EXISTÊNCIA E COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE SOLUÇÕES DE UM PROBLEMA ABSTRATO NÃO LINEAR COM AMORTECIMENTO

Selene Alves Maia

Rio de Janeiro

MAIO DE 2006

EXISTÊNCIA E COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE SOLUÇÕES DE UM PROBLEMA ABSTRATO NÃO LINEAR COM AMORTECIMENTO

Selene Alves Maia

Tese submetida ao corpo docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Ciências

Área de concentração: Matemática

Aprovado por:

____

Manuel Milla Miranda - IM - UFRJ

Presidente

____

Luiz Adauto Medeiros - IM- UFRJ

____

Helvécio Rubens Crippa - IM - UFRJ

____

Haroldo Rodrigues Clark - UFF

____

Luiz Pedro San Gil Jutuca - UNIRIO

____

Ricardo Eleodoro Fuentes Apolaya - UFF

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática

Maio de 2006

RESUMO

Neste trabalho consideramos o seguinte problema de evolução não linear abstrato com amortecimento:

$$(*)\qquad \left|\begin{array}{l} u''(t) + Au(t) + B^{\alpha}u'(t) = 0, \quad t > 0 \\ \\ u(0) = u_0\,, \;\; u'(0) = u_1 \end{array}\right.$$

onde o operador não linear A é a derivada de Fréčht de um funcional convexo J, B^{α} é um operador linear e α um número real verificando $0 < \alpha \leq 1$.

O objetivo deste trabalho é demonstrar a existência de soluções globais para o problema (*) e estudar o seu comportamento assintótico.

ABSTRACT

In this work we consider the following abstract nonlinear evolution problem with damping:

$$(*)\qquad \left|\begin{array}{l} u''(t) + Au(t) + B^{\alpha}u'(t) = 0, \quad t > 0 \\ \\ u(0) = u_0\,,\;\; u'(0) = u_1 \end{array}\right.$$

where the nonlinear operator A is the derivative of Fréchet of a convex functional J, B^{α} is a linear operator and α is a real number verifying $0 < \alpha \leq 1$.

The objective of this work is to demonstrate the existence of global solutions for such problem and study their asymptotic behavior.

AGRADECIMENTOS

· Ao professor Manuel Milla Miranda, pela orientação segura, pelo grande incentivo, amizade e paciência que sempre me proporcionou durante a elaboração desta tese.

· Ao professor Luiz Adauto Medeiros, um dos responsáveis pela minha formação acadêmica, pelas valiosas sugestões durante a realização deste trabalho e pela enorme amizade que se desenvolveu ao longo destes anos de convivência.

· Aos integrantes do Conselho de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, em especial a Professora Walcy Santos, que me proporcionaram a oportunidade de defender a tese.

· Aos professores Alvércio Moreira Gomes, Ângela Cássia Biazutti, Jayme Muñoz Rivera e Helvécio Rubens Crippa, os quais também contribuíram de forma marcante na minha formação acadêmica.

· A todos amigos e amigas que no transcorrer destes anos sempre me motivaram a não desistir dos meus compromissos.

· Aos meus familiares que sempre me estimularam e proporcionaram condições objetivas na concretização desta tese.

· À Wilson Góes e Rogério Trindade pelo excelente trabalho de digitação.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Sejam V e H espaços de Hilbert reais, H identificado com seu dual, e W um espaço de Banach reflexivo real tal que

$$W \hookrightarrow V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V' \hookrightarrow W'$$

sendo as injeções contínuas e cada espaço denso no seguinte. Aqui H', V' e W' denotam os duais de H, V e W, respectivamente. O produto escalar e a norma de V e de H serão denotados, respectivamente, por $((u,v))$, $||u||$ e (u,v), $|u|$.

Suponhamos que são satisfeitas as seguintes condições:

$b(u,v)$é uma forma bilinear contínua e simétrica em $V \times V$ com $b(u,u) \geq 0$.

Existem α_0 e β em $\mathbb{R}$, com $\beta > 0$, tais que:

$$b(v,v) + \alpha_0|v|^2 \geq \beta||v||^2, \quad \forall\, v \in V.$$

Sejam nas condições acima:

R o operador definido pela terna $\{V, H, b(u,v)\}$

U o operador definido pela terna $\{V, H, \tilde{b}(u,v)\}$

onde $\tilde{b}(u,v) = b(u,v) + \alpha_0(u,v)$.

Consideremos um operador não linear $A\colon W \to W'$.

Nas condições acima, temos o seguinte problema não linear:

$$(*) \qquad \left| \begin{array}{l} u''(t) + Au(t) + B^{\alpha}u'(t) = 0, \quad t > 0 \\ u(0) = u_0\,, \;\; u'(0) = u_1 \end{array} \right.$$

Com a finalidade de obtermos a existência de soluções do problema (*), introduzimos algumas hipóteses sobre os espaços V e H e o operador não linear A. Suponhamos que:

(H1) H é separável;

(H2) A imersão de V em H é compacta;

(H3) A é monótono, isto é, $\langle Au - Av, u - v\rangle_{W'\times W} \geq 0$, $\forall\, u, v \in W$;

(H4) $||Au||_{W'} \leq c||u||_W^{p-1}$, $\forall\, u \in W$, onde $p > 1$ é um número real e $c > 0$ é uma constante independente de u;

(H5) $\langle Au, u\rangle_{W'\times W} = ||u||_W^p$, $\forall\, u \in W$;

(H6) O operador A é Fréchet diferenciável em cada $u \in W$;

(H7) $A(u)$ é fortemente homogêneo no sentido de Dubinskii [4], isto é, para cada $u, w \in W$

$$(**) \qquad \langle A'(u)u, w\rangle_{W'\times W} = \langle A'(u)w, u\rangle_{W'\times W} = (p-1)\langle Au, w\rangle_{W'\times W}\,,$$

onde $A'(u)$ é a derivada de Fréchet de A em u.

Sob as hipóteses (H1)–(H7), M. Tsutsumi [18] obteve a existência de soluções globais do problema (*) para o caso $\alpha = 1$. O objetivo do presente trabalho é melhorar o resultado de M. Tsutsumi [18]. Mais precisamente, proporcionar uma classe de operadores não lineares e considerar os casos $0 < \alpha \leq 1$. Além disso estuda-se o comportamento assintótico das soluções.

Consideremos então um funcional $J\colon W \mapsto \mathbb{R}$ tal que

(H8) J é conexo e Fréchet diferenciável.

Seja $A = J'(u)$. Decorre de (H8) que A é monótono e hemicontínuo (ver por exemplo J.L. Lions [10]).

Suponha também que o operador não linear $A\colon W \to W'$ verifica:

(H9) A leva conjuntos limitados de W em conjuntos limitados de W'.

Assumindo as hipóteses (H1), (H2), (H5–(H9) e definindo o operador B^α em um determinado domínio, obtemos neste trabalho a existência de soluções globais para o problema (*). Estudamos também o comportamento assintótico dessas soluções. Assim, este trabalho melhorar o resultado de M. Tsutsumi [18].

No estudo de existência de soluções do problema (4), utilizamos as aproximações de Galerkin, os métodos de compacidade e de monotonia e de forma fundamental um resultado de Browder e Bui An Ton [3] sobre a construção de espaços de Hilbert imersos continuamente em espaços de Banach. O comportamento assintótico da energia do sistema é obtido aplicando-se um resultado de Nakao [14]. Na parte final da tese é proporcionado um exemplo de um operador não Linear A satisfazendo as hipóteses (H3 – H9).

CAPÍTULO I

NOTAÇÕES E RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo fixaremos as notações e os principais resultados que serão utilizados nos capítulos posteriores. Alguns resultados enunciados aqui serão admitidos sem demonstrações, mas, daremos referências onde poderão ser encontrados.

I.1 – Os espaços $L^p(0,T;X)$

Seja X um espaço de Banach. Uma função u definida em $]\,0,T\,[$ com valores em X é mensurável quando para toda $f \in X'$ (dual topológico de X) a função numérica $t \mapsto \langle f, u(t)\rangle_{X'\times X}$ for mensurável a Lebesgue em $]\,0,T\,[$.

A função $u\colon\,]\,0,\mathrm{T}[\, \to X$ é integrável no sentido de Bochner em $]\,0,T\,[$, se u for mensurável e a função $t \mapsto ||u(t)||_X$ for integrável à Lebesgue em $]\,0,T\,[$. Neste caso, a integral de Bochner de u é o vetor de X denotado por $\displaystyle\int_0^T u(t)\,dt$ e caracterizado por:

$$\left\langle f, \int_0^T u(t)\,dt \right\rangle_{X'\times X} = \int_0^T \langle f, u(t)\rangle_{X'\times X}\,dt, \quad \forall\, f \in X'. \tag{1.1}$$

Sejam $1 \le p < \infty$ e $T > 0$ números reais. Denotamos por $L^p(0,T;X)$ o espaço vetorial das (classes) funções $u\colon\,]\,0,\mathrm{T}[\, \to X$ mensuráveis e tais que a aplicação $t \mapsto ||u(t)||_X^p$ é integrável à Lebesgue em $]\,0,T\,[$. Em $L^p(0,T;X)$ define-se a norma:

$$||u||_{L^p(0,T;X)} = \left[\int_0^T ||u(t)||^p\,dt\right]^{\frac{1}{p}},$$

em relação a qual $L^p(0,T;X)$ é um espaço de Banach.

Observação 1.1. Se $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, então $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert munido do produto escalar,

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t),v(t))\,dt, \quad \forall\, u,v \in L^2(0,T;X).$$

Por $L^\infty(0,T;X)$ estaremos denotando o espaço vetorial das (classes) funções mensuráveis $u\colon]\,0,\mathrm{T}[\to X$ tais que:

$$\operatorname*{supess}_{t\in]0,T[} ||u(t)|| < \infty.$$

Neste espaço definimos a norma:

$$||u||_{L^\infty(0,T;X)} = \operatorname*{supess}_{t\in]0,T[} ||u(t)||$$

em relação a qual $L^\infty(0,T;X)$ é um espaço de Banach.

Se $1 \leq p < \infty$, o dual topológico de $L^p(0,T;X)$ se identifica com o espaço $L^{p'}(0,T;X')$, onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ e X' representa o dual topológico de X. Demonstra-se também que se X for reflexivo (resp. separável) e $1 < p < \infty$ (resp. $1 \leq p < \infty$) então $L^p(0,T;X)$ é reflexivo e (resp. separável). Com esta identificação temos:

$$\langle f,u \rangle_{L^{p'}(0,T;X') \times L^p(0,T;X)} = \int_0^T \langle f(t),u(t) \rangle_{X' \times X}\,.$$

$\forall\, f \in L^{p'}(0,T;X')$ e $\forall\, u \in L^p(0,T;X)$.

Temos também que o dual topológico de $L^1(0,T;X)$ se identifica com o espaço $L^\infty(0,T;X')$.

I.2 – Distribuições Vetoriais

No que se segue, iremos supor que os espaços de Banach X são sempre reais, separáveis e reflexivos. Em muitas situações X será um espaço de Hilbert.

Suponhamos $u \in L^p(0,T;X)$ e para $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$ consideremos a aplicação $\tilde{u}\colon \mathcal{D}(0,T) \to X$ definida por:

$$\langle \tilde{u}, \varphi \rangle = \int_0^T u(s)\varphi(s)\, ds \in X \tag{1.2}$$

onde a integral é entendida como a integral de Bochner em X. A equação (1.2) define uma aplicação linear e contínua de $\mathcal{D}(0,T)$ em X. Portanto, $\tilde{u} \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T);X)$, que é por definição o espaço das distribuições vetoriais definidas em $\mathcal{D}(0,T)$ com valores em X, o qual representa-se por $\mathcal{D}'(0,T;X)$. Além disso, demonstra-se (ver por exemplo, R. Temam [17], que a distribuição $\tilde{u}$ é univocamente determinada por u, de modo que podemos identificar u com $\tilde{u}$. Neste sentido, identifica-se $L^p(0,T;X)$ com uma parte de $\mathcal{D}'(0,T;X)$, isto é, $L^p(0,T.X) \subset \mathcal{D}'(0,T;X)$. Dessa forma, sendo todo elemento u de $L^p(0,T;X)$ uma distribuição, u possui derivada no sentido das distribuições, isto é, $u' \in \mathcal{D}'(0,T;X)$ e é definido por:

$$\langle u', \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle = -\int_0^T u(s)\varphi'(s)\, ds. \tag{1.3}$$

Diz-se que uma sucessão $(u_\nu)_{\nu \in N}$de vetores de $\mathcal{D}'(0,T;X)$ converge para a distribuição u em $\mathcal{D}'(0,T;X)$, se $\langle u_\nu, \varphi \rangle \to \langle u, \varphi \rangle$, $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(0,T)$.

Sejam V e H espaços de Hilbert reais. Suponhamos que V é denso em H e que a injeção de V em H é contínua. Escrevemos $V \hookrightarrow H$ para indicar tal situação. Identificando-se H com seu dual topológico H' segue-se:

$$V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V', \tag{1.4}$$

onde V' é o dual topológico de V.

A seguir enunciaremos dois resultados cujas demonstrações podem ser encontradas em [8] e [17].

Lema 1.1. Se $u, v \in L^2(0,T;V)$ e $u', v' \in L^2(0,T;V')$ então a aplicação $t \mapsto (u(t), v(t))_H$ é absolutamente contínua em $[0,T]$ e vale a seguinte igualdade:

$$\frac{d}{dt}(u(t), v(t))_H = \langle u'(t), v(t)\rangle_{V'\times V} + \langle v'(t), u(t)\rangle_{V'\times V} \tag{1.5}$$

onde a derivada no primeiro membro da igualdade é a derivada no sentido das distribuições sobre $[0,T[$ da função $(u(t), v(t))_H$.

Lema 1.2. Se $v \in L^2(0,T;V)$, $u, v' \in L^2(0,T;H)$ e $u' \in L^2(0,T;V')$, então:

$$\frac{d}{dt}(u(t), v(t))_H = \langle u'(t), v(t)\rangle_{V'\times V} + (u(t), v'(t))_H\,. \tag{1.6}$$

(1.7) **Lema 1.3**. Se $u \in L^2(0,T;V)$ e $u' \in L^2(0,T;V')$, então u é após uma modificação eventual em um conjunto de medida nula contínua de $[0,T]$ em H e temos a seguinte igualdade no sentido das distribuições escalares sobre $[0,T]$:

$$\frac{d}{dt}|u(t)|_H^2 = 2\langle u'(t), u(t)\rangle_{V'\times V}\,. \tag{1.8}$$

Lema 1.4. Sejam X e Y espaços de Banach, tais que $X \hookrightarrow Y$, sendo X reflexivo. Se $u \in L^\infty(0,T;X)$ e $u \in C_s^0([0,T];Y)$, então $u \in C_s^0([0,T];X)$, onde $C_s^0([0,T];Y)$ e $C_s^0([0,T];X)$ são os espaços das funções fracamente contínuas de $[0,T]$ em Y e $[0,T]$ em X, respectivamente.

I.3 - Os Operadores R e R^s.

Suponhamos que sejam satisfeitas as seguintes condições:

(1.9) $b(u,v)$ é uma forma bilinear contínua e simétrica em $V \times V$ com $b(v,v) \geq 0$.

Existem α_0 e β em $\mathbb{R}$, com $\beta > 0$, tais que

$$b(v,v) + \alpha_0|v|^2 \geq \beta||v||^2, \forall\, v \in V \tag{1.10}$$

(1.11) A injeção de V em H é compacta.

Nas condições acima considera-se:

(1.12) R o operador definido pela terna $\{V, H, b(u,v)\}$

e

(1.13) U o operador definido pela terna $\{V, H, \tilde{b}(u,v)\}$

onde $\tilde{b}(u,v) = b(u,v) + \alpha_0(u,v)$.

Nessas condições, Milla Miranda [13] provou que:

(i) $D(U) = D(R)$ e $U = R + \alpha_0 I$;

(ii) $G(\alpha_0) = (R + \alpha_0 I)^{-1}$ é um operador compacto de H;

(iii) O conjunto dos valores próprios de R é no máximo enumerável e estes são da forma:

$$\gamma_\nu = \frac{1 - \alpha_0 \beta_\nu}{\beta_\nu}$$

onde $(\beta_\nu)_{\nu \in N}$ é a coleção de valores próprios de $G(\alpha_0)$;

(iv) O espectro $\sigma(R)$ de R é constituído unicamente por valores próprios de R e $\sigma(R)$ é um conjunto discreto.

A seguir enunciaremos o Teorema Espectral para o operador R demonstrado pelo antor citado anteriormente.

Teorema 1.1 (Teorema Espectral). Nas condições (1.9) – (1.11), obtemos:

(i) R é auto-adjunto e existe um sistema ortonormal completo $(\Psi_\nu)_{\nu \in N}$ de H constituído por vetores próprios de R;

(ii) Se $(\gamma_\nu)_{\nu\in N}$ são os valores próprios correspondentes aos $(\Psi_\nu)_{\nu\in N}$ então, $0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \cdots \leq \gamma_\nu \cdots$; $\gamma_\nu \to \infty$,

$$D(R) = \left\{ u \in H; \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu^2 |(u, \psi_\nu|^2 < \infty \right\}$$

e

$$Ru = \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu (u, \Psi_\nu) \Psi_\nu \,, \quad \forall\, u \in D(R).$$

Como $(Rv, v) = b(v, v) \geq 0$, $v \in D(R)$, então R é um operador auto-adjunto não limitado positivo de H e a teoria espectral para estes operadores define as potências R^s de R com $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$, dados por dadas por:

$$D(R^s) = \left\{ u \in H; \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu^{2s} |(u, \psi_\nu|^2 < \infty \right\} \tag{1.14}$$

e

$$R^s u = \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu^s (u, \Psi_\nu) \Psi_\nu \,, \quad \forall\, u \in D(R^s). \tag{1.15}$$

Em $D(R^s)$ introduzimos o produto escalar:

$$(u, v)_{D(R^s)} = (u, v) + (R^s u, R^s v), \quad \forall\, u, v \in D(R^s). \tag{1.16}$$

Então, $D(R^s)$ com este produto escalar é um espaço de Hilbert. Este resultado é uma conseqüência direta de R^s ser fechado posto que R^s é auto-adjunto.

Como R^s é auto-adjunto e positivo, $\forall\, s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$, tem sentido definirmos a raiz quadrada de R^s. Consideremos então:

$$D(Q) = \left\{ u \in H; \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu^{s} |(u, \Psi_\nu|^2 < \infty \right\}$$

e

$$Qu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu^{s/2} (u, \Psi_\nu) \Psi_\nu \,, \quad \forall\, u \in D(R)$$

Prova-se também que Q é o único operador auto-adjunto positivo tal que:

$$Q^2 = R^s$$

isto é,

$$R^{s/2} \circ R^{s/2} = R^s.$$

Logo:

$$(R^s u, u) = (Q^2 u, u) = (R^{s/2}, R^{s/2}).$$

Notamos também que as potências de R satisfazem a seguinte propriedade:

$$D(R^{s_2}) \subset D(R^{s_1}) \quad \text{se} \quad 0 \leq s_1 \leq s_2\,.$$

Finalmente, observamos que se $s > 0$ a imersão de $D(R^s)$ em H é compacta, onde o produto escalar de $D(R^s)$ foi definido em (1.16).

I.4 - Espaços Intermediários entre V e H

Consideremos os espaços de Hilbert V e H nas condições estudadas, isto é, $V \hookrightarrow H$, a imersão de V em H é compacta, V é denso em H e H separável. Seja U o operador definido pela terna $\{V, H, \tilde{b}(u,v)\}$ satisfazendo as condições (1.10)–(1.13).

Denotemos por S a raiz quadrada positiva de U. Nessas condições, Milla Miranda [13] provou que:

$$V = D(S) = D((B + \alpha_0 I)^{1/2}) \quad \text{e} \quad \tilde{b}(u,v) = (Su, Sv), \quad \forall\, u, v \in V.$$

A teoria de interpolação permite obter uma família de Espaços de Hilbert denotados por $X_\theta = [V, H]_\theta = D(S^{1-\theta})$, $0 \leq \theta \leq 1$, munido do produto escalar

$$(u,v)_{X_\theta} = (S^{1-\theta} u, S^{1-\theta} v) + H = \left(U^{\frac{1-\theta}{2}} u, U^{\frac{1-\theta}{2}} \right)_H.$$

Observamos que $X_0 = [V, H]_0 = V$ e $X_1 = [V, H]_1 = H$. Notemos também que se $\theta_1 \leq \theta_2$ então $X_{\theta_1} \subset X_{\theta_2}$. Temos então o seguinte resultado:

Proposição 1.1. Seja $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 1$. Então:

(i) A injeção de X_{θ_1} em X_{θ_2} é contínua;

(ii) X_{θ_1} é denso em X_{θ_2}.

Demonstração: Ver Milla Miranda [13].

I.6 - Um Teorema de Compacidade em Espaços de Banach

Sejam X_0, X e X_1, espaços de Banach tais que:

$$X_0 \subset X \subset X_1, \tag{1.17}$$

onde as injeções são contínuas e

$$X_i \quad \text{é reflexivo}, \quad i = 0, 1. \tag{1.18}$$

$$\text{A injeção } X_0 \to X \text{ é compacta.} \tag{1.19}$$

Consideremos o espaço $W(0, T)$ definido por:

$$W(0,T) = \{v.v \in L^{p_0}(0,T;X_0),\ v' \in L^{p_1}(0,T;X_1)\} \tag{1.20}$$

onde T é finito e $1 < p_i < \infty$, $i = 0, 1$.

Munido da norma

$$||v||_{W(0,T)} = ||v||_{L^{p_0}(0,T;X_0)} + ||v'||_{L^{p_1}(0,T;X_1)} \tag{1.21}$$

W é um espaço de Banach.

Evidentemente $W \subset L^{p_0}(0,T;X)$ com injeção contínua. Temos então o seguinte resultado

Teorema 1.2 (Teorema de Aubin-Lions). Sob as hipóteses $(1.17)-(1.19)$ e se $1 < p_i < \infty$, $i = 0, 1$, a injeção de $W(0,T)$ em $L^{p_0}(0,T;X)$ é compacta.

Demonstração: Ver Roger Teman [17].

1.6 - O operador não linear *A* e o espaço *W*

Consideremos o operador não linear $A\colon W \to W'$ e suponhamos que A satisfaz as seguintes hipóteses:

$$(1.22) \qquad \langle Au, u\rangle_{W'\times W} = ||u||_W^p\,, \quad \forall\, u \in W$$

$$(1.23) \qquad A \text{ é Fréchet diferenciável em cada } u \in W.$$

$A(u)$ é fortemente homogêneo de grau $p-1$ no sentido de Dubinskii, isto é, para cada $u, w \in W$,

$$(1.24) \qquad \langle A'(u)u, w\rangle_{W'\times W} = \langle A'(u)w, u\rangle_{W'\times W} = (p-1)\langle A(u), w\rangle_{W'\times W}\,,$$

onde $A'(u)$ é a derivada de Fréchet de A em u.

