**UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM**
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE**
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

# SUBGRUPOS NORMAIS FINITAMENTE GERADOS EM GRUPOS LIMITES

**ELAINNE LADISLAU FERREIRA PEREIRA**

**MANAUS**
**2009**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM**
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE**
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**ELAINNE LADISLAU FERREIRA PEREIRA**

# SUBGRUPOS NORMAIS FINITAMENTE GERADOS EM GRUPOS LIMITES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito final para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Álgebra.

**Orientadora: Prof$^{\underline{a}}$ Dr$^{\underline{a}}$ Sheila Campos Chagas**

**MANAUS**
**2009**

ELAINNE LADISLAU FERREIRA PEREIRA

SUBGRUPOS NORMAIS FINITAMENTE GERADOS EM GRUPOS LIMITES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito final para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Álgebra.

Manaus, 30 de abril de 2009.

BANCA EXAMINADORA

.................................................................
Prof$^{\underline{a}}$ Dr$^{\underline{a}}$ Sheila Campos Chagas, Orientadora
Universidade Federal do Amazonas (UFAM)

.................................................................
Prof$^{\underline{o}}$ Dr$^{\underline{o}}$ Pavel Zalesskii,
Universidade Federal Brasília (UNB)

.................................................................
Prof$^{\underline{a}}$ Dr$^{\underline{a}}$ Ticianne Proença Bueno,
Universidade Federal Goiás (UFG).

# AGRADECIMENTOS

A Deus por me conceder plenas faculdades mentais e saúde.

À minha família que desejou sucesso em meus estudos.

Ao meu cônjuge por me dá uma bênção que é a Fernanda, minha filha, a qual caminhou juntamente comigo.

Ao amigo Cleonor o qual abriu horizontes neste âmbito

À Sheila Campos Chagas pela paciente orientação, aos professores do mestrado pela experiência transmitida durante o curso.

Aos amigos de estudo pelo apoio (principalmente quando no meu período de gestação) e excelente convivência.

É impossível expressar adequadamente toda a minha gratidão às inúmeras pessoas de onde obtive estímulo e assistência.

# RESUMO

## Subgrupos Normais finitamente gerados em Grupos Limites

A caracterização de Sela sobre os grupos limites como subgrupos finitamente gerados de grupos torres $\omega$-residualmente livres foi feito através do resultado descrito a seguir:
Considerando um espaço topológico $X$ como obtido pela colagem de uma superfície $\Sigma$ sobre um espaço $Y$. Se existe $\varphi : X \to Y$ um retrato de $X$ sobre $Y$, enviando um subespaço $Y'$ de $Y$ tal que $\pi_1(Y')$ é não abeliano, então o resultado de Sela garante que $\pi_1(X)$ é um grupo limite.
Com esta caracterização provaremos a:
**Proposição:** Seja $\Gamma$ um grupo limite não abeliano e seja $N \neq \{1\}$ um subgrupo normal. Se $N$ é finitamente gerado, então $\Gamma/N$ é finito.
A qual descreve uma larga classe de grupos que tem a propriedade que cada um de seus subgrupos normais finitamente gerados não-triviais é de índice finito.
O objetivo central desse trabalho é demonstrar um resultado que estabelece uma contribuição acerca da estrutura dos subgrupos de grupos limites, à saber, um subgrupo finitamente gerado não trivial de um grupo limite tem índice finito em seu normalizador ou seu normalizador é abeliano.

# ABSTRACT

## Subgroups normals finitely generated in Limit Groups

The Sela's caracterization about group limits to able be subgroups finitely generated of groups $\omega$-residually free towers were done through the result report under: Considere the topology space $X$

# Sumário

# Lista de Figuras

# Introdução

Os grupos limites surgem de modo natural na teoria geometrica dos grupos, e são uma ferramenta fundamental pois estes grupos foram caracterizados em diferentes maneiras no estudo dos grupos livres finitamente gerados não abelianos. Destacamos neste sentido que Zlil Sela [21] e [22], provou um famoso problema proposto por Alfred Tarski que pergunta que grupos finitamente gerados tem a mesma teoria elementar que os grupos livres, e estes grupos ele denominou grupos limites. A teoria elementar de um grupo $G$ é o conjunto de todas as sentenças de primeira ordem que são verdadeiras em $G$.

Também destacam-se as caracterizações obtidas por Olga Kharlampovich e Alexei Myasnikov em [12] e Sela em [21], mostrando que os grupos limites podem ser obtidos recursivamente dos grupos livres, dos grupos de surperfície e dos grupos abelianos livres através de uma sequência finita de produtos livres com amalgamação sobre $\mathbb{Z}$, e estes artigos também fornecem uma solução para o problema de Tarski citado acima. Mais precisamente, a primeira caracterização de grupos limites é devida a Kharlamvich-Myasnikov, eles provaram que um grupo finitamente gerado é um grupo limite se, e somente se, este grupo pode ser obtido de um grupo livre por uma sequência de extensões livres de centralizador. Enquanto que a caracterização de Sela não requer passagem ao subgrupo, a saber, grupos limites são precisamente o que Sela definiu como grupos torres totalmente residualmente livre (veja [22]). Além dos importantes trabalhos citados acima, existe uma vasta literatura sobre o tema.

O objetivo desse trabalho é demonstrar em detalhes um resultado obtido por Martin R. Bridson and James Howie em [2], que estabelece uma contribuição acerca da estrutura dos subgrupos de grupos limites, que afirma o seguinte

**Teorema 1**: Se $\Gamma$ é um grupo limite e $H \subset \Gamma$ é um subgrupo não trivial, finitamente gerado, então $H$ tem índice finito em seu normalizadores, ou normalizador de $H$ em $\Gamma$ é abeliano.

O Terema 1 e o Teorema 2 dados em [2], podem ser aplicados para o estudos de produtos subdiretos de grupos limites, e isto é o conteúdo da última parte deste trabalho.

No Capítulo 1, apresentaremos os conceitos fundamentais sobre apresentação de grupos, teoria combinatória dos grupos e o Teorema de estrutura da Teoria de Bass-Serre sobre grupo agindo sobre grafos. No Capítulo 2, veremos conceitos e propriedades dos grupos limites entre outros, demonstraremos a Proposição 3.1.1 que será de suma importância para demonstrar o Teorema 1. Finalmente, no capítulo 3, apresentaremos alguns resultados sobre Normalizadores e logo após a demonstração do principal teorema desse trabalho e aplicaremos no estudo de produtos subdiretos de grupos limites.

# Capítulo 1

# Preliminares e Generalidades

## 1.1 Apresentação de Grupos

Na teoria combinatória dos grupos, os objetos de estudo são grupos descritos por geradores e relações definidoras (isto é, todo grupo é dado por uma apresentação e construções naturais) que são feitas a partir de grupos conhecidos e isto será o objeto de estudo nesta seção.

**Definição 1.1.1.** *Seja $G$ um grupo. Um sistema $\mathcal{X}$ de elementos de $G$ é chamado sistema gerador de $G$ ou um sistema de geradores de $G$ se o menor subgrupo de $G$ contendo $\mathcal{X}$ é igual a $G$, isto é, todo elemento de $G$ é expresso como um produto dos elementos de $\mathcal{X}$ e seus inversos. O número mínimo de elementos necessários para gerar o grupo $G$ é, às vezes, chamado de posto de $G$ e é denotado por $d(G)$.*

**Definição 1.1.2.** *Seja $\mathcal{X}$ um sistema gerador para $G$ e seja $\hat{\mathcal{X}}$ um sistema de letras tais que existe uma bijeção $\hat{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$. Uma palavra (sobre $\hat{\mathcal{X}}$) é uma expressão formal*

$$W \equiv W(\hat{\mathcal{X}}) \equiv X_1^{\varepsilon_1} X_2^{\varepsilon_2} ... X_k^{\varepsilon_k} \equiv \prod_{j=1}^{k} X_j^{\varepsilon_j}$$

*onde $X_1, ..., X_k \in X, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_k \in \{1, -1\}$. O número $k$ é o comprimento $|W|$ da palavra $W$. A palavra $W(\hat{\mathcal{X}})$ representa ou define o elemento $g \in G$ se $g = W(\mathcal{X}) = \prod_{j=1}^{k} x_j^{\varepsilon_j}$. Agora definiremos uma relação entre as palavras $V$ e $W$. Se $V(\hat{\mathcal{X}})$ é outra palavra, que representa $h \in G$, então o produto $W(\hat{\mathcal{X}})V(\hat{\mathcal{X}})$ de palavras $W(\hat{\mathcal{X}})$ e $V(\hat{\mathcal{X}})$ é a palavra obtida escrevendo-se $W(\hat{\mathcal{X}})$ e em seguida $V(\hat{\mathcal{X}})$ (é a justaposição de $W(\hat{\mathcal{X}})$ e $V(\hat{\mathcal{X}})$). Claramente o produto$W(\hat{\mathcal{X}})V(\hat{\mathcal{X}})$ de palavras representa o produto $gh$ dos elementos $g, h \in G$. A palavra inversa de $W(\hat{\mathcal{X}})$ é a palavra $W(\hat{\mathcal{X}})^{-1} \equiv X_k^{-\varepsilon_k} ... X_2^{-\varepsilon_2} X_1^{\varepsilon_1}$; é claro que esta palavra representa o elemento inverso $g^{-1}$ de $g \in G$. Introduziremos a palavra vazia ou trivial que consiste da ausência de letra e será denotada por 1; o comprimento da palavra vazia é zero e define o elemento neutro de $G$.*

**Definição 1.1.3.** *(i) Duas palavras $V$ e $W$ são chamadas livremente equivalentes, e denotaremos $V \equiv W$, se uma pode ser transformada na outra através da inserção ou deletação de termos do tipo $X^{\varepsilon} X^{-\varepsilon}, X \in \hat{\mathcal{X}}, \varepsilon = \pm 1$.*

*(ii)* *Uma palavra $R(\hat{\mathcal{X}}) = X_1^{\varepsilon_1} \cdot ... \cdot X_k^{\varepsilon_k}$ é chamada um relator (relativo a $\mathcal{X}$ e $G$) se $x_1^{\varepsilon_1} \cdot ... \cdot x_k^{\varepsilon_k} = 1$ em $G$.*

*(iii)* *Um sistema $\mathcal{R}$ de relatores é chamado um sistema de relatores definidores se todo relator pode ser obtido como uma consequência dos relatores em $\mathcal{R}$, isto é, se é livremente equivalente para a palavra*

$$L_1(\hat{\mathcal{X}})R_1(\hat{\mathcal{X}})^{\eta_1}L_1(\hat{\mathcal{X}})^{-1} \cdot ... \cdot L_k(\hat{\mathcal{X}})R_k(\hat{\mathcal{X}})^{\eta_k}L_k(\hat{\mathcal{X}})^{-1},$$

*onde $R_j(\hat{\mathcal{X}}) \in \mathcal{R}$, $\eta_j \in \{1, -1\}$ e $L_j(\hat{\mathcal{X}})$ são palavras e $j = 1, ..., k$.*

Um relator trivial é livremente equivalente a palavra vazia. Como podemos observar, a noção de relator depente do grupo $G$ e do sistema de geradores.
Dado um sistema gerador $\mathcal{X}$ no grupo $G$ e $\mathcal{R}$ um sistema correspondente de relações definidoras, então $\langle \mathcal{X} | \mathcal{R} \rangle$ é chamado uma *apresentação* do grupo $G$ e indicaremos isto escrevendo $G = \langle (x_j)_{j \in J | (R_k)_{k \in K}} \rangle$ ou $G = \langle S_1, ..., S_n | R_1, ..., R_q \rangle$ ou $G = \langle s_1, ..., s_n | - \rangle$, onde a última forma indica que o conjunto de relatores é vazio. Um grupo $G$ é chamado *finitamente gerado* se ele tem um sistema finito de geradores e *finitamente apresentado* se ele tem uma apresentação com um número finito de geradores e relações definidoras.

Sejam $G$ um grupo com apresentação $\langle \mathcal{X} | \mathcal{R} \rangle$ e $\psi : G \to H$ uma função do grupo $G$ em um grupo $H$ arbitrário. O teorema de Von Dick garante que a aplicação $\psi$ pode ser extendida a um homomorfismo de $G$ para $H$ como vemos a seguir

**Teorema 1.1.1** (Teorema de Dick)**.** *Seja $\langle \mathcal{X} | \mathcal{R} \rangle$ uma apresentação do grupo $G$. Sejam $H$ um grupo e $\psi : \mathcal{X} \to H$ uma função. Se $R(\psi(\mathcal{X})) = 1$ em $H$ então existe um único homomorfismo $\Psi : G \to H$ com $\Psi(x) = \psi(X)$ onde $X \in \mathcal{X}$.*

*Demonstração.* Para algum $g \in G$ existe uma palavra $W(\mathcal{X}) = X_1^{\varepsilon_1} ... X_k^{\varepsilon_k}$ tal que $g = x_1^{\varepsilon_1} \cdot ... \cdot x_k^{\varepsilon_k}$. Define $\psi(g) = \psi(X_1)^{\varepsilon_1} \cdot ... \cdot \psi(X_k)^{\varepsilon_k} = W(\psi(\mathcal{X}))$. Visto que $R(\psi(\mathcal{X})) = 1$, segue que $\Psi$ está bem definida e um homomorfismo. A unicidade segue do fato que $G$ é gerado por $\mathcal{X}$. $\square$

**Exemplo 1.1.1.** *Considere o grupo $G = \langle a, b | ababa = 1 \rangle$ e o cíclico infinito $\mathbb{Z} \cong \langle x \rangle$ com gerador $x$. Seja $\psi : G \to \mathbb{Z}$ tal que $\psi(a) = x^{-2}$ e $\psi(b) = x^3$. Vejamos que $\psi$ extende-se a um homomorfismo $\psi(ababa) = x^{-2}x^3x^{-2}x^3x^{-2} = x^{6-6} = x^0 = 1$ em $\mathbb{Z}$, então pelo Teorema de Von Dick $\psi$ extende-se a um homomorfismo.*
*Seja $\varphi(x) = ab$ a função de $\mathbb{Z}$ em $G$, sendo $\mathbb{Z}$ um grupo livre sobre $\{x\}$ temos que $\varphi$ extende-se a um único homomorfismo $\bar{\varphi} : \mathbb{Z} \to G$. Além disso,*

$$(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) = \psi(ab) = x^{-2}x^3 = x$$

$$(\varphi \circ \psi)(a) = (ab)^{-2} = a \tag{1.1}$$

$$(\varphi \circ \psi)(b) = (ab)^3 = b \tag{1.2}$$

*e as igualdades em 1.1 e 1.2 seguem do fato que $ababa = 1$ (isto é, $(ab)^3 = ababab = b$ e $a = (ab)^{-2}ababa$).*
*E portanto, as aplicações são multiplicativamente inversas e $\psi$ é um isomorfismo e $G$ é isomorfo ao grupo cíclico infinito.* $\square$

**Exemplo 1.1.2.** *Uma família de grupos interessantes tem a seguinte apresentação* $B(m,n) = \langle a,t|t^{-1}a^m t = a^n\rangle$ *são chamados grupos de Baumslag-Solitar.*
*Considere* $G = B(1,3) = \langle a,t|t^{-1}at = a^3\rangle$*. Defina a função dada por:* $\psi(a) = a^3$ *e* $\psi(t) = t$ *Vejamos se esta definição extende-se a um homomorfismo de* $G$ *em* $G$*. De fato,* $\psi(t^{-1}at) = \psi(t)^{-1}\psi(a)\psi(t) = t^{-1}a^3t = (t^{-1}at)^3 = (a^3)^3 = \psi(a^3)$*, então pelo Teorema de Von Dyck* $\psi$ *extende-se a um homomorfismo de* $G$ *em* $G$*, que denotaremos por* $\psi$ *mesmo. Como* $a^3, t$ *gera* $G$*, pois* $a = ta^3t^{-1}$ *e uma consequência da relação de* $G$ *e* $t, a^3$ *pertencem a imagem de* $\psi$*. Definiremos a função* $\varphi$ *dada por* $\varphi(a) = tat^{-1}$ *e* $\varphi(t) = t$*. É fácil ver que* $\varphi$ *também extende-se a um homomorfismo de* $G$ *em* $G$*. Do mesmo modo que* $\psi$ *e* $\varphi$ *são multuamente inversas. Portanto elas são ambas automorfismos de* $G$*.* □

Um grupo pode ter uma quantidade infinita de apresentações distintas e então uma questão que surge é saber interpretar as diferentes apresentações de um mesmo grupo $G$. Uma outra questão é que cada para $\hat{X}, R$ existe um grupo que é dado pela apresentação $\langle \hat{X}, \mathcal{R}\rangle$ na

**Proposição 1.1.1.** *Para uma apresentação arbitrária expressada* $\langle \hat{\mathcal{X}}|R\rangle$*, existe um grupo apresentado por* $\langle \hat{\mathcal{X}}|R\rangle$*.*

