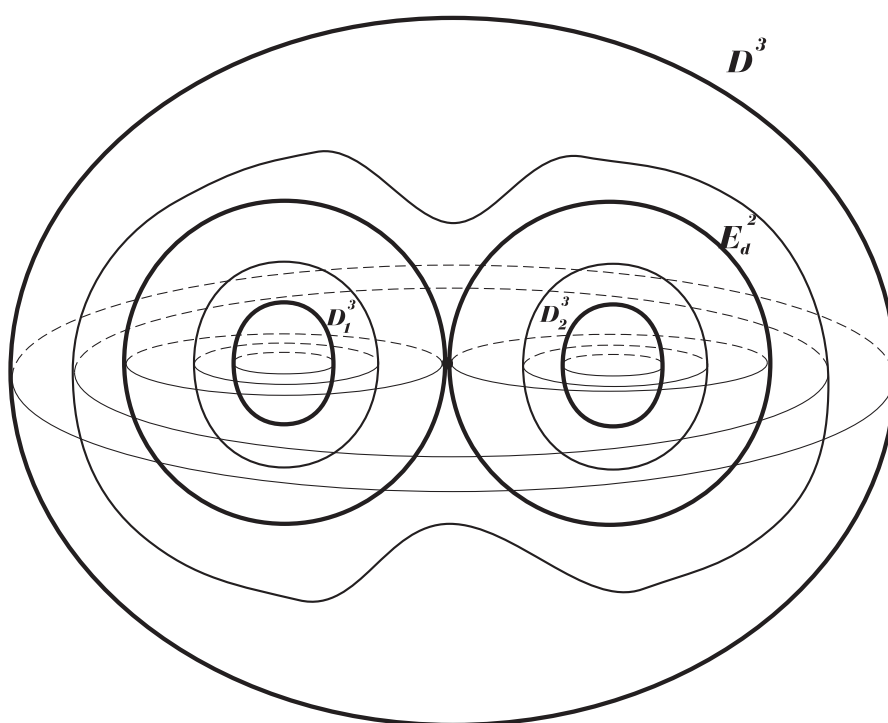


Sobre folheações do tipo Morse em 3-Variedades

Filipe Iório



Tese de Doutorado - Doutorado em Matemática

UFRJ

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

SOBRE FOLHEAÇÕES DO TIPO MORSE EM 3-VARIEDADES

Filipe Iório

UFRJ - Doutorado em Matemática

Bruno Scárdua
Doutor

Rio de Janeiro

2006

RESUMO

O objetivo deste trabalho é o estudo da topologia das 3-variedades diferenciáveis compactas que admitem uma folheação do tipo *Morse* compacta com singularidades. Começamos definindo conceitos como folheações diferenciáveis, funções de *Morse* e folheações do tipo *Morse*. Provamos uma extensão do seguinte resultado

“Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse em uma superfície M compacta, orientável e conexa. Suponha que f possui exatamente uma singularidade do tipo sela (e talvez outros pontos críticos de tipos 0 ou 2). Então M é difeomorfa à S^2 , D^2 , $S^1 \times I$ ou H_2 . Se $f|_{\partial M}$ é constante então $M \approx H_2$.”

onde H_2 denota o disco com dois buracos. Este teorema descreve a topologia de uma vizinhança, em torno de uma singularidade do tipo sela, em duas dimensões, que pode ser encontrada no capítulo 9 do livro intitulado “*Differential Topology*”, cujo autor é *Morris W. Hirsch* da editora *Springer*. Além disso, estudamos o caso em que a variedade possui mais singularidades do tipo selas do que centros, onde as separatrizes das selas são iguais. No último capítulo, damos algumas sugestões para trabalhos futuros.

ABSTRACT

The objective of this text is the study of topology of compact 3-manifolds differentiable that admitting a compact *Morse* foliation with singularities. We begin defining mathematical concepts concerning differentiable foliations, *Morse* functions and *Morse* foliations. We prove the extension for dimension 3 of following result:

“Let $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ be an admissible Morse function on a compact connected orientable surface. Suppose f has exactly one saddle (and perhaps other critical points of type 0 or 2). Then M is diffeomorphic to either S^2 , D^2 , $S^1 \times I$ or H_2 . If $f|_{\partial M}$ is constant then $M \approx H_2$.”

where H_2 denotes a disk with two holes. This theorem describe the topology of neighborhood, around of singularity, in two dimension, that can be found in chapter 9 of the book entitled “*Differential Topology*”, where the author is *Morris W. Hirsch* of *Springer* publisher. Futhermore, we study the case that manifold admitting more saddle singularities than center singularities, where separatrix of saddle are equals. The ultimate chapter contains sugestions for other futures works.

*Dedico esta monografia ao Deus do meu coração,
que sempre me guiou para o melhor caminho;
ao meu pai, Orlando, que partiu sem ver mais
esta etapa concluída; a minha mãe, Aída, que
é um exemplo de pessoa; ao meu irmão, Júnior,
que sempre foi e é o meu maior amigo; e ao meu amor,
Camila, que tive o prazer de reencontrar nesta vida.*

Agradeço, sinceramente, a todos estes professores que além de terem contribuído, singularmente, para minha formação matemática, dissiparam as trevas do doutorado, se fazendo sempre presentes nas horas mais difíceis.

Prof. Bruno César Azevedo Scárdua, pela sugestão dada como tema no trabalho, por ter sido a base de minha formação acadêmica, pelos sábios conselhos a mim transmitidos, pela orientação irretocável e por ser um grande amigo,

Prof^a. Maria José Pacífico, por ter me acolhido nos piores momentos, por nunca ter desistido de mim, como pessoa, e como matemático, por ser um exemplo de professora e amiga,

Prof. Jesus Mucino, por ter me honrado com a sua presença nesta Banca

Prof. Sebastião Firmo, por ter me honrado com a sua presença nesta Banca

Prof. Júlio César Canille Martins, por ter me honrado com a sua presença nesta Banca

A todos vocês meus respeitos e agradecimentos, pois fizeram de mim aquilo que sou e serei.

Conteúdo

1	Definições Básicas	1
1.1	Folheações em Variedades Diferenciáveis	1
1.2	Funções de Morse	4
1.3	Folheação de Morse	6
2	Classificação Local	8
3	Caso: Mais Selas do que Centros	17
4	Conclusão	21
	Bibliografia	22

Capítulo 1

Definições Básicas

Neste capítulo introduziremos os conceitos e notações básicas que utilizaremos em todo escopo deste trabalho. Estaremos definindo *Funções de Morse* e *Folheações*, assim como suas propriedades básicas que utilizaremos durante este trabalho.

1.1 Folheações em Variedades Diferenciáveis

Nesta seção introduziremos o conceito de folheação e provaremos diversos resultados fundamentais para o escopo deste trabalho.

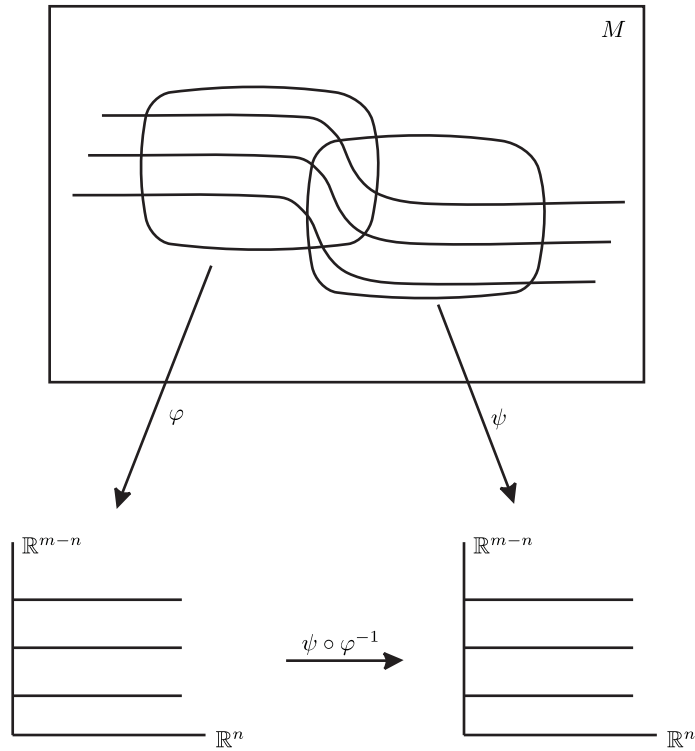
Definição 1. Seja M uma variedade de dimensão m .

Uma *folheação* de dimensão n de M , é um atlas máximo \mathcal{F} em M com as seguintes propriedades:

1. Se $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ então $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, onde U_1 e U_2 são discos abertos de \mathbb{R}^n e de \mathbb{R}^{m-n} respectivamente.
2. Se (U, φ) e $(V, \psi) \in \mathcal{F}$ são tais que $U \cap V \neq \emptyset$ então as mudanças de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ satisfaz a seguinte expressão $(\psi \circ \varphi^{-1})(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))$.

