UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

SUPERFÍCIES COM VETOR CURVATURA MÉDIA PARALELO EM $S^n \times \mathbb{R}$ E $H^n \times \mathbb{R}$

Gabriela Wanderley Santos das Neves

MANAUS

2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Gabriela Wanderley Santos das Neves

SUPERFÍCIES COM VETOR CURVATURA MÉDIA PARALELO EM $S^n \times \mathbb{R}$ E $H^n \times \mathbb{R}$

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial.

Orientador: Prof^o. Dr. Renato de Azevedo Tribuzy

MANAUS
2008

Ao meu pai, Carlos Wanderley,
por nunca ter deixado faltar
nada em minha vida.

Gabriela Wanderley Santos das Neves

SUPERFÍCIES COM VETOR CURVATURA MÉDIA PARALELO EM $S^n \times \mathbb{R}$ E $H^n \times \mathbb{R}$

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial.

Manaus, 26 de março de 2008.

BANCA EXAMINADORA

....
Prof^o Dr. Renato de Azevedo Tribuzy, Presidente
Universidade Federal do Amazonas

....
Prof^o Dr. Cícero Augusto Mota Cavalcante, Membro
Universidade Federal do Amazonas

....
Prof^o Dr. Cleon da Silva Barroso, Membro
Universidade Federal do Ceará.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço à Deus pela vida e por iluminar sempre o meu caminho.

À minha família, em especial aos meus pais, Carlos Wanderley e Verônica Albuquerque, irmãos, Rodrigo e Socorro Wanderley e marido, Cleber Santos, pelo presente mais importante que eles me deram, o amor.

Aos meus amigos, pelo companherismo e amizade verdadeira.

Aos meus professores e mestres, por ter me ensinado muito mais que matématica, em especial ao Professor Dr. Alfredo Wagner.

Ao Professor Dr. Renato Tribuzy, pela paciência e compreensão.

E a todos que de modo direto ou indireto, contribuíram para o êxito deste trabalho.

RESUMO

SUPERFÍCIES COM VETOR CURVATURA MÉDIA PARALELO EM $S^n \times \mathbb{R}$ E $H^n \times \mathbb{R}$

Neste trabalho, daremos uma demonstração detalhada dos resultados obtidos por Hilário Alencar, Manfredo do Carmo e Renato Tribuzy em "Um Teorema de Hopf para espaços ambientes com dimensão maior que três", 2008. Mostraremos que é possível reduzir a codimensão de superfícies imersas, com vetor curvatura média constante, no produto de esferas ou espaços hiperbólicos com a reta. Além disso, assumindo que a superfície é homeomorfa à esfera, daremos uma descrição geométrica da imersão.

ABSTRACT

SURFACES WITH MEAN CURVATURE VECTOR PARALLEL IN $S^n \times \mathbb{R}$ E $H^n \times \mathbb{R}$

This dissertation is concerned with a detailed demonstration for the results obtained by Alencar, Do Carmo and Tribuzy in their article "A Hopf Theorem for ambient space of dimensions higher than three", to be published in 2008. The possibility of reduction of codimension, for immersed surfaces with constant mean curvature vector into a product of spheres or into a product between a hyperbolic space with straight line, is proved to be true. Moreover, if the surface is assumed to be homeomorphic to the sphere, a geometric description of the immersion is given.

Sumário

Introdução

O teorema de Hopf (1951) afirma que se uma superfície M compacta homeomorfa à esfera está imersa em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média H constante, então M é isométrica à uma esfera redonda. Em 1956, Alexandrov provou que a esfera é a única superfície compacta e mergulhada em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média constante.

Em 2004, Abresch e Rosenberg [1] consideraram uma superfície M imersa em $E_c^2 \times \mathbb{R}$, onde E_c^2 é uma variedade Riemanniana de dimensão 2, completa, simplesmente conexa, com curvatura constante c e introduziram em M a forma quadrática $Q(X,Y) = 2\langle \alpha(X,Y), H\rangle - c\langle X, \gamma\rangle\langle Y, \gamma\rangle$, onde X e Y são vetores tangentes a M, α é a segunda forma fundamental e γ é um vetor unitário tangente a $E_c^2 \times \mathbb{R}$ na direção de $\mathbb{R}$. Eles mostraram que $Q^{(2,0)}$((2,0)-componente de Q) é holomorfa se, e somente se H é constante.

Além disso, usando esse resultado, eles provaram que as superfícies com gênero zero imersas em $S^n \times \mathbb{R}$ e $H^n \times \mathbb{R}$ com curvatura média constante, são esferas mergulhadas e invariantes por rotação do espaço ambiente.

Em 2007, Hilário Alencar, Manfredo do Carmo e Renato Tribuzy [4], mostraram que se $\mid dH \mid \leq g \mid Q^{(2,0)} \mid$, onde g é uma função real não-negativa e contínua, então Q é identicamente nula e M é uma superfície invariante por rotações mergulhada em $E_c^2 \times \mathbb{R}$.

Nesse trabalho vamos olhar para espaços ambientes com dimensões maiores. Ou seja, vamos estudar o caso onde $x : M^2 \to E_c^n \times \mathbb{R}$ é uma superfície imersa em $E_c^n \times \mathbb{R}$, onde E_c^n é uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante $c \neq 0$ e assumir que o vetor curvatura médio H é diferente de zero e paralelo no fibrado normal.

O objetivo desse trabalho é dar uma prova detalhada dos seguintes resultados em [3]:

Primeiro Teorema Principal. Sejam M uma superfície conexa e E_c^n uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante $c \neq 0$ e seja $x : M \to E_c^n \times \mathbb{R}$ uma imersão com vetor curvatura média paralelo. Então uma das seguintes condições é satisfeita:

1. $x(M)$ é uma superfície mínima de uma subvariedade totalmente umbílica de E^n_c;

2. $x(M)$ é uma superfície com curvatura média constante em uma subvariedade totalmete umbílica tri-dimensional de E^n_c;

3. $x(M)$ está contida em $E^4_c \times \mathbb{R}$.

Segundo Teorema Principal. Sejam M uma superfície compacta, homeomorfa à esfera e E^n_c uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante $c \neq 0$ e seja $x : M \to E^n_c \times \mathbb{R}$ uma imersão com vetor curvatura média paralelo. Então uma das seguintes condições é satisfeita:

1. $x(M)$ é uma superfície mínima de uma subvariedade totalmente umbílica de E^n_c;

2. $x(M)$ é uma esfera redonda de uma subvariedade totalmete umbílica tri-dimensional de E^n_c;

3. $x(M)$ é uma esfera redonda de E^3_c;

4. $x(M)$ está contido em $E^4_c \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^6$ (possivelmente com a métrica de Lorentz), e existe um plano P tal que $x(M)$ é invariante pelas rotações desse plano deixando fixo seu complemento ortogonal. E mais, as curvas de nível da função altura $p \to \langle x(p), \gamma \rangle$ são círculos contidos em planos paralelos a P.

Neste trabalho, diferenciável significará de classe C^∞.

Capítulo 1

Generalidades

Neste capítulo apresentaremos as definições e os resultados da teoria de variedades riemannianas, necessários ao desenvolvimento deste trabalho, e fixaremos a notação a ser utilizada nos capítulos posteriores. As demonstrações omitidas podem ser encontradas em [5].

1.1 Variedades Diferenciáveis

Definição 1.1.1. Dizemos que um conjunto M é uma variedade diferenciável n-dimensional se existir uma família de aplicações diferenciáveis e biunívocas $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M, tais que:

1. $M = \bigcup_\alpha \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$;
2. Para todo par α, β com $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = V \neq \emptyset$, os conjuntos $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(V)$ e $\mathbf{x}_\beta^{-1}(V)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ e $\mathbf{x}_\alpha^{-1} \circ \mathbf{x}_\beta$ aí definidas são diferenciáveis.

Usaremos a notação M^n para indicar que M é n-dimensional. O par $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ ou a aplicação $\mathbf{x}_\alpha$ é chamado uma parametrização ou sistema de coordenadas de M em p, com $p \in \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$, e $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ é chamada uma vizinhança coordenada em p.

Observação 1.1.1. Dizemos que um subconjunto $A \subset M$ é um aberto de M se para todo α $x_\alpha^{-1}(A \cap x_\alpha(U_\alpha))$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.1.2. Seja $\varphi : M^m \to N^n$ uma aplicação entre as variedades diferenciáveis M e N. A aplicação φ é dita diferenciável em $p \in M$, se dada uma parametrização $\mathbf{y} : W \subset \mathbb{R}^n \to N$ em $\varphi(p)$ existe uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^m \to M$ em p tal que $\varphi(\mathbf{x}(U)) \subset \mathbf{y}(W)$ e a aplicação

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

é diferenciável em $\mathbf{x}^{-1}(p)$. A aplicação φ é diferenciável num aberto de M se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.

Definição 1.1.3. Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ é chamada uma *curva* diferenciável em M. Suponha que $\alpha(0) = p \in M$ e seja $\mathcal{D}$ o conjunto das funções de M diferenciáveis em p. O vetor tangente à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)f = \left.\tfrac{d(f\circ\alpha)}{dt}\right|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{D}.$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$.

Definição 1.1.4. O conjunto de todos os vetores tangentes às curvas diferenciáveis pertencentes a uma variedade diferenciável M^n passando por p é chamado *espaço tangente* a M^n em p, e representado por T_pM. Mostra-se que o conjunto T_pM com as operações usuais de funções é um espaço vetorial de dimensão n e que a escolha de uma parametrização $\mathbf{x} : U \to M$ em p determina uma base associada $\left\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_0, ..., (\frac{\partial}{\partial x_n})_0\right\}$ em T_pM, e que a estrutura linear nesse espaço, assim definida, não depende da parametrização $\mathbf{x}$.

Definição 1.1.5. (O Fibrado Tangente) Seja M^n uma variedade diferenciável. O conjunto $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_pM\}$, munido com a estrutura diferenciável $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \gamma_\alpha)\}$ sendo $\gamma_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \longrightarrow TM$ definida por:

$$\gamma_\alpha(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha, u_1, ..., u_n) = (\mathbf{x}_\alpha(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha), \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}),$$

onde $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ é a estrutura diferenciável de M, $(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha) \in U_\alpha$ e $(u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$, é chamado fibrado tangente de M.

Proposição 1.1.1. Seja $\varphi : M^m \to N^n$ uma aplicação diferenciável entre as variedades diferenciáveis M^m e N^n. Para cada $p \in M$ e cada $v \in T_pM$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ tal que $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. A aplicação $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ dada por $d\varphi_p(v) = (\varphi \circ \alpha)'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α. Esta aplicação é chamada diferencial de φ em p.

Definição 1.1.6. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \to N$, entre as variedades diferenciáveis M e N, é um difeomorfismo se ela é bijetiva e sua inversa φ^{-1} é diferenciável. φ é um difeomorfismo local em $p \in M$ se existem vizinhanças U de p e V de $\varphi(p)$ tais que $\varphi : U \to V$ é um difeomorfismo.

Definição 1.1.7. Um caminho em uma variedade M é uma aplicação contínua $\xi : [0,1] \to M$. Dizemos que ξ é um caminho fechado em $p \in M$ se $\xi(0) = \xi(1) = p$. Em particular o caminho constante $c_p : [0,1] \to M$ definido por $c_p(s) = p$ para todo $s \in [0,1]$, é um caminho fechado.

Definição 1.1.8. Uma variedade M é chamada conexa quando, dados dois pontos quaisquer $p, q \in M$, existe sempre um caminho ligando p e q, isto é, existe uma aplicação contínua $\xi : [0,1] \to M$, tal que $\xi(0) = p$ e $\xi(1) = q$.

Definição 1.1.9. Uma variedade M é chamada simplesmente conexa se toda curva fechada em M puder ser continuamente deformada em um ponto.

1.2 Campos de Vetores

Definição 1.2.1. Seja M^n uma variedade diferenciável e TM o seu fibrado tangente. A aplicação $X : M \to TM$, que associa a cada ponto $p \in M$ um vetor $X(p) \in T_pM$ é chamada um campo de vetores em M. O campo é diferenciável se a aplicação X é diferenciável. Note que é possível escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde cada $a_i : U \to \mathbb{R}$ é uma função em U. Basta considerar uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ e pegar a base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ de T_pM associada a esta parametrização. Então X será diferenciável se e somente se as funções a_i forem diferenciáveis para qualquer parametrização $\mathbf{x}$.

Com essa idéia é possível pensar em um campo de vetores como uma aplicação $X : \mathcal{D} \to \mathcal{F}$, do anel $\mathcal{D}(M)$ das funções diferenciáveis em M no anel $\mathcal{F}(M)$ das funções em M, definida por

$$(Xf)(p) = \sum_{i} a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

onde f indica, por abuso de notação, a expressão de f na parametrização $\mathbf{x}$. Neste caso é imediato verificar que X é diferenciável se e somente se $X : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, isto é, $Xf \in \mathcal{D}$ para todo $f \in \mathcal{D}$.

Dizemos que uma aplicação f é de classe C^r, se f é r vezes diferenciável e sua r-ésima diferencial é contínua. Dizemos que f é de classe C^∞ se f possui diferencial contínua de todas as ordens.

Indicaremos por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ definidos em M e por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M.

Definição 1.2.2. Sejam X e Y campos vetoriais diferenciáveis em uma variedade diferenciável M. Existe um único campo vetorial Z tal que, para todo $f \in \mathcal{D}(N)$, $Zf = (XY - YX)f$. O campo $Z = XY - YX$ é chamado colchete de X e Y e representado por $[X, Y]$; Z é evidentemente diferenciável.

Vejamos algumas propriedades da operação colchete

Proposição 1.2.1. Se X, Y e Z são campos diferenciáveis em M, a, b são números reais e f, g são funções diferenciáveis, então:

(i) $[X, Y] = -[Y, X]$(anticomutatividade),

(ii) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (linearidade),

(iii) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (identidade de Jacobi),

(iv) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

1.3 Métricas Riemannianas

Definição 1.3.1. Uma *métrica Riemanniana* (ou *estrutura Riemanniana*) em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle , \rangle_p$ (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente T_pM, de modo que ao tomarmos uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ de M em p, a função $g_{ij}(x_1, ..., x_n) = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle_q$ é diferenciável em U, onde $q = \mathbf{x}(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{x}(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}_q(0, ..., 1, ..., 0)$.

Pode-se mostrar que uma métrica riemanniana é diferenciável se a função $\langle X, Y \rangle$ é diferenciável em V, para todo par X e Y de campos de vetores diferenciáveis em uma vizinhança V de M. Uma variedade diferenciável M munida de uma métrica riemanniana é denominada variedade riemanniana.

Definição 1.3.2. Um difeomorfismo $f : M \to N$, entre as variedades riemannianas M e N, é chamado uma isometria se:

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \ \textit{para todo } p \in M, \ u, v \in T_pM.$$

Definição 1.3.3. Sejam $\langle , \rangle$ e $\langle\langle , \rangle\rangle$ duas métricas em uma variedade diferenciável M, diz-se que essas métricas são conformes se existe uma função positiva diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$, tal que para todo $p \in M$ e todo $u, v \in T_pM$ se tenha

$$\langle u, v\rangle_p = f(p)\langle\langle u, v\rangle\rangle_p.$$

Proposição 1.3.1. Uma variedade diferenciável M (de Hausdorff e com base enumerável) possui uma métrica riemanniana.

Definição 1.3.4. Seja M^n uma variedade Riemanniana, $p \in M$ e U uma vizinhança de p em M onde é possível definir campos $E_1, ..., E_n \in \mathcal{X}(M^n)$ de modo que em cada $q \in U$, os vetores $\{E_i\}$, $i = 1, ..., n$ formam base ortonormal para T_pM; diremos, neste caso, que $\{E_i\}$ é um *referencial ortonormal* em U.

