R) \mid v = 0 \text{ sobre } \partial R \setminus \Gamma_{p_0}\}$$

Observe que o conjunto K_l é não-vazio, pois $G_l \in K_l$.

Agora faça

$$\bar{w}_l(x, y) = \begin{cases} w_l(x, y), & \text{em } (x, y) \in \Omega, \\ 0, & \text{em } (x, y) \in R \setminus \Omega. \end{cases}$$

Para cada $l \in [0, L]$ fixo, mostra-se (Apêndice, Teorema 7.5) que o Problema 5.1 pode ser reescrito na seguinte formulação variacional, que é dependente do parâmetro l :

$$(5.3) \quad \bar{w}_l \in K_l, \quad \int_R \nabla \bar{w}_l \cdot \nabla (v - \bar{w}_l) \geq \int_{\Gamma_{p_0}} p_0 (v - \bar{w}_l) - \int_R (v - \bar{w}_l), \quad \forall v \in K_l,$$

onde K_l é dado por (5.2) e G_l é definida por (5.1).

Observação 5.1 *Analisando a condição (iii) (sobre Γ_0) para o Problema 5.1 (problema aproximado), vemos que são as mesmas para a inequação variacional (5.3)-(5.1).*

A inequação variacional (5.3)-(5.1) possui uma única solução, denotada por $w_l(x, y)$, pelo Teorema 7.1 (Apêndice). Além disso, $w_l \in W^{2,p}(R) \cap C^{1,\lambda}(\overline{R})$, $1 \leq p < \infty$, $0 < \lambda < 1$, pelas Proposições 7.1 e 7.2 (Apêndice).

Considere o seguinte conjunto aberto

$$\Omega_l = \{(x, y) \in R \mid w_l(x, y) > 0\}.$$

Segue-se do Teorema 7.2 (Apêndice) que

$$(5.4) \quad \Delta w_l = 1, \text{ em } \Omega_l \quad \text{e} \quad \Delta w_l \leq 1, \text{ em } R.$$

Por hipótese, assuma que existe fluxo de fluido saindo no fundo da barragem Γ_0 na vizinhança direita de $x = 0$ para o problema aproximado. Essa hipótese não é restritiva, pois estamos tomando p_0 constante, o que faz sentido físico devido ao fato do valor da pressão no fundo da barragem ser alta, pois seu valor é igual a altura piezométrica em $x = 0$ ($u(x, 0) = h_1$). O mesmo acontecendo nesta vizinhança. Isto faz com que a pressão exercida nesta vizinhança impeça a entrada de fluxo pelo fundo. Se o valor de p_0 for muito alto, não haverá fluxo algum saindo no fundo da barragem, o que é caracterizado no modelo clássico estudado por Baiocchi. Na prática, mede-se o valor de p_0 e depois verifica se há infiltração ou não a partir dos estudos aqui realizados.

Agora defina

$$(5.5) \quad X_l^* = \{t \in [0, L] \mid (w_l)_y(x, 0) + p_0 = 0 \quad \text{e} \quad (w_l)_{xx}(x, 0) > 0, \forall x \in [0, t]\}.$$

Note que a hipótese de ter fluxo saindo sobre uma vizinhança de $x = 0$, faz com que $(w_l)_{xx}(x, 0) > 0$, nesta vizinhança. Assim, temos que este conjunto $X_l^* \neq \emptyset$.

Dentro deste último subconjunto de $[0, L]$ vamos procurar por um ponto l^* que seja o maior ponto que determina o intervalo de infiltração no fundo da barragem para o problema aproximado, associado um dado ponto l , tal que $0 \leq l \leq L$. Assim, defina

$$(5.6) \quad l^* := \max X_l^*.$$

Observe que sempre temos a condição $l^* \leq l$. Caso contrário, ou seja, $l^* > l$ teríamos $w_y(x, 0) + p_0 = 0$ e $(w_l)_{xx}(x, 0) > 0$ para valores de $x > l$, o que contradiz a hipótese do problema aproximado.

Definido desta forma, temos que l^* representa o ponto que determina o extremo direito do intervalo que possui fluxo de fluido saindo pelo fundo Γ_0 .

Quando toma-se l arbitrariamente, o valor encontrado para l^* pode, em geral, ser diferente de l .

As condições satisfeitas para a solução do Problema 3.3 (na variável u) sobre Γ_0 são as seguintes:

$$\begin{cases} u(x, 0) \leq p_0 & \text{sobre } \Gamma_0 \text{ } ((x, 0), 0 < x < L), \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}} \leq 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \text{ } ((x, 0), 0 < x < L), \\ (u - p_0) \frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}} = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \text{ } ((x, 0), 0 < x < L). \end{cases}$$

Para a correspondente solução w do problema equivalente, associado a inequação quase-variacional, temos sobre Γ_0 , que estas condições são equivalentes as seguintes:

$$\begin{cases} w_y + p_0 \geq 0, & \text{sobre } \Gamma_0, \\ w_{xx} \geq 0, & \text{sobre } \Gamma_0, \\ (w_y + p_0)w_{xx} = 0, & \text{sobre } \Gamma_0. \end{cases}$$

Para mostrarmos a existência, faremos o seguinte:

- procurar por um ponto l_0 que esteja associado a uma função w_{l_0} e que seja uma solução para a inequação quase-variacional (3.24);
- que ponto l_0 seja o extremo direito do intervalo de infiltração no fundo da barragem, intervalo $[0, L]$, para o problema quase-variacional, isto é, l_0 é o maior $x \in [0, L]$ tal que $(w_{l_0})_{xx}(l_0, 0) > 0$;
- que a "pressão" seja estritamente menor do que p_0 à direita de l_0 .

Para este caso, deveremos buscar por um ponto que satisfaça as condições:

$$\begin{cases} (w_{l_0})_y(x, 0) + p_0 = 0 & \text{e } (w_{l_0})_{xx}(x, 0) > 0, & 0 \leq x \leq l_0, \\ (w_{l_0})_y(x, 0) + p_0 > 0 & \text{e } (w_{l_0})_{xx}(x, 0) = 0, & l_0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Assim, temos o seguinte resultado:

Lema 5.1 *Sejam $l_1, l_2 \in [0, L]$ tais que $l_1 < l_2$. Então $k_{l_2}(x) \leq k_{l_1}(x)$.*

Demonstração: Faça $K(x) = k_{l_1}(x) - k_{l_2}(x)$. Da definição de $k(x)$ (3.19)-(3.20), tem-se que $K(x)$ satisfaz:

- (i) $K \in C^1([0, L])$;
- (ii) $K(x)$ é linear em $[0, l_1]$;
- (iii) $K(x)$ tem gráfico côncavo pra baixo $[l_1, l_2]$;
- (iv) $K(x)$ é linear em $[l_2, L]$;
- (v) $K(0) = K(L) = 0$.

Devemos analisar o sinal de $K(x)$ em três sub-intervalos: $(0, l_1)$, (l_1, l_2) e $[l_2, L]$.

- Intervalo $(0, l_1]$: podemos ter $K(x) < 0$ ou $K(x) \geq 0$. Suponha que $K(x) < 0$, $x \in (0, l_1]$. Como $K(x)$ é linear em $[0, l_1]$, temos que $K'(x) = C < 0$, $x \in (0, l_1]$, pois neste caso $K(x)$ seria um segmento de reta decrescente. Como $K(x)$ é côncava pra baixo em $[l_1, l_2]$, então teríamos $K'(x) \leq C < 0$, $x \in [l_1, l_2]$. Mas como $K(x)$ é linear em $[l_2, L]$, teríamos para todo $x \in [l_2, L]$, $K'(x) = K'(l_2) \leq C < 0$, ou seja, $K(x)$ seria um segmento de reta decrescente no intervalo $[l_2, L]$. Assim, $K(x) < 0$ para $x \in [l_2, L]$, mas isto contradiz o fato de que $K(L) = 0$. Portanto, $K(x) \geq 0$ em $(0, l_1]$.

- Intervalo (l_1, l_2) : suponha agora que $K(l_2) < 0$. Como $K(x)$ é côncava pra baixo, teríamos $K'(l_2) \leq 0$. Mas como $K(x)$ é linear em $[l_2, L]$, temos que $K'(x) \leq 0$ e $K(x) < 0$, $x \in [l_2, L]$, o que contradiz o fato de $K(L) = 0$. Logo, $K(x) \geq 0$, $x \in [l_1, l_2]$.

- Intervalo $[l_2, L]$: $K(x)$ é linear em $[l_2, L]$. Como $K(l_2) \geq 0$ e $K(L) = 0$, segue-se que $K(x) \geq 0$, $x \in [l_2, L]$.

Isto mostra que $K(x) \geq 0$ em $[0, L]$, ou seja, se $l_1 < l_2$, então $k_{l_2} \leq k_{l_1}$. ■

Inicialmente, considere a seguinte aplicação $\Lambda : [0, L] \rightarrow C^1(\overline{R})$ dada por:

$$\Lambda(l) = (w_l)(x, y).$$

Lema 5.2 *A aplicação $\Lambda(l)$ é não-crescente.*

Demonstração: Sejam $l_1, l_2 \in [0, L]$ tais que $l_1 < l_2$ e faça $W(x, y) = w_{l_1}(x, y) - w_{l_2}(x, y)$ em R . Defina o conjunto aberto $D = \{(x, y) \in R; W(x, y) < 0\}$.

A demonstração será feita por redução ao absurdo. Suponha que $D \neq \emptyset$. Então existe $P \in D$ tal que $W(P) = w_{l_1}(P) - w_{l_2}(P) < 0$.

Como $w_{l_1}(x, y) \geq 0$, $\forall (x, y) \in \Omega_{l_1}$ (conseqüência da positividade da transformada), temos

$$w_{l_2}(P) > w_{l_1}(P) \geq 0.$$

Portanto, $P \in \Omega_{l_2}$. Sendo $P \in D$ arbitrário, temos que $D \subset \Omega_{l_2}$. Desta forma, temos que:

$$\Delta(-W) = \Delta(w_{l_2} - w_{l_1}) = 1 - \Delta w_{l_1} \geq 0 \text{ em } D.$$

Pelo princípio do máximo de Hopf, temos que $-W(x, y)$ possui um máximo positivo na fronteira ∂D de D , ou seja, que $W(x, y)$ possui um mínimo negativo na fronteira ∂D de D . Assim, temos que $W(x, y)$ assume um valor negativo no interior de R , pois $D \subset R$.

Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned} \Delta W(x, y) \Big|_R &= \Delta[w_{l_1}(x, y) - w_{l_2}(x, y)] = \Delta w_{l_1}(x, y) \Big|_R - \Delta w_{l_2}(x, y) \Big|_R, \\ \Delta W(x, y) \Big|_R &= \Delta w_{l_1}(x, y) \Big|_{\Omega_1} + \Delta w_{l_1}(x, y) \Big|_{R \setminus \Omega_1} - \Delta w_{l_2}(x, y) \Big|_{\Omega_2} - \Delta w_{l_2}(x, y) \Big|_{R \setminus \Omega_2}, \\ \Delta W(x, y) \Big|_R &= 1 + 0 - 1 + 0 = 0, \end{aligned}$$

mostrando que $W(x, y)$ é harmônica em R . Assim, pelo princípio do máximo clássico, temos que $W(x, y)$ atinge seu máximo e mínimo na fronteira ∂R de R .

Agora vamos analisar os valores de $W(x, y)$ sobre a fronteira ∂R de R . Devido aos valores de $w_{l_1}(x, y)$ e $w_{l_2}(x, y)$ sobre ∂R , temos $W(x, y) = 0$ sobre $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ ($\Gamma_3 : x = L$ e $h_2 \leq y \leq h_1$).

Resta analisar a parte Γ_0 da fronteira ∂R de R . Nesta parte temos:

$$W(x, 0) = w_{l_1}(x, 0) - w_{l_2}(x, 0) = k_{l_1}(x) - k_{l_2}(x) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq L,$$

pelo Lema 5.1. Desta forma temos que $W(x, y) \geq 0$ sobre ∂R , ou seja, o seu menor valor (mínimo) só poderá ser zero. Isto contradiz o fato de $W(x, y)$ possuir um mínimo negativo sobre ∂D que é um subconjunto de \overline{R} . Logo, $D = \emptyset$, ou seja,

$$l_1 < l_2 \Rightarrow w_{l_2}(x, y) \leq w_{l_1}(x, y).$$

■

Lema 5.3 *A aplicação Λ é contínua.*

Demonstração: Sejam $l_1, l_2 \in [0, L]$, $l_1 \neq l_2$ e $(x_0, y_0) \in R$ fixo, mas arbitrário. Considere também as normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ para $C^1(\overline{R})$ e \mathbb{R}^2 , respectivamente. Temos,

$$\begin{aligned} \|\Lambda(l_2) - \Lambda(l_1)\|_1 &= \|w_{l_2}(x, y) - w_{l_1}(x, y)\|_1 = \\ &= \|[w_{l_2}(x, y) - w_{l_2}(x_0, y_0)] + [w_{l_2}(x_0, y_0) - w_{l_1}(x_0, y_0)] + [w_{l_1}(x_0, y_0) - w_{l_1}(x, y)]\|_1 \leq \end{aligned}$$

$$\leq \|w_{l_2}(x, y) - w_{l_2}(x_0, y_0)\|_1 + \|w_{l_1}(x, y) - w_{l_1}(x_0, y_0)\|_1 + \|w_{l_2}(x_0, y_0) - w_{l_1}(x_0, y_0)\|_1$$

Agora tomamos $\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_2 < \delta = |l_2 - l_1|$, de forma que $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ quando $l_2 \rightarrow l_1$. Assim temos, pela continuidade da transformada $w_l(x, y)$, pra cada l , que

$$\|w_{l_1}(x, y) - w_{l_1}(x_0, y_0)\|_1 < \epsilon_1 \quad \text{e} \quad \|w_{l_2}(x, y) - w_{l_2}(x_0, y_0)\|_1 < \epsilon_2.$$

Pelo Lema 5.2, temos que a aplicação Λ é monótona, então para cada ponto (x_0, y_0) fixo, a seqüência de escalares $\{w_{l_n}(x_0, y_0)\}$, que é limitada, é convergente. Assim, $\|w_{l_2}(x_0, y_0) - w_{l_1}(x_0, y_0)\|_1 \rightarrow 0$ quando $l_2 \rightarrow l_1$. Portanto, temos que $\|\Lambda(l_2) - \Lambda(l_1)\|_1 \rightarrow 0$, mostrando assim a continuidade de $\Lambda(l)$. ■

Agora, considere as seguintes aplicações $\Lambda_1, \Lambda_2 : [0, L] \rightarrow C^1(\overline{R})$ dadas, respectivamente, por:

$$\Lambda_1(l) = (w_l)_{xx}(x, 0), \quad \Lambda_2(l) = (w_l)_y(x, 0).$$

Lema 5.4 *A aplicação $\Lambda_1(l) = (w_l)_{xx}(x, 0)$ é contínua para cada $x \in [0, L]$ fixo.*

Demonstração: Seja $l \in [0, L]$ e considere uma seqüência $\{l_n\}$ em $[0, L]$ tal que $l_n \rightarrow l$. Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_1(l_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (w_{l_n})_{xx}(x, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} k''_{l_n}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{k'_{l_n}(x+t) - k'_{l_n}(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k'_{l_n}(x+t) - k'_{l_n}(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{k'_l(x+t) - k'_l(x)}{t} = k''_l(x) = (w_l)_{xx}(x, 0) = \Lambda_1(l). \end{aligned}$$

Justificando a troca dos limites. A expressão

$$\left[k'_{l_n}(x+t) - k'_{l_n}(x) \right]$$

pode ser identificada à seguinte seqüência

$$f_n(t) = k'_{l_n}(x+t) - k'_{l_n}(x).$$

Como $k'_{l_n}(t)$ é não-decrescente, $\forall n$, pois $k'_{l_n}(t) \leq 0$ e $k''_{l_n}(t) \geq 0$, $\forall n$ e $\forall t \in [0, L]$, temos que:

$$k'_{l_n}(x+t) \geq k'_{l_n}(x), \quad \forall t \in [0, L].$$

Assim,

$$(5.7) \quad \begin{aligned} k'_{l_n}(x+t) &\geq k'_{l_n}(x), \quad \forall t \in [0, L] \\ \Rightarrow f_n(t) &= k'_{l_n}(x+t) - k'_{l_n}(x) \geq 0, \quad \forall t \in [0, L]. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $k'_{l_n}(x)$ é não-decrescente, temos que:

$$k'_{l_n}(x+t) \leq k'_{l_n}(L) \quad \text{e} \quad k'_{l_n}(0) \leq k'_{l_n}(x), \quad \forall t \in [0, L].$$

Assim,

$$f_n(t) = k'_{l_n}(x+t) - k'_{l_n}(x) \leq k'_{l_n}(L) - k'_{l_n}(0).$$

Como $k'_{l_n}(L) \leq k'_{l_1}(L)$ e $k'_{l_n}(0) \leq k'_{l_1}(0)$, $\forall n$, temos

$$f_n(t) \leq k'_{l_n}(L) - k'_{l_n}(0) \leq k'_{l_1}(L) - k'_{l_1}(0).$$

Sendo os valores de $k'_{l_1}(L)$ e de $k'_{l_1}(0)$ finitos, pois existe a derivada $k''_{l_1}(t)$, $\forall n$ e $\forall t \in [0, L]$, temos que:

$$(5.8) \quad f_n(t) \leq C, \quad \forall n,$$

onde C é uma constante positiva.

Segue-se de (5.7) e (5.8) que $f_n(t)$ é limitada. Logo, existe uma subsequência, ainda denotada por $f_n(t)$, convergente. Isto mostra que o limite existe.

Precisa ser mostrado que este limite é uniforme. Para isso, usamos o seguinte fato: se uma seqüência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, deriváveis no compacto X , converge simplesmente em X para uma função f e além disso, $|f'_n(t)| \leq c$ para todo n e todo $t \in X$, então a convergência é uniforme em X .

Tomando

$$f_n(t) = k'_{l_n}(x+t) - k'_{l_n}(x),$$

temos que $|f'_n(t)| \leq c$, pois $0 \leq k''_{l_n}(t) \leq 1$, $\forall n$ e $\forall t \in [0, L]$. Desta forma, como os limites iterados existem, eles coincidem. ■

Lema 5.5 *Se $l \in [0, L]$, então*

$$(w_l)_{yx}(x, 0) > 0, \quad \text{para } l \leq x \leq L.$$

Demonstração: Por (3.22), temos que:

$$G(x, y) = \frac{1}{2}(h_1 - y)^2 + \frac{[k(x) - k(0)]}{2[k(L) - k(0)]}[(h_2 - y)^2 - (h_1 - y)^2], \quad 0 \leq y \leq h_2, \quad 0 \leq x \leq L.$$

$$G_y(x, y) = -(h_1 - y) + \frac{[k(x) - k(0)]}{[k(L) - k(0)]}[-(h_2 - y) + (h_1 - y)],$$

$$G_y(x, y) = (y - h_1) + \frac{[k(x) - k(0)]}{[k(L) - k(0)]}[(h_1 - y) - (h_2 - y)],$$

$$G_{yx}(x, y) = k'(x) \frac{[(h_1 - y) - (h_2 - y)]}{[k(L) - k(0)]} \Rightarrow G_{yx}(x, 0) = k'(x) \frac{(h_1 - h_2)}{k(L) - k(0)},$$

onde $h_2 < h_1$ e $k(L) < k(0)$.

Por outro lado, usando a definição de $k_l(x)$ a partir da definição de $k(x)$ dada em (3.20) e derivando em relação a x , obtemos:

$$k'_l(x) = -\frac{1}{L} \left(\frac{h_1^2 - h_2^2}{2} + \int_0^L (L - t) \epsilon_l(t, 0) dt \right) + \int_0^x \epsilon_l(t, 0) dt,$$

onde

$$\epsilon_l(x) = \begin{cases} \epsilon_l(x), & \text{para } 0 \leq x \leq l, \\ 0, & \text{para } l < x \leq L. \end{cases}$$

Segue-se daí que

$$k'_l(x) = -\frac{1}{L} \left(\frac{h_1^2 - h_2^2}{2} \right) \text{ para } \forall x \in (l, L],$$

ou seja, que $k'_l(x) < 0$, para $x \in (l, L]$, pois $h_2 < h_1$.