Nessas condições obtemos o lema enunciado a seguir.

Lema 1.5. Suponhamos que o operador não linear $A\colon W \to W'$ satisfaz $(1.22)-(1.24)$. Então, para cada $u \in C^1(0,T;W)$, obtemos

$$(1.25) \qquad \int_0^t \langle Au(s), u'(s)\rangle_{W'\times W}\, ds = \frac{1}{p}\,||u(t)||_W^p - \frac{1}{p}\,||u(0)||_W^p.$$

Demonstração: De fato, pela regra da cadeia e por (1.24), obtemos:

$$\left\langle \frac{d}{dt} Au(t), u(t) \right\rangle_{W' \times W} = \langle A'(u(t))u', u(t) \rangle_{W' \times W} \tag{1.26}$$
$$= (p-1)\langle Au(t), u'(t) \rangle_{W' \times W}.$$

Por outro lado, temos que:

$$\frac{d}{dt} \langle Au(t), u(t) \rangle_{W' \times W} = \left\langle \frac{d}{dt} Au(t), u(t) \right\rangle_{W' \times W} + \langle Au(t), u'(t) \rangle_{W' \times W}. \tag{1.27}$$

Substituindo-se (1.26) em (1.27), resulta que:

$$\frac{d}{dt} \langle Au(t), u(t) \rangle_{W' \times W} = (p-1) \langle Au(t), u'(t) \rangle_{W' \times W} + \langle Au(t), u'(t) \rangle_{W' \times W}. \tag{1.28}$$

Logo, integrando-se a equação (1.28) com respeito a s, com $0 \leq s \leq t$ e usando-se a hipótese (1.22) obtemos (1.25).

I.7 - O Teorema de Imersão de Browder e Ton

O teorema de imersão de Browder e Ton [3] é uma versão abstrata dos teoremas clássicos de imersão de espaços de Sobolev no contexto dos espaços funcionais. De fato, seja

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \,|\, D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo } |\alpha| \leq m\} \tag{1.29}$$

onde Ω é um conjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Se $1 \leq p < \infty$, $k - m \geq 1$ e

$$\frac{1}{p} > \frac{1}{2} - \frac{k-m}{n},$$

então pelo teorema de imersão de Sobolev a injeção natural $i\colon W^{k,2}(\Omega) \to W^{m,p}(\Omega)$ é uma aplicação linear compacta tendo imagem densa em $W^{m,p}(\Omega)$.

Em 1968, Felix Browder e Bui An Ton provaram a versão abstrata do teorema de imersão de Sobolev enunciado acima. Eles mostraram que, para qualquer espaço de Banach separável real X existem um espaço deHilbert separável real $\widetilde{H}$ e uma injeção linear compacta $\psi : \widetilde{H} \to X$ tal que $\psi(\widetilde{H})$ é densa em X.

Teorema 1.3 (Teorema de Imersão de Browder e Ton). Seja X um espaço de Banach separável real de dimensão infinita. Então existem um espaço de Hilbert separável $\widetilde{H}$ e uma injeção linear compacta $\psi : \widetilde{H} \to X$ tal que $\psi(\widetilde{H})$ é densa em X.

Demonstração: Sendo X separável existe uma coleção $S = \{v_1, v_2, ...\}$ de vetores linearmente independentes de X tais que $\|v_k\|_X = 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$ e S gera X. Denota-se por $\overline{[S]}$ o subespaço linear de X gerado por S, isto é, $\overline{[S]} = X$. Seja $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais tal que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^2$. Então, a série

$$\sum_{k\,=\,1}^{\infty} \frac{a_k}{k}\, v_k$$

converge em X. De fato, denotando $s_n = \sum_{k\,=\,1}^{n} \frac{a_k}{k}\, v_k$ obtemos:

$$\|s_{n+p} - s_n\|_X = \sum_{k\,=\,n+1}^{n+p} \frac{|a_k|}{k} \leq \left(\sum_{k\,=\,n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{k\,=\,n+1}^{n+p} a_k^2\right)^{1/2} \tag{1.30}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $p = 1, 2, 3, ...$ Logo $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em X e portanto converge neste espaço, pois por hipótese X é um espaço de Banach.

Notemos que a representação $u = \sum_{k\,=\,1}^{\infty} \frac{a_k}{k}\, v_k$, $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^2$, de u não é necessariamente única (ver Lindenstrauss J. e Tzafriri L. [9]). Definimos a aplicação $i : l^2 \to X$ escolhendo

$$i(\overrightarrow{a}) = \sum_{k\,=\,1}^{\infty} \frac{a_k}{k} v_k$$

para toda $\overrightarrow{a} = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^2$. Então i é linear e pela estimativa (1.30)

$$\|i(\overrightarrow{a})\|_X \leq c_0\, \|\overrightarrow{a}\|_{l^2}\,,$$

onde $c_0 = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2}$. Então a aplicação $i : l^2 \to X$ é contínua. Além disso, a aplicação i é compacta desde que ela é o limite uniforme de operadores tendo imagem de dimensão finita. De fato, denotando $i_n(\overrightarrow{a}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}\ v_k$ resulta de (1.30) que

$$\|i(\overrightarrow{a}) - i_n(\overrightarrow{a})\|_X = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2\right)^{1/2}.$$

Portanto

$$\|i - i_n\| = \sup_{\|\overrightarrow{a}\|=1} \|i(\overrightarrow{a}) - i_n(\overrightarrow{a})\|_X \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2},$$

provando a assertiva. Denotemos $W_0 = Ker(i)$, o qual é um subespaço linear fechado de l^2. Definimos um espaço de Hilbert separável real $\widetilde{H}$ escolhendo

$$\widetilde{H} = W_0^{\perp} = \{\overrightarrow{a} \in l^2 \,|\, \overrightarrow{a} \perp W_0\}.$$

Então $\widetilde{H} \cong l^2/W_0 = l^2/Ker(i)$ e consequentemente a aplicação $\psi = i\,|_H : \widetilde{H} \to X$ é uma injeção linear compacta. Além disso, denotando por $P : l^2 \to \widetilde{H}$ a projeção ortonormal, temos $i(\overrightarrow{e_j}) = \psi(P\overrightarrow{e_j}) = \frac{v_j}{j} \in X$ para todo $j \in \mathbb{N}_+$, onde $\overrightarrow{e_j} = (\delta_{j,k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Claramente o subconjunto $S_H = \psi^{-1}(S)$ de H é enumerável e $\psi([S]) = [S]$. Então $[S] \subset \psi(H)$, o que completa a demonstração.

OBSERVAÇÃO 1.2. O espaço de Banach X possui uma base de Schauder $\{v_1, v_2, ...\}$ se para cada vetor u de X, existe uma única sucessão $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de números reais tal que

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\ v_k.$$

Por um comentário de H.Brezis. [2] todos os espaços usuais de Banach separáveis possuem uma base de Schauder. Temos então o seguinte resultado enunciado a seguir.

Proposição 1.2. Seja W um espaço de Banach que possui uma base de Schauder $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Então:

$$\widetilde{H} = \left\{ u \in W \left| \sum_{k\,=\,1}^{\infty} (k\alpha_k)^2 < \infty, \text{ onde } u = \sum_{k\,=1}^{\infty} \alpha_k v_k \right. \right\}$$

e o produto escalar é dado por

$$(u,v)_{\widetilde{H}} = \sum_{k\,=\,1}^{\infty} k^2 \alpha_k \beta_k, \text{ onde } u = \sum_{k\,=1}^{\infty} \alpha_k v_k \text{ e } v = \sum_{k\,=1}^{\infty} \beta_k v_k$$

Demonstração: De fato, tem-se:

$$\|u\|_W = \left\| \sum_{k\,=1}^{\infty} \alpha_k v_k \right\|_W \leq \sum_{k\,=1}^{\infty} |\alpha_k| = \sum_{k\,=1}^{\infty} k \frac{|\alpha_k|}{k} \leq (\sum_{k\,=1}^{\infty} \frac{1}{k^2})^{1/2} (\sum_{k\,=1}^{\infty} k^2 \alpha_k^2)^{1/2} = c\,\|u\|_{\widetilde{H}}\,.$$

A seguir mostraremos que $\widetilde{H}$ é um espaço de Hilbert. Com efeito, seja $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy em $\widetilde{H}$,

$$u_\nu = \sum_{k\,=1}^{\infty} \alpha_{k\,,\nu} v_k.$$

Temos que:

$$\|u_\nu - u_\mu\|_{\widetilde{H}}^2 = \sum_{k\,=1}^{\infty} k^2 (\alpha_{k\,,\,\nu} - \alpha_{k\,,\,\mu})^2 \to 0,\ \nu,\mu \to \infty.$$

Logo,

$$(k\ \alpha_{k\,,\,\nu}) \text{ é uma sucessão de Cauchy em } l^2.$$

Como l^2 é completo existe $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^2$ tal que

$$k\ \alpha_{k\,,\,\nu} \to z_k \text{ em } l^2, \nu \to \infty. \tag{1.31}$$

Dado $\epsilon > 0$, existe $L > 0$ tal que para $N > M \geqslant L$, temos:

$$\left\| \sum_{k\,=1}^{N} \frac{z_k}{k} v_k - \sum_{k\,=1}^{M} \frac{z_k}{k} v_k \right\|_W \leq \sum_{k\,=\,M+1}^{N} \left| \frac{z_k}{k} \right| \leq (\sum_{k\,=\,M+1}^{N} \frac{1}{k^2})^{1/2} (\sum_{k\,=\,M+1}^{N} z_k^2)^{1/2}$$
$$\leq c(\sum_{k\,=\,M+1}^{N} z_k^2)^{1/2}. \leq c\epsilon$$

Portanto:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{k} v_k \in W.$$

Como $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 (\frac{z_k}{k})^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k^2 < \infty$ resulta que $u \in \widetilde{H}$.

Evidentemente, $u_\nu \to u$ em $\widetilde{H}$, pois de (1.31) resulta que

$$\|u_\nu - u\|_{\widetilde{H}}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (k\ \alpha_{k\ ,\ \nu} - z_k)^2 \to 0,\ \nu \to \infty.$$

Notemos que $\left(\dfrac{v_k}{k}\right)$ é uma base de Hilbert do espaço $\widetilde{H}$.

Decorre do exposto que:

$$\widetilde{H} \hookrightarrow W,\ \widetilde{H} \text{ é denso em } W.$$

Afirmamos que a identidade $I : \widetilde{H} \to W$ é um operador compacto. Com efeito, seja I_m a aplicação linear

$$I_m : \widetilde{H} \to W,\ u \mapsto I_m u = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k v_k = u_m,\ u = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k v_k$$

Então, I_m é compacta. Seja $\epsilon > 0$ então existe $L > 0$ tal que para $m \geqslant L$ resulta

$$\|u - u_m\|_W = \left\| \sum_{k\ =\ m+1}^{\infty} \alpha_k v_k \right\|_W \leq \sum_{k\ =\ m+1}^{\infty} |\alpha_k| = \sum_{k\ =\ m+1}^{\infty} k \frac{|\alpha_k|}{k} \leq$$

$$\leq \Big(\sum_{k\ =\ m+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \Big)^{1/2} \Big(\sum_{k\ =\ m+1}^{\infty} (k\alpha_k)^2 \Big)^{1/2} \leq \epsilon \Big(\sum_{k\ =\ m+1}^{\infty} (k\alpha_k)^2 \Big)^{1/2} = \epsilon \,\|u - u_m\|_{\widetilde{H}}\ ,$$

isto é,

$$\|I - I_m\|_{\mathcal{L}(\widetilde{H}, W)} \leq \epsilon,\ \forall m \geqslant L.$$

Assim, o operador identidade I é compacto.

Observa-se que na topologia de $\widetilde{H}$, $u \in \widetilde{H}$ escreve-se na forma:

$$u = \sum_{k\ =\ 1}^{\infty} k \alpha_k \frac{v_k}{k}.$$

Portanto, a série $\sum\limits_{k\,=\,1}^{\infty} \alpha_k v_k$ converge em $\widetilde{H}$ e em W.

I.8 - Lema de Nakao

Lema 1.6 (Nakao) - Seja $\phi : [0, \infty[\; \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e não negativa satisfazendo:

$$\sup_{t \,\leq\, s \,\leq\, t+1} [\phi(s)]^{1+\beta'} \leq c_0 \left[\phi(t) - \phi(t+1)\right] \tag{1.32}$$

para $t \geqslant 0$, onde $c_0 > 0$ e $\beta' \geqslant 0$. Então:

(i) Se $\beta' = 0$, existem c_1 e δ constantes positivas tais que

$$\phi(t) \leq c_1 e^{-\delta\, t}, \forall t \geqslant 1.$$

(ii) Se $\beta' > 0$, existe $c_2 > 0$ tal que

$$\phi(t) \leq c_2 \left[1 + t\right]^{-\dfrac{1}{\beta'}}, \; \forall \; t \geqslant 0.$$

Demontração:

(i) De (1.32) tem-se que $\phi(t) \leq c_0 \left[\phi(t) - \phi(t+1)\right]$. Sem perda de generalidade, pode-se supor que $c_0 > 1$. Seja ρ tal que $0 < \rho < \dfrac{1}{c_0} < 1$. Então,

$$\rho\phi(t) \leq \frac{1}{c_0}\phi(t) \leq \phi(t) - \phi(t+1).$$

Da desigualdade acima obtém-se que $\phi(t+1) \leq (1-\rho)\,\phi(t)$. Considere $t \geqslant 1$ e $n \in \mathbb{N}$, tais que $n \leq t < (n+1)$. Então,

$$\phi(t) \leq (1-\rho)\phi(t-1) \leq (1-\rho)^2\phi(t-2) \leq ... \leq (1-\rho)^n\phi(t-n).$$

Como $0 \leq t - n < 1$, denotando-se $k_0 = \sup\limits_{0 \leq s \leq 1} \phi(s)$, tem-se:

$$\phi(t) \leq k_0 (1-\rho)^n.$$

Por outro lado, como $0 < \rho < 1$ e $t < n+1$, segue-se que $(1-\rho)^n < (1-\rho)^{t-1}$. Logo,

$$\phi(t) \leq \frac{k_0}{(1-\rho)}(1-\rho)^t$$

Denotando-se $c_1 = \dfrac{k_0}{1-\rho}$, definindo-se $-\delta = \ln\,(1-\rho)$ e como $\ln\,(1-\rho) < 0$, obtém-se que:

$$\phi(t) \leq c_1 e^{t \ln(1-\rho)} = c_1 e^{-\delta\, t}, \ \forall\, t \geqslant 1.$$

(ii) Sejam $\phi_0(t) = t^{-\theta}$, com $\theta > \dfrac{1}{\beta'}$ e $\psi(t) = \phi(t) + \phi_0(t)$. Então, segue-se:

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} [\psi(s)]^{1+\beta'} \leq 2^{\beta'} \sup_{t \leq s \leq t+1} \left[(\phi(s))^{1+\beta'} + (\phi_0(s))^{1+\beta'} \right], \tag{1.33}$$

em decorrência de

$$(a+b)^{1+\beta'} \leq 2^{\beta'}(a^{1+\beta'} + b^{1+\beta'}), \text{ para cada } a, b, \beta' \geqslant 0.$$

Afirmamos que a desigualdade acima é verdadeira. Com efeito, a função $f(\lambda) = \lambda^{1+\beta'}$, $\lambda \geqslant 0$ é convexa. Sejam a, $b \in \mathbb{R}$ com $a \geqslant 0$ e $b \geqslant 0$. Então,

$$\left[\frac{a+b}{2}\right]^{1+\beta'} \leq \frac{1}{2}\left[a^{1+\beta'} + b^{1+\beta'}\right].$$

Logo,

$$[a+b]^{1+\beta'} \leq 2^{\beta'}\left[a^{1+\beta'} + b^{1+\beta'}\right]. \tag{1.34}$$

Segue-se de (1.33), utilizando-se (1.32) e o fato de $\phi_0(t)$ ser decrescente, que

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} [\psi(s)]^{1+\beta'} \leq 2^{\beta'}\left[c_0(\phi(t) - \phi(t+1)) + \phi_0(t)^{1+\beta'}\right].$$

Logo,

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} [\psi(s)]^{1+\beta'} \leq 2^{\beta'} c_0 [\psi(t) - \psi(t+1)] + I\ (t), \tag{1.35}$$

onde

$$I\ (t) = 2^{\beta'} \left[-c_0 t^{-\ \theta} + c_0 (1+t)^{-\ \theta} + t^{-\ \theta\ (1+\beta')} \right] \tag{1.36}$$

Provaremos a seguir que:

$$\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\theta} \geqslant 1 + \frac{\theta}{2},\ \forall t \geqslant 1 \text{ e } \theta \geqslant 0. \tag{1.37}$$

De fato, seja $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \geqslant 0$ e definimos $f\ (\theta) = 2^{\theta} - 1 - \dfrac{\theta}{2}$. Então,

$$f\ '\ (\theta) = 2^{\theta} \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Do fato que,

$$2 \geqslant e^{1/2} \geqslant e^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\theta+1}}$$

obtém-se

$$\ln 2 \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\theta+1}.$$

Portanto, $f\ '(\theta) \geqslant 0$. Como $f(0) = 0$, vem que $f\ (\theta) \geqslant 0$, isto é,

$$2^{\theta} \geqslant 1 + \frac{\theta}{2}. \tag{1.38}$$

Por outro lado, provar (1.37) é equivalente a demonstrar que, $(1+x)^{\theta} \geqslant 1 + \dfrac{\theta}{2} x$, se $0 < x \leq 1$, para $\theta > 0$, θ fixado. Consideremos a fumção g definida por:

$$g(x) = (1+x)^{\theta} - 1 - \frac{\theta}{2} x.$$

Então,

$$g'(x) = \theta\ (1+x)^{\theta-1} - \frac{\theta}{2} = \theta\ \left[(1+x)^{\theta-1} - \frac{1}{2} \right].$$

Logo, se:

i) $0 < \theta < 1$, tem-se $\dfrac{1}{(1+x)^{1-\theta}} - \dfrac{1}{2} > 0$, sempre que $(1+x)^{1-\theta} < 2$, ou de modo equivalente, $(1+x) < 2^{\dfrac{1}{1-\theta}}$, isto é, se $x < 2^{\dfrac{1}{1-\theta}} - 1$. Como, $2^{\dfrac{1}{1-\theta}} - 1 > 1$, pois por hipótese, $0 < \theta < 1$, segue-se que $g'(x) > 0$, para $0 < x \leq 1$.

ii) $\theta = 1$, $g'(x) = \dfrac{1}{2} > 0$.

iii) $\theta > 1$, então $(1+x)^{\theta-1} > 1 > \dfrac{1}{2}$. Logo, $g'(x) > 0$, para $0 < x \leq 1$.

Portanto, de *i)* $-$ *iii)* resulta que $g(x)$ é crescente para $0 < x \leq 1$ e $\theta \geqslant 0$. Disso e de (1.38) resulta que:

$$g(x) \geqslant g(1) \geqslant 0, \text{ para } 0 < x \leq 1.$$

Logo,

$$\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\theta} \geqslant 1 + \frac{\theta}{2t}, \ \forall\, t \geqslant 1 \text{ e } \theta \geqq 0. \tag{1.39}$$

Afirmação: $I(t) \leq 0$, para todo t suficientemente grande.

De fato:

$$I\ (t) = 2^{\beta'} c_0\, (1+t)^{-\ \theta} \ \left[1 - \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\theta} + \frac{1}{c_0} t^{-\ \theta\ (1+\beta')}\, (1+t)^{\theta}.\right]$$

De (1.39) resulta que,

$$1 - \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\theta} \leq -\frac{\theta}{2} t^{-1}.$$

Logo,

$$I\ (t) \leq 2^{\beta'} c_0 (1+t)^{-\ \theta} t^{-\ 1} \left[-\ \frac{\theta}{2} + \frac{t^{-\ \theta\ (1+\beta')+1}}{c_0}\ (1+t)^{\theta}\right],\ \forall\, t \geqslant 1.$$

Seja $w\ (t) = \dfrac{(1+t)^{\theta}}{c_0} t^{-\ \theta\ (1+\beta')+1}$. Deseja-se provar na verdade que $w\ (t) \leq \dfrac{\theta}{2}$, para t suficientemente grande. Portanto, basta verificar que, $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} w\ (t) = 0$. Entretanto,

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} w(t) = \lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{(1+t)^{\theta}}{c_0 t^{\theta\ (1+\beta')-1}} = \frac{1}{c_0} \lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{(1+t)^{\theta}}{t^{\theta\ (1+\beta')-1}} = \frac{1}{c_0} \lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{t^{\theta}}{t^{\theta\ (1+\beta')-1}}$$

$$= \frac{1}{c_0} \lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{1}{t^{\theta\beta'-1}} = 0,$$

pois por hipótese $\theta\beta' > 1$. Obtém-se assim que a **Afirmação** é verdadeira.

Retornando-se a (1.35) tem-se que

$$\sup_{t\ \leq\ s\ \leq\ t+1} [\psi(s)]^{1+\beta'} \leq 2^{\beta'} c_0 \left[\psi(t) - \psi(t+1)\right], \text{ para } t \geqslant T. \tag{1.40}$$

Seja $z(t) = \psi(t)^{-\ \beta'}$. Então,

$$z(t+1) - z(t) = \int_0^1 \frac{d}{d\tau} \left[\tau\psi(t+1) + (1-\tau)\psi(t)\right]^{-\ \beta'}\ d\tau,$$

ou equivalentemente,

$$z(t+1) - z(t) = \beta' \int_0^1 \frac{[\psi(t) - \psi(t+1)]}{\left[\tau\psi(t+1) + (1-\tau)\psi(t)\right]^{1+\ \beta'}}\ d\tau \tag{1.41}$$

Mas, $\tau\psi(t+1) + (1-\tau)\psi(t)$ está entre $\psi(t)$ e $\psi(t+1)$, pois $0 \leq \tau \leq 1$. Logo,

$$\tau\psi(t+1) + (1-\tau)\psi(t) \leq \sup_{t\ \leq\ s\ \leq\ t+1} \psi(s).$$

Substituindo-se a desigualdade acima em (1.41), obtém-se

$$z(t+1) - z(t) \geqslant \beta' \int_0^1 \frac{[\psi(t) - \psi(t+1)]}{\sup\limits_{t\ \leq\ s\ \leq\ t+1} [\psi(s)]^{1+\ \beta'}}\ d\tau$$

Utilizando-se (1.40) resulta que

$$z(t+1) \geqslant z(t) + \frac{\beta'}{c_0 2^{\beta'}},\ \forall\ t \geqslant T. \tag{1.42}$$

Seja $n \in \mathbb{N}$. Escolhendo-se $t \geqslant T$, tal que $n + T \leq t \leq n + T + 1$, segue-se então de (1.42) que,

$$z(t) \geqslant z(t-1) + \frac{\beta'}{c_0 2^{\beta'}} \geqslant \dots \geqslant z(t-n) + \frac{n\beta'}{c_0 2^{\beta'}},$$

isto é,

$$[\psi(t)]^{-\,\beta'} \geqslant z(t-n) + \frac{n\beta'}{c_0 2^{\beta'}}. \tag{1.43}$$

Como $T < t - n < T + 1$, tem-se

$$z(t-n) \geqslant \inf_{T \,\leq\, s \,\leq\, T+1} z(s) = \left[\sup_{T \,\leq\, s \,\leq\, T+1} \psi(s) \right]^{-\,\beta'} = c.$$

Logo, retornando-se a (1.43), obtém-se

$$[\psi(t)]^{-\,\beta'} \geqslant c + \frac{n\beta'}{c_0 2^{\beta'}},$$

ou equivalentemente,

$$[\psi(t)]^{\beta'} \leq \frac{c_0 2^{\beta'}}{c c_0 2^{\beta'} + n\beta'}.$$

Logo,

$$[\psi(t)]^{\beta'} \leq \frac{c_0 2^{\beta'}}{n\beta'}.$$

Como $n > t - T - 1$, obtém-se

$$\psi(t) \leq \left(\frac{c_0 2^{\beta'}}{\beta'} \right)^{\frac{1}{\beta'}} (t - T - 1)^{-\frac{1}{\beta'}}, \tag{1.44}$$

para $t > T$.