1.4 Conexões Afins e Riemannianas

Definição 1.4.1. Seja M uma variedade diferenciável. Uma *conexão afim* ∇ em M é uma aplicação

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$$

que se indica por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$, e que para $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ *e* $f, g \in \mathcal{D}(M)$, satisfaz as seguintes propriedades:

i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$

ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$

iii) $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y.$

Proposição 1.4.1. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo de uma curva diferenciável $c : I \to M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c, denominado derivada covariante de V ao longo de c, tal que:

i) $\frac{D}{dt}(V+W)=\frac{DV}{dt}+\frac{DW}{dt}$, onde W é um campo de vetores ao longo de c,

ii) $\frac{D}{dt}(fV)=\frac{df}{dt}V+f\frac{DV}{dt}$, onde f é uma função diferenciável em I,

iii) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathcal{X}(M)$, isto é, $V(t)=Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt}=\nabla_{dc/dt}Y$.

Definição 1.4.2. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Um campo vetorial X ao longo de uma curva $c : I \to M$ é chamado paralelo quando $\frac{DX}{dt}=0$, para todo $t \in I$.

Definição 1.4.3. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica riemanniana $\langle , \rangle$. A conexão é dita *compatível com a métrica* $\langle , \rangle$, quando para toda curva diferenciável c e quaisquer pares de campos de vetores paralelos X e Y ao longo de c, tivermos $\langle X, Y\rangle = constante$.

Proposição 1.4.2. Seja M uma variedade riemanniana. Uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica se e somente se para todo par X e Y de campos de vetores ao longo da curva diferenciável $c : I \to M$ tem-se

$$\frac{d}{dt}\langle X, Y\rangle = \left\langle \frac{DX}{dt}, Y \right\rangle + \left\langle X, \frac{DY}{dt} \right\rangle, \quad t \in I.$$

Definição 1.4.4. Seja M uma variedade riemanniana. Diz-se que uma conexão afim ∇ em M é *simétrica*, se $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, para todo $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Teorema 1.4.1. (Levi-Civita). Dada uma variedade riemanniana M, existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:

i) ∇ é simétrica.

ii) ∇ é compatível com a métrica riemanniana.

Tal conexão é chamada *conexão de Levi-Civita* ou *conexão riemanniana* de M.

1.5 Geodésicas

Nesta seção, M será uma variedade riemanniana munida de sua conexão riemanniana.

Definição 1.5.1. Uma curva parametrizada $\gamma : I \to M$ é uma geodésica em $t_0 \in I$ se $\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = 0$ no ponto t_0. Diz-se que γ é uma geodésica se $\gamma' \neq 0$ e γ for geodésica para todo $t \in I$.

O comprimento do vetor tangente de uma geodésica $\gamma : I \to M$ é constante, pois

$$\frac{d}{dt}\left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2\left\langle \frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right), \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0.$$

O comprimento de arco s de γ de $t_0 \in I$ a $t \in I$ é dado por

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt = c(t - t_0).$$

Portanto o parâmetro de uma geodésica é proporcional ao comprimento de arco. Quando o parâmetro é o próprio comprimento de arco, isto é, $c = 1$, diremos que γ está normalizada.

Proposição 1.5.1. Dado $p \in M$, existem um aberto $V \subset M$, $p \in V$, números $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ e uma aplicação C^∞

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \to M,\ \ \mathcal{U} = \{(q, v);\ q \in V,\ v \in T_qM,\ |v| < \varepsilon\},$$

tais que a curva $t \mapsto \gamma(t, q, v)$, $t \in (-\delta, \delta)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade v, para cada $q \in V$ e cada $v \in T_qM$ com $|v| < \varepsilon$.

Exemplo 1. Todas as geodésicas do $\mathbb{R}^n$ são retas parametrizadas proporcionalmente ao comprimento de arco, pois o espaço tangente a $\mathbb{R}^n$ em p é identificado com $\mathbb{R}^n$ e neste caso a derivada covariante coincide com a derivada usual.

Exemplo 2. Todas as geodésicas da esfera unitária $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ são os círculos máximos parametrizados proporcionalmente ao comprimento de arco. Com efeito, dados $p \in S^n$ e um vetor unitário $v \in T_pS^n$, a intersecção com S^n do plano que contém a origem de $\mathbb{R}^{n+1}$, o ponto p e o vetor v é um círculo máximo que pode ser parametrizado como a geodésica por p com velocidade v. A unicidade segue-se da proposição anterior.

Definição 1.5.2. Uma variedade riemanniana M é (geodesicamente) completa se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.

Observação 1.5.1. É possível provar que toda variedade riemanniana conexa e compacta é completa (cf. teorema de Hopf e Rinow em [5]).

1.6 Curvatura

Definição 1.6.1. Seja M uma variedade riemanniana. A curvatura R de M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $R(X,Y) : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$, dada por

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \quad Z \in \mathcal{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão riemanniana de M.

Exemplo 3. Seja $M = \mathbb{R}^n$, então $R(X,Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$. De fato, seja $Z = (z_1, ..., z_n)$, então $\nabla_X Z = (Xz_1, ..., Xz_n)$ *e* $\nabla_Y Z = (Yz_1, ..., Yz_n)$. Logo

$$\nabla_Y \nabla_X Z = (YXz_1, ..., YXz_n), \ \nabla_X \nabla_Y Z = (XYz_1, ..., XYz_n)$$

e

$$\nabla_{[X,Y]} Z = ([X,Y]z_1, ..., [X,Y]z_n).$$

Portanto

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z = 0.$$

Podemos pensar em R como uma maneira de medir o quanto uma variedade M deixa de ser euclidiana.

Proposição 1.6.1. A curvatura R de uma variedade riemanniana M satifaz:

$i)$ R é bilinear em $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$, isto é,

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1),$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2),$$

$f, g \in \mathcal{D}(M), \ X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M).$

$ii)$ Para todo par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, o operador curvatura $R(X,Y) : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ é linear, isto é,

$$R(X,Y)(Z + W) = R(X,Y)Z + R(X,Y)W,$$

$$R(X,Y)fZ = fR(X,Y)Z,$$

$f \in \mathcal{D}(M),\ Z, W \in \mathcal{X}(M)$.

Proposição 1.6.2. (Primeira Identidade de Bianchi) Para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ é válida a relação

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$$

Proposição 1.6.3. Para todo $X, Y, Z, T \in \mathcal{X}(M)$ são válidas as relações

a) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle + \langle R(Y,Z)X, T\rangle + \langle R(Z,X)Y, T\rangle = 0.$
b) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(Y,X)Z, T\rangle.$
c) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(X,Y)T, Z\rangle.$
d) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = \langle R(Z,T)X, Y\rangle.$

1.7 Curvatura Seccional

Definição 1.7.1. Sejam M uma variedade riemanniana, $p \in M$, $\beta \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente T_pM e $\{x, y\}$ uma base qualquer de β. A curvatura seccional de β em p, $K(\beta) = K(x, y)$, é por definição

$$K(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{|x \wedge y|^2},$$

onde $|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2}$, representa a área do paralelogramo bi-dimensional determinado pelos vetores $x, y \in \beta$. Esta definição não depende da escolha dos vetores $x, y \in \beta$. De fato, observemos inicialmente que podemos passar da base $\{x, y\}$ de β para qualquer outra base $\{x', y'\}$ por iteração das seguintes transformações elementares:
a) $\{x, y\} \longrightarrow \{y, x\}$,
b) $\{x, y\} \longrightarrow \{\lambda x, y\}$,
c) $\{x, y\} \longrightarrow \{x + \lambda y, y\}$.

Agora veremos que $K(x, y)$ é invariante por tais transformações, o que demonstra o afirmado. Para o que se segue denotaremos $\langle K(x, y)x,\ y\rangle$ por (x, y, x, y).
a)$K(y,x) = \frac{(y,x,y,x)}{|y\wedge x|^2} = \frac{(x,y,x,y)}{|x\wedge y|^2} = K(x,y)$

b)$K(\lambda x,y) = \frac{(\lambda x,y,\lambda x,y)}{|\lambda x\wedge y|^2} = \frac{\lambda^2(x,y,x,y)}{\lambda^2|x\wedge y|^2} = K(x,y)$

$$
\begin{aligned}
c) K(x+\lambda y, y) &= \tfrac{(x+\lambda y, y, x+\lambda y, y)}{|(x+\lambda y)\wedge y|^2} \\
&= \tfrac{(x,y,x,y)+(x,y,\lambda y,y)+(\lambda y,y,x,y)+(\lambda y,y,\lambda y,y)}{|x\wedge y+\lambda y\wedge y|^2} \\
&= \tfrac{(x,y,x,y)}{|x\wedge y|^2} \\
&= K(x,y).
\end{aligned}
$$

□

A importância da curvatura seccional é que o conhecimento de $K(\beta)$, para todo β, determina completamente a curvatura R de M.

A partir de agora, escreveremos por simplicidade, $\langle R(x,y)z,t\rangle = (x,y,z,t)$.

Lema 1.7.1. Seja W um espaço vetorial n-dimensional ($n \geq 2$), munido de um produto interno $\langle , \rangle$. Sejam $R : W \times W \times W \to W$ e $T : W \times W \times W \to W$ aplicações tri-lineares tais que as condições (a), (b), (c) e (d) da proposição 1.6.3 sejam satisfeitas para R e T. Se $\{x, y\}$ é uma base de β, escrevamos

$$K(\beta) = \frac{\langle R(x,y)x,y\rangle}{|x\wedge y|^2}, \quad K'(\beta) = \frac{\langle T(x,y)x,y\rangle}{|x\wedge y|^2}.$$

Se para todo $\beta \subset W$, $K(\beta) = K'(\beta)$, então R=T.

Demonstração: Basta provar que $\langle R(x,y)z,t\rangle = \langle T(x,y)z,t\rangle$ para quaisquer $x,y,z,t \in W$. Escrevendo $(x,y,z,t) = \langle R(x,y)z,t\rangle$ e $(x,y,z,t)' = \langle T(x,y)z,t\rangle$, tem-se, por hipótese, $(x,y,x,y) = (x,y,x,y)' \ \forall x,y \in W$, logo

$$(x+z, y, x+z, y) = (x+z, y, x+z, y)'$$

o que implica

$$(x,y,x,y) + 2(x,y,z,y) + (z,y,z,y) = (x,y,x,y)' + 2(x,y,z,y)' + (z,y,z,y)'$$

e, portanto

$$(x,y,z,y) = (x,y,z,y)' \quad \forall x,y,z \in W.$$

Assim

$$(x, y+t, z, y+t) = (x, y+t, z, y+t)',$$

o que implica

$$(x,y,z,t) - (x,y,z,t)' = (y,z,x,t) - (y,z,x,t)',$$

e a expressão $(x,y,z,t)-(x,y,z,t)'$ é invariante por permutações cíclicas dos três primeiros elementos. Portanto

$$\begin{aligned}
3[(x,y,z,t)-(x,y,z,t)'] &= (x,y,z,t)-(x,y,z,t)'+(x,y,z,t) \\
&\quad -(x,y,z,t)'+(x,y,z,t)-(x,y,z,t)' \\
&= (x,y,z,t)-(x,y,z,t)'+(y,z,x,t) \\
&\quad -(y,z,x,t)'+(z,x,y,t)-(z,x,y,t)' \\
&= (x,y,z,t)+(y,z,x,t)+(z,x,y,t) \\
&\quad -[(x,y,z,t)'+(y,z,x,t)'+(z,x,y,t)'] \\
&= 0 \ \ (por\ (a)\ da \text{ proposição 1.6.3}),
\end{aligned}$$

logo

$$(x,y,z,t)=(x,y,z,t)'$$

para todo $x,y,z,t \in W$.

□

Um exemplo de um espaço de curvatura seccional constante é o *espaço hiperbólico* $H^n = \{(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$. Em [5], mostra-se que H^n é um espaço de curvatura seccional constante igual a -1. É possível mergulhar o espaço hiperbólico H^n em $\mathbb{R}^{n+1}$ com a *métrica de Lorentz* definida por

$$g_{ij}(x_1,...x_n) = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}.$$

Observe que quando multiplicamos uma métrica Riemanniana por uma constante positiva c, então sua curvatura seccional é multiplicada por $1/c$. Assim, podemos supor que a curvatura seccional constante de uma variedade é 1, 0, ou -1. Na verdade, as únicas variedades Riemannianas simplismente conexas com curvatura seccional constante são $\mathbb{R}^n$ (se $c=0$), H^n (se $c<0$) e S^n (se $c>0$). A demosntração desses fatos pode ser encontrada em [5].

Proposição 1.7.1. Sejam M uma variedade riemanniana e p um ponto de M. Defina uma aplicação trilinear $T : T_pM \times T_pM \times T_pM \longrightarrow T_pM$ por

$$\langle T(X,Y)Z,W\rangle = \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle - \langle Y,Z\rangle\langle X,W\rangle,$$

para todo $X,Y,Z,W \in T_pM$. Então M tem curvatura seccional constante igual a c se e somente se $R = cT$, onde R é a curvatura de M.

Demonstração: Suponha que $K(p,\beta) = c \ \ \forall\ \beta \subset T_pM$, então

$$c = K(p,\beta) = \frac{\langle R(X,Y)X,Y\rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2}$$

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)X,Y\rangle &= c(|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2)\\ &= c(\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle Y,X\rangle\langle X,Y\rangle)\\ &= c\langle T(X,Y)X,Y\rangle\end{aligned}$$

e como T satisfaz as propriedades (a), (b), (c) e (d) da proposição 1.6.3 podemos utilizar o lema 1.7.1 para concluir que

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = c\langle T(X,Y)Z,W\rangle$$

para todo $X,Y,Z,W \in T_pM$. A reciproca é imediata. □

Corolário 1.7.1. Seja M uma variedade riemanniana de curvatura seccional constante c e seja R a curvatura de M, então podemos escrever

$$R(X,Y)Z = c(\langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X)$$

Demonstração: Pela proposição anterior

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z,W\rangle &= c\langle T(X,Y)Z,W\rangle\\ &= c(\langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle) - \langle Y,Z\rangle\langle X,W\rangle),\end{aligned}$$

logo

$$\langle R(X,Y)Z - c\langle X,Z\rangle Y + c\langle Y,Z\rangle X\ ,\ W\rangle = 0,$$

portanto

$$R(X,Y)Z = c\langle X,Z\rangle Y - c\langle Y,Z\rangle X.$$

□

Definição 1.7.2. Seja M uma variedade Riemanniana. M é um *espaço simétrico* se $\nabla R = 0$, onde R é o tensor curvatura de M.

Definição 1.7.3. Sejam M_1 e M_2 variedades Riemannianas e considere o produto $M_1 \times M_2$ com a métrica produto. Sejam ∇^1 e ∇^2 as conexões Riemannianas de M_1 e M_2 respectivamente. Então a conexão Riemanniana ∇ de $M_1 \times M_2$ é dada por $\nabla_{Y_1+Y_2}(X_1+X_2) = \nabla^1_{Y_1}X_1 + \nabla^2_{Y_2}X_2$, $X_1, Y_1 \in \mathcal{X}(M_1)$, $X_2, Y_2 \in \mathcal{X}(M_2)$.

Proposição 1.7.2. $E^n_c \times \mathbb{R}$ é simétrica.

Demonstração. Seja $\widetilde{\nabla}$ a conexão de $E^n_c \times \mathbb{R}$. Como E^n_c é uma variedade com curvatura seccional constante, segue da definição de curvatura que E^n_c é simétrica. Pelo exemplo 3 da seção (1.6) do Capítulo 1 temos que $\mathbb{R}$ também é uma variedade simétrica. Assim, pela definição anterior, temos que $\widetilde{\nabla} R = 0$.