Como $(w_l)_{yx}(x, 0) = (G_l)_{yx}(x, 0)$, pela regularidade da solução, temos que:

$$(w_l)_{yx}(x, 0) > 0, \quad \text{para } l \leq x \leq L.$$

■

Lema 5.6 *Seja $l_i \in [0, L]$, $i = 1, 2$. Para $l_1 < l_2$ e para cada $x \in [0, l_2]$ fixo, temos*

$$(w_{l_2})_y(x, 0) \leq (w_{l_1})_y(x, 0).$$

Demonstração:

$$(5.9) \quad \begin{cases} (w_{l_1})_y(x, 0) + p_0 = 0, & \forall x \in [0, l_1], \\ (w_{l_1})_{xx}(x, 0) = 0, & \forall x \in (l_1, L]. \end{cases}$$

e

$$(5.10) \quad \begin{cases} (w_{l_2})_y(x, 0) + p_0 = 0, & \forall x \in [0, l_2], \\ (w_{l_2})_{xx}(x, 0) = 0, & \forall x \in (l_2, L]. \end{cases}$$

· Para $\forall x \in [0, l_1]$, temos:

$$(w_{l_1})_y(x, 0) + p_0 = 0 = (w_{l_2})_y(x, 0) + p_0.$$

$$(w_{l_1})_y(x, 0) = (w_{l_2})_y(x, 0).$$

· Para $\forall x \in (l_1, l_2]$, temos:

$$(w_{l_2})_y(x, 0) + p_0 = 0 \quad \text{e} \quad (w_{l_1})_y(x, 0) + p_0 > 0.$$

A última desigualdade se justifica pelo uso do Lema 5.5. Assim,

$$(w_{l_2})_y(x, 0) = -p_0 \quad \text{e} \quad (w_{l_1})_y(x, 0) > -p_0 \quad \Rightarrow \quad (w_{l_1})_y(x, 0) > (w_{l_2})_y(x, 0).$$

Portanto,

$$(w_{l_1})_y(x, 0) \geq (w_{l_2})_y(x, 0), \quad x \in [0, l_2].$$

■

Observação 5.2 *O uso dos Lemas 5.5 e 5.6 nos permite concluir que $u_l(x, 0) \leq p_0$ sobre Γ_0 , onde $u_l(x, 0)$ é a correspondente solução do problema "original" associada ao problema aproximado. Além disso,*

$$u(x, y) = y + \frac{1}{\gamma}p(x, y) \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{\gamma}p(x, y) = y - u(x, y).$$

A expressão $(w_{l_1})_y(x, 0) \geq (w_{l_2})_y(x, 0)$ pode ser reescrita, em termos do problema original, da seguinte forma:

$$-p_2(x, 0) \leq -p_1(x, 0), \quad \Rightarrow \quad p_2(x, 0) \geq p_1(x, 0),$$

onde $p_i(x, y)$ é a respectiva pressão para $l = 1, 2$.

Segue-se daí que, se $p_1(x, 0) = \gamma p_0$ (isto é, região com possibilidade de fluxo para $l = 1$), então

$$\gamma p_0 = p_1(x, 0) \leq p_2(x, 0) \leq \gamma p_0 \quad \Rightarrow \quad p_2(x, 0) = \gamma p_0,$$

ou seja, implica na possibilidade de fluxo para $l = 2$.

Resumindo: a região com possibilidade de fluxo para $l = 1$ está contida na região com possibilidade de fluxo para $l = 2$.

Lema 5.7 *A aplicação $\Lambda^* : [0, L] \rightarrow [0, L]$ definida por $\Lambda^*(l) = l^*$ é não-crescente.*

Demonstração: Sejam $l_1, l_2 \in [0, L]$, tal que $l_1 < l_2$. Mostraremos que $l_2^* \leq l_1^*$.

Seja X_l^* o subconjunto de $[0, L]$ dado por (5.5). Neste caso, temos que $l^* = \max X_l^*$.

Tome $x_0 \in X_{l_2}^*$, então

$$(w_{l_2})_y(x_0, 0) + p_0 = 0 \text{ e } (w_{l_2})_{xx}(x_0, 0) > 0.$$

Pelo Lema 5.1 temos que $k_{l_2}(x) \leq k_{l_1}(x)$ para $l_1 < l_2$. Como $(w_{l_i})_{xx}(x, 0) = k_{l_i}(x, 0)$, temos:

$$(w_{l_1})_{xx}(x_0, 0) \geq (w_{l_2})_{xx}(x_0, 0) > 0 \Rightarrow (w_{l_1})_{xx}(x_0, 0) > 0.$$

Por outro lado, usando o Lema 5.6, temos que:

$$(w_{l_1})_y(x_0, 0) \geq (w_{l_2})_y(x_0, 0).$$

Como $p_0 > 0$, temos que:

$$(w_{l_1})_y(x_0, 0) + p_0 \geq (w_{l_2})_y(x_0, 0) + p_0 = 0 \Rightarrow (w_{l_1})_y(x_0, 0) + p_0 \geq 0.$$

Como $(w_{l_1})_y(x_0, 0) + p_0 \geq 0$ e $(w_{l_1})_{xx}(x_0, 0) > 0$, temos que existe fluxo de fluido neste ponto, logo deveremos ter

$$(5.11) \quad (w_{l_1})_y(x_0, 0) + p_0 = 0,$$

pois a condição $(w_{l_1})_y(x_0, 0) + p_0 > 0$ diz que $(w_{l_1})_{xx}(x_0, 0) = 0$.

Isto implica que $x_0 \in X_{l_1}^*$. Como $x_0 \in X_{l_2}^*$ é arbitrário, temos que $X_{l_2}^* \subset X_{l_1}^*$. Pela definição de l^* , temos que $l_2^* \leq l_1^*$. ■

Lema 5.8 A aplicação $\Lambda_2 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Lambda_2(l) = (w_l)_y(x, 0)$ é contínua para cada $x \in [0, L]$ fixo.

Demonstração: Seja $l \in [0, L]$ e tome uma seqüência $\{l_n\}$ em $[0, L]$ tal que $l_n \rightarrow l$. Pelo Lema (5.7), temos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (w_{l_n})_y(x, 0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{w_{l_n}(x, 0+t) - w_{l_n}(x, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_{l_n}(x, t) - w_{l_n}(x, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{w_l(x, t) - w_l(x, 0)}{t} = (w_l)_y(x, t). \end{aligned}$$

Justificativa na troca dos limites: considere a mudança de variáveis $m = 1/t$. A expressão

$$\frac{1}{t} \left[w_{l_n}(x, t) - w_{l_n}(x, 0) \right]$$

pode ser identificada à seqüência dupla de números reais dada por

$$X_{nm} = m \left[w_{l_n}(x, \frac{1}{m}) - w_{l_n}(x, 0) \right].$$

Como a transformada decresce na direção na direção y (com x fixo), temos que:

$$w_{l_n}(x, \frac{1}{m}) \leq w_{l_n}(x, 0), \quad \forall x \in [0, L].$$

Assim,

$$\begin{aligned} & m w_{l_n}(x, \frac{1}{m}) \leq m w_{l_n}(x, 0), \quad \forall x \in [0, L] \\ (5.12) \quad & \Rightarrow \quad m \left[w_{l_n}(x, \frac{1}{m}) - w_{l_n}(x, 0) \right] \leq 0, \quad \forall x \in [0, L]. \end{aligned}$$

Por outro lado, como a transformada decresce na direção x (com y fixo) temos:

$$w_{l_n}(0, 0) \geq w_{l_n}(x, 0) \quad \text{e} \quad w_{l_n}(x, \frac{1}{m}) \geq w_{l_n}(L, \frac{1}{m}), \quad \forall x \in [0, L].$$

Assim,

$$\begin{aligned} (5.13) \quad X_{nm} &= m \left[w_{l_n}(x, \frac{1}{m}) - w_{l_n}(x, 0) \right] = m w_{l_n}(x, \frac{1}{m}) - m w_{l_n}(x, 0) \geq \\ &\geq m w_{l_n}(L, \frac{1}{m}) - m w_{l_n}(x, 0) \geq m w_{l_n}(L, \frac{1}{m}) - m w_{l_n}(0, 0) = \\ &= \frac{m}{2} (h_2 - \frac{1}{m})^2 - \frac{m}{2} h_1^2 = \frac{m}{2} \left[(h_2 - \frac{1}{m})^2 - h_1^2 \right] \geq \frac{1}{2} (h_2^2 - h_1^2) \\ &X_{nm} \geq \frac{1}{2} (h_2^2 - h_1^2), \end{aligned}$$

para todos m, n naturais. Observe que $(h_2^2 - h_1^2)$ é negativo, pois $h_2 < h_1$.

Segue-se de (5.12) e (5.13) que X_{nm} é limitada. Logo, existe uma subsequência, ainda denotada por X_{mn} , convergente. Isto mostra que o limite existe.

Precisa ser mostrado que este limite é uniforme. Para isso, usamos o seguinte fato: Seja $f_n : K \rightarrow \mathbb{R}$, K compacto, tais que $f_n(0) = a$ para todo n e existe $k > 0$ tal que $|f_n(X) - f_n(Y)| \leq k|X - Y|$, para todo n e todo $X, Y \in K$. Então $\{f_n\}$ possui uma subsequência que converge uniformemente em K .

Lembremos que $w_{l_n}(0, 0) = \frac{h_1}{2}$ para todo n . Agora usaremos o teorema do valor médio. Sejam $X = (x_1, t_1)$, $Y = (x_2, t_2)$ em R , $t = \min\{t_1, t_2\}$, $M_n = \max\{|\nabla w_{l_n}(x, y)|; (x, y) \in R\}$ e $M = \max M_n$.

Fazendo $f_n(x, t) = w_{l_n}(x, t) - w_{l_n}(x, 0)$, temos

$$|f_n(X) - f_n(Y)| = |f_n(x_1, t_1) - f_n(x_2, t_2)| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \left[w_{l_n}(x_1, t_1) - w_{l_n}(x_1, 0) \right] - \left[w_{l_n}(x_2, t_2) - w_{l_n}(x_2, 0) \right] \right| = \\
&= \left| \left[w_{l_n}(x_1, t_1) - w_{l_n}(x_2, t_2) \right] + \left[w_{l_n}(x_2, 0) - w_{l_n}(x_1, 0) \right] \right| \leq \\
&\leq |w_{l_n}(x_1, t_1) - w_{l_n}(x_1, 0)| + |w_{l_n}(x_2, t_2) - w_{l_n}(x_2, 0)| \leq (\text{TVM}) \\
&\leq |\nabla w_{l_n}(x_2 + \theta_1 x_1, t_2 + \theta_2 t_1)| |(x_2 - x_1, t_2 - t_1)| + |\nabla w_{l_n}(x_2 + \theta x_1, 0)| |(x_2 - x_1, 0)| \leq \\
&\leq M_n |(x_2 - x_1, t_2 - t_1)| + M_n |(x_2 - x_1, 0)| \leq \\
&\leq M_n |(x_2 - x_1, t_2 - t_1)| + M_n |(x_2 - x_1, t_2 - t_1)| \leq \\
&\leq 2M_n |(x_2 - x_1, t_2 - t_1)| = \leq 2M |(x_2 - x_1, t_2 - t_1)| = \\
&\leq k |(x_2 - x_1, t_2 - t_1)| = k |X - Y|.
\end{aligned}$$

Usando o resultado citado acima, obtemos a convergência uniforme. Desta forma, como os limites iterados existem, eles coincidem. ■

Lema 5.9 $l^* = \min \{x \in [0, L] \mid (w_l)_y(x, 0) + p_0 \geq 0 \text{ e } (w_l)_{xx}(x, 0) \leq 0\}$.

Demonstração: Sejam X_l^* dado por (5.5) e $X_l' = \{x \in [0, L] \mid (w_l)_y(x, 0) + p_0 \geq 0 \text{ e } (w_l)_{xx}(x, 0) \leq 0\}$. Assim, por definição tem-se que:

$$l^* = \max X_l^*.$$

Seja $x > l^*$, então existe $x_0 \in (l^*, L]$ tal que $(w_l)_y(x, 0) + p_0 \geq 0$ e $(w_l)_{xx}(x, 0) \leq 0$, $\forall x \in [x_0, L]$. Isto mostra que X_l' é não-vazio.

Agora seja $x_0 < l^*$ e suponha que $(w_l)_{xx}(x_0, 0) \leq 0$. Isto contradiz o fato de que $l^* = \max X_l^*$, ou seja, $(w_l)_y(l^*, 0) + p_0 = 0$ e $(w_l)_{xx}(l^*, 0) > 0$. Assim, tem-se que l^* é cota inferior para X_l' . Seja $l' = \min X_l'$.

Se $l' < l^*$, então tem-se que $l' \in X_l^*$, ou seja, $(w_l)_y(l', 0) + p_0 = 0$ e $(w_l)_{xx}(l', 0) < 0$, então não se teria $l' \in X_l'$. Se $l' > l^*$, então existe um $x_0 \in (l^*, l')$ satisfazendo uma das condições:

$$(w_l)_y(x, 0) + p_0 \geq 0 \text{ e } (w_l)_{xx}(x, 0) \leq 0, \forall x \in (l^*, x_0]$$

ou

$$(w_l)_y(x, 0) + p_0 \geq 0 \text{ e } (w_l)_{xx}(x, 0) > 0, \forall x \in (l^*, x_0].$$

Na primeira situação tem-se, pela continuidade de $(w_l)_{xx}(x, 0)$, uma contradição com o fato $l' = \min X_l'$ e na segunda possibilidade uma contradição de que $l^* = \max X_l^*$. Logo tem-se que $l' = l^*$. Segue-se daí que $l^* = \min X_l'$. ■

5.2 Resultados de Existência

Nesta seção verificaremos a existência de solução para a inequação quase-variacional (3.24) utilizando as soluções das inequações variacionais (5.3)-(??).

Observamos que uma solução da inequação quase-variacional (3.24) é uma função $(w_l)(x, y)$ satisfazendo (3.24)-(3.23) e tal que $l \equiv l^*$.

Lema 5.10 *Se $\{l_n\}$ é uma seqüência decrescente em $[0, L]$ tal que $l_n \rightarrow l$, então $l_n^* \rightarrow l^*$.*

Demonstração: Pelo Lema 5.7, $\Lambda(l) = l^*$ é não-crescente, então a correspondente seqüência $\{l_n^*\}$ é não-decrescente, logo é convergente por sua monotonicidade. Suponha que $l_n^* \rightarrow \bar{l} \neq l^*$. Como $\{l_n\}$ é decrescente, temos que $l \leq \{l_n\}$. Assim,

$$l_n^* < \bar{l} \leq l^*, \quad \forall n.$$

Deste modo, temos que existe $x_0 \in (\bar{l}, l^*)$ tal que:

$$(5.14) \quad (w_l)_y(x_0, 0) + p_0 = 0 \quad \text{e} \quad (w_l)_{xx}(x_0, 0) > 0,$$

pois $x_0 < l^*$ e $l^* = \max X_l^*$, dado em (5.5), ou ainda, l^* é o maior dos $x \in [0, L]$ tal que

$$(w_l)_y(l^*, 0) + p_0 = 0 \quad \text{e} \quad (w_l)_{xx}(l^*, 0) > 0.$$

Por outro lado, pelo Lema 5.9, temos que:

$$(5.15) \quad (w_{l_n})_y(x_0, 0) + p_0 \geq 0 \quad \text{e} \quad (w_{l_n})_{xx}(x_0, 0) \leq 0, \quad \forall n,$$

pois $l_n^* \leq \bar{l} < x_0$.

Porém, pelos Lemas (5.4) e (5.8), temos que $(w_l)_y(x, 0)$ e $(w_l)_{xx}(x, 0)$ são contínuas, o que implica na continuidade de $(w_l)_y(x, 0) + p_0$, em particular. Assim, tomando limite em (5.15), deveríamos ter

$$(w_l)_y(x_0, 0) + p_0 \geq 0 \quad \text{e} \quad (w_l)_{xx}(x_0, 0) \leq 0,$$

o que contradiz (5.14). ■

Teorema 5.1 *Existe uma solução $w \in W^{2,p}(R) \cap C^{1,\lambda}(\bar{R})$, $1 \leq p < \infty$, $0 < \lambda < 1$, da inequação quase-variacional (3.24)-(3.23).*

Demonstração: Seja $l_0 = L$. Considere a função w_{l_0} solução de

$$(5.16) \quad \begin{cases} w \in K_l, & \int_R \nabla w \cdot \nabla(v - w) dx dy \geq - \int_R (v - w) dx dy, \quad \forall v \in K_l, \\ K_l = \{v \in H^1(R) \mid v \geq 0 \text{ em } R, \quad v = G_l \text{ sobre } \partial R\}. \end{cases}$$

Por definição

$$(5.17) \quad l^* = \max X_l^*,$$

onde X_l^* é dado por (5.5).

Assim, $l_0^* \leq L$. Vamos desconsiderar o caso $l_0^* = L$, pois representa o modelo de fluxo de fluido em todo Γ_0 e que foi analisado em [16], [17], [22] e [23]. Suponha então que $l_0^* < L$.

Construa uma seqüência decrescente $\{l_n\}$, $l_n \in [0, L]$, $n = 0, 1, 2, \dots$ satisfazendo:

$$(i) \quad l_{n+1}^* \geq l_n^*, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(ii) \quad l_n \geq l_n^*, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(iii) \quad l_n - l_n^* \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

A condição (i) é garantida pelo Lema 5.7. De fato, conforme observado também na demonstração do Lema 5.10, temos que, se a seqüência $\{l_n\}$ é decrescente e $\Lambda(l) = l^*$ é não-crescente, então a correspondente seqüência $\{l_n^*\}$ é não-decrescente.

As condições (ii) e (iii) são garantidas pelo Lema 5.10. De fato, uma das conseqüências do Lema 5.10 garante que a aplicação $\Lambda : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\Lambda(l) = l^*$ é contínua. Assim o limite l^* da seqüência $\{l_n^*\}$ nunca irá superar o limite l da seqüência $\{l_n\}$, ou seja, $l^* \leq l$, de onde segue que $l_n^* \leq l_n$.

Quanto o ítem (iii), podemos dizer que em geral a condição $l_n - l_n^* \rightarrow 0$ nem sempre é verdadeira. Porém, conforme já observado acima, o Lema 5.10 garante que a aplicação que leva l em l^* é contínua. Dessa forma, sendo l_n decrescente e l_n^* não-crescente, podemos ir tomando l_n satisfazendo a condição (ii) de modo que l_n^* não ultrapasse l_n e se aproximem um do outro (isso não seria garantido se a aplicação citada não fosse contínua).

Como as seqüências $\{l_n\}$ e $\{l_n^*\}$ são monótonas em $[0, L]$, existem $l, l' \in [0, L]$ tais que:

$$(5.18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} l_n = l \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} l_n^* = l'.$$

Sejam w_l a solução única de (5.3)-(??) correspondente a l (valor limite de $\{l_n\}$) e l^* definido em (5.6). Pelo Lema 5.10, temos que $l' = l^*$. Além disso, temos:

$$|l - l^*| = |(l - l_n) + (l_n - l_n^*) + (l_n^* - l^*)| \leq |l - l_n| + |l_n - l_n^*| + |l_n^* - l^*|.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ e usando a propriedade (iii) das seqüências e (5.18), concluímos que $l = l^*$.

Desta forma $w_l \in W^{2,p}(R) \cap C^{1,\lambda}(\overline{R})$, $1 \leq p < \infty$, $0 < \lambda < 1$, é uma solução da inequação quase-variacional (3.24). ■

5.3 Sobre a Unicidade da Solução

Nesta seção analisaremos a unicidade da solução para a inequação quase-variacional (3.24).

Suponha que existam duas diferentes soluções w_1 e w_2 para o problema quase-variacional (3.24)-(3.23). Então w_1 e w_2 satisfazem a inequação variacional para o problema aproximado (5.3)-(5.2), com $l = l_1$ e $l = l_2$, respectivamente, pois já mostramos que existe solução para o problema quase-variacional. Além disso, $l_1 = l_1^*$ e $l_2 = l_2^*$. Como para cada valor fixado de l , a solução da inequação variacional (5.3)-(5.2) é única, conclui-se, sem perda de generalidade, que $l_1 < l_2$. Dessa forma, pelo Lema 5.7, tem-se que $l_1^* \geq l_2^*$. Sendo $l_1 = l_1^*$ e $l_2 = l_2^*$, obtém-se uma contradição e portanto, $w_1 = w_2$. ■

Como casos particulares para o problema quase-variacional estudado, podemos citar dois:

- Quando $l_0 = 0$: neste caso teremos $w_{xx}(x, 0) = 0$, $\forall x \in [0, L]$, ou seja, o caso onde não existe fluxo de fluido sobre Γ_0 , que foi estudado originalmente por C. Baiocchi;
- Quando $l_0 = L$: neste caso teremos $w_y(x, 0) + p_0 > 0$, $\forall x \in [0, L]$, ou seja, caso onde teremos infiltração em todo o fundo Γ_0 da barragem. Embora o modelo estudado por R. Jensen e A. Friedman fosse para um fluxo conhecido no fundo da barragem, este é semelhante ao caso onde a pressão no fundo seja estritamente menor do que uma pressão dada e conhecida p_0 .

