Sobre uma Equação de Kirchhoff-Carrier com Dissipação em Espaços de Banach

por

Ricardo Rodrigues de Carvalho

sob orientação de

Prof. Dr. Manuel Milla Miranda (UFRJ)

Tese submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Maio/2009

Rio de Janeiro - RJ

Sobre uma Equação de Kirchhoff-Carrier com Dissipação em Espaços de Banach

Tese submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Manuel Milla Miranda (Presidente)

(Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ)

Prof. Dr. Haroldo Rodrigues Clark

(Universidade Federal Fluminense - UFF)

Prof. Dr. Ricardo Fuentes Apolaya

(Universidade Federal Fluminense - UFF)

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna

(Universidade Federal da Paraiba - UFPB)

Prof. Dr. Ademir Fernando Pazoto

(Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ)

Prof. Dr. Helvécio Rubens Crippa (Suplente)

(Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ)

Maio/2009

Rio de Janeiro - RJ

Ficha Catalográfica

	Carvalho, Ricardo Rodrigues
C331s	Sobre uma equação de Kirchhoff-Carrier com dissipação
2009	em espaços de Banach / Ricardo
	Rodrigues Carvalho – Rio de Janeiro: UFRJ/IM,
	2009.
	ix, 97f.; 30cm.
	Tese (doutorado) - UFRJ/IM. Programa de Pós-graduação
	em Matemática, 2009.
	Orientador: Manuel Milla Miranda
	Referências: f. 93-5
	1. Equações de Kirchhoff-Carrier. I. Milla Miranda,
	Manuel Antolino. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro.
	Instituto de Matemática. III. Título.

Agradecimentos

Quero expressar meus sinceros agradecimentos a todos que contribuíram para a concretização deste trabalho, em especial,

à Deus pelo seu infinito amor;

à minha amada esposa Gracielle Galdino Nóbrega de Carvalho pelo constante incentivo, apoio e amor, ingredientes que foram essenciais e indispensáveis em todos os momentos do curso;

à toda minha família, em especial aos meus pais José Alves e Joseneide e irmãos Rômulo e Daniele, pelo apoio e pelos ensinamentos durante toda a minha vida e jornada acadêmica;

aos pais de minha esposa Wilson e Indijana pelo constante apoio;

ao amigo e professor Manuel Milla Miranda, pela competente orientação, confiança, carinho e acolhimento sempre reservados nos momentos que enfrentei dificuldades;

ao professor Luís Adauto da Justa Medeiros, pela amizade, disponibilidade nos momentos das dificuldades e pelos valorosos cursos ministrados durante meu programa de doutorado;

aos professores e funcionários do IM-UFRJ, em particular a professora Walcy Santos e aos secretários Eduardo e Davi pela confiança, atenção e inúmeros favores constantemente prestados;

ao amigo e professor Fágner Dias Araruna, pelo constante estímulo;

aos professores Marivaldo Pereira Matos e Nelson Neri de Oliveira e Castro, pelos ensinamentos durante o meu mestrado;

aos amigos Marcelo Barbosa e Nádia Mayume pela amizade, dedicação, presteza e ajuda em todos os momentos que estive no Rio de Janeiro;

ao Pastor Nathan, sua família e a todos os irmãos em Cristo da Igreja Batista Regular da Ilha do Governador pelos momentos de comunhão;

aos irmãos em Cristo da Igreja Batista Fundamentalista de Tambaú em João Pessoa, pelas orações e inúmeros incentivos;

ao amigo e professor Paulo Roberto Silva Pessoa, pela disponibilidade, presteza e ajuda quando precisei de um procurador junto a FUNCAP;

à Universidade Regional do Cariri a qual estou vinculado e que me forneceu todas as condições necessárias para a obtenção do título de doutor;

à FUNCAP, pelo apoio financeiro concedido por meio de uma bolsa do Programa de Doutorado durante todos os anos em que estive na UFRJ.

.

A Deus
por ser o criador
e consumador
de todas as coisas.

Resumo

Neste trabalho estuda-se a existência local e global de soluções bem como o decaimento da energia do seguinte problema:

$$(*) \quad \left| \begin{array}{l} Bu''(t) + M(\|u(t)\|_W^\beta)Au(t) + \delta Au'(t) = 0, \ em\ V', \ t > 0 \\ u\,(0) = u^0, \ u'\,(0) = u^1, u^0 \neq 0. \end{array} \right.$$

Aqui V é um espaço de Hilbert separável real com dual V'; $A, B : V \to V'$ são operadores lineares simétricos com $\langle Bv, v\rangle > 0$, $v \neq 0$, e $\langle Av, v\rangle \geq \gamma \|v\|_V^2$, γ constante positiva; W um espaço de Banach tal que V está imerso continuamente em W; $M(\xi)$ uma função contínua com $M(\xi) \geq 0$ e β, δ números reais com $\beta \geq 1$ e $\delta > 0$.

Para a obtenção da solução global de $(*)$ se introduz mais uma dissipação na equação e considera-se $M(\xi) = m_0 + m_1\xi$, com $m_0 > 0$ e $m_1 \geq 0$ constantes. O decaimento da energia é mostrado para uma variação dessa dissipação e para $m_1 = m_1(t)$ uma função decrescente.

As ferramentas importantes utilizadas neste trabalho são uma caracterização da derivada de $M(\|u(t)\|_W^\beta)$, a teoria espectral de operadores auto-adjuntos não limitados, o método das aproximações sucessivas, o Teorema de Arzela-Áscoli e um funcional de Lyapunov.

Abstract

In this work we study the local and global existence of solutions as well as the decay of the energy of the following problem:

$$(*) \qquad \left| \begin{array}{l} Bu''(t) + M(\|u(t)\|_W^\beta)Au(t) + \delta Au'(t) = 0, \ in \ V', \ t > 0 \\ u(0) = u^0, \ u'(0) = u^1, u^0 \neq 0. \end{array} \right.$$

Here V is a real separable Hilbert space with dual V'; $A, B : V \to V'$ are symmetric linear operatores with $\langle Bv, v\rangle > 0$, $v \neq 0$, and $\langle Av, v\rangle \geq \gamma \|v\|_V^2$, γ positive constant; W is a Banach space such that V is continuously embedding in W; $M(\xi)$ is a continuous function with $M(\xi) \geq 0$ and β, δ real numbers with $\beta \geq 1$ and $\delta > 0$.

To obtain the global solution of $(*)$ we introduce more one dissipation in the equation and consider $M(\xi) = m_0 + m_1\xi$, with $m_0 > 0$ and $m_1 \geq 0$ constants. The exponential decay of the energy follows by applying a variation of that dissipation and considering $m_1 = m_1(t)$, $m_1(t)$ a decreasing function.

The fundamental tools used in this work are a characterization of the derivative of $M(\|u(t)\|_W^\beta)$, the spectral theory of unbounded self-adjoint operators, the method of sucessive approximations, the Arzela-Áscoli Theorem and a Lyapunov functional.

Sumário

.

Introdução

As pequenas vibrações transversais de uma corda elástica de comprimento L, quando se supõe que a tensão em cada ponto da corda possui apenas uma componente vertical, podem ser descritas pela seguinte equação:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + \left\{ m_0 + m_1 \int_0^L (\frac{\partial u}{\partial x}(x,t))^2 dx \right\} \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \right) = 0, \ 0 < x < L, \ t > 0, \qquad (1)$$

onde m_0 é uma constante vinculada com a tensão inicial da corda, m_1 com a característica do material da corda e $u(x,t)$ denota o deslocamento vertical do ponto x da corda no instante t. A equação (1) foi introduzida por Kirchhoff [13] (veja também Lions [15]).

Analizando o mesmo fenômeno, Carrier [5] deduziu a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + \left\{ m_0 + m_1 \int_0^L (u(x,t))^2 dx \right\} \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \right) = 0, \ 0 < x < L, \ t > 0. \qquad (2)$$

As equações (1) e (2) possuem uma significativa generalização no caso n-dimensional quando se considera $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e limitado. São elas, respectivamente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + \left\{ m_0 + m_1 \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2_{\mathbb{R}} \, dx \right\} (-\Delta u(x,t)) = 0, \ x \in \Omega, \ t > 0 \qquad (3)$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + \left\{ m_0 + m_1 \int_\Omega (u(x,t))^2 dx \right\} (-\Delta u(x,t)) = 0, \ x \in \Omega, \ t > 0. \qquad (4)$$

A seguir formularemos as equações (3) e (4) dentro de um contexto abstrato. Para isso, seja H um espaço de Hilbert separável cujo produto escalar e norma serão denotados, respectivamente, por (u,v) e $|u|$. Considere um operador linear auto-adjunto não limitado A de H com $A \geq \gamma I_d$, γ um número real positivo, tal que sua inversa A^{-1} é um operador compacto de H. Considere também uma função real $M(\xi)$ tal que $M \in C^1$ e $M(\xi) \geq m_0 > 0$, para todo $\xi \geq 0$. Nestas condições temos o seguinte problema de valor inicial:

$$(*)\qquad \left| \begin{array}{l} u''(t) + M(\left|A^{\theta}u(t)\right|^{2})Au(t) = 0,\ t > 0 \\ u\,(0) = u^{0},\ u'\,(0) = u^{1}, \end{array} \right.$$

onde θ é um número real com $0 \leq \theta \leq 1$.

Notemos que a equação (3) é obtida da equação de $(*)$ considerando $\theta = \frac{1}{2}$ e a equação (4) para $\theta = 0$.

Supondo u^0 e u^1 funções analíticas e $\theta = \frac{1}{2}$ tem-se que o Problema $(*)$ possui solução global. Este resultado foi obtido, entre outros matemáticos, por Bernstein [3], Pohozaev [24], Lions [15], Nishihara [23], Arosio e Spagnolo [2] e Clark [6]. Também o caso geral, isto é, o Problema $(*)$ com $0 \leq \theta \leq 1$, possui solução global conforme Cousin et al [7].

Considere agora $u^0 \in D(A)$, $u^1 \in D(A^{\frac{1}{2}})$ e $\theta = \frac{1}{2}$. Nestas condições o Problema $(*)$ possui solução local. Este resultado foi provado por Medeiros e Milla Miranda [18]. O caso degenerado, isto é, quando $M(\xi) \geq 0$ foi estudado por Ebihara, Medeiros e Milla Miranda [9], Yamada [27], Yamazaki [28] e Arosio e Garavaldi [1]. Ainda nas mesmas condições acima para u^0, u^1 e θ, mas com $M(\xi) = \frac{1}{(a+b\xi)^2}$ (a, b números reais positivos), Pohozaev [25] provou a existência de solução global para o Problema $(*)$.

A existência de solução local do Problema $(*)$ quando $u^0 \in D(A)$, $u^1 \in D(A^{\frac{1}{2}})$, $\theta = \frac{1}{2}$ e A^{-1} não é um operador compacto de H foi estudado por Matos [17], Crippa [8] e Souza e Milla Miranda [26].

Em 2008 Izaguirre, Fuentes e Milla Miranda [11] estudaram o Problema $(*)$ no contexto dos espaços de Banach. Mais precisamente, foi obtido a solução local do problema

$$(**)\qquad \left| \begin{array}{l} Bu''(t) + M(\|u(t)\|_{W}^{\beta})Au(t) = 0,\ em\ V',\ t > 0 \\ u\,(0) = u^{0},\ u'\,(0) = u^{1}, u^{0} \neq 0, \end{array} \right.$$

onde V é um espaço de Hilbert separável real com dual V'; $A, B : V \to V'$ são operadores lineares simétricos com $\langle Bv, v\rangle > 0$, $v \neq 0$, e $\langle Av, v\rangle \geq 0$; W um espaço de Banach real tal que V está continuamente imerso em W; $M(\xi)$ uma função contínua com $M(\xi) \geq 0$ e β um número real com $\beta \geq 1$.

Ainda em 2008, Izaguirre, Fuentes e Milla Miranda [12] determinaram a existência de solução global e decaimento da energia para o Problema $(**)$ com uma dissipação na equação.Precisamente, eles analisaram o seguinte problema:

$$
(***) \qquad \left| \begin{array}{l} Bu''(t) + M(\|u(t)\|_W^{\beta})Au(t) + \delta Bu'(t) = 0,\ em\ V',\ t > 0 \\ u\,(0) = u^0,\ u'\,(0) = u^1, u^0 \neq 0, \end{array} \right.
$$

onde aqui supõe-se as mesmas hipóteses do Problema $(**)$ acrescentando-se as condições $\langle Av, v\rangle \geq \gamma \|v\|_V^2,\ \gamma > 0$ e que δ é um número real positivo e os dados pertencentes a uma bola cujo raio depende de δ.

Quando $B = I$, $\beta = 2$, $\delta \geq 0$ e W é um espaço de Hilbert, existe uma extensa literatura deste problema (ver Medeiros, Limaco e Menezes [20]).

O objetivo desta tese é estudar a existência de soluções globais e o decaimento da energia do Problema $(***)$ com uma dissipação mais forte, porém suprimindo a hipótese que os dados estão numa bola cujo raio depende de δ. Em Medeiros e Milla Miranda [19] estuda-se a existência de solução global e o decaimento da energia do seguinte problema:

$$
. \qquad \left| \begin{array}{l} u'' + M(\|u\|^2_{D(A^{\frac{1}{2}})})Au + Au' = 0 \\ u\,(0) = u^0,\ u'\,(0) = u^1, \end{array} \right.
$$

onde $(Au, u) \geq \gamma \|u\|_V^2,\ \gamma > 0$, e A^{-1} é compacto. Aqui os dados não tem restrições. De acordo com nosso objetivo, é natural, então, analisarmos o seguinte problema:

$$
(P) \qquad \left| \begin{array}{l} Bu''(t) + M(\|u(t)\|_W^{\beta})Au(t) + \delta Au'(t) = 0,\ em\ V',\ t > 0 \\ u\,(0) = u^0,\ u'\,(0) = u^1. \end{array} \right.
$$

Infelizmente só conseguimos solução global e decaimento da energia do Problema (P) quandos os dados estão numa bola cujo raio depende de δ. Isto se deve ao fato do termo não linear está definido num espaço de Banach (ver Capítulo 1).

Para dar uma resposta positiva ao nosso objetivo fomos levados a considerar mais uma dissipação na equação de (P), ou seja, consideramos o problema

$$
(P') \qquad \left| \begin{array}{l} Bu''(t) + (m_0 + m_1 \|u(t)\|_W^{\beta})Au(t) + (1 + k(t)\, \|u(t)\|^{\beta}_{D(S^2)})Au'(t) = 0,\ em\ V',\ t > 0 \\ u\,(0) = u^0,\ u'\,(0) = u^1, \end{array} \right.
$$

onde $m_0 > 0$, $m_1 \geq 0$ são constantes e $k(t)$ uma função positiva satisfazendo condições apropriadas. O operador S é definido em (1.1) do Capítulo 1. Consegue-se solução global de (P') (ver Capítulo 2).

Para obter decaimento da energia considera-se o problema

$$(P'') \quad \left| \begin{array}{l} Bu''(t) + (m_0 + m_1(t)\, \|u(t)\|_W^\beta)Au(t) + (1 + k\, \|u(t)\|_{D(S^2)}^\beta)Au'(t) = 0, \;\; em\ V', \;\; t > 0 \\ u\,(0) = u^0, \;\; u'\,(0) = u^1, \end{array} \right.$$

onde $m_0 > 0$ é uma constante, $m_1(t)$ uma função positiva decrescente com condições suplementares e $k > 0$ uma constante apropriada. Obtém-se decaimento exponencial da energia associada a (P'') (ver Capítulo 3).

Nos Problemas (P') e (P'') faz-se a hipótese que

$$D(S) \text{ está continuamente imerso em } W.$$

Esta hipótese é mais fraca que a considerada no Problema (P), isto é, a hipótese

$$D(S^{\frac{1}{2}}) = V \text{ está continuamente imerso em } W.$$

Na obtenção dos resultados de existência local de soluções (início dos Capítulos 1 e 2) utiliza-se as aproximações de Galerkin, a teoria espectral de operadores auto-adjuntos não limitados, o método das aproximações sucessivas e o Teorema de Arzela-Áscoli o qual permite a passagem ao limite na parte não linear. As estimativas a priori das soluções dos problemas aproximados respectivos são obtidas graças a uma boa caracterização da derivada do termo $M(\|u(t)\|_W^\beta)$ (ver [11]). As soluções globais (parte dos Capítulos 1 e 2) resultam da aplicação de uma técnica utilizada em [12] que consiste em mostrar que o intervalo maximal de existência da solução é $[0, \infty[$. O decaimento exponencial da energia dos Problemas (P) e (P'') é mostrado usando um funcional de Lyapunov (ver Komornik e Zuazua [14]). No último Capítulo (Capítulo 4) são exibidos alguns exemplos.

Capítulo 1

Solução do Problema (P)

Como foi mencionado na introdução, pretendemos, neste capítulo, analisar as soluções local e global bem como o decaimento da energia associada a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$(P) \qquad \left| \begin{array}{l} Bu''(t) + M(\|u(t)\|_W^\beta)Au(t) + \delta Au'(t) = 0,\ em\ V',\ t > 0 \\ u\,(0) = u^0,\ u'\,(0) = u^1, u^0 \neq 0, \end{array} \right.$$

onde V representa um espaço de Hilbert separável real com dual V' e W um espaço de Banach real com dual W'.

Para o que se pretende fazer, assumiremos que

$(H1)$ $\qquad$ V está continuamente imerso em W

e que

$(H2)$ $\qquad$ W' é estritamente convexo.

Denotaremos por $A, B : V \to V'$ dois operadores lineares satisfazendo:

$$(H3) \qquad \left| \begin{array}{l} \langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle\,,\ \forall u, v \in V \\ \langle Au, u\rangle \geq \gamma\,\|u\|_V^2\,,\ \forall u \in V\ (\gamma \text{ constante positiva}) \\ \langle Bu, v\rangle = \langle u, Bv\rangle\,,\ \forall u, v \in V \\ \langle Bu, u\rangle > 0,\ \forall u \in V, u \neq 0, \end{array} \right.$$

onde $\langle , \rangle$ denota a dualidade entre V' e V.

Por $(H3)$ temos que $((u,v)) = \langle Au, v\rangle$ é um produto escalar em V e que a norma $\|u\| = ((u,u))^{\frac{1}{2}}$ é equivalente em V com a norma $\|u\|_V$. No que segue, equiparemos o espaço V com a norma $\|.\|$ e com o produto escalar $((,))$.

A forma bilinear

$$(u,v) = \langle Bu, v\rangle\,,\ \forall u, v \in V$$

é um produto escalar em V. Denotaremos por H o completamento do espaço $\{V, (.,.)\}$. O produto escalar do espaço de Hilbert H também será denotado por $(.,.)$ e a norma por $|.|$. Com isto resulta que

$$V \text{ é denso e continuamente imerso em } H.$$

Consideremos o operador auto-adjunto e coercivo S de H determinado pela terna $\{V, H, ((u,v))\}$. Temos:

$$(Su, v) = ((u,v)) = \langle Au, v\rangle\,,\ \forall u \in D(S),\ \forall v \in V, \tag{1.1}$$

$$Au = BSu, \text{ em } V',\ \forall u \in D(S^{\frac{3}{2}}), \tag{1.2}$$

onde $D(S^\alpha)$ denota o domínio do operador S^α e $\alpha \geq 0$ é um número real.

Observação 1.1 *O espaço de Hilbert* $D(S^\alpha) = \left\{u \in H; \int_0^\infty \lambda^{2\alpha} d\left(E_\lambda u, u\right) < \infty\right\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, *é equipado com o produto escalar*

$$(u,v)_{D(S^\alpha)} = (S^\alpha u, S^\alpha v)\,.$$

Aqui $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ *denota a família espectral do operador* S.

Observação 1.2 *Identificando* H *com seu dual* H' *concluimos pela expressão* (1.1) *que* A *é a extensão de* S *para o espaço* V.

Observação 1.3 *Pela propriedade* (1.2) *e notando que existe* B^{-1} *concluimos que as equações*

$$Bu''(t) + M(\|u(t)\|_W^\beta)Au(t) + \delta Au'(t) = 0, \text{ em } V',\ t > 0 \tag{1.3}$$

e

$$u''(t) + M(\|u(t)\|_W^\beta)Su(t) + \delta Su'(t) = 0, \ \textit{em} \ D(S^{\frac{3}{2}}), \ t > 0 \tag{1.4}$$

são equivalentes.

Em virtude da Observação 1.3, fixaremos nosso estudo na equação (1.4) ao invés da equação (1.3).

Consideremos uma função $M(\xi)$ satisfazendo

$(H4)$ $\qquad M \in C^0([0, +\infty[)$ e $M(\xi) \geq 0$, $\forall \xi \geq 0$.

Sejam $\mu_1, \mu_2 : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ duas funções satisfazendo

$(H5)$ $\qquad \mu_1 \in W^{1,\infty}_{loc}(]0, +\infty[)$, $\mu_1(t) \geq C^* > 0$, $q.s$ em t (C^* constante)

e

$(H6)$ $\qquad \mu_2 \in L^\infty_{loc}(0, \infty)$, $\mu_2(t) \geq C^{**} > 0$, $q.s$ em t (C^{**} constante).

Analisaremos agora o seguinte problema linear:

$$(L) \qquad \left| \begin{array}{l} u'' + \mu_1 Su + \delta\left(1 + \theta\mu_2\right) Su' = 0 \\ u\left(0\right) = u^0, \ u'\left(0\right) = u^1, \end{array} \right.$$

onde δ e θ são números reais com $\delta > 0$, $\theta \geq 0$ e μ_1, μ_2 são funções satisfazendo a $(H5)$ e $(H6)$, respectivamente. Mais precisamente, temos:

Proposição 1.1 *Consideremos as hipóteses* $(H5)$ *e* $(H6)$*. Se* α, δ *e* θ *são números reais com* $\alpha \geq 0$, $\delta > 0$, $\theta \geq 0$ *e* $u^0 \in D(S^{2\alpha+\frac{7}{2}})$, $u^1 \in D(S^{2\alpha+3})$, *então existe uma única função* u *na classe*

$$\left| \begin{array}{l} u \in L^\infty_{loc}(0, \infty; D(S^{2\alpha+\frac{7}{2}})) \\ u' \in L^\infty_{loc}(0, \infty; D(S^{2\alpha+3})) \cap L^2_{loc}(0, \infty; D(S^{2\alpha+\frac{7}{2}})) \\ u'' \in L^\infty_{loc}(0, \infty; D(S^{2\alpha+2})) \cap L^2_{loc}(0, \infty; D(S^{2\alpha+\frac{5}{2}})) \end{array} \right.$$

tal que u *é solução do problema*

$$(L) \qquad \left| \begin{array}{l} u'' + \mu_1 Su + \delta\left(1 + \theta\mu_2\right) Su' = 0 \ \textit{em} \ L^\infty_{loc}(0, \infty; D(S^{2\alpha+2})) \cap L^2_{loc}(0, \infty; D(S^{2\alpha+\frac{5}{2}})) \\ u\left(0\right) = u^0, \ u'\left(0\right) = u^1. \end{array} \right.$$

Demonstração: Considerando-se H um espaço de Hilbert separável, resulta que $D(S^{4\alpha+6})$ é também separável. Sendo H Hilbert separável, então H admite uma base hilbertiana. Seja $\{w_1,\ w_2,...\}$ essa base hilbertiana.

Provaremos que $\left\{S^{-(4\alpha+6)}w_1,\ S^{-(4\alpha+6)}w_2,...\right\}$ é uma base hilbertiana de $D(S^{4\alpha+6})$, onde $D(S^{4\alpha+6})$ é equipado do produto escalar

$$(u,v)_{D(S^{4\alpha+6})}=\left(S^{4\alpha+6}u,S^{4\alpha+6}v\right),\ \forall u,v\in D(S^{4\alpha+6}). \tag{1.5}$$

Sendo assim, vamos provar o seguinte:

(i) $\left|S^{-(4\alpha+6)}w_i\right|_{D(S^{4\alpha+6})}=1$, $\forall i$ e $\left(S^{-(4\alpha+6)}w_i,S^{-(4\alpha+6)}w_j\right)_{D(S^{4\alpha+6})}=0$, $\forall i,j,\ i\neq j$.

(ii) O espaço vetorial gerado pelos $(S^{-(4\alpha+6)}w_i)$ é denso em $D(S^{4\alpha+6})$.

O item **(i)** decorre de (1.5), pois,

$$\left(S^{-(4\alpha+6)}w_i,S^{-(4\alpha+6)}w_j\right)_{D(S^{4\alpha+6})}=\left(S^{4\alpha+6}(S^{-(4\alpha+6)}w_i),S^{4\alpha+6}(S^{-(4\alpha+6)}w_j)\right)=(w_i,w_j)=\delta_{ij.}$$

Agora seja $u\in D(S^{4\alpha+6})$. Então, $S^{4\alpha+6}u\in H$. Sendo (w_i) uma base Hilbertiana de H resulta que a série $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\left|(S^{4\alpha+6}u,w_i)\right|^2<\infty$ o que implica que a série

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(S^{4\alpha+6}u,w_i\right)_{D(S^{4\alpha+6})}S^{-(4\alpha+6)}w_i$$

é convergente. Então,

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}\left(u,S^{-(4\alpha+6)}w_i\right)_{D(S^{4\alpha+6})}S^{-(4\alpha+6)}w_i\right|^2_{D(S^{4\alpha+6})}=$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(u,S^{-(4\alpha+6)}w_i\right)_{D(S^{4\alpha+6})}S^{-(4\alpha+6)}w_i,\sum_{i=1}^{\infty}\left(u,S^{-(4\alpha+6)}w_i\right)_{D(S^{4\alpha+6})}S^{-(4\alpha+6)}w_i\right)_{D(S^{4\alpha+6})}=$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(S^{4\alpha+6}u,w_i\right)S^{-(4\alpha+6)}w_i,\sum_{i=1}^{\infty}\left(S^{4\alpha+6}u,w_i\right)S^{-(4\alpha+6)}w_i\right)_{D(S^{4\alpha+6})}=$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(S^{4\alpha+6}u,w_i\right)w_i,\sum_{i=1}^{\infty}\left(S^{4\alpha+6}u,w_i\right)w_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\left|(S^{4\alpha+6}u,w_i)\right|^2=\left|S^{4\alpha+6}u\right|^2=|u|^2_{D(S^{4\alpha+6})}$$

o que implica **(ii).**

Logo, $\left\{S^{-(4\alpha+6)}w_1,\ S^{-(4\alpha+6)}w_2, ...\right\}$ é uma base hilbertiana de $D(S^{4\alpha+6})$. Assim, podemos considerar $\{z_1,\ z_2, ...\}$ uma base hilbertiana de $D(S^{4\alpha+6})$ onde $z_i = S^{-(4\alpha+6)}w_i$, $i = 1, 2, ...$.

Problema Aproximado

Seja $V_m = [z_1,\ z_2, ...,\ z_m]$ o subespaço de $D(S^{4\alpha+6})$ gerado pelos m primeiros vetores de $\{z_1,\ z_2, ...\}$. O problema aproximado consiste em determinar a função $u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) z_j$ solução do problema

$$
(PA) \quad \left|
\begin{array}{l}
(u''_m(t), S^{4\alpha+6}z_j) + \mu_1(t)(Su_m(t), S^{4\alpha+6}z_j) + \\
\delta(1+\theta\mu_2(t))(Su'_m(t), S^{4\alpha+6}z_j) = 0,\ z_j \in V_m \\
u_m(0) = u_{0m} \to u^0 \text{ forte em } D(S^{2\alpha+\frac{7}{2}}) \\
u'_m(0) = u_{1m} \to u^1 \text{ forte em } D(S^{2\alpha+3}).
\end{array}
\right.
$$

Notando que os vetores $z_1, z_2, ..., z_m$ são linearmente independentes segue-se que a matriz (Sz_i, Sz_j) é invertível. Sendo assim, concluimos que o sistema (PA) possui uma solução u_m definida em $[0, t_m]$, $t_m < T$. Como consequência da estimativa a priori a seguir resulta que a solução $u_m(t)$ pode ser extendida ao intervalo $[0, T]$, $\forall T > 0$.

Estimativa a Priori

Fixa-se $T > 0$. Como $(PA)_1$ é válida $\forall z_j$, $j = 1, 2, ..., m$, segue-se que

$$
\begin{aligned}
&(u''_m(t), S^{4\alpha+6}z) + \mu_1(t)(Su_m(t), S^{4\alpha+6}z) + \\
&\delta(1+\theta\mu_2(t))(Su'_m(t), S^{4\alpha+6}z) = 0,\ \forall z \in V_m.
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Fazendo $z = 2u'_m(t)$ em (1.6) , obtemos:

$$
\frac{d}{dt}\left|S^{2\alpha+3}u'_m(t)\right|^2 + \mu_1(t)\frac{d}{dt}\left|S^{2\alpha+\frac{7}{2}}u_m(t)\right|^2 + 2\delta(1+\theta\mu_2(t))\left|S^{2\alpha+\frac{7}{2}}u'_m(t)\right|^2 = 0,
$$

ou ainda,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left|S^{2\alpha+3}u'_m(t)\right|^2 + \frac{d}{dt}\left[\mu_1(t)\left|S^{2\alpha+\frac{7}{2}}u_m(t)\right|^2\right] + \\
&2\delta(1+\theta\mu_2(t))\left|S^{2\alpha+\frac{7}{2}}u'_m(t)\right|^2 = \mu'_1(t)\left|S^{2\alpha+\frac{7}{2}}u_m(t)\right|^2.
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

Integrando (1.7) de 0 a $t \leq t_m$, obtemos:

$$\begin{aligned} &\left|S^{2\alpha+3}u_m'(t)\right|^2 + \mu_1(t)\left|S^{2\alpha+\frac{7}{2}}u_m(t)\right|^2 + 2\delta\int_0^t (1+\theta\mu_2(s))\left|S^{2\alpha+\frac{7}{2}}u_m'(s)\right|^2 ds = \\ &\left|S^{2\alpha+3}u_m'(0)\right|^2 + \mu_1(0)\left|S^{2\alpha+\frac{7}{2}}u_m(0)\right|^2 + \int_0^t \mu_1'(s)\left|S^{2\alpha+\frac{7}{2}}u_m(s)\right|^2 ds. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Das convergências em (PA) resulta que as sequências $(S^{2\alpha+3}u_m'(0)) = (S^{2\alpha+3}u_{1m})$ e $(S^{2\alpha+\frac{7}{2}}u_m(0)) = (S^{2\alpha+\frac{7}{2}}u_{0m})$ são limitadas em H. Logo, destas limitações em H, $(H5)$ e (1.8), obtemos:

$$\begin{aligned} &\left|S^{2\alpha+3}u_m'(t)\right|^2 + \mu_1(t)\left|S^{2\alpha+\frac{7}{2}}u_m(t)\right|^2 + 2\delta\int_0^t (1+\theta\mu_2(s))\left|S^{2\alpha+\frac{7}{2}}u_m'(s)\right|^2 ds \leq \\ &C + \int_0^t |\mu_1'(s)|\left|S^{2\alpha+\frac{7}{2}}u_m(s)\right|^2 ds \leq \\ &C + \int_0^t \left\{\left|S^{2\alpha+3}u_m'(s)\right|^2 + \frac{|\mu_1'(s)|}{\mu_1(s)}\mu_1(s)\left|S^{2\alpha+\frac{7}{2}}u_m(s)\right|^2\right\} ds \leq \\ &C + \int_0^t \left\{\left|S^{2\alpha+3}u_m'(s)\right|^2 + C\mu_1(s)\left|S^{2\alpha+\frac{7}{2}}u_m(s)\right|^2\right\} ds \leq \\ &C + C\int_0^t \left\{\left|S^{2\alpha+3}u_m'(s)\right|^2 + \mu_1(s)\left|S^{2\alpha+\frac{7}{2}}u_m(s)\right|^2\right\} ds, \end{aligned} \tag{1.9}$$

onde C representa diversas constantes independentes de m. Portanto de (1.9) e da desigualdade de Gronwall segue-se que

$$\left|S^{2\alpha+3}u_m'(t)\right|^2 + \mu_1(t)\left|S^{2\alpha+\frac{7}{2}}u_m(t)\right|^2 \leq C, \tag{1.10}$$

onde C é uma constante que não depende de m.

Agora substituindo (1.10) em (1.9) e utilizando as hipóteses $(H5)$ e $(H6)$, obtemos:

$$\left|S^{2\alpha+3}u_m'(t)\right|^2 + C^*\left|S^{2\alpha+\frac{7}{2}}u_m(t)\right|^2 + 2\delta(1+\theta C^{**})\int_0^t \left|S^{2\alpha+\frac{7}{2}}u_m'(s)\right|^2 ds \leq C, \tag{1.11}$$

onde C é uma constante genérica que não depende de m, $\forall t \in [0, t_m]$.

A estimativa (1.11) permite-nos prolongar a solução $u_m(t)$ ao intervalo $[0, T]$.