□

1.8 Tensores em Variedades Riemannianas

Definição 1.8.1. Um tensor T em uma variedade riemanniana é uma aplicação multilinear

$$T : \underbrace{\mathcal{X}(M) \times ... \times \mathcal{X}(M)}_{r-fatores} \to \mathcal{D}(M).$$

Isto quer dizer que, dados $Y_1, ..., Y_r \in \mathcal{X}(M),\ T(Y_1, ..., Y_r)$, é uma função diferenciável em M, e que T é linear em cada argumento, isto é,

$$T(Y_1, ..., fX + gY, ..., Y_r) = fT(Y_1, ..., X, ..., Y_r) + gT(Y_1, ..., Y, ..., Y_r),$$

para todo $X, Y \in \mathcal{X}(M),\ f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Definição 1.8.2. Seja T um tensor de ordem r. A diferencial covariante ∇T de T é um tensor de ordem $(r+1)$ dada por

$$\nabla T(Y_1, ..., Y_r, Z) = Z(T(Y_1, ..., Y_r)) - T(\nabla_Z Y_1, ..., Y_r) - ... - T(Y_1, ..., \nabla_Z Y_r).$$

Para cada $Z \in \mathcal{X}(M)$, a derivada covariante $\nabla_Z T$ de T em relação a Z é um tensor de ordem r dado por

$$\nabla_Z T(Y_1, ..., Y_r) = \nabla T(Y_1, ..., Y_r, Z).$$

1.9 Fibrados Vetoriais

Definição 1.9.1. Sejam E e M variedades diferenciáveis e seja $\rho : E \to M$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que ρ é um *fibrado vetorial* de dimensão k quando para cada $p \in M$,

$i)$ $\rho^{-1}(p)$ é um espaço vetorial real de dimensão k; e

$ii)$ existe uma vizinhança aberta U de p em M e um difeomorfismo $\phi : \rho^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ cuja restrição a $\rho^{-1}(q)$ é um isomorfismo sobre $\{q\} \times \mathbb{R}^k$, para cada $q \in U$.

Dado um fibrado vetorial $\rho : E \to M$ e um subconjunto $F \subset E$ tal que a restrição $\rho|_F : F \to M$ é também um fibrado vetorial, dizemos que F é um subfibrado vetorial de E se a inclusão $i : F \to E$ leva $(\rho|_F)^{-1}(p)$ linearmente sobre $\rho^{-1}(p)$, para todo $p \in M$.

Exemplo 4. Seja $TM = \{(p, v_p) \mid p \in M, v_p \in T_pM\}$. A aplicação $\rho : TM \to M$, dada por $\rho(p, v_p) = p$, é um espaço fibrado vetorial, chamado *espaço fibrado tangente*.

Exemplo 5. Sejam $\langle , \rangle$ uma métrica riemanniana em M^m e $N^n \subset M^m$ uma subvariedade de M. Dado $p \in M$, seja $T_pN^{\perp} \subset T_pM$ o subespaço de vetores normais a T_pN; definimos $\omega(N) = \{(p, v_p) | \; p \in N, \; v_p \in T_pN^{\perp}\}$. A aplicação $\rho : \omega(N) \to N$, dada por $\rho(p, v_p) = p$ é um espaço fibrado vetorial, chamado o *espaço fibrado normal*.

Por abuso de linguagem é comum não nos referirmos à aplicação $\rho : E \to M$ quando trabalhamos com fibrados cuja aplicação é natural, mas sim às variedades E e M.

Definição 1.9.2. Seja N um fibrado normal. Dizemos que N é paralelo em relação a conexão normal $\nabla^{\perp}$, ou simplismente paralelo, se $\eta \in N$, então $\nabla^{\perp}_X \eta \in N$ para todo campo tangente X.

Capítulo 2

Imersões Isométricas

Neste capítulo vamos considerar a situação em que $f : M \to \widetilde{M}$ é uma imersão de uma variedade diferenciável M de dimensão n e uma variedade Riemanniana $\widetilde{M}$ de dimensão igual a $k = m + n$ e estudar as relações entre as geometrias de M e $\widetilde{M}$.

2.1 A Segunda Forma Fundamental

Definição 2.1.1. Sejam M^n e $\widetilde{M}^{\,n+m}$ variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $f : M \to \widetilde{M}$ é uma imersão se a diferencial $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\widetilde{M}$ é injetiva para todo $p \in M$. O número m é chamado a codimensão de f. Se, além disto, f é um homeomorfismo sobre $f(M) \subset \widetilde{M}$, onde $f(M)$ tem a topologia induzida por $\widetilde{M}$, diz-se que f é um mergulho. Se $M \subset \widetilde{M}$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow \widetilde{M}$ é um mergulho, diz-se que M é uma subvariedade de $\widetilde{M}$.

Definição 2.1.2. Uma imersão $f : M^n \to \widetilde{M}^{\,n+m}$ entre duas variedades riemannianas com as métricas $\langle\ ,\ \rangle_M$ e $\langle\ ,\ \rangle_{\widetilde{M}}$, respectivamente, é chamada imersão isométrica (ou riemanniana) se:

$$\langle X, Y\rangle_M = \langle df_p(X), df_p(Y)\rangle_{\widetilde{M}}$$

para todo $p \in M$, e todo par $X, Y \in T_pM$.

A métrica riemanniana de $\widetilde{M}$ induz de maneira natural uma métrica riemanniana em M: se $X, Y \in T_pM$, define-se $\langle X,\ Y\rangle_M = \langle df_p(X),\ df_p(Y)\rangle_{\widetilde{M}}$. Nesta situação, f passa a ser uma imersão isométrica de M em $\widetilde{M}$ e a métrica de M é então chamada a métrica induzida por f. Em outras palavras, f é isométrica se a métrica induzida coincide com a métrica original.

Um caso interessante é quando $h : \widetilde{M}^{n+k} \to M^k$ é diferenciável e $q \in M$ é um valor regular de h (isto é, $dh_p : T_p\widetilde{M} \to T_{h(p)}M$ é sobrejetiva para todo $p \in h^{-1}(q)$); é sabido que $h^{-1}(q) \subset \widetilde{M}$ é então uma subvariedade de $\widetilde{M}$ de dimensão n; logo podemos dar-lhe a métrica induzida pela imersão.

Por exemplo, seja $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $h(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1$. Note que h é diferenciável e que 0 é um valor regular de h; e $h^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + ... + x_n^2 = 1\} = S^{n-1}$ é a esfera unitária do $\mathbb{R}^n$. A métrica induzida por $\mathbb{R}^n$ em S^{n-1} é chamada a métrica canônica de S^{n-1}.

Proposição 2.1.1. Seja $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+m}$ uma imersão. Para todo ponto $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que a restrição de f a U é um mergulho sobre $f(U)$.

De acordo com a proposição anterior, podemos identificar U com $f(U)$ e cada vetor $v \in T_qM$, $q \in U$, com $df_q(v) \in T_{f(q)}\widetilde{M}$. Usaremos essas identificações para estender, por exemplo, um campo local (isto é, definido em U) de vetores de M a um campo local (isto é, definido em $\widetilde{U}$) de vetores em $\widetilde{M}$ e também podemos considerar o espaço tangente de M em p como um subespaço do espaço tangente de $\widetilde{M}$ em p e escrever

$$T_p\widetilde{M} = T_pM \oplus T_pM^{\perp}$$

onde, $T_pM^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\widetilde{M}$. Desta decomposição obtemos um fibrado vetorial $TM^{\perp} = \cup_{p \in M} T_pM^{\perp}$, chamado fibrado normal a M.

Deste modo, o fibrado vetorial

$$T\widetilde{M}|_{f(M)} = \{X \in T\widetilde{M} : \pi(X) \in f(M), \text{ onde } \pi : T\widetilde{M} \to \widetilde{M} \text{ é a projeção}\}$$

é a soma direta do fibrado tangente TM com $TM^{\perp}$, isto é

$$T\widetilde{M}|_{f(M)} = TM \oplus TM^{\perp}.$$

Logo podemos considerar as seguintes projeções:

$i)$ Tangencial $(\ )^T : T\widetilde{M} \mid_{f(M)} \to TM$; e

$ii)$ Normal $(\ )^{\perp} : T\widetilde{M} \mid_{f(M)} \to TM^{\perp}$.

Seja ∇ e $\widetilde{\nabla}$ as conexões riemannianas de M e $\widetilde{M}$, respectivamente. Se X,Y são campos locais de vetores em M, e $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ são extensões locais a $\widetilde{M}$, temos que

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} = (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})^{T} + (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})^{\perp}$$

onde, pela unicidade da conexão riemanniana, $(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})^{T} = \nabla_X Y$.

Para o que se segue, indicaremos por $\mathcal{X}(U)^{\perp}$ os campos de vetores normais aos campos tangentes diferenciáveis em U.

Definição 2.1.3. Seja $f : M^n \to \widetilde{M}^{\,n+m}$ uma imersão isométrica. A aplicação $\alpha : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \to \mathcal{X}(U)^{\perp}$ definida por

$$\alpha(X,Y) = \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} - \nabla_X Y,$$

onde para todo X,Y,Z em $\mathcal{X}(U)$ e g em $\mathcal{D}(U)$, tem as seguintes propriedades:

$i)$ $\alpha(X,Y) = \alpha(Y,X)$;
$ii)$ $\alpha(X+Z,Y) = \alpha(X,Y) + \alpha(Z,Y)$;
$iii)$ $\alpha(gX,Y) = g\alpha(X,Y)$.

Isto é, α é simétrica e bilinear sobre $\mathcal{D}(U)$.

Demonstração: Para o que se segue considere $\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z}, \widetilde{g}$, extensões locais a $\widetilde{M}$. E observe que em M, $\widetilde{g} = g$ e $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = [X,Y]$.

$$i)\ \alpha(X,Y) = \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} - \nabla_X Y = [\widetilde{X},\widetilde{Y}] + \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{X} - [X,Y] - \nabla_Y X = \alpha(Y,X).$$

$$ii)\ \alpha(X+Z,Y) = \widetilde{\nabla}_{(\widetilde{X}+\widetilde{Z})}\widetilde{Y} - \nabla_{(X+Z)}Y = \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} + \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Z}}\widetilde{Y} - \nabla_X Y - \nabla_Z Y = \alpha(X,Y) + \alpha(Z,Y).$$

$$iii)\ \alpha(gX,Y) = \widetilde{\nabla}_{\widetilde{g}\widetilde{X}}\widetilde{Y} - \nabla_{gX}Y = \widetilde{g}\,\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} - g\nabla_X Y = g\alpha(X,Y).$$

$\square$

Essa aplicação será chamada a segunda forma fundamental de f, onde a equação

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} = \nabla_X Y + \alpha(X,Y)$$

é denominada *Fórmula de Gauss.*

Note que $\alpha(X,Y)$ é um campo local em $\widetilde{M}$ normal a M, pois

$$\alpha(X,Y) = \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} - \nabla_X Y = (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})^T + (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})^\perp - \nabla_X Y = (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})^\perp$$

Agora veremos que a aplicação α está bem definida, isto é que $\alpha(X,Y)$ não depende das extensões $\widetilde{X},\widetilde{Y}$. Com efeito, se $\widetilde{W}$ é uma outra extensão de X (então $\widetilde{X}-\widetilde{W}=0$ em M) e $\widetilde{V}$ é uma outra extensão de Y (então $\widetilde{Y}-\widetilde{V}=0$ ao longo de uma trajetória de X), teremos

$$(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} - \nabla_X Y) - (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{W}}\widetilde{Y} - \nabla_X Y) = \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}-\widetilde{W}}\widetilde{Y} = 0, \ \ e$$

$$(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} - \nabla_X Y) - (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{V} - \nabla_X Y) = \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}(\widetilde{Y}-\widetilde{V}) = 0.$$

Portanto α está bem definida.

Exprimindo α em um sistema de coordenadas, concluímos que, como α é bilinear em $\mathcal{D}(U)$, o valor de $\alpha(X,Y)(p)$ depende apenas de X(p) e Y(p).

Consideremos agora campos de vetores X de TM e ξ de $TM^\perp$, e denotemos por $\mathcal{A}_\xi X$ a componente tangencial de $-\widetilde{\nabla}_X\xi$, isto é

$$\mathcal{A}_\xi X = -(\widetilde{\nabla}_X\xi)^T.$$

Observe que para todo $Y \in TM$ temos

$$\begin{array}{rcl} X\langle\xi,Y\rangle & = & \langle\widetilde{\nabla}_X\xi, Y\rangle + \langle\xi,\widetilde{\nabla}_X Y\rangle \\ 0 & = & \langle(\widetilde{\nabla}_X\xi)^T + (\widetilde{\nabla}_X\xi)^\perp, Y\rangle + \langle\xi, \nabla_X Y + \alpha(X,Y)\rangle \\ 0 & = & \langle -\mathcal{A}_\xi X, Y\rangle + \langle\xi,\alpha(X,Y)\rangle. \end{array}$$

Assim,

$$\langle\mathcal{A}_\xi X, Y\rangle = \langle\alpha(X,Y),\xi\rangle.$$

Portanto fica bem definida a aplicação $\mathcal{A} : TM \times TM^\perp \to TM$ dada por $\mathcal{A}(X,\xi) = \mathcal{A}_\xi X$, que é bilinear sobre $\mathcal{D}(M)$, pois a aplicação α e a métrica são bilineares sobre $\mathcal{D}(M)$. Como α é simétrica a aplicação $\mathcal{A}_\xi : TM \to TM$ também é simétrica (isto é, $\langle\mathcal{A}_\xi X, Y\rangle = \langle X, \mathcal{A}_\xi Y\rangle$ para todo $X, Y \in TM$) e linear sobre $\mathcal{D}(M)$. A aplicação $\mathcal{A}_\xi$ é chamada *Operador de Weingarten* ou, por um abuso de linguagem, segunda forma fundamental na direção de ξ.

A componente normal de $\widetilde{\nabla}_X\xi$, que denotamos por $\nabla^\perp_X\xi$, define uma conexão compatível com a métrica sobre o fibrado normal $TM^\perp$. Dizemos que $\nabla^\perp$ é a conexão normal de f e assim obtemos a *Fórmula de Weingarten*

$$\widetilde{\nabla}_X\xi = -\mathcal{A}_\xi X + \nabla^\perp_X\xi.$$

Uma imersão $f : M \to \widetilde{M}$ é geodésica em um ponto $p \in M$ se para todo $\xi \in T_pM^\perp$ a segunda forma fundamental $\mathcal{A}_\xi$ é identicamente nula em p. A imersão f é totalmente geodésica se ela é geodésica em todo $p \in M$.

Proposição 2.1.2. Uma imersão $f : M \longrightarrow \widetilde{M}$ é geodésica em $p \in M$ se e somente se toda geodésica γ de M partindo de p é geodésica de $\widetilde{M}$ em p.

Demonstração: Sejam $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = x$. Sejam ξ uma extensão local, normal a M, de um vetor normal e em p e X uma extensão local, tangente a M de $\gamma'(t)$. Assim tem-se em p

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}_e x, x\rangle &= \langle \alpha(X,X), \xi\rangle \\
&= \langle \widetilde{\nabla}_X X - \nabla_X X, \xi\rangle \\
&= \langle \widetilde{\nabla}_X X, \xi\rangle \\
&= \langle (\widetilde{\nabla}_X X)^T + (\widetilde{\nabla}_X X)^\perp, \xi\rangle \\
&= \langle (\widetilde{\nabla}_X X)^\perp, \xi\rangle,
\end{aligned}$$

logo f é geodésica em p se e somente se, para todo $X \in T_pM$, a geodésica γ de M que é tangente a X em p satisfaz a condição: $\widetilde{\nabla}_X X(p)$ não tem componente normal. Portanto f é geodésica em p se e só se toda geodésica γ de M partindo de p é geodésica de $\widetilde{M}$ em p.

□

O vetor curvatura média de uma imersão isométrica $f : M^n \to \widetilde{M}^{\,n+p}$ no ponto p de M é o vetor normal a M em p, definido por $H_p = \frac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha(X_i, X_i)$, onde $\{X_1, ..., X_n\}$ é um referencial ortonormal tangente a M em p e α é a segunda forma fundamental de f. Dizemos que uma subvariedade é mínima se $H_p \equiv 0$ para todo ponto p da subvariedade.

2.2 As Equações Fundamentais de uma Imersão Isométrica

Proposição 2.2.1. Seja $f : M^n \to \widetilde{M}^{\,n+p}$ uma imersão isométrica, são válidas as seguintes equações:
$i)$ Equação de Gauss

$$K(X,Y) = \widetilde{K}(X,Y) + \langle \alpha(X,X), \alpha(Y,Y)\rangle - \langle \alpha(X,Y), \alpha(X,Y)\rangle,$$

onde $K(X,Y)$ e $\widetilde{K}(X,Y)$ denotam as curvaturas seccionais em M e $\widetilde{M}$ do plano gerado pelos vetores ortonormais $X, Y \in T_pM$.

$ii)$ Equação de Codazzi

$$(\widetilde{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_{Y}\alpha)(X,Z) - (\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Y,Z),$$

para todo $X, Y, Z \in TM$.