*Demonstração.* Considere o conjunto $\mathcal{W}$ de todas as palavras com letras de $\hat{\mathcal{X}}$, incluindo a palavra vazia. Na definição 1.1.2 temos explanado produtos e inversos de palavras. Duas palavras $W(\hat{\mathcal{X}}), W'(\hat{\mathcal{X}})$ são chamadas *equivalentes* se $W'(\hat{\mathcal{X}})W(\hat{\mathcal{X}})^{-1}$ é uma consequência de $\mathcal{R}$. Isto define uma relação de equivalência: a luz da definição da apresentação de um grupo livre $F$ de posto $n$, tem a apresentação sem relações definidoras, isto é, $F = \langle x_1, ..., x_n|-\rangle$, e as classes de equivalência com multiplicação definida pela justaposição de representantes fornecem o grupo desejado. □

**Proposição 1.1.2** (Grupos Livres)**.** *a) Seja* $F$ *é um grupo livre com base* $\mathcal{X}$*,* $G$ *um grupo arbitrário e* $\varphi : \mathcal{X} \to G$ *uma função arbitrária então existe um único homomorfismo determinado* $\phi : F \to G$ *com* $\phi(x) = \varphi(X)$ *para* $X \in \mathcal{X}$*.*

*b) Todo grupo é uma imagem homomórfica de um grupo livre. Mais precisamente: Para* $G = \langle \mathcal{X}|\mathcal{R}\rangle$ *tomamos* $F = \langle \mathcal{X}|-\rangle$ *e definimos um homomorfismo* $F \to G$ *por mandar os elementos de* $F$ *representado por* $X \in \mathcal{X}$ *para os elementos de* $G$ *representados por* $X$*. Este é um epimorfismo o qual seu núcleo consiste de elementos de* $F$ *representados por relatores de* $G$*.*

Podemos fazer alterações sem que o grupo obtido deixe de ser isomorfo ao grupo original, tais operações são conhecidas como Transformação de Tietze

**Definição 1.1.4** (Transformações de Tietze:)**.** *[Tietze 1908]. Dado* $G = \langle \mathcal{X}|\mathcal{R}\rangle$*.*

*(T1) Seja* $\mathcal{U}$ *um sistema de símbolos disjuntos de* $\mathcal{X}$ *e* $\{W_U(\mathcal{X}); U \in \mathcal{U}\}$ *um sistema de palavras sobre* $\mathcal{X}$*, onde* $W_U(\mathcal{X})$ *é uma palavra no sistema* $\mathcal{X}$ *associada a cada símbolo* $U \in \mathcal{U}$*. Definimos* $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \cup \mathcal{U}$ *e* $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cup (U \cdot (W_U(\mathcal{X})^{-1})_{U \in \mathcal{U}}$*. O processo* $\langle \mathcal{X}|\mathcal{R}\rangle \Rightarrow \langle \mathcal{X}'|\mathcal{R}'\rangle$ *é chamada adição de novos geradores* $U$ *com introdução de abreviações e o processo inverso* $T1^{-1}$ *é chamado deletação (ou remoção de abreviações) de geradores* $\mathcal{U}$*.*

*(T2) Seja $\mathcal{Q}$ um sistema de relatores os quais são consequências dos relatores definidores $\mathcal{R}$, possibilitando inclusive relações triviais. Definimos $\mathcal{X}' = \mathcal{X}$ e $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cup \mathcal{Q}$. Incluindo possivelmente o passo $\langle \mathcal{X}|\mathcal{R}\rangle \Rightarrow \langle \mathcal{X}'|\mathcal{R}'\rangle$ é chamado adição consequente e o processo inverso $T2^{-1}$ é deletação de relações redundantes.*

Se o conjunto $\mathcal{U}$ ou $\mathcal{Q}$ são finitos chamamos a transformação de Tietze finita. Veja mais detalhes em [19]. É claro que uma apresentação que difere de outra apenas por uma transformação de Tietze definem grupos isomorfos, mas a recíproca é também verdadeira.

**Teorema 1.1.2** (Teorema de Tietze)**.** *Duas apresentações definem grupos isomorfos se e somente se, uma apresentação pode ser transformada na outra por uma sequência de transformações de Tietze. Se ambas apresentações são finitas então somente são necessárias uma quantidade finita de transformações de Tietze.*

*Demonstração.* A ideia da demonstração é simplemente utilizar o isomorfismo entre os grupos para expandir cada umas das apresentações, de modo a obter uma apresentação de um grupo que contenha as apresentações dos grupos isomorfos. Sendo a inversa de uma transformação uma transformação, e o resultado se segue. A prova completa se encontra em [16]. $\square$

**Definição 1.1.5** (Subgrupos Comutadores e Abelianização)**.** *Se $G$ é um grupo então o menor subgrupo normal de $G$ que contém os comutadores $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$, $x, y \in G$ é chamado o subgrupo comutador de $G$ e é denotado por $[G, G]$ ou $G'$. O grupo $G$ é abeliano se e somente se, $[G, G] = 1$. Se $\varphi : G \to H$ é um homomorfismo então, obviamente, $\varphi([G, G]) \leq [H, H]$ e, logo, um automorfismo de $G$ enviando $[G, G]$ nele mesmo. A imagem $\varphi(G)$ é abeliana se e somente se, $[G, G] \leq \ker\varphi$. A abelianização de $G$ é o grupo $G^{ab} = G/[G, G]$ e o homomorfismo canônico $\pi_{ab} : G \to G^{ab}$. A abelianização de um grupo satisfaz a propriedade universal: se $\varphi : G \to A$ é um homomorfismo de $G$ para um grupo abeliano $A$, então existe um único homomorfismo $\varphi^{ab} : G^{ab} \to A$ tal que $\varphi = \varphi^{ab} \circ \pi_{ab}$. Logo, se $G$ e $H$ são isomorfos então $G/[G, G]$ e $G/[H, H]$ também são isomorfos.*

Agora seja $G$ um grupo com apresentação

$$G = \langle x_1, x_2 ... | r_1 = 1, r_2 = 1, ...\rangle.$$

Então o grupo quociente $G/[G, G]$ de $G$ é chamado a abelianização de $G$ (É fácil ver que este grupo é o maior quociente abeliano de $G$). A apresentação deste grupo é obtido adicionando-se relações do tipo $x_i x_j = x_j x_i$, e então:

$$G/[G, G] \cong \langle x_1, x_2 ... | x_i x_j = x_j x_i,\ r_1 = 1, r_2 = 1, ...\rangle.$$

Se a apresentação dada é finita, podemos usar a apresentação dada acima para calcular a decomposição de $G/[G, G]$ como soma direta de grupos cíclicos, como no seguinte

**Teorema 1.1.3** (Classificação dos grupos abelianos finitamente gerados)**.** *Dado $A$ um grupo abeliano finitamente gerado.*

*a) Então $A$ tem apresentação do seguinte tipo:*

$$A = \langle a_1, ..., a_n | [a_i, a_j], 1 \leq i < j \leq n, a_1^{t_1}, ..., a_r^{t_r}\rangle \cong \mathbb{Z}_{t_1} \oplus \mathbb{Z}_{t_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{t_r} \oplus \mathbb{Z}^p$$

*onde, $1 < t_1 | t_2 | ... | t_r$. Os números $t_1, t_2, ..., t_r$ são chamados coeficientes de torção e $p$ é chamado número de Betti de $A$. O posto de $A$ é $d(A) = p + r = n$.*

*b) Dois grupos abelianos finitamente gerados são isomorfos se e somente se, eles tem o mesmo número de Betti e os coeficientes de torção são iguais.*

*c) Os elementos de ordem finita de $A$ formam um subgrupo de $A$ denotado por Tor$A$, que é gerado por $a_1, ..., a_r$ e logo $A =$ Tor $A \oplus \mathbb{Z}^p$. Qualquer subgrupo $H$ de $A$ tem posto no máximo igual ao posto de $A$, isto é, $d(H) \leq d(A)$.*

*Demonstração.* A demonstração deste teorema se encontra em [9]. □

**Observação 1.1.1.** *Se $G$ for abeliano o número mínimo de elementos para gerar o quociente de $G$ por um subgrupo torção é frequentemente chamado de posto de $G$; este número é também chamado o* número *de Betti de $G$.*

O teorema a seguir é o importante para classificação de grupos livres.

**Teorema 1.1.4.** *Seja $F_n$ um grupo livre de posto $n$, isto é, $F_n = \langle x_1, ..., x_n | - \rangle$. Então $F_n^{ab} \cong \mathbb{Z}^n$; logo $d(F_n) = n$ e grupos livres de diferentes postos não são isomorfos.*

□

## 1.2 Construções Livres

### 1.2.1 Produtos Livres

Nesta seção generalizaremos a noção de grupos livres para produtos livres.

**Definição 1.2.1.** *Seja $A_i$ uma família de grupos. Um produto livre dos $A_i$ é um grupo $P$ e uma família de homomorfismos $j_i : A_i \to P$ tais que, para todo grupo $G$ e toda família de homomorfismos $f_i : A_i \to G$, existe um único homomorfismo $\varphi : P \to G$ com $\varphi j_i = f_i$ para todo $i$.*

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "j_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & P \arrow[d, "\varphi"] \\ & G \end{tikzcd}$$

**Lema 1.2.1.** *Se P é um produto livre de $\{A_i; i \in I\}$, então o homomorfismo $j_i$ são injetivas.*

*Demonstração.* Para $i \in I$ fixo, consideramos o diagrama no qual $G = A_i$, $f_i$ é a identidade, e, para $k \neq i$, as funções $f_k : A_k \to A_i$ são triviais.

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "j_i"] \arrow[dr, "1"'] & P \arrow[d, "\varphi"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Então $\varphi j_i = 1_{A_i}$, e logo $j_i$ são injetivas. □

Em função do Lema1.2.1 as funções $j_i : A_i \to P$ são chamadas imersões.

**Exemplo 1.2.1.** *Um grupo livre $F$ é um produto livre de grupos cíclicos infinitos. De fato, se $X$ é uma base de $F$, então $\langle x \rangle$ é cíclico infinito para cada $x \in X$; definimos $j_x : \langle x \rangle \to G$, consequentemente, $x^n \mapsto f(x)^n$. Também, o único homomorfismo $\varphi : F \to G$ o qual extende a função $f$ e logo extende cada um dos homomorfismos $f_x$; isto é, $\varphi j_x = f_x$ para todo $x \in X$.*

Agora provaremos a unicidade deste teorema.

**Teorema 1.2.1.** *Seja $\{A_i : i \in I\}$ uma família de grupos. Se $P$ e $Q$ são, cada um, produto livre dos $A_i$, então $P \cong Q$.*

*Demonstração.* Sejam $j_i : A_i \to P$ e $k_i : A_i \to Q$ imersões. Visto que $P$ é um produto livre dos $A_i$, existe um homomorfismo $\varphi : P \to Q$ com $\varphi j_i = k_i$ para todo $i$. Similarmente, existe uma função $\Psi : Q \to P$ com $\Psi k_i = j_i$ para todo $i$.

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "j_i"] \arrow[dr, "k_i"'] & P \arrow[d, "\varphi"] \\ & Q \end{tikzcd}$$

Considere o novo diagrama

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "j_i"] \arrow[dr, "j_i"'] & P \arrow[d, "\Psi\varphi"] \\ & P \end{tikzcd}$$

Ambas $\Psi\varphi$ e $1_P$ são funções fazendo este diagrama comutar. Pela definição, podemos ter somente uma função, e logo $\Psi\varphi = 1_P$. Similarmente, $\varphi\Psi = 1_Q$, e então $\varphi : P \to Q$ é um isomorfismo. □

Devido a este teorema, identificaremos o produto livre $P$ de $\{A_i : i \in I\}$ como $P = *_{i \in I} A_i$, porém quando essa família for finita, denotaremos $A_1 * \cdots * A_n$.

**Teorema 1.2.2.** *Dada uma família $\{A_i : i \in I\}$ de grupos, um produto livre existe.*

*Demonstração.* A prova é similar a prova da existência de um grupo livre e se encontra em [19]. □

**Teorema 1.2.3** (Forma Normal)**.** *Se $g \in *_{i \in I} A_i$ e $g \neq 1$, então $g$ tem uma fatorização única*

$$g = a_1 a_2 ... a_n$$

*onde $n \geq 0, a_i \in A_i$ para algum $i$.*

*Demonstração.* O produto livre construído no Teorema 1.2.2 tem como todos os seus elementos palavras reduzidas. □

**Teorema 1.2.4.** *Seja $\{A_i : i \in I\}$ uma família de grupos, e dada uma apresentação de $A_i$ sendo $\langle X_i | \Delta_i \rangle$, onde seus conjuntos $\{X_i : i \in I\}$ são disjuntos. Então a apresentação de $*_{i \in I} A_i$ é $\langle \cup X_i | \cup \Delta_i \rangle$.*

*Demonstração.* Se $F_i$ é um grupo livre com base $X_i$, então $F = *_{i \in I} F_i$ é o grupo livre com base$\cup_{i \in I} X_i$. Seja $\{j_i : A_i \hookrightarrow *_{i \in I} A_i\}$ uma imersão. Se $R_i$ é um subgrupo normal de $F_i$ gerado pelas relações $\Delta_i$, e $\mu_i : F_i \to A_i$ é uma sobrejeção com $ker \mu_i = R_i$, então a função $\varphi : F \to *_{i \in I} A_i$ extende todas $F_i \to A_i \hookrightarrow *_{i \in I} A_i$ tem núcleo o subgrupo normal gerado por $\cup_{i \in I} \Delta_i$. $\square$

### 1.2.2 Produtos Livres Amalgamados

**Definição 1.2.2.** *Sejam $A, B$ e $C$ grupos, e $i_1 : C \to A$ e $i_2 : C \to B$ homomorfismos. Seja $G$ um grupo, e sejam $j_1 : A \to G$ e $j_2 : B \to G$ homomorfismos. Chamaremos $(G, j_1, j_2)$ de* ***push-out*** *de $(i_1, i_2)$, se*

- $j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2$;
- *para qualquer grupo $H$ e homomorfismos $\varphi_1 : A \to H$ e $\varphi_2 : B \to H$ tais que $\varphi_1 = \varphi \circ i_1$ e $\varphi_2 = \varphi \circ j_2$.*

*Se $i_1$ e $i_2$ são injetivas, então $G$ é chamado produto livre de $A$ e $B$ amalgamado o subgrupo $C$, e denotamos por $G = A *_C B$. Os grupos $A$ e $B$ são chamados fatores de $G$ e $A$ o subgrupo amalgamado. Quando $A$ é trivial, $G$ é chamado produto livre, escrevemos $G = A * B$.*

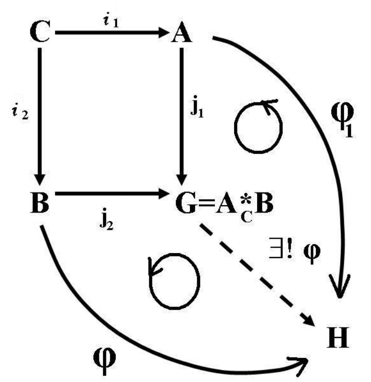


Figura 1.1: Produto livre amalgamado

**Observação 1.2.1.**
- *Indicaremos por $S$ o transversal de $C$ em $A$ à esquerda, isto é, $S$ conterá um representante de cada uma das classes $aC$. Tendo um transversal $S$ podemos explicitar $A$ como $A = \cup_{s \in S} sC$;*
- *Indicaremos por $T$ o transversal de $C$ em $B$ à esquerda, isto é, $B$ conterá um representante de cada uma das classes $bC$. De forma análoga ao item acima temos, $B = \cup_{t \in T} tC$.*

**Teorema 1.2.5.** *[Forma Normal]. Seja $G = A *_C B$. Então*

- *$j_1$ e $j_2$ são monomorfismos;*

- *$j_1(A) \cap j_2(B) = j_1(C) = j_2(C)$;*
- *considerando $j_1$ e $j_2$ como inclusões, qualquer elemento de $G$ pode ser escrito como $cu_1...u_n$, onde $n \geq 0, c \in C$ e $u_1, ..., u_n$ petencem alternadamente do transversal de $C$ em $A$ e do transversal de $C$ em $B$.*

**Observação 1.2.2.** *Se $\langle X_i | rel(G_i) \rangle$ é uma apresentação de $G_i (i = 1, 2)$ então:*

$$G = \langle X_1 \cup X_2 | rel(G_i), i = 1, 2, j_1|_{i_1(C)} = j_2|_{i_2(C)} \rangle$$

**Definição 1.2.3.** *Sejam $H$ um grupo e $A$ e $B$ subgrupos de $G$ os quais são isomorfos via algum isomorfismo específico. Dada uma apresentação $\langle \mathcal{X} | \mathcal{R} \rangle$ de $H$ o grupo $G$ é definido pela apresentação $\langle H, t | t^{-1}At = B \rangle = \langle \mathcal{X}, t | \mathcal{R}, t^{-1}U_it = V_i, i \in I \rangle$ é uma HNN-extensão onde $t$ é chamada letra estável e representa um novo símbolo gerador, e $(U_i)_{i \in I}$ e $(V_i)_{i \in I}$ representam sistemas geradores de $A$ e $B$ os quais correspondentes aos isomorfismos especificados. Desta definição é claro que que a construção é a solução para o problema universal e logo único a menos de isomorfismo. O grupo $H$ é chamado grupo base de $G$.*