Supondo $t \geqslant \dfrac{T\,(T+1)+1}{T-1}$ tem-se $t \geqslant \dfrac{T}{T-1}\left(T + 1 + \dfrac{1}{T}\right)$. Logo, $t\left(1 - \dfrac{1}{T}\right) \geqslant T + 1 + \dfrac{1}{T}$, resultando que $t - T - 1 \geqslant \dfrac{t+1}{T}$. Portanto, obtém-se

$$(t - T - 1)^{-\frac{1}{\beta'}} \leq T^{\frac{1}{\beta'}} (1+t)^{-\frac{1}{\beta'}}.$$

Substituindo-se esta desigualdade em (1.44), obtém-se

$$\psi(t) \leq \left(\frac{c_0 2^{\beta'} T}{\beta'}\right)^{\frac{1}{\beta'}} (1+t)^{-\frac{1}{\beta'}}, \text{ para } t > T.$$

Denotando-se $\left(\frac{c_0 2^{\beta'} T}{\beta'}\right) = c_3$, segue-se da definição de ψ e da desigualdade anterior que

$$\phi(t) \leq c_3(1+t)^{-\frac{1}{\beta'}} \text{ para } t > T. \tag{1.45}$$

Suponha agora que $0 \leq t \leq T$. Se existisse $t^* \in [0,T]$ tal que para cada $c_4 > 0$, $\phi(t^*) > c_4(1+t^*)^{-\frac{1}{\beta'}}$, então ϕ não seria limitada, o que é um absurdo por hipótese. Logo,

$$\phi(t) \leq c_4(1+t)^{-\frac{1}{\beta'}} \text{ para } 0 \leq t \leq T. \tag{1.46}$$

Seja $c_2 = \max\{c_3, c_4\}$. Resulta então de (1.45) e (1.46) que

$$\phi(t) \leq c_2(1+t)^{-\frac{1}{\beta'}} \text{ para } \forall\ t \geqslant 0,$$

CAPÍTULO II

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES GLOBAIS

Consideremos o problema abstrato de evolução não linear com amortecimento:

$$(2.1) \qquad \left| \begin{array}{l} u''(t) + Au(t) + B^{\alpha}u'(t) = 0, \quad t > 0 \\ \\ u(0) = u_0\,, \;\; u'(0) = u_1 \end{array} \right.$$

onde α é um número real e $0 < \alpha \leq 1$.

Sejam V e H espaços de Hilbert reais, H identificado com seu dual e W um espaço de Banach reflexivo real tais que,

$$W \;\hookrightarrow\; V \;\hookrightarrow\; H \;\equiv\; H' \;\hookrightarrow\; V' \;\hookrightarrow\; W'$$

sendo as injeções contínuas e cada espaço denso no seguinte:

Seja $B^{\alpha}\colon D(R^{\frac{\alpha}{2}}) \to \big[D\big(R^{\frac{\alpha}{2}}\big)\big]'$ a extensão linear do operador R^{α} definido por:

$$(2.2) \qquad \langle B^{\alpha}w, v\rangle_{\left[D\left(R^{\frac{\alpha}{2}}\right)\right]' \times D\left(R^{\frac{\alpha}{2}}\right)} = \big(R^{\frac{\alpha}{2}}w, R^{\frac{\alpha}{2}}v\big), \quad \forall\, w, v \in D\big(R^{\frac{\alpha}{2}}\big)$$

Observação 2.1. Sendo $0 < \alpha \leq 1$ vem que $0 < \frac{\alpha}{2} \leq \frac{1}{2}$. Portanto,

$$V \hookrightarrow D(R^{\frac{\alpha}{2}}) \hookrightarrow H.$$

Com finalidade de obtermos existência de soluções globais do problema (2.1) introduzimos algumas hipóteses sobre os espaços funcionais V e H e o operador não linear A. Suponhamos que:

(H1) H é separável;

(H2) A imersão de V em H é compacta;

(H3) $\langle Au, u\rangle_{W'\times W} = ||u||_W^p\,, \quad p > 1, \quad \forall\, u \in W;$

(H4) O operador A é Fréchet diferenciável em cada $u \in W$;

(H5) $A(u)$ é fortemente homogêneo de grau $p-1$ no sentido de Dubinskii, isto é, para cada $u, w \in W$,

$$\langle A'(u)u, w\rangle_{W'\times W} = \langle A'(u)w, u\rangle_{W'\times W} = (p-1)\langle Au, w\rangle_{W'\times W}\,,$$

onde $A'(u)$ é a derivada de Fréchet de A em u;

(H6) A é a derivada de Fréchet de um funcional convexo $J\colon W \mapsto \mathbb{R}$;

(H7) A leva conjuntos limitados de W em conjuntos limitados de W'.

No que se segue será enunciado o teorema de existência de soluções globais do problema (2.1).

Teorema 2.1. Suponha que as hipóteses (H1)-(H7) sejam satisfeitas. Seja B^α o operador definido em (2.2), α um número real, onde $0 < \alpha \leq 1$. Suponhamos que $u_0 \in W$ e $u_1 \in H$. Então, existe pelo menos uma função $u\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$u \in L^\infty(0, \infty; W) \tag{2.3}$$

$$u' \in L^\infty(0, \infty; H) \cap L^2_{loc}\big(0, \infty; D\big(R^{\alpha/2}\big)\big) \tag{2.4}$$

$$\frac{d}{dt}\,(u'(t), v) + \langle Au(t), v\rangle_{W'\times W} + \langle B^\alpha u'(t), v\rangle_{[D(R^{\frac{\alpha}{2}})]'\times D(R^{\frac{\alpha}{2}})} = 0, \tag{2.5}$$

em $\mathcal{D}'(0, \infty)$, $\forall\, v \in W$.

$$u(0) = u_0\,, \quad u'(0) = u_1 \tag{2.6}$$

Observação 2.2. Decorre de (2.3)-(2.5) que u swatisfaz a equação

$$u'' + Au + B^\alpha u' = 0 \text{ em } L^\infty(0, \infty; W') + L^2_{loc}(0, \infty; [D(R^{\alpha/2})]'). \tag{2.7}$$

Demonstração:

Problema Aproximado

Seja a sucessão $(w_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ a base hilbertiana de H formada pelos vetores próprios do operador C definido pela terna $\{\widetilde{H}, H, ((\cdot,\cdot))_{\widetilde{H}}\}$, onde o espaço de Hilbert $\widetilde{H} \hookrightarrow W$ é obtido do Teorema 1.3 do Capítulo I. Seja $\widetilde{H}_m$, o subespaço $[w_1, w_2, \ldots, w_m]$ gerado pelos m primeiros vetores da base. O problema consiste em se determinar uma função $u_m\colon [0,T] \to \widetilde{H}_m$ denominada solução aproximada do problema (2.1) da forma,

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i \tag{2.8}$$

onde as $g_{im}(t)$ são determinadas pelas condições

$$\left|\begin{array}{l} (u_m''(t), w_j) + \langle A u_m(t), w_j\rangle_{W'\times W} + \\ \qquad\qquad + \langle B^\alpha u_m'(t), w_j\rangle_{[D(R^{\frac{\alpha}{2}})]'\times D(R^{\frac{\alpha}{2}})} = 0,\ j = 1, 2, \ldots, m \\ u_m(0) = u_{0m} = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \alpha_j w_j \to u_0 \text{ forte em } W \\ u_m'(0) = u_{1m} = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \beta_j w_j \to u_1 \text{ forte em } H \end{array}\right. \tag{2.9}$$

Observação 2.3. Note que

$$\tilde{H} \hookrightarrow W \hookrightarrow V \hookrightarrow D(R^{\frac{\alpha}{2}}) \hookrightarrow H \cong H' \hookrightarrow [D(R^{\frac{\alpha}{2}})]' \hookrightarrow V' \hookrightarrow W' \hookrightarrow \tilde{H}'$$

portanto $\langle B^\alpha u_m'(t), v\rangle_{D(R^{\frac{\alpha}{2}})]'\times D(R^{\frac{\alpha}{2}})}$, $j = 1, \ldots, m$, está bem definido.

Pelo Teorema de Carathéodory, o sistema (2.9) tem uma solução u_m definida sobre o intervalo $[0, t_m[$, a qual poderá ser estendida a todo intervalo $[0, \infty[$ a partir das estimativas a priori que serão feitas a seguir.

Primeira Estimativa a Priori

Multiplicando-se a equação aproximada por $g'_{jm}(t)$, somando-se em j, $1 \leq j \leq m$ e integrando-se de 0 a t, $0 < t < t_m$, obtemos:

$$\frac{1}{2}\,|u'_m(t)|^2 + \int_0^t \langle Au_m(s), u'_m(s)\rangle_{W'\times W} ds + \int_0^t |R^{\frac{\alpha}{2}} u'_m(s)|^2\, ds = \frac{1}{2}\,|u_{1m}|^2. \tag{2.10}$$

Por outro lado, pelo Lema 1.5, a equação (2.10) pode ser reescrita na forma:

$$\frac{1}{2}\,|u'_m(t)|^2 + \frac{1}{p}\,||u_m(t)||_W^p + \int_0^t |R^{\frac{\alpha}{2}} u'_m(s)|^2\, ds = \frac{1}{2}\,|u_{1m}|^2 + \frac{1}{p}\,||u_{0m}||_W^p\,. \tag{2.11}$$

Em virtude das convergências dadas em $(2.9)_2$ e $(2.9)_3$, temos que a sucessão $\left(\frac{1}{2}\,|u_{1m}|^2 + \frac{1}{p}\,||u_{0m}||_W^p\right)_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathbb{R}$. Portanto:

$$\frac{1}{2}\,|u'_m(t)|^2 + \frac{1}{p}\,||u_m(t)||_W^p + \int_0^t |R^{\frac{\alpha}{2}} u'_m(s)|^2\, ds \leq K, \tag{2.12}$$

$\forall\, m \in \mathbb{N}$ e $\forall\, t \in [0, t_m[$, com $K > 0$, constante independente de m e de t.

Do exposto acima, podemos estender a solução $u_m(t)$ a todo intervalo $[0, \infty[$.

Da hipótese (H7) sobre o operador não linear A e de (2.12) após o prolongamento, resulta que:

$$\left|\begin{array}{l} (u_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ pertence a um conjunto limitado de } L^\infty(0,\infty; W); \\ (Au_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ pertence a um conjunto limitado de } L^\infty(0,\infty; W'); \\ (u'_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ pertence a um conjunto limitado de } L^\infty(0,\infty; H); \\ (u'_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ pertence a um conjunto limitado de } L^2_{loc}(0,\infty; D(R^{\frac{\alpha}{2}})). \end{array}\right. \tag{2.13}$$

Segunda Estimativa a Priori

Como $\widetilde{H}_m$ é um subespaço fechado de H, posto que tem dimensão finita, então:

$$H = \widetilde{H}_m \oplus \widetilde{H}_m^{\perp}\,.$$

Consideremos para cada $m \in \mathbb{N}$, a projeção ortogonal de H sobre o subespaço de $\widetilde{H}_m$, definida por:

$$P_m v = \sum_{j=1}^{m} (v, w_j) w_j \,, \quad \forall\, v \in H. \tag{2.14}$$

Como $(w_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é uma base de Hilbert em H, obtemos que

$$|P_m v|^2 = \left| \sum_{j=1}^{m} (v, w_j) w_j \right|^2 = \sum_{z=1}^{m} |(v, w_j)|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} |(v, w_j)|^2 = |v|^2,$$

onde a última desigualdade é devida a Bessel. Logo:

$$|P_m v| \leq |v|. \tag{2.15}$$

Como $\left(\dfrac{w_\nu}{\sqrt{\lambda_\nu}} \right)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é uma base ortonormal completa em $\widetilde{H}$, resulta que:

$$\begin{aligned} ||P_m v||_{\widetilde{H}}^2 = \left\| \sum_{j=1}^{m} \big((v, \frac{w_j}{\sqrt{\lambda_j}}) \big) \frac{w_j}{\sqrt{\lambda_j}} \right\|_{\widetilde{H}}^2 &= \sum_{j=1}^{m} \left| \big((v, \frac{w_j}{\sqrt{\lambda_j}}) \big) \right|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left| \big((v, \frac{w_j}{\sqrt{\lambda_j}}) \big) \right|^2 = ||v||_{\widetilde{H}}^2 \,. \end{aligned}$$

Logo:

$$||P_m v||_{\widetilde{H}} \leq ||v||_{\widetilde{H}} \,. \tag{2.16}$$

Portanto, de (2.15) e de (2.16), segue que a aplicação P_m é contínua sobre H e contínua sobre $\widetilde{H}$. Além disso, obtemos que

$$||P_m||_{\mathcal{L}(H,H)} = \sup_{\substack{v \in H \\ |v| \neq 0}} \frac{|P_m v|}{|v|} \leq 1$$

e

$$||P_m||_{\mathcal{L}(\widetilde{H},\widetilde{H})} = \sup_{\substack{v \in \widetilde{H} \\ ||v||_{\widetilde{H}} \neq 0}} \frac{||P_m v||_{\widetilde{H}}}{||v||_{\widetilde{H}}} \leq 1$$

Por outro lado, consideremos $P_m^*\colon \widetilde{H} \to \widetilde{H}'$, $f \to P_m^* f$ definida por:

$$\langle P_m^* f, v\rangle_{\widetilde{H}'\times\widetilde{H}} = \langle f, P_m v\rangle_{\widetilde{H}'\times\widetilde{H}}\,, \quad \forall\, v \in \widetilde{H} \text{ e } \forall\, f \in \widetilde{H}', \tag{2.17}$$

onde P_m^* é a adjunta de P_m.

De (2.17), obtemos que:

$$||P_{mf}^*||_{\widetilde{H}'} = \sup_{\substack{v\in\widetilde{H} \\ ||v||_{\widetilde{H}}=1}} |\langle P_{mb}^*, v\rangle_{\widetilde{H}'\times\widetilde{H}}| = \sup_{\substack{v\in\widetilde{H} \\ ||v||_{\widetilde{H}}=1}} |\langle f, P_m v\rangle_{\widetilde{H}'\times\widetilde{H}}| \tag{2.18}$$

Portanto, de (2.16) e de (2.18), resulta que:

$$||P_m^*\, f||_{\widetilde{H}'} \leq \sup_{\substack{v\in\widetilde{H} \\ ||v||_{\widetilde{H}}=1}} ||f||_{\widetilde{H}'}\, ||P_m v||_{\widetilde{H}} \leq ||f||_{\widetilde{H}'} \tag{2.19}$$

Logo, de (2.19), obtemos:

$$||P_m^*||_{\mathcal{L}(\widetilde{H}',\widetilde{H})} = \sup_{\substack{f\in\widetilde{H}' \\ ||f||_{\widetilde{H}'}\neq 0}} \frac{||P_m^* f||_{\widetilde{H}'}}{||f||_{\widetilde{H}'}} \leq 1$$

Seja $P_m^*\colon W' \to \widetilde{H}'$, $v^* \to P_m^* v^*$, definida por:

$$\langle P_m^* v^*, v\rangle_{\widetilde{H}'\times\widetilde{H}} = \langle v^*, P_m v\rangle_{W'\times W}\,, \quad \forall\, v^* \in W' \text{ e } \forall\, v \in \widetilde{H}. \tag{2.20}$$

De (2.16), de (2.20) e de que $\widetilde{H} \hookrightarrow W$ por construção, resulta que

$$|\langle P_m^* v^*, v\rangle_{\widetilde{H}'\times\widetilde{H}}| \leq ||v^*||_{W'}\, ||P_m v||_W \leq c_1 ||v^*||_{W'}\, ||P_m v||_{\widetilde{H}} \leq c_1 ||v^*||_{W'}\, ||v||_{\widetilde{H}}\,. \tag{2.21}$$

Logo, de (2.21), obtemos que:

$$||P_m^* v^*||_{\widetilde{H}'} = \sup_{\substack{v\in\widetilde{H}' \\ ||v||_{\widetilde{H}'}=1}} |\langle P_m^* v^*, v\rangle_{\widetilde{H}'\times\widetilde{H}}| \leq c_1 ||v^*||_{W'}\,. \tag{2.22}$$

Em particular, seja $v^* = Au_m(t)$. Logo, de (2.22) deduzimos que:

$$||P_m^*\, Au_m(t)||_{\widetilde{H}'} \leq c_1 ||Au_m(t)||_{W'}\,. \tag{2.23}$$

Seja $P_m^*\colon [D(R^{\frac{\alpha}{2}})]' \to \widetilde{H}'$, $w^* \mapsto P_m^* w^*$ definida por:

$$(2.24) \qquad \langle P_m^* w^*, v\rangle_{\widetilde{H}'\times\widetilde{H}} = \langle w^*, P_m v\rangle_{[D(R^{\frac{\alpha}{2}})]'\times D(R^{\frac{\alpha}{2}})}\,, \quad \forall\, w^* \in [D(R^{\frac{\alpha}{2}})]' \text{ e } \forall\, v \in \widetilde{H}.$$

De (2.16), de (2.24) e de que $\widetilde{H} \hookrightarrow D(R^{\frac{\alpha}{2}}) \hookrightarrow H \hookrightarrow [D(R^{\frac{\alpha}{2}})]' \hookrightarrow \widetilde{H}'$, obtemos que:

$$(2.25) \qquad \begin{aligned} \left|\langle P_m^* w^*, v\rangle_{\widetilde{H}'\times\widetilde{H}}\right| &\leq ||w^*||_{[D(R^{\frac{\alpha}{2}})]'}\,||P_m v||_{D(R^{\frac{\alpha}{2}})} \\ &\leq c_2 ||w^*||_{[D(R^{\frac{\alpha}{2}})]'}\,||P_m v||_{\widetilde{H}} \leq c_2 ||w^*||_{[D(R^{\frac{\alpha}{2}})]'}\,||v||_{\widetilde{H}}\,. \end{aligned}$$

Logo, de (2.25), obtemos que:

$$(2.26) \qquad ||P_m w^*||_{\widetilde{H}'} = \sup_{\substack{v\in\widetilde{H} \\ ||v||_{\widetilde{H}}=1}} \left|\langle P_m^* w^*, v_{\widetilde{H}'\times\widetilde{H}}\right| \leq c_2 ||w^*||_{[D(R^{\frac{\alpha}{2}})]'}\,.$$

Seja B^α o operador definido em (2.2), isto é,

$$(2.27) \qquad \langle B^\alpha w, v\rangle_{[D(R^{\frac{\alpha}{2}})]'\times D(R^{\frac{\alpha}{2}})} = (R^{\frac{\alpha}{2}} w, R^{\frac{\alpha}{2}} v), \ \ \forall\, w, v \in D(R^{\frac{\alpha}{2}})$$

Em particular, seja $w^* = B^\alpha u_m'(t)$. Logo, de (2.26) deduzimos que:

$$(2.28) \qquad ||P_m^*\, B^\alpha u_m'(t)||_{\widetilde{H}'} \leq c_2 ||B^\alpha u_m'(t)||_{[D(R^{\frac{\alpha}{2}})]'}\,.$$

Por outro lado, temos que:

$$||B^\alpha u_m'(t)||_{[D(R^{\frac{\alpha}{2}})]'} = \sup_{\substack{v\in D(R^{\frac{\alpha}{2}}) \\ ||v||_{D(R^{\frac{\alpha}{2}})}\neq 0}} \frac{|\langle B^\alpha u_m'(t), v\rangle_{[D(R^{\frac{\alpha}{2}})]'\times D(R^{\frac{\alpha}{2}})}|}{||v||_{D(R^{\frac{\alpha}{2}})}}\,,$$

ou equivalentemente por (2.27)

$$||B^\alpha u_m'(t)||_{[D(R^{\frac{\alpha}{2}})]'} = \sup_{\substack{v\in D(R^{\frac{\alpha}{2}}) \\ ||v||_{D(R^{\frac{\alpha}{2}})}\neq 0}} \frac{|(R^{\frac{\alpha}{2}} u_m'(t), R^{\frac{\alpha}{2}} v)|}{||v||_{D(R^{\frac{\alpha}{2}})}}\,.$$

Logo:

(2.29)

$$||B^\alpha u_m'(t)||_{[D(R^{\frac{\alpha}{2}})]'} \le \sup_{\substack{v\in D(R^{\frac{\alpha}{2}}) \\ ||v||_{D(R^{\frac{\alpha}{2}})}\neq 0}} \frac{|R^{\frac{\alpha}{2}}u_m'(t)|\,|R^{\frac{\alpha}{2}}v|}{||v||_{D(R^{\frac{\alpha}{2}})}} \le \sup|R^{\frac{\alpha}{2}}u_m'(t)| = |R^{\frac{\alpha}{2}}u_m'(t)|.$$

Substituindo-se (2.29) em (2.28), concluímos que:

$$||P_m^*\,B^\alpha u_m'(t)||_{\widetilde{H}'} \le c_2|R^{\frac{\alpha}{2}}u_m'(t)|. \tag{2.30}$$

Retornando-se à equação aproximada $(2.9)_1$, temos que:

$$(u_m''(t), w_j) = -\langle Au_m(t), w_j\rangle_{W'\times W} - \langle B^\alpha u_m'(t), w_j\rangle_{[D(R^{\frac{\alpha}{2}})'\times B(R^{\frac{\alpha}{2}})} = 0 \tag{2.31}$$

$j = 1, 2, \ldots, m$.