Dizemos também que M é *folheada* por \mathcal{F} ou ainda que \mathcal{F} é uma *estrutura folheada* de dimensão n sobre M .

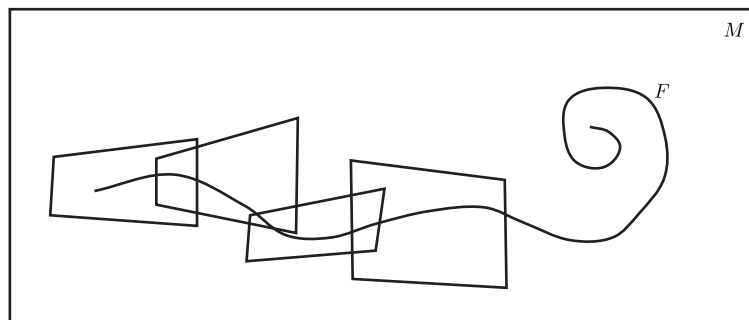
Chamaremos as cartas $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ de *cartas trivializadoras* de \mathcal{F} .



Definição 2. Dada \mathcal{F} uma folheação de dimensão n em uma variedade M de dimensão m , $0 < n < m$. Consideremos uma carta local (U, φ) de \mathcal{F} tal que $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$. Os conjuntos da forma $\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$, $c \in U_2$ são chamados de *placas* de U , ou ainda *placas* de \mathcal{F} . Fixado $c \in U_2$ a aplicação $f = \varphi^{-1}|_{U_1 \times \{c\}} : U_1 \times \{c\} \rightarrow U$ é um mergulho, portanto as placas são subvariedades conexas de dimensão n de M . Além disso, se α e β são placas de U então $\alpha = \beta$ ou $\alpha \cap \beta = \emptyset$.

Um *caminho de placas* de \mathcal{F} é uma seqüência $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de placas de \mathcal{F} tal que $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$, $\forall j = 1, \dots, k-1$. Como M é recoberta pelas placas de \mathcal{F} , definiremos em M a seguinte relação de equivalência:

“ $p \sim q$ se existe um caminho de placas $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ com $p \in \alpha_1$ e $q \in \alpha_k$.”



As classes de equivalência da relação \sim são chamadas de *folhas* de \mathcal{F} .

Proposição 1. *Toda folha de \mathcal{F} é um subconjunto de M conexo por caminhos.*

Prova: Seja F uma folha de \mathcal{F} .

Se $p, q \in F$ então $p \sim q$. Logo, existe um caminho de placas $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tal que $p \in \alpha_1$ e $q \in \alpha_k$.

Como cada placa α_i é conexa por caminhos em M , $\forall i = 1, \dots, k$ e $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$, $\forall j = 1, \dots, k-1$.

Logo, existe um caminho ligando p à q contínuo em F . ■

Definição 3. Seja M uma variedade diferenciável de dimensão m folheada por uma folheação \mathcal{F} de dimensão $n < m$. O espaço de folhas de \mathcal{F} , M/\mathcal{F} , é o quociente de M pela relação de equivalência R que identifica dois pontos de M se e só se eles estão na mesma folha de \mathcal{F} .

Observe que, em geral, a topologia quociente M/\mathcal{F} não é *Hausdorff*, e portanto difícil de ser estudada.

Definição 4. Seja $A \subset M$. O saturado de A por \mathcal{F} é por definição o conjunto $\mathcal{F}(A) = \{x \in M; xRy \text{ para algum } y \in A\}$. Ou de outra maneira, se $\pi : M \rightarrow M/\mathcal{F}$ é a projeção no quociente, temos $\mathcal{F}(A) = \pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{x \in A} F_x$, onde F_x denota a folha de \mathcal{F} que contém x .

Definição 5. Seja M uma variedade diferenciável de dimensão m folheada por uma folheação \mathcal{F} de dimensão $n < m$. Como cada folha de \mathcal{F} é uma variedade, podemos considerar o seu grupo fundamental, [3]. Dados um ponto p de F , folha de \mathcal{F} , um caminho fechado α em p contido em \mathcal{F} e uma seção transversal Σ a \mathcal{F} em p , podemos desenvolver caminhos α' s contido em outras folhas de \mathcal{F} , de modo que seu ponto inicial e final ainda estejam em Σ , e tal forma, que formem levantamentos para as folhas de \mathcal{F} do caminho α em F . É de se esperar, que não necessariamente, nessas outras folhas, o ponto inicial e final do caminho α , seja o mesmo. E com isso, podemos criar uma aplicação de Σ em Σ que leva “ponto inicial” em “ponto final”, deixando p fixo, para cada caminho fechado α não homotópico em F . O grupo dessas aplicações é chamado de *holonomia da folha F* . Não é difícil mostrar que a holonomia de uma folha F não depende do ponto p , assim como o grupo fundamental de uma variedade, [1].

Vejamos um exemplo de folheações.

Folheações definidas por submersões

Seja $f : M \rightarrow N$ uma submersão, onde M, N são variedades diferenciáveis de dimensão m, n respectivamente.

Pelo teorema da forma local das submersões, dados $p \in M$ e $q = f(p) \in N$ existem cartas locais (U, φ) em M , (V, ψ) em N tais que $p \in U$, $q \in V$, $\varphi(U) =$

$U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n$ e $\psi(V) = V_2 \supset U_2$, e tal que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : U_1 \times U_2$ coincide com a segunda projeção $(x, y) \mapsto y$.

Note que, as cartas locais de (U, φ) definem uma estrutura de variedade folheada, onde as folhas são as componentes conexas das superfícies de nível $f^{-1}(c)$, $c \in N$.

Definição 6. Seja M uma variedade diferencial. Uma *folheação com singularidades*, \mathcal{F} , em M , é uma folheação \mathcal{F} definida em toda $M \setminus \text{sing}(\mathcal{F})$, onde $\text{sing}(\mathcal{F}) \subset M$, $\text{sing}(\mathcal{F})$ é fechado e todos seus pontos são isolados.

Exemplo 1: Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 , onde M é uma variedade diferenciável de dimensão n compacta e conexa. Suponha que, f não seja constante. Note que, \mathcal{F} possui, pelo menos, duas singularidades, o máximo e o mínimo de f . Logo, f é uma submersão em $M \setminus \text{sing}(f)$, onde $\text{sing}(f) := \{p \in M; f'(p) \equiv 0\}$, e portanto podemos estudar a folheação \mathcal{F} definida por f^{-1} em $M \setminus \text{sing}(f)$. Primeiramente, observemos que todas folhas de \mathcal{F} são compactas, pois f é contínua e M é compacta. Além disso, a folheação \mathcal{F} tem codimensão 1, ou, dimensão $n - 1$. Como as folhas são compactas podemos através delas entender que tipo de variedade é M , e é justamente isso que vamos fazer no último capítulo para funções de *Morse*.

Antes de prosseguirmos vamos enunciar dois Teoremas sobre folheações muito importantes para este trabalho, e que utilizaremos fortemente no último capítulo.

Teorema 1. (*Estabilidade Local de Reeb*)

Sejam \mathcal{F} uma folheação de classe C^1 e codimensão n de uma variedade M e F uma folha compacta com grupo de holonomia finito. Existe uma vizinhança U de F , saturada por \mathcal{F} , na qual todas as folhas são compactas com grupo de holonomia finito.

Teorema 2. (*Estabilidade Global de Reeb*)

Sejam \mathcal{F} uma folheação transversalmente orientável de classe C^1 e codimensão 1 em M uma variedade compacta e conexa e F uma folha compacta com grupo fundamental finito. Então todas as folhas são difeomorfas a F .

A prova desses dois resultados podem ser encontradas em [1].

1.2 Funções de Morse

Nesta seção a palavra “diferenciável” denotará infinitamente diferenciável, i.e., as funções de classe C^∞ . O espaço tangente a uma variedade diferenciável M no ponto p será denotado por T_pM . Se $g : M \rightarrow N$ é uma aplicação diferenciável com $g(p) = q$, então induz uma aplicação linear nos espaços tangentes que sera denotada por $g'(p) : T_pM \rightarrow T_qN$.

Definição 7. Seja f uma função diferenciável real definida em uma variedade diferenciável M . Um ponto $p \in M$ é chamado de ponto crítico de f se induz uma aplicação $f'(p) : T_pM \rightarrow T_{f(p)}\mathbb{R}$ nula. Tomando um sistema de coordenadas (x_1, x_2, \dots, x_n) em uma vizinhança U de p temos

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0$. O número real $f(p)$ é chamado de valor crítico de f .

Denotaremos por M^a o conjunto dos pontos $x \in M$ tais que $f(x) \leq a$. Se a não é um valor crítico então, pelo Teorema da função implícita, M^a é uma variedade diferenciável com bordo. O bordo $f^{-1}(a)$ é uma subvariedade diferenciável de M .