**Teorema 1.2.6.** *Seja $G = \langle H, t | t^{-1}At = B \rangle$ e dados transversais para as classes laterais à direita de $A$ e $B$ em $H$ a ser escolhidos. Então todo elemento $g$ de $G$ podem ser escritos unicamente na forma $bt^{\varepsilon_1}c_1...t^{\varepsilon_n}c_n$, onde*

1. *$b$ é um elemento arbitrário de $H$,*
2. *$c_i$ pertence a um transversal para $A$ ou $B$ de acordo com $\varepsilon_i = -1$ ou $\varepsilon_i = +1$,*
3. *se $c_i = 1$ então $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$.*

*Demonstração.* Se encontra em [16]. Em todo caso o inteiro $n$ é referido como um comprimento (relativa a decomposição dada de $G$) do elemento de $g$. $\square$

**Corolário 1.2.1.** *A função natural imerge os fatores de um produto livre com amalgamação e o grupo base de um HNN-extensão.*

**Teorema 1.2.7** (Higman, Neumann B., Neumann H.)**.** *Todo grupo enumerável $H$ pode ser imerso em um grupo $G$ gerado por dois elementos. (Veja em [16])*

*Demonstração.* Se encontra em [16]. $\square$

**Teorema 1.2.8.** *Dado $G = G_1 * G_2 | A_1 = A_2$ ou $G = \langle H, t | t^{-1}At = B \rangle$. Então qualquer subgrupo finito de G é conjugado para um subgrupo de um fator ou do grupo base, como for apropriado.*

**Exemplo 1.2.2.** *Todo grupo abeliano livre é uma HNN-extensão.*

**Observação 1.2.3.** *O grupo abeliano livre de posto 2 com apresentação $G = \langle a, b | ab = ba \rangle$ é uma HNN-extensão com, digamos, grupo base $H = \langle b \rangle = A_1 = A_2$ e $t = a$.*

**Proposição 1.2.1.** *Se $G = G_1 * G_2$, então $Z(G) = A \cap Z(G_1) \cap Z(G_2)$, onde $Z(G)$ é o centro de $G$.*

**Teorema 1.2.9** (Teorema de Kurosh). *Seja $G = *_{i \in I A_i} G_i$ um produto livre da família de grupos $\{G_i | i \in I\}$ amalgamado o subgrupo $A_i$, onde $A_i \cong A, \forall i$. Seja $H$ um subgrupo de $G$ tal que $H$ intersepta trivialmente todo conjugado de $A$ então $H = (*_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda) * F$ onde*

*i) para cada $\lambda$ existe $i(\lambda)$ e $z_\lambda \in G$ tal que $H_\lambda = H \cap z_\lambda G_{i(\lambda)} z_\lambda^{-1}$;*

*ii) $F$ é um grupo livre e $F \cap z G_i z^{-1} = 1$ para todo $z \in G$ e $i \in I$;*

*iii) se $H \cap z G_i z^{-1} \neq 1$ então existe um único $\lambda \in \Lambda$ tal que $H \cap z G_i z^{-1}$ é conjugado para $H_\lambda$.*

**Teorema 1.2.10** (Grushko-Neumann). *Seja $G = A * B$ e dados $g_1, g_2, ..., g_k$, $k$ finito, sendo um conjunto de geradores para $G$. Então $g_1, g_2, ..., g_k$ pode ser obtido por um transformação Nielsen para um conjunto de geradores, o qual uma parte pertence a $A$ e a parte restante pertence a $B$. (Esses geradores em $A$ e $B$ não precisam ser minimais em número, e pode incluir o 1.)*

**Observação 1.2.4.** *Estes Teoremas possuem demonstrações simples utilizando-se a Teoria de Bass-Serre (Ver em [5]), a qual apresentaremos na seção a seguir.*

**Definição 1.2.4.** *Um grupo $G$ é dito ser livremente indecomponível se ele não pode ser decomposto como um produto livre amalgamado.*

**Observação 1.2.5.** *Sendo todo produto livre o grupo fundamental de grafo de grupos a definição 1.2.4 reduz-se a:*
*Um grupo $G$ é livremente indecomponível se $G = A * B$ implicar que $A = 1$ ou $B = 1$.*

### 1.2.3 Grupo fundamental, Complexos e Apresentações

O grupo fundamental de um espaço topológico $X$ é um importante invariante da topologia, foi assim que Poincaré usou a teoria dos grupos para auxiliar na topologia do espaço $X$, e mostrou que este grupo determina invariantes do espaço que tinha sido encontrado por Betti. Este grupo denotado por $\pi_1(X, x_0)$ com ponto base $x_0$, consiste das classes de caminhos fechados homotópicos começando em $x_0$. A estrutura algébrica do grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ pode refletir muito das características da natureza topológica do espaço $X$, por exemplo, podemos associar aos subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$ espaços topológicos $Y$ que é aplicado sob $X$, este espaço é chamado espaço de recobrimento.

**Definição 1.2.5** (Grupo fundamental.). *Sejam $X$ um espaço topológico e $x_0 \in X$ um ponto base. Considere o conjunto formado por todos os caminhos fechados $\alpha$ em $x_0$. Denote $[\alpha]$ a classe de equivalência dos caminhos fechados (isto é, os caminhos fechados em $x_0$ homotópicos a $\alpha$). Seja a equação binária neste conjunto dada pela justaposição de caminhos, mais precisamente $[\alpha][\beta] = [\alpha\beta]$. O conjunto das classes de equivalência em $X$ no ponto $x_0$ é denotado por $\pi_1(X, x_0)$ é um grupo, denominado grupo fundamental de $X$ com ponto base $x_0$.*

É rotina verificar que a composição da na definição acima é bem definida. E se tomássemos outro ponto digamos $x_1 \in X$ ao invés de $x_0$ obteríamos o mesmo grupo, isto é, $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$.

**Definição 1.2.6** (Grafo)**.** *Um grafo $\Gamma$ (ou 1- complexo dimensional), consiste de dois conjuntos disjuntos (enumeráveis), $V = V(\Gamma)$ e $E(\Gamma)$, juntamente com aplicações $s, t : E \to V$ e $^{-1} : E \to E$,$\sigma \mapsto \sigma^{-1}$, satisfazendo:*

*a)* $\sigma^{-1} \neq \sigma, (\sigma^{-1})^{-1} = \sigma,$

*b)* $s(\sigma^{-1}) = t(\sigma), t(\sigma^{-1}) = s(\sigma).$

Os elementos de $V$ são chamados pontos ou vértices do grafo $\Gamma$, os elementos de $E$ são chamados arestas do grafo $\Gamma$. Se $\sigma \in E$ então $\sigma^{-1}$ é o inverso da aresta $\sigma, s(\sigma)$ é o vértice inicial $t(\sigma)$ o vértice final de $\sigma$. O grau de um vértice $v$ é dado pelo número de arestas com vértice inicial $v$.

**Definição 1.2.7** (Subgrafo)**.** *Fixado um grafo $\Gamma$. Para qualquer subconjunto $\Delta$ de $\Gamma$ escreveremos, $V(\Delta) = \Delta \cap V(\Gamma)$, e $E(\Delta) = \Delta \cap E(\Gamma)$. Se para cada $e \in E(\Gamma)$ tivermos $s(e), t(e) \in V(\Gamma)$, então diremos que $\Delta$ é um subgrafo de $\Gamma$.*

**Definição 1.2.8** (Subgrafo Gerado)**.** *Um subgrafo $\Delta$ de $\Gamma$ é chamado subgrafo gerado se $V(\Delta) = V(\Gamma)$.*

**Observação 1.2.6.** *Seja $S$ um conjunto não vazio de $V(\Gamma)$. O subgrafo de $\Gamma$ induzido por $S$, é um subgrafo de $\Gamma$ cujo conjunto de vértices é $S$ e cujo conjunto de arestas é o conjunto daquelas arestas de $\Gamma$ tais que $s(e) = t(e) \in S$.*

**Definição 1.2.9.** *Uma aresta $e \in E(\Gamma)$ é dita ser colapsada se ela é deletada e seus vértices, inicial e final, são identificados.*

**Definição 1.2.10** (Colapso)**.** *Seja $\Delta$ um subgrafo de um grafo $\Gamma$. Considere a aplicação natural $\varphi : \Gamma \twoheadrightarrow \Gamma/\Delta$. Definimos: $V(\Gamma/\Delta) := \varphi(V(\Gamma))$, $E(\Gamma/\Delta) := \varphi(E(\Gamma))$; $s(\varphi(m)) := \varphi(s(m))$ e $t(\varphi(m)) := \varphi(t(m))$, para todo $m \in \Gamma$.*

**Definição 1.2.11** (Grafos de Cayley)**.** *Sejam $G$ um grupo e $X$ um subconjunto de geradores de $G$. O grafo de Cayley $\Gamma(G, X)$ é um grafo com conjuntos de vértices $G$ e arestas $(v, xv)$ ligando $v$ a $xv$ onde cada $v \in G$ e $x \in X$. Neste caso, $s(v, xv) = v$ e $t(v, xv) = xv$.*

**Proposição 1.2.2.** *Dado um conjunto $G$ e um subconjunto $X$ de $G$, tem-se:*

*i)* $\Gamma(G, X)$ *é conexo se, e somente se, $X$ gera $G$.*

*ii)* $\Gamma(G, X)$ *contém laços se, e somente se, $1 \in X$.*

*iii) Se $G = \langle X \rangle$, então, $\Gamma(G, X)$ é localmente finito se, e somente se $G$ é finitamente gerado.*

**Exemplo 1.2.3.** *Sejam $G = (\{a\}, -)$ e $X = \{a\}$, então o Grafo de Cayley associado é dado na Figura 1.2:*

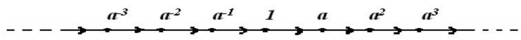


Figura 1.2:

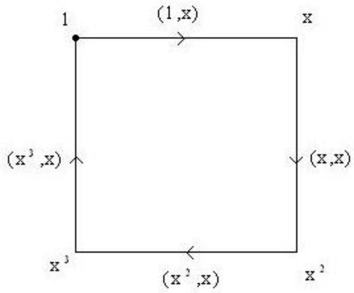


Figura 1.3:

**Exemplo 1.2.4.** *Sejam $G = \langle x | x^4 = 1 \rangle = C_4$ e $X = \{x\} \leq G$, então o Grafo de Cayley associado é dado na Figura 1.3.*

**Exemplo 1.2.5.** *Sejam $G = \langle aba^{-1}b^{-1} = 1, b^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e $X = \{a, b\}$. O Grafo de Cayley associado é dado na figura 1.4*

**Definição 1.2.12** (Grafo Quociente)**.** *O grafo quociente $\Gamma(G, X)/G$ é um buquê com número de arestas iguais ao número de elementos no conjunto $X$.*

**Definição 1.2.13** (Grafo Bipartido)**.** *Um grafo $\Gamma$ é bipartido se o conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos $V_1$ e $V_2$ tais que quaisquer dois vértices em $V_i$ tenhamos que eles não são adjacentes para $i = 1, 2$. Dizemos que $V_1$ e $V_2$ são blocos bipartidos de $\Gamma$.*

**Observação 1.2.7.** *Dizemos que um grafo é igualmente bipartido se ele é bipartido e tem uma partição que tem o mesmo número de vértices em cada parte.*

**Definição 1.2.14** (Morfismo)**.** *Sejam $\Gamma$ e $\Delta$ grafos. Um morfismo de grafos $\alpha : \Gamma \to \Delta$ é uma aplicação tal que $s\alpha(m) = \alpha s(m), \forall m \in \Gamma$ e $t\alpha(m) = \alpha t(m), \forall m \in \Gamma$.*

**Observação 1.2.8.**

1. *Note que a igualdade $sj\alpha(m) = \alpha s(m)$ ou $tj\alpha(m) = \alpha t(m)$ implica que o morfismo de grafos leva vértice para vértice. Entretanto, um morfismo pode enviar uma aresta para um vértice.*

2. *Dizemos que um morfismo $\alpha : \Gamma \to \Delta$ é um epimorfismo (respectivamente, monomorfismo, isomorfismo) local, se as restrições $\alpha|_{s^{-1}(v)} : s^{-1}(v) \to s^{-1}(\alpha(v))$ e $\alpha|_{t^{-1}(v)} : t^{-1}(v) \to t^{-1}(\alpha(v))$ são sobrejetivas (respectivamente, injetivas, bijetivas).*

3. *Se $\alpha$ é um epimorfismo, chamaremos $\Delta$ de grafo quociente de $\Gamma$. Se $\alpha$ é injetiva $\alpha(\Gamma)$ é um subgrafo de $\Gamma$.*

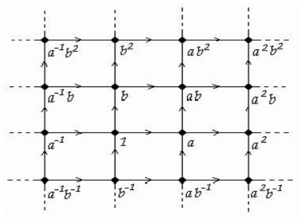


Figura 1.4:

**Definição 1.2.15.** *Um caminho $\omega$ de comprimento $n$ pode ser ou um vértice só e neste caso, $v$ (caminho constante de comprimento 0) ou uma sequência finita $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ de arestas tais que $t(\omega) = t(\sigma_n)$. Um caminho $\omega$ é fechado se $s(\omega) = t(\omega)$ e reduzido se ele não contém palavras $\sigma\sigma^{-1}$. Um grafo é conexo se quaisque dois vértices podem ser ligados por um caminho e finito se $V(C)$ e $E(C)$ são finitos. Se $\omega$ é um caminho fechado e $0 < n \in \mathbb{Z}$ então o caminho obtido por repetir $\omega$ $n$ vezes é escrito como potência $\omega^n$. Portanto, se $\omega = \sigma_1 ... \sigma_k$ então $\omega^{-1} = \sigma_k^{-1}, ..., \sigma_1^{-1}, \omega^{-n} = (\omega^{-1})^n$ e $\omega^0$ um caminho constante $s(\omega)$.*

**Proposição 1.2.3.** *Um grafo que não contém caminhos fechados reduzidos não-triviais é chamado acíclico e um grafo acíclico conexo é chamado árvore.*

*(a) Em cada grafo conexo $C$ existe uma árvore chamada árvore maximal, a qual contém todos os vértices de $C$. Portanto, dado qualquer subgrafo acíclico $B_0$ de $C$, existe uma árvore maximal de $C$ a qual contém $B_0$.*

*(b) Em qualquer árvore existe um único caminho reduzido ligando quaisquer dois vértices.*

*Demonstração.* Tome um vértice $v_0 \in C$. Dado um subgrafo $B_0$ contendo $v_0$. Em seguida, considere um sistema maximal de arestas com vértice inicial $v_0$, e seus vértices finais distintos e diferentes de $v_0$. Seja $B_1$ um complexo consistindo dessas arestas, suas arestas inversas e seus pontos finais. Claramente $B_1$ é uma árvore. De modo geral, o complexo $B_i$ é formado de $B_{i-1}$ tomando todos os vértices os quais tomam uma aresta distinta de $B_{i-1}$, junto com uma aresta conectora e seus inversos. A união $B = \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$ é um subgrafo de $C$ o qual é uma árvore e contém todos vértices de $C$. Um argumento semelhante pode ser aplicando a um subgrafo acíclico arbitrário $B_0$. O item (b) é uma consequência imediata do item (a). $\square$

O grafo construído acima tem a seguinte propriedade minimal:

**Corolário 1.2.2.** *Dado um vértice $v_0$, existe uma árvore $B$ tal que qualquer vértice é ligado a $v_0$ por um caminho em $B$ o qual é de comprimento mínimo entre tais caminhos em $C$.*

**Definição 1.2.16.** *Um 2-complexo $C$ consiste de um conjunto de vértices $V(C)$, um conjunto de arestas $E(C)$, e um conjunto de faces $F(C)$ juntamente com aplicações $s, t, ^{-1}, \partial$, tais que:*

*a) $V(C)$ e $E(C)$ junto com funções $s, t, ^{-1}$ formam um grafo $C^1$, chamado 1-skeleton de $C$.*

*b) Para $\varphi \in F(C)$, o bordo $\partial\varphi$ é um conjunto de caminhos em $C^1$ consistindo de todos rearranjos cíclicos de alguns caminhos dados. Elementos de $\partial\varphi$ são caminhos de bordo* *positivos de $\varphi$. Frequentemente escrevemos $\partial\varphi$ através da escolha de caminhos representantes $\omega$ e escrevemos $\partial\varphi = \omega$.*

c) *Para cada $\varphi \in F(C)$ existe uma face $\varphi^{-1} \in F(C)$ com $\varphi^{-1} \neq \varphi$ e $(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$. Além disso, $\partial\varphi^{-1} = (\partial\varphi)^{-1}$ significa que $\omega \in \partial\varphi^{-1}$ se e somente se $\omega^{-1} \in \partial\varphi$ no sentido óbvio.*

d) *Se o complexo $C$ é finito, dado $a_0$ o número de vértices, $a_1$ o número de pares de arestas inversas, $a_2$ o número de pares de faces inversas de $C$. Então $\mathcal{X}(C) = a_0 - a_1 + a_2$ é a característica de Euler de $C$.*