Identificando-se H com seu dual pelo isomorfismo de Riesz, podemos reescrever (2.31) na forma:

$$\langle u_m''(t), w\rangle_{\widetilde{H}'\times\widetilde{H}} = \langle -Au_m(t) - B^\alpha u_m'(t), w\rangle_{\widetilde{H}'\times\widetilde{H}}\,,\ \forall\, w\in\widetilde{H}_m\,. \tag{2.32}$$

Por outro lado, se $v\in\widetilde{H}$, então $P_m v\in\widetilde{H}_m$. Logo, de (2.32), deduzimos que:

$$\langle u_m''(t), P_m v\rangle_{\widetilde{H}'\times\widetilde{H}} = \langle -Au_m(t) - B^\alpha u_m'(t), P_m v\rangle_{\widetilde{H}'\times\widetilde{H}}\,. \tag{2.33}$$

Das definições dadas em (2.20) e (2.24), podemos reescrever (2.33) na forma:

$$\langle u_m''(t), v\rangle_{\widetilde{H}'\times\widetilde{H}} = \langle -P_m^*(Au_m(t)) - P_m^*(B^\alpha u_m'(t), v\rangle_{\widetilde{H}'\times\widetilde{H}}\,, \tag{2.34}$$

pois $P_m^*\,u_m''(t) = u_m''(t)$.

Logo, de (2.34), obtemos que:

$$u_m''(t) = -P_m^*(Au_m(t)) - P_m^*(B^\alpha u_m'(t)) \quad \text{em} \quad \widetilde{H}'. \tag{2.35}$$

Portanto, de (2.35), resulta que:

$$(2.36)\qquad ||u_m''(t)||_{\widetilde{H}'} \leq ||P_m^*(Au_m(t))||_{\widetilde{H}'} + ||P_m^*(B^\alpha u_m'(t))||_{\widetilde{H}'}\,.$$

Substituindo-se as desigualdades obtidas em (2.23) e (2.30) em (2.35), obtemos:

$$||u_m''(t)||_{\widetilde{H}'} \leq c_3\big\{||Au_m(t)||_{W'} + |R^{\frac{\alpha}{2}}u_m'(t)|\big\}$$

onde $c_3 = \max\{c_1, c_2\}$.

De $(2.13)_2$ temos que $(Au_m)_{m\in\mathbb{N}}$ pertence a um conjunto limitado de $L^\infty(0,\infty;W')$. Logo, $(Au_m)_{m\in\mathbb{N}}$ pertence a um conjunto limitado de $L^2_{\text{loc}}(0,\infty;W')$. De $(2.13)_4$ temos que $(u_m')_{m\in\mathbb{N}}$ pertence a um conjunto limitado de $L^2_{loc}(0,\infty;D(R^{\frac{\alpha}{2}}))$. Logo:

$$(2.37)\qquad \int_0^T ||u_m''(t)||^2_{\widetilde{H}'}\,dt \leq c_4\left\{\int_0^T ||Au_m(t)||^2_{W'}\,dt + \int_0^T |R^{\frac{\alpha}{2}}u_m'(t)|^2\,dt\right\} < \infty.$$

Portanto, de (2.37), resulta que:

$$(2.38)\qquad (u_m'')_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{pertence a um conjunto limitado de} \quad L^2_{\text{loc}}(0,\infty;\widetilde{H}').$$

Passagem ao Limite

Da primeira estimativa existe uma subsucessão $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$(2.39)\qquad \left|\begin{array}{lll} u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u & \text{em} & L^\infty(0,\infty;W) \\ Au_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \chi & \text{em} & L^\infty(0,\infty;W') \\ u_\nu' \overset{*}{\rightharpoonup} u' & \text{em} & L^\infty(0,\infty;H) \\ u_\nu' \rightharpoonup u' & \text{em} & L^2_{loc}(0,\infty;D(R^{\frac{\alpha}{2}})) \end{array}\right.$$

Da segunda estimativa temos que existe uma subsucessão $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$(2.40)\qquad u_\nu'' \rightharpoonup u'' \quad \text{em} \quad L^2_{\text{loc}}(0,\infty;\widetilde{H}').$$

a) Temos por $(2.39)_3$ que, $\forall\, w \in L^1(0,\infty;H)$

$$\int_0^\infty (u_\nu'(t), w(t))\, dt \longrightarrow \int_0^\infty (u'(t), w(t))\, dt, \quad \nu \to \infty.$$

Em particular, para $w(t) = \theta(t)v$, onde $\theta \in \mathcal{D}(0,\infty)$ e $v \in W \hookrightarrow H$, deduz-se que:

$$\int_0^\infty (u_\nu'(t), v))\theta(t)\, dt \longrightarrow \int_0^\infty (u'(t), v)\theta(t)\, dt, \quad \nu \to \infty. \tag{2.41}$$

ou seja,

$$(u_\nu'(t), v)) \longrightarrow (u'(t), v), \quad \nu \to \infty \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,\infty),\ \forall\, v \in W. \tag{2.42}$$

Logo, de (2.42), obtemos que:

$$\frac{d}{dt}\,(u_\nu'(t), v) \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \frac{d}{dt}\,(u'(t), v) \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,\infty),\ \forall\, v \in W. \tag{2.43}$$

b) Temos que $W \hookrightarrow D(R^{\frac{\alpha}{2}})$. Então, de $(2.39)_4$ temos que para $v \in W$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,\infty)$, deduz-se que

$$\int_0^\infty (R^{\frac{\alpha}{2}} u_m'(t), R^{\frac{\alpha}{2}} v)\theta(t) dt \to \int_0^\infty (R^{\frac{\alpha}{2}} u'(t), R^{\frac{\alpha}{2}} v)\theta(t) dt, \quad \nu \to \infty,$$

ou equivalentemente,

$$\int_0^\infty \langle B^\alpha u_m'(t), v\rangle_{F'\times F}\theta(t) dt \to \int_0^\infty \langle B^\alpha u'(t), v\rangle_{F'\times F}\theta(t) dt, \quad \nu \to \infty \tag{2.43}$$

onde $F = D(R^{\frac{\alpha}{2}})$ e $F' = [D(R^{\frac{\alpha}{2}})]'$.

De (2.43) resulta que:

$$\langle B^\alpha u_\nu'(t), v\rangle_{F'\times F} \to \langle B^\alpha u'(t), v\rangle_{F'\times F} \text{ em } \mathcal{D}'(0,\infty), \quad \forall\, v \in W. \tag{2.44}$$

c) Temos por $(2.39)_2$ que, $\forall\, w \in L^1(0,\infty;W)$

$$\int_0^\infty \langle A u_\nu(t), w(t)\rangle_{W'\times W}\, dt \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^\infty \langle \chi(t), w(t)\rangle\, dt.$$

Em particular para $w(t) = \theta(t)v$, onde $\theta \in \mathcal{D}(0,\infty)$ e $v \in W$, deduz-se que

$$\int_0^\infty \langle Au_\nu(t), v\rangle_{W'\times W}\, \theta(t)\, dt \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^\infty \langle \chi(t), v\rangle_{W'\times W}\, \theta(t)\, dt,$$

ou equivalentemente,

$$\langle Au(t), v\rangle_{W'\times W} \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \langle \chi(t), v\rangle_{W'\times W} \text{ em } \mathcal{D}'(0,\infty),\ \forall\, v \in W. \tag{2.45}$$

Multiplicando-se a equação aproximada $(2.9)_1$ por $\theta \in \mathcal{D}(0,\infty)$, fazendo-se $m = \nu$ e integrando-se em $[0,\infty[$ resulta que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (u_\nu''(t), w_j)\theta(t)\, dt + \int_0^\infty \langle Au_\nu(t), w_j\rangle_{W'\times W}\theta(t)\, dt \\ + \int_0^\infty \langle B^\alpha u_\nu'(t), w_j\rangle_{F'\times F}\, \theta(t)\, dt = 0,\end{aligned} \tag{2.46}$$

onde $F = D(R^{\frac{\alpha}{2}})$ e F' é seu dual topológico.

Integrando-se por partes a primeira integral em (2.46), obtemos:

$$\begin{aligned}-\int_0^\infty (u_\nu'(t), w_j)\theta'(t)\, dt + \int_0^\infty \langle Au_\nu(t), w_j\rangle_{W'\times W}\, \theta(t)\, dt \\ + \int_0^\infty \langle B^\alpha u_\nu'(t), w_j\rangle_{F'\times F}\theta(t)\, dt = 0,\end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{d}{dt}(u_\nu'(t), w_j), \theta\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,\infty)\times\mathcal{D}(0,\infty)} + \left\langle \langle Au_\nu(t), w_j\rangle_{W'\times W}, \theta\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,\infty)\times\mathcal{D}(0,\infty)} \\ + \left\langle \langle B^\alpha u_\nu(t), w_j\rangle_{F'\times F}, \theta\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,\infty)\times\mathcal{D}(0,\infty)} = 0\end{aligned} \tag{2.47}$$

A igualdade (2.47) é verdadeira para todo j, $1 \le j \le m_0$, $\nu > m_0$, o que nos permite escrever:

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{d}{dt}(u_\nu'(t), v), \theta\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,\infty)\times\mathcal{D}(0,\infty)} + \left\langle \langle Au_\nu(t), v\rangle_{W'\times W}, \theta\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,\infty)\times\mathcal{D}(0,\infty)} \\ + \left\langle \langle B^\alpha u_\nu(t), v\rangle_{F'\times F}, \theta\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,\infty)\times\mathcal{D}(0,\infty)} = 0\end{aligned} \tag{2.48}$$

$\forall\, v \in \widetilde{H}_{m_0}$.

Tomando-se o limite em (2.48) quando $\nu \to \infty$, $\nu > m_0$ e usando-se a densidade de $\widetilde{H}_{m_0}$ em W, obtemos de (2.43), (2.44) e (2.45) que:

$$\text{(2.49)} \qquad \frac{d}{dt}\,(u'(t), v) + \langle \chi(t), v\rangle_{W' \times W} + \langle B^{\alpha} u(t), v\rangle_{F' \times F} = 0, \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0, \infty)$$

d) Afirmamos que $u'' \in L^2_{\text{loc}}(0, \infty; W')$.

Com efeito, sejam $u' \in L^{\infty}(0, T; H) \hookrightarrow L^2(0, T; W')$ e $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$. Consideremos a aplicação $\widetilde{u'} \colon \mathcal{D}(0, T) \to H$ definida por:

$$\text{(2.50)} \qquad \langle \widetilde{u'}, \theta \rangle = \int_0^T u'(t)\theta(t)\, dt \in H \hookrightarrow W.$$

A aplicação $\widetilde{u'}$ assim definida é linear e contínua de $\mathcal{D}(0, T)$ em H. Logo, $\widetilde{u'} \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(0, T; H) = \mathcal{D}'(0, T; H) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0, T; W')$. Assim, todo elemento de $\widetilde{u'} \in L^2(0, T; H)$ define uma distribuição. Então, $\widetilde{u'}$ possui derivada no sentido das distribuições, isto é,

$$\text{(2.51)} \qquad \langle \widetilde{u''}, \theta \rangle = -\int_0^T u'(t)\theta(t) dt \in H \hookrightarrow W'.$$

De (2.51) obtemos que:

$$\text{(2.52)} \qquad (\langle \widetilde{u''}, \theta \rangle, v) = -\Big(\int_0^T u'(t)\theta'(t)\, dt, v\Big).$$

Por outro lado, seja a aplifcação $T_v \colon H \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\text{(2.53)} \qquad T_v(w) = (w, v), \quad \forall\, v \in H.$$

A aplicação T_v assim definida é linear e contínua. Seja $w(t) = u'(t)\theta'(t)dt$. Logo, de (2.53) podemos reescrever (2.52) na forma:

$$
\begin{aligned}
(2.54)\qquad ((\langle\widetilde{u''},\theta\rangle, v) &= -T_v\Big(\int_0^t w(t)dt\Big) = -\int_0^T T_v(w(t))\,dt \\
&= -\int_0^T (w(t),v)_H\,dt = -\int_0^T (u'(t)\theta'(t),v)_H\,dt \\
&= -\int_0^T (u'(t),v)\theta'(t)\,dt = \int_0^T \frac{d}{dt}\,(u(t),v)\theta(t)\,dt
\end{aligned}
$$

Identificando-se H com seu dual pelo isomorfismo de Riesz e como $W \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow W'$, obtemos:

$$
(2.55)\qquad \langle\langle\widetilde{u''}\rangle, v\rangle_{W'\times W} = (\langle\widetilde{u''},\theta\rangle, v)_H\,.
$$

Seja $\chi \in L^\infty(0,T;W') \hookrightarrow L^2(0,T;W')$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Consideramos a aplicação $\widetilde{X}\colon \mathcal{D}(0,T) \to W'$ definida por:

$$
(2.56)\qquad \langle\widetilde{\chi},\theta\rangle = \int_0^T \chi(t)\theta(t)\,dt \in W'.
$$

De (2.56), obtemos que:

$$
(2.57)\qquad \Big\langle \langle\widetilde{\chi},\theta\rangle, v\Big\rangle_{W'\times W} = \Big\langle \int_0^T \chi(t)\theta(t)\,dt, v\Big\rangle_{W'\times W}.
$$

Por outro lado, seja a aplicação $T_v\colon W' \to \mathbb{R}$ definida por:

$$
(2.58)\qquad T_v(w) = \langle w, v\rangle_{W'\times W}\,, \quad \forall\, v \in W.
$$

A aplicação T_v assim definida é linear e contínua. Seja $w(t) = \chi(t)\theta(t)$. Logo, de (2.58) podemos reescrever (2.58) na forma:

$$
\begin{aligned}
(2.59)\qquad \Big\langle \langle\widetilde{\chi},\theta\rangle, v\Big\rangle_{W'\times W} &= T_v\Big(\int_0^T w(t)dt\Big) = \int_0^T T_v(w(t))\,dt \\
&= \int_0^T \langle w(t)v(t), v\rangle_{W'\times W}\,dt = \int_0^T \langle\chi(t), v\rangle_{W'\times W}\,\theta(t)\,dt.
\end{aligned}
$$

Sejam $B^\alpha u' \in L^2(0,\mathcal{D};[D(R^{\frac{\alpha}{2}})]') \hookrightarrow L^2(0,T;W')$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Consideremos a aplicação $\widetilde{B^\alpha u'}\colon \mathcal{D}(0,T) \to [D(R^{\frac{\alpha}{2}})]'$ definida por:

$$\langle \widetilde{B^\alpha u'}, \theta\rangle = \int_0^T B^\alpha u'(t)\theta(t)\,dt \in [D(B^{\frac{\alpha}{2}})]' \hookrightarrow W'. \tag{2.60}$$

De (2.60) resulta que:

$$\langle\langle \widetilde{B^\alpha u'}, \theta\rangle, v\rangle_{[D(R^{\frac{\alpha}{2}})]'\times D(R^{\frac{\alpha}{2}})} = \left\langle \int_0^T B^\alpha u'(t)\theta(t)\,dt, v\right\rangle_{[D(R^{\frac{\alpha}{2}})]'\times D(R^{\frac{\alpha}{2}})}. \tag{2.61}$$

Por outro lado, consideremos a aplicação $T_v\colon [D(R^{\frac{\alpha}{2}})]' \to \mathbb{R}$ definida por:

$$T_v(w) = (w,v)_{[D(R^{\frac{\alpha}{2}})]'\times D(R^{\frac{\alpha}{2}})}, \quad \forall\, v \in D(R^{\frac{\alpha}{2}}). \tag{2.62}$$

A aplicação T_v assim definida é linear e contínua. Sejam $w(t) = B^\alpha u'(t)\theta(t)$. Logo, de (2.62) podemos reescrever (2.61) na forma:

$$\begin{aligned}
\langle\langle \widetilde{B^\alpha u'}, \theta\rangle, v\rangle_{[D(R^{\frac{\alpha}{2}})]'\times D(R^{\frac{\alpha}{2}})} &= T_v\big(\int_0^T w(t)dt\big) = \int_0^T T_v(w(t))\,dt \\
&= \int_0^T T_v(w(t))\,dt = \int_0^T \langle w(t), v\rangle_{[D(R^{\frac{\alpha}{2}})]'\times D(R^{\frac{\alpha}{2}})}\,dt \\
&= \int_0^T \langle B^\alpha u'(t)\theta(t), v(t)\rangle_{[D(R^{\frac{\alpha}{2}})]'\times D(R^{\frac{\alpha}{2}})}\,dt
\end{aligned}$$

Logo:

$$\langle\langle \widetilde{B^\alpha u'}, \theta\rangle, v\rangle_{[D(R^{\frac{\alpha}{2}})]'\times D(R^{\frac{\alpha}{2}})} = \int_0^T \langle B^\alpha u'(t), v\rangle_{[D(R^{\frac{\alpha}{2}})]'\times D(R^{\frac{\alpha}{2}})}. \tag{2.63}$$

Identificando-se H com seu dual pelo isomorfismo de Riesz e do fato que $W \hookrightarrow D(R^{\frac{\alpha}{2}}) \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow [D(R^{\frac{\alpha}{2}})]' \hookrightarrow W'$, resulta de (2.63) que:

$$\langle\langle \widetilde{B^\alpha u'}, \theta\rangle, v\rangle_{W'\times W} = \langle\langle \widetilde{B^\alpha u'}, \theta\rangle, v\rangle_{[D(R^{\frac{\alpha}{2}})]'\times D(R^{\frac{\alpha}{2}})}. \tag{2.64}$$

Multiplicando-se (2.49) por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando-se de 0 a T, deduz-se que:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \frac{d}{dt}(u'(t),v)\theta(t)\,dt + \int_0^T \langle \chi(t), v\rangle_{W'\times W}\,\theta(t)\,dt + \\
+ \int_0^T \langle B^\alpha u'(t), v\rangle_{[D(R^{\frac{\alpha}{2}})]'\times D(R^{\frac{\alpha}{2}})}\,\theta(t) = 0.
\end{aligned} \tag{2.65}$$

De (2.54), (2.59) e (2.64) podemos reescrever (2.65) na forma:

$$(\langle\widetilde{u''},\theta\rangle,v)+\langle\langle\widetilde{\chi},\theta\rangle,v\rangle_{W'\times W}+\langle\langle\widetilde{B^\alpha u'},\theta\rangle,v\rangle_{D(R^{\frac{\alpha}{2}})]'\times D(R^{\frac{\alpha}{2}})}=0,$$

ou equivalentemente, pelo isomorfismo de Riesz que:

$$(2.66)\qquad \langle\langle\widetilde{u''},\theta\rangle,v\rangle_{W'\times W}+\langle\langle\widetilde{\chi},\theta\rangle,v\rangle_{W'\times W}+\langle\langle\widetilde{B^\alpha u'},\theta\rangle,v\rangle_{W'\times W}=0,$$

$\forall\, v\in W$.

Logo, de (2.66), resulta que:

$$(2.67)\qquad \langle\widetilde{u''},\theta\rangle_{W'}+\langle\widetilde{\chi},\theta\rangle_{W'}+\langle\widetilde{B^\alpha u'},\theta\rangle_{W'}=0,\ \text{ em } W',$$

$\forall\,\theta\in\mathcal{D}(0,T)$.

Como $\widetilde{u''},\widetilde{\chi}$ e $\widetilde{B^\alpha u'}$ provêm de funções de $L^2(0,T;W')$, identificamos as distribuições com as funções que as definem. Portanto podemos reescrever (2.67) na forma

$$(2.68)\qquad u''=-\chi-B^\alpha u' \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,T;W').$$

Mas, $\chi\in L^\infty(0,\infty;W')\hookrightarrow L^2_{\text{loc}}(0,\infty;W')$ e $B^\alpha u'\in L^2(0,\infty;[D(R^{\frac{\alpha}{2}})]')$. Logo, como $L^2(0,\infty;[D(R^{\frac{\alpha}{2}})]')\hookrightarrow L^2(0,\infty;W')$, segue de (2.68) que:

$$(2.69)\qquad u''=-\chi-B^\alpha u' \quad \text{em} \quad L^2_{\text{loc}}(0,\infty;W').$$

o que prova a afirmação d).

Convergência do Termo não Linear

No que se segue provaremos que

$$(2.70)\qquad \langle Au_\nu(t),v\rangle_{W'\times W}\to\langle Au(t),v\rangle_{W'\times W}\,,\ \text{ em } \mathcal{D}'(0,\infty),\ \forall\, v\in W.$$

Nesta parte usa-se de maneira fundamental a existência de uma subsucessão (u'_ν) de (u'_m) tal que

$$(2.71) \qquad u'_\nu \to u' \quad \text{forte em} \quad L^2(0,T;H), \ \ \forall\, T > 0.$$

Com efeito, em virtude das imersões

$$D(R^{\frac{\alpha}{2}}) \underset{\text{compacta}}{\hookrightarrow} H \underset{\text{contínua}}{\hookrightarrow} \widetilde{H}'.$$

e das estimativas obtidas para $(u'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ e $(u''_m)_{m\in\mathbb{N}}$ em $L^2_{loc}(0,\infty;D(R^{\frac{\alpha}{2}}))$ e $L^2_{\text{loc}}(0,\infty;\widetilde{H}')$, respectivamente, temos pelo Teorema de Aubin-Lions, que existe uma subsucessão $(u'_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de $(u'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$(2.72) \qquad u'_\nu \to u' \quad \text{forte em} \quad L^2(0,T;H), \ \text{para algum } T > 0.$$

Usando-se o Teorema de Aubin-Lions, sucessivamente para $T = 1,2,3,\dots,K$, obtemos:

Para $T = 1$, existe $(u_{m'(1)})_{m(1)\in\mathbb{N}}$ subsucessão de $(u'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que

$$u_{m(1)} \to u' \quad \text{forte em} \quad L^2(0,1;H).$$

Para $T = 2$, existe $(u'_{m(2)})_{m(2)\in\mathbb{N}}$ subsucessão de $(u'_{m(1)})_{m(1)\in\mathbb{N}}$ tal que

$$u_{m(2)} \to u' \quad \text{forte em} \quad L^2(0,2;H).$$

$\vdots$

Para $T = K$, existe $(u'_{m(k)})_{m(k)\in\mathbb{N}}$ subsucessão de $(u'_{m(k-1)})_{m(k-1)\in\mathbb{N}}$ tal que

$$u'_{m(k)} \to u' \quad \text{forte em} \quad L^2(0,K;H).$$

Seja $(u'_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ a sucessão diagonal. Então, $(u'_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ é uma subsucessão de $(u'_{m(k)})$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

Seja $T > 0$, arbitrário. Então, existe $k \in \mathbb{N}$, $k > T$ tal que quando $\nu \to \infty$, obtemos:

$$(2.73) \qquad u'_\nu \to u' \quad \text{forte em} \quad L^2(0,T;H).$$

No que se segue mostraremos que faz sentido em se calcular $u(0)$, $u(T)$, $u'(0)$ e $u'(T)$. De fato, das convergências $(2.39)_1$, $(2.39)_2$, $(2.39)_4$ e de (2.69), então u possui as seguintes regularidades:

$$(2.89) \qquad \left| \begin{array}{l} u \in L^\infty(0,\infty;W) \\ u' \in L^\infty(0,\infty;H) \\ u' \in L^2_{loc}(0,\infty;D(R^{\frac{\alpha}{2}})) \\ u'' \in L^2_{\text{loc}}(0,\infty;W') \end{array} \right.$$

De $(2.74)_1$ e de $(2.74)_2$, resulta que:

$$(2.75) \qquad u \in L^2(0,T;W) \quad \text{e} \quad u' \in L^2(0,T;H), \ \ \forall T > 0.$$

De (2.75) e do Lema 1.3, obtemos:

$$(2.76) \qquad u \in C^0([0,T];H), \quad \forall T > 0.$$

De (2.76), como $u \in C^0_s([0,T],H)$, $u \in L^\infty(0,T;W)$ e $W \hookrightarrow H$, então pelo Lema 1.4, obtemos que:

$$(2.77) \qquad u \in C^0_s([0,T];W), \quad \forall T > 0.$$

Logo, $u(0)$ e $u(T)$ pertencem a W.