Definição 8. Um ponto crítico p é dito não degenerado se a matriz $H(f)(p) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)$ é não singular, ou seja, com determinante não nulo. Claramente, ser não degenerado é um conceito que independe do sistema de coordenadas. Chamamos essa matriz de o Hessiano de f em p .

Utilizando o Teorema da Função Inversa obtemos o seguinte resultado:

Proposição 2. *Sejam M é variedade diferenciável compacta e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se todos os pontos críticos de f são não degenerados então só existe uma quantidade finita de pontos críticos de f .*

A demonstração do resultado acima é clara, uma vez que os pontos críticos serem não degenerados implica, pelo Teorema da Função Inversa, em serem isolados, e daí, como M é compacta, só podem existir em número finito.

OBS: Todas as funções f nas condições da proposição acima serão chamadas de *funções de Morse*.

Definição 9. O índice de f em p , ou índice de H em $T_p M$, será a dimensão máxima do subespaço de $T_p M$ em que H é negativa definida. Observe que, como H é uma matriz podemos encontrar os autovalores de H , a dimensão do autoespaço formado pelos autovetores associados a autovalores negativos, é o índice de f em p .

O Lema de Morse mostra que na vizinhança de qualquer ponto p , f pode ser completamente descrita em coordenadas locais, utilizando apenas o índice de f em p , o que caracteriza localmente qualquer função de Morse em uma vizinhança de um ponto crítico.

Lema 1. *(Lema de Morse)*

Seja p um ponto crítico não degenerado para f . Então existe um sistema de coordenadas locais (y_1, y_2, \dots, y_n) definidos em uma vizinhança U de p com $y_i(p) = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$ e tal que a identidade $f = f(p) - (y_1)^2 - (y_2)^2 - \dots - (y_\lambda)^2 + (y_{\lambda+1})^2 + (y_{\lambda+2})^2 + \dots + (y_n)^2$ vale em U , onde λ é o índice de f em p .

Definição 10. Dada $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse, dizemos que um ponto crítico p de f é uma singularidade do tipo centro se o índice de f em p é igual a 0 ou n , onde n é a dimensão de M . Caso contrário, dizemos que p é uma singularidade do tipo sela.

Observe que conhecemos a natureza de f em vizinhanças de suas singularidades, sendo centros ou selas.

Folheações definidas por funções de Morse

Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse, onde M é uma variedade compacta. Na seção anterior, vimos que f^{-1} define uma folheação de codimensão 1 em M , que denotaremos por \mathcal{F} . Como M é compacta sabemos que todas as folhas de \mathcal{F} são compactas. Observe que, dado p uma singularidade de f do tipo centro, tem-se que as folhas de \mathcal{F} em uma vizinhança de p , pelo Lema de Morse, são difeomórficas a esferas S^{n-1} , esferas de dimensão $n - 1$.

1.3 Folheação de Morse

Nas duas seções anteriores definimos folheação e função de Morse, nesta seção vamos agrupar esses conceitos e definir o cerne fundamental de nosso trabalho que é: *Folheação de Morse*.

Seja ω uma 1-forma integrável de classe \mathbf{C}^r , $r \geq 2$ em uma variedade M de dimensão $n \geq 2$. Pelo *Teorema de Frobenius*, [6], a distribuição $\text{Ker}(\omega) = \{(p, v) \in TM; \omega(p).v = 0\}$ define uma folheação \mathcal{F} de codimensão um e de classe \mathbf{C}^r em $M \setminus \text{sing}(\omega)$ onde $\text{sing}(\omega) = \{p \in M; \omega(p) = 0\}$.

Definição 11. Uma singularidade isolada $p \in \text{sing}(\omega)$ é do tipo *Morse* se ω pode ser escrita como $\omega = g df$, para algumas funções de classe \mathbf{C}^r , g, f , definidas em uma vizinhança V de p , onde $g \neq 0$ e f é uma forma quadrática não degenerada.

Equivalentemente, existe uma vizinhança V de p e uma função de classe \mathbf{C}^r , $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, com pontos críticos não degenerados em p , tais que $\mathcal{F}|_{V \setminus \{p\}}$ é dado pelos níveis de f em $V \setminus \{p\}$.

Neste caso, a *separatriz* de \mathcal{F} passando por p é dada pela $\mathbf{L} \cup \{p\}$, onde \mathbf{L} é a folha de \mathcal{F} tal que $p \in \bar{\mathbf{L}}$, equivalentemente $\mathbf{L} \cap (V \setminus \{p\}) \subset f^{-1}(p)$.

Uma singularidade do tipo *Morse* é chamada de *centro* se todos os autovalores de f tem o mesmo sinal, caso contrário, a chamamos de *sela*.

Uma singularidade do tipo *Morse*, $p \in \text{sing}(\omega)$, é um centro, se e somente se, todas as folhas de \mathcal{F} próximas de p são difeomórficas à $(n - 1)$ -esfera. De fato, localmente a 1-forma será uma função do somatório dos quadrados das coordenadas locais, e os níveis da função serão dados pela igualdade desses somatórios com constantes, o que caracteriza as esferas.

Definição 12. Uma folheação \mathcal{F} em M com singularidades isoladas será chamada de *orientável*, se existir uma 1-forma integrável ω em M , tal que $\text{sing}(\mathcal{F}) = \text{sing}(\omega)$ e a folheação definida fora de $\text{sing}(\mathcal{F})$ for dada pela restrição $\omega|_{M \setminus \text{sing}(\mathcal{F})}$.

A escolha de uma 1-forma, ω , será chamada de *orientação* de \mathcal{F} , e duas 1-formas distintas, ω e ω' , definirão a mesma orientação para \mathcal{F} , se $\omega' = h.\omega$, para alguma função real positiva h definida em M .

Definição 13. Uma folheação \mathcal{F} com singularidades de *Morse* tem *conexão de selas*, se existem duas selas $p \neq q \in \text{sing}(\mathcal{F})$ e uma folha \mathbf{L} de \mathcal{F} acumulando-se,

simultaneamente, em p e em q . Ou equivalentemente, se existe uma separatriz de \mathcal{F} contendo as duas singularidades distintas.

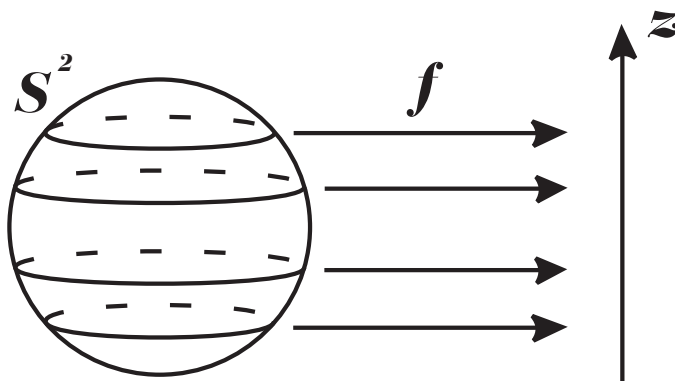
Dizemos que uma singularidade do tipo sela, $p \in \text{sing}(\mathcal{F})$, é *auto-conectada*, se existe uma folha L de \mathcal{F} que contém dois ramos locais distintos das separatrizes de \mathcal{F} em p .

Definição 14. Dizemos que uma folheação \mathcal{F} orientável, de codimensão um e de classe \mathbf{C}^r , $r \geq 2$, em uma variedade M , com conjunto singular $\text{sing}(\mathcal{F})$, é do *tipo Morse*, se as singularidades de \mathcal{F} são do tipo *Morse* e \mathcal{F} não tem conexão de selas, entretanto, auto-conexões são permitidas.

Uma folheação de *Morse*, \mathcal{F} , que possui todas as folhas fechadas fora de $\text{sing}(\mathcal{F})$, será chamada de *compacta*.

OBS: Observe que, todas as folheações definidas por funções de *Morse*, são folheações de *Morse* como definimos acima. Além disso, caso M seja compacta, as folheações são folheações compactas.

Exemplo Considere $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = z$ uma função de Morse. A folheação induzida por esta função f tem duas singularidades do tipo centro, $p_1 = (0, 0, 1)$ e $p_2 = (0, 0, -1)$, que são os pontos de máximo e mínimos de f , respectivamente, veja a figura abaixo.