**Exemplo 1.2.6.** *Começamos com um ponto que chamaremos de uma 0-célula (ou 0-vértice). Para cada uma tome uma 1-célula (ou 1-aresta) orientada, identificando seus pontos, inicial e final, e marcamos sua direção com um gerador. O espaço formado é um buquê ou uma união disjunta de $n$ laços com vértice 0. Sendo $S^1$ um círculo (esfera de dimensão 1) um grafo com um vértice e um par de arestas. O grafo considerado acima é o quociente do complexo obtido pela identificação de todos os vértices dos $n$ grafos $S^1_\lambda$. A característica de Euler é $\mathcal{X}(C) = 1 - n$ (Veja 1.5).*

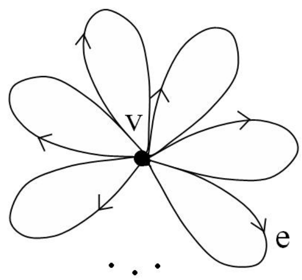


Figura 1.5: Buquê

**Exemplo 1.2.7.** *O complexo $P^2$ consiste de um vértice $v$, um par de arestas $\alpha, \beta$ e um par de faces $\psi, \psi^{-1}$ tal que $\partial\psi = \alpha^2$. Este complexo é chamado Espaço Projetivo e $\mathcal{X}(P^2) = 1$ (Veja 1.6).*

**Exemplo 1.2.8.** *Seja $k_g$ o 2-complexo consistindo de um vértice $v$, $g$ arestas $\nu_i$ e suas inversas e uma face $\psi$ e sua inversa. O bordo de $\psi$ é $\partial\psi = \prod_{i=1}^{g} \nu_i^2$. Este complexo é chamado uma superfície fechada não orientável de gênero $g$, veja figura 1.7 . A característica de Euler de $K_g$ é $\chi(K_g) = 2-g$. Notações: $\sharp$Vértices=1;$\sharp$Arestas=g,$\sharp$Face=1$\Longrightarrow V-A+F = 1-g+1$.*

**Observação 1.2.9.** *Espaços topológicos que podem ser construídos indutivamente através do atachamento de uma nova $n$-célula a um bordo complexo existente através de colagem é o que chamamos de complexo de células.*

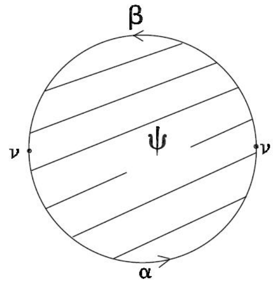


Figura 1.6: Espaço Projetivo

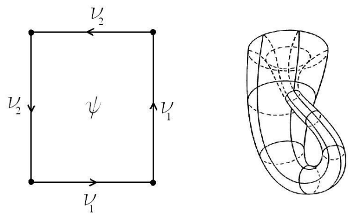

Figura 1.7: Garrafa de Klein

**Definição 1.2.17.** *Um CW-complexo $X$ é um espaço de Hausdorff que é a união de uma sequência decrescente de subespaços*

$$X^0 \subset X^1 \subset ... \subset X$$

*O espaço inicial $X^0$, chamado o-skeleton, é um conjunto de pontos discretos. O $n$-skeleton $X^n$ é obtido de $X^{n-1}$ atachando-se n-células ao longo do seu bordo.*

Restringiremos agora nossa atenção ao 2-dimensional CW-complexos, isto é, $X = X^2$. Inicialmente consideremos a seguinte definição.

**Definição 1.2.18.** *Um caminho em um 2-complexo $C$ é um caminho em 1-skeleton. Assumiremos que $C^1$ é conexo e que $v_0$ é um vértice de $C$. Dois caminhos $\omega_1, \omega_2$ são homotópicos se um pode ser tranformado no outro por um finito número das seguintes homotopias elementares:*

*i) inserção e remoção de um spur, isto é, $\omega' = v_1 v_2 \Leftrightarrow \sigma\sigma^{-1} v_2 = \omega''$ onde $v_i$ são subcaminhos de $\omega'$ com $s(v_2) = t(v_1) = s(\sigma)$, $\sigma$ uma aresta;*

*ii) deformações elementares sobre a face, isto é, se $\omega = \omega_1\omega_2\omega_3$ e se $\omega_2^{-1}\omega_2'$ é o bordo de um 2-complexo de $C^2$ então $\omega$ pode ser renomeado para $\overline{\omega} = \omega_1\omega_2'\omega_3$.*

Isto define uma relação de equivalência para caminhos os quais são equivalentes a caminhos com mesmo vértice inicial e final. Se $C$ é um complexo e definamos uma relação de equivalência $\sim$ sobre $C$, isto é, sobre o conjunto de vértices, de arestas e faces que são compatíveis com as aplicações de bordo, mais precismente, como vimos acima se por exemplo,

$\sigma \sim \tau$ então $\sigma^{-1}$ e $t(\sigma) \sim t(\tau)$. Então o conjunto das classes de equivalência ou $C/\sim$ é um 2-complexo chamado complexo quociente. Uma classe de equivalência $[\omega]$ é chamada uma classe homotópica de caminhos. Um caminho fechado com vértice inicial $v$ homotópico nulo em $C$ se ele é homotópico a um caminho constante $v$.

**Definição 1.2.19.** *Uma função ou homomorfismo $f : C \to D$ entre dois 2-complexos $C, D$, que envia cada vértice de $C$ um vértice em $D$, e cada aresta de $C$ uma aresta ou vértice em $D$, e a cada face de $C$ uma face ou caminho de $D$ preservando o comportamento das aplicações de bordo:*

*i) Se $v \in C$ é o vértice inicial da aresta orientada $\sigma \in C$ então $f(v)$ é o vértice inicial de $f(\sigma)$ se ela é uma aresta, e vice-versa $f(\sigma) = f(v)$;*

*ii) se $\prod_{i=1}^{k} \sigma_i$ é o bordo de um disco $\psi \in C$ então $\prod_{i=1}^{k} f(\sigma_i)$ é o bordo de $f(\psi)$ se $f(\psi)$ é uma face; de outra maneira $f(\psi)$ deve ser um caminho homotópico nulo em $D^1$;*

*iii) $f(\sigma^{-1}) = (f(\sigma))^{-1}$ e $f(\psi^{-1}) = (f(\psi))^{-1}$ para toda aresta $\sigma$ e face $\psi$ de $C$.*

A função $f : C \to D$ preserva dimensão se a imagem de uma aresta ou face é uma aresta ou face, respectivamente. Um homomorfismo entre dois complexos é chamado um isomorfismo se ele é injetivo e sobrejetivo. No caso chamaremos a imagem e a pré imagem de isomorfos. Sobre um isomorfismo a imagem de caminhos homotópicos nulos são homotopias nulas. A inclusão $i : C^1 \hookrightarrow C^2$ é um homomorfismo que preserva dimensão. Se $C$ é um complexo e $\sim$ uma relação de equivalência sobre $C$, então a função identificação $C \to C/\sim$ é um homomorfismo entre complexos. Em particular, quando um grupo G de automorfismos de um complexo C é dado, em outras palavras, quando G age sobre C então as órbitas sobre G formam uma classe de equivalência e o complexos quocientes é denotado por $C/G$. A projeção $C \to C/G$ é homomorfismo sobrejetor de complexos. Se $\omega_1\omega_2$ são caminhos e $t(\omega_1) = s(\omega_2)$ então existe o caminho produto $\omega = \omega_1\omega_2$ o qual começa em $\omega_1$ e termina em $\omega_2$. Das definições segue imediatamente que se os fatores são homotópicos então são produtos e que o inverso de caminhos homotópicos são homotópicos: $\omega_i \simeq \omega_i', i = 1, 2 \Rightarrow \omega_1\omega_2 \simeq \omega_1'\omega_2', \omega^{-1} = (\omega)^{-1}$. Logo define-se o produto e inverso para classes homotópicas. Além disso, a função $f : C \to D$ dá caminho a caminho e caminhos homotópicos a caminhos homotópicos.

**Observação 1.2.10.** *É possível definir grupo fundamental também para um 2-complexo sem 2-células, isto é, para um grafo, existe um homomorfismo $i_\sharp : \pi_1(C^1) \to \pi_1(C)$, onde $i : C^1 \to C$, e este é sobrejetivo.*

**Definição 1.2.20.** *a) A classe de equivalência de caminhos fechados com vértice inicial fixo $v_0$ constitui um grupo, chamado o grupo fundamental de $C$ com ponto base $v_0$. Este grupo também é chamado o primeiro grupo homotópico e é denotado por $\pi_1(C, v_0)$ ou, se o vértice for imaterial, por $\pi_1(C)$.*

*b) A função $f : C \to D$ entre 2-complexos induz um homomorfismo $f_\sharp : \pi_1(C, v_0) \to \pi_1(D, f(v_0))$. Se $g : D \to E$ é outra função então $(g \circ f)_\sharp = f_\sharp \circ g_\sharp$. Além disso, $(id_C)_\sharp = id_{\pi_1(C)}$.*

*c) Um complexo conexo $C$ é chamado simplesmente conexo se $\pi_1(C) = 1$.*

Exibiremos dois métodos para cálculo do grupo fundamental, um deles usa o famoso Teorema de Seirfert-Van Kampen e na outra abordagem usaremos CW-complexos, visto que estes espaços cobrem virtualmente todos espaços topológicos para o qual o grupo fundamental é de alguma forma útil.

**Proposição 1.2.4.** *Descreveremos agora como encontrar a apresentação do Grupo Fundamental $\pi_1(C)$, onde $C$ é um complexo.*

*a) [Geradores] Tomando a árvore maximal $B \in C^1$. De cada par $\sigma, \sigma^{-1}$ de arestas de $C^1 \setminus B$ selecione uma para obter um sistema $(\sigma_i)_{i\in I}$ de (orientadas) arestas. Existem únicos caminhos reduzidos $\mu_i, \nu_i$ em $B$ indo do ponto base $v_0$ ao, vértice inicial e final, respectivamente, de $\sigma_i$. Seja $\omega_i = \mu_i\sigma^{-1}\nu_i^{-1}$ e seja $s_i$ como uma classe homotópica de $\omega_i$ com respeito ao complexo $C^1$. Então $(s_i)_{i\in I}$ é um sistema gerador para $\pi_1(C^1, v_0)$.*

*Demonstração.* A ideia da prova consiste em considerar alguns caminhos fechados $\omega = \tau_1\tau_2...\tau_k$ começando em $v_0$. Seja $\xi_i$ um caminho reduzido em $B$ de $v_0$ ao vértice final de $\prod_{j=1}^{i}\tau_j$, e $\xi_0$ um caminho constante em $v_0$. Então $\prod_{j=1}^{k}\tau_i \simeq \prod_{j=1}^{k}\xi_{j-1}\tau_j\xi_j^{-1} \simeq \prod_{l=1}^{m}\omega_{i(l)}^{\xi_l}$ onde o terceiro termo é obtido por deletação de todos fatores $\xi_{j-1}\tau_j\xi_j^{-1}$ do segundo produto para o qual $\tau_j$ é uma aresta da árvore $B$. Se $\tau_j$ não pertencesse a $B$ então $\tau_j = \sigma_{i(l)}^{\xi(l)}$ para algum $i(l) \in I, \xi_l \in \{1, -1\}$ e $\xi_{j-1} = \mu_{i(l)}, \xi_j = \nu_{i(l)}$ se $\xi_l = 1$ e $\xi_{j-1} = \nu_{i(l)}, \xi_j = \mu_{i(l)}$ se $\xi_l = -1$. Isto prova que $[\omega] = \prod_{l=1}^{m} s_{i(l)}^{\xi(l)}$. Visto que a inserção e deletação do spur deixa o representante de $[\omega]$ invariante ou ocasiona a insersão ou deletação de pares $s_i^{\xi}s_i^{-\xi}$,então temos que o grupo fundamental do complexo $C^1$ é um grupo livre dado pela apresentação $\pi_1(C^1, v_0) = \langle (s_i)_{i\in I}|-\rangle$, e a imagem dos $s_i$ sobre $i_\sharp : \pi_1(C^1, v_0) \to \pi_1(C, v_0)$ gera $\pi_1(C, v_0)$. □

*b) [Relações Definidoras] De cada par de faces inversas escolhemos uma e obtemos um sistema $(\psi_j)_{j\in J}$. Além disso, fixamos um caminho de bordo $\upsilon_j$ de orientação positiva de $\psi_j$, tomamos um caminho $\lambda_j$ de $v_0$ ao vértice inicial de $\upsilon_j$, digamos na árvore $B$, e formamos um caminho $\rho_j = \lambda_j\upsilon_j\lambda_j^{-1}$. Então a classe homotópica de $\rho_j$ em $C^1$ é o produto $r_j(s)$ nos geradores de $(a)$. Da definição de homotopia segue que $(r_j)_{j\in J}$ formam um sistema de relações definidoras para $\pi_1(C, v_0)$; logo $\pi_1(C, v_0) = \langle (s_i)_{i\in I}|-\rangle$*

Um outro método importante para calcular o grupo fundamental com o caso de um complexo consistir da união de dois subcomplexos o qual tem interseção não-trivial é o

**Teorema 1.2.11** (Teorema de Seifert-Van Kampen (Forma Amalgamada))**.** *[Seifert, 1931][van Kampen, 1933a] Dado $C$ um 2-complexo, $C_1, C_2$ subcomplexos conexos tais que $C_0 = C_1 \cap C_2$ é não vazio e conexo, e sejam $i_l : C_l \hookrightarrow C$,$j_l : C_0 \hookrightarrow C_l, l = 1, 2$ imersões. Fixando um ponto base $v \in C_0^0$. Supondo que $\pi_1(C_0, v)$ é gerado por $(Y_k)_{k\in K}$ e que $\pi(C_l, v) = \langle \mathcal{X}_l|\mathcal{R}_l\rangle$. Sejam $W_k(\mathcal{X}_1)$ e $V_k(\mathcal{X}_2)$ palavras representando, respectivamente, os elementos $j_{1\sharp}(y_k) \in \pi_1(C_1, v) = \langle \mathcal{X}_1|\mathcal{R}_1\rangle$ e $j_{2\sharp}(y_k) \in \pi_1(C_2, v) = \langle \mathcal{X}_2|\mathcal{R}_2\rangle$. Então o 2-complexo $C$ tem apresentação:*

$$\pi_1(C, v) = \langle \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2|\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup (W_k(\mathcal{X}_1) \cdot V_k(\mathcal{X}_2)^{-1})_{k\in K}\rangle$$

*Demonstração.* Uma apresentação de um 2-complexo existe e é dado pelo processo descrito na proposição 1.2.4. Agora considerando a árvore maximal para $C$ por tomar a árvore maximal em $C_0$ e a extendendo para as árvores maximais para $C_1, C_2$. O resultado é a apresentação para $\pi_1(C, v)$ da forma $\langle \mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2 | \mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_2 \rangle$ onde $\langle \mathcal{Y}_1 | \mathcal{Q}_1 \rangle$ e $\langle \mathcal{Y}_2 | \mathcal{Q}_2 \rangle$ são apresentações de $\pi_1(C_1, v)$ e $\pi_1(C_2, v)$. Aplicando-se as transformações de Tietze chegamos na apresentação desejada. □

O teorema de van Kampen tem forma variante o qual, em topologia, é um processo de adição de uma asa para um espaço. Para complexos isto é tratado como segue.

**Teorema 1.2.12** (Teorema de Seirfert-van Kampen (HNN-extensão))**.** *Com a notação acima temos,* $\pi_1(C, v_0) = \langle \mathcal{X}_0 \cup \{t\} | \mathcal{R}_0 \cup (W_k(\mathcal{X}_0) \cdot t \cdot (V_k(\mathcal{X}_o)^{-1} \cdot t^{-1}))_{k \in K} \rangle$.