$iii)$ Equação de Ricci

$$\langle \widetilde{R}(X,Y)\xi, \eta\rangle \ = \ \langle R^{\perp}(X,Y)\xi, \eta\rangle + \langle [\mathcal{A}_{\xi}, \mathcal{A}_{\eta}]X, Y\rangle,$$

$\forall X, Y \in TM \;\; e \;\; \xi, \eta \in TM^{\perp}$, onde $[\mathcal{A}_{\xi}, \mathcal{A}_{\eta}] = \mathcal{A}_{\xi}\mathcal{A}_{\eta} - \mathcal{A}_{\eta}\mathcal{A}_{\xi}$; e $R, \widetilde{R}$ e $R^{\perp}$ são os tensores curvatura de $M, \widetilde{M}$ e $TM^{\perp}$, respectivamente.

Demonstração: Sejam $X, Y, Z \in TM$, então

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y Z &= \widetilde{\nabla}_X(\alpha(Y,Z) + \nabla_Y Z) \\ &= \widetilde{\nabla}_X\alpha(Y,Z) + \widetilde{\nabla}_X\nabla_Y Z \end{aligned}$$

Pelas fórmulas de Gauss e Weingarten, temos

$$\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y Z = -\mathcal{A}_{\alpha(Y,Z)}X + \nabla^{\perp}_{X}\alpha(Y,Z) + \nabla_X\nabla_Y Z + \alpha(X, \nabla_Y Z).$$

Analogamente,

$$\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_X Z = -\mathcal{A}_{\alpha(X,Z)}Y + \nabla^{\perp}_{Y}\alpha(X,Z) + \nabla_Y\nabla_X Z + \alpha(Y, \nabla_X Z).$$

Novamente pela fórmula de Gauss, temos

$$\widetilde{\nabla}_{[X,Y]}Z = \nabla_{[X,Y]}Z + \alpha([X,Y], Z).$$

Substituindo esses resultados em

$$\widetilde{R}(X,Y)Z = \widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_X Z - \widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y Z + \widetilde{\nabla}_{[X,Y]}Z. \;\; Fica$$

$$\widetilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \alpha(X,\nabla_Y Z) + \alpha(Y,\nabla_X Z) + \alpha([X,Y],Z) + \mathcal{A}_{\alpha(Y,Z)}X$$
$$-\mathcal{A}_{\alpha(X,Z)}Y - \nabla^{\perp}_X \alpha(Y,Z) + \nabla^{\perp}_Y \alpha(X,Z), \tag{2.1}$$

onde R e $\widetilde{R}$ são os tensores curvatura de M e $\widetilde{M}$, respectivamente.

Tomando a componente tangencial, de $\widetilde{R}$ em (2.1), temos

$$\langle \widetilde{R}(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle \mathcal{A}_{\alpha(Y,Z)}X, W\rangle - \langle \mathcal{A}_{\alpha(X,Z)}Y, W\rangle,$$

obtendo assim, a *Equação de Gauss*,

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle \widetilde{R}(X,Y)Z,W\rangle - \langle \alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle + \langle \alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle.$$

Em particular, se $K(X,Y) = \langle R(X,Y)X,Y\rangle$ e $\widetilde{K}(X,Y) = \langle \widetilde{R}(X,Y)X,Y\rangle$ denotam as curvaturas seccionais em M e $\widetilde{M}$ do plano gerado pelos vetores ortonormais $X,Y \in T_pM$, a equação de Gauss torna-se

$$K(X,Y) = \widetilde{K}(X,Y) + \langle \alpha(X,X),\alpha(Y,Y)\rangle - \langle \alpha(X,Y),\alpha(X,Y)\rangle.$$

Agora tomando a componente normal de $\widetilde{R}$ em (2.1), obtemos

$$\begin{aligned}
(\widetilde{R}(X,Y)Z)^{\perp} &= (R(X,Y)Z)^{\perp} - \alpha(X,\nabla_Y Z) + \alpha(Y,\nabla_X Z) + \alpha([X,Y],Z) \\
&\quad -\nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) + \nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z) \\
&= -\alpha(X,\nabla_Y Z) + \alpha(Y,\nabla_X Z) + \alpha(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) \\
&\quad -\nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) + \nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z) \\
&= -\alpha(X,\nabla_Y Z) + \alpha(Y,\nabla_X Z) + \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(\nabla_Y X, Z) \\
&\quad -\nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) + \nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z) \\
&= -(\nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y,Z) - \alpha(Y,\nabla_X Z)) + \nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z) \\
&\quad -\alpha(\nabla_Y X, Z) - \alpha(X,\nabla_Y Z),
\end{aligned}$$

o que implica na *Equação de Codazzi*

$$(\widetilde{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_Y\alpha)(X,Z) - (\nabla^{\perp}_X\alpha)(Y,Z),$$

onde por definição

$$(\nabla^{\perp}_X\alpha)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y,Z) - \alpha(Y,\nabla_X Z).$$

Observe que $\nabla^{\perp}\alpha$ é bilinear sobre $\mathcal{D}(M)$. A conexão $\nabla^{\perp}$ pode ser vista como uma conexão no fibrado vetorial $\mathcal{L}_2(TM \times TM, TM^{\perp})$.

Denotaremos por $R^{\perp}$o tensor curvatura do fibrado normal $TM^{\perp}$, que é

$$R^{\perp}(X,Y)\xi = \nabla^{\perp}_Y\nabla^{\perp}_X\xi - \nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y\xi + \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi,$$

para todo $X, Y \in TM$ e $\xi \in TM^{\perp}$.

Novamente, utilizando as fórmulas de Gauss e Weingarten temos

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{R}(X,Y)\xi & = & \widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_X\xi - \widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y\xi + \widetilde{\nabla}_{[X,Y]}\xi \\ & = & \widetilde{\nabla}_Y(-\mathcal{A}_\xi X) + \widetilde{\nabla}_Y\nabla^{\perp}_X\xi - \widetilde{\nabla}_X(-\mathcal{A}_\xi Y) - \overline{\nabla}_X\nabla^{\perp}_Y\xi - \mathcal{A}_\xi[X,Y] \\ & & +\nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi \\ & = & \alpha(Y,-\mathcal{A}_\xi X) + \nabla_Y(-\mathcal{A}_\xi X) - \mathcal{A}_{\nabla^{\perp}_X\xi}Y + \nabla^{\perp}_Y\nabla^{\perp}_X\xi + \alpha(X,\mathcal{A}_\xi Y) \\ & & +\nabla_X(\mathcal{A}_\xi Y) + \mathcal{A}_{\nabla^{\perp}_Y\xi}X - \nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y\xi - \mathcal{A}_\xi[X,Y] + \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi, \end{array}$$

logo

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(X,Y)\xi = R^{\perp}(X,Y)\xi + \alpha(X,\mathcal{A}_\xi Y) + \nabla_X(\mathcal{A}_\xi Y) + \mathcal{A}_{\nabla^{\perp}_Y\xi}X \\ -\alpha(Y,\mathcal{A}_\xi X) - \nabla_Y(\mathcal{A}_\xi X) - \mathcal{A}_{\nabla^{\perp}_X\xi}Y - \mathcal{A}_\xi[X,Y] \end{aligned} \tag{2.2}$$

Tomando a componente normal de $\widetilde{R}(X,Y)\xi$ em (2.2) temos, a *Equação de Ricci*

$$(\widetilde{R}(X,Y)\xi)^{\perp} = R^{\perp}(X,Y)\xi + \alpha(X,\mathcal{A}_\xi Y) - \alpha(Y,\mathcal{A}_\xi X).$$

Agora tomando em (2.2) o produto interno por $\eta \in TM^{\perp}$, temos

$$\begin{array}{rcl} \langle\widetilde{R}(X,Y)\xi,\eta\rangle & = & \langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle + \langle\alpha(X,\mathcal{A}_\xi Y),\eta\rangle - \langle\alpha(Y,\mathcal{A}_\xi X),\eta\rangle \\ & = & \langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle + \langle\mathcal{A}_\eta X,\mathcal{A}_\xi Y\rangle - \langle\mathcal{A}_\eta Y,\mathcal{A}_\xi X\rangle \\ & = & \langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle + \langle\mathcal{A}_\xi\mathcal{A}_\eta X,Y\rangle - \langle Y,\mathcal{A}_\eta\mathcal{A}_\xi X\rangle \\ & = & \langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle + \langle[\mathcal{A}_\xi,\mathcal{A}_\eta]X,Y\rangle, \end{array}$$

e a equação de Ricci pode ser escrita na forma

$$\langle\widetilde{R}(X,Y)\xi,\eta\rangle \;=\; \langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle + \langle[\mathcal{A}_\xi,\mathcal{A}_\eta]X,Y\rangle,$$

onde $[\mathcal{A}_\xi,\mathcal{A}_\eta] = \mathcal{A}_\xi\mathcal{A}_\eta - \mathcal{A}_\eta\mathcal{A}_\xi$.

Capítulo 3

Estruturas Complexas em Espaços Vetoriais e Funções Holomorfas

Neste capítulo vamos apresentar definições e resultados relacionados com a teoria das funções de uma variável complexa. As demonstrações omitidas poderão ser encontradas em [9].

3.1 Estrutura Complexa em Espaços Vetoriais

Definição 3.1.1. Seja V um espaço vetorial real. Um homomorfismo linear $J : V \to V$ satisfazendo $J^2 = -I$, onde I é a aplicação identidade em V, é chamado de *estrutura complexa* em V.

Seja V um espaço vetorial real com uma estrutura complexa J. Podemos definir o produto λX de um número complexo $\lambda = a + ib$ e um elemento X de V por

$$\lambda X = (a + ib)X = aX + bJX.$$

Então podemos considerar V como um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

Afirmamos que a dimensão real de V, ou seja, a dimensão de V como espaço vetorial real, é par. De fato, seja $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base do espaço vetorial V sobre $\mathbb{C}$,então $\{e_1, ..., e_n, ie_1, ..., ie_n\}$ é base de V sobre $\mathbb{R}$ pois,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} a_j e_j + \sum_{j=1}^{n} i b_j e_j = 0 \;&\Rightarrow\; \sum_{j=1}^{n}(a_j + ib_j)e_j = 0\\ &\Rightarrow\; a_j + ib_j = 0, \forall j\\ &\Rightarrow\; a_j = b_j = 0, \forall j.\end{aligned}$$

Logo, $dim_{\mathbb{C}}V = n$, então $dim_{\mathbb{R}}V = 2n$.

Dado um espaço vetorial complexo de dimensão complexa n, seja J o endomorfismo linear definido por $JX = iX$, para todo $X \in V$. Considerando V como espaço vetorial real de dimensão $2n$, então J é a estrutura complexa de V.

Seja V um espaço vetorial real com uma estrutura complexa J. Então podemos estender J a um endomorfismo linear complexo de $V^{\mathbb{C}} = \{X + iY; X, Y \in V\}$, também denotado por J, dado por

$$J(X + iY) = JX + iJY.$$

Em um espaço vetorial real $2n$-dimensional com estrutura complexa J, existem elementos $X_1, ..., X_n$ de V tal que $\{X_1, ..., X_n, JX_1, ..., JX_n\}$ é uma base de V.

Consideremos $Z_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_k - iJX_k)$ e $\overline{Z}_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_k + iJX_k)$, $k = 1, ..., n$. Então $\{Z_1, ...Z_n, \overline{Z}_1, ...\overline{Z}_n\}$ é uma base de $V^{\mathbb{C}}$, desde que, $dimV^{\mathbb{C}} = dim_{\mathbb{R}}V = 2n$ e dado que o conjunto acima é linearmente independente.

Além disso,

$$\begin{aligned} J(Z_k) &= J\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}(X_k - iJX_k)\Big)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(JX_k - iJ^2X_k)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(JX_k + iX_k)\\ &= iZ_k, \forall k;\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} J(\overline{Z}_k) &= J\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}(X_k + iJX_k)\Big)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(JX_k + iJ^2X_k)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(JX_k - iX_k) \\
&= -i\overline{Z}_k, \forall k.
\end{aligned}
$$

Assim, i e $-i$ são os autovalores de J, correspondentes aos autovetores Z_k e $\overline{Z}_k$, respectivamente, para $k = 1, ..., n$, e portanto J é diagonalizável (i e $-i$ têm multiplicidade n).

Sejam $V^{(1,0)} = \{Z \in V^{\mathbb{C}}; JZ = iZ\}$, e $V^{(0,1)} = \{Z \in V^{\mathbb{C}}; JZ = -iZ\}$, os autoespaços correspondentes aos autovalores i e $-i$ respectivamente.

Proposição 3.1.1. Vale os seguintes itens

1. $V^{(1,0)} = \{X - iJX; X \in V\}$ e $V^{(0,1)} = \{X + iJX; X \in V\}$;
2. $V^{\mathbb{C}} = V^{(1,0)} \oplus V^{(0,1)}$.

Demonstração.

1. Para todo $X - iJX \in \{X - iJX; X \in V\}$ temos que

$$
\begin{aligned}
J(X - iJX) &= JX - iJ^2X \\
&= JX + iX \\
&= i(X - iJX),
\end{aligned}
$$

então $X - iJX \in \{Z \in V^{\mathbb{C}}; JZ = iZ\}$, e

$$\{X - iJX; X \in V\} \subset \{Z \in V^{\mathbb{C}}; JZ = iZ\}.$$

Seja $Z \in \{Z \in V^{\mathbb{C}}; JZ = iZ\}$, então $Z \in V^{\mathbb{C}}$ e $JZ = iZ$, ou seja, $Z = X + iY$ e $J(X + iY) = i(X + iY) \Rightarrow JX + iJY - iX + Y = 0 \Rightarrow -JX = Y$ e $X = JY$. Assim, $Z = X + iY = X + i(-JX) = X - iJX$, isto é, $Z \in \{X - iJX; X \in V\}$ e

$$\{Z \in V^{\mathbb{C}}; JZ = iZ\} \subset \{X - iJX; X \in V\}.$$

Logo,

$$V^{(1,0)} = \{Z \in V^{\mathbb{C}}; JZ = iZ\} = \{X - iJX; X \in V\}.$$

De modo análogo temos

$$V^{(0,1)} = \{Z \in V^{\mathbb{C}}; JZ = -iZ\} = \{X + iJX; X \in V\}.$$

2. Primeiro observe que para qualquer $Z \in V^{\mathbb{C}}$,

$$Z = \frac{1}{2}(Z - iJZ) + \frac{1}{2}(Z + iJZ),$$

com $\frac{1}{2}(Z - iJZ) \in V^{(1,0)}$ e $\frac{1}{2}(Z + iJZ) \in V^{(0,1)}$. De fato

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(Z - iJZ) &= \frac{1}{2}(X + iY - iJ(X + iY)) \\
&= \frac{1}{2}(X + iY - iJX + JY) \\
&= \frac{1}{2}((X + JY) - i(JX - Y)) \\
&= \frac{1}{2}((X + X) - i(JX + JX)) \\
&= X - iJX,
\end{aligned}$$

analogamente

$$\frac{1}{2}(Z + iJZ) = X + iJX.$$

Além disso, se $Z \in V^{(1,0)} \cap V^{(0,1)}$ então $JZ = iZ$ e $JZ = -iZ$, o que implica que $iZ = -iZ \Leftrightarrow Z = 0$. Portanto $Z \in V^{(1,0)} \cap V^{(0,1)} = \{0\}$, logo $V^{\mathbb{C}} = V^{(1,0)} \oplus V^{(0,1)}$.

□

Seja M uma variedade diferenciável, indicaremos por $T^{\mathbb{C}}M$ a complexificação do fibrado tangente, ou seja, $T^{\mathbb{C}}M = \{X + iY; X, Y \in TM\}$. Como foi visto anteriormente, a extensão de J ao fibrado tangente complexificado pode ser diagonalizada tendo i e $-i$ como autovalores. Os autoespaços associados aos autovalores i e $-i$ serão denotados por $T^{(1,0)}M$ e $T^{(0,1)}M$, respectivamente. Segue também que $T_p^{\mathbb{C}}M = T_p^{(1,0)}M \oplus T_p^{(0,1)}M$, onde $T_p^{(1,0)}M = \{X - iJX; X \in TM\}$ e $T_p^{(0,1)}M = \{X + iJX; X \in TM\}$.