6 Implementação Numérica

Nesse capítulo, apresenta-se um resultado de implementação numérica para o modelo de escoamento em barragem com fundo semi-permeável, cuja formulação esta dada na seguinte forma (Capítulo 3): encontrar o potencial de velocidade de fluxo $u(x, y)$ e a função estritamente decrescente $\varphi(x)$ que define a porção de Γ_λ , satisfazendo

$$(6.2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = h_1 & \text{sobre } \Gamma_1, \\ u = h_2 & \text{sobre } \Gamma_2, \\ u = y & \text{sobre } \Gamma_\sigma \cup \Gamma_\lambda, \\ q = 0 & \text{sobre } \Gamma_\lambda, \\ \left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) \leq p_0 \\ q \leq 0 \end{array} \right. & \text{sobre } \Gamma_0, \\ \left\{ \begin{array}{l} q \leq 0 \\ (u - p_0)q = 0 \end{array} \right. & \text{sobre } \Gamma_0, \end{array} \right.$$

onde a pressão p_0 é uma função conhecida e $q \equiv \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}$, com $\vec{\nu}$ a normal exterior.

6.1 Problema de Otimização de Forma e sua Formulação Integral

Formulação equivalente ao Problema 3.3 pode ser dada em termos de um problema de otimização de forma para o sistema governado pela equação de Laplace. Para isso, considera-se um conjunto Φ de todas as formas admissíveis para a fronteira livre Γ_0 , formado por curvas suaves por partes. O problema de otimização consiste em encontrar uma função $\psi \in \Phi$ e o pontencial de velocidade do fluxo u tais que:

$$(6.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min_{\psi \in \Phi} \int_{\Gamma_\lambda} (q)^2 d\Gamma, \\ \text{onde } q = \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}, \vec{\nu} \text{ é a normal exterior e } u(x, y) \text{ é uma solução do problema:} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = h_1 & \text{sobre } \Gamma_1, \\ u = h_2 & \text{sobre } \Gamma_2, \\ u = y & \text{sobre } \Gamma_\sigma \cup \Gamma_\lambda, \\ q = 0 & \text{sobre } \Gamma_\lambda, \\ \left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) \leq p_0 \\ q \leq 0 \end{array} \right. & \text{sobre } \Gamma_0, \\ \left\{ \begin{array}{l} q \leq 0 \\ (u - p_0)q = 0 \end{array} \right. & \text{sobre } \Gamma_0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

O funcional de custo contém o quadrado do fluxo ao longo da fronteira livre Γ_λ . A escolha da posição ótima dessa fronteira livre força o funcional de custo a ser zero e vice versa. Uma formulação alternativa do problema de otimização pode ser dada usando como critério de otimalidade a condição para o potencial ao longo da fronteira livre, [25].

A formulação (6.3) interpreta a fronteira livre Γ_λ como uma fronteira ótima. Tal conceito envolve apenas valores na fronteira. Dessa forma, não é necessário resolver o problema no domínio todo Ω e só na fronteira Γ . Por outro lado, encontrando a posição de Γ_λ , pode-se obter $u(x, y)$ em Ω , resolvendo-se as equações do problema (6.3), por exemplo pelo método de elementos finitos (F.E.M.).

No caso bi-dimensional para o problema governado pela equação de Laplace, os valores do fluxo e do potencial verificam, na fronteira $\Gamma \equiv \partial\Omega$, a equação integral, [9]:

$$(6.4) \quad 0.5u(\xi) + \int_{\Gamma} q^*(\xi, \chi)u(\chi)d\Gamma = \int_{\Gamma} u^*(\xi, \chi)q(\chi)d\Gamma,$$

onde $\chi \equiv (x, y) \in \Gamma$, $u^*(\xi, \chi)$ é a solução fundamental da equação de Laplace, $q^*(\xi, \chi)$ sua derivada normal, e $\xi \in \Gamma$ é o ponto de colocação.

Sendo assim, para definir a posição da fronteira livre, tem-se:

$$(6.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min_{\psi \in \Phi} F(u, q), \\ \text{onde } q \text{ e } u \text{ satisfazem, em } \Gamma, \text{ a equação integral:} \\ 0.5u(\xi) + \int_{\Gamma} q^*(\xi, \chi)u(\chi)d\Gamma = \int_{\Gamma} u^*(\xi, \chi)q(\chi)d\Gamma, \end{array} \right.$$

com $F(u, q) = \int_{\Gamma_\lambda} (q)^2 d\Gamma$ e os valores de contorno definidos como no Problema 6.3.

6.2 Discretização e Problema de Programação Matemática

A formulação (6.5) fornece a oportunidade da discretização via método dos elementos de contorno (B.E.M.), [9]. Com essa finalidade, introduz-se N nós geométricos e divide-se Γ em N elementos, ou seja, $\Gamma = \sum_{j=1}^N \Gamma_j$. Considerando aproximação com funções constantes do fluxo e do potencial, para cada Γ_j , $j = 1, \dots, N$, tem-se a seguinte discretização para a equação integral do problema (6.5):

$$0.5u_i + \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} q_i^* d\Gamma_j \right) u_j = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} u_i^* d\Gamma_j \right) q_j, \quad i = 1, \dots, N,$$

onde $u_i = u(\xi_i)$, $u_i^* = u^*(\xi_i, \chi)$, $q_i^* = q^*(\xi_i, \chi)$, $u_j = u(\chi)$, $q_j = q(\chi)$, com $\xi_i \in \Gamma_i$ e $\chi \in \Gamma_j$, $j = 1, \dots, N$. Usando as notações

$$H_{ij} = \int_{\Gamma_j} q_i^* d\Gamma_j, \text{ para } i \neq j, \quad H_{ii} = 0.5 + \int_{\Gamma_i} q_i^* d\Gamma_i \quad \text{e} \quad G_{ij} = \int_{\Gamma_j} u_i^* d\Gamma_j,$$

pode-se reescrever esta equação na forma matricial:

$$[H]u = [G]q.$$

Sejam (x_i, y_i) as coordenadas dos nós $i = 1, \dots, N$ e $x_{N+1} = x_1$, $y_{N+1} = y_1$. Então, obtém-se formas explícitas para os coeficientes de G e H :

$\forall i, j = 1, \dots, N, i \neq j :$

$$(6.6) \quad G_{ij} = - \sum_{k=1}^4 0.5 \omega_k (a_x^2 + a_y^2)^{1/2} \ln \left((x_c - a_x \gamma_k - b_x)^2 + (y_c - a_y \gamma_k - b_y)^2 \right),$$

$$(6.7) \quad H_{ij} = - \sum_{k=1}^4 \frac{\omega_k \left(a_y (a_x \gamma_k + b_x - x_c) - a_x (a_y \gamma_k + b_y - y_c) \right)}{\left(x_c - a_x \gamma_k - b_x \right)^2 + \left(y_c - a_y \gamma_k - b_y \right)^2},$$

$\forall i, j = 1, \dots, N, i = j :$

$$(6.8) \quad G_{ii} = 2 \left(a_x^2 + a_y^2 \right) \left(1 - \ln \left(a_x^2 + a_y^2 \right)^{1/2} \right),$$

$$(6.9) \quad H_{ii} = \pi,$$

onde $a_x = 0.5(x_{j+1} - x_j)$, $b_x = 0.5(x_{j+1} + x_j)$, $a_y = 0.5(y_{j+1} - y_j)$, $b_y = 0.5(y_{j+1} + y_j)$, $x_c = 0.5(x_i + x_{i+1})$, $y_c = 0.5(y_i + y_{i+1})$, e γ_k, ω_k são as abscissas e pesos da quadratura de Gauss.

Agora, sejam n, m, l, r e k os números dos elementos de contorno localizados nos segmentos $\Gamma_\sigma, \Gamma_\lambda, \Gamma_1, \Gamma_0$ e Γ_2 da fronteira Γ , respectivamente. Para o análogo discreto do problema (6.3), considera-se como variáveis independentes:

- $n - 1$ valores das coordenadas y dos nós sobre Γ_σ : X_1, \dots, X_{n-1} ;
- m valores das coordenadas y dos nós da fronteira livre Γ_λ : X_n, \dots, X_{n+m-1} ;
- l valores do fluxo nos elementos de contorno de Γ_1 : $X_{n+m}, \dots, X_{n+m+l-1}$;

- r valores do potencial nos elementos de contorno de Γ_0 : $X_{n+m+l}, \dots, X_{n+m+l+r-1}$;
- $k + n$ valores do fluxo nos elementos de contorno de Γ_2 : $X_{n+m+l+r}, \dots, X_{N-1}$;
- n valores do fluxo nos elementos de contorno de Γ_σ : $X_N, \dots, X_{n+m+l+r+k+n-1}$;
- m valores do fluxo nos elementos de contorno da fronteira livre Γ_λ : $X_{2n+m+l+r+k}, \dots, X_{2n+2m+l+r+k-1}$;
- r valores do fluxo nos elementos de contorno de Γ_0 : $X_{2n+2m+l+r+k}, \dots, X_{2n+2m+l+2r+k-1}$.

Utiliza-se agora as seguintes notações : $K \equiv n + m$, $L \equiv K+l$, $M \equiv L+r$, $N \equiv M+k$, $P \equiv N+n$, $R \equiv P+m$ e $S \equiv R +r - 1$. Assim as relações acima assumem as seguintes formas:

- valores das coordenadas y dos nós sobre Γ_σ : X_1, \dots, X_{n-1} ;
- valores das coordenadas y dos nós da fronteira livre Γ_λ : X_n, \dots, X_{K-1} ;
- valores do fluxo nos elementos de contorno de Γ_1 : X_K, \dots, X_{L-1} ;
- valores do potencial nos elementos de contorno de Γ_0 : X_L, \dots, X_{M-1} ;
- valores do fluxo nos elementos de contorno de Γ_2 : X_M, \dots, X_{N-1} ;
- valores do fluxo nos elementos de contorno de Γ_σ : X_N, \dots, X_{P-1} ;
- valores do fluxo nos elementos de contorno da fronteira livre Γ_λ : X_P, \dots, X_{R-1} ;
- valores do fluxo nos elementos de contorno de Γ_0 : X_R, \dots, X_S .

Seja $X = (X_1 \dots X_S)$, então para u e q , temos:

$$u = (u_1 \dots u_l, X_L \dots X_{M-1}, u_{l+r+1} \dots u_N),$$

$$q = (X_K \dots X_{L-1}, X_R \dots X_S, X_M \dots X_{R-1}),$$

onde os valores do potencial u nos segmentos Γ_σ e Γ_λ são os correspondentes definidos nas condições do Problema 6.2:

$$u_{l+r+k+1} = 0.5(h_2 + X_1),$$

$$u_{l+r+k+i} = 0.5(X_{i-1} + X_i), \quad i = 2, \dots, n + m - 1,$$

$$u_N = 0.5(h_1 + X_{K-1}),$$

bem como os demais valores de u e q .

As condições de complementaridade implicam em:

$$(6.10) \quad X_{L+i} \leq p_0, \quad i = 0, \dots, r-1,$$

$$(6.11) \quad X_{R+i} \leq 0, \quad i = 0, \dots, r-1,$$

$$(6.12) \quad X_{L+i} \cdot X_{R+i} = 0, \quad i = 0, \dots, r-1.$$

O funcional objetivo é dado por

$$(6.13) \quad F(X) = \sum_{i=P}^{R-1} X_i^2.$$

Além disso, caso existam nós na superfície de percolação (ou seja, se $n \geq 2$), surgirão as seguintes restrições lineares para as coordenadas y destes nós: $X_i - X_{i+1} \leq 0$, para $i = 1, \dots, n-2$.

De acordo com (6.6), (6.7), (6.8) e (6.9), os coeficientes de H e G são funções de X ; mais precisamente, das coordenadas y dos nós do contorno livre e da superfície de percolação:

$$H(X) \equiv H(X_1, \dots, X_{n+m-1}),$$

$$G(X) \equiv G(X_1, \dots, X_{n+m-1}).$$

Fazendo este tipo de discretização para (6.5), obtém-se um problema de programação matemática não-linear:

$$(6.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min_X F(X) \\ H(X)u - G(X)q = 0, \\ X_{L+i} \leq p_0, \quad X_{R+i} \leq 0, \quad X_{L+i} \cdot X_{R+i} = 0, \quad i = 0, \dots, r-1, \\ u_{l+r+k+1} = 0,5(h_2 + X_1), \\ u_{l+r+k+i} = 0,5(X_{i-1} + X_i), \quad i = 2, \dots, K-1, \\ u_N = 0,5(h_1 + X_{K-1}), \\ h_2 \leq X_i \leq h_1, \quad i = n, \dots, n+m. \end{array} \right.$$

O problema (6.14) é um problema de programação matemática, com funcional objetivo (6.13) quadrático, que tem S variáveis $X_1 \dots X_S$, $N + (r - 1)$ restrições de igualdade não-lineares, K restrições de igualdade lineares e $2(r - 1) + m$ restrições do tipo "Box".

A resolução dos problemas de programação matemática envolvendo condição do tipo complementaridade é considerado como um problema de otimização convexa de dois níveis. A otimização convexa de dois níveis apresenta dificuldades normalmente não encontrada em programação matemática de um nível. Como temos uma aplicação não-diferenciável, o funcional objetivo F e todas as restrições são geralmente não-suaves. Assim, a natureza desta não-diferenciabilidade é diferente da otimização clássica não-suave. Se substituirmos o problema de baixo nível pelas suas condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), [5], obtemos um programa matemático com restrição de equilíbrio chamado (MPEC), [32]. Este é um problema que não satisfaz independência linear na qualificação das restrições, [5], por causa da presença da condição fraca de complementaridade do problema de baixo nível, juntamente com suas condições admissíveis primal e dual no conjunto de restrições.

Vários estudos tem sido realizado em diferentes áreas de otimização numérica para resolver problemas de dois níveis. Uma lista detalhada pode ser encontrada em [39] e [37].

Em [21] propõe-se condições necessárias e suficientes de otimalidade para programação de dois níveis que envolve um programa matemático auxiliar de um nível. Sob hipóteses convenientes este programa de um nível satisfaz a independência linear na qualificação das restrições e é obtida substituindo o problema de baixo nível pela suas condições de KKT sem as condições admissíveis primal e dual. Mostra-se que o conjunto de soluções do programa de dois níveis é o mesmo conjunto das soluções do problema auxiliar que são admissíveis primal e dual para o problema de baixo nível.

Para resolver estas condições emprega-se a técnica de pontos interiores para otimização não-linear com restrição, [18]. Não se utiliza penalização na condição de otimalidade e no algoritmo. O programa de dois níveis é resolvido com um custo semelhante ao um problema de otimização clássico com restrição não-linear bem-comportada. Empregando um modelo baseado em programação de dois níveis, tal método foi aplicado em controle ótimo de inequações variacionais [31], esboço da forma de sólidos em contato [19] e problema de equilíbrio de Stackelberg-Cournot-Nash [20]. Realizou-se vários experimentos numéricos desta forma e os problemas foram resolvidos de forma muito eficiente, sem qualquer mudança nos parâmetros internos do algoritmo.

6.3 Testes Numéricos

Na implementação numérica considera-se um domínio retangular R com o fundo da barragem de comprimento $L = 6.1592$ e com os níveis dos reservatórios $h_1 = 6.3014$, $h_2 = 1.2359$. Os dados coincidem com os valores $\alpha = 0.3$ e $\beta = 0.9$ nas fórmulas (2.13), considerado no caso clássico que foi implementado em [25].

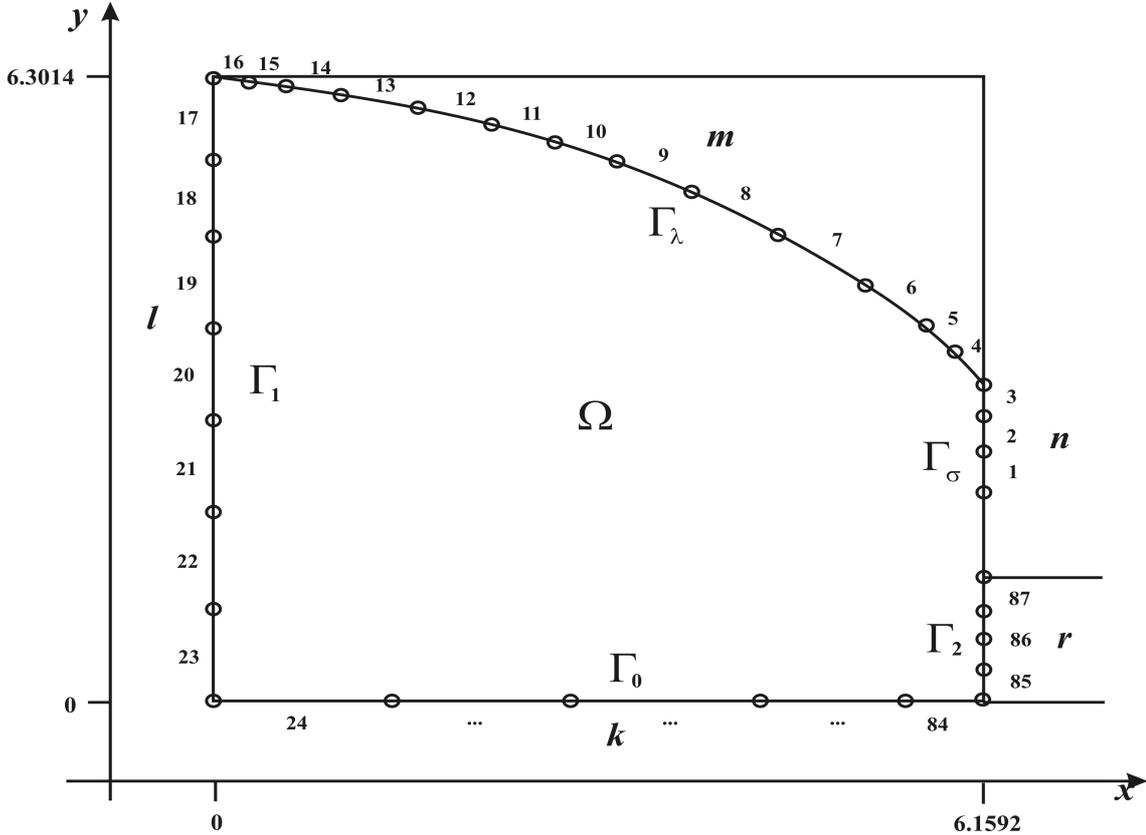


Figura 6.1: Discretização do Problema, Elementos de Contorno

Na discretização pelo método B.E.M., usamos os seguintes números de elementos de contorno: $n = 3$, $m = 13$, $l = 7$, $r = 62$ e $k = 4$. Desta forma teremos 7 elementos sobre Γ_1 , 62 elementos sobre Γ_0 , 4 elementos sobre Γ_2 , 3 elementos sobre Γ_σ e 13 elementos sobre Γ_λ . Então temos $K = 17$, $L = 23$, $M = 85$, $N = 89$, $P = 92$, $N + (r - 1) = 150$, $2(r - 1) + m = 135$ e $S = 166$. Os passos dos intervalos sobre Γ_0 são de 0.1 para dar mais precisão na posição do ponto de descolagem l_0 . Ou seja, o intervalo do fluxo no fundo é encontrado com precisão de 0.2 e que neste caso foi de 0.33%.

Testes numéricos foram realizados para os seguintes valores de p_0 :

$p_0 = 10$, $p_0 = 6$, $p_0 = 5.5$, $p_0 = 5.0$, $p_0 = 4.5$, $p_0 = 4.0$, $p_0 = 3.5$, $p_0 = 3.0$, $p_0 = 2.5$, $p_0 = 2.0$, $p_0 = 1.7$ e $p_0 = 1.6$.

Os resultados dos testes numéricos estão apresentados na Tabela 1. Aqui a primeira coluna corresponde as variáveis do problema ($X_1 \dots X_i \dots X_S$), $S = 166$. As demais colunas apresentam os valores destas variáveis encontrados numericamente para cada valor específico da pressão p_0 .

As figuras (6.2)-(6.13), mostram o campo do fluxo para cada exemplo e foram obtidas a partir dos dados exibidos nas tabelas abaixo de cada figura, resolvendo numericamente o problema diretamente no MatLab com auxílio da ferramenta PDETool. As setas estão normalizadas e exibe-se também as linhas do campo de fluxo. As tabelas mostram os valores de contorno usados e as coordenadas da parte "livre" da fronteira.