*Demonstração.* A ideia da prova pode ser descrita da seguinte forma: seja um 2-complexo conexo $C_0$ contendo dois subcomplexos distintos conexos isomorfos $D_1, D_2$ com inclusões $i_j : D_j \hookrightarrow C_0$,$J = 1, 2$ e seja $g : D_1 \hookrightarrow D_2$ um isomorfismo. Seja $C$ um 2-complexo obtido de $C_0$ pela identificação das imagem e pré-imagem sobre $g : C = C_0/g$. Tomando um vértice $v$ não pertencendo a $D_1 \cup D_2$, um vértice $v_1 \in D_1$, e $v_2 = g(v_1) \in D_2$. Seja $\pi_1(C_0, v) = \langle \mathcal{X}_0 | \mathcal{R}_0 \rangle$ e $(\omega_k)_{k \in K}$ um sistema de caminhos fechados em $D_1$ com $s(\omega_k) = v_1$, a classe homotópica dos quais geram $\pi_1(D_1, v_1)$. Fixando caminhos $v_1, v_2$ de $v$ a $v_1, v_2$, respectivamente, e dada uma palavra $W_k(\mathcal{X}_0)$ e $V_k(\mathcal{X}_0)$ representam a classe homotópica em $C_0$, os caminhos $v_1 \omega_k v_1^{-1}$ e $v_2 \omega k v_2^{-1}$ respectivamente. Finalmente seja o elemento $t$ denotando a classe homotópica do caminho $v_1 v_2^{-1}$. □

**Exemplo 1.2.9.** *Seja $C_0$ consistindo de um par de arestas $\sigma^{\pm 1}$ e dois vértices $v_0 = s(\sigma)$, $v_1 = t(\sigma)$, isto é, $C_0$ é um segmento e portanto $C_0$ é uma árvore.*
*Considere $S^1$ obtida da identificação dos vétices $v_0$ e $v_1$. Pelo Teorema de Van Kampen (HNN-extensão), temos $\pi_1(S^1) = \langle t | - \rangle \cong \mathbb{Z}$.*

**Exemplo 1.2.10.** *Seja $C = C_1 \cup C_2$ e $v_1 = C_1 \cap C_2$ um vértice. Se $\pi_1(C_1, v) = \langle X_1 | R_1 \rangle$ e $\pi_1(C_2, v) = \langle X_2 | R_2 \rangle$ então pelo Teorema de Van-Kampen,temos: $\pi_1(C) = \langle X_1 \cup X_2 | R_1 \cup R_2 \rangle = \langle X_1 | R_1 \rangle * \langle X_2 | R_2 \rangle$. Em particular no exemplo 1.2.6, temos que: $\pi_1(C) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$, $n$-vezes.*

**Exemplo 1.2.11** (Toro)**.** *Seja $S_{1,1}$ denotando um toro com um buraco. Usaremos o Teorema de Seirfert-Van Kampen, para calcular seu grupo fundamental. Construiremos como na Figura 1.8 , ond $v_i$ denotam os vértices, $\alpha, \beta, \gamma_i$ arestas. Claramente $\pi_1(R) = 1$, pois $R$ é conexo por caminho. A figura $A$ é obtida de colapsar dois vértices $v_1$ com $v_4$ e $v_3$ com $v_3$. E pelo Teorema* 2.2 *$\pi_1(A, v_1) = \langle b | - \rangle$ onde $b$ contém os caminhos homotópicos $\gamma_1 \gamma_2$ e $\alpha \beta \alpha^{-1}$. A figura $T$ é formada por colar duas cópias de $A$, obtemos pelo Teorema* 1.2.11 *que $\pi_1(T) = \pi_1(A') * \pi_1(A'') = \langle b', b'' | - \rangle$. Finalmente adicionamos uma asa e obtemos $\pi_1(S_{1,1}, v_1) = \langle t, b', b'' | t b' t^{-1} b''^{-1} \rangle \cong \langle t, b' | - \rangle$. O bordo $\gamma^*$ é da classe $b'^{-1} b''$.*

**Definição 1.2.21** (Diagrama de Cayley)**.** *Dado $G = \langle \mathcal{X} | \mathcal{R} \rangle$. Construindo um 2-complexo $\Delta$ como se segue:*

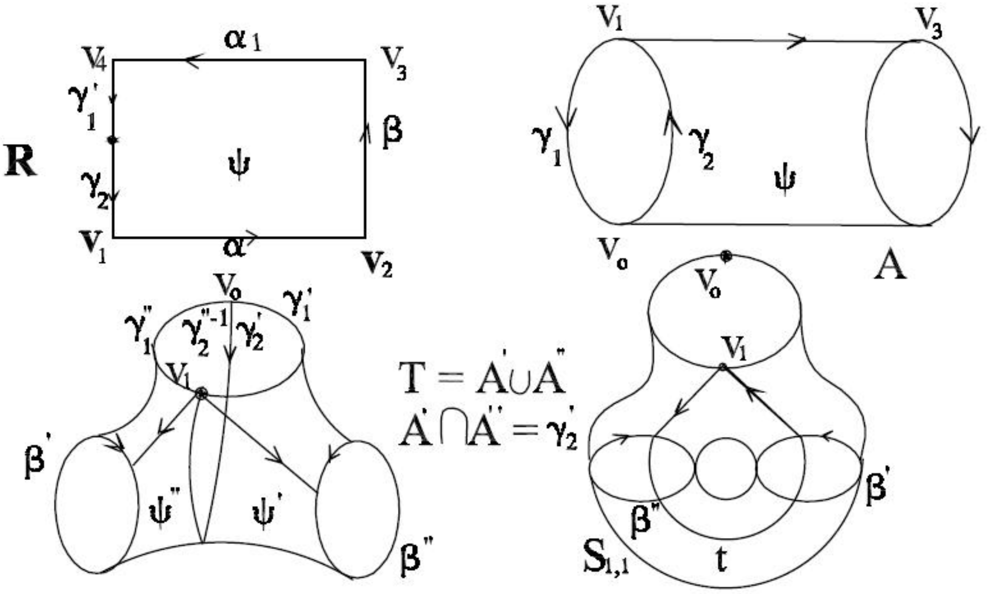


Figura 1.8: Toro

*a) Seja $V(\Delta) = G$.*

*b) Seja $E(\Delta) = \{(g, X) : g \in G, X \in \mathcal{X} \cup \mathcal{X}^{-1}\}$ e definimos $s(g, X) = g$, $t(g, X) = gx$, onde $x$ é o elemento de $G$ representado por $X$, e $(g, X)^{-1} = (gx, X^{-1})$. Assim, obtemos um grafo o qual é denotamos por $\Gamma\langle\mathcal{X}|\mathcal{R}\rangle$. Chamamos $X$ uma marca em $(g, X)$. Dado $g \in G$ e uma palavra $W$ sobre $\mathcal{X}$, existe um único caminho definido em $W$, o qual denotaremos por $(g, W)$, com vértice inicial $g$ daquelas arestas marcadas, em sequência dada a palavra $W$.*

*c) Para qualquer $g \in G$ e $R^{\varepsilon}, \varepsilon = \pm 1$ existe uma face orientada $\psi(g, R^{\varepsilon})$ o qual o bordo $\partial\psi(g, R^{\varepsilon})^{-1} = \psi(g, R^{-\varepsilon})$. O complexo $\Delta = \Delta\langle\mathcal{X}|\mathcal{R}\rangle$ definido acima é chamado Diagrama de Grupo ou Cayley de $\langle\mathcal{X}|\mathcal{R}\rangle$.*

## 1.3 Grupos agindo sobre grafos

Restringiremos nossa atenção agora a grafo (1-complexo), para estabelecer o teorema fundamental da Teoria de Bass-Serre.

Conectaremos a essência matemática da teoria dos grafos, isto é, existe uma conexão próxima entre grafos e grupos. Mais precisamente, veremos que todo grafo pode ser associado com um grupo de permutações.

**Definição 1.3.1.** *[Ação de grupos sobre grafos] Dizemos que $G$ age sobre um grafo $\Gamma$ ou que $\Gamma$ é um $G$-grafo, se existe um homomorfismo de $G$ para todos os automorfismos de $\Gamma$. Então $V, E$ são $G$-conjuntos tais que: $g(s(e)) = s(g(e))$, $g(t(e)) = t(g(e))$ para todo $e \in E, g \in G$.*

**Definição 1.3.2** (Grafo de Grupos)**.** *Seja $\Gamma = (V, E, \varphi)$ um grafo conexo, onde $\varphi$ é uma orientação determinada pelas aplicações de bordo. Um grafo de grupos $(\mathcal{G}, \Gamma)$ é um sistema de grupos $\{G(m) | m \in \Gamma\}$ e monomorfismos $\partial_{i,e} : G(e) \to G(d_i(e)), e \in E(\Gamma), i = 0, 1$. Chamamos $G(v), v \in V$ o grupo de vértices, e $G(e), e \in E$ o grupo de arestas de $(\mathcal{G}, \Gamma)$.*

**Definição 1.3.3.** *Uma decomposição de um grupo $G$ é uma terna $\Sigma = (\Gamma(V, E, \varphi), T, \psi)$, onde $\psi$ é uma orientação determinada por $i : E \to V$ e $t : \bar{t} \to V$, $(\Gamma(V, E, \varphi), T, \psi)$ é um grafo de grupos, $T$ é uma subárvore maximal do grafo $\Gamma(V, E, \varphi)$ e $\psi : \pi_1(\Gamma(V, E, \varphi), T) \to G$ é um isomorfismo.*

**Observação 1.3.1.** *Se $\Gamma$ é conexo chamamos $(\mathcal{G}, \Gamma)$ um grafo de grupos conexo. Um caminho em $(\mathcal{G}, \Gamma)$ é a sequência $(g_0, \sigma_1, g_1, ..., \sigma_r, g_r)$, onde $g_i \in G_v$, e $(v_0, \sigma_1, v_1, ..., \sigma_r, v_r)$ é um caminho em $\Gamma$. A relação $\simeq$ de equivalência homotópica de caminhos equivalentes $(\sigma, \lambda_\sigma(h), \sigma^{-1}, (k_\sigma(h))^{-1}) \simeq (1)$, onde $1 \in G_{s_\sigma}$ e $(g, \sigma, 1, \sigma^{-1}, g') \simeq (gg')$. Se $v$ é um vértice de $X$ então a classe homotópica de caminhos fechados até $v$ formam um grupo junto com operações de concatenação de representantes, o qual denotamos por $\pi_1(\mathcal{G}, \Gamma, v)$ e é chamado grupo fundamental de $(\mathcal{G}, \Gamma)$. Obviamente se todos os grupos de vértice são triviais então $\pi_1(\mathcal{G}, \Gamma, v)$ é o grupo fundamental usual $\pi_1(\Gamma, v)$.*

**Definição 1.3.4** (T-especialização)**.** *Sejam $(\mathcal{G}, \Gamma)$ um grafo de grupos e $T$ uma subárvore maximal de $\Gamma$. Uma T-especialização $(\beta, \beta_1) : (\mathcal{G}, \Gamma) \to K$ de $(\mathcal{G}, \Gamma)$ em um grupo $K$ é um par $(\beta, \beta_1)$ de aplicações:*
*$\beta : \bigcup_{m \in \Gamma} G(m) \to K$ com as seguintes propriedades:*

1. *$\beta_m := \beta|_{G(m)}$ é um homomorfismo para cada $m$.*

2. *$\beta_1(m) = 1, \forall m \in T$*

3. *$\beta_{d_0(e)}(\partial_{0,e}(g)) = \beta_1(e)\beta_{d_1(e)}(\partial_{1,e}(g))\beta_1(e)^{-1}, e \in E(\Gamma)$*

**Definição 1.3.5** (Grupo Fundamental de Grafo de Grupos)**.** *O grupo fundamental de um grafo de grupos $(\mathcal{G}, \Gamma)$ com respeito a $T$ é um grupo $\pi_1(G, \Gamma, T)$ junto com a T-especialização.*

$$(v, v_1) : (\mathcal{G}, \Gamma) \to \pi_1(\mathcal{G}, \Gamma, T)$$

*satisfazendo a seguinte propriedade universal: $\forall$ grupo $K$ e $\forall$ T-especialização $(\beta, \beta_1)$ : $(\mathcal{G}, \Gamma) \to K$, existe um único homomorfismo*
*$\omega : \pi_1(\mathcal{G}, \Gamma, T) \to K$ tal que $\beta = \omega v$ e $\beta_1 = \omega v_1$*

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{G},\Gamma) \arrow[rr, "\nu{,}\nu_1"] \arrow[dr, "\beta{,}\beta_1"'] & & \pi_1(\mathcal{G},\Gamma,T) \arrow[dl, "\exists!\omega"] \\
& K &
\end{tikzcd}$$

**Proposição 1.3.1.** *Aplicando o Teorema de Van-Kampen, temos que:* $\pi_1(\mathcal{G},\Gamma,T) = \langle G(v), t_e | rel(G(v)), t_e\partial$ $\partial_{1,e}(g), \forall g \in G(e), v \in V(\Gamma), t_e = 1, \forall e \in E(T)\rangle$

**Proposição 1.3.2.** *Seja* $(\mathcal{G},\Gamma)$ *um grafo de grupos e* $v$ *um vértice de* $\Gamma$. *Seja* $T$ *uma árvore maximal de* $\Gamma$ *e seja* $E^+(\Gamma)$ *um subconjunto de* $E(\Gamma)$ *contendo exatamente um membro de cada par de arestas inversas de* $\Gamma$. *Então* $\pi_1(\mathcal{G},\Gamma,v)$ *é o grupo obtido do produto livre* $P = (*_{v\in V(\Gamma)}G_v) * F$ *onde* $F$ *é o grupo livre sobre um conjunto* $\{t_\sigma : \sigma \in E^+(\Gamma)\}$ *em correspondência biunívoca com* $E^+(\Gamma)$*, pela adição das relações:*

$$t_\sigma \lambda_\sigma(h) t_\sigma^{-1} = k_\sigma(h), \textit{ para } \sigma \in E^+(X) \textit{ e } h \in G_\sigma, \; t_\sigma = 1 \textit{ para } \sigma \in E(T) \cap E^+(\Gamma).$$

*Demonstração.* Escrevemos $\pi_1(\mathcal{G},\Gamma,T)$ para o quociente de um produto livre $P$ dado pelas relações. Então existe uma função óbvia $p : \pi_1(\mathcal{G},\Gamma,v) \to \pi_1(\mathcal{G},\Gamma,T)$ dado por

$$(G_0\sigma_1^{\varepsilon_1}, g_1, ..., \sigma_n^{\varepsilon_n}, g_n) \mapsto g_0 t_{\sigma_1}^{\varepsilon_1} g_1 ... t_n^{\varepsilon_n} g_n,$$

onde $\varepsilon_i = \pm 1$ e $\sigma_i \in E^+(X), 1 \leq i \leq n$. Consequentemente consideramos uma função $f : P \to \pi_1(\mathcal{G},\Gamma,v)$ dada por

$$x \mapsto (1, \sigma_1, 1, ..., \sigma_r, x, \sigma_r^{-1}, 1, ..., \sigma^{-1}, 1),$$
$$t_\sigma \mapsto (1, \sigma_1, 1, ..., \sigma_r, 1, \sigma, 1, \tau_1, 1, ..., \tau_s, 1))$$

onde no primeiro caso $x \in G_u$ e $(\sigma_1, ..., \sigma_r)$ é um caminho único reduzido em $T$ do ponto base $v$ a $u$ e no segundo caso as sequências de arestas $(\sigma_1, ..., \sigma_r)$ e $(\tau_1, ..., \tau_s)$ definem um caminho reduzido de $v$ a $s(\sigma)$ e de $t(\sigma)$ volta para $v$. Visto que a função é compatível com as relações, $f$ induz um homomorfismo $\tilde{f} : \pi_1(\mathcal{G}, -, \mathcal{T}) \to \pi_1(\mathcal{G},\Gamma,v)$ o qual é inversa da função $p$. □

**Definição 1.3.6.** *[Grafo Universal] Seja* $(\mathcal{G}, Y)$ *um grafo de grupos conexo e* $T$ *subárvore maximal de* $Y$. *O grafo universal de* $\mathcal{G}$ *com respeito a* $T$*,* $\Gamma = \Gamma(\mathcal{G},T)$ *é o grafo com:*

$$V(\Gamma) = \bigcup_{v\in V(\Gamma)} \pi_1(\mathcal{G},\Gamma)/G(v), E(\Gamma) = \bigcup_{e\in E(\Gamma)} \pi_1(\mathcal{G},\Gamma)/G(e),$$

*onde as aplicações de bordo são dadas por:*

- $s(pG(e)) = pG(s(e))$,
- $t(pG(e)) = pt_eG(t(e))$

*onde* $p \in \pi_1(\mathcal{G},\Gamma)$ *e* $e \in E(\Gamma)$. *Isto é fácil ver que* $\Gamma$ *está bem definida, visto que para qualquer* $g \in G(e), pgG(e) = pgs(e)G(e)$

**Teorema 1.3.1.** *Seja* $G$ *o grupo fundamental de um grafo* $(\mathcal{G}, X)$ *de grupos. Qualquer subgrupo* $H$ *de* $G$ *é também o grupo fundamental de um grafo* $(\mathcal{H}, Y)$ *de grupos os quais grupos de vértices e grupos de arestas são respectivamente da forma* $H \cap zG_vz^{-1}$ *e* $H \cap zG_\sigma z^{-1}$*, onde* $G_v$ *e* $G_\sigma$ *são, respectivamente, grupos de vértice e grupos de aresta de* $(\mathcal{G}, X)$.