Agora da Observação 1.1 e de (1.11) concluimos o seguinte:

$$(u_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; D(S^{2\alpha+\frac{7}{2}})) \tag{1.12}$$

$$(u_m') \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;D(S^{2\alpha+3})) \tag{1.13}$$

$$(u_m') \text{ é limitada em } L^2(0,T;D(S^{2\alpha+\frac{7}{2}})). \tag{1.14}$$

Como consequência de (1.12) , (1.13) e (1.14) , podemos extrair uma subsequência de (u_m) e (u_m'), que ainda serão denotadas por (u_m) e (u_m'), respectivamente, tais que

$$u_m \to u \text{ fraco-* em } L^\infty(0,T;D(S^{2\alpha+\frac{7}{2}})) \tag{1.15}$$

$$u_m' \to u' \text{ fraco-* em } L^\infty(0,T;D(S^{2\alpha+3})) \tag{1.16}$$

$$u_m' \to u' \text{ fraco em } L^2(0,T;D(S^{2\alpha+\frac{7}{2}})). \tag{1.17}$$

Segue da convergência (1.15) que

$$\int_0^T \mu_1(t)\left(Su_m(t), S^{4\alpha+6}z\right)\phi(t)dt \to \int_0^T \mu_1(t)\left(Su(t), S^{4\alpha+6}z\right)\phi(t)dt, \tag{1.18}$$

$\forall \phi \in \mathcal{D}(0,T)$, $\forall z \in D(S^{4\alpha+6})$.

Agora da convergência (1.16) resulta que

$$\int_0^T \left(u_m'(t), S^{4\alpha+6}z\right)\phi'(t)dt \to \int_0^T \left(u'(t), S^{4\alpha+6}z\right)\phi'(t)dt, \tag{1.19}$$

$\forall \phi \in \mathcal{D}(0,T)$, $\forall z \in D(S^{4\alpha+6})$.

Ainda como consequência da convergência (1.16) resulta que

$$\begin{aligned} &\int_0^T \delta\left(1+\theta\mu_2(t)\right)\left(Su_m'(t), S^{4\alpha+6}z\right)\phi(t)dt \to \\ &\to \int_0^T \delta\left(1+\theta\mu_2(t)\right)\left(Su'(t), S^{4\alpha+6}z\right)\phi(t)dt, \end{aligned} \tag{1.20}$$

$\forall \phi \in \mathcal{D}(0,T)$, $\forall z \in D(S^{4\alpha+6})$.

Passagem ao Limite

Multiplicando a equação aproximada (1.6) por $\phi \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando o resultado de 0 a T, obtemos:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left(u_m''(t), S^{4\alpha+6}z\right)\phi(t)dt + \int_0^T \mu_1(t)\left(Su_m(t), S^{4\alpha+6}z\right)\phi(t)dt + \\ &\int_0^T \delta\left(1+\theta\mu_2(t)\right)\left(Su_m'(t), S^{4\alpha+6}z\right)\phi(t)dt = 0, \end{aligned} \tag{1.21}$$

$\forall \phi \in \mathcal{D}(0,T)$, $\forall z \in D(S^{4\alpha+6})$.

Integrando-se por partes a primeira integral de (1.21), passando o limite com $m \to +\infty$ no resultado e usando as convergências $(1.18) - (1.20)$, obtemos:

$$-\int_0^T \left(u'\left(t\right), S^{4\alpha+6}z\right)\phi'(t)dt + \int_0^T \mu_1(t)\left(Su\left(t\right), S^{4\alpha+6}z\right)\phi(t)dt +$$
$$\int_0^T \delta\left(1+\theta\mu_2(t)\right)\left(Su'\left(t\right), S^{4\alpha+6}z\right)\phi(t)dt = 0,$$

$\forall \phi \in \mathcal{D}(0,T)$, $\forall z \in D(S^{4\alpha+6})$.

Sendo $((u,v))$ coercivo resulta que o operador $S^{4\alpha+6} : D(S^{4\alpha+6}) \subset H \to H$ é sobrejetor. Assim, da última igualdade acima, obtemos:

$$-\int_0^T \left(u'\left(t\right), v\right)\phi'(t)dt + \int_0^T \mu_1(t)\left(Su\left(t\right), v\right)\phi(t)dt + \int_0^T \delta\left(1+\theta\mu_2(t)\right)\left(Su'\left(t\right), v\right)\phi(t)dt = 0,$$

$\forall v \in H$, $\forall \phi \in \mathcal{D}(0,T)$.

Usando as distribuições vetoriais segue-se desta última igualdade que

$$u'' + \mu_1 Su + \delta\left(1+\theta\mu_2\right)Su' = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(0,T;H). \tag{1.22}$$

Mas, como consequência de (1.15), (1.16) e (1.17) resulta, respectivamente, que

$$Su \in L^\infty(0,T;D(S^{2\alpha+\frac{5}{2}})) \tag{1.23}$$

e

$$Su' \in L^\infty(0,T;D(S^{2\alpha+2})) \cap L^2(0,T;D(S^{2\alpha+\frac{5}{2}})). \tag{1.24}$$

Portanto de $(1.22) - (1.24)$, $(H5)$ e $(H6)$ segue-se que

$$u'' + \mu_1 Su + \delta\left(1+\theta\mu_2\right)Su' = 0 \text{ em } L^\infty(0,T;D(S^{2\alpha+2})) \cap L^2(0,T;D(S^{2\alpha+\frac{5}{2}})). \tag{1.25}$$

Condições Iniciais e Unicidade

As condições iniciais são obtidas pelos métodos usuais e a unicidade segue-se pelo método da energia.

Seja $0 < T < \infty$. Temos:

$$u_m(t) = \int_0^t u'_m(s)ds + u_m(0),$$

ou seja,

$$|u_m(t)| \leq \int_0^t |u'_m(s)|\, ds + |u_m(0)| \leq T^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^T |u'_m(s)|^2\, ds\right]^{\frac{1}{2}} + |u_{0m}|\,. \tag{1.26}$$

Assim de $(PA)_2$, (1.13) e (1.26) segue-se que

$$(u_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H),\ \forall T > 0.$$

Consideremos $(u_{m(1)})$ uma subsequência de (u_m) tal que

$$u_{m(1)} \rightarrow u \text{ fraco-* em } L^\infty(0,1;H).$$

Agora consideremos $(u_{m(2)})$ uma subsequência de $(u_{m(1)})$ tal que

$$u_{m(2)} \rightarrow u \text{ fraco-* em } L^\infty(0,2;H).$$

Repetindo sucessivamente este raciocínio, seja $(u_{m(n)})$ uma subsequência de $(u_{m(n-1)})$ tal que

$$u_{m(n)} \rightarrow u \text{ fraco-* em } L^\infty(0,n;H).$$

Desta forma, consideremos a sequência diagonal $(u_{m(n)})$, que é uma subsequência de $(u_{m(n)})$, $\forall n$. Denotando $u_{m(n)}$ por u_m, temos:

$$u_m \rightarrow u \text{ fraco-* em } L^\infty_{loc}(0,\infty;H). \tag{1.27}$$

Portanto de (1.15) e (1.27) resulta que

$$u \in L^\infty_{loc}(0,\infty; D(S^{2\alpha+\frac{7}{2}})). \tag{1.28}$$

Agora como consequência de (1.12), (1.13), $(H5)$, $(H6)$ e da igualdade $u''_m + \mu_1 S u_m + \delta\left(1+\theta\mu_2\right) S u'_m = 0$ resulta que

$$(u''_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H). \tag{1.29}$$

Seja $0 < T < \infty$. Temos:

$$u'_m(t) = \int_0^t u''_m(s) ds + u'_m(0).$$

Procedendo de modo análogo ao adotado para se obter (1.28) concluimos que

$$u'_m \to u' \text{ fraco-* em } L^\infty_{loc}(0,\infty;H), \tag{1.30}$$

onde (u'_m) é uma sequência diagonal conveniente.

Portanto de (1.16) , (1.17) e (1.30) resulta que

$$u' \in L^\infty_{loc}(0,\infty;D(S^{2\alpha+3})) \cap L^2_{loc}(0,\infty;D(S^{2\alpha+\frac{7}{2}})). \tag{1.31}$$

Finalmente de (1.25) , (1.28) , (1.31) e das hipóteses $(H5)$ e $(H6)$ concluimos a prova da Proposição 1.1.■

Para demonstrar os resultados que se seguem necessitaremos também do seguinte resultado:

Proposição 1.2 *Sejam $M(\xi)$ uma função $M : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 e u uma função vetorial tal que $u \in C^1([0,\infty[;W)$, $u(t) \neq 0$, $\forall t \in [0,\infty[$. Consideremos $(H2)$ e um número real β. Então, a derivada de Leibniz de $M(\|u(t)\|^\beta_W)$ é dada por*

$$\frac{d}{dt}\left\{M(\|u(t)\|^\beta_W)\right\} = \beta M'(\|u(t)\|^\beta_W)\,\|u(t)\|^{\beta-1}_W \left\langle \frac{Ju(t)}{\|u(t)\|_W}, u'(t)\right\rangle_{W'\times W}, t \geq 0, \tag{1.32}$$

onde $J : W \to W'$ é a aplicação dualidade definida por

$$\langle Jv, v\rangle_{W'\times W} = \|v\|^2_W\,,\ \ \|Jv\|_{W'} = \|v\|_W\,,\ \forall v \in V. \tag{1.33}$$

Demonstração: Como W' é estritamente convexo temos que a função $F(v) = \|v\|_W$ é Gâteaux diferenciável em $W\setminus\{0\}$ (veja Zeidler [29]). A derivada de Gâteaux será denotada por $F'(v)$. Ainda do fato de W' ser estritamente convexo temos que existe uma única aplicação dualidade $J : W \to W'$ (veja Lions [16]) definida por (1.33) . Dividiremos a prova desta Proposição em duas partes.

Primeira Parte: $F'(v) = \dfrac{J(v)}{\|v\|_W}$, $v \in W$, $v \neq 0$.

Inicialmente notemos que $F(v)$ é convexo. Sendo $F(v)$ Gâteaux diferenciável em $W\setminus\{0\}$, segue-se que $F(v)$ é subdiferenciável em $W\setminus\{0\}$ e que a subdiferencial $\partial F(v)$ possui um único elemento dado por $F'(v)$ (veja Ekeland e Teman [10]). Então, a primeira parte da prova estará concluida se mostrarmos que $\dfrac{J(v)}{\|v\|_W}$, $v \neq 0$, pertence a $\partial F(v)$. De fato, utilizando (1.33) , obtemos:

$$\left\langle \frac{Jv}{\|v\|_W}, w - v \right\rangle_{W' \times W} \leq \left\| \frac{Jv}{\|v\|_W} \right\|_{W'} \|w\|_W - \frac{1}{\|v\|_W} \langle Jv, v \rangle_{W' \times W} =$$

$$\|w\|_W - \|v\|_W = F(w) - F(v), \ \forall w \in W,$$

ou seja,

$$F(w) - F(v) \geq \left\langle \frac{Jv}{\|v\|_W}, w - v \right\rangle_{W' \times W}, \ \forall w \in W.$$

Sendo assim, concluimos que $\dfrac{J(v)}{\|v\|_W} \in \partial F(v)$, $v \neq 0$, garantindo que $F'(v) = \dfrac{J(v)}{\|v\|_W}$, $v \in W$, $v \neq 0$.

Segunda Parte:

Fixemos $t \geq 0$ e consideremos $h \neq 0$. Então, usando o Teorema do Valor Médio, obtemos:

$$\frac{1}{h}\left[M(\|u(t+h)\|_W^\beta) - M(\|u(t)\|_W^\beta)\right] = \beta M'(\xi) s^{\beta-1} \frac{1}{h}\left[\|u(t+h)\|_W - \|u(t)\|_W\right], \tag{1.34}$$

onde $\|u(t+h)\|_W^\beta \leq \xi \leq \|u(t)\|_W^\beta$ e $\|u(t+h)\|_W \leq s \leq \|u(t)\|_W$.

Notemos agora o seguinte:

$$\frac{1}{h}\left[\|u(t+h)\|_W - \|u(t)\|_W\right] = r_h + \frac{1}{h}\left[\|u(t) + hu'(t))\|_W - \|u(t)\|_W\right], \tag{1.35}$$

ou seja,

$$r_h = \frac{1}{h}\left\{\left[\|u(t+h)\|_W - \|u(t)\|_W\right] - \left[\|u(t) + hu'(t))\|_W - \|u(t)\|_W\right]\right\}$$

o que implica em

$$|r_h| \leq \frac{1}{|h|} \|u(t+h) - u(t) - hu'(t)\|_W. \tag{1.36}$$

A seguir provaremos que

$$\lim_{h \to 0} r_h = 0. \tag{1.37}$$

De fato, da igualdade

$$u(t+h) - u(t) = h \int_0^1 u'(t + \tau h) d\tau$$

resulta que

$$\frac{1}{h}\left[u(t+h)-u(t)\right]-u'(t)=\int_0^1\left[u'(t+\tau h)-u'(t)\right]d\tau,$$

ou seja,

$$\frac{1}{|h|}\left\|u(t+h)-u(t)-hu'(t)\right\|_W \leq \int_0^1 \left\|u'(t+\tau h)-u'(t)\right\|_W d\tau. \tag{1.38}$$

Sendo assim, concluimos de (1.36) e (1.38) que

$$|r_h| \leq \int_0^1 \left\|u'(t+\tau h)-u'(t)\right\|_W d\tau. \tag{1.39}$$

Como u' é uniformemente contínua em intervalos compactos, então obtemos (1.37).

Agora de (1.34) e (1.35), obtemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\left[M(\|u(t+h)\|_W^\beta)-M(\|u(t)\|_W^\beta)\right]= \\
&\beta M'(\xi)s^{\beta-1}\left\{r_h+\frac{1}{h}\left[\|u(t)+hu'(t))\|_W-\|u(t)\|_W\right]\right\}= \\
&\beta M'(\xi)s^{\beta-1}r_h+\beta M'(\xi)s^{\beta-1}\frac{1}{h}\left[\|u(t)+hu'(t))\|_W-\|u(t)\|_W\right].
\end{aligned} \tag{1.40}$$

Aplicando o limite em (1.40) com $h\to 0$ (veja que, nesse caso, temos $\xi\to\|u(t)\|_W^\beta$ e $s\to\|u(t)\|_W$) e utilizando (1.37), obtemos:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[M(\|u(t+h)\|_W^\beta)-M(\|u(t)\|_W^\beta)\right]= \\
&\beta M'(\|u(t)\|_W^\beta)\,\|u(t)\|_W^{\beta-1}\lim_{h\to 0}r_h+ \\
&\beta M'(\|u(t)\|_W^\beta)\,\|u(t)\|_W^{\beta-1}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\|u(t)+hu'(t))\|_W-\|u(t)\|_W\right]= \\
&\beta M'(\|u(t)\|_W^\beta)\,\|u(t)\|_W^{\beta-1}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[F(u(t)+hu'(t))-F(u(t))\right]= \\
&\beta M'(\|u(t)\|_W^\beta)\,\|u(t)\|_W^{\beta-1}\left\langle F(u'(t)),u'(t)\right\rangle_{W'\times W}.
\end{aligned}$$

Finalmente, utilizando a primeira parte da demonstração e a igualdade acima, concluimos a igualdade (1.32) como pretendíamos.■

1.1 Solução Local

Nesta seção usaremos o método das aproximações sucessivas e o Teorema de Arzela-Áscoli para funções reais. Aqui será fundamental a Proposição 1.1 e também a Proposição 1.2 que caracteriza a derivada do termo não linear $M(\|u(t)\|_W^\beta)$.

Portanto, com as considerações anteriores, temos o seguinte teorema de solução local:

Teorema 1.1 *(Solução Local) Suponhamos as hipóteses* $(H1)-(H4)$. *Consideremos* α, β, δ *números reais com* $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 1$, $\delta > 0$ *e*

$$u^0 \in D(S^{\alpha+2}),\ u^1 \in D(S^{\alpha+\frac{3}{2}}),\ u^0 \neq 0. \tag{1.41}$$

Assuma, também, que

$$M(\left\|u^0\right\|_W^\beta) > 0 \text{ com } M \in C^1 \text{ e } M'(\xi) \neq 0 \text{ na vizinhança de } \left\|u^0\right\|_W^\beta. \tag{1.42}$$

Então, existem a, b, $T_0 \in \mathbb{R}^+$ *e uma função* u *na classe*

$$\left| \begin{array}{l} u \in L^\infty(0,T_0;D(S^{\alpha+2})) \\ u' \in L^\infty(0,T_0;D(S^{\alpha+\frac{3}{2}})) \cap L^2(0,T_0;D(S^{\alpha+2})) \\ u'' \in L^\infty(0,T_0;D(S^{\alpha+\frac{1}{2}})) \cap L^2(0,T_0;D(S^{\alpha+1})) \\ 0 < a \leq \|u(t)\|_W^\beta \leq b,\ \forall t \in [0,T_0] \end{array} \right. \tag{1.43}$$

satisfazendo

$$(P1) \quad \left| \begin{array}{l} u'' + M(\|u\|_W^\beta)Su + \delta Su' = 0 \text{ em } L^\infty(0,T_0;D(S^{\alpha+\frac{1}{2}})) \cap L^2(0,T_0;D(S^{\alpha+1})) \\ u(0) = u^0,\ u'(0) = u^1. \end{array} \right.$$

Os números a, b e T_0 serão determinados no que segue.

Observação 1.4 *Pela hipótese* $(H1)$ *segue-se que* $D(S^{\alpha+1})$ *é continuamente imerso em* W, *isto é, existe uma constante positiva* k_1 *tal que*

$$\|v\|_W \leq k_1 \|v\|_{D(S^{\alpha+1})},\ \forall v \in D(S^{\alpha+1}). \tag{1.44}$$

Observação 1.5 *Como consequência das hipóteses* $u^0 \neq 0$ *e* (1.42) *segue-se que existem números reais positivos* a, b *e* σ_0 *tais que*

$$m^* = \min_{a \leq \xi \leq b} M(\xi) > 0 \tag{1.45}$$

$$a = \left\|u^0\right\|_W^\beta - \sigma_0 > 0,\ \ b = \left\|u^0\right\|_W^\beta + \sigma_0 \tag{1.46}$$

e $M(\xi)$ *de classe* C^1 *em* $[a,b]$.

Observação 1.6 *Sejam* $\theta_1 \geq \theta_2 \geq 0$ *números reais. Então,* $D(S^{\theta_1})$ *está continuamente imerso em* $D(S^{\theta_2})$ *e*

$$\left|S^{\theta_2} u\right|^2 = \frac{1}{\gamma_0^{2(\theta_1-\theta_2)}} \left|S^{\theta_1} u\right|^2,\ \ \forall u \in D(S^{\theta_1}),\ \ \gamma_0 > 0. \tag{1.47}$$

No que segue definiremos $T_0 > 0$. Sejam u^0 e u^1 satisfazendo a hipótese (1.41). Considere um número real $N^2 > 0$ tal que

$$\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}} u^1\right|^2 + M(\left\|u^0\right\|_W^\beta) \left|S^{\alpha+2} u^0\right|^2 < \frac{N^2}{2}. \tag{1.48}$$

Considere também as constantes

$$\left|\begin{array}{l} N_1^2 = \dfrac{k_1^2 N^2}{\gamma_0^2 m^*} \\ N_2^2 = \dfrac{k_1^2 N^2}{\gamma_0} \\ N_3 = \beta(\dfrac{3}{2}\left\|u^0\right\|_W + N_1)^{\beta-1} N_2 \\ N_4 = \beta \max\limits_{a \leq \xi \leq b} |M'(\xi)|\, b^{\frac{\beta-1}{\beta}} N_2, \end{array}\right. \tag{1.49}$$

onde k_1, m^*, a, b, γ_0 e N foram definidos em (1.44), (1.45), (1.46), (1.47) e (1.48), respectivamente.

Definimos

$$T_0 = \min\left\{1,\ \frac{\sigma_0}{2N_3},\ \frac{m^*}{N_4}\ln 2,\ \frac{m^*}{2N_4}\right\}, \tag{1.50}$$

onde σ_0 foi introduzido em (1.46).

Demonstração (Teorema 1.1):

Inicialmente daremos uma idéia da prova do Teorema 1.1. Primeiro aproximaremos u^0 e u^1 por funções pertencendo a $D(S^{2\alpha+\frac{7}{2}})$ e $D(S^{2\alpha+3})$, respectivamente. Então pelas Proposições 1.1, 1.2 e pelo método das aproximações sucessivas determinaremos a solução u_l do problema

$$(P_l) \qquad \left| \begin{array}{l} u_l'' + M(\|u_l\|_W^\beta)Su_l + \delta Su_l' = 0 \text{ em } L^\infty(0,T_0;D(S^{\alpha+\frac{1}{2}})) \cap L^2(0,T_0;D(S^{\alpha+1})) \\ u_l\,(0) = u_l^0,\ u_l'\,(0) = u_l^1. \end{array} \right.$$

Com as estimativas obtidas para a solução u_l passamos o limite na equação de (P_l). O limite do termo não linear é obtido por meio da Proposição 1.2, do Teorema de Arzela-Áscoli para funções reais e resultados de teoria espectral para operadores auto-adjuntos.

Sendo assim, comecemos a prova. Consideremos $\eta > 0$ um número real tal que

$$\left[\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u^1\right|^2 + \eta\right] + \left[M(\left\|u^0\right\|_W^\beta) + \eta\right]\left[\left|S^{\alpha+2}u^0\right|^2 + \eta\right] < \frac{N^2}{2}. \qquad (1.51)$$

A existência de η é garantida por (1.48).

Sejam (u_l^0) e (u_l^1) duas sequências de vetores de $D(S^{2\alpha+\frac{7}{2}})$ e $D(S^{2\alpha+3})$, respectivamente, tais que

$$u_l^0 \to u^0 \text{ em } D(S^{\alpha+2}) \text{ e } u_l^1 \to u^1 \text{ em } D(S^{\alpha+\frac{3}{2}}). \qquad (1.52)$$

A primeira convergência de (1.52) implica

$$M(\left\|u_l^0\right\|_W^\beta) \to M(\left\|u^0\right\|_W^\beta) \text{ em } [a,b]. \qquad (1.53)$$

Dividiremos a prova do Teorema 1.1 em duas etapas.

Primeira Etapa: Existência de Solução de (P_l).

Pelas convergências (1.52) e (1.53) resulta que existe $l_0(\eta)$ tal que para $l \geq l_0(\eta)$, obtemos:

$$\left| \begin{array}{l} |S^{\alpha+2}u_l^0|^2 < |S^{\alpha+2}u^0|^2 + \eta,\ \left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_l^1\right|^2 < \left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u^1\right|^2 + \eta \\ M(\|u_l^0\|_W^\beta) < M(\|u^0\|_W^\beta) + \eta \end{array} \right. \qquad (1.54)$$

e

$$\left\|u^0\right\|_W^\beta - \frac{\sigma_0}{2} < \left\|u_l^0\right\|_W^\beta < \left\|u^0\right\|_W^\beta + \frac{\sigma_0}{2}. \qquad (1.55)$$

Combinando as desigualdades (1.51) e (1.54), obtemos:

$$\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_l^1\right|^2 + M(\|u_l^0\|_W^\beta)\left|S^{\alpha+2}u_l^0\right|^2 < \frac{N^2}{2}. \tag{1.56}$$

Consideremos $l \geq l_0(\eta)$. Seja $\mathcal{F}$ o conjunto das funções v satisfazendo:

$$v \in L^\infty(0,T_0;D(S^{2\alpha+\frac{7}{2}})),\ v' \in L^\infty(0,T_0;D(S^{2\alpha+3})),\ v'' \in L^\infty(0,T_0;D(S^{2\alpha+2})) \tag{1.57}$$

$$\sup_{0\leq t\leq T_0}\left\{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}v'(t)\right|^2 + m^*\left|S^{\alpha+2}v(t)\right|^2 + 2\delta\int_0^t \left|S^{\alpha+2}v'(s)\right|^2 ds\right\} \leq N^2 \tag{1.58}$$

$$a \leq \|v(t)\|_W^\beta \leq b,\ \forall t \in [0,T_0], \tag{1.59}$$

onde a, b e T_0 foram introduzidos em (1.46) e (1.50), respectivamente.

Antes de aplicarmos o método das aproximações sucessivas veremos um lema auxiliar.

Lema 1.1 *Seja v uma função satisfazendo* (1.57) *e* (1.58). *Então,*

(i) $\|v(t)\|_W \leq N_1,\ \forall t \in [0,T_0]$

(ii) $\|v'(t)\|_W \leq N_2,\ \forall t \in [0,T_0]$.

Além disso, se v nas condições acima também satisfaz a (1.59), *obtemos:*

(iii) $\left|\dfrac{d}{dt}\left\{M(\|v(t)\|_W^\beta)\right\}\right| \leq N_4,\ \forall t \in [0,T_0]$,

onde N_1, N_2 e N_4 foram definidos em (1.49).

Demonstração:

(i) Decorre de (1.44), (1.47), (1.49) e (1.58). De fato,

$$\|v(t)\|_W \leq k_1\|v(t)\|_{D(S^{\alpha+1})} = k_1\left|S^{\alpha+1}v(t)\right| \leq \frac{k_1}{\gamma_0}\left|S^{\alpha+2}v(t)\right| \leq \frac{k_1 N}{\gamma_0\sqrt{m^*}} = N_1,$$

$\forall t \in [0,T_0]$.

(ii) De modo análogo ao item (i), obtemos:

$$\|v'(t)\|_W \leq k_1\|v'(t)\|_{D(S^{\alpha+1})} = k_1\left|S^{\alpha+1}v'(t)\right| \leq \frac{k_1}{\sqrt{\gamma_0}}\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}v'(t)\right| \leq \frac{k_1 N}{\sqrt{\gamma_0}} = N_2,$$

$\forall t \in [0,T_0]$.

(iii) Utilizando a Proposição 1.2, (1.59), Observação (1.5) e o item (ii) deste Lema, obtemos:

$$\left|\frac{d}{dt}\left\{M(\|v\,(t)\|_W^\beta)\right\}\right| \leq \beta M'(\|v\,(t)\|_W^\beta)\,\|v\,(t)\|_W^{\beta-1}\,\|v'\,(t)\|_W \leq$$
$$\beta \max_{a\leq\xi\leq b} |M'(\xi)|\, b^{\frac{\beta-1}{\beta}} N_2 = N_4,$$

$\forall t \in [0, T_0]$. ■

No que segue aplicaremos o método das aproximações sucessivas. Consideremos o seguinte problema:

$$(P_{l,1}) \quad \left| \begin{array}{l} u''_{l,1} + M(\|u_l^0\|_W^\beta) S u_{l,1} + \delta S u'_{l,1} = 0 \text{ em } L^\infty(0, T_0; D(S^{\alpha+\frac{1}{2}})) \cap L^2(0, T_0; D(S^{\alpha+1})) \\ u_{l,1}\,(0) = u_l^0,\ u'_{l,1}\,(0) = u_l^1. \end{array} \right.$$

Vamos mostra que $u_{l,1} \in \mathcal{F}$. De fato, inicialmente notemos que pela Proposição 1.1 (considerando $\theta = 0$) resulta que $(P_{l,1})$ possui uma única solução $u_{l,1}$ pertencendo a classe (1.57).

Agora tomando o produto escalar de H em ambos os membros da equação de $(P_{l,1})$ com $2S^{2\alpha+3}u'_{l,1}$, obtemos:

$$\frac{d}{dt}\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'_{l,1}(t)\right|^2 + M(\left\|u_l^0\right\|_W^\beta)\frac{d}{dt}\left|S^{\alpha+2}u_{l,1}(t)\right|^2 + 2\delta\left|S^{\alpha+2}u'_{l,1}(t)\right|^2 = 0 \qquad (1.60)$$

Integrando (1.60) de 0 a t, $t \in [0, T_0]$, e usando (1.56), obtemos:

$$\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'_{l,1}(t)\right|^2 + M(\|u_l^0\|_W^\beta)\,|S^{\alpha+2}u_{l,1}(t)|^2 + 2\delta\int_0^t \left|S^{\alpha+2}u'_{l,1}(s)\right|^2 ds =$$
$$\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_l^1\right|^2 + M(\left\|u_l^0\right\|_W^\beta)\left|S^{\alpha+2}u_l^0\right|^2 < \frac{N^2}{2} \leq N^2,$$

$\forall t \in [0, T_0]$. Logo, desta última desigualdade e de (1.45), concluimos que $u_{l,1}$ satisfaz a desigualdade (1.58).

Finalmente vamos mostrar que $u_{l,1}$ satisfaz a (1.59). De fato, pelo Teorema do Valor Médio, obtemos:

$$\left\|u_l^0\right\|_W^\beta - \|u_{l,1}(t)\|_W^\beta = \beta s^{\beta-1}\left[\left\|u_l^0\right\|_W - \|u_{l,1}(t)\|_W\right]. \qquad (1.61)$$

Agora resulta do Lema 1.1 (item (i)) que

$$0 \leq \|u_{l,1}(t)\|_W \leq s \leq \left\|u_l^0\right\|_W \leq \left\|u_l^0\right\|_W + \|u_{l,1}(t)\|_W \leq \frac{3}{2}\left\|u^0\right\|_W + N_1,$$

ou seja,

$$0 \leq s \leq \frac{3}{2}\left\|u^0\right\|_W + N_1. \tag{1.62}$$

Notando que $u_{l,1}(t) - u_{l,1}(0) = \int_0^t u'_{l,1}(s)ds$ segue-se do Lema 1.1 (item(ii)) que

$$\left|\left\|u_l^0\right\|_W - \|u_{l,1}(t)\|_W\right| \leq \left\|u_l^0 - u_{l,1}(t)\right\|_W \leq \int_0^t \left\|u'_{l,1}(s)\right\|_W ds \leq \int_0^t N_2 ds \leq N_2 T_0. \tag{1.63}$$

Logo de (1.61), (1.62) e (1.63), obtemos:

$$\left|\left\|u_l^0\right\|_W^\beta - \|u_{l,1}(t)\|_W^\beta\right| \leq \beta\left(\frac{3}{2}\left\|u^0\right\|_W + N_1\right)^{\beta-1} N_2 T_0 = N_3 T_0. \tag{1.64}$$

Por (1.50) temos $0 < T_0 < \dfrac{\sigma_0}{2N_3}$. Desse fato e de (1.64) resulta que

$$\left|\left\|u_l^0\right\|_W^\beta - \|u_{l,1}(t)\|_W^\beta\right| \leq \frac{\sigma_0}{2},$$

ou seja,

$$\left\|u_l^0\right\|_W^\beta - \frac{\sigma_0}{2} \leq \|u_{l,1}(t)\|_W^\beta \leq \left\|u_l^0\right\|_W^\beta + \frac{\sigma_0}{2}, \tag{1.65}$$

$\forall t \in [0, T_0]$.

Portanto de (1.46), (1.55) e (1.65) concluimos que $u_{l,1}$ satisfaz a (1.59). Sendo assim, acabamos de concluir que $u_{l,1} \in \mathcal{F}$.

Agora definimos a sequência $(u_{l,\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$, onde $u_{l,\nu}$ é a solução do problema

$$(P_{l,\nu}) \quad \left| \begin{array}{l} u''_{l,\nu} + M(\|u_{l,\nu-1}\|_W^\beta) S u_{l,\nu} + \delta S u'_{l,\nu} = 0 \text{ em } L^\infty(0, T_0; D(S^{\alpha+\frac{1}{2}})) \cap L^2(0, T_0; D(S^{\alpha+1})) \\ u_{l,\nu}(0) = u_l^0, \ u'_{l,\nu}(0) = u_l^1. \end{array} \right.$$

Provaremos que $u_{l,\nu} \in \mathcal{F}$, $\forall \nu \geq 2$. Aqui usaremos indução. Sendo assim, suponhamos que $u_{l,\nu-1} \in \mathcal{F}$. Logo do Lema 1.1 e da Proposição 1.1 (considerando $\theta = 0$) resulta que $u_{l,\nu}$ pertence a classe (1.57).