Observa-se que o caso $p_0 = 10$ corresponde ao escoamento sem fluxo de fluido no fundo da barragem (caso clássico). A posição da fronteira livre e os valores no contorno, correspondem aos valores calculados no trabalho [25].

A partir da pressão $p_0 = 6$ até $p_0 = 1.6$, surge fluxo de fluido no fundo da barragem. Depois deste valor não foi realizado mais cálculo, pois o ponto de percolação "passa" de h_2 e o problema perde sentido físico.

Tabela 1:

NUM	P 10.0	P 6.0	P 5.5	P 5.0	P 4.5	P 4.0	P 3.5	P 3.0	P 2.5	P 2.0	P 1.7	P 1.6
Coordenada y de Γ_0												
001	1.7382	1.9464	1.9729	1.8403	1.8661	1.8200	1.6056	1.3160	1.4639	1.3808	1.2600	1.2871
002	2.3200	2.0857	2.0810	1.9420	1.9660	1.9201	2.0060	1.6160	1.7023	1.4815	1.3350	1.3502
Fluxo sobre Γ_1												
003	2.5129	2.4934	2.4661	2.4074	2.3423	2.2490	2.1361	1.9691	1.8034	1.5878	1.4482	1.4103
004	2.7990	2.7922	2.7632	2.7120	2.6380	2.5397	2.4137	2.2557	2.0623	1.8253	1.6625	1.6074
005	3.1108	3.1039	3.0753	3.0244	2.9497	2.8504	2.7224	2.5611	2.3583	2.1027	1.9177	1.8509
006	3.3812	3.3741	3.3461	3.2954	3.2212	3.1222	2.9942	2.8317	2.6252	2.3596	2.1610	2.0871
007	3.8229	3.8160	3.7893	3.7406	3.6698	3.5752	3.4527	3.2974	3.1001	2.8458	2.6550	2.5834
008	4.3392	4.3329	4.3093	4.2660	4.2037	4.1212	4.0159	3.8853	3.7243	3.5262	3.3854	3.3344
009	4.8456	4.8406	4.8217	4.7874	4.7389	4.6761	4.5981	4.5047	4.3954	4.2696	4.1864	4.1575
010	5.2298	5.2254	5.2110	5.1853	5.1497	5.1045	5.0501	4.9872	4.9167	4.8397	4.7912	4.7748
011	5.6144	5.6122	5.6028	5.5865	5.5647	5.5378	5.5063	5.4712	5.4332	5.3935	5.3693	5.3612
012	5.9053	5.9017	5.8963	5.8870	5.8751	5.8608	5.8444	5.8267	5.8080	5.7889	5.7775	5.7738
013	6.0835	6.0855	6.0822	6.0770	6.0705	6.0631	6.0547	6.0459	6.0368	6.0276	6.0222	6.0204
014	6.2133	6.2064	6.2048	6.2023	6.1994	6.1961	6.1925	6.1888	6.1849	6.1811	6.1789	6.1781
015	6.2510	6.2654	6.2643	6.2626	6.2609	6.2591	6.2572	6.2553	6.2534	6.2515	6.2504	6.2500
Coordenada y de Γ_2												
016	0.2309	0.2146	0.2245	0.2384	0.2529	0.2681	0.2838	0.2998	0.3158	0.3320	0.3417	0.3447
017	0.3012	0.2960	0.3025	0.3124	0.3241	0.3374	0.3519	0.3673	0.3831	0.3991	0.4085	0.4116
018	0.3813	0.3843	0.3917	0.4040	0.4198	0.4386	0.4601	0.4835	0.5083	0.5338	0.5492	0.5543
019	0.4730	0.4764	0.4881	0.5088	0.5363	0.5700	0.6088	0.6516	0.6976	0.7457	0.7751	0.7850
020	0.5510	0.5580	0.5842	0.6301	0.6907	0.7630	0.8442	0.9320	1.0247	1.1210	1.1799	1.1997
021	0.5961	0.6023	0.6450	0.7339	0.8531	0.9908	1.1400	1.2967	1.4583	1.6235	1.7237	1.7572
022	0.6325	0.8592	1.5004	2.3150	3.1603	4.0182	4.8824	5.7502	6.6201	7.4915	8.0149	8.1894
Potencial sobre Γ_0												
023	5.9976	5.8519	5.4999	4.9999	4.4999	3.9999	3.4999	2.9999	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
024	6.2927	5.9999	5.4999	4.9999	4.4999	3.9999	3.4999	2.9999	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
025	6.1564	5.9898	5.4999	4.9999	4.4999	3.9999	3.4999	2.9999	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
026	6.0866	5.9710	5.4999	4.9999	4.4999	3.9999	3.4999	2.9999	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
027	6.0252	5.9350	5.4999	4.9999	4.4999	3.9999	3.4999	2.9999	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
028	5.9631	5.8889	5.4999	4.9999	4.4999	3.9999	3.4999	2.9999	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
029	5.9033	5.8372	5.4999	4.9999	4.4999	3.9999	3.4999	2.9999	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
030	5.8370	5.7821	5.4999	4.9999	4.4999	3.9999	3.4999	2.9999	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
031	5.7735	5.7249	5.4999	4.9999	4.4999	3.9999	3.4999	2.9999	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
032	5.7099	5.6662	5.4639	4.9999	4.4999	3.9999	3.4999	2.9999	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
033	5.6460	5.6063	5.4266	4.9999	4.4999	3.9999	3.4999	2.9999	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
034	5.5818	5.5456	5.3835	4.9999	4.4999	3.9999	3.4999	2.9999	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
035	5.5174	5.4840	5.3363	4.9999	4.4999	3.9999	3.4999	2.9999	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
036	5.4528	5.4218	5.2860	4.9936	4.4999	3.9999	3.4999	2.9999	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
037	5.3878	5.3588	5.2332	4.9706	4.4999	3.9999	3.4999	2.9999	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
038	5.3224	5.2953	5.1785	4.9387	4.4999	3.9999	3.4999	2.9999	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
039	5.2567	5.2312	5.1220	4.9010	4.4999	3.9999	3.4999	2.9999	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
040	5.1905	5.1665	5.0641	4.8590	4.4999	3.9999	3.4999	2.9999	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
041	5.1239	5.1013	5.0049	4.8134	4.4947	3.9999	3.4999	2.9999	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
042	5.0568	5.0354	4.9445	4.7650	4.4744	3.9999	3.4999	2.9999	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
043	4.9893	4.9689	4.8829	4.7141	4.4456	3.9999	3.4999	2.9999	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
044	4.9212	4.9018	4.8203	4.6611	4.4112	3.9999	3.4999	2.9999	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
045	4.8525	4.8341	4.7567	4.6062	4.3723	3.9999	3.4999	2.9999	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
046	4.7832	4.7656	4.6921	4.5495	4.3298	3.9958	3.4999	2.9999	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
047	4.7133	4.6965	4.6265	4.4912	4.2841	3.9772	3.4999	2.9999	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
048	4.6427	4.6267	4.5599	4.4313	4.2358	3.9506	3.4999	2.9999	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
049	4.5714	4.5561	4.4924	4.3700	4.1849	3.9182	3.4999	2.9999	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
050	4.4993	4.4847	4.4239	4.3074	4.1319	3.8814	3.4999	2.9999	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
051	4.4265	4.4125	4.3544	4.2433	4.0767	3.8408	3.4973	2.9999	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
052	4.3528	4.3394	4.2839	4.1779	4.0196	3.7968	3.4804	2.9999	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
053	4.2782	4.2654	4.2123	4.1112	3.9607	3.7500	3.4553	2.9999	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
054	4.2027	4.1904	4.1397	4.0432	3.9000	3.7004	3.4245	2.9999	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
055	4.1262	4.1145	4.0660	3.9738	3.8375	3.6483	3.3891	2.9999	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
056	4.0486	4.0375	3.9911	3.9031	3.7734	3.5938	3.3497	2.9999	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
057	3.9700	3.9594	3.9151	3.8311	3.7075	3.5371	3.3068	2.9853	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
058	3.8903	3.8801	3.8378	3.7576	3.6401	3.4783	3.2607	2.9621	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
059	3.8094	3.7997	3.7593	3.6828	3.5709	3.4174	3.2117	2.9328	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
060	3.7272	3.7180	3.6794	3.6065	3.5001	3.3544	3.1600	2.8987	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
061	3.6437	3.6350	3.5982	3.5287	3.4276	3.2894	3.1056	2.8605	2.4999	1.9999	1.6999	1.5999
062	3.5588	3.5506	3.5156	3.4494	3.3535	3.2258	3.0487	2.8184	2.4916	1.9999	1.6999	1.5999
063	3.4725	3.4647	3.4315	3.3685	3.2775	3.1535	2.9893	2.7730	2.4721	1.9999	1.6999	1.5999
064	3.3847	3.3774	3.3458	3.2860	3.1999	3.0826	2.9276	2.7244	2.4457	1.9999	1.6999	1.5999
065	3.2953	3.2884	3.2585	3.2018	3.1204	3.0097	2.8636	2.6728	2.4138	1.9999	1.6999	1.5999
066	3.2043	3.1979	3.1696	3.1158	3.0390	2.9347	2.7972	2.6183	2.3775	1.9999	1.6999	1.5999
067	3.1116	3.1056	3.0789	3.0281	2.9558	2.8577	2.7286	2.5611	2.3371	1.9999	1.6999	1.5999
068	3.0170	3.0115	2.9864	2.9385	2.8707	2.7786	2.6576	2.5011	2.2931	1.9896	1.6999	1.5999
069	2.9207	2.9156	2.8920	2.8470	2.7836	2.6975	2.5844	2.4386	2.2456	1.9695	1.6999	1.5999
070	2.8224	2.8177	2.7957	2.7536	2.6944	2.6142	2.5089	2.3735	2.1950	1.9428	1.6999	1.5999
071	2.7221	2.7179	2.6974	2.6581	2.6032	2.5288	2.4311	2.3058	2.1413	1.9110	1.6999	1.5999
072	2.6198	2.6160	2.5971	2.5606	2.5099	2.4412	2.3510	2.2357	2.0847	1.8749	1.6902	1.5999
073	2.5155	2.5121	2.4946	2.4610	2.4144	2.3514	2.2687	2.1631	2.0253	1.8349	1.6711	1.5974
074	2.4090	2.4060	2.3901	2.3592	2.3168	2.2594	2.1841	2.0882	1.9633	1.7915	1.6459	1.5828
075	2.3005	2.2979	2.2834	2.2554	2.2171	2.1652	2.0973	2.0109	1.8987	1.7450	1.6160	1.5612

Tabela 2:

NUM	P 10.0	P 6.0	P 5.5	P 5.0	P 4.5	P 4.0	P 3.5	P 3.0	P 2.5	P 2.0	P 1.7	P 1.6
Fluxo sobre Γ_λ												
092	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
093	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
094	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
095	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
096	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
097	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
098	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
099	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
100	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
101	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
102	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
103	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
104	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
Fluxo sobre Γ_0												
105	-0.0000	-0.0000	-1.1771	-4.2667	-7.3779	-10.4987	-13.6242	-16.7525	-19.8824	-23.0132	-24.8920	-25.5184
106	-0.0000	-2.5963	-4.9072	-6.1471	-7.3793	-8.6095	-9.8387	-11.0674	-12.2958	-13.5240	-14.2608	-14.5064
107	-0.0000	-0.0000	-1.2313	-2.1904	-3.1297	-4.0627	-4.9927	-5.9211	-6.8486	-7.7755	-8.3313	-8.5166
108	-0.0000	-0.0000	-1.0662	-1.8517	-2.6047	-3.3475	-4.0856	-4.8212	-5.5552	-6.2882	-6.7276	-6.8741
109	-0.0000	-0.0000	-0.8272	-1.5115	-2.1481	-2.7705	-3.3863	-3.9988	-4.6092	-5.2182	-5.5831	-5.7047
110	-0.0000	-0.0000	-0.6185	-1.2441	-1.8008	-2.3387	-2.8683	-3.3937	-3.9164	-4.4374	-4.7494	-4.8533
111	-0.0000	-0.0000	-0.4298	-1.0311	-1.5312	-2.0072	-2.4731	-2.9337	-3.3911	-3.8464	-4.1189	-4.2097
112	-0.0000	-0.0000	-0.2024	-0.8575	-1.3175	-1.7470	-2.1641	-2.5748	-2.9819	-3.3864	-3.6284	-3.7089
113	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.7103	-1.1431	-1.5370	-1.9160	-2.2875	-2.6547	-3.0190	-3.2367	-3.3091
114	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.5797	-0.9967	-1.3633	-1.7121	-2.0522	-2.3873	-2.7191	-2.9172	-2.9831
115	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.4574	-0.8706	-1.2167	-1.5414	-1.8560	-2.1648	-2.4699	-2.6518	-2.7123
116	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.3346	-0.7593	-1.0905	-1.3959	-1.6896	-1.9767	-2.2597	-2.4282	-2.4842
117	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.1689	-0.6586	-0.9800	-1.2701	-1.5466	-1.8157	-2.0801	-2.2372	-2.2895
118	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.5649	-0.8817	-1.1598	-1.4222	-1.6762	-1.9249	-2.0724	-2.1214
119	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.4749	-0.7928	-1.0620	-1.3128	-1.5540	-1.7894	-1.9287	-1.9749
120	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.3845	-0.7111	-0.9741	-1.2155	-1.4460	-1.6700	-1.8023	-1.8462
121	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.2880	-0.6347	-0.8942	-1.1281	-1.3496	-1.5639	-1.6902	-1.7320
122	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.1511	-0.5619	-0.8208	-1.0490	-1.2630	-1.4690	-1.5900	-1.6300
123	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.4909	-0.7525	-0.9766	-1.1845	-1.3834	-1.4999	-1.5384
124	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.4197	-0.6882	-0.9099	-1.1129	-1.3058	-1.4183	-1.4555
125	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.3454	-0.6268	-0.8478	-1.0470	-1.2349	-1.3440	-1.3800
126	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.2633	-0.5675	-0.7896	-0.9860	-1.1697	-1.2760	-1.3110
127	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.1452	-0.5091	-0.7344	-0.9292	-1.1095	-1.2134	-1.2475
128	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.4506	-0.6817	-0.8759	-1.0536	-1.1554	-1.1888
129	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.3902	-0.6307	-0.8255	-1.0014	-1.1015	-1.1343
130	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.3258	-0.5809	-0.7776	-0.9524	-1.0512	-1.0834
131	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.2530	-0.5317	-0.7316	-0.9061	-1.0039	-1.0357
132	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.1526	-0.4822	-0.6872	-0.8621	-0.9592	-0.9908
133	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.4316	-0.6440	-0.8201	-0.9170	-0.9483
134	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.3787	-0.6014	-0.7798	-0.8767	-0.9079
135	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.3216	-0.5592	-0.7409	-0.8381	-0.8693
136	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.2566	-0.5169	-0.7030	-0.8011	-0.8324
137	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.1786	-0.4738	-0.6660	-0.7652	-0.7967
138	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0042	-0.4292	-0.6295	-0.7304	-0.7622
139	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.3821	-0.5933	-0.6964	-0.7287
140	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.3311	-0.5570	-0.6630	-0.6958
141	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.2733	-0.5203	-0.6299	-0.6635
142	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.2041	-0.4828	-0.5970	-0.6315
143	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0739	-0.4439	-0.5640	-0.5997
144	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.4031	-0.5306	-0.5678	-0.5678
145	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.3592	-0.4965	-0.5355	-0.5355
146	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.3107	-0.4615	-0.5027	-0.5027
147	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.2547	-0.4249	-0.4690
148	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.1866	-0.3861	-0.4340
149	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0463	-0.3443	-0.3972
150	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.2979	-0.3578
151	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.2442	-0.3148
152	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.1789	-0.2663
153	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0455	-0.2090
154	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.1246
155	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
156	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
157	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
158	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
159	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
160	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
161	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
162	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
163	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
164	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
165	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
166	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000

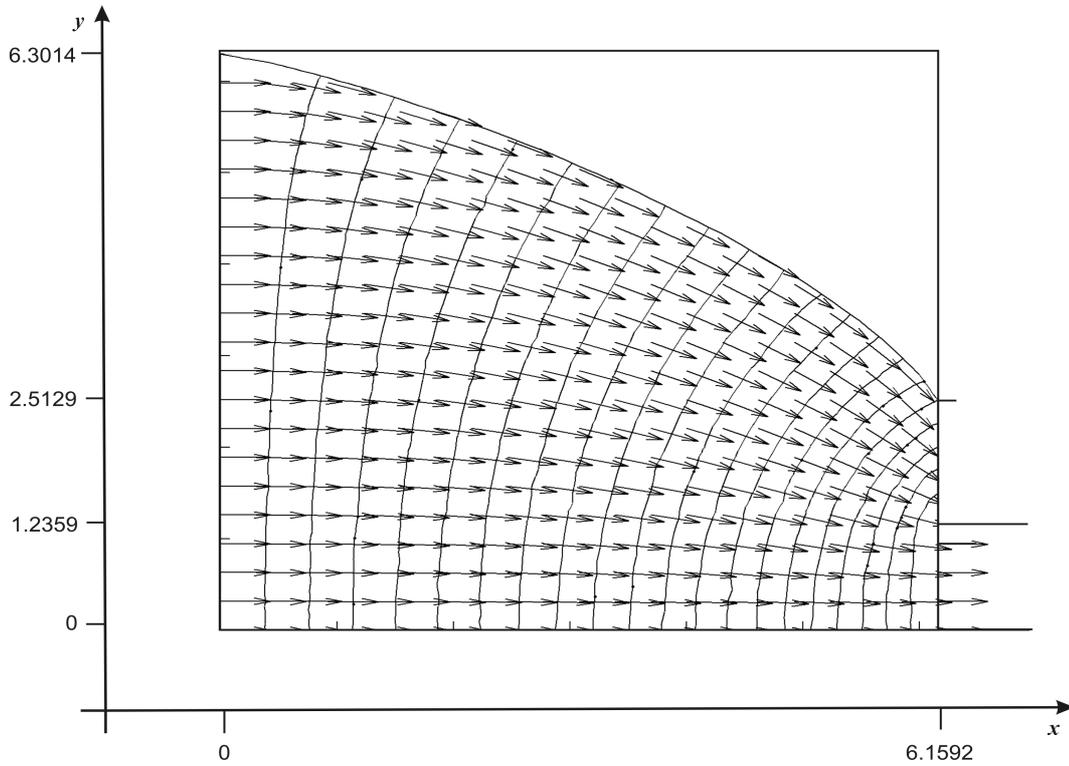


Figura 6.2: Exemplo com $p_0 = 10$

Valores no Contorno			
Contorno	Intervalo	u	q
Γ_0	$(0.0000, 0.0000) - (6.1592, 0.0000)$	-	0.0000
Γ_1	$(0.0000, 0.0000) - (0.0000, 6.3014)$	6.3014	-
Γ_2	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.2359)$	1.2359	-
Γ_σ	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.7382)$	-	-1.4845
	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 2.3200)$	-	-0.8772
	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 2.5129)$	-	-0.5414

Γ_λ : Coordenadas y	
x	y
0.0000	6.3014
0.2000	6.2510
0.4000	6.2133
0.8000	6.0836
1.3000	5.9053
2.0000	5.6145
2.8000	5.2299
3.4922	4.8457
4.3000	4.3393
4.9928	3.8230
5.4906	3.3813
5.7453	3.1109
5.9969	2.7990
6.1592	2.5129