A prova vem da teoria de grupos agindo em árvores. (Veja [16])

**Teorema 1.3.2.** *Seja o grupo $G$ agindo sem inversões na árvore $X$ e seja $Y = X/G$ um grafo quociente. Para qualquer $v$ e aresta $\sigma$ de $Y$ dado $\tilde{v}$ e $\tilde{\sigma}$ denotando um vértice e uma aresta de $X$ pertencendo sobre $v$ e $\sigma$ respectivamente. Então $G$ é (isomorfo ao) grupo fundamental de um grafo de grupos $(\mathcal{G}, Y)$ os quais os grupos de vértices e grupos de arestas são estabilizadores da forma $G_v$ =Stab$_G(\tilde{v})$ e $G_\sigma$ =Stab$_G(\tilde{\sigma})$, respectivamente.(Veja [16])*

□

**Teorema 1.3.3.** *Um grupo é livre se e somente se ele age livremente sem inverso sobre uma árvore.*

*Demonstração.* O grafo de Cayley, relativo a alguma base livre de qualquer grupo livre, é uma árvore sobre a qual o grupo age livremente no requerido modo por multiplicação a esquerda sobre os vértices. Consequentemente se um grupo $G$ age livremente sobre uma árvore $X$, então tomamos uma topologia menor, e mostraremos que $G$ é um grupo de cobertura transformações de $X$. Logo $G$ é o grupo fundamental do grafo quociente e logo é livre. □

**Corolário 1.3.1.** *Um subgrupo de um grupo livre é livre.*

*Demonstração.* Se um grupo age livremente sobre uma árvore então qualquer subgrupo também age sobre a mesma árvore. □

### 1.3.1 Teorema Estrutural

**Teorema 1.3.4** (Bass-Serre)**.** *Para qualquer grafo de grupos $(\mathcal{G}, Y)$ como na Definição 1.3.2 e uma subárvore maximal $T$ de $Y$, o grafo universal $\Gamma(\mathcal{G}, T)$ é uma árvore.*

**Teorema 1.3.5** (Bass-Serre)**.** *Seja $G$ um grupo agindo sobre um grafo conexo $X$. Escolhe-se um transversal conexo $S$ em $X$ para uma $G$-ação, uma família conexa $(q_e | e \in E(Y))$ para $S$, e uma subárvore $T$ de $S$.*

*Então existe um grafo de grupos conexo $G : X/G \rightarrow$*Groups* definido por $G(\bar{s}) = G_s, s \in S$, onde para cada $e \in E(S)$, a função, $G_e \rightarrow G_{s(e)}, G_{q_e^{-1}s(e)}$ são dados por $g \mapsto g$ e $g \mapsto g^{q_e}$ respectivamente.*

*Para um grupo $\pi = \pi(G, \bar{T})$ existe um homomorfismo sobrejetor (epimorfismo) $\pi \rightarrow G, p \mapsto \hat{p}$, unicamente determinado pela função inclusão $G(\bar{v}) \rightarrow G$ junto com $q_{\bar{e}} \mapsto q_e$,$(v \in V(S), e \in E(S))$.*

*Da árvore $\Gamma = \Gamma(G, \bar{T})$ existe um recobrimento universal $\Gamma \rightarrow X, pG(\bar{s}) \mapsto \hat{p}s$,$(p \in \pi, s \in S)$ com respeito a ação de grupo.*

*E mais, $\Gamma \rightarrow X$ é bijetiva se e somente se $\pi \rightarrow G$ é bijetiva.*

**Proposição 1.3.3.** *[Teorema de Estrutura] Se $X$ é uma árvore então $\pi \rightarrow G$ é um isomorfismo.(Veja [4])*

□

**Proposição 1.3.4.** *Se um grupo $G$ age sobre um grafo $X$ tal que $X/G$ é conexo então para qualquer escolha de um transversal conexo $S$ em $X$ para a $G$-ação, e qualquer escolha de família conexa $(q_e|e \in E(Y))$ para $S$, existe um grafo de grupos conexo $G : \Gamma/G \to \mathcal{G}(m)$. Consequentemente, se $(\mathcal{G}, Y)$ é um grafo de grupos conexo então para qualquer escolha de uma subárvore maximal $T$ de $Y$ existe um grupo $\pi = \pi_1(\mathcal{G}, T)$ agindo sobre um grafo $\Gamma = \Gamma(\mathcal{G}, T)$ tal que $\Gamma/\pi \simeq Y$.*

□

**Teorema 1.3.6.** *Um grupo $G$ é livre se, e somente se, ele age livremente sobre alguma árvore, digamos $X$. Neste evento, $G \cong \pi_1(X/G, T)$ para qualquer subárvore maximal $T$ de $G \setminus X$*

Visto que grupos de vértices triviais correspondem a grupos livres, existe um tipo de dualidade entre grupos de vértices e grupos livres. Agora afirmamos alguns resultados aos dois extremos, para os quais requisitamos as seguintes observações:

**Lema 1.3.1.** *Se $N$ é um subgrupo normal de $G$ então $T/N$ é um $G/N$-grafo conexo e cada $N_t \in T/N$ tem estabilizador $(G/N)_{N_t} = NG_t/N$.*

**Proposição 1.3.5.** *Se $N$ é um subgrupo de $G$ gerado por $G_v, v \in V \cap T$, então $N$ é normal e $G/N$ é livre. Além disso, $T/N$ é um $G/N$-livre $G/N$-árvore e $G/N \approx \pi(T/G)$.*

*Demonstração.* Segue do Teorema de Estrutura 1.3.3 que $G/N \approx \pi(T/G)$. Agora colocaremos $N$ no lugar de $G$. Visto que $N$ é finitamente gerado pelos estabilizadores de vértices $N_v = G_v, v \in V \cap T$, vemos que $\pi(T/N) \approx N/N = 1$. Logo $T/N$ é uma árvore. Pelo Lema 1.3.1, $G/N$ age livremente sobre $N \setminus V \cap T$, e logo sobre $T/N$, então $G/N \approx \pi(T/G)$. □

**Proposição 1.3.6.** *Se um subgrupo $H$ de $G$ não admite qualquer estabilizador de vértice então $H$ age livremente sobre $T$, logo $H$ é livre. Por exemplo, se $H$ é livre de torção e os estabilizadores de vértices são grupos de torções então $H$ é livre.*

□

**Proposição 1.3.7.** *Se $G \to A$ é um homomorfismo de grupos o qual é injetivo sobre cada estabilizador de vértice então o núcleo de $N$ é livre. De fato, $N \approx \pi(X)$ onde $X$ é $G/N$-grafo $N \setminus T$ conexo.*

□

**Proposição 1.3.8.** *Seja $v$ um vértice de $T$. Então $G$ estabiliza um vértice de $T$ se e somente se, existe um inteiro $n$ tal que a distância de $v$ a cada elemento de $G_v$ é no máximo $N$.*

*Demonstração.* Se $G$ estabiliza um vértice $v_0$ de $T$, e a $T$-geodésica p de $v$ a $v_0$ tem comprimento $n$, então para cada $g \in G$ tem um caminho $p$, $gp^{-1}$ de comprimento $2n$ de $v$ a $gv$. Consequentemente, suponha existir um inteiro $N$ tal que para cada $g \in G$ a $T$-geodésica de $v$ a $gv$ tem comprimento no máximo $n$. Seja $T'$ é uma subárvore de $T$ e não tenha um caminho reduzido de comprimento maior que $2n$. Se $T'$ tem no máximo uma aresta então todo elemento de $T'$ é G-estável, e teremos o desejado um vértice G-estável. Logo assumiremos que $T'$ tem no mínimo duas arestas, então algum vértice de $T'$ tem valência no mínimo dois. Agora deletamos de $T'$ todos os vértices de valência 1, e suas arestas coincidentes. Isto nos dá uma $G$-subárvore $T''$ no qual não tem caminho reduzido de comprimento maior que $2n-2$. Por indução, G estabiliza um vértice. $\square$

Vamos considerar os casos em que $G_v$ é finito, e $G$ é finito.

**Corolário 1.3.2.** *Se existe uma G-órbita finita em $V \cap T$ então $G$ estabiliza um vértice de $T$.*

$\square$

**Corolário 1.3.3.** *Um grupo finito agindo sobre uma árvore deve estabilizar um vértice.*

$\square$

# Capítulo 2

# Resultados Parciais

## 2.1 Grupos Limites

Nestas seção introduziremos a definição de grupos limites e para isso começaremos definindo um grupo totalmente residualmente livre, e estabeleceremos os resultados elementares sobre os grupos limites.

**Definição 2.1.1** (1-residualmente livre)**.** *Um grupo $G$ é residualmente livre se, $\forall g \in G \setminus 1$, existe um homomorfismo $f : G \to F$ tal que $f(x) \neq 1$, onde $F$ é um grupo livre de posto $r > 1$.*

**Definição 2.1.2** (Grupos Totalmente Residualmente Livres)**.** *Um grupo $G$ é totalmente residualmente livre ou $\omega$-residualmente livre se, para qualquer conjunto finito $X \subset G$ de elementos distintos existir um homomorfismo $f : G \to F$ onde $F$ é um grupo livre de posto $r > 1$, tal que $f(x) \neq 1, \forall x \in X$, ou equivalentemente, $f|_X$ é injetiva.*

**Observação 2.1.1.** *Como subgrupos de grupos livres são livres. Podemos admitir que o homomorfismo na definição acima é sobrejetor.*

**Exemplo 2.1.1.** *(i) Se $F$ é um grupo livre então $F$ satisfaz trivialmente a definição considerando $f$ como sendo a inclusão.*

*(ii) Seja $A$ um grupo abeliano livre, então qualquer conjunto finito pode ser imerso por um homomorfismo em $\mathbb{Z}$*

$$A \cong \mathbb{Z}^n \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$$

*Em particular, $A$ é totalmente residualmente torre.*

*(iii) Grupo Fundamental de superfícies fechadas de característica de Euler no máximo -2.*

**Definição 2.1.3** (Transitividade Comutativa)**.** *Um grupo $G$ é dito ser transitivo comutativo se o centralizador de qualquer elemento não trivial é abeliano. Ou seja,*

$$\forall a, b, c \in G \setminus \{1\}, [a, b] = [b, c] = 1 \Rightarrow [a, c] = 1.$$

*Em particular, para qualquer subgrupo maximal abeliano $H$ e qualquer elemento $g$ de um grupo transitivo comutativo, o subgrupo $H$ e seu conjugado $gHg^{-1}$ são iguais ou interseptam trivialmente.*

**Definição 2.1.4** (CSA). *Um grupo é chamado CSA se qualquer subgrupo abeliano maximal $H < G$ é malnormal, isto é, para todo $g \in G \setminus H, H \cap gHg^{-1} = \{1\}$.*

A propriedade de comutatividade transitiva foi introduzida por B. Baumslag como um critério para grupos residualmente livres serem totalmente residualmente livres. CSA-grupos (ou Abeliano Completamente Separado) foi definida por A. Myaniskov e V. Remeslennikov em seus estudo de grupos exponenciais. Essas duas propriedades são satisfeitas por grupos livres, e como são fechadas, logo satisfeitas por grupos limites.

**Lema 2.1.1.** *Um grupo CSA é comutativamente transitivo.*

*Demonstração.* Seja $1 \neq g \in G$ um elemento qualquer, mostraremos que o centralizador de $g$ é abeliano. De fato, seja $H = C_G(g)$. Considere $K$ um subgrupo maximal abeliano tal que $1 \neq g \in K \subsetneqq G$. incompleta □

**Proposição 2.1.1.** *Seja G um grupo totalmente residualmente livre.*

1. *Qualquer subgrupo finitamente gerado de G é totalmente residualmente livre.*

2. *G é livre de torção.*

3. *Qualquer dois pares de elementos de G geram um grupo livre ou um grupo abeliano livre.*

4. *G é comutativamente transitivo.*

5. *G é CSA.*

*Demonstração.*

1. Seja $H \leq G$, $H$ finitamente gerado. $H = \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$. Seja $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ pela definição $G$ é totalmente residualmente livre, logo existe $f : G \to F$ para algum grupo livre $F$ com $f(x_i) \neq 1$. Seja $f|_H$ e a definição é claramente satisfeita.

2. Seja $g \in G$ qualquer. Pela Definição 2.1.2, existe um homomorfismo $f : G \to F$ para algum grupo livre com $f(g) \neq 1$. Assim se $g^n = 1$ para algum $n \in \mathbb{N}$ teríamos $f(g^n) = f(1) = 1$, e logo $f(g)^n = 1$, onde $f(g) \neq 1$ no grupo livre $F$, o que é um absurdo

3. Sejam $a, b \in G$ e suponha que $[a, b] \neq 1$. Então existe um epimorfismo $f : \langle a, b \rangle \to F_2$ para um grupo livre de posto 2. Portanto $a, b$ geram um grupo não abeliano livre.

4. Considere $a, y, x \in G$ com $[a, x] = [a, y] = 1$. Pela Definição 1.3.8 para $X = \{1, a, [x, y]\}$, existe um homomorfismo
$$f : G \to F$$
que é injetivo sobre $X$. Agora $f([a, x]) = f([a, y]) = 1$, então $f(x), f(y)$ e $f(a)$ pertencem ao mesmo subgrupo cíclico de $F$. Em particular, $f(x)$ e $f(y)$ comutam, isto é, $f([x, y]) = 1$, mas $f|_X$ é injetiva. Logo $[x, y] = 1$.

5. G é CSA. Seja $H \subset G$ um subgrupo abeliano maximal. Considere $g \in G$, e suponha que exista um elemento não trivial $h \in gHg^{-1} \cap H$. Seja $f : G \to F$ o homomorfismo injetivo sobre o conjunto $\{1, g, h, [g, h]\} = X$, onde $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$. Então se tivermos:

$$f([h, ghg^{-1}]) = 1$$

logo $f(h)$ e $f(ghg^{-1})$ pertencem ao mesmo subgrupo cíclico do grupo livre $F$. Logo isto é possível somente se $f(g)$ também pertence a este subgrupo cíclico o que significa que

$$f([g, h]) = 1$$

E sendo $f|_X$ injetiva, temos que $[g, h] = 1$. Por $(4)$ temos que $g$ comuta com todo elemento de $H$, pois $H$ é abeliano e pela maximalidade de $H$, $g \in H$. Logo $gHg^{-1} \cap H = 1, \forall g \in G \setminus H$.

$\square$

Estas propriedades fornecem exemplos de grupos que não são totalmente residualmente livres.

**Observação 2.1.2.** *(i) Do item 2 da Proposição 2.1.1, qualquer grupo com torção não é totalmente residualmente livre.*

*(ii) Da Propriedade 3, o grupo fundamental da garrafa de Klein (veja no exemplo 1.2.8) não é totalmente residualmente livre.*

*(iii) Produtos diretos não são totalmente residualmente livres. Especialmente, suponha que $G = A \times B$, onde $A$ é não trivial e $B$ não é abeliano. Então $B$ está contido no centralizador de qualquer elemento em $A$, então $G$ não é comutativamente transitivo e portanto não é totalmente residualmente livre. Em particular, $F \times F$ não é totalmente residualmente livre.*

Um exemplo não trivial de grupo que não é totalmente residualmente livre é o grupo fundamental da superfície $\Sigma$ de característica de Euler -1, que tem apresentação:

$$\langle a, b, c | a^2 b^2 c^2 \rangle$$

Pelo artigo de Lyndon em [17], o qual supõe que três elementos de um grupo livre $\mathcal{F}$ satisfazem $a^2b^2c^2 = 1$ e $ab = bc = ca = 1$, então $abc = 1$. Portanto $\pi_1(\Sigma)$ não pode ser totalmente residualmente livre. Na verdade, excluindo-se o grupo fundamental das três mais simples superfícies não orientáveis, todos os grupos superfícies são totalmente residualmente livres. Os grupos residualmente livres desempenham um papel fundamental para estabelecer critérios para um grupo ser um grupo limite, critérios esses obtidos por Kharlampovich-Myasnikov e Sela, então podemos estabelecer a seguinte

**Definição 2.1.5.** *Um grupo totalmente residualmente livre finitamente gerado é chamado grupo limite.*

**Definição 2.1.6.** *Um grupo $G$ totalmente residualmente livre é hiperbólico, se qualquer subgrupo abeliano maximal de $G$ é cíclico.*

**Teorema 2.1.1.** *Seja $G$ um grupo finitamente gerado totalmente residualmente livre. Então $G$ satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *$G$ é finitamente apresentado.*
2. *Todos subgrupos abelianos de $G$ é finitamente gerado.*
3. *Se $G$ não é abeliano, então ele tem uma decomposição cíclica não trivial.*

Essas propriedades são demonstradas nas séries de artigos de Sela e uma prova mais fácil de 1 é devido a Grirardel em [7], o qual mostrou que grupos totalmente residualmente livres agem livremente sobre $\mathbb{R}^n$-árvores.

**Proposição 2.1.2.** *Seja $L$ um grupo limite. Então:*

1. *$L$ é livre de torção.*
2. *Todo subgrupo abeliano de $L$ é finitamente gerado.*
3. *Todo subgrupo abeliano não trivial está contido em um único subgrupo abeliano maximal.*
4. *Se dois elementos não triviais comutam e são conjugados então eles são iguais.*
5. *Raízes são únicas, isto é, $x^n = y^n$ com $n \neq 0$ implica $x = y$.*
6. *$L$ é finitamente apresentado.*
7. *$L$ é coerente, isto é, todo subgrupo finitamente gerado é finitamente apresentado (e ele é um grupo limite)*

Uma classe importante de grupos limites consiste dos $\omega$-residualmente livre torres. Estes grupos que tem descrição explicita e indutiva em termos de colagem de construções de blocos (grafos, superfície, toro) em um certo caminho.