Agora tomando o produto escalar de H em ambos os membros da equação de $(P_{l,\nu})$ com $2S^{2\alpha+3}u'_{l,\nu}$, obtemos:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'_{l,\nu}(t)\right|^2+\frac{d}{dt}\left[M(\|u_{l,\nu-1}(t)\|_W^\beta)\left|S^{\alpha+2}u_{l,\nu}(t)\right|^2\right]+2\delta\left|S^{\alpha+2}u'_{l,\nu}(t)\right|^2=\\&\left[\frac{d}{dt}\left\{M(\|u_{l,\nu-1}(t)\|_W^\beta)\right\}\right]\left|S^{\alpha+2}u_{l,\nu}(t)\right|^2.\end{aligned}\tag{1.66}$$

Integrando (1.66) de 0 a t, $t\in[0,T_0]$, usando (1.56) e o Lema 1.1 (item (iii)), obtemos:

$$\begin{aligned}&\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'_{l,\nu}(t)\right|^2+M(\|u_{l,\nu-1}(t)\|_W^\beta)\left|S^{\alpha+2}u_{l,\nu}(t)\right|^2+2\delta\int_0^t\left|S^{\alpha+2}u'_{l,\nu}(s)\right|^2ds\le\\&\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_l^1\right|^2+M(\|u_l^0\|_W^\beta)\left|S^{\alpha+2}u_l^0\right|^2+\\&\int_0^t\left|\frac{d}{ds}\left\{M(\|u_{l,\nu-1}(s)\|_W^\beta)\right\}\right|\left|S^{\alpha+2}u_{l,\nu}(s)\right|^2ds\le\\&\frac{N^2}{2}+N_4\int_0^t\left|S^{\alpha+2}u_{l,\nu}(s)\right|^2ds.\end{aligned}\tag{1.67}$$

Sendo assim, de (1.45) e (1.67), obtemos:

$$\left|S^{\alpha+2}u_{l,\nu}(t)\right|^2\le\frac{N^2}{2m^*}+\frac{N_4}{m^*}\int_0^t\left|S^{\alpha+2}u_{l,\nu}(s)\right|^2ds,\ \forall t\in[0,T_0].\tag{1.68}$$

Logo de (1.68) e da desigualdade de Gronwall segue-se que

$$\left|S^{\alpha+2}u_{l,\nu}(t)\right|^2\le\frac{N^2}{2m^*}\exp\left(\int_0^t\frac{N_4}{m^*}ds\right)\le\frac{N^2}{2m^*}\exp\left(\frac{N_4}{m^*}T_0\right).\tag{1.69}$$

Por (1.50) temos $0<T_0<\dfrac{m^*}{N_4}\ln 2$. Desse fato e de (1.69) segue-se que

$$\left|S^{\alpha+2}u_{l,\nu}(t)\right|^2\le\frac{N^2}{m^*},\ \forall t\in[0,T_0].\tag{1.70}$$

Substituindo (1.70) em (1.67), obtemos:

$$\begin{aligned}&\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'_{l,\nu}(t)\right|^2+M(\|u_{l,\nu-1}(t)\|_W^\beta)\left|S^{\alpha+2}u_{l,\nu}(t)\right|^2+2\delta\int_0^t\left|S^{\alpha+2}u'_{l,\nu}(s)\right|^2ds\le\\&\frac{N^2}{2}+N_4\int_0^t\frac{N^2}{m^*}ds\le\frac{N^2}{2}+\frac{N_4N^2T_0}{m^*}.\end{aligned}\tag{1.71}$$

Novamente por (1.50) temos $0 < T_0 < \dfrac{m^*}{2N_4}$. Desse fato e de (1.71) segue-se que

$$\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'_{l,\nu}(t)\right|^2 + M(\|u_{l,\nu-1}(t)\|_W^\beta)\left|S^{\alpha+2}u_{l,\nu}(t)\right|^2 + 2\delta\int_0^t \left|S^{\alpha+2}u'_{l,\nu}(s)\right|^2 ds \le N^2,$$

$\forall t \in [0, T_0]$. Portanto, desta última desigualdade e de (1.45) resulta que $u_{l,\nu}$ satisfaz a desigualdade (1.58).

Agora para provar que $u_{l,\nu}$ satisfaz a desigualdade (1.59) basta proceder de modo análogo ao que foi feito para mostrar que $u_{l,1}$ satisfaz a (1.59). A única diferença é que devemos usar $u_{l,\nu}(t)$ no lugar de $u_{l,1}(t)$. Portanto, acabamos de concluir que $u_{l,\nu} \in \mathcal{F}$.

Da estimativa (1.58) obtemos uma subsequência de $(u_{l,\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$, ainda denotada por $(u_{l,\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$, tal que

$$\left|\begin{array}{l} u_{l,\nu} \to u_l \text{ fraco-* em } L^\infty(0, T_0; D(S^{\alpha+2})) \\ u'_{l,\nu} \to u'_l \text{ fraco-* em } L^\infty(0, T_0; D(S^{\alpha+\frac{3}{2}})) \\ u'_{l,\nu} \to u'_l \text{ fraco em } L^2(0, T_0; D(S^{\alpha+2})). \end{array}\right. \tag{1.72}$$

No que segue provaremos a seguinte convergência:

$$M(\|u_{l,\nu-1}\|_W^\beta) \to M(\|u_l\|_W^\beta) \text{ em } C^0([0, T_0]). \tag{1.73}$$

De fato, comecemos considerando a sequência de funções $(\varphi_{l,\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$, onde $\varphi_{l,\nu}(t) = \|u_{l,\nu-1}(t)\|_W^\beta$. Como $u_{l,\nu-1} \in \mathcal{F}$ resulta de (1.59) que

$$\|u_{l,\nu-1}(t)\|_W^\beta \le b,\ \forall t \in [0, T_0],\ \nu \ge 2. \tag{1.74}$$

Agora usando o Teorema do Valor Médio, (1.59) e o Lema 1.1 (item(ii)), obtemos:

$$\begin{aligned} &\left|\|u_{l,\nu-1}(t_2)\|_W^\beta - \|u_{l,\nu-1}(t_1)\|_W^\beta\right| \le \beta s^{\beta-1}\|u_{l,\nu-1}(t_2) - u_{l,\nu-1}(t_1)\|_W \le \\ &\beta s^{\beta-1}\int_{t_1}^{t_2}\left\|u'_{l,\nu-1}(t)\right\|_W dt \le \beta(2b^{\frac{1}{\beta}})^{\beta-1}N_2|t_2 - t_1|,\ \forall \nu \ge 2,\ 0 \le t_1 < t_2 \le T_0, \end{aligned}$$

onde $0 \le \|u_{l,\nu-1}(t_1)\|_W \le s \le \|u_{l,\nu-1}(t_2)\|_W \le \|u_{l,\nu-1}(t_2)\|_W + \|u_{l,\nu-1}(t_1)\|_W \le 2b^{\frac{1}{\beta}}$. Logo,

$$\left|\|u_{l,\nu-1}(t_2)\|_W^\beta - \|u_{l,\nu-1}(t_1)\|_W^\beta\right| \le \beta(2b^{\frac{1}{\beta}})^{\beta-1}N_2|t_2 - t_1|, \tag{1.75}$$

$\forall \nu \ge 2$, $0 \le t_1 < t_2 \le T_0$.

Portanto de (1.74), (1.75) e do Teorema de Arzela-Áscoli para funções reais segue-se que existe $\varphi_l \in C^0([0,T_0])$ tal que

$$\|u_{l,\nu-1}\|_W^\beta \to \varphi_l \text{ em } C^0([0,T_0]) \tag{1.76}$$

o que implica na convergência

$$M(\|u_{l,\nu-1}\|_W^\beta) \to M(\varphi_l) \text{ em } C^0([0,T_0]). \tag{1.77}$$

Agora provaremos que $M(\varphi_l) = M(\|u_l\|_W^\beta)$. Para isso, procederemos como segue: Sejam $u_{l,\nu}$ e $u_{l,\sigma}$ duas soluções dos problemas $(P_{l,\nu})$ e $(P_{l,\sigma})$, respectivamente. Consideremos $w_{\nu\sigma} = u_{l,\nu} - u_{l,\sigma}$. Assim, $w_{\nu\sigma}$ é a solução do problema

$$(P_{l,\nu\sigma}) \quad \left| \begin{array}{l} w''_{\nu\sigma} + M(\|u_{l,\nu-1}\|_W^\beta)Sw_{\nu\sigma} + \delta S w'_{\nu\sigma} = \left[M(\|u_{l,\sigma-1}\|_W^\beta) - M(\|u_{l,\nu-1}\|_W^\beta)\right] Su_{l,\sigma} \\ w_{\nu\sigma}(0) = 0,\ w'_{\nu\sigma}(0) = 0. \end{array} \right.$$

Tomando o produto escalar de H em ambos os membros da equação de $(P_{l,\nu\sigma})$ com $2S^{2\alpha+1}w'_{\nu\sigma}$, obtemos:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left|S^{\alpha+\frac{1}{2}}w'_{\nu\sigma}(t)\right|^2 + \frac{d}{dt}\left[M(\|u_{l,\nu-1}(t)\|_W^\beta)\left|S^{\alpha+1}w_{\nu\sigma}(t)\right|^2\right] + 2\delta\left|S^{\alpha+1}w'_{\nu\sigma}(t)\right|^2 = \\ &\left[\frac{d}{dt}\left\{M(\|u_{l,\nu-1}(t)\|_W^\beta)\right\}\right]\left|S^{\alpha+1}w_{\nu\sigma}(t)\right|^2 + \\ &2\left[M(\|u_{l,\sigma-1}(t)\|_W^\beta) - M(\|u_{l,\nu-1}(t)\|_W^\beta)\right]\left(S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_{l,\sigma}(t), S^{\alpha+\frac{1}{2}}w'_{\nu\sigma}(t)\right). \end{aligned} \tag{1.78}$$

Por (1.77) resulta que $(M(\|u_{l,\nu-1}\|_W^\beta))_{\nu\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C^0([0,T_0])$. Assim, $\forall\epsilon > 0$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $\nu,\sigma \geq N_0$ temos

$$\left|M(\|u_{l,\nu-1}(t)\|_W^\beta) - M(\|u_{l,\sigma-1}(t)\|_W^\beta)\right| < \epsilon.$$

Logo, desta última desigualdade, (1.47) e de (1.58) resulta que

$$\begin{aligned} &2\left[M(\|u_{l,\sigma-1}(t)\|_W^\beta) - M(\|u_{l,\nu-1}(t)\|_W^\beta)\right]\left(S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_{l,\sigma}(t), S^{\alpha+\frac{1}{2}}w'_{\nu\sigma}(t)\right) \leq \\ &2\epsilon\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_{l,\sigma}(t)\right|\left|S^{\alpha+\frac{1}{2}}w'_{\nu\sigma}(t)\right| \leq \epsilon^2\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_{l,\sigma}(t)\right|^2 + \left|S^{\alpha+\frac{1}{2}}w'_{\nu\sigma}(t)\right|^2 \leq \\ &\epsilon^2\frac{1}{\gamma_0}\left|S^{\alpha+2}u_{l,\sigma}(t)\right|^2 + \left|S^{\alpha+\frac{1}{2}}w'_{\nu\sigma}(t)\right|^2 \leq \epsilon^2\frac{N^2}{m^*\gamma_0} + \left|S^{\alpha+\frac{1}{2}}w'_{\nu\sigma}(t)\right|^2, \end{aligned} \tag{1.79}$$

$\forall t \in [0, T_0]$.

Agora do Lema 1.1 (item(iii)) segue-se que

$$\left| \frac{d}{dt} \left\{ M(\|u_{l,\nu-1}(t)\|_W^\beta) \right\} \right| \leq N_4. \tag{1.80}$$

Integrando (1.78) de 0 a t, $t \in [0, T_0]$, e utilizando (1.45), (1.79) e (1.80), obtemos:

$$\begin{gathered}\left| S^{\alpha+\frac{1}{2}} w'_{\nu\sigma}(t) \right|^2 + m^* \left| S^{\alpha+1} w_{\nu\sigma}(t) \right|^2 + 2\delta \int_0^t \left| S^{\alpha+1} w'_{\nu\sigma}(s) \right|^2 ds \leq \\ \epsilon^2 \frac{N^2 T_0}{m^* \gamma_0} + \int_0^t \left| S^{\alpha+\frac{1}{2}} w'_{\nu\sigma}(s) \right|^2 ds + \frac{N_4}{m^*} \int_0^t m^* \left| S^{\alpha+1} w_{\nu\sigma}(s) \right|^2 ds,\end{gathered}$$

ou seja,

$$\begin{gathered}\left| S^{\alpha+\frac{1}{2}} w'_{\nu\sigma}(t) \right|^2 + m^* \left| S^{\alpha+1} w_{\nu\sigma}(t) \right|^2 \leq \\ \frac{N^2}{m^* \gamma_0} \epsilon^2 + C_1 \int_0^t \left[\left| S^{\alpha+\frac{1}{2}} w'_{\nu\sigma}(s) \right|^2 + m^* \left| S^{\alpha+1} w_{\nu\sigma}(s) \right|^2 \right] ds,\end{gathered} \tag{1.81}$$

onde $C_1 = \max \left\{ 1, \frac{N_4}{m^*} \right\}$. Note que em (1.81) usamos o fato que $0 < T_0 < 1$. Portanto de (1.81) e da desigualdade de Gronwall resulta que

$$\left| S^{\alpha+\frac{1}{2}} w'_{\nu\sigma}(t) \right|^2 + m^* \left| S^{\alpha+1} w_{\nu\sigma}(t) \right|^2 \leq \frac{N^2}{m^* \gamma_0} \epsilon^2 \exp \left(\int_0^t C_1 ds \right) \leq \frac{N^2}{m^* \gamma_0} \epsilon^2 \exp \left(C_1 \right).$$

Logo, desta última desigualdade, concluimos que

$$(u_{l,\nu})_{\nu \in \mathbb{N}} \text{ é uma sequência de Cauchy em } C^0 \left([0, T_0] ; D(S^{\alpha+1}) \right).$$

Consequentemente, por (1.44), resulta que

$$(u_{l,\nu})_{\nu \in \mathbb{N}} \text{ é uma sequência de Cauchy em } C^0 \left([0, T_0] ; W \right)$$

o que implica na convergência

$$u_{l,\nu} \to u_l \text{ em } C^0 \left([0, T_0] ; W \right). \tag{1.82}$$

Sendo assim, resulta de (1.82) que

$$\|u_{l,\nu}\|_W^\beta \to \|u_l\|_W^\beta \text{ em } C^0 \left([0, T_0] \right). \tag{1.83}$$

Assim de (1.76) e (1.83) obtemos que $\varphi_l = \|u_l\|_W^\beta$. Finalmente substituindo esta última igualdade em (1.77) obtemos a convergência (1.73) como pretendíamos.

Passagem ao Limite em $(P_{l,\nu})$

Agora com as convergências (1.72) e (1.73) podemos passar o limite em $(P_{l,\nu})$. O limite u_l é uma solução do Ploblema (P_l). De fato, por (1.47) e (1.58) resulta o seguinte:

$$|Su_{l,\nu}(t)|^2 \leq \frac{1}{\gamma_0^{2(\alpha+1)}} \left|S^{\alpha+2}u_{l,\nu}(t)\right|^2 \leq \frac{N^2}{m^*\gamma_0^{2(\alpha+1)}}, \ \forall t \in [0, T_0]\,. \tag{1.84}$$

Como $0 < T_0 < 1$ resulta de (1.84) que

$$\int_0^{T_0} |Su_{l,\nu}(t)|^2 \, dt \leq \frac{N^2 T_0}{m^*\gamma_0^{2(\alpha+1)}} < \frac{N^2}{m^*\gamma_0^{2(\alpha+1)}}.$$

Logo, desta última desigualdade resulta que $(Su_{l,\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0, T_0; H)$. Sendo assim, podemos extrair uma subsequência de $(Su_{l,\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$, que ainda denotaremos por $(Su_{l,\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$, tal que

$$Su_{l,\nu} \to \chi_1 \text{ fraco em } L^2(0, T_0; H). \tag{1.85}$$

Sendo S um operador fechado resulta de $(1.72)_1$ e (1.85) que

$$Su_{l,\nu} \to Su_l \text{ fraco em } L^2(0, T_0; H). \tag{1.86}$$

Assim de (1.73) e (1.86) concluimos que

$$M(\|u_{l,\nu-1}\|_W^\beta)Su_{l,\nu} \to M(\|u_l\|_W^\beta)Su_l \text{ fraco em } L^2(0, T_0; H). \tag{1.87}$$

Agora por (1.47) e (1.58) segue-se que

$$\int_0^{T_0} \left|Su'_{l,\nu}(t)\right|^2 dt \leq \int_0^{T_0} \frac{1}{\gamma_0^{2(\alpha+1)}} \left|S^{\alpha+2}u'_{l,\nu}(t)\right|^2 dt \leq \frac{N^2}{2\delta\gamma_0^{2(\alpha+1)}}$$

o que implica na convergência

$$Su'_{l,\nu} \to \chi_2 \text{ fraco em } L^2(0, T_0; H). \tag{1.88}$$

Sendo S um operador fechado resulta de $(1.72)_3$ e (1.88) que

$$\delta Su'_{l,\nu} \to \delta Su'_l \text{ fraco em } L^2(0, T_0; H). \tag{1.89}$$

Notemos agora que de (1.87), (1.89) e da equação de $(P_{l,\nu})$ concluimos que $(u''_{l,\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0,T_0;H)$. Sendo assim, podemos extrair uma subsequência de $(u''_{l,\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$, que ainda denotaremos por $(u''_{l,\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$, tal que

$$u''_{l,\nu} \rightarrow u''_l \text{ fraco em } L^2(0,T_0;H). \tag{1.90}$$

Logo, aplicando o limite na equação de $(P_{l,\nu})$ com $\nu \rightarrow +\infty$ (l fixado) e usando as convergências (1.87), (1.89) e (1.90), obtemos:

$$u''_l + M(\|u_l\|_W^\beta)Su_l + \delta S u'_l = 0 \text{ em } L^2(0,T_0;H). \tag{1.91}$$

Finalmente com as convergências (1.72) e (1.73) obtemos que a igualdade (1.91) é válida em $L^\infty(0,T_0;D(S^{\alpha+\frac{1}{2}})) \cap L^2(0,T_0;D(S^{\alpha+1}))$ como pretendíamos mostrar.

Condições Iniciais de (P_l)

As condições iniciais de (P_l) são verificadas. De fato, das convergências $(1.72)_1$ e $(1.72)_2$ concluimos que $u_l \in C^0([0,T_0]\,;D(S^{\alpha+\frac{3}{2}}))$. Logo, $u_l(0)$ faz sentido. Ainda como consequência das convergências $(1.72)_1$ e $(1.72)_2$ resulta que

$$u_{l,\nu}(t) \rightarrow u_l(t) \text{ fraco em } D(S^{\alpha+\frac{3}{2}}),\ \forall t \in [0,T_0]\,.$$

Em particular, segue-se desta última convergência que

$$u_{l,\nu}(0) \rightarrow u_l(0) \text{ fraco em } D(S^{\alpha+\frac{3}{2}}). \tag{1.92}$$

Agora do Problema $(P_{l,\nu})$ temos $u_{l,\nu}(0) = u_l^0$, $\forall \nu \geq 2$. Portanto, desta última igualdade, (1.92) e da unicidade do limite resulta que $u_l(0) = u_l^0$.

Agora das convergências $(1.72)_3$ e (1.90) concluimos que $u'_l \in C^0\left([0,T_0]\,;H\right)$. Logo, $u'_l(0)$ faz sentido. Ainda como consequência das convergências $(1.72)_3$ e (1.90) resulta que

$$u'_{l,\nu}(t) \rightarrow u'_l(t) \text{ fraco em } H,\ \forall t \in [0,T_0]\,.$$

Em particular, segue-se desta última convergência que

$$u'_{l,\nu}(0) \rightarrow u'_l(0) \text{ fraco em } H. \tag{1.93}$$

Pelo Problema $(P_{l,\nu})$ temos $u'_{l,\nu}(0) = u^1_l$, $\forall \nu \geq 2$. Portanto, desta última igualdade, (1.93) e da unicidade do limite resulta que $u'_l(0) = u^1_l$.

Portanto, acabamos de mostra que o limite u_l de $u_{l,\nu}$ é uma solução do Problema (P_l).

Segunda Etapa: Existência de Solução de $(P1)$.

Como u_l é o limite de $u_{l,\nu}$ resulta, então, que u_l satisfaz (1.58). Com isso, concluimos as seguintes convergências:

$$\left| \begin{array}{l} u_l \to u \text{ fraco-* em } L^\infty(0,T_0;D(S^{\alpha+2})) \\ u'_l \to u' \text{ fraco-* em } L^\infty(0,T_0;D(S^{\alpha+\frac{3}{2}})) \\ u'_l \to u' \text{ fraco em } L^2(0,T_0;D(S^{\alpha+2})). \end{array} \right. \tag{1.94}$$

Resulta de (1.47) e (1.58) que $(Su_l)_{l\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0,T_0;H)$. Sendo assim, podemos extrair uma subsequência de $(Su_l)_{l\in\mathbb{N}}$, que ainda denotaremos por $(Su_l)_{l\in\mathbb{N}}$, tal que

$$Su_l \to \chi_3 \text{ fraco em } L^2(0,T_0;H). \tag{1.95}$$

Sendo S um operador fechado resulta de $(1.94)_1$ e (1.95) que

$$Su_l \to Su \text{ fraco em } L^2(0,T_0;H). \tag{1.96}$$

Ainda de (1.47) e (1.58) segue-se que $(Su'_l)_{l\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0,T_0;H)$ o que acarreta na convergência

$$Su'_l \to \chi_4 \text{ fraco em } L^2(0,T_0;H). \tag{1.97}$$

Novamente de S ser um operador fechado obtemos de $(1.94)_3$ e (1.97) que

$$\delta Su'_l \to \delta Su' \text{ fraco em } L^2(0,T_0;H). \tag{1.98}$$

Notemos agora que de (1.59) e (1.83) obtemos a desigualdade

$$a \leq \|u_l(t)\|^\beta_W \leq b,\ \forall t \in [0,T_0] \ \text{ e } l \geq l_0(\eta). \tag{1.99}$$

No que segue provaremos a convergência

$$M(\|u_l\|^\beta_W) \to M(\|u\|^\beta_W) \text{ em } C^0\left([0,T_0]\right). \tag{1.100}$$

De fato, comecemos considerando a sequência de funções $(\psi_l)_{\nu \in \mathbb{N}}$, onde $\psi_l(t) = \|u_l(t)\|_W^\beta$. Agora usando o Teorema do Valor Médio, (1.99) e o Lema 1.1 (item(ii)) (veja que $u_l \in \mathcal{F}$), obtemos:

$$\left| \|u_l(t_2)\|_W^\beta - \|u_l(t_1)\|_W^\beta \right| \leq \beta s^{\beta-1} \|u_l(t_2) - u_l(t_1)\|_W \leq$$

$$\beta s^{\beta-1} \int_{t_1}^{t_2} \|u_l'(t)\|_W \, dt \leq \beta (2b^{\frac{1}{\beta}})^{\beta-1} N_2 \left| t_2 - t_1 \right|, \; 0 \leq t_1 < t_2 \leq T_0,$$

onde $0 \leq \|u_l(t_1)\|_W \leq s \leq \|u_l(t_2)\|_W \leq \|u_l(t_2)\|_W + \|u_l(t_1)\|_W \leq 2b^{\frac{1}{\beta}}$. Logo,

$$\left| \|u_l(t_2)\|_W^\beta - \|u_l(t_1)\|_W^\beta \right| \leq \beta (2b^{\frac{1}{\beta}})^{\beta-1} N_2 \left| t_2 - t_1 \right|, \tag{1.101}$$

$0 \leq t_1 < t_2 \leq T_0$.

Portanto de (1.99) , (1.101) e do Teorema de Arzela-Áscoli para funções reais segue-se que existe $\psi \in C^0([0, T_0])$ tal que

$$\|u_l\|_W^\beta \to \psi \text{ em } C^0([0, T_0]) \tag{1.102}$$

o que implica na convergência

$$M(\|u_l\|_W^\beta) \to M(\psi) \text{ em } C^0([0, T_0]). \tag{1.103}$$

A seguir provaremos que $M(\psi) = M(\|u\|_W^\beta)$. Para isso, procederemos como segue: Sejam u_l e u_k duas soluções dos Problemas (P_l) e (P_k), respectivamente. Consideremos $w_{lk} = u_l - u_k$, onde $l > k$. Então, w_{lk} é a solução do problema

$$(P_{lk}) \qquad \left| \begin{array}{l} w_{lk}'' + M(\|u_l\|_W^\beta) S w_{lk} + \delta S w_{lk}' = \left[M(\|u_k\|_W^\beta) - M(\|u_l\|_W^\beta) \right] S u_k \\ w_{lk}(0) = u_l^0 - u_k^0, \; w_{lk}'(0) = u_l^1 - u_k^1. \end{array} \right.$$

Tomando o produto escalar de H em ambos os membros da equação de (P_{lk}) com $2S^{2\alpha+1} w_{lk}'$, obtemos:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left| S^{\alpha+\frac{1}{2}} w_{lk}'(t) \right|^2 + \frac{d}{dt} \left[M(\|u_l(t)\|_W^\beta) \left| S^{\alpha+1} w_{lk}(t) \right|^2 \right] + 2\delta \left| S^{\alpha+1} w_{lk}'(t) \right|^2 = \\ &\left[\frac{d}{dt} \left\{ M(\|u_l(t)\|_W^\beta) \right\} \right] \left| S^{\alpha+1} w_{lk}(t) \right|^2 + \\ &2 \left[M(\|u_k(t)\|_W^\beta) - M(\|u_l(t)\|_W^\beta) \right] \left(S^{\alpha+\frac{3}{2}} u_k(t), S^{\alpha+\frac{1}{2}} w_{lk}'(t) \right). \end{aligned} \tag{1.104}$$

Pelas condições iniciais de (P_{lk}), (1.47) e as convergências (1.52), obtemos para l e k suficientemente grandes que

$$\left|S^{\alpha+1}w_{lk}(0)\right|^2 \leq C\epsilon^2 \text{ e } \left|S^{\alpha+\frac{1}{2}}w'_{lk}(0)\right|^2 \leq C\epsilon^2, \tag{1.105}$$

onde C é uma constante genérica que não depende de l e k.

Pelo Lema 1.1 (item(iii)) segue-se que

$$\left|\frac{d}{dt}\left\{M(\|u_l(t)\|_W^\beta)\right\}\right| \leq N_4, \ \forall t \in [0, T_0]. \tag{1.106}$$

Utilizando a convergência (1.103) e o mesmo raciocínio adotado para se obter (1.79), obtemos:

$$\begin{aligned} &2\left[M(\|u_k(t)\|_W^\beta) - M(\|u_l(t)\|_W^\beta)\right]\left(S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_k(t), S^{\alpha+\frac{1}{2}}w'_{lk}(t)\right) \leq \\ &\epsilon^2\frac{N^2}{m^*\gamma_0} + \left|S^{\alpha+\frac{1}{2}}w'_{lk}(t)\right|^2, \end{aligned} \tag{1.107}$$

$\forall t \in [0, T_0]$.

Integrando (1.104) de 0 a t, $t \in [0, T_0]$, utilizando (1.45) e (1.105) − (1.107), obtemos:

$$\begin{aligned} &\left|S^{\alpha+\frac{1}{2}}w'_{lk}(t)\right|^2 + m^*\left|S^{\alpha+1}w_{lk}(t)\right|^2 + 2\delta\int_0^t \left|S^{\alpha+1}w'_{lk}(s)\right|^2 ds \leq \\ &C\epsilon^2 + C\int_0^t \left[\left|S^{\alpha+\frac{1}{2}}w'_{lk}(s)\right|^2 + m^*\left|S^{\alpha+1}w_{lk}(s)\right|^2\right] ds, \forall t \in [0, T_0], \end{aligned}$$

onde C denota uma constante genérica que não depende de l e k.

Esta última desigualdade e a desigualdade de Gronwall implicam que

$$\left|S^{\alpha+1}w_{lk}(t)\right| \leq C\epsilon, \ \forall t \in [0, T_0],$$

onde C denota uma constante genérica que não depende de l e k que são considerados, aqui, suficientemente grandes. Consequentemente desta última desigualdade resulta que

$$(u_l)_{l\in\mathbb{N}} \text{ é uma sequência de Cauchy em } C^0\left([0, T_0]; D(S^{\alpha+1})\right).$$

Sendo assim, por (1.44), obtemos que

$$(u_l)_{l\in\mathbb{N}} \text{ é uma sequência de Cauchy em } C^0\left([0, T_0]; W\right),$$

ou seja,

$$u_l \to u \text{ em } C^0\left([0,T_0]\,;W\right).$$

Logo, dessa última convergência segue-se que

$$\|u_l\|_W^\beta \to \|u\|_W^\beta \text{ em } C^0\left([0,T_0]\right). \tag{1.108}$$

Finalmente de (1.102), (1.103) e (1.108) obtemos a convergência (1.100) como pretendíamos.

Passagem ao Limite em (P_l) **e Condições Iniciais de** $(P1)$

Com as convergências (1.94), (1.96), (1.98) e (1.100) e o mesmo raciocínio adotado na primeira etapa (existência de solução de (P_l)), concluimos que o limite u de u_l pertence a classe (1.43) e que u satisfaz ao Problema $(P1)$. Sendo assim, acabamos de concluir a prova do Teorema 1.1.■

1.2 Solução Global

Nesta seção usaremos o método do prolongamento de soluções e, como no caso local, as Proposições 1.1 e 1.2. Aqui será fundamental trabalharmos com as condições iniciais numa determinada bola, onde o raio depende de $\delta > 0$ (veja (1.110)).

Inicialmente faremos mais algumas considerações. Como consequência de (1.44) e (1.47) resulta que

$$\|u\|_W \leq C_2 \left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u\right|, \ \forall u \in D(S^{\alpha+\frac{3}{2}}), \ \alpha \geq 0, \tag{1.109}$$

onde $C_2 = \dfrac{k_1}{\sqrt{\gamma_0}}$.

Consideremos agora as seguintes hipóteses:

$$(H7) \qquad \left| \begin{array}{l} M \in C^0\left([0,\infty[\right), \ M(0) = 0, \ M(\xi) > 0, \ \forall \xi > 0 \\ M \in C^1\left(]0,\infty[\right), \ M'(\xi) \neq 0 \\ \left|M'(\xi)\right| \xi^{1-\frac{1}{\beta}} \leq C_3 M^{\frac{1}{2}}(\xi), \ \forall \xi > 0 \ (C_3 \text{ constante positiva}). \end{array} \right.$$

Com as considerações acima temos o seguinte resultado:

Teorema 1.2 *(Solução Global) Suponhamos as hipóteses* $(H1)-(H3)$ *e* $(H7)$. *Consideremos* $\alpha,\ \beta,\ \delta$ *números reais com* $\alpha \geq 0,\ \beta \geq 1,\ \delta > 0$ *e*

$$u^0 \in D(S^{2\alpha+\frac{7}{2}}),\ \ u^1 \in D(S^{2\alpha+3}),\ \ u^0 \neq 0$$

satisfazendo

$$\beta C_2 C_3 \left[\frac{\left| S^{\alpha+\frac{3}{2}} u^1 \right|^2}{M(\|u^0\|_W^\beta)} + \left| S^{\alpha+2} u^0 \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} < \delta\gamma_0, \tag{1.110}$$

onde γ_0, C_2 *e* C_3 *foram introduzidos em* (1.47), (1.109) *e* $(H7)$, *respectivamente. Então, existe uma função* u *na classe*

$$\left| \begin{array}{l} u \in L^\infty(0,\infty; D(S^{\alpha+2})) \\ u' \in L^\infty(0,\infty; D(S^{\alpha+\frac{3}{2}})) \\ u'' \in L^\infty(0,\infty; D(S^{\alpha+\frac{1}{2}})) \end{array} \right. \tag{1.111}$$

satisfazendo

$$(P2) \qquad \left| \begin{array}{l} u'' + M(\|u\|_W^\beta) Su + \delta S u' = 0 \ \textit{em}\ L^\infty(0,\infty; D(S^{\alpha+\frac{1}{2}})) \\ u(0) = u^0,\ \ u'(0) = u^1. \end{array} \right.$$

Demonstração:

Seja $\mathcal{M}$ o conjunto constituido pelos números reais $T > 0$ tais que existe uma única função u na classe (1.111) (trocando ∞ por T) com u solução de $(P2)$ e $\|u(t)\|_W > 0$ para todo $t \in [0,T]$. O Teorema 1.1 afirma que $\mathcal{M} \neq \varnothing$. Seja $T_{\max}$ o supremo dos $T \in \mathcal{M}$. Se $0 < T_0 < T_{\max}$, então resulta da Proposição 1.1 (considere $\theta = 0$ e perceba que $u^0 \in D(S^{2\alpha+\frac{7}{2}})$, $u^1 \in D(S^{2\alpha+3})$ e $M(\|u\|_W^\beta)$ está nas condições de $(H5)$) que a solução u verifica

$$\left| \begin{array}{l} u \in L^\infty(0,T_0; D(S^{2\alpha+\frac{7}{2}})) \\ u' \in L^\infty(0,T_0; D(S^{2\alpha+3})) \cap L^2(0,T_0; D(S^{2\alpha+\frac{7}{2}})) \\ u'' \in L^\infty(0,T_0; D(S^{2\alpha+2})) \cap L^2(0,T_0; D(S^{2\alpha+\frac{5}{2}})) \end{array} \right.$$

$$(LP) \qquad \left| \begin{array}{l} u'' + M(\|u\|_W^\beta)Su + \delta S u' = 0 \text{ em } L^\infty(0,T_0;D(S^{2\alpha+2})) \cap L^2(0,T_0;D(S^{2\alpha+\frac{5}{2}})) \\ u\,(0) = u^0,\ u'\,(0) = u^1. \end{array} \right.$$

e

$$\|u(t)\|_W > 0,\ \forall t \in [0,T_0]\,, \tag{1.112}$$

onde (1.112) decorre do Teorema 1.1.

Obteremos estimativas para a solução u dada em $\mathcal{M}$. Considere $0 < T_0 < T_{\max}$. Tomando o produto escalar de H em ambos os membros da equação de (LP) com $2S^{2\alpha+3}u'$, obtemos:

$$\frac{d}{dt}\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'(t)\right|^2 + M(\|u(t)\|_W^\beta)\frac{d}{dt}\left|S^{\alpha+2}u(t)\right|^2 + 2\delta\left|S^{\alpha+2}u'(t)\right|^2 = 0,\ t \in [0,T_0]\,,$$

ou seja,

$$\frac{\frac{d}{dt}\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'(t)\right|^2}{M(\|u(t)\|_W^\beta)} + \frac{d}{dt}\left|S^{\alpha+2}u(t)\right|^2 = -2\delta\frac{|S^{\alpha+2}u'(t)|^2}{M(\|u(t)\|_W^\beta)},\ t \in [0,T_0]\,. \tag{1.113}$$

Agora de (1.47) segue-se que

$$-2\delta\frac{|S^{\alpha+2}u'(t)|^2}{M(\|u(t)\|_W^\beta)} \leq -2\delta\gamma_0\frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'(t)\right|^2}{M(\|u(t)\|_W^\beta)}, \tag{1.114}$$

onde γ_0 foi introduzido em (1.47). Logo, substituindo (1.114) em (1.113), obtemos:

$$\frac{\frac{d}{dt}\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'(t)\right|^2}{M(\|u(t)\|_W^\beta)} + \frac{d}{dt}\left|S^{\alpha+2}u(t)\right|^2 \leq -2\delta\gamma_0\frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'(t)\right|^2}{M(\|u(t)\|_W^\beta)},\ t \in [0,T_0]\,. \tag{1.115}$$

Definimos a função

$$\varphi(t) = \frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'(t)\right|^2}{M(\|u(t)\|_W^\beta)} + \left|S^{\alpha+2}u(t)\right|^2,\ t \in [0,T_0]\,. \tag{1.116}$$

O nosso próximo objetivo é mostrar que $\varphi(t)$ é decrescente.