Analogamente, de $(2.74)_2$ e de $(2.74)_4$, resulta que:

$$(2.78) \qquad u' \in L^\infty(0,T;H) \quad \text{e} \quad u'' \in L^2(0,T;W'), \quad T > 0.$$

De (2.78) e do Lema 1.3, obtemos:

$$u' \in C^0([0,T]; W'), \quad \forall T > 0, \tag{2.79}$$

De (2.79), como $u' \in C^0_s([0,T]; W')$, $u' \in L^\infty(0,T;H)$ e $H \hookrightarrow W'$, então pelo Lema 1.4, obtemos que:

$$u \in C^0_s([0,T]; H), \quad \forall T > 0. \tag{2.80}$$

Assim $u'(0)$ e $u'(T)$ pertencem a H.

Retornando ao nosso objetivo de provarmos que $\chi = Au$, seja $v \in L^p(0,T;W)$. Pela hipótese (H3) temos que A é monótono. Logo:

$$\chi_\nu = \int_0^T \langle Au_\nu(t) - Av(t), u_\nu(t) - v(t)\rangle_{W'\times W}\, dt \geq 0,$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} 0 \leq \chi_\nu = \int_0^T \langle Au_\nu(t), u_\nu(t)\rangle_{W'\times W}\, dt - \int_0^T \langle Au_\nu(t), v(t)\rangle_{W'\times W}\, dt - \\ - \int_0^T \langle Av(t), u_\nu(t) - v(t)\rangle_{W'\times W}\, dt. \end{aligned} \tag{2.81}$$

Multiplicando-se a equação aproximada $(2.9)_1$ por $g_{jm}(t)$, com $m = \nu$, somando-se em j, $1 \leq j \leq \nu$ e integrando-se a seguir de 0 a T, obtemos:

$$\int_0^T (u''_\nu(t), u_\nu(t))\, dt + \int_0^T \langle Au_\nu(t), u_\nu(t)\rangle_{W'\times W}\, dt + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}|B^{\frac{\alpha}{2}} u_\nu(t)|^2\, dt = 0,$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle Au_\nu(t), u_\nu(t)\rangle_{W'\times W}\, dt = -\int_0^T (u''_\nu(t), u_\nu(t))dt - \\ - \frac{1}{2}|B^{\frac{\alpha}{2}} u_\nu(T)|^2 + \frac{1}{2}|B^{\frac{\alpha}{2}} u_{0m}|^2. \end{aligned} \tag{2.82}$$

Do Lema 1.2, obtemos que

$$(u_\nu''(t), u_\nu(t)) = \frac{d}{dt}(u_\nu'(t), u_\nu(t)) - |u_\nu'(t)|^2. \tag{2.83}$$

Substituindo-se (2.83) em (2.82) resulta que:

$$\int_0^T \langle Au_\nu(t), u_\nu(t)\rangle_{W'\times W}\, dt = \int_0^T |u_\nu'(t)|^2\, dt - \int_0^T \frac{d}{dt}(u_\nu'(t), u_\nu(t))dt + \\ + \frac{1}{2}|R^{\frac{\alpha}{2}} u_{0m}|^2 - \frac{1}{2}|R^{\frac{\alpha}{2}} u_\nu(T)|^2,$$

ou equivalentemente,

$$\int_0^T \langle Au_\nu(t), u_\nu(t)\rangle_{W'\times W}\, dt = \int_0^T |u_\nu'(t)|^2 dt - (u_\nu'(T), u_\nu(T)) + \\ + (u_{1m}, u_{0m}) + \frac{1}{2}|R^{\frac{\alpha}{2}} u_{0m}|^2 - \frac{1}{2}|R^{\frac{\alpha}{2}} u_\nu(T)|^2 \tag{2.84}$$

Substituindo-se (2.84) em (2.81), conclui-se que

$$0 \le \int_0^T |u_\nu'(t)|^2 dt - (u_\nu'(T), u_\nu(T)) + (u_{1m}, u_{0m}) + \frac{1}{2}|B^{\frac{\alpha}{2}} u_{0m}|^2 - \\ - \frac{1}{2}|B^{\frac{\alpha}{2}} u_\nu(T)|^2 - \int_0^T \langle Au_\nu(t), v(t)\rangle_{W'\times W}\, dt - \\ - \int_0^T \langle Av(t), u_\nu(t) - v(t)\rangle_{W'\times W}\, dt. \tag{2.85}$$

Tomando-se o limite superior quando $\nu \to \infty$ em (2.85), resulta que:

$$0 \le \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \int_0^T |u_\nu'(t)|^2 dt + \overline{\lim_{\nu\to\infty}}[-(u_\nu'(T), u_\nu(T)] + \overline{\lim_{\nu\to\infty}}(u_{1m}, u_{0m}) + \\ + \frac{1}{2}\overline{\lim_{\nu\to\infty}}|R^{\frac{\alpha}{2}} u_{0m}|^2 + \frac{1}{2}\overline{\lim_{\nu\to\infty}}[-|R^{\frac{\alpha}{2}} u_\nu(T)|^2] + \\ + \overline{\lim_{\nu\to\infty}}\left[-\int_0^T \langle Au_\nu(t), v(t)\rangle_{W'\times W}\, dt\right] + \\ + \overline{\lim_{\nu\to\infty}}\left[-\int_0^T \langle Av(t), u_\nu(t) - v(t)\rangle_{W'\times W}\, dt\right]. \tag{2.86}$$

Observação 2.4. No que se segue, justificaremos cada passagem ao limite na desigualdade (2.86). De fato:

a) De (2.73), temos que $u'_\nu \to u'$ forte em $L^2(0,T;H), \quad \forall\, T > 0.$

Logo:

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \int_0^T |u'_\nu(t)|^2\, dt = \lim_{\nu\to\infty} \int_0^T |u'_\nu(t)|^2\, dt = \int_0^T |u'(t)|^2\, dt. \tag{2.87}$$

b) De $(2.9)_2$ e de $(2.9)_3$ temos que:

$$u_{0m} \to u_0 \quad \text{forte em} \quad H, \text{ pois } W \hookrightarrow H \tag{2.88}$$

e

$$u_{1m} \to u_1 \quad \text{forte em} \quad H. \tag{2.89}$$

Portanto, de (2.88) e de (2.89), segue que,

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} (u_{1m}, u_{0m}) = \lim_{\nu\to\infty} (u_{1m}, u_{0m}) = (u_1, u_0) \text{ em } \mathbb{R}. \tag{2.90}$$

c) De (2.12), fazendo-se $t = T$, obtemos:

$$(u_m(T))_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{pertence a um conjunto limitado de} \quad W \tag{2.91}$$

e

$$(u'_m(T))_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{pertence a um conjunto limitado de} \quad H. \tag{2.92}$$

Logo, de (2.91) e de (2.92) resulta que existe uma subsucessão $(u_\nu(T))_{\nu\in\mathbb{N}}$ de $(u_m(T))_{m\in\mathbb{N}}$ e uma subsucessão $(u'_\nu(T))_{\nu\in\mathbb{N}}$ de $(u'_\nu(T))$ tais que:

$$\left|\begin{array}{l} u_\nu(T) \rightharpoonup u(T) \quad \text{em} \quad W \\[2mm] u'_\nu(T) \rightharpoonup u'(T) \quad \text{em} \quad H \end{array}\right. \tag{2.93}$$

De (2.91) e como a imersão de W em H é compacta, então existe uma subsucessão de $(u_\nu(T))_{\nu\in\mathbb{N}}$ que ainda denotaremos por $(u_\nu(T))_{\nu\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$u_\nu(T) \to \xi \quad \text{forte em} \quad H. \tag{2.94}$$

Logo, de $(2.93)_1$ e de (2.94), obtemos:

$$u_\nu(T) \to u(T) \quad \text{forte em} \quad H. \tag{2.95}$$

De (2.95) e de $(2.93)_2$, resulta que:

$$\lim_{\nu\to\infty} (u_\nu(T), u_\nu'(T)) = (u(T), u'(T)) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}. \tag{2.96}$$

Logo:

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}[-(u_\nu(T), u_\nu'(T))] = \lim[-(u_\nu(T), u_\nu'(T))] = -(u(T), u'(T)) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}. \tag{2.97}$$

d) De $(2.9)_2$ temos que $u_{0m} \to u_0$ forte em W. Logo, $u_{0m} \to u_0$ forte em $D(R^{\frac{\alpha}{2}})$, pois $W \hookrightarrow D(R^{\frac{\alpha}{2}})$. Portanto:

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}|R^{\frac{\alpha}{2}}\, u_{0m}|^2 = \lim_{\nu\to\infty} |R^{\frac{\alpha}{2}}\, u_{0m}|^2 = |B^{\frac{\alpha}{2}}\, u_0|^2 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}. \tag{2.98}$$

e) De $(2.93)_1$, $u_\nu(T) \rightharpoonup u(T)$ em W. Disto e do fato que $W \hookrightarrow D(R^{\frac{\alpha}{2}})$, obtemos:

$$u_\nu(T) \rightharpoonup u(T) \quad \text{em} \quad D(R^{\frac{\alpha}{2}}). \tag{2.99}$$

De (2.99) e notando que $|R^{\frac{\alpha}{2}} v|$ é uma seminorma em $D(R^{\frac{\alpha}{2}})$ vem

$$|u(T)|^2_{D(B^{\frac{\alpha}{2}})} = |R^{\frac{\alpha}{2}}\, u(T)| \leq \underline{\lim_{\nu\to\infty}}|R^{\frac{\alpha}{2}}\, u_\nu(T)|^2.$$

Logo:

$$-\frac{1}{2}\,|R^{\frac{\alpha}{2}}\, u(T)|^2 \geq -\frac{1}{2}\underline{\lim_{\nu\to\infty}}|R^{\frac{\alpha}{2}}\, u_\nu(T)|^2 = \frac{1}{2}\overline{\lim_{\nu\to\infty}}[-|R^{\frac{\alpha}{2}}\, u_\nu(t)|^2], \tag{2.100}$$

em $\mathbb{R}$.

Portanto, segue de $(2.39)_1$, $(2.39)_2$, (2.87), (2.90), (2.97), (2.113), (2.98) e (2.100) que podemos reescrever a desigualdade (2.86) na forma:

$$0 \leq \int_0^T |u'(t)|^2 dt + (u_1, u_0) - (u'(T), u(T)) + \frac{1}{2} |R^{\frac{\alpha}{2}} u_0|^2 - \\ - \frac{1}{2} |R^{\frac{\alpha}{2}} u(T)| - \int_0^T \langle \chi(t), v(t) \rangle_{W' \times W} dt - \\ - \int_0^T \langle Av(t), u(t) - v(t) \rangle_{W' \times W} dt. \tag{2.101}$$

Multiplicando-se a equação aproximada por $\theta \in C^1([0,T], \mathbb{R})$, com $m = \nu$ e integrando-se em $[0,T]$, resulta que:

$$\int_0^T (u''_\nu(t), \theta(t) w_j)\, dt + \int_0^T \langle A u_\nu(t), \theta(t) w_j \rangle_{W' \times W} dt + \\ + \int_0^T \langle B^\alpha u'_\nu(t), \theta(t) w_j \rangle_{F' \times F} dt = 0, \tag{2.102}$$

onde $F = D(R^{\frac{\alpha}{2}})$ e F' é seu dual topológico.

Integrando-se por partes o primeiro termo em (2.102), conclui-se que:

$$(u'_\nu(0), \theta(0) w_j) - (u'_\nu(T), \theta(T) w_j) + \int_0^T (u'_\nu(t), \theta'(t) w_j)\, dt - \\ - \int_0^T \langle A u_\nu(t), \theta(t) w_j \rangle_{W' \times W} dt - \int_0^T \langle B^\alpha u'_\nu(t), \theta(t) w_j \rangle_{F' \times F} dt = 0. \tag{2.103}$$

Fixado $m_0 \in \mathbb{N}$ e tomando-se o limite em (2.103) com $\nu > m_0$, obtemos:

$$(u'(0), \theta(0) w_j) - (u'(T), \theta(T) w_j) + \int_0^T (u'(t), \theta'(t) w_j)\, dt - \\ - \int_0^T \langle \chi(t), \theta(t) w_j \rangle_{W' \times W} dt - \int_0^T \langle B^\alpha u'(t), \theta(t) w_j \rangle_{F' \times F} dt = 0. \tag{2.104}$$

Consideremos as funções φ definidas por:

$$\varphi = \sum_{j=1}^{m_0} \theta_j w_j \in \widetilde{H}_{m_0} . \tag{2.105}$$

Logo, (2.104) é verdadeiro para φ da forma (2.105), isto é,

$$(2.106)\qquad (u'(0),\varphi(0))-(u'(T),\varphi(T))+\int_0^T(u'(t),\varphi'(t))dt-$$
$$-\int_0^T\langle\chi(t),\varphi(t)\rangle_{W'\times W}\,dt-\int_0^T\langle B^\alpha\,u'(t),\varphi(t)\rangle_{F'\times F}\,dt=0.$$

Como $\widetilde{H}_{m_0}$ é denso em W e o conjunto das funções da forma (2.105) são densas em $G=\{\psi|\psi\in L^2(0,T.W),\psi'\in L^2(0,T;H)\}$ resulta que (2.106) é verdadeira $\forall\,\psi\in G$, isto é,

$$(2.107)\qquad (u'(0),\psi(0))-(u'(T),\psi(T))+\int_0^T(u'(t),\psi'(t))dt-$$
$$-\int_0^T\langle\chi(t),\psi(t)\rangle_{W'\times W}\,dt-\int_0^T\langle B^\alpha\,u'(t),\psi(t)\rangle_{F'\times F}\,dt=0,\quad\forall\,\psi\in G$$

Como $u\in G$, escolhendo-se em particular $u=\psi$ em (2.107) resulta que:

$$(u'(0),u(0))-(u'(T),u(T))+\int_0^T|u'(t)|^2dt-\int_0^T\langle\chi(t),u(t)\rangle_{W'\times W}\,dt-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^T\frac{d}{dt}\,|R^{\frac{\alpha}{2}}\,u(t)|^2\,dt=0,$$

ou equivalentemente,

$$(2.108)\qquad (u'(0),u(0))-(u'(T),u(T))+\int_0^T|u'(t)|^2dt-\int_0^T\langle\chi(t),u(t)\rangle_{W'\times W}\,dt+$$
$$+\frac{1}{2}\,|R^{\frac{\alpha}{2}}\,u(0)|^2-\frac{1}{2}\,|R^{\frac{\alpha}{2}}\,u(T)|^2=0.$$

Observação 2.5. Notemos que necessitamos provar que $u(0)=u_0$ e $u'(0)=u_1$. Com efeito:

(a) $u(0)=u_0$.

Seja $\theta\in C^1([0,T];\mathbb{R})$ tal que $\theta(0)=1$ e $\theta(T)=0$. Como, $u'_\nu\to u'$ forte em $L^2(0,T;H)$, $\forall\,T>0$, então:

$$(2.109)\qquad \int_0^T(u'_\nu(t),v)\theta(t)\,dt\longrightarrow\int_0^T(u'(t),v)\theta(t)\,dt,\quad \nu\to\infty.$$

Por outro lado, temos que:

$$\int_0^T (u_\nu'(t), v)\theta(t)dt = (u_\nu(T), v)\theta(T) - (u_\nu(0), v)\theta(0) - \int_0^T (u_\nu(t), v)\theta'(t)\, dt,$$

ou equivalentemente,

$$\int_0^T (u_\nu'(t), v)\theta(t)\, dt = -(u_\nu(0), v) - \int_0^T (u_\nu(t), v)\theta'(t)\, dt. \tag{2.110}$$

Analogamente, obtemos que:

$$\int_0^T (u'(t), v)\theta(t)\, dt = -(u(0), v) - \int_0^T (u(t), v)\theta'(t)\, dt. \tag{2.111}$$

Substituindo-se (2.110) e (2.111) em (2.109) resulta que:

$$-(u_\nu(0), v) - \int_0^T (u_\nu(t), v)\theta'(t)\, dt \to -(u(0), v) - \int_0^T (u(t), v)\theta'(t)\, dt. \tag{2.112}$$

Por outro lado, de $(2.39)_1$ temos que $u_\nu \rightharpoonup u$ em $L^\infty(0, \infty; W)$. Logo, $u_\nu \rightharpoonup u$ em $L^2(0, T; H)$. Portanto:

$$\int_0^T (u_\nu(t), v)\theta'(t)\, dt \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (u(t), v)\theta'(t)\, dt. \tag{2.113}$$

Substituindo-se (2.113) em (2.112), deduz-se que:

$$(u_\nu(0), v) \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} (u(0), v) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}. \tag{2.114}$$

De $(2.9)_2$, temos que

$$u_\nu(0) \to u_0 \quad \text{forte em} \quad H, \tag{2.115}$$

pois $u_\nu(0) \to u_0$ forte em W e $W \hookrightarrow H$.

Segue de (2.115) que:

$$(u_\nu(0), v) \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} (u_0, v) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}, \quad \forall\, v \in H. \tag{2.116}$$

De (2.114) e de (2.116) e pela unicidade do limite conclui-se

$$u_0 = u(0). \tag{2.117}$$

b) $u'(0) = u_1$.

Seja $\theta \in C^1([0,T]);\mathbb{R})$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. Multiplicando-se a equação aproximada por θ, com $m = \nu$ e integrando-se em $[0,T]$, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^T (u''_\nu(t), w_j)\theta(t)\,dt + \int_0^T \langle Au_\nu(t), w_j\rangle_{W'\times W}\,\theta(t)\,dt + \\ + \int_0^T \langle B^\alpha u'_\nu(t), w_j\rangle_{F'\times F}\,\theta(t)\,dt = 0, \end{aligned} \tag{2.118}$$

onde $F = D(B^{\frac{\alpha}{2}})$ e F' é o seu dual topológico.

Integrando-se por partes a primeira integral em (2.118), resulta que:

$$\begin{aligned} (u'_\nu(T), w_j)\theta(T) - (u'_\nu(0), w_j)\theta(0) - \int_0^T (u'_\nu(t), w_j)\theta'(t)\,dt \\ + \int_0^T \langle Au_\nu(t), w_j\rangle_{W'\times W}\,\theta(t)\,dt + \int_0^T \langle B^\alpha u'_\nu(t), w_j\rangle_{F'\times F}\,\theta(t)\,dt = 0, \end{aligned}$$

ou equivalentemente:

$$\begin{aligned} -(u'_\nu(0), w_j) - \int_0^T (u'_\nu(t), w_j)\theta'(t)\,dt + \int_0^T \langle Au_\nu(t), w_j\rangle_{W'\times W}\,\theta(t)\,dt + \\ + \int_0^T \langle B^\alpha u'_\nu(t), w_j\rangle_{F'\times F}\,\theta(t) = 0. \end{aligned} \tag{2.119}$$

Fixando-se $m_0 \in \mathbb{N}$, tomando-se o limite em (2.119) quando $\nu \to \infty$, com $\nu > m_0$, resulta das convergências obtidas em (2.42), (2.44), (2.45) e da hipótese que $u'_\nu(0) \to u_1$ forte em H, que:

$$\begin{aligned} -(u_1, w_j) - \int_0^T (u'(t), w_j)\theta'(t)\,dt + \int_0^T \langle \chi(t), w_j\rangle_{W'\times W}\,\theta(t)\,dt + \\ + \int_0^T \langle B^\alpha u'(t), w_j\rangle_{F'\times F}\,\theta(t)\,dt = 0. \end{aligned} \tag{2.120}$$

Por outro lado, provamos em (2.69) que:

$$u'' + \chi u + B^\alpha u' = 0 \quad \text{em} \quad L^2_{\text{loc}}(0,\infty;W'). \tag{2.121}$$

De (2.121) e do fato que $w_j\theta \in L^2(0,T;W)$ resulta que:

$$\langle u'' + \chi u + B^\alpha u', w_j\theta\rangle_{L^2(0,T;W')\times L^2(0,T;W)} = 0,$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle u''(t), w_j\rangle\theta(t)\,dt + \int_0^T \langle \chi(t), w_j\rangle_{W'\times W}\,\theta(t)\,dt + \\ + \int_0^T \langle B^\alpha u'(t), w_j\rangle_{W'\times W}\,\theta(t)\,dt = 0.\end{aligned} \tag{2.122}$$

Integrando-se por partes o primeiro termo de (2.122) e de que $\langle B^\alpha u'(t), w_j\rangle_{W'\times W} = \langle B^\alpha u'(t), w_j\rangle_{F'\times F}$, obtemos:

$$\begin{aligned}-(u'(0), w_j) - \int_0^T u'(t), w_j)\theta'(t)\,dt + \int_0^T \langle \chi(t), w_j\rangle\theta(t)\,dt + \\ + \int_0^T \langle B^\alpha u'(t), w_j\rangle_{F'\times F}\,\theta(t)\,dt = 0.\end{aligned} \tag{2.123}$$

De (2.120) e de (2.123) concluímos que:

$$(u_1, w_j) = (u'(0), w_j), \quad \forall\, w_j \in \widetilde{H}_{m_0} \tag{2.124}$$

ou equivalentemente, pela densidade de $\widetilde{H}_{m_0}$ em H que:

$$u'(0) = u_1\,. \tag{2.125}$$

De (2.117) e de (2.125) podemos reescrever (2.108) na forma:

$$\begin{aligned}(u_1, u_0) - (u'(T), u(T)) + \int_0^T |u'(t)|^2\,dt - \int_0^T \langle \chi(t), u(t)\rangle_{W'\times W}\,dt + \\ + \frac{1}{2}\,|R^{\frac{\alpha}{2}}\,u_0|^2 - \frac{1}{2}\,|R^{\frac{\alpha}{2}}\,u(T)|^2 = 0.\end{aligned} \tag{2.126}$$

De (2.126) resulta que:

$$\int_0^T \langle\chi(t), u(t)\rangle_{W'\times W}\, dt = \int_0^T |u'(t)|^2\, dt + (u_1, u_0) - (u'(T), u(T)) + \tag{2.127}$$
$$+ \frac{1}{2}\,|R^{\frac{\alpha}{2}}\, u_0|^2 - \frac{1}{2}\,|R^{\frac{\alpha}{2}}\, u(T)|^2.$$

Comparando-se (2.101) com (2.127) resulta que:

$$\int_0^T \langle\chi(t), u(t)\rangle_{W'\times W}\, dt - \int_0^T \langle\chi(t), v(t) - \int_0^T \langle Av(t), u(t) - v(t)\rangle_{W'\times W}\, dt \geq 0,$$

ou equivalentemente,

$$\int_0^T \langle\chi(t) - Av(t), u(t) - v(t)\rangle_{W'\times W}\, dt \geq 0. \tag{2.128}$$

Considerando-se $v = u - \lambda w$, $w \in L^p(0, T; W)$ e $\lambda > 0$, obtemos de (2.128) que:

$$\lambda \int_0^T \langle\chi(t) - A(u(t) - \lambda v(t)), w(t)\rangle_{W'\times W}\, dt \geq 0.$$

Logo:

$$\int_0^T \langle\chi(t) - A(u(t) - \lambda w(t)), w(t)\rangle_{W'\times W}\, dt \geq 0. \tag{2.129}$$

Pela hipótese (H6) temos que A é hemicontínuo, isto é, a aplicação $\lambda \mapsto \langle A(u(t) - \lambda w(t)), w(t)\rangle_{W'\times W}$ é contínua de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Então:

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \langle\chi(t) - A(u(t) - \lambda w(t)), w(t)\rangle_{W'\times W} = \langle\chi(t) - Au(t), w(t)\rangle_{W'\times W}\,. \tag{2.130}$$

De (2.130) e do Teorema de Lebesgue deduz-se que:

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \int_0^T \langle\chi(t) - A(u(t) - \lambda w(t)), w(t)\rangle_{W'\times W}\, dt = \tag{2.131}$$
$$= \int_0^T \lim_{\lambda\to 0^+} \langle\chi(t) - A(u(t) - \lambda w(t)), w(t)\rangle_{W'\times W}\, dt =$$
$$= \int_0^T \langle\chi(t) - Au(t), w(t)\rangle_{W'\times W}\, dt.$$

De (2.129) e de (2.131) resulta que:

$$\int_0^T \langle \chi(t) - Au(t), w(t) \rangle_{W' \times W} \, dt \geq 0. \tag{2.132}$$

Analogamente considerando-se $v = u - \lambda w$, $w \in L^p(0,T;W)$ e $\lambda < 0$ e usando-se os mesmos argumentos anteriores obtemos que:

$$\int_0^T \langle \chi(t) - Au(t), w(t) \rangle_{W' \times W} \, dt \leq 0. \tag{2.133}$$

De (2.132) e de (2.133), obtemos que:

$$\chi = Au \quad \text{em} \quad L^{p'}(0,T;W'), \tag{2.134}$$

onde $\dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{p} = 1$.