3.2 Funções Holomorfas

Definição 3.2.1. Seja $f : U \to \mathbb{C}$, definida num aberto $U \subset \mathbb{C}$. Dizemos que f é derivável no ponto $z = x + iy \in U$ quando existe o limite $\lim_{H\to 0} \frac{f(z+H)-f(z)}{H} = f'(z)$. O número complexo $f'(z)$ chama-se derivada da função complexa de f no ponto z.

Sejam $f_1, f_2 : U \to \mathbb{R}$ as partes real e imáginária de f, ou seja, $f(z) = f_1(z) + if_2(z)$. Mostra-se que se f é derivável no ponto $z = u + iv$ então, sua parte real f_1 e sua parte imaginária f_2 são deriváveis no ponto (u, v), e além disso cumprem as condições

$$\tfrac{\partial f_1}{\partial u} = \tfrac{\partial f_2}{\partial v} \text{ e } \tfrac{\partial f_1}{\partial v} = -\tfrac{\partial f_2}{\partial u}$$

Estas equações são chamadas de *Equações de Cauchy-Riemann.* Reciprocamente, se $f_1, f_2 : U \to \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis no ponto $z = (u, v)$ e satisfazem às equações de Cauchy-Riemann nesse ponto, então $f = f_1 + if_2$ possui uma derivada complexa $f'(z)$ no ponto $z = u + iv$ onde

$$f'(z) = \frac{\partial f_1}{\partial u} - i\frac{\partial f_1}{\partial v} = \frac{\partial f_2}{\partial v} + i\frac{\partial f_2}{\partial u}.$$

Definição 3.2.2. Dizemos que uma função complexa $f : U \to \mathbb{C}$ é *holomorfa* quando possui derivada em todos os pontos do aberto U.

Seja $f : U \to \mathbb{C}$, onde $U \subset \mathbb{C}$ é aberto. A diferencial de f é por definição a 1-forma df em U que associa a cada ponto $p \in U$ a derivada de f em p, que é uma aplicação $\mathbb{R}$-linear de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$. Assim, $df(p)(h+ik) = \frac{\partial f}{\partial x}(p)h + \frac{\partial f}{\partial y}(p)k$, logo $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$. Em termos da base $\{dz, d\overline{z}\}$ de $\pounds(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ que é o conjunto de todas as aplicações $\mathbb{R}$-lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{C}$, podemos escrever

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}.$$

No plano complexo $\mathbb{C}$, consideremos a variável $z = u + iv$ e os operadores diferenciais

$$\tfrac{\partial f}{\partial z} = \tfrac{1}{2}\Big(\tfrac{\partial}{\partial u} - i\tfrac{\partial}{\partial v}\Big) \text{ e } \tfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \tfrac{1}{2}\Big(\tfrac{\partial}{\partial u} + i\tfrac{\partial}{\partial v}\Big).$$

A definição desses operadores é tal que, se $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma aplicação diferenciável em um aberto U então, através da identificação usual de $\mathbb{R}^2$ com $\mathbb{C}$, tem-se

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}$$

onde $dz = du + idv$ e $d\overline{z} = du - idv$.

Proposição 3.2.1. A função diferenciável $f = f_1 + if_2$ é holomorfa, se e somente se, $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\Big)f = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\Big)f_1 + \frac{i}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\Big)f_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f_1}{\partial u} + i\frac{\partial f_1}{\partial v}\Big) + \frac{i}{2}\Big(\frac{\partial f_2}{\partial u} + i\frac{\partial f_2}{\partial v}\Big) = 0,
\end{aligned}$$

se e somente se satisfazem às equações de Cauchy-Riemann.

□

Capítulo 4

Superfícies com vetor curvatura média paralelo em $S^n \times \mathbb{R}$ e $H^n \times \mathbb{R}$

Agora iremos estudar superfícies M^2 imersas em $E^n_c \times \mathbb{R}$, onde E^n_c é uma variedade Riemanniana n-dimensional, simplismente conexa com curvatura seccional constante $c \neq 0$, ou seja S^n e H^n e considerar que o vetor curvatura média é paralelo no fibrado normal. Nesse capítulo, todas as variedades são conexas e orientadas.

4.1 Primeiro Teorema Principal

Nesta seção, demonstraremos o seguinte resultado (observação: para simplificar a notação consideraremos $M^2 = M$)

Teorema 4.1.1. *Sejam M uma superfície conexa e E^n_c uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante $c \neq 0$ e seja $x : M \to E^n_c \times \mathbb{R}$ uma imersão com vetor curvatura média paralelo. Então uma das seguintes condições é satisfeita:*

1. *$x(M)$ é uma superfície mínima de uma subvariedade totalmente umbílica de E^n_c;*
2. *$x(M)$ é uma superfície com curvatura média constante em uma subvariedade totalmete umbílica tri-dimensional de E^n_c;*
3. *$x(M)$ está contida em $E^4_c \times \mathbb{R}$.*

Observação 4.1.1. Usaremos $\widetilde{R}$ e $\widetilde{\nabla}$ para representar a curvatura e a conexão do espaço ambiente $(E_c^n \times \mathbb{R})$ respectivamente.

Iremos começar com alguns lemas, mas antes precisaremos do seguinte resultado:

Equação 1. Sejam A, B, C e D vetores tangentes de $E_c^n \times \mathbb{R}$, π_1 e π_2 a projeção no primeiro e segundo fator de $T_p(E_c^n \times \mathbb{R})$, respectivamente, então,

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{R}(A,B)C,D\rangle = c[&(\langle A,C\rangle - \langle \pi_2 A, \pi_2 C\rangle)(\langle B,D\rangle - \langle \pi_2 B, \pi_2 D\rangle)\\ &-(\langle A,D\rangle - \langle \pi_2 A, \pi_2 D\rangle)(\langle B,C\rangle - \langle \pi_2 B, \pi_2 C\rangle)]\end{aligned}$$

Demonstração. Observe que $A = \pi_1 A + \pi_2 A$ e $\pi_2 A = \langle A, \gamma\rangle\gamma$, (onde γ é o vetor unítario tangente a $E_c^n \times \mathbb{R}$ correspondente ao fator real) analogamente para B, C e D. Assim, temos

$$\langle \widetilde{R}(A,B)C,D\rangle = \langle \widetilde{R}(\pi_1 A + \pi_2 A, \pi_1 B + \pi_2 B)(\pi_1 C + \pi_2 C), \pi_1 D + \pi_2 D\rangle,$$

usando a Proposição 1.6.3, obtemos

$$\langle \widetilde{R}(A,B)C,D\rangle = \langle \widetilde{R}(\pi_1 A, \pi_1 B)\pi_1 C, \pi_1 D\rangle,$$

agora, pela Proposição 1.7.1, temos

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{R}(A,B)C,D\rangle &= c[\langle \pi_1 A, \pi_1 C\rangle\langle \pi_1 B, \pi_1 D\rangle - \langle \pi_1 A, \pi_1 D\rangle\langle \pi_1 B, \pi_1 C\rangle]\\ &= c[(\langle A - \pi_2 A, C - \pi_2 C\rangle\langle B - \pi_2 B, D - \pi_2 D\rangle)\\ &\quad -(\langle A - \pi_2 A, D - \pi_2 D\rangle\langle B - \pi_2 B, C - \pi_2 C\rangle)]\\ &= c[(\langle A,C\rangle - \langle A, \pi_2 C\rangle - \langle \pi_2 A, C\rangle - \langle \pi_2 A, \pi_2 C\rangle)(\langle B,D\rangle - \langle \pi_2 B, D\rangle\\ &\quad -\langle B, \pi_2 D\rangle - \langle \pi_2 B, \pi_2 D\rangle) - (\langle A,D\rangle - \langle A, \pi_2 D\rangle - \langle \pi_2 A, D\rangle\\ &- \langle \pi_2 A, \pi_2 D\rangle)(\langle B,C\rangle - \langle \pi_2 B, C\rangle - \langle B, \pi_2 D\rangle - \langle \pi_2 B, \pi_2 C\rangle)],\end{aligned} \tag{4.1}$$

observe que,

$$\langle A, \pi_2 C\rangle = \langle A, \langle C,\gamma\rangle\gamma\rangle = \langle C,\gamma\rangle\langle A,\gamma\rangle$$

$$\langle \pi_2 A, C\rangle = \langle\langle A,\gamma\rangle\gamma, C\rangle = \langle C,\gamma\rangle\langle A,\gamma\rangle$$

$$\langle \pi_2 A, \pi_2 C\rangle = \langle\langle A,\gamma\rangle\gamma, \langle C,\gamma\rangle\gamma\rangle = \langle C,\gamma\rangle\langle A,\gamma\rangle,$$

analogamente para $\langle B, \pi_2 D\rangle$, $\langle A, \pi_2 D\rangle$ e $\langle B, \pi_2 C\rangle$, substituindo em (4.1) obtemos,

$$\langle \widetilde{R}(A,B)C,D\rangle = c[(\langle A,C\rangle - \langle \pi_2 A, \pi_2 C\rangle)(\langle B,D\rangle - \langle \pi_2 B, \pi_2 D\rangle)$$
$$-(\langle A,D\rangle - \langle \pi_2 A, \pi_2 D\rangle)(\langle B,C\rangle - \langle \pi_2 B, \pi_2 C\rangle)].$$

□

Lema 4.1.1. Seja $x : M^2 \to E_c^n \times \mathbb{R}$ uma imersão de uma superfície M com curvatura média paralela. Se $\gamma \in T_pM$ $\forall p \in M$ então $x(M) \subset E_c^2 \times \mathbb{R}$.

Demonstração. Como $\gamma \in T_pM$ para todo $p \in M$, podemos escolher uma base $\{e_1, e_2\}$ para TM, fazendo $e_1 = \gamma$ e e_2 unitário e ortogonal a e_1.

Observe que γ é paralelo na conexão $\widetilde{\nabla}$, pois γ é um vetor tangente de $E_c^n \times \mathbb{R}$ na direção de $\mathbb{R}$. Assim,

$$0 = \widetilde{\nabla}_{e_1}\gamma = \widetilde{\nabla}_{e_1}e_1 = \alpha(e_1,e_1) + \nabla_{e_1}e_1$$

$$\Rightarrow \alpha(e_1,e_1) = 0.$$

Analogamente,

$$0 = \widetilde{\nabla}_{e_2}\gamma = \widetilde{\nabla}_{e_2}e_1 = \alpha(e_1,e_2) + \nabla_{e_2}e_1$$
$$\Rightarrow \alpha(e_1,e_2) = 0.$$

como α é simétrica, $\alpha(e_1,e_2) = \alpha(e_2,e_1) = 0$.

Por definição,

$$2H = \alpha(e_1,e_1) + \alpha(e_2,e_2) = \alpha(e_2,e_2).$$

Como H é paralelo e $\alpha(e_1,e_1) = \alpha(e_1,e_2) = \alpha(e_2,e_1) = 0$, temos que a imagem da segunda forma fundamental ($Im\alpha$) é 1-dimensional e paralela na conexão normal, assim, seja $E = TM \oplus Im\alpha$ temos que para quaisquer X, Y, $Z \in TM$

$$\widetilde{\nabla}_Z\alpha(X,Y) = \nabla_Z^{\perp}\alpha(X,Y) - A_{\alpha(X,Y)}Z \in E$$

e

$$\widetilde{\nabla}_Y X = \nabla_Z X + \alpha(X,Y) \in E,$$

logo E é paralelo na conexão $\widetilde{\nabla}$. E pela *Equação 1*, temos que E é invariante por $\widetilde{R}$. Assim, pelo teorema de redução de codimensão de Eschenburg e Tribuzy em [7] existe uma subvariedade 3-dimensional totalmente geodésica L de $E_c^n \times \mathbb{R}$ tal que $x(M) \subset L$, como $\gamma \in \mathbb{R}$, $L = E_c^2 \times \mathbb{R}$.

□

Observação 4.1.2. Observe que $\gamma \in T_pM$ se, e somente se, $\langle \gamma, N\rangle(p) = 0$. Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é analítico, temos que ou $\langle \gamma, N\rangle \equiv 0$ e nesse caso $\gamma \in T_pM$ $\forall p$ e pelo Lema (4.2.1) $x(M) \subset E_c^2 \times \mathbb{R}$, ou os zeros de $\langle \gamma, N\rangle$ são isolados, nesse caso vamos trabalhar com o complemento dos zeros de $\langle \gamma, N\rangle$ e passamos ao limite.

Lema 4.1.2. Seja $x : M^2 \to E_c^n \times \mathbb{R}$ uma imersão de uma superfície M com curvatura média paralela. Então para todo $v \in TM^\perp$, A_H comuta com A_v.

Demonstração. Como H é paralelo, então

$$R^\perp(X,Y)H = \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp H - \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp H + \nabla_{[X,Y]}^\perp H = 0,$$

logo, $R^\perp(X,Y)H = 0$.

Pela Equação de Ricci (proposição 2.2 item (iii)) temos:

$$\langle R^\perp(X,Y)H, v\rangle = \langle [A_H, A_v]X, Y\rangle + \langle \widetilde{R}(X,Y)H, v\rangle$$

assim

$$\langle [A_H, A_v]X, Y\rangle + \langle \widetilde{R}(X,Y)H, v\rangle = 0$$

assim, basta mostrar que $(R(X,Y)v)^\perp = 0$ $\forall v \in TM^\perp$, $X, Y \in TM$.

Agora considere $e_3 = \frac{u}{|u|}$, onde u é a projeção de γ no fibrado normal. Complete e_3 com uma base ortonormal para $TM^\perp$ e seja $\{e_1, e_2\}$ uma base para TM.

Observe que pela *Equação 1* usando o referencial a cima, para $i, j = 1, 2$ e $\alpha, \beta = 3, 4, ..., n+1$

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{R}(e_i, e_j)e_\alpha, e_\beta\rangle &= c[(\langle e_i, e_\alpha\rangle - \langle \pi_2(e_i), \pi_2(e_\alpha)\rangle)(\langle e_j, e_\beta\rangle - \langle \pi_2(e_j), \pi_2(e_\beta)\rangle) \\
&\quad -(\langle e_i, e_\beta\rangle - \langle \pi_2(e_i), \pi_2(e_\beta)\rangle)(\langle e_j, e_\alpha\rangle - \langle \pi_2(e_j), \pi_2(e_\alpha)\rangle)] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

se α ou β for diferente de 3, pois neste caso $\langle e_\alpha, \gamma\rangle = 0$ ou $\langle e_\beta, \gamma\rangle = 0$. Além disso, $\langle \widetilde{R}(e_i, e_j)e_3, e_3\rangle = 0$. Logo $(\widetilde{R}(X,Y)v)^\perp = 0$ $\forall X, Y$ tangentes e v normal.

$\square$

Corolário 4.1.1. Ou existe uma base que diagonaliza A_v $\forall v \in TM^{\perp}$ ou A_H é múltiplo da identidade.

Demonstração. De fato, suponha que H não é uma direção umbílica, como A_H é simétrico, pelo Teorema Espectral existe uma base, ortonormal, que diagonaliza A_H, digamos α. Pelo Lema 4.1.1, A_v comuta com A_H para todo $v \in TM^{\perp}$, logo A_H e A_v são simultaneamente diagonalizáveis, então existe uma base ortonormal β que diagonaliza A_H e A_v, como α e β são ortonormais, podemos assumir $\alpha = \beta$. Por outro lado, seja $w \in TM^{\perp}$, então A_H comuta com A_w, assim existe existe uma base ortonormal η que diagonaliza A_H e A_w, como η é ortonormal, podemos assumir $\alpha = \eta$, logo $\eta = \beta$, logo, existe uma base que diagonaliza A_v e A_w.

$\square$

Lema 4.1.3. Se H não for uma direção umbílica, então existe um subfibrado paralelo L do fibrado normal de dimensão ≤ 3 que contém a imagem de α.