Derivando $\varphi(t)$ dada em (1.116), usando a Proposição 1.2 e a desigualdade (1.115), obtemos:

$$\varphi'(t) = \frac{\frac{d}{dt}\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'(t)\right|^2}{M(\|u(t)\|_W^\beta)} -$$

$$\frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'(t)\right|^2 \frac{d}{dt}\left\{M(\|u(t)\|_W^\beta)\right\}}{\left[M(\|u(t)\|_W^\beta)\right]^2} + \frac{d}{dt}\left|S^{\alpha+2}u(t)\right|^2 \leq$$

$$\frac{\frac{d}{dt}\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'(t)\right|^2}{M(\|u(t)\|_W^\beta)} +$$

$$\frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'(t)\right|^2}{M(\|u(t)\|_W^\beta)}\left[\frac{\beta\left|M'(\|u(t)\|_W^\beta)\right|\|u(t)\|_W^{\beta-1}\|u'(t)\|_W}{M(\|u(t)\|_W^\beta)}\right] + \frac{d}{dt}\left|S^{\alpha+2}u(t)\right|^2 \leq$$

$$\frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'(t)\right|^2}{M(\|u(t)\|_W^\beta)}\left[\frac{\beta\left|M'(\|u(t)\|_W^\beta)\right|\|u(t)\|_W^{\beta-1}}{\left[M(\|u(t)\|_W^\beta)\right]^{\frac{1}{2}}}\frac{\|u'(t)\|_W}{\left[M(\|u(t)\|_W^\beta)\right]^{\frac{1}{2}}} - 2\delta\gamma_0\right].$$

Utilizando a hipótese $(H7)_3$ e a desigualdade (1.109) na expressão acima, obtemos:

$$\varphi'(t) \leq \frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'(t)\right|^2}{M(\|u(t)\|_W^\beta)}\left[\beta C_2 C_3 \frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'(t)\right|}{\left[M(\|u(t)\|_W^\beta)\right]^{\frac{1}{2}}} - 2\delta\gamma_0\right], \; t \in [0, T_0]. \tag{1.117}$$

Agora definimos a função

$$\psi(t) = \beta C_2 C_3 \frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'(t)\right|}{\left[M(\|u(t)\|_W^\beta)\right]^{\frac{1}{2}}}, \; t \in [0, T_0]. \tag{1.118}$$

Então,

$$\psi(t) = \beta C_2 C_3 \left[\frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'(t)\right|^2}{M(\|u(t)\|_W^\beta)}\right]^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\beta C_2 C_3 \left[\frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'(t)\right|^2}{M(\|u(t)\|_W^\beta)} + \left|S^{\alpha+2}u(t)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$\beta C_2 C_3 \left[\varphi(t)\right]^{\frac{1}{2}},$$

ou seja,

$$\psi(t) \leq \beta C_2 C_3 \left[\varphi(t)\right]^{\frac{1}{2}}, \ t \in [0, T_0]. \tag{1.119}$$

Notemos agora que

$$\psi(t) < \delta\gamma_0, \ \forall t \in [0, T_0]. \tag{1.120}$$

De fato, suponhamos que existe $t_1 \in [0, T_0]$ tal que $\psi(t_1) \geq \delta\gamma_0$. Por (1.116), (1.119) e a hipótese (1.110) resulta que $\psi(0) < \delta\gamma_0$. Consideremos

$$t^* = \inf\{t \in [0, T_0];\ \psi(t) = \delta\gamma_0\} > 0.$$

Como $\varphi(t)$ é contínua em $[0, T_0]$ e $\psi(t^*) = \delta\gamma_0$ resulta por (1.117) que $\varphi(t)$ é decrescente em $[0, t^*]$, ou seja, $\varphi(t) \leq \varphi(0)$, $\forall t \in [0, t^*]$. Então, pela desigualdade (1.119) e pela hipótese (1.110), obtemos:

$$\psi(t) \leq \beta C_2 C_3 \left[\varphi(t)\right]^{\frac{1}{2}} \leq \beta C_2 C_3 \left[\varphi(0)\right]^{\frac{1}{2}} < \delta\gamma_0, \ \forall t \in [0, t^*].$$

Mas isto é uma contradição, pois, $\psi(t^*) = \delta\gamma_0$. Portanto, (1.120) é verdade.

Agora de (1.117), (1.118), (1.120) e notando que $0 < T_0 < T_{\max}$ foi arbitrário, obtemos:

$$\varphi'(t) \leq -\delta\gamma_0 \frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}} u'(t)\right|^2}{M(\|u(t)\|_W^\beta)}, \ \forall t \in [0, T_{\max}[.$$

Portanto, desta última desigualdade resulta que φ é decrescente em $[0, T_{\max}[$. Sendo assim, resulta da hipótese (1.110) que

$$\frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}} u'(t)\right|^2}{M(\|u(t)\|_W^\beta)} + \left|S^{\alpha+2} u(t)\right|^2 \leq \frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}} u^1\right|^2}{M(\|u^0\|_W^\beta)} + \left|S^{\alpha+2} u^0\right|^2 < \frac{\delta^2\gamma_0^2}{\beta^2 C_2^2 C_3^2} = N_5^2, \tag{1.121}$$

$\forall t \in [0, T_{\max}[$.

Notemos que se $T_{\max}$ é infinito então com (1.121) concluimos o Teorema 1.2.

Suponhamos que $T_{\max}$ é finito. Então, (1.121) implica que

$$\left|S^{\alpha+2} u(t)\right| \leq N_5, \ \forall t \in [0, T_{\max}[. \tag{1.122}$$

Agora de (1.109) e (1.47) segue-se que

$$\|u(t)\|_W \leq C_2 \|u(t)\|_{D(S^{\alpha+\frac{3}{2}})} \leq \frac{C_2}{\sqrt{\gamma_0}} \left|S^{\alpha+2}u(t)\right| \leq \frac{C_2 N_5}{\sqrt{\gamma_0}}.$$

Logo, desta última desigualdade, $(H7)_1$ e (1.121) resulta que

$$\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'(t)\right| \leq N_6,\ \forall t \in [0, T_{\max}[\,, \tag{1.123}$$

onde N_6 é uma constante obtida pelos procedimentos citados acima.

Consideremos a sequência de números reais (t_ν) tal que $0 < t_\nu < T_{\max}$ e $t_\nu \to T_{\max}$. Por (1.122) e (1.123) temos que existem, respectivamente, $\chi_5 \in D(S^{\alpha+2})$ e $\chi_6 \in D(S^{\alpha+\frac{3}{2}})$, tais que

$$u(t_\nu) \to \chi_5 \text{ fraco em } D(S^{\alpha+2}) \tag{1.124}$$

e

$$u'(t_\nu) \to \chi_6 \text{ fraco em } D(S^{\alpha+\frac{3}{2}}). \tag{1.125}$$

A seguir mostraremos que $\chi_5 = \chi_6 = 0$. De fato, se $\chi_5 \neq 0$, então com χ_5 e χ_6 determinamos, por intermédio do Teorema 1.1, a solução local w do problema

$$(I) \quad \left|\begin{array}{l} w'' + M(\|w\|_W^\beta)Sw + \delta Sw' = 0 \text{ em } L^\infty(0,T_0;D(S^{\alpha+\frac{1}{2}})) \cap L^2(0,T_0;D(S^{\alpha+1})) \\ w(0) = \chi_5,\ w'(0) = \chi_6. \end{array}\right.$$

Assim a função

$$\tilde{u}(t) = \left|\begin{array}{l} w(t),\ 0 \leq t < T_{\max} \\ w(t - T_{\max}),\ T_{\max} \leq t < T_{\max} + T_0 \end{array}\right.$$

é uma solução do Problema $(P1)$ em $[0, T_{\max} + T_0]$, com $\left\|\tilde{u}(t)\right\|_W > 0$, $\forall t \in [0, T_{\max} + T_0]$. Mas isto é uma contradição com a definição de $T_{\max}$. Logo, $\chi_5 = 0$.

Agora notemos que $u(t_\nu) - u(t_\mu) = \displaystyle\int_{t_\mu}^{t_\nu} u'(t)dt$. Assim de (1.123) segue-se que

$$\|u(t_\nu) - u(t_\mu)\|_{D(S^{\alpha+\frac{3}{2}})} \leq \int_{t_\mu}^{t_\nu} \|u'(t)\|_{D(S^{\alpha+\frac{3}{2}})}\, dt \leq N_6 \left|t_\nu - t_\mu\right|.$$

Portanto, resulta desta última desigualdade que $(u(t_\nu))_{\nu\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $D(S^{\alpha+\frac{3}{2}})$. Então, $(u(t_\nu))_{\nu\in\mathbb{N}}$ é convergente. Como $\chi_5 = 0$ obtemos de (1.124) que

$$u(t_\nu) \to 0 \text{ forte em } D(S^{\alpha+\frac{3}{2}}). \tag{1.126}$$

Logo de (1.126) e (1.109) concluimos que

$$u(t_\nu) \to 0 \text{ forte em } W. \tag{1.127}$$

Agora pela estimativa (1.121) , obtemos:

$$\|u'(t_\nu)\|^2_{D(S^{\alpha+\frac{3}{2}})} = \left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'(t_\nu)\right|^2 \leq N_5^2 M(\|u(t_\nu)\|^\beta_W). \tag{1.128}$$

Assim da convergência (1.127) , da hipótese $(H7)_1$ e da desigualdade (1.128) resulta que

$$u'(t_\nu) \to 0 \text{ forte em } D(S^{\alpha+\frac{3}{2}}). \tag{1.129}$$

Portanto de (1.129) e (1.125) concluimos que $\chi_6 = 0$ como pretendíamos mostrar.

Utilizando as convergências (1.126) e (1.127) e a hipótese $(H7)_1$ concluimos que

$$M(\|u(t_\nu)\|^\beta_W)Su(t_\nu) \to 0 \text{ forte em } D(S^{\alpha+\frac{1}{2}}). \tag{1.130}$$

Notemos agora que da convergência (1.129) segue-se que

$$\delta Su'(t_\nu) \to 0 \text{ forte em } D(S^{\alpha+\frac{1}{2}}). \tag{1.131}$$

Portanto, resulta de (1.130) , (1.131) e da equação de $(P2)$ que

$$u''(t_\nu) \to 0 \text{ forte em } D(S^{\alpha+\frac{1}{2}}).$$

Assim, se $T_{\max}$ é finito definimos $u(t) = 0$ para $t \geq T_{\max}$. Esta extensão é a solução do Problema $(P2)$. Sendo assim, acabamos de concluir a prova do Teorema 1.2.■

1.3 Comportamento Assintótico

Nesta seção obteremos o decaimento exponencial para a energia associada a solução do Problema $(P2)$ utilizando uma aproximação de Lyapunov e as Proposições 1.1 e 1.2. Do mesmo modo como no caso global consideraremos os dados iniciais numa determinada bola, onde o raio depende de $\delta > 0$ (veja (1.133)).

Para o estudo do decaimento da energia associada a solução do Problema $(P2)$ faremos ainda a seguinte consideração:

$$(H8) \qquad \left| \begin{array}{l} M \in C^1\left([0,\infty[\right) \\ M(\xi) \geq m^{**} > 0,\ \forall \xi \geq 0\ (m^{**} \text{ constante}) \\ M'(\xi) \geq 0,\ \forall \xi \geq 0 \\ \left|M'\left(\xi\right)\right| \xi^{1-\frac{1}{\beta}} \leq C_4 M\left(\xi\right),\ \beta > 1,\ \forall \xi \geq 0\ (C_4 \text{ constante positiva}). \end{array} \right.$$

Também introduziremos a notação

$$\varphi(t) = \frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'(t)\right|^2}{M(\|u(t)\|_W^\beta)} + \left|S^{\alpha+2}u(t)\right|^2,\ t \geq 0. \tag{1.132}$$

Com as considerações acima temos o seguinte resultado:

Teorema 1.3 *Suponhamos as hipóteses do Teorema 1.2 mudando* $(H7)$ *por* $(H8)$. *Consideremos* α, β, δ *números reais com* $\alpha \geq 0$, $\beta > 1$, $\delta > 0$ *e*

$$u^0 \in D(S^{\alpha+2}),\ u^1 \in D(S^{\alpha+\frac{3}{2}})$$

satisfazendo

$$\beta C_2 C_4 M^{\frac{1}{2}}(k_0^\beta \varphi^{\frac{\beta}{2}}(0))\varphi^{\frac{1}{2}}(0) < \delta\gamma_0, \tag{1.133}$$

onde $k_0 = \dfrac{C_2}{\sqrt{\gamma_0}}$ *e* $\varphi(0) = \dfrac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u^1\right|^2}{M(\|u^0\|_W^\beta)} + \left|S^{\alpha+2}u^0\right|^2$. *Então, existe uma função* u *na classe* (1.111) *tal que* u *é solução do Problema* $(P2)$. *Além disso, se*

$$\frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u^1\right|^2}{M(\|u^0\|_W^\beta)} + \left|S^{\alpha+2}u^0\right|^2 < \min\left\{\frac{\delta^2\gamma_0^2}{\beta^2 C_2^2 C_4^2 M(k_0^\beta \varphi^{\frac{\beta}{2}}(0))},\ \frac{\gamma_0^2 m^{**}}{4\beta^2 C_2^2 C_4^2},\ \frac{m^{**}}{4\delta^2\beta^2 C_2^2 C_4^2}\right\}, \tag{1.134}$$

onde γ_0 *foi introduzido em* (1.47), *temos*

$$\varphi(t) \leq 3\varphi(0)\exp(-\frac{\tau_0}{3}t), \ t \geq 0, \tag{1.135}$$

sendo $\tau_0 = \min\{\delta\gamma_0, \ \epsilon\}$, $\epsilon \leq \min\left\{\frac{1}{2P_0}, \ \frac{\delta\gamma_0}{2+\delta\gamma_0}, \ 1\right\}$, $P_0 = \frac{1}{2\sqrt{\gamma_0}(m^{**})^{\frac{1}{2}}} + \frac{\delta}{2m^{**}}$ *e* $\varphi(t)$ *definido em* (1.132).

Corolário 1.1 *(Decaimento de Energia) Se* $K = \sup\limits_{0\leq t<\infty} M(\|u(t)\|_W^\beta)$, *então a desigualdade* (1.135) *implica que*

$$E(t) \leq 3K\varphi(0)\exp(-\frac{\tau_0}{3}t), \ t \geq 0, \tag{1.136}$$

onde

$$E(t) = \left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'(t)\right|^2 + M(\|u(t)\|_W^\beta)\left|S^{\alpha+2}u(t)\right|^2, \ t \geq 0, \tag{1.137}$$

é a energia associada a solução u *de* $(P2)$.

Demonstração (Teorema 1.3):

Inicialmente faremos uma observação.

Observação 1.7 *Sejam* $M : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^1 *e* $u \in C^1([0,\infty[;W)$. *Se* $\beta > 1$ *e* $u(t_0) = 0$, *então a derivada de Leibniz* $\frac{d}{dt}\left\{M(\|u(t_0)\|_W^\beta)\right\}$ *é igual a zero (ver [12]).*

Sejam (u_j^0) e (u_j^1) duas sequências de vetores de $D(S^{2\alpha+\frac{7}{2}})$ e $D(S^{2\alpha+3})$, respectivamente, tais que

$$u_j^0 \to u^0 \text{ em } D(S^{\alpha+2}) \text{ e } u_j^1 \to u^1 \text{ em } D(S^{\alpha+\frac{3}{2}}). \tag{1.138}$$

Logo de (1.133) e (1.138) resulta que

$$\beta C_2 C_4 M^{\frac{1}{2}}(k_0^\beta \varphi_j^{\frac{\beta}{2}}(0))\varphi_j^{\frac{1}{2}}(0) < \delta\gamma_0, \ j \geq j_0, \tag{1.139}$$

onde

$$\varphi_j(0) = \frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j^1\right|^2}{M(\left\|u_j^0\right\|_W^\beta)} + \left|S^{\alpha+2}u_j^0\right|^2.$$

Agora consideremos o problema

$$(P_j) \quad \left| \begin{array}{l} u_j'' + M(\|u_j\|_W^\beta) S u_j + \delta S u_j' = 0 \text{ em } L^\infty(0,\infty; D(S^{\alpha+\frac{1}{2}})) \\ u_j(0) = u_j^0,\ u_j'(0) = u_j^1. \end{array} \right.$$

Pelo Teorema 1.1 concluimos que (P_j) possui uma solução local u_j na classe

$$\left| \begin{array}{l} u_j \in L^\infty(0,T_0; D(S^{\alpha+2})) \\ u_j' \in L^\infty(0,T_0; D(S^{\alpha+\frac{3}{2}})) \cap L^2(0,T_0; D(S^{\alpha+2})) \\ u_j'' \in L^\infty(0,T_0; D(S^{\alpha+\frac{1}{2}})) \cap L^2(0,T_0; D(S^{\alpha+1})). \end{array} \right. \tag{1.140}$$

Com (1.140) conclui-se que $M(\|u_j\|_W^\beta)$ satisfaz a $(H5)$. Sendo assim, resulta da Proposição 1.1 (considerando $\theta = 0$) que existe uma única solução local u_j de (P_j) na classe

$$\left| \begin{array}{l} u_j \in L^\infty(0,T_0; D(S^{2\alpha+\frac{7}{2}})) \\ u_j' \in L^\infty(0,T_0; D(S^{2\alpha+3})) \cap L^2(0,T_0; D(S^{2\alpha+\frac{7}{2}})) \\ u_j'' \in L^\infty(0,T_0; D(S^{2\alpha+2})) \cap L^2(0,T_0; D(S^{2\alpha+\frac{5}{2}})). \end{array} \right. \tag{1.141}$$

Denotemos por $\mathcal{M}_j$ o conjunto constituido pelos números reais $T > 0$ tal que existe uma única função u_j na classe (1.141) (trocando T_0 por T) sendo u_j solução de (P_j) em $[0,T]$. Pelo resultado de existência de solução local logo acima resulta que $\mathcal{M}_j \neq \varnothing$. Denotemos por $T_{\max,j}$ o supremo dos $T \in \mathcal{M}_j$.

Notemos que nesta parte não necessitaremos da limitação $0 < a \leq \|u(t)\|_W^\beta \leq b$, $\forall t \in [0,T]$, por causa da Observação 1.7.

Seja $\varphi_j(t)$, $j \geq j_0$, a função

$$\varphi_j(t) = \frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}} u_j'(t)\right|^2}{M(\|u_j(t)\|_W^\beta)} + \left|S^{\alpha+2} u_j(t)\right|^2,\ t \in [0, T_{\max,j}[\,. \tag{1.142}$$

Procedendo de modo análogo ao que foi feito para se determinar (1.117), obtemos:

$$\varphi_j'(t) \leq \frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}} u_j'(t)\right|^2}{M(\|u_j(t)\|_W^\beta)} \left[\beta C_2 C_4 \left|S^{\alpha+\frac{3}{2}} u_j'(t)\right| - 2\delta\gamma_0\right],\ t \in [0, T_{\max,j}[\,. \tag{1.143}$$

Agora definimos a função

$$\psi_1(t) = \beta C_2 C_4 \left|S^{\alpha+\frac{3}{2}} u_j'(t)\right|,\ t \in [0, T_{\max,j}[\,. \tag{1.144}$$

Por (1.109) e (1.47), obtemos:

$$\|u\|_W \leq C_2 \|u\|_{D(S^{\alpha+\frac{3}{2}})} \leq k_0 \left|S^{\alpha+2}u\right|,$$

onde $k_0 = \dfrac{C_2}{\sqrt{\gamma_0}}$. Aqui C_2 e γ_0 foram introduzidos em (1.109) e (1.47), respectivamente. Consequentemente, obtemos:

$$\left\|u_j^0\right\|_W^\beta \leq k_0^\beta \left|S^{\alpha+2}u_j^0\right|^\beta = k_0^\beta \left[\left|S^{\alpha+2}u_j^0\right|^2\right]^{\frac{\beta}{2}} \leq k_0^\beta \left[\varphi_j(0)\right]^{\frac{\beta}{2}}.$$

Como M é crescente (veja $(H8)_3$), resulta desta última desigualdade que

$$M^{\frac{1}{2}}(\left\|u_j^0\right\|_W^\beta) \leq M^{\frac{1}{2}}(k_0^\beta \left[\varphi_j(0)\right]^{\frac{\beta}{2}}). \tag{1.145}$$

Portanto de (1.139), (1.142), (1.144) e (1.145) resulta que

$$\psi_1(0) = \beta C_2 C_4 M^{\frac{1}{2}}(\left\|u_j^0\right\|_W^\beta)\frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j^1\right|}{M^{\frac{1}{2}}(\left\|u_j^0\right\|_W^\beta)} \leq \beta C_2 C_4 M^{\frac{1}{2}}(k_0^\beta \left[\varphi_j(0)\right]^{\frac{\beta}{2}}) \left[\varphi_j(0)\right]^{\frac{1}{2}} < \delta\gamma_0. \tag{1.146}$$

Utilizando (1.146), (1.143), (1.139) e o mesmo raciocínio adotado para se obter (1.120) concluimos que

$$\psi_1(t) < \delta\gamma_0,\ t \in [0, T_{\max,j}[\,. \tag{1.147}$$

Logo de (1.143), (1.144) e (1.147) resulta que

$$\varphi_j'(t) \leq -\delta\gamma_0 \frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2}{M(\|u_j(t)\|_W^\beta)},\ \forall t \in [0, T_{\max,j}[\,. \tag{1.148}$$

Assim de (1.148) segue-se que $\varphi_j(t)$ é decrescente em $[0, T_{\max,j}[$. Então, $\varphi_j(t) \leq \varphi_j(0)$ para $t \in [0, T_{\max,j}[$. Portanto, desta última desigualdade, (1.134), (1.138) e (1.142), obtemos:

$$\frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2}{M(\|u_j(t)\|_W^\beta)} + \left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 \leq \frac{\delta^2\gamma_0^2}{\beta^2 C_2^2 C_4^2 M(k_0^\beta \varphi^{\frac{\beta}{2}}(0))},\ t \in [0, T_{\max,j}[\,. \tag{1.149}$$

Utilizando a desigualdade (1.149) e um raciocínio similar ao adotado na prova do Teorema 1.2 obtemos que $T_{\max,j}$ é infinito para $j > j_0$.

Fixemos $j > j_0$ e consideremos $\epsilon > 0$. Definimos as funções

$$\rho(t) = \frac{(S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t), S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j(t))}{M(\|u_j(t)\|_W^\beta)} + \frac{\delta}{2}\frac{|S^{\alpha+2}u_j(t)|^2}{M(\|u_j(t)\|_W^\beta)},\ t \in [0, \infty[\tag{1.150}$$

e

$$\varphi_{j\epsilon}(t) = \varphi_j(t) + \epsilon\rho(t),\ t \in [0, \infty[\,, \tag{1.151}$$

onde u_j é a solução de (P_j).

Agora de (1.47) , (1.150) e $(H8)_2$ resulta que

$$\begin{aligned}
&|\rho(t)| \leq \frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|}{\sqrt{\gamma_0}(m^{**})^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}(\|u_j(t)\|_W^\beta)}\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right| + \frac{\delta}{2}\frac{|S^{\alpha+2}u_j(t)|^2}{m^{**}} \leq \\
&\frac{1}{2\sqrt{\gamma_0}(m^{**})^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2}{M(\|u_j(t)\|_W^\beta)} + \left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2\right] + \\
&\frac{\delta}{2m^{**}}\left[\frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2}{M(\|u_j(t)\|_W^\beta)} + \left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2\right] = \\
&\left[\frac{1}{2\sqrt{\gamma_0}(m^{**})^{\frac{1}{2}}} + \frac{\delta}{2m^{**}}\right]\varphi_j(t),\ t \in [0, \infty[\,.
\end{aligned} \tag{1.152}$$

Logo de (1.151) e (1.152) segue-se que

$$|\varphi_{j\epsilon}(t) - \varphi_j(t)| = \epsilon\,|\rho(t)| \leq \epsilon P_0\varphi_j(t),$$

onde $P_0 = \dfrac{1}{2\sqrt{\gamma_0}(m^{**})^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{\delta}{2m^{**}}$.

Considerando $0 < \epsilon < \dfrac{1}{2P_0}$ na última desigualdade, obtemos:

$$\frac{1}{2}\varphi_j(t) \leq \varphi_{j\epsilon}(t) \leq \frac{3}{2}\varphi_j(t),\ t \in [0, \infty[\,. \tag{1.153}$$

por outro lado tomando o produto escalar de H em ambos os membros da equação de (P_j) com $S^{2\alpha+3}u_j$, obtemos:

$$(S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j''(t), S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j(t)) + M(\|u_j(t)\|_W^\beta)\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 + \frac{\delta}{2}\frac{d}{dt}\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 = 0.$$

Como $(S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j''(t), S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j(t)) = \dfrac{d}{dt}(S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t), S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j(t)) - \left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2$ resulta da igualdade logo acima o seguinte:

$$\frac{\frac{d}{dt}(S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t), S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j(t))}{M(\|u_j(t)\|_W^\beta)} + \frac{\delta}{2}\frac{\frac{d}{dt}\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2}{M(\|u_j(t)\|_W^\beta)} = \frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2}{M(\|u_j(t)\|_W^\beta)} - \left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2. \qquad (1.154)$$

Derivando $\rho(t)$ dada em (1.150) e substituindo (1.154) no resultado, obtemos:

$$\begin{aligned}\rho'(t) = \frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2}{M(\|u_j(t)\|_W^\beta)} - \left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 - \\ \frac{(S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t), S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j(t))\frac{d}{dt}\left\{M(\|u_j(t)\|_W^\beta)\right\}}{\left[M(\|u_j(t)\|_W^\beta)\right]^2} - \\ \frac{\delta}{2}\frac{\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2\frac{d}{dt}\left\{M(\|u_j(t)\|_W^\beta)\right\}}{\left[M(\|u_j(t)\|_W^\beta)\right]^2}.\end{aligned} \qquad (1.155)$$

Agora substituindo o valor da derivada de $M(\|u_j(t)\|_W^\beta)$ (veja Proposição 1.2) em (1.155) resulta, para $u_j(t) \neq 0$, o seguinte:

$$\rho'(t) = \frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2}{M(\|u_j(t)\|_W^\beta)} - \left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 - L_1 - L_2, \qquad (1.156)$$

onde

$$L_1 = \frac{\beta M'(\|u_j(t)\|_W^\beta)\,\|u_j(t)\|_W^{\beta-1}}{M(\|u_j(t)\|_W^\beta)}\left\langle \frac{Ju_j(t)}{\|u_j(t)\|_W}, u_j'(t)\right\rangle \left(\frac{S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)}{\left[M(\|u_j(t)\|_W^\beta)\right]^{\frac{1}{2}}}, \frac{S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j(t)}{\left[M(\|u_j(t)\|_W^\beta)\right]^{\frac{1}{2}}}\right)$$

e

$$L_2 = \frac{\delta\beta M'(\|u_j(t)\|_W^\beta)\,\|u_j(t)\|_W^{\beta-1}}{2M(\|u_j(t)\|_W^\beta)}\left\langle \frac{Ju_j(t)}{\|u_j(t)\|_W}, u_j'(t)\right\rangle \frac{\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2}{M(\|u_j(t)\|_W^\beta)}.$$

A seguir obteremos estimativas para L_1 e L_2.

Utilizando $(H8)_4$, $(1.109)\,,\,(1.144)\,,(1.147)\,,\,(H8)_2$ e $(1.47)\,,$ obtemos:

$$\begin{aligned}
&|L_1| \leq \beta \frac{\left|M'(\|u_j(t)\|_W^\beta)\right| \|u_j(t)\|_W^{\beta-1}}{M(\|u_j(t)\|_W^\beta)} \left\|u_j'(t)\right\|_W \frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}} u_j'(t)\right| \left|S^{\alpha+\frac{3}{2}} u_j(t)\right|}{M(\|u_j(t)\|_W^\beta)} \leq \\
&\beta C_2 C_4 \left\|u_j'(t)\right\|_{D(S^{\alpha+\frac{3}{2}})} \left(\frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}} u_j'(t)\right|^2}{2M(\|u_j(t)\|_W^\beta)} + \frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}} u_j(t)\right|^2}{2M(\|u_j(t)\|_W^\beta)} \right) < \\
&\frac{\delta\gamma_0}{2} \frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}} u_j'(t)\right|^2}{M(\|u_j(t)\|_W^\beta)} + \frac{\beta C_2 C_4 \left|S^{\alpha+\frac{3}{2}} u_j'(t)\right|}{2\gamma_0 \left[M(\|u_j(t)\|_W^\beta)\right]^{\frac{1}{2}}} \frac{|S^{\alpha+2} u_j(t)|^2}{\left[M(\|u_j(t)\|_W^\beta)\right]^{\frac{1}{2}}} \leq \\
&\frac{\delta\gamma_0}{2} \frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}} u_j'(t)\right|^2}{M(\|u_j(t)\|_W^\beta)} + \frac{\beta C_2 C_4 \left|S^{\alpha+\frac{3}{2}} u_j'(t)\right|}{2\gamma_0 (m^{**})^{\frac{1}{2}} \left[M(\|u_j(t)\|_W^\beta)\right]^{\frac{1}{2}}} \left|S^{\alpha+2} u_j(t)\right|^2,\ t \in [0, \infty[\,.
\end{aligned} \tag{1.157}$$

Agora do fato de $\varphi_j(t)$ ser decrescente (veja (1.148)), das convergências (1.138) e da hipótese (1.134) obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned}
&\frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}} u_j'(t)\right|^2}{M(\|u_j(t)\|_W^\beta)} \leq \frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}} u_j'(t)\right|^2}{M(\|u_j(t)\|_W^\beta)} + \left|S^{\alpha+2} u_j(t)\right|^2 = \varphi_j(t) \leq \\
&\varphi_j(0) = \frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}} u_j^1\right|^2}{M(\left\|u_j^0\right\|_W^\beta)} + \left|S^{\alpha+2} u_j^0\right|^2 \leq \frac{\gamma_0^2 m^{**}}{4\beta^2 C_2^2 C_4^2},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}} u_j'(t)\right|}{\left[M(\|u_j(t)\|_W^\beta)\right]^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\gamma_0 (m^{**})^{\frac{1}{2}}}{2\beta C_2 C_4}.$$

Consequentemente desta última desigualdade segue-se que

$$\frac{\beta C_2 C_4 \left|S^{\alpha+\frac{3}{2}} u_j'(t)\right|}{2\gamma_0 (m^{**})^{\frac{1}{2}} \left[M(\|u_j(t)\|_W^\beta)\right]^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{4},\ t \in [0, \infty[\,. \tag{1.158}$$

Substituindo (1.158) em $(1.157)\,,$ obtemos:

$$|L_1| \leq \frac{\delta\gamma_0}{2} \frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}} u_j'(t)\right|^2}{M(\|u_j(t)\|_W^\beta)} + \frac{1}{4} \left|S^{\alpha+2} u_j(t)\right|^2,\ t \in [0, \infty[\,. \tag{1.159}$$

Agora utilizando $(H8)_4$, (1.109) e um raciocínio similar ao adotado para se obter (1.157) , obtemos:

$$|L_2| \leq \frac{\delta\beta C_2 C_4 \left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|}{2(m^{**})^{\frac{1}{2}}\left[M(\|u_j(t)\|_W^\beta)\right]^{\frac{1}{2}}}\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2, \ t\in[0,\infty[. \tag{1.160}$$

Novamente do fato de $\varphi_j(t)$ ser decrescente, das convergências (1.138) e da hipótese (1.134) , obtemos:

$$\frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2}{M(\|u_j(t)\|_W^\beta)} \leq \frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2}{M(\|u_j(t)\|_W^\beta)} + \left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 = \varphi_j(t) \leq$$

$$\varphi_j(0) = \frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j^1\right|^2}{M(\left\|u_j^0\right\|_W^\beta)} + \left|S^{\alpha+2}u_j^0\right|^2 \leq \frac{m^{**}}{4\delta^2\beta^2C_2^2C_4^2},$$

ou seja,

$$\frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|}{\left[M(\|u_j(t)\|_W^\beta)\right]^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{(m^{**})^{\frac{1}{2}}}{2\delta\beta C_2C_4}.$$

Consequentemente desta última desigualdade segue-se que

$$\frac{\delta\beta C_2 C_4 \left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|}{2(m^{**})^{\frac{1}{2}}\left[M(\|u_j(t)\|_W^\beta)\right]^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{4}, \ t\in[0,\infty[. \tag{1.161}$$

Substituindo (1.161) em (1.160) , obtemos:

$$|L_2| \leq \frac{1}{4}\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2, \ t\in[0,\infty[. \tag{1.162}$$

Agora de (1.156) concluimos que

$$\rho'(t) \leq \frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2}{M(\|u_j(t)\|_W^\beta)} - \left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 + |L_1| + |L_2|, \ t\in[0,\infty[. \tag{1.163}$$

Observação 1.8 *Notemos que para $u_j(t)=0$ resulta da observação 1.7 e de* (1.155) *que*

$$\rho'(t) = \frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2}{M(\|u_j(t)\|_W^\beta)} - \left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2.$$

Portanto, com esta última igualdade, concluimos que é possível obtermos a desigualdade (1.163) *mesmo quando $u_j(t)=0$.*

Substituindo (1.159) e (1.162) em (1.163), obtemos:

$$\rho'(t) \leq \left(1 + \frac{\delta\gamma_0}{2}\right) \frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2}{M(\|u_j(t)\|_W^\beta)} - \frac{1}{2}\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2, \ t \in [0, \infty[. \tag{1.164}$$

Derivando (1.151) com relação a t e substituindo (1.148) e (1.164) no resultado, obtemos:

$$\varphi_{j\epsilon}'(t) \leq \left(-\delta\gamma_0 + \epsilon + \frac{\epsilon\delta\gamma_0}{2}\right) \frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2}{M(\|u_j(t)\|_W^\beta)} - \frac{\epsilon}{2}\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2, \ t \in [0, \infty[. \tag{1.165}$$

Notando que $\epsilon \leq \min\left\{\frac{1}{2P_0}, \ \frac{\delta\gamma_0}{2+\delta\gamma_0}, \ 1\right\}$ resulta que $-\delta\gamma_0 + \epsilon + \frac{\epsilon\delta\gamma_0}{2} \leq -\frac{\delta\gamma_0}{2}$. Logo, desse fato e de (1.165) segue-se que

$$\varphi_{j\epsilon}'(t) \leq -\frac{\delta\gamma_0}{2} \frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2}{M(\|u_j(t)\|_W^\beta)} - \frac{\epsilon}{2}\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2, \ t \in [0, \infty[.$$

Como $\tau_0 = \min\{\delta\gamma_0, \ \epsilon\}$ resulta desta última desigualdade que

$$\varphi_{j\epsilon}'(t) \leq \frac{1}{2}(-\tau_0)\left[\frac{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2}{M(\|u_j(t)\|_W^\beta)} + \left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2\right] = -\frac{\tau_0}{2}\varphi_j(t), \ t \in [0, \infty[. \tag{1.166}$$

Portanto, segue-se de (1.153) e (1.166) que

$$\varphi_{j\epsilon}'(t) \leq -\frac{\tau_0}{3}\varphi_{j\epsilon}(t), \ t \in [0, \infty[,$$

o que acarreta na desigualdade

$$\varphi_{j\epsilon}(t) \leq \varphi_{j\epsilon}(0)\exp(-\frac{\tau_0}{3}t), \ t \in [0, \infty[.$$

Agora desta última desigualdade e de (1.153), obtemos:

$$\varphi_j(t) \leq 3\varphi_j(0)\exp(-\frac{\tau_0}{3}t), \ t \in [0, \infty[, \ j \geq j_0. \tag{1.167}$$

A seguir usaremos a desigualdade (1.167) para obtermos a desigualdade (1.135). Para isso, fixaremos $t > 0$ e aplicaremos o lim inf em (1.167).