Seja $\theta \in \mathcal{D}(0,\infty)$. Então, existe $T > 0$ tal que $\operatorname{supp}\theta \subset]0,T]$. Logo:

$$\int_0^\infty \langle Au_\nu(t), v \rangle_{W' \times W} \, \theta(t) \, dt = \int_0^T \langle Au_\nu(t), v \rangle_{W' \times W} \, \theta(t) \, dt$$

e

$$\int_0^\infty \langle Au(t), v \rangle_{W' \times W} \, \theta(t) \, dt = \int_0^T \langle Au(t), v \rangle_{W' \times W} \, \theta(t) \, dt.$$

Logo, quando $\nu \to \infty$, obtemos:

$$\int_0^\infty \langle Au_\nu(t), v \rangle_{W' \times W} \, \theta(t) \, dt \to \int_0^T \langle Au(t), v \rangle_{W' \times W} \, \theta(t) \, dt. \tag{2.135}$$

De (2.135), obtemos que:

$$\langle Au_\nu(t), v \rangle_{W' \times W} \to \langle Au_\nu(t), v \rangle_{W' \times W} \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,\infty), \quad \forall\, v \in W. \tag{2.136}$$

Assim a demonstração do Teorema 2.1 está concluída.

CAPÍTULO III

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO

No presente capítulo estuda-se o comportamento assintótico da energia associada ao problema (2.1), a qual é definida por:

$$E(u(t)) = \frac{1}{2}\left|u'(t)\right|^2 + \frac{1}{p}\left\|u(t)\right\|_W^p, \quad \forall t > 0 \text{ e } p > 2 \tag{3.1}$$

onde u é solução do problema:

$$\left| \begin{array}{c} u" + Au + B^\alpha u' = 0, \quad \text{em } L^2_{loc}(0,\infty; W\,'), \; 0 < \alpha \leq 1. \\ u(0) = 0, \; u'(0) = u_1 \end{array} \right. \tag{3.2}$$

obtida no Teorema 2.1.

Notemos que a regularidade obtida no teorema supracitado não nos permite compor u'' com u', pois $u' \in L^\infty(0,\infty; H) \cap L^2_{loc}(0,\infty; D(R^{\frac{\alpha}{2}}))$. Esta dificuldade desaparece quando trabalhamos com a solução aproximada e posteriormente calculamos o limite. Do que foi exposto provaremos o teorema enunciado a seguir.

Teorema 3.1. Seja u a solução do problema (3.2). Suponha que $B^\alpha \geq \gamma_0 I$, $\gamma_0 \in \mathbb{R}$, $\gamma_0 > 0$ e seja $p > 2$. Então, existe $K' > 0$ tal que:

$$E(u(t)) \leq K'(1+t)^{-\frac{1}{\beta'}}, \qquad \forall t \geqslant 0 \tag{3.3}$$

onde $\beta' = \dfrac{2}{q} - 1$, com $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$ e K' é uma constante obtida do Lema de Nakao.

Demonstração: A prova do comportamento assintótico da energia será baseada no Lema de Nakao. Com efeito, multipliquemos a equação aproximada dada em $(2.9)_1$ por $g'_{jm}(t)$ e somemos em j, $1 \leq j \leq m$. Logo:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u'_m(t)\right|^2 + \langle Au_m(t), u'_m(t)\rangle_{W\,'\times W} + \left|R^{\frac{\alpha}{2}} u'_m(t)\right|^2 = 0. \tag{3.4}$$

Desde que $A(u)$ é fortemente homogêneo de grau $p-1$ no sentido de Dubinskii e que $\langle Au_m(t), u_m(t)\rangle_{W\,'\times W} = \|u_m(t)\|_W^p$, então:

$$\frac{d}{dt}\langle Au_m(t), u_m(t)\rangle_{W\,'\times W} = \frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_W^p = p\,\langle Au_m(t), u_m'(t)\rangle_{W\,'\times W} \tag{3.5}$$

Da equação (3.5) podemos reescrever a equação (3.4) na forma:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m'(t)|^2 + \frac{1}{p}\frac{d}{dt}||u_m(t)||_W^p + |R^{\frac{\alpha}{2}}\,u_m'(t)|^2 = 0. \tag{3.6}$$

De (3.1) e de (3.6) resulta que a energia $E(u_m(t))$ satisfaz:

$$\frac{d}{dt}E(u_m(t)) = -|R^{\frac{\alpha}{2}}\,u_m'(t)|^2, \quad \forall\, t \geq 0. \tag{3.7}$$

Integrando-se a equação (3.7) de 0 até t, obtemos:

$$E(u_m(t)) + \int_0^t |R^{\frac{\alpha}{2}}\,u_m'(s)|^2\,ds = E(u_m(0)) = \frac{1}{2}|u_{1m}|^2 + \frac{1}{p}||u_{0m}||_W^p\,. \tag{3.8}$$

Portanto, de (3.7) e de (3.8) resulta que:

$$\left|\begin{array}{ll} E(u_m(t)) & \text{é não crescente,} \quad \forall\, t \geq 0 \\ E(u_m(t)) & \text{é limitada} \end{array}\right. \tag{3.9}$$

Por outro lado, integremos a equação (3.6) com respeito a s, com $t_1 \leq s \leq t_2$ e $t_1, t_2 \geq 0$. Logo, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|u_m'(t_2)|^2 + \frac{1}{p}||u_m(t_2)||^p + \int_{t_1}^{t_2} |R^{\frac{\alpha}{2}}\,u_m'(s)|^2\,ds = \\ = \frac{1}{2}|u_m'(t_1)|^2 + \frac{1}{p}||u_m(t_1)||^p. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Agora multipliquemos a equação aproximada $(2.9)_1$ por $g_{jm}(t)$ e somemos em j, com $1 \leq j \leq m$. Portanto:

$$(u_m''(t), u_m(t)) + \langle Au_m(t), u_m(t)\rangle_{W'\times W} + (R^{\frac{\alpha}{2}}\,u_m'(t), R^{\frac{\alpha}{2}}\,u_m(t)) = 0,$$

ou equivalentemente,

$$\frac{d}{dt}(u_m'(t), u_m(t)) - |u_m'(t)|^2 + ||u_m(t)||_W^p + (R^{\frac{\alpha}{2}}\, u_m'(t), R^{\frac{\alpha}{2}}\, u_m(t)) = 0. \tag{3.11}$$

Integrando-se (3.11) com respeito a s, $t_1 \leq s \leq t_2$ e $t_1, t_2 \geq 0$, resulta que:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} ||u_m(s)||_W^p\, ds = \int_{t_1}^{t_2} |u_m'(s)|^2 ds + (u_m'(t_1), u_m(t_1)) - (u_m'(t_2), u_m(t_2)) - \\ - \int_{t_1}^{t_2} (R^{\frac{\alpha}{2}}\, u_m'(s), R^{\frac{\alpha}{2}}\, u_m(s))\, ds. \end{aligned} \tag{3.12}$$

De (3.8) temos, para $t > 0$ que:

$$\int_t^{t+1} |R^{\frac{\alpha}{2}}\, u_m'(s)|^2\, ds = E(u_m(t)) - E(u_m(t+1)) = F^2(t), \tag{3.13}$$

pois $E(u_m(t) \geq E(u_m(t+1))$, por $(3.9)_1$.

Consideremos os subintervalos $\left[t, t+\frac{1}{4}\right]$ e $\left[t+\frac{3}{4}, t+1\right]$ de $[t, t+1]$. Então, pelo Teorema do Valor Médio para Integrais existem $t_1 \in]t, t+\frac{1}{4}[$ e $t_2 \in]t+\frac{3}{4}, t+1[$ tais que:

$$\int_t^{t+\frac{1}{4}} |R^{\frac{\alpha}{2}}\, u_m'(s)|^2\, ds = \frac{1}{4}|R^{\frac{\alpha}{2}}\, u_m'(t_1)|^2 \leq \int_t^{t+1} |R^{\frac{\alpha}{2}}\, u_m'(s)|^2\, ds = F^2(t) \tag{3.14}$$

e

$$\int_{t+\frac{3}{4}}^{t+1} |R^{\frac{\alpha}{2}}\, u_m'(s)|^2\, ds = \frac{1}{4}|R^{\frac{\alpha}{2}}\, u_m'(t_2)|^2 \leq \int_t^{t+1} |R^{\frac{\alpha}{2}}\, u_m'(s)|^2\, ds = F^2(t). \tag{3.15}$$

Logo, de (3.14) e de (3.15) resulta que:

$$|R^{\frac{\alpha}{2}}\, u_m'(t_i)|^2 \leq 4\, F^2(t), \quad i = 1, 2. \tag{3.16}$$

De (3.12), obtemos que:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} ||u_m(s)||_W^p \leq \sum_{i=1}^{2} |u_m'(t_i)|\, |u_m(t_i)| + \int_{t_1}^{t_2} |u_m'(s)|^2\, ds + \\ + \int_{t_1}^{t_2} |R^{\frac{\alpha}{2}}\, u_m'(s)|\, |R^{\frac{\alpha}{2}}\, u_m(s)|\, ds. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Por outro lado, temos pela hipótese que $B^\alpha \geq \gamma_0 I$ então:

$$(3.18) \qquad |R^{\frac{\alpha}{2}}\, u'_m(t_i)|^2 = \sum_{\nu=t}^{\infty} \gamma_\nu^\alpha\, |(u'_m(t_i), \psi_\nu|^2 \geq \gamma_1^\alpha \sum_{\nu=1}^{\infty} |(u'_m(t_i), \psi_\nu|^2 = \gamma_1^\alpha\, |u'_m(t_i)|^2.$$

De (3.18) e de (3.16) resulta que:

$$(3.19) \qquad |u'_m(t_i)| \leq \frac{1}{\gamma_1^{\alpha/2}}\, |R^{\frac{\alpha}{2}}\, u'_m(t_i)| \leq \frac{1}{\gamma_1^{\alpha/2}} \cdot 2F(t), \quad i = 1, 2.$$

Como, por hipótese, $W \hookrightarrow H$ e da definição de $E(u_m(t))$, obtemos que:

$$(3.20) \qquad |u_m(t_i)| \leq c_1 ||u_m(t_i)||_W \leq c_1\, p^{\frac{1}{p}}\, [E(u_m(t_i))]^{\frac{1}{p}},$$

por (3.1), $\forall\, i = 1, 2$.

Por outro lado, como $t_i > t$, $\forall\, i = 1, 2$, então $E(u_m(t)) \geq E(u_m(t_i))$. Disto, podemos reescrever a desigualdade (3.20) na forma:

$$(3.21) \qquad |u_m(t_i)| \leq c_1\, p^{\frac{1}{p}}\, [E(u_m(t))]^{\frac{1}{p}} \quad \forall\, i = 1, 2.$$

De (3.14) e de (3.18) temos também que:

$$(3.22) \qquad \begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} |u'_m(s)|^2\, ds &\leq \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\gamma_1^\alpha}\, |R^{\frac{\alpha}{2}}\, u'_m(s)|^2\, ds \\ &\leq \frac{1}{\gamma_1^\alpha} \int_t^{t+1} |R^{\frac{\alpha}{2}}\, u'_m(s)|^2\, ds = \frac{1}{\gamma_1^\alpha}\, F^2(t). \end{aligned}$$

Logo, de (3.19), (3.21) e (3.22), a desigualdade (3.17) pode ser reescrita na forma:

$$(3.23) \qquad \begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} ||u_m(s)||_W^p\, ds &\leq K_0\, F(t)[E(u_m(t))|^{\frac{1}{p}} + K_1\, F^2(t) + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} |R^{\frac{\alpha}{2}}\, u'_m(s)|\, |R^{\frac{\alpha}{2}}\, u_m(s)|\, ds, \end{aligned}$$

onde $K_0 = \dfrac{4\, c_1\, p^{1/p}}{\gamma_1^{\alpha/2}}$ e $K_1 = \dfrac{1}{\gamma_1^{\alpha/2}}$.

No que se segue faremos uma limitação para o último termo da desigualdade (3.23). Com efeito, consideremos $\varepsilon_1 > 0$. Sejam p e q, $p > 2$, tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então, pela desigualdade de Young, resulta que:

$$\sqrt{\varepsilon_1}\,|R^{\frac{\alpha}{2}}\,u_m(s)|\,\frac{|R^{\frac{\alpha}{2}}\,u'_m(s)|}{\sqrt{\varepsilon_1}} \leq \frac{\varepsilon_1^{p/2}}{p}\,|R^{\frac{\alpha}{2}}\,u_m(s)|^p + \frac{1}{q\varepsilon_1^{q/2}}\,|R^{\frac{\alpha}{2}}\,u'_m(s)|^q\,. \tag{3.24}$$

Por outro lado, como $W \hookrightarrow D(R^{\frac{\alpha}{2}})$, obtemos que:

$$||u_m(s)||^2{}_{D(R^{\frac{\alpha}{2}})} = |R^{\frac{\alpha}{2}}\,u_m(s)|^2 \leq c_2^2\,||u_m(s)||_W^2\,. \tag{3.25}$$

De (3.25) podemos reescrever a desigualdade (3.24) na forma:

$$\sqrt{\varepsilon_1}\,|R^{\frac{\alpha}{2}}\,u_m(s)|\,\frac{|R^{\frac{\alpha}{2}}\,u'_m(s)|}{\sqrt{\varepsilon_1}} \leq \frac{c_2^p\,\varepsilon_1^{p/2}}{p}\,||u_m(s)||_W^p + \frac{1}{q\,\varepsilon_1^{q/2}}\,|R^{\frac{\alpha}{2}}\,u'_m(s)|^q. \tag{3.26}$$

Integrando-se (3.26) com respeito a s, $t_1 \leq s \leq t_2$, resulta que:

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\varepsilon_1}|R^{\frac{\alpha}{2}}\,u_m(s)|\,\frac{|R^{\frac{\alpha}{2}}\,u'_m(s)|}{\sqrt{\varepsilon_1}}ds \leq \frac{c_2\,\varepsilon_1^{p/2}}{p}\int_{t_1}^{t_2}||u_m(s)||_W^p\,ds+\\ +\frac{1}{q\,\varepsilon_1^{q/2}}\int_{t_1}^{t_2}|R^{\frac{\alpha}{2}}\,u'_m(s)|^q\,ds.\end{aligned} \tag{3.27}$$

Por outro lado, como $p > 2$, segue que $\dfrac{2}{q} > 1$. Sejam γ e β tais que $\dfrac{1}{\gamma} + \dfrac{1}{\beta} = 1$, com $\gamma = \dfrac{2}{q}\cdot$ Logo, pela desigualdade de Hölder, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}|R^{\frac{\alpha}{2}}\,u'_m(s)|^q\,ds \leq \Big(\int_{t_1}^{t_2} ds\Big)^{\frac{1}{\beta}}\Big(\int_{t_1}^{t_2}|R^{\frac{\alpha}{2}}\,u'_m(s)|^{\gamma q}\,ds\Big)^{\frac{1}{\gamma}} =\\ = (t_2-t_1)^{\frac{1}{\beta}}\Big(\int_{t_1}^{t_2}|R^{\frac{\alpha}{2}}\,u'_m(s)|^2\,ds\Big)^{\frac{q}{2}} \leq [F(t)]^q,\end{aligned} \tag{3.28}$$

por (3.13) e pelo fato que $\dfrac{1}{2} < t_2 - t_1 < 1$.

Substituindo-se (3.28) com (3.27) resulta que:

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\varepsilon_1}|R^{\frac{\alpha}{2}}\,u_m(s)|\,\frac{|R^{\frac{\alpha}{2}}\,u'_m(s)|}{\sqrt{\varepsilon_1}}ds \leq \frac{c_2\,\varepsilon_1^{p/2}}{p}\int_{t_1}^{t_2}||u_m(s)||_W^p\,ds+\\ +\frac{1}{q\,\varepsilon_1^{q/2}}\,[F(t)]^q.\end{aligned} \tag{3.29}$$

Segue-se de (3.29) que podemos reescrever a desigualdade (3.23) na forma:

$$\left[1-\frac{c_2\,\varepsilon_1^{p/2}}{p}\right]\int_{t_1}^{t_2}||u_m(s)||^p\,ds \leq K_0\,F(t)\big[E(u_m(t))\big]^{\frac{1}{p}}+K_1\,F^2(t)+ \tag{3.30}$$
$$+\frac{1}{q\,\varepsilon_1^{q/2}}\,[F(t)]^q.$$

Escolhendo-se $\varepsilon_1>0$, pequeno, tal que, $1-\dfrac{c_2^p\,\varepsilon_1^{p/2}}{p}>0$, obtemos:

$$0<\varepsilon_1<\frac{p^{2/p}}{c_2^2}\,. \tag{3.31}$$

Então, se considerarmos $c_3=1-\dfrac{c_2\,\varepsilon_1^{p/2}}{p}$, obtemos em (3.30) que:

$$\int_{t_1}^{t_2}||u_m(s)||_W^p\,ds \leq c_4\big\{F(t)[E(u_m(t))]^{1/p}+F^2(t)+[F(t)]^q\big\}, \tag{3.32}$$

onde $c_4=\max\left\{\dfrac{K_0}{c_3},\dfrac{K_1}{c_3},\dfrac{1}{c_3 q\varepsilon_1^{q/2}}\right\}$.

Por outro lado, consideremos a função G^2 definida por:

$$G^2(t)=F(t)[E(u_m(t))]^{\frac{1}{p}}+F^2(t)+[F(t)]^q. \tag{3.33}$$

Como, $E(u_m(s))=\dfrac{1}{2}\,|u_m'(s)|^2+\dfrac{1}{p}\,||u_m(t)||_W^p$ resulta de (3.22), (3.32) e (3.33) que:

$$\int_{t_1}^{t_2}E(u_m(s))\,ds=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}|u_m'(s)|^2\,ds+\frac{1}{p}\int_{T_1}^{t_2}||u_m(s)||_W^p\,ds\leq \tag{3.34}$$
$$\leq\frac{1}{2\gamma_1^\alpha}\,F^2(t)+\frac{c_4}{p}\,G^2(t).$$

Logo, obtemos de (3.34) que:

$$\int_{t_1}^{t_2}E(u_m(s))\,ds\leq c_5\{F^2(t)+G^2(t)\}. \tag{3.35}$$

onde $c_5=\max\left\{\dfrac{1}{2\gamma_1^\alpha}\,,\dfrac{c_4}{p}\right\}$.

Além disso, temos pelo Teorema do Valor Médio para Integais que existe $t^* \in]t_1, t_2[$ tal que:

$$\int_{t_1}^{t_2} E(u_m(s))\,ds = (t_2 - t_1)E(u_m(t^*)) > \frac{1}{2}\,E(u_m(t^*)), \tag{3.36}$$

pois $\dfrac{1}{2} < t_2 - t_1 < 1$.

De (3.35) e (3.36), obtemos que:

$$E(u_m(t^*)) \leq c_6\{F^2(t) + G^2(t)\}, \tag{3.37}$$

onde $c_6 = 2c_5$.

De (3.10), (3.13) e de (3.37) resulta que:

$$\begin{aligned} E(u_m(t)) &= E(u_m(t^*)) + \int_t^{t^*} |R^{\frac{\alpha}{2}}\,u_m'(s)|^2\,ds \leq \\ &\leq c_6\{F^2(t) + G^2(t)\} + F^2(t) \leq c_7\{F^2(t) + G^2(t)\}, \end{aligned} \tag{3.38}$$

onde $c_7 = c_6 + 1$.

Portanto, da definição de $G^2(t)$ podemos reescrever (3.38) na forma:

(3.39)

$$\begin{aligned} &\sup_{t\leq s\leq t+1} E(u_m(s)) = E_m(t) \leq c_4\big\{F^2(t) + F(t)[E(u_m(t))]^{\frac{1}{p}} + F^2(t) + [F(t)]^q\big\} = \\ &= c_4\big\{2F^2(t) + F(t)[E(u_m(t))]^{\frac{1}{p}} + [F(t)]^q\big\} \leq \\ &\leq c_9\big\{F^2(t) + F(t)[E(u_m(t))]^{\frac{1}{p}} + [F(t)]^q\big\}, \end{aligned}$$

onde $c_8 = 2c_7$.