Note que, no *exemplo 1*, vemos que as funções de *Morse* definem uma folheação do tipo *Morse*. Utilizando algumas condições sutis o inverso também é verdade, de fato temos:

Capítulo 2

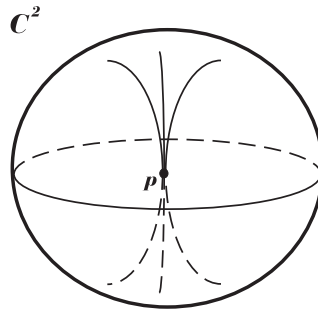
Classificação Local

O estudo de propriedades topológicas para variedades é muito amplo e abrangente, a muitas décadas, diversos matemáticos se concentraram em desenvolver resultados que, de alguma forma, contribuíssem para esse estudo. O nosso trabalho está diretamente relacionado com os trabalhos de Reeb [12], Kuiper [9] e Eells [2], que tratam das restrições geradas nas variedades diferenciáveis quando assumimos a existência de funções reais não degeneradas definidas nas mesmas. Através das propriedades destas funções, e de um aparato topológico, conseguiram classificar quais variedades que suportam um determinado tipo de aplicação.

Nosso objetivo principal é descrever a topologia das 3-variedades compactas (possivelmente com bordo) equipadas com uma folheação do tipo *Morse* compacta, \mathcal{F} , utilizando o número de centros $c(\mathcal{F})$ e o número de selas $s(\mathcal{F})$ do conjunto singular $sing(\mathcal{F})$. Sabemos que existe uma $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, função de *Morse*, de modo que \mathcal{F} é definida por f e $sing(\mathcal{F}) = sing(f)$. Logo, podemos utilizar, simultaneamente, as propriedades de folheações com as propriedades de funções de *Morse*.

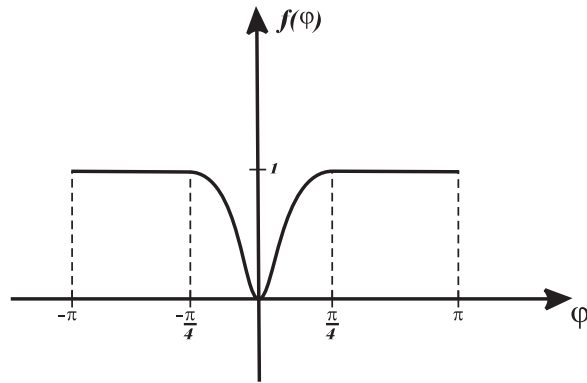
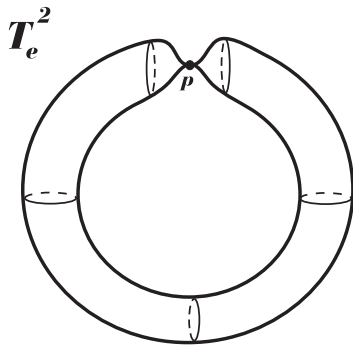
Neste caso, a separatriz de uma sela p de uma folheação do tipo *Morse* pode ser de três tipos diferentes: uma esfera bidimensional com os pólos identificados, C^2 , um toro bidimensional singular com um meridiano identificado, T_e^2 , e duas esferas bidimensionais unidas apenas por um ponto, E_d^2 . Para provarmos isso, procederemos de um modo similar ao estudo do caso de dimensão dois encontrado em [5], Capítulo 9, para funções de *Morse*. Note que, p é ponto crítico de índice 1. Seja $\epsilon > 0$ tal que p é o único ponto crítico em $G = f^{-1}([-\epsilon, \epsilon])$. Assuma que, G é conexo. Defina $C_- = f^{-1}(-\epsilon)$, $C_0 = f^{-1}(0)$ e $C_+ = f^{-1}(\epsilon)$. Então, C_+ e C_- são superfícies compactas sem bordo e $C_+ \cup C_- = \partial G$. Suponha agora, que G é orientável. Como G é conexo então para C_0 existem apenas três opções:

Opção 1: $C_0 = C^2$, onde $C^2 = u([0, 2\pi]^2)$, $u : [0, 2\pi]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $u(\theta, \varphi) = ((\cos(\theta) + 1)\sin(\varphi), \sin(\theta), (\cos(\theta) + 1)\cos(\varphi))$.

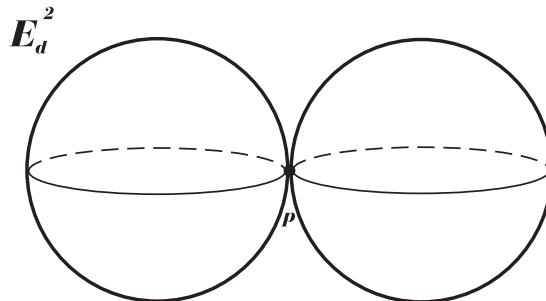


Opção 2: $C_0 = T_e^2$, onde $u : [0, 2\pi] \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $u(\theta, \varphi) = ((f(\varphi)\cos(\theta) + 2)\text{sen}(\varphi), \text{sen}(\theta), (f(\varphi)\text{sen}(\theta) + 2)\cos(\varphi))$ e

$$f(\varphi) = \begin{cases} 1 - e^{\frac{1}{(\varphi+\frac{\pi}{4})(\varphi-\frac{\pi}{4})} + \frac{16}{\pi^2}}, & \text{if } \varphi \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \\ 1, & \text{if } \varphi \in [-\pi, -\frac{\pi}{4}] \cup [\frac{\pi}{4}, \pi] \end{cases} .$$



Opção 3: $C_0 = E_d^2$, onde $u : [-\pi, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $u(\theta, \varphi) = (\theta, \text{sen}(\theta)\text{sen}(\varphi), \cos(\varphi))$.



Observe que, não existem outras opções para C_0 , visto que C_0 é uma superfície compacta singular, isto é, não regular em apenas um ponto. Além disso, a singularidade de Morse p , que pertence à C_0 , é uma sela, e portanto consegue definir um

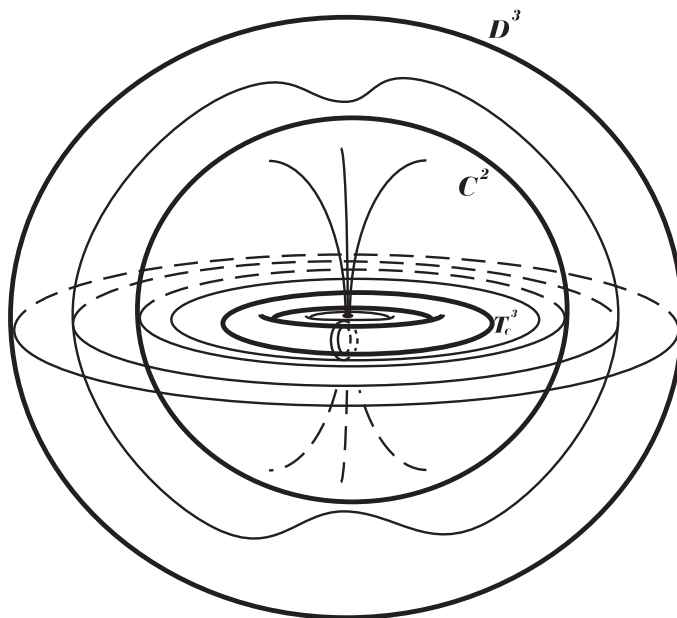
campo de linhas em $C_0 \setminus \{p\}$ não singular, ou, simplesmente um campo de linhas em C_0 com somente uma singularidade, p . Portanto, não podemos ter outras superfícies compactas singulares além das descritas acima.

Nos exemplos abaixo, ilustraremos algumas folheações do tipo *Morse* definidas em algumas variedade compactas com bordo em \mathbb{R}^3 .

Exemplo 1:

Consideremos N a variedade definida da seguinte forma: peguemos uma bola fechada em \mathbb{R}^3 , chamaremos de D^3 ; peguemos, agora, um toro cheio contido no interior de D^3 , chamaremos de T_c^3 ; e finalmente, definiremos $N := \overline{D^3} \setminus \overline{T_c^3}$, onde \overline{A} significa o menor conjunto fechado contendo A na topologia de \mathbb{R}^3 . Obviamente, N é uma bola em \mathbb{R}^3 menos um toro cheio.

Observemos que, podemos colocar uma cópia C^2 dentro do interior de N , de tal forma que, o interior de C^2 contenha T_c^3 e que nenhum meridiano de T_c^3 seja null-homotópico no interior de C^2 . Agora, vamos munir N de uma folheação \mathcal{F} de codimensão 1 formada apenas por 2-esferas, S^2 , e por toros $T^2 := S^1 \times S^1$, definida da seguinte forma: entre o bordo de D^3 e C^2 as folhas são esferas S^2 , dispostas de tal forma que o interior dessas esferas contém C^2 ; e, entre C^2 e o bordo de T_c^3 as folhas são toros T^2 , dispostas de forma que o interior desses toros contém o bordo de T_c^3 . Observe que, esta folheação \mathcal{F} é uma folheação do tipo *Morse* com apenas uma singularidade do tipo sela, cuja separatriz é C^2 . Chamaremos a variedade N de DT^3 .