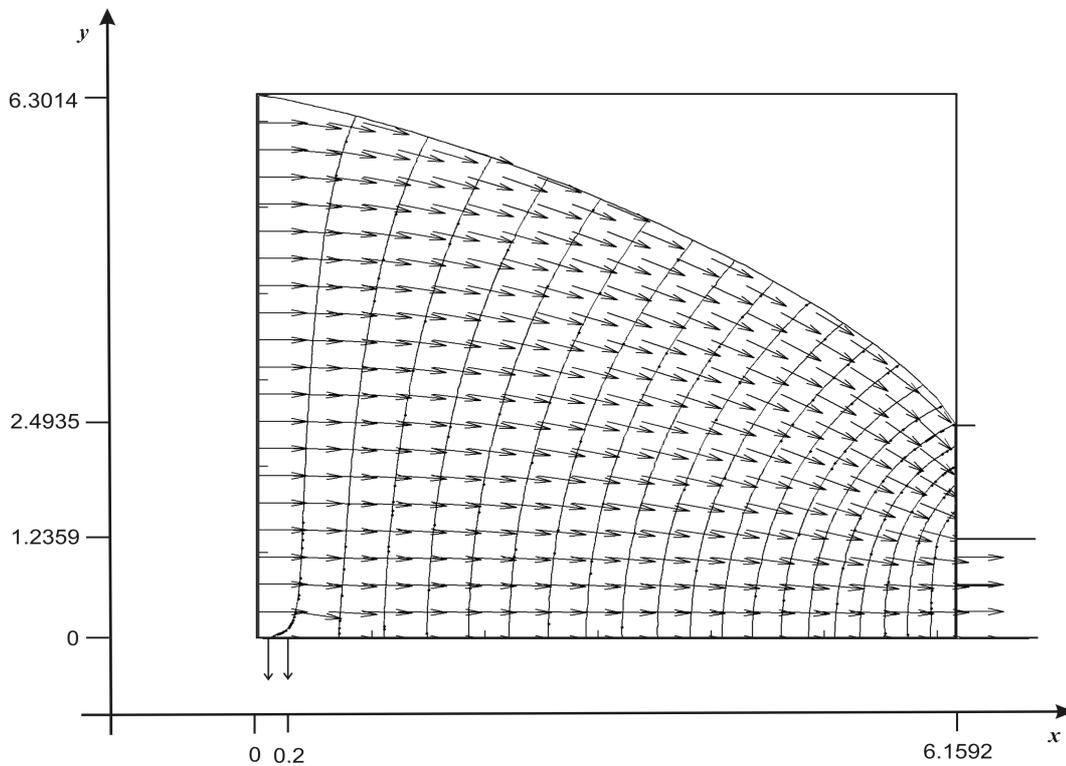


Figura 6.3: Exemplo com $p_0 = 6$

Valores no Contorno			
Contorno	Intervalo	u	q
Γ_0	$(0.0000, 0.0000) - (0.2000, 0.0000)$	5.9999	-
	$(0.2000, 0.0000) - (6.1592, 0.0000)$	-	0.0000
Γ_1	$(0.0000, 0.0000) - (0.0000, 6.3014)$	6.3014	-
Γ_2	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.2359)$	1.2359	-
Γ_σ	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.9464)$	-	-1.3262
	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 2.0857)$	-	-0.7668
	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 2.4934)$	-	-0.6820

Γ_λ : Coordenadas y	
x	y
0.0000	6.3014
0.2000	6.2654
0.4000	6.2064
0.8000	6.0855
1.3000	5.9017
2.0000	5.6122
2.8000	5.2254
3.4922	4.8406
4.3000	4.3329
4.9928	3.8160
5.4906	3.3741
5.7453	3.1039
5.9969	2.7922
6.1592	2.4934

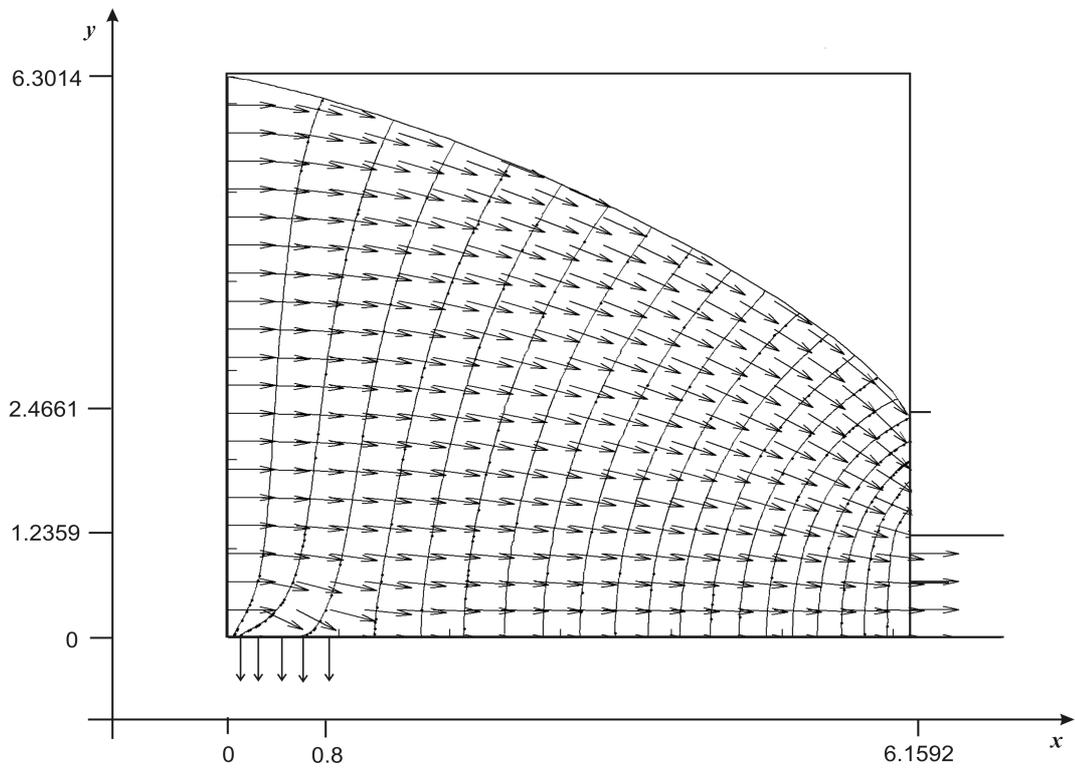


Figura 6.4: Exemplo com $p_0 = 5.5$

Valores no Contorno			
Contorno	Intervalo	u	q
Γ_0	$(0.0000, 0.0000) - (0.8000, 0.0000)$	5.4999	-
	$(0.8000, 0.0000) - (6.1592, 0.0000)$	-	0.0000
Γ_1	$(0.0000, 0.0000) - (0.0000, 6.3014)$	6.3014	-
Γ_2	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.2359)$	1.2359	-
Γ_σ	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.9729)$	-	-1.2952
	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 2.0810)$	-	-0.6935
	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 2.4661)$	-	-0.6681

Γ_λ : Coordenadas y	
x	y
0.0000	6.3014
0.2000	6.2643
0.4000	6.2048
0.8000	6.0822
1.3000	5.8963
2.0000	5.6028
2.8000	5.2110
3.4922	4.8217
4.3000	4.3093
4.9928	3.7893
5.4906	3.3461
5.7453	3.0753
5.9969	2.7632
6.1592	2.4661

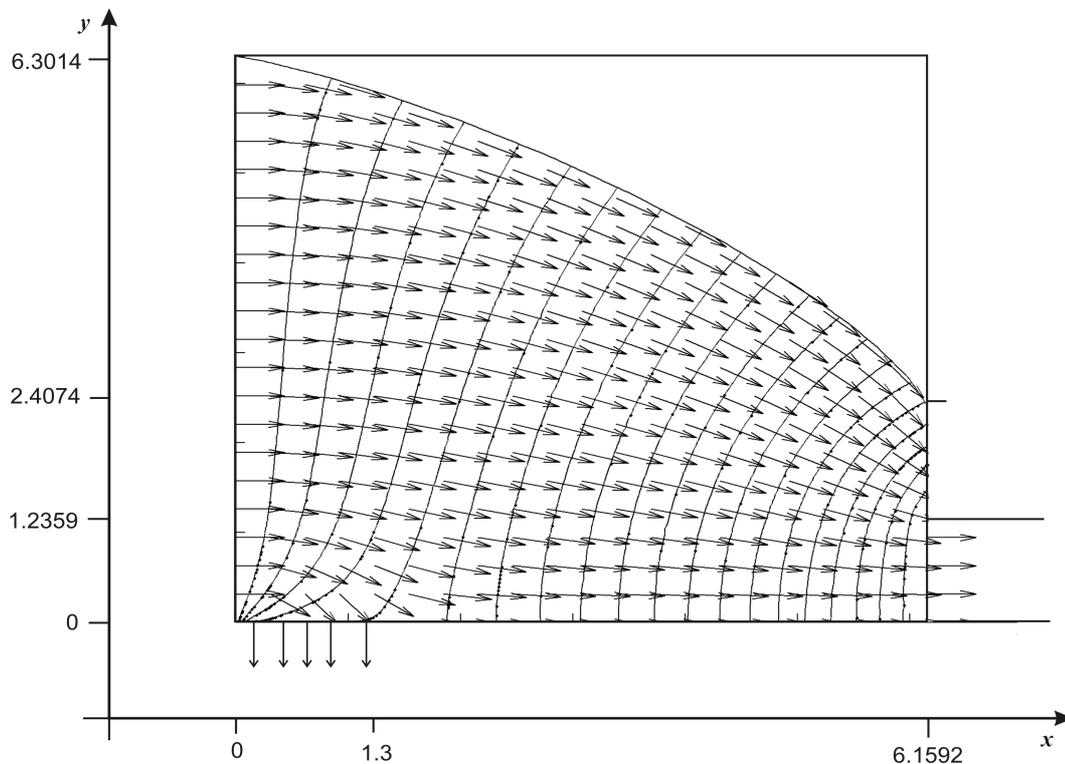


Figura 6.5: Exemplo com $p_0 = 5.0$

Valores no Contorno			
Contorno	Intervalo	u	q
Γ_0	$(0.0000, 0.0000) - (1.3000, 0.0000)$	4.9999	-
	$(1.3000, 0.0000) - (6.1592, 0.0000)$	-	0.0000
Γ_1	$(0.0000, 0.0000) - (0.0000, 6.3014)$	6.3014	-
Γ_2	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.2359)$	1.2359	-
Γ_σ	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.8473)$	-	-1.3523
	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.9420)$	-	-0.8250
	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 2.4074)$	-	-0.7151

Γ_λ : Coordenadas y	
x	y
0.0000	6.3014
0.2000	6.2626
0.4000	6.2023
0.8000	6.0770
1.3000	5.8870
2.0000	5.5865
2.8000	5.1853
3.4922	4.7874
4.3000	4.2660
4.9928	3.7406
5.4906	3.2954
5.7453	3.0244
5.9969	2.7120
6.1592	2.4074

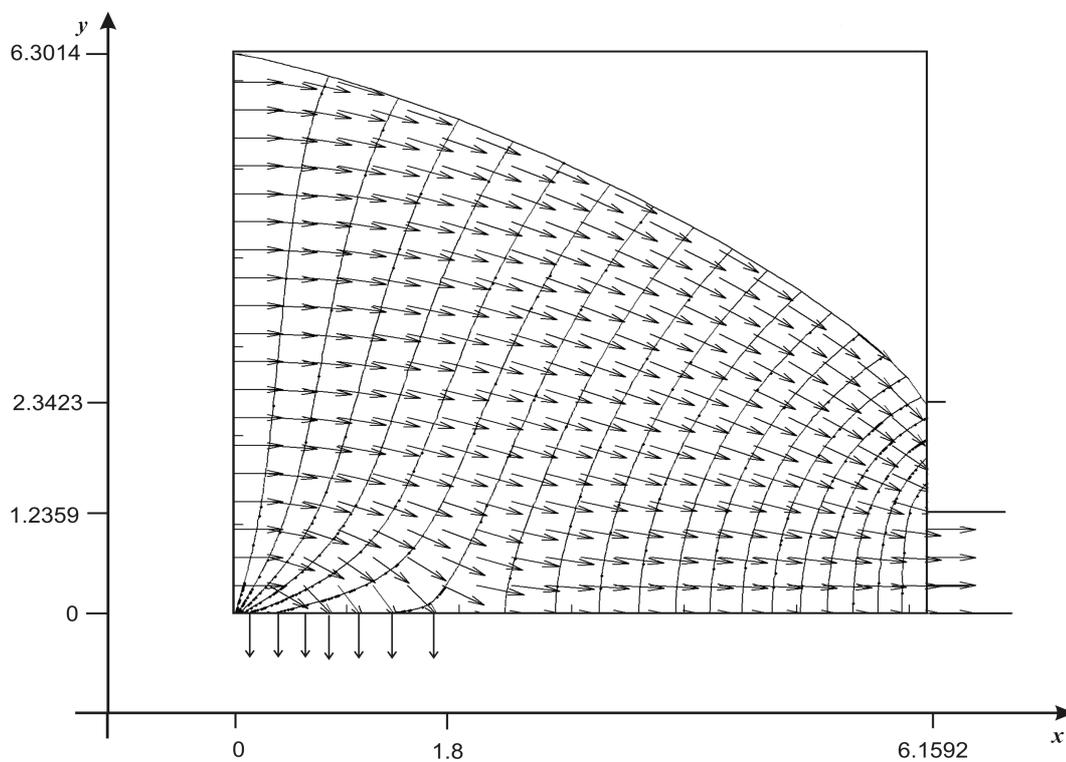


Figura 6.6: Exemplo com $p_0 = 4.5$

Valores no Contorno			
Contorno	Intervalo	u	q
Γ_0	$(0.0000, 0.0000) - (1.8000, 0.0000)$	4.4999	-
	$(1.8000, 0.0000) - (6.1592, 0.0000)$	-	0.0000
Γ_1	$(0.0000, 0.0000) - (0.0000, 6.3014)$	6.3014	-
Γ_2	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.2359)$	1.2359	-
Γ_σ	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.8661)$	-	-1.2918
	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.9680)$	-	-0.7254
	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 2.3423)$	-	-0.6701

Γ_λ : Coordenadas y	
x	y
0.0000	6.3014
0.2000	6.2609
0.4000	6.1994
0.8000	6.0705
1.3000	5.8751
2.0000	5.5647
2.8000	5.1497
3.4922	4.7389
4.3000	4.2037
4.9928	3.6698
5.4906	3.2212
5.7453	3.9497
5.9969	2.6380
6.1592	2.3423

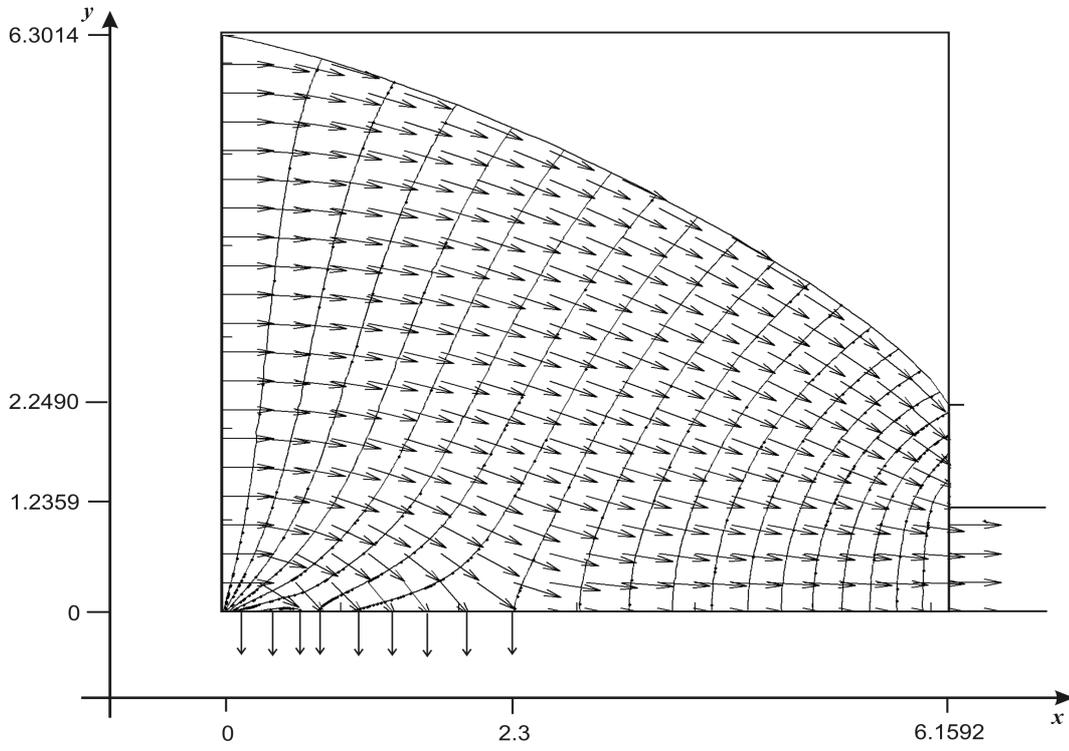


Figura 6.7: Exemplo com $p_0 = 4.0$

Valores no Contorno			
Contorno	Intervalo	u	q
Γ_0	$(0.0000, 0.0000) - (2.3000, 0.0000)$	3.9999	-
	$(2.3000, 0.0000) - (6.1592, 0.0000)$	-	0.0000
Γ_1	$(0.0000, 0.0000) - (0.0000, 6.3014)$	6.3014	-
Γ_2	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.2359)$	1.2359	-
Γ_σ	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.8200)$	-	-1.2671
	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.9201)$	-	-0.7033
	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 2.2490)$	-	-0.6518

Γ_λ : Coordenadas y	
x	y
0.0000	6.3014
0.2000	6.2591
0.4000	6.1961
0.8000	6.0631
1.3000	5.8608
2.0000	5.5378
2.8000	5.1045
3.4922	4.6761
4.3000	4.1212
4.9928	3.5752
5.4906	3.1222
5.7453	2.8504
5.9969	2.5357
6.1592	2.2490

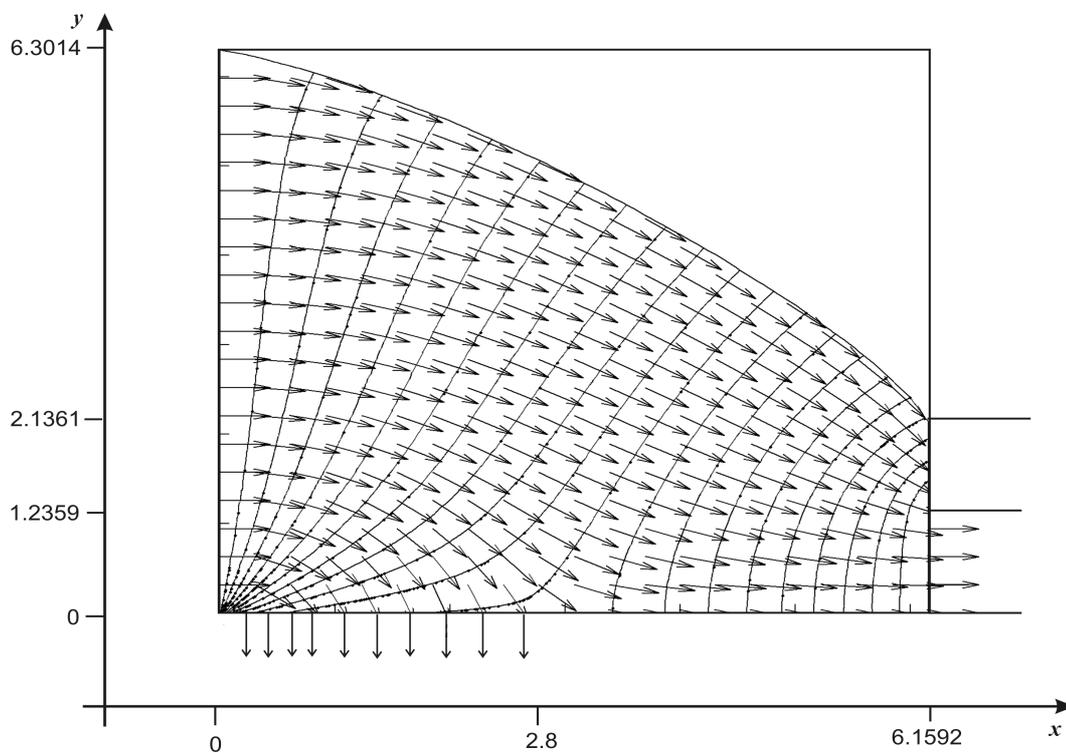


Figura 6.8: Exemplo com $p_0 = 3.5$

Valores no contorno			
Contorno	Intervalo	u	q
Γ_0	$(0.0000, 0.0000) - (2.8000, 0.0000)$	3.4999	-
	$(2.8000, 0.0000) - (6.1592, 0.0000)$	-	0.0000
Γ_1	$(0.0000, 0.0000) - (0.0000, 6.3014)$	6.3014	-
Γ_2	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.2359)$	1.2359	-
Γ_σ	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.6056)$	-	-1.3889
	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 2.0060)$	-	-0.8066
	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 2.1361)$	-	-0.5044

Γ_λ : Coordenadas y	
x	y
0.0000	6.3014
0.2000	6.2572
0.4000	6.1925
0.8000	6.0547
1.3000	5.8444
2.0000	5.5063
2.8000	5.0501
3.4922	4.5981
4.3000	4.0159
4.9928	3.4527
5.4906	2.9942
5.7453	2.7224
5.9969	2.4137
6.1592	2.1361