Por outro lado, pela desigualdade de Young, obtemos:

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}}\,F(t)\cdot\sqrt{\varepsilon_2}\big[E(u_m(t))\big]^{1/p} \leq \frac{1}{q\varepsilon_2^{q/2}}\,[F(t)]^q + \frac{\varepsilon_2^{p/2}}{p}\,E(u_m(t)) \tag{3.40}$$

Substituindo-se (3.40) em (3.39) vem que:

$$\sup_{t\leq s\leq t+1} E(u_m(s) = E(u_m(t)) \leq c_8\big\{F^2(t) + \frac{1}{q\varepsilon_2^{q/2}}\,[F(t)]^q +$$

$$+\frac{\varepsilon_2^{p/2}}{p}\,E(u_m(t)) + [F(t)]^q, \tag{3.41}$$

ou equivalentemente:

$$\sup_{t\leq s\leq t+1} E(u_m(s)) = \left[1-\frac{c_8\varepsilon_2^{p/2}}{p}\right] E(u_m(t)) \leq \tag{3.42}$$

$$\leq c_8\big\{F^2(t) + \big(\frac{1+q\varepsilon_2^{q/2}}{q\varepsilon_2^{q/2}}\big)[F(t)]^q\big\}.$$

Escolhendo-se $\varepsilon_2 > 0$, pequeno, tal que, $1 - \dfrac{c_8\varepsilon_2^{p/2}}{p} > 0$, obtemos:

$$0 < \varepsilon_2 < \left(\frac{p}{c_8}\right)^{\frac{2}{q}}. \tag{3.43}$$

Então, se considerarmos $c_9 = 1 - \dfrac{c_8\varepsilon_1^{p/2}}{p}$, obtemos em (3.47) que:

$$\sup_{t\leq s\leq t+1} E(u_m(s)) = E(u_m(t)) \leq c_{10}\{F^2(t) + [Ft)]^q\}, \tag{3.44}$$

onde $c_{10} = \max\left\{\dfrac{c_8}{c_9}, \frac{c_8}{c_9}\,\left(\frac{1+q\varepsilon_2^{q/2}}{\varepsilon_2^{q/2}}\right)\right\}$.

Por outro lado, temos também que

$$[F(t)]^q + F^2(t) = [F(t)]^q\,\{1 + [F(t)]^{2-q}\} = \tag{3.45}$$

$$= [F(t)]^q\,\big\{1 + [F(t)]^{2(1-\frac{q}{2})}\big\}.$$

Por (3.8), obtemos que

$$\int_0^t |R^{\frac{\alpha}{2}}\,u_m'(s)|^2\,ds \leq E(u_m(0)) \tag{3.46}$$

e

$$\int_0^{t+1} |B^{\frac{\alpha}{2}}\, u_m'(s)|^2\, ds \le E(u_m(0)) \tag{3.47}$$

Logo, de (3.46) e (3.47) resulta que:

$$\int_0^{t} |R^{\frac{\alpha}{2}}\, u_m'(s)|^2\, ds + \int_0^{t+1} |R^{\frac{\alpha}{2}}\, u_m'(s)|^2\, ds \le 2E(u_m(0)),$$

ou equivalentemente:

$$\int_0^{t} |R^{\frac{\alpha}{2}}\, u_m'(s)|^2\, ds + \int_0^{t} |R^{\frac{\alpha}{2}}\, u_m'(s)|^2\, ds + \int_t^{t+1} |R^{\frac{\alpha}{2}}\, u_m'(s)|^2\, ds \le 2E(u_m(0)). \tag{3.48}$$

Logo, de (3.48), obtemos:

$$\int_t^{t+1} |R^{\frac{\alpha}{2}}\, u_m(s)|^2\, ds = F^2(t) \le 2E(u_m(0)). \tag{3.49}$$

Substituindo-se o resultado obtido em (3.49) na desigualdade (3.45) resulta que:

$$[F(t)]^q\big\{1 + [F(t)]^{2(1-\frac{q}{2})}\big\} \le [F(t)]^q\big\{1 + [2E(u_m(0))]^{1-\frac{q}{2}}\big\}. \tag{3.50}$$

De (3.50) podemos reescrever (3.44) na forma:

$$\sup_{t\le s\le t+1} E(u_m(s)) = E(u_m(t)) \le c_{11}[F(t)]^q, \tag{3.51}$$

onde $c_{11} = c_{10}\big\{1 + [2E(u_m(0))]^{1-\frac{q}{2}}\big\}$.

Logo, de (3.51), resulta que:

$$\sup_{t\le s\le t+1} E(u_m(s)) = E(u_m(t)) \le c_{11}[F^2(t)]^{\frac{q}{2}}, \tag{3.52}$$

ou equivalentemente:

$$\sup_{t\le s\le t+1} [E(u_m(s)]^{\frac{2}{q}} = [E(u_m(t))]^{\frac{2}{q}} \le (c_{11})^{\frac{2}{q}}\, F^2(t). \tag{3.53}$$

Por outro lado, temos que:

$$\left\{1+\left[2E(u_m(0))\right]^{1-\frac{q}{2}}\right\}^{\frac{2}{q}} \leq 2^{\frac{2}{q}}\left\{1^{\frac{q}{2}}+\left[2E(u_m(0))\right]^{(1-\frac{q}{2})\cdot\frac{2}{q}}\right\} = \tag{3.54}$$
$$= 2^{\frac{2}{q}}\left\{1+2^{\frac{2}{q}-1}\left[E(u_m(0))\right]^{\frac{2}{q}-1}\right\}.$$

De (3.54) obtemos que:

$$\left(c_{11}\right)^{\frac{2}{q}} = c_{10}^{\frac{2}{q}}\left\{1+\left[2E(u_m(0))\right]^{1-\frac{q}{2}}\right\}^{\frac{2}{q}} \leq \tag{3.55}$$
$$\leq \left(2c_{10}\right)^{\frac{2}{q}}\left\{1+2^{\frac{2}{q}-1}\left[E(u_m(0))\right]^{\frac{2}{q}-1}\right\}.$$

Da desigualdade (3.55) e de que $F^2(t) = E(u_m(t)) - E(u_m(t+1))$, podemos reescrever (3.53) na forma:

$$\sup_{t\leq s\leq t+1}\left[E(u_m(s))\right]^{\frac{2}{q}} = \left[E(u_m(t))\right]^{\frac{2}{q}} \leq c_{12}\left[E(u_m(t)) - E(u_m(t+1))\right] \tag{3.56}$$

onde $c_{12} = \left(2c_{10}\right)^{\frac{2}{q}}\left\{1+2^{\frac{2}{q}-1}\left[E(u_m(0))\right]^{\frac{2}{q}-1}\right\}$.

Como, por hipótese, $p > 2$, então $\dfrac{2}{q} > 1$. Logo:

$$\frac{2}{q} = 1+\beta' \quad \text{onde} \quad \beta' > 0. \tag{3.57}$$

Substituindo-se (3.57) em (3.56) resulta que:

$$\sup_{t\leq s\leq t+1}\left[E(u_m(s))\right]^{1+\beta'} \leq c_{12}[E(u_m(t) - E(u_m(t+1))]. \tag{3.58}$$

De (3.58) e do Lema de Nakao, deduz-se que:

$$E(u_m(t)) \leq c_{13}\big(1+t\big)^{-\frac{1}{\beta'}} \quad \text{para} \quad t > T \tag{3.59}$$

onde $c_{13} = \left(\dfrac{c_{12}\, 2^{1/\beta'}\, T}{\beta'}\right)^{\frac{1}{\beta'}}$, t suficientemente maior que T

e

$$E(u_m(t)) \leq c_{14}(1+t)^{-\frac{1}{\beta'}} \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq T\,. \tag{3.60}$$

Portanto, de (3.59) e de (3.60), obtemos:

$$E(u_m(t)) \leq K(1+t)^{-\frac{1}{\beta'}} \quad \text{para} \quad t \geq 0, \tag{3.61}$$

onde $K = \max\{c_{13}, c_{14}\}$.

Observação 3.1. A constante K depende de $u_m(0) = u_{0m}$ e de $u'_m(0) = u_{1m}$. De fato:

$$c_{12} = (2c_{10})^{\frac{2}{q}} \left\{1 + q^{\frac{2}{q}-1}\left[E(u_m(0))\right]^{\frac{2}{q}-1}\right\}. \tag{3.62}$$

ou equivalentemente:

$$c_{12} = (2c_{10})^{1+\beta'} \left\{1 + 2^{\beta'} \left[\frac{1}{2}\,|u_{1m}|^2 + \frac{1}{p}\,||u_{0m}||_W^p\right]^{\beta}\right\}. \tag{3.63}$$

Notemos que (3.61) é a estimativa assintótica da energia, porém para as soluções aproximadas. No que se segue provaremos que (3.61) é mantida quando $m \to \infty$. Com efeito, considera-se $t_0 \in [0, T]$ fixado. Então, por (3.61) obtemos:

$$\frac{1}{2}\,|u'_m(t_0)|^2 + \frac{1}{p}\,||u_m(t_0)||_W^p \leq K\left(1 + t_0\right)^{-\frac{1}{\beta'}}. \tag{3.64}$$

Das estimativas obtidas no Capítulo 2 e como $B^\alpha \geq \gamma_0 I$ concluímos que:

$$\left|\begin{array}{lll} u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u & \text{em} & L^\infty(0,\infty;W) \\ u'_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u' & \text{em} & L^\infty(0,\infty;H) \\ u'_\nu \rightharpoonup u' & \text{em} & L^2(0,\infty;D(R^{\frac{\alpha}{2}})) \\ u''_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u'' & \text{em} & L^2_{\text{loc}}(0,\infty;W') \\ Au_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} Au & \text{em} & L^\infty(0,\infty;W') \\ u(t_0) \rightharpoonup \psi & \text{em} & W \\ u'(t_0) \rightharpoonup \eta & \text{em} & H \end{array}\right. \tag{3.65}$$

Como H é reflexivo e a função $u_\nu\colon [0,T] \to H$ é absolutamente contínua, então u_ν e diferenciável quase sempre em $]0,T[$ e vale:

$$u_\nu(t) - u_\nu(s) = \int_s^t u'_\nu(\sigma)\, d\sigma. \tag{3.66}$$

De (3.66) e da estimativa obtida para $(u'_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ em $(3.65)_2$ resulta que:

$$|u_\nu(t) - u_\nu(s)| < c|t-s|. \tag{3.67}$$

De (3.67) resulta que $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ é equicontínua de $[0,T]$ em H. De fato, é suficiente escolhermos $\varepsilon = \frac{\delta}{c}$, onde $|t-s| < \delta$.

Por outro lado, temos que:

$$|u_\nu(t)| \leq K_3\,, \tag{3.68}$$

$\forall\, \nu \in \mathbb{N}$, pois por $(3.65)_1$ temos que $||u_\nu(t)||_W \leq K_2$ e $W \hookrightarrow H$.

De (3.67) e de (3.68) resulta do Teorema de Arzelá-Ascoli que:

$$u_\nu \to u \quad \text{em} \quad C^0([0,T];H). \tag{3.69}$$

De (3.69), por conseqüência, obtemos que:

$$u_\nu(t_0) \to u(t_0) \quad \text{forte em} \quad H. \tag{3.70}$$

Logo, de (3.70), resulta que:

$$(u_\nu(t_0), v) \to (u(t_0), v) \quad \text{em} \quad \mathbb{R},\ \forall\, v \in H. \tag{3.71}$$

De (3.71) e de $(3.65)_6$ que nos dá que $u_\nu(t_0) \rightharpoonup \psi$ em W, e do fato que $W \hookrightarrow H$, obtemos:

$$u(t_0) = \psi. \tag{3.72}$$

Considerando-se $m = \nu$ em (3.61) e tomando-se o limite inferior obtemos:

$$\frac{1}{2}\,|\eta|^2 + \frac{1}{p}\,||u(t_0)||_W^p \le \overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, K(1+t_0)^{-\frac{1}{\beta'}}; \tag{3.73}$$

Temos que:

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, E(u_\nu(0)) = \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \Big\{\frac{1}{2}\,|u_{1\nu}|^2 + \frac{1}{p}\,||u_{0\nu}||_W^p\Big\}.$$

Mas, por hipótese, $u_{1\nu} \to u_1$ forte em H e $u_{0\nu} \to u_0$ forte em W. Logo:

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, E(u_\nu(0)) &= \lim \Big\{\frac{1}{2}\,|u_{1\nu}|^2 + \frac{1}{p}\,||u_{0\nu}||_W^p\Big\} = \\ &= \frac{1}{2}\,|u_1|^2 + \frac{1}{p}\,||u_0||_W^p = E(u(0)). \end{aligned} \tag{3.74}$$

Seja $c_{15} = (2c_{10})^{\frac{1}{\beta'}}\big\{1 + 2^{\beta'}\big[\frac{1}{2}\,|u_1|^2 + \frac{1}{p}\,||u_0||_W^p\big]\big\}^{\beta'}$. Considerando-se $c_{16} = \left(\dfrac{c_{15}\, 2^{\frac{1}{\beta'}}\, T}{\beta'}\right)^{\frac{1}{\beta'}}$, obtemos:

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, K(1+t_0)^{-\frac{1}{\beta'}} \le K'(1+t_0)^{-\frac{1}{\beta'}}, \tag{3.75}$$

onde $K' = \max\{c_{14}, c_{16}\}$.

De (3.75) podemos reescrever (3.73) na forma:

$$\frac{1}{2}\,|\eta|^2 + \frac{1}{p}\,||u(t_0)||_W^p \le K'(1+t_0)^{-\frac{1}{\beta'}}. \tag{3.76}$$

No que se segue provaremos que $\eta = u'(t_0)$. De fato, seja $\theta \in C^0([t_0, T]; \mathbb{R})$ definida por:

$$\theta(t) = \left|\begin{array}{lcl} \quad 1 & ; & 0 \le t < t_0 \\ -\dfrac{t}{\delta} + \dfrac{t_0+\delta}{\delta} & ; & t_0 \le t \le t_0+\delta \\ \quad 0 & ; & t_0+\delta < t \le T \end{array}\right. \tag{3.77}$$

onde $\delta > 0$.

Consideremos a equação aproximada $(2.9)_1$ com $m = \nu$. Logo:

$$(u''_\nu(t), w_j) + \langle Au_\nu(t), w_j\rangle_{W' \times W} + \langle B^\alpha u_\nu(t), w_j\rangle_{[D(R^{\frac{\alpha}{2}})]' \times D(R^{\frac{\alpha}{2}})} = 0, \tag{3.78}$$

$\forall\, w_j \in \widetilde{H}_m$.

Multiplicando-se (3.78) pela função θ definida em (3.77) e integrando-se em t, $t_0 \leq t \leq T$, resulta que:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+\delta} (u''_\nu(t), w_j)\theta(t)\, dt + \int_{t_0}^{t_0+\delta} \langle Au_\nu(t), w_j\rangle_{W' \times W}\, \theta(t)\, dt+ \\ + \int_{t_0}^{t_0+\delta} \langle B^\alpha u'_\nu(t), w_j\rangle_{[D(B^{\frac{\alpha}{2}})]' \times D(B^{\frac{\alpha}{2}})}\, \theta(t) dt \end{aligned} \tag{3.79}$$

Integrando-se por partes o primeiro membro da equação (3.79), obtemos:

$$\begin{aligned} \Big[(u'_\nu(t), w_j)\theta(t)\Big]_{t_0}^{t_0+\delta} - \int_{t_0}^{t_0+\delta} (u'_\nu(t), w_j)\theta'(t)\, dt + \int_{t_0}^{t_0+\delta} \langle Au_\nu(t), w_j\rangle_{W' \times W}\, \theta(t)\, dt+ \\ + \int_{t_0}^{t_0+\delta} \langle B^\alpha u'_\nu(t), w_j\rangle_{[D(B^{\frac{\alpha}{2}})]' \times D(B^{\frac{\alpha}{2}})} \theta(t)\, dt = 0, \end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} -(u'_\nu(t_0), w_j) + \frac{1}{\delta}\int_{t_0}^{t_0+\delta} (u'_\nu(t), w_j)\, dt + \int_{t_0}^{t_0+\delta} \langle Au_\nu(t), w_j\rangle_{W' \times W}\, \theta(t)\, dt+ \\ + \int_{t_0}^{t_0+\delta} \langle B^\alpha u'_\nu(t), w_j\rangle_{[D(B^{\frac{\alpha}{2}})]' \times D(B^{\frac{\alpha}{2}})} \theta(t)\, dt = 0 \end{aligned} \tag{3.80}$$

Tomando-se o limite em (3.80) quando $\nu \to \infty$, $\nu > m_0$, com as justificativas obtidas no Capítulo 2 e de $(3.65)_7$ resulta que:

$$\begin{aligned} -(\eta, w_j) + \frac{1}{\delta}\int_{t_0}^{t_0+\delta} (u'(t), w_j)\, dt + \int_{t_0}^{t_0+\delta} \langle Au(t), w_j\rangle_{W' \times W}\, \theta(t)\, dt+ \\ + \int_{t_0}^{t_0+\delta} \langle B^\alpha u'_\nu(t), w_j\rangle_{[D(B^{\frac{\alpha}{2}})]' \times D(B^{\frac{\alpha}{2}})} \theta(t)\, dt = 0 \end{aligned} \tag{3.81}$$

A igualdade (3.81) é verdadeira $\forall\, j \in \mathbb{N}$, o que nos permite concluir que:

$$-(\eta, v) + \frac{1}{\delta}\int_{t_0}^{t_0+\delta} (u'(t), v)\, dt + \int_{t_0}^{t_0+\delta} \langle Au(t), w_j\rangle_{W'\times W}\, \theta(t)\, dt + \\ + \int_{t_0}^{t_0+\delta} \langle B^\alpha u'_\nu(t), w_j\rangle_{[D(B^{\frac{\alpha}{2}})]'\times D(B^{\frac{\alpha}{2}})} \theta(t)\, dt = 0, \tag{3.82}$$

$\forall\, v \in \widetilde{H}_{m_0}$.

De $(3.65)_2$ e de $(3.65)_4$, temos que $u' \in L^\infty(0,T;H)$ e $u'' \in L^2_{\text{loc}}(0,T;W')$. Logo, $u' \in C^0_s([0,T];H)$, que é o espaço das funções escarlamente contínuas de $[0,T]$ em H. Portanto, a aplicação $t \mapsto (u'(t), v)$ é contínua em $[0,T]$. Logo:

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta}\int_{t_0}^{t_0+\delta} (u'(t), v)\, dt = (u'(t_0), v). \tag{3.83}$$

Tomando-se o limite quando $\delta \to 0$ em (3.82) e considerando-se (3.83) deduzimos que:

$$-(\eta, v) + (u'(t_0), v) = 0, \quad \forall\, v \in \widetilde{H}_{m_0}. \tag{3.84}$$

Por continuidade (3.84) é verdadeira $\forall\, v \in \widetilde{H} \hookrightarrow H$. Logo:

$$(\eta, v) = (u'(t_0), v), \quad \forall\, v \in H. \tag{3.85}$$

Portanto:

$$\eta = u'(t_0) \quad \text{em} \quad H. \tag{3.86}$$

O que foi feito em t_0 pode ser feito em qualquer t de $[0,T]$ e mesmo em T. É suficiente definir θ como se segue:

$$\theta(t) = \left| \begin{array}{lll} 0 & ; & 0 \le t \le T-\delta \\ \\ \dfrac{t}{\delta} + \dfrac{\delta - T}{\delta} & ; & T-\delta \le t \le T \end{array} \right. \tag{3.87}$$

Portanto, conclui-se que a estimativa (3.61) vale em $[0,T]$, qualquer que seja $0 < t < \infty$, ou equivalentemente por (3.75) que:

$$E(u(t)) \leq K'(1+t)^{-\frac{1}{\beta'}}, \quad \forall\, t \geq 0. \tag{3.88}$$

CAPÍTULO IV

UM EXEMPLO

Consideremos o operador não linear A: $W_0^{1,2q}(\Omega) \rightarrow W^{-1,\frac{2q}{2q-1}}(\Omega)$, $2q > 2$, definido por:

$$(4.1) \qquad Au = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{2q-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

Os espaços $W_0^{1,2q}(\Omega)$ e $W^{-1,\frac{2q}{2q-1}}(\Omega)$ serão denotados, respectivamente, por W e W'.

No que se segue provaremos que o operador não linear A satisfaz as hipóteses $(H3) - (H7)$ enunciadas no Capítulo II.

Afirmativa 1. O operador A satisfaz a hipótese $(H3)$, isto é, $\langle Au, u\rangle_{W'\times W} = ||u||^{2q}_{W_0^{1,2q}(\Omega)}$. Com efeito, de (4.1), obtemos:

$$\langle Au, u\rangle_{W'\times W} = \left\langle \sum_{i=1}^{n} -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{2q-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right), u\right\rangle_{W'\times W} = \sum_{i=1}^{n}\left\langle\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{2q-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right\rangle_{W'\times W},$$

ou equivalentemente:

$$(4.2) \qquad \langle Au, u\rangle_{W'\times W} = \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{2q-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{2q} dx =$$

$$= ||u||^{2q}_{W_0^{1,2q}(\Omega)}.$$

Notemos que nosso caso o p da hipótese (H3) é $2q$, onde $2q > 2$.

Afirmativa 2. O operador A satisfaz a hipótese $(H7)$, isto é, A leva conjuntos limitados de $W_0^{1,2q}(\Omega)$ em conjuntos limitados de $W^{-1,q'}(\Omega)$, $\frac{1}{q'} + \frac{1}{2q} = 1$.