O grupo fundamental de um toro e de uma esfera são grupos limites triviais. O grupo fundamental de uma superfície orientável de posto 2 pode ser escrito como um double $(\langle a, b\rangle)_{*_{[a,b]=[c,d]}}\langle c, d\rangle$, e logo é um grupo limite. Similarmente, o grupo fundamental de uma superfície não orientável de característica de Euler $-2$ é $(\langle a, b\rangle)_{*_{a^2b^2=c^2d^2}}\langle c, d\rangle$ e é um grupo limite. Logo, como subgrupos finitamente gerados de grupos limites são grupos limites, todos grupos superfícies não excepcionais(isto é, diferentes de superfícies não orientáveis de característica de Euler $1, 0, -1$) são grupos limites [Baumslag].

**Exemplo 2.1.2.** *Os primeiros exemplos de grupos totalmente residualmente livres que não são livres, incluindo todos os grupos de superfície não excepcionais, isto é, exceto o grupo fundamental de superfícies não orientáveis de característica de Euler 1,0,-1, foram dados por Gilbert e Benjamin Baumslag em [2]. Eles obtiveram grupos totalmente residualmente livres por extensões livres de centralizadores nos grupos livres. Uma extensão de centralizadores (posto p) de um grupo limite $G$ é um grupo da forma $G_{*_C}(C \times \mathbb{Z}^p)$ onde $C$ é o subgrupo maximal abeliano de $G$.*

**Definição 2.1.7** (co-produto). *Dados espaços $X$ e $Y$ com pontos escolhidos $x_0 \in X$ e $Y_0 \in Y$, então o co-produto $X \vee Y$ é o quociente da união disjunta $X \sqcup Y$ obtido por identificar $x_0$ e $y_0$ a um único ponto. Mais geralmente poderíamos formar um co-produto $\sqcup_\alpha X_\alpha$ de uma coleção arbitrária de espaços $X_\alpha$ começando da união disjunta $\sqcup_\alpha X_\alpha$ e identificando pontos $x_{\alpha \in X_\alpha}$ a um único ponto.*

**Proposição 2.1.3** (Sela; Teorema 5.12). *Assumimos que $G$ é o grupo fundamental do grafo de grupos $\Gamma$ com grupos de vértices finitamente gerados tais que:*

*(i) cada grupo de aresta é um grupo abeliano não trivial o qual sua imagem sobre ambos morfismos de arestas são subgrupos abelianos maximais dos correspondentes grupos de vértices;*

*(ii) $G$ é transitivo comutativo;*

*(iii) existe um epimorfismo $\varphi$ de $G$ para um grupo limite $L$ tal que $\varphi$ é restrita a cada grupo de vértice é injetiva.*

*Então $G$ é um grupo limite.*

## 2.2 Grupos Limites e Torres

Outros resultados realizados na versão de Sela do Teorema fundamental que caracteriza grupos limite como subgrupos finitamente gerados de grupos $\omega$- residualmente livres torres, com estas definições podemos construir indutivamente qualquer grupo limite, esta caracterização difere de Karlampovich e Myaniskov, através de extensões do centralizador a partir de um grupo livre, no sentido que não precisamos passar a um subgrupo . Da construção de Sela é possível construir grupos limites pela colagem de retratos de superfícies. Esta construção são os blocos constituintes para obtermos o que Sela chamou de torres totalmente residualmente livres.

**Definição 2.2.1.** *Um espaço $\omega$-residualmente livre torre de altura $h \in \mathbb{N}$ é definido por indução sobre $h \in \mathbb{N}$. Um grupo $\omega$-residualmente livre torre é o grupo fundamental de um espaço $\omega$-residualmente livre torre.*

**Definição 2.2.2.** *Seja $G$ um grupo e $H$ um subgrupo de $G$. Então $\Gamma$ é um retrato virtual de $H$ se existe um subgrupo de índice finito $K \supset H$ de $G$ e um epimorfismo $\varphi : K \to H$ tal que $\varphi|_H$ é a identidade. Neste caso, $K$ é dito um retrato.*

**Observação 2.2.1.** *A altura 0 torre é o co-produto (1-ponto união) de uma coleção finita de círculos, superfícies hiperbólicas fechadas e Toro $\mathbb{T}^n$ (de dimensão arbitrária), exceto que a superfície fechada de característica de Euler -1 seja excluída.*

Usando a definição acima, podemos considerar um espaço topológico $X$ como obtido pela colagem de uma superfície $\Sigma$ sobre um espaço $Y$ cujo grupo fundamental é um grupo limite $L$, e isto é feito pela identificação das componentes do bordo de $\Sigma$ aos laços não triviais de $Y$.

Se existe $\varphi : X \to Y$ um retrato de $X$ sobre $Y$, enviando um subespaço $\Sigma$ para um subespaço de $Y$ que tem grupo fundamental não abeliano, então o resultado de Sela garante que $\pi_1(X)$ é um grupo limite. E esta construção é dada em cada etapa pela seguinte definição.

**Definição 2.2.3.** *Um espaço $\omega$-residualmente livre torre $Y_h$ de altura $h \in \mathbb{N}$ é obtida de um espaço $\omega$-residualmente livre torre $Y_{h-1}$ atachando-se blocos de um dos seguintes tipos:*

- ***Abeliano:*** *$Y_h$ é obtido de $Y_{h-1} \sqcup \mathbb{T}^m$ pela identificação de um círculo em $\mathbb{T}^m$ com algum laço em $Y_{h-1}$ tal que $\langle c \rangle \cong \mathbb{Z}$ é o subgrupo abeliano maximal de $\pi(Y_{h-1})$.*

- ***Quadrático:*** *tomando uma superfície compacta conexa $\Sigma$ que pode ser um toro perfurado ou uma superfície que tenha característica de Euler no máximo -2, e obtemos $Y_h$ de $Y_{h-1} \sqcup \Sigma$ pela identificação de cada componente da fronteira de $\Sigma$ com um laço homotopicamente não trivial em $Y_{h-1}$. Essas identificações devem ser feitas de modo que exista um retrato $r : Y_h \longrightarrow Y_{h-1}$, e $r_*(\pi_1\Sigma) \subset \pi_1(Y_{h-1})$ deve ser não abeliano.*

**Teorema 2.2.1.** *Um grupo dado é grupo limite se, e somente se, ele é isomorfo à um subgrupo finitamente gerado de um grupo $\omega$-residualmente livre torre.*

**Definição 2.2.4.** *A altura de um grupo limite $S$ é a altura minimal de um grupo $\omega$-residualmente livre torre que tem um subgrupo isomorfo a $S$. Grupos limites de altura 0 são produtos livres de alguns grupos abelianos livres e grupos de superfície de característica de Euler no máximo -2.*

A decomposição descrita no lema seguinte vem do Teorema Seifert-van Kampen associado a adição de blocos finais na construção da torre, que é a essência do Teorema de Sela, que diz que grupos totalmente residualmente livres torres são totalmente residualmente livres.

**Lema 2.2.1.** *O grupo fundamental de um espaço $\omega$-residualmente livre torre de altura $h \geq 1$ decomposto como um grafo de grupos com 2 vértices, onde o grupo de vértice $A_1$ é o grupo fundamental de um espaço $\omega$ -residualmente livre torre de altura $h-1$ e o outro gruplo de vétice $A_2$ é um grupo livre ou abeliano livre de posto finito no mínimo 2; os grupos de arestas são subgrupos cíclicos infinitos maximais de $A_2$. Se $A_2$ é abeliano então existe somente um grupo de aresta e este é um subgrupo abeliano maximal de $A_1$. Visto que um grupo limite arbitrário (e logo um subgrupo arbitrário de um grupo limite) é um subgrupo de um grupo $\omega$-residualmente livre torre, podemos aplicar o Teorema de Bass-Serre para deduzir:*

**Lema 2.2.2.** *Se $S$ é um subgrupo de um grupo limite de altura $h \geq 1$, então $S$ é o grupo fundamental de um grafo bipartido de grupos nos quais os grupos de arestas são cíclicos; os grupos de vértices dividem-se em dois tipos correspondentes a partição bipartida de vértices:*

- *tipo (i): grupos de vértice são isomorfos a subgrupos de um grupo limite de altura (h-1);*

- *tipo (ii) grupos de vértices são todos abelianos ou abeliano livres.*

Restringindo-nos a grupos limites usaremos o seguinte variante da decomposição acima.

**Lema 2.2.3.** *Se $\Gamma$ é um grupo limite livremente indecomponível de altura $h \geq 1$, então ele é o grupo fundamental de um grafo de grupos finito que tem grupos de arestas cíclicos infinitos e tem um grupo de vértice que é um grupo limite não abeliano de altura $\leq h-1$.*

*Demonstração.* Todo grupo limite surge como um subgrupo finitamente gerado de um grupo $\omega$-residualmente livre torre de mesma altura, pelo Teorema 2.2.1. Suponha $L$ um grupo $\omega$-residualmente livre torre de altura h que contem $\Gamma$ como um subgrupo. Visto que $\Gamma$ é finitamente gerado, o grafo de grupos dado pelo Lema 2.2.2 pode ser substituído pelo grafo core $\mathcal{C}$ obtido tomando o quociente de $\Gamma$ por uma subárvore $T'$ $\Gamma$- invariante de $T$, onde $T$ é a árvore standard dada pela teoria de Bass Serre sobre a qual $G$ age. Os grupos de vértices de $\mathcal{C}$ são finitamente gerados, e visto que $\Gamma$ não tem altura $\leq h-1$, então existe pelo menos um grupo de vértice de cada tipo, pelo Lema 2.2.2. Como $\Gamma$ é livremente indecomponível, os grupos de arestas são cíclicos infinitos.

Se o bloco adicionado no topo da torre para $L$ é quadrático, então cada grupo de vértice $L_v$ do tipo (ii) em $\mathcal{C}$ deve ser um grupo livre não abeliano (e logo é um grupo limite de altura $0 \leq h-1$). De fato, os conjugados distintos de um grupo de arestas incidentes em um correspondente grupo de vértice em $L$ são subgrupos cíclicos maximais dos grupos de vértices e geram um subgrupo abeliano livre. Então se $\Gamma_v$ fossem cíclicos, então poderiamos ter uma única aresta incidente $e$ a $v$ e a aplicação $\Gamma_e \longrightarrow \Gamma_v$ ser um isomorfismo, contrariando o fato que $\mathcal{C}$ fosse escolhida ser minimal.

Para completar a prova argumentaremos que se o bloco adicionado no topo da torre para $L$ um bloco abeliano, então cada vértice do tipo (i) em $\mathcal{C}$ é não abeliano.

Portanto $L = A_1 *_{\langle\zeta\rangle} A_2$, como no Lema 2.2.1, onde $\langle\zeta\rangle \cong \mathbb{Z}$. Em $\mathcal{C}$, o grupo de aresta incidente a cada vértice do tipo (i) (os quais são conjugados dos subgrupos de $\langle\zeta\rangle$) intersectam trivialmente e são abelianos maximais. Logo se um grupo de vértice $\Gamma_v$ do tipo (i) fosse abeliano, então ele seria cíclico, podendo ser incidente só em uma aresta $e$, e a inclusão $\Gamma_e \rightarrow \Gamma_v$ seria um isomorfismo. Como acima, isto contrariaria a minimalidade de $\mathcal{C}$. $\square$

## 2.3 Subgrupos Normais na Teoria de Bass-Serre

O Teorema seguinte é devido a J. Tits vide Proposição 24 em [20] e este resultado será enunciado sob a forma mais conveniente na próxima

**Proposição 2.3.1.** *Seja $G$ o grupo fundamental de um grafo de grupos e suponha que $a \in G$ é um elemento hiperbólico, isto é, $a$ age livremente sobre a árvore standard $S(G)$ do grupo $G$. Seja $m = min_{v\in V(S(G))} l[v, av]$ e $T_a = \{v \in V(S(G)) \mid l[v, av] = m\}$, onde $l[v, av]$ é o comprimento da geodésica de $v$ até $av$.*

*Então $T_a$ é o conjunto de vértices de uma reta em $S(G)$, sobre a qual $a$ age como uma translação de amplitude m. Além disso, toda subárvore $\langle a\rangle$-invariante de $S(G)$ contém $T_a$. Na verdade, $T_a$ é chamada reta de Tits correspondente ao elemento hiperbólico $a$.*

**Proposição 2.3.2.** *Se um grupo finitamente gerado $\Gamma$ age por isometrias numa árvore $T$, então ou $\Gamma$ fixa um ponto de $T$ ou $\Gamma$ contém uma isometria hiperbólica.*

Na última parte da Proposição 2.3.2, a união dos eixos dos elementos hiperbólicos é a única subárvore $\Gamma$-invariante minimal de $T$, pela Proposição 2.3.1. A primeira parte da afirmação na Proposição 2.3.2 surge, por exemplo, quando $T = G_0 *_A G_1$ e $A$ é normal em ambos $G_0$ e $G_1$. E a segunda parte surge, por exemplo, quando $\Gamma$ é a amalgamação de $N_0 \rtimes A$, e $N_1 \rtimes A$, e $N = N_0 *_A N_1$.

**Proposição 2.3.3.** *Se o grupo $\Gamma$ decompõe-se sobre o subgrupo $A \subset \Gamma$ e o subgrupo normal $N \lhd \Gamma$ é finitamente gerado, então ou $N \subset A$ ou $NA$ tem índice finito em $\Gamma$.*

*Demonstração.* Considere a ação de $\Gamma$ sobre a árvore $T$, onde $T$ é dada pela Teoria de Bass-Serre e é associada a decomposição de $\Gamma$ sobre $A$. Como qualquer subgrupo de $\Gamma$ também age sobre $T$, temos que $N$ age sobre $T$.

Denotaremos $T^N$ o conjunto dos pontos de $T$ fixados por $N$, mais precisamente $T^N = \{e \in T \,|\, ne = e, \forall n \in N\}$. Temos duas possibilidades a considerar:

- Se $T^N \neq \varnothing$, então $T^N = T$. De fato, sendo $T$ é $\Gamma$-invariante. Segue que $\Gamma$ age sobre $T^N$ e $T^N \subseteq T$, então como $T$ é a menor árvore sobre a qual $\Gamma$ age, temos que $T^N = T$. Assim $T^N = T$ é equivalente a $T = \{e \in T \,|\, ne = e, \forall n \in N\}$. Mas $\Gamma$ decompõe-se sobre $A$, isto é, $\Gamma = G_1 *_A G_2$ e então as arestas da árvore $T$ são conjugadas do subgrupo $A$. Portanto, $N \leq Stab_\Gamma(e) = A$ e isto implica que $N \leq A$.

- Se $T^N = \varnothing$, então pela proposição 2.3.3, $T^N$ contém isometrias hiperbólicas, mais precisamente a união das retas de Tits dada pela Proposição 2.3.2 constitui uma única subárvore $S$ $\Gamma$-invariante minimal de $T$. Como $N$ é normal, $S$ também $\Gamma$-invariante, e pela minimalidade de $T$ como árvore $\Gamma$-invariante sobre a qual $\Gamma$ age, tem-se que $S = T$.

Lembremos que as arestas de $T$ são exatamente as classes laterais de $A$ em $\Gamma$, isto é, $\Gamma/A$ e a ação de cada $g \in \Gamma$ é dada por $g \cdot \gamma A = (g\gamma)A$. Consideremos agora o grafo quociente $X = T/N$, cujas arestas são $E(X) = \{\bar{e} = Ne \,|\, e \in T\} = \{\bar{e} = N\gamma A \,|\, \gamma \in \Gamma\}$, que são precisamente as classes laterais duplas $N \setminus \Gamma/A$. O grupo quociente $\Gamma/N$ age sobre $X$ da maneira natural, isto é, $(\delta N).(\bar{e}) := (\delta N)(N\gamma A) = N\delta\gamma A$. Agora considerando a aplicação quociente $\psi : \Gamma \to \Gamma/N$ temos que o estabilizador de $\bar{e} \in E(X)$ em $X$ é

$$Stab_{\Gamma/N}(\bar{e}) = \psi(Stab_\Gamma(gAg^{-1})), \tag{2.1}$$

pois se $\gamma N \in Stab_{\Gamma/N}(NgA)$, segue que $(\gamma N)(NgA) := N\gamma gA$, mas $\gamma N = \psi(\gamma)$. Vejamos que $\gamma \in \psi(Stab_\Gamma(gAg^{-1}))$. De fato $\gamma N \in Stab_{\Gamma/N}(NgA)$, então $N\gamma gA = NgA$, mas $\gamma N = N\gamma = \psi(\gamma)$. Então $N\gamma gAg^{-1} = NgAg^{-1}$ logo $\psi(\gamma gAg_{-1}) = \psi(gAg^{-1})$ e isto implica $g \in \psi(Stab_\Gamma(gAg^{-1}))$.