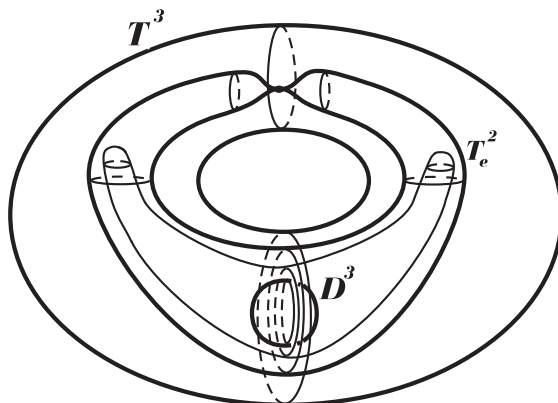


Exemplo 2:

Neste exemplo 2, vamos considerar N a variedade definida de modo inverso à do exemplo 1, ou seja, da seguinte forma: peguemos um toro cheio em \mathbb{R}^3 , chamaremos

de T_c^3 ; peguemos, agora, uma bola fechada contida no interior de T_c^3 , chamaremos de D^3 ; e finalmente, definiremos $N := \overline{T_c^3} \setminus \overline{D^3}$. Obviamente, N é um toro cheio em \mathbb{R}^3 menos uma bola. Note, também, que S^3 , esfera de dimensão 3, pode ser descrita como a união pelo bordo de dois toros cheios, identificando os meridianos de um toro com os paralelos do outro, e portanto o exemplo 1 e o exemplo 2 são a mesma figura vistas de perspectivas diferentes em S^3 .

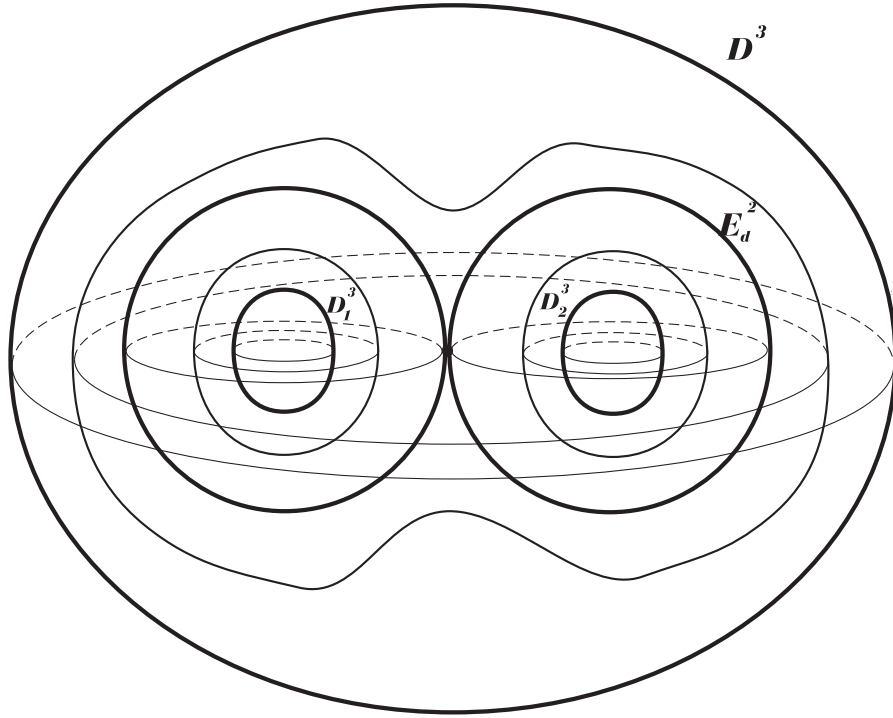
Observemos que, podemos colocar uma cópia T_e^2 dentro do interior de N , de tal forma que, o interior de T_e^2 contenha D^3 . Agora, vamos munir N de uma folheação \mathcal{F} de codimensão 1 formada apenas por 2-esferas, S^2 , e por toros $T^2 := S^1 \times S^1$, definida da seguinte forma: entre o bordo de T_c^3 e T_e^2 as folhas são toros T^2 , dispostas de tal forma que o interior desses toros contém T_e^2 ; e, entre T_e^2 e o bordo de D^3 as folhas são esferas S^2 , dispostas de forma que o interior dessas esferas contém o bordo de D^3 . Observe que, esta folheação \mathcal{F} é uma folheação do tipo *Morse* com apenas uma singularidade do tipo sela, cuja separatriz é T_e^2 . Chamaremos a variedade N de TD^3 .



Exemplo 3:

Consideremos N a variedade definida da seguinte forma: peguemos uma bola fechada em \mathbb{R}^3 , chamaremos de D^3 ; peguemos agora duas outras bolas fechadas disjuntas contidas no interior de D^3 , chamaremos de D_1^3 e D_2^3 ; e finalmente, definiremos $N := \overline{D^3} \setminus (\overline{D_1^3} \cup \overline{D_2^3})$. Obviamente, N é uma bola em \mathbb{R}^3 menos duas bolas, ou seja, uma bola com dois buracos.

Observemos que, podemos colocar uma cópia E_d^2 dentro do interior de N , de tal forma que, cada uma das bolas D_1^3 e D_2^3 estejam contidas em componentes conexas distintas do interior de E_d^2 , pois o interior de E_d^2 é desconexo. Agora, vamos munir N de uma folheação \mathcal{F} de codimensão 1 formada apenas por 2-esferas, S^2 , definida da seguinte forma: entre o bordo de D^3 e E_d^2 as folhas são esferas S^2 , dispostas de tal forma que o interior dessas esferas contém E_d^2 ; e, em cada uma das componentes do interior de E_d^2 as folhas são esferas S^2 contendo a bola que pertence a essa componente, ou seja, contendo ou D_1^3 ou D_2^3 . Observe que, esta folheação \mathcal{F} é uma folheação do tipo *Morse* com apenas uma singularidade do tipo sela, cuja separatriz é C^2 . Chamaremos a variedade N de DD^3 .



Os exemplos acima, são muito importantes, uma vez que eles formam todos os casos que podem ocorrer em uma vizinhança de uma singularidade p do tipo sela, como veremos no seguinte resultado:

Teorema 3. *Seja \mathcal{F} uma folheação do tipo Morse, compacta, em uma 3-variedade M^3 compacta. Suponhamos que, existe $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, função de Morse, tal que \mathcal{F} é definida por f e $\text{sing}(f) = \text{sing}(\mathcal{F})$. Seja N um subconjunto fechado de M saturado por \mathcal{F} que contenha uma vizinhança de p e tal que $N \cap \text{sing}(\mathcal{F}) = \{p\}$, onde p é uma singularidade do tipo sela de \mathcal{F} . Então, temos três possibilidades:*

- i) N é homeomorfo à DT^3 e \mathcal{F} é a folheação descrita no exemplo 1.*
- ii) N é homeomorfo à TD^3 e \mathcal{F} é a folheação descrita no exemplo 2.*
- iii) N é homeomorfo à DD^3 e \mathcal{F} é a folheação descrita no exemplo 3.*

O resultado acima é a versão em dimensão três do Teorema 3.4 do Capítulo 9 em [5] que decreve a topologia das superfícies que admitem uma função de Morse com somente uma singularidade do tipo sela. No nosso caso, estamos interessados nas folheações do tipo Morse compactas, que podem ser obtidas através dos níveis de qualquer função de Morse definida em uma variedade compacta.

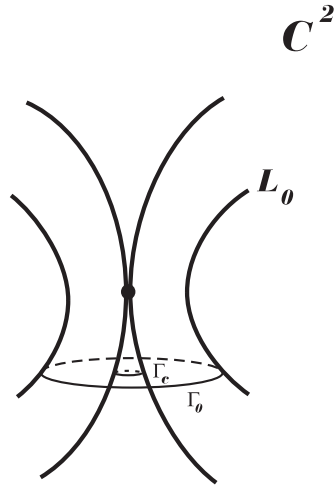
Prova do Teorema 3: Seja N como na hipótese. Sabemos que, existe $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse cujos níveis descrevem a folheação \mathcal{F} e cujo conjunto singular é idêntico ao de \mathcal{F} , $\text{sing}(f) = \text{sing}(\mathcal{F})$. Suponha que, $f(p) = 0$ e $N = f^{-1}([-\epsilon, \epsilon])$, para algum $\epsilon > 0$. Podemos assumir que, N é conexo. Portanto, $f^{-1}(0)$ é uma

separatriz de p . Como $f^{-1}(0)$ é compacta então $f^{-1}(0)$ é homeomorfa à C^2 , T_e^2 ou E_d^2 . Temos, então, três casos a considerar:

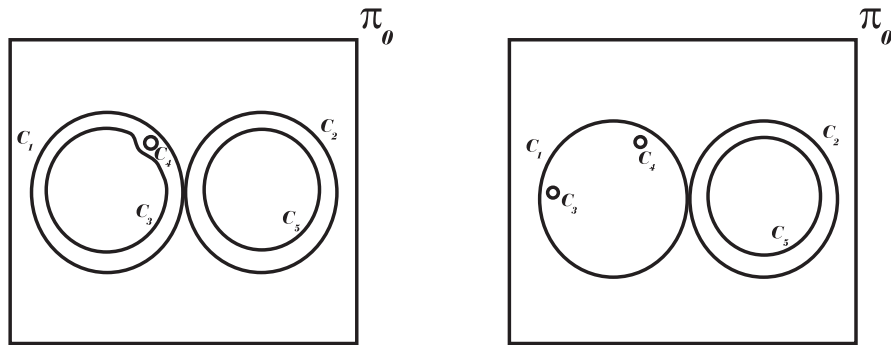
1^o Case: Suponha que, $f^{-1}(0) \cong C^2$.