Observação 1.9 *Sejam X e Y dois espaços de Banach. No que segue usaremos a notação $X \hookrightarrow Y$ para indicar que X está continuamente imerso em Y.*

Inicialmente notemos que de (1.149) e da imersão $D(S^{\alpha+2}) \hookrightarrow H$ resulta o seguinte:

$$u_j \rightarrow u \text{ fraco-* em } L^\infty(0,T;D(S^{\alpha+2})) \hookrightarrow L^\infty(0,T;H),\ \forall T \in (0,\infty). \tag{1.168}$$

Agora de (1.149), das imersões $D(S^{\alpha+2}) \hookrightarrow W$ e $D(S^{\alpha+\frac{3}{2}}) \hookrightarrow H$ e de $(H8)$ resulta que

$$u_j' \rightarrow u' \text{ fraco-* em } L^\infty(0,T;D(S^{\alpha+\frac{3}{2}})) \hookrightarrow L^\infty(0,T;H),\ \forall T \in (0,\infty). \tag{1.169}$$

Ainda como consequência de (1.149), obtemos:

$$S^{\alpha+2}u_j \rightarrow \chi_7 \text{ fraco-* em } L^\infty(0,T;H),\ \forall T \in (0,\infty) \tag{1.170}$$

e

$$S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j' \rightarrow \chi_8 \text{ fraco-* em } L^\infty(0,T;H),\ \forall T \in (0,\infty). \tag{1.171}$$

De (1.168), (1.170) e sendo $S^{\alpha+2}$ um operador fechado, obtemos:

$$S^{\alpha+2}u_j \rightarrow S^{\alpha+2}u \text{ fraco-* em } L^\infty(0,T;H),\ \forall T \in (0,\infty). \tag{1.172}$$

Agora de (1.169), (1.171) e sendo $S^{\alpha+\frac{3}{2}}$ um operador fechado, obtemos:

$$S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j' \rightarrow S^{\alpha+\frac{3}{2}}u' \text{ fraco-* em } L^\infty(0,T;H),\ \forall T \in (0,\infty). \tag{1.173}$$

Como consequência de (1.172) resulta o seguinte:

$$\int_0^T (S^{\alpha+2}u_j(t), w(t))dt \rightarrow \int_0^T (S^{\alpha+2}u(t), w(t))dt,\ \forall w \in L^1(0,T;H). \tag{1.174}$$

Em particular a convergência (1.174) é válida para todo $w \in L^1(0,T;D(S^{\frac{1}{2}}))$. Fazendo $w(t) = v\theta'(t)$ em (1.174) com $v \in D(S^{\frac{1}{2}})$ e $\theta \in C^1([0,T]) \subset L^1(0,T)$, $\theta(0) = 0$, $\theta(T) = 1$, obtemos:

$$\int_0^T (S^{\alpha+2}u_j(t), v)\theta'(t)dt \rightarrow \int_0^T (S^{\alpha+2}u(t), v)\theta'(t)dt, \tag{1.175}$$

$\forall v \in D(S^{\frac{1}{2}})$, $\theta \in C^1([0,T])$ com $\theta(0) = 0$ e $\theta(T) = 1$.

Agora de (1.173) segue-se que

$$\int_0^T (S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t), w(t))dt \rightarrow \int_0^T (S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'(t), w(t))dt,\ \forall w \in L^1(0,T;H). \tag{1.176}$$

Fazendo em (1.176) $w(t) = S^{\frac{1}{2}} v\theta(t)$ com $v \in D(S^{\frac{1}{2}})$ e $\theta \in C^1([0,T]) \subset L^1(0,T)$, $\theta(0) = 0$, $\theta(T) = 1$, obtemos:

$$\int_0^T (S^{\alpha+\frac{3}{2}} u_j'(t), S^{\frac{1}{2}} v)\theta(t)dt \to \int_0^T (S^{\alpha+\frac{3}{2}} u'(t), S^{\frac{1}{2}} v)\theta(t)dt,$$

ou seja,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(S^{\alpha+\frac{3}{2}} u_j(t), S^{\frac{1}{2}} v)\theta(t)dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}(S^{\alpha+\frac{3}{2}} u(t), S^{\frac{1}{2}} v)\theta(t)dt,$$

ou ainda,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(S^{\alpha+2} u_j(t), v)\theta(t)dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}(S^{\alpha+2} u(t), v)\theta(t)dt, \tag{1.177}$$

$\forall v \in D(S^{\frac{1}{2}})$, $\theta \in C^1([0,T])$ com $\theta(0) = 0$ e $\theta(T) = 1$.

Sendo assim, resulta de (1.175) e (1.177) que

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\left[(S^{\alpha+2} u_j(t), v)\theta(t)\right] dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}\left[(S^{\alpha+2} u(t), v)\theta(t)\right] dt,$$

ou seja,

$$(S^{\alpha+2} u_j(T), v) \to (S^{\alpha+2} u(T), v),\ \forall v \in D(S^{\frac{1}{2}}),\ \forall T \in (0,\infty). \tag{1.178}$$

Como (1.178) é válido $\forall T \in (0,\infty)$ e $D(S^{\frac{1}{2}})$ é denso em H resulta que

$$(S^{\alpha+2} u_j(t), v) \to (S^{\alpha+2} u(t), v),\ \forall v \in H,\ \forall t \in (0,\infty)$$

o que acarreta na convergência

$$S^{\alpha+2} u_j(t) \to S^{\alpha+2} u(t) \text{ fraco em } H,\ \forall t \in [0,\infty[\,. \tag{1.179}$$

Agora de (1.149), da imersão $D(S^{\alpha+2}) \hookrightarrow W$, $(H8)$ e da equação em (P_j) obtemos que

$$(u_j'')_{j\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^2(0,T; D(S^{\alpha+\frac{1}{2}})) \hookrightarrow L^2(0,T;H) \tag{1.180}$$

o que acarreta na convergência

$$u_j'' \to u'' \text{ fraco em } L^2(0,T;H),\ \forall T \in (0,\infty). \tag{1.181}$$

Ainda de (1.180) segue-se que

$$S^{\alpha+\frac{1}{2}} u_j'' \to \chi_9 \text{ fraco em } L^2(0,T;H),\ \forall T \in (0,\infty). \tag{1.182}$$

Assim de (1.181), (1.182) e sendo $S^{\alpha+\frac{1}{2}}$ um operador fechado concluimos que

$$S^{\alpha+\frac{1}{2}}u_j'' \to S^{\alpha+\frac{1}{2}}u'' \text{ fraco em } L^2(0,T;H),\ \forall T \in (0,\infty). \tag{1.183}$$

De (1.173) podemos concluir o seguinte:

$$\int_0^T (S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t),v)\theta'(t)dt \to \int_0^T (S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'(t),v)\theta'(t)dt,\ \forall T \in (0,\infty), \tag{1.184}$$

onde $v \in D(S)$ e $\theta \in C^1([0,T]) \subset L^1(0,T)$, com $\theta(0)=0$ e $\theta(T)=1$.

Agora de (1.183) segue-se que

$$\int_0^T (S^{\alpha+\frac{1}{2}}u_j''(t),w(t))dt \to \int_0^T (S^{\alpha+\frac{1}{2}}u''(t),w(t))dt,\ \forall w \in L^2(0,T;H). \tag{1.185}$$

Fazendo em (1.185) $w(t) = Sv\theta(t)$ com $v \in D(S)$ e $\theta \in C^1([0,T]) \subset L^2(0,T)$, $\theta(0)=0$, $\theta(T)=1$, obtemos:

$$\int_0^T (S^{\alpha+\frac{1}{2}}u_j''(t),Sv)\theta(t)dt \to \int_0^T (S^{\alpha+\frac{1}{2}}u''(t),Sv)\theta(t)dt,$$

ou seja,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(S^{\alpha+\frac{1}{2}}u_j'(t),Sv)\theta(t)dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}(S^{\alpha+\frac{1}{2}}u'(t),Sv)\theta(t)dt,$$

ou ainda,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t),v)\theta(t)dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}(S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'(t),v)\theta(t)dt, \tag{1.186}$$

$\forall v \in D(S)$, $\theta \in C^1([0,T])$ com $\theta(0)=0$ e $\theta(T)=1$.

Portanto de (1.184) e (1.186) segue-se que

$$\int_0^T \frac{d}{dt}[(S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t),v)\theta(t)]dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}[(S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'(t),v)\theta(t)]dt,$$

ou seja,

$$(S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(T),v) \to (S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'(T),v),\ \forall v \in D(S),\ \forall T \in (0,\infty). \tag{1.187}$$

Como (1.187) é válido $\forall T \in (0,\infty)$ e $D(S)$ é denso em H resulta que

$$(S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t),v) \to (S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'(t),v),\ \forall v \in H,\ \forall t \in (0,\infty)$$

o que acarreta na convergência

$$S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t) \rightarrow S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'(t) \text{ fraco em } H,\ \forall t \in [0,\infty[\,. \tag{1.188}$$

A seguir obteremos a convergência

$$M(\|u_j\|_W^\beta) \rightarrow M(\|u\|_W^\beta) \text{ em } C^0\left([0,T]\right),\ \forall T \in [0,\infty[\,. \tag{1.189}$$

De fato, comecemos considerando a sequência de funções $h_j(t) = \|u_j(t)\|_W^\beta$. Assim de (1.149) e da imersão $D(S^{\alpha+2}) \hookrightarrow W$ resulta que

$$\|u_j(t)\|_W^\beta \leq C,\ \forall t \in [0,T],\ 0 < T < \infty, \tag{1.190}$$

onde C denota uma constante genérica que não depende de j e t.

Agora de (1.149), da imersão $D(S^{\alpha+\frac{3}{2}}) \hookrightarrow W$ e do Teorema do Valor Médio resulta que

$$\begin{aligned}&\left|\|u_j(t_2)\|_W^\beta - \|u_j(t_1)\|_W^\beta\right| \leq \beta s^{\beta-1}\left\|u_j(t_2) - u_j(t_1)\right\|_W \leq \\ &\beta s^{\beta-1}\int_{t_1}^{t_2}\left\|u_j'(t)\right\|_W dt \leq C\left|t_2 - t_1\right|,\ 0 \leq t_1 < t_2 \leq T < \infty,\end{aligned} \tag{1.191}$$

onde C denota uma constante genérica que não depende de j e t. Logo de (1.190), (1.191) e do Teorema de Arzela-Áscoli para funções reais segue-se que existe uma função $h \in C^0\left([0,T]\right)$ tal que

$$\|u_j\|_W^\beta \rightarrow h \text{ em } C^0\left([0,T]\right)$$

o que acarreta na convergência

$$M(\|u_j\|_W^\beta) \rightarrow M(h) \text{ em } C^0\left([0,T]\right),\ \forall T \in [0,\infty[\,. \tag{1.192}$$

Utilizando (1.192) e o mesmo raciocínio adotado para se obter (1.100) (veja o Teorema 1.1 a partir da segunda etapa) obtemos a convergência (1.189).

Notemos agora que da convergência (1.189) obtemos a convergência

$$M(\|u_j(t)\|_W^\beta) \rightarrow M(\|u(t)\|_W^\beta) \text{ em } [0,T],\ 0 < T < \infty. \tag{1.193}$$

Portanto, aplicando o lim inf em (1.167) (com $t > 0$ fixado) e utilizando as convergências (1.179), (1.188) e (1.193), obtemos a desigualdade (1.135).

Finalmente para concluir a prova do Teorema 1.3 falta apenas mostrar que o limite u de u_j é solução do Problema $(P2)$ e que u está na classe (1.111). De fato, vejamos isso:

Segue-se de (1.149) e da imersão $D(S^{\alpha+2}) \hookrightarrow D(S)$ que

$$Su_j \to \chi_{10} \text{ fraco-* em } L^\infty(0,T;H). \tag{1.194}$$

Assim de (1.168), (1.194) e do fato de S ser um operador fechado resulta que

$$Su_j \to Su \text{ fraco-* em } L^\infty(0,T;H). \tag{1.195}$$

Agora de (1.189), (1.195) e usando a sequência diagonal obtemos que

$$M(\|u_j\|_W^\beta)Su_j \to M(\|u\|_W^\beta)Su \text{ fraco-* em } L^\infty_{loc}(0,\infty;H). \tag{1.196}$$

De fato, das convergências (1.189), (1.195) segue-se que

$$M(\|u_j\|_W^\beta)Su_j \to M(\|u\|_W^\beta)Su \text{ fraco-* em } L^\infty(0,T;H). \tag{1.197}$$

Seja $0 < T < \infty$. Devido a convergência (1.197) é possível considerar uma subsequência $(M(\left\|u_{j(1)}\right\|_W^\beta)Su_{j(1)})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(M(\|u_j\|_W^\beta)Su_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que

$$M(\left\|u_{j(1)}\right\|_W^\beta)Su_{j(1)} \to M(\|u\|_W^\beta)Su \text{ fraco-* em } L^\infty(0,1;H).$$

Em seguida consideramos uma subsequência $(M(\left\|u_{j(2)}\right\|_W^\beta)Su_{j(2)})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(M(\left\|u_{j(1)}\right\|_W^\beta)Su_{j(1)})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que

$$M(\left\|u_{j(2)}\right\|_W^\beta)Su_{j(2)} \to M(\|u\|_W^\beta)Su \text{ fraco-* em } L^\infty(0,2;H).$$

Assim, procedendo do mesmo modo, obtemos uma subsequência $(M(\left\|u_{j(n)}\right\|_W^\beta)Su_{j(n)})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(M(\left\|u_{j(n-1)}\right\|_W^\beta)Su_{j(n-1)})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que

$$M(\left\|u_{j(n)}\right\|_W^\beta)Su_{j(n)} \to M(\|u\|_W^\beta)Su \text{ fraco-* em } L^\infty(0,n;H),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Agora considerando a sequência diagonal $(M(\left\|u_{j(j)}\right\|_W^\beta)Su_{j(j)})_{j\in\mathbb{N}}$, que é uma subsequência de $(M(\left\|u_{j(n)}\right\|_W^\beta)Su_{j(n)})_{j\in\mathbb{N}}$, e denotando $(M(\left\|u_{j(j)}\right\|_W^\beta)Su_{j(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ por $(M(\|u_j\|_W^\beta)Su_j)_{j\in\mathbb{N}}$, obtemos a convergência (1.196).

Notemos agora que é possível encontrar a convergência (1.195) em $L^\infty(0,\infty;H)$ (consequência de (1.149)). Assim, desse fato, da imersão $D(S^{\alpha+2}) \hookrightarrow W$ e de $(H8)$, obtemos:

$$M(\|u_j\|_W^\beta)Su_j \to \chi_{11} \text{ fraco-* em } L^\infty(0,\infty;H). \tag{1.198}$$

Logo de (1.196) e (1.198) segue-se que

$$M(\|u_j\|_W^\beta)Su_j \to M(\|u\|_W^\beta)Su \text{ fraco-* em } L^\infty(0,\infty;H). \tag{1.199}$$

Novamente de (1.149) , da imersão $D(S^{\alpha+2}) \hookrightarrow W$, $(H8)$ e da imersão $D(S^{\alpha+\frac{3}{2}}) \hookrightarrow D(S)$ resulta que

$$Su_j' \to \chi_{12} \text{ fraco-* em } L^\infty(0,\infty;H). \tag{1.200}$$

Notando que a convergência (1.169) pode ser encontrada em $L^\infty(0,\infty;H)$, segue-se de (1.200) e do fato de S ser um operador fechado que

$$\delta Su_j' \to \delta Su' \text{ fraco-* em } L^\infty(0,\infty;H). \tag{1.201}$$

Agora de (1.149) e da equação de (P_j) resulta que $(u_j'')_{j\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(0,\infty;H)$ o que acarreta na convergência

$$u_j'' \to u'' \text{ fraco-* em } L^\infty(0,\infty;H). \tag{1.202}$$

Finalmente passando o limite na equação de (P_j) com $j \to +\infty$ e usando as convergências (1.199) , (1.201) e (1.202) , obtemos:

$$u'' + M(\|u\|_W^\beta)Su + \delta Su' = 0 \text{ em } L^\infty(0,\infty;H).$$

Logo, desta última igualdade, (1.138) e de (1.149) segue-se que u é solução do Problema $(P2)$ com u na classe (1.111) . Com isso, acabamos de concluir a prova do Teorema 1.3.■

A prova do Corolário 1.1 é uma consequência imediata de (1.135) , (1.132) e da definição da energia $E(t)$ dada em (1.137) .■

Capítulo 2

Solução do Problema (P')

Neste capítulo analisaremos as soluções locais e globais assim como o decaimento da energia associada a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$(P') \qquad \left| \begin{array}{l} Bu''(t) + M(\|u(t)\|_W^\beta)Au(t) + (1 + k(t)\,\|u(t)\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta)Au'(t) = 0, \;\; em\; V', \;\; t > 0 \\ u\,(0) = u^0, \;\; u'\,(0) = u^1, \end{array} \right.$$

onde V representa um espaço de Hilbert separável real com dual V' e W um espaço de Banach real com dual W'. Aqui S denota o operador definido em (1.1) (veja Capítulo 1).

Aqui, como no Capítulo 1, assumiremos as hipóteses $(H2)$, $(H3)$ (ver pág 6). Para o que se pretende fazer também assumiremos que

$(H9)$ $\qquad D(S^{\alpha+1})$ está continuamente imerso em W

e que

$(H10)$ $\qquad k \in L^\infty_{loc}(0,\infty)$, $\dfrac{1}{k} \in L^1(0,\infty)$ e $k(t) > 0$, $\forall t \geq 0$.

Consideremos também uma função $M(\xi)$ satisfazendo

$(H11)$ $\qquad M(\xi) = m_0 + m_1\xi,$

onde m_0 e m_1 são números reais com $m_0 > 0$ e $m_1 \geq 0$.

Observação 2.1 *Do mesmo modo como no Capítulo 1 (veja Observação 1.3) temos que as* *equações*

$$Bu''(t) + M(\|u(t)\|_W^\beta)Au(t) + (1 + k(t)\,\|u(t)\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta)Au'(t) = 0, \text{ em } V', \ t > 0$$

e

$$u''(t) + M(\|u(t)\|_W^\beta)Su(t) + (1 + k(t)\,\|u(t)\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta)Su'(t) = 0, \text{ em } D(S^{\frac{3}{2}}), \ t > 0$$

são equivalentes. Sendo assim, passaremos a trabalhar com a segunda equação ao invés da primeira.

2.1 Solução Local

Do mesmo modo como no Capítulo 1 será utilizado aqui o método das aproximações sucessivas assim como o Teorema de Arzela-Áscoli para funções reais e as Proposições 1.1 e 1.2.

Portanto, levando-se em conta as considerações anteriores, obtemos o seguinte teorema de solução local:

Teorema 2.1 *Suponhamos as hipóteses* $(H9)$-$(H11)$. *Consideremos* α, β *números reais com* $\alpha \geq 0$, $\beta > 1$ *e*

$$u^0 \in D(S^{\alpha+2}), \ u^1 \in D(S^{\alpha+\frac{3}{2}}). \tag{2.1}$$

Então, existem $T_1 \in \mathbb{R}$ *com* $T_1 > 0$ *e uma função* u *na classe*

$$\left| \begin{array}{l} u \in L^\infty(0, T_1; D(S^{\alpha+2})) \\ u' \in L^\infty(0, T_1; D(S^{\alpha+\frac{3}{2}})) \cap L^2(0, T_1; D(S^{\alpha+2})) \\ u'' \in L^\infty(0, T_1; D(S^{\alpha+\frac{1}{2}})) \cap L^2(0, T_1; D(S^{\alpha+1})) \end{array} \right. \tag{2.2}$$

satisfazendo

$$(P3) \qquad \left| \begin{array}{l} u'' + M(\|u\|_W^\beta)Su + (1 + k\,\|u\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta)Su' = 0 \\ u\,(0) = u^0, \ u'\,(0) = u^1, \end{array} \right.$$

onde a equação em $(P3)$ *é válida em* $L^\infty(0, T_1; D(S^{\alpha+\frac{1}{2}})) \cap L^2(0, T_1; D(S^{\alpha+1}))$.

Observação 2.2 *Diferentemente do Teorema 1.1 temos considerado no Teorema 2.1 que* β *é estritamente maior do que 1. Isto se deve ao fato que, nas condições assumidas acima, existe a possibilidade de* $u(t_1) = 0$ *para algum* $t_1 \in [0, T_1]$*. Dessa forma não seria mais possível utilizarmos aqui a Proposição 1.2. Perceba ainda que no Teorema 1.1 usamos a hipótese* $u^0 \neq 0$ *para assegurar que* $\|u(t)\| > 0$, $\forall t \geq 0$, *viabilizando, assim, a utilização da Proposição 1.2.*

No que segue introduziremos $T_1 > 0$. Sejam u^0 e u^1 satisfazendo a hipótese (2.1). Consideremos um número real $L^2 > 0$ tal que

$$\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u^1\right|^2 + M(\left\|u^0\right\|_W^\beta)\left|S^{\alpha+2}u^0\right|^2 < \frac{L^2}{2}. \tag{2.3}$$

Consideremos também a constante

$$N_7 = \frac{\beta m_1 (k_1 L)^\beta}{\gamma_0^{\beta-\frac{1}{2}} m_0^{\frac{\beta-1}{2}}}, \tag{2.4}$$

onde k_1, γ_0, L, m_0 e m_1 foram definidos em (1.44), (1.47), (2.3) e $(H11)$, respectivamente.

Definimos

$$T_1 = \min\left\{1,\ \frac{m_0}{N_7}\ln 2,\ \frac{m_0}{2N_7}\right\}. \tag{2.5}$$

Demonstração (Teorema 2.1):

Comecemos com um comentário a cerca da prova do Teorema 2.1.

Do mesmo modo como no Capítulo 1 será fundamental aqui as Proposições 1.1 e 1.2. Assim, utilizando estes resultados e o método das aproximações sucessivas determinaremos a solução u_l do problema

$$(P_l) \qquad \left|\begin{array}{l} u_l'' + M(\|u_l\|_W^\beta)Su_l + (1 + k\,\|u_l\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta)Su_l' = 0 \\ u_l(0) = u_l^0,\ u_l'(0) = u_l^1, \end{array}\right.$$

onde a equação em (P_l) é válida em $L^\infty(0, T_1; D(S^{\alpha+\frac{1}{2}})) \cap L^2(0, T_1; D(S^{\alpha+1}))$ e $(u_l^0) \subset D(S^{2\alpha+\frac{7}{2}})$ e $(u_l^1) \subset D(S^{2\alpha+3})$ são funções que aproximam $u^0 \in D(S^{\alpha+2})$ e $u^1 \in D(S^{\alpha+\frac{3}{2}})$, respectivamente. Os limites dos termos não lineares serão também obtidos pelo Teorema de Arzela-Áscoli para funções reais. Finalmente com as estimativas obtidas para a solução u_l passamos o limite na equação de (P_l).

Sendo assim comecemos a prova. Considere $\eta > 0$ um número real tal que

$$\left[\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u^1\right|^2 + \eta\right] + \left[M(\left\|u^0\right\|_W^\beta) + \eta\right]\left[\left|S^{\alpha+2}u^0\right|^2 + \eta\right] < \frac{L^2}{2}. \tag{2.6}$$

A existência de η é garantida por (2.3).

Sejam (u_l^0) e (u_l^1) duas sequências de vetores de $D(S^{2\alpha+\frac{7}{2}})$ e $D(S^{2\alpha+3})$, respectivamente, tais que

$$u_l^0 \to u^0 \text{ em } D(S^{\alpha+2}) \text{ e } u_l^1 \to u^1 \text{ em } D(S^{\alpha+\frac{3}{2}}). \tag{2.7}$$

A primeira convergência de (2.7) implica

$$M(\left\|u_l^0\right\|_W^\beta) \to M(\left\|u^0\right\|_W^\beta). \tag{2.8}$$

Dividiremos a prova do Teorema 2.1 em duas etapas.

Primeira Etapa: Existência de Solução de (P_l).

Com as convergências (2.7) e (2.8) resulta que existe $l_0(\eta)$ tal que para $l \geq l_0(\eta)$, obtemos:

$$\left| \begin{array}{l} |S^{\alpha+2}u_l^0|^2 < |S^{\alpha+2}u^0|^2 + \eta, \ \left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_l^1\right|^2 < \left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u^1\right|^2 + \eta \\ M(\|u_l^0\|_W^\beta) < M(\|u^0\|_W^\beta) + \eta \end{array} \right. \tag{2.9}$$

Agora combinando as desigualdades (2.6) e (2.9), obtemos:

$$\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_l^1\right|^2 + M(\left\|u_l^0\right\|_W^\beta)\left|S^{\alpha+2}u_l^0\right|^2 < \frac{L^2}{2}. \tag{2.10}$$

Consideremos $l \geq l_0(\eta)$. Seja $\mathcal{G}$ o conjunto das funções v satisfazendo:

$$v \in L^\infty(0,T_1;D(S^{2\alpha+\frac{7}{2}})), \ v' \in L^\infty(0,T_1;D(S^{2\alpha+3})), \ v'' \in L^\infty(0,T_1;D(S^{2\alpha+2})) \tag{2.11}$$

$$\sup_{0\leq t\leq T_1}\left\{\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}v'(t)\right|^2 + m_0\left|S^{\alpha+2}v(t)\right|^2 + 2\int_0^t \left|S^{\alpha+2}v'(s)\right|^2 ds\right\} \leq L^2. \tag{2.12}$$

Em ordem para aplicarmos o método das aproximações sucessivas necessitaremos do seguinte Lema:

Lema 2.1 *Se v é uma função pertencendo a $\mathcal{G}$, então*

$$\left|\frac{d}{dt}\left\{M(\|v(t)\|_W^\beta)\right\}\right| \leq N_7, \ \forall t \in [0,T_1], \tag{2.13}$$

onde N_7 foi definido em (2.4).

Demonstração:

Como consequência da Proposição 1.2, obtemos:

$$\left|\frac{d}{dt}\left\{M(\|v(t)\|_W^\beta)\right\}\right| \leq \beta m_1 \|v(t)\|_W^{\beta-1} \|v'(t)\|_W . \tag{2.14}$$

De (1.44) , (1.47) e (2.12) resulta que

$$\|v(t)\|_W^{\beta-1} \leq k_1^{\beta-1} \|v(t)\|_{D(S^{\alpha+1})}^{\beta-1} \leq (\frac{k_1}{\gamma_0})^{\beta-1} \left|S^{\alpha+2}v(t)\right|^{\beta-1} \leq (\frac{k_1}{\gamma_0})^{\beta-1} \frac{L^{\beta-1}}{m_0^{\frac{\beta-1}{2}}}. \tag{2.15}$$

Ainda pelos mesmos argumentos utilizados acima segue-se que

$$\|v'(t)\|_W \leq k_1 \|v'(t)\|_{D(S^{\alpha+1})} \leq \frac{k_1}{\sqrt{\gamma_0}} \left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}v'(t)\right| \leq \frac{k_1 L}{\sqrt{\gamma_0}}. \tag{2.16}$$

Finalmente substituindo (2.15) e (2.16) em (2.14) , obtemos:

$$\left|\frac{d}{dt}\left\{M(\|v(t)\|_W^\beta)\right\}\right| \leq \beta m_1 (\frac{k_1}{\gamma_0})^{\beta-1} \frac{L^{\beta-1}}{m_0^{\frac{\beta-1}{2}}} \frac{k_1 L}{\sqrt{\gamma_0}} = N_7,\ \forall t \in [0, T_1].\blacksquare$$

Observação 2.3 *Notemos que a desigualdade* (2.13) *continua válida mesmo se* $v(t_1) = 0$ *para algum* $t_1 \in [0, T_1]$. *De fato, isso decorre da hipótese* $\beta > 1$ *e da Observação 1.7 que implicam em* $\left|\frac{d}{dt}\left\{M(\|v(t_1)\|_W^\beta)\right\}\right| = 0 < N_7$.

No que segue aplicaremos o método das aproximações sucessivas. Consideremos o seguinte problema:

$$(P_{l,1}) \qquad \left| \begin{array}{l} u''_{l,1} + M(\|u_l^0\|_W^\beta) S u_{l,1} + (1 + k \|u_l^0\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta) S u'_{l,1} = 0 \\ u_{l,1}(0) = u_l^0,\ u'_{l,1}(0) = u_l^1, \end{array} \right.$$

onde a equação em $(P_{l,1})$ é válida em $L^\infty(0, T_1; D(S^{\alpha+\frac{1}{2}})) \cap L^2(0, T_1; D(S^{\alpha+1}))$.

Vamos mostrar que $u_{l,1} \in \mathcal{G}$. De fato, como $u_l^0 \in D(S^{2\alpha+\frac{7}{2}})$ e $u_l^1 \in D(S^{2\alpha+3})$ resulta da Proposição 1.1 (considerando $\delta = \theta = 1$) que $(P_{l,1})$ possui uma única solução $u_{l,1}$ pertencendo a classe (2.11) .

Agora tomando o produto escalar de H em ambos os membros da equação de $(P_{l,1})$ com $2S^{2\alpha+3}u'_{l,1}$, obtemos:

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'_{l,1}(t)\right|^2 + M(\left\|u_l^0\right\|_W^\beta)\frac{d}{dt}\left|S^{\alpha+2}u_{l,1}(t)\right|^2 + \\ 2\left|S^{\alpha+2}u'_{l,1}(t)\right|^2 + 2k(t)\left\|u_l^0\right\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta \left|S^{\alpha+2}u'_{l,1}(t)\right|^2 = 0. \end{gathered} \tag{2.17}$$

Integrando (2.17) de 0 a $t \leq T_1$, utilizando (2.10) e o fato que $M(\xi) \geq m_0$, $\forall \xi \geq 0$, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'_{l,1}(t)\right|^2 + m_0\left|S^{\alpha+2}u_{l,1}(t)\right|^2 + 2\int_0^t \left|S^{\alpha+2}u'_{l,1}(s)\right|^2 ds + \\
&2\left\|u_l^0\right\|^\beta_{D(S^{\alpha+2})}\int_0^t k(s)\left|S^{\alpha+2}u'_{l,1}(s)\right|^2 ds = \\
&\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_l^1\right|^2 + M(\left\|u_l^0\right\|^\beta_W)\left|S^{\alpha+2}u_l^0\right|^2 < \frac{L^2}{2} < L^2,
\end{aligned}$$

$\forall t \in [0, T_1]$. Logo da desigualdade acima segue-se que $u_{l,1}$ satisfaz a (2.12). Sendo assim, acabamos de concluir que $u_{l,1} \in \mathcal{G}$.