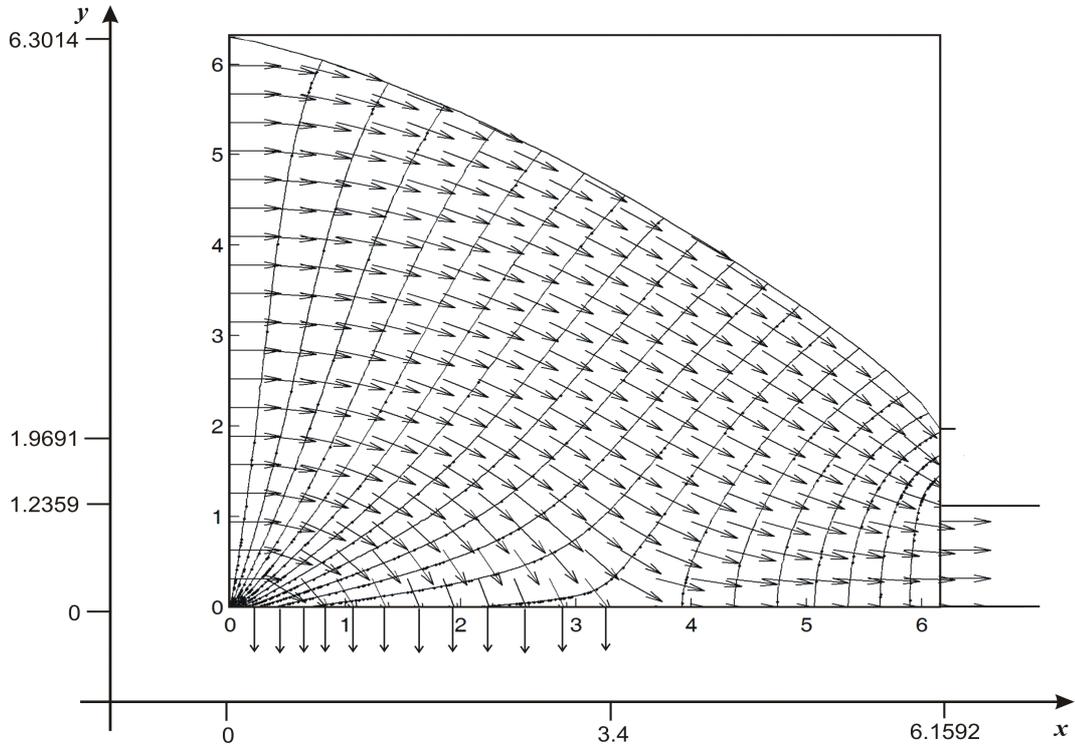


Figura 6.9: Exemplo com $p_0 = 3.0$

Valores no contorno			
Contorno	Intervalo	u	q
Γ_0	$(0.0000, 0.0000) - (3.4000, 0.0000)$	2.9999	-
	$(3.4000, 0.0000) - (6.1592, 0.0000)$	-	0.0000
Γ_1	$(0.0000, 0.0000) - (0.0000, 6.3014)$	6.3014	-
Γ_2	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.2359)$	1.2359	-
Γ_σ	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.3160)$	-	-2.0665
	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.6160)$	-	-1.1443
	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.9691)$	-	-0.7013

Γ_λ : Coordenadas y	
x	y
0.0000	6.3014
0.2000	6.2553
0.4000	6.1888
0.8000	6.0459
1.3000	5.8267
2.0000	5.4712
2.8000	5.9872
3.4922	4.5047
4.3000	4.8853
4.9928	3.2974
5.4906	2.8317
5.7453	2.5611
5.9969	2.2557
6.1592	1.9691

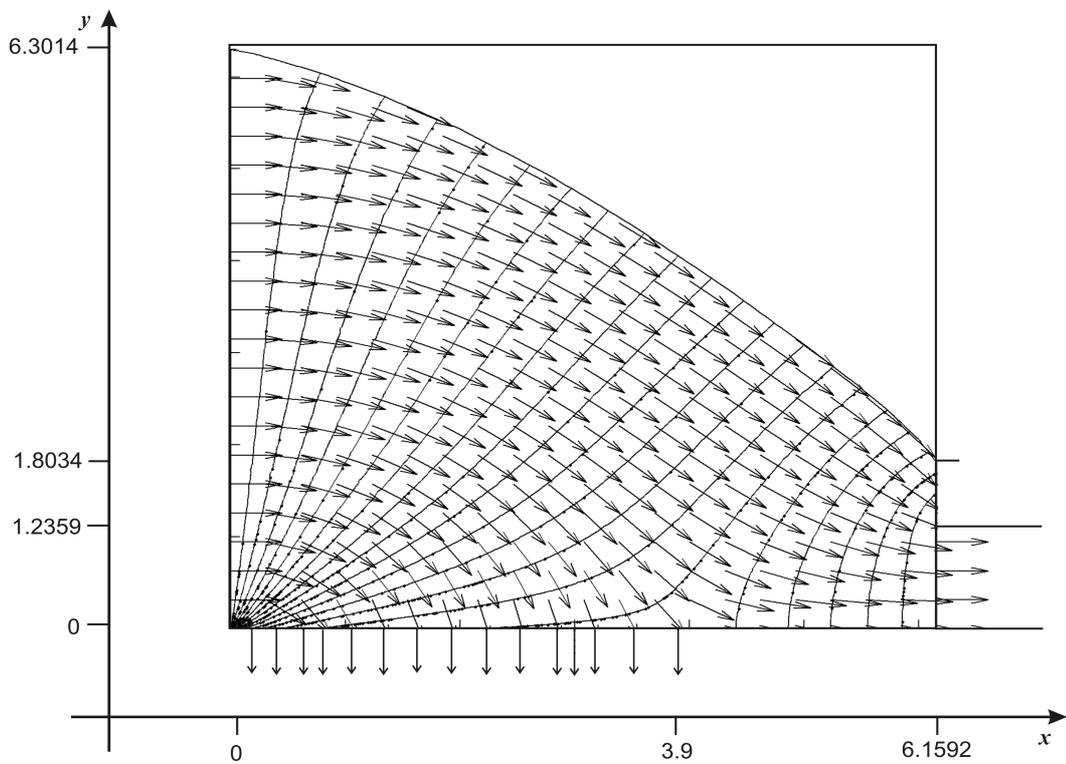


Figura 6.10: Exemplo com $p_0 = 2.5$

Valores no Contorno			
Contorno	Intervalo	u	q
Γ_0	$(0.0000, 0.0000) - (3.9000, 0.0000)$	2.4999	-
	$(3.9000, 0.0000) - (6.1592, 0.0000)$	-	0.0000
Γ_1	$(0.0000, 0.0000) - (0.0000, 6.3014)$	6.3014	-
Γ_2	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.2359)$	1.2359	-
Γ_σ	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.4639)$	-	-1.3638
	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.7023)$	-	-0.7854
	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.8034)$	-	-0.4960

Γ_λ : Coordenadas y	
x	y
0.0000	6.3014
0.2000	6.2534
0.4000	6.1849
0.8000	6.0368
1.3000	5.8080
2.0000	5.4332
2.8000	4.9167
3.4922	4.3954
4.3000	3.7243
4.9928	3.1001
5.4906	2.6252
5.7453	2.3583
5.9969	2.0623
6.1592	1.8034

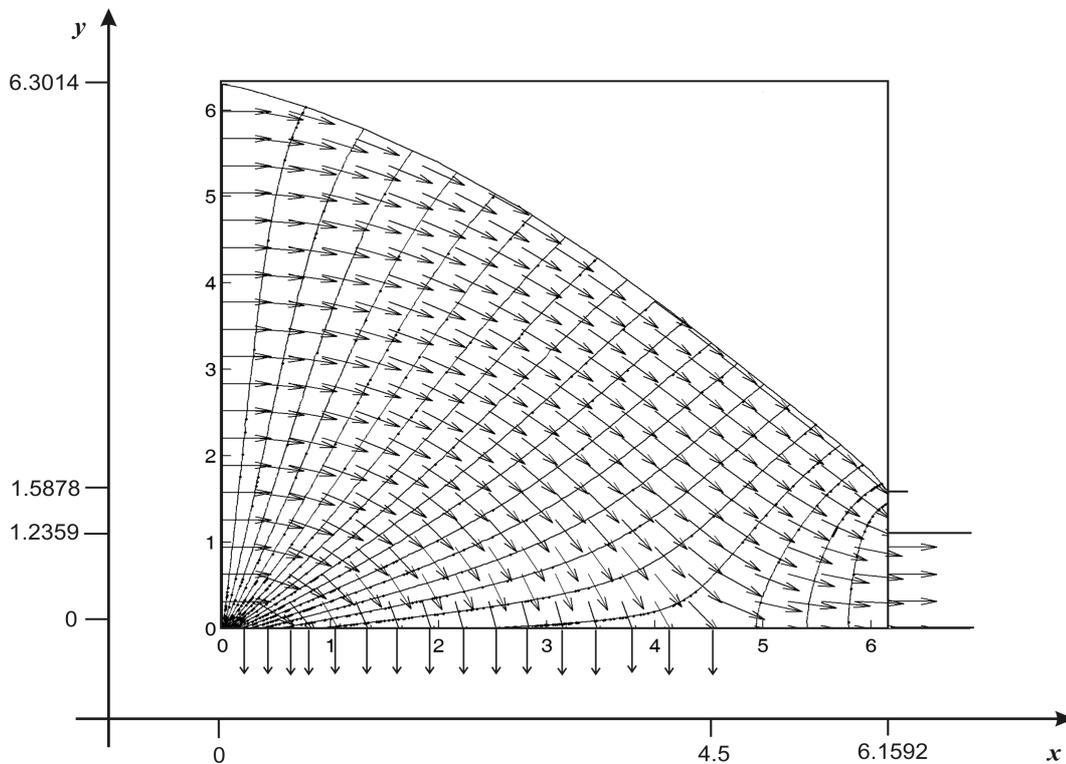


Figura 6.11: Exemplo com $p_0 = 2.0$

Valores no Contorno			
Contorno	Intervalo	u	q
Γ_0	$(0.0000, 0.0000) - (4.5000, 0.0000)$	1.9999	-
	$(4.5000, 0.0000) - (6.1592, 0.0000)$	-	0.0000
Γ_1	$(0.0000, 0.0000) - (0.0000, 6.3014)$	6.3014	-
Γ_2	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.2359)$	1.2359	-
Γ_σ	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.3808)$	-	-1.3678
	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.4815)$	-	-0.8051
	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.5878)$	-	-0.5773

Γ_λ : Coordenadas y	
x	y
0.0000	6.3014
0.2000	6.2515
0.4000	6.1811
0.8000	6.0276
1.3000	5.7889
2.0000	5.3935
2.8000	4.8397
3.4922	4.2696
4.3000	3.5262
4.9928	2.8458
5.4906	2.3596
5.7453	2.1027
5.9969	1.8253
6.1592	1.5878

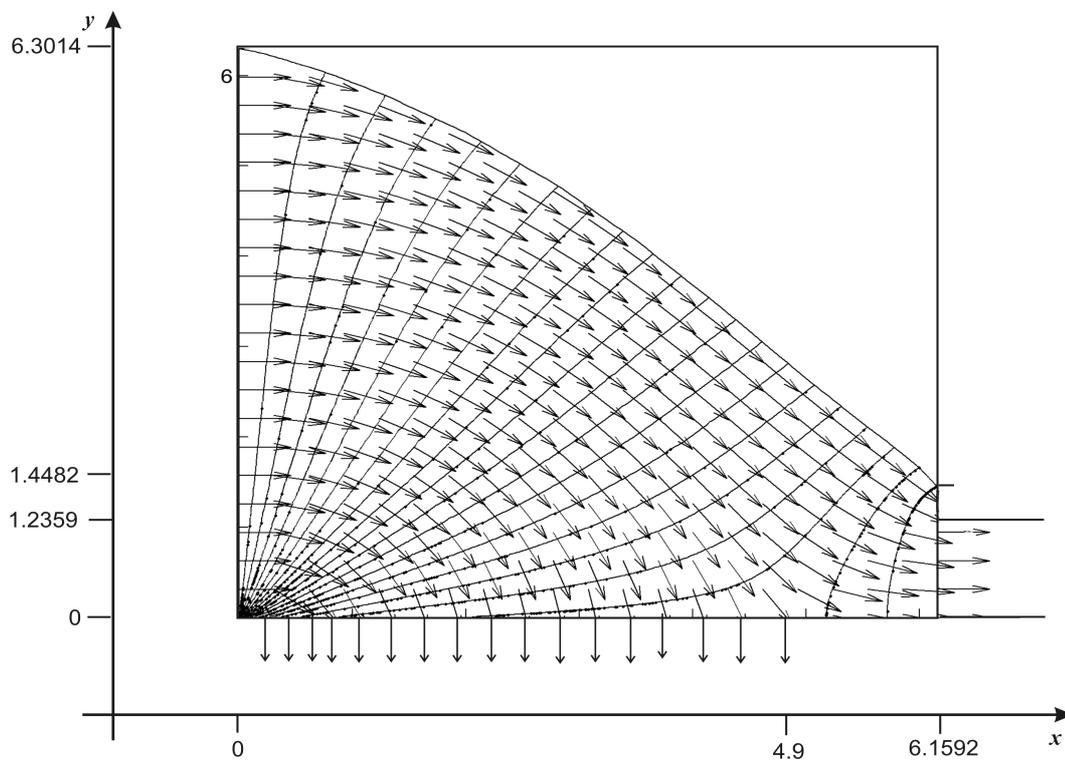


Figura 6.12: Exemplo com $p_0 = 1.7$

Valores no Contorno			
Contorno	Intervalo	u	q
Γ_0	$(0.0000, 0.0000) - (4.9000, 0.0000)$	1.6999	-
	$(4.9000, 0.0000) - (6.1592, 0.0000)$	-	0.0000
Γ_1	$(0.0000, 0.0000) - (0.0000, 6.3014)$	6.3014	-
Γ_2	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.2359)$	1.2359	-
Γ_σ	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.2600)$	-	-2.3277
	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.3350)$	-	-1.1529
	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.4482)$	-	-0.6786

Γ_λ : Coordenadas y	
x	y
0.0000	6.3014
0.2000	6.2504
0.4000	6.1789
0.8000	6.0222
1.3000	5.7775
2.0000	5.3693
2.8000	4.7912
3.4922	4.1864
4.3000	3.3854
4.9928	2.6550
5.4906	2.1610
5.7453	1.9177
5.9969	1.6625
6.1592	1.4482

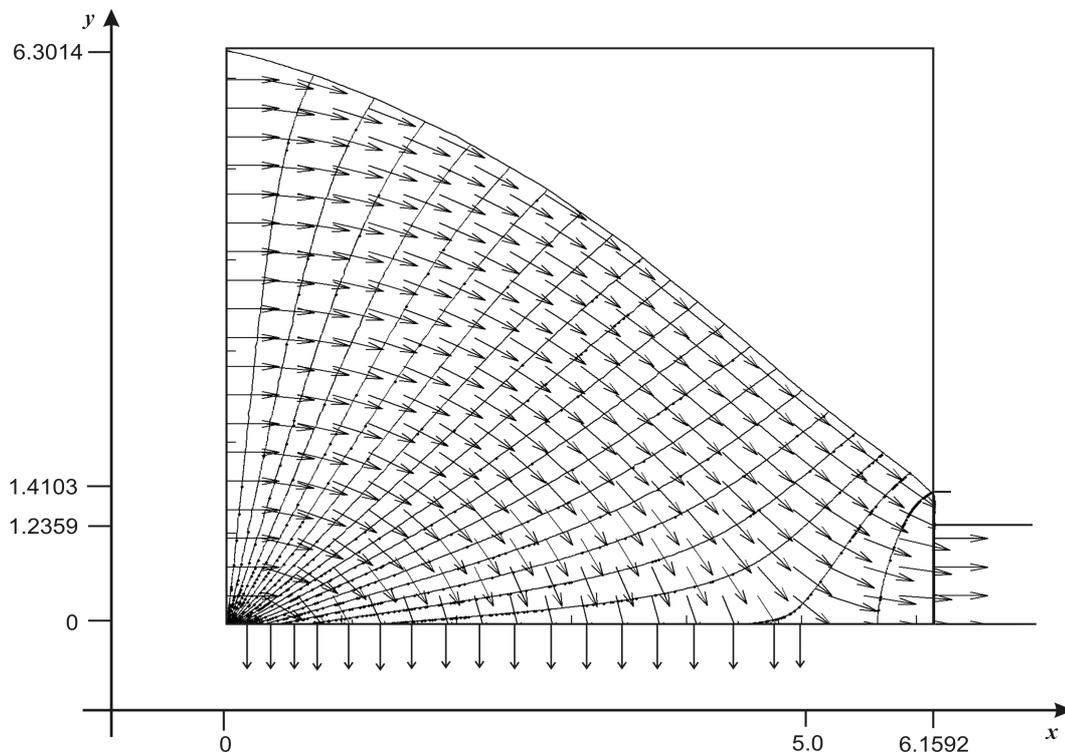


Figura 6.13: Exemplo com $p_0 = 1.6$

Valores no Contorno			
Contorno	Intervalo	u	q
Γ_0	$(0.0000, 0.0000) - (5.0000, 0.0000)$	1.5999	-
	$(5.0000, 0.0000) - (6.1592, 0.0000)$	-	0.0000
Γ_1	$(0.0000, 0.0000) - (0.0000, 6.3014)$	6.3014	-
Γ_2	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.2359)$	1.2359	-
Γ_σ	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.2871)$	-	-1.6638
	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.3502)$	-	-0.9635
	$(6.1592, 0.0000) - (6.1592, 1.4103)$	-	-0.4444

Γ_λ : Coordenadas y	
x	y
0.0000	6.3014
0.2000	6.2500
0.4000	6.1718
0.8000	6.0204
1.3000	5.7738
2.0000	5.3612
2.8000	4.7748
3.4922	4.1575
4.3000	3.3344
4.9928	2.5834
5.4906	2.0871
5.7453	1.8509
5.9969	1.6074
6.1592	1.4103

A figura abaixo permite visualizar os resultados sobre o valor do fluxo no fundo encontrado para cada valor do parâmetro p_0 (Tabela 3) e mostra seu o comportamento "uniforme". Os dados que permitiram obter estas curvas estão na tabela da página seguinte.

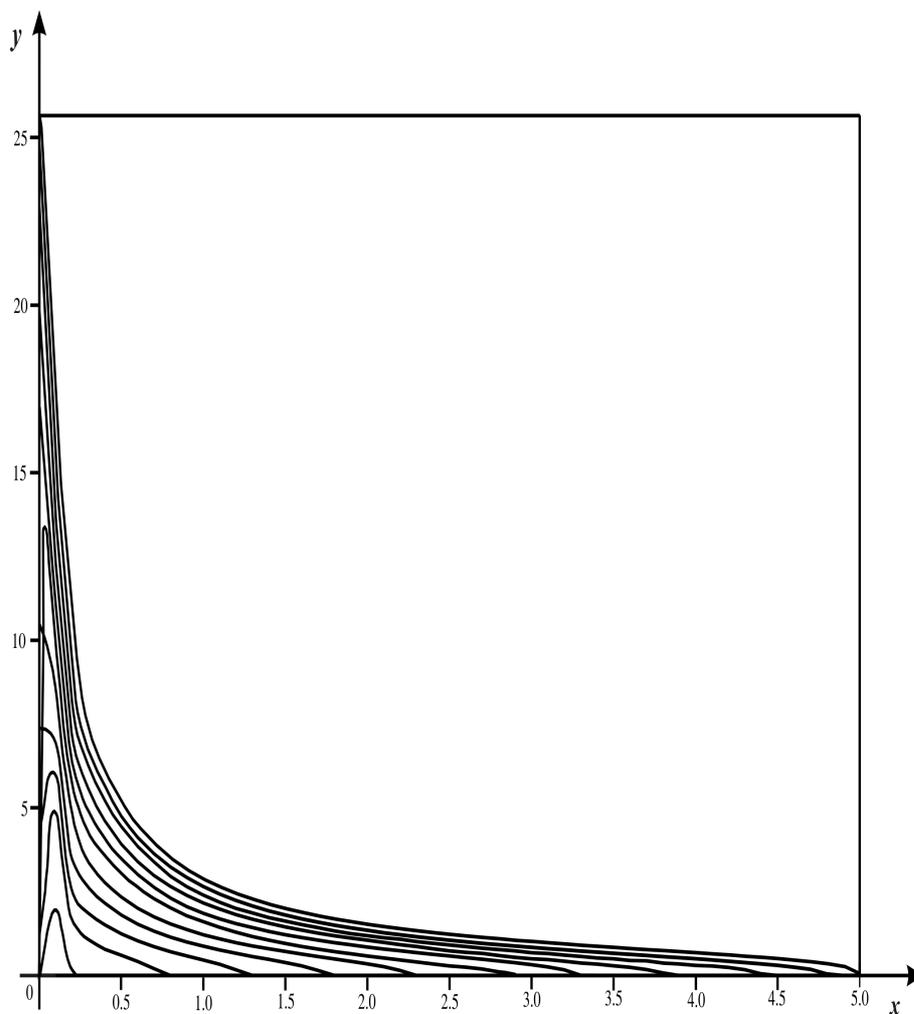


Figura 6.13: Comportamento da Infiltração no Fundo da Barragem

Na última página exibimos dois gráficos: o primeiro mostra o comportamento do ponto de percolação (S.P.) em relação a pressão p_0 e o segundo o comportamento do intervalo de infiltração até l_0 em relação a pressão p_0 .