Como $\text{cod}(f^{-1}(0)) = 1$ então o campo gradiente $\text{grad}(f)$ nos fornece o sentido de interior e exterior para cada $f^{-1}(p)$, $\forall p \in [-\epsilon, \epsilon]$. Podemos assumir que, N está mergulhada em \mathbb{R}^3 , pois $f^{-1}(0) \cong C^2$ e C^2 mergulha em \mathbb{R}^3 , portanto, podemos diminuir ϵ para próximo de 0. De fato, como $f^{-1}(0) \cong C^2$ é compacto, podemos utilizar uma quantidade finita de parametrizações de M e a função que mergulha C^2 em \mathbb{R}^3 . Através disso, podemos supor, sem perder de generalidade, que o conceito de interior e exterior fornecido, anteriormente, pelo $\text{grad}(f)$ coincide com o conceito natural de interior e exterior em \mathbb{R}^3 . Note que, $N \setminus f^{-1}(0)$ é desconexo e possui duas componentes conexas N_i e N_e , onde N_i denota o interior de N e N_e o exterior de N . Como todas as folhas são compactas, então a holonomia de qualquer folha é sempre finita, e como a folheação não possui singularidades, excetuando-se a singularidade p , então, usando o Teorema 1, $\mathcal{F}|_{N_i}$ (ou $\mathcal{F}|_{N_e}$) possui todos os níveis iguais, i.e., homeomorfos dois a dois. Logo, $\mathcal{F}|_{N_i}$ (ou $\mathcal{F}|_{N_e}$) possui todas as folhas homeomorfas à S^2 ou n -Toros, onde $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ e n está fixo em $\mathcal{F}|_{N_i}$ (ou $\mathcal{F}|_{N_e}$, respectivamente), [6]. Agora basta analisarmos quais são as únicas folhas que podemos ter folheando $\mathcal{F}|_{N_i}$ (ou $\mathcal{F}|_{N_e}$). Daqui para a frente toda as vezes que nos referirmos a folheação \mathcal{F} em N , vamos estar utilizando o fato de N estar mergulhada em \mathbb{R}^3 , para simplificarmos nossas idéias.

Suponha que, o interior de C^2 possua uma folheação com folhas homeomorfas à S^2 . Considere L_0 uma folhas de \mathcal{F} próxima de C^2 . Obviamente, $L_0 \cong S^2$, pois dentro de C^2 todas as folhas são iguais à S^2 , como visto acima. Observe que a interseção de $\{z = -\frac{1}{2}\}$ com C^2 são dois círculos, chamaremos de Γ_c o círculo nesta interseção que possui o menor raio. Note que, Γ_c tem homotopia não trivial em $C^2 \setminus \{p\}$. Portanto, se L_0 está próxima de C^2 podemos utilizar o campo gradiente, $\text{grad}(f)$, para “projetar”, através do fluxo dado pelo campo, Γ_c em uma curva fechada Γ_0 em L_0 . Logo, Γ_0 é bordo de um disco D^2 em L_0 , pois $L_0 \cong S^2$. Por outro lado, usando $\text{grad}(f)$ para projetar este disco em um disco dentro de $C^2 \setminus \{p\}$ com bordo L_c . Isto implica, que L_c possui homotopia trivial, e isto é uma contradição.



Suponha que, o interior de C^2 possua então somente folhas homeomorfas à 2-toros. Seja $L_0 \cong 2$ -toros uma folha próxima de C^2 . Como estamos em \mathbb{R}^3 , podemos sectionar $C^2 \cup L_0$ por planos $ax + by = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a^2 + b^2 \neq 0$. Para algum a e b , dentre todos os anteriores, existirá uma seção π_0 , fruto desta interseção, que conterá cinco círculos C_1, C_2, C_3, C_4 e C_5 , tais que $C_1 \cap C_2$ é somente um ponto; $C_1 \cup C_2 \subset C^2$; $C_3 \cup C_4 \cup C_5 \subset L_0$; $int(C_1) \cap int(C_2) = \emptyset$, $\overline{int(C_i)} \cap \overline{int(C_j)} = \emptyset$, $\forall i, j \in \{3, 4, 5\}$ e $i \neq j$; e, dois dos círculos entre C_3, C_4 e C_5 estão contidos em $int(C_1)$ ou $int(C_2)$. Podemos assumir, sem perda de generalidade que, C_3, C_4 estão contidos em C_1 e C_5 está contido em C_2 , ver figura abaixo. Como L_0 está próximo de C^2 então ou C_3 possui seu raio próximo ao raio de C_1 e C_4 possui seu raio próximo de zero, ou vice-versa, ou, ainda, ambos possuem seus raios próximos de zero; pois o interior de C_3 não contém C_4 e vice-versa.



Observe que, o campo gradiente é ortogonal a todas as folhas de \mathcal{F} , vide [5], em particular, é ortogonal à L_0 , e como já dito antes, está orientado para o interior das regiões. Como f é uma função de classe C^∞ então $grad(f)$ é de classe C^∞ em M . Portanto, se L_0 está próximo de C^2 então o $grad(f)$ avaluado nesses pontos terá imagens muito próximas, i.e., vetores próximos. Note que, como o gradiente está orientado apontando para o interior das regiões, e esse conceito, como já vimos,

coincide com o conceito natural de \mathbb{R}^3 , então pontos antípodas no círculo possuem vetores gradientes, $grad(f)$, distantes, contrários. Logo, como em qualquer caso temos círculos com raio próximo de zero temos pontos antípodas próximos, e isso contradiz o fato do vetor gradiente ser de classe C^∞ .

Obviamente que, o mesmo ocorrerá se as folhas forem n -toros com $n \geq 2$. Portanto, as folhas do interior de C^2 só podem ser 1-toros. Analogamente, podemos mostrar que o exterior de C^2 somente pode ter folhas esferas S^2 . Então, **i)** está provado.

2^o Caso: Suponha que, $f^{-1}(0) \cong T_e^2$.

Podemos, analogamente ao **1^o Caso**, usar as folhas próximas de T_e^2 em \mathbb{R}^3 para estender os conceitos usados no **1^o Caso**. Repetindo os argumentos feitos no **1^o Caso**, podemos seccionar T_e^2 pelo plano $\{z = 0\}$, afim de obter a curva chamada de “figura oito”. Seja L_0 uma folha próxima de T_e^2 , mas contida no interior de T_e^2 . Se seccionarmos L_0 por $\{z = 0\}$, obteremos uma única curva fechada $\Gamma_0 \cong S^1$. Portanto, $L_0 \cong S^2$.

Analogamente, dada L_0 uma folha próxima de T_e^2 , mas contida no exterior de T_e^2 , temos que, a região $\{z = 0\} \cap T_e^2$ pode ser aproximada por dois círculos, C_1, C_2 ; e fazendo a interseção $\{ax + by = 0\} \cap T_e^2$ onde $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$, vemos que os pontos de C_1, C_2 estão unidos por círculos S^1 . Portanto, $L_0 \cong T^2$. Então, **ii)** está provado.

3^o Caso: Suponha que, $f^{-1}(0) \cong E_d^2$.