A seguir definiremos a sequência $(u_{l,\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$, sendo $u_{l,\nu}$ a solução do problema

$$(P_{l,\nu}) \qquad \left| \begin{array}{l} u''_{l,\nu} + M(\|u_{l,\nu-1}\|^\beta_W)Su_{l,\nu} + (1 + k\,\|u_{l,\nu-1}\|^\beta_{D(S^{\alpha+2})})Su'_{l,\nu} = 0 \\ u_{l,\nu}(0) = u_l^0,\ u'_{l,\nu}(0) = u_l^1, \end{array} \right.$$

onde a equação em $(P_{l,\nu})$ é válida em $L^\infty(0, T_1; D(S^{\alpha+\frac{1}{2}})) \cap L^2(0, T_1; D(S^{\alpha+1}))$.

A seguir mostraremos que $u_{l,\nu} \in \mathcal{G}$. De fato, vejamos isso usando indução. Sendo assim, suponhamos que $u_{l,\nu-1} \in \mathcal{G}$. A Proposição 1.1 (considerando $\delta = \theta = 1$) nos garante que $u_{l,\nu}$ pertence a classe (2.11), pois, $u_l^0 \in D(S^{2\alpha+\frac{7}{2}})$, $u_l^1 \in D(S^{2\alpha+3})$ e $\mu_1 = M(\|u_{l,\nu-1}\|^\beta_W)$ e $\mu_2 = k\,\|u_{l,\nu-1}\|^\beta_{D(S^{\alpha+2})}$ satisfazem a $(H5)$ e $(H6)$, respectivamente.

Agora tomando o produto escalar de H em ambos os membros da equação de $(P_{l,\nu})$ com $2S^{2\alpha+3}u'_{l,\nu}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'_{l,\nu}(t)\right|^2 + \frac{d}{dt}\left[M(\|u_{l,\nu-1}(t)\|^\beta_W)\left|S^{\alpha+2}u_{l,\nu}(t)\right|^2\right] + 2\left|S^{\alpha+2}u'_{l,\nu}(t)\right|^2 + \\
&2k(t)\,\|u_{l,\nu-1}(t)\|^\beta_{D(S^{\alpha+2})}\left|S^{\alpha+2}u'_{l,\nu}(t)\right|^2 = \left[\frac{d}{dt}\left\{M(\|u_{l,\nu-1}(t)\|^\beta_W)\right\}\right]\left|S^{\alpha+2}u_{l,\nu}(t)\right|^2.
\end{aligned}$$

Integrando a igualdade acima de 0 a $t \leq T_1$, utilizando (2.10), o Lema 2.1 (veja que

$u_{l,\nu-1} \in \mathcal{G}$) e o fato que $M(\xi) \geq m_0$, $\forall \xi \geq 0$, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}} u_{l,\nu}'(t)\right|^2 + m_0 \left|S^{\alpha+2} u_{l,\nu}(t)\right|^2 + 2\int_0^t \left|S^{\alpha+2} u_{l,\nu}'(s)\right|^2 ds + \\
&2\int_0^t k(s) \left\|u_{l,\nu-1}(s)\right\|_{D(S^{\alpha+2})}^{\beta} \left|S^{\alpha+2} u_{l,\nu}'(s)\right|^2 ds \leq \\
&\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}} u_l^1\right|^2 + M(\left\|u_l^0\right\|_W^{\beta}) \left|S^{\alpha+2} u_l^0\right|^2 + \frac{N_7}{m_0}\int_0^t m_0 \left|S^{\alpha+2} u_{l,\nu}(s)\right|^2 ds \leq \\
&\frac{L^2}{2} + \frac{N_7}{m_0}\int_0^t m_0 \left|S^{\alpha+2} u_{l,\nu}(s)\right|^2 ds.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Portanto de (2.18) e da desigualdade de Gronwall resulta que

$$m_0 \left|S^{\alpha+2} u_{l,\nu}(t)\right|^2 \leq \frac{L^2}{2} \exp(\frac{N_7}{m_0} T_1).$$

Como $0 < T_1 \leq \dfrac{m_0}{N_7} \ln 2$ segue-se desta última desigualdade que

$$m_0 \left|S^{\alpha+2} u_{l,\nu}(t)\right|^2 \leq L^2. \tag{2.19}$$

Substituindo (2.19) em (2.18) e lembrando que $0 < T_1 \leq \dfrac{m_0}{2N_7}$ obtemos o seguinte:

$$\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}} u_{l,\nu}'(t)\right|^2 + m_0 \left|S^{\alpha+2} u_{l,\nu}(t)\right|^2 + 2\int_0^t \left|S^{\alpha+2} u_{l,\nu}'(s)\right|^2 ds \leq \frac{L^2}{2} + \frac{N_7}{m_0} L^2 T_1 \leq L^2.$$

Assim, desta última desigualdade resulta que $u_{l,\nu}$ satisfaz a (2.12). Portanto, acabamos de concluir que $u_{l,\nu} \in \mathcal{G}$.

Consequentemente da estimativa (2.12) obtemos uma subsequência de $(u_{l,\nu})$, ainda denotada por $(u_{l,\nu})$, tal que

$$\left|\begin{array}{l}
u_{l,\nu} \to u_l \text{ fraco-* em } L^\infty(0, T_1; D(S^{\alpha+2})) \\
u_{l,\nu}' \to u_l' \text{ fraco-* em } L^\infty(0, T_1; D(S^{\alpha+\frac{3}{2}})) \\
u_{l,\nu}' \to u_l' \text{ fraco em } L^2(0, T_1; D(S^{\alpha+2})).
\end{array}\right. \tag{2.20}$$

No que segue provaremos as convergências

$$\left\|u_{l,\nu-1}\right\|_{D(S^{\alpha+2})}^{\beta} \to \left\|u_l\right\|_{D(S^{\alpha+2})}^{\beta} \text{ em } C^0([0, T_1]) \tag{2.21}$$

e

$$M(\|u_{l,\nu-1}\|_W^\beta) \to M(\|u_l\|_W^\beta) \text{ em } C^0\left([0,T_1]\right). \tag{2.22}$$

Comecemos considerando a sequência de funções $(\psi_{l,\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$, onde $\psi_{l,\nu}(t) = \|u_{l,\nu-1}(t)\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta$. Como $u_{l,\nu-1} \in \mathcal{G}$ resulta de (2.12) que

$$\|u_{l,\nu-1}(t)\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta \le (\frac{L}{\sqrt{m_0}})^\beta,\ \forall t \in [0,T_1],\ \nu \ge 2. \tag{2.23}$$

Agora do Teorema do Valor Médio, da desigualdade de Schwarz e de (2.12), obtemos:

$$\left|\|u_{l,\nu-1}(t_2)\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta - \|u_{l,\nu-1}(t_1)\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta\right| \le \beta s^{\beta-1}\left\|u_{l,\nu-1}(t_2) - u_{l,\nu-1}(t_1)\right\|_{D(S^{\alpha+2})} \le$$

$$\beta s^{\beta-1}\int_{t_1}^{t_2}\left\|u'_{l,\nu-1}(t)\right\|_{D(S^{\alpha+2})} dt = \beta s^{\beta-1}\int_{t_1}^{t_2}\left|S^{\alpha+2}u'_{l,\nu-1}(t)\right| dt \le$$

$$\beta s^{\beta-1}(\int_{t_1}^{t_2}\left|S^{\alpha+2}u'_{l,\nu-1}(t)\right|^2 dt)^{\frac{1}{2}}(\int_{t_1}^{t_2} dt)^{\frac{1}{2}} \le \beta(\frac{2L}{\sqrt{m_0}})^{\beta-1}\frac{L}{\sqrt{2}}\left|t_2 - t_1\right|^{\frac{1}{2}},$$

$\forall \nu \ge 2,\ 0 \le t_1 < t_2 \le T_1$, onde $0 \le \|u_{l,\nu-1}(t_1)\|_{D(S^{\alpha+2})} \le s \le \|u_{l,\nu-1}(t_2)\|_{D(S^{\alpha+2})} \le \|u_{l,\nu-1}(t_2)\|_{D(S^{\alpha+2})} + \|u_{l,\nu-1}(t_1)\|_{D(S^{\alpha+2})} \le \dfrac{2L}{\sqrt{m_0}}$. Logo,

$$\left|\|u_{l,\nu-1}(t_2)\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta - \|u_{l,\nu-1}(t_1)\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta\right| \le \beta(\frac{2L}{\sqrt{m_0}})^{\beta-1}\frac{L}{\sqrt{2}}\left|t_2 - t_1\right|^{\frac{1}{2}}, \tag{2.24}$$

$\forall \nu \ge 2,\ 0 \le t_1 < t_2 \le T_1$.

Portanto de (2.23), (2.24) e do Teorema de Arzela-Áscoli para funções reais segue-se que existe $\psi_l \in C^0\left([0,T_1]\right)$ tal que

$$\|u_{l,\nu-1}\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta \to \psi_l \text{ em } C^0\left([0,T_1]\right). \tag{2.25}$$

Agora consideremos a sequência de funções $(\varphi_{l,\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$, onde $\varphi_{l,\nu}(t) = \|u_{l,\nu-1}(t)\|_W^\beta$. Segue-se de (1.44), (1.47) e (2.12) que

$$\|u_{l,\nu-1}(t)\|_W^\beta \le (\frac{k_1 L}{\gamma_0\sqrt{m_0}})^\beta,\ \forall t \in [0,T_1],\ \nu \ge 2. \tag{2.26}$$

Usando agora o Teorema do Valor Médio, (1.44), (1.47) e (2.12), obtemos:

$$\left|\|u_{l,\nu-1}(t_2)\|_W^\beta - \|u_{l,\nu-1}(t_1)\|_W^\beta\right| \le \beta s^{\beta-1}\left\|u_{l,\nu-1}(t_2) - u_{l,\nu-1}(t_1)\right\|_W \le$$

$$\beta s^{\beta-1}\int_{t_1}^{t_2}\left\|u'_{l,\nu-1}(t)\right\|_W dt \le \frac{\beta 2^{\beta-1}(k_1 L)^\beta}{\gamma_0^{(\beta-\frac{1}{2})} m_0^{\frac{\beta-1}{2}}}\left|t_2 - t_1\right|,\ \forall \nu \ge 2,\ 0 \le t_1 < t_2 \le T_1,$$

onde $0 \leq \|u_{l,\nu-1}(t_1)\|_W \leq s \leq \|u_{l,\nu-1}(t_2)\|_W \leq \|u_{l,\nu-1}(t_2)\|_W + \|u_{l,\nu-1}(t_1)\|_W \leq \dfrac{2k_1L}{\gamma_0\sqrt{m_0}}$.
Logo,

$$\left|\|u_{l,\nu-1}(t_2)\|_W^\beta - \|u_{l,\nu-1}(t_1)\|_W^\beta\right| \leq \frac{\beta 2^{\beta-1}(k_1L)^\beta}{\gamma_0^{(\beta-\frac{1}{2})} m_0^{\frac{\beta-1}{2}}} |t_2 - t_1|, \tag{2.27}$$

$\forall \nu \geq 2$, $0 \leq t_1 < t_2 \leq T_1$.

Portanto de (2.26), (2.27) e do Teorema de Arzela-Áscoli para funções reais segue-se que existe $\varphi_l \in C^0([0,T_1])$ tal que

$$\|u_{l,\nu-1}\|_W^\beta \rightarrow \varphi_l \text{ em } C^0([0,T_1]). \tag{2.28}$$

Assim de (2.28) e $(H11)$ resulta que

$$M(\|u_{l,\nu-1}\|_W^\beta) \rightarrow M(\varphi_l) \text{ em } C^0([0,T_1]). \tag{2.29}$$

A seguir provaremos que $\psi_l = \|u_l\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta$ e $M(\varphi_l) = M(\|u_l\|_W^\beta)$. Para isso, procederemos como segue: Sejam $u_{l,\nu}$ e $u_{l,\sigma}$ duas soluções dos problemas $(P_{l,\nu})$ e $(P_{l,\sigma})$, respectivamente. Consideremos $w_{\nu\sigma} = u_{l,\nu} - u_{l,\sigma}$. Assim, $w_{\nu\sigma}$ é a solução do problema

$$(P_{l,\nu\sigma}) \quad \left| \begin{array}{l} w''_{\nu\sigma} + M(\|u_{l,\nu-1}\|_W^\beta)Sw_{\nu\sigma} + Sw'_{\nu\sigma} + k\|u_{l,\nu-1}\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta Sw'_{\nu\sigma} = \\ \left[M(\|u_{l,\sigma-1}\|_W^\beta) - M(\|u_{l,\nu-1}\|_W^\beta)\right] Su_{l,\sigma} + \\ k\left[\|u_{l,\sigma-1}\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta - \|u_{l,\nu-1}\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta\right] Su'_{l,\sigma} \\ w_{\nu\sigma}(0) = 0,\ w'_{\nu\sigma}(0) = 0. \end{array} \right.$$

Tomando o produto escalar de H em ambos os membros da equação de $(P_{l,\nu\sigma})$ com $2S^{2\alpha+3}w'_{\nu\sigma}$, obtemos:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}w'_{\nu\sigma}(t)\right|^2 + \frac{d}{dt}\left[M(\|u_{l,\nu-1}(t)\|_W^\beta)\left|S^{\alpha+2}w_{\nu\sigma}(t)\right|^2\right] + 2\left|S^{\alpha+2}w'_{\nu\sigma}(t)\right|^2 + \\ &2k(t)\|u_{l,\nu-1}(t)\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta \left|S^{\alpha+2}w'_{\nu\sigma}(t)\right|^2 = \frac{d}{dt}\left\{M(\|u_{l,\nu-1}(t)\|_W^\beta)\right\}\left|S^{\alpha+2}w_{\nu\sigma}(t)\right|^2 + \\ &2\left[M(\|u_{l,\sigma-1}(t)\|_W^\beta) - M(\|u_{l,\nu-1}(t)\|_W^\beta)\right](S^{\alpha+2}u_{l,\sigma}(t), S^{\alpha+2}w'_{\nu\sigma}(t)) + \\ &2k(t)\left[\|u_{l,\sigma-1}(t)\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta - \|u_{l,\nu-1}(t)\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta\right]\left(S^{\alpha+2}u'_{l,\sigma}(t), S^{\alpha+2}w'_{\nu\sigma}(t)\right). \end{aligned} \tag{2.30}$$

A seguir analisaremos cada parcela do segundo membro de (2.30).

Como $u_{l,\nu-1} \in \mathcal{G}$ resulta do Lema 2.1 que

$$\left| \frac{d}{dt} \left\{ M(\|u_{l,\nu-1}(t)\|_W^\beta) \right\} \right| \leq N_7, \ \forall t \in [0, T_1] \, . \tag{2.31}$$

Por (2.29) segue-se que $(M(\|u_{l,\nu-1}\|_W^\beta))_{\nu \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C^0([0, T_1])$. Logo, $\forall \epsilon > 0$, existe $N_8 \in \mathbb{N}$ tal que para ν, $\sigma \geq N_8$ temos

$$\left| M(\|u_{l,\sigma-1}(t)\|_W^\beta) - M(\|u_{l,\nu-1}(t)\|_W^\beta) \right| < \epsilon.$$

Assim de (2.12) e da desigualdade logo acima, obtemos:

$$\begin{aligned} &2 \left[M(\|u_{l,\sigma-1}(t)\|_W^\beta) - M(\|u_{l,\nu-1}(t)\|_W^\beta) \right] (S^{\alpha+2} u_{l,\sigma}(t), S^{\alpha+2} w'_{\nu\sigma}(t)) \leq \\ &2\epsilon \left| S^{\alpha+2} u_{l,\sigma}(t) \right| \left| S^{\alpha+2} w'_{\nu\sigma}(t) \right| \leq \epsilon \left| S^{\alpha+2} u_{l,\sigma}(t) \right|^2 + \epsilon \left| S^{\alpha+2} w'_{\nu\sigma}(t) \right|^2 \leq \\ &\epsilon \frac{L^2}{m_0} + \epsilon \left| S^{\alpha+2} w'_{\nu\sigma}(t) \right|^2 , \end{aligned} \tag{2.32}$$

$\forall t \in [0, T_1]$.

Com o mesmo raciocínio acima resulta da convergência (2.25) e $(H10)$ que

$$\begin{aligned} &2k(t) \left[\|u_{l,\sigma-1}(t)\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta - \|u_{l,\nu-1}(t)\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta \right] \left(S^{\alpha+2} u'_{l,\sigma}(t), S^{\alpha+2} w'_{\nu\sigma}(t) \right) \leq \\ &2C\epsilon \left| S^{\alpha+2} u'_{l,\sigma}(t) \right| \left| S^{\alpha+2} w'_{\nu\sigma}(t) \right| \leq C\epsilon \left| S^{\alpha+2} u'_{l,\sigma}(t) \right|^2 + C\epsilon \left| S^{\alpha+2} w'_{\nu\sigma}(t) \right|^2 , \end{aligned} \tag{2.33}$$

$\forall t \in [0, T_1]$, onde C é uma constante que limita $k(t)$ em $[0, T_1]$.

Observação 2.4 *Notemos que da definição de $w_{\nu\sigma}$ e de* (2.12) *resulta que*

$$\int_0^t \left| S^{\alpha+2} w'_{\nu\sigma}(s) \right|^2 ds \leq 2L^2, \ \forall t \in [0, T_1] \, . \tag{2.34}$$

Integrando (2.30) de 0 a t, $0 < t \leq T_1$, utilizando $(2.31) - (2.34)$, (2.12) e o fato que

$M(\xi) \geq m_0 > 0$, $\forall \xi \geq 0$, e $0 < T_1 < 1$, obtemos:

$$\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}} w'_{\nu\sigma}(t)\right|^2 + m_0 \left|S^{\alpha+2} w_{\nu\sigma}(t)\right|^2 + 2\int_0^t \left|S^{\alpha+2} w'_{\nu\sigma}(s)\right|^2 ds +$$

$$2\int_0^t k(s) \left\|u_{l,\nu-1}(s)\right\|^{\beta}_{D(S^{\alpha+2})} \left|S^{\alpha+2} w'_{\nu\sigma}(s)\right|^2 ds \leq$$

$$N_7 \int_0^t \left|S^{\alpha+2} w_{\nu\sigma}(s)\right|^2 ds + \int_0^t \epsilon \frac{L^2}{m_0} ds + \int_0^t \epsilon \left|S^{\alpha+2} w'_{\nu\sigma}(s)\right|^2 ds +$$

$$\int_0^t C\epsilon \left|S^{\alpha+2} u'_{l,\sigma}(s)\right|^2 ds + \int_0^t C\epsilon \left|S^{\alpha+2} w'_{\nu\sigma}(s)\right|^2 ds \leq$$

$$\frac{N_7}{m_0} \int_0^t m_0 \left|S^{\alpha+2} w_{\nu\sigma}(s)\right|^2 ds + \epsilon \frac{L^2}{m_0} + 2L^2\epsilon + C\epsilon \frac{L^2}{2} + 2L^2 C\epsilon =$$

$$\frac{(2L^2 + 4m_0 L^2 + 5Cm_0 L^2)}{2m_0} \epsilon + \frac{N_7}{m_0} \int_0^t m_0 \left|S^{\alpha+2} w_{\nu\sigma}(s)\right|^2 ds,$$

onde C é uma constante que limita $k(t)$ em $[0, T_1]$. Portanto da desigualdade acima e da desigualdade de Gronwall segue-se que

$$m_0 \left|S^{\alpha+2} w_{\nu\sigma}(t)\right|^2 \leq \frac{(2L^2 + 4m_0 L^2 + 5Cm_0 L^2)}{2m_0} \epsilon \exp\left(\frac{N_7}{m_0} T_1\right). \tag{2.35}$$

Logo de (2.35) e sendo $0 < T_1 < \dfrac{m_0}{N_7} \ln 2$ resulta que

$$\left|S^{\alpha+2} w_{\nu\sigma}(t)\right|^2 \leq \frac{(2L^2 + 4m_0 L^2 + 5Cm_0 L^2)}{m_0^2} \epsilon, \ \forall t \in [0, T_1].$$

Assim, dessa última desigualdade segue-se que

$$(u_{l,\nu})_{\nu \in \mathbb{N}} \text{ é uma sequência de Cauchy em } C^0\left([0, T_1]; D(S^{\alpha+2})\right) \tag{2.36}$$

o que acarreta na convergência

$$u_{l,\nu} \to u_l \text{ em } C^0\left([0, T_1]; D(S^{\alpha+2})\right). \tag{2.37}$$

Portanto, de (2.37) segue-se a convergência (2.21).

Agora de (1.44), (1.47) e (2.36) resulta que

$$(u_{l,\nu})_{\nu \in \mathbb{N}} \text{ é uma sequência de Cauchy em } C^0\left([0, T_1]; W\right).$$

Então,

$$u_{l,\nu} \to u_l \text{ em } C^0\left([0,T_1];W\right)$$

o que acarreta na convergência

$$\|u_{l,\nu}\|_W^\beta \to \|u_l\|_W^\beta \text{ em } C^0\left([0,T_1]\right). \tag{2.38}$$

Finalmente de (2.28), (2.38) e (2.29) obtemos a convergência (2.22). Assim, acabamos de mostrar as convergências (2.21) e (2.22).

Passagem ao Limite em $(P_{l,\nu})$

Agora com as convergências (2.20), (2.21) e (2.22) podemos passar o limite em $(P_{l,\nu})$. O limite u_l é uma solução do Ploblema (P_l). De fato, por (1.47), (2.12) e o fato que $0 < T_1 < 1$, obtemos:

$$\int_0^{T_1} |Su_{l,\nu}(t)|^2\, dt \leq \int_0^{T_1} \frac{1}{\gamma_0^{2(\alpha+1)}} \left|S^{\alpha+2}u_{l,\nu}(t)\right|^2 dt \leq \frac{L^2}{m_0\gamma_0^{2(\alpha+1)}},\ \forall t \in [0,T_1].$$

Logo, dessa última desigualdade resulta que

$$Su_{l,\nu} \to \chi_{13} \text{ fraco em } L^2(0,T_1;H).$$

Sendo S um operador fechado segue-se dessa última convergência e de $(2.20)_1$ que

$$Su_{l,\nu} \to Su_l \text{ fraco em } L^2(0,T_1;H). \tag{2.39}$$

Assim de (2.22) e (2.39) concluimos que

$$M(\|u_{l,\nu-1}\|_W^\beta)Su_{l,\nu} \to M(\|u_l\|_W^\beta)Su_l \text{ fraco em } L^2(0,T_1;H). \tag{2.40}$$

Agora por (1.47) e (2.12) segue-se que

$$\int_0^{T_1} \left|Su'_{l,\nu}(t)\right|^2 dt \leq \int_0^{T_1} \frac{1}{\gamma_0^{2(\alpha+1)}} \left|S^{\alpha+2}u'_{l,\nu}(t)\right|^2 dt \leq \frac{L^2}{2\gamma_0^{2(\alpha+1)}},$$

$\forall t \in [0,T_1]$, o que implica na convergência

$$Su'_{l,\nu} \to \chi_{14} \text{ fraco em } L^2(0,T_1;H).$$

Sendo S um operador fechado segue-se dessa última convergência e de $(2.20)_3$ que

$$Su'_{l,\nu} \to Su'_l \text{ fraco em } L^2(0,T_1;H). \tag{2.41}$$

Logo de (2.21), (2.41) e $(H10)$ concluimos que

$$(1+k\,\|u_{l,\nu-1}\|^{\beta}_{D(S^{\alpha+2})})Su'_{l,\nu} \to (1+k\,\|u_l\|^{\beta}_{D(S^{\alpha+2})})Su'_l \text{ fraco em } L^2(0,T_1;H). \tag{2.42}$$

Notemos agora que de (2.40), (2.42) e da equação de $(P_{l,\nu})$ concluimos que $(u''_{l,\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0,T_1;H)$. Sendo assim, podemos extrair uma subsequência de $(u''_{l,\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$, que ainda denotaremos por $(u''_{l,\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$, tal que

$$u''_{l,\nu} \to u''_l \text{ fraco em } L^2(0,T_1;H). \tag{2.43}$$

Portanto, aplicando o limite na equação de $(P_{l,\nu})$ com $\nu \to +\infty$ (l fixado) e usando as convergências (2.40), (2.42) e (2.43), obtemos:

$$u''_l + M(\|u_l\|^{\beta}_W)Su_l + (1+k\,\|u_l\|^{\beta}_{D(S^{\alpha+2})})Su'_l = 0 \text{ em } L^2(0,T_1;H). \tag{2.44}$$

Finalmente com as convergências (2.20), (2.21) e (2.22) obtemos a igualdade (2.44) em $L^\infty(0,T_1;D(S^{\alpha+\frac{1}{2}})) \cap L^2(0,T_1;D(S^{\alpha+1}))$ como pretendíamos.

Condições Iniciais de (P_l)

De modo inteiramente análogo ao Capítulo 1 (veja primeira etapa) concluimos que $u_l\,(0) = u_l^0$ e $u'_l\,(0) = u_l^1$.

Segunda Etapa: Existência de Solução de $(P3)$.

Como u_l é o limite de $u_{l,\nu}$ resulta, então, que u_l satisfaz (2.12). Sendo assim, concluimos as seguintes convergências:

$$\left| \begin{array}{l} u_l \to u \text{ fraco-* em } L^\infty(0,T_1;D(S^{\alpha+2})) \\ u'_l \to u' \text{ fraco-* em } L^\infty(0,T_1;D(S^{\alpha+\frac{3}{2}})) \\ u'_l \to u' \text{ fraco em } L^2(0,T_1;D(S^{\alpha+2})). \end{array} \right. \tag{2.45}$$

Segue-se de (1.47) e (2.12) que $(Su_l)_{l\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2(0,T_1;H)$. Consequentemente obtemos que

$$Su_l \to \chi_{15} \text{ fraco em } L^2(0,T_1;H).$$

Sendo S um operador fechado resulta desta última convergência e de $(2.45)_1$ que

$$Su_l \to Su \text{ fraco em } L^2(0,T_1;H). \tag{2.46}$$

Ainda de (1.47) e (2.12) segue-se que $(Su_l')_{l\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2(0,T_1;H)$. Então,

$$Su_l' \to \chi_{16} \text{ fraco em } L^2(0,T_1;H).$$

Novamente de S ser um operador fechado obtemos dessa última convergência e de $(2.45)_3$ que

$$Su_l' \to Su' \text{ fraco em } L^2(0,T_1;H). \tag{2.47}$$

No que segue provaremos as convergências

$$\|u_l\|^{\beta}_{D(S^{\alpha+2})} \to \|u\|^{\beta}_{D(S^{\alpha+2})} \text{ em } C^0\left([0,T_1]\right) \tag{2.48}$$

e

$$M(\|u_l\|^{\beta}_{W}) \to M(\|u\|^{\beta}_{W}) \text{ em } C^0\left([0,T_1]\right). \tag{2.49}$$

Comecemos considerando a sequência $(\phi_l)_{l\in\mathbb{N}}$, onde $\phi_l(t) = \|u_l(t)\|^{\beta}_{D(S^{\alpha+2})}$. Como $u_l \in \mathcal{G}$ segue-se de (2.12) que

$$\|u_l(t)\|^{\beta}_{D(S^{\alpha+2})} \leq (\frac{L}{\sqrt{m_0}})^{\beta},\ \forall t \in [0,T_1]. \tag{2.50}$$

Agora utilizando o Teorema do Valor Médio, a desigualdade de Schwarz e (2.12), obtemos (veja como foi obtido (2.24)):

$$\left|\|u_l(t_2)\|^{\beta}_{D(S^{\alpha+2})} - \|u_l(t_1)\|^{\beta}_{D(S^{\alpha+2})}\right| \leq \beta(\frac{2L}{\sqrt{m_0}})^{\beta-1}\frac{L}{\sqrt{2}}\left|t_2-t_1\right|^{\frac{1}{2}}, \tag{2.51}$$

$0 \leq t_1 < t_2 \leq T_1$.

Logo de (2.50), (2.51) e do Teorema de Arzela-Áscoli para funções reais resulta que existe $\phi \in C^0\left([0,T_1]\right)$ tal que

$$\|u_l\|^{\beta}_{D(S^{\alpha+2})} \to \phi \text{ em } C^0\left([0,T_1]\right). \tag{2.52}$$

Considerando agora a sequência $(\rho_l)_{l\in\mathbb{N}}$, onde $\rho_l(t) = \|u_l(t)\|_W^\beta$, obtemos de (1.44), (1.47) e (2.12) que

$$\|u_l(t)\|_W^\beta \leq (\frac{k_1 L}{\gamma_0\sqrt{m_0}})^\beta,\ \forall t \in [0, T_1]\,. \tag{2.53}$$

Utilizando o Teorema do Valor Médio, (1.44), (1.47) e (2.12), obtemos (veja como foi obtido (2.27)):

$$\left|\|u_l(t_2)\|_W^\beta - \|u_l(t_1)\|_W^\beta\right| \leq \frac{\beta 2^{\beta-1}(k_1L)^\beta}{\gamma_0^{(\beta-\frac{1}{2})} m_0^{\frac{\beta-1}{2}}}\left|t_2 - t_1\right|, \tag{2.54}$$

$0 \leq t_1 < t_2 \leq T_1$.

Assim de (2.53), (2.54) e do Teorema de Arzela-Áscoli para funções reais resulta que existe $\rho \in C^0([0, T_1])$ tal que

$$\|u_l\|_W^\beta \to \rho \text{ em } C^0([0, T_1])\,. \tag{2.55}$$

Logo de (2.55) e $(H11)$ segue-se que

$$M(\|u_l\|_W^\beta) \to M(\rho) \text{ em } C^0([0, T_1])\,. \tag{2.56}$$

O nosso próximo objetivo é mostrar que $\phi = \|u\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta$ e $M(\rho) = M(\|u\|_W^\beta)$. Para isso consideremos u_l e u_μ as soluções dos problemas (P_l) e (P_μ), respectivamente. Considerando agora $w_{l\mu} = u_l - u_\mu$ segue-se que $w_{l\mu}$ é solução do problema

$$(P_{l\mu})\quad \left|\begin{array}{l} w_{l\mu}'' + M(\|u_l\|_W^\beta)Sw_{l\mu} + Sw_{l\mu}' + k\,\|u_l\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta Sw_{l\mu}' = \\ \left[M(\|u_\mu\|_W^\beta) - M(\|u_l\|_W^\beta)\right]Su_\mu + k[\|u_\mu\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta - \|u_l\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta]Su_\mu' \\ w_{l\mu}(0) = u_l^0 - u_\mu^0,\ w_{l\mu}'(0) = u_l^1 - u_\mu^1. \end{array}\right.$$

Tomando o produto escalar de H em ambos os membros da equação de $(P_{l\mu})$ com

$2S^{2\alpha+3}w'_{l\mu}$, obtemos:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}w'_{l\mu}(t)\right|^2+\frac{d}{dt}\left[M(\|u_l(t)\|_W^\beta)\left|S^{\alpha+2}w_{l\mu}(t)\right|^2\right]+2\left|S^{\alpha+2}w'_{l\mu}(t)\right|^2+\\ 2k(t)\left\|u_l(t)\right\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta\left|S^{\alpha+2}w'_{l\mu}(t)\right|^2=\left[\frac{d}{dt}\left\{M(\|u_l(t)\|_W^\beta)\right\}\right]\left|S^{\alpha+2}w_{l\mu}(t)\right|^2+\\ 2\left[M(\|u_\mu(t)\|_W^\beta)-M(\|u_l(t)\|_W^\beta)\right]\left(S^{\alpha+2}u_\mu(t),S^{\alpha+2}w'_{l\mu}(t)\right)+\\ 2k(t)\left[\|u_\mu(t)\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta-\|u_l(t)\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta\right]\left(S^{\alpha+2}u'_\mu(t),S^{\alpha+2}w'_{l\mu}(t)\right).\end{gathered}\tag{2.57}$$

Integrando (2.57) de 0 a t, $0<t\le T_1$, e usando o fato que $M(\xi)\ge m_0>0$, $\forall\xi\ge 0$, obtemos:

$$\begin{gathered}\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}w'_{l\mu}(t)\right|^2+m_0\left|S^{\alpha+2}w_{l\mu}(t)\right|^2+\\ 2\int_0^t\left|S^{\alpha+2}w'_{l\mu}(s)\right|^2ds+2\int_0^t k(s)\left\|u_l(s)\right\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta\left|S^{\alpha+2}w'_{l\mu}(s)\right|^2ds\le\\ \left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}w'_{l\mu}(0)\right|^2+M(\|u_l(0)\|_W^\beta)\left|S^{\alpha+2}w_{l\mu}(0)\right|^2+\\ \int_0^t\left|\frac{d}{ds}\left\{M(\|u_l(s)\|_W^\beta)\right\}\right|\left|S^{\alpha+2}w_{l\mu}(s)\right|^2ds+\\ 2\int_0^t\left|M(\|u_\mu(s)\|_W^\beta)-M(\|u_l(s)\|_W^\beta)\right|\left|S^{\alpha+2}u_\mu(s)\right|\left|S^{\alpha+2}w'_{l\mu}(s)\right|ds+\\ 2\int_0^t|k(s)|\left|\|u_\mu(s)\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta-\|u_l(s)\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta\right|\left|S^{\alpha+2}u'_\mu(s)\right|\left|S^{\alpha+2}w'_{l\mu}(s)\right|ds.\end{gathered}\tag{2.58}$$

A seguir passaremos a analisar cada parcela do segundo membro de (2.58).