Tabela 3

Fluxo - Γ_0											
Num	$y_1(x)$	$y_2(x)$	$y_3(x)$	$y_4(x)$	$y_5(x)$	$y_6(x)$	$y_7(x)$	$y_8(x)$	$y_9(x)$	$y_{10}(x)$	$y_{11}(x)$
104	0.0000	1.1771	4.2667	7.3779	10.4987	0.0000	16.7525	19.8824	23.0132	24.8920	25.5184
105	2.5963	4.9072	6.1471	7.3793	8.6095	13.6242	11.0674	12.2958	13.5240	14.2608	14.5064
106	0.0000	1.2313	2.1904	3.1297	4.0627	9.8387	5.9211	6.8486	7.7755	8.3313	8.5166
107	0.0000	1.0662	1.8517	2.6047	3.3475	4.9927	4.8212	5.5552	6.2882	6.7276	6.8741
108	0.0000	0.8272	1.5115	2.1481	2.7705	4.0856	3.9988	4.6092	5.2182	5.5831	5.7047
109	0.0000	0.6185	1.2441	1.8008	2.3387	3.3863	3.3937	3.9164	4.4374	4.7494	4.8533
110	0.0000	0.4298	1.0311	1.5312	2.0072	2.8683	2.9337	3.3911	3.8464	4.1189	4.2097
110	0.0000	0.2024	0.8575	1.3175	1.7470	2.4731	2.5748	2.9819	3.3864	3.6284	3.7089
112	0.0000	0.0000	0.7103	1.1431	1.5370	2.1641	2.2875	2.6547	3.0190	3.2367	3.3091
113	0.0000	0.0000	0.5797	0.9967	1.3633	1.9160	2.0522	2.3873	2.7191	2.9172	2.9831
114	0.0000	0.0000	0.4574	0.8706	1.2167	1.7121	1.8560	2.1648	2.4699	2.6518	2.7123
115	0.0000	0.0000	0.3346	0.7593	1.0905	1.5414	1.6896	1.9767	2.2597	2.4282	2.4842
116	0.0000	0.0000	0.1689	0.6586	0.9800	1.3959	1.5466	1.8157	2.0801	2.2372	2.2895
117	0.0000	0.0000	0.0000	0.5649	0.8817	1.2701	1.4222	1.6762	1.9249	2.0724	2.1214
118	0.0000	0.0000	0.0000	0.4749	0.7928	1.1598	1.3128	1.5540	1.7894	1.9287	1.9749
119	0.0000	0.0000	0.0000	0.3845	0.7111	1.0620	1.2155	1.4460	1.6700	1.8023	1.8462
120	0.0000	0.0000	0.0000	0.2880	0.6347	0.9741	1.1281	1.3496	1.5639	1.6902	1.7320
121	0.0000	0.0000	0.0000	0.1511	0.5619	0.8942	1.0490	1.2630	1.4690	1.5900	1.6300
122	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.4909	0.8208	0.9766	1.1845	1.3834	1.4999	1.5384
123	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.4197	0.7525	0.9099	1.1129	1.3058	1.4183	1.4555
124	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.3454	0.6882	0.8478	1.0470	1.2349	1.3440	1.3800
125	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2633	0.6268	0.7896	0.9860	1.1697	1.2760	1.3110
126	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1452	0.5675	0.7344	0.9292	1.1095	1.2134	1.2475
127	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.5091	0.6817	0.8759	1.0536	1.1554	1.1888
128	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.4506	0.6307	0.8255	0.9524	1.1015	1.1343
129	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.3902	0.5809	0.7776	0.9061	1.0512	1.0834
130	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.3258	0.5317	0.7316	0.8621	1.0039	1.0357
131	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2530	0.4822	0.6872	0.8201	0.9592	0.9908
132	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1526	0.4316	0.6440	0.7798	0.9170	0.9483
133	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.3787	0.6014	0.7409	0.8767	0.9079
134	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.3216	0.5592	0.7030	0.8381	0.8693
135	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2566	0.5169	0.6660	0.8011	0.8324
136	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1786	0.4738	0.6295	0.7652	0.7967
137	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0042	0.4292	0.5933	0.7304	0.7622
138	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.3821	0.5570	0.6964	0.7287
139	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.3311	0.5203	0.6630	0.6958
140	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2733	0.4828	0.6299	0.6635
141	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2041	0.4439	0.5970	0.6315
142	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0739	0.4031	0.5640	0.5997
143	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.3592	0.5306	0.5678
144	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.3107	0.4965	0.5355
145	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2547	0.4615	0.5027
146	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1866	0.4249	0.4690
147	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0463	0.3861	0.4340
148	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.3443	0.3972
149	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2979	0.3578
150	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2442	0.3148
151	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1789	0.2663
152	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0455	0.2090
153	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1246
154	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

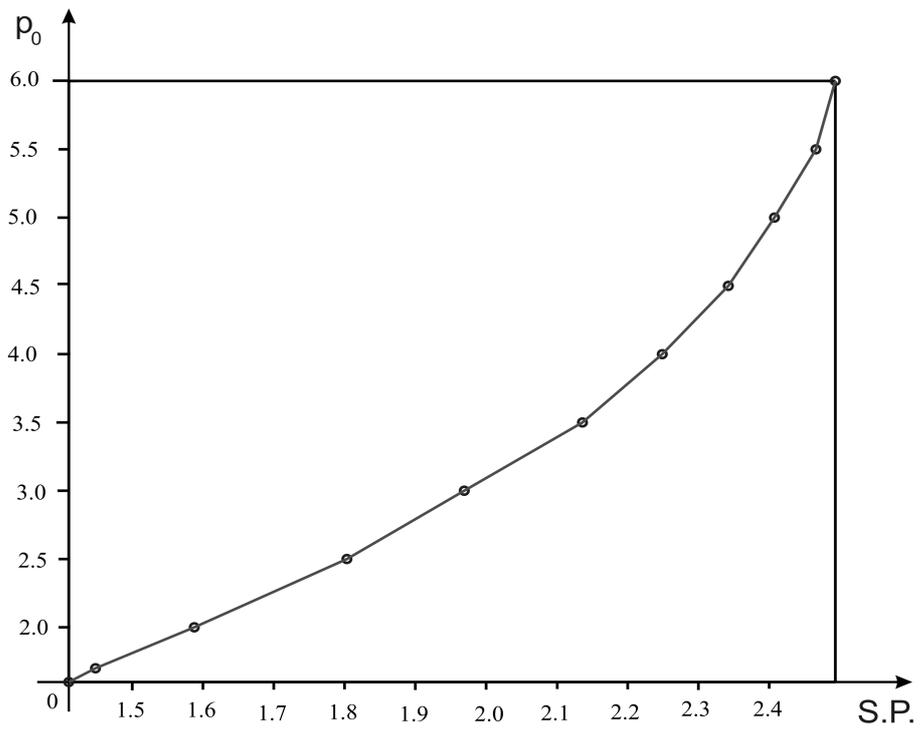


Figura 6.14: Ponto de Percolação *versus* Pressão p_0

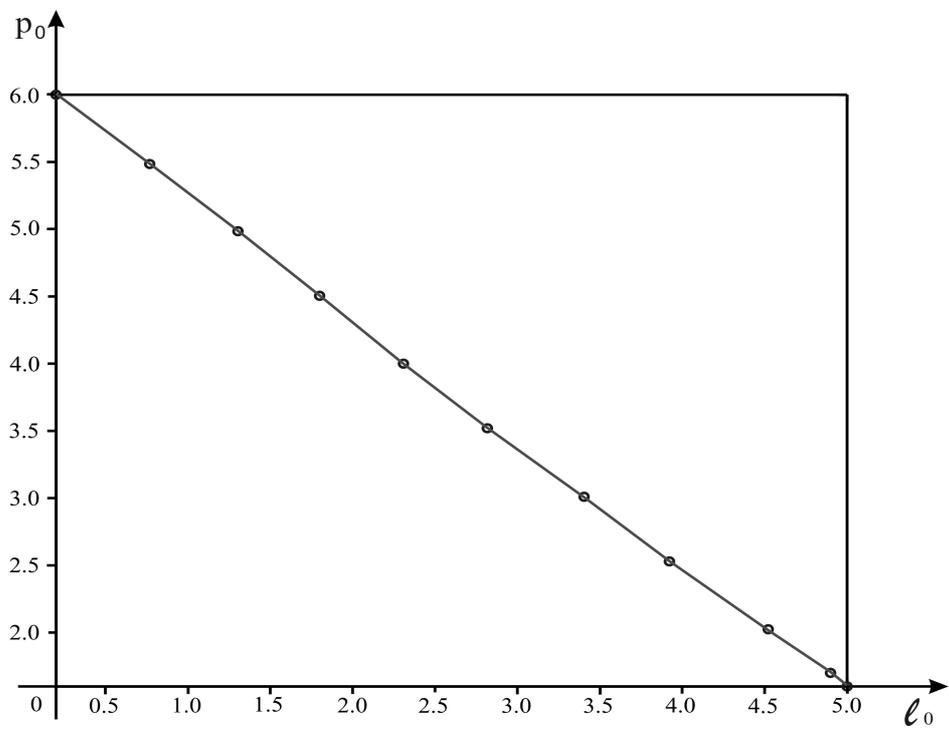


Figura 6.15: Intervalo de Infiltração *versus* Pressão p_0

Conclusão

Ao estudar o fenômeno de infiltração em barragem com fundo semi-permeável, percebeu-se a necessidade de introduzir condições de contato no fundo que impactam na fronteira livre. O problema estudado generaliza o caso clássico com fundo impermeável proposto e estudado por Baiocchi, bem como o modelo com infiltração conhecida estudado por Jensen. O modelo tem a característica de apresentar uma maior aplicabilidade em problemas reais.

O modelo matemático obtido pode ser transformado em um novo problema através de uma inequação. A solução da inequação equivalente ao problema original, está definida em um conjunto que depende da localização do extremo direito da infiltração e que influencia na determinação da fronteira livre e isto faz com que o mesmo pertença a uma classe de problemas de natureza quase-variacional. O estudo de existência e unicidade da solução necessita de novas técnicas, que são diferentes das utilizadas para outros problemas variacionais e quase-variacionais.

As técnicas de análise matemática e numérica desenvolvidas neste trabalho podem ser aplicadas a uma ampla classe de problemas que envolvem fronteira livre.

Os resultados dos testes numéricos mostraram que, para o modelo aqui apresentado, considera-se apenas algumas características principais do fenômeno. Isto permitiu aplicar o método de valor de contorno para realizar a implementação numérica.

7 Apêndice

7.1 Espaços Funcionais

Seja Ω um subconjunto aberto e limitado do \mathbb{R}^n , com fronteira Γ bem regular. Denota-se por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Banach

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, u \text{ mensurável}, \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty\}$$

com a norma definida por $\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$, se $1 \leq p < \infty$ e $\|u\|_{\infty} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$. No caso particular $p = 2$, tem-se o espaço de Hilbert $L^2(\Omega)$, com o produto interno definido por $(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$.

Para $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, define-se $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, por D^{α} representa-se o operador de derivação de ordem $|\alpha|$, definido por

$$D^{\alpha} = \frac{\partial^{\alpha}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Quando $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$ define-se $D^0 u = u$.

Representa-se por $\mathcal{D}(\Omega)$ o espaço das funções testes em Ω , formado por todas as funções infinitamente diferenciáveis em Ω e com suporte compacto em Ω ($C_0^{\infty}(\Omega)$), munido da seguinte noção de convergência:

$\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}(\Omega)$ converge para ϕ , quando a sequência $\{\phi_n - \phi\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge para zero, isto é:

(i) $\text{support}(\phi_n - \phi) \subset K$, onde K é um compacto fixo de Ω ;

(ii) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, a sequência $\{D^{\alpha}(\phi_n - \phi)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para zero em Ω .

Representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o espaço das distribuições sobre Ω , isto é, o espaço vetorial formado por todas as aplicações lineares e contínuas, no sentido da convergência definida sobre $\mathcal{D}(\Omega)$, de $\mathcal{D}(\Omega)$ em \mathbb{R} .

Para todo $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty)$, define-se o espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, como o espaço de Banach de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$, tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^{\alpha}u \in L^p(\Omega)$, sendo $D^{\alpha}u$ a derivada no sentido das distribuições. Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$, denota-se a norma de u por:

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Para $p = 2$, denota-se $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$. Quando $m = 0$, $H^0(\Omega)$ é identificado com $L^2(\Omega)$. $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno e a norma dados por

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^{\alpha}u(x)D^{\alpha}v(x)dx,$$

$$\|u\|_m = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por $H_0^m(\Omega)$ representa-se o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$. Com Γ regular, demonstra-se que $H_0^m(\Omega)$ é constituído pelas funções de $H^m(\Omega)$ tais que os traços das funções e das derivadas normais de todas as ordens menores do que m são nulas sobre Γ . O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ será representado por $H^{-m}(\Omega)$.

Por fim, denota-se por $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ o conjunto das funções m vezes continuamente diferenciáveis em alguma vizinhança de $\overline{\Omega}$ e cujas m -ésimas derivadas satisfazem à condição de Holder com expoente λ , dada por:

$$\text{existe } M > 0 \text{ tal que } \frac{|u(x) - u(x')|}{|x - x'|^\lambda} < M, \quad \forall x, x' \in \overline{\Omega}.$$

7.2 Problemas Variacionais Elípticos

Apresenta-se agora alguns resultados sobre problemas variacionais elípticos mencionados ao longo deste texto.

Teorema 7.1 (*Stampacchia [24] (pág. 24)*) *Sejam H um espaço de Hilbert real e H' o seu dual. Considere-se $a(u, v)$ uma forma bilinear e coerciva em H , $K \subset H$ fechado e convexo e $f \in H'$. Então existe uma única solução para o problema: encontrar $u \in K$ tal que:*

$$a(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle, \quad \forall v \in K,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a dualidade de H .

Teorema 7.2 (*Stampacchia [24] (pág. 44)*) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado, conexo e com fronteira suave $\partial\Omega$ e define-se a aplicação*

$$L : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$$

por

$$\langle Lu, v \rangle = a(u, v), \quad u, v \in H_0^1(\Omega),$$

onde $a(u, v)$ é como no Teorema 7.1. *Sejam ainda funções $\psi, \phi \in H^1(\Omega)$ tais que $\phi \geq \psi$ sobre $\partial\Omega$. Então, sendo $f \in H^{-1}(\Omega)$, a solução do problema: encontra $u \in K$ tal que*

$$a(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle, \quad \forall v \in K,$$

onde $K = \{v \in H^1(\Omega) \mid v \geq \psi \text{ em } \Omega, v - \phi \in H_0^1(\Omega)\}$, satisfaz

$$Lu = f \text{ em } \Omega \setminus I,$$

com $I = \{x \in \Omega \mid u(x) = \psi(x)\}$.

Proposição 7.1 (*Stampacchia [24] (pág. 235)*) *Sendo R um retângulo, subconjunto aberto de \mathbb{R}^n , uma solução do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } R, \\ u = h & \text{sobre } \partial R, \end{cases}$$

satisfaz $u \in W^{2,p}(R)$, sempre que $f \in L^p(R)$ e $h \in W^{2,p}(R)$, para $2 \leq p \leq \infty$.

Proposição 7.2 (Stampacchia [24] (pág. 133)) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto com fronteira suave $\partial\Omega$. Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $\psi, \phi \in H^1(\Omega)$ tais que $\phi \geq \psi$ sobre $\partial\Omega$, para algum $1 \leq p < \infty$. Suponha que se w é solução de*

$$\begin{cases} -\Delta w = f, & \text{em } \Omega, \\ w = \phi & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

satisfaz $w \in W^{2,p}(\Omega)$. Então a solução u de

$$u \in K, \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(v - u) dx dy \geq \int_{\Omega} f(v - u) dx dy, \quad \forall v \in K,$$

onde $K = \{v \in H^1(\Omega) \mid v \geq \psi \text{ em } \Omega, v - \phi \in H_0^1(\Omega)\}$, verifica $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^{1,\lambda}(\bar{\Omega})$, com $\lambda = 1 - \frac{2}{p}$.

Definição 7.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto com fronteira $\partial\Omega$. Um ponto $\bar{x} \in \partial\Omega$ é dito um ponto de Hopf se existe $x_0 \in \Omega$ e $r > 0$ tais que a bola aberta $B_r(x_0)$ satisfaz:*

(i) $B_r(x_0) \subset \Omega$;

(ii) $\bar{x} \in \bar{B}_r(x_0)$.

O conjunto aberto Ω é dito um conjunto aberto de Hopf se todos os pontos de $\partial\Omega$ são pontos de Hopf.

Definição 7.2 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto com fronteira $\partial\Omega$ e $\bar{x} \in \partial\Omega$ um ponto de Hopf. Além disso, sejam $x_0 \in \Omega$ e $r > 0$ nas condições da definição anterior e l um ponto de $B_r(x_0)$. Diz-se que o ponto l (ou vetor $I = l\bar{x}$) determina uma direção exterior a Ω em \bar{x} se existem $\bar{t} > 0$ e $\bar{r} > 0$ tais que*

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \bar{x} + tI, t \in (0, \bar{t}]\} \subset B_{\bar{r}}(\bar{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}).$$

Se I determina uma direção exterior a Ω em \bar{x} , o limite

$$\frac{\partial^- u}{\partial I} = \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(\bar{x} - tI) - u(\bar{x})}{t}$$

é dito a derivada inferior com respeito a I em $u(\bar{x})$.

Teorema 7.3 (Baiocchi [3], (pág. 367)) (**Princípio do Máximo de Hopf**)

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto com fronteira $\partial\Omega$ e $u \in C^2(\Omega)$ uma solução da desigualdade

$$(7.15) \quad \sum_{i,j}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \geq 0 \text{ em } \Omega,$$

onde as funções $a_{ij} = a_{ij}(x)$ e $b_i = b_i(x)$ são limitadas em Ω e a_{ij} são tais que o operador diferencial associado a 7.15 é uniformemente fortemente elíptico em Ω . Se u assume o seu máximo u_0 em Ω , então $u(x) \equiv u_0$ em Ω . Em particular, se Ω é limitado e $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ é não-constante, então o valor máximo u_0 é assumido exclusivamente em $\partial\Omega$; além disso, se \bar{x} é um ponto de Hopf de $\partial\Omega$, então $\frac{\partial^- u}{\partial I} > 0$, qualquer que seja a direção exterior I a Ω em \bar{x} .

Teorema 7.4 (Baiocchi [3], (pág. 369)) (**Princípio do Máximo Fraco**)

Seja Ω um subconjunto aberto e convexo do \mathbb{R}^2 e considere L o operador diferencial uniformemente fortemente elíptico dado por:

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u \right) + \sum_{i=1}^2 b_i \frac{\partial}{\partial x_i} u + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (c_i u) + du,$$

onde $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $b_i, c_i \in L^{2+\epsilon}(\Omega)$ e $d \in L^{1+\epsilon}(\Omega)$, com $\epsilon > 0$. Suponha ainda que

$$e \equiv d + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial c_i}{\partial x_i} \geq 0$$

no sentido das distribuições.

Seja $u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ uma solução de $Lu \leq 0$ em Ω e considere $\mu = \text{supess}_\Omega u > 0$. Se existe $\bar{x} \in \Omega$ tal que, $\forall r > 0$, $\text{supess}_{B(\bar{x},r) \cap \Omega} u = \mu$, então $u = \mu$ quase sempre em Ω .

Proposição 7.3 Se o par $\{u, \varphi\}$ é solução do problema clássico de infiltração ??, então φ é estritamente decrescente.