Demonstração. Considere L o subspaço gerado pela união da $Im\alpha$ e e_3. Observe que L contém a imagem de α. Vamos mostrar que L é paralelo, ou seja, se W é um subfibrado normal e $W \perp L$ então $\nabla^{\perp} W \perp L$. Assim, seja $w \in W$, vamos mostrar que:
1)$\nabla^{\perp} w \perp Im\alpha$
2)$\nabla^{\perp} w \perp e_3$.
Como H não é uma direção umbílica, pelo Corolário 4.2.1 existe uma base $\{e_1, e_2\}$ que diagonaliza A_v, $\forall v \in TM^{\perp}$. Observe que se $\{e_1, e_2\}$ diagonaliza A_v para todo $v \in TM^{\perp}$, então $\{e_1, e_2\}$ diagonaliza α, de fato, $\langle \alpha(e_i, e_j), v\rangle = \langle A_v e_i, e_j\rangle = 0$ se $i \neq j$. Logo, $\alpha(e_1, e_2) = 0$, o que implica que dim$L \leq 3$.

1)$\nabla^{\perp} w \perp Im\alpha$
Considere

$$A_{ijk} = -\langle \alpha(e_i, e_j), \nabla^{\perp}_{e_k} w\rangle.$$

Observe que como α é simétrica $A_{ijk} = A_{jik}$ e como $w \perp$ Imα temos $\langle \alpha(e_i, e_j), w\rangle = 0$ logo

$$\langle \alpha(e_i, e_j), \nabla^{\perp}_{e_k} w\rangle + \langle \nabla^{\perp}_{e_k} \alpha(e_i, e_j), w\rangle = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} A_{ijk} = -\langle \alpha(e_i, e_j), \nabla^{\perp}_{e_k} w\rangle = \langle \nabla^{\perp}_{e_k} \alpha(e_i, e_j), w\rangle \\ \Rightarrow A_{ijk} = \langle \nabla^{\perp}_{e_k} \alpha(e_i, e_j), w\rangle \end{aligned} \tag{4.2}$$

Por definição,

$$\begin{aligned} \langle (\nabla^{\perp}_{e_k}\alpha)(e_i, e_j), w\rangle &= \langle \nabla^{\perp}_{e_k}\alpha(e_i, e_j), w\rangle - \langle \alpha(\nabla^{\perp}_{e_k} e_i, e_j), w\rangle \\ &\quad -\langle \alpha(e_i, \nabla^{\perp}_{e_k} e_j), w\rangle \end{aligned} \tag{4.3}$$

Como $w \perp Im\alpha$, por (4.2) e (4.3), obtemos,

$$\langle (\nabla^{\perp}_{e_k}\alpha)(e_i, e_j), w\rangle = A_{ijk}$$

Usando a Equação de Codazzi (proposição (2.2) item (ii)), temos

$$(\nabla^{\perp}_{e_k}\alpha)(e_i, e_j) = (\nabla^{\perp}_{e_i}\alpha)(e_k, e_j) + (\widetilde{R}(e_k, e_i)e_j)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_{e_j}\alpha)(e_k, e_i) + (\widetilde{R}(e_k, e_j)e_i)^{\perp},$$

mas pela *Equação 1* $\langle \widetilde{R}(e_k, e_i)e_j, w\rangle = \langle \widetilde{R}(e_k, e_j)e_i, w\rangle = 0$. Assim,

$A_{ijk} = \langle \nabla^{\perp}_{e_k}\alpha(e_i, e_j), w\rangle = \langle \nabla^{\perp}_{e_i}\alpha(e_k, e_j), w\rangle = A_{jki} = \langle \nabla^{\perp}_{e_j}\alpha(e_k, e_i), w\rangle = A_{kij}$.

Assim, temos a seguinte relação

$$A_{ijk} = A_{jki} = A_{kij}, \tag{4.4}$$

e como $\{e_1, e_2\}$ diagonaliza α, temos que $A_{ijk} = \langle \alpha(e_i, e_j), \nabla^{\perp}_{e_k} w\rangle = 0$ para $i \neq j$, pela relação (4.4) temos que para dois índices distintos $A_{ijk} = 0$. Agora vamos mostrar que $A_{iii} = 0$. De fato, seja $i \neq j$

$$\begin{aligned} A_{iii} &= -\langle \alpha(e_i, e_i), \nabla^{\perp}_{e_i} w\rangle - \langle \alpha(e_j, e_j), \nabla^{\perp}_{e_i} w\rangle + \langle \alpha(e_j, e_j), \nabla^{\perp}_{e_i} w\rangle \\ &= -\langle \alpha(e_i, e_i) + \alpha(e_j, e_j), \nabla^{\perp}_{e_i} w\rangle + \langle \alpha(e_j, e_j), \nabla^{\perp}_{e_i} w\rangle \\ &= -2\langle H, \nabla^{\perp}_{e_i} w\rangle + \langle \alpha(e_j, e_j), \nabla^{\perp}_{e_i} w\rangle. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Como $w \perp Im\alpha$ e $H = \frac{1}{2}[\alpha(e_1, e_1) + \alpha(e_2, e_2)]$ então $w \perp H$ logo

$$\langle w, H\rangle = 0 \Rightarrow \langle \nabla^{\perp}_{e_i} w, H\rangle + \langle w, \nabla^{\perp}_{e_i} H\rangle = 0,$$

substituindo em (4.5) obtemos

$$A_{iii} = 2\langle w, \nabla^{\perp}_{e_i} H\rangle + A_{jji} = 0,$$

pois H é paralelo e $A_{jji} = 0$. Isso implica que $\langle \alpha(e_i, e_j), \nabla^{\perp}_{e_k} w\rangle = 0$ para todo i, j, k. Logo, $\nabla^{\perp} w \perp Im\alpha$.

2)$\nabla^{\perp} w \perp e_3$.

Para isto usamos o fato que $E_c^n \times \mathbb{R}$ é uma variedade simétrica (proposição 4.1.1).

Sejam X, Y, Z vetores tangentes a M

$$
\begin{aligned}
0 = (\widetilde{\nabla}_Z \widetilde{R})(X,Y)w &= \widetilde{\nabla}_Z \widetilde{R}(X,Y)w - \widetilde{R}(\widetilde{\nabla}_Z X, Y)w \\
&\quad - \widetilde{R}(X, \widetilde{\nabla}_Z Y)w - \widetilde{R}(X,Y)\widetilde{\nabla}_Z w \\
&= \widetilde{\nabla}_Z \widetilde{R}(X,Y)w - \widetilde{R}(\nabla_Z X, Y)w - \widetilde{R}(\alpha(X,Z),Y)w \\
&\quad - \widetilde{R}(X, \nabla_Z Y)w - \widetilde{R}(X, \alpha(Y,Z))w \\
&\quad - \widetilde{R}(X,Y)A_w(Z) - \widetilde{R}(X,Y)\nabla_Z^{\perp} w
\end{aligned}
$$

Segue da *Equação 1* que se C é perpendicular a A e B e $\pi_2 C = 0$ então $\widetilde{R}(A,B)C = 0$. Como $X, Y, \alpha(X,Z), \alpha(Y,Z), \nabla_Z X, \nabla_Z Y$ são perpendiculares a w e $\pi_2 w = 0$ temos

$$\widetilde{R}(X,Y)A_w(Z) - \widetilde{R}(X,Y)\nabla_Z^{\perp} w = 0.$$

Além disso, $w \perp Im\alpha$ logo, $\langle A_w(Z), Y\rangle = \langle \alpha(Z,Y), w\rangle = 0$. Assim,

$$\widetilde{R}(X,Y)\nabla_Z^{\perp} w = 0$$

para todo $X, Y, Z \in TM$.

Agora, escolhendo $\{X, Y\}$ uma base ortonormal tal que $\pi_2(X) \neq 0$ e $\pi_2(Y) = 0$, pela *Equação 1* temos

$$
\begin{aligned}
0 = \langle \widetilde{R}(X,Y)\nabla_Z^{\perp} w, Y\rangle &= c[(\langle X, \nabla_Z^{\perp} w\rangle - \langle \pi_2 X, \pi_2(\nabla_Z^{\perp} w)\rangle)(\langle Y,Y\rangle - \langle \pi_2 Y, \pi_2 Y\rangle) \\
&\quad - (\langle X,Y\rangle - \langle \pi_2 X, \pi_2 Y\rangle)(\langle Y, \nabla_Z^{\perp} w\rangle - \langle \pi_2 Y, \pi_2 \nabla_Z^{\perp} w\rangle)] \\
&= -c\langle X, \gamma\rangle\langle \nabla_Z^{\perp} w, \gamma\rangle,
\end{aligned}
$$

como $\pi_2 X \neq 0$ então $\langle \nabla_Z^{\perp} w, \gamma\rangle = 0$, como e_3 é a projeção de γ no fibrado tangente, temos

$$\langle \nabla_Z^{\perp} w, e_3\rangle = 0$$

o que implica que $\nabla_Z^{\perp} w \perp e_3$.

□

Afirmação. $\nabla_{\overline{Z}} Z = 0$.

Demonstração. De fato, sejam e_1, e_2 vetores unitários na direção de $\frac{\partial}{\partial u}$ e $\frac{\partial}{\partial v}$ respectivamente, observe que

$$\begin{aligned}\langle Z, Z\rangle &= \Big\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda e_1 - i\lambda_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda e_1 - \lambda e_2)\Big\rangle \\ &= \frac{\lambda^2}{2}\Big(\langle e_1, e_1\rangle - \langle e_2, e_2\rangle - 2\langle e_1, e_2\rangle\Big) = 0,\end{aligned}$$

logo $\langle Z, Z\rangle = 0 \Rightarrow \overline{Z}\langle Z, Z\rangle = 0$ e como Z e $\overline{Z}$ formam uma base para $TM^{\mathbb{C}} = \{X + iY; X, Y \in TM\}$, então $\nabla_{\overline{Z}}Z = Z_1 Z + Z_2\overline{Z}$, onde Z_1 e $Z_2 \in \mathbb{C}$. Assim,

$$\begin{aligned}0 &= \langle \nabla_{\overline{Z}}Z, Z\rangle \\ &= \langle Z_1 Z + Z_2\overline{Z}, Z\rangle \\ &= Z_1\langle Z, Z\rangle + Z_2\langle Z, \overline{Z}\rangle \\ &= z_2\langle Z, \overline{Z}\rangle,\end{aligned}$$

como $\langle Z, \overline{Z}\rangle = \frac{\lambda^2}{2}\Big(\langle e_1, e_1\rangle + \langle e_2, e_2\rangle\Big) = \lambda^2 \neq 0$, então $Z_2 = 0$ o que implica $\nabla_{\overline{Z}}Z = Z_1 Z$. Por outro lado, fazendo um cálculo análogo com $\langle \overline{Z}, \overline{Z}\rangle$ encontramos $\nabla_Z\overline{Z} = Z_2'\overline{Z}$.

Como $[Z, \overline{Z}] = 0 \Rightarrow \nabla_{\overline{Z}}Z = \nabla_{\overline{Z}}Z$, o que implica que $Z_1 Z = Z_2'\overline{Z}$ e como Z e $\overline{Z}$ são linearmente independentes, temos $Z_1 = Z_2' = 0$, e assim

$$\nabla_{\overline{Z}}Z = 0.$$

Para o próximo lema, predisaremos da seguinte definição

Definição 4.1.1. Seja M uma superfície e $\xi : U \subset \mathbb{R}^2 \to V \subset M$ uma parametrização para M na vizinhança do ponto $p \in M$, dada por $\xi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Dizemos que ξ é uma parametrização isotérmica e que (u, v) são *parâmetros isotérmicos* para M se

$\mid \xi_u \mid = \mid \xi_v \mid$ e $\langle \xi_u, \xi_v\rangle = 0$.

O teorema a seguir garante a existência de parâmetros isotérmicos. A demonstração pode ser encontrada em [5].

Teorema 4.1.2. *Sejam U um conjunto aberto e simplismente conexo e $\xi : U \subset \mathbb{R}^2 \to M$ uma parametrização da superfície M. Então, existe um difeomorfismo local $\phi : \widetilde{U} \to U$ de classe C^∞ tal que $\widetilde{\xi} = \xi \circ \phi$ é uma parametrização isotérmica.*

Agora, introduziremos uma forma quadrática em M

$$Q(X,Y) = 2\langle \alpha(X,Y), H\rangle - c\langle X,\gamma\rangle\langle Y,\gamma\rangle,$$

Seja (u,v) parâmetros isotérmicos e seja $z = u + iv$ o parâmetro complexo correspondente, Alencar, Carmo e Tribuzy em [1] consideraram

$$dz = \frac{1}{\sqrt{2}}(du + idv), d\overline{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(du - idv)$$

e

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\Big), \overline{Z} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\Big)$$

e mostraram que a componente $(2,0)$ de Q, $Q^{(2,0)} = \psi dz^2$ é holomorfa, ou seja, a função complexa

$$Q(Z,Z) = 2\langle \alpha(Z,Z), H\rangle - c\langle \gamma, Z\rangle^2 = \psi$$

é holomorfa. A demonstração é simples, basta mostrar que $\overline{Z}Q(Z,Z) = 0$, de fato,

$$\overline{Z}Q(Z,Z) = 2\overline{Z}\langle \alpha(Z,Z), H\rangle - c\overline{Z}\langle \gamma, Z\rangle^2, \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
1)\overline{Z}\langle \alpha(Z,Z), H\rangle &= \langle \nabla^{\perp}_{\overline{Z}}\alpha(Z,Z), H\rangle + \langle \alpha(Z,Z), \nabla^{\perp}_{\overline{Z}}H\rangle \\
&= \langle \nabla^{\perp}_{\overline{Z}}\alpha(Z,Z), H\rangle \\
&= \langle (\nabla^{\perp}_{\overline{Z}}\alpha)(Z,Z), H\rangle + 2\langle \alpha(\nabla^{\perp}_{\overline{Z}}Z, Z), H\rangle \\
&= \langle (\nabla^{\perp}_{\overline{Z}}\alpha)(Z,Z), H\rangle.
\end{aligned}$$

Aqui, usamos que H é paralelo em $\nabla^{\perp}$ e $\nabla^{\perp}_{\overline{Z}}Z = 0$. Agora, usando Codazzi obtemos,

$$\begin{aligned}
\overline{Z}\langle \alpha(Z,Z), H\rangle &= \langle (\nabla^{\perp}_{Z}\alpha)(\overline{Z}, Z), H\rangle + \langle \widetilde{R}(\overline{Z}, Z)Z, H\rangle \\
&= \langle \nabla^{\perp}_{Z}\alpha(\overline{Z}, Z) - \alpha(\nabla_Z\overline{Z}, Z) - \alpha(\overline{Z}, \nabla_Z Z), H\rangle + \langle \widetilde{R}(\overline{Z}, Z)Z, H\rangle.
\end{aligned}$$

Agora, sejam e_1 e e_2 os vetores unitário na direção de $\frac{\partial}{\partial u}$ e $\frac{\partial}{\partial v}$ respectivamente, assim,

$$\begin{aligned}
\alpha(Z,\overline{Z}) &= \alpha\Big(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}(e_1 - ie_2), \frac{\lambda}{\sqrt{2}}(e_1 + ie_2)\Big) \\
&= \frac{\lambda^2}{2}[\alpha(e_1,e_1) + \alpha(e_2,e_2)] \\
&= \lambda^2 H. \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Observe que $\langle \overline{Z}, Z\rangle = \lambda^2$, assim,

$$\begin{aligned}\nabla^{\perp}_{\overline{Z}}\alpha(\overline{Z}, Z) = \nabla^{\perp}_{\overline{Z}}\langle \overline{Z}, Z\rangle H &= \langle \nabla_Z \overline{Z}, Z\rangle H + \langle \nabla_Z Z, \overline{Z}\rangle H \\ &= \langle \nabla_Z Z, \overline{Z}\rangle H.\end{aligned}$$

Agora, observe que $\alpha(\nabla_Z Z, \overline{Z}) = \langle \nabla_Z Z, \overline{Z}\rangle H$, assim, temos

$$\langle \nabla^{\perp}_{\overline{Z}}\alpha(\overline{Z}, Z), H\rangle = \langle\langle \nabla_Z Z, \overline{Z}\rangle H, H\rangle - \langle\langle \nabla_Z Z, \overline{Z}\rangle H, H\rangle = 0.$$

Logo,

$$\overline{Z}\langle \alpha(Z, Z), H\rangle = \langle \widetilde{R}(\overline{Z}, Z)Z, H\rangle,$$

e pela *Equação 1*, temos,

$$\overline{Z}\langle \alpha(Z, Z), H\rangle = c\lambda^2\langle \gamma, Z\rangle\langle \gamma, H\rangle \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}2)\overline{Z}\langle \gamma, Z\rangle^2 &= 2\langle \gamma, Z\rangle[\langle \widetilde{\nabla}_{\overline{Z}}Z, \gamma\rangle + \langle Z, \widetilde{\nabla}_{\overline{Z}}\gamma\rangle], \\ &= 2\langle \gamma, Z\rangle[\langle \nabla_{\overline{Z}}Z + \alpha(Z, \overline{Z}), \gamma\rangle + \langle Z, \widetilde{\nabla}_{\overline{Z}}\gamma\rangle] \\ &= 2\langle \gamma, Z\rangle\langle \alpha(Z, \overline{Z}), \gamma\rangle \\ &= 2\lambda^2\langle \gamma, Z\rangle\langle \gamma, H\rangle. \end{aligned} \tag{4.9}$$

E finalmente, substituindo (4.8) e (4.9) em (4.6), obtemos $\overline{Z}Q(Z, Z) = 0$.