Pelas condições iniciais de $(P_{l\mu})$ e as convergências (2.7) obtemos, para l e μ suficientemente grandes, que

$$\left|S^{\alpha+2}w_{l\mu}(0)\right|^2\le\epsilon^2 \text{ e } \left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}w'_{l\mu}(0)\right|^2\le\epsilon^2.\tag{2.59}$$

Agora de (1.44), (1.47), (2.12) e $(H11)$ resulta que

$$M(\|u_l(0)\|_W^\beta)\le C,\tag{2.60}$$

onde C é uma constante genérica que não depende de l.

Pelo Lema 2.1 temos que

$$\left|\frac{d}{dt}\left\{M(\|u_l(s)\|_W^\beta)\right\}\right| \leq N_7,\ \forall s \in [0, T_1]. \tag{2.61}$$

Utilizando a convergência (2.56) e o mesmo raciocínio adotado para se obter (2.32), obtemos:

$$\begin{aligned} &2\left|M(\|u_\mu(s)\|_W^\beta) - M(\|u_l(s)\|_W^\beta)\right| \left|S^{\alpha+2}u_\mu(s)\right| \left|S^{\alpha+2}w'_{l\mu}(s)\right| \leq \\ &\epsilon\frac{L^2}{m_0} + \epsilon\left|S^{\alpha+2}w'_{l\mu}(s)\right|^2, \end{aligned} \tag{2.62}$$

$\forall s \in [0, T_1]$.

Agora com a convergência (2.52) e o mesmo raciocínio adotado para se obter (2.33), obtemos:

$$\begin{aligned} &2\left|k(s)\right| \left|\|u_\mu(s)\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta - \|u_l(s)\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta\right| \left|S^{\alpha+2}u'_\mu(s)\right| \left|S^{\alpha+2}w'_{l\mu}(s)\right| \leq \\ &C\epsilon\left|S^{\alpha+2}u'_\mu(s)\right|^2 + C\epsilon\left|S^{\alpha+2}w'_{l\mu}(s)\right|^2, \end{aligned} \tag{2.63}$$

$\forall s \in [0, T_1]$, onde C é uma constante que limita $k(s)$ em $[0, T_1]$.

Portanto, substituindo (2.59) $-$ (2.63) em (2.58), obtemos:

$$\begin{aligned} &\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}w'_{l\mu}(t)\right|^2 + m_0\left|S^{\alpha+2}w_{l\mu}(t)\right|^2 + 2\int_0^t \left|S^{\alpha+2}w'_{l\mu}(s)\right|^2 ds + \\ &2\int_0^t k(s)\left\|u_l(s)\right\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta \left|S^{\alpha+2}w'_{l\mu}(s)\right|^2 ds \leq \\ &C\epsilon^2 + N_7\int_0^t \left|S^{\alpha+2}w_{l\mu}(s)\right|^2 ds + \int_0^t \epsilon\frac{L^2}{m_0}ds + \int_0^t \epsilon\left|S^{\alpha+2}w'_{l\mu}(s)\right|^2 ds + \\ &\int_0^t C\epsilon\left|S^{\alpha+2}u'_\mu(s)\right|^2 ds + \int_0^t C\epsilon\left|S^{\alpha+2}w'_{l\mu}(s)\right|^2 ds. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Notando que $\int_0^t \left|S^{\alpha+2}w'_{l\mu}(s)\right|^2 ds \leq 2L^2$ (veja a observação 2.4) e $0 < T_1 < 1$, resulta de (2.12) e (2.64) o seguinte:

$$\begin{aligned}
&\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}w'_{l\mu}(t)\right|^2+m_0\left|S^{\alpha+2}w_{l\mu}(t)\right|^2+2\int_0^t\left|S^{\alpha+2}w'_{l\mu}(s)\right|^2ds+\\
&2\int_0^t k(s)\left\|u_l(s)\right\|^{\beta}_{D(S^{\alpha+2})}\left|S^{\alpha+2}w'_{l\mu}(s)\right|^2ds\leq\\
&C\epsilon^2+\frac{N_7}{m_0}\int_0^t m_0\left|S^{\alpha+2}w_{l\mu}(s)\right|^2ds+\epsilon\frac{L^2}{m_0}+2L^2\epsilon+C\frac{L^2}{2}\epsilon+2CL^2\epsilon\leq\\
&C\epsilon^2+\frac{N_7}{m_0}\int_0^t m_0\left|S^{\alpha+2}w_{l\mu}(s)\right|^2ds,
\end{aligned}\tag{2.65}$$

onde C denota constantes diversas. Logo de (2.65), da desigualdade de Gronwall e do fato de $0<T_1<\dfrac{m_0}{N_7}\ln 2$, obtemos:

$$\left|S^{\alpha+2}w_{l\mu}(t)\right|^2\leq\frac{C}{m_0}\epsilon^2\exp\left(\frac{N_7}{m_0}T_1\right)\leq\frac{2C}{m_0}\epsilon^2,\ \forall t\in\left[0,T_1\right],\tag{2.66}$$

onde C denota constantes diversas. Sendo assim, concluimos de (2.66) que

$$(u_l)_{l\in\mathbb{N}}\text{ é uma sequência de Cauchy em }C^0\left(\left[0,T_1\right];D(S^{\alpha+2})\right)\tag{2.67}$$

o que acarreta na convergência

$$u_l\to u\text{ em }C^0\left(\left[0,T_1\right];D(S^{\alpha+2})\right).$$

Logo, desta última convergência segue-se a convergência (2.48).

Agora de (1.44), (1.47) e (2.67) resulta que

$$(u_l)_{l\in\mathbb{N}}\text{ é uma sequência de Cauchy em }C^0\left(\left[0,T_1\right];W\right).$$

Então,

$$u_l\to u\text{ em }C^0\left(\left[0,T_1\right];W\right)$$

o que acarreta na convergência

$$\left\|u_l\right\|^{\beta}_W\to\left\|u\right\|^{\beta}_W\ \text{ em }C^0\left(\left[0,T_1\right]\right).\tag{2.68}$$

Finalmente de (2.55) , (2.68) e (2.56) obtemos a convergência (2.49) . Portanto, acabamos de mostrar as convergências (2.48) e (2.49) .

Passagem ao Limite em (P_l) **e Condições Iniciais de** $(P3)$

Com as convergências $(2.45)-(2.49)$ e o mesmo raciocínio adotado na primeira etapa (existência de solução de (P_l)) concluimos que o limite u de u_l pertence a classe (2.2) e que u satisfaz ao problema $(P3)$. Sendo assim, acabamos de concluir a prova do Teorema 2.1.■

2.2 Solução Global Limitada

Nesta seção trabalharemos com problemas aproximados. Será fundamental aqui o Teorema 2.1 assim como as Proposições 1.1 e 1.2. Continuaremos também com as mesmas considerações assumidas no Capítulo 2. Sendo assim, obtemos o seguinte teorema de solução global:

Teorema 2.2 *(Solução Global Limitada) Suponhamos as hipóteses* $(H9)-(H11)$. *Consideremos* α, β *números reais com* $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 2$ *e*

$$u^0 \in D(S^{\alpha+2}),\ u^1 \in D(S^{\alpha+\frac{3}{2}}).$$

Então, existe uma função u *na classe*

$$\left| \begin{array}{l} u \in L^\infty(0,\infty; D(S^{\alpha+2})) \\ u' \in L^\infty(0,\infty; D(S^{\alpha+\frac{3}{2}})) \cap L^2(0,\infty; D(S^{\alpha+2})) \\ u'' \in L^\infty_{loc}(0,\infty; D(S^{\alpha+\frac{1}{2}})) \end{array} \right. \tag{2.69}$$

satisfazendo

$$(P4) \qquad \left| \begin{array}{l} u'' + M(\|u\|_W^\beta)Su + (1 + k\,\|u\|^\beta_{D(S^{\alpha+2})})Su' = 0 \\ u\,(0) = u^0,\ u'\,(0) = u^1, \end{array} \right.$$

onde a equação em $(P4)$ *é válida em* $L^\infty_{loc}(0,\infty; D(S^{\alpha+\frac{1}{2}}))$. *Além disso,*

$$E(t) \leq C,\ \forall t \geq 0, \tag{2.70}$$

onde C é uma constante independente de t e

$$E(t) = \left| S^{\alpha+\frac{3}{2}} u'(t) \right|^2 + M(\|u(t)\|_W^\beta) \left| S^{\alpha+2} u(t) \right|^2, \ \forall t \geq 0,$$

é a energia associada a solução u de $(P4)$.

Observação 2.5 *Notemos que no Teorema 2.2 consideramos $\beta \geq 2$. De fato, perceba a necessidade dessa hipótese em* (2.75).

Demonstração (Teorema 2.2):

Sejam (u_j^0) e (u_j^1) duas sequências de vetores de $D(S^{2\alpha+\frac{7}{2}})$ e $D(S^{2\alpha+3})$, respectivamente, tais que

$$u_j^0 \to u^0 \text{ em } D(S^{\alpha+2}) \text{ e } u_j^1 \to u^1 \text{ em } D(S^{\alpha+\frac{3}{2}}). \tag{2.71}$$

Agora consideremos o problema

$$(P_j) \quad \left| \begin{array}{l} u_j'' + M(\|u_j\|_W^\beta) S u_j + (1 + k \|u_j\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta) S u_j' = 0 \\ u_j(0) = u_j^0, \ u_j'(0) = u_j^1, \end{array} \right.$$

onde a equação em (P_j) é válida em $L_{loc}^\infty(0,\infty; D(S^{\alpha+\frac{1}{2}})) \cap L_{loc}^2(0,\infty; D(S^{\alpha+1}))$.

Pelo Teorema 2.1 concluimos que (P_j) possui uma solução local u_j na classe

$$\left| \begin{array}{l} u_j \in L^\infty(0,T_1; D(S^{\alpha+2})) \\ u_j' \in L^\infty(0,T_1; D(S^{\alpha+\frac{3}{2}})) \cap L^2(0,T_1; D(S^{\alpha+2})) \\ u_j'' \in L^\infty(0,T_1; D(S^{\alpha+\frac{1}{2}})) \cap L^2(0,T_1; D(S^{\alpha+1})). \end{array} \right. \tag{2.72}$$

Agora utilizando (2.72) conclui-se que $\mu_1 = M(\|u_j\|_W^\beta)$ e $\mu_2 = k \|u_j\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta$ satisfazem a $(H5)$ e $(H6)$, respectivamente. Sendo assim, resulta da Proposição 1.1 (considerando $\delta = \theta = 1$) que existe uma única solução local u_j de (P_j) na classe

$$\left| \begin{array}{l} u_j \in L^\infty(0,T_1; D(S^{2\alpha+\frac{7}{2}})) \\ u_j' \in L^\infty(0,T_1; D(S^{2\alpha+3})) \cap L^2(0,T_1; D(S^{2\alpha+\frac{7}{2}})) \\ u_j'' \in L^\infty(0,T_1; D(S^{2\alpha+2})) \cap L^2(0,T_1; D(S^{2\alpha+\frac{5}{2}})). \end{array} \right. \tag{2.73}$$

Denotemos por $\mathcal{M}_j$ o conjunto constituido pelos números reais $T > 0$ tal que existe uma única função u_j na classe (2.73) (trocando T_1 por T) sendo u_j solução de (P_j) em $[0,T]$.

Pelo resultado de existência de solução local logo acima resulta que $\mathcal{M}_j \neq \varnothing$. Denotemos por $T_{\max,j}$ o supremo dos $T \in \mathcal{M}_j$.

Seja $T \in \mathcal{M}_j$. Obtém-se a seguir estimativas para a solução u_j em $[0,T]$. Tomando o produto escalar de H em ambos os membros da equação de (P_j) com $2S^{2\alpha+3}u_j'$, obtemos:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2+\frac{d}{dt}\left[M(\|u_j(t)\|_W^\beta)\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2\right]+2\left|S^{\alpha+2}u_j'(t)\right|^2+\\&2k(t)\|u_j(t)\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta\left|S^{\alpha+2}u_j'(t)\right|^2=\left[\frac{d}{dt}\left\{M(\|u_j(t)\|_W^\beta)\right\}\right]\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2.\end{aligned}\tag{2.74}$$

Agora utilizando a Proposição 1.2, (1.44) e (1.47), obtemos:

$$\begin{aligned}&\left[\frac{d}{dt}\left\{M(\|u_j(t)\|_W^\beta)\right\}\right]\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2\leq\beta m_1\|u_j(t)\|_W^{\beta-1}\left\|u_j'(t)\right\|_W\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2=\\&\beta m_1\|u_j(t)\|_W^{\frac{\beta}{2}-1}\left\|u_j'(t)\right\|_W\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|\|u_j(t)\|_W^{\frac{\beta}{2}}\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|\leq\\&\frac{\beta m_1k_1^{\frac{\beta}{2}}}{\gamma_0^{\frac{\beta}{2}}}\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^{\frac{\beta}{2}-1}\left|S^{\alpha+2}u_j'(t)\right|\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|\|u_j(t)\|_W^{\frac{\beta}{2}}\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|=\\&\frac{\beta m_1k_1^{\frac{\beta}{2}}}{\gamma_0^{\frac{\beta}{2}}}\sqrt{k(t)}\,\|u_j(t)\|_{D(S^{\alpha+2})}^{\frac{\beta}{2}}\left|S^{\alpha+2}u_j'(t)\right|\frac{1}{\sqrt{k(t)}}\|u_j(t)\|_W^{\frac{\beta}{2}}\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|\leq\\&\frac{\beta^2m_1^2k_1^\beta\delta}{2\gamma_0^\beta}k(t)\|u_j(t)\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta\left|S^{\alpha+2}u_j'(t)\right|^2+\frac{1}{2\delta}\frac{1}{k(t)}\|u_j(t)\|_W^\beta\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2,\end{aligned}\tag{2.75}$$

onde $0<\delta<\dfrac{4\gamma_0^\beta}{\beta^2m_1^2k_1^\beta}$ e sendo k_1 e γ_0 introduzidos em (1.44) e (1.47), respectivamente.

Substituindo (2.75) em (2.74) e organizando os termos, obtemos:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2+\frac{d}{dt}\left[M(\|u_j(t)\|_W^\beta)\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2\right]+2\left|S^{\alpha+2}u_j'(t)\right|^2+\\&(2-\frac{\beta^2m_1^2k_1^\beta\delta}{2\gamma_0^\beta})k(t)\|u_j(t)\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta\left|S^{\alpha+2}u_j'(t)\right|^2\leq\\&\frac{1}{2\delta}\frac{1}{k(t)}\|u_j(t)\|_W^\beta\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2.\end{aligned}\tag{2.76}$$

Integrando (2.76) de 0 a $t < T_{\max,j}$, utilizando (2.71) e notando que $M(\|u_j(t)\|_W^\beta) = m_0 + m_1 \|u_j(t)\|_W^\beta$ concluimos o seguinte:

$$\begin{aligned} &\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2 + m_0 \left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 + m_1 \|u_j(t)\|_W^\beta \left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 + \\ &2\int_0^t \left|S^{\alpha+2}u_j'(s)\right|^2 ds \leq C + \frac{1}{2\delta}\int_0^t \frac{1}{k(s)} \|u_j(s)\|_W^\beta \left|S^{\alpha+2}u_j(s)\right|^2 ds, \end{aligned} \tag{2.77}$$

onde C denota uma constante genérica que não depende de j e t. Assim de (2.77) segue-se que

$$\|u_j(t)\|_W^\beta \left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 \leq \frac{C}{m_1} + \frac{1}{2\delta m_1}\int_0^t \frac{1}{k(s)} \|u_j(s)\|_W^\beta \left|S^{\alpha+2}u_j(s)\right|^2 ds.$$

Portanto, desta última desigualdade, $(H10)$ e da desigualdade de Gronwall resulta que

$$\begin{aligned} &\|u_j(t)\|_W^\beta \left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 \leq \frac{C}{m_1}\exp\left(\frac{1}{2\delta m_1}\int_0^t \frac{1}{k(s)}ds\right) \leq \\ &\frac{C}{m_1}\exp\left(\frac{1}{2\delta m_1}\int_0^\infty \frac{1}{k(s)}ds\right) \leq C, \ \forall t \in [0,T], \end{aligned} \tag{2.78}$$

onde C denota constantes diversas que não dependem de j e t.

Assim substituindo (2.78) no segundo membro de (2.77), notando que $T \in \mathcal{M}_j$ foi arbitrário e utilizando novamente $(H10)$, concluimos que

$$\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right| \leq C, \ \forall t \in [0, T_{\max,j}[\tag{2.79}$$

$$\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right| \leq C, \ \forall t \in [0, T_{\max,j}[\tag{2.80}$$

$$\int_0^t \left|S^{\alpha+2}u_j'(s)\right|^2 ds \leq C, \ \forall t \in [0, T_{\max,j}[, \tag{2.81}$$

onde C denota constantes diversas que não dependem de j e t.

Agora fixemos $j > 0$. A seguir provaremos que $T_{\max,j}$ é infinito. Suponhamos que $T_{\max,j} < \infty$ e seja $0 < t_\nu < T_{\max,j}$ com $t_\nu \to T_{\max,j}$. Assim resulta de (2.79) e (2.80), respectivamente, o seguinte:

$$u_j(t_\nu) \to \xi \text{ fraco em } D(S^{\alpha+2})$$

$$u_j'(t_\nu) \to \eta \text{ fraco em } D(S^{\alpha+\frac{3}{2}}).$$

Com ξ e η determinamos, por intermédio do Teorema 2.1 (solução local), a solução w do problema

$$(I) \qquad \left| \begin{array}{l} w'' + M(\|w\|_W^\beta)Sw + (1 + k\,\|w\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta)Sw' = 0 \\ w\,(0) = \xi,\ w'\,(0) = \eta, \end{array} \right.$$

onde a equação em (I) é válida em $L^\infty(0,T_1;D(S^{\alpha+\frac{1}{2}})) \cap L^2(0,T_{1;}D(S^{\alpha+1}))$.

Assim a função

$$\tilde{u}(t) = \left| \begin{array}{l} w(t),\ 0 \le t < T_{\max,j} \\ w(t - T_{\max,j}),\ T_{\max,j} \le t < T_{\max,j} + T_1 \end{array} \right.$$

é uma solução do Problema $(P3)$ em $[0, T_{\max,j} + T_1]$ o que é uma contradição com a definição de $T_{\max,j}$. Portanto, $T_{\max,j}$ é infinito para cada j. Sendo assim, concluimos de (2.79), (2.80) e (2.81), respectivamente, que

$$\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right| \le C,\ \forall t \in [0,\infty[\,,\ \forall j \in \mathbb{N} \tag{2.82}$$

$$\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right| \le C,\ \forall t \in [0,\infty[\,,\ \forall j \in \mathbb{N} \tag{2.83}$$

$$\int_0^t \left|S^{\alpha+2}u_j'(s)\right|^2 ds \le C,\ \forall t \in [0,\infty[\,,\ \forall j \in \mathbb{N}, \tag{2.84}$$

onde C denota constantes diversas que não dependem de j e t.

Consequentemente de (2.82), (2.83) e (2.84) concluimos, respectivamente, que existe uma subsequência de $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$, ainda denotada por $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$, tal que

$$u_j \to u \text{ fraco-* em } L^\infty(0,\infty;D(S^{\alpha+2})) \tag{2.85}$$

$$u_j' \to u' \text{ fraco-* em } L^\infty(0,\infty;D(S^{\alpha+\frac{3}{2}})) \tag{2.86}$$

$$u_j' \to u' \text{ fraco em } L^2(0,\infty;D(S^{\alpha+2})). \tag{2.87}$$

Agora com os mesmos cálculos utilizados para se obter as convergências (2.48) e (2.49) (veja Capítulo 2 - Teorema 2.1) concluimos as seguintes convergências:

$$\|u_j\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta \to \|u\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta \text{ em } C^0\left([0,T]\right),\ \forall T > 0 \tag{2.88}$$

e

$$M(\|u_j\|_W^\beta) \to M(\|u\|_W^\beta) \text{ em } C^0\left([0,T]\right), \; \forall T > 0. \tag{2.89}$$

Notemos agora que devido a hipótese $(H10)$ é também possível obtermos a seguinte convergência:

$$(1 + k\,\|u_j\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta) \to (1 + k\,\|u\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta) \text{ em } C^0\left([0,T]\right), \; \forall T > 0. \tag{2.90}$$

O nosso próximo objetivo é passar o limite em (P_j) com $j \to +\infty$. Para isso, obteremos mais algumas convergências.

Inicialmente notemos que sendo $D(S^{\alpha+2})$ continuamente imerso em H resulta de (2.82) que

$$u_j \to u \text{ fraco-* em } L^\infty(0,T;H). \tag{2.91}$$

Agora de (1.47) e de (2.82) obtemos que

$$Su_j \to \chi_{17} \text{ fraco-* em } L^\infty(0,T;H). \tag{2.92}$$

Assim de (2.91), (2.92) e sendo S um operador fechado concluimos que

$$Su_j \to Su \text{ fraco-* em } L^\infty(0,T;H). \tag{2.93}$$

Logo das convergências (2.89) e (2.93), obtemos:

$$M(\|u_j\|_W^\beta)Su_j \to M(\|u\|_W^\beta)Su \text{ fraco-* em } L^\infty(0,T;H). \tag{2.94}$$

Seja $0 < T < \infty$. Com a convergência (2.94) e o método da sequência diagonal, utilizado para se obter a convergência (1.199) (veja esse processo a partir de (1.197)), obtemos a seguinte convergência:

$$M(\|u_j\|_W^\beta)Su_j \to M(\|u\|_W^\beta)Su \text{ fraco-* em } L^\infty_{loc}(0,\infty;H). \tag{2.95}$$

Sendo $D(S^{\alpha+\frac{3}{2}})$ continuamente imerso em H resulta de (2.83) que

$$u_j' \to u' \text{ fraco-* em } L^\infty(0,T;H). \tag{2.96}$$

De (1.47) e (2.83) resulta que

$$Su'_j \to \chi_{18} \text{ fraco-* em } L^\infty(0,T;H). \tag{2.97}$$

Portanto de (2.96), (2.97) e sendo S um operador fechado concluimos que

$$Su'_j \to Su' \text{ fraco-* em } L^\infty(0,T;H). \tag{2.98}$$

Logo das convergências (2.90) e (2.98), obtemos:

$$(1+k\|u_j\|^\beta_{D(S^{\alpha+2})})Su'_j \to (1+k\|u\|^\beta_{D(S^{\alpha+2})})Su' \text{ fraco-* em } L^\infty(0,T;H). \tag{2.99}$$

Agora com a convergência (2.99) e um raciocínio análogo ao adotado para se obter a convergência (2.95), obtemos:

$$(1+k\|u_j\|^\beta_{D(S^{\alpha+2})})Su'_j \to (1+k\|u\|^\beta_{D(S^{\alpha+2})})Su' \text{ fraco-* em } L^\infty_{loc}(0,\infty;H). \tag{2.100}$$

Utilizando a equação de (P_j), (1.47), as estimativas (2.82) e (2.83) e as hipóteses $(H10)$ e $(H11)$ resulta que $(u''_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(0,\infty;H)$. Assim, dessa limitação e sendo $L^\infty(0,\infty;H)$ continuamente imerso em $L^\infty_{loc}(0,\infty;H)$, segue-se que

$$u''_j \to u'' \text{ fraco-* em } L^\infty_{loc}(0,\infty;H). \tag{2.101}$$

Portanto, tomando o limite na equação de (P_j) com $j \to +\infty$ e utilizando as convergências (2.95), (2.100) e (2.101), obtemos:

$$u'' + M(\|u\|^\beta_W)Su + (1+k\|u\|^\beta_{D(S^{\alpha+2})})Su' = 0 \text{ em } L^\infty_{loc}(0,\infty;H).$$

Mostraremos agora os dados iniciais de $(P4)$.

Inicialmente notemos que das convergências (2.91) e (2.96) obtemos que $u \in C^0([0,T];H)$. Portanto, $u(0)$ faz sentido. Ainda das convergências (2.91) e (2.96) resulta que

$$u_j(t) \to u(t) \text{ fraco em } H,\ \forall t \in [0,T].$$

Em particular para $t=0$, obtemos:

$$u_j(0) \to u(0) \text{ fraco em } H. \tag{2.102}$$

Agora da condição inicial de (P_j) e da primeira convergência de (2.71), obtemos:

$$u_j(0) = u_j^0 \to u^0 \text{ forte em } D(S^{\alpha+2}). \tag{2.103}$$

Logo de (2.102), (2.103) e da unicidade do limite resulta que $u(0) = u^0$.

Agora notemos que é possível obter a convergência (2.101) em $L^\infty(0, T; H)$. Sendo assim, resulta da convergência (2.96) que $u' \in C^0([0,T]; H)$. Portanto, $u'(0)$ faz sentido. Ainda das convergências mensionadas acima resulta que

$$u_j'(t) \to u'(t) \text{ fraco em } H, \ \forall t \in [0,T].$$

Em particular para $t = 0$, obtemos:

$$u_j'(0) \to u'(0) \text{ fraco em } H. \tag{2.104}$$

Utilizando a condição inicial de (P_j) e a segunda convergência de (2.71), obtemos:

$$u_j'(0) = u_j^1 \to u^1 \text{ forte em } D(S^{\alpha+\frac{3}{2}}). \tag{2.105}$$

Logo de (2.104), (2.105) e da unicidade do limite resulta que $u'(0) = u^1$.

Agora de $(2.82) - (2.84)$ deduziremos que

$$E(t) \leq C, \ \forall t \in [0, \infty[.$$

Comecemos definindo

$$E_j(t) = \left|S^{\alpha+\frac{3}{2}} u_j'(t)\right|^2 + M(\|u_j(t)\|_W^\beta) \left|S^{\alpha+2} u_j(t)\right|^2, \ \forall t \in [0, \infty[. \tag{2.106}$$

Logo da imersão $D(S^{\alpha+2}) \hookrightarrow W$, $(H11)$, (2.82), (2.83) e de (2.106) resulta que

$$E_j(t) \leq C, \ \forall t \in [0, \infty[, \tag{2.107}$$

onde C denota uma constante genérica que não depende de j e t.

Para finalizar a prova do Teorema 2.2 mostraremos que aplicando o lim inf em (2.107) com $j \to +\infty$ e $t > 0$ fixado obteremos (2.70). De fato, vejamos isso:

Inicialmente notemos que sendo $D(S^{\alpha+2})$ continuamente imerso em H resulta de (2.82) que

$$u_j \to u \text{ fraco-* em } L^\infty(0,T;H),\ \forall T \in (0,\infty). \tag{2.108}$$

Ainda como consequência de (2.82) , obtemos:

$$S^{\alpha+2}u_j \to \chi_{19} \text{ fraco-* em } L^\infty(0,T;H),\ \forall T \in (0,\infty). \tag{2.109}$$

Assim de (2.108) , (2.109) e sendo $S^{\alpha+2}$ um operador fechado concluimos que

$$S^{\alpha+2}u_j \to S^{\alpha+2}u \text{ fraco-* em } L^\infty(0,T;H),\ \forall T \in (0,\infty). \tag{2.110}$$

Ainda do fato de $D(S^{\alpha+2})$ ser continuamente imerso em H resulta de (2.84) que

$$u_j' \to u' \text{ fraco em } L^2(0,T;H),\ \forall T \in (0,\infty). \tag{2.111}$$

Também de (2.84) , obtemos:

$$S^{\alpha+2}u_j' \to \chi_{20} \text{ fraco em } L^2(0,T;H), \forall T \in (0,\infty). \tag{2.112}$$

Logo de (2.111) , (2.112) e sendo $S^{\alpha+2}$ um operador fechado concluimos que

$$S^{\alpha+2}u_j' \to S^{\alpha+2}u' \text{ fraco em } L^2(0,T;H),\ \forall T \in (0,\infty). \tag{2.113}$$

Como consequência de (2.110) resulta o seguinte:

$$\int_0^T (S^{\alpha+2}u_j(t), w(t))dt \to \int_0^T (S^{\alpha+2}u(t), w(t))dt,\ \forall w \in L^1(0,T;H).$$

Fazendo nessa última convergência $w(t) = v\theta'(t)$ com $v \in H$ e $\theta \in C^1([0,T]) \subset L^1(0,T)$, $\theta(0) = 0$, $\theta(T) = 1$, obtemos:

$$\int_0^T (S^{\alpha+2}u_j(t), v)\theta'(t)dt \to \int_0^T (S^{\alpha+2}u(t), v)\theta'(t)dt, \tag{2.114}$$

$\forall v \in H$, $\theta \in C^1([0,T])$ com $\theta(0) = 0$ e $\theta(T) = 1$.

Agora, como consequência de (2.113) , obtemos:

$$\int_0^T (S^{\alpha+2}u_j'(t), w(t))dt \to \int_0^T (S^{\alpha+2}u'(t), w(t))dt,\ \forall w \in L^2(0,T;H).$$

Fazendo nessa última convergência $w(t) = v\theta(t)$ com $v \in H$ e $\theta \in C^1([0,T]) \subset L^2(0,T)$, $\theta(0) = 0$, $\theta(T) = 1$, obtemos:

$$\int_0^T (S^{\alpha+2}u_j'(t), v)\theta(t)dt \to \int_0^T (S^{\alpha+2}u'(t), v)\theta(t)dt, \tag{2.115}$$

$\forall v \in H$, $\theta \in C^1([0,T])$ com $\theta(0) = 0$ e $\theta(T) = 1$. Portanto de (2.114) e (2.115) resulta que

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\left[(S^{\alpha+2}u_j(t), v)\theta(t)\right] dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}\left[(S^{\alpha+2}u(t), v)\theta(t)\right] dt,$$

ou seja,

$$(S^{\alpha+2}u_j(T), v) \to (S^{\alpha+2}u(T), v), \ \forall v \in H, \ \forall T \in (0,\infty). \tag{2.116}$$

Como (2.116) é válido $\forall T \in (0,\infty)$ segue-se que

$$(S^{\alpha+2}u_j(t), v) \to (S^{\alpha+2}u(t), v), \ \forall v \in H, \ \forall t \in [0,\infty[$$

o que acarreta na convergência

$$S^{\alpha+2}u_j(t) \to S^{\alpha+2}u(t) \text{ fraco em } H, \ \forall t \in [0,\infty[\,. \tag{2.117}$$

Agora de (2.82) , (2.84) e da equação em (P_j) resulta que

$$(u_j'')_{j\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^2(0,T; D(S^{\alpha+\frac{1}{2}})), \ \forall T \in (0,\infty) \tag{2.118}$$

o que acarreta na convergência

$$u_j'' \to u'' \text{ fraco em } L^2(0,T;H), \ \forall T \in (0,\infty). \tag{2.119}$$

Ainda de (2.118) segue-se que

$$S^{\alpha+\frac{1}{2}}u_j'' \to \chi_{21} \text{ fraco em } L^2(0,T;H), \ \forall T \in (0,\infty). \tag{2.120}$$

Assim de (2.119) , (2.120) e sendo $S^{\alpha+\frac{1}{2}}$ um operador fechado concluimos que

$$S^{\alpha+\frac{1}{2}}u_j'' \to S^{\alpha+\frac{1}{2}}u'' \text{ fraco em } L^2(0,T;H), \ \forall T \in (0,\infty). \tag{2.121}$$

Agora sendo $D(S^{\alpha+\frac{3}{2}})$ continuamente imerso em H resulta de (2.83) que

$$u_j' \to u' \text{ fraco-* em } L^\infty(0,T;H), \ \forall T \in (0,\infty). \tag{2.122}$$

Ainda como consequência de (2.83), obtemos:

$$S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j' \to \chi_{22} \text{ fraco-* em } L^\infty(0,T;H),\ \forall T \in (0,\infty). \tag{2.123}$$

Assim de (2.122), (2.123) e sendo $S^{\alpha+\frac{3}{2}}$ um operador fechado concluimos que

$$S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j' \to S^{\alpha+\frac{3}{2}}u' \text{ fraco-* em } L^\infty(0,T;H),\ \forall T \in (0,\infty).$$

Dessa última convergência podemos concluir o seguinte:

$$\int_0^T (S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t),v)\theta'(t)dt \to \int_0^T (S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'(t),v)\theta'(t)dt,\ \forall T \in (0,\infty), \tag{2.124}$$

onde $v \in D(S)$ e $\theta \in C^1([0,T]) \subset L^1(0,T)$, com $\theta(0)=0$ e $\theta(T)=1$.

Agora de (2.121) segue-se que

$$\int_0^T (S^{\alpha+\frac{1}{2}}u_j''(t),w(t))dt \to \int_0^T (S^{\alpha+\frac{1}{2}}u''(t),w(t))dt,\ \forall w \in L^2(0,T;H).$$

Fazendo nessa última convergência $w(t)=Sv\theta(t)$ com $v \in D(S)$ e $\theta \in C^1([0,T]) \subset L^2(0,T)$, $\theta(0)=0$, $\theta(T)=1$, obtemos:

$$\int_0^T (S^{\alpha+\frac{1}{2}}u_j''(t),Sv)\theta(t)dt \to \int_0^T (S^{\alpha+\frac{1}{2}}u''(t),Sv)\theta(t)dt,$$

ou seja,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(S^{\alpha+\frac{1}{2}}u_j'(t),Sv)\theta(t)dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}(S^{\alpha+\frac{1}{2}}u'(t),Sv)\theta(t)dt,$$

ou ainda,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t),v)\theta(t)dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}(S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'(t),v)\theta(t)dt, \tag{2.125}$$

$\forall v \in D(S)$, $\theta \in C^1([0,T])$ com $\theta(0)=0$ e $\theta(T)=1$.