Demonstração: Sendo $\varphi(x)$ a função que determina a altura da fronteira livre Γ_λ no ponto de abscissa x , os vetores unitários tangente e normal a Γ_λ na "direção do fluxo" são dados, respectivamente, por

$$\tau = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}}, \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}} \right) \quad \text{e} \quad \nu = \left(\frac{-\varphi'(x)}{\sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}} \right).$$

Como $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$, obtém-se

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(x) \frac{\partial u}{\partial x}$$

e portanto,

$$\mathbf{V} = -\text{grad } u = - \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \varphi'(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \left(-\frac{\partial u}{\partial x} \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} \right) \tau = -\frac{\partial u}{\partial s} \tau,$$

onde s denota o comprimento de arco. Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial s} < 0, \quad \text{sobre } \Gamma_\lambda,$$

ou seja, u é estritamente decrescente em Γ_λ . Dessa forma, sendo $u = y$ sobre Γ_λ , conclui-se a monotonicidade de φ . ■

7.3 Um Problema Variacional

Nesta seção apresenta-se uma solução para um problema de fronteira fixa usando o método de Inequações Variacional e que é utilizado na forma de problema aproximado como método para resolver o nosso problema quase-variacional proposto neste trabalho.

Temos o seguinte problema a ser resolvido:

Problema 7.1 *Sejam $L, h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ satisfazendo $L > 0$ e $0 < h_2 < h_1$. Considere também $R = [0, L] \times [h_1, h_2]$ e $\Omega = \{(x, y) \mid w(x, y) > 0\}$. Encontrar uma função $w(x, y)$ satisfazendo as seguintes condições:*

$$(i) \quad \Delta w = \begin{cases} 1, & \text{em } \Omega \quad (w > 0) \\ 0, & \text{em } R \setminus \Omega \quad (w = 0) \end{cases}$$

$$(ii) \quad \begin{cases} w(0, y) = \frac{1}{2}(h_1 - y)^2, & \text{sobre } \Gamma_1 \quad (x = 0, 0 \leq y \leq h_1) \\ w(L, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(h_2 - y)^2, & \text{sobre } \Gamma_2 \quad (x = L, 0 \leq y \leq h_1) \\ 0, & \text{sobre } \Gamma_3 \quad (x = L, h_2 \leq y \leq h_1) \end{cases} \\ w(x, h_1) = 0 & \text{sobre } \Gamma_4 \quad (y = h_1, 0 < x < L) \end{cases}$$

(iii) *Sobre Γ_0 temos as condições:*

$$\begin{cases} w_y(x, 0) + u_0(x) = 0, & \text{em } 0 \leq x \leq l, \\ w_{xx}(x, 0) = 0, & \text{em } l \leq x \leq L. \end{cases}$$

Observação 7.1 *A condição (iii) do teorema acima pode ser interpretada da seguinte forma: $\frac{\partial w}{\partial \bar{\nu}}(x, 0) = -w_y(x, 0) = u_0(x)$ (i.é., quando houver infiltração na base) ou $w_{xx}(x, 0) = 0$ (i.é., quando não houver infiltração). Observe também que o problema acima não tem fronteira livre.*

Agora iremos iniciar o processo que permitirá escrever o Problema 7.1 para w em uma única desigualdade. Para isto, sendo $h_1 > 0$ a altura do dique, faça

$$R = \{(x, y) \mid 0 < x < L, 0 < y < h_1\}.$$

Defina uma função $g(x, y)$ sobre ∂R por:

$$(7.16) \quad \begin{cases} g(0, y) = \frac{1}{2}(h_1 - y)^2, & \text{se } 0 < y < h_1 \\ g(L, y) = \frac{1}{2}(h_2 - y)^2, & \text{se } 0 < y < h_2 \\ g = 0, & \text{no resto de } \partial R \setminus \Gamma_0 \end{cases}$$

Observe que $g(x, y)$ é uma função definida a partir dos valores de contorno de $w(x, y)$ em Ω .

Problema 7.2 *O Problema 7.1 pode ser reescrito da seguinte forma mais geral:*

$$\begin{cases} -\Delta w = f, & \text{em } R \\ w = g, & \text{sobre } \partial R \setminus \Gamma_0 \\ \begin{cases} w_y(x, 0) + u_0(x) = 0, & \text{em } 0 \leq x \leq l, \\ w_{xx}(x, 0) = 0, & \text{em } l \leq x \leq L. \end{cases} \end{cases}$$

onde $f = -I_\Omega$, $u_0 \in L^2(\Gamma_{u_0})$ e $g \in H^1(R)$ é a função $g(x, y)$ dada acima em 7.16.

Agora iremos supor que $\partial R \setminus \Gamma_{u_0}$ seja "suficientemente grande" no sentido que a forma de Dirichlet é coerciva para as funções que se anulam sobre $\partial R \setminus \Gamma_{u_0}$, isto é,

$$\|\xi\|_{H^1(R)} \leq c \|\nabla \xi\|_{L^2(R)}, \quad \text{para } \xi = 0 \text{ sobre } \partial R \setminus \Gamma_0,$$

$\xi \in H^1(R)$, para uma constante $c > 0$ e independente de ξ .

Considere os seguintes subconjuntos de $H^1(R)$:

$$(7.17) \quad K_g = \{v \in H^1(R) \mid v \geq 0 \text{ em } R \text{ e } v = g \text{ sobre } \partial R \setminus \Gamma_{u_0}\}$$

e

$$K_0 = \{v \in H^1(R) \mid v = 0 \text{ sobre } \partial R \setminus \Gamma_{u_0}\}$$

Fazendo

$$\bar{w}(x, y) = \begin{cases} w(x, y), & \text{em } (x, y) \in \Omega \\ 0, & \text{em } (x, y) \in R \setminus \Omega \end{cases}$$

temos que

(i) $\bar{w} \in H^1(R)$, pois $u \in H^1(\Omega)$ por hipótese;

(ii) $\bar{w} \geq 0$ em R , como já visto antes;

(iii) $\bar{w} = g$ sobre $\partial R \setminus \Gamma_{u_0}$.

Daí concluímos que $\bar{w} \in K_g$.

Observação 7.2 *O Problema 7.2 pode ser escrito na seguinte forma fraca:*

$$\bar{w} \in K_g : \quad \int_R \nabla \bar{w} \cdot \nabla \xi = \int_R f \xi + \int_{\Gamma_{u_0}} u_0 \xi \quad \text{para } \xi \in K_0$$

De fato, multiplicando a equação por $\xi \in K_0$ e integrando por partes, obtemos:

$$\begin{aligned} - \int_R \Delta \bar{w} \xi &= \int_R f \xi \quad \Rightarrow \quad \int_R \nabla \bar{w} \cdot \nabla \xi - \int_{\partial R} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \vec{\nu}} \xi = \int_R f \xi \\ \int_R \nabla \bar{w} \cdot \nabla \xi &= \int_{\partial R \setminus \Gamma_{u_0}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \vec{\nu}} \xi + \int_{\Gamma_{u_0}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \vec{\nu}} \xi + \int_R f \xi \\ \int_R \nabla \bar{w} \cdot \nabla \xi &= \int_{\partial R \setminus \Gamma_{u_0}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \vec{\nu}} 0 + \int_{\Gamma_{u_0}} u_0 \xi + \int_R f \xi \\ \int_R \nabla \bar{w} \cdot \nabla \xi &= \int_{\Gamma_{u_0}} u_0 \xi + \int_R f \xi \end{aligned}$$

Tomando $v, \bar{w} \in K_g$, temos que $v - \bar{w} \in K_0$. Usando a fórmula de Green, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_R \nabla \bar{w} \cdot \nabla (v - \bar{w}) &= \int_{\partial R} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \vec{\nu}} (v - \bar{w}) - \int_R \Delta \bar{w} (v - \bar{w}) \\ &= \int_{\partial R \setminus \Gamma_{u_0}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \vec{\nu}} (v - \bar{w}) + \int_{\Gamma_{u_0}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \vec{\nu}} (v - \bar{w}) - \int_R \Delta \bar{w} (v - \bar{w}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Gamma_{u_0}} u_0 (v - \bar{w}) - \int_{\Omega} (v - \bar{w}) \\
&= \int_{\Gamma_{u_0}} u_0 (v - \bar{w}) - \int_R (v - \bar{w}) + \int_{R \setminus \Omega} (v - \bar{w}) \\
&= \int_{\Gamma_{u_0}} u_0 (v - \bar{w}) - \int_R (v - \bar{w}) + \int_{R \setminus \Omega} v \\
&\geq \int_{\Gamma_{u_0}} u_0 (v - \bar{w}) - \int_R (v - \bar{w}), \quad \forall (v - \bar{w}) \in K_0
\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\int_R \nabla \bar{w} \cdot \nabla (v - \bar{w}) \geq \int_{\Gamma_{u_0}} u_0 (v - \bar{w}) - \int_R (v - \bar{w})$$

Mostramos assim, o seguinte resultado:

Teorema 7.5 *Seja $\{\varphi, x\}$ solução do Problema 7.1 com $u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ e φ suave. Seja w a solução do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} w_y = y - u, & \text{em } \Omega \\ w = 0, & \text{sobre } \Gamma : y = \varphi(x), 0 < x < L \end{cases}$$

e defina

$$\bar{w} = \begin{cases} w, & \text{em } \Omega \\ 0, & \text{em } R \setminus \Omega. \end{cases}$$

Então, $\bar{w} \in K$ satisfaz a inequação variacional

$$(7.18) \quad \int_R \nabla \bar{w} \cdot \nabla (v - \bar{w}) \geq \int_{\Gamma_{u_0}} u_0 (v - \bar{w}) - \int_R (v - \bar{w}), \quad \forall v \in K,$$

onde $K = K_g$ é definido por 7.17. Além disso,

$$\Omega = \{(x, y) \mid w(x, y) > 0\}.$$

Observação 7.3 *Temos que a inequação obtida, sendo válida em K , se caracteriza como uma inequação variacional, a qual pode ser resolvida através dos resultados clássicos de problemas variacionais apresentados neste apêndice, que garantem existência e unicidade para problemas desta natureza.*

7.4 Algoritmo do Ponto Interior

Nesta seção apresenta-se um algoritmo utilizado para resolver problemas não-lineares de programação matemática, proposto por Herskovits [?].

Considera-se o problema não-linear de otimização com restrições:

$$\begin{cases} \min_x f(x) \\ \text{tal que } g(X) \leq 0 \\ h(X) = 0. \end{cases}$$

Aqui $h : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$, $g : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^l$. Define-se a função $\phi_c(X) = f(X) + \sum_{i=1}^p c_i |h_i(X)|$, onde c_i são constantes positivas e sejam as seguintes notações: $\mathcal{G}(X)$ é uma matriz diagonal com $\mathcal{G}_{ii}(X) = g_i(X)$ e Λ é uma matriz diagonal tal que $\Lambda_{ii} = \lambda_i$.

Parâmetros: $\gamma \in (0, 1)$, $\nu \in (0, 1)$, $\varphi > 0$ e $\nu \in (0, 1)$.

Dados: $X \in \Delta^0$, $0 < \lambda \in \mathbb{R}^l$, $B \in \mathbb{R}^{q \times q}$ simétrico e positivo definido, $0 < \omega^i \in \mathbb{R}^l$, $0 < \omega^e \in \mathbb{R}^p$ e $0 < c \in \mathbb{R}^p$.

Passo 1: Cálculo de uma Direção de Busca

(i) Calcule (d_0, λ_0, μ_0) resolvendo o sistema linear

$$\begin{aligned} Bd_0 + \nabla g(X)\lambda_0 + \nabla h(X)\mu_0 &= -\nabla F(X), \\ \Lambda \nabla g^t(X)d_0 + \mathcal{G}(X)\lambda_0 &= 0, \\ \nabla h^t(X)d_0 &= -h(X). \end{aligned}$$

Se $d_0 = 0$, pare.

(ii) Calcule (d_1, λ_1, μ_1) resolvendo o sistema linear

$$\begin{aligned} Bd_1 + \nabla g(X)\lambda_1 + \nabla h(X)\mu_1 &= -\nabla F(X), \\ \Lambda \nabla g^t(X)d_1 + \mathcal{G}(X)\lambda_1 &= -\Lambda \omega^i, \\ \nabla h^t(X)d_1 &= -\omega^e. \end{aligned}$$

(iii) Se $c_i < 1.2\mu_{0i}$, então tome $c_i = -2\mu_{0i}$, $i = 1, \dots, p$.

(iv) Se $d_1^t \nabla \phi_c(X) > 0$, tome

$$\rho = \min\{\varphi \|d_0\|_2^2; (\gamma - 1)d_0^t \nabla \phi_c(X) / d_1^t \nabla \phi_c(X)\}.$$

Caso contrário, tome $\rho = \varphi \|d_0\|_2^2$.

(v) Calcule a direção de pesquisa $d = d_0 + \rho d_1$ e também $\bar{\lambda} = \lambda_0 + \rho \lambda_1$.

Passo 2: Busca Linear

Calcule t , o primeiro número da sequência $\{1, \nu, \nu^2, \nu^3, \dots\}$ satisfazendo

$$\begin{aligned} \phi_c(X + td) &\leq \phi_c(X) + t\eta d^t \nabla \phi_c(X), \\ h(X + td) &\leq 0, \\ g_i(X + td) &< 0, \quad \text{se } \bar{\lambda}_i \geq 0, \end{aligned}$$

$$g_i(X + td) \leq g_i(X) \quad \text{caso contrário.}$$

Passo 3: Redefinições (i) Tome $X := X + td$ e defina novos valores para $\omega^i > 0$, $\omega^e > 0$, $\lambda > 0$ e B simétrico e positivo definido.
(ii) Vá para o Passo 1.

Bibliografia

- [1] BAIOCCHI, C., *Sur un problème à frontière libre traduisant le filtrage de liquides à travers des milieux poreux*, **C.R. Ac. Sci. Paris**, **273** (1971). 1215-1217.
- [2] BAIOCCHI, C., *Su un problema di frontiera libera connesso a questioni di idraulica*, **Ann. Mat. Pura Appl.** (4) **92** (1972). 107-127.
- [3] BAIOCCHI, C.; CAPELO, A., **Variational and quasivariational inequalities. Applications to free boundary problem**. John Wiley & Sons, 1984.
- [4] BAIOCCHI, C.; COMINCIOLI, V.; MAGENES, E.; POZZI, G.A., *Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media: existence and uniqueness theorems*. **Ann. Mat. Pura Appl.**, (4) **97** (1973). 1-82
- [5] BAZARAA, M.S.; SHERALI, H.D.; SHETTY, C.M., **Nonlinear programming. Theory and algorithms**. John Wiley & Sons, 1993.
- [6] BEAR, J. **Dynamics of fluids in porous media**. American Elsevier Publishing Company, 1972.
- [7] BEAR, J. **Hydraulics of groundwater**. McGraw-Hill, 1979.
- [8] BEAR, J.; ZASLAVSKY, D.; IRMAY, S., **Physical principal of water percolation and seepage**. Unesco, 1968.
- [9] BREBBIA, C.A; TELLES, J.C.F.; WROBEL, L.C., **Boundary elements techniques - theory and applications in engineering**. Springer, 1984.
- [10] BUSSE, R.S., **Modelo matemático do impacto florestal** *Tese de Doutorado defendida no Instituto de Matemática da UFRJ*. 2004
- [11] BUSSE, R.S.; LEONTIEV, A., *Existence and uniqueness results for a quasivariational inequality*. **57º Seminário Brasileiro de Análise (57º SBA)**, Maio, Viçosa-MG, Brasil, (2003). 457-464.
- [12] CRANK, J., **Free and moving boundary problems**. Clarendon Press-Oxford, 1987.
- [13] LIGGET, J.A., *Location of the free surface in porous media*. **J. Hyd. Div., ASCE**, **103** (1997). 353-365
- [14] DUVAUT, G., LIONS, J.L., **Les inéquations en mécanique et en physique**. Dunod, Paris, 1972.
- [15] FRIEDMAN, A., **Variational principles and free boundary problems**. John Wiley & Sons, 1982.
- [16] FRIEDMAN, A., *The shape and smoothness of the free boundary for Some elliptic variational inequalities*. **Indiana University Mathematics Journal**, (25) **2** (1976). 103-118.

- [17] FRIEDMAN, A., *A problem in hydraulics with non-monotone free boundary*. **Indiana University Mathematics Journal**, (25) 6 (1976).. 577-592.
- [18] HERSKOVISTS, J., *Feasible direction interior-point technique for nonlinear optimization*. **Journal Of Optimization Theory And Applications**, (99) (1998). 121-146.
- [19] HERSKOVISTS, J.; LEONTIEV, A.; SANTOS, G., *A mathematical programming algorithm for optimal design of elastic solids in contato*. **Structural and Multidisciplinary Optimization**. Edited by W. Gutkowski and Z. Mroz, Institute of Fundamental Technological Research, (1) (1997). 67-72.
- [20] HERSKOVISTS, J.; LEONTIEV, A., *New optimality conditions and algorithm for Stackelberg-Cournot-Nash equilibria*. **Proceeding of the "46° Seminário Brasileiro de Análise"**, Novembro, Niterói-RJ, Brasil, UFF(1997). 801-809.
- [21] HERSKOVISTS, J.; LEONTIEV, A., *An interior point technique for solving bilevel programming problems*. .
- [22] JENSEN, R., *Fluid flow through a porous media,in free boundary problems*. **Proceedings Of a Seminar Held In Pavia, Setembro - Outubro, 1979, Instituto Nazionale di Alta Matematica, Francesco Severi, Roma**, (1) (1980). 133-149.
- [23] JENSEN, R., *Structure of the non-monotone free boundary in a filtration problem*. **Indiana University Mathematics Journal**, (26) 6 (1977). 1121-1135.
- [24] KINDERLEHRER, D.; STAMPACCHIA, G., **An introduction to variational inequalities and their applications**. Academic Press Inc., 1980.
- [25] LEONTIEV, A.; HUACASI, W., *Mathematical programming approach for unconfined seepage problem*. **International Journal of Engineering Analysis With Boundary Elements**, (25) (2001). 49-56.
- [26] LEONTIEV, A.; BUSSE, R.S.; HUACASI,W., *Forest impact effect on the groundwater table: model and variational formulation*, 7° **Workshop Em Equações Diferenciais Parciais, Julho, Rio de Janeiro-RJ, Brasil, (2001)**.
- [27] LEONTIEV, A.; BUSSE, R.S.; HUACASI,W., *Modelo matemático da drenagem florestal*, 24° **Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC-2001), Setembro, Belo Horizonte-MG, Brasil, (2001)**. 228.
- [28] LEONTIEV, A.; BUSSE, R.S.; HUACASI,W., *Abordagem matemática do problema da drenagem florestal* 54° **Seminário Brasileiro de Análise (54° SBA), Novembro, São José do Rio Preto-SP, Brasil, (2001)**. 369-382
- [29] LEONTIEV, A.; BUSSE, R.S.; HUACASI,W.; HERSKOVITS, J.; MOTA SOARES, C.M., *Identification of the groundwater table location in the forest impact problem*. **4-th International Conference On Inverse Problems In Engineering: Theory And Practice (ICIPE-2002), Maio, Angra dos Reis-RJ, Brasil, (2002)**. 26-31.
- [30] LEONTIEV, A.; BUSSE, R.S.; HUACASI,W., *A mathematical approach to a forest-impact problem* **Journal Of Engineering Mathematics**, 48(1) (2004), Netherlands. 27-42

- [31] LEONTIEV, A.; HERSKOVISTS, J., *Interior point techniques for optimal control of variational inequality*. **Structural Optimization**, (14) 2-3 (1997). 100-107
- [32] LUO, Z.-Q.; PANG, J.S.; RALPH, D., **Mathematical programs with equilibrium constraints**. Cambridge University Press, 1996.
- [33] POLUBARINOVA-KOCHINA, P.Ya., **Theory of ground water movement**. Princeton Univ. Press, 1962.
- [34] PIERMATEI FILHO, O.; LEONTIEV, A., *Modelo de infiltração em barragem com fundo semi-permeável*. **61º Seminário Brasileiro de Análise (61º SBA)**, Maio, São João Del Rei-MG, Brasil, UFSJ, (1) (2005). 5-12.
- [35] PIERMATEI FILHO, O.; LEONTIEV, A., *Existência e unicidade para o problema de infiltração em barragem com fundo semi-permeável*. **62º Seminário Brasileiro de Análise (62º SBA)**, Novembro, Rio de Janeiro-RJ, Brasil, UniRio, (31) (2005). 1-7.
- [36] POZZI, G., *On a free-boundary problem arising from fluid flow through a porous medium in the presence of evaporation*. **Bollettino U. M. I.**, (4) 9 (1974). 416-440.
- [37] SHIMIZU, K.; ISHIZUKA, Y.; BARD, J.F., **Nondifferentiable and two-level mathematical programming**. Kluwer, Dordrecht, 1997.
- [38] QUINTELA, A. C., **Hidráulica**. Fundação Calouste Gulbenkian, 9ª ed., 2005.
- [39] VICENTE, L.N.; CALAMAI, P.H., *Bilevel and multilevel programming. A Bibliography Review*. **Journal of Global Optimization**, (5) (1994). 291-306.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)