Agora estamos preparados para o

Lema 4.1.4. Se H é uma direção umbílica então $\langle X, \gamma\rangle = 0$ para todo campo de vetor tangente X e portanto $x(M) \subset E^n_c$.

Demonstração. Pela definição de Q, temos $Q^{(2,0)} = Q(Z, Z)dz^2$ onde,

$$Q(Z, Z) = \langle \alpha(Z, Z), H\rangle - c\langle \gamma, Z\rangle^2$$

Seja $\{X, Y\}$ uma base ortonormal de TM. Assim,

$$\begin{aligned}\langle \alpha(Z, Z), H\rangle &= \langle \alpha(X + iY, X + iY), H\rangle \\ &= \langle \alpha(X, X) - \alpha(Y, Y) - 2\alpha(X, Y), H\rangle.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Como H é uma direção umbílica, $A_H Z = \mu Z$ para $Z \in TM$. Assim,

$$\begin{aligned}
\langle \alpha(X,X), H\rangle &= \langle A_H X, X\rangle = \langle \mu X, X\rangle \\
&= \mu\langle X, X\rangle = \mu = \mu\langle Y, Y\rangle \\
&= \langle \mu X, X\rangle = \langle A_H Y, Y\rangle \\
&= \langle \alpha(Y,Y), H\rangle, \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

mais ainda,

$$\langle \alpha(X,Y), H\rangle = \langle A_H X, Y\rangle = \langle \mu X, Y\rangle = 0. \qquad (4.12)$$

Substituindo, (4.11) e (4.12) em (4.10), obtemos

$$\langle \alpha(Z,Z), H\rangle = 0$$

logo,

$$Q(Z,Z) = -c\langle \gamma, Z\rangle^2,$$

como $Q^{(2,0)}$ é holomorfa, temos pela Proposição 3.2.1, $\overline{Z}Q(Z,Z) = 0$ e por (4.9), temos

$$\langle Z, \gamma\rangle\langle H, \gamma\rangle = 0,$$

se $\langle Z, \gamma\rangle = 0$ então o lema está demonstrado, então suponha que $\langle H, \gamma\rangle = 0$, logo,

$$\begin{aligned}
0 = X\langle H, \gamma\rangle &= \langle \widetilde{\nabla}_X H, \gamma\rangle + \langle H, \widetilde{\nabla}_X \gamma\rangle \\
&= \langle \nabla^{\perp}_X H, \gamma\rangle - \langle A_H X, \gamma\rangle + \langle H, \widetilde{\nabla}_X \gamma\rangle \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

mas H é paralelo na conexão $\nabla^{\perp}$, γ é paralelo na conexão $\widetilde{\nabla}$, e H é uma direção umbílica o que implica $A_H X = \mu X$, assim, substituindo em (4.13), obtemos

$$\langle X, \gamma\rangle = 0.$$

□

Para a demonstração do Primeiro Teorema Principal, precisaremos do teorema de Yau em [10].

Teorema 4.1.3. *Seja $x : M^2 \to E_c^n$ uma superfície imersa em E_c^n com vetor curvatura média paralelo em E_c^n. Então, ou M^2 é uma superfície minimal de uma hipersuperfície de E_c^n ou M^2 está contida em uma subvariedade 3-dimensional totalmente umbílica com curvatura média constante.*

Finalmente vamos à

Demonstração do Primeiro Teorema Principal. Se H for uma direção umbílica, pelo Lema 4.2.4, $M \subset E_c^n$ e pelo Teorema 4.1.3 ou $x(M)$ é uma superfície mínima de uma variedade totalmente umbílica de E_c^n ou $x(M)$ é uma superfície com curvatura média constante em uma subvariedade totalmete umbílica tri-dimensional de E_c^n e assim obtemos os itens (1) e (2). Se H não for uma direção umbílica, pelo Lema 4.2.3, o fibrado $TM \oplus L$ é paralelo na conexão $\widetilde{\nabla}$, além disso, segue da *Equação 1* que $TM \oplus L$ é invariante por $\widetilde{R}$. Assim, usando o teorema de redução de codimensão de Eschenburg e Tribuzy em [7], $x(M)$ está contido em uma subvariedade totalmente geodésica de $E_c^n \times \mathbb{R}$ com dimensão menor igual ou igual a 5, assim obtemos (3) (pois observe que o caso $x(M) \subset E_c^5$ já está incluido no item (1) ou (2)).

$\square$

4.2 Segundo Teorema Principal

Nesta seção, vamos trabalhar com as mesmas hipóteses do Primeiro Teorema e considerar o caso onde M é homeomorfa à esfera. Veremos que com estas hipóteses teremos o seguinte resultado:

Teorema 4.2.1. *Sejam M uma superfície compacta, homeomorfa à esfera e E_c^n uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante $c \neq 0$ e seja $x : M \to E_c^n \times \mathbb{R}$ uma imersão com vetor curvatura média paralelo. Então uma das seguintes condições é satisfeita:*

1. *$x(M)$ é uma superfície mínima de uma subvariedade totalmente umbílica de E_c^n;*
2. *$x(M)$ é uma esfera redonda de uma subvariedade totalmete umbílica tri-dimensional de E_c^n;*
3. *$x(M)$ é uma esfera redonda de E_c^3;*

4. *$x(M)$ está contido em $E_c^4 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^6$ (possivelmente com a métrica de Lorentz), e existe um plano P tal que $x(M)$ é invariante pelas rotações desse plano deixando fixo seu complemento ortogonal. E mais, as curvas de nível da função altura $p \to \langle x(p), \gamma \rangle$ são círculos contidos em planos paralelos a P.*

Antes de iniciarmos a demonstração precisaremos de algumas considerações iniciais. Como o vetor curvatura média da nossa superfície é paralelo, então a imersão é analítica. Agora, considere os seguintes casos

Caso A. Se $\gamma \perp T_pM$ para todo $p \in U$, onde U é um subconjunto de M aberto e conexo, nesse caso $x(V) \subset E_c^n$ e como x é analítica, $x(M) \subset E_c^n$.

Caso B. Se $\gamma \in T_pM$ para todo $p \in U$, onde U é um subconjunto de M aberto e conexo. Vimos no Lema 4.2.1 que esse caso implica que $x(U) \subset E_c^2 \times \mathbb{R}$ e como x é analítica, $x(M) \subset E_c^2 \times \mathbb{R}$.

Caso C. As hipóteses dos Casos A e B não são satisfeitas.

Observe que na seção anterior, mostramos no Lema 4.2.4, que se H é uma direção umbílica, então o Caso A ocorre. Agora mostraremos que nas hipóteses do Segundo Teorema Principal, o Caso B não ocorre.

Afirmação 1. Se M é homeomorfa a esfera, então o Caso B não ocorre.
Demonstração. Suponha que o Caso B ocorra, como γ é paralelo na conexão $\widetilde{\nabla}$ então, temos um vetor paralelo em um subconjunto U de M aberto e conexo. Assim, para $i, j = 1, 2$

$$\langle R(e_i, e_j)\gamma, X\rangle = \langle \widetilde{\nabla}_{e_j}\widetilde{\nabla}_{e_i}\gamma - \widetilde{\nabla}_{e_i}\widetilde{\nabla}_{e_j}\gamma + \widetilde{\nabla}_{[e_i,e_j]}\gamma, X\rangle = 0$$

ou seja, o tensor curvatura se anula em U e, por analiticidade, se anula em M. Mas M é homeomorfa à esfera e pelo Teorema de Gauss-Bonnet, a integral da curvatura Gaussiana K em M é positiva, ou seja, existe pontos em M onde K é positiva, o que é uma contradição.

Observação 4.2.1. Essa observação é similar à Observação 4.2.1 da seção anterior, mas dessa vez vamos nos referir ao caso em que $\gamma \perp T_pM$. Considere a função altura $h(p) = \langle x(p), \gamma\rangle$. Observe que

$$dh_p \equiv 0 \Leftrightarrow \gamma \perp T_pM.$$

De fato, seja $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal em T_pM e $\{w_1, w_2\}$ a base dual de $\{e_1, e_2\}$, ou seja, $w_i(e_j) = \delta_{ij}$. Assim, para $i, j = 1, 2$ temos,

$$\begin{aligned} dh_p(e_i) &= \langle dx(e_i), \gamma\rangle + \langle x(p), \widetilde{\nabla}_{e_i}\gamma\rangle \\ &= \langle dx(e_i), \gamma\rangle \\ &= \langle (w_1e_1 + w_2e_2)(e_i), \gamma\rangle \\ &= \langle w_1(e_i)e_1 + w_2(e_i)e_2, \gamma\rangle \\ &= \langle e_i, \gamma\rangle. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Logo,

$$dh_p(e_i) = 0 \Leftrightarrow \langle e_i, \gamma\rangle = 0,$$

segue que pra todo $X \in T_pM$

$$\begin{aligned} dh_p = 0 &\Leftrightarrow \langle \gamma, X\rangle \\ &\Leftrightarrow \gamma \perp T_pM. \end{aligned}$$

Por analiticidade, temos que ou $dh_p \equiv 0$ e nesse caso, $\gamma \perp T_pM$, para todo $p \in M$, o que implica que $x(M) \subset E^n_c$, ou os zeros de dh_p são isolados. Neste último caso, vamos trabalhar com o complemento do conjunto dos zeros de dh_p, ou seja, o complemento do conjunto dos pontos críticos de h e passar ao limite. Assim, vamos supor que estamos na situação do Caso C.

Seja $\{e_1, e_2, e_3, ..., e_{n+1}\}$ um referencial ortonormal tal que e_1 e e_3 são os vetores unitários na direção das projeções de γ nos espaços tangente e normal respectivamente, isso implica que $\langle \gamma, e_k\rangle = 0$ se k for distinto de 1 e 3.

Observe que na situação que estamos trabalhando, H não é uma direção umbílica, pois já vimos no Lema 4.2.4 que isto implicaria $\gamma \perp T_pM$.

Como M é homeomorfa a uma esfera, então todas as formas quadráticas em M se anulam (ver em [8]), logo $Q(Z, Z) = 0$, assim,

Afirmação 2. A base $\{e_1, e_2\}$, onde e_1 e e_2 são os definidos acima, diagonaliza α.

Demonstração. Como $Q(Z, Z) = 0$, então $Q(e_1, e_1) = Q(e_2, e_2)$ e $Q(e_1, e_2) = 0$, assim

$$2\langle \alpha(e_1, e_2), H\rangle = c\langle \gamma, e_1\rangle\langle \gamma, e_2\rangle = 0,$$

pois $\langle \gamma, e_2\rangle = 0$. Logo, pelo Lema 4.2.3 $\{e_1, e_2\}$ diagonaliza α.

Agora, vamos demonstrar uma série de lemas que nos auxiliarão na demosntração do Segundo Teorema Principal.

Lema 4.2.1. Para os cálculos que se seguem, precisaremos dos seguintes resultados:

1. $\nabla_{e_1} e_1 = 0 = \nabla_{e_1} e_2$

2. $d\theta(e_2) = 0$

3. $\nabla^{\perp}_{e_2} e_3$

Demonstração. Como $\gamma = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_3$ é paralelo na conexão $\widetilde{\nabla}$. Assim,

$$\begin{aligned}
0 = \widetilde{\nabla}_{e_1}\gamma &= \widetilde{\nabla}_{e_1}(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_3) \\
&= \widetilde{\nabla}_{e_1} \cos\theta e_1 + \widetilde{\nabla}_{e_2} \sin\theta e_3 \\
&= \cos\theta \widetilde{\nabla}_{e_1} e_1 + e_1(\cos\theta) e_1 + \widetilde{\nabla}_{e_1} e_3 + e_1(\sin\theta) e_3 \\
&= \cos\theta \nabla_{e_1} e_1 + \cos\theta \alpha(e_1, e_1) - \sin\theta d\theta(e_1) e_1 - \sin\theta A_{e_3} e_1 \\
&\quad + \sin\theta \nabla^{\perp}_{e_1} e_3 + \cos\theta d\theta(e_1) e_3.
\end{aligned}$$

Assim, a parte tangente e a parte normal se anulam. Para a parte tangente, temos

$$\cos\theta \nabla_{e_1} e_1 - \sin\theta d\theta(e_1) e_1 - \sin\theta A_{e_3} e_1 = 0. \tag{4.15}$$

Agora observe que

$$\langle e_1, e_1 \rangle = 1 \Rightarrow \langle \nabla_{e_1} e_1, e_1 \rangle = 0,$$

como $\nabla_{e_1} e_1 = \langle \nabla_{e_1} e_1, e_1 \rangle e_1 + \langle \nabla_{e_1} e_1, e_2 \rangle e_2$, temos $\nabla_{e_1} e_1 = \langle \nabla_{e_1} e_1, e_2 \rangle e_2$, logo

$$\nabla_{e_1} e_1 = a e_2$$

onde, $a = \langle \nabla_{e_1} e_1, e_2 \rangle$ e $\{e_1, e_2\}$ diagonaliza α, então $A_{e_3} e_1 = \tilde{a} e_1$. Assim, substituindo em (4.15), obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= a\cos\theta e_2 - \sin\theta d\theta(e_1) - \tilde{a}\sin\theta e_1 \\
&= a\cos\theta e_2 - (\sin\theta d\theta(e_1) - \tilde{a}\sin\theta) e_1,
\end{aligned}$$

como e_1 e e_2 são linearmente independentes, então $a\cos\theta = 0$, mas se $\cos\theta = 0$ então $\gamma \perp T_pM$ mas já descartamos esse caso, então $a = 0$, o que implica $\nabla_{e_1} e_1 = 0$, e como $\langle e_1, e_2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle e_1, \nabla_{e_1} e_2 \rangle = -\langle \nabla_{e_1} e_1, e_2 \rangle = 0$, logo, $\nabla_{e_1} e_2 = 0$, e assim obtemos (1) e (2). Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
0=\widetilde{\nabla}_{e_2}\gamma &= \widetilde{\nabla}_{e_2}(\cos\theta e_1+\sin\theta e_3)\\
&= \widetilde{\nabla}_{e_2}\cos\theta e_1+\widetilde{\nabla}_{e_2}\sin\theta e_3\\
&= \cos\theta\widetilde{\nabla}_{e_2}e_1+e_2(\cos\theta)e_1+\sin\theta\widetilde{\nabla}_{e_2}e_3+e_2(\sin\theta)e_3\\
&= \cos\theta\nabla_{e_2}e_1+\cos\theta\alpha(e_1,e_2)-\sin\theta d\theta(e_2)e_1-\sin\theta A_{e_3}e_2\\
&\quad +\sin\theta\nabla^{\perp}_{e_2}e_3+\cos\theta d\theta(e_2)e_3,
\end{aligned}
$$

e assim, as componentes tangente e normal serão nulas, logo

$$
\cos\theta\nabla_{e_2}e_1-\sin\theta d\theta(e_2)e_1-\sin\theta A_{e_3}e_2=0 \tag{4.16}
$$

$$
\sin\theta\nabla^{\perp}_{e_2}e_3+cos\theta d\theta(e_2)e_3=0, \tag{4.17}
$$

pois $\{e_1,e_2\}$ diagonaliza α o que implica $\alpha(e_1,e_2)=0$.