De fato, de (4.1) obtemos também que

$$(4.3) \qquad \langle Au, v\rangle_{W'\times W} = \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{2q-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx$$

Provaremos a seguir que $\left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{2p-2}\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^{q'}(\Omega)$, $\dfrac{1}{q'}+\dfrac{1}{2q}=1$. Seja $u \in W_0^{1,2q}(\Omega)$, então:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^{2q}(\Omega). \tag{4.4}$$

Logo, de (4.4) resulta,

$$\left\|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{2q-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^{q'}(\Omega)}^{q'} = \int_\Omega \left[\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{2q-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\right]^{q'} dx = \tag{4.5}$$

$$= \int_\Omega \left[\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{2q-1}\right]^{\frac{2q}{2q-1}} dx = \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{2q} dx < \infty.$$

De (4.3) e de (4.5) resulta pela desigualdade de Hölder que:

$$|\langle Au, v\rangle_{W'\times W}| \leq \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\,\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{2q-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| dx \leq \tag{4.6}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\left(\left\|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{2q-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^{q'}(\Omega)}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^{2q}(\Omega)}\right)$$

Da desigualdade de Hölder podemos reescrever a desigualdade (4.6) na forma:

$$|\langle Au, v\rangle|_{W'\times W} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\left\|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{2q-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^{q'}(\Omega)}^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^{2q}(\Omega)}^{2q}\right)^{\frac{1}{2q}}, \tag{4.7}$$

ou equivalentemente,

$$|\langle Au, v\rangle_{W'\times W}| \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^{2q}(\Omega)}^{2q}\right)^{\frac{1}{q'}} ||v||_{W_0^{1,2q}(\Omega)}, \tag{4.8}$$

ou equivalentemente,

$$|\langle Au, v\rangle_{W'\times W}| \leq ||u||_{W_0^{1,2q}(\Omega)}^{\frac{2q}{q'}} ||v||_{W_0^{1,2q}(\Omega)} = ||u||_{W_0^{1,2q}(\Omega)}^{2q-1} ||v||_{W_0^{1,2q}(\Omega)} \tag{4.9}$$

De (4.9) conclui-se que:

$$||Au||_{W'} = \sup_{\substack{v\in W\\ ||v||_W\neq 0}} \frac{|\langle Au, v\rangle_{W'\times W}|}{||v||_W} \leq ||u||_{W_0^{1,2q}(\Omega)}^{2q-1}. \tag{4.10}$$

Seja $u \in W_0^{1,2q}(\Omega)$ tal que $||u||_{W_0^{1,2q}(\Omega)} \leq K$, onde K é uma constante positiva. Logo, de (4.10), resulta que:

$$||Au||_{W'} \leq K^{2q-1}; \tag{4.11}$$

Afirmativa 3. O operador A satisfaz a hipótese $(H5)$, isto é, $A(u)$ é fortemente homogêneo de grau $2q-1$ no sentido de Dubinskii.

De fato, de (4.1), obtemos que

(4.12)
$$\left\langle \frac{A(u+hw)-Au}{h}, v \right\rangle_{W'\times W} = \frac{1}{h}\Bigg[\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial(u+hw)}{\partial x_i}\right|^{2q-2} \frac{\partial(u+hw)}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx- \\ -\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{2q-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx\Bigg].$$

Seja $\theta \colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ a função definida por:

$$\theta(h) = \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial(u+hw)}{\partial x_i}\right|^{2q-2} \frac{\partial(u+hw)}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx. \tag{4.13}$$

De (4.12) e (4.13) resulta que:

$$\left\langle \frac{A(u+hw)-Au}{h}, v \right\rangle_{W'\times W} = \frac{\theta(h)-\theta(0)}{h}\cdot \tag{4.14}$$

Por outro lado,, sejam ϕ e ψ, funções definidas por:

$$\phi(z) = |z|^{2q-2} \tag{4.15}$$

e

$$\psi(h) = \frac{\partial(u+hw)}{\partial x_i}\cdot \tag{4.16}$$

De (4.14) e (4.15) podemos reescrever (4.13) na forma:

$$\theta(h) = \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \phi(\psi(h))\psi(h)\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx. \tag{4.17}$$

Logo, de (4.17), obtemos:

$$\theta'(h) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left[\phi'(\psi(h))\psi'(h)\psi(h)\, \frac{\partial v}{\partial x_i} + \phi(\psi(h))\psi'(h)\, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right] dx. \tag{4.18}$$

Mas, de (4.15) e (4.16) resulta que:

$$\phi'(z) = (2q-2)|z|^{2q-3}\, \frac{z}{|z|} = (2q-2)|z|^{2q-4}\, z \tag{4.19}$$

e

$$\psi'(h) = \frac{\partial w}{\partial x_i} \cdot \tag{4.20}$$

Portanto, obtemos que:

$$\phi'(\psi(h))\psi'(h) = (2q-2) \left| \frac{\partial(u+hw)}{\partial x_i} \right|^{2q-4} \frac{\partial(u+hw)}{\partial x_i}\, \frac{\partial w}{\partial x_i} \cdot \tag{4.21}$$

Substituindo-se (4.20) e (4.21) em (4.18), deduz-se que:

$$\theta'(h) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left[(2q-2) \left| \frac{\partial(u+hw)}{\partial x_i} \right|^{2q-4} \frac{\partial(u+hw)}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial(u+hw)}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \right.$$
$$\left. + \left| \frac{\partial(u+hw)}{\partial x_i} \right|^{2q-2} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right] dx,$$

ou equivalentemente,

$$\theta'(h) = \sum_{i=1}^{n} (2q-1) \int_{\Omega} \left| \frac{\partial(u+hw)}{\partial x_i} \right|^{2q-2} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx. \tag{4.22}$$

Portanto, de (4.22), deduz-se que:

$$\theta'(0) = \sum_{i=1}^{n} (2q-1) \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{2q-2} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx. \tag{4.23}$$

Por outro lado, tomando-se o limite em (4.14) quando $h \to 0$, obtemos de (4.23) que:

$$\lim_{h \to 0} \left\langle \frac{A(u+hw) - Au}{h}, v \right\rangle = \lim_{h \to 0} \frac{\theta(h) - \theta(0)}{h} = \theta'(0) = \tag{4.24}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (2q-1) \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{2q-2} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx.$$

De (4.24) concluímos que:

$$A'(u)w = -\sum_{i=1}^{n}(2q-1)\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{2q-2}\frac{\partial w}{\partial x_i}\right). \tag{4.25}$$

De (4.25), obtemos:

(4.26)

$$\begin{aligned}\langle A'(u)w,u\rangle_{W'\times W} &= \sum_{i=1}^{n}(2q-1)\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{2q-2}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx = \\ &= \langle A'(u)u,w\rangle_{W'\times W} = \sum_{i=1}^{n}(2q-1)\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{2q-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_i}\,dx = \\ &= (2q-1)\langle Au,w\rangle_{W'\times W}\end{aligned}$$

Por outro lado, segue que:

$$\begin{aligned}\left\|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{2q-2}\frac{\partial w}{\partial x_i}\right\|_{L^{q'}(\Omega)}^{q'} &= \int_\Omega\left|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{2q-2}\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|^{q'}dx = \\ &= \int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{\frac{(2q-2)2q}{2q-1}}\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|^{\frac{2q}{2q-1}}dx,\end{aligned}$$

ou equivalentemente:

$$\begin{aligned}\left\|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{2q-2}\frac{\partial w}{\partial x_i}\right\|_{L^{q'}(\Omega)}^{q'} &= \int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{\frac{2q-2}{2q-1}\cdot 2q}\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|^{\frac{1}{2q-1}\cdot 2q}dx \leq \\ &\leq \left[\int_\Omega\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{\frac{2q-2}{2q-1}\cdot 2q}\right)^{\frac{2q-1}{2q-2}}dx\right]^{\frac{2q-2}{2q-1}}\times \\ &\times\left[\int_\Omega\left(\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|^{\frac{2q}{2q-1}}\right)^{2q-1}dx\right]^{\frac{1}{2q-1}}.\end{aligned} \tag{4.27}$$

Logo:

(4.28)

$$\left\|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{2q-2}\frac{\partial w}{\partial w_i}\right\|_{L^{q'}(\Omega)}^{q'} \leq \left(\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{2q}dx\right)^{\frac{2q-2}{2q-1}}dx\left(\int_\Omega\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|^{2q}dx\right)^{\frac{1}{2q-1}}<\infty.$$

Segue, então, de (4.28) que:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{2q-2} \frac{\partial w}{\partial x_i} \in L^{q'}(\Omega) = L^{\frac{2q}{1p-1}}(\Omega). \tag{4.29}$$

De um teorema conhecido resulta de (4.25) e (4.29) que:

$$A'(u)w \in W^{-1,\frac{2q}{2q-1}}(\Omega), \tag{4.30}$$

Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned}
|\langle A'(u)w, v\rangle_{W'\times W}| &\leq \sum_{i=1}^{n}(2q-1)\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{2q-2} \left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right| \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| dx = \\
&= c\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{2q-2} \left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right| \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| dx \leq \\
&\leq c\left[\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{2q-2} \left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|\right)^{\frac{2q}{2q-1}} dx\right]^{\frac{2q-1}{2q}} \left[\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{2q} dx\right]^{\frac{1}{2q}} = \\
&= c||v||_{W_0^{1,2q}(\Omega)} \left[\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{\frac{(2q-2)2q}{2q-1}} \left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|^{\frac{2q}{2q-1}} dx\right]^{\frac{2q-1}{2q}}
\end{aligned}$$

A desigualdade acima pode ser reescrita na forma:

$$|A'(u)w, v\rangle_{W'\times W}| \leq c||v||_{W_0^{1,2q}(\Omega)} \left[\left(\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{2q} dx\right)^{\frac{2q-2}{2q-1}} \left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|^{2q} dx\right)^{\frac{1}{2q-1}}\right]^{\frac{2q-1}{2q}} =$$

$$= c||v||_{W_0^{1,2q}(\Omega)} \left(\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{2q} dx\right)^{\frac{2q-2}{2q}} \left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|^{2q} dx\right)^{\frac{1}{2q}} =$$

(4.31)

$$= c||v||_{W_0^{1,2q}(\Omega)}||u||^{2q-2}_{W_0^{1,2q}(\Omega)}\,||w||_{W_0^{1,2q}(\Omega)}$$

De (4.31) deduz-se que:

$$||A'(u)w||_{W'} = \sup_{\substack{v\in W\\ ||v||_W\neq 0}} \frac{\langle A'(u)w, v\rangle}{||v||_W} \leq c||u||^{2q-2}_{W_0^{1,2q}(\Omega)}\,||w||_{W_0^{1,2q}(\Omega)}\,. \tag{4.32}$$

Logo, de (4.32), obtemos que:

$$(4.33) \qquad ||A'(u)||_{\mathcal{L}(W_0^{1,2q}(\Omega),W^{-1,\frac{2q}{2q-1}}(\Omega))} = \sup_{||w||_{W_0^{1,2q}(\Omega)}=1} ||A'(u)w|| \leq c||u||^{2q-2}_{W_0^{1,2q}(\Omega)}.$$

Afirmativa 4. O operador A satisfaz a hipótese $(H4)$, isto é, A é Fréchet diferenciável em cada $u \in W = W_0^{1,2q}(\Omega)$.

De fato, seja $w_\nu \neq 0$, tal que $w_\nu \to 0$ em $W_0^{1,2q}(\Omega)$ e seja $v \in W_0^{1,2q}(\Omega)$. Consideremos M_ν uma função definida por:

$$M_\nu = \langle A(u + w_\nu), v\rangle_{W' \times W} - \langle Au, v\rangle_{W' \times W} - \langle A'(u)w_\nu, v\rangle_{W' \times W},$$

ou equivalentemente:

$$(4.34) \quad M_\nu = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial}{\partial x_i}(u(x) + w_\nu(x)) \right|^{2q-2} \frac{\partial}{\partial x_i}(u(x) + w_\nu(x)) \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx -$$
$$- \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right|^{2q-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx - \sum_{i=1}^{n} (2q-1) \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{2q-2} \frac{\partial w_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx.$$

Seja $f(z) = |z|^{2q-2} z$. Então:

$$(4.35) \qquad f'(z) = (2q-2)|z|^{2q-3} \frac{z}{|z|} \cdot z + |z|^{2q-2} = (2q-2)|z|^{2q-2} + |z|^{2q-2} =$$
$$= (2q-1)|z|^{2q-2}.$$

Temos que:

$$(4.36) \qquad f\left(\frac{\partial(u(x) + w_\nu(x))}{\partial x_i} \right) = \left| \frac{\partial(u(x) + w_\nu(x))}{\partial x_i} \right|^{2q-2} \frac{\partial(u(x) + w_\nu(x))}{\partial x_i}$$

e

$$(4.37) \qquad f\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) = \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right|^{2q-2} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}.$$

Pelo Teorema do Valor Médio existe $\xi_{i,\nu}(x)$ entre $\dfrac{\partial(u(x)+w_\nu(x))}{\partial x_i}$ e $\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_i}$ tal que:

$$\left|\frac{\partial(u(x)+w_\nu(x))}{\partial x_i}\right|^{2q-2}\frac{\partial(u(x)+w_\nu(x))}{\partial x_i}-\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^{2q-2}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}= \\ =(2q-1)|\xi_{i,\nu}(x)|^{2q-2}\frac{\partial w_\nu(x)}{\partial x_i}. \tag{4.38}$$

De (4.38) podemos reescrever a equação (4.34) na forma:

$$M_\nu=\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega(2q-1)\left[\left|\xi_{i,\nu}(x)\right|^{2q-2}-\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^{2q-2}\right]\frac{\partial w_\nu(x)}{\partial x_i}\,\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\,dx. \tag{4.39}$$

Logo, obtemos:

(4.40)

$$\begin{aligned}
|M_\nu| &\le (2q-1)\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left|\left|\xi_{i,\nu}(x)\right|^{2q-2}-\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^{2q-2}\right|\left|\frac{\partial w_\nu(x)}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\right|dx \le \\
&\le (2q-1)\left\{\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left[\left|\left|\xi_{i,\nu}(x)\right|^{2q-2}-\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^{2q-2}\right|\left|\frac{\partial w_\nu}{\partial x_i}(x)\right|\right]^{\frac{2q}{2q-1}}\right\}^{\frac{2q-1}{2q}}\cdot \\
&\quad\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right|^{2q}dx\right]^{\frac{1}{2q}} = \\
&= (2q-1)||v||_{W_0^{2,1p}(\Omega)}\left[\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left|\left|\xi_{i,\nu}(x)\right|^{2q-2}-\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^{2q-2}\right|^{\frac{2q}{2q-1}}\left|\frac{\partial w_\nu(x)}{\partial x_i}\right|^{\frac{2q}{2q-1}}dx\right]^{\frac{2q-1}{2q}} \le \\
&\le (2q-1)||v||_{W_0^{1,2q}(\Omega)}\left[\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left|\left|\xi_{i,\nu}(x)\right|^{2q-2}-\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^{2q-2}\right|^{\frac{2q}{2\cancel{q}-1}\cdot\frac{2\cancel{q}-1}{2q-2}}dx\right]^{\frac{2q-2}{2\cancel{q}-1}\cdot\frac{2\cancel{q}-1}{2q}}\cdot \\
&\quad\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left|\frac{\partial w_\nu}{\partial x_i}(x)\right|^{\frac{2q}{2\cancel{q}-1}2\cancel{q}-1}dx\right]^{\frac{2\cancel{q}-1}{2q}\cdot\frac{1}{2\cancel{q}-1}}
\end{aligned}$$

Portanto, de (2.40), segue que:

$$|M_\nu| \leq (2q-1)||v||_{W_0^{1,2q}(\Omega)}\,||w_\nu||_{W_0^{1,2q}(\Omega)}\cdot \tag{4.41}$$
$$\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left|\left|\xi_{i,\nu}(x)\right|^{2q-2}-\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|\right|^{\frac{2q}{2q-1}}dx\right]^{\frac{2q-2}{2q}}.$$

De (4.41) resulta que:

$$\|A(u+w_\nu)-Au-A'(u)w_\nu\|_{W^{-1,\frac{2q}{2q-1}}(\Omega)} \leq$$
$$\leq (2q-1)||w_\nu||_{W_0^{1,2q}(\Omega)}\left[\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left|\left|\xi_{i,\nu}(x)\right|^{2q-2}-\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|\right|^{\frac{2q}{2q-2}}dx\right]^{\frac{2q-2}{2q}}.$$

Como, por hipótese, $w_\nu \to 0$ em $W_0^{1,2q}(\Omega)$, então $\dfrac{\partial w_\nu}{\partial x_i} \to 0$ em $L^{2q}(\Omega)$. Logo, existe uma subsucessão de $\left(\dfrac{\partial w_\nu}{\partial x_i}\right)_{\nu\in\mathbb{N}}$, ainda denotada por $\left(\dfrac{\partial w_\nu}{\partial x_i}\right)_{\nu\in\mathbb{N}}$, e uma função $h \in L^{2q}(\Omega)$ tal que:

$$\frac{\partial w_\nu(x)}{\partial x_i} \to 0, \quad \text{quase sempre em} \quad \Omega \tag{4.42}$$

e

$$\left|\frac{\partial w_\nu(x)}{\partial x_i}\right| \leq |h(x)|, \quad \text{quase sempre em} \quad \Omega. \tag{4.43}$$

De (4.42) e do fato que $\xi_{i,\nu}(x)$ está entre $\dfrac{\partial(u(x)+\partial w_\nu(x))}{\partial x_i}$ e $\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_i}$ resulta que:

$$\left|\xi_{i,\nu}(x)\right|^{2q-2} \to \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^{2q-2} \quad \text{quase sempre em} \quad \Omega,\ \nu\to\infty. \tag{4.44}$$

Portanto:

$$\left|\left|\xi_{i,\nu}(x)\right|^{2q-2}-\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^{2q-2}\right| \to 0 \quad \text{quase sempre em} \quad \Omega,\ \nu\to\infty. \tag{4.45}$$

$$\left|\xi_{i,\nu}(x)\right| \leq \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial w_\nu(x)}{\partial x_i}\right| + \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|. \tag{4.46}$$

Logo, de (4.46), resulta que:

$$\left|\xi_{i,\nu}(x)\right|^{2q} \leq c(p) \left[\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^{2q} + \left|\frac{\partial w_\nu(x)}{\partial x_i}\right|^{2q}\right]. \tag{4.47}$$

Portanto, de (4.47), obtemos que:

$$\left[\left|\xi_{i,\nu}(x)\right|^{2q-2}\right]^{\frac{2q}{2q-2}} = \left|\xi_{i,\nu}(x)\right|^{2q} \leq c(p) \left[\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^{2q} + \left|\frac{\partial w_\nu(x)}{\partial x_i}\right|^{2q}\right]. \tag{4.48}$$

Por outro lado, como Ω é limitado temos que:

$$\left\|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right\|_{L^{2q}(\Omega)} < \infty \tag{4.49}$$

e

$$\left\|\frac{\partial w_\nu(x)}{\partial x_i}\right\|_{L^{2q}(\Omega)} \leq ||h||_{L^{2q}(\Omega)}\,. \tag{4.50}$$

De (4.48), (4.49) e (4.50), resulta que:

$$\left|\left|\xi_{i,\nu}(x)\right|^{2q-2} - \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^{2q-2}\right|^{\frac{2q}{2q-2}} \leq c(p)\left[\left|\xi_{i,\nu}(x)\right|^{2q} + \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^{2q}\right] \leq c(p)|g|, \tag{4.51}$$

onde $g \in L^1(\Omega)$.

De (4.45) e de (4.51) resulta do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que:

$$\lim_{\nu\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left[\left|\xi_{i,\nu}(x)\right|^{2q-2} - \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^{2q-2}\right]^{\frac{2q}{2q-2}} dx\right\}^{\frac{2q-2}{2q}} = 0. \tag{4.52}$$

Logo:

$$\lim_{||w_\nu||_{W_0^{1,2q}(\Omega)}\to 0} \frac{||A(u+w_\nu) - Au - A'(u)w_\nu||_{W^{-1,\frac{2q}{2q-1}}(\Omega)}}{||w_\nu||_{W_0^{1,2q}(\Omega)}} = 0. \tag{4.53}$$

Do exposto conclui-se que A é Fréchet diferenciável e $A'(u)$ é a derivada de Fréchet de A em u.

Afirmativa 5. O operador A satisfaz a hipótese $(H6)$, isto é, A é a derivada de Fréchet de um funcional convexo J definido sobre $W = W_0^{1,2q}(\Omega)$.

Com efeito, seja o funcional $J\colon W_0^{1,2q}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por:

$$J(u) = \frac{1}{2q} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{2q}, \quad \forall\, u W_0^{1,2q}(\Omega). \tag{4.54}$$

A partir da definição de J dada pela equação (4.54) e utilizando-se de forma análoga a demonstração anterior prova-se que J é Fréchet diferenciável e Au é a derivada de Fréchet de J.

BIBLIOGRAFIA

[1] Berkovits, J.; A Note on the Imbedding Theorem of Browder an Ton, Proceeding of the American mathematical Society, vol. **131**, No. 9, 2963–2966, 2003.

[2] Brezis, H.; Analyse Fonctionnelle (Théorie et Applications), Masson, Paris, 1993.

[3] Browder, F.E. and Bui An Ton; Nonlinear functional equations in Banach spaces and elliptic super-regularization, Math. Zeitschr., **105**, 177–198, 1968.

[4] Dubinskii, Yu. A.; Quasilinear elliptic and parabolic equations of arbitrary order, Russian Math. Surveys, **23**, 45–91, 1968.

[5] Greenberg, J.M., R.C. MacCamy and V.J. Mizel; On the existence, uniqueness, and stability of solutions of the equation $\sigma'(u_x)u_x + \lambda u_{xtx} = \rho_0 \, u_{tt}$, Journal of Mathematics and Mechanics, vol. **17**, 707–728, 1968.

[6] Greenberg, J.M.; On the existence, uniqueness, and stability of solutions of the equation $\rho_0 \, X_{tt} = E(X_x)X_{xx} + \lambda X_{xxt}$, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **25**, 575–591, 1969.

[7] Kesavan, S.; Topics in Functional Analysis and Applications, Wiley Eastern Limited, 1989.

[8] Lima, O.A.; Existência e Unicidade de soluções fracas de uma equação hiperbólica-parabólica não linear, Tese de Doutorado, IM-UFRJ, 1985.

[9] Lindestrauss, J. and Tzafriri L.; Classical Banach Spaces, vol. **I, II**, Springer-Verlag, 1977, 1979.

[10] Lions, J.L.; Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires, Dunod, Paris, 1969.

[11] Lions, J.L. and Magenes, E.; Problèmes aux limites non homogènes et applications, vol. 1, Dunod, Paris, 1968.

[12] Medeiros, L.A. and Milla Miranda M.; On a nonlinear wave equation with damping, Revista Matemática Univ. Complutense, Madrid, **3**, 213–231, 1990.

[13] Milla Miranda, M.; Análise Espectral em Espaços de Hilbert, Textos de Métodos Matemáticos, IM-UFRJ, 1994.

[14] Nakao, M.; Decay of solutions of some nonlinear evolution equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **60**, 542–549, 1977.

[15] Riesz, F. and Nagy Béla Sz.; Functional Analysis, Frederic Ungar Publishing Co., 1955.

[16] Selene, M.A.; Solution of an abstract nonlinear evolution problem with damping, 62º Seminário Brasileiro de Análise, vol. **31**, nº, 539–553, 2005.

[17] Temam, R.; Navier-Stokes Equations (Theorie and Numerical Analysis), North-Holland, 1979.

[18] Tsutsumi, M.; Some nonlinear evolution equations of second order, Proc. Japan Acad., **47**, 950–955, 1971.

[19] Yamada, Y.; On the decay of solutions for some nonlinear evolution equations of second order, vol. **73**, 69–98, 1979.