Reciprocamente se $y = xN = \psi(x) \in \psi(Stab_\Gamma(gAg^{-1}))$, então $xgAg^{-1} = gAg^{-1}$ aplicando-se $\psi$ a esta igualdade temos, $xNgNANg^{-1}N = gNANg^{-1}N$ e isto segue que $xNgANG^{-1} = gANg^{-1}$ daí $(xgN)(AN) = gAN = NxgA = NgA$, portanto $xN = y \in Stab_{\Gamma/N}(NgA)$.

O grupo de aresta $\mathcal{G}(e)$ associado à aresta $e \in T$ é $\mathcal{G}(e) = Stab_{\Gamma/N}(\bar{e}) = Stab_{\Gamma/N}(N\gamma A)$, onde $\gamma \in \Gamma$.

Sabendo que o número de órbitas da árvore é igual ao índice do estabilizador, logo vale:

$$|\mathcal{O}(\bar{e})| < \infty \Longrightarrow |\Gamma/N : \psi(A)| = |\Gamma/N : NA/N| < \infty \tag{2.2}$$

Afirmamos que $X$ é um grafo finito. De fato, visto que $N$ é finitamente gerado, existe um subgrafo compacto $Y \subset X$ tal que a inclusão $i : \mathcal{G}'(Y, \Gamma) \to \mathcal{G}(X, \Gamma)$ induz um isomorfismo entre os grupos fundamentais destes grafos de grupos $\pi_1(\mathcal{G}'(Y, \Gamma)) \cong \pi_1(\mathcal{G}(X, \Gamma))$. E como isomorfismo preserva a (conexa) pré imagem de $Y$ em $T$. Sendo a ação de $N$ sobre $T$ minimal, esta pré-imagem $S'$ é igual a $T$. E assim $X$ é um grafo finito e logo vale 2.2 $|\Gamma : AN| < \infty$. □

# Capítulo 3

# Resultados Principais

## 3.1 Classe de Grupos com Subgrupos Normais Restritos

Nesta seção iremos descrever a larga classe de grupos que tem a propriedade que cada um de seus subgrupos normais finitamente gerado não-trivial é de índice finito. Isto nos dá um caso especial do Teorema 1.

**Teorema 3.1.1.** *Seja $\Gamma$ um grupo limite não abeliano e seja $N \neq \{1\}$ um subgrupo normal. Se $N$ é finitamente gerado, então $\Gamma/N$ é finito.*

Seja $\mathcal{J}$ a classe de grupos que não tem quocientes próprios infinitos, isto é, se $G \in \mathcal{J}$ então para todo $N \lhd G$ não trivial tem-se que $G/N$ é grupo finito. Assim $\mathcal{J}$ é a união das classes dos grupos finitos com a classe dos grupos quase infinitos (à saber, um grupo $G$ é dito quase infinito se todo quociente próprio de $G$ é finito).

Seja $\mathcal{G}$ a menor classe de grupos que contém $\mathbb{Z}$ e todos os produtos livres não-triviais de grupos, satisfazendo a seguinte condição:

(*) Se $H \in \mathcal{G}$ e $A \in \mathcal{J}$, e se $A$ tem índice infinito em $H$, então qualquer produto livre amalgamado da forma $H *_A B$, e qualquer HNN extensão da forma $HNN(H, A, t)$, onde $t$ é uma letra estável, pertencem a classe $\mathcal{G}$.

**Teorema 3.1.2.** *Se $\Gamma \in \mathcal{G}$, então para todo subgrupo normal $N$ finitamente gerado não trivial tem-se que o índice $|\Gamma : N|$ de $N$ em $\Gamma$ é finito.*

*Demonstração.* Seja $\Gamma \in \mathcal{G}$ um grupo arbitrário. Usaremos indução sobre o nível de $\Gamma$ como um subgrupo de $\mathcal{G}$, isto é, sobre o número de passos necessários para obter $\Gamma$ como um produto livre com amalgamação ou como uma HNN extensão dada no item (*).

Se $\Gamma$ é um elemento de $\mathcal{G}$ de nível zero, temos $\Gamma \cong \mathbb{Z}$ ou $\Gamma$ é um produto livre não trivial. Assim no primeiro caso, sendo os subgrupos de $\mathbb{Z}$ da forma $n\mathbb{Z}$, logo $|\mathbb{Z} : n\mathbb{Z}| = n < \infty$; no outro caso, escrevamos $\Gamma = \Gamma_0 *_{\{1\}} B \in \mathcal{G}$ como produto livre não trivial e sendo $1 \neq N \lhd \Gamma$, então da Proposição 2.2.1 temos que $N$ tem índice finito em $\Gamma$ e isto é o passo inicial da indução.

Suponhamos que $\Gamma \in \mathcal{G}$ tem a forma $\Gamma = H *_A B$ ou $\Gamma = HNN(H, A, t)$, onde pela hipótese de indução temos que todo subgrupo normal finitamente gerado de $H$ tem índice finito e por construção de um elemento de $\mathcal{G}$ temos que $A \in \mathcal{J}$ tem índice infinito em $H$.

Seja $N \subset \Gamma$ um subgrupo normal finitamente gerado. Mostraremos que $|\Gamma : N| < \infty$.

Pela Proposição 2.2.1 temos que $N \subset A$ ou $NA$ tem índice finito em $\Gamma$. O primeiro caso é impossível porque $N \subseteq A \subseteq H$, logo isto implicaria $N \subset H$ e pela hipótese de indução $|H : N| < \infty$ e como $|H : N| = |H : A|.|A : N|$, segue que $|H : A|$ é finito, o que contraria a hipótese feita sobre $A$. Resta então que $|\Gamma : NA| < \infty$. Considere o homomorfismo canônico $\varphi : \Gamma \to \Gamma/N$ temos que $|\Gamma/N : AN/N| = |\Gamma : N| < \infty$ e isto significa que $\varphi(A) = AN/N$ tem índice finito em $\Gamma/N$. Mas $A$ não possui quocientes infinitos e,

$$|\Gamma : N| = |\Gamma : NA|.|NA : N| \tag{3.1}$$

Então pelo 2º Teorema do Isomorfismo $AN/N \cong A/N \cap A$ e como $A$ não possui quociente próprio infinito temos duas possibilidades: $|A/N \cap A| < \infty$ ou $A$ é infinito e $A \cap N = \{1\}$.

Se $|A : N \cap A| < \infty$, então $NA/N$ é finito e assim $|\Gamma : N| = |\Gamma : NA|.|NA : N| < \infty$ como queríamos. Mostraremos que $A$ é infinito e $N \cap A = \{1\}$ é impossível. De fato, observe que $NA/N$ tem índice finito em $\Gamma/N$, e sabemos que $H \cap N$ é não trivial.

Considere a ação de $\Gamma$ sobre a árvore standard $X$, onde $V(X) = \Gamma/H \cup \Gamma/B$, isto é, as classes laterais de $\Gamma/H$ e $\Gamma/B$ e $E(X) = \Gamma/A$, isto é, as classes laterais de $A$ em $\Gamma$.

A ação de $\Gamma$ sobre $X$ é dada por $\gamma(e) := (\gamma g)A$. Sendo $N$ um subgrupo de $\Gamma$, temos que $N$ age sobre $X$. Sejam $X_H$ e $X_B$ conjuntos de representantes para as classes laterais de $\Gamma/H$ e para $\Gamma/B$ respectivamente. Se $\gamma \in X_H$ e $\delta \in X_B$, indiquemos por

$$\begin{aligned} H_\gamma &:= N \cap (\gamma H \gamma^{-1}) \\ B_\delta &:= N \cap (\delta B \delta^{-1}). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Note que os grupos dados em 3.2 são os estabilizadores de $\gamma \in X_H$ e $\gamma \in X_B$ sobre a ação natural de N sobre $\Gamma/H$ e $\Gamma/B$. Como $A \cap N = 1$ isto significa que $N \cap (gAg^{-1}) = (gNg^{-1}) \cap (gAg^{-1}) = g(N \cap A)g^{-1} = g1g^{-1} = 1$. Logo $N$ intersepta cada conjugado de $A$ trivialmente. Pelo Teorema de Kurosh 1.2.9, temos que

$$N = (*_{\gamma \in X_H} H_\gamma) * (*_{\delta \in X_B} B_\delta) * F. \tag{3.3}$$

Portanto a decomposição de $N$ como grupo fundamental de um grafo de grupos tem grupos de arestas triviais. Em 3.3 temos que um dos fatores livres é $H \cap N$ (obtido quando $\gamma = 1$), isto é, um dos grupos de vértice. Assim $H \cap N$ é um fator livre do grupo finitamente gerado $N$, e então $H \cap N$ é finitamente gerado, pelo Teorema de Grusko-Neumann 1.2.10. Portanto $H \cap N < H$ finitamente gerado, então pela hipótese de indução, segue que $|H : (H \cap N)| < \infty$. Logo, $|A : (A \cap N)| < \infty$, mas $A \cap N = 1$ e $|A|$ é infinito, o que é uma contradição. $\square$

Agora para obtermos o teorema 3.1.1 basta mostrar que um grupo limite não abeliano pertence a classe $\mathcal{G}$.

**Proposição 3.1.1.** *Todo grupo limite não abeliano pertence a $\mathcal{G}$.*

*Demonstração.* Isto segue facilmente do fato que um grupo limite arbitrário $\Gamma$ é um subgrupo de um grupo $\omega$-residualmente livre torre grupo $\Gamma_0$.

Um grupo limite não abeliano de altura zero é ou um produto livre não trivial ou um grupo de superfície de característica de Euler no máximo -2 (o qual portanto decompõe-se como $HNN$-extensão$(F, \mathbb{Z}, t)$ com $F$ livre). Como tais grupos claramente pertencem a $\mathcal{G}$, então podemos assumir que a torre tem altura $h \geq 1$ e que $\Gamma$ é livremente indecomponível.

Aplicando o Lema $2.2.3$ à $\Gamma$, temos que $\Gamma$ é o grupo fundamental $\pi_1(\mathcal{C})$ de um grafo de grupos finito que tem grupos de arestas cíclico infinito e grupo de vértices $\Gamma_v$, e este grupo é um grupo limite de altura $\leq h - 1$. Aplicando a indução a $\Gamma_v$ temos que $\Gamma_v \in \mathcal{G}$. Colapsando os vértices restantes de $\mathcal{C}$ a um único vértice (veja 1.2.10), podemos expressar $\Gamma$ como grupo fundamental de um grafo de grupos com 2 vértices, onde um grupo de vértice é $\Gamma_v$ e o outro é o grupo fundamental de todos os subgrafos de grupos gerado pelos vértices restantes de $\mathcal{C}$; os grupos de arestas são cíclicos. Fazendo-se uma segunda indução sobre o número de arestas na decomposição podemos completar a demonstração. $\square$

## 3.2 Normalizadores são finitamente gerados

Nesta seção provaremos o Teorema $(1)$, que enunciaremos a seguir.

**Teorema 1:** Se $\Gamma$ é um grupo limite e $H \subset \Gamma$ é um subgrupo não trivial finitamente gerado de $\Gamma$, então $H$ tem índice finito em seu normalizador ou o normalizador de $H$ é abeliano.

**Demonstração do Teorema 1**

Como os subgrupos de grupos livres totalmente residualmente livre são totalmente residualmente livres, subgrupos finitamente gerados de grupos limites são grupos limites. Portanto o Teorema 1 é uma consequência do Teorema 3.1.1 e do seguinte Teorema abaixo dado em [2].

**Teorema 3.2.1.** *Se $\Gamma$ é um grupo limite e $H \subset \Gamma$ é um subgrupo finitamente gerado, então o normalizador em $\Gamma$ de $H$ é finitamente gerado.*

A demonstração do Teorema 1, então pode ser descrita como segue. Sendo $H$ um subgrupo finitamente gerado do grupo limite $\Gamma$, então pelo Teorema 3.2.1 $N_\Gamma(H)$ é finitamente gerado. Logo existem duas possibilidades a considerar:

- Se o normalizador $N_\Gamma(H)$ de $H$ em $\Gamma$ é abeliano, neste caso não há o que provar.
- Se o normalizador $N_\Gamma(H)$ de $H$ em $\Gamma$ não é abeliano, usamos o Teorema 3.1.1 aplicado a $1 \neq H$ e e $N_\Gamma(H)$, e sendo $H$ finitamente gerado, então $|N_\Gamma(H) : H| < \infty$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Agora aplicaremos o Teorema 1 e o Teorema 3.2.1 para o estudos de produtos subdiretos de grupos limites. No teorema a seguir o subgrupo $S$ não é considerado necessariamente finitamente gerado e é mais conhecido como *Teorema da Decomposição*.

**Teorema 2:** Suponha que $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ são grupos limites e seja $S \leq \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \cdots \times \Gamma_n$ qualquer. Se $L_i = \Gamma_i \cap S$ é não trivial e finitamente gerado para $i = 1, 2, \ldots, r$, onde $r \leq n$, então existe um subgrupo $S_0$ de índice finito em $S$ que se decompõe como um produto direto $S_0 = L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_r \times (S_0 \cap G_r)$, onde $G_r = \Gamma_{r+1} \times \times \cdots \times \Gamma_n$.

**Demonstração do Teorema 2**

Seja $P_i : \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \cdots \times \Gamma_n \to \Gamma_i$ a projeção sobre $\Gamma_i$, chamemos $P_i = \pi(S)$, Como $L_i = \Gamma_i \cap S \lhd S$, segue que $L_i = \Gamma_i \cap S \lhd P_i$. Agora como subgrupos finitamente gerados de grupos limites são grupos limites, então do Teorema 3.1.1 que $L_i$ tem índice finito em $P_i$. Temos que mostrar que $D = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \cdots \times \Gamma_n$ tem índice finito na projeção de $S$ sobre $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \cdots \times \Gamma_r$. Assim a imagem inversa de $S_0 \subset S$ de $D$ tem índice finito, e a decomposição da sequência exata

$$1 \to (S_0 \cap G_r) \to S_0 \to D \to 1$$

da projeção, e assim obtemos a decomposição em produto direto para $S_0$. $\square$

# Referências Bibliográficas


[1] BAUMSLAG, B.; *Residually Free Groups*, Proc. London Math. Soc. (3) 17 (1967),402-418.

[2] BRIDSON, M. R.; HOWIE, J.; *Normalisers in limit groups*. Mathmatics subject classification. 2000.

[3] CHAMPETIER, C.; GUIRARDEL, V.; *Limit groups as limits of free groups: compactifying the set of free groups*. Survey. 2006.

[4] DICKS, W.; *Groups, Trees and Projetive Modules*. Lecture Notes in Mathematics. New York: Springer-Verlag. 1980.

[5] DICKS, W.; *Groups acting on graphs*. Editorial Board. Cambridge University Press. 1989.

[6] DUMMIT, D. S.; FOOTE, R. M.; *Abstract Algebra*, Third Edition. United States of America: John Wiley and Sons. 2004.

[7] GUIRARDEL, V.; *Limit groups and groups acting on* $\mathbb{R}^n$*-trees*. http://hal.ccsd.cnrs.fr/view;ccsd-00000428/fr, 2003.

[8] HATCHER, A.; *Algebraic Topology*. English Translation. New York: Gordon and Breach. 1961.

[9] HURGERFORD, T. W.; *Algebra*. Springer. 1974. Páginas: 60-78

[10] JOHBSON, D. L.; *Presentation of Groups*. Second Edition. Cambridge: London Mathematical Society. University Press. 1997.

[11] KARLAMPOVICH, O.; MYANISKOV, A.; *Irreducible affine varieties over a free group I. Irreducibility of quadratic equations and nullstellensatz*. J. Algebra, 200(2) 472-516, 1998.

[12] KARLAMPOVICH, O.; MYANISKOV, A.; *Irreducible affine varieties over a free group II. Systems in triangular quasi-quadratic form and description of residually free groups*. J. Algebra, 200(2) 517-570, 1998.

[13] LIMA, E. L.; *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada. 1998.

[14] MAGNUS, W.; DARRASS, A.; SOLITAR, D.; *Combinatorial Group Theory: Presentations of groups en terms of generators and relations*. Second Revised Edition. New York: Dover Publications. 1996.

[15] MAY, J. P.; *A Concise Course in Algebraic Topology*.

[16] PARSHIN, A. N.; SHAFAREVICH, I. R.; *Algebra VII - Combinatorial Group Theory, Applications to Geometry. Volume 58*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 1993.

[17] R. C., Lyndon; *the equation* $a^2b^2 = c^2$ *in free groups*. Michigan Math. J, 6:89-95, 1959.

[18] REMESLENNIKOV, V.N.; $\exists$*-free groups, Sibirisk*. Math. Zh. 30 (1989), no. 6, 193-197.

[19] ROTMAN, Joseph J.; *An introduction to the Theory of Groups*. Fourth Edition. New York: Springer-Verlag. 1995.

[20] SERRE, J. P.; *Trees*. Fourth Edition. New York: Springer-Verlag. 2003.

[21] SELA, Z.; *Diophantine geometry over groups I. Makanin-Razborov diagrams*. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., páginas 31-105, 2001.

[22] SELA, Z.; *Diophantine geometry over groups II. Completions, closures and formal solutions*. Israel J. Math., (134) 173-254, 2003.