Usando os mesmo argumentos dos dois casos anteriores, vamos concluir que todas as folhas de \mathcal{F} são homeomorfas à S^2 . Então, **iii)** está provado. ■

Usando este teorema obtemos os seguintes corolários:

Corolário 1. *Seja \mathcal{F} uma folheação do tipo Morse, compacta, em uma 3-variedade M^3 compacta. Suponha que, \mathcal{F} é tangente ao ∂M , \mathcal{F} possui somente uma singularidade do tipo sela p . Então M^3 é homeomorfa ou à DT^3 , TD^3 ou DD^3 e \mathcal{F} é descrita pelos exemplos 1, 2 ou 3, respectivamente, ou à uma variedade em \mathbb{R}^4 dada pela união de DD^3 com $S^2 \times [0, 1]$ coladas pelos bordos. Consequentemente, não existem variedades de dimensão três fechadas suportando uma folheação \mathcal{F} de Morse com somente uma singularidade do tipo sela.*

Prova do Corolário 1: Como M^3 só possui uma singularidade do tipo sela então podemos tomar $N = M^3$. Nos casos em que, tomando uma vizinhança menor N' da singularidade p temos $N' \cong DT^3$ ou $N' \cong TD^3$, então como o bordo de cada uma dessas variedades são superfícies distintas, S^2 e T^2 , é impossível, através de uma região sem singularidades, transformar esses bordos em outra superfície, ou colá-los de modo que não existissem em M . No caso em que $N' \cong DD^3$, temos duas opções: a primeira, é que M^3 mergulhe em \mathbb{R}^3 , e portanto teremos $M^3 = N \cong DD^3$; a segunda, é que como M^3 não mergulha em \mathbb{R}^3 , e N' possui três esferas S^2 como bordo, pois $N' \cong DD^3$, M^3 será então formada por N' unido pelo bordo com um cilindro esférico $S^2 \times [0, 1]$ (cuja folheação trivial não é singular) onde seu bordo, que é composto de duas esferas S^2 , é identificado com duas dentre as três esferas

do bordo de N' . Neste último caso, essa união se procede em \mathbb{R}^4 criando assim M uma variedade com bordo formado apenas por uma esfera S^2 . Em todos os casos, M possui bordo, e portanto não pode ser fechada. ■

Corolário 2. *Seja M^3 uma variedade compacta de dimensão três irredutível. Não existe uma folheação \mathcal{F} do tipo Morse compacta definida em M^3 com somente uma singularidade do tipo sela.*

Capítulo 3

Caso: Mais Selas do que Centros

Não estamos interessados somente em descrever o caso em que temos apenas uma singularidade do tipo sela na variedade de dimensão três, queremos entender a topologia da variedade quando acontece de possuímos mais singularidades do tipo sela que singularidades do tipo centro. Este caso é bem mais amplo, e o resultado abaixo nos fornece uma resposta completa para o caso em que as singularidades do tipo sela admitem separatrizes apenas do tipo E_d^2 .

Teorema 4. *Seja M uma 3-variedade compacta e conexa (possivelmente com bordo) e \mathcal{F} uma folheação do tipo Morse definida em M . Suponhamos que, existe $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, função de Morse, tal que \mathcal{F} é definida por f e $\text{sing}(f) = \text{sing}(\mathcal{F})$. Assuma que $s(\mathcal{F}) = c(\mathcal{F}) + k$ para algum $k \in \{1, 2, \dots\}$. Se todas as separatrizes das selas em \mathcal{F} são E_d^2 e M^3 mergulha em \mathbb{R}^3 então $\partial M \neq \emptyset$ e ∂M é formado por $k + 2$ esferas S^2 , ou seja, M é uma bola em \mathbb{R}^3 com $k + 1$ buracos.*

É importante notar que precisamos da hipótese de M mergulhar em \mathbb{R}^3 . Observemos que, ao retirar essa hipótese, vamos ter muitas opções para a variedade M , visto que não temos como determinar como as esferas se conectam. No Corolário 1, vimos que as esferas do possível bordo de M podem se conectar através de um cilindro esférico, $S^2 \times [0, 1]$, eliminando assim essas esferas do bordo, uma vez que elas, ao se conectarem, não fazem mais parte do bordo. Por exemplo, uma superfície com dois círculos, S^1 , no bordo pode ser transformada, em \mathbb{R}^3 , pela simples “colagem” desses círculos, por intermédio de um cilindro, $S^1 \times [0, 1]$, tornando-a assim uma superfície sem bordo. Dessa mesma forma, os possíveis $k + 1$ buracos, poderiam ou não existir, e até possivelmente, no caso em que k é ímpar, M poderia ter bordo vazio, ou seja, ser fechada.

Prova do Teorema 4: Iremos provar esse resultado utilizando a indução dupla em k e $c(\mathcal{F})$.

1^a **Base:** Suponha que, $c(\mathcal{F}) = 0$.

2^a **Base:** Suponha que, $k = 1$.

Então, $M^3 \cong DD^3 \cong D^3 \setminus (D_1^3 \dot{\cup} D_2^3)$, pelo **Corolário 1**.

2^a **Hipótese de Indução:** Se $k < l$ então $M^3 \cong D^3 \setminus D_1^3 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} D_{k+1}^3$.

2ª Passo: Suponha que, $k = l$.

Como M^3 mergulha em \mathbb{R}^3 e \mathcal{F} tem codimensão um então todas as folhas de \mathcal{F} tem dimensão dois e, por hipótese, são compactas, além disso podemos usar o conceito natural de interior e exterior que temos em \mathbb{R}^3 para as folhas \mathcal{F} , e, podemos supor, sem perda de generalidade, que o sentido de interior e exterior dado pelo vetor gradiente coincide com o sentido natural de \mathbb{R}^3 .

Seja p uma singularidade do tipo sela de \mathcal{F} . Note que, $\mathcal{F}_p \cong E_d^2$, e, portanto uma vizinhança de \mathcal{F}_p possui todas as folhas de \mathcal{F} homeomorfas a esferas S^2 , com exceção de \mathcal{F}_p . Como o $\text{sing}(\mathcal{F})$ é finito então podemos supor que o $\text{int}(\mathcal{F}_p)$ não contém singularidades de \mathcal{F} , i.e., $\text{int}(\mathcal{F}_p) \cap \text{sing}(\mathcal{F}) = \emptyset$. Seja L_e uma folha de \mathcal{F} próxima de \mathcal{F}_p tal que $L_e \subset \text{ext}(\mathcal{F}_p)$ e $\text{int}(L_e) \cap \text{sing}(\mathcal{F}) = \{p\}$.

Denote $M' = M \setminus \text{int}(L_e)$ e $\mathcal{F}' = \mathcal{F}|_{M'}$. Então $\text{sing}(\mathcal{F}') = l - 1$, $s(\mathcal{F}') = l - 1$ e $c(\mathcal{F}') = 0$. Portanto, $M' \cong D^3 \setminus (D_1^3 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} D_l^3)$, pois podemos utilizar a **2ª Hipótese de Indução**. Note que, $N := \text{int}(L_e)$ é uma três-variedade com uma folheação de Morse $\mathcal{F}'' := \mathcal{F}|_N$ com uma única singularidade, que é uma singularidade do tipo sela p , e a separatriz de p é E_d^2 , portanto, pelo **Corolário 1**, $N \cong D^3 \setminus (D_+^3 \dot{\cup} D_-^3)$. Então, $M \cong D^3 \setminus (D_1^3 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} D_{l-1}^3 \dot{\cup} D_+^3 \dot{\cup} D_-^3)$.

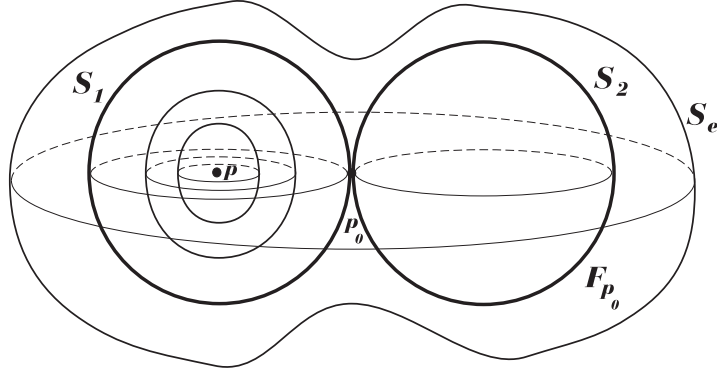
1ª Hipótese de Indução: Se $c(\mathcal{F}) \leq l - 1$ e $s(\mathcal{F}) = c(\mathcal{F}) + k$ então $M \cong D^3 \setminus (D_1^3 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} D_{k+1}^3)$.

1ª Passo: Suponha que, $c(\mathcal{F}) = l$.

Seja p uma singularidade do tipo centro de \mathcal{F} . Vamos definir $C_p(\mathcal{F})$ como sendo a componente conexa que contém p do subconjunto de M contendo p e todas as folhas do tipo esferas S^2 de \mathcal{F} . Note que, $\partial \overline{C_p(\mathcal{F})}$ é separatriz para alguma singularidade do tipo sela de p_0 de \mathcal{F} . Temos quatro casos para analisar:

1º Caso: $F_{p_0} \cong E_d^2$, i.e., F_{p_0} contém duas esferas S_1 e S_2 tais que $S_1 \cap S_2 = \{p_0\}$, $\text{int}(S_1) \cap \text{int}(S_2) = \emptyset$ e ou $\text{int}(S_1) \supset \{p\}$ ou $\text{int}(S_2) \supset \{p\}$.

Podemos assumir que, $\text{int}(S_1) \supset \{p\}$. Sabemos que, $\text{ext}(F_{p_0})$ é folheada por esferas S^2 próximas à F_{p_0} . Seja S_e uma folha de \mathcal{F} próxima de F_{p_0} tal que $(\text{int}(S_e) \cap \text{ext}(F_{p_0})) \cap \text{sing}(\mathcal{F}) = \emptyset$.