Portanto de (2.124) e (2.125) resulta que

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\left[(S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t),v)\theta(t)\right]dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}\left[(S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'(t),v)\theta(t)\right]dt,$$

ou seja,

$$(S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(T),v) \to (S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'(T),v),\ \forall v \in D(S),\ \forall T \in (0,\infty). \tag{2.126}$$

Como (2.126) é válido $\forall T \in (0, \infty)$ e $D(S)$ é denso em H segue-se que

$$(S^{\alpha+\frac{3}{2}} u_j'(t), v) \to (S^{\alpha+\frac{3}{2}} u'(t), v), \ \forall v \in H, \ \forall t \in [0, \infty[$$

o que acarreta na convergência

$$S^{\alpha+\frac{3}{2}} u_j'(t) \to S^{\alpha+\frac{3}{2}} u'(t) \text{ fraco em } H, \ \forall t \in [0, \infty[\,. \tag{2.127}$$

Agora procedendo de modo análogo ao que foi feito no Teorema 2.1 (Solução Local) obtemos a convergência

$$M(\|u_j\|_W^\beta) \to M(\|u\|_W^\beta) \text{ em } C^0\left([0, T]\right), \ \forall T > 0.$$

Como consequência dessa última convergência segue-se que

$$M(\|u_j(t)\|_W^\beta) \to M(\|u(t)\|_W^\beta) \text{ em } \left[0, T\right], \ 0 < T < \infty. \tag{2.128}$$

Finalmente aplicando o lim inf em (2.107) (com $t > 0$ fixado) e utilizando as convergências (2.117), (2.127) e (2.128) obtemos a desigualdade (2.70). Sendo assim, acabamos de concluir a prova de Teorema 2.2.■

Capítulo 3

Comportamento Assintótico

Neste capítulo mostraremos que a energia associada a solução do Problema $(P4)$ decresce exponencialmente. Para isso, assumiremos a seguinte hipótese:

$(H12)$ $$M(t,\xi) = m_0 + m_1(t)\xi,$$

onde $m_1(t) = \dfrac{1}{z(t)}$, $z \in C^1([0,\infty[)$, $z'(t) \geq \dfrac{1}{2}$ e $z(t) > 0$, $\forall t \geq 0$.

Aqui continuaremos considerando as hipóteses $(H2)$ e $(H3)$. Portanto, com as considerações acima temos o seguinte teorema de energia:

Teorema 3.1 *(Comportamento Assintótico) Suponhamos as hipóteses* $(H9)$ *e* $(H12)$*. Consideremos* $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 2$, $k > 0$ *(k uma constante a ser determinada) números reais e*

$$u^0 \in D(S^{\alpha+2}),\ u^1 \in D(S^{\alpha+\frac{3}{2}}).$$

Então,

$$E(t) \leq 3E(0)\exp(-\frac{\epsilon}{3}t),\ \forall t \geq 0, \tag{3.1}$$

onde

$$E(t) = \left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u'(t)\right|^2 + M(t,\|u(t)\|_W^\beta)\left|S^{\alpha+2}u(t)\right|^2,\ \forall t \geq 0, \tag{3.2}$$

é a energia associada a solução u de $(P4)$ *e* $0 < \epsilon < \epsilon_0$ *com* $\epsilon_0 = \min\left\{\dfrac{1}{2P_1},\ \dfrac{2m_0}{k^2C^{2\beta}},\ \dfrac{2\gamma_0}{3}\right\}$,

sendo $P_1 = \dfrac{\gamma_0 m_0 + 1 + \gamma_0}{2\gamma_0 m_0}$ *e C a constante definida em* (3.13).

Demonstração:

Comecemos com uma observação.

Observação 3.1 *Notemos a equivalência da definição de* $m_1(t)$ *dada em* $(H12)$ *e as condições sobre* $z(t)$ *com*

$$m_1(t) > 0,\ m_1'(t) < 0 \ e\ \frac{1}{2}[m_1(t)]^2 \leq -m_1'(t),\ \forall t \geq 0. \tag{3.3}$$

Sejam (u_j^0) e (u_j^1) duas sequências de vetores de $D(S^{2\alpha+\frac{7}{2}})$ e $D(S^{2\alpha+3})$, respectivamente, tais que

$$u_j^0 \to u^0 \text{ em } D(S^{\alpha+2}) \text{ e } u_j^1 \to u^1 \text{ em } D(S^{\alpha+\frac{3}{2}}). \tag{3.4}$$

Agora consideremos o problema

$$(P_j) \qquad \left| \begin{array}{l} u_j'' + M(t, \|u_j\|_W^\beta) S u_j + (1 + k \|u_j\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta) S u_j' = 0 \\ u_j(0) = u_j^0,\ u_j'(0) = u_j^1, \end{array} \right.$$

onde a equação em (P_j) é válida em $L^\infty_{loc}(0,\infty; D(S^{\alpha+\frac{1}{2}})) \cap L^2_{loc}(0,\infty; D(S^{\alpha+1}))$.

Pela demonstração do Teorema 2.1 concluimos que (P_j) possui uma solução local u_j na classe

$$\left| \begin{array}{l} u_j \in L^\infty(0, T_1; D(S^{\alpha+2})) \\ u_j' \in L^\infty(0, T_1; D(S^{\alpha+\frac{3}{2}})) \cap L^2(0, T_1; D(S^{\alpha+2})) \\ u_j'' \in L^\infty(0, T_1; D(S^{\alpha+\frac{1}{2}})) \cap L^2(0, T_1; D(S^{\alpha+1})),\ T_1 > 0. \end{array} \right. \tag{3.5}$$

Agora utilizando (3.5) e $(H12)$ concluimos que $\mu_1 = M(t, \|u_j\|_W^\beta)$ e $\mu_2 = k\|u_j\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta$ satisfazem a $(H5)$ e $(H6)$, respectivamente, em $[0, T_1]$. Sendo assim, resulta da Proposição 1.1 (considerando $\delta = \theta = 1$) que existe uma única solução local u_j de (P_j) na classe

$$\left| \begin{array}{l} u_j \in L^\infty(0, T_1; D(S^{2\alpha+\frac{7}{2}})) \\ u_j' \in L^\infty(0, T_1; D(S^{2\alpha+3})) \cap L^2(0, T_1; D(S^{2\alpha+\frac{7}{2}})) \\ u_j'' \in L^\infty(0, T_1; D(S^{2\alpha+2})) \cap L^2(0, T_1; D(S^{2\alpha+\frac{5}{2}})). \end{array} \right. \tag{3.6}$$

Denotemos por $\mathcal{M}_j$ o conjunto constituido pelos números reais $T > 0$ tal que existe uma única função u_j na classe (3.6) (trocando T_1 por T) sendo u_j solução de (P_j) em $[0, T]$.

Pelo resultado de existência de solução local logo acima resulta que $\mathcal{M}_j \neq \varnothing$. Denotemos por $T_{\max,j}$ o supremo dos $T \in \mathcal{M}_j$.

A seguir obteremos estimativas para a solução u_j dada em $\mathcal{M}_j$. Tomando o produto escalar de H em ambos os membros da equação de (P_j) com $2S^{2\alpha+3}u_j'$, obtemos:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2 + \frac{d}{dt}\left[M(t,\|u_j(t)\|_W^\beta)\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2\right] + 2\left|S^{\alpha+2}u_j'(t)\right|^2 + \\ &2k\,\|u_j(t)\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta\left|S^{\alpha+2}u_j'(t)\right|^2 = \left[\frac{d}{dt}\left\{M(t,\|u_j(t)\|_W^\beta)\right\}\right]\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Agora utilizando a Proposição 1.2, $(H12)$, (1.44) e (1.47) , obtemos:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{d}{dt}\left\{M(t,\|u_j(t)\|_W^\beta)\right\}\right]\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 \leq \\ &[m_1'(t)\,\|u_j(t)\|_W^\beta + \beta m_1(t)\,\|u_j(t)\|_W^{\beta-1}\left\|u_j'(t)\right\|_W]\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 = \\ &m_1'(t)\,\|u_j(t)\|_W^\beta\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 + \\ &\beta m_1(t)\,\|u_j(t)\|_W^{\frac{\beta}{2}-1}\left\|u_j'(t)\right\|_W\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|\|u_j(t)\|_W^{\frac{\beta}{2}}\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right| \leq \\ &m_1'(t)\,\|u_j(t)\|_W^\beta\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 + \\ &\beta m_1(t)(\frac{k_1}{\gamma_0})^{\frac{\beta}{2}}\,\|u_j(t)\|_{D(S^{\alpha+2})}^{\frac{\beta}{2}-1}\left|S^{\alpha+2}u_j'(t)\right|\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|\|u_j(t)\|_W^{\frac{\beta}{2}}\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right| = \\ &m_1'(t)\,\|u_j(t)\|_W^\beta\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 + \\ &\beta(\frac{k_1}{\gamma_0})^{\frac{\beta}{2}}\,\|u_j(t)\|_{D(S^{\alpha+2})}^{\frac{\beta}{2}}\left|S^{\alpha+2}u_j'(t)\right| m_1(t)\,\|u_j(t)\|_W^{\frac{\beta}{2}}\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right| \leq \\ &m_1'(t)\,\|u_j(t)\|_W^\beta\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 + \\ &\frac{\beta^2}{2}(\frac{k_1}{\gamma_0})^\beta\,\|u_j(t)\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta\left|S^{\alpha+2}u_j'(t)\right|^2 + \frac{1}{2}[m_1(t)]^2\,\|u_j(t)\|_W^\beta\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Substituindo (3.8) em (3.7) e considerando $k \geq \dfrac{\beta^2 k_1^\beta}{2\gamma_0^\beta}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2 + \frac{d}{dt}\left[M(t,\|u_j(t)\|_W^\beta)\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2\right] + \\
&2\left|S^{\alpha+2}u_j'(t)\right|^2 + (2k - \frac{\beta^2 k_1^\beta}{2\gamma_0^\beta})\,\|u_j(t)\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta\left|S^{\alpha+2}u_j'(t)\right|^2 = \\
&\left\{m_1'(t) + \frac{1}{2}[m_1(t)]^2\right\}\|u_j(t)\|_W^\beta\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Definindo

$$E_j(t) = \left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2 + M(t,\|u_j(t)\|_W^\beta)\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 \tag{3.10}$$

concluimos de (3.3) e (3.9) que

$$E_j'(t) + 2\left|S^{\alpha+2}u_j'(t)\right|^2 \leq 0,\ \forall t \in [0, T_{\max,j}[\,. \tag{3.11}$$

Integrando (3.11) de 0 a $t \leq T_{\max,j}$, usando (3.4) e notando que $M(t,\xi) \geq m_0$, $\forall t \geq 0$, obtemos:

$$\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2 + m_0\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 + 2\int_0^t \left|S^{\alpha+2}u_j'(s)\right|^2 ds \leq C, \tag{3.12}$$

onde C é uma constante genérica que não depende de j e t.

Agora utilizando a desigualdade (3.12) e os mesmos argumentos adotados no Teorema 2.2 (Solução Global Limitada) resulta que $T_{\max,j}$ é infinito e que u é solução de $(P4)$ (com k constante) na classe (2.69) . Sendo assim, temos:

$$\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right| \leq C,\ \forall t \in [0,\infty[\,,\ \forall j \in \mathbb{N} \tag{3.13}$$

$$\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right| \leq C,\ \forall t \in [0,\infty[\,,\ \forall j \in \mathbb{N} \tag{3.14}$$

$$\int_0^t \left|S^{\alpha+2}u_j'(s)\right|^2 ds \leq C,\ \forall t \in [0,\infty[\,,\ \forall j \in \mathbb{N}, \tag{3.15}$$

onde C denota constantes diversas que não dependem de j e t.

Segue-se de (3.11) que

$$E_j'(t) \leq -\left|S^{\alpha+2}u_j'(t)\right|^2 - \left|S^{\alpha+2}u_j'(t)\right|^2,\ \forall t \in [0,\infty[\,. \tag{3.16}$$

Consideremos $\epsilon > 0$. Definimos as funções

$$\rho_j(t) = (S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t), S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j(t)) + \frac{1}{2}\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2, \ \forall t \in [0,\infty[\tag{3.17}$$

e

$$E_{j\epsilon}(t) = E_j(t) + \epsilon\rho_j(t), \ \forall t \in [0,\infty[\,, \tag{3.18}$$

onde $E_j(t)$ foi definida em (3.10).

Agora de (3.17), (1.47), $(H12)$ e (3.10) decorre o seguinte:

$$\begin{aligned}
&|\rho_j(t)| \leq \left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j(t)\right| + \frac{1}{2}\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 \leq \\
&\frac{1}{2}\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 \leq \\
&\frac{1}{2}\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2 + \frac{1}{2\gamma_0}\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 = \\
&\frac{1}{2}\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2 + \frac{(1+\gamma_0)}{2\gamma_0 m_0}m_0\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 \leq \\
&\frac{1}{2}\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2 + \frac{(1+\gamma_0)}{2\gamma_0 m_0}M(t, \|u_j(t)\|_W^\beta)\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 \leq \\
&(\frac{1}{2} + \frac{1+\gamma_0}{2\gamma_0 m_0})E_j(t) = P_1 E_j(t),
\end{aligned}$$

onde $P_1 = \dfrac{\gamma_0 m_0 + 1 + \gamma_0}{2\gamma_0 m_0}$. Assim,

$$|\rho_j(t)| \leq P_1 E_j(t).$$

Logo, desta última desigualdade e de (3.18) resulta que

$$|E_{j\epsilon}(t) - E_j(t)| = \epsilon\,|\rho_j(t)| \leq \epsilon P_1 E_j(t).$$

Como $0 < \epsilon < \dfrac{1}{2P_1}$, obtemos:

$$\frac{1}{2}E_j(t) \leq E_{j\epsilon}(t) \leq \frac{3}{2}E_j(t), \ \forall t \in [0,\infty[\,. \tag{3.19}$$

Agora tomando o produto escalar de H em ambos os membros da equação de (P_j) com $S^{2\alpha+3}u_j(t)$, obtemos:

$$(S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j''(t), S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j(t)) + M(t, \|u_j(t)\|_W^\beta) \left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 +$$

$$(1 + k\,\|u_j(t)\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta)(S^{\alpha+2}u_j'(t), S^{\alpha+2}u_j(t)) = 0.$$

Como $\dfrac{d}{dt}(S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t), S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j(t)) = (S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j''(t), S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j(t)) + \left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2$ segue-se da última igualdade que

$$\frac{d}{dt}(S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t), S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j(t)) - \left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2 + M(t, \|u_j(t)\|_W^\beta) \left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 +$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 + k\,\|u_j(t)\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta\,(S^{\alpha+2}u_j'(t), S^{\alpha+2}u_j(t)) = 0.$$

Portanto, com esta última igualdade, (3.17) e $(H12)$ concluimos o seguinte:

$$\begin{aligned}
&\rho_j'(t) = \frac{d}{dt}(S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t), S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j(t)) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 = \\
&\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2 - M(t, \|u_j(t)\|_W^\beta)\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 - \\
&k\,\|u_j(t)\|_{D(S^{\alpha+2})}^\beta\,(S^{\alpha+2}u_j'(t), S^{\alpha+2}u_j(t)) \leq \\
&\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2 - M(t, \|u_j(t)\|_W^\beta)\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 + \\
&\frac{kC^\beta}{\sqrt{m_0}}\left|S^{\alpha+2}u_j'(t)\right|\sqrt{m_0}\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right| \leq \\
&\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2 - M(t, \|u_j(t)\|_W^\beta)\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 + \\
&\frac{k^2C^{2\beta}}{2m_0}\left|S^{\alpha+2}u_j'(t)\right|^2 + \frac{m_0}{2}\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 \leq \\
&\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2 - M(t, \|u_j(t)\|_W^\beta)\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 + \\
&\frac{k^2C^{2\beta}}{2m_0}\left|S^{\alpha+2}u_j'(t)\right|^2 + \frac{1}{2}M(t, \|u_j(t)\|_W^\beta)\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 = \\
&\left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2 - \frac{1}{2}M(t, \|u_j(t)\|_W^\beta)\left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 + \frac{k^2C^{2\beta}}{2m_0}\left|S^{\alpha+2}u_j'(t)\right|^2,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

onde C é a constante que limita a norma $\|u_j(t)\|_{D(S^{\alpha+2})} = |S^{\alpha+2}u_j(t)|$ definida em (3.13).

Multiplicando (3.20) por ϵ, obtemos:

$$\epsilon\rho_j'(t) \leq \epsilon \left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2 - \frac{\epsilon}{2}M(t, \|u_j(t)\|_W^\beta) \left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 + \frac{\epsilon k^2 C^{2\beta}}{2m_0} \left|S^{\alpha+2}u_j'(t)\right|^2, \tag{3.21}$$

$\forall t \in [0, \infty[$.

Derivando (3.18) com relação a t e substituindo no resultado (3.16) e (3.21), obtemos:

$$\begin{aligned}
&E_{j\epsilon}'(t) = E_j'(t) + \epsilon\rho_j'(t) \leq - \left|S^{\alpha+2}u_j'(t)\right|^2 - \left|S^{\alpha+2}u_j'(t)\right|^2 + \\
&\epsilon \left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2 - \frac{\epsilon}{2}M(t, \|u_j(t)\|_W^\beta) \left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 + \frac{\epsilon k^2 C^{2\beta}}{2m_0} \left|S^{\alpha+2}u_j'(t)\right|^2 = \\
&- \left|S^{\alpha+2}u_j'(t)\right|^2 - (1 - \frac{\epsilon k^2 C^{2\beta}}{2m_0}) \left|S^{\alpha+2}u_j'(t)\right|^2 + \\
&\epsilon \left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2 - \frac{\epsilon}{2}M(t, \|u_j(t)\|_W^\beta) \left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2,
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$\forall t \in [0, \infty[$.

Como $0 < \epsilon < \dfrac{2m_0}{k^2 C^{2\beta}}$ segue-se que $(1 - \dfrac{\epsilon k^2 C^{2\beta}}{2m_0}) > 0$. Assim, podemos desprezar o termo $-(1 - \dfrac{\epsilon k^2 C^{2\beta}}{2m_0}) \left|S^{\alpha+2}u_j'(t)\right|^2$ em (3.22). Agora de (1.47) resulta que $- \left|S^{\alpha+2}u_j'(t)\right|^2 \leq -\gamma_0 \left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2$. Portanto, com estes comentários segue-se de (3.22) que

$$E_{j\epsilon}'(t) \leq -(\gamma_0 - \epsilon) \left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2 - \frac{\epsilon}{2}M(t, \|u_j(t)\|_W^\beta) \left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2, \tag{3.23}$$

$\forall t \in [0, \infty[$.

Como $0 < \epsilon < \dfrac{2\gamma_0}{3}$ resulta que $-(\gamma_0 - \epsilon) \leq -\dfrac{\epsilon}{2}$. Sendo assim de (3.23) e (3.10), obtemos:

$$\begin{aligned}
&E_{j\epsilon}'(t) \leq -\frac{\epsilon}{2} \left|S^{\alpha+\frac{3}{2}}u_j'(t)\right|^2 - \frac{\epsilon}{2}M(t, \|u_j(t)\|_W^\beta) \left|S^{\alpha+2}u_j(t)\right|^2 = \\
&-\frac{\epsilon}{2}E_j(t),
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$\forall t \in [0, \infty[$.

Agora da segunda desigualdade de (3.19) resulta que

$$-\frac{\epsilon}{2}E_j(t) \leq -\frac{\epsilon}{3}E_{j\epsilon}(t), \ \forall t \in [0, \infty[. \tag{3.25}$$

Assim de (3.24) e (3.25) segue-se que

$$E'_{j\epsilon}(t) \leq -\frac{\epsilon}{3} E_{j\epsilon}(t), \ \forall t \in [0, \infty[$$

o que acarreta na desigualdade

$$E_{j\epsilon}(t) \leq E_{j\epsilon}(0) \exp(-\frac{\epsilon}{3}t), \ \forall t \geq 0, \ 0 < \epsilon < \epsilon_0. \tag{3.26}$$

Portanto de (3.19) e (3.26) concluimos o seguinte:

$$\frac{1}{2} E_j(t) \leq E_{j\epsilon}(t) \leq E_{j\epsilon}(0) \exp(-\frac{\epsilon}{3}t) \leq \frac{3}{2} E_j(0) \exp(-\frac{\epsilon}{3}t),$$

ou seja,

$$E_j(t) \leq 3E_j(0) \exp(-\frac{\epsilon}{3}t), \ \forall t \geq 0, \ 0 < \epsilon < \epsilon_0. \tag{3.27}$$

Para finalizar a prova do Teorema 3.1 vamos aplicar o lim inf em (3.27) com $j \to +\infty$ e $t > 0$ fixado para obtermos (3.1). De fato, com as estimativas (3.13) – (3.15) e repetindo os mesmos argumentos adotados no Teorema 2.2 (veja a partir de (2.108)) obtemos as convergências

$$\begin{gathered} S^{\alpha+2} u_j(t) \to S^{\alpha+2} u(t) \text{ fraco em } H, \ \forall t \in [0, \infty[\,, \\ S^{\alpha+\frac{3}{2}} u'_j(t) \to S^{\alpha+\frac{3}{2}} u'(t) \text{ fraco em } H, \ \forall t \in [0, \infty[\,, \\ M(t, \|u_j(t)\|_W^\beta) \to M(t, \|u(t)\|_W^\beta) \text{ em } [0, T]\,, \ 0 < T < \infty. \end{gathered} \tag{3.28}$$

Portanto, resulta destas três últimas convergências a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} &\left| S^{\alpha+\frac{3}{2}} u'(t) \right|^2 + M(t, \|u(t)\|_W^\beta) \left| S^{\alpha+2} u(t) \right|^2 \leq \\ &\lim_{j\to+\infty} \ \inf \left\{ \left| S^{\alpha+\frac{3}{2}} u'_j(t) \right|^2 + M(t, \|u_j(t)\|_W^\beta) \left| S^{\alpha+2} u_j(t) \right|^2 \right\}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Agora como consequência das convergências (3.4), (3.28) e dos dados iniciais de (P_j), obtemos:

$$\left| S^{\alpha+\frac{3}{2}} u_j^1 \right|^2 + M(t, \left\| u_j^0 \right\|_W^\beta) \left| S^{\alpha+2} u_j^0 \right|^2 \to \left| S^{\alpha+\frac{3}{2}} u^1 \right|^2 + M(t, \left\| u^0 \right\|_W^\beta) \left| S^{\alpha+2} u^0 \right|^2. \tag{3.30}$$

Finalmente aplicando o lim inf em (3.27) com $j \to +\infty$ ($t > 0$ fixado) e utilizando (3.29) e (3.30) obtemos a desigualdade (3.1) como pretendíamos. Sendo assim, acabamos de concluir a prova do Teorema 3.1.■

Observação 3.2 *É importante salientar que todos os resultados dos Capítulos 2 e 3 também continuam válidos se, ao invés de assumirmos a hipótese* $(H9)$, *assumirmos a hipótese*

$$V \text{ continuamente imerso em } W.$$

Observação 3.3 *Se considerarmos em* (P') *(ver Capítulo 2)* $B = I$, *então a solução local* u *estará na classe*

$$\left| \begin{array}{l} u \in L^\infty(0,T_1;D(A^{\alpha+\frac{3}{2}})) \\ u' \in L^\infty(0,T_1;D(A^{\alpha+1})) \cap L^2(0,T_1;D(A^{\alpha+\frac{3}{2}})) \\ u'' \in L^\infty(0,T_1;D(A^{\alpha})) \cap L^2(0,T_1;D(A^{\alpha+\frac{1}{2}})). \end{array} \right.$$

Observação 3.4 *Com as mesmas técnicas e resultados utilizados no Capítulo 2 também é possível resolver o problema*

$$(P''') \quad \left| \begin{array}{l} Bu''(t) + [M_1(\|u(t)\|^2) + M_2(\|u(t)\|_W^\beta)]Au(t) + \\ +(1 + k(t)\,\|u(t)\|^4_{D(S^{\alpha+2})} + k(t)\,\|u(t)\|^\beta_{D(S^{\alpha+2})})Au'(t) = 0 \\ u\,(0) = u^0,\ u'\,(0) = u^1, \end{array} \right.$$

onde aqui supõe-se as mesmas hipóteses do Problema (P') *exceto que* $M_1(\xi) = m_0 + m_1\xi$, *com* $m_0 > 0$, $m_1 \geq 0$, $\forall \xi \geq 0$ *e* $M_2(\xi) = m_2 + m_3\xi$, *com* $m_2 > 0$, $m_3 \geq 0$, $\forall \xi \geq 0$. *Aqui* $\|.\|$ *denota a norma de* V. *Este resultado continua válido se considerarmos* V *continuamente imerso em* W. *Em ambos os casos a solução* u *de* (P''') *está na mesma classe da solução* u *de* (P'). *Também é possível resolver o problema* (P''') *substituindo* $M_1(\|u(t)\|^2)$ *por* $M_1(|u(t)|^2)$, *onde* $|.|$ *denota a norma de* H. *Com esta observação, podemos encontrar a solução de problemas de Kirchhoff e de Carrier em espaços de Banach.*

Observação 3.5 *Seja* S *o operador definido em* (1.1). *Como* S^{-1} *não é necessariamente compacto, pode-se considerar problemas definidos em* $\Omega \times]0, \infty[$ *com* Ω *um aberto, não necessariamente limitado, de* $\mathbb{R}^n$.

Capítulo 4

Exemplos

Na dedução da equação de Kirchhoff aproxima-se

$$(1+u_x^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{por} \qquad (1+\frac{1}{2}u_x^2)$$

ver Medeiros, Límaco e Menezes [20]. Aproximando

$$(1+u_x^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{por} \qquad (1+\frac{3}{8}u_x^2+\frac{51}{896}u_x^6)$$

obtém-se a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)+\left\{1+\frac{3}{8}\int_0^L(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t))^2dx+\frac{51}{896}\int_0^L(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t))^6dx\right\}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right)=0,$$

$0<x<L$, $t>0$, a qual pode ser generalizada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)+\left\{m_0+m_1\int_0^L(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t))^2dx+m_2\int_0^L(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t))^6dx\right\}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right)=0, \quad (4.1)$$

$0<x<L$, $t>0$, com $m_0>0$, $m_1>0$ e $m_2>0$ constantes.

Uma generalização da equação de Carrier seria

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)+\left\{m_0+m_1\int_0^L(u(x,t))^2dx+m_2\int_0^L(u(x,t))^6dx\right\}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right)=0, \qquad (4.2)$$

$0<x<L$, $t>0$.

Utilizando a Observação 3.4 (desprezando a dissipação $(1+k(t)\|u(t)\|^4_{D(S^{\alpha+2})}+k(t)\|u(t)\|^{\beta}_{D(S^{\alpha+2})})Au'(t))$ é possível obtermos uma solução local do problema misto para a equação (4.1) considerando $B = I$, $W = W_0^{1,6}(0, L)$, $A = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ determinado pela terna $\{H_0^1(0, L),\ L^2(0, L),\ ((,))\}$ e $\beta = 6$. Neste caso temos a cadeia

$$D(A) = H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L) \hookrightarrow W = W_0^{1,6}(0, L) \hookrightarrow V = H_0^1(0, L),$$

onde o símbolo $\hookrightarrow$ denota imersão contínua.

Ainda com a Observação 3.4 (desprezando a dissipação $(1 + k(t)\left\|u(t)\right\|^4_{D(S^{\alpha+2})} + k(t)\left\|u(t)\right\|^{\beta}_{D(S^{\alpha+2})})Au'(t))$ é possível obtermos uma solução local do problema misto para a equação (4.2) considerando $B = I$, $W = L^6(0, L)$, $A = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ determinado pela terna $\{H_0^1(0, L),\ L^2(0, L),\ ((,))\}$ e $\beta = 6$. Note que neste caso temos a cadeia

$$D(A) = H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L) \hookrightarrow V = H_0^1(0, L) \hookrightarrow W = L^6(0, L),$$

onde o símbolo $\hookrightarrow$ denota imersão contínua.

Referências Bibliográficas

[1] Arosio, A. and Garavaldi, S., On the mildly Kirchhoff string, Math. Appl. Science, 14 (1991), 177-195.

[2] Arosio, A. and Spagnolo, S., Global solutions to the Cauchy problem for a nonlinear hyperbolic equation, Nonlinear Partial Differential Equations, H. Brezis and J. L. Lions eds., College de France Seminar, Vol. 6, Pitman, London, 1984, 1-26.

[3] Bernstein, S., Sur une classe d'équations fonctionelles aux dérivées partielles, Izv. Acad. Nauk SSSR, ser. Math, 4 (1940), 17-26.

[4] Brezis, H., Analyse Functionelle (théorie et applications), Masson, Paris (1983).

[5] Carrier, G. F., On the non-linear vibration problem of the elastic string, Quart. Appl. Math., 3 (1945), 157-165.

[6] Clark, H. R., Global classical solutions to the Cauchy problem for a nonlinear wave equation, Internat. J. Math. & Math. Sci., 21 (1998), 533-548.

[7] Cousin, A. T., Frota, C. L., Larkin, N. A., and Medeiros, L. A., On the abstract model of the Kirchhoff-Carrier equation, Computational and Appl. Analysis, 1 (1997), 389-404.

[8] Crippa, H. R., On local solutions of some mildly degenerate hyperbolic equation, Nonlinear Analysis TMA, 21 (1993), 565-574.

[9] Ebihara, Y., Medeiros, L. A. and Milla Miranda, M., Local solutions for a nonlinear degenerate hyperbolic equation, Nonlinear Analysis TMA, 10 (1986), 27-40.

[10] Ekeland, I., and Teman, R., Convex Analysis and Variational Problems, North-Holland, Amsterdam, 1976.

[11] Izaguirre, R., Fuentes, R. and Milla Miranda, M., Existence of local solutions of the Kirchhoff-Carrier equation in Banach spaces, Nonlinear Analysis 68 (2008), 3565-3580.

[12] Izaguirre, R., Fuentes, R. and Milla Miranda, M., Global and decay of solutions of a damped Kirchhoff-Carrier equation in Banach spaces, Matemática Contemporânea 32 (2008), 147-168.

[13] Kirchhoff, G., Verlesungen Über Mechanik, Tauber Leipzig (1883).

[14] Komornik, V.and Zuazua, E., A direct method for boundary stabilization of the wave equation, J. Math. Pure et Appl., 69 (1990), 33-54.

[15] Lions, J. L., On some equations in boundary value problems of mathematical physics, Contemporary Development in Continuous Mechanics and Partial Differential Equations, G. de la Penha and L. A Medeiros eds., North-Holland, London, 1978.

[16] Lions, J. L., Quelques Métodes de Résolution des Problèmes aux Limites Nonlinéares (Dunode, Paris, 1969).

[17] Matos, M. P., Mathematical analysis of the nonlinear model of the vibrations of a string, Nonlinear Analysis TMA, 17 (1991), 1125-1137.

[18] Medeiros, L. A. and Milla Miranda M., Solutions for the equation of nonlinear vibrations in Sobolev spaces of fractionary order, Mat. Applic. Comp., 6 (1987), 257-276.

[19] Medeiros, L. A. and Milla Miranda M., On a nonlinear wave equation with damping, Revista Matemática Univ. Complutense de Madrid, 3 (1990), 213-231.

[20] Medeiros, L. A.,Limaco, J. and Menezes, S., Mathematical vibrations of elastic string: mathematical aspects, part one, J. Comp. Analysis and Applications, 4 (2002) , 91-127.

[21] Medeiros, L. A. e Milla Miranda M., Espaços de Sobolev (iniciação aos problemas elípticos não homogêneo), IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (2000).

[22] Milla Miranda, M., Análise Espectral em Espaços de Hilbert, Textos de métodos Matemáticos, IM-UFRJ (1990).

[23] Nishihara, K., On a global solutions of some quasilinear hyperbolic equation, Tokyo, J. Math., 7(1984), 437-459.

[24] Pohozaev, S. I., On a class of quasilinear hyperbolic equations, Math. Sbornik, 95 (1975), 152-166.

[25] Pohozaev, S. I., The Kirchhoff quasilinear hyperbolic Equation, Nonlinear Partial Differential Equations, 21 (1985), 101-108.

[26] Souza, S. S. and Milla Miranda, M., Existence and decay of solutions of a damped Kirchhoff equation, Int. J. of Pure and Appl. Math., 32 (2006), 483-508.

[27] Yamada, Y., Some nonlinear degenerate wave equation, Nonlinear Analysis TMA, 11 (1987), 1155-1168.

[28] Yamazaki, T., On local solutions of some quasilinear degenerate hyperbolic equations, Funkcialaj EKVAcioj, 31 (1988), 439-457.

[29] Zeidler, E., Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, vol III, Springer-Verlag, New York, 1985.

[30] Zuazua, H., Stability and decay for a class of nonlinear hyperbolic problems, Asymptotic Analysis, 1, 2, 161-185 (1988).