Observe que

$$
\langle e_1,e_1\rangle=1\Rightarrow\langle\nabla_{e_2}e_1,e_1\rangle=0,
$$

como $\nabla_{e_2}e_1=\langle\nabla_{e_2}e_1,e_1\rangle e_1+\langle\nabla_{e_2}e_1,e_2\rangle e_2$, temos $\nabla_{e_2}e_1=\langle\nabla_{e_2}e_1,e_1\rangle e_2$, logo

$$
\nabla_{e_2}e_1=be_2
$$

onde $b=\langle\nabla_{e_2}e_1,e_1\rangle$ e $\{e_1,e_2\}$ diagonaliza α, então $A_{e_3}e_2=\tilde{b}e_2$. Assim, substituindo em (4.16), obtemos

$$
(b\cos\theta-\widetilde{b}\sin\theta)e_2-\sin\theta d\theta(e_2)e_1=0,
$$

e como e_1 e e_2 são linearmente independentes, temos $d\theta(e_2)=0$, pois se $\sin\theta=0$ então $\gamma\in T_pM$ e já descartamos esse caso. Agora, substituindo em (4.17) obtemos $\nabla^{\perp}_{e_2}e_3=0$, e assim, concluimos o lema.

$\square$

Lema 4.2.2. O vetor normal $\alpha(e_2,e_2)$ é paralelo na conexão normal ao longo das curvas integrais de e_2.

Demonstração. Como H é paralelo na conexão $\nabla^{\perp}$, então

$$
\begin{aligned}
0=\nabla^{\perp}_{e_2}H &= \frac{1}{2}[\alpha(e_1,e_1)+\alpha(e_2,e_2)]\\
&= \frac{1}{2}\nabla^{\perp}_{e_2}\alpha(e_1,e_1)+\frac{1}{2}\nabla^{\perp}_{e_2}\alpha(e_2,e_2)\\
&\Rightarrow \nabla^{\perp}_{e_2}\alpha(e_1,e_1)=-\nabla^{\perp}_{e_2}\alpha(e_2,e_2). \qquad (4.18)
\end{aligned}
$$

Como

$$\begin{aligned}(\nabla^{\perp}_{e_2}\alpha)(e_1,e_1) &= \nabla^{\perp}_{e_2}\alpha(e_1,e_1)-2\alpha(\nabla_{e_1},e_1)\\ &= \nabla^{\perp}_{e_2}\alpha(e_1,e_1),\end{aligned}$$

pois $\nabla_{e_2}e_1 = be_2$ e $\{e_1,e_2\}$ diagonaliza α assim, por Codazzi, temos

$$(\nabla^{\perp}_{e_2}\alpha)(e_1,e_1) = (\nabla^{\perp}_{e_1}\alpha)(e_1,e_1) + (\widetilde{R}(e_1,e_2)e_1)^{\perp},$$

e pela *Equação 1*, temos $(\widetilde{R}(e_1,e_2)e_1)^{\perp} = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}(\nabla^{\perp}_{e_2}\alpha)(e_1,e_1) &= (\nabla^{\perp}_{e_1}\alpha)(e_1,e_1)\\ &= \nabla^{\perp}_{e_1}\alpha(e_1,e_2)-\alpha(\nabla_{e_1}e_1,e_2)+\alpha(e_1,\nabla_{e_1}e_2)\\ &= 0,\end{aligned}$$

Pois pelo Lema 4.3.1, $\nabla_{e_1}e_1 = \nabla_{e_1}e_2 = 0$, assim, por (4.18) e (4.19) temos

$$\nabla^{\perp}_{e_2}\alpha(e_2,e_2) = 0.$$

$\square$

Lema 4.2.3. Em $\nabla_{e_2}e_2 = ae_1$, a é constante ao longo das curvas integrais de e_2.

Demonstração. Já vimos na demonstração do Lema 4.3.1 que $\nabla_{e_2}e_2 = ae_1$, agora vamos mostrar que a é constante ao longo das curvas integrais de e_2. De fato, $\gamma = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_3$, assim

$$\begin{aligned}\langle\gamma,e_2\rangle &= \langle\cos\theta e_1+\sin\theta e_3, e_2\rangle\\ &= \cos\theta\langle e_1,e_2\rangle+\sin\theta\langle e_3,e_2\rangle\\ &= 0,\end{aligned}$$

logo, $0 = \widetilde{\nabla}_{e_2}\langle\gamma,e_2\rangle = \langle\widetilde{\nabla}_{e_2}\gamma,e_2\rangle + \langle\gamma,\widetilde{\nabla}_{e_2}e_2\rangle = \langle\gamma,\widetilde{\nabla}_{e_2}e_2\rangle$, pois γ é paralelo na conexão $\widetilde{\nabla}$. Assim,

$$\begin{aligned}0=\langle\gamma,\widetilde{\nabla}_{e_2}e_2\rangle &= \langle\gamma,\nabla_{e_2}e_2\rangle+\langle\gamma,\alpha(e_2,e_2)\rangle\\ &= \langle\cos\theta e_1+\sin\theta e_3, ae_1\rangle+\langle\cos\theta e_1+\sin\theta e_3,\alpha(e_2,e_2)\rangle\\ &= a\cos\theta\langle e_1,e_1\rangle+a\sin\theta\langle e_1,e_3\rangle+\cos\theta\langle e_1,\alpha(e_2,e_2)\rangle+\sin\theta\langle e_3,\alpha(e_1,e_2)\rangle\\ &= a\cos\theta\langle e_1,e_1\rangle+\sin\theta\langle e_3,\alpha(e_1,e_2)\rangle, \qquad (4.19)\end{aligned}$$

a última igualdade decorre do fato que e_1 está no espaço tangente e e_3 e $\alpha(e_2,e_2)$ estão no espaço normal. Assim, de (4.20) obtemos

$$\begin{aligned}a &= -\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\langle e_3,\alpha(e_2,e_2)\rangle\\ &\Rightarrow\ a = -\tan\theta\langle e_3,\alpha(e_2,e_2)\rangle.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
e_2(a) &= e_2[-\tan\theta\langle e_3, \alpha(e_2,e_2)\rangle] \\
&= -\sec^2\theta d\theta(e_2)\langle e_3, \alpha(e_2,e_2)\rangle + \tan\theta[\langle \nabla^{\perp}_{e_2} e_3, \alpha(e_2,e_2)\rangle + \langle e_3, \nabla^{\perp}_{e_2}\alpha(e_2,e_2)\rangle] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois pelo Lema 4.3.1, $d\theta(e_2) = \nabla^{\perp}_{e_2}\alpha e_3 = 0$, e pelo Lema 4.3.2, $\nabla^{\perp}_{e_2}\alpha(e_2,e_2) = 0$.

□

No Primeiro Teorema, vimos que se H não é uma direção umbílica, então $x(M) \subset E^4_c \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}$, ($\mathbb{R}^5$ possivelmente com a métrica de Lorentz). Agora, vamos considerar $\overline{\nabla}$ a conexão de $\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}$, dessa forma, $\overline{\nabla}$ terá uma componente normal, uma componente tangente e uma componente normal à subvariedade umbílica de E^4_c em $\mathbb{R}^5$.

Lema 4.2.4. O subspaço gerado por $\{e_2, \overline{\nabla}_{e_2}e_2\}$ é paralelo ao longo das curvas integrais de e_2.

Demonstração. Seja L o subspaço gerado por e_2 e $\overline{\nabla}_{e_2}e_2$. Como $\overline{\nabla}_{e_2}e_2 \in L$ basta mostrarmos que $\overline{\nabla}(\overline{\nabla}_{e_2}e_2) \in L$. Observe que no nosso novo espaço ambiente,

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{e_2}e_2 &= (\nabla_{e_2}e_2) + \alpha(e_2,e_2) + e\eta \\
&= ae_1 + \alpha(e_2,e_2) + e\eta
\end{aligned}$$

onde η é um vetor unitário normal a subvariedade umbílica de E^4_c em $\mathbb{R}^5$ que é determinada pela orientação de E^4_c, observe que e é constante. Assim,

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{e_2}(\overline{\nabla}_{e_2}e_2) &= \overline{\nabla}_{e_2}ae_1 + \overline{\nabla}_{e_2}\alpha(e_2,e_2) + \overline{\nabla}_{e_2}e\eta \\
&= a\nabla_{e_2}e_1 + a\alpha(e_1,e_2) + \nabla^{\perp}_{e_2}\alpha(e_2,e_2) \\
&\quad -A_{\alpha(e_1,e_2)}e_2 + \overline{\nabla}_{e_2}(e\eta) \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

mas temos que, $\nabla_{e_2}e_1$ é múltiplo de e_2, $\alpha(e_1,e_2) = 0$, pelo Lema 4.3.2 $\nabla^{\perp}_{e_2}\alpha(e_2,e_2) = 0$, $-A_{\alpha(e_1,e_2)}e_2$ é um múltiplo de e_2 e finalmente, como η é um vetor unitário normal a subvariedade umbílica de E^4_c e e é constante, obtemos $\overline{\nabla}_{e_2}(e\eta) = -e^2e_2$. Assim, substituindo em (4.21) temos que $\overline{\nabla}_{e_2}(\overline{\nabla}_{e_2}e_2)$ é um múltiplo de e_2 e portanto pertence a L.

□

Lema 4.2.5. As curvas integrais de e_2 são círculos planos.

Demonstração. Vamoss mostrar que a curvatura das curvas integrais de e_2 é constante, isto é, $\mid \overline{\nabla}_{e_2} e_2 \mid$ é constante. De fato,

$$\overline{\nabla}_{e_2}(\langle \overline{\nabla}_{e_2} e_2, \overline{\nabla}_{e_2} e_2 \rangle) = 2\langle \overline{\nabla}_{e_2}(\overline{\nabla}_{e_2} e_2), \overline{\nabla}_{e_2} e_2 \rangle,$$

pelo Lema 4 $\overline{\nabla}_{e_2}(\overline{\nabla}_{e_2} e_2)$ é um múltiplo de e_2 e como, $\langle e_2, e_2 \rangle = 1$ então $\langle \overline{\nabla}_{e_2} e_2, e_2 \rangle = 0$. Assim, $\overline{\nabla}_{e_2}(\langle \overline{\nabla}_{e_2} e_2, \overline{\nabla}_{e_2} e_2 \rangle) = 0$ o que implica $\mid \overline{\nabla}_{e_2} e_2 \mid$ é constante.

□

Lema 4.2.6. As curvas integrais de e_2 estão contidos em planos paralelos.

Demonstração. Na Observação 4.3.1 vimos que

$$dh_p(e_2) = \langle e_2, \gamma \rangle,$$

substituindo o valor de γ temos

$$dh_p(e_2) = \langle e_2, \cos\theta e_1 + \sin\theta e_3 \rangle = 0,$$

o que implica que a função altura é constante ao longo das curvas integrais de e_2, ou seja, as curvas integrais de e_2 são curvas de nível da função altura $h(p) = \langle x(p), \gamma \rangle$ onde $p \in M$. Pelo Lema 4.3.5, as curvas integrais de e_2 são círculos planos. Assim, a função altura não tem pontos de sela. Como M é homeomorfa a esfera, a característica de Euler de M é 2 e assim, pelo Teorema de Morse h atinge um máximo em um único ponto e um mínimo também em um único ponto.

Segue que, dado um ponto em uma curva integral de e_2, podemos ligar esse ponto a outra curva integral por uma única linha gradiente. Mas as linhas gradientes parametrizadas pelo comprimento de arco são as curvas integrais de e_1. Como

$$\overline{\nabla}_{e_1} e_2 = \nabla_{e_1} e_2 + \alpha(e_1, e_2) = 0,$$

então, as linhas tangentes dos pontos correspondentes de curvas integrais de e_2 distintas são paralelas. O que prova o lema.

□

Agora, estamos preparados para a

Demonstração do Teorema 2. Se H é uma direção umbílica, pelo Lema 4.2.4, $x(M) \subset E_c^n$ e pelo Teorema 4.1.2, ou $x(M)$ é uma superfície minimal totalmente umbílica de E_c^n, ou $x(M)$ está contido em uma subvariedade 3-dimensional totalmente umbílica de E_c^n com curvatura média constante e como M é homeomorfa à esfera, temos, pelo Teorema de Hopf que $x(M)$ é isométrica a esfera e assim, obtemos (1) , (2) e (3).

Se H não é uma direção umbílica, vamos decompor $\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}$ em dois subspaços ortogonais $P \oplus P^{\perp}$, onde P é o plano que contém uma curva integral de e_2, e $P^{\perp}$ é seu complemeto ortogonal.

Podemos parametrizar as curvas integrais de e_2 por

$$g + r\cos\theta f_1 + r\sin\theta f_2 \tag{4.21}$$

onde $\{f_1, f_2\}$ é uma base ortonormal de P, r é uma função em M constante ao longo das curvas integrais de e_2, ou seja, $e_2(r) = 0$, e $g \in P$ é o vetor posição do centro do círculo em (4.22) e $e_2(g) = 0$.

Seja $\beta(s) = g(s) + r(s)\cos\theta f_1 + r(s)\sin\theta f_2$ as curvas de nível da função altura a medida que movemos ao longo da linha gradiente. Seja $\hat{g}(s)$ a projeção de $g(s)$ em P.

Afirmação. $\hat{g}(s)$ permanece fixo quando movemos ao longo da linha gradiente.

Demonstração. Vamos mostrar que $\hat{g}'(s) = 0$. De fato,

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial s}\beta(s) = \hat{g}'(s) + r'(s)\cos\theta f_1 + r'(s)\sin\theta f_2$$

e como $e_2 = -\sin\theta f_1 + \cos\theta f_2$, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \langle e_1, e_2\rangle = \langle \hat{g}'(s) + r'(s)\cos\theta f_1 + r'(s)\sin\theta f_2, -\sin\theta f_1 + \cos\theta f_2\rangle \\
&= \langle \hat{g}'(s), -\sin\theta f_1 + \cos\theta f_2\rangle - r'(s)\cos\theta\sin\theta\langle f_1, f_1\rangle + r'(s)\cos^2\theta\langle f_1, f_2\rangle \\
&\quad -r'(s)\sin^2\theta\langle f_1, f_2\rangle + r'(s)\cos\theta\sin\theta\langle f_2, f_2\rangle \\
&= \langle \hat{g}'(s), e_2\rangle.
\end{aligned}$$

Logo $\langle \hat{g}'(s), e_2\rangle = 0$ e como e_2 gera P, temos $\hat{g}'(s) = 0$. E assim, concluímos a demonstração do Segundo Teorema Principal.

□

Referências Bibliográficas

[1] Abresch, U. e Rosenberg, H., *A Hopf differential for constant means curvature surfaces in* $S^2 \times \mathbb{R}$ *and* $H^2 \times \mathbb{R}$, Acta Math.193(2004),141-174.

[2] Abresch, U. e Rosenberg, H., *Generalized Hopf differentials*, Matemática Contemporânea, 28(2005), Sociedade Brasileira de Matemática, 1-28.

[3] Alencar, H., Carmo M.P. e Tribuzy, R., *A Hopf Theorem for ambient spaces of dimensions higher than three*, "preprint"(2008).

[4] Alencar, H., Carmo M.P. e Tribuzy, R., *A theorem of Hopf and Cauchy-Riemann inequality*, Comunications in Analysis and Geometry, 15(2007) 283-298.

[5] Carmo, M.P., *Geometria Riemanniana*, Rio de Janeiro:Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988 - terceira edição.(Projeto Euclides)

[6] Carmo, M.P., *O Método do Referencial Móvel*, Rio de Janeiro:Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1976.

[7] Eschenburg, J. e Tribuzy, R. *Existence and Uniqueness of maps into Affine Homogeneous Spaces.* Rend. Sem. Mat. Padova, Vol 89 (1993).

[8] Hopf, H., *Differential Geometry in the large*, Lectures Notes in Math., 1000, Geometry 5 (1971), 333-340.

[9] Yano, K. and Kon, M., *Structures on Manifolds*, Series in Pure Mathematics, World Scientific, v.3, 1984.

[10] Yau, S.T., *Submanifolds with constant mean curvature I*, American Journal of Mathematics, 96(1974),346-366.