Considere $\mathcal{F}' = \mathcal{F}|_{\overline{\text{ext}(S_e)}}$. Podemos estender \mathcal{F}' identificado S_2 com S_e , e considere $\mathcal{F}'|_{\text{int}(S_e)} = \mathcal{F}|_{S_2}$, pois $S_2 \cong S_e$. Portanto, \mathcal{F}' está definido em M , $c(\mathcal{F}') = c(\mathcal{F}) - 1$ e $c(\mathcal{F}') + k = s(\mathcal{F}')$. Logo, $M \cong D^3 \setminus (D_1^3 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} D_{k+1}^3)$, pela **1ª Hipótese de Indução**.

2º Caso: $F_{p_0} = E_d^2$, i.e., F_{p_0} contém duas esferas S_1 e S_2 tais que $S_1 \cap S_2 = \{p_0\}$, ou $\text{int}(S_1) \supset \text{int}(S_2)$ e $\text{int}(S_1) \setminus \overline{\text{int}(S_2)} \supset \{p\}$ ou $\text{int}(S_2) \supset \text{int}(S_1)$ e $\text{int}(S_2) \setminus \overline{\text{int}(S_1)} \supset \{p\}$.

Podemos assumir que $\text{int}(S_1) \supset \text{int}(S_2)$ e $\text{int}(S_1) \setminus \overline{\text{int}(S_2)} \supset \{p\}$. Sabemos que, $\text{ext}(F_{p_0})$ é folheado por esferas S^2 próximas de F_{p_0} . Seja S_e uma folha de \mathcal{F} próxima à F_{p_0} tal que $(\text{int}(S_e) \cap \text{ext}(F_{p_0})) \cap \text{sing}(\mathcal{F}) = \emptyset$.

Considere $\mathcal{F}' = \mathcal{F}|_{\overline{\text{ext}(S_e)}}$. Podemos estender \mathcal{F}' identificado S_2 com S_e , e considere $\mathcal{F}'|_{\text{int}(S_e)} = \mathcal{F}|_{S_2}$, pois $S_2 \cong S_e$. Logo, \mathcal{F}' está definido em M , $c(\mathcal{F}') = c(\mathcal{F}) - 1$ e $c(\mathcal{F}') + k = s(\mathcal{F}')$. Portanto, $M \cong D^3 \setminus (D_1^3 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} D_{k+1}^3)$, pela **1ª Hipótese de Indução**.

3º Caso: $F_{p_0} = E_d^2$, i.e., F_{p_0} contém duas esferas S_1 e S_2 tais que $S_1 \cap S_2 = \{p_0\}$, ou $\text{int}(S_1) \supset \text{int}(S_2)$ e $\text{int}(S_2) \supset \{p\}$ ou $\text{int}(S_2) \supset \text{int}(S_1)$ e $\text{int}(S_1) \supset \{p\}$.

Analogamente ao **2º Caso**.

4º Caso: $F_{p_0} = E_d^2$, i.e., F_{p_0} contém duas esferas S_1 e S_2 tais que $S_1 \cap S_2 = \{p_0\}$ e $\text{ext}(F_{p_0}) \supset \{p\}$.

Sabemos que, próximo à S_1 e S_2 , as folhas de \mathcal{F} são esferas S^2 . Seja S_{i_1} e S_{i_2} folhas de \mathcal{F} próximas de S_1 e S_2 , respectivamente, tais que $\{[\text{int}(S_1) \cap \text{ext}(S_{i_1})] \cup [\text{int}(S_2) \cap \text{ext}(S_{i_2})]\} \cap \text{sing}(\mathcal{F}) = \emptyset$.

Considere M' a variedade resultante pela “colagem” do $\overline{\text{int}(S_{i_1})}$ e $\overline{\text{int}(S_{i_2})}$ pelo bordo, S_{i_1} e S_{i_2} . Note que, M' mergulha em S^3 . Considere em M' a folheação \mathcal{F}' definida por $\mathcal{F}' = \mathcal{F}|_{\overline{\text{int}(S_{i_1}) \cup \text{int}(S_{i_2})}}$. Como $s(\mathcal{F}) > c(\mathcal{F})$ então $s(\mathcal{F}'|_{\overline{\text{int}(S_{i_1})}}) > c(\mathcal{F}'|_{\overline{\text{int}(S_{i_1})}})$ ou $s(\mathcal{F}'|_{\overline{\text{int}(S_{i_2})}}) > c(\mathcal{F}'|_{\overline{\text{int}(S_{i_2})}})$. Portanto, $\overline{\text{int}(S_{i_1})}$ ou $\overline{\text{int}(S_{i_2})}$ possui algum “buraco”, i.e., $\partial \overline{\text{int}(S_{i_1})}$ ou $\partial \overline{\text{int}(S_{i_2})}$ contém pelo menos uma esfera S_{i_1} ou S_{i_2} , respectivamente. Então, M' mergulha em S^3 mas M' não é homeomorfa à S^3 . Logo, M' mergulha em \mathbb{R}^3 , pois $S^3 \setminus \{q\} \cong \mathbb{R}^3$, onde $q \in S^3$ qualquer ponto.

Note que, $c(\mathcal{F}') = l - 1$ e $c(\mathcal{F}') + k = s(\mathcal{F}')$. Portanto, $M' \cong D^3 \setminus (D_1^3 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} D_{k+1}^3)$, pela 1ª **Hipótese de Indução**. Então $M \cong M' \cong D^3 \setminus (D_1^3 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} D_{k+1}^3)$. ■

O teorema 4 mostra que o caso tri-dimensional é bem mais sutil que o caso de duas dimensões, de fato, uma das razões é que possuímos três opções para separatrizes de selas. A primeira extensão natural do caso de duas dimensões, é quando temos as separatrizes de sela do tipo E_d^2 , pois esta é a “figural oito” natural em três dimensões. Sendo assim, começamos o capítulo fazendo este resultado.

Capítulo 4

Conclusão

Neste trabalho exploramos a topologia das variedades tri-dimensionais compactas e conexas que possuem uma folheação de *Morse* compacta com mais singularidades do tipo sela que centros. Fizemos apenas alguns casos, pois vimos a sutileza deste tema. Como sugestão para trabalhos futuros podemos acrescentar algumas perguntas:

1. Podemos no teorema 4 retirar a hipótese de M mergulhar em \mathbb{R}^3 ?
2. No teorema 4 o que aconteceria se as separatrizes fossem todas T_e^2 ou C^2 ? E se podessem ser dos três tipos? Ainda assim pode ou não M ser mergulhada em \mathbb{R}^3 ?
3. O que poderíamos ter em dimensões maiores que três? Quais seriam as selas para dimensões maiores que três?
4. O que ainda se mantém se a folheação não tiver folhas compactas?

Essas e muitas outras perguntas servem como caminho, para podermos estender este trabalho. O caso de dimensão maior que três é bastante complexo, pois em todo texto utilizamos fortemente o fato de que sabemos quais são as variedades de dimensão dois compactas, isso já não ocorre com as variedades de dimensão três compactas, que serão as suas folhas no caso de dimensão quatro.

Bibliografia

- [1] César Camacho and A. Lins Neto: *Teoria Geométrica das Folheações Projeto Euclides*, IMPA, CNPq, 1979.
- [2] J. Eells, N. H. Kuiper; *Manifolds which are like projective planes*, Pub. mat. I.H.É.S., tome 14 (1962), p. 5-46.
- [3] Elon Lages Lima: *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento* 11o. Col. Bras. de Matemática, IMPA, 1977.
- [4] J. Milnor; *Morse Theory*. Annals of Mathematics Studies, Number 51, Princeton, N. J., 1963.
- [5] M. Hirsch; *Differential Topology*, Springer, Berlin 1976.
- [6] C. Godbillon; *Feuilletages: Études Géométriques*, Birkhäuser, Berlin 1991.
- [7] R.C. Gunning, H. Rossi; *Analytic Functions of Several Complex Variables*; Prentice Hall; Englewood Cliffs; N.J. 1965.
- [8] E. Ghys; *Topologie de feuilles génériques*, Annals of Math. **141** (1995), 387-422.
- [9] N. H. Kuiper; *A continuous function with two critical points* ; Bull. A.M.S, **67** (1961), 281-285.
- [10] I. Pan, M. Sebastiani; *Sur les équations différentielles algébriques admettant des solutions avec une singularité essentielle.*; Annales de L' Institut Fourier. Grenoble-France: , v.51, p.1621 - 1633, 2001.
- [11] J.F. Plante; *On the existence of exceptional minimal sets in foliations of codimension one*; J.D. Eqs. 15, 178-194 (1974).
- [12] G. Reeb; *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées* , Act. sci. ind., **1183**, (1952), 91-154.
- [13] B. Scárdua, *Holomorphic foliations transverse to fibrations on hyperbolic manifolds*; Complex variables: Theory and Applications, v.46, p.219 - 240, 